00365

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMATICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

Matriz : 337106

SUBCATEGORIAS ESCINDIBLES Y COESCINDIBLES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

P R E S E N T A

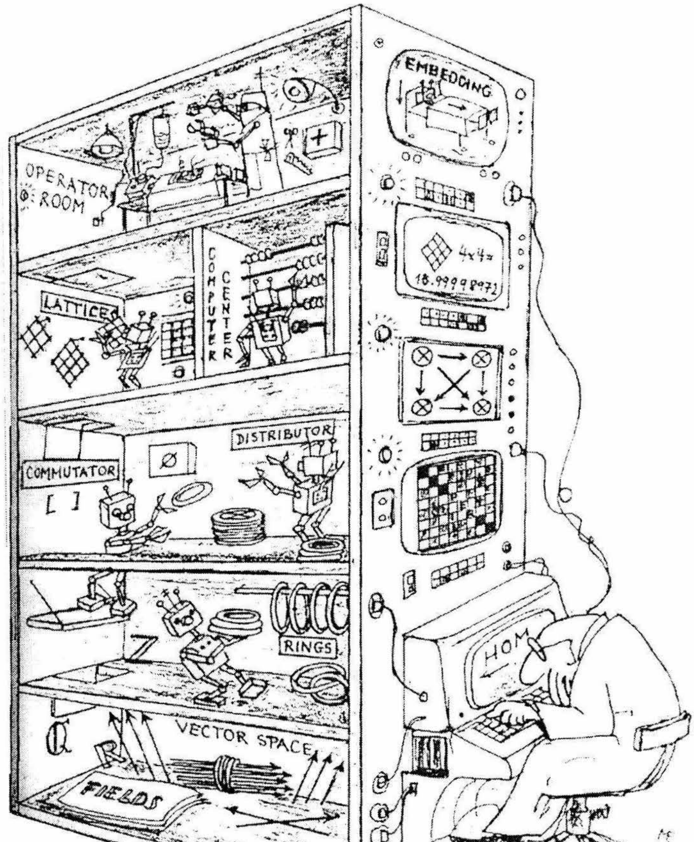
HUGO JUAREZ ANGUIANO

DIRECTOR DE TESIS: DR. FRANCISCO MARMOLEJO RIVAS

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

MEXICO, D. F. OCTUBRE, 2004

Subcategorías Escindibles y Coescindibles



Esta caricatura fue tomada de Category Theory at Work, editado por H. Herrlich y H.E. Porst, Heldermann Verlag Berlin, 1991.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi maestro y amigo el profesor Francisco Marmolejo Rivas por todo el apoyo que me brindó durante la realización de la tesis. También al profesor Angel Tamariz por fungir como mi tutor durante mi estancia en la Facultad de Ciencias.

A mis amigos Antonio Pelaez y Araceli García por todo el apoyo que me brindaron cuando ingresé al porsgrado y a mi compañero Elohim Sumano por pasarme el macro que utilicé en la tesis.

A los profesores Walter Tholen, Temple H. Fay, Gabrielle Castellini y María Manuel Clementino por todos sus comentarios y sugerencias.

A los profesores José Ríos, Carlos Prieto, Angel Tamariz, Francisco Raggi y Marcelo Aguilar por haber aceptado ser mis sinodales y por haber leido esta tesis, sus comentarios y sugerencias fueron de gran ayuda para el mejoramiento de la misma. Claro está que cualquier error que aún quedara es responsabilidad mía.

A CONACyT y DGEP por brindarme una beca mientras realicé mis estudios de maestría.

Todo mi cariño y amor para mis padres Felipe Juárez y María Concepción Anguiano, por enseñarme a alcanzar mis metas.

Hugo Juárez Anguiano
Octubre de 2004.

Contenido

Introduccion

Con el descubrimiento de la teoría de las categorías a mediados del siglo pasado, nacieron nuevas formas de hacer matemáticas. Algunas de ellas consistían en generalizar conceptos como estructuras algebraicas o topológicas, así nacen teorías como son las categorías abelianas, la teoría de topos y las categorías topológicas. Las categorías topológicas son inventadas por Horst Herrlich en los años 70's e inmediatamente llaman la atención de varios matemáticos alrededor del mundo, muchos de ellos hacen importantes aportaciones. También en esa década G. Preuß empieza el estudio de conexidad y disconexidad en categorías topológicas concretas, esto es, sobre categorías de conjuntos con estrutura ([**35**]). El Dr. Roberto Vázquez y la Dra. Graciela Salicrup también desarrollan las nociones de conexidad y disconexidad en categorías topológicas tanto para objetos como para morfismos ([**36**]) y cada vez se pone más atención en la generalización de conceptos topológicos a categorías arbitrarias. Un buen resumen sobre el desarrollo de conexidad y disconexidad puede ser consultado en [**32**]. Después de varias investigaciones, en los 80's se encuentra un ingrediente importante para este propósito, los operadores de cerradura en categorías. D. Dikranjan y E. Giuli en su artículo [**18**] dan una definición de operador de cerradura en categorías arbitrarias y lo utilizan para definir algunos conceptos como conexidad, separación y disconexidad. También en este artículo se observa que la teoría de operadores de cerradura en módulos está estrechamente relacionada con la teoría de prerradicales y se hacen investigaciones tanto en categorías de módulos como en categorías topologícas concretas ([**24**], [**20**], [**19**]). En los 90's se continua con estas investigacíones y se obtienes generalizaciones de resultados clásicos en compacidad, perfección, separación, conexidad y disconexidad, pero ahora en categorías arbitrarias ([**17**], [**14**], [**15**], [**16**], [**11**]). Brümmer, Giuli y Holgate en [**9**] generalizan a categorías arbitrarias el concepto de espacio escindible definido por Arhangel'skiĭ en los 80's para espacios topológicos ([**4**]). En este artículo ellos definen subcategorías escindibles y caracterizan (bajo pequeñas condiciones) estas subcategorías que son escindibles y productivas como las subcategorías cerradas bajo monofuentes. En esta tesis nosotros estudiamos tres conceptos que podrian considerarse como generalizaciones de conexidad y disconexidad. Empezamos estudiando las relaciones entre las nociones de subcategorías delta como fueron definidas en [**15**], subcategorías escindibles como están definidas en [**9**] y subcategorías de objetos discretos como recientemente fueron definidas por Clementino en [**13**]. También estudiamos el operador de cerradura escindible como fue definido en [**9**]. De igual manera se estudian las relaciones entre subcategorías nabla ([**15**]), subcategorías coescindibles como definimos aquí (definición 3.6.4) y subcategorías de objetos indiscretos ([**13**]). También estudiamos el operador de cerradura coescindible el cual fue definido en [**13**]. El primer capítulo consta de algunos conceptos preliminares, definimos sistemas de factorización para morfismos y para pozos ([**1**], [**22**], [**10**]), también definimos el concepto de puntos en una categoría ([**15**]) y por último damos el concepto de categoría topológica y vemos algunas de sus propiedades ([**1**], [**35**]). En el segundo capítulo definimos operadores de cerradura en categorías, estudiamos algunas de sus propiedades y damos algunos ejemplos ([**22**], [**10**]). En el tercer capítulo estudiamos las nociones de subcategorías delta y nabla en el sentido de Clementino-Tholen ([**15**]), subcategorías escindibles en el sentido de Brümmer, Giuli y Holgate ([**9**]) y de subcategorías coescindibles como nosotros definimos aquí (definición 3.6.4), y por último subcategorías de objetos dicretos e indiscretos en el sentido de Clementino ([**13**]). Estudiamos las relaciones y diferencias entre subcategorías delta, subcategorías escindibles y subcategorías de objetos discretos. Se prueba que bajo pequeñas restricciones las subcategorías que son escindibles y productivas coinciden con las subcategorías delta ([**9**]), también se da un resultado que nos dice cuando una subcategoría escindible es una subcategoría de objetos discretos ([**13**] . Al final se dan ejemplos que muestran que las tres nociones son diferentes. Por otro lado, se estudia las relaciones entre subcategorías nabla, subcategorías coescindibles y subcategorías de objetos indiscretos. Se prueba que en muchas categorías bien conocidas las subcategorías coescindibles son las categorías cohereditarias (proposición 3.6.11). Definimos la noción de f-pozo y probamos que una subcategoría coescindible y cerrada bajo f-pozos es una subcategoría de objetos indiscretos (proposición 3.8.5), además se da una condición de cuando una subcategoría nabla es una subcategoría de objetos indiscretos ([**13**]). Al final se dan ejemplos que muestran que las tres nociones son diferentes. También estudiamos los operadores de cerradura escindibles y su relación con los operadores de cerradura regulares y los operadores de cerradura coescindibles y su relación con los operadores de cerradura corregulares (proposición 3.7.12). Nuestros principales ejemplos son en categorías de módulos y categorías topológicas. Conceptos de categorías no dados en la tesis pueden ser consultados en [**1**], [**8**] y [**33**], conceptos de topología general pueden ser consultados en [**23**], conceptos de módulos y prerradicales pueden ser consultados en [**3**] y [**7**].

FALTA

PAGINA

No. 4

CAPÍTULO

1 Preliminares

En este capítulo revisaremos varios conceptos como son sistemas de factorización para pozos y morfismos, puntos y categorías topológicas, los cuales son necesarios para la teoría. La primera sección fue obtenida de **[22]**, **[10]** y **[15]**, la segunda sección se obtubo de **[1]**, **[8]** y **[35]**.

1. Subobjetos, Sistemas de Factorización y Puntos

Comencemos con una clase de monomorfismos $\mathcal{M}$ en una categoría $\mathcal{C}$. Para cada $\mathsf{X} \in \mathcal{C}$, sea $\mathcal{M}/\mathsf{X}$ la clase de todos los $\mathcal{M}$-morfismos con codominio X, para $\mathsf{m}, \mathsf{n} \in \mathcal{M}/\mathsf{X}$ definimos la relación $\mathsf{m} \leq \mathsf{n}$ si y sólo si existe $\mathsf{j} \in Mor(\mathcal{C})$ tal que $\mathsf{n} \circ \mathsf{j} = \mathsf{m}$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathsf{M} \arrow[rr, "\mathsf{j}"] \arrow[dr, "\mathsf{m}"'] & & \mathsf{N} \arrow[dl, "\mathsf{n}"] \\ & \mathsf{X} & \end{tikzcd}$$

Es claro que "$\leq$" es una relación reflexiva y transitiva. De esta forma $\mathcal{M}/\mathsf{X}$ es una clase preordenada. Como n es mono, j está determinado de manera única. Cuando tengamos $\mathsf{m} \leq \mathsf{n}$ y $\mathsf{n} \leq \mathsf{m}$ escribiremos $\mathsf{m} \cong \mathsf{n}$ y así obtenemos lo siguiente.

DEFINICIÓN 1.1. $\mathsf{Sub}(\mathsf{X}) = (\mathcal{M}/\mathsf{X})/\cong$ *se llamará la clase de subobjetos de* X *con respecto a* $\mathcal{M}$.

OBSERVACIÓN 1.2. De aquí en adelante impondremos algunas condiciones sobre $\mathcal{M}$.

M1) $\mathcal{M}$ *es cerrada bajo composición a la derecha con isomorfismos;*
M2) $\mathcal{M}$ *contiene todos los morfismos identidad de* $\mathcal{C}$.

DEFINICIÓN 1.3. *Diremos que* $\mathcal{C}$ *es bien* $\mathcal{M}$*-potenciada si para cada* $X \in \mathcal{C}$, $\mathsf{Sub}(X)$ *tiene un conjunto (pequeño) de representantes.*

EJEMPLOS 1.4.

1. En la categoría ***Con*** de conjuntos podemos tomar a $\mathcal{M}$ como el conjunto de funciones inyectivas. Toda función inyectiva $m : M \to X$ es isomorfa exactamente a una inclusión $m(M) \hookrightarrow X$, es decir, $\mathsf{Sub}(X) = 2^X$ y así ***Con*** es bien $\mathcal{M}$-potenciada. Claramente satisface M1 y M2.
2. En la categoría ***Top*** tomemos a $\mathcal{M}$ como el conjunto de encajes, esto es, funciones inyectivas que son homeomorfismos sobre su imagen. Por argumentos similares a los del ejemplo anterior tenemos que $\mathcal{M}$ satisface M1 y M2. además ***Top*** es bien $\mathcal{M}$-potenciada.
3. En la categoría ***Grp*** de grupos tomemos a $\mathcal{M}$ como el conjunto de homomorfismos inyectivos, de igual forma $\mathcal{M}$ satisface todas las propiedades requeridas.

Ahora construyamos la imagen inversa de un subobjeto.

DEFINICIÓN 1.5. *Sean* $\mathcal{C}$ *una categoría y* $\mathcal{M}$ *como antes. Diremos que* $\mathcal{C}$ *tiene* $\mathcal{M}$*-productos fibrados si y sólo si para cada* $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ *y* $n \in \mathsf{Sub}(Y)$ *existe un producto fibrado*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "m"'] & N \arrow[d, "n"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

con $m \in \mathsf{Sub}(X)$, *m se llama* la imagen inversa de n bajo *f y es denotado por* $f^{-1}(n) : f^{-1}(N) \to X$.

De aquí obtenemos.

PROPOSICIÓN 1.6. $f^{-1}(-) : \mathsf{Sub}(Y) \to \mathsf{Sub}(X)$ *es una función que preserva el orden, esto es, si* $k \leq n$ *en* $\mathsf{Sub}(Y)$ *entonces* $f^{-1}(k) \leq f^{-1}(n)$ *en* $\mathsf{Sub}(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Del siguiente diagrama obtenemos lo deseado

$$\begin{tikzcd}
& f^{-1}(N) \arrow[rr] \arrow[ddl, "f^{-1}(n)"'] & & N \arrow[ddl, "n"] \\
f^{-1}(K) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[d, "f^{-1}(k)"'] & & K \arrow[ur] \arrow[d, "k"] & \\
X \arrow[rr, "f"'] & & Y &
\end{tikzcd}$$

✠

DEFINICIÓN 1.7. *Supongamos que* $\mathcal{C}$ *tiene* $\mathcal{M}$*-productos fibrados y para cada morfismo* $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ *la función* $f^{-1}(-) : \mathsf{Sub}(Y) \to \mathsf{Sub}(X)$ *tiene adjunto izquierdo* $f(-) : \mathsf{Sub}(X) \to \mathsf{Sub}(Y)$ *(las clases* $\mathsf{Sub}(Y)$ *y* $\mathsf{Sub}(X)$ *son consideradas como categorías). Para* $m : M \to X$ *en* $\mathsf{Sub}(X)$ *llamaremos a* $f(m) : f(M) \to Y$ la imagen de m bajo f *y es determinada de manera única (salvo isomorfismos) por la propiedad*

Para cada $n \in \mathsf{Sub}(Y)$ *y* $m \in \mathsf{Sub}(X)$, $m \leq f^{-1}(n)$ *si y sólo si* $f(m) \leq n$.

OBSERVACIÓN 1.8. De lo anterior y de las propiedades de par adjunto tenemos lo siguiente:

1. Si $m \leq k$ entonces $f(m) \leq f(k)$;
2. $m \leq f^{-1}(f(m))$ y $f(f^{-1}(n)) \leq n$;
3. $f(\bigvee_{i\in I} m_i) \cong \bigvee_{i\in I} f(m_i)$;
4. $f^{-1}(\bigwedge_{i\in I} n_i) \cong \bigwedge_{i\in I} f^{-1}(n_i)$.

Con lo anterior podemos obtener lo siguiente.

DEFINICIÓN 1.9. *Sea* $\mathcal{M}$ *una clase de monomorfismos en* $\mathcal{C}$ *que satisface M1 y M2 de la observación 1.1.2. Una* $\mathcal{M}$*-factorización derecha para* $\mathcal{C}$ *es una factorización para morfismos que satisface lo siguiente:*

1. $f = m \circ e$ *con* $m \in \mathsf{Sub}(Y)$*;*

2. *(Propiedad de diagonalización torcida.) Siempre que tengamos un diagrama conmutativo (considerando sólo las flechas sólidas)*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "e"'] & N \arrow[dd, "n"] \\
M \arrow[ur, dashed, "w"'] \arrow[d, "m"'] & \\
Y \arrow[r, "v"'] & Z
\end{tikzcd}$$

con $n \in \mathrm{Sub}(Z)$*, extiste un único* $w : M \to N$ *con* $n \circ w = v \circ m$ *y* $w \circ e = u$.

OBSERVACIÓN 1.10. *La $\mathcal{M}$-factorización derecha, si existe, es única.*

Ahora revisemos un resultado que nos da condiciones para la existencia de éste tipo de factorizaciones.

PROPOSICIÓN 1.11. *Supongamos que $\mathcal{C}$ tiene $\mathcal{M}$-productos fibrados y que para cada $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ la función $f^{-1}(-)$ tiene adjunto izquierdo $f(-)$. Entonces $\mathcal{C}$ tiene una $\mathcal{M}$-factorización derecha.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $m = f(1_X) : f(X) \to Y$, como $1_X \leq f^{-1}(m)$ obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "1_X"'] & f^{-1}(M) \arrow[r, "j"] \arrow[dl, "f^{-1}(m)"] & M \arrow[d, "m"] \\
X \arrow[rr, "f"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

definamos $e = j \circ i$. Como $f^{-1}(v^{-1}(n)) = u^{-1}(n^{-1}(n)) = 1_X \geq 1_X$ tenemos por adjunción que $v^{-1}(n) \geq f(1_X) = m$, esto nos da el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "h"] \arrow[d, "m"'] & v^{-1}(N) \arrow[r, "l"] \arrow[dl, "v^{-1}(n)"] & N \arrow[d] \\
X \arrow[rr, "v"'] & & Z
\end{tikzcd}$$

Tomemos $w = l \circ h$. Por definición $n \circ w = v \circ m$ y como n es mono, w está determinado de manera única, $w \circ e = u$ se sigue de $n \circ w \circ e = n \circ u$. ✠

Ahora comencemos de manera inversa, supongamos que todo morfismo en $\mathcal{C}$ tiene una $\mathcal{M}$-factorización derecha. Para $f : X \to Y$ y $m \in \mathsf{Sub}(X)$ definimos $f(m) : f(M) \to Y$ como la $\mathcal{M}$-parte de la $\mathcal{M}$-factorización derecha de la composición $f \circ m$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "m"'] & f(M) \arrow[d, "f(m)"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

De la propiedad (2) de la definición anterior tenemos que $f(-) : \mathsf{Sub}(X) \to \mathsf{Sub}(Y)$ preserva el orden. Como es de esperarse obtendremos que $f(-)$ es adjunto izquierdo a $f^{-1}(-)$.

PROPOSICIÓN 1.12. *Son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{C}$ tiene $\mathcal{M}$-productos fibrados y todo morfismo tiene una $\mathcal{M}$-factorización derecha;*

(ii) *$\mathcal{C}$ tiene $\mathcal{M}$-productos fibrados y $f^{-1}(-)$ tiene un adjunto izquierdo para cada morfismo f;*

(iii) *Todo morfismo tiene una $\mathcal{M}$-factorización derecha y $f(-)$ tiene un adjunto derecho para cada morfismo f.*

DEMOSTRACIÓN. i) $\Rightarrow$ ii) y i) $\Rightarrow$ iii) Para $f(-)$ como se definió hay que probar que $f(-) \dashv f^{-1}(-)$. En efecto, $m \leq f^{-1}(f(m))$ se sigue de la propiedad universal del producto fibrado y $f(f^{-1}(n)) \leq n$ se sigue del siguiente diagrama y de la propiedad de diagonalización torcida

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(N) \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[dd] \\ f(f^{-1}(N)) \arrow[ur, dashed] \arrow[d] & \\ Y \arrow[r, "1_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

ii) $\Rightarrow$ i) Se sigue de la proposición anterior.

iii) $\Rightarrow$ i) Denotemos por $f^{-1}(-)$ el adjunto derecho de $f(-)$. Para cada $n \in \mathsf{Sub}(Y)$

tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{f}^{-1}(\mathsf{N}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{f}^{-1}(\mathsf{n})"'] & \mathsf{f}(\mathsf{f}^{-1}(\mathsf{N})) \arrow[r] \arrow[dr, "\mathsf{f}(\mathsf{f}^{-1}(\mathsf{n}))"'] & \mathsf{N} \arrow[d, "\mathsf{n}"] \\
\mathsf{X} \arrow[rr, "\mathsf{f}"] & & \mathsf{Y}
\end{tikzcd}$$

Hay que probar que el rectángulo es un producto fibrado. Sean $\mathsf{g} : \mathsf{Z} \to \mathsf{X}$ y $\mathsf{h} : \mathsf{Z} \to \mathsf{N}$ con $\mathsf{f} \circ \mathsf{g} = \mathsf{n} \circ \mathsf{h}$ y formemos la $\mathcal{M}$-factorización derecha $\mathsf{g} = \mathsf{k} \circ \mathsf{e}$ con $\mathsf{k} \in \mathsf{Sub}(\mathsf{X})$. La propiedad de diagonalización torcida da un morfismo w tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Z} \arrow[r, "\mathsf{h}"] \arrow[d, "\mathsf{e}"'] & \mathsf{N} \arrow[dd, "\mathsf{n}"] \\
\mathsf{K} \arrow[ur, "w"] \arrow[d, "\mathsf{k}"'] & \\
\mathsf{X} \arrow[r, "\mathsf{f}"'] & \mathsf{Y}
\end{tikzcd}$$

Por la misma propiedad uno tiene $\mathsf{f}(\mathsf{k}) \leq \mathsf{n}$, así $\mathsf{k} \leq \mathsf{f}^{-1}(\mathsf{n})$ por adjunción. Por lo tanto existe $\mathsf{j} : \mathsf{K} \to \mathsf{f}^{-1}(\mathsf{N})$ con $\mathsf{f}^{-1}(\mathsf{n}) \circ \mathsf{j} = \mathsf{k}$, de esta forma si ponemos $\mathsf{t} = \mathsf{j} \circ \mathsf{e} : \mathsf{Z} \to \mathsf{f}^{-1}(\mathsf{N})$ uno tiene $\mathsf{f}^{-1}(\mathsf{n}) \circ \mathsf{t} = \mathsf{k} \circ \mathsf{e} = \mathsf{g}$. Como n y $\mathsf{f}^{-1}(\mathsf{n})$ son monos, t está determinado de manera única y satisface $\mathsf{f}' \circ \mathsf{t} = \mathsf{h}$ con $\mathsf{f}' = \mathsf{f}(\mathsf{f}^{-1}(\mathsf{n})) \circ \mathsf{f}^{-1}(\mathsf{n})$. ✠

DEFINICIÓN 1.13. *Diremos que $\mathcal{C}$ es finitamente $\mathcal{M}$-completa si satisface las condiciones de la proposición anterior.*

EJEMPLOS 1.14.

1. ***Con*** es finitamente $\mathcal{M}$-completa con la factorización usual a través de la imagen de una función y $\mathcal{M}$ la clase de inyecciones.
2. ***Top*** es finitamente $\mathcal{M}$-completa tomando como factorización la cerradura de la imagen de una función y $\mathcal{M}$ la clase de encajes cerrados.
3. De la misma manera que en conjuntos, ***Grp*** es finitamente $\mathcal{M}$-completa con $\mathcal{M}$ la clase de monomorfismos.

Para $\mathsf{m} \in \mathsf{Sub}(\mathsf{N})$ y $\mathsf{n} \in \mathsf{Sub}(\mathsf{X})$, la composición $\mathsf{n} \circ \mathsf{m} : \mathsf{M} \to \mathsf{X}$ debería ser un subobjeto, pero cerradura bajo composición es independiente de las propiedades de estabilidad de $\mathcal{M}$, veamos el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.15. En ***Grp*** tomemos a $\mathcal{M} = \{f : G \to H \mid f \text{ es mono y } f(G) \trianglelefteq H\}$. Tenemos que ***Grp*** es finitamente $\mathcal{M}$-completa pero $N \trianglelefteq H$ y $H \trianglelefteq G$ no implica $N \trianglelefteq G$.

Es por esto que debemos agregar una restricción más a nuestra clase de monomorfismos. La siguiente proposición nos dirá que así ya obtendremos un *sistema de factorización ortogonal.*

PROPOSICIÓN 1.16. *Son equivalentes:*

(i) *Todo morfismo tiene una $\mathcal{M}$-factorización derecha y $\mathcal{M}$ es cerrada bajo composición;*

(ii) *Existe una clase $\mathcal{E}$ de morfismos en $\mathcal{C}$ tal que la pareja $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ es un sistema de factorización ortogonal, esto es, que satisface lo siguiente:*
   1. *Todo morfismo f en $\mathcal{C}$ tiene una factorización $f = m \circ e$ con $m \in \mathcal{M}$ y $e \in \mathcal{E}$;*
   2. *Para cada diagrama conmutativo (considerando sólo las flechas sólidas)*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "e"'] & M \arrow[d, "m"] \\ Y \arrow[r, "v"'] \arrow[ur, dashed, "w"] & Z \end{tikzcd}$$

con $e \in \mathcal{E}$ y $m \in \mathcal{M}$ existe un único $w : Y \to M$ con $w \circ e = u$ y $m \circ w = v$.

DEMOSTRACIÓN. i) $\Rightarrow$ ii) Escribimos $e \perp m$ y diremos que e es ortogonal a m si para cada diagrama conmutativo (considerando sólo las flechas sólidas)

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d, "e"'] & \cdot \arrow[d, "m"] \\ \cdot \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "w"] & \cdot \end{tikzcd}$$

existe un único w que hace conmutativo el diagrama completo. Sea $\mathcal{E}$ la clase $\mathcal{M}^{\perp} = \{e \in Mor\mathcal{C} : \text{ para cada } m \in \mathcal{M},\ e \perp m\}$. Es suficiente probar entonces que cuando formamos $f = m \circ e : X \to Y$ uno tiene $e \in \mathcal{E}$. Para esto tomemos la $\mathcal{M}$-factorización derecha de $e = n \circ d : X \to M$ y apliquemos la propiedad de diagonalización torcida de la primera factorización a

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "d"] \arrow[d, "e"'] & N \arrow[dd, "m \circ n"] \\ M \arrow[d, "m"'] & \\ Y \arrow[r, "1_Y"'] & Y \end{tikzcd}$$

Observando que $m \circ n \in \mathcal{M}$ obtenemos un morfismo $t : M \to N$ con $m \circ n \circ t = m$ y esto implica que $n \circ t = 1_M$ (pues m es mono). Ahora n mono y retracción implica que n es iso, así la propiedad de diagonalización torcida de la segunda factorización nos da que $e \in \mathcal{M}^{\perp} = \mathcal{E}$.

ii) $\Rightarrow$ i) Primero debemos probar que $\mathcal{M}$ coincide con la clase $\mathcal{E}_{\perp} = \{m \in \mathrm{Mor}\mathcal{C}$: para cada $e \in \mathcal{E}$, $e \perp m\}$. La propiedad (2) de (ii) nos da $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}_{\perp}$. Para $m \in \mathcal{E}_{\perp}$ consideremos una factorización $m = k \circ c$ con $k \in \mathcal{M}$ y $c \in \mathcal{E}$. Consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "1_M"] \arrow[d, "c"'] & M \arrow[d, "m"] \\ K \arrow[r, "k"'] & X \end{tikzcd}$$

como $m \in \mathcal{E}_{\perp}$ existe $w : K \to M$ con $w \circ c = 1_M$ y $m \circ w = k$, el que k sea mono implica que w es mono, esto implica que c es un iso (pues w es mono y retracción). Así obtenemos que $m \cong k \in \mathrm{Sub}(X)$. Es fácil ver que $\mathcal{E}_{\perp}$ es cerrada bajo composición. Por lo tanto cada morfismo f tiene una factorización $f = m \circ e$ con $m \in \mathcal{M}$ y cada vez que tengamos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "e"'] & N \arrow[dd, "n"] \\ M \arrow[d, "m"'] & \\ Y \arrow[r, "v"'] & Z \end{tikzcd}$$

Donde $n \in \mathsf{Sub}(Z)$, como $\mathcal{M} = \mathcal{E}_\perp$ existe un único morfismo w que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "e"'] & N \arrow[d, "n"] \\ M \arrow[r, "v \circ m"'] \arrow[ur, dashed, "w"] & Z \end{tikzcd}$$

Así que esto nos dice que $\mathcal{C}$ tiene una $\mathcal{M}$-factorización derecha. ✠

Aunque ya tenemos una buena noción de sistema de factorización, necesitamos un paso más, pues es importante la estructura de retícula sobre cada clase de subobjetos de un objeto dado. Si $\mathcal{C}$ tiene $\mathcal{M}$-productos fibrados y $\mathcal{M}$ es cerrada bajo composición, para cada $X \in \mathcal{C}$, la clase $\mathsf{Sub}(X)$ tiene ínfimos binarios, uno obtiene el ínfimo $m \wedge n : M \wedge N \to X$ de dos subobjetos $m, n \in \mathsf{Sub}(X)$ como la diagonal del siguiente producto fibrado

$$\begin{tikzcd} M \wedge N \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[d, "n"] \\ M \arrow[r, "m"'] & X \end{tikzcd}$$

De hecho, tenemos una definición más general.

Definición 1.17. *Diremos que $\mathcal{C}$ tiene $\mathcal{M}$-intersecciones si para cada $X \in \mathcal{C}$ y cada familia $(m_i)_{i\in I} \subseteq \mathsf{Sub}(X)$ (I podría ser una clase propia o vacía) existe un diagrama de producto fibrado múltiple*

$$\begin{tikzcd} & M_i \arrow[dr, "m_i"] & \\ M \arrow[ur, "j_i"] \arrow[rr, "m"'] & & X \end{tikzcd}$$

con $m \in \mathsf{Sub}(X)$, esto es, $m_i \circ j_i = m$ para cada $i \in I$ y siempre que uno tenga un morfismo $g : Z \to X$ y una familia $h_i : Z \to M_i$ con $m_i \circ h_i = g$ para cada $i \in I$ entonces existe un único $t : Z \to M$ con $m \circ t = g$ y $j_i \circ t = h_i$ para cada $i \in I$.

Uno fácilmente puede verificar que m en la definición anterior es el ínfimo de $(m_i)_i \in I$ en $\mathsf{Sub}(X)$, por lo tanto uno escribe

$$m \cong \bigwedge_{i\in I} m_i : \bigwedge_{i\in I} M_i \to X.$$

Pero también llamamos a m la $\mathcal{M}$-intersección de $(m_i)_{i\in I}$ para enfatizar su caracterización categórica como un producto fibrado múltiple. La hipótesis de que $\mathcal{M}$ sea una clase de monomorfismos no es requerida si la categoría tiene $\mathcal{M}$-intersecciones, pues en este caso todo elemento en $\mathcal{M}$ es necesariamente monomorfismo. Ahora veamos una propiedad básica en presencia de la definición previa.

PROPOSICIÓN 1.18. *Si $\mathcal{C}$ tiene $\mathcal{M}$-intersecciones, entonces para cada $X \in \mathcal{C}$ la clase $\mathrm{Sub}(X)$ tiene estructura de "retícula grande", es decir, en Sub(X) existen ínfimos y supremos arbitrarios (también para subfamilias indicadas por una clase propia).*

DEMOSTRACIÓN. Como es usual, uno costruye el supremo de $(m_i)_{i \in I}$ en $\mathrm{Sub}(X)$ como el ínfimo todas las cotas superiores de $(m_i)_{i \in I}$. ✠

Si $\mathcal{C}$ tiene también $\mathcal{M}$-productos fibrados, es fácil ver que el supremo $m \in \mathrm{Sub}(X)$ de $(m_i)_{i \in I}$ tiene la siguiente propiedad categórica: existen morfismos $(j_i)_{i \in I}$ tales que

1. $m \circ j_i = m_i$ para cada $i \in I$;
2. Si para cada $i \in I$ tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "j_i"'] & N \arrow[dd, "n"] \\ M \arrow[d, "m"'] & \\ X \arrow[r, "v"'] & Z \end{tikzcd}$$

donde $n \in \mathcal{M}$, existe un único $w : M \to N$ con $n \circ w = v \circ m$ y $w \circ j_i = u_i$.

Esto nos lleva a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.19. *Un subobjeto $m \in \mathrm{Sub}(X)$ es llamado la $\mathcal{M}$-unión de $(m_i)_{i \in I} \subseteq \mathrm{Sub}(X)$ si satisface la propiedad categórica antes mencionada.*

Si en el diagrama anterior ponemos $v = 1_X$ entonces uno observa que $\mathcal{M}$-uniones son supremos en $\mathrm{Sub}(X)$, por lo tanto uno escribe

$$m \cong \bigvee_{i \in I} m_i : \bigvee_{i \in I} M_i \to X.$$

De esto y la proposición anterior obtenemos.

COROLARIO 1.20. *Si $\mathcal{C}$ tiene $\mathcal{M}$-productos fibrados y $\mathcal{M}$-intersecciones, entonces $\mathcal{C}$ tiene $\mathcal{M}$-uniones.*

Ahora estamos listos para dar una factorización para pozos.

DEFINICIÓN 1.21. *Sea $(f_i : X_i \to Y)_{i\in I}$ un pozo en $\mathcal{C}$. Una $\mathcal{M}$-factorización derecha para $(f_i)_{i\in I}$ consiste de morfismos $m \in \mathcal{M}$ y $(e_i : X_i \to M)_{i\in I}$ en $\mathcal{C}$ tal que*

1. $f_i = m \circ e_i$ *para cada* $i \in I$ *con* $m : M \to Y$*;*
2. *si para cada* $i \in I$ *tenemos un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "u_i"] \arrow[d, "e_i"'] & N \arrow[dd, "n"] \\ M \arrow[d, "m"'] & \\ Y \arrow[r, "v"'] & Z \end{tikzcd}$$

en $\mathcal{C}$ con $n \in \mathcal{M}$, existe un único $w : M \to N$ con $n \circ w = v \circ m$ y $w \circ e_i = u_i$.

A la propiedad (2) le llamaremos la propiedad de diagonalización simultanea torcida.

Veamos cuando una categoría tiene una factorización de este tipo.

PROPOSICIÓN 1.22. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{C}$ tiene $\mathcal{M}$-productos fibrados y $\mathcal{M}$-intersecciones;*
2. *$\mathcal{C}$ tiene $\mathcal{M}$-uniones y todo morfismo en $\mathcal{C}$ tiene una $\mathcal{M}$-factorización derecha;*
3. *Todo pozo en $\mathcal{C}$ tiene una $\mathcal{M}$-factorización derecha.*

DEMOSTRACIÓN.

(1) $\Rightarrow$ (2) se sigue del corolario anterior y del hecho que $f^{-1}(-) : \mathrm{Sub}(Y) \to \mathrm{Sub}(X)$ preserva ínfimos para cada $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Dado un pozo $(f_i : X_i \to Y)_{i\in I}$, primero formamos la $\mathcal{M}$-factorización derecha de cada $f_i = m_i \circ d_i$ y luego consideramos la $\mathcal{M}$-unión $m : M \to Y$ de $(m_i)_{i\in I}$. Usando las propiedades respectivas se prueba que esto nos da una $\mathcal{M}$-factorización derecha para pozos.

(3) $\Rightarrow$ (1) Para $f : X \to Y$ y $n : N \to Y$ en $\mathcal{M}$ hay que probar la existencia de un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "m"'] & N \arrow[d, "n"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

con $m \in \mathcal{M}$. Sea $(g_i : Z_i \to X)_{i\in I}$ la familia de todos los morfismos g_i tal que existe un morfismo $h_i : Z_i \to N$ con $f \circ g_i = n \circ h_i$. Factorizando

(g_i) y aplicando la propiedad de diagonalización simultanea obtenemos morfismos $m \in \mathcal{M}$ y f' con $f \circ m = n \circ f'$ y morfismos $e_i : Z_i \to M$ con $m \circ e_i = g_i$ para cada $i \in I$. Los morfismos anteriores garantizan la propiedad universal del producto fibrado. La demostración de que existen $\mathcal{M}$-intersecciones es similar.

✠

DEFINICIÓN 1.23. *$\mathcal{C}$ es $\mathcal{M}$-completa si satisface las propiedades de la proposición anterior.*

Veamos unas definiciones las cuales usaremos frecuentemente.

DEFINICIÓN 1.24. *Sea $(p_i : Y \to Y_i)_{i \in I}$ una fuente en $\mathcal{C}$.*

i) *$(p_i)_{i \in I}$ es llamada monofuente si para cada $u, v : X \rightrightarrows Y$ en $\mathcal{C}$, $p_i \circ u = p_i \circ v$ para cada $i \in I$ siempre implica que $u = v$. Una subcategoría $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}$ es cerrada bajo monofuentes si $Y_i \in \mathcal{A}$ para cada $i \in I$ uno tiene $Y \in \mathcal{A}$. La noción dual es epipozo;*

ii) *$(p_i)_{i \in I}$ es llamada monofuente extremal, si es monofuente y cada vez que se factorice como $g_i \circ e = p_i$ con e un epimorfismo, entonces e tiene que ser un isomorfismo. Si la monofuente consta de un solo elemento entonces se le llamará monomorfismo extremal. La noción dual es epipozo extremal y epimorfismo extremal.*

En seguida daremos otra definición de factorización para pozos, la cual generaliza a la factorización ortogonal para morfismos. En esta parte $\mathcal{M}$ denotará una colección arbitraria de morfismos, sin embargo veremos que cuando $\mathcal{M}$ forma parte de un sistema de factorización para pozos, es necesariamente una clase de monomorfismos.

DEFINICIÓN 1.25. *Sean $\mathbb{E}$ una colección de pozos y $\mathcal{M}$ una clase de morfismos en una categoría $\mathcal{C}$. Diremos que $(\mathbb{E}, \mathcal{M})$ es un sistema de factorización para pozos en $\mathcal{C}$ o que $\mathcal{C}$ es una $(\mathbb{E}, \mathcal{M})$-categoría si y sólo si:*

i) *$\mathbb{E}$ y $\mathcal{M}$ son cerrados bajo isomorfismos, en particular, para $\mathbb{E}$ esto significa que si $(e_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ es un pozo en $\mathbb{E}$ y $h : Y \to W$ es un isomorfismo, entonces $(h \circ e_i)_{i \in I}$ pertenece a $\mathbb{E}$;*

ii) *Para cada pozo $(h_i : X_i \to X)_{i \in I}$ existe $(e_i)_{i \in I} \in \mathbb{E}$ y $m \in \mathcal{M}$ tales que para cada $i \in I$ $h_i = m \circ e_i$;*

iii) *La factorización anterior satisface la propiedad de diagonalización simultanea, esto es, si $s : Y \to Z$ y $m : M \to Z$ son morfismos con $m \in \mathcal{M}$, y $(e_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ y $(r_i : X_i \to M)_{i \in I}$ son pozos con $(e_i)_{i \in I} \in \mathbb{E}$ de tal forma* *que para cada* $i \in I$ $m \circ r_i = s \circ e_i$, *entonces existe un único morfismo* $d : Y \to M$ *tal que para cada* $i \in I$ *el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "r_i"] \arrow[d, "e_i"'] & M \arrow[d, "m"] \\ Y \arrow[r, "s"'] \arrow[ur, dashed, "d"] & Z \end{tikzcd}$$

Claramente si $\mathcal{C}$ es una $(\mathbb{E}, \mathcal{M})$-categoría entonces $\mathcal{C}$ tiene una factorización ortogonal $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ con $\mathcal{E}$ la clase de todos los pozos singulares en $\mathbb{E}$.

PROPOSICIÓN 1.26. *Para* $\mathcal{M}$ *una clase de monomorfismos que satisface M1 y M2 de la observación 1.1.2, son equivalentes:*

1. $\mathcal{C}$ *tiene una* $\mathcal{M}$*-factorización derecha para pozos y* $\mathcal{M}$ *es cerrada bajo composición;*
2. *Existe una colección* $\mathbb{E}$ *de pozos en* $\mathcal{C}$ *tal que* $\mathcal{C}$ *es una* $(\mathbb{E}, \mathcal{M})$*-categoría.*

DEMOSTRACIÓN. Similar a la demostración de la proposición 1.1.15. ✠

Para el siguiente resultado necesitamos las iguiente definición.

DEFINICIÓN 1.27. *Sean* $f : X \to Y$ *un morfismo y* $(g_i : X_i \to Y_i)_{i \in I}$ *un pozo. Diremos que* $(g_i)_{i \in I}$ *es ortogonal a* f, *y lo denotaremos como* $(g_i)_{i \in I} \perp_p f$, *si para cada pozo* $(r_i : X_i \to X)_{i \in I}$ *y cada morfismo* $s : Y_i \to Y$ *satisfacen que para cada* $i \in I$ *se tiene* $f \circ r_i = s \circ g_i$, *entonces existe un morfismo* $d : Y_i \to X$ *tal que para cada* $i \in I$ *el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "r_i"] \arrow[d, "g_i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y_i \arrow[r, "s"'] \arrow[ur, dashed, "d"] & Y \end{tikzcd}$$

Si $\mathcal{N}$ *es una clase de morfismos,* $\mathcal{N}^{\perp_p}$ *denota a la colección de pozos que son ortogonales a todo elemento de* $\mathcal{N}$. *De igual forma, si* $\boldsymbol{M}$ *es una colección de pozos,* $\boldsymbol{M}_{\perp_p}$ *denota la clase de morfismos que son ortogonales a cada pozo de* $\boldsymbol{M}$.

A continuación daremos las propiedades de la factorización para pozos.

PROPOSICIÓN 1.28. *Sean* $\mathbb{E}$ *una colección de pozos y* $\mathcal{M}$ *una clase de morfismos tales que* $\mathcal{C}$ *es una* $(\mathbb{E}, \mathcal{M})$*-categoría. Entonces se satisface:*

1. $\mathcal{M}$ *consiste de monomorfismos y* $\mathbb{E}$ *contiene todos los epimorfismos extremales;*

2. $\mathbb{E} = \mathcal{M}^{\perp_p}$ *y* $\mathcal{M} = \mathbb{E}_{\perp_p}$*;*
3. *La* $(\mathbb{E}, \mathcal{M})$*-factorización es esencialmente única, esto es, si* $((e_i)_{i\in I}, m)$ *y* $((f_i)_{i\in I}, n)$ *son dos* $(\mathbb{E}, \mathcal{M})$*-factorizaciones del mismo pozo, entonces existe un isomorfismo* h *tal que para cada* $i \in I$ *el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "e_i"'] & N \arrow[d, "n"] \\ M \arrow[r, "m"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & X \end{tikzcd}$$

4. $\mathcal{M} \cap \mathbb{E}$ *consiste de todos los isomorfismos;*
5. *Si* $n \circ m \in \mathcal{M}$ *y* $n \in \mathcal{M}$*, entonces* $m \in \mathcal{M}$*; por lo tanto si* (e, n) *es la* $(\mathbb{E}, \mathcal{M})$ *factorización de* $m \in \mathcal{M}$*, entonces* e *es un isomorfismo;*
6. $\mathcal{M}$ *es cerrada bajo productos de* $\mathcal{M}$*-morfismos;*
7. *Si un* $\mathcal{E}$*-pozo* $(e_i : X_i \to Y)_{i\in I}$ *se factoriza a través de un* $\mathcal{M}$*-morfismo* m*, entonces* m *es un isomorfismo;*
8. *Si* $\mathbb{E}$ *consta de epipozos, entonces si* $g \circ f \in \mathbb{E}$ *y* $f \in \mathbb{E}$*, entonces* $g \in \mathbb{E}$*;*
9. *Si* $\mathcal{C}$ *tiene igualadores y* $\mathcal{M}$ *contiene todos los monomorfismos regulares, entonces* $\mathbb{E}$ *consta de epipozos.*

La demostración de este resultado se puede consultar en [**10**]. En seguida tenemos una proposición que usaremos más adelante con frecuencia.

PROPOSICIÓN 1.29. *Para* $f : X \to Y$ *uno tiene:*

(i) *Para cada* $m \in \mathrm{Sub}(X)$ $m \cong f^{-1}(f(m))$ *si* $f \in \mathcal{M}$*, o si* f *es mono y* $\mathcal{E}$ *es estable bajo productos fibrados a lo largo de monomorfismos;*

(ii) *Para cada* $n \in \mathrm{Sub}(Y)$ $n \cong f(f^{-1}(n))$ *si y sólo si cada producto fibrado de* f *a lo largo de un* $\mathcal{M}$*-morfismo pertenece a* $\mathcal{E}$*.*

DEMOSTRACIÓN. Sólo demostraremos cuando $f \in \mathcal{M}$, las otras son similares.Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[r, "f"] & Y \\ & N \arrow[u, "f^{-1}(f(m))"] \arrow[r, "\bar{f}"] & f(M) \arrow[u, "f(m)"'] \\ M \arrow[uur, "m"] \arrow[ur, "t"] \arrow[urr, "e_f"'] & & \end{tikzcd}$$

donde $N = f^{-1}(f(M))$, $m \in \mathsf{Sub}(X)$, $f \circ m = m_f \circ e_f$ y el morfismo t es inducido por la propiedad universal del producto fibrado. Como $f \in \mathcal{M}$, esto implica que e_f es iso. Sea $t' = e_f^{-1} \circ \bar{f}$. Tenemos que $t' \circ t = e_f^{-1} \circ \bar{f} = e_f^{-1} \circ e_f = 1_M$. Por lo tanto, t' es un monomorfismo y una retracción, y así un isomorfismo. ✠

Ahora daremos la noción de lo que serán "puntos" en categorías.

DEFINICIÓN 1.30. *Un objeto $X \in \mathcal{C}$ es preterminal si para cada $x, y : Z \rightrightarrows X$ se tiene que $x = y$. $\mathcal{P}$ denota la subcategoría plena de objetos preterminales de $\mathcal{C}$.*

Dos resultados se obtienen rápidamente.

PROPOSICIÓN 1.31. *Si $\mathcal{C}$ tiene productos finitos y objeto terminal, son equivalentes:*

1. *X es preterminal ;*
2. *$X \to 1$ es monomorfismo (1 es el objeto terminal) ;*
3. *$\delta_X : X \to X \times X$ (el igualador de las proyecciones) es un isomorfismo .*

PROPOSICIÓN 1.32. *$\mathcal{P}$ es cerrada bajo monofuentes.*

DEMOSTRACIÓN. Este resultado se enunciará de manera más general cuando estudiemos subcategorías delta, pues los objetos preterminales forman una subcategoría de éste tipo. ✠

Consideremos una $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorización (con $\mathcal{M}$ una clase de monomorfismos) en $\mathcal{C}$ y para cada $X \in \mathcal{C}$ tomemos la factorización de $X \to 1 = X \xrightarrow{\eta_X} TX \to 1$. Entonces $TX \in \mathcal{P}$ y η_X parece ser un buen candidato para ser reflexión.

PROPOSICIÓN 1.33. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos fibrados y con un sistema de factorización $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$, son equivalentes:*

(i) *Para cada $X \in \mathcal{C}$, η_X es una $\mathcal{P}$-reflexión;*
(ii) *Para cada $X \in \mathcal{C}$, η_X es un epimorfismo fuerte[1];*
(iii) *Para cada $P \in \mathcal{P}$, $P \to 1$ pertenece a $\mathcal{M}$;*
(iv) *Para cada $x : P \to X$, con $P \in \mathcal{P}$, $x \in \mathcal{M}$;*
(v) *Para cada $e : P \to X$, en $\mathcal{E}$, con $P \in \mathcal{P}$, e es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) Si η_X es una $\mathcal{P}$-reflexión y se factoriza como $\eta_X = i \circ p$ con $i : P \to TX$ monomorfismo, entonces $P \in \mathcal{P}$ (pues es cerrada bajo monofuentes), entonces existe un único $g : TX \to P$ tal que $g \circ \eta_X = p$, por lo tanto i es un isomorfismo, así que η_X es un epimorfismo extremal y como la categoría

[1]Un morfismo e se llama epimorfismo fuerte si $e \perp m$ para cada monomorfismo m.

tiene productos fibrados es un epimorfismo fuerte. Inversamente, si η_X es un epimorfismo fuerte y existe $f : X \to P$ con $P \in \mathcal{P}$ entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\langle \eta_X , f\rangle"] \arrow[d, "\eta_X"'] & TX \times P \arrow[d, "p_1"] \\ TX \arrow[r, "1_{TX}"'] \arrow[ur, dashed, "r"] & TX \end{tikzcd}$$

donde p_1 es la primera proyección. El morfismo r existe pues η_X es epimorfismo fuerte y p_1 es mono (es el producto fibrado del monomorfismo $P \to 1$ a lo largo de $TX \to 1$). Por lo tanto $p_2 \circ r : TX \to P$ es el morfismo que nos da la factorización deseada, ademas es único pues η_X es epi.
(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Si tenemos (i) al factorizar $P \to 1 = P \to TP \to 1$ obtenemos que $P \cong TP$ y de esta forma $P \to 1$ está en $\mathcal{M}$. Para el regreso considere un morfismo $X \to P$ con $P \in \mathcal{P}$, entonces por la propiedad de diagonalización de la factorización obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "\eta_X"'] & P \arrow[d] \\ TX \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "r"] & 1 \end{tikzcd}$$

Así r nos da la factorización deseada, además es único pues η_X es epi.
(iii) $\Leftrightarrow$ (iv) Se sigue de la propiedad de cancelación izquierda de $\mathcal{M}$ applicada a $P \to X \to 1$.
(iv) $\Leftrightarrow$ (v) Es obvio.

✠

De esta proposición obtenemos dos propiedades importantes para la subcategoría de objetos preterminales.

COROLARIO 1.34. *Si se satisfacen las propiedades de la proposición anterior obtenemos:*

(I) *$\mathcal{P}$ es cerrada bajo $\mathcal{E}$-imágenes;*
(II) *$\mathcal{P}$ es subcategoría reflexiva de $\mathcal{C}$.*

DEFINICIÓN 1.35. *Un cuasipunto de un objeto X es un Subobjeto $x : P \to X$ tal que $P \cong TX$, y es un punto si $P \cong 1$.*

qptX (ptX) *denota la clase de cuasipuntos (puntos) de* X *y diremos que* X *tiene suficientes cuasipuntos (puntos) si* $\bigvee \mathsf{qptX} \cong 1_{\mathsf{X}}$ ($\bigvee \mathsf{ptX} \cong 1_{\mathsf{X}}$).

DEFINICIÓN 1.36. *Decimos que cuasipuntos detectan monofuentes si la fuente* $(f_i : X \to Y_i)$ *en* $\mathcal{C}$ *es mono cuando la fuente* $(\mathcal{C}(TX, f_i) : \mathcal{C}(TX, X) \to \mathcal{C}(TX, Y_i))_{i \in I}$ *es mono en* ***Con***.

PROPOSICIÓN 1.37. *Si* 1 *es un generador*[2] *entonces cuasipuntos detectan monofuentes.*

DEMOSTRACIÓN. Para $(f_i)_{i\in I}$ con $\mathcal{C}(TX, f_i)_{i\in I}$ mono y para $u, v : Z \rightrightarrows X$, supongamos que $f_i \circ u = f_i \circ v$ para cada $i \in I$. Como 1 es un generador, es suficiente probar que $u \circ z = v \circ z$ para cada $z \in \mathsf{ptZ}$ para concluir $u = v$. Para cada $z \in \mathsf{ptZ}$ tenemos un morfismo $1 \to TX$, por lo tanto $TX \cong 1$, así que $x = u \circ z$ y $y = v \circ z$ son cuasipuntos de X con $f_i \circ x = f_i \circ y$ para cada $i \in I$, por lo tanto $x = y$ por hipótesis. ✠

2. Categorías Topológicas

DEFINICIÓN 2.1. *Sea* $U : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ *un funtor. Considere una categoría* $\mathcal{D}$, *un funtor* $H : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ *y un cono* $\left(f_D : B \to UH(D)\right)_{D\in\mathcal{D}}$ *sobre* $U \circ H$ *en* $\mathcal{B}$. *Una estructura inicial para estos datos es un cono* $\left(g_D : A \to H(D)\right)_{D\in\mathcal{D}}$ *sobre* H *tal que* $U(A) = B$ *y para cada* $D \in \mathcal{D}$, $f_D = U(g_D)$ *y si* $\left(h_D : A' \to H(D)\right)_{D\in\mathcal{D}}$ *es un cono sobre cuya imagen* $\left(U(h_D) : U(A') \to UH(D)\right)_{D\in\mathcal{D}}$ *bajo* U *se factoriza vía un morfismo* $b : U(A') \to U(A)$ *a través de* $\left(f_D : U(A) \to U(H(D))\right)_{D\in\mathcal{D}}$, *existe un único morfismo* $a : A' \to A$ *tal que* $U(a) = b$ *y* $h_D = g_D \circ a$ *para cada* $D \in \mathcal{D}$.

Como es costumbre, la unicidad de la flecha a implica la unicidad salvo isomorfismos de la estructura inicial.

DEFINICIÓN 2.2. *Sea* $U : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ *un funtor.*

1. *Dada una categoría* $\mathcal{D}$, U *tiene estructuras iniciales de tipo* $\mathcal{D}$ *si para cada funtor* $H : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ *y cualquier cono sobre* $U \circ H$, *existe una estructura inicial correspondiente.*
2. U *tiene estructuras iniciales cuando tienes estructuras iniciales de tipo* $\mathcal{D}$ *para cualquier categoría pequeña* $\mathcal{D}$.

[2]Un objeto $X \in \mathcal{C}$ se llama generador (o separador) si el funtor $\mathcal{C}(X, -) : \mathcal{C} \longrightarrow$ ***Con*** es fiel y pleno.

3. U *se llama funtor topológico cuando tiene estructuras iniciales de tipo* $\mathcal{D}$ *para cualquier categoría* $\mathcal{D}$. *En este caso se dirá que la categoría* $\mathcal{C}$ *es topológica sobre* $\mathcal{B}$.

EJEMPLOS 2.3.

1. El funtor que olvida $\mathsf{U} : \boldsymbol{Top} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$ es topológico. Con la notación de la definición 1.2.1 basta tomar A como el conjunto B equipado con la topología inicial con respecto a todos los mapeos f_D, esto es, la topología generada por todos los subconjuntos $\mathsf{f}_\mathsf{D}^{-1}(\mathsf{V})$, con V abierto en $\mathsf{H}(\mathsf{D})$.
2. La categoría $\boldsymbol{Unif}$ de espacios uniformes y funciones uniformemente continuas es una categoría topológica sobre conjuntos a través del funtor que olvida $\mathsf{U} : \boldsymbol{Unif} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$.
3. Si $\boldsymbol{Cat}$ es la categoría de categorías pequeñas y funtores entre ellas, el funtor $\mathsf{U} : \boldsymbol{Cat} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$ que manda a cada categoría pequeña a su conjunto de objetos tiene estructuras iniciales. Con la notación de 1.2.1 el conjunto B es transformado a la categoría cuyo conjunto de objetos es B y para cada par de objetos b, b' es B
$$\mathsf{B}(\mathsf{b}, \mathsf{b}') = \lim \mathsf{H}(\mathsf{D})(\mathsf{f}_\mathsf{D}(\mathsf{b}), \mathsf{f}_\mathsf{D}(\mathsf{b}')).$$
4. Un funtor $\mathsf{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tiene un límite precisamente cuando existe una estructura inicial a lo largo del funtor $\mathsf{U} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{1}$ (donde $\mathbf{1}$ es la categoría terminal) para el único cono posible sobre $\mathsf{U} \circ \mathsf{H}$.

Más ejemplos de categorías topológicas pueden encontrarse en [**1**] y [**35**]. Una propiedad de funtores topológicos es la siguiente.

PROPOSICIÓN 2.4. *Todo funtor topológico es fiel.*

DEMOSTRACIÓN. Considere un funtor topológico $\mathsf{U} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ y dos morfismos $\mathsf{u}, \mathsf{v} : \mathsf{X} \rightrightarrows \mathsf{Y}$ en $\mathcal{C}$ tales que $\mathsf{U}(\mathsf{u}) = \mathsf{U}(\mathsf{v})$. Sea $\mathcal{D}$ la categoría discreta cuyos objetos son todas las flechas d de $\mathcal{C}$, tomemos $\mathsf{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ el funtor constante sobre Y y definamos un cono $(\mathsf{f}_\mathsf{d} : \mathsf{B} \to \mathsf{UH}(\mathsf{d}))_{\mathsf{d} \in \mathcal{D}}$ poniendo $\mathsf{B} = \mathsf{U}(\mathsf{X})$ y $\mathsf{f}_\mathsf{d} = \mathsf{U}(\mathsf{u})$. Escribimos $(\mathsf{g}_\mathsf{d} : \mathsf{A} \to \mathsf{H}(\mathsf{d}))_{\mathsf{d} \in \mathcal{D}}$ para la correspondiente estructura inicial. Definimos el cono $(\mathsf{h}_\mathsf{d} : \mathsf{X} \to \mathsf{H}(\mathsf{d}))_{\mathsf{d} \in \mathcal{D}}$ por
$$\mathsf{h}_\mathsf{d} = \begin{cases} \mathsf{u} & \text{si } \mathsf{d} \in \mathcal{C}(\mathsf{X}, \mathsf{A}) \text{ y } \mathsf{g}_\mathsf{d} \circ \mathsf{d} = \mathsf{v}, \\ \mathsf{v} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
Como $\mathsf{U}(\mathsf{u}) = \mathsf{U}(\mathsf{v})$, el cono $\big(\mathsf{U}(\mathsf{h}_\mathsf{d})\big)_{\mathsf{d} \in \mathcal{D}}$ coincide con el cono $(\mathsf{f}_\mathsf{d})_{\mathsf{d} \in \mathcal{D}}$, del cual obtenemos un único morfismo $\mathsf{a} : \mathsf{X} \to \mathsf{A}$ tal que $\mathsf{U}(\mathsf{a}) = 1_{\mathsf{U}(\mathsf{X})}$ y $\mathsf{g}_\mathsf{d} \circ \mathsf{a} = \mathsf{h}_\mathsf{d}$. Poniendo $\mathsf{d} = \mathsf{a}$ tenemos en particular $\mathsf{g}_\mathsf{a} \circ \mathsf{a} = \mathsf{h}_\mathsf{a}$. Si $\mathsf{h}_\mathsf{a} \neq \mathsf{v}$, por definición de h_a

obtenemos $h_a = v$, contradicción. Así $h_a = v$ y por definición $h_a = u$, por lo tanto $u = v = h_a$. ✠

Como los funtores topológicos son fieles, el siguiente lema es de gran ayuda.

LEMA 2.5. *Consideremos* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ *un funtor fiel,* $H : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ *un diagrama en* $\mathcal{C}$ *y* $(f_D : B \longrightarrow FH(D))_{D\in\mathcal{D}}$ *un cono sobre* $F \circ H$*. Si existe una estructura inicial para estos datos considerando a* $\mathcal{D}$ *como una categoría discreta, entonces la situación anterior tiene una estructura inicial.*

DEMOSTRACIÓN. Denotemos por $\mathcal{D}^*$ a la categoría discreta con los mismos objetos que $\mathcal{D}$ y sea $(g_D : A \to H(D))_{D\in\mathcal{D}^*}$ la estructura inicial para el diagrama $H : \mathcal{D}^* \longrightarrow \mathcal{C}$ y el cono $(f_D)_{D\in\mathcal{D}}$. Para cada morfismo $d : D \to D'$ de $\mathcal{D}$ uno tiene

$$U(H(d) \circ g_D) = UH(d) \circ U(g_D) = UH(d) \circ f_D = f_{D'} = U(g_{D'})$$

y como U es fiel tenemos que $H(d) \circ g_D = g_{D'}$. Esto nos da el resultado. ✠

Del este lema y la definición de funtor topológico obtenemos una forma equivalente de dar esta noción.

PROPOSICIÓN 2.6. *Sea* $U : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ *un funtor, Entonces son equivalentes:*

(i) U *es topológico;*

(ii) *Dada cualquier fuente* $(B \xrightarrow{f_i} U(B_i))_{i\in I}$ *exite un único objeto* A *en* $\mathcal{C}$ *y una única fuente* $(A \xrightarrow{g_i} B_i)_{i\in I}$ *tal que* $U(A) = B$, $U(g_i) = f_i$ *y para cada fuente* $(C \xrightarrow{h_i} B_i)_{i\in I}$ *y un morfismo* $h : U(C) \to B$ *tal que para cada* $i \in I$ *se tiene que* $f_i \circ h = U(h_i)$*, existe un único* $\overline{h} : C \to A$ *tal que* $U(\overline{h}) = h$ *y para cada* $i \in I$ *se tiene que* $g_i \circ \overline{h} = h_i$.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de lo anterior. ✠

La noción de funtor topológico puede ser fácilmente dualizada, es decir, funtor cotopológico, la siguiente proposición trata sobre eso.

PROPOSICIÓN 2.7. *Un funtor es topológico si y sólo si es cotopológico.*

DEMOSTRACIÓN. Como un funtor topológico $U : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ es fiel, por el lema anterior basta considerar una categoría discreta $\mathcal{D}$, un funtor $H : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ y un cocono $(f_D : UH(D) \to B)_{D\in\mathcal{D}}$. Considere la categoría discreta $\mathcal{D}'$ cuyos objetos son pares (X, b), con $X \in Ob(\mathcal{C})$ y $b : B \to U(X)$ es una flecha tal que la composición $b \circ f_D$ tiene la forma $U(a_{D,b})$, con $a_{D,b} : H(D) \to X$ en $\mathcal{C}$, para cada objeto D de $\mathcal{D}$. Definamos un funtor $H' : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{C}$ poniendo $H'(X, b) = X$ y un cono $f'_{(X,b)} : B \to U(X)$ sobre $U \circ H'$ con $f'_{(X,b)} = b$. Por hipótesis, tenemos una estructura inicial $(g'_{(X,b)} : A \to X)_{(X,b)\in\mathcal{D}'}$.

Sea $D \in \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$, el cono $(a_{D,b})_{(X,b)\in\mathcal{D}'}$ es tal que $U(a_{D,b})$ se fatoriza a través de $f'_{(X,b)} = b$ vía f_D, así obtenemos un único $g_D : H(D) \to A$ tal que $U(g_D) = f_D$ y $g'_{(X,b)} \circ g_D = a_{D,b}$. Esto da el cocono requerido $(g_D : H(D) \to A)_{D\in\mathcal{D}}$ mapeado por U a $(f_D : UH(D) \to B)_{D\in\mathcal{D}}$. Para probar la propiedad universal, hay que considerar un cocono $(h_D : H(D) \to A')_{D\in\mathcal{D}}$ en $\mathcal{C}$ y un morfismo $b : U(A) \to U(A')$ tal que $b \circ U(g_D) = U(h_D)$. El par (A', b) es un objeto de $\mathcal{D}'$, poniendo $a = g'_{(A',b)}$. De la relación $U(a \circ g_D) = U(a) \circ U(g_D) = b \circ U(g_D) = U(h_D)$ y de que U es fiel obtenemos $a \circ g_D = h_D$. La unicidad de a se sigue de el hecho de que U es fiel y de la relación $U(a) = b$. ✠

PROPOSICIÓN 2.8. *Un funtor topológico tiene adjunto derecho e izquierdo y estos funtores adjuntos son plenos y fieles.*

DEMOSTRACIÓN. Por la proposición anterior, es suficiente probar la existencia de un funtor adjunto derecho pleno y fiel al funtor topológico $U : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$. Dado un objeto B de $\mathcal{B}$, consideremos el diagrama vacío $\mathcal{D}$ y la correspondiente estructura inicial para el cono vacío con vértice en B. Esto es un objeto A en $\mathcal{C}$ tal que $U(A) = B$ y para cada A' en $\mathcal{C}$ y $b : U(A') \to B$, existe una única flecha $a : A' \to A$ tal que $U(a) = b$. Pero esto es decir precisamente que $(A, 1_B)$ es una correflexión de B a lo largo de U. Así que U tiene un adjunto derecho V. Como cada morfismo couniversal $UV(B) \to B$ es iso (la identidad de B) el funtor es pleno y fiel. ✠

PROPOSICIÓN 2.9. *Un funtor topológico crea límites y colímites.*

DEMOSTRACIÓN. Considere un funtor topológico $U : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ y un funtor arbitrario $H : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tal que la composición $U \circ H$ tiene límite (en $\mathcal{B}$) $(p_D : L \to UH(D))_{D\in\mathcal{D}}$. La estructura inicial $(g_D : A \to H(D))_{D\in\mathcal{D}}$ para estos datos da un límite de H en $\mathcal{C}$. De hecho dado cualquier otro cono $(h_D : A' \to H(D))_{D\in\mathcal{D}}$ sobre el funtor, el cono $(U(h_D))_{D\in\mathcal{D}}$ se factoriza de manera única a través del cono límite $(p_D)_{D\in\mathcal{D}}$ vía una flecha $b : U(A') \to L$, esto da una factorización $a : A' \to L$ tal que $g_D \circ a = h_D$ y $U(a) = b$. La unicidad de a se sigue se sigue inmediatamente b y de que U es fiel. El caso de colímites se sigue por dualidad. ✠

DEFINICIÓN 2.10. *Un funtor* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ *se dice que tiene fibras pequeñas si para cada objeto* B *en* $\mathcal{D}$ *la colección de los objetos* A *en* $\mathcal{C}$ *tal que* $F(A) = B$ *es a lo más un conjunto (pequeño).*

PROPOSICIÓN 2.11. *Sea* $U : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B}$ *un funtor topológico Entonces se satisface lo siguiente:*

1. $\mathcal{C}$ *es (co)completa si y sólo si* $\mathcal{B}$ *es (co)completa;*

2. *$\mathcal{C}$ es bien (co)potenciada si y sólo si* U *tiene fibras pequeñas y* $\mathcal{B}$ *es bien (co)potenciada;*
3. *$\mathcal{C}$ tiene una factorización regular*[3] *si y sólo si* $\mathcal{B}$ *tiene una factorización regular;*
4. *$\mathcal{C}$ tiene un (co)generador sy y sólo si* $\mathcal{B}$ *tiene un (co)generador.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de las propiedades anteriores. ✠

De esto obtenemos inmediatamente un importante resultado sobre categorías topológicas sobre ***Con***.

COROLARIO 2.12. *Sea* $\mathsf{U} : \mathcal{C} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$ *un funtor topológico. Entonces se satisface lo siguiente:*

1. *$\mathcal{C}$ es completa y cocompleta;*
2. *$\mathcal{C}$ es bien (co)potenciada si y sólo si* U *tiene fibras pequeñas;*
3. *$\mathcal{C}$ tiene una factorización regular;*
4. *$\mathcal{C}$ tiene generadores y cogeneradores.*

Ahora daremos unas definiciones y un resultado y con esto terminaremos esta sección.

DEFINICIÓN 2.13. *Sean* $\mathsf{U} : \mathcal{C} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$ *un funtor topológico y* $\mathsf{f} : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ *un morfismo en* $\mathcal{C}$.

i) f *es un encaje si es inicial con respecto a* U *y* $\mathsf{U}(\mathsf{f})$ *es una función inyectiva, donde inicial significa que una función* $\mathsf{g} : \mathsf{U}(\mathsf{Y}) \to \mathsf{Z}$ *tiene un levantamiento a través de* U *si y sólo si* $\mathsf{g} \circ \mathsf{U}(\mathsf{f})$ *tiene un levantamiento a través de* U*;*
ii) f *es un cociente si es final con respecto a* U *y* $\mathsf{U}(\mathsf{f})$ *es una función sobreyectiva, donde final significa que una función* $\mathsf{h} : \mathsf{Z} \to \mathsf{U}(\mathsf{X})$ *tiene un levantamiento a través de* U *si y sólo si* $\mathsf{U}(\mathsf{f}) \circ \mathsf{h}$ *tiene un levantamiento a través de* U.

PROPOSICIÓN 2.14. *Sean* $\mathsf{U} : \mathcal{C} \longrightarrow \boldsymbol{Con}$ *un funtor topológico y* $\mathcal{A}$ *una subcategoría plena de* $\mathcal{C}$*. Entonces son equivalentes:*

1. *$\mathcal{A}$ es cerrada bajo monofuentes;*
2. *$\mathcal{A}$ es cociente-reflexiva, esto es,* $\mathcal{A}$ *es reflexiva en* $\mathcal{C}$ *y para cada* $\mathsf{X} \in \mathcal{C}$*, la reflexión* $\mathsf{r_X} : \mathsf{X} \to \mathsf{rX}$ *es un morfismo cociente.*

La demostración de este resultado puede ser consultada en [**1**] o [**35**].

[3] Una factorización regular es una $(\mathsf{RegEpi}, \mathsf{Mono})$-factorización donde RegEpi es la clase de epimorfismos regulares y Mono es la clase de monomorfismos

FALTA

PAGINA

No. 26

CAPÍTULO

2 Operadores de Cerradura en Categorías

En este capítulo revisaremos un poco la teoría de operadores de cerradura en categorías, veremos algunas de sus propiedades y ejemplos, interesados en este tema pueden consultar [**10**] y [**22**].

1. Operadores de Cerradura

Consideremos una categoría $\mathcal{C}$ la cual es finitamente $\mathcal{M}$-completa donde $\mathcal{M}$ es una clase de monomorfismos cerrada bajo composición y que satisface M1 y M2 de la observación 1.1.2, de manera equivalente, que existe una clase $\mathcal{E}$ de morfismos en $\mathcal{C}$ tal que la pareja $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ es un sistema de factorización ortogonal.

DEFINICIÓN 1.1. *Un operador de cerradura en $\mathcal{C}$ con respecto a $\mathcal{M}$ es una familia de funciones* $c = \{c_X : \mathsf{Sub}(X) \to \mathsf{Sub}(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$ *tal que para cada* $X \in \mathcal{C}$ *y* $m, m' \in \mathsf{Sub}(X)$ *satisface lo siguiente:*

1. *(extensiva)* $m \leq c_X(m)$;
2. *(monotona) si* $m \leq m'$ *entonces* $c_X(m) \leq c_X(m')$;
3. *(continua)* $f(c_X(m)) \leq c_Y(f(m))$ *para cada morfismo* $f : X \to Y$ *en* $\mathcal{C}$.

$\mathsf{CL}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ *denota la colección de todos los operadores de cerradura en $\mathcal{C}$ con respecto a $\mathcal{M}$ la cual está ordenada parcialmente de la siguiente forma:* $c \leq d$ *si y sólo si para cada* $X \in \mathcal{C}$ *y* $m \in \mathsf{Sub}(X)$ *tenemos que* $c_X(m) \leq d_X(m)$.

OBSERVACIONES 1.2.

1. *Si ya tenemos* (2) *de la proposición anterior, entonces* (3) *es equivalente a*
   3') $c_X(f^{-1}(n)) \leq f^{-1}(c_Y(n))$ *para cada* $f : X \to Y$ *en* $\mathcal{C}$ *y para cada* $n \in \mathsf{Sub}(Y)$.

En efecto, para $n \in \mathsf{Sub}(Y)$ *y* $m = f^{-1}(n)$ *uno tiene*

$$f(c_X(f^{-1}(n))) \leq c_Y(f(f^{-1}(n))) \leq c_Y(n)$$

y por adjunción $c_X(f^{-1}(n)) \leq f^{-1}(c_Y(n))$.

2. *Para* $m \in \mathsf{Sub}(X)$ *el dominio de su* c-cerradura *es denotado por* $c_X(M)$, *así uno tiene una factorización*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "j_m"'] & & X \\ & c_X(M) \arrow[ur, "c_X(m)"'] & \end{tikzcd}$$

donde j_m *es determinado de manera única y también está en* $\mathcal{M}$ *pues* $\mathcal{C}$ *tiene* $\mathcal{M}$*-productos fibrados y el siguiente diagrama es un producto fibrado*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "1_M"] \arrow[d, "j_m"'] & M \arrow[d, "m"] \\ c_X(M) \arrow[r, "c_X(m)"'] & X \end{tikzcd}$$

EJEMPLO 1.3. El ejemplo natural es el operador de Kuratowski en ***Top*** con $\mathcal{M}$ la clase de encajes, para cada $M \subseteq X$ uno define

$$k_X(M) = \overline{M} = \{x \in X \mid U \cap M \neq \emptyset \text{ para cada vecindad } U \text{ de } x\}$$

Claramente la familia $k = \{k_X : 2^X \to 2^X\}_{X \in \mathbf{Top}}$ satisface las propiedades de un operador de cerradura. Más adelante veremos que los operadores de cerradura abundan en varias categorías bien conocidas.

DEFINICIÓN 1.4. *Un subobjeto* $M \xrightarrow{m} X$ *es llamado* c-*cerrado (en X) si* j_m *es un isomorfismo y es llamado* c-*denso si* $c_X(m)$ *es un isomorfismo.*

PROPOSICIÓN 1.5. *Sean* $X \xrightarrow{f} Y$ *un morfismo en* $\mathcal{C}$, $m \in \mathsf{Sub}(X)$ *y* $n \in \mathsf{Sub}(Y)$.

1. *si n es* c-*cerrado en Y entonces* $f^{-1}(n)$ *es* c-*cerrado en* X;
2. *si m es* c-*denso en* X *y* $f \in \mathcal{E}$ *entonces* $f(m)$ *es* c-*denso en* Y.

DEMOSTRACIÓN.

1. si $n \cong c_Y(n)$ entonces $c_X(f^{-1}(n)) \leq f^{-1}(c_Y(n)) \cong f^{-1}(n)$ por lo tanto $f^{-1}(n) \cong c_X(f^{-1}(n))$;
2. si $1_X \cong c_X(m)$ y $f \in \mathcal{E}$ entonces $1_Y \cong f(1_X) \cong f(c_X(m)) \leq c_Y(f(m))$ por lo tanto $1_Y \cong c_Y(f(m))$.

✠

2. Operadores de Cerradura Idempotentes y Débilmente Hereditarios

DEFINICIÓN 2.1. *Sea* c *un operador de cerradura con respecto a* $\mathcal{M}$.

1. c *se llama idempotente si para cada* X *en* $\mathcal{C}$, $c_X(c_X(m)) = c_X(m)$ *para cada* $m \in \mathrm{Sub}(X)$;
2. c *se llama débilmente hereditario si para cada* X *en* $\mathcal{C}$, $c_{c_X(M)}(j_m) \cong 1_{c_X(M)}$ *para cada* $m \in \mathrm{Sub}(X)$, *esto es, en el siguiente diagrama* $c_{c_X(M)}(j_m)$ *es un isomorfismo.*

$$\begin{tikzcd}
c_{c_X(M)}(M) \arrow[dr, "c_{c_X(M)}(j_m)"] & & \\
& c_X(M) \arrow[dr, "c_X(m)"] & \\
M \arrow[uu, "j_{j_m}"] \arrow[ur, "j_m"] \arrow[rr, "m"'] & & X
\end{tikzcd}$$

DEFINICIÓN 2.2. *Un morfismo* $X \xrightarrow{f} Y$ *es llamado* c*-denso si* $c_Y(f(1_X)) \cong 1_Y$. $\mathcal{E}^c$ *denota a la clase de morfismos* c*-densos y* $\mathcal{M}^c$ *denota a la clase de subobjetos* c*-cerrados.*

Ahora veamos un lema que será de mucha utilidad en lo que sigue.

LEMA 2.3. *Para cada diagrama conmutativo en* $\mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "m"'] & N \arrow[d, "n"] \\
X \arrow[r, "v"'] & Y
\end{tikzcd}$$

con $m, n \in \mathcal{M}$ *existe un único* $w : c_X(M) \to c_Y(N)$ *que hace conmutativo al siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d, "j_m"'] & N \arrow[d, "j_n"] \\
c_X(M) \arrow[r, dashed, "w"] \arrow[d, "c_X(m)"'] & c_Y(N) \arrow[d, "c_Y(n)"] \\
X \arrow[r, "v"'] & Y
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN. Del siguiente diagrama y de la $\mathcal{M}$-factorización derecha tenemos $\nu(m) \leq n$ en $\mathrm{Sub}(Y)$

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "u"] \arrow[d] & N \arrow[dd, "n"] \\
\nu(M) \arrow[d] \arrow[ur, dashed] & \\
Y \arrow[r, "1_Y"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\nu(c_X(m)) \leq c_Y(\nu(m)) \leq c_Y(n)$. Tomando a w como la composición $c_X(M) \to \nu(c_X(M)) \to c_Y(N)$ tenemos el resultado deseado. ✠

COROLARIO 2.4. *Consideremos el diagrama en el enunciado del lema anterior.*

1. *Si* m *es* c*-denso entonces existe un único* $t : X \to c_Y(N)$ *con* $t \circ m = j_n \circ u$ *y* $c_Y(n) \circ t = \nu$*;*
2. *Si* n *es* c*-cerrado entonces existe un único* $s : c_X(M) \to N$ *con* $s \circ j_m = u$ *y* $n \circ s = \nu \circ c_X(m)$*;*
3. *Si* m *es* c*-denso y* n *es* c*-cerrado entonces existe un único* $d : X \to N$ *con* $d \circ m = u$ *y* $n \circ d = \nu$*;*
4. $\mathcal{E}^c \cap \mathcal{M}^c$ *es la clase de isomorfismos en* $\mathcal{C}$.

PROPOSICIÓN 2.5. *Sea* c *un operador de cerradura idempotente con respecto a* $\mathcal{M}$. *Entonces todo morfismo tiene una* $\mathcal{M}^c$*-factorización derecha y* $\mathcal{E}^c$ *es cerrada bajo composición.*

DEMOSTRACIÓN. Para $X \xrightarrow{f} Y$ uno forma su $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorización $f = m \circ e$. Si c es idempotente entonces $c_Y(m) \in \mathcal{M}^c$ y del corolario anterior uno obtiene que $f = c_Y(m) \circ (j_m \circ e)$ es una $\mathcal{M}^c$-factorización derecha de f

$$\begin{tikzcd}
 & & c_Y(M) \arrow[dd, "c_Y(m)"] \\
 & M \arrow[ur, "j_m"] \arrow[dr, "m"] & \\
X \arrow[ur, "e"] \arrow[rr, "f"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

de una forma similar a la demostración de la proposición 1.1.16 uno prueba que en esta situación $\mathcal{E}^c = (\mathcal{M}^c)^{\perp}$ y por lo tanto que es cerrada bajo composición. ✠

Es fácil probar que la factorización anterior es una $\mathcal{E}^c$-factorización izquierda (esto es, una $\mathcal{E}^c$-factorización derecha en $\mathcal{C}^{op}$) de f si c es débilmente hereditario. En efecto, $d = j_m \circ e$ es c-denso pues $d(1_X) \cong j_m$. Ahora si de manera análoga a una $\mathcal{M}$-factorización derecha definimos una $\mathcal{E}$-factorización izquierda, tendremos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.6. *Para un operador de cerradura débilmente hereditario todo morfismo tiene una $\mathcal{E}^c$-factorización izquierda y $\mathcal{M}^c$ es cerrada bajo composición.*

De lo anterior obtenemos.

PROPOSICIÓN 2.7. *Sea c un operador de cerradura con repecto a $\mathcal{M}$. Son equivalentes:*

1. *c es idempotente y débilmente hereditario ;*
2. *c es idempotente y $\mathcal{M}^c$ es cerrada bajo composición ;*
3. *c es débilmente hereditario y $\mathcal{E}^c$ es cerrada bajo composición ;*
4. *$(\mathcal{E}^c, \mathcal{M}^c)$ es un sistema de factorización ortogonal de $\mathcal{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. $1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 4)$ y $1) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4)$ se sigue de las proposiciones anteriores y de la proposición 1.1.16.
$4) \Rightarrow 1)$ Considere la $(\mathcal{E}^c, \mathcal{M}^c)$-factorización $M \xrightarrow{d} N \xrightarrow{n} X$ de $m = n \circ d \in \mathcal{M}$. Entonces $m \leq n$ implica que $c_X(m) \leq n$ pues $n \in \mathcal{M}^c$. Por el lema 2.2.3 obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "1_M"] \arrow[d, "j_d"'] & M \arrow[d, "j_m"] \\
c_N(M) \arrow[r, "w"] \arrow[d, "c_N(d)"'] & c_X(M) \arrow[d, "c_X(m)"] \\
N \arrow[r, "n"'] & X
\end{tikzcd}$$

Como $c_N(d)$ es un isomorfismo uno tiene $n \leq c_X(m)$ y así $n \cong c_X(m)$. Por lo tanto w es un isomorfismo. Así $c_X(m) \in \mathcal{M}^c$ y $j_m \in \mathcal{E}^c$ pues $n \in \mathcal{M}^c$ y $d \in \mathcal{E}^c$. ✠

terminamos esta sección con una forma de construir operadores de cerradura idempotentes.

PROPOSICIÓN 2.8. *Sea $\mathcal{N}$ una subclase de $\mathcal{M}$ estable bajo productos fibrados, entonces para cada $X \in \mathcal{C}$ y para cada $m \in \mathrm{Sub}(X)$, la ecuación*

$$c_X^{\mathcal{N}}(m) = \bigwedge\{n \in \mathcal{N} \mid n : N \to X \ y \ m \leq n\}$$

define un operador de cerradura idempotente.

Demostración. Claramente, para cada $m \in \mathsf{Sub}(X)$ tenemos que $m \leq c_X^{\mathcal{N}}(m)$. Para probar preservación de orden sólo hay que observar que si $n, m \in \mathsf{Sub}(X)$ con $n \leq m$, entonces cualquier subobjeto $n' \in \mathcal{X}$ que satisface $m \leq n'$ también satisface $n \leq n'$, por lo tanto, tomando ínfimos tenemos que $c_X^{\mathcal{N}}(n) \leq c_X^{\mathcal{N}}(m)$. Ahora para probar continuidad, sean $f : X \to Y$ un morfismo y $n \in \mathsf{Sub}(Y)$, consideremos todos los $\mathcal{N}$-morfismos $(n_i : N_i \to Y)_{i \in I}$ tal que para cada $i \in I$, $n \leq n_i$. Tomando los productos fibrados $f^{-1}(n)$ y $f^{-1}(n_i)$ de n y de n_i a lo largo de f, respectivamente, obtenemos elsiguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(N) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "f^{-1}(n)"'] & & N \arrow[dr] \arrow[dd, "n"] & \\
& f^{-1}(N_i) \arrow[rr] \arrow[dl, "f^{-1}(n_i)"] & & N_i \arrow[dl] \\
X \arrow[rr, "f"'] & & Y &
\end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{N}$ es estable bajo productos fibrados, tenemos que $f^{-1}(n_i) \in \mathcal{N}$ para cada $i \in I$. De la desigualdad $f^{-1}(n) \leq f^{-1}(n_i)$ para cada $i \in I$, tenemos que

$$c_X^{\mathcal{N}}(f^{-1}(n)) \leq \bigwedge_{i \in I} f^{-1}(n_i) \cong f^{-1}(\bigwedge_{i \in I} n_i) \cong f^{-1}(c_Y^{\mathcal{N}}(n)).$$

Para probar que es idempotente sea $m \in \mathsf{Sub}(X)$. Observemos que por definición tenemos que $c_X^{\mathcal{N}}(M) \leq c_X^{\mathcal{N}}(c_X^{\mathcal{N}}(m))$. Ahora si $n \in \mathcal{N}$ satisface que $m \leq n$, entonces $c_X^{\mathcal{N}}(m) \leq n$. Esto claramente implica que $c_X^{\mathcal{N}}(c_X^{\mathcal{N}}(m)) \leq c_X^{\mathcal{N}}(m)$. Por lo tanto tenemos el resultado deseado. ✠

3. Operadores de Cerradura Hereditarios

Ahora veremos más operadores de cerradura con condiciones adicionales, los operadores de cerradura que veremos en esta sección en particular incluyen a los débilmente hereditarios.

Definición 3.1. *Sean* c *un operador de cerradura en* $\mathcal{C}$ *con respecto a* $\mathcal{M}$ *y* $f : X \to Y$. f *se llama* c*-inicial si para cada* $m \in \mathsf{Sub}(X)$ *se tiene que*

$$c_X(m) = f^{-1}c_Y(f(m))$$

y f *se llama* c*-final si para cada* $n \in \mathsf{Sub}(Y)$

$$c_Y(n) = f(c_X(f^{-1}(n)).$$

OBSERVACIONES 3.2.

1. Toda sección $m : M \to X$ es c-inicial y toda retracción $q : Y \to N$ es c-final. En efecto, sea p un morfismo tal que $p \circ m = 1_M$, entonces para cada $n \in \mathsf{Sub}(M)$ tenemos
$$\begin{aligned} m^{-1}(c_X(m(n))) &\cong p(m(m^{-1}(c_X(m(n))))) \\ &\leq p(c_X(m(n))) \leq c_M(p(m(n))) \cong c_M(n) \end{aligned}$$
Para la retracción se hace un procedimiento similar.
2. Todo morfismo c-final pertenece a $\mathcal{E}$ (en la definición anterior basta considerar $n = 1_Y$).
3. Todo morfismo c-inicial en $\mathcal{E}$(cuando es estable bajo productos fibrados) es también c-final. En efecto, para $f : X \to Y$ c-inicial en $\mathcal{E}$ y cualquier $n \in \mathsf{Sub}(Y)$ tenemos
$$c_Y(n) \cong f(f^{-1}(c_Y(f(f^{-1}(n))))) \cong f(c_X(f^{-1}(n))).$$

En relación a uno de estos tipos de morfismos uno tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.3. *Un operador de cerradura es llamado hereditario si para cada objeto* X *en* $\mathcal{C}$ *y cada* $m \in \mathsf{Sub}(X)$ *cualquier factorización*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "m_Y"] \arrow[dr, "m"'] & & Y \arrow[dl, "y"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

con $m_Y \in \mathsf{Sub}(Y)$ *y* $y \in \mathsf{Sub}(X)$ *uno tiene* $c_Y(m_Y) \cong y^{-1}(c_X(m))$.

Con esto uno obtiene.

PROPOSICIÓN 3.4. *Un operador de cerradura* c *es hereditario si y sólo si todo morfismo en* $\mathcal{M}$ *es* c*-inicial.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la definición. ✠

También podemos caracterizar operadores de cerradura débilmente hereditarios de esta forma.

PROPOSICIÓN 3.5. *Considere el triángulo conmutativo anterior.* $c \in \mathrm{CL}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ *es débilmente hereditario si y sólo si* $c_Y(m_Y) = y^{-1}(c_X(m))$ *bajo la restricción de que* $y = c_X(z)$*para algún* $z \in \mathsf{Sub}(X)$ *con* $z \geq m$.

DEMOSTRACIÓN. Para la suficiencia tomemos $z = m$, por lo tanto $j_m = m_Y$, la doncidión dice que $c_Y(j_m) = c_Y(m_Y) \cong y^{-1}(y)$; pero $y^{-1}(y)$ es iso, pues y es mono. Por lo tanto c es débilmente hereditario. Para la necesidad consideremos un operador de cerradura débilmente hereditario c, como $m \le z$, tenemos que $c_X(m) \le y$. Se sigue de la propiedad universal del producto fibrado que el morfismo $k : c_X(M) \to Y = c_X(Z)$ con $y \circ k = c_X(m)$ satisface $k \cong y^{-1}(c_X(m))$. Del lema de la diagonalización (lema 2.2.3) obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "1_M"] \arrow[d] & M \arrow[d, "j_m"] \\
c_Y(M) \arrow[r, "l"] \arrow[d, "c_Y(m_Y)"'] & c_X(M) \arrow[d, "c_X(m))"] \arrow[dl, "k"'] \\
Y \arrow[r, "y"'] & X
\end{tikzcd}$$

Puesto que $k \circ j_m = m_Y$, tenemos que (con $N = c_X(M)$)

$$k \circ c_N(j_m) \le c_Y(m_Y) = k \circ l$$

por continuidad, por lo tanto $\circ c_N(j_m) \le l$. Por hipótesis $c_N(j_m)$ es iso, por lo tanto también l es iso. De esta manera, $c_Y(m_Y) \cong k \cong y^{-1}(c_X(m))$. ✠

OBSERVACIÓN 3.6. *Todo operador de cerradura hereditario es débilmente hereditario.*

4. Operadores de Cerradura Discretos e Indiscretos

Dada una categoría $\mathcal{C}$ tenemos los siguientes operadores de cerradura: el operador de cerradura discreto fine dado por $\mathsf{fine}_X(m) = m$, el operador de cerradura indiscreto coar dado por $\mathsf{coar}_X(m) = \bigwedge\{f^{-1}(f(m)) \mid f : X \to P, P \in \mathcal{P}\}$ ($\mathcal{P}$ es la subcategoría de objetos preterminales), y el operador de cerradura trivial t dado por $t_X(m) = 1_X$. Observe que el operador fine se puede expresar de manera análoga al operador coar, pues $\mathsf{fine}_X(m) = m \vee \bigvee\{h(h^{-1}(m)) \mid h : P \to X, P \in \mathcal{P}\}$. Estos son relacionados de la siguiente manera:

$$\mathsf{fine}_X(m) = m \vee \bigvee\{h(\mathsf{coar}_P(h^{-1}(m)) \mid h : P \to X, P \in \mathcal{P}\}$$

$$\mathsf{coar}_X(m) = \bigwedge\{f^{-1}(\mathsf{fine}_P(f(m)) \mid f : X \to P, P \in \mathcal{P}\}$$

la primera igualdad se sigue que cuando $X \in \mathcal{P}$ el morfismo $1_X : X \to X$ se encuentra entre los morfismos donde se toma el ínfimo para calcular coar, por lo tanto $\mathsf{coar}_X = \mathsf{fine}_X$ en este caso. La segunda igualdad es clara.

OBSERVACIÓN 4.1. *En general* t *y* coar *son distintos. Sin embargo, si* $\mathcal{C}$ *es una categoría punteada, entonces* $\mathsf{coar} = \mathsf{t}$*, e, inversamente, si* $\mathsf{coar} = \mathsf{t}$ *entonces todo objeto preterminal es preinicial. En efecto, si* $\mathcal{C}$ *es punteada, o equivalentemente, si* $\mathcal{P} = \{X \mid X \cong 0\}$*, entonces, para cada* $f : X \to 0$ *y cada* $m \in \mathsf{Sub}(X)$*,* $f^{-1}(f(m)) \cong 1_X$*, por lo tanto* $\mathsf{coar} = \mathsf{t}$*. Ahora si* $\mathsf{coar} = \mathsf{t}$*, entonces para cada* $P \in \mathcal{P}$ *el morfismo* $0_P : 0 \to P$ *debe pertenecer a* $\mathcal{E}$ *pues, si* $0_P = m \circ e$ *es su* $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$*-factorización,* $m \cong \mathsf{coar}(m) \cong t_P(m) \cong 1_P$*. Así que* P *es preinicial, puesto que* $\mathcal{E} \subseteq \mathsf{Epi}(\mathcal{C})$*.*

Ahora veamos una descripción de coar cuando la categoría se comporta bien bajo productos fibrados.

PROPOSICIÓN 4.2. *Sea* $\mathcal{E}$ *estable bajo productos fibrados a lo largo de monomorfismos. Entonces* $\mathsf{coar}_X(m) = !^{-1}(!(m))$ $(! : X \to 1)$ *para cada* $X \in \mathcal{C}$ *y para cada* $m \in \mathsf{Sub}(X)$*. Además,* coar *es hereditario cuando es expresado de esta manera.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $m \in \mathsf{Sub}(X)$. Para cada $f : X \to P$ con $P \in \mathcal{P}$, $!^{-1}(!(m)) \cong f^{-1}(!^{-1}(!(f(m))))$. Como $!_P$ es mono y $\mathcal{E}$ es estable bajo productos fibrados a lo largo de monomorfismos, por la proposición 1.1.29(i) $!^{-1}(!(f(m))) \cong f(m)$. Por lo tanto $!^{-1}(!(m)) \cong f^{-1}(f(m))$ para cada $f : X \to P$ con P preterminal, y de esta forma $\mathsf{coar}_X(m) \cong !^{-1}(!(m))$. Para checar que es hereditario, sean $m : M \to X$ y $n : N \to M$ subobjetos. Entonces:

$$\mathsf{coar}_M(n) \cong !^{-1}(!(n)) \cong m^{-1}(!^{-1}(!(m \circ n))) \cong m^{-1}(\mathsf{coar}_X(m \circ n)).$$

✠

5. Operadores de Cerradura en *Top* y en R-*Mod*

1. Operadores de cerradura en *Top*

1. *(El operador de cerradura de Kuratowski.)* Como ya vimos en la sección anterior $k = \{k_X\}$ es un operador de cerradura, además es débilmente hereditario e idempotente. En los siguientes ejemplos usaremos este para definir otros operadores de cerradura.
2. *(El operador de cerradura secuencial.)* Para cada $M \subseteq X$ uno define la cerradura secuencial σ como

   $$\sigma_X(M) = \{x \in X \mid \text{ existe una sucesión } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M \text{ con } x_n \to x\}$$

σ es claramente un operador de cerradura en ***Top***, este operador es débilmente hereditario (despues se verá que satisface una propiedad más fuerte) pero no idempotente, como lo muestra el siguiente ejemplo: En $\mathbb{R}^2$, considere el conjunto[1]

$$X = \{(0,0)\} \cup \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

con $x_n = (\frac{1}{n}, 0)$ y $X_n = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : m \in \mathbb{N}\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Equipemos a X con la siguiente topología: cada punto (x, y) con $xy >$ es aislado; las vecindades básicas de $x_n = (\frac{1}{n}, 0)$ son $\{x_n\} \cup X_n \setminus \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}) : m \leq k\}$ con $k \in \mathbb{N}$; las vecindades básicas del $(0,0)$ son $\{(0,0)\} \cup \bigcup_{n\geq k}(X_n \setminus F_n)$ con $k \in \mathbb{N}$ y $F_n \subseteq X_n$ finito. (Note que esta topología τ' es obtenida agregando nuevas vecindades del $(0,0)$ a la topología euclidiana usual de X para hacer todas las sucesiones "diagonales" que convergen al $(0,0)$ conjuntos cerrados en τ'.) Entonces para

$$M = \{(x, y) \in X : xy > 0\},$$

uno tiene $\sigma_X(M) = X \setminus \{(0,0)\}$, mientras que $\sigma_X(\sigma_X(M)) = X$.

3. *(El operador de cerradura θ.)* Para cada $M \subseteq X$ la θ-cerradura sobre M es definida como

$$\theta_X(M) = \{x \in X \mid M \cap k_X(U) \neq \emptyset \text{ para cada vecindad } U \text{ de } x \text{ en } X\}$$

o de manera equivalente como

$$\theta_X(M) = \bigcap\{k_X(U) \mid U \text{ es abierto en } X \text{ y } M \subseteq U\}$$

donde k_X es el operador de cerradura Kuratowski en X. Este no es débilmente hereditario ni idempotente. En efecto, para ver que no es idempotente considere el conjunto $X = \{x, a, b\}$ con la topología generada por $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$, entonces $\theta_X(\{a\}) = \{x, a\}$ y $\theta_X(\theta_X(\{a\})) = \theta_X(\{x, a\}) = X$. Ahora para ver que no es débilmente hereditario considere a $X = [0, 1]$ con la topología generada por el siguiente sistema de vecindades: para cada $x \neq 0$ tomemos las vecindades usuales y para el 0 tomemos como vecindades los subconjuntos de la forma $[0, \varepsilon) \setminus F$ donde $0 < \varepsilon \leq 1$ y $F = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\theta_X(F) = F \cup \{0\}$ pero $\theta_{\theta_X(F)}(F) = F$.

4. *(El operador de cerradura cuasicomponente.)* Para cada $M \subseteq X$ la cerradura cuasicomponente q sobre M está definida como

$$q_X(M) = \bigcap\{C \subseteq X \mid M \subseteq C \text{ y } C \text{ es cerrado y abierto}\}$$

[1] Aquí $0 \notin \mathbb{N}$

Este es un operador de cerradura idempotente (pues los subconjutos cerrados y abiertos son estables bajo productos fibrados) pero no débilmente hereditario.

5. *(El operador de cerradura componente.)* Para $M \subseteq X$ definimos el operador de cerradura componente con como
$$\mathrm{con}_X(M) = \bigcup_{x \in M} \mathrm{comp}_X(x)$$
donde $\mathrm{comp}_X(x)$ es la componente conexa de x en X. Este operador es idempotente pero no débilmente hereditario.
6. *(El operador de cerradura componente por trayectorias.)* Para $M \subseteq X$ definimos el operador de cerradura componente por trayectorias sobre M como
$$\mathrm{path}_X(M) = \{x \in X \mid \text{ existe una trayectoria de un punto de } M \text{ a } x\}$$
Este operador es débilmente hereditario pero no idempotente.

Un morfismo $f : X \to Y$ en ***Top*** es k-inicial (k el operador de cerradura de Kuratowski) si X tiene la topología inicial con respecto a f y es k-final si es un mapeo cociente hereditario, es decir, f es sobreyectiva y para cada $N \subseteq Y$ $f^{-1}(N) \to N$ es un mapeo cociente. k y σ son claramente operadores de cerradura hereditarios, θ no lo es.

2. Operadores de cerradura en R-*Mod*

Consideremos R un anillo asociativo con uno y a R-***Mod*** la categoría de módulos sobre el anillo R, los operadores de cerradura en esta categoría están relacionados con los prerradicales.

DEFINICIÓN 5.1. *Un prerradical σ en R-**Mod** es un subfuntor del funtor indentidad, esto es, es un funtor $\sigma :$ R-**Mod** $\longrightarrow$ R-**Mod** que satisface:*

(i) $\sigma(M) \leq M$ *para cada* $M \in$ R-***Mod***;

(ii) *para cada morfismo de R-módulos* $M \xrightarrow{f} N$ *el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ \sigma(M) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\sigma(f)"'] & \sigma(N) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

esto es, $f(\sigma(M)) \leq \sigma(N)$.

R-pr denota la clase de los prerradicales en R-***Mod***.

DEFINICIÓN 5.2. *Sean $\sigma \in$ R-pr y $M \in$ R-**Mod**.*

1. *σ se llama prerradical idempotente si* $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$;
2. *σ se llama radical si* $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$;
3. *σ se llama prerradical hereditario si* $\sigma(N) = N \cap \sigma(M)$ *para cada* $N \leq M$;
4. $\mathbb{T}_\sigma = \{M \in$ R-***Mod*** $\mid \sigma(M) = M\}$ *es la clase de pretorsión asociada a σ y* $\mathbb{F}_\sigma = \{M \in$ R-***Mod*** $\mid \sigma(M) = 0\}$ *es la clase libre de pretorsión asociada a σ.*

Se puede ver de manera sencilla que para $\sigma \in$ R-pr, $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo sumas directas y cocientes y $\mathbb{F}_\sigma$ es cerrada bajo productos y submódulos. Veamos algunos ejemplos de prerradicales.

EJEMPLOS 5.3.

1) *Para cada* $M \in$ R-***Mod***, *sea*

$$\mathrm{soc}(M) = \sum\{N \leq M : \ \textit{N es submódulo simple de M}\}$$

entonces soc(−) *es un prerradical y se le conoce como el soclo de M. Este es un prerradical hereditario e idempotente;*

2) *Para cada* $M \in$ R-***Mod***, *sea*

$$\mathcal{J}(M) = \bigcap\{N \leq M : \ \textit{N es submódulo máximo de M}\}$$

entonces $\mathcal{J}(-)$ *es un prerradical y se le conoce como el radical de Jacobson. Este es un radical;*

3) *Sea* I *un ideal bilateral de* R, *entonces si para cada* $M \in$ R-***Mod*** *definimos* $\eta(M) = IM$ *obtendremos un prerradical cohereditario;*
4) *Sean* $M \in$ R-***Mod*** *y N un submódulo completamente invariante*[2] *de M. Se definen los prerradicales* α_N^M *y* ω_N^M *como sigue :*
Para cada $K \in$ R-***Mod***,

$$\alpha_N^M(K) = \sum\{f(N) \mid f : M \to K\}$$

y

$$\omega_N^M(K) = \bigcap\{f^{-1}(N) \mid f : K \to M\}$$

Estos últimos han sido estudiados recientemente en **[26]**, **[27]** *y* **[28]**.

Para cada $\sigma \in$ R-pr uno consigue almenos dos operadores de cerradura en R-***Mod*** de la siguiente forma: para $M \in$ R-***Mod*** y $N \leq M$ uno define el operador de cerradura min^σ como

$$\mathrm{min}_M^\sigma(N) = N + \sigma(M)$$

y el operador de cerradura max^σ como

$$\mathrm{max}_M^\sigma(N) = p^{-1}(\sigma(M/N))$$

donde $p : M \to M/N$ es la proyección natural. Usando la propiedad (ii) en la definición de prerradical uno prueba fácilmente que ambos son operadores de cerradura. Con el orden parcial en la clase de los operadores de cerradura (en R-***Mod***) obtenemos lo siguiente.

PROPOSICIÓN 5.4. *Sea* $\sigma \in$ R-*pr. Entonces* min^σ *y* max^σ *son el mínimo y máximo respectivamente entre los operadores de cerradura c (en* R-***Mod****) con la propiedad de que* $c_M(0) = \sigma(M)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea c un operador de cerradura en R-***Mod*** que satisface $c_M(0) = \sigma(M)$ para cada $M \in$ R-***Mod***, como $\sigma(M) = c_M(0) \leq c_M(N)$ para cada $N \leq M$ uno tiene que $\mathrm{min}_M^\sigma(N) = N + \sigma(M) \leq N + c_M(N) = c_M(N)$. Por continuidad uno tiene $c_M(N) = c_M(p^{-1}(0)) \leq p^{-1}(c_{M/N}(0)) = p^{-1}(\sigma(M/N)) = \mathrm{max}_M^\sigma(N)$. ✠

[2]Un submódulo N de M se llama completamente invariante si para cada endomorfismo $f : M \to M$ se tiene que $f(N) \leq N$.

Para cada morfismo de módulos $f : M \to N$ y $L \leq M$ hay un R-morfismo inducido $f_L : M/L \to N/f(L)$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_M"'] & N \arrow[d, "p_N"] \\ M/L \arrow[r, "f_L"'] & M/f(L) \end{tikzcd}$$

p_M y p_N son las proyecciones naturales. Veamos quienes son los morfismos c-iniciales y c-finales en R-***Mod***.

PROPOSICIÓN 5.5. *Sean* $\sigma \in$ R-*pr y* $f : M \to N$.*Entonces:*

1. f *es* $\min^{\sigma}$*-inicial si y sólo si* $f^{-1}(\sigma(N)) = \sigma(M)$*;*
2. f *es* $\max^{\sigma}$*-inicial si y sólo si* $f_L^{-1}(\sigma(N/f(L))) = \sigma(M/L)$ *para cada* $L \leq M$*;*
3. f *es* $\min^{\sigma}$*-final si y sólo si* f *es epi y* $f(\sigma(M)) = \sigma(N)$*;*
4. f *es* $\max^{\sigma}$*-final si y sólo si* f *es epi.*

DEMOSTRACIÓN. Para $\sigma \in$ R-pr y $f : M \to N$ en R-***Mod*** tenemos que:

1. f es un morfismo $\min^{\sigma}$-inicial si y sólo si para cada $L \leq M$ tenemos que $\min^{\sigma}_M(L) = f^{-1}(\min^{\sigma}_N(f(L))$ si y sólo si $L + \sigma(M) = f^{-1}(f(L) + \sigma(N))$ si y sólo si $L + \sigma(M) = L + f^{-1}(\sigma(N))$ si y sólo si $\sigma(M) = f^{-1}(\sigma(M))$.
2. Similar a 1).
3. f es $\min^{\sigma}$-final si y sólo si para cada $K \leq N$ $\min^{\sigma}_N(K) = f(\min^{\sigma}_M(f^{-1}(K)))$ si y sólo si $K + \sigma(N) = f(f^{-1}(K) + \sigma(M))$ si y sólo si $K + \sigma(N) = f(f^{-1}(K)) + f(\sigma(M))$ si y sólo si f es epi y $\sigma(N) = f(\sigma(M))$.
4. Similar a 3).

✠

OBSERVACIÓN 5.6. *De la definición de* $\min$ *y* $\max$ *uno tiene que*

i) N *es* $\min^{\sigma}$*-cerrado en* M *si y sólo si* $\sigma(M) \subseteq N$*;*
ii) N *es* $\min^{\sigma}$*-denso en* M *si y sólo si* $\sigma(M) + N = M$*;*
iii) N *es* $\max^{\sigma}$*-cerrado en* M *si y sólo si* $\sigma(M/N) = 0$*;*
iv) N *es* $\max^{\sigma}$*-denso en* M *si y sólo si* $\sigma(M/N) = M/N$.

Algunas propiedades son dadas en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 5.7. *Sea* $\sigma \in$ R-*pr. Entonces se satisface:*

1. $\min^{\sigma}$ *es idempotente;*
2. $\max^{\sigma}$ *es idempotente si y sólo si* σ*es un radical;*

3. min^σ *es débilmente hereditario si y sólo si* max^σ *es débilmente hereditario si y sólo si* σ *es un prerradical idempotente;*
4. min^σ *es hereditario si y sólo si* max^σ *es hereditario si y sólo si* σ *es un prerradical hereditario.*

DEMOSTRACIÓN. 1. es obvio;

2. Para $N \leq M$ y $\sigma \in R\text{-pr}$ tenemos que $\mathrm{max}^\sigma_M(\mathrm{max}^\sigma_M(N)) = \mathrm{max}^\sigma_M(N)$ si y sólo si $\sigma(M/\mathrm{max}^\sigma_M(N)) = 0$, como $\sigma(M) \leq p^{-1}(\sigma(M/N)) = \mathrm{max}^\sigma_M(N)$ tomanto $N = 0$ se convierte en igualdad. Por lo tanto la condición es equivalente a que $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$, etso es , que σ sea un radical.
3. $\sigma(\sigma(M))$ es la min^σ-cerradura de 0 en $\sigma(M)$. Esto nos dice que min^σ es débilmente hereditario si y sólo si $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$. Para $N \leq M$, N es max^σ-denso en $\mathrm{max}^\sigma_M(N)$ si y sólo si $\sigma(\mathrm{max}^\sigma_M(N)/N) = \mathrm{max}^\sigma_M(N)/N$, como el R-módulo anterior es isomorfo a $\sigma(M/N)$, de la definición de max^σ obtenemos que max^σ es débilmente hereditario si y sólo si $\sigma(\sigma(M/N)) = \sigma(M/N)$ para cada $N \leq M$.
4. Sean $N \leq L \leq M$, entonces $\mathrm{min}^\sigma_M(N) \cap L = (\sigma(M)+N) \cap L = (\sigma(M) \cap L) + N = \sigma(L) + N = \mathrm{min}^\sigma_L(N)$, lo cual significa que min^σ es hereditario, para el regreso basta considerar $N = 0$. Sea $p : M \to M/N$ la proyección natural, si σ es hereditario entonces se tiene la igualdad

$$\sigma(p(L)) = \sigma(M/N) \cap p(L)$$

tomando imágenes inversas con respecto a p obtenemos $\mathrm{max}^\sigma_L(N) = \mathrm{max}^\sigma_M(N) \cap L$, lo que implica que max^σ es hereditario, para el regreso basta considerar $N = 0$.

✠

FALTA

PAGINA

No. 42

CAPÍTULO

3 Subcategorías (Co)Escindibles

En este capítulo veremos algunas subcategorías de interés que pueden verse como generalizaciones de conexidad y disconexidad. A través de este capítulo consideraremos una categoría $\mathcal{C}$ con una $(\mathbb{E}, \mathcal{M})$-factorización para pozos y $\mathcal{E}$ es la colección de pozos singulares que están en $\mathbb{E}$. Todas las subcategorías son consideradas plenas a menos que se diga lo contrario.

1. Subcategorías $\Delta(c)$

En esta sección estudiaremos subcategorías que generalizan el concepto de espacio Hausdorff (o espacio T_2) utilizando los operadores de cerradura, veremos sus propiedades y algunos ejemplos.

DEFINICIÓN 1.1. *Sea* $c \in CL(\mathcal{C}, \mathcal{M})$. *Un objeto* $X \in \mathcal{C}$ *es* c*-separado (o* c*-Hausdorff) si para cada* $u, v : Y \rightrightarrows X$ *y* $m \in Sub(Y)$ *con* $u \circ m = v \circ m$, *también* $u \circ c_Y(m) = v \circ c_Y(m)$. $\Delta(c)$ *denota la subcategoría plena de objetos c-separados.*

PROPOSICIÓN 1.2. *Supongamos que* $\mathcal{C}$ *tiene límites y morfismos en* $\mathcal{E}$ *son epimorfismos. Entonces:*

1. $\Delta(c)$ *es cerrada bajo monofuentes en* $\mathcal{C}$*, en particular bajo todos los límites en* $\mathcal{C}$*. Por lo tanto,* $\Delta(c)$ *es extremadamente epireflexiva*[1] *en* $\mathcal{C}$ *si* $\mathcal{C}$ *es bien* $\mathcal{E}$*-copotenciada.*
2. *Un objeto* $X \in \mathcal{C}$ *es* c*-separado si y sólo si el morfismo diagonal (el igualador de las proyecciones del producto, el cual está en* $\mathcal{M}$ *pues* $\mathcal{E}$ *consta de epimorfismos)* $\delta_X : X \to X \times X$ *es c-cerrado.*

[1] esto significa que la reflexión es un epimorfismo extremal

Demostración. 1. Sean $(p_i : X \to X_i)$ una monofuente tal que $X_i \in \Delta(c)$ para cada $i \in I$ y $u, v : Y \rightrightarrows X$ con $m \in \mathsf{Sub}(Y)$ tal que $u \circ m = v \circ m$. Entonces $(p_i \circ u) \circ m = (p_i \circ v) \circ m$ implica $(p_i \circ u) \circ c_Y(m) = (p_i \circ v) \circ c_Y(m)$ (pues $Y_i \in \Delta(c)$) y por lo tanto $u \circ c_Y(m) = v \circ c_Y(m)$ pues $(p_i)_{i \in I}$ es monofuente. Reflexividad de $\Delta(c)$ se sigue del Teorema General del Funtor Adjunto. Que la reflexión sea extremal se sigue de las propiedades del sistema de factorización y de que $\mathcal{E}$ consta de epimorfismos.

2. Sea $X \in \Delta(c)$. Como δ_X es el igualador de $p_1, p_2 : X \times X \to X$ tenemos que $p_1 \circ c(\delta_X) = p_2 \circ c(\delta_X)$, por lo tanto $c(\delta_X) \leq \delta_X$ por la propiedad universal del igualador. Ahora supongamos que δ_X es c-cerrado y supongamos que $u \circ m = v \circ m$ para $u, v : Y \rightrightarrows X$ y $m \in \mathsf{Sub}(Y)$. Entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "u \circ m"] \arrow[d, "m"'] & X \arrow[d, "\delta_X"] \\ Y \arrow[r, "\langle u,v \rangle"'] & X \times X \end{tikzcd}$$

Como δ_X es c-cerrado del Corolario 2.2.4 existe un (único) morfismo $t : c_Y(M) \to X$ con $\delta_X \circ t = \langle u, v \rangle \circ c_Y(m)$, por lo tanto $u \circ c_Y(m) = t = v \circ c_Y(m)$.

✠

Proposición 1.3. *Una subcategoría $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$ es de la forma $\Delta(c)$ para algún operador de cerradura c de $\mathcal{C}$ si y sólo si satisface la siguiente condición:*
(Δ) para cada fuente $(h_i : X^2 \to B_i^2)_{i \in I}$ con $B_i \in \mathcal{B}$ y $\delta_X \cong \bigwedge_{i \in I} h_i^{-1}(\delta_{B_i})$, uno tiene $X \in \mathcal{B}$.

Demostración. (Δ) es ciertamente una condición necesaria para que $\mathcal{B}$ sea de la forma $\Delta(c)$, pues como δ_{B_i} es c-cerrado, también $h_i^{-1}(\delta_{B_i})$ es c-cerrado(esto se sigue de la propiedad de continuidad y de que ínfimos son productos fibrados) y así $\bigwedge h_i^{-1}(\delta_{B_i})$ es c-cerrado. Para el regreso note que

$$\mathsf{reg}_X^{\mathcal{B}}(m) \cong \bigwedge \{h^{-1}(\delta_B) \mid h : X \to B^2, B \in \mathcal{B}, h(m) \leq \delta_B\}$$

define un operador de cerradura idempotente de $\mathcal{C}$ llamado el operador de cerradura $\mathcal{B}$-regular que también se describe como

$$\mathsf{reg}_X^{\mathcal{B}}(m) \cong \bigwedge \{\mathsf{igualador}(u, v) \mid u, v : X \rightrightarrows B, B \in \mathcal{B}, u \circ m = v \circ m\}$$

Uno siempre tiene $\mathcal{B} \subseteq \Delta(\mathsf{reg}^{\mathcal{B}})$, y "$\supseteq$" es obviamente garantizada por (Δ). ✠

Bajo pequeñas restricciones tenemos un resultado que nos da más información acerca de subcategorías delta en categorías concretas.

PROPOSICIÓN 1.4. *Supongamos que cuasipuntos detectan monofuentes en $\mathcal{C}$. Entonces una subcategoría $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$ es de la forma $\Delta(c)$ para algún c si y sólo si $\mathcal{B}$ es cerrada bajo monofuentes en $\mathcal{C}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sólo tenemos que probar el regreso. Sea $(h_i)_{i\in I}$ como en (Δ), para cada $x \in qptX$ denotamos por $g_x : X \to X^2$ la gráfica de $X \xrightarrow{\eta_X} TX \xrightarrow{x} X$, esto es, g_x es el único morfismo que hace al siguiente diagrama un producto fibrado

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "g_x=\langle 1_X, x\circ\eta_X\rangle"'] & TX \arrow[r, "x"] & X \arrow[d, "\delta_X"] \\ X\times X \arrow[rr, "1_X\times x\circ\eta_X"'] & & X\times X \end{tikzcd}$$

Por la hipótesis, basta probar que la fuente $(h_i \circ g_x : X \to B_i^2)_{i\in I, x\in qptX}$ es mono. Supongamos que $h_i \circ g_x \circ y = h_i \circ g_x \circ z$ para cada $i \in I$ y para cada $x \in qpX$, con z, y cuasipuntos de X. Para $x = y$ tenemos

$$h_i \circ \langle z, y\rangle = h_i \circ g_y \circ z = h_i \circ g_y \circ y = h_i\langle y, y\rangle = h_i \circ \delta_X \circ y = \delta_{B_i} \circ h_i' \circ y$$

donde h_i' es el morfismo inducido por $\delta_X \leq h_i^{-1}(\delta_{B_i})$ para cada $i \in I$. Lo anterior implica que $h_i(\langle z, y\rangle) \leq \delta_{B_i}$, por tanto $\langle z, y\rangle \leq h^{-1}(\delta_{B_i})$ para cada $i \in I$, lo que implica $\langle y, z\rangle \leq \delta_X$ por hipótesis sobre $(h_i)_{i\in I}$. Por lo tanto $z = y$ y esto concluye la demostración. ✠

OBSERVACIÓN 1.5. *Notemos que si $\mathsf{SUB}(\mathcal{C})$ es la colección de todas las subcategorías (plenas) de $\mathcal{C}$ ordenadas parcialmente por inclusión obtenemos la adjunción*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{SUB}(\mathcal{C})^{op} \arrow[r, shift right, "reg"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{CL}(\mathcal{C}, \mathcal{M}) \arrow[l, shift right, "\Delta"'] \end{tikzcd}$$

para cada $\mathcal{B} \in \mathsf{SUB}(\mathcal{C})$ y $c \in \mathsf{CL}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ uno obtiene:

i) $\mathcal{B} \subseteq \Delta(reg^{\mathcal{B}})$ y $c \leq reg^{\Delta(c)}$;

ii) $\mathcal{B} \subseteq \Delta(c)$ si y sólo si $c \leq reg^{\mathcal{B}}$.

EJEMPLOS 1.6. Veamos algunos ejemplos en ***Top***.

(1) Al considerar el operador de cerradura Kuratowsi k, $\Delta(k) =$ **Haus** la subcategoría de espacios Hausdorff.

(2) Si consideramos la θ-cerradura, $\Delta(\theta)$ es la subcategoría de espacios de Urysohn, esto es, espacios en los cuales puntos distintos pueden ser separados por vecindades cerradas ajenas.

(3) Con el operador de cerradura secuencial σ, obtenemos que $\Delta(\sigma)$ es la subcategoría de espacios donde sucesiones convergentes tienen límite único.

(4) Para el operador de cerradura componente con tenemos que $\Delta(\mathrm{con})$ es la subcategoría de espacios hereditariamente disconexos, estos son espacios con componente conexa de cada punto trivial.

(5) Para el operador de cerradura cuasicomponente q tenemos que $\Delta(\mathrm{q})$ es la subcategoría de espacios totalmente disconexos, esto es, espacios con cuasicomponente de cada punto trivial. q es el operador de cerradura regular inducido por $\Delta(\mathrm{q})$. En efecto, si $u : U \to X$ es un encaje cerrabierto, entonces u es el igualador de una función constante y la función característica $\chi_U : X \to \{0,1\}$ de U, donde $\{0,1\}$ tiene la topología discreta (por lo tanto es totalmente disconexo), por lo tanto cada encaje q-cerrado es $\mathrm{reg}^{\Delta(\mathrm{q})}$-cerrado. La inversa es trivialmente satisfecha pues $\mathrm{reg}^{\Delta(\mathrm{q})}$ es el operador de cerradura más grande c tal que $\Delta(c) = \Delta(\mathrm{q})$.

(6) Por último, para el operador de cerradura componente por trayectorias path, $\Delta(\mathrm{path})$ es la subcategoría de espacios hereditariamente disconexos por trayectorias, estos son, espacios con componente conexa por trayectorias de cada punto trivial.

Ahora veamos ejemplos en R-***Mod***

(7) Para $\eta \in$ R-pr tenemos que $\Delta(\mathrm{max}^\eta) = \Delta(\mathrm{min}^\eta) = \mathbb{F}_\eta$. En efecto $N \in \Delta(\mathrm{max}^\eta)$ si y sólo si $\mathrm{max}^\eta_{N^2}(\delta_N) = \delta_N$ esto significa que $p^{-1}(\eta(N \times N/\delta_N)) = p^{-1}(0)$ donde $p : N \times N \to N \times N/\delta_N$ es la proyección natural, pero como p es sobre tenemos que $\eta(N) \cong \eta(N \times N/\delta_N) = 0$ por tanto esto nos da $\Delta(\mathrm{max}^\eta) = \mathbb{F}_\eta$. Para la otra igualdad uno siempre tiene $\Delta(\mathrm{max}^\eta) \subseteq \Delta(\mathrm{min}^\eta)$ ya que $\mathrm{min}^\eta \leq \mathrm{max}^\eta$. Si $N \in \Delta(\mathrm{min}^\eta)$ entonces $\delta_N + \delta_N = \delta_N$, esto implica que $\eta(N) \times \eta(N) = \eta(N \times N) \subseteq \delta_N$ lo que implica que $\eta(N) = 0$ así que con esto tenemos las dos igualdades.

(8) Un operador de cerradura c es regular si y sólo si $c = \mathrm{max}^\eta$ para un radical η. En efecto, si c es regular entonces $c = \mathrm{reg}^{\mathcal{L}}$ donde $\mathcal{L} = \Delta(c)$, como c es idempotente, tenemos que el prerradical inducido η es un radical y este puede ser calculado como

$$\eta(N) = \mathrm{reg}^{\mathcal{L}}_N(0) = \bigcap\{Nuf \mid f : M \to L, L \in \mathcal{L}\}$$

por el ejemplo anterior también $\Delta(\mathrm{max}^\eta) = \mathcal{L}$, esto en particular nos dice que $\mathrm{max}^\eta \leq \mathrm{reg}^{\mathcal{L}}$ pues $\mathrm{reg}^{\mathcal{L}}$ es el operador de cerradura d máximo con la propiedad $\Delta(d) = \mathcal{L}$. Para la otra desigualdad por la proposición 2.5.5 basta probar que $\mathrm{reg}^{\mathcal{L}}_M(0) = \eta(M)$. La desigualdad que ya tenemos nos da

$r(M) = max^{\eta}_{M}(0) \leq reg^{\mathcal{L}}_{M}(0)$, ahora como η es un radical tenemos que $M/\eta(M) \in \mathbb{F}_{\eta} = \Delta(max^{\eta}) = \mathcal{L}$ y por tanto para la proyección natural $q : M \to M/\eta(M)$ tenemos que $reg^{\mathcal{L}}_{M}(0) \leq \mathrm{Nu}\ q = \eta(M)$ y esto nos da el resultado. Para la otra implicación se procede de manera similar.

2. Subcategorías $\nabla(c)$

Ahora toca el turno de estudiar el concepto dual a objeto c-separado, este es, objeto c-coseparado. En la literatura se le conoce más comúnmente como objeto c-conexo, pero aquí decidimos dejar el de coseparado pues lo creemos más conveniente. Comencemos con algunas definiciones.

DEFINICIÓN 2.1. *Diremos que la clase $\mathcal{E}$ es cerrada bajo productos finitos si $f, g \in \mathcal{E}$ implica que $f \times g \in \mathcal{E}$.*

DEFINICIÓN 2.2. *Un operador de cerradura $c \in CL(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ se llama finitamente productivo si para cada $X, Y \in \mathcal{C}$, $m \in Sub(X)$ y $n \in sub(Y)$ se tiene que $c_{X\times Y}(m \times n) = c_X(m) \times c_Y(n)$.*

DEFINICIÓN 2.3. *Un objeto $X \in \mathcal{C}$ es c-coseparado (o c-conexo) si $\delta_X : X \to X \times X$ es c-denso. $\nabla(c)$ denota a la subcategoría plena de objetos c-coseparados.*

Antes de dar las propiedades de objetos c-coseparados necesitamos un lema

LEMA 2.4. *Sean $c \in CL(\mathcal{C}, \mathcal{M})$, $e : X \to Y$ y $d : Y \to Z$ morfismos en $\mathcal{C}$, entonces:*

1. *Si $e \in \mathcal{E}$ y $d \in \mathcal{E}^c$, entonces $d \circ e \in \mathcal{E}^c$;*
2. *Si $d \circ e \in \mathcal{E}^c$, entonces $d \in \mathcal{E}^c$;*
3. *Si $d \circ e \in \mathcal{E}^c$, $d \in \mathcal{M}$ y c hereditario, entonces $e \in \mathcal{E}^c$.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Como $e(1_X) \cong 1_Y$ y $c_Z(d(1_Y)) = 1_Z$ tenemos que $c_Z(d(e(1_X))) \cong c_Z(d(1_Y)) \cong 1_Z$.
2. $1_Z \cong c_Z(d(e(1_X))) \leq c_Z(d(1_Y)) \leq 1_Z$.
3. Como $c_Z(d(e(X))) \cong 1_Z$, tenemos que

$$c_Y(e(1_X)) \cong d^{-1}(c_Z(d(e(X)))) \cong d^{-1}(1_Z) \cong 1_Y.$$

✠

PROPOSICIÓN 2.5. *Para un morfismo $f : X \to Y$ en $\mathcal{C}$ y $c \in CL(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ tenemos:*

1. *Si $f \in \mathcal{E}$ con $\mathcal{E}$ cerrado bajo productos finitos o estable bajo productos fibrados (en particular $f \times f = (f \times 1) \circ (1 \times f) \in \mathcal{E}$), entonces $X \in \nabla(c)$ implica $Y \in \nabla(c)$;*

2. *Si* $f \in \mathcal{M}$ *es* c*-denso con* c *idempotente y finitamente productivo, entonces* $X \in \nabla(c)$ *implica* $Y \in \nabla(c)$*;*
3. *Si* $f \in \mathcal{M}$ *es* c*-denso con* c *idempotente y hereditario, entonces* $Y \in \nabla(c)$ *implica* $X \in \nabla(c)$.

DEMOSTRACIÓN. Considere el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta_X"'] & Y \arrow[d, "\delta_Y"] \\ X \times X \arrow[r, "f\times f"'] & Y \times Y \end{tikzcd}$$

1. Uno tiene $f \times f \in \mathcal{E}$ y $\delta_X \in \mathcal{E}^c$, como $\delta_Y \circ f = (f \times f) \circ \delta_X \in \mathcal{E}^c$ por (1) del lema anterior tenemos que $\delta_Y \in \mathcal{E}^c$.
2. Como c es finitamente productivo tenemos que $f \times f \in \mathcal{E}^c$, además $\delta_X \in \mathcal{E}^c$ y como c es idempotente por la proposición 2.2.5 se tiene que $(f \times f) \circ \delta_X \in \mathcal{E}^c$ y por (2) del lema anterior tenemos que $\delta_Y \in \mathcal{E}^c$.
3. Es similar a el caso anterior usando (3) del lema anterior.

✠

Ahora veamos una condición suficiente para que $\nabla(c)$ sea cerrada bajo productos finitos.

PROPOSICIÓN 2.6. $\nabla(c)$ *es cerrada bajo productos finitos en* $\mathcal{C}$ *cuando* $c \in CL(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ *es finitamente productivo.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de que c es finitamente productivo, $\mathcal{E}^c \cap \mathcal{M}$ es cerrada bajo productos finitos y además

$$\delta_{X\times Y} \cong \delta_X \times \delta_Y : X \times Y \to (X \times X) \times (Y \times Y)$$

. ✠

Para considerar productos arbitrarios observemos que cualquier producto $X_I = \prod_{i\in I} X_i$ es el límite de productos finitos $X_F = \prod_{i\in F} X_i$ ($F \subseteq I$ finito), a través de las proyeccion es $p_F : X_I \to X_F$. Para ver productividad en $\nabla(c)$ necesitamos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.7. *Uno dice que* $c \in CL(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ *tiene la propiedad de estructura finita para productos PEFP, si y sólo si*

$$c_{X_I}(m) \cong \bigwedge_F p_F^{-1}(c_{X_F}(p_F(m)))$$

para cada $m \in \mathrm{Sub}(X_I)$. *El producto* X_I *es llamado no trivial si todas las proyecciones* p_F *pertenecen a* $\mathcal{E}$, *y* c *es llamado no trivialmente productivo si*

$$c_{X_I}(\prod_{i \in I} m_i) \cong \prod_{i \in I} c_{X_i}(m_i)$$

para cada $m_i : M_i \to X_i$ *in* $\mathcal{M}$, *con* $M_I = \prod_{i \in I} M_i$ *un producto no trivial.*

LEMA 2.8. *Sea* c *un operador de cerradura idempotente y finitamente productivo, si existe* $d \in \mathrm{CL}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ *con PEFP y* $d \leq c$, *entonces* c *es no trivialmente productivo.*

DEMOSTRACIÓN. Con la composición de operadores de cerradura definida "puntualmente", de $d \leq c$ obtenemos que $c \leq dc \leq cc$, por lo tanto $c \cong dc$ pues c es idempotente. Para $m_I = \prod_{i \in I} m_i$ y $n_I = \prod_{i \in I} c_{X_i}(m_i)$ debemos probar que $n_I \leq c_{X_I}(m_I)$ pues la otra desigualdad se satisface trivialmente. Para esto, es suficiente probar que $n_I \leq d_{X_I}(c_{X_I}(m_I))$. Como d satisface PEFP, es suficiente verificar

$$p_F(n_I) \leq d_{X_F}(p_F(c_{X_I}(m_I)))$$

para cada subconjunto finito $F \subseteq I$. Descomponiendo m_I como $m_I \cong m_F \times m_{I \setminus F}$ obtenemos $c_{X_I}(m_I) \cong c_{X_F}(m_F) \times c_{X_{I \setminus F}}(m_{I \setminus F})$ por que c es finitamente productivo, por lo tanto si el producto no es trivial tenemos

$$p_F(c_{X_I}(m_I)) \cong c_{X_F}(m_F)$$

Usando otra vez productividad finita, obtenemos que

$$p_F(n_I) \leq n_F \cong c_{X_F}(m_F) \leq d_{X_F}(p_F(c_{X_I}(m_I))),$$

esto finaliza la demostración. ✠

Del lema anterior automáticamente tenemos:

TEOREMA 2.9. *Sea* c *un operador de cerradura idempotente tal que existe* $d \in \mathrm{CL}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ *con PEFP y* $d \leq c$. *Si* c *es finitamente productivo, entonces* $\nabla(c)$ *es cerrada bajo productos no triviales en* $\mathcal{C}$.

En seguida veremos una caracterización de subcategorías nabla similar a la dada para subcategorías delta.

PROPOSICIÓN 2.10. *Una subcategoría* $\mathcal{A}$ *de* $\mathcal{C}$ *es de la forma* $\nabla(c)$ *para algún operador de cerradura* c *de* $\mathcal{C}$ *si y sólo si satisface la siguiente condición:*
(∇) *Para cada pozo* $(h_i : A_i^2 \to X^2)_{i \in I}$ *con* $A_i \in \mathcal{A}$ *y* $h_i(\delta_{A_i}) \leq \delta_X$ *para cada* $i \in I$ *y* $1_{X^2} \cong \delta_X \vee \bigvee_{i \in I} h_i(1_{A_i^2})$, *uno tiene* $X \in \mathcal{A}$.

DEMOSTRACIÓN. Para $\mathcal{A} = \nabla(c)$ y un pozo $(h_i)_{i\in I}$ como en (∇), como

$$h_i(c(\delta_{A_i})) \leq c(h_i(\delta_{A_i})) \leq \delta_X,$$

uno tiene

$$1_X \cong \delta_X \vee \bigvee_{i\in I} h_i(1_{A^2}) \cong \delta_X \vee \bigvee_{i\in I} h_i(c(\delta_{A_i})) \leq c(\delta_X),$$

por lo tanto $X \in \nabla(c)$. Para el regreso, para cualquier subcategoría $\mathcal{A}$ uno define la cerradura $\mathcal{A}$-corregular como

$$\mathrm{coreg}_X^{\mathcal{A}}(m) \cong m \vee \bigvee\{h(1_{A^2}) \mid h : A^2 \to X, A \in \mathcal{A}, h(\delta_A) \leq m\}.$$

Trivialmente uno tiene $\mathcal{A} \subseteq \nabla(\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}})$. Además, bajo la condición (∇), de $X \in \nabla(\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}})$ inmediatamente se obtiene $X \in \mathcal{A}$. ✠

Bajo pequeñas hipótesis adicionales, el criterio se simplifica un poco. Recordemos que $\mathcal{P}$ es la subcategoría de objetos preterminales.

PROPOSICIÓN 2.11. *Supongamos que $\mathcal{C}$ tiene suficientes cuasipuntos. Entonces una subcategoría $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}$ es de la forma $\nabla(c)$ para algún c si y sólo si $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$ y satisface la siguiente condición:*
(∇_1) *Para cada pozo no vacío $(h_i : A_i^2 \to X^2)_{i\in I}$ con $A_i \in \mathcal{A}$ y $h_i(\delta_{A_i}) \leq \delta_X$ para cada $i \in I$ y $1_{X^2} \cong \bigvee_{i\in I} h_i(1_{A_i^2})$, uno tiene $X \in \mathcal{A}$.*

DEMOSTRACIÓN. Como para cada $P \in \mathcal{P}$, δ_P es iso, la ida es clara. Para el regreso consideremos el pozo formado por todos los morfismos $(h : A^2 \to X^2)$ con $A \in \mathcal{A}$ y $h(\delta_A) \leq \delta_X$. Entre esos morfismos están los de la forma x^2 donde $x : TX \to X$, cuyo supremo es δ_X (por hipótesis). Por lo tanto

$$\mathrm{coreg}_{X^2}^{\mathcal{A}}(\delta_X) \cong \bigvee\{h(1_{A^2}) \mid h : A^2 \to X^2, A \in \mathcal{A}, h(\delta_A) \leq \delta_X\}$$

ahora podemos seguir argumentando como en la proposición anterior. ✠

OBSERVACIONES 2.12.

1. *El operador de cerradura corregular es débilmente hereditario para cada subcategoría plena $\mathcal{A}$. En efecto, para $m : M \to X$ en $\mathcal{M}$, hay una biyección $h \mapsto h'$ entre los morfismos $h : A^2 \to X$ con $A \in \mathcal{A}$, $h(\delta_A) \leq m$, y los morfismos $h' : A^2 \to c_X(M)$ con $A \in \mathcal{A}$, $h'(\delta_A) \leq c_X(m)$, con $c_X(m) \circ h' = h$, de esta manera tenemos $h(1_{A^2}) = c_X(m) \circ h'(1_{A^2})$. Esto da $c_{c_X(M)}(j_m) \cong 1_{c_X(M)}$.*
2. *Notar que como en el caso de subcategorías delta, también tenemos una adjunción*

$$\begin{tikzcd} CL(\mathcal{C},\mathcal{M}) \arrow[r, shift right, "\nabla"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & SUB(\mathcal{C}) \arrow[l, shift right, "\mathrm{coreg}"'] \end{tikzcd}$$

para cada $\mathcal{A} \in \mathsf{SUB}(\mathcal{C})$ y $c \in \mathsf{CL}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ uno obtiene:

i) $\mathcal{A} \subseteq \nabla(\mathrm{coreg}^{\mathcal{A}})$ y $c \geq \mathrm{coreg}^{\nabla(c)}$;
ii) $\mathcal{A} \subseteq \nabla(c)$ si y sólo si $c \geq \mathrm{coreg}^{\mathcal{A}}$.

EJEMPLOS 2.13. Veamos algunos ejemplos en ***Top***.

(1) Al considerar el operador de cerradura Kuratowsi k, $\nabla(k)$ es la subcategoría de espacios irreducibles.
(2) Si consideramos la θ-cerradura, $\nabla(\theta)$ es la subcategoría de espacios X tal que para cualesquiera abiertos U y V de X con $k(U) \cap k(V) = \emptyset$, entonces $U = \emptyset$ o $V = \emptyset$.
(3) Con el operador de cerradura secuencial σ, obtenemos que $\nabla(\sigma)$ es la subcategoría de espacios X tal que para cualesquiera dos puntos x y y de X, existe una sucesión que converge a ambos.
(4) Para el operador de cerradura componente con tenemos que $\nabla(\mathrm{con})$ es la subcategoría de espacios conexos.
(5) Para el operador de cerradura cuasicomponente q tenemos que $\nabla(q)$ es la subcategoría de espacios conexos.
(6) Por último, para el operador de cerradura componente por trayectorias path, $\nabla(\mathrm{path})$ es la subcategoría de espacios conexos por trayectorias. También tenemos que $\mathrm{path} = \mathrm{coreg}^{I}$, esto es, path es el operador de cerradura corregular inducido por $\{I\}$. En efecto, para $y \in \mathrm{coreg}^{I}_{X}(M)$ existe una función continua $h : I \times I \to X$ con $h(\delta_X) \subseteq M$ y $y \in h(I \times I)$, como el conjunto conexo por trayectorias $h(I \times I)$ intersecta a M, existe un punto $x \in M$ y una trayectoria de x a y, por lo tanto $y \in \mathrm{path}_X(M)$. Ahora si $y \in \mathrm{path}_X(M)$ existe una función continua $f : I \to X$ con $x = f(0) \in M$ y $f(1) = y$, entonces la función continua $h : I \times I \to X$ definida por $h(a, b) = f(| a - b |)$ satisface $h(\delta_I) = \{x\} \subseteq M$ y $h(1, 0) = y$, así que $y \in \mathrm{coreg}^{I}_{X}(M)$.

Ahora veamos ejemplos en R-***Mod***

(7) Para $\eta \in$ R-pr tenemos que $\nabla(\max^{\eta}) = \nabla(\min^{\eta}) = \mathbb{T}_{\eta}$. La demostración es similar a esta dada para subcategorías delta.
(8) Un operador de cerradura c es coregular si y sólo si $c = \min^{\eta}$ para un prerradical idempotente η. La demostración es similar a esta dada para el operador de cerradura regular.

3. Subcategorías Escindibles

En los 80's Arhangel'skiĭ introduce el concepto de espacio escindible, lo usa para aproximar funciones continuas en los reales por medio de funciones arbitrarias. Después se utiliza para debilitar condiciones en varios resultados ([4], [5], [6]). En esta sección estudiaremos el concepto de escindibilidad como fue definido en [9] y veremos algunas de sus propiedades.

DEFINICIÓN 3.1. *Una fuente* $(X \xrightarrow{f_i} Y_i)_{i \in I}$ *es llamada:*

i) *$\mathcal{M}$-separante si para cada* $m, n \in \mathrm{Sub}(X)$ *y cada* $i \in I$, $f_i(n) = f_i(m)$ *implica* $n = m$*;*
ii) *Fuertemente $\mathcal{M}$-separante si para cada* $m \in \mathrm{Sub}(X)$ *existe* $i \in I$ *tal que* $f_i^{-1}(f_i(m)) = m$.

OBSERVACIONES 3.2.

1. *Claramente toda fuente fuertemente $\mathcal{M}$-separante es $\mathcal{M}$-separante.*
2. *la fuente* $(X \xrightarrow{f_i} Y_i)_{i \in I}$ *es $\mathcal{M}$-separante si y sólo si para cada* $m \in \mathrm{Sub}(X)$, $m = \bigwedge_{i \in I} f_i^{-1}(f_i(m))$. *En efecto, si se satisface* (i) *en la definición anterior entonces para cada* $i \in I$, $f_i(m) \leq f_i(\bigwedge_{i \in I} f_j^{-1}(f_j(m))) \leq f_i(f_i^{-1}(f_i(m))) = f_i(m)$, *así que* $m = \bigwedge_{i \in I} f_i^{-1}(f_i(m))$. *Inversamente, si para cada* $i \in I$ $f_i(m) = f_i(n)$ *entonces* $m = \bigwedge_{i \in I} f_i^{-1}(f_i(m)) = \bigwedge_{i \in I} f_i^{-1}(f_i(n)) = n$.
3. *Para morfismos considerados como fuentes singulares, ambas nociones en la definición anterior coinciden. Así que a tales morfismos los llamaremos $\mathcal{M}$-separantes.*

EJEMPLOS 3.3.

1. *En categorías topológicas sobre* ***Con*** *siendo $\mathcal{M}$ la clase de encajes, una fuente* $(f_i : X \to Y_i)_{i \in I}$ *es $\mathcal{M}$-separante si y sólo si para cada* $M \subseteq X$ *y para cada* $x \in X \setminus M$ *existe* $i \in I$ *tal que* $f_i(x) \notin f_i(M)$.
2. *Si* X_{cof} *es un conjunto infinito equipado con la topología cofinita y* S *es el espacio de dos puntos con un sólo abierto no trivial (usualmente llamado el espacio de Sierpinski), entonces la fuente* $(f : X_{cof} \to S)_{f \in \mathrm{Hom}(X_{cof}, S)}$ *es $\mathcal{M}$-separante en* ***Top****, pero no fuertemente $\mathcal{M}$-separante ($\mathcal{M}$ la clase de encajes).*

DEFINICIÓN 3.4. *Diremos que en* $\mathcal{C}$ *subobjetos son separantes si para cualesquiera morfismos* $f, g : X \rightrightarrows Y$ *tales que para cada* $m \in \mathrm{Sub}(X)$ *se tiene que* $f(m) = g(m)$, *entonces* $f = g$.

En cualquier categoría topológica sobre ***Con***, con $\mathcal{M}$ la clase en encajes, subobjetos son separantes, esto se sigue de que en particular puntos son subobjetos. En ***Grp*** no sucede esto: Considere $f, g : \mathbb{Z}_3 \rightrightarrows \mathbb{Z}_3$ con $f = 1_{\mathbb{Z}_3}$ y para cada $x \in \mathbb{Z}_3$ $g(x) = 2x \pmod 3$. Es claro que ambos coinciden en subobjetos, pero los morfismos no son iguales.

PROPOSICIÓN 3.5.

1. *Si en $\mathcal{C}$ subobjetos son separantes entonces toda fuente $\mathcal{M}$-separante es monofuente;*
2. *Si $\mathcal{E}$ es estable bajo productos fibrados a lo largo de monomorfismos, entonces todo monomorfismo es $\mathcal{M}$-separante.*

DEMOSTRACIÓN.

1. Sean $(f : X \to Y_i)_{i\in I}$ una fuente $\mathcal{M}$-separante y $u, v : A \rightrightarrows X$ morfismos tales que para cada $i \in I$ $f_i \circ u = f_i \circ v$. Para cada $m \in \mathrm{Sub}(A)$ tenemos $f_i(u(m)) = f_i(v(m))$ lo cual implica que $u(m) = v(m)$ (pues la fuente es $\mathcal{M}$-separante) y como subobjetos son separantes concluimos que $u = v$.
2. Se sigue de la propisición 1.1.29 .

✠

Ahora nos toca examinar las subcategorías que son cerradas bajo las fuentes antes definidas. Usando las propiedades de la imagen e imagen inversa obtenemos inmediatamente el siguiente lema.

LEMA 3.6. *Si una fuente $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$ se factoriza a través de un morfismo $f : X \to Y$, entonces para cada $m \in \mathrm{Sub}(X)$ se tiene que $f^{-1}(f(m)) \leq \bigwedge_{i\in I} f_i^{-1}(f_i(m))$. En particular si $(f_i)_{i\in I}$ es $\mathcal{M}$-separante entonces así lo es f.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada $i \in I$ tenemos que $f_i = g_i \circ f$, Entonces para $m \in \mathrm{Sub}(X)$ tenemos:

$$\begin{aligned} f_i^{-1}(f_i(m)) &= (g_i f)^{-1}((g_i f(m)) \\ &= f^{-1}(g^{-1}((g_i f)(m)) \\ &= f^{-1}(g_i^{-1}(g_i(f(m)))) \\ &\geq f^{-1}(f(m)) \end{aligned}$$

Por lo tanto $f^{-1}(f(m)) \leq \bigwedge_{i\in I} f_i^{-1}(f_i(m))$. Si $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$ es $\mathcal{M}$-separante entonces $f^{-1}(f(m)) \leq m$ y la igualdad se sigue. ✠

PROPOSICIÓN 3.7. *Sea $\mathcal{Q}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$ cerrada bajo productos, entonces:*

1. *$\mathcal{Q}$ es cerrada bajo fuentes $\mathcal{M}$-separantes pequeñas si y sólo si $\mathcal{Q}$ es cerrada bajo fuentes fuertemente $\mathcal{M}$-separantes pequeñas si y sólo si $\mathcal{Q}$ es cerrada bajo morfismos $\mathcal{M}$-separantes.*
2. *Si además $\mathcal{E}$ es estable bajo productos fibrados a lo largo de monomorfismos y subobjetos son separantes, las propiedades enunciadas arriba son también equivalentes a:*
   $\mathcal{Q}$ es cerrada bajo monomorfismos.

DEMOSTRACIÓN.

1. Lo único que se requiere para la demostración es que cerrado bajo morfismos $\mathcal{M}$-separantes implica cerrado bajo fuentes $\mathcal{M}$-separantes pequeñas. Esto se sigue directamente del lema anterior al factorizar una fuente pequeña $(f_i : X \to Q_i)_{i \in I}$, con cada $Q \in \mathcal{Q}$, a través del producto:
$$X \xrightarrow{\langle f_i \rangle} \prod_{j \in I} Q_j \xrightarrow{p_i} Q_i$$
   y de que $\langle f_i \rangle$ es $\mathcal{M}$-separante.
2. Bajo las condiciones dadas se sigue de la proposición 3.3.5 que monomorfismos y morfismos $\mathcal{M}$-separantes coinciden.

✠

Lo anterior será aplicado para dar la noción importante de esta sección, una subcategoría escindible.

DEFINICIÓN 3.8. *Sea $\mathcal{Q}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$.*

1. *$m \in \mathsf{Sub}(X)$ es una $\mathcal{Q}$-pieza de X si existe un morfismo $f : X \to Q$ con $Q \in \mathcal{Q}$ tal que $m = f^{-1}(f(m))$.*
2. *La subcategoría escindible de $\mathcal{Q}$, denotada por $\mathsf{Spl}(\mathcal{Q})$, está formada por todos los $X \in \mathcal{C}$ tal que para cada $m \in \mathsf{Sub}(X)$, se tiene que m es una $\mathcal{Q}$-pieza de X (en morfismos se considera plena). $\mathcal{Q}$ se llama escindible si y sólo si $\mathcal{Q} = \mathsf{Spl}(\mathcal{Q})$.*

OBSERVACIÓN 3.9. *Para $m \in \mathsf{Sub}(X)$ son equivalentes:*

1. *m es una $\mathcal{Q}$-pieza;*
2. *Existen $f : X \to Q$, $Q \in \mathcal{Q}$ y $n \in \mathsf{Sub}(Q)$ tal que $m = f^{-1}(n)$;*
3. *Existen $f : X \to Q$, $Q \in \mathcal{Q}$ y $m' \in \mathsf{Sub}(X)$ tal que $m = f^{-1}(f(m'))$.*

PROPOSICIÓN 3.10. *$\mathsf{Spl}(\mathcal{Q})$ es la cápsula fuertemente $\mathcal{M}$-separante de $\mathcal{Q}$ (esto es, $X \in \mathsf{Spl}(\mathcal{Q})$ si y sólo si existe una fuente fuertemente $\mathcal{M}$-separante $(f_i : X \to Q_i)_{i \in I}$ con $Q_i \in \mathcal{Q}$ para cada $i \in I$).*

DEMOSTRACIÓN. Claramente si $(f_i : X \to Q_i)_{i\in I}$ es una fuente fuertemente $\mathcal{M}$-separante con cada $Q_i \in \mathsf{Spl}(\mathcal{Q})$, entonces $X \in \mathsf{Spl}(\mathcal{Q})$. Por otro lado si $X \in \mathsf{Spl}(\mathcal{Q})$ entonces para cada $m \in \mathsf{Sub}(X)$ existe un $f_m : X \to Q_m$ con $Q_m \in \mathcal{Q}$ tal que $f_m^{-1}(f_m(m)) = m$ y así la fuente $(f_m : X \to Q_m)_{m\in \mathsf{Sub}(X)}$ es fuertemente $\mathcal{M}$-separante. ✠

COROLARIO 3.11. *$\mathcal{Q}$ es una subcategoría escindible si y sólo si $\mathcal{Q}$ es cerrada bajo fuentes fuertemente $\mathcal{M}$-separantes.*

COROLARIO 3.12.

1. $\mathcal{Q} \subseteq \mathsf{Spl}(\mathcal{Q})$;
2. *Si $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Q}$ entonces* $\mathsf{Spl}(\mathcal{S}) \subseteq \mathsf{Spl}(\mathcal{Q})$;
3. $\mathsf{Spl}(\mathsf{Spl}(\mathcal{Q})) = \mathsf{Spl}(\mathcal{Q})$.

Ahora viene el resultado importante de esta sección.

TEOREMA 3.13.

1. *Si en $\mathcal{C}$ subobjetos son separantes, entonces:*
   $\mathcal{Q}$ es cerrada bajo monofuentes implica $\mathcal{Q}$ es una subcategoría escindible.
2. *Si además $\mathcal{C}$ tiene productos y es bien $\mathcal{E}$-copotenciada con $\mathcal{E}$ estable bajo productos fibrados a lo largo de monomorfismos, entonces:*
   $\mathcal{Q}$ es una subcategoría escindible y productiva si y sólo si $\mathcal{Q}$ es cerrada bajo monofuentes.

DEMOSTRACIÓN.

1. Se sigue de la proposición 3.3.5(1), la observación 3.3.2(1) y el corolario 3.3.11.
2. Sea $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$ una fuente tal que para cada $i \in I$, $Y_i \in \mathcal{Q}$. Para cada $i \in I$ sea $m_i \circ e_i = f_i$ la $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorización de f_i y sea J un conjunto representativo de la fuente $(e_i : X \to M_i)_{i\in I}$. Ahora consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "e_i"] \arrow[ddr, "\langle e_j \rangle"'] & & Y_i \\
& M_i \arrow[ur, "m_i"'] & \\
& \prod_{j\in J} M_j \arrow[u, "p_{j_i}"'] &
\end{tikzcd}$$

Si $(f_i)_{i\in I}$ es una monofuente, entonces $\prod_{j\in J} M_j \in \mathcal{Q}$ (ya que cada $m_j \in \mathcal{M}$ es $\mathcal{M}$-separante y $\mathcal{Q}$ es productiva) y $\langle e_j \rangle$ es monomorfismo. Por lo tanto por la proposición 3.3.5(2) $\langle e_j \rangle$ es $\mathcal{M}$-separante y por el corolario 3.3.11 $X \in \mathcal{Q}$.
Inversamente, si $(f_i)_{i\in I}$ es una fuente fuertemente $\mathcal{M}$-separante, entonces $\prod_{j\in J} M_j \in \mathcal{Q}$ (pues cada m_j es monomorfismo, y cualquier subcategoría cerrada bajo monofuentes es cerrada bajo productos) y por el lema 3.3.6 $\langle e_j \rangle$ es $\mathcal{M}$-separante. Por lo tanto $X \in \mathcal{Q}$ y por el corolario 3.3.11 $\mathcal{Q}$ es una subcategoría escindible.

✠

COROLARIO 3.14. *Sea $\mathcal{C}$ topológica sobre* ***Con*** *con su estructura de (Epi, Encaje)-factorización, entonces:*
$\mathcal{Q}$ es escindible y productiva si y sólo si $\mathcal{Q}$ es cociente-reflexiva en $\mathcal{C}$.

EJEMPLOS 3.15.

1. En R-***Mod*** las subcategorías escindibles son fácilmente caracterizadas: Son clases heretitarias (con respecto a la factorización usual (Epi,Mono)). De hecho, si suponemos que $\mathcal{Q}$ es una clase hereditaria, entonces para $X \in \mathsf{Spl}(\mathcal{Q})$ existe $Q \in \mathcal{Q}$ y $f : X \to Q$ tal que $0 = f^{-1}(f(0)) = f^{-1}(0)$, lo cual significa que X es submódulo de Q, así que $X \in \mathcal{Q}$. La inversa está dada por el corolario 3.3.11 y la observación 3.3.2(4).
2. En la categoría ***Top***, con su (Sobreyección, Encaje)-factorización, las subcategorías $\mathbf{Top_0}$, $\mathbf{Top_1}$ y **Haus** de T_0-espacios, T_1-espacios y espacios Hausdorff respectivamente, son subcategorías escindibles (ver el corolario 3.3.14).

Ahora definiremos el operador de cerradura escindible, para esto necesitamos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 3.16. *La clase de las $\mathcal{Q}$-piezas es cerrada bajo productos fibrados. De esta manera, para cualquier subcategoría $\mathcal{Q}$, la fórmula*

$$\mathsf{spl}_X^{\mathcal{Q}}(m) = \bigwedge\{n \in \mathsf{Sub}(X) \mid n \textit{ es una } \mathcal{Q}\textit{-pieza}, m \leq n\}$$

define un operador de cerradura idempotente.

DEMOSTRACIÓN. Si n es una $\mathcal{Q}$-pieza por medio de $g : X \to Q$, entonces para cada morfismo $f : T \to X$, $f^{-1}(m) = (g \circ f)^{-1}(g(m))$. Como la composición de productos fibrados es un producto fibrado, por tanto $f^{-1}(m)$ es una $\mathcal{Q}$-pieza de T. Por lo tanto por la proposición 2.2.8 tenemos que es un operador de cerradura idempotente. ✠

DEFINICIÓN 3.17. *Un operador de cerradura* c *es un operador de cerradura escindible si existe una subcategoría* $\mathcal{Q}$ *tal que* $c = \mathsf{spl}^{\mathcal{Q}}$.

OBSERVACIÓN 3.18. *El operador de cerradura escindible se puede describir de una manera más conveniente:*

$$\begin{aligned}\mathsf{spl}^{\mathcal{Q}}_X(m) &= \bigwedge\{f^{-1}(n) \mid f : X \to Q, Q \in \mathcal{Q}, m \leq f^{-1}(n)\}\\ &= \bigwedge\{f^{-1}(n) \mid f : X \to Q, Q \in \mathcal{Q}, f(m) \leq n\}\\ &= \bigwedge\{f^{-1}(f(l)) \mid f : X \to Q, Q \in \mathcal{Q}, m \leq f^{-1}(f(l))\}\\ &= \bigwedge\{f^{-1}(f(m)) \mid f : X \to Q, Q \in \mathcal{Q}\}\end{aligned}$$

Propiedades y ejemplos de este operador de cerradura se darán cuando estudiemos subcategorías de objetos c-discretos.

4. Subcategorías $\mathrm{Fine}(c)$

Ya estudiamos subcategorías cerradas bajo fuentes fuertemente $\mathcal{M}$-separantes y las llamamos escindibles. En esta sección estudiaremos subcategorías cerradas bajo fuentes $\mathcal{M}$-separantes y veremos que son descritas como subcategorías de objetos c-discretos.

DEFINICIÓN 4.1. *Sea* $\mathcal{Q}$ *una subcategoría de* $\mathcal{C}$. *La cápsula* $\mathcal{M}$*-separante de* $\mathcal{Q}$, *denotada por* $\mathsf{MSH}(\mathcal{Q})$, *está definida por:* $X \in \mathsf{MSH}(\mathcal{Q})$ *si y sólo si existe una fuente* $\mathcal{M}$*-separante* $(f : X \to Q_i)_{i\in I}$ *tal que para cada* $i \in I$, $Q_i \in \mathcal{Q}$.

OBSERVACIÓN 4.2. *De manera inmediata obtenemos propiedades de la cápsula* $\mathcal{M}$*-separante de una subcategoría:*

1. $\mathcal{Q} \subseteq \mathsf{MSH}(\mathcal{Q})$;
2. *Si* $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{K}$ *entonces* $\mathsf{MSH}(\mathcal{Q}) \subseteq \mathsf{MSH}(\mathcal{K})$;
3. $\mathsf{MSH}(\mathsf{MSH}(\mathcal{Q})) = \mathsf{MSH}(\mathcal{Q})$.

Claramente también obtenemos que $\mathcal{Q} \subseteq \mathsf{Spl}(\mathcal{Q}) \subseteq \mathsf{MSH}(\mathcal{Q})$.

Ahora definiremos objetos c-discretos.

DEFINICIÓN 4.3. *Sea* $c \in \mathrm{CL}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$. *Un objeto* $X \in \mathcal{C}$ *se llama* c*-discreto si* $c_X \leq \mathit{fine}_X$, *esto es, para cada* $m \in \mathrm{Sub}(X)$ *se tiene que* $c_X(m) \leq \mathit{fine}_X(m)$. *La subcategoría de objetos* c*-discretos es denotada por*

$$\mathcal{F}\mathit{ine}(c) = \{X \in \mathcal{C} \mid c_X \leq \mathit{fine}_X\} = \{X \in \mathcal{C} \mid \text{ para cada } m \in \mathrm{Sub}(X), c_X(m) = m\}.$$

La primera propiedad que obtenemos es la siguiente.

PROPOSICIÓN 4.4. *Sea* $c \in \mathsf{CL}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$. *Entonces la subcategoría* $\mathfrak{Fine}(c)$ *es cerrada bajo morfismos* $\mathcal{M}$*-separantes. En particular, es cerrada bajo subobjetos.*

DEMOSTRACIÓN. Si $f : X \to Y$ es un morfismo $\mathcal{M}$-separante con $Y \in \mathfrak{Fine}(c)$, entonces para cada $m \in \mathsf{Sub}(X)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} c_X(m) &\leq c_X(f^{-1}(f(m))) \leq f^{-1}(c_Y(f(m))) \\ &\leq f^{-1}(\mathsf{fine}_Y(f(m))) \cong f^{-1}(f(m)) \cong m \cong \mathsf{fine}_X(m) \end{aligned}$$

Por lo tanto $X \in \mathfrak{Fine}(c)$. ✠

La parte importante de esta sección es caracterizar subcategorías de objetos c-discretos como las subcategorías cerradas bajo fuentes $\mathcal{M}$-separantes.

PROPOSICIÓN 4.5. *Para una subcategoría* $\mathcal{A}$ *de* $\mathcal{C}$ *las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $\mathcal{A} = \mathfrak{Fine}(c)$ *para algún* $c \in \mathsf{CL}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$;
ii) $\mathcal{A} = \mathfrak{Fine}(\mathsf{spl}^{\mathcal{A}})$;
iii) $\mathcal{A} = \mathsf{MSH}(\mathcal{A})$.

DEMOSTRACIÓN.

i) $\Rightarrow$ ii) Es claro que $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{Fine}(\mathsf{spl}^{\mathcal{A}})$. Para la otra contención sea $X \in \mathfrak{Fine}(\mathsf{spl}^{\mathcal{A}})$, entonces para $m \in \mathsf{Sub}(X)$ y $f : X \to Y$ con $Y \in \mathcal{A}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} c_X(m) &\leq c_X(f^{-1}(f(m))) \leq f^{-1}(c_Y(f(m))) \\ &\leq f^{-1}(\mathsf{fine}_Y(f(m))) \cong f^{-1}(f(m)) \end{aligned}$$

Así que

$$c_X(m) \leq \bigwedge\{f^{-1}(f(m)) \mid f : X \to Y, Y \in \mathcal{A}\} = \mathsf{spl}^{\mathcal{A}}_X(m) \leq \mathsf{fine}_X(m)$$

Por lo tanto por hipótesis $X \in \mathcal{A}$.

ii) $\Rightarrow$ i) Es inmediato.

ii) $\Leftrightarrow$ iii) Se sigue de la observación 3.3.2(2).

✠

Antes de dar ejemplos veremos más propiedades del operador de cerradura escindible y algunas relaciones con el operador de cerradura regular.

COROLARIO 4.6. *Sea* $\mathcal{S}$ *una subcategoría de* $\mathcal{C}$, $\mathsf{spl}^{\mathcal{Q}}$ *es discreto sobre* $\mathcal{S}$ *si y sólo si* $\mathcal{S} \subseteq \mathsf{MSH}(\mathcal{Q})$

Lo anterior nos indica que $\mathsf{MSH}(\mathcal{Q})$ es la subcategoría más grande sobre la cual $\mathsf{spl}^{\mathcal{Q}}$ es discreto, esto nos ayudará a caracterizar a subcategorías de objetos c-discretos en términos del operador de cerradura escindible.

PROPOSICIÓN 4.7. $\mathsf{spl}^{\mathcal{Q}} = \mathsf{spl}^{\mathcal{S}}$ *si y sólo si* $\mathsf{MSH}(\mathcal{Q}) = \mathsf{MSH}(\mathcal{S})$.

DEMOSTRACIÓN. La primera implicación se sigue del corolario anterior. Para el regreso basta probar que $\mathsf{spl}^{\mathcal{Q}} = \mathsf{spl}^{\mathsf{MSH}(\mathcal{Q})}$. Por un lado tenemos que $\mathcal{Q} \subseteq \mathsf{MSH}(\mathcal{Q})$ implica $\mathsf{spl}^{\mathcal{Q}} \geq \mathsf{spl}^{\mathsf{MSH}(\mathcal{Q})}$. Para probar la otra desigualdad, sean $X \in \mathcal{C}$ y $m \in \mathsf{Sub}(X)$, considere un morfismo $f : X \to H$ en la construcción de $\mathsf{spl}^{\mathsf{MSH}(\mathcal{Q})}(m)$, como $H \in \mathsf{MSH}(\mathcal{Q})$ existe una fuente $\mathcal{M}$-separante $(f_i : H \to Q_i)_{i \in I}$ donde para cada $i \in I$, $Q_i \in \mathcal{Q}$. Para cada $i \in I$ consideremos la siguiente composición de morfismos

$$M \xrightarrow{m} X \xrightarrow{f} H \xrightarrow{f_i} P_i$$

como $f(m) \in \mathsf{Sub}(H)$, $f(m) = \bigwedge f_i^{-1}(f_i(f(m)))$. Así que,

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(m)) &= f^{-1}(\bigwedge f_i^{-1}(f_i(f(m)))) \\ &= \bigwedge (f_i f)^{-1}((f_i f)(m)) \\ &\geq \mathsf{spl}^{\mathcal{Q}}(m). \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\mathsf{spl}^{\mathsf{MSH}(\mathcal{Q})}(m) = \bigwedge \{f^{-1}(f(m)) \mid f : X \to H, H \in \mathsf{MSH}(\mathcal{Q})\} \geq \mathsf{spl}^{\mathcal{Q}}(m).$$

✠

Cuando una subcategoría $\mathcal{Q}$ es débilmente reflexiva, esto es, cuando para cada $X \in \mathcal{C}$ existe $RX \in \mathcal{Q}$ y $r_X : X \to RX$ tales que para cada $f : X \to Y$ con $Y \in \mathcal{Q}$ existe un morfismo f' con $f' \circ r_X = f$ (toda subcategoría reflexiva es débilmente relexiva), entonces tenemos una descripción del operador de cerradura $\mathsf{spl}^{\mathcal{Q}}$.

PROPOSICIÓN 4.8. *Si $\mathcal{Q}$ es débilmente reflexiva en $\mathcal{C}$ entonces para cada subobjeto $m : M \to X$ tenemos*

$$\mathsf{spl}^{\mathcal{Q}}_X(m) = r_X^{-1}(r_X(m)).$$

DEMOSTRACIÓN. El subobjeto $r_X^{-1}(r_X(m))$ es una $\mathcal{Q}$-pieza que contiene a m y para cada morfismo $f : X \to Q$ con $Q \in \mathcal{Q}$ tenemos

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(m)) &= (f' r_X)^{-1}((f' r_X)(m)) \\ &= r_X^{-1}(f'^{-1}(f'(r_X(m)))) \\ &\geq r_X^{-1}(r_X(m)). \end{aligned}$$

✠

Ahora veamos relaciones entre los operadores de cerradura escindibles y regulares.

PROPOSICIÓN 4.9. *Si $\mathcal{Q}$ es cerrada bajo cuadrados entonces*

$$\mathsf{spl}^{\mathcal{Q}} \leq \mathsf{reg}^{\mathcal{Q}}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $X \in \mathcal{C}$, $m \in \mathrm{Sub}(X)$ y $\mathcal{Q}$ una subcategoría cerrada bajo cuadrados, entonces

$$\begin{aligned} \mathsf{reg}^{\mathcal{Q}}_X(m) &\cong \bigwedge\{h^{-1}(\delta_Q) \mid h : X \to Q^2, Q \in \mathcal{Q}, h(m) \leq \delta_Q\} \\ &\geq \bigwedge\{h^{-1}(h(m)) \mid h : X \to Q^2, Q \in \mathcal{Q}, h(m) \leq \delta_Q\} \\ &\geq \mathsf{spl}^{\mathcal{Q}}_X(m). \end{aligned}$$

La última desigualdad se sigue de que $\mathcal{Q}$ es cerrada bajo cuadrados. ✠

Observe que $\mathsf{spl}^{\mathcal{Q}}$ es el operador de cerradura más grande que es discreto en $\mathcal{Q}$, pues si c es discreto en $\mathcal{Q}$ considere

$$M \xrightarrow{m} X \xrightarrow{f} Q$$

con $m \in \mathcal{M}$ y $Q \in \mathcal{Q}$, entonces obtenemos:

$$c_X(m) \leq c_X(f^{-1}(f(m))) \leq f^{-1}(c_X(f(m))) = f^{-1}(f(m))$$

esto es, $c_X(m) \leq \bigwedge\{f^{-1}(f(m)) \mid f : X \to Q, Q \in \mathcal{Q}\} = \mathsf{spl}^{\mathcal{Q}}_X(m)$. Con esto concluimos lo siguiente.

PROPOSICIÓN 4.10. *Si $\mathcal{Q}$ es cerrada bajo cuadrados, entonces $\mathsf{spl}^{\mathcal{Q}} = \mathsf{reg}^{\mathcal{Q}}$ si y sólo si $\mathsf{reg}^{\mathcal{Q}}$ es discreto sobre $\mathcal{Q}$.*

OBSERVACIÓN 4.11. *Al igual que subcategorías delta, tenemos una adjunción*

$$\mathsf{SUB}(\mathcal{C})^{op} \underset{\mathsf{spl}}{\overset{\mathfrak{Fine}}{\underset{\perp}{\rightleftarrows}}} \mathsf{CL}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$$

En efecto, para una subcategoría $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$ y para cada $B \in \mathcal{B}$ tenemos que $\mathsf{spl}^{\mathcal{B}}_B = \mathsf{fine}_B$, por lo tanto $\mathcal{B} \subseteq \mathfrak{Fine}(\mathsf{spl}^{\mathcal{B}})$. Trivialmente tenemos que $c \leq \mathsf{spl}^{\mathfrak{Fine}(c)}$.

Ahora veremos algunos ejemplos de operadores de cerradura escindibles y luego de subcategorías de objetos c-discretos

EJEMPLOS 4.12.

1. Note que $\mathsf{coar} = \mathsf{spl}^{\mathcal{P}}$ y $\mathsf{fine} = \mathsf{spl}^{\mathcal{C}}$, esto es, los operadores de cerradura discreto e indiscreto son operadores de cerradura escindibles.

2. En R-***Mod*** los operadores de cerradura escindibles tienen una fácil descripción, para $\mathcal{Q}$ una clase de R-módulos tenemos:

$$\mathsf{spl}^{\mathcal{Q}}_{M}(N) = N + \bigwedge\{Nuf \mid f : M \to L, L \in \mathcal{Q}\}$$

El prerradical asociado a este operador es

$$\sigma_{\mathcal{Q}}(M) = \bigwedge\{Nuf \mid f : M \to N, N \in \mathcal{Q}\}$$

3. El operador de cerradura cuasicomponente q es un operador de cerradura escindible, esto es, $q = \mathsf{spl}^{\mathcal{D}}$ donde $\mathcal{D}$ es la subcategoría de espacios discretos.
4. El operador de cerradura con es escindible, esto es, $con = \mathsf{spl}^{\mathcal{B}}$ donde $\mathcal{B}$ es la subcategoría de espacios hereditariamente disconexos.
5. El operador de cerradura $path$ es escindible, esto es, $path = \mathsf{spl}^{\mathcal{A}}$ donde $\mathcal{A}$ es la subcategoría de espacios hereditariamente disconexos por trayectorias.

Ahora daremos ejemplos de subcategorías de objetos c-discretos en ***Top*** y en R-***Mod***.

1. Con el operador de cerradura de Kuratowski k, los objetos k-discretos son los espcios discretos usuales.
2. También con el operador de cerradura q, La subcategoría de objetos q-discretos, es la subcategoría de espacios discretos en el sentido usual.
3. Con el operador de cerradura con, los objetos con-discretos son los espacios hereditariamente disconexos.
4. Si tomamos el operador de cerradura $path$, los objetos $path$-discretos son los espacios hereditariamente disconexos por trayectorias.
5. En R-**Mod**, para $\eta \in$R-pr, $\mathfrak{F}ine(min^{\eta}) = \mathbb{F}_{\eta}$.

5. Relaciones entre $\Delta(c)$, $\mathfrak{F}ine(c)$ y $Spl(\mathcal{Q})$

En esta sección veremos cuando las tres nociones antes mencionadas coinciden y cuando son diferentes, para esto, veremos algunos resultados y algunos ejemplos. Inmediatamente de lo visto en secciones anteriores tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 5.1. *Sea C una categoría tal que cuasipuntos detectan monofuentes, tiene productos, subobjetos son separantes y es bien $\mathcal{E}$-copotenciada con $\mathcal{E}$ estable bajo productos fibrados a lo largo de monomorfismos. Entonces para una subcategoría $\mathcal{Q}$ de C son equivalentes:*

1. *$\mathcal{Q}$ es escindible y productiva;*
2. *$\mathcal{Q}$ es una subcategoría delta;*
3. *$\mathcal{Q}$ es cerrada bajo monofuentes.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la proposición 3.1.4 y la proposición 3.3.12(2). ✠

Esto nos da una completa relación entre subcategorías delta y subcategorías escindibles. Ahora veamos qué pasa con subcategorías de objetos c-discretos.

PROPOSICIÓN 5.2. *Si $\mathcal{C}$ es bien $\mathcal{E}$-copotenciada, entonces para una subcategoría productiva $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{C}$,* $\mathsf{Spl}(\mathcal{Q}) = \mathsf{MSH}(\mathcal{Q}) = \mathfrak{Fine}(\mathsf{spl}^{\mathcal{Q}})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $X \in \mathsf{MSH}(\mathcal{Q})$ (ver la proposición 3.4.5). Consideremos una fuente $\mathcal{M}$-separante $(f_i : X \to Y_i)_{i\in I}$ con $Y_i \in \mathcal{Q}$, tomamos su factorización $f_i = m_i \circ e_i$, tomamos un conjunto de representantes $J \subseteq I$ para la fuente $(e_i)_{i\in I}$ y formamos el producto $\prod_{j\in J} M_j$. El morfismo $\prod m_j : \prod_{j\in J} M_j \to \prod_{j\in J} Y_j \in \mathcal{M}$. Como $\mathcal{Q}$ es productiva, $\mathcal{Q} \subseteq \mathsf{Spl}(\mathcal{Q})$ y $\mathsf{Spl}(\mathcal{Q})$ es cerrada bajo subobjetos tenemos que $\prod_{j\in J} M_j \in \mathsf{Spl}(\mathcal{Q})$. Por lo tanto $\langle e_i \rangle$ es $\mathcal{M}$-separante (lema 3.3.6), así que $X \in \mathsf{Spl}(\mathcal{Q})$. ✠

Ahora veamos como las $\mathcal{Q}$-piezas son caracterizadas como los objetos cerrados con respecto al operador escindible.

PROPOSICIÓN 5.3. *Si $\mathcal{C}$ es bien $\mathcal{E}$-copotenciada y $\mathcal{Q}$ es una subcategoría productiva, entonces para cada $X \in \mathcal{C}$ se tiene que m es una $\mathcal{Q}$-pieza de X si y sólo si* $\mathsf{spl}_X^{\mathcal{Q}}(m) = m$.

DEMOSTRACIÓN. La necesidad es clara. Para la suficiencia usamos un argumento como en la proposición anterior para factorizar la fuente de todos los morfismos con dominio X y codominio en $\mathcal{Q}$ a través de un morfismo $f = \langle e_i \rangle$. Por lo tanto, del lema 3.3.6 concluimos que

$$\begin{aligned} m &= \mathsf{spl}_X^{\mathcal{Q}}(m) \\ &= \bigwedge \{ g^{-1}(g(m)) \mid g : X \to P, P \in \mathcal{Q} \} \\ &= f^{-1}(f(m)). \end{aligned}$$

✠

EJEMPLOS 5.4.

1. En ***Top***, la subcategoría de espacios discretos es una subcategoría de objetos c-discretos que no es una subcategoría delta (pues no es cerrada bajo límites).
2. Sea S el espacio de Sierpinski, entonces $\mathsf{Spl}(S)$ es la subcategoría de espacios puerta, esto es, espacios donde todo subespacio es cerrado o abierto. Este es un ejemplo de una subcategoría escindible que no es una subcategoría delta, pues $S \times S \notin \mathsf{Spl}(S)$ (ya que la diagonal de $S \times S$ no es ni cerrada ni abierta).

3. El ejemplo 3.3.3(2) muestra que hay subcategorías escindibles que no son subcategorías de objetos c-discretos para algún $c \in \mathsf{CL}(\boldsymbol{Top}, \mathcal{M})$ ($\mathcal{M}$ la clase de encajes).
4. En R-***Mod*** cualquier clase hereditaria que no es cerrada bajo productos es una subcategoría escindible que no es una subcategoría delta.

6. Subcategorías Coescindibles

Al definir fuentes (fuertemente) $\mathcal{M}$-separantes se usó implicitamente el operador fine. Teniendo en cuenta esta observación, usaremos el operador coar para definir la noción dual.

DEFINICIÓN 6.1. *Un pozo* $(Y_i \xrightarrow{h_i} X)_{i\in I})$ *es llamado:*

i) $\mathcal{M}$*-coseparante si para cada* $m \in \mathrm{Sub}(X)$,

$$\mathrm{coar}_X(m) = m \vee \bigvee_{i\in I} h_i(\mathrm{coar}_{Y_i}(h_i^{-1}(m)));$$

ii) *Fuertemente* $\mathcal{M}$*-coseparante si para cada* $m \in \mathrm{Sub}(X)$ *existe* $i \in I$ *tal que*

$$\mathrm{coar}_X(m) = m \vee h_i(\mathrm{coar}_{Y_i} h^{-1}(m)).$$

OBSERVACIONES 6.2.

1. *Claramente todo pozo fuertemente* $\mathcal{M}$*-coseparante es* $\mathcal{M}$*-coseparante (ya que en la definición anterior podemos observar que* $h_i(\mathrm{coar}_{Y_i}(h_i^{-1}(m))) \leq \mathrm{coar}_Y(m)$*).*
2. *El regreso en general no se vale. Considere el pozo de inclusiones* $(i_n : U(0,n) \hookrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$*, donde* $U(0,n)$ *es el intervalo abierto con centro en el* 0 *y radio* n *y* $\mathbb{R}$ *es la recta real con la topología usual. Entonces* $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es* $\mathcal{M}$*-coseparante en* ***Top****, pero no fuertemente* $\mathcal{M}$*-coseparante (*$\mathcal{M}$ *la clase de encajes).*
3. *Para morfismos ambas nociones coinciden y los llamaremos* $\mathcal{M}$*-coseparantes.*

PROPOSICIÓN 6.3. *Supongamos que* $\mathcal{E}$ *es estable bajo productos fibrados a lo largo de monomorfismos, entonces todo morfismo en* $\mathcal{E}$ *es* $\mathcal{M}$*-coseparante.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $h : X \to Y$ en $\mathcal{E}$. Para $m \in \mathrm{Sub}(Y)$, como $!_Y \circ h = !_X$, por la proposición 2.4.2 tenemos

$$\begin{aligned} \mathrm{coar}_X(h^{-1}(m)) &\cong !_X^{-1}(!_X(h^{-1}(m))) \\ &\cong h^{-1}(!_Y^{-1}(!_Y(h(h^{-1}(m))))) \\ &\cong h^{-1}(!_Y^{-1}(!_Y(m))) \\ &\cong h^{-1}(\mathrm{coar}_Y(m)). \end{aligned}$$

Porque $\mathcal{E}$ es estable bajo productos fibrados a lo largo de subobjetos. ✠

Ahora veamos más definiciones que nos ayudarán a dar la noción importante de esta sección.

DEFINICIÓN 6.4. *Sea $\mathcal{R}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$.*

1. $m \in \mathrm{Sub}(X)$ *es una $\mathcal{R}$-copieza de* X *si existe un morfismo* $h : R \to X$ *con* $R \in \mathcal{R}$ *tal que* $\mathrm{coar}_X(m) = m \vee h(\mathrm{coar}_R(h^{-1}(m)))$.
2. *La subcategoría coescindible de $\mathcal{R}$, denotada por* $\mathrm{Cospl}(\mathcal{R})$, *está formada por todos los* $X \in \mathcal{C}$ *tal que para cada* $m \in \mathrm{Sub}(X)$, *se tiene que* m *es una $\mathcal{R}$-copieza (en morfismos se considera plena). $\mathcal{R}$ es coescindible si y sólo si* $\mathcal{R} = \mathrm{Cospl}(\mathcal{R})$.

PROPOSICIÓN 6.5. $\mathrm{Cospl}(\mathcal{R})$ *es la cápsula fuertemente $\mathcal{M}$-coseparante de $\mathcal{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. Similar a la demostración de la proposición 3.3.10. ✠

COROLARIO 6.6. *$\mathcal{R}$ es una subcategoría coescindible si y sólo si $\mathcal{R}$ es cerrada bajo pozos fuertemente $\mathcal{M}$-coseparantes.*

COROLARIO 6.7.

1. $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Cospl}(\mathcal{R})$;
2. *Si* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{K}$ *entonces* $\mathrm{Cospl}(\mathcal{R}) \subseteq \mathrm{Cospl}(\mathcal{K})$;
3. $\mathrm{Cospl}(\mathcal{R}) = \mathrm{Cospl}(\mathrm{Cospl}(\mathcal{R}))$.

Antes de continuar necesitamos una definición importante.

DEFINICIÓN 6.8. *Diremos que un pozo* $(g_i : Y_i \to Y)_{i \in I}$ *es pt-sobreyectivo si para cada* $y : 1 \to Y$ *existen* $j \in I$ *y* $y_j : 1 \to Y_j$ *tales que* $g_j \circ y_j = y$.

En seguida veremos un lema que nos ayudará para probar que en muchas categorías conocidas las subcategorías coescindibles son simplemente subcategorías cerradas bajo imágenes.

LEMA 6.9. *Supongamos que morfismos en $\mathcal{E}$ son pt-sobreyectivos, entonces para cada $X \in \mathcal{C}$ tal que el morfismo $!_X : X \to 1$ pertenece a $\mathcal{E}$ (o equivalentemente X tiene un punto) y para cada $m \in \mathrm{Sub}(X)$, las siguientes condiciones son eqivalentes:*

1. *X tiene un punto x con $x \leq m$;*
2. *$\mathrm{coar}_X(m) = 1_X$;*
3. *X tiene un punto y con $y \leq \mathrm{coar}_X(m)$.*

DEMOSTRACIÓN.

(1) $\Rightarrow$ (2) Si existe $x : 1 \to X$, entonces, para cada $g : X \to P$ con $P \in \mathcal{P}$, $P \cong 1$, por lo tanto $g^{-1}(g(x)) \cong !_X^{-1}(!_X(x)) \cong 1_X$ y por lo tanto $\mathrm{coar}_X(m) \geq \mathrm{coar}_X(x) \cong 1_X$.

(2) $\Rightarrow$ (3) es claro.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea $!_X \circ m = n \circ e$ la $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-factorización de $!_X \circ m$ y (n', f) el producto fibrado de $(n, !_X)$. Entonces, como $y \leq \mathrm{coar}_X(m) \leq !_X^{-1}(!_X(m)) \cong n'$, de esta forma existe $z : 1 \to N'$ tal que $n \circ f \circ z \cong 1_1$. Esto implica que n es un isomorfismo. Por lo tanto $!_M : M \to 1$ pertenece a $\mathcal{E}$, lo cual implica (1) de acuerdo a nuestra hipótesis.

✠

DEFINICIÓN 6.10. *Sea $\mathcal{R}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$, $\mathrm{Qout}(\mathcal{R}) = \{X \in \mathcal{C} \mid$ existe $f : R \to X$, con $f(1_R) = 1_X$ y $R \in \mathcal{R}\}$ es la subcategoría cohereditaria con respecto a $\mathcal{R}$, es decir, es la mínima subcategoría cerrada bajo $\mathcal{E}$-imágenes que contiene a $\mathcal{R}$. A las subcategorías que satisfacen $\mathcal{R} = \mathrm{Quot}(\mathcal{R})$ las llamaremos cohereditarias.*

PROPOSICIÓN 6.11. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría tal que morfismos en $\mathcal{E}$ son pt-sobreyectivos con $\mathcal{E}$ estable bajo productos fibrados a lo largo de monomorfismos y que para cada objeto no inicial X en $\mathcal{C}$ se tiene que $!_X \in \mathcal{E}$. Si $\mathcal{R}$ es una subcategoría de $\mathcal{C}$ que contieneun objeto no inicial, entonces $\mathrm{Cospl}(\mathcal{R}) = \mathrm{Qout}(\mathcal{R})$.*

DEMOSTRACIÓN. La contención de regreso es clara. Sea $X \in \mathrm{Cospl}(\mathcal{R})$ con X no inicial, entonces existe un morfismo $x : 1 \to X$, como $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ es una factorización ortogonal tenemos que $x \in \mathrm{Sub}(X)$ y por el lema 3.6.9 existe $g : R \to X$ tal que

$$1_X = \mathrm{coar}_X(x) = x \vee g(\mathrm{coar}_R(g^{-1}(x))$$

Si $g(\mathrm{coar}_R(g^{-1}(x))$ es un objeto inicial, entonces $1_X = x$ y como $\mathrm{Quot}(\mathcal{R})$ contiene al objeto terminal obtenemos que $X \in \mathrm{Qout}(\mathcal{R})$. Si $g(\mathrm{coar}_R(g^{-1}(x)))$ no es un objeto inicial entonces existe $y : 1 \to g(\mathrm{coar}_R(g^{-1}(x)))$, como morfismos en $\mathcal{E}$ son pt-proyectivos, tenemos que existe $z : 1 \to \mathrm{coar}_R(g^{-1}(x))$ con $g \circ z = y$, aplicando otra vez el lema 3.6.9 tenemos que existe $a : 1 \to g^{-1}(x)$ por lo tanto tenemos que

$x \leq g(\mathrm{coar}_R(g^{-1}(x)))$, por lo tanto $1_X = g(\mathrm{coar}_R(g^{-1}(x))) \leq g(1_R) \leq 1_X$, por lo tanto $X \in \mathrm{Qout}(\mathcal{R})$. ✠

COROLARIO 6.12. *En toda categoría topológica sobre* ***Con****, las subcategorías coescindibles son las subcategorías cohereditarias.*

EJEMPLOS 6.13.

1. Como nos dice el corolario anterior, todas las subcategorías cerradas bajo imagenes en ***Top*** son coescindibles (con respecto a la factorización usual).
2. En R-***Mod*** también las subcategorías coescindibles son las cohereditarias, la demostración es similar a la dada para subcategorías escindibles.

Para cada subcategoría $\mathcal{R}$ de $\mathcal{C}$ definimos el siguiente operador de cerradura. Para cada $X \in \mathcal{C}$ y para cada $m \in \mathrm{Sub}(X)$ sea

$$\mathrm{cospl}_X^{\mathcal{R}}(m) = m \vee \bigvee\{h(\mathrm{coar}_R(h^{-1}(m))) \mid h : R \to X, R \in \mathcal{R}\}$$

DEFINICIÓN 6.14. *Un operador de cerradura* c *es llamado coescindible si* $c = \mathrm{cospl}^{\mathcal{R}}$ *para alguna subcategoría* $\mathcal{R}$ *de* $\mathcal{C}$

En la siguiente sección se darán algunas propiedades de este operador de cerradura.

7. Subcategorías Coar(c)

Ahora toca el turno de estudiar subcategorías cerradas bajo pozos $\mathcal{M}$-coseparantes.

DEFINICIÓN 7.1. *Sea* $\mathcal{R}$ *una subcategoría de* $\mathcal{C}$. *La cápsula* $\mathcal{M}$*-coseparante de* $\mathcal{R}$, *denotada por* $\mathrm{MCH}(\mathcal{R})$, *está definida por:* $X \in \mathrm{MCH}(\mathcal{R})$ *si y sólo si existe un pozo* $\mathcal{M}$*-coseparante* $(h_i : R_i \to X)_{i \in I}$ *tal que para cada* $i \in I$, $R_i \in \mathcal{R}$.

OBSERVACIÓN 7.2. *De forma inmediata obtenemos algunas propiedades de la cápsula* $\mathcal{M}$*-coseparante:*

1. $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{MCH}(\mathcal{R})$;
2. *Si* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ *entonces* $\mathrm{MCH}(\mathcal{R}) \subseteq \mathrm{MCH}(\mathcal{S})$;
3. $\mathrm{MCH}(\mathrm{MCH}(\mathcal{R})) = \mathrm{MCH}(\mathcal{R})$.

También tenemos que $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Cospl}(\mathcal{R}) \subseteq \mathrm{MCH}(\mathcal{R})$.

Ahora estamos listos para definir los objetos c-indiscretos.

DEFINICIÓN 7.3. *Sea* $c \in \mathsf{CL}(\mathcal{C},\mathcal{M})$. *Un objeto* $X \in \mathcal{C}$ *es llamado* c*-indiscreto si* $c_X \geq \mathsf{coar}_X$, *esto es, para cada* $m \in \mathsf{Sub}(X)$ *se tiene que* $c_X(m) \geq \mathsf{coar}_X(m)$. *La subcategoría de objetos c-indiscretos es denotada por*

$$\mathsf{Coar}(c) = \{X \in \mathcal{C} \mid c_X \geq \mathsf{coar}_X\}$$

PROPOSICIÓN 7.4. *Sea* $c \in \mathsf{CL}(\mathcal{C},\mathcal{M})$. *Entonces* $\mathsf{Coar}(c)$ *es cerrada bajo morfismos* $\mathcal{M}$*-coseparantes. Por lo tanto es cerrada bajo* $\mathcal{E}$*-imágenes si* $\mathcal{E}$ *es estable bajo productos fibrados a lo largo de monomorfismos.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $h : X \to Y$ un morfismo $\mathcal{M}$-coseparante con $X \in \mathsf{Coar}(c)$. Entonces, para $m \in \mathsf{Sub}(Y)$ tenemos que $\mathsf{coar}_Y(m) = m \vee h(\mathsf{coar}_X(h^{-1}(m)))$, por lo tanto

$$\mathsf{coar}_Y(m) \leq m \vee h(c_X(h^{-1}(m))) \leq m \vee c_Y(h(h^{-1}(m))) \leq c_Y(m),$$

lo cual significa que $Y \in \mathsf{Coar}(c)$. Por el lema anterior tenemos que $\mathsf{Coar}(c)$ es cerrada bajo $\mathcal{E}$-imágenes. ✠

Ahora daremos la caracterización de objetos c-indiscretos análoga a la de objetos c-discretos.

PROPOSICIÓN 7.5. *Para una subcategoría* $\mathcal{B}$ *de* $\mathcal{C}$ *las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) $\mathcal{B} = \mathsf{Coar}(c)$ *para algún* $c \in \mathsf{CL}(\mathcal{C},\mathcal{M})$;
ii) $\mathcal{B} = \mathsf{Coar}(\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}})$;
iii) $\mathcal{B} = \mathsf{MCH}(\mathcal{B})$.

DEMOSTRACIÓN.

i) $\Rightarrow$ ii) Es claro que $\mathcal{B} \subseteq \mathsf{Coar}(\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}})$. Como $\mathcal{B} = \mathsf{Coar}(c)$ y $\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}$ es el operador de cerradura más pequeño que coincide con coar en $\mathcal{B}$, así que $\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}} \leq c \wedge \mathsf{coar} \leq c$. Por lo tanto $X \in \mathcal{B}$.

ii) $\Rightarrow$ i) es inmediato.

ii) $\Leftrightarrow$ iii) Es claro pues se sigue de la definición de pozo $\mathcal{M}$-coseparante.

✠

De la equivalencia de ii) con iii) de la proposición anterior inmediatamente obtenemos el siguiente resultado.

COROLARIO 7.6. *Sea* $\mathcal{K}$ *una subcategoría de* $\mathcal{C}$, $\mathsf{cospl}^{\mathcal{R}}$ *es indiscreto sobre* $\mathcal{K}$ *si y sólo si* $\mathcal{K} \subseteq \mathsf{MCH}(\mathcal{R})$.

Al igual que subcategorías de objetos c-discretos son caracterizadas en términos del operador de cerradura escindible (proposición 3.4.7), tenemos un resultado análogo para subcategorías de objetos c-indiscretos y el operador de cerradura coescindible.

PROPOSICIÓN 7.7. $\mathsf{cospl}^{\mathcal{R}} = \mathsf{cospl}^{\mathcal{K}}$ *si y sólo si* $\mathsf{MCH}(\mathcal{R}) = \mathsf{MCH}(\mathcal{K})$.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del corolario anterior. ✠

Los operadores de cerradura coescindibles en general no son ni idempotentes ni débilmente hereditarios, el siguiente resultado nos da condiciones para que estos sean débilmente hereditarios.

PROPOSICIÓN 7.8. *Supongamos que* coar *es débilmente hereditario. Entonces* $\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}$ *es débilmente hereditario si y sólo si la subcategoría* $\mathsf{Coar}(\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}})$ *es cerrada bajo subobjetos* coar*-cerrados.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{B}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$, supongamos que $\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}$ es débilmente hereditario y sea $m \in \mathsf{Sub}(X)$ un subobjeto coar-cerrado con $X \in \mathsf{Coar}(\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}})$, esto implica que $\mathsf{coar}_X \leq \mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}_X$. Como coar y $\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}$ son débilmente hereditarios y M es coar-cerrado en X tenemos que $\mathsf{coar}_M \leq \mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}_M$ (proposición 2.3.5), por lo tanto $M \in \mathsf{Coar}(\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}})$.
Inversamente, sea $\mathcal{B}$ una subcategoría tal que $\mathsf{Coar}(\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}})$ es cerrada bajo subobjetos coar-cerrados. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{B} = \mathsf{Coar}(\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}})$ (propodición 3.7.7). Hay que probar que $\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}$ es débilmente hereditario. Sea $m \in \mathsf{Sub}(X)$ con $X \in \mathcal{C}$, sea j_m el morfismo tal que $m = \mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}_X(m) \circ j_m$. Para cada

$h : B \to X$ con $B \in \mathcal{B}$, consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
h^{-1}(M) \arrow[rr, "h^{-1}(m)"] \arrow[dr] \arrow[dddd] & & B \arrow[dddd, "h"] \\
& \mathsf{coar}_B(h^{-1}(M)) \arrow[ur, "\mathsf{coar}_B(h^{-1}(m))"'] \arrow[d, "e"] & \\
& B' \arrow[d, "k"'] & \\
& \mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}_X(M) \arrow[dr, "\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}_X(m)"] & \\
M \arrow[rr, "m"'] \arrow[ur, "j_m"'] & & X
\end{tikzcd}$$

donde $B' = h(\mathsf{coar}_B(h^{-1}))$ y k es el morfismo que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
B' \arrow[rr, "h(\mathsf{coar}_B(h^{-1}(m)))"] \arrow[dr, "k"'] & & X \\
& \mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}_X(M) \arrow[ur, "\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}_X(m)"'] &
\end{tikzcd}$$

B' está en $\mathcal{B}$ pues $\mathsf{Coar}(\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}})$ es cerrado bajo subobjetos coar-cerrados (coar es escindible y por tanto idempotente) y bajo imágenes. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}_X(m) \circ k(\mathsf{coar}_{B'}(k^{-1}(j_m))) &\cong (h \circ \mathsf{coar}_B(h^{-1}(m)) \circ \mathsf{coar}_{B'}(k^{-1}(j_m))) \\
&\cong h(\mathsf{coar}_B(h^{-1}(m)) \circ \mathsf{coar}_{B'}(k^{-1}(j_m))).
\end{aligned} \tag{1}$$

Ahora consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
e^{-1}(k^{-1}(M)) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[ddd] & & \mathsf{coar}_B(h^{-1}(M)) \arrow[ddd, "e"] \\
& A \arrow[ur] \arrow[d, dashed, "s"] & \\
& \mathsf{coar}_B(k^{-1}(M)) \arrow[dr, "\mathsf{coar}_{B'}(k^{-1}(j_M))"] & \\
k^{-1}(M) \arrow[rr, "m"'] \arrow[ur] & & B'
\end{tikzcd}$$

Donde $A = \mathsf{coar}_{\mathsf{coar}_B(h^{-1}(M))}((ke)^{-1}(M))$ y s es inducido por el lema de diagonalización (lema 2.2.3). Por tanto tenemos

$$(2) \qquad \begin{aligned} h^{-1}(m) &\leq \mathsf{coar}_B(h^{-1}(m)) \circ e^{-1}(\mathsf{coar}_{B'}(k^{-1}(j_m))) \\ &\leq \mathsf{coar}_B(h^{-1}(m)) \circ \mathsf{coar}_{\mathsf{coar}_B(h^{-1}(M))}((ke)^{-1}(j_m)), \end{aligned}$$

como coar es débilmente hereditario e idempotente, tenemos que la composición de subobjetos coar-cerrados es coar-cerrado, por lo tanto tenemos la siguiente desigualdad

$$(3) \qquad \mathsf{coar}_B(h^{-1}(m)) \leq \mathsf{coar}_B(h^{-1}(m)) \circ \mathsf{coar}_{\mathsf{coar}_B(h^{-1}(M))}((ke)^{-1}(j_m)).$$

Por la proposición 1.1.16 existe un morfismo d que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "s"] \arrow[d] & \mathsf{coar}_{B'}(k^{-1}(M)) \arrow[d, "\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}_X(m) \circ \mathsf{coar}_{B'}(k^{-1}(j_m))"] \\
A' \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "s"] & X
\end{tikzcd}$$

Donde A' es el dominio de $h(\mathsf{coar}_{\mathsf{coar}_B(h^{-1}(M))}((ke)^{-1}(j_m)) \circ \mathsf{coar}_B(h^{-1}(m)))$. Por lo tanto tenemos que

(4)

$$\begin{aligned} &\mathsf{coar}_B(h^{-1}(m)) \circ \mathsf{coar}_{\mathsf{coar}_B(h^{-1}(M))}((ke)^{-1}(j_m)) \leq \\ &\qquad\qquad \leq h(\mathsf{coar}_B(h^{-1}(m)) \circ \mathsf{coar}_{B'}(k^{-1}(j_m))). \end{aligned}$$

Por lo tanto de (1) y de (3) y (4) tenemos que

$$(5) \qquad \mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}_X(m) \circ k(\mathsf{coar}_{B'}(k^{-1}(j_m))) \geq h(\mathsf{coar}_B(h^{-1}(m))).$$

Por lo tanto $\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}_X(m) \circ \mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}_{\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}_X(M)}(j_m) \geq \mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}_X(m)$, así que j_m es $\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}$-denso. ✠

De lo anterior y de la proposición 2.4.2 tenemos lo siguiente.

COROLARIO 7.9. *Si $\mathcal{E}$ es estable bajo productos fibrados a lo largo de monomorfismos, entonces, para toda subcategoría $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$, $\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}$ es débilmente hereditario si y sólo si $\mathsf{Coar}(\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}})$ es cerrada bajo subobjetos coar-cerrados.*

Como en categorías topológicas sobre la categoría de conjuntos coar es el operador de cerradura indiscreto usual, la condición de que $\mathsf{Coar}(\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}})$ sea cerrada bajo subobjetos coar-cerrados se hace trivial.

COROLARIO 7.10. *Si $\mathcal{C}$ es una categoría topológica sobre $\mathbf{Con}$ o si $\mathcal{C}$ es punteada, entonces $\mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}$ es débilmente hereditario para toda subcategoría $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}$.*

Ahora comparemos el operador de cerradura $\mathsf{cospl}^{\mathcal{R}}$ con $\mathsf{coreg}^{\mathcal{R}}$.

PROPOSICIÓN 7.11. *Sea $\mathcal{R}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$ cerrada bajo cuadrados y tal que todo objeto (no inicial) en $\mathcal{R}$ tiene un punto. Entonces $\mathsf{cospl}^{\mathcal{R}} \geq \mathsf{coreg}^{\mathcal{R}}$.*

DEMOSTRACIÓN. Como cada objeto $R \in \mathcal{R}$ tiene un punto, se sigue que $\mathsf{coar}_{R^2}(\delta_R) = 1_{R^2}$ (ver lema 3.6.9). Sea $m \in \mathsf{Sub}(X)$ con $X \in \mathcal{C}$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathsf{coreg}^{\mathcal{R}}_X(m) &= m \vee \bigvee\{h(1_{R^2}) \mid h : B^2 \to X, R \in \mathcal{R}, h(\delta_R) \leq m\} \\
&\leq m \vee \bigvee\{h(\mathsf{coar}_{R^2}(\delta_R)) \mid h : R^2 \to X, R \in \mathcal{R}, h(\delta_R) \leq m\} \\
&\leq m \vee \bigvee\{h(\mathsf{coar}_{R^2}(h^{-1}(m))) \mid h : R^2 \to X, R \in \mathcal{R}, h(\delta_R) \leq m\} \\
&\leq m \vee \bigvee\{h(\mathsf{coar}_{R}(h^{-1}(m))) \mid h : R \to X, R \in \mathcal{R}\} = \mathsf{cospl}^{\mathcal{R}}_X(m).
\end{aligned}$$

✠

Observemos que $\mathsf{cospl}^{\mathcal{R}}$ es el operador de cerradura más pequeño que es indiscreto sobre $\mathcal{R}$, pues si $c \in \mathsf{CL}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ es indiscreto sobre $\mathcal{R}$ considere

$$M \xrightarrow{m} X \xleftarrow{h} R$$

con $m \in \mathcal{M}$ y $R \in \mathcal{R}$ entonces:

$$m \vee h(\mathsf{coar}_R(h^{-1}(m)) \leq m \vee h(c_R(h^{-1}(m)) \leq m \vee c_X(h(h^{-1}(m)) \leq c_X(m)$$

por lo tanto $\mathsf{cospl}^{\mathcal{R}}_X(m) \leq c_X(m)$. Así que tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 7.12. *Si $\mathcal{R}$ es cerrada bajo cuadrados y cada objeto tiene un punto, entonces $\mathsf{cospl}^{\mathcal{R}} = \mathsf{coreg}^{\mathcal{R}}$ si y sólo si $\mathsf{coreg}^{\mathcal{R}}$ es indiscreto sobre $\mathcal{R}$.*

OBSERVACIÓN 7.13. *Al igual que subcategorías Nabla, tenemos una adjunción*

$$\mathsf{CL}(\mathcal{C},\mathcal{M}) \underset{\mathsf{Coar}}{\overset{\mathsf{cospl}}{\underset{\longrightarrow}{\overset{\longleftarrow}{\perp}}}} \mathsf{SUB}(\mathcal{C})$$

En efecto, para $\mathsf{R} \in \mathcal{R}$ *tenemos que* $\mathsf{cospl}^{\mathcal{R}}_{\mathsf{R}} = \mathsf{coar}_{\mathsf{R}}$, *así* $\mathcal{R} \subseteq \mathsf{Coar}(\mathsf{cospl}^{\mathcal{R}})$; *ahora para* $\mathsf{c} \in \mathsf{CL}(\mathcal{C},\mathcal{M})$ *tenemos*

$$\begin{aligned}\mathsf{cospl}^{\mathsf{Coar(c)}}_{\mathsf{X}}(m) &= m \vee \bigvee\{h(\mathsf{coar}_{\mathsf{A}}(h^{-1}(m))) \mid h : \mathsf{A} \to \mathsf{X}, \mathsf{A} \in \mathsf{Coar(c)}\}\\ &\leq m \vee \bigvee\{h(\mathsf{c}_{\mathsf{A}}(h^{-1}(m))) \mid h : \mathsf{A} \to \mathsf{X}, \mathsf{A} \in \mathsf{Coar(c)}\}\\ &\leq \mathsf{c}_{\mathsf{X}}(m);\end{aligned}$$

esto es, $\mathsf{cospl}^{\mathsf{Coar(c)}} \leq \mathsf{c}$.

Ahora veremos algunos ejemplos de operadores de cerradura coescindibles y luego de subcategorías de objetos c-indiscretos

EJEMPLOS 7.14.

1. Note que $\mathsf{coar} = \mathsf{cospl}^{\mathcal{C}}$ y $\mathsf{fine} = \mathsf{cospl}^{\mathcal{P}}$, esto es, los operadores de cerradura discreto e indiscreto son operadores de cerradura coescindibles.
2. En R-***Mod*** los operadores de cerradura coescindibles tienen una fácil descripción, para $\mathcal{R}$ una clase de R-módulos tenemos:

$$\mathsf{cospl}^{\mathcal{R}}_{\mathsf{M}}(\mathsf{N}) = \mathsf{N} + \bigvee\{\mathrm{Im}h \mid h : \mathsf{L} \to \mathsf{M}, \mathsf{L} \in \mathcal{R}\}$$

   El prerradical asociado a este operador es

$$\sigma_{\mathcal{R}}(\mathsf{M}) = \bigvee\{\mathrm{Im}h \mid h : \mathsf{N} \to \mathsf{M}, \mathsf{N} \in \mathcal{R}\}$$

3. El operador de cerradura con es coescindible, esto es, $\mathsf{con} = \mathsf{cospl}^{\mathcal{B}}$ donde $\mathcal{B}$ es la subcategoría de espacios conexos.
4. El operador de cerradura path es coescindible, esto es, $\mathsf{path} = \mathsf{cospl}^{\mathcal{A}}$ donde $\mathcal{A}$ es la subcategoría de espacios conexos por trayectorias.

Ahora daremos ejemplos de subcategorías de objetos c-indiscretos en ***Top*** y en R-***Mod***.

1. Con el operador de cerradura de Kuratowski k, los objetos k-indiscretos son los espcios indiscretos usuales.
2. Con el operador de cerradura con, los objetos con-indiscretos son los espacios conexos.
3. Si tomamos el operador de cerradura path, los objetos path-indiscretos son los espacios conexos por trayectorias.
4. En R-***Mod***, para $\eta \in$ R-pr, $\mathsf{Coar}(\min^{\eta}) = \mathbb{T}_{\eta}$.

8. Relaciones entre $\nabla(c)$, $\mathrm{Coar}(c)$ y $\mathrm{Cospl}(\mathcal{R})$

En esta parte veremos algunas relaciones y diferencias entre las tres nociones enla definición de esta sección, así que comencemos.

PROPOSICIÓN 8.1. *Si $\mathcal{C}$ tiene suficientes puntos y pozos en $\mathbb{E}$ son pt-sobreyectivos, entonces toda subcategoría nabla es una subcategoría se objetos* c*-indiscretos para algún* $c \in \mathsf{CL}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{A}$ una subcategoría nabla, y sea $(g_i : A_i \to Y)_{i\in I}$ pozo $\mathcal{M}$-coseparante, donde para cada $i \in I$, $A_i \in \mathcal{A}$. Considere el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\delta_{A_i}} & A_i \times A_i \\ {\scriptstyle g_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_i\times g_i} \\ Y & \xrightarrow[\delta_Y]{} & Y \times Y \end{array}$$

Si tenemos $\langle x, y\rangle : 1 \to Y \times Y$ con $x \neq y$ entonces por el lema 3.6.9 tenemos que

$$y \leq 1_Y \cong \mathsf{coar}_Y(x) \cong x \vee \bigvee g_i(\mathsf{coar}_{A_i}(g_i^{-1}(x))).$$

Por lo tanto, con $g_i^{-1}(x) : A_i' \to A_i$ y $\mathsf{coar}_{A_i}(g_i^{-1}(x)) : \mathsf{coar}_{A_i}(A_i') \to A_i$, el pozo $(x : 1 \to Y, (g_i \circ \mathsf{coar}_{A_i}(g_i^{-1}(x)) : \mathsf{coar}_{A_i}(A_i') \to Y)_{i\in I})$ pertenece a $\mathbb{E}$ (ya que el pozo $(g_i)_{i\in I}$ es $\mathcal{M}$-coseparante). Como $\mathbb{E}$-pozos son pt-sobreyectivos, y $x \neq y$, existen $j :\in I$ y $a' : 1 \to \mathsf{coar}_{A_j}(A_j')$ tal que $g_j \circ \mathsf{coar}_{A_j}(g_j^{-1}(x)) \circ a' = y$. Por lo tanto, el punto $a = \mathsf{coar}_{A_j}(g_j^{-1}(x)) \circ a'$ trivialmente cumple $a \leq \mathsf{coar}_{A_j}(g_j^{-1}(x))$ y $g_j \circ a = y$. Del lema 3.6.9 existe también $b : 1 \to A_j$ tal que $b \leq g_j^{-1}(x)$, y así $g_j \circ b = x$. Por lo tanto $(g_i \times g_i)\langle a, b\rangle$. De esta forma como hay suficientes puntos tenemos

$$1_{Y\times Y} \cong \delta_Y \vee \bigvee (g_i \times g_i)(1_{A_i \times A_i})$$

así que $Y \in \mathcal{A}$. Por lo tanto $\mathcal{A} = \mathsf{MCH}(\mathcal{A})$. ✠

Ahora veamos cuando una subcategoría de objetos c-indiscretos es una subcategoría coescindible. Pero antes necesitaremos un lema y algunas definiciones.

LEMA 8.2. *Si un pozo* $(h_i : Y_i \to X)_{i\in I}$ *se factoriza a través de un morfismo* $h : Y \to X$, *entonces para cada* $m \in \mathsf{Sub}(X)$ *se tiene que* $h(\mathsf{coar}_Y(h^{-1}(m))) \geq \bigvee_{i\in I} h_i(\mathsf{coar}_{Y_i}(h_i^{-1}(m)))$. *En particular si* $(h_i)_{i\in I}$ *es* $\mathcal{M}$*-coseparante entonces así lo es* h.

DEMOSTRACIÓN. Para $m \in \mathsf{Sub}(X)$ e $i \in I$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
h_i(\mathsf{coar}_{Y_i}(h_i^{-1}(m))) &= hg_i(\mathsf{coar}_{Y_i}((hg_i)^{-1}(m))) \\
&= hg_i(\mathsf{coar}_{Y_i}(g^{-1}h_i^{-1}(m)) \\
&= h(g_i(\mathsf{coar}_{Y_i}(g_i^{-1}(h_i^{-1}(f(m)))))) \\
&\leq h(\mathsf{coar}_Y(h^{-1}(m)))
\end{aligned}$$

Por lo tanto $h(\mathsf{coar}_Y(h^{-1}(m))) \geq \bigvee_{i\in I} h_i(\mathsf{coar}_{Y_i}(h_i^{-1}(m)))$. Claramente si $(h_i)_{i\in I}$ es $\mathcal{M}$-coseparante entonces h también lo es. ✠

DEFINICIÓN 8.3. *Sea $\mathcal{R}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$. Diremos que $\mathcal{R}$ es cerrada bajo f-pozos si cada vez que tengamos un pozo pequeño $(h_i : Y_i \to X)_{i\in I}$ en $\mathbb{E}$ con $Y_i \in \mathcal{R}$, el cual satisface que para cada $i, j \in I$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que existen $i_0, \ldots, i_n \in I$ y un morfismo $x : 1 \to h_{i_k}(Y_{i_k}) \wedge h_{i_{k+1}}(Y_{i_{k+1}})$ para cada $k = \overline{0, n}$ con $i = i_0$ y $j = i_n$, entonces $X \in \mathcal{R}$.*

OBSERVACIÓN 8.4. *Fácilmente se puede ver que si $\mathcal{R}$ es cerrada bajo f-pozos entonces $\mathsf{Quot}(\mathcal{R})$ también lo es.*

Ahora tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 8.5. *Sea $\mathcal{R}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$ donde $\mathcal{C}$ es bien $\mathcal{M}$-potenciada. Supongamos que morfismos en $\mathcal{E}$ son pt-sobreyectivos y que todo objeto en $\mathcal{C}$ que no es inicial tiene un punto, bajo estas condiciones si $\mathcal{R}$ es cerrada bajo f-pozos entonces $\mathsf{Cospl}(\mathcal{R}) = \mathsf{MCH}(\mathcal{R}) = \mathsf{Coar}(\mathsf{cospl}^{\mathcal{R}})$.*

DEMOSTRACIÓN. Solo necesitamos probar la contención de regreso. Sea $X \in \mathsf{MCH}(\mathcal{R})$, entonces existe un pozo $\mathcal{M}$-coseparante $(h_i : Y_i \to X)_{i\in I}$ tal que para cada $i \in I$ con $Y_i \in \mathcal{R}$ consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
Y_i \arrow[rr, "h_i"] \arrow[dr, "e_i"] & & X \\
& h_i(Y_i) \arrow[ur, "m_i"'] \arrow[d, "l_{j_i}"'] & \\
& \bigvee_{i\in J} h_i(Y_i) \arrow[uur, "\langle m_j \rangle"'] &
\end{tikzcd}$$

Donde J es un conjunto de representantes de I. Probaremos que hay un f-pozo con dominio en $\mathsf{Quot}(\mathcal{R})$ y codominio $\bigvee_{i\in J} h_i(Y_i)$. Consideremos el conjunto $L \subseteq J$

que satisface lo siguiente: para cada $i, j \in L$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que existen $i_0, \ldots, i_n \in L$ y un morfismo $x : 1 \to h_{i_k}(Y_{i_k}) \wedge h_{i_{k+1}}(Y_{i_{k+1}})$ para cada $k = \overline{0, n}$ con $i = i_0$ y $j = i_n$. Como hay un punto en cada Y_i, podemos encontrar dos puntos $x : 1 \to \bigvee_{i \in L} h_i(Y_i)$ y $y : 1 \to h_j(Y_j)_{j \in J}$, por lo tanto, como $(h_i : Y_i \to X))_{i \in I}$ es $\mathcal{M}$-coseparante y por el lema 3.6.9 tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{coar}(\bigvee_{i \in L}(h_i(Y_i))) &\cong \bigvee_{i \in L}(h_i(Y_i)) \vee \bigvee_{j \in I} h_j(\mathrm{coar}(h_j^{-1}(\bigvee_{i \in L}(h_i(Y_i))))) \cong 1_Y \\ &\cong \mathrm{coar}(\bigvee_{j \in J} h_j(Y_j)) \cong \bigvee_{j \in J} h_j(Y_j) \vee \bigvee_{i \in I} h_i(\mathrm{coar}(h_i^{-1}(\bigvee_{j \in J} h_j(Y_j)))\end{aligned}$$

De esto y de que J es un conjunto de representantes obtenemos que

$$\bigvee_{j \in J} h_j(Y_j) \cong \bigvee_{i \in L} h_i(Y_i) \vee \bigvee_{j \in J}(h_j(\mathrm{coar}(h_j^{-1}(\bigvee_{i \in L} h_i(Y_i)))))$$

Para cada $j \in J$ tal que el objeto $h_j(\mathrm{coar}(h_j^{-1}(\bigvee_{i \in L} h_i(Y_i))))$ es no inicial, existe $z : 1 \to h_j(\mathrm{coar}(h_j^{-1}(\bigvee_{i \in L} h_i(Y_i))))$, como morfismos en $\mathcal{E}$ son pt-sobreyectivos tenemos que existe $a : 1 \to \mathrm{coar}(h_j^{-1}(\bigvee_{i \in L} h_i(Y_i)))$ tal que $h_j \circ a = z$. Ahora como existe un punto en $\bigvee_{i \in L} h_i(Y_i)$, por el lema 3.6.9 existe $b : 1 \to h_j^{-1}(\bigvee_{i \in L} h_i(Y_i))$, pero esto implica que $j \in L$, por lo tanto $\bigvee_{j \in J} h_j(Y_j) \cong \bigvee_{i \in L} h_i(Y_i)$, esto implica que $(Y_i \to \bigvee_{j \in J} h_j(Y_j))_{i \in L}$ es un f-pozo, por lo tanto $\bigvee_{j \in J} h_j(Y_j) \in \mathrm{Cospl}(\mathcal{R})$ por la proposición 3.6.11 y por que $\mathcal{R}$ es cerrada bajo f-pozos. Por lo tanto por el lema 3.8.2 tenemos que $X \in \mathrm{Cospl}(\mathcal{R})$ ✠

OBSERVACIÓN 8.6. *En categorías topológicas sobre conjuntos, las subcategorías que son coescindibles y cerradas bajo* f*-pozos fueron estudiadas extensamente por el Dr. Vázquez y la Dra. Salicrup (*[**36**]*) y fueron llamadas subcategorías de conexión.*

PROPOSICIÓN 8.7. *Sea $\mathcal{R}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$ la cual es cerrada bajo* f*-pozos. Bajo las hipótesis de la proposición anterior, para cada $X \in \mathcal{C}$ tenemos que: m es una $\mathcal{R}$-copieza de X si y sólo si $\mathrm{cospl}_X^{\mathcal{R}}(m) = \mathrm{coar}_X(m)$.*

DEMOSTRACIÓN. La necesidad es clara. Para la suficiencia usamos argumentos como los anteriores para factorizar el pozo de todos los morfismos con dominio en $\mathcal{R}$ y codominio X a través del morfismo $g = \langle m_i \rangle$. Entonces por el lema 3.8.2 tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{coar}_X(m) &= \mathrm{cospl}_X^{\mathcal{R}}(m) \\ &= m \vee \bigvee\{h(\mathrm{coar}(h^{-1}(m))) \mid h : R \to X, R \in \mathcal{R}\} \\ &= m \vee g(\mathrm{coar}(g^{-1}(m))).\end{aligned}$$

✠

EJEMPLOS 8.8.

1. En ***Top***, $\mathsf{Coar}(\mathsf{cospl}^S)$ (S el espacio de Sierpinski) es una subcategoría de objetos indiscretos que no es una subcategoría nabla, pues $S \in \mathsf{Coar}(\mathsf{cospl}^S)$ y $S \times S \notin \mathsf{Coar}(\mathsf{cospl}^S)$ (ya que cualquier subcategoría delta que contenga a S, debe contener $S \times S$.
2. La subcategoría de espacios compactos es una subcategoría coescindible que no es una subcategoría de objetos indiscretos, pues los espacios compactosno son cerrados bajo f-pozos.
3. Toda subcategoría nabla en ***Top*** es una subcategoría coescindible.
4. En R-***Mod*** Cualquiera clase cohereditaria que no es cerrada bajo coproductos es una subcategoría coescindible que no es subcategoría nabla.

9. Últimos comentarios

Ya para concluir, en esta sección presentaremos algunos problemas abiertos y daremos alguna direcciones que podemos seguir a partir de la teoría descrita aquí. Un problema que surge de inmediato es el siguiente:

PROBLEMA 9.1. *Dar un ejemplo de una subcategoría coescindible que no sea una subcategoría cohereditaria.*

Nosotros no pudimos encontrar algún ejemplo. También es de importancia comentar que subcategorías escindibles y coescindibles pueden tratarse como generalizaciones de clases hereditarias y cohereditaras en categorías de módulos como fueron estudiadas en [**2**]. Así que con esto a la mano, podemos estudiar clases naturales y conaturales como fueron estudiadas en ese artículo, pero ahora en categorías arbitrarias. Para presentar el siguiente problema necesitamos una definición.

DEFINICIÓN 9.2. *Sean $\mathcal{C}$ una categoría y $\mathsf{c} \in \mathsf{CL}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$. Un morfismo $\mathsf{f} : \mathsf{X} \to \mathsf{Y}$ es* c*-cerrado si para cada $\mathsf{m} \in \mathsf{Sub}(\mathsf{X})$ se tiene que $\mathsf{f}(\mathsf{c}_\mathsf{X}(\mathsf{m})) \cong \mathsf{c}_\mathsf{Y}(\mathsf{f}(\mathsf{m}))$.*

morfismo c-cerrados en ***Top*** (c el operador de cerradura usual) son las funciones cerradas usuales. Con esto podemos definir el siguiente concepto.

DEFINICIÓN 9.3. *Sean $\mathcal{D}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$ y $\mathsf{X} \in \mathcal{C}$. Para $\mathsf{m} \in \mathsf{Sub}(\mathsf{X})$, diremos que m es una $\mathcal{D}$-pieza cerrada para X si existe un morfismo cerrado $\mathsf{f} : \mathsf{X} \to \mathsf{D}$, con $\mathsf{D} \in \mathcal{D}$ tal que $\mathsf{f}^{-1}(\mathsf{f}(\mathsf{m})) = \mathsf{m}$.*

De esta forma podemos definir una subcategorías similares a las subcategorías escindibles, esto es, subcategorías que llamaremos subcategorías ce-escindibles.

DEFINICIÓN 9.4. *Sea $\mathcal{D}$ una subcategoría de $\mathcal{C}$. La subcategoría* ce*-escindible de $\mathcal{D}$, la cual denotaremos por* $\mathsf{Spl}^{\mathsf{ce}}(\mathcal{D})$, *está definida por:* $\mathsf{X} \in \mathsf{Spl}^{\mathsf{ce}}(\mathcal{D})$ *si y sólo si, todo subobjeto de* X *es una* ce*-pieza cerrada.*

Con esto tenemos el siguiete problema.

PROBLEMA 9.5. *Caracterizar las subcategorías $\mathcal{D}$ que satisfacen* $\mathsf{Spl}^{\mathsf{ce}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$.

Por último definiremos subcategorías que generalizan las subcagetorías de objetos discretos e indiscretos.

DEFINICIÓN 9.6. *Para* $\mathsf{c}, \mathsf{d} \in \mathsf{CL}(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ *con* $\mathsf{c} \leq \mathsf{d}$, *definimos la* c-d*-subcategoría de $\mathcal{C}$ como*

$$\mathcal{K}_{\mathsf{c}}^{\mathsf{d}} = \{\mathsf{X} \in \mathcal{C} \mid \mathsf{c}_{\mathsf{X}} = \mathsf{d}_{\mathsf{X}}\}.$$

En [**22**] hay muchos ejemplos de c-d-subcategorías. Ahora veamos el siguiente problema.

PROBLEMA 9.7. *¿Bajo que condiciones tenemos que* $\mathsf{Spl}^{\mathsf{ce}}(\mathcal{K}_{\mathsf{c}}^{\mathsf{d}}) = \mathcal{K}_{\mathsf{c}}^{\mathsf{d}}$*?*

Si encontramos buenas condiciones para obtener la igualdad anterior, podremos obtener como corolario la mayoría de resultados en [**5**].

Fin...

Bibliografía

[1] J. Adámek, H. Herrlich, G.E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories*, Wiley, New York, 1990.

[2] A. Alvarado García, H. Rincón, J. Ríos Montes, *On the lattices of natural and conatural clăsses in R-Mod*, Communications in Algebra, 29(2), 541-556, 2001.

[3] F. Anderson, K. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[4] A.V. Arhangel'skiĭ, *The general concept of cleavability of a topological space*, Topology and its Applications, 44, 27-36, 1992.

[5] A.V. Arhangel'skiĭ, F. Cammaroto, *On different types of cleavability of topological spaces*, Journal of Australian Mathematical Society, 58, 183-199, 1995.

[6] A.V. Arhangel'skiĭ, Lj. D. Kočinac, *Concerning splittability and perfect mappings*, Publications de L'institut Mathématique, 47(61), 127-131, 1990.

[7] L. Bican, T. Kepka, P. Němec, *Rings, Modules and Preradicals*, Lectures Notes in Pure and Applied Math. 75, Marcel Dekker, New York, 1982.

[8] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra I, II y III*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 50 y 51, Cambridge University Press, 1994.

[9] G.C.L. Brümmer, E. Giuli, D. Holgate, *Splitting closure opetarors*, Acta Mathematica Hungarica, por publicarse.

[10] G. Castellini, *Categorical Closure Operators*, Mathematics: Theory and Applications, Birkhäuser, 2003.

[11] G. Castellini, D Hajek, *Closure operators and connectedness*, Topology and its Applications, 55, 29-45, 1994.

[12] G. Castellini, D. Holgate, *A link between two connectedness notions*, Applied Categorical Structures, 11, 473-486, 2003.

[13] M.M. Clementino, *On connectedness via a closure operators*, Applied Categorical Structures, 9, 539-556, 2001.

[14] M.M. Clementino, W. Tholen, *Tychonoff's theorem in a category*, Proc. Amer. Math. Soc., 124, 3311-3314, 1996.

[15] M.M. Clementino, W. Tholen, *Separation versus connectedness*, Topology and its Applications, 75, 143-181, 1997.

[16] M.M. Clementino, W. Tholen, *Separated and conected maps*, Applied Categorical Structures, 6, 373-401, 1998.

[17] M.M. Clementino, E. Giuli, W. Tholen, *Topology in a category: compactness*, Portugaliae Math. Soc., 53, 397-433, 1996.

[18] D. Dikranjan, E. Giuli, *Closure operators I*, Topology and its Applications, 27, 129-143,1987.

[19] D. Dikranjan, E. Giuli, *Compactness, minimality and closedness with respect to a closure operator*, Categorical Topology and its Relations to Analysis, Algebra and Combinatorics, World Scientific, 248-296, Singapore, 1989.

[20] D. Dikranjan, E. Giuli, *Factorizations, injectivity and compactness in categories of modules*, Communications in Algebra, 19(1), 45-83, 1991.

[21] D. Dikranjan, E. Giuli, W. Tholen, *Closure operators II*, Categorical Topology and its Relations to Analysis, Algebra and Combinatorics, World Scientific, 297-335, Singapore, 1989.

[22] D. Dikranjan, W. Tholen, *Categorical Structure of Closure Operators*, Kluwer Academic Publishers, Dorddrecht Boston London, 1995.

[23] R. Engelking, *General Topology*, Monografie Matematyczne, vol. 60, Polish Scientific Publishers, Warzawa, 1989.

[24] T.H. Fay, *Compact modules*, Communications in Algebra, 16(6), 1209-1219, 1988.

[25] T.H. Fay, G.L. Walls , *Regular and normal closure operators and categorical compactness for groups*, Applied Categorical Structures, 3, 261-278, 1995.

[26] R. Fernández-Alonso, F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón, C. Signoret, *The lattice structure of preradicals*, Communications in Algebra, 30(3)(2002) 1533-1544.

[27] R. Fernández-Alonso, F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón, C. Signoret, *The lattice structure of preradicals II: Partitions*, Journal of Algebra and Its Applications, Vol. 1, No. 2 (2002) 201-214.

[28] R. Fernández-Alonso, F. Raggi, J. Ríos, H. Rincón, C. Signoret, *The lattice structure of preradicals III: Operators*, Journal of Pure and Applied Algebra, 190, 251-265, 2004.

[29] E. Giuli, W. Tholen, *Opennes with respect to a closure operator*, Applied Categorical Structures, 8, 487-502, 2000.

[30] H. Herrlich, G. Salicrup and G.E. Strecker, *Factorizations, denseness, separation and relatively compact objects*, Topology and its Applications, 27, 157-169,1987.

[31] D. Holgate, *The pullback closure operator and generalisations of perfectness*, Applied Categorical Structures, 4, 107-120, 1996.

[32] H. Lord, *Connectednesses and disconnectednesses II*, in Proceedings of the VIII Prague Top. Sym., 216-250, 1996.

[33] S. Mac Lane, *Categories for Working Mathematician*, Segunda Edición, Springer, New Yok, 1998.

[34] G. Preuß, *Point separations axioms, monotopological categories and MacNeille completios*, Category Theory at Work, editado por H. Herrlich y H.E. Porst, Heldermann Verlag Berlin, 47-55,1991.

[35] G. Preuß, *Theory of Topological Structures*, Reidel, Dordrecht-Boston-Lancaster, 1988.

[36] G. Salicrup, *Categorical Topology - The Complete Work of Graciela Salicrup*, editado por Horst Herrlich y Carlos Prieto, Aportaciones Matemáticas, Sociedad Matemática Mexicana, Vol. 2, 1988.

[37] W. Tholen, *A categorical guide to separation, compactness and perfectness*, Homology, Homotopy and its Applications, 1, 147-161, 1999.

[38] W. Tholen, *Objects with dense diagonals*, en: Proceedings Workshop on Categorical Topology, L'Alquila, Italia, 1994, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[39] A. Tonolo, *Denseness and closedness with respect to closure operators*, Journal of Pure and Applied Algebra, 110, 81-89, 1996.