UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

GEOMETRIA EUCLIDIANA CON SKETCH - PAD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

HECTOR JOE ROSAS TOLEDO

DIRECTOR DE TESIS: ACT. HUMBERTO SANTILLANA LOYO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

GEOMETRIA EUCLIDIANA CON SKETCH-PAD

realizado por HECTOR JOE ROSAS TOLEDO

con número de cuenta 9126492-7 , quien cubrió los créditos de la carrera de: MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	ACT. HUMBERTO SANTILLANA LOYO	
Propietario	MAT. TONATIHU VALDEZ HERNANDEZ	
Propietario	MAT. MIGUEL ANGEL CHAVEZ GARCIA	Miguel Ángel Chávez García
Suplente	MAT. MARIA JUANA LINARES ALTAMIRANO	
Suplente	MAT. HECTOR DE JESUS ARGUETA VILLAMAR	

Consejo Departamental de
MATEMATICAS

M. EN C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

AGRADECIMIENTOS

Esta Tesis es la culminación del apoyo de muchas personas que me han dedicado gran parte de su tiempo para de alguna manera culminar con éxito el presente trabajo. Por lo cual dedico algunos renglones.

A Dios, por permitirme vivir y soñar a lado de esta estupenda familia.

A mis papás, Beatriz Toledo Tapia y Alberto Rosas Pérez, pues gracias a ellos estoy en esta vida, en la cual me han enseñado a realizar todos mis sueños, pues de ellos he recibido disciplina, cariño, amor y que nunca han dejado de demostrarlo hacia mí y mis hermanos. A los dos, Muchas gracias.

A mis hermanos Alberto y Araceli Rosas Toledo, hasta la fecha siempre compresivos y cariñosos, a ellos gracias.

Al Act. Humberto Santillana Loyo por su apoyo, conocimiento y tiempo en la realización de esta Tesis. Humberto, Gracias.

A mis asesores y compañeros; Tonatihu, Chávez, a los esposos Héctor y María Juana Linares Altamirano, José Luis, Juan Miguel, Alejandro, Narciso, siempre con sus observaciones, comentarios, aliento y principalmente amistad, ello contribuyó a que mi vida en la facultad fuera más agradable. Muchas Gracias.

A todos mis maestros en general que siempre me brindaron conocimiento y madurez como ser humano. A todos ustedes maestros, Gracias.

A toda mi familia, que en todo momento me dieron su confianza y cariño. A todos ellos Muchas gracias.

A Erick, Dante, Gimena, Karem y Alexa ya que con sus juegos y risas han logrado sacudir los malos momentos de mi vida, Gracias hijos.

Reitero a mis padres Beatriz y Alberto mi agradecimiento, de todo corazón, Muchas gracias.

Finalmente, a mi Universidad la Máxima Casa de Estudios UNAM, pues desde la preparatoria he tenido la dicha de estar como alumno, a la Facultad de Ciencias, ya que a ella le debo toda mi formación como ser humano y académica. Un GOGOL de Gracias UNAM.

GEOMETRÍA EUCLIDIANA CON SKETCH-PAD

Héctor Joé Rosas Toledo
Facultad de Ciencias – UNAM
Ciudad Universitaria C. P. 04510
Ciudad de México, México.
Octubre de 2004.

Índice General

INTRODUCCIÓN

Desde el inicio de mi carrera como docente, en el nivel medio(estudiantes con edades comprendidas entre los 12 y los 15 años), he encontrado varias razones por las que es importante el estudio de le Geometría a estos niveles. Por un lado, desarrolla la imaginación espacial de los alumnos y su capacidad para explorar, representar y describir su entorno físico. Por otro lado les proporciona un conocimiento útil en la vida cotidiana, las ciencias, las técnicas y diversos campos de la actividad humana. Además los prepara para comprender mejor las ideas relacionadas con el número, la medición y otras partes de las matemáticas.

En virtud de que tengo la firme convicción de que, incluir la enseñanza de la geometría, a los estudiantes de este nivel, les proporcionará grandes beneficios en las tareas o actividades que abordarán en su futuro inmediato, sean estas de carácter académico o laboral, me he abocado a planear y diseñar estrategias de enseñanza de la geometría que resulten en un mejor y más eficiente aprendizaje de los estudiantes.

El estudio de la Geometría es una fuente muy amplia de motivación para continuar estudios en el área de las matemáticas en alguna de sus múltiples ramas, pues esta visto que la psicología del ser humano le resulta agradable el poder representar por medio de figuras el planteamiento de muy diversas situaciones que se presentan en nuestra vida cotidiana.

Como en la actualidad, se cuenta con bastantes recursos (computadora, diapositivas, cañón, etcétera) hago uso de algunos de ellos y trato de impulsar a los estudiantes al estudio de la Geometría.

Utilizando la computadora como herramienta principal, haciendo clases Inter-activas, donde el alumno en ese mismo instante cuestione, observe y prueba al estar realizando movimientos con figuras, haciendo trazos, utilizando colores, graficando, encontrando medidas ya sea de segmentos, áreas entre otros más, de tal manera que su interés por la Geometría se incremente y note la importancia de esta en nuestra vida diaria así como en cursos posteriores.

De los aspectos observables del comportamiento de los alumnos en el nivel medio, podemos mencionar la curiosidad que le causan las dimensiones de su propio cuerpo y las comparaciones que hacen de estas dimensiones con los objetos que se encuentran en su entorno, desarrollando ideas sobre conceptos claramente geométricos como son los segmentos, algunas figuras regulares simples como triángulos, cuadrados, círculos y otros más.

Desde el punto de vista anterior, la enseñanza de la Geometría en la escuela secundaria me marca los siguientes propósitos generales.

a)Proporcionar a los alumnos una experiencia geométrica que les ayude a comprender, describir y representar el entorno y el mundo donde viven.
b)Proporcionarles, también, una serie de conocimientos que les serán útiles para resolver problemas de la vida cotidiana y acceder al estudio de otras materias y disciplinas.
c)Iniciarlos gradualmente al razonamiento deductivo.

El sistema educativo mexicano es relativamente joven, por lo que el estudio de la geometría todavía no tiene la tradición que se observa en otras partes del mundo. Además, la enseñanza de esta disciplina, fue desfavorecida por su ubicación entre las ultimas unidades de los programas anteriores del primero, segundo y tercer año de la escuela secundaria. Una manera de remediar esta situación se recomienda que, durante los tres grados, la geometría se estudie a lo largo de todo el año escolar, de manera que los alumnos puedan practicarla constantemente y ninguno de sus temas se ha dejado en su totalidad para el final.

Sin embargo, cuando participan en los cursos de matemáticas, una pregunta recurrente que realizan es ¿para qué me sirve estudiar geometría?. Es aquí donde pienso que la labor del profesor es valiosa pues puede tender el andamiaje que facilitará al estudiante la construcción de su conocimiento, que si el profesor está atento a las inquietudes del estudiante, podrá canalizar éstas para que la motivación intrínseca del alumno se manifieste y por ende, se incremente el interés por el estudio de la geometría. Si logramos activar la motivación intrínseca del estudiante, daremos desde el punto de vista didáctico, un paso importante puesto que el conocimiento de la geometría, es de gran valía tanto para los físicos, matemáticos, ingenieros, arquitectos, como para los carpinteros, mecánicos, torneros, hojalateros, albañiles y prácticamente para la mayoría de las actividades a las que puede dedicarse el hombre moderno.

La estrategia es llevar la atención del estudiante a la importancia que puede tener el conocer la geometría, al menos como un auxiliar muy importante en la solución de problemas, que pueden surgir y corresponder a otras áreas de conocimiento. Sin embargo, el esfuerzo que debe realizar el profesor para hacer esquemas, gráficas o dibujos, depende de sus habilidades personales al respecto y, si adicionalmente, consideramos que los alumnos pierden con mucha facilidad la concentración en una actividad, no podemos dedicarle mucho tiempo de clase a la elaboración de estos dibujos auxiliares; es por esas razones que he revisado varios programas comerciales de computadora (soft-ware) y me resulta adecuado al contenido del temario de la asignatura, el que comercialmente se denomina "The Geometer's Sketch-Pad".

El uso de este soft-ware, complementado con la intervención del profesor, con preguntas intencionadas, explicaciones adicionales, variación de los cuestionamientos, actividades y practicas con un objetivo previo hacia donde se quiere llegar y otras acciones más, puede ser llevado a que el estudiante se interese más por el conocimiento de la geometría, incluso he llegado a observar que resulta más fácil que el alumno se familiarice con la terminología propia de la geometría, llegando a hacer uso apropiado de términos como: **Axioma, teorema, lema, postulado, hipótesis, corolario,** etcétera, trabajando con algoritmos actividades y practicas realizados por los mismos alumnos o el profesor, lo que me ha permitido dar explicaciones sencillas sobre los procesos de hacer demostraciones, interpretarlas e inducir al estudiante a intentar hacer alguna demostración sencilla.

Un beneficio adicional que se logra, cuando introducimos al estudiante al conocimiento de la geometría, es que desarrolla capacidad de análisis y síntesis, se vuelve (o se percibe) más crítico, adquiere hábitos de cuestionar las tesis que le son presentadas, lee más cuidadosamente y deja de aceptar en forma pasiva los argumentos que le son presentados.

Estoy consiente que casi demostraciones no realizo en la presente tesis pues he concluido que son pocos los estudiantes desafortunadamente que les interesa la parte formal de la matemática, es decir, a este nivel les "espanta" o de plano no les interesa más.

Cuando se realiza una demostración matemática lo primero que cuestiona el alumno es, "profesor esto va a venir en el examen",por ello si a alguien le interesa saber alguna demostración de este trabajo al final menciono algunos libros en los cuales se encuentran estos resultados, desde luego que no son los únicos pero si son de un nivel considerable para alumnos de este nivel por lo menos.

Se tiene que tener presente que si alguien desea leer la presente tesis no necesita ser un experto en Geometer's pues bastará con dar una leída y practicar en el cuadernillo de notas realizado por dos de mis asesores el cual recomiendo ampliamente en la bibliografía pues en lo personal fue de mucha ayuda además el Geometre'r esta en ambiente Windows el cual me atrevo a decir que la gran mayoría de estudiantes a nivel secundaria y más avanzados están familiarizados con Windows.

Pero donde llevo acabo gran parte de esta tesis es en mi centro de trabajo el Instituto Canadiense Clarac el cual me ha facilitado el suficiente equipo para escribir y practicar esta tesis con mis alumnos siendo que la gran mayoría de alumnos pertenecientes a este Instituto previamente ya se les impartió un ligero bosquejo de la forma de trabajar con el Geometer's Sketch –Pad .

HISTORIA DE LA GEOMETRÍA

La Geometría Empírica

Alrededor de tres o dos mil años antes de nuestra era, el desarrollo de las civilizaciones y la necesidad de enfrentar más problemas cada vez más complejos, relacionados con la agricultura y la construcción, condujo a los hombres de la antigüedad a descubrir que ciertos hechos responden a una misma ley o regla geométrica. Se paso entonces de la geometría espontánea de las primeras culturas a una geometría sistemática, de naturaleza fuertemente empírica. Los historiadores parecen concordar en que este hecho se dio de manera independiente en las cuencas de los ríos Nilo en Egipto, Tigris y Eufrates en la antigua Mesopotamia, Indo y Ganges en la India y Hoang Ho y Yang Tse Kiang en China.

Los registros más antiguos que se conocen de la actividad del hombre en el campo de la Geometría datan aproximadamente de 3000 a.C. Consisten en unas tabletas de arcilla cocida al sol descubiertas en Mesopotamia y en las que se encuentran grabados caracteres cuneiformes. Registros posteriores muestran que entre 1600 y 1800 a.C, los habitantes de Mesopotamia desarrollaron una geometría íntimamente ligada a las necesidades de la medición practica y estaban familiarizados, entre otras cosas, con las reglas para calcular el área de rectángulos, triángulos rectángulos e isósceles y , quizás, triángulos generales además podían obtener el volumen de un paralelepípedo y algunos prismas. La circunferencia se tomaba como tres veces el diámetro y el área del círculo como un doceavo del cuadrado de la circunferencia, lo que en términos modernos quiere decir que tomaban el área igual a tres veces el cuadrado del radio solo por mencionar algunas cosas.

En el antiguo Egipto, la Geometría también tuvo un fuerte desarrollo, sobre todo en lo concerniente al conocimiento de las fórmulas de medición necesarias para computar superficies de terrenos y capacidades de graneros. Tomaban, por ejemplo, el área de un círculo como igual a la de un cuadrado cuyo lado es $^{8}/_{9}$ del diámetro, lo que equivale a tomar $\pi = 3.16$, aunque no se sabe si alcanzaron a descubrir el Teorema de Pitágoras, supieron que el triángulo de lados 3, 4 y 5 tiene un ángulo recto, resultado que hoy en día también conocemos y es utilizado al menos por los albañiles, entre otros más resultados.

Hay razones para pensar que las antiguas civilizaciones de la India y China llegaron a descubrimientos similares a los realizados en Egipto y Mesopotamia. Sin embargo, debido a lo perecedero de los materiales sobre los cuales escribían, asociado al clima de esas regiones , casi no se conservan vestigios de sus descubrimientos.

La Geometría Deductiva

Al decaer las civilizaciones egipcia y mesopotámica, gran parte de la Geometría desarrollada por estos pueblos paso a los Griegos. Es un hecho maravilloso que los antiguos griegos no se hayan contentado con extender el número de resultados matemáticos conocidos, si no que transformaron el conjunto de resultados empíricos recibidos de sus antecesores en una ciencia deductiva, es decir en una disciplina en donde las reglas y leyes geométricas no se inducen de la observación de una multitud de casos particulares, si no que se establecen deductivamente mediante un razonamiento lógico.

El primer individuo a quien se atribuye haber utilizado el método deductivo para demostrar un hecho geométrico es Tales de Mileto (alrededor de 600 a.C), conocido como uno de los siete sabios de la antigüedad. Se dice que demostró, entre otros resultados , que el diámetro divide a un círculo a la mitad y que el ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto. Más de dos mil quinientos años después estos resultados pueden parecernos elementales, pero son las primeras proposiciones geométricas que según se tiene noticia fueron demostradas utilizando un razonamiento deductivo.

A Tales le atribuyen también muchas aplicaciones de la Geometría en la solución de los problemas prácticos. Cuenta la historia que cuando estaba en Egipto, provocó la admiración de todos al calcular la altura de una pirámide por medio de sombras.

Lo que llama la atención en la historia de Tales es la introducción de elementos muy sencillos, gracias a los cuales el problema se resuelve de manera casi inmediata. Hay muchos problemas de medición que se solucionan en forma similar, es decir introduciendo elementos auxiliares para reducir el calculo de distancias inaccesibles a la determinación de elementos de un triángulo.

Pitágoras, quien nació alrededor del año 572 a.C. en la isla de Samos en Grecia, continuo el trabajo de sistematización de la Geometría sobre bases deductivas iniciado por Tales 50 años antes: Parece que Pitágoras viajo extensamente por Egipto y los países del antiguo Oriente antes de emigrar , debido a la ocupación Persa de Jonia, a la ciudad griega de Crotonia, en Italia del sur. Allí fundo una fraternidad dedicada al estudio de la filosofía, las matemáticas y la ciencia.

Durante cerca de 200 años, Pitágoras, y luego sus discípulos y seguidores, contribuyeron al desarrollo de las matemáticas. Conocieron las propiedades de las paralelas y las utilizaron para probar que la suma de los ángulos interiores de cualquier rectángulo es igual a dos rectos, desarrollaron una teoría de la proporción bastante completa, limitada a las cantidades conmensurables, es decir a las cantidades que están entre si en la misma razón que dos enteros , entre otros resultados.

El desarrollo que los pitagóricos dieron a la geometría condujo a que hubiera cadenas cada vez más largas de resultados demostrados a partir de otros resultados . Al aumentar la longitud de las cadenas de proposiciones conectadas deductivamente entres si- y al unirse varias cadenas para formar cadenas aún más largas-comenzó a vislumbrarse el siguiente gran avance de la matemática griega, que consiste en la organización axiomática de la geometría.

La Geometría Axiomática

En algún momento difícil de precisar, entre Tales(600 a.C) y Euclides (300 a.C), surgió en la matemática griega la idea de que la Geometría podía construirse como una larga cadena de proposiciones, demostradas por deducción a partir de un número muy reducido de principios o postulados aceptados sin demostración desde el inicio.

Pero será incorrecto si no mencionamos algo de Euclides. Nació aproximadamente en el año 300 a.C., la época del florecimiento de la cultura grecohelenística, y la recuperación que hizo de los conocimientos matemáticos preexistentes, así como sus originales fundamentos geométricos lo convirtieron en la mayor autoridad de la antigüedad; sin embargo sus teorías prolongaron su vigencia a las corrientes del pensamiento matemático medievales, renancentistas y barrocas, y sólo en tiempos modernos se perfilaron teorías y postulados de geometría no euclidiana. De la trascendencia de su obra da constancia el hecho de que sus Elementos de Geometría es uno de los volúmenes con mayor número de publicaciones a lo largo de la historia.

Uno de los méritos de Euclides fue dar a la geometría estructura científica: frente a la especie configuración visual (o táctil) que presenta una línea recta, un plano, una circunferencia, un triángulo, un cono, ... el entendimiento puede adoptar la actitud de aceptar como datos elementales los que dan los sentidos, que son potencias vitales sin intimidad y sin actividad, convertir por una abstracción tales datos en conceptos, darles la forma de definiciones o proposiciones básicas y enlazarlos para que tengan forma científica, mediante una *lógica formal*. Tal es la estructura de la geometría euclidiana.

El patrón del método axiomático se podría resumir de la siguiente manera :

a) Se dan explicaciones sobre ciertos términos básicos: punto, línea, plano,... con la intención de sugerir lo que significan.
b) Algunos principios o proposiciones relativos a los términos básicos se enuncian y suponen verdaderos con base en las propiedades sugeridas por las primeras explicaciones. Estos principios se llaman *axiomas* o *postulados*
c) Todos los otros términos del discurso se definen a partir de los términos básicos introducidos al inicio.
d) Todos los demás principios o proposiciones del discurso se demuestran lógicamente a partir de los axiomas o postulados iniciales. A las proposiciones que se demuestran se les llama *teoremas*.

Euclides junto con Arquímedes (287-212 a.C) y Apolonio (262-200), quienes le sucedieron, marcan el apogeo de las matemáticas griegas. Después de ellos, sólo Diofanto, llamado a veces el "padre del álgebra", y Pappus, quien vivió 500 años después de Apolonio y es autor de numerosos trabajos originales, pudieron darles vida. Podemos decir que, al desaparecer Pappus, las matemáticas dejaron por mucho tiempo de ser un estudio vivo y su memoria se perpetuo a trávez del trabajo de escritores y críticos sin la grandeza de sus antecesores.

Después, la situación se volvió cada ves más difícil para el trabajo científico y el pensamiento libre e imaginativo: Durante la Edad Media, el interés por las matemáticas decayó en Europa y los descubrimientos griegos sólo se salvaron gracias al trabajo de los eruditos árabes. Debemos al pueblo y a la civilización árabe el haber sabido conservar y transmitir a la posteridad esta parte de la cultura humana.

HISTORIA SOBRE EUCLIDES

La historia de la **Geometría** se remonta a los albores de la humanidad. Los hombres primitivos poseían de manera intuitiva los conceptos de recta, punto y plano. Además, la naturaleza les ofrecía múltiples ejemplos de representaciones Geométricas : el Sol y la Luna eran representados por medio de círculos, una estrella de mar por un polígono estrellado, y un caracol cualquiera por una espiral.

Posteriormente, la necesidad que surgió de conocer y modificar el mundo que los rodeaba los obligó a profundizar y relacionar sus ideas, hasta que **Euclides,** matemático griego, organizo tal cúmulo de conocimientos acerca de la *Geometría* y sentó las bases de lo que hoy en día se conoce como *Geometría clásica.* Su obra fue tan exitosa que desde hace más de dos mil años se sigue enseñando, y aunque se han hecho nuevas aportaciones al respecto, desde entonces se le ha llamado **"Geometría Euclidiana",** que sigue siendo uno de los pilares más sólidos para el estudio de la matemática y su aplicación en el avance de la ciencia y tecnología.

La Geometría Euclidiana rama de la matemática que trata acerca del estudio del espacio, de sus propiedades y de las formas que en el se encuentran. Se supone, que sus iniciadores fueron los egipcios y que el rey Sesostris dividió las tierras en parcelas cuadrangulares que se repartían entre sus súbditos. Si el Nilo en su crecidas aguas se llevaba una parte de ellas, los agrimensores evaluaban la parte arrastrada y decidían, según lo que quedaba, cuanto debía pagar el dueño de la parcela por concepto de impuesto.

La aplicación de los conocimientos geométricos a la medida de la tierra fue la causa de que se diera a esta parte de la Matemática el nombre de *Geometría*, que significa **"Medida de la Tierra"**

Euclides vivió en Grecia 300 años antes de Cristo que a su manera respondió preguntas como: ¿Qué tanto es valido suponer como verdadero al resolver un problema?, en la antigüedad, la respuesta hubiera sido así: "Todo aquello que sepamos cierto por experiencia", pero resulta que la experiencia es esencialmente subjetiva, así que la validez de una suposición dependería de quien la hace.

Y con ello Euclides elaboró una teoría Matemática, para elaborar esta teoría, Euclides enuncio primero un conjunto de definiciones de todos los elementos con los que iba a trabajar, es decir, definió punto, recta, plano, entre otros. Después enuncio las propiedades más simples que relacionan a dichos elementos y finalmente enuncio un conjunto de propiedades generales de la relación de igualdad.

Durante todos los siglos posteriores se han hecho diversas criticas a la Teoría Euclidiana, sin embargo el método Euclidiano , o método *teórico deductivo*, sigue siendo valido en el estudio no sólo de la *Geometría* si no en general de la matemática.

El método **deductivo** o razonamiento deductivo es aquel que procede de lo general a lo específico. Con el se comienza siempre con una proposición general y se aplica a un caso específico y cualquier caso del razonamiento deductivo puede reducirse a tres pasos:

- Primero. Una proposición general
- Segundo .Una proposición específica, la cual satisface todas las condiciones de la proposición general.
- Tercero. La conclusión

La geometría Euclidiana usa el método deductivo para probar la validez de sus afirmaciones. Las afirmaciones o proposiciones en la *Geometría* Euclidiana pueden clasificarse en : *axiomas, postulados, teoremas, lemas, corolarios y definiciones.*

También es importante decir que no se puede partir de "la nada" para elaborar algo, así que tenemos que suponer algunas propiedades como universalmente verdaderas. Actualmente, a las propiedades de una teoría que se aceptan a *priori* se les llama **Axiomas.**

Ejemplo:

El todo es mayor que cualquiera de sus partes

Los axiomas de una teoría deben tener la característica de ser completos, ser independientes y ser consistentes; esto quiere decir, que sean capaces de generar todas las propiedades de los elementos que sean objeto de la teoría; que ninguno de ellos sea susceptible de ser generado por los demás y que no existan contradicciones entre ellos.

Aunque los axiomas de Euclides no cumplen con la primera de estas condiciones, es decir no son completos, sirvieron para construir una buena parte de la Geometría que hasta hoy se estudia y se emplean en diversas disciplinas de la actividad humana.

Euclides partió solo de cinco propiedades a las que llamó *Postulados.*(Que mencionaremos más adelante).

Postulado: Es una proposición tan clara y evidente que se admite sin demostración.

Ejemplo: *El camino más corto entre dos puntos es la recta que los une*

Teorema: Es una proposición que debe ser demostrada a partir de los axiomas. La demostración consta de un conjunto de razonamientos que conducen a la evidencia de la verdad de la proposición.

Un teorema consta de dos partes: la *hipótesis* y la tesis.

Ejemplo:

Si A, B y C son los vértices de un triángulo, entonces ángulo A + ángulo B + ángulo C es igual a dos rectos.

Lema: Es un teorema preliminar a otro que se utiliza para demostrar otro teorema más importante.

Ejemplo:

La suma de los ángulos interiores en cualquier triángulo es de 180

Este teorema sirve de base para demostrar el teorema que dice " Un ángulo exterior de cualquier triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes a el".

Corolario: Es una proposición que se deduce de un teorema como consecuencia del mismo.

Ejemplo:

Del teorema "La suma de los ángulo interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos" se deduce el siguiente corolario:

"La suma de los ángulos agudos en el interior de un triángulo rectángulo es igual a un ángulo recto"

Definición: Es la determinación clara, exacta y precisa de la naturaleza de una idea o de un objeto.

Ejemplo:

El triángulo es el único polígono que tiene igual número de lados que de ángulos además es el único polígono rígido.

Aunque de Euclides se tienen pocos datos acerca de su vida, se sabe que fue un matemático griego del(s.III a de C); fundó su célebre escuela en Alejandría durante el reinado de Ptolomeo I. Qué dedico gran parte de su tiempo a coleccionar y a organizar los teoremas de sus predecesores y a integrarlos en una obra de trece libros llamada **Elementos.**

Euclides no fue propiamente un gran innovador, pero tuvo la habilidad de escribir en términos claros y breves las demostraciones alcanzadas por Tales, Eudoxo y otros sabios de la edad de oro de la Geometría griega, tales como Democrito, Hipócrates de Quios y Arquitas. Esta obra maestra de lógica deductiva, en la que se unifican los mejores esfuerzos de esas mentes creadoras, ha conservado por mas de dos milenios todo su valor y es considerada como la colección de pensamientos más rigurosamente razonados que se haya escrito.

Enunciemos por último los cinco postulados de Euclides escritos en un lenguaje coloquial :

1. Por dos puntos siempre se puede trazar una recta.
2. Toda recta es prolongable tanto como se quiera en cualquiera de sus direcciones.
3. Cualquier punto en el plano se puede usar como centro de un círculo (o de un arco de un círculo) de radio arbitrario.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.

El ultimo postulado de Euclides tiene diversos enunciados, todos equivalentes, a saber:

5_1.Dada una recta y un punto fuera de ella, existe una y sólo una paralela a la recta dada que contenga el punto dado.

5_2.Los ángulos alternos-internos entre paralelas son iguales.

5_3.Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él.

5_4.La suma de los ángulos interiores de un triángulo es de180^0.

5_5.Si dos rectas son cortadas por una transversal y de alguno de los lados de ésta la suma de los ángulos interiores con la rectas es menor a dos ángulos rectos, entonces, si las rectas se prolongan suficientemente de ese mismo lado, se habrán de intersecar.

CAPÍTULO 1

Propiedades de las Figuras Geométricas

La palabra geometría se deriva del griego que significa *medición de la tierra* y que trata de las figuras geométricas empleada para la medición de extensiones. El triángulo el cuadrado y la circunferencia son ejemplos de figuras geométricas. Figura 1.1

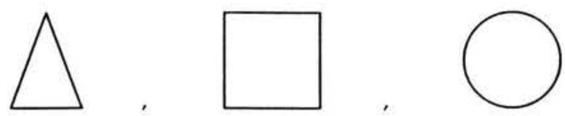


Figura 1.1

Las figuras geométricas son muy variadas. Una parte de una figura geométrica cualquiera, es, a su vez, una figura geométrica, por tanto la unión de varias figuras geométricas es igualmente una figura geométrica.. Por ejemplo en la Figura 1.2(a) consta de un triángulo y tres cuadrados, mientras que en la figura 1.2.(b) consta de una circunferencia y partes de una circunferencia.

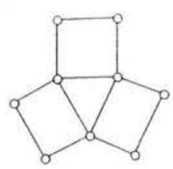


Figura 1.2(a)

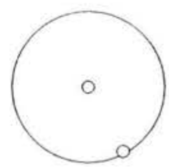


Figura 1.2(b)

Observación 1.1: Consideremos que toda figura geométrica esta compuesta por puntos.

Punto y Recta

Las figuras geométricas elementales en el plano son el **punto** *y la* ***recta***. Para designar los puntos emplearemos letras mayúsculas A, B, C, . . . y las rectas se designaran con letras minúsculas: *a, b , c*, . . . Figura 1.3.

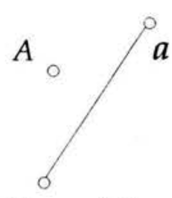


Figura 1.3

Algunas Propiedades de Puntos y Rectas en el Plano

Sean *a* y *b* dos rectas cualesquiera y los puntos A B y C en las rectas de la siguiente manera. Claramente los puntos A y C se encuentran en la recta *a*. Y también decimos que los puntos A y C **pertenecen a la recta** ***a*** o que la recta *a* pasa por los puntos A y C. Figura 1.4.

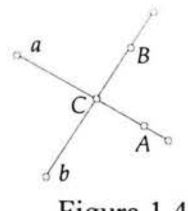


Figura 1.4

El punto B se encuentra en la recta *b* pero no se encuentra en la recta *a*. El punto C se encuentra en la recta *a* y en la recta *b*. Las rectas *a* y *b* se cortan en el punto C, por tanto el punto C es **intersección de las rectas** *a* y *b*.

Por lo que se tienen las dos siguientes propiedades:

Propiedad 1.1: Cualquiera que sea la recta, existen puntos que pertenecen a la recta y puntos que no pertenecen a la recta.

Propiedad 1.2: Cualesquiera que sean dos puntos, existe una recta que pasa por estos puntos, y sólo una." Postulado I de Euclides".

Cualquier recta puede ser designada con dos puntos que se hallan en esta, es decir, la recta *a* de la Figura 4 se asignara por AC y la recta *b* se puede asignar por BC.

Ya que por dos puntos se puede trazar una única recta, dos rectas distintas no se cortan o se cortan en un punto único, por lo que se obtiene la propiedad:

Propiedad 1.3 Dos rectas diferentes no se cortan o se cortan en un punto único.

Propiedades de la Posición Reciproca de los Puntos en la Recta y en el Plano

Sea *a* una recta y A, B y C puntos situados en la misma. (Figura 1.5). El punto B esta situado entre A y C, haciendo referencia de esto, decimos que los puntos A y C se encuentran a distintos **lados** del punto B. También podemos decir que los puntos A y C los separa B. Los puntos A y B se encuentran a un mismo lado del punto C, no están separados por el punto C. Análogamente los puntos B y C están a un mismo lado del punto A no están separados por A.

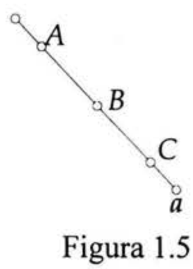


Figura 1.5

Ahora vemos lo siguiente el punto A divide a la recta *a* en dos partes llamadas **semirrectas**. Los puntos B y C se hallan en una misma semirrecta, ya que el punto A no los separa. Entonces los puntos B y D se encuentran en diferentes semirrectas, por que el punto A los separa. Figura 1.6

Por lo que el punto A que divide la recta a en semirrectas se le llama punto de **origen** por tanto a las semirrectas se les llama **complementarias**: una semirrecta también es llamada **rayo.** Figura 1.6.

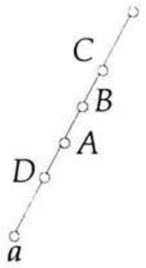


Figura 1.6

Observación 1.2: Una semirrecta se puede también designar con dos puntos: el punto de origen y otro punto suyo cualquiera con la condición de que el punto de origen siempre se colocara en primer lugar, así el punto A divide a la recta a en dos semirrectas AB y AD. (Figura 1.6).

Pero supongamos que los puntos A y B se encuentran en la recta a. (Figura 1.7). Se entenderá por **segmento** $\overline{AB}$ a la parte de la recta a cuyos puntos son todos los puntos X de la recta a situados entre A y B, donde A y B se le llaman **extremos** del segmento entonces tenemos las siguientes propiedades.

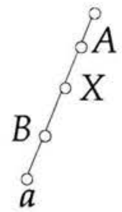


Figura 1.7

Propiedades:

Propiedad 1.4: El segmento $\overline{AB}$ es una parte de la semirrecta AB, o sea todo punto del segmento $\overline{AB}$ es un punto de la semirrecta AB, esto es;

Sea X un punto cualquiera del segmento $\overline{AB}$, además X esta entre A y B, luego el punto A no se encuentra entre X y B ya que sólo uno de los tres puntos A, X y B se encuentra entre los otros dos, por lo que el punto A no separa a los puntos X y B, por lo que el punto X pertenece a la semirrecta AB y no a su complemento. Figura 1.7.

Por otro lado la recta a divide al plano en dos **semiplanos.** Los puntos A y B se encuentran en un mismo semiplano ya que el segmento $\overline{AB}$ no corta a la recta a mientras que el segmento $\overline{A_1B_1}$ se encuentran en distintos semiplanos, puesto que el segmento $\overline{A_1B_1}$ corta a la recta a.
Y, para la notación de semiplanos ocuparemos letras griegas $\alpha, \beta, \chi, ...$ Figura 1.8.

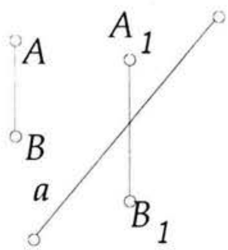


Figura 1.8

Ahora por el punto de origen A de la semirrecta AB tracemos una recta *a* que no pase por el punto B la recta *a* y la recta AB se cortan en el punto A y no existen más puntos de intersección. Figura 1.9.

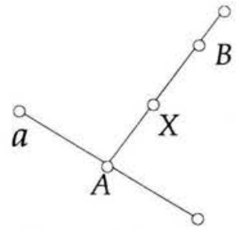


Figura 1.9

Sea X un punto cualquiera en la semirrecta AB, nos damos cuenta que el segmento $\overline{BX}$ no corta a la recta *a*, el segmento $\overline{BX}$ podría cortar a la recta *a* en A, pero el punto A no pertenece al segmento $\overline{BX}$ ya que no separa a los punto B y X, puesto que $\overline{BX}$ no corta a la recta *a*, en el mismo semiplano que el punto B, por lo que se tienen las propiedades:

Propiedad 1.5: Si por el punto de origen A de una semirrecta AB se traza una recta *a* que no pase por el punto B, toda la semirrecta AB estará en un mismo semiplano respecto a la recta *a*.

Ya que el segmento $\overline{AB}$ es una parte de la semirrecta AB se tiene:

Propiedad 1.6: Si por el extremo A del segmento $\overline{AB}$ se traza una recta *a* que no pase por el punto B, todo segmento $\overline{AB}$ quedará situado en un semiplano respecto a la recta *a*.

Por lo anterior se deduce que:

Propiedad 1.7: De tres puntos de una recta uno de ellos, y sólo uno, se halla entre los otros dos.

Propiedad 1.8: Un punto situado en una recta lo divide en dos semirrectas. Los puntos de una semirrecta no están separados por el punto de división. Los puntos de diferentes semirrectas están separados por este punto.

Propiedad 1.9: Toda recta divide el plano en dos semiplanos. Si los extremos de un segmento cualquiera pertenecen a un semiplano, el segmento no corta la recta. Si los extremos del segmento pertenecen a diferentes semiplanos, el segmento corta la recta.

Propiedades Fundamentales de la Medición de Segmentos y Ángulos

Propiedad 1.10: Todo segmento tiene una longitud determinada mayor que cero.

Propiedad 1.11: Si un punto C de la recta AB se encuentra entre los puntos A y B, la longitud del segmento $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$

Definición 1.1: Se llama **ángulo** a una figura formada por dos semirrectas con un punto de origen común. Este punto se llama vértice del ángulo y las semirrectas reciben el nombre de lados del ángulo Figura 1.10.

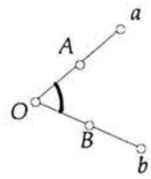


Figura 1.10

Si los lados de un ángulo son semirrectas complementarias de una misma recta, el ángulo se llama **llano.**

Para designar a un ángulo se señala su vértice, sus lados, o tres puntos: La palabra ángulo suele sustituirse por $\angle O$ o $\measuredangle O$, $\measuredangle(ab)$, $\measuredangle AOB$ en el cuarto caso el vértice se coloca en medio y a veces se utilizan letras griegas, es decir $\measuredangle\alpha, \measuredangle\beta, \measuredangle\theta, \ldots$, (no confundir con los planos).

Propiedades Fundamentales de la Medición de Ángulos

Propiedad 1.12: Todo ángulo tiene una medida en grados determinada mayor que cero. El ángulo llano es igual a 180^0.

Propiedad 1.13: Si un recta *c* parte del vértice de un ángulo AOB y sea C un punto sobre la recta *c*, además *c* pasa entre sus lados del $\measuredangle AOB$ entonces el $\measuredangle AOB$ es igual a la suma de los ángulos $\measuredangle AOC$ y $\measuredangle COB$. Figura 1.11.

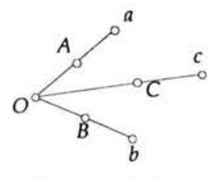


Figura 1.11

Propiedades Fundamentales de la Construcción de Segmentos y Ángulos

Propiedad 1.14: Cualquiera que sea el número positivo m, en una semirrecta se puede construir a partir de su punto de origen un segmento de longitud m (cm) y sólo uno.

Propiedad 1.15: Cualquiera que sea el numero positivo n menor que 180^0, se puede construir, a partir de una semirrecta dada y en el semiplano dado, un ángulo de n grados y sólo uno.

Actividad I

Construyamos a partir del punto de origen A de la semirrecta AB, un segmento $\overline{AC}$ menor que AB la pregunta es: ¿Cuál de los puntos A, B y C se encuentra entre los otros dos? Figura 1.12. Punto A de origen

$\overline{AC}$ segmento

$\overline{AC} < AB$

Figura 1.12

Caso 1: El punto A no esta entre C y B ya que C y B se encuentra en la misma semirrecta, cuyo punto de origen es A.

Caso 2: Si B estuviera entre A y C por propiedad 1.11 $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ o sea $\overline{AB}<\overline{AC},$ pero por hipótesis, es $\overline{AC}<\overline{AB},$ por lo que B no puede estar entre A y C.

Puesto que uno de los puntos se encuentra necesariamente entre los otros dos, este punto deberá ser únicamente el punto C, por lo que concluimos:

Propiedad 1.16: Si en una semirrecta AB se construye, a partir de su origen A, un segmento $\overline{AC}$ menor que AB, estará C entre A y B.

Con lo hasta aquí estudiado ya podemos definir lo que es un **Triángulo**:

Definición 1.2: Un triángulo es una figura de tres puntos no pertenecientes a una misma recta y de tres segmentos que unen a estos puntos de dos en dos. Los puntos se llaman **vértices** y los segmentos **lados** del triángulo. Figura 1.13 (a), (b) o (c).

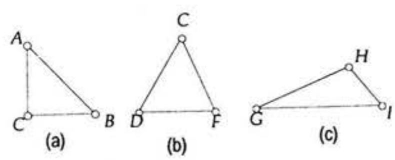


Figura 1.13

A veces la palabra " triángulo" se sustituye por el símbolo Δ, esto es, en la Figura 1.13(a) se escribirá ΔACB y los ángulos del Δ ACB se denotaran por $\measuredangle A, \measuredangle C\ y\ \measuredangle B$

Observación 1.3: Todo triángulo, determina tres ángulos. De la Figura 1.13(a) los ángulos del Δ ACB se denotarían por $\measuredangle A, \measuredangle C\ y\ \measuredangle B$.

Enunciemos tres criterios básicos

Criterio 1.1: Dos segmentos se denominan **iguales** si tienen la misma longitud.

Criterio 1.2: Dos ángulos se llaman iguales si tienen la misma medida angular expresada en grados.

Criterio 1.3: Dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ son iguales si se tiene que:

$$\begin{array}{lcl} \measuredangle A = \measuredangle A_1 & & \overline{AB} = \overline{A_1B_1} \\ \measuredangle B = \measuredangle B_1 & y & \overline{BC} = \overline{B_1C_1} \\ \measuredangle C = \measuredangle C_1 & & \overline{CA} = \overline{C_1A_1} \end{array}$$

o en su defecto se ponen marcas sobre los gráficos. Figura 1.14.

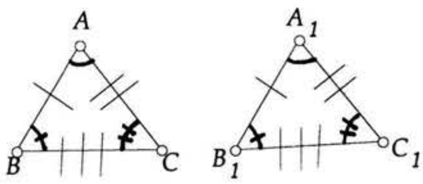


Figura 1.14

Criterio 1.4: Si en dos triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ se tiene que

$\measuredangle A = \measuredangle A_1$ $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$ y $\overline{AC} = \overline{A_1C_1}$,

los triángulos son iguales, es decir, también $\measuredangle B = \measuredangle B_1$, $\measuredangle C = \measuredangle C_1$ y $\overline{BC} = \overline{B_1C_1}$

Propiedades Fundamentales de las Paralelas

En el plano se llaman paralelas a dos rectas que no se cortan, con la particularidad de que las rectas se consideran prolongadas indefinidamente en ambas direcciones. (Postulado II de Euclides).

Construcción de Paralelas utilizando Sketch-Pad

En las prácticas de dibujo y trazos geométricos el objetivo es que los alumnos se expresen a través del uso correcto de los instrumentos de dibujo, incluido un lápiz "bien afilado". No obstante, es importante que aprendan a describir, verbalmente o por escrito, una figura o los pasos que se siguen en una construcción. De esta manera podrán apropiarse gradualmente del vocabulario y el lenguaje utilizados en la Geometría y aprendan a utilizarlos correctamente.

Empezaremos con las construcciones de rectas paralelas y/o perpendiculares con ciertas restricciones pues para el trazado de una carretera, la construcción de puentes, trabes entre otros puede ser muy útil, además para las actividades en capítulos de más adelante damos por conocido que estos trazos se dominan o al menos ya se tiene la idea.

PRÁCTICA # 1.1 Trazo de una Paralela con Círculos de Radios Variables

Sea " r " una recta dada y un punto P fuera de "r"

Paso 1: Trazamos un círculo c1 con centro en P de tal modo que corte a la recta "r" en los puntos A y B. (Con la herramienta de círculo nos colocamos en el punto P y abrimos, después marcamos c1 y la recta "r" y del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 2: Trazamos un círculo c2 con centro en B y el punto P. (Marcamos los puntos B y P "en ese orden" y del menú Construct escogemos Circle By Center and Point).

Paso 3: Trazamos el segmento $\overline{AB}$ y lo marcamos en negrita. (Seleccionamos los puntos A y B luego del menú Construct escogemos Segment, así marcado del menú Display escogemos Line Style-Thick).

Paso 4: Trazamos un círculo c3 de radio $\overline{AB}$ y con centro en P. (Marcamos el segmento $\overline{AB}$ y el punto P y del menú Construct escogemos Circle By Center and Radius).

Paso 5: A la intersección de los círculos c2 y c3 le llamamos Q "que esta a la altura de P". (Marcamos los círculos c2 y c3 luego del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 6: Unimos los puntos P y Q. (Marcamos los puntos P y Q luego del menú Construct escogemos Line).

Por lo que PQ || AB Figura 1.15.

Numéricamente, si queremos podemos encontrar el valor de la pendiente tanto de PQ como de "r" y movemos cualquier extremo de la recta AB ¿que ocurre con el valor de las pendientes?.

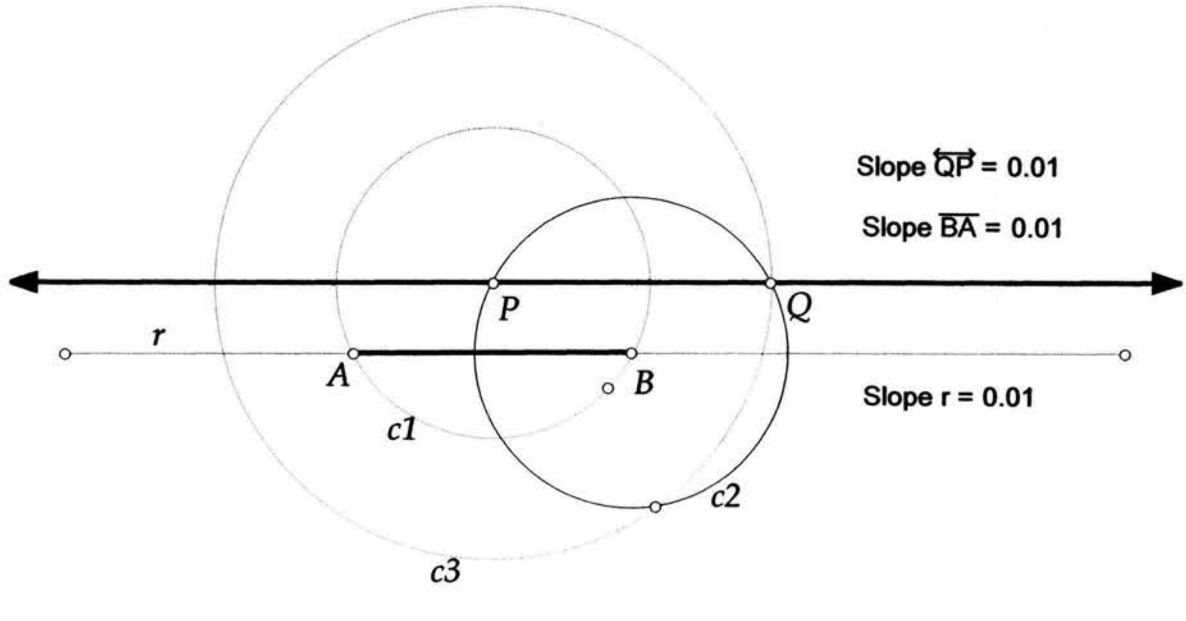


Figura 1.15

Por lo que se dice que dos rectas son paralelas si sus pendientes* tienen el mismo valor

* pag. 328[Álgebra, Smith]

Práctica # 1.2.

Construcción de una paralela a una recta dada "r" y un punto P fuera de la recta con radios fijos, pero mayor que la distancia del punto P a " r ".

Paso 1: Trazamos una línea "r" y un punto P fuera de la recta. (Seleccionamos la herramienta de regla escogemos el tercer icono y trazamos, luego con la herramienta de punto localizamos P, con la condición dada)

Paso 2: Trazamos una circunferencia c1 con centro en P de tal modo que corte a "r" en los puntos A y B. (Seleccionamos la herramienta de círculo nos colocamos en P y abrimos, luego marcamos c1 y la recta "r" y del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 3: Trazamos una línea "t" que pase por el punto A y el punto P cortando al círculo c1 en el punto C. (Seleccionamos los puntos A y P luego del menú Construct escogemos Line, marcamos c1 y la recta "t" y del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 4: Trazamos el segmento $\overline{PB}$. (Seleccionamos los puntos P y B y del menú Construct escogemos Segment).

Paso 5: Trazamos las circunferencias c2 y c3 de radio $\overline{PB}$ y centro en los puntos C y B. (Marcamos el segmento $\overline{PB}$ y el punto C y del menú Construct escogemos Circle By Center And Point, luego marcamos $\overline{PB}$ y el punto B y del menú Construct escogemos Circle By Center And Point).

Paso 6: Encontramos el punto Q que es intersección de las circunferencias c2 y c3. (Marcamos c2 y c3 y del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 7: Trazamos una línea que pase por los puntos P y Q. (Seleccionamos los puntos P y Q y del menú Constuct escogemos Line).
Por lo que la línea PQ es paralela a la recta dada "r" es decir $PQ \parallel r$ Figura 1.16.

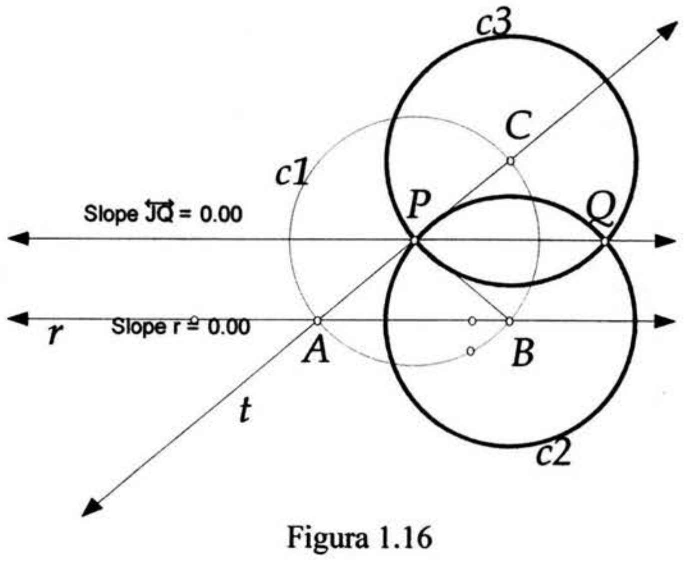


Figura 1.16

Propiedad 1.17: Por todo punto B que no se halla en la recta "a" se puede trazar en el plano no más de una paralela a la recta "a".

Ahora definimos algunos ángulos importantes, esto es:

Definición 1.3: Dos ángulos se llaman **adyacentes** si tienen un lado común y sus otros lados son semirrectas complementarias es decir los ángulos ACD y BCD son entonces adyacentes.

Tienen el lado CD común. Los lados CA y CB son semirrectas complementarias de la recta AB ya que los puntos A y B están separados por el punto C de origen. Figura 1.17.

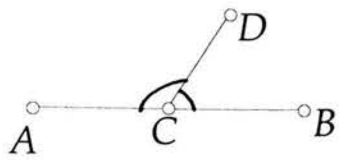


Figura 1.17

Teorema 1.1: La suma de los ángulos adyacentes es igual a 180^0.

Definición 1.4: Dos ángulos se llaman **verticales (opuestos por el vértice)** si los lados de un ángulo son semirrectas complementarias de los lados del otro. De la Figura 1.18. Los ángulos ACB y ECD son ángulos verticales.

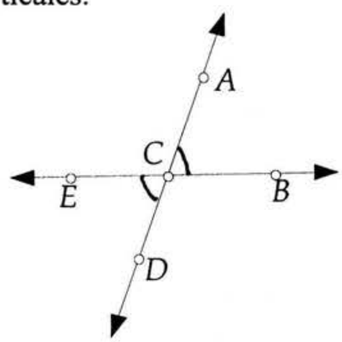


Figura 1.18

Definición 1.5: Si $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son dos lados consecutivos, entonces el suplemento del ángulo BPA se llama "ángulo exterior" correspondiente al vértice P. Figura 1.19.

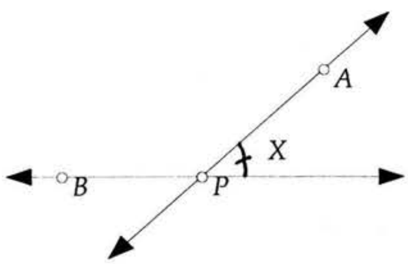


Figura 1.19

Definición 1.6: Si $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$ es un conjunto de rectas y t es una recta que intersecta a cada una de las rectas a_i, entonces t se llama "transversal" del conjunto de rectas dadas. Figura 1.20.

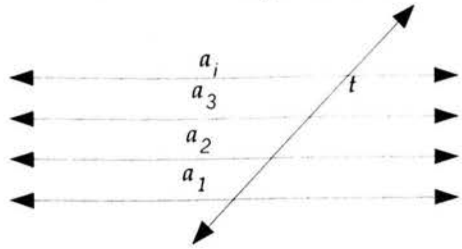


Figura 1.20

Definición 1.7: Si dos rectas a y b son cortadas por una transversal t, en los puntos X y Y respectivamente. (Formando los ángulos $\measuredangle 1, \measuredangle 2, \measuredangle 3$ y $\measuredangle 4$) cada uno de estos se llaman "internos".

Un par de ángulos internos determinados en regiones distintas del plano con respecto a la transversal t se llaman "alternos-internos".Así en la Figura 1.21 $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 3$ son alternos-internos al igual que $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 4$.

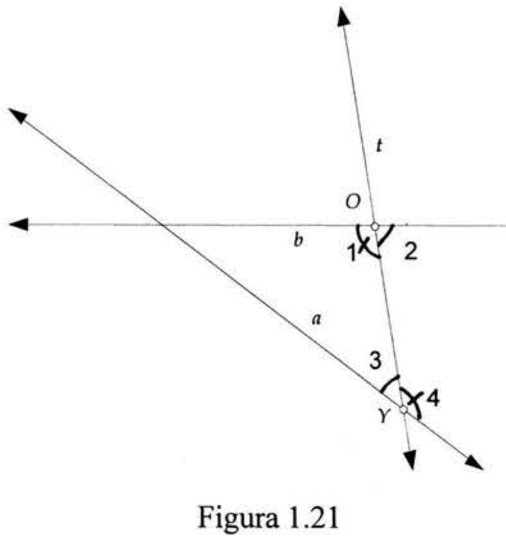


Figura 1.21

Definición 1.8: Si $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 2$ son ángulos alternos-internos, y si ángulo $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 3$ son opuestos por el vértice, entonces los ángulos $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 3$ se llaman correspondientes. Figura 1.22.

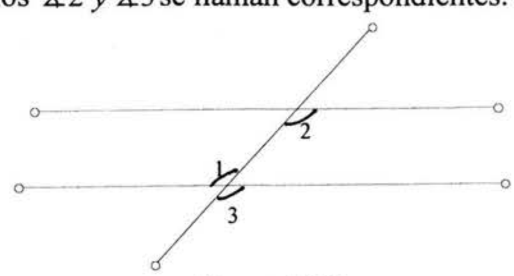


Figura 1.22

Teorema 1.2: Los ángulos verticales son iguales.

Demostración: Hipótesis $\measuredangle AOD$ es opuesto por el vértice a $\measuredangle COB$

Tesis: $\measuredangle AOD = \measuredangle COB$. Figura 1.23.

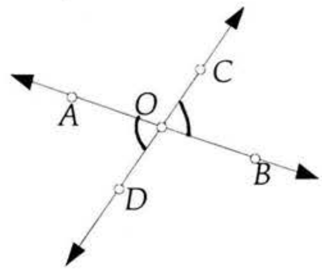


Figura 1.23

Afirmaciones	Razones
$1.\measuredangle AOD + \measuredangle AOC = 180^0$	Por ser angulo llano
$2.\measuredangle AOC + \measuredangle COB = 180^0$	Por ser suplementarios
$3.\measuredangle AOD + \measuredangle AOC = \measuredangle AOC + \measuredangle COB$	Igualando 1 y 2
$4.\measuredangle AOD = \measuredangle COB$	Ley de la cancelacion por igualdad

□

Rectas Perpendiculares

Definición 1.9: Un ángulo igual a 90^0 se llama *ángulo recto*. Del teorema 1.1 resulta que el ángulo adyacente de un ángulo recto es un ángulo recto.

Construcción de Perpendiculares Utilizando Sketch-Pad

PRÁCTICA # 1.3

Trazar una perpendicular a una recta dada "p" desde un punto M exterior a ella.

Paso 1: Dibujamos una recta "p" y la punteamos. (Con la herramienta de regla escogemos el tercer icono, después escogemos Line Style- Dashed).

Paso 2: Dibujamos un punto M fuera de "p". (Con la herramienta de punto damos clic en nuestro S'ketch).

Paso 3: Construimos una circunferencia c1 con centro en M cortando a "p" en los puntos X e Y. (Seleccionamos la herramienta círculo y nos colocamos en M abrimos de tal modo que corte a "p" luego marcamos "p" y c1 y del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 4: Trazamos el segmento $\overline{MX}$. (Seleccionamos los puntos M y X luego del menú Construct escogemos Segment).

Paso 5: Construimos una circunferencia c2 con centro en X y radio $\overline{MX}$. (Seleccionamos el punto X y el segmento $\overline{MX}$ luego del menú Construct escogemos Circle By Center and Radius).

Paso 6: Construimos una circunferencia c3 de radio $\overline{MX}$ y centro en Y. (Seleccionamos el punto Y y el segmento $\overline{MX}$ luego del menú Construct escogemos Circle By Center and Radius).

Paso 7: Encontramos los puntos de intersección de las circunferencias c2 y c3 y les llamamos M y N. (Marcamos c2 y c3 y del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 8: Trazamos el segmento $\overline{MN}$ siendo este la perpendicular a "p" desde un punto exterior M.(Marcamos M y N y del menú Construct escogemos Segment). Figura 1.24.

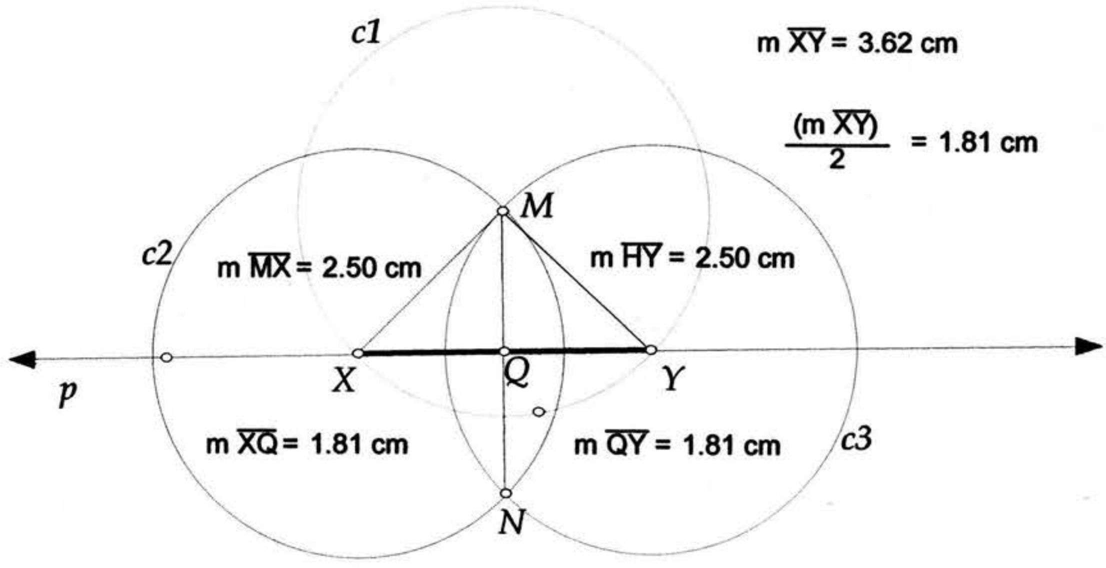


Figura 1.24

Por tanto $MN \perp p$. Pero además se tiene;

Investigación:

Realizar lo siguiente:

Sea Q el punto de intersección de MN y p (Encontrarlo)

Trazamos el segmento $\overline{MY}$

¿Como serán los triángulos MXQ y MQY?

¿Será $\overline{MX} = \overline{MY}$?

¿Qué puedes decir del segmento $\overline{MQ}$?

Conclusiones:

Mediatriz: es la recta perpendicular que divide a un segmento en partes iguales.

Teorema 1.3: Por todo punto de una recta se puede trazar una recta perpendicular a ella y sólo una.

PRÁCTICA # 1.4

Construcción de una perpendicular a una recta dada "p" por un punto M en la recta.

Sea "p" una recta cualquiera y un punto M en la recta.

Paso 1: Dibujamos una línea "p". (Seleccionamos de la herramienta de regla el tercer icono y trazamos).

Paso 2: Marcamos un punto M sobre "p". (Seleccionamos con la herramienta de punto y arrastramos colocándonos en "p").

Paso 3: Construimos una circunferencia c1 con centro en M y radio arbitrario cortando a "p"en dos puntos y les llamamos X e Y. (Seleccionamos la herramienta de círculo nos colocamos en M y trazamos, marcamos "p" y c1 y del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 4: Trazamos el segmento $\overline{XY}$ y lo ponemos en negrita. (Marcamos los puntos X y Y y del menú Construct escogemos Segment, luego del menú Display escogemos Line Style-Thick).

Paso 5: Construimos una circunferencia c2 de radio $\overline{XY}$ y centro en X quitamos la negrita. (Marcamos el segmento $\overline{XY}$ y el punto X y del menú Construct escogemos Circle By Center And Radius).

Paso 6: Construimos una circunferencia c3 de radio $\overline{XY}$ y centro en Y.(Marcamos el segmento $\overline{XY}$ y el punto Y y del menú Construct escogemos Circle By Center And Radius).

Paso 7: Encontramos los puntos de intersección de las circunferencias c2 y c3 y les llamamos P y Q. (Marcamos c2 y c3 y del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 8: Unimos P y Q siendo esta la perpendicular a "p" y que pasa por el punto M. (Marcamos los puntos P y Q luego del menú Construct escogemos Segment). Figura 1.25

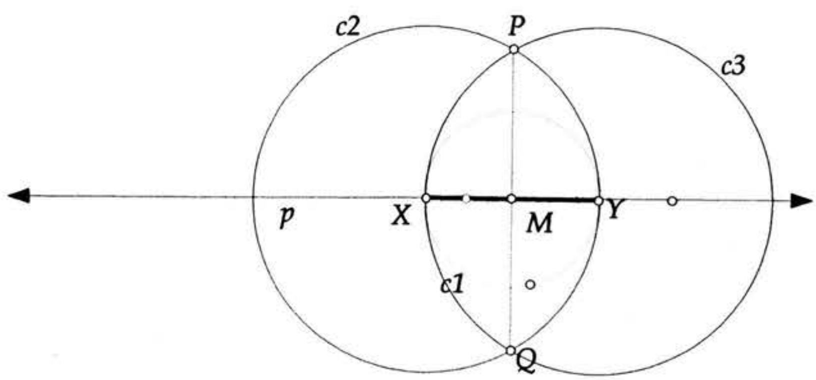


Figura 1.25

Por tanto $PQ \perp p$

Clasificación de Ángulos

Por lo regular también a los ángulos los denotaremos con letras griegas es decir: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

1.1 Ángulo de cero grados: Figura 1.26.

Figura 1.26 ángulo de 0^0

1.2. Ángulo périgono: $\beta = 360^0$ Figura 1.27.

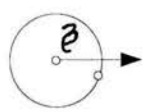


Figura 1.27

1.3. Ángulo agudo : $0^0 < \theta < 90^0$ Figura 1.28.

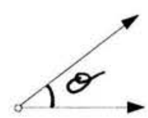


Figura 1.28

1.4.Ángulo obtuso: $90^0 < \phi < 180^0$ Figura 1.29.

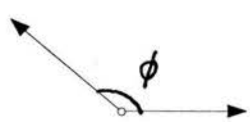


Figura 1.29

1.5.Ángulo entrante: $180^0 < \eta < 360^0$ Figura 1.30.

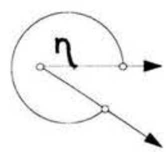
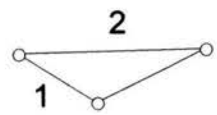


Figura 1.30

Construcción de Triángulos:

1.1) Con regla y compás construyase un triángulo de longitud 2 cm y otro de longitud 1 cm. Figuras 1.31(a) , (b).



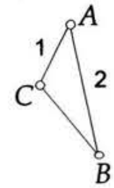


Figura 1.31(a) 1.31(b)

Si dibujamos como base de 1 cm se tendrán estos y muchos más Figura 1.32.

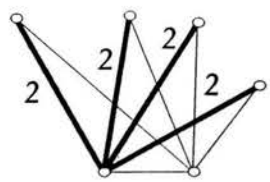


Figura 1.32

Es decir, si abrimos nuestro compás de 1 cm de longitud y trazamos una circunferencia, después trazamos un segmento de longitud 2 y observemos que hemos encontrado una infinidad de triángulos. Figura 1.33.

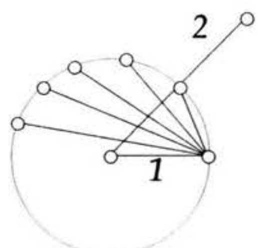


Figura 1.33

Esto es, si fijamos un lado y sobre uno de sus extremos giramos al otro lado podemos tener tantos triángulos como queramos, y no dependiendo de las longitudes que se den. Figura 1.34.

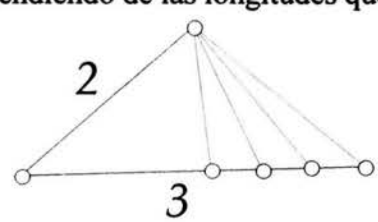


Figura 1.34

Por lo que tenemos:

◊ **Si conocemos las longitudes de dos lados, podemos construir una infinidad de triángulos.**

1.2) Ahora construyamos un triángulo de longitud 3 cm pero de modo que uno de los ángulos adyacentes a ese lado mida 60^0. Figura 1.35.

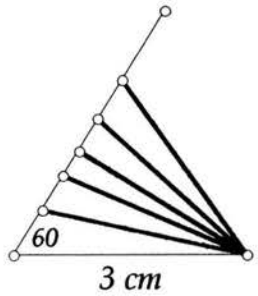


Figura 1.35

◊ **Es decir; Si conocemos la longitud de uno de los lados y un ángulo adyacente a ese lado, podemos construir una infinidad de triángulos.**

1.3) ¿Cuántos triángulos se podrá construir si se dan dos lados y el ángulo que forman?
Un único triangulo, esto es:
Construir un triángulo de lados 2 cm y 3 cm respectivamente y que el ángulo que se forman entre ellos es de 45^0. Figura 1.36(a) y (b).

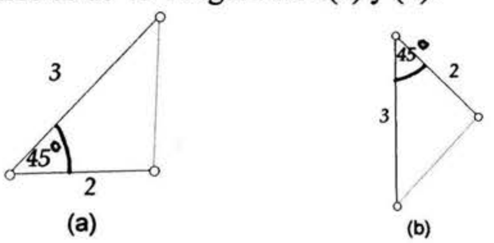


Figura 1.36

Pero, al parecer es el mismo, se puede comprobar si se recortan y se superponen, es decir colocándolo uno sobre el otro, si coinciden es que son el mismo triángulo, sólo en que distintas "posiciones" por lo que se dirá que son *congruentes.*

Por lo que se tiene la siguiente definición:

Definición 1.10: Dos triángulos, dos segmentos, dos ángulos o dos objetos cualesquiera se dirá que son **congruentes** si al superponerlos uno con el otro tienen la misma forma y tamaño.

Definición 1.11: Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida angular.

Definición 1.12: Dos segmentos son congruentes si miden lo mismo.

◊ **Es decir si conocemos dos lados y el ángulo que forman, podemos construir un único triángulo**

1.4) Pero si se da un lado y los dos ángulos adyacentes a él, por ejemplo de longitud 3 cm y ángulos de 30 y 45 grados. Figura 1.37.

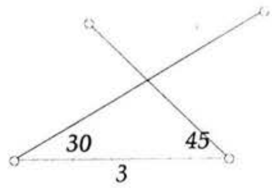


Figura 1.37

Observación 1.4: con dos ángulos de 90 grados no cerraría para formar el triángulo. Figura 1.38.

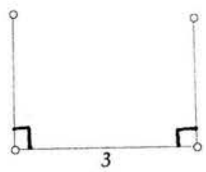


Figura 1.38

◊ Por tanto si conocemos la longitud de un lado y los dos ángulos adyacentes a ese lado, y la suma de estos ángulos es menor que 180 grados, entonces pedemos construir un único triángulo.

1.5) Pero si se conocen los tres lados (longitudes) de un triángulo ¿cuántos se podrán construir?

¡UNO!, es decir;

◊ Si conocemos las longitudes de los tres lados, y estas longitudes satisfacen que la suma de cualesquiera dos lados debe ser mayor que la del otro lado, entonces se podrá construir un único triángulo.

En los renglones anteriores se podrá nombrar como la desigualdad del triangulo que dice; *para trazar un triángulo es necesario que la suma de las longitudes de cualesquiera dos lados sea mayor que la longitud del tercer lado.*

Por tanto resumiendo lo anterior se tiene la tabla 1.1

Datos	**Número de Triángulos que se pueden construir**
Dos lados	Al menos uno
Un lado y uno de los ángulos adyacentes	Al menos uno
Dos lados y el ángulo que forman	Sólo un triángulo
Un lado y los dos ángulos adyacentes	Sólo un triángulo
Los tres lados	Sólo un triángulo

Tabla 1.1

Criterios de Congruencia

*) Si dos triángulos tienen dos lados iguales y el ángulo formado por esos lados es igual, los triángulos son congruentes. Y se abrevia **LAL** (lado-ángulo-lado). Figura 1.39.

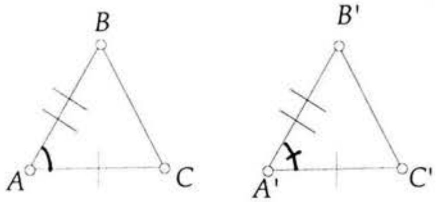


Figura 1.39

$$\text{Si}\quad \left.\begin{array}{l}\overline{AB} \cong \overline{A'B'}\\ \measuredangle A \cong \measuredangle A'\\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'}\end{array}\right. \quad \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

) Si dos triángulos tienen un lado igual y los ángulos adyacentes a ese lado son iguales, los triángulos son congruentes, y se abrevia **ALA (ángulo–lado-ángulo). Figura 1.40.

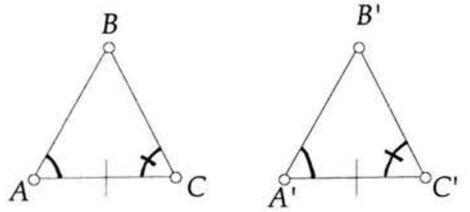


Figura 1.40

$$\text{Si}\quad \left.\begin{array}{l}\measuredangle A \cong \measuredangle A'\\ \overline{AC} \cong \overline{A'C'}\\ \measuredangle C \cong \measuredangle C'\end{array}\right. \quad \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

***) Si dos triángulos tiene sus tres lados iguales entonces estos son congruentes y por lo regular se abrevia **LLL** (lado-lado-lado. Figura 1.41.

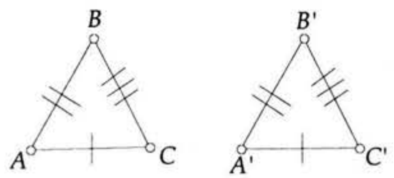


Figura 1.41

$$\text{Si}\quad \left.\begin{array}{l}\overline{AB} \cong \overline{A'B'}\\ \overline{BC} \cong \overline{B'C'}\\ \overline{CA} \cong \overline{C'A'}\end{array}\right. \quad \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$$

Clasificación de Triángulos

Según sus lados los triángulos se clasifican en:

- **Equilátero**: Cuando todos sus lados son iguales es decir $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$ ademas $\measuredangle A \cong \measuredangle B \cong \measuredangle C$. Figura 1.42.

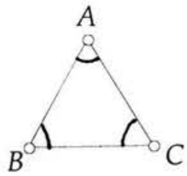


Figura 1.42

- **Isósceles**: Un triángulo es isósceles si tiene dos lados iguales. Estos lados se llaman *laterales* y el tercer lados se llama *base* del triángulo. Es decir $\overline{AB} \cong \overline{CB}$, $\overline{AB} \neq \overline{AC}$. Además $\measuredangle A \cong \measuredangle C$, $\measuredangle C \neq \measuredangle B$ y $\measuredangle A \neq \measuredangle B$.Figura 1.43.

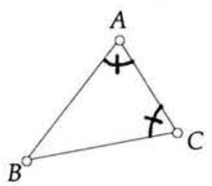


Figura 1.43

Por lo que se tiene el siguiente teorema

Teorema 1.4: En un triángulo isósceles los ángulos de la base son iguales o sea si $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ en el $\triangle ABC$ se tiene que $\measuredangle A \cong \measuredangle B$.

- **Escaleno**: Es aquel que tiene sus tres lados diferentes. Es decir $\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{CA}$ ademas $\measuredangle A \neq \measuredangle B \neq \measuredangle C$. Figura 1.44.

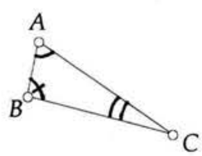


Figura 1.44

Según sus ángulos los triángulos se clasifican en:

- **Triángulo rectángulo**: Se llama triángulo rectángulo aquel que tiene un ángulo de 90^0. Puesto que todo triángulo tiene dos ángulos agudos, en un triángulo rectángulo sólo un ángulo es recto. Los otros dos son agudos. Figura 1.45.

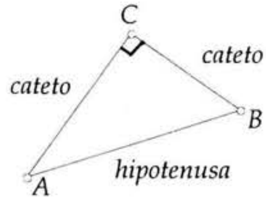


Figura 1.45

Los lados del triángulo rectángulo tienen denominaciones especiales. A saber, el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**. Los otros dos lados se llaman **catetos**. Los ángulos opuestos a los catetos son agudos.

Observación 1.5: Si $\overline{AB} > \overline{BC}$ en un triángulo ABC, el $\measuredangle C$ es mayor que el $\measuredangle A$.
En otras palabras: Al lado mayor de un triángulo se opone el ángulo mayor y a mayor ángulo se opone el mayor lado.

Por observación anterior se deduce que en cualquier triángulo a mayor ángulo se opone mayor lado, en el triángulo rectángulo la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos, por lo que la suma de los catetos es mayor que la hipotenusa.

- **Triángulo acutángulo**: Es aquel que tiene sus tres ángulos menores que 90^0. Figura 1.46.

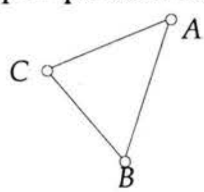


Figura 1.46

- **Triángulo obtusángulo**: Es aquel que tiene un ángulo mayor de 90^0. Figura 1.47.

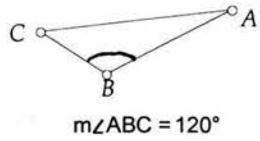


Figura 1.47

Teorema 1.5: La suma de dos ángulos cualesquiera de un triángulo es menor que 180^0

Definición 1.13: En un triángulo ABC se llama ángulo exterior del vértice en A, al que es adyacente del ángulo de este mismo vértice en el triángulo.

Para no confundir el ángulo del vértice en A del triángulo con el ángulo **exterior** del mismo vértice, el primero se le llama **interior**. Figura 1.48.

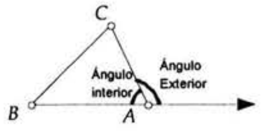


Figura 1.48

Teorema 1.6: Todo ángulo exterior del triángulo es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente de este. $\measuredangle D > \measuredangle B$, $\measuredangle D > \measuredangle C$. Figura 1.49.

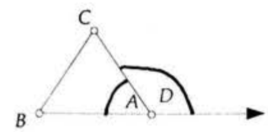


Figura 1.49

Teorema 1.7: La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180^0. Figura 1.50

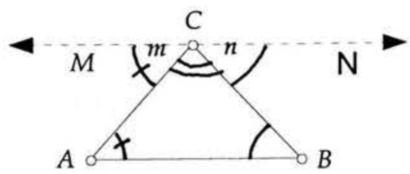


Figura 1.50

Demostración:

Hipótesis: $\measuredangle$A,$\measuredangle$B y $\measuredangle C$ son ángulos interiores de un triángulo
Tesis: $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180^0$

Razonamiento:

Afirmaciones	Razones
1. $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$	Construcción
2. $\measuredangle m + \measuredangle n + \measuredangle C = 180^0$	Forman un ángulo llano
3. $\measuredangle m = \measuredangle A$, $\measuredangle n = \measuredangle B$	Son alternos-internos
4. $\therefore\ \measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180^0$	Sustituyendo 3 en 2

□

En algún capítulo de más adelante se ocupará este resultado.

CAPÍTULO 2

POLÍGONOS

Muchos objetos naturales y construidos por el hombre tienen forma de polígonos. Vemos polígonos en nuestros edificios, las ventanas, el azulejo de nuestros pisos y paredes, la bandera y nuestros lápices comunes. Muchos copos de nieve vistos a través de un microscopio se reconocerían como polígonos. La sección recta de un panal de abejas es un polígono entre muchos más.

Definición 2.1: Un conjunto de segmentos $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \ldots \overline{A_{n-1}A_n}$ se llama comúnmente línea quebrada en el caso en que A_1 coincida con A_n la línea quebrada se llamará **polígono**, siendo cada uno de los segmentos mencionados un **lado** del polígono. Los puntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ de la línea quebrada se llaman vértices del polígono.

Definición 2.2: Los lados adyacentes del polígono son aquellos pares de lados que comparten un vértice.

Definición 2.3: Se dice que dos vértices son adyacentes si son extremos del mismo lado.

Definición 2.4: Dos ángulos de un polígono son agudos adyacentes si sus vértices son adyacentes.

Definición 2.5: Si se prolongan cada uno de los lados de un polígono y las prolongaciones no intersectan a otro lado, el polígono es **convexo** o el polígono será **convexo** si se encuentra en un mismo semiplano respecto a la recta que contiene cualquiera de sus lados. Las Figuras 2.1.(a), (b), (c), (d), (e) ilustran polígonos convexos y la 2.1(f) representa un polígono que no es convexo.

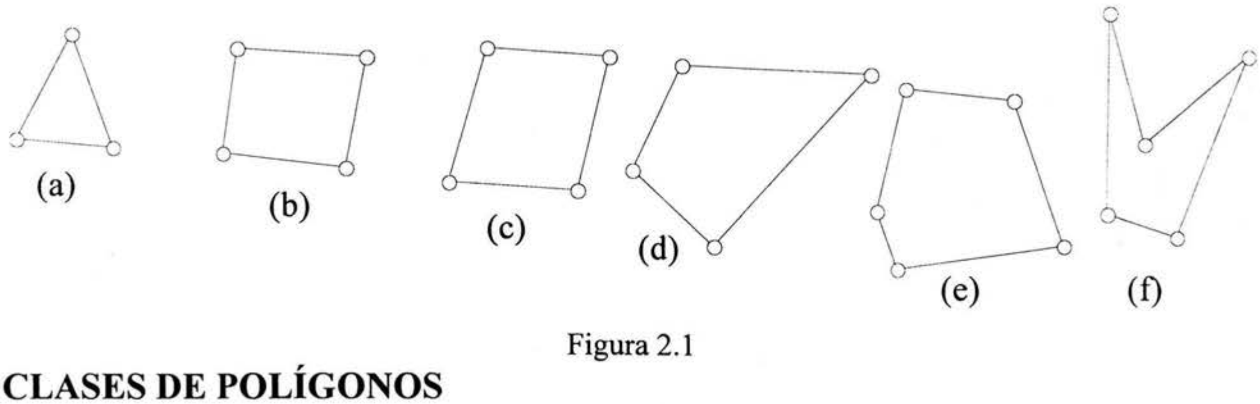


Figura 2.1

CLASES DE POLÍGONOS

Un polígono puede nombrarse de acuerdo con el número de sus lados. El subconjunto* mas fundamental del conjunto* de los polígonos es aquel que tiene el menor número de lados, el conjunto de los triángulos. Todo polígono de más de tres lados puede subdividirse, mediante el trazo de segmentos apropiados, en un conjunto de triángulos distintos.

* pag A-1 [Smith]

Definición 2.6: Un polígono es un cuadrilátero si y sólo si tiene cuatro lados; es un pentágono si y sólo si tiene cinco lados; un hexágono si y sólo si tiene seis lados; un octágono si y sólo si tiene ocho lados; un decágono si y sólo si tiene diez lados; y un n-agono si tiene n-lados.

Definición 2.7: Un polígono es equilátero si y sólo si sus lados son congruentes.

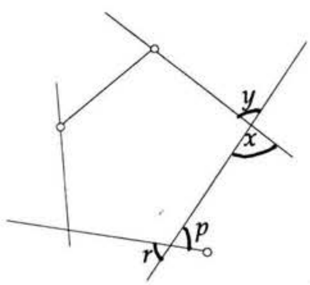
Definición 2.8: Un polígono es equiángulo si y sólo si tiene sus ángulos congruentes.

Definición 2.9: Un polígono es regular si y sólo si, es equilátero así como equiángulo.

Definición 2.10: La suma de las medidas de los lados de un polígono se llama perímetro del polígono y siempre será un número positivo.

Definición 2.11: El lado sobre el cual parece que el polígono descansa se llama **base** del polígono.

Definición 2.12: Un ángulo externo de un polígono es un ángulo que es adyacente y suplementario a un ángulo del polígono. Figura 2.2



$\measuredangle x$ y $\measuredangle y$ son externos

Figura 2.2

Otra Definición de Cuadrilátero

Definición 2.13: Recibe el nombre de cuadrilátero un figura ABCD formada por cuatro puntos A, B, C y D, que de tres en tres no se encuentran en una misma recta, y por cuatro segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y $\overline{AD}$ que unen estos puntos. Figura 2.3.

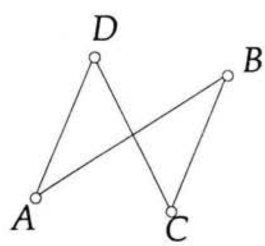


Figura 2.3

Definición 2.14: Los puntos A, B , C y D se llaman vértices del cuadrilátero y los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ y $\overline{AD}$ son sus lados.

Definición 2.15: Los vértices A y C y los vértices B y D se denominan vértices opuestos. Los lados $\overline{AB}$ *y* $\overline{DC}$ y los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ se llaman lados opuestos. Figura 2.4

Definición 2.16: Los segmentos que unen los vértices opuestos del cuadrilátero se denominan diagonales.

Teorema 2.1: Las diagonales del cuadrilátero convexo se cortan.

Teorema 2.2: La suma de los ángulos del cuadrilátero convexo es igual a 360^0.

PARALELOGRAMOS

Definición 2.17: El paralelogramo es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos, es decir, se hallan en rectas paralelas. Figura 2.4

Observación 2.1: El paralelogramo es un cuadrilátero convexo

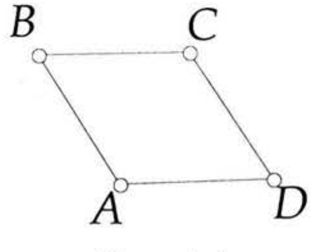


Figura 2.4

Teorema 2.3: Los lados opuestos y los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.

Teorema 2.4: Las diagonales del paralelogramo se cortan en el punto medio de ambas.

Teorema 2.5: Si dos lados opuestos de un cuadrilátero convexo son paralelos e iguales, el cuadrilátero es un paralelogramo

Teorema 2.6: En todo paralelogramo los lados opuestos son congruentes y recíprocamente, en un cuadrilátero cada lado es congruente a su opuesto entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

RECTÁNGULO. ROMBO. CUADRADO

Definición 2.18: Un *rectángulo* es un paralelogramo que tiene sus cuatro ángulos rectos.

Teorema 2.7: Todo rectángulo es un paralelogramo además las diagonales del rectángulo son iguales. Figura 2.5

Figura 2.5

Definición 2.19: El *rombo* es un paralelogramo con todos los lados iguales.

Teorema 2.8: Las diagonales del rombo se cortan en un ángulo recto. Figura 2.6

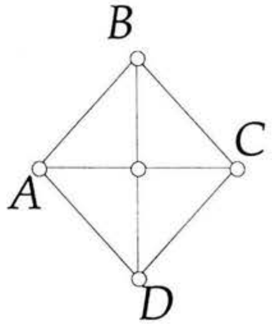


Figura 2.6

> **Observación 2.2:**El cuadrado es un rectángulo con todos los lados congruentes. El cuadrado es también un rombo y, por ello, posee las propiedades de rectángulo y rombo.

TRAPECIOS

Se trata de una práctica un "poco" laboriosa pues recordemos que este soft-ware no traza arcos por lo que los sustituimos por circunferencias pero resulta bastante creativa pues el alumno desarrolla una mayor habilidad, además conoce más herramientas del Geometer's .

PRÁCTICA # 2.1

Construcción de un trapecio isósceles conociendo las longitudes de sus lados paralelos y una diagonal.

Sean "a" y "b" las longitudes de los lados paralelos, sea "d" la diagonal dada y una línea auxiliar "p".

Paso 1: Trazamos una línea "p" y la punteamos. (Con la herramienta de regla escogemos tercer icono y dibujamos luego del menú Display escogemos Line style-Dashed).

Paso 2: Localizo un punto A sobre la línea "p". (Con la herramienta de punto nos colocamos sobre "p" y trazamos).

Paso 3: Trazo una circunferencia c1 con centro en A y de radio **"a"-la recta dada**. (Marco el punto A y la recta dada "a" y del menú Construct escogemos Circle By Center And Radius).

Paso 4: Encuentro B que es una de las intersecciones de c1 y la línea "p". (Marco c1 y "p" luego del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso5: Trazo una circunferencia c2 con centro en A y radio **"b"-la recta dada"**. (Marco el punto A y "b" luego del menú Construct escogemos Circle By Center And Radius).

Paso 6: Encuentro el punto P que es intersección de c1 y "p". (Marco c1 y "p" luego del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 7: Trazo el segmento $\overline{PB}$ y lo pongo en negrita. (Marco los puntos P y B y del menú Construct escogemos Segment luego del menú Display escogemos Line Style-Thick).

Paso 8: Encuentro el punto medio del segmento $\overline{PB}$ y le llamo E. (Marco $\overline{PB}$ y del menú Construct escogemos Point At Midpoint).

Paso 9: Trazo la mediatriz del segmento $\overline{PB}$ y le llamo "k" y la punteo. (Marco el punto E y $\overline{PB}$ luego del menú Construct escogemos Perpendicular Line, del menú Display escogemos Line Style-Dashed).

Paso 10: Trazo una circunferencia c3 con centro en A y radio d. (Marco el punto A y **"d"-la recta dada** y del menú Construct escogemos Circle By Center and Radius).

Paso 11: Encuentro el punto C que es intersección de c3 y "q". (Marco c3 y "q" luego del menú Construct escogemos Point at Intersection).

Paso 12: Trazo el segmento $\overline{PC}$. (Marco el punto P y C luego del menú Construct escogemos Segment).

Ocultamos las circunferencias c1, c2 y c3. (Marco c1, c2 y c3 luego del menú Display escogemos Hide Circles).

Paso 13: Trazo una circunferencia c4 con centro en A y de radio $\overline{PC}$. (Marco A y $\overline{PC}$ luego del menú Construct escogemos Circle By Center And Radius).

Paso 14: Trazo el segmento $\overline{AP}$ y lo ponemos en negrita. (Marco A y P luego del menú Construct escogemos Segment así marcado escogemos Line Style-Thick).

Paso 15: Trazo una circunferencia c5 con centro en C y radio $\overline{AP}$. (Marco C y $\overline{AP}$ luego del menú Construct escogemos circle By Center And Point).

Paso 16: Encuentro el punto D que es intersección de c4 y c5 que esta a la altura del punto C. (Marco c4 y c5 luego del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 17: Unimos los puntos A, D, C y B. (Marco los puntos A, D, C y B luego del menú Display escogemos Segment). Figura 2.7

Investigación:

¿El segmento $\overline{AB}$ = ?

¿b = ?

¿El segmento $\overline{AC}$ = ?

Comprobemos numéricamente utilizando el menú Length es decir marquemos los lados del trapecio así como su diagonal.

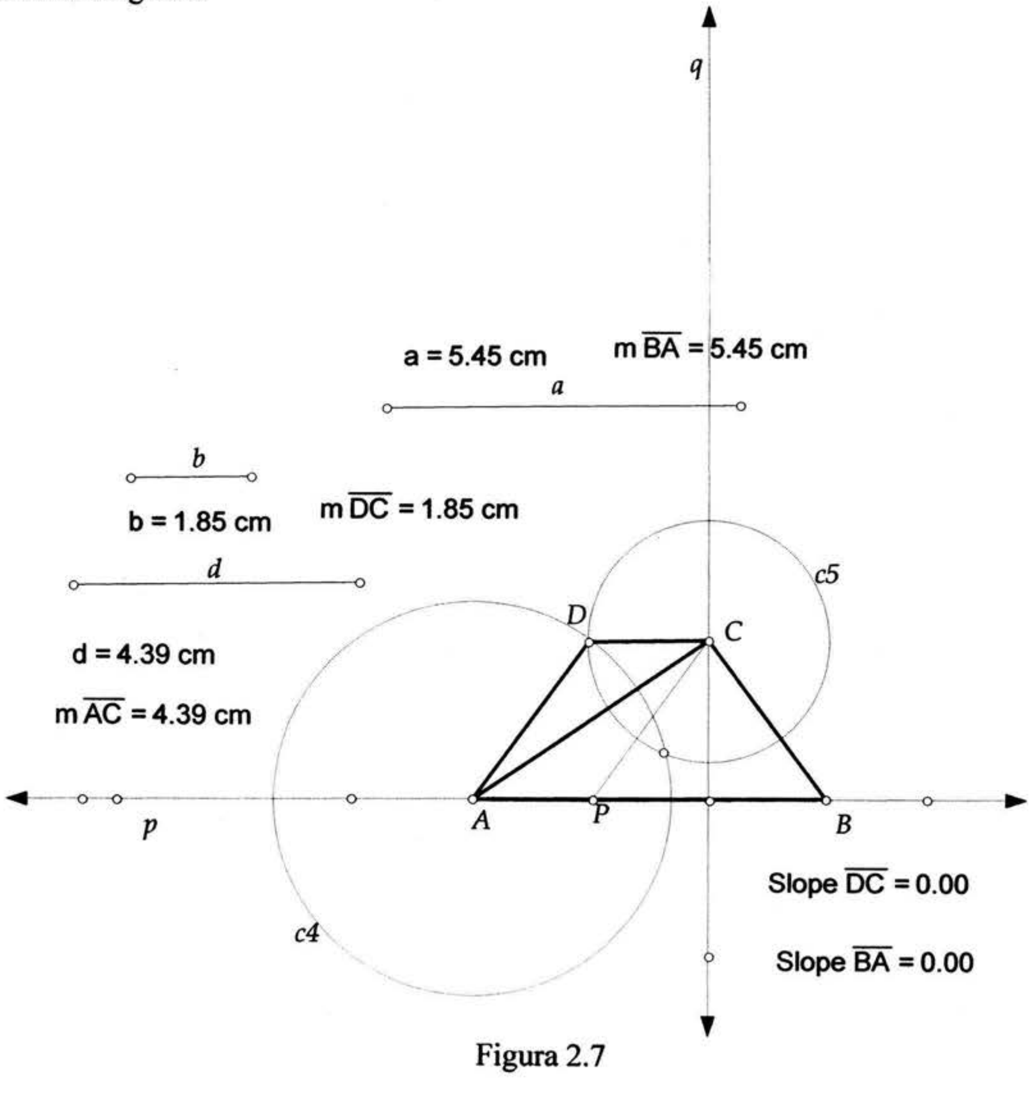


Figura 2.7

Definición 2.20: El trapecio es un cuadrilátero convexo que tiene paralelos solo los lados opuestos. Estos lados paralelos se llaman *bases* del trapecio. (superior e inferior)Los otros lados se denominan *laterales*. Figura 2.8

Definición 2.21: Un trapecio de laterales iguales se llama *isósceles*. Figura 2.8 $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ o como el que se construyó en la practica anterior.

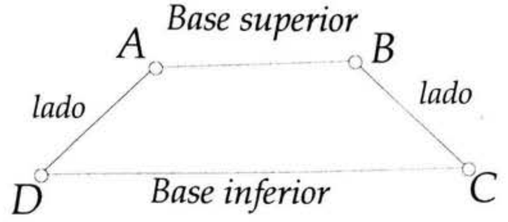


Figura 2.8

Definición 2.22: Un trapecio es un rectángulo cuando uno de sus lados no paralelos es perpendicular a los otros dos. Figura 2.9

$\measuredangle D$ es recto $\overline{AD} \perp \overline{DC}$ *y* $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$

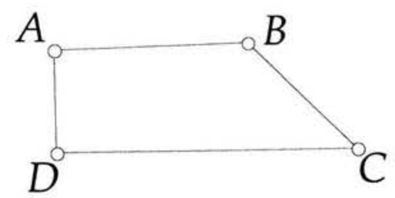


Figura 2.9

Definición 2.23: La altura de un trapecio es un segmento que es perpendicular a una de las bases. Figura 2.10.

$\overline{AE} \perp \overline{DC}$ donde $\overline{AE}$ es altura .

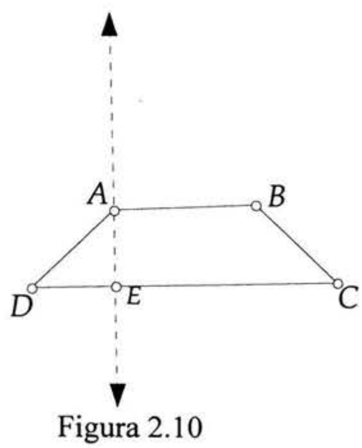


Figura 2.10

División de un Segmento en Partes Iguales

En las siguientes prácticas aprenderemos a dividir un segmento en partes iguales, deduciremos los criterios de **Semejanza de Triángulos** y en general de polígonos semejantes así como Aplicaciones de la semejanza (Concepto de Homotecia mencionando el Teorema De la Proporcionalidad y la solución de una ecuación con regla y compás.

PRÁCTICA # 2.2

Paso 1: Trazar dos rayos "r" y "p" que partan de un mismo punto A. (Con la herramienta de regla escogemos la ventana de rayo y trazamos).

Paso 2: Trazamos un círculo c1 de radio arbitrario con centro en A. (Con la herramienta de círculo nos colocamos en A y abrimos).

Paso 3: Intersectamos c1 y el rayo "r" y al punto de intersección le llamamos B. (Marcamos c1 y "r" y del menú Construct escogemos Poin At Intersection).

Paso 4: Trazamos un círculo c2 con el mismo radio que c1 pero con centro en el punto B. (Marcamos B y A "en ese orden"y del menú Construct escogemos Circle By Center And Point).

Paso 5: Intersectamos c2 y el rayo " r" y al punto de intersección le llamamos C. (Marcamos c2 y "r" y del menú Construct escogemos Poin At Intersection).

Paso 6: Trazamos un círculo c3 con centro en los puntos C y B. (Marcamos los puntos C y B luego del menú Construct escogemos Circle By Center And Point).

Paso 7: Trazamos los círculos c4, c5 y encontramos los puntos D, E y F. **(Hacerlo).**

Paso 8: Ocultamos c1, c2, c3, c4 y c5. (Marcamos los círculos c1, c2, c3,c4 y c5 y del menú Display escogemos Hide Circles).

Ahora hagamos algo semejante pero sobre el rayo "p" esto es;

Paso 9: Trazamos un círculo c6 de radio diferente que c1 y centro en A.(Con la herramienta de círculo nos colocamos en A y abrimos).

Paso 10: A la intersección de c6 con el rayo "p" le llamamos O. (Marcamos c1 y el rayo "p" luego del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 11: Trazamos un círculo c7 del mismo radio que c1 pero centro en O. (Marcamos O y A luego del menú Construct escogemos Circle By Center And Point).

Paso 12: Encontramos el punto P que es intersección de c7 y el rayo "p". (Marcamos c7 y "p"luego del menú Construct escogemos Point At intersection).

Paso 13: Trazamos c8, c9, c10 y encontramos los puntos Q, R y S. **(Hacerlo como ejercicio).**

Paso 14: Ocultamos c6, c7, c8, c9 y c10. (Marcamos c6, c7, c8, c9 y c10 luego del menú Display escogemos Hide Circles).

Paso 15: Unimos B con O, C con P, D con Q, E con R, y F con S. (Marcamos el punto O y P luego del menú Construct escogemos Segment y así sucesivamente).Figura 2.11.

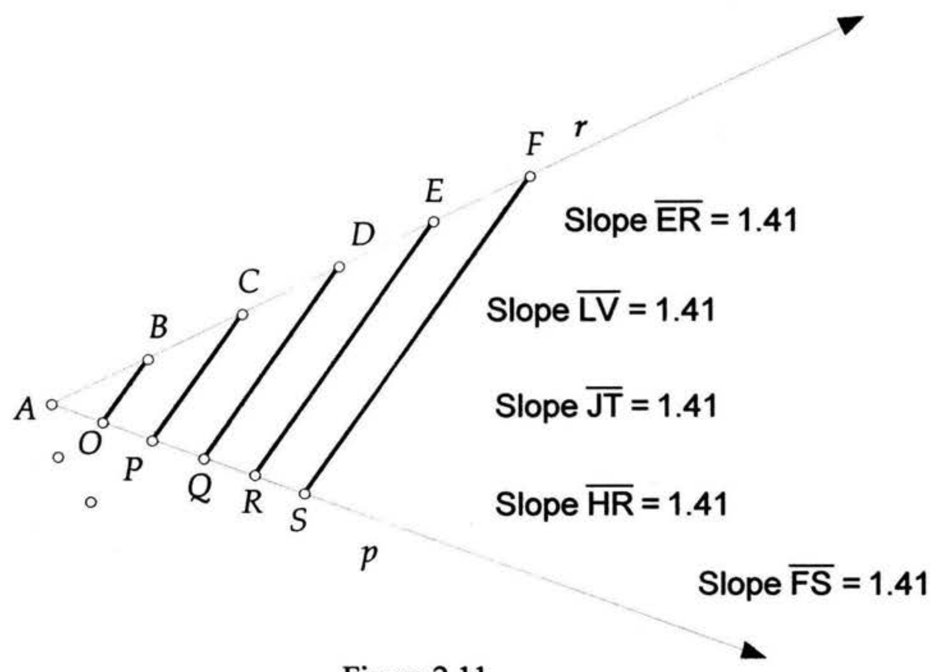


Figura 2.11

IVESTIGACIÓN:

¿Son paralelas entre sí las líneas que obtuviste?

¿Son paralelas al lado $\overline{FS}$ del triángulo?

Repetir este experimento con otras líneas, otro número de partes y otras magnitudes?

¿Llegas a las mismas conclusiones?

¿Hacer los cálculos numéricamente? Con la herramienta de Measure-Slope

En efecto:

Si dos lados de un triángulo están divididos en el mismo número de segmentos iguales, las rectas que unen a cada par de puntos correspondientes de la división, son paralelas y están a la misma distancia entre sí. Además son paralelas al tercer lado del triángulo.

PRÁCTICA # 2.3

DIVIDIR UN SEGMENTO EN PARTES IGUALES

Paso 1: Trazamos un segmento con extremos O y Q y los punteamos. (Con la herramienta de regla trazamos así marcado escogemos Display Line Style-Dashed).

Paso 2: Trazamos un rayo"p" partiendo del punto O. (Con la herramienta de regla nos colocamos en O y trazamos).

Paso 3: Sobre el rayo "p" marcamos 5 segmentos de la misma longitud y a los puntos les llamamos A, B, C, D y E. **(esto es como la práctica # 2.2)** .

Paso 4: Ocultamos los círculos c1, c2, c3, c4 y c5. (Marcamos los círculos c1, c2, c3, c4 y c5 luego del menú Display escogemos Hide Circles).

Paso 5: Unimos E con Q. (Marcamos los puntos E y Q luego del menú Construct escogemos Segment).

Paso 6: Trazamos " r" que es paralela al segmento $\overline{EQ}$ y que pase por el punto D. (Marcamos $\overline{EQ}$ y D luego del menú Construct escogemos Parallel Line).

Paso 7: Intersectamos la paralela "r" con el segmento $\overline{OQ}$ y le llamamos D'. (Marcamos " r" y $\overline{OQ}$ luego del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 8: Trazamos "s" que es paralela al segmento $\overline{EQ}$ y que pasa por el punto C. (Marcamos $\overline{EQ}$ y C luego del menú Construct escogemos Parallel Line).

Paso 9: Intersectamos la paralela "s" y el segmento $\overline{OQ}$ y le llamamos C'. (Marcamos " s" y $\overline{OQ}$ luego del menú Construct escogemos Poin At Intersection).

Paso 10: Trazamos las paralelas " t " y " u " que pasan por los puntos B y A y que cortan al segmento $\overline{OQ}$ en los puntos B' y A' respectivamente. (**Hacer los mismo que los pasos 7 y 8 pero siguiendo la secuencia)** Figura 2.12

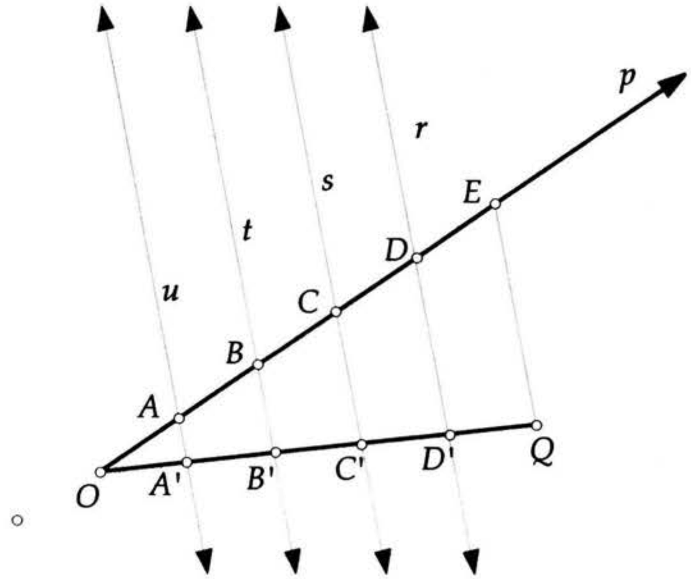


Figura 2.12

INVESTIGACIÓN:

¿Miden lo mismo los segmentos $\overline{OA'}, \overline{A'B'}, \overline{B'C'}, \overline{C'D'}, \overline{D'Q}$?

Repite el experimento anterior con un segmento $\overline{OQ}$ de diferente longitud y señalando sobre la nueva línea 7 segmentos de la misma longitud.

¿Quedó el segmento $\overline{OQ}$ dividido en 7 partes iguales?

¿Podrías usar este método para dividir un segmento en el número de partes iguales que tú quieras?

Teorema 2.9: Si una recta es paralela a uno de los lados de un triángulo, entonces corta a los otros dos en segmentos proporcionales y recíprocamente, si una recta divide dos de los lados de un triángulo en partes proporcionales, entonces es paralela al tercer lado.

FIGURAS A ESCALA

PRÁCTICA # 2.4

Paso 1: Trazamos un triángulo cualquiera con vértices A, B y C. (Marcamos tres puntos A , B y C luego con el menú Construct escogemos Segment).

Paso 2: Encontramos los puntos D, E y F que son puntos medios de los lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ *y* $\overline{AC}$. (Marcamos los lados y del menú Construct escogemos Point At Mide Point).

Paso 3: Unimos los puntos medios. (Marcamos E , D y F luego del menú Construct escogemos Segment).Figura 2.13.

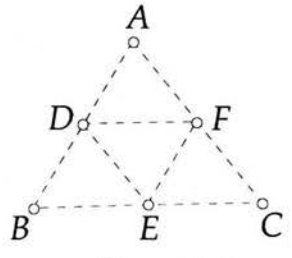


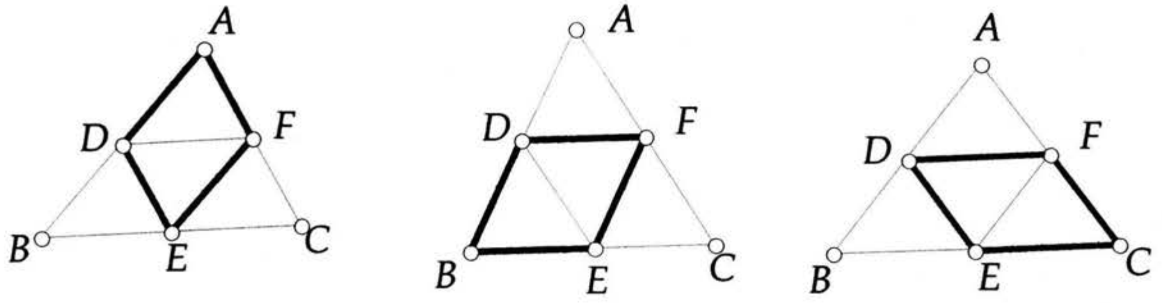
Figura 2.13

Copia tres veces más la Figura 2.13

Paso 4: En la primera marca en rojo los segmentos $\overline{AD}, \overline{DE}, \overline{EF}$ y $\overline{FA}$. (Marcamos A, D, E y F luego del menú Construct escogemos Segment y del menú Display escogemos Line Style Thick).Figura 2.14 (a).

Paso 5: En la segunda marca en azul los segmentos $\overline{DB}, \overline{BE}, \overline{EF}$ y $\overline{FD}$. (Marcamos D, B, E y F luego del menú Construct escogemos Segment y del menú Display escogemos Line Style-Thick). Figura 2.14 (b).

Paso 6: En la tercera marca en color verde los segmentos $\overline{DE}, \overline{EC}, \overline{CF}$ y $\overline{FD}$. (Marcamos D, E, C y F luego del menú Construct escogemos Segment y del menú Display escogemos Line Style. Thick). Figura.2.14 (c)



(a) (b) (c)

Figura 2.14

INVESTIGACIÓN:

¿Cómo son estas figuras? ¿Sus lados opuestos son paralelos? ¿Por qué?

Sí; las tres figuras son paralelogramos y por tanto sus lados opuestos son paralelos y miden lo mismo

Observación 2.3:
En el paralelogramo de color rojo esta dividido en los triángulos ADF y DEF
¿Serán congruentes estos triángulos? En las otras dos figuras:
¿Serán congruentes los triángulos en los que esta dividido el paralelogramo?
¿Son congruentes los cuatro triángulos en los que esta dividido el triángulo original?
La conclusión es que los cuatro triángulos son congruentes

$$AF = \frac{1}{2}AC, AD = \frac{1}{2}AB, CE = \frac{1}{2}CB$$

Es decir cada uno de los triángulos pequeños es una copia a escala del triángulo original.

Por tanto dos figuras están a escala si sus lados correspondientes guarda la misma razón .

PRÁCTICA # 2.5

Siguiendo la construcción de las prácticas 2.2 y 2.3 se hace lo siguiente:

Vamos a dividir un rayo **"p"** en siete partes iguales y un rayo **"r"** en siete partes iguales pero de diferente longitud a las anteriores: Figura 2.15

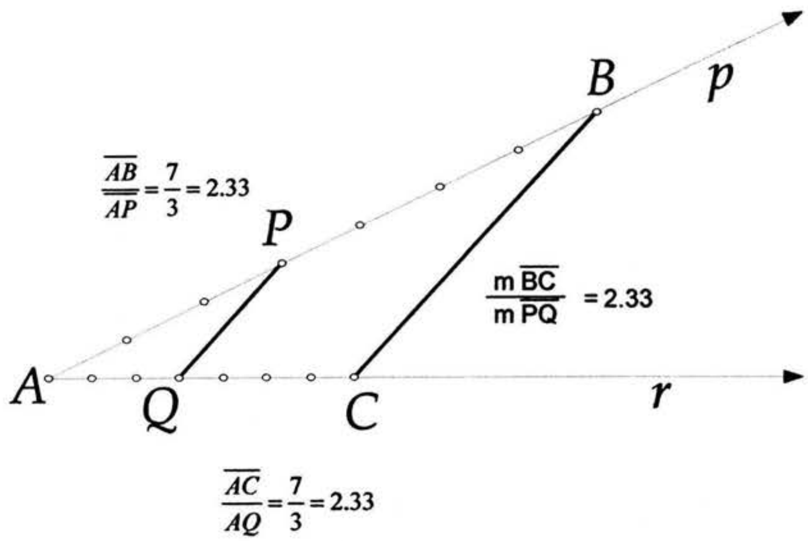


Figura 2.15

Este algoritmo se dejará como ejercicio para el estudiante pasemos directo a la investigación:

INVESTIGACIÓN:

¿Qué número obtienes si divides el número de partes de $\overline{AB}$ entre el número de partes de $\overline{AP}$?
¿Qué números obtienes si divides el número de partes de $\overline{AC}$ entre el de $\overline{AQ}$?

Ahora mide la longitud del segmento $\overline{BC}$ y la longitud del segmento $\overline{PQ}$ y divide la primera entre la segunda ¿qué número obtienes? ¿Es parecido al de las divisiones anteriores?

Repite esta actividad dibujando otras rectas y marcando en ellas el número de puntos que tú quieras (el mismo en cada recta) ¿Qué conclusión obtienes?

Con este procedimiento puedes construir triángulos a escala. En esta práctica, los triángulos APQ y ABC están a escala y la razón entre sus lados es 3 : 7

Cuando dos triángulos están a escala, decimos que son **semejantes**, y la razón entre sus lados es la **razón de semejanza** entre los triángulos.

Como el caso de la congruencia, hay varias formas de ver si dos triángulos son semejantes. En esta práctica, comparaste las longitudes de los lados y viste que eran proporcionales:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BC}} = \frac{3}{7}$$

La comparación de los lados nos da un **criterio de semejanza:**

Dos triángulos son semejantes si podemos asociar los lados de uno de los triángulos con los del segundo, de modo que los lados correspondientes sean proporcionales.
Y que normalmente ocupamos la notación LLL.

PRÁCTICA # 2.6

En esta práctica se estudiará el **segundo** criterio **de Semejanza de triángulos**

Regresemos al triángulo de la Figura 2.13 o Práctica # 2.4

Comparemos ahora los ángulos:

> ¿Podrías hacer coincidir cada vértice de uno de los triángulos pequeños con un vértice de un triángulo grande?

Con la herramienta de **Angle** encontremos las medidas de cada ángulo de los triángulos de la Figura 2.13; estos son algunos ángulos que son iguales:

$\measuredangle EDF = \measuredangle ACB$, $\measuredangle DBE = \measuredangle ABC$ *y* $\measuredangle DEF = \measuredangle BAC$ entre otros.

O puedes copiar en una hoja de papel uno de los triángulos pequeños y recórtalo (puedes calcarlo de la Figura). Sobreponiéndolo en el triángulo grande, comprueba que tiene ángulos iguales. Por lo que otra forma de caracterizar a los triángulos semejantes es:

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales

En el desarrollo de las prácticas anteriores establecimos dos criterios para determinar si dos triángulos son semejantes: un criterio es que sus lados correspondientes estén en la misma razón y el otro es que sus ángulos correspondientes sean iguales.

En resumen: Para saber si dos triángulos son semejantes basta verificar uno de los dos criterios , ya que si los lados correspondientes son proporcionales, los ángulos correspondientes forzosamente son iguales. Y recíprocamente, si los ángulos correspondientes son iguales, los lados correspondientes son proporcionales.

> En general: **Para que dos polígonos sean semejantes se requiere que sus lados correspondientes estén en la misma razón y que sus ángulos correspondientes sean iguales**

PRÁCTICA # 2.7

APLICACIONES DE LA SEMEJANZA. (PUNTO DE HOMOTECIA)

Paso 1: Localizamos tres puntos A, B y C no alineados. (Con la herramienta de punto marcamos A, B y C).

Paso 2: Unimos los puntos A, B y C. (Marcamos los puntos A, B y C luego del menú Construct escogemos Segment).

Paso 3: Localizamos un punto O fuera del triángulo ABC. (Con la herramienta de punto marcamos O).

Paso 4: Trazamos una línea que pase por los puntos A y O. (Del menú de regla escogemos el tercer icono marcamos A y O luego escogemos Line)

Paso 5: Trazamos una línea que pase por los puntos B y O. (Marcamos B y O luego del menú Construct escogemos Line).

Paso 6: Trazamos una línea que pase por los puntos C y O. (Marcamos C y O luego del menú Construct escogemos Line).

Paso 7: Trazamos una circunferencia c1 con centro en O y con el punto A de radio $\overline{OA}$. (Marcamos el punto A y O "en ese orden" luego del menú Construct escogemos Circle By Center And Point).

Paso 8: Encontramos el punto A' que es intersección de c1con la línea OA. (Marcamos OA y c1 luego del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 9: Trazamos una circunferencia c2 con centro en B y el punto O. (Marcamos el punto B y O luego del menú Construct escogemos Circle By Center And Point).

Paso 10: Encontramos el punto B' que es intersección de c2 con la línea OB. (Marcamos OB y c2 luego del menú Construct escogemos Point At intersection).

Paso 11: Trazamos una circunferencia c3 con centro en C y el punto O. (Marcamos el punto C y O luego del menú Construct escogemos Circle By Center And Point).

Paso 12: Encontramos C' que es intersección de c3 con la línea OC. (Marcamos c3 y OC luego del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 13: Ocultamos c1, c2, c3. (Marcamos c1, c2,c3 y del menú Display escogemos Hide Circles).

Paso 14: Unimos los puntos A', B' y C'. (Marcamos los puntos A',B' y C' luego del menú Construct Segment). Figura 2.16

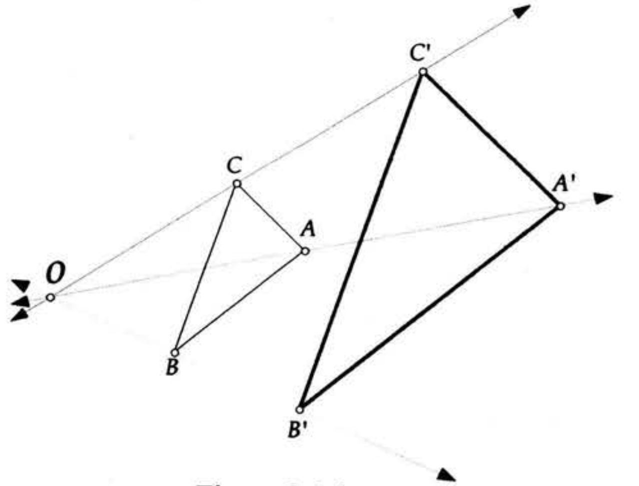


Figura 2.16

INVESTIGACIÓN:

¿Existe alguna relación entre el $\triangle ABC$ y el $\triangle A'B'C'$? ¿Son semejantes estos triángulos?¿Por qué?

Repite la construcción de esta actividad, pero ahora triplicando estas longitudes OA, OB y OC ¿Como son los triángulos que construiste?

¿Como verificaste que los triángulos son semejantes? Una forma es midiendo sus lados o sus ángulos, pero ¿ se puede estar seguro que estas medidas son precisas?

Una de las características más importantes de la Geometría es que da argumentos de carácter general. Es decir puedes afirmar que todos los triángulos que obtengas con esta construcción serán semejantes al original.

Veamos: ¿Son semejantes los triángulos OAB y OA'B'? ¿Por qué? ¿Cuál es la razón de semejanza?

A partir de lo que se estudio en la practica 2.4, sabes que los triángulos OA'B' y OAB son semejantes; además como $\overline{OA'} = 2\overline{OA}$ y $\overline{OB'} = 2\overline{OB}$, y el lado $\overline{A'B'} = 2\overline{AB}$.

Aplicando el mismo argumento a los triángulos OAC y OA'C' y a los triángulos OBC y OB'C'concluimos que $\overline{A'C'} = 2\overline{AC}$ y $\overline{B'C'} = 2\overline{BC}$. Por tanto, los lados del triángulo A'B'C' miden el doble que los lados del triángulo ABC y entonces estos dos triángulos son semejantes.

Esta es una forma de construir triángulos semejantes a un triángulo dado, en una razón dada, Al punto **O** se le llama **centro de homotecia** de los triángulos.

Una de las múltiples aplicaciones de la semejanza de triángulos consiste en que se pueden hacer operaciones aritméticas de forma geométrica. Por ejemplo, si tenemos un segmento de longitud a y otro segmento de longitud b, se puede construir con regla y compás segmentos con longitudes ab y $\frac{a}{b}$ También se pueden encontrar la raíz cuadrada de un número, esto es; dado un segmento de longitud a, se puede construir otro de longitud $\sqrt{a}$ e incluso podemos resolver ecuaciones sencillas. Hagamos este último en la siguiente práctica.

PRÁCTICA # 2.7

Solución de una Ecuación a Regla y Compás

Paso 1: Trazamos dos segmentos $\overline{OB} = b$ y $\overline{OC} = c$ respectivamente con vértice común en O y los punteamos. (Con la herramienta de regla trazamos luego del menú Display escogemos Line Style-Dashed).

Paso 2: Trazamos una circunferencia c1 con centro en O y de radio arbitrario cortando a $\overline{OC}$ en A. (Con la herramienta de circulo nos colocamos en O y abrimos).

Paso 3: Encontramos A que es intersección de c1 y $\overline{OC}$. (Marcamos c1 y $\overline{OC}$ luego del menú Construct escogemos Point at Intersection).

Paso 4: Trazamos el segmento $\overline{OA} = a$ y lo ponemos en negrita. (Marcamos los puntos O y A luego del menú Construct escogemos Segment así marcado escogemos del menú Display Line Style-Thick).

Paso 5.Trazamos el segmento $\overline{CB}$ y lo punteamos.(Marcamos los puntos C y B y del menú Construct escogemos Segment luego del menú Display escogemos Line Style-Dashed).

Paso 6: Trazamos una paralela a $\overline{CB}$ que pase por A. (Marcamos el segmento $\overline{CB}$ y el punto A luego del menú Construct escogemos Parallel Line).

Paso 7: Encontramos el punto P que es intersección de la paralela y $\overline{OB}$.(Marcamos la paralela y $\overline{OB}$ luego del menú Construct escogemos Point at Intersection). Figura 2.17

Paso 8: Ocultamos c1. (Marcamos c1 y del menú Display escogemos Hide Circles).

CONCLUSIONES:

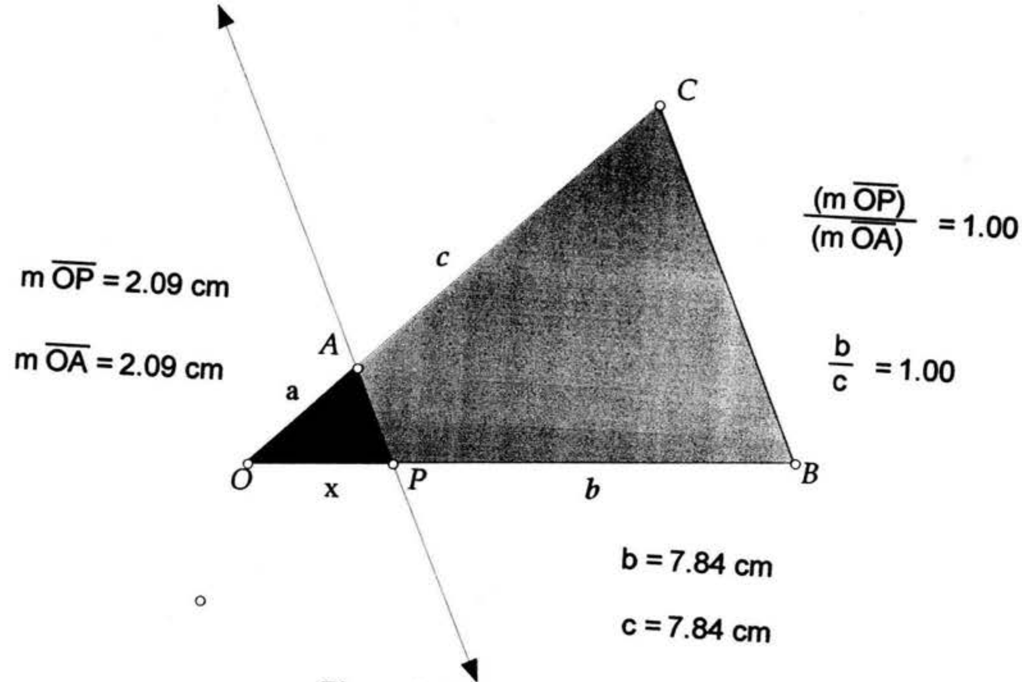
Con esta construcción obtenemos dos triángulos semejantes: OBC y OPA. ¿Cuánto mide el segmento $\overline{OB}$ en términos de **a, b** y **c**?

Si llamamos "x" a la longitud del segmento $\overline{OP}$ y usamos la semejanza de los triángulos podemos establecer la siguiente relación: $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$

observa que la longitud del segmento $\overline{OP}$ es una solución de la ecuación $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$. Es decir, lo que acabamos de hacer es resolver una ecuación con regla y compás. Por tanto:

Dadas tres cantidades positivas **"p" , "q" y "r"** decimos que x es la **cuarta proporcional** de **"p", "q" y "r"** si $\frac{p}{r} = \frac{q}{x}$.

Encontremos las medidas numéricamente; esto es utilizando del menú Measure primero Length luego la calculadora. Figura 2.17.



C
$\frac{(m\,\overline{OP})}{(m\,\overline{OA})} = 1.00$
c
$m\,\overline{OP} = 2.09$ cm
A
$m\,\overline{OA} = 2.09$ cm
$\frac{b}{c} = 1.00$
a
O
x
P
b
B
b = 7.84 cm
c = 7.84 cm

Figura 2.17

CAPÍTULO 3

CÍRCULO

Usos del círculo. La historia de las condiciones de vida y de trabajo, en mejoramiento continuo, de la civilización esta íntimamente relacionada a la aplicación de las propiedades del círculo. Una de las aplicaciones más importantes del círculo que el hombre ha inventado es la *rueda.* Sin la rueda, la mayor parte del trabajo del mundo cesaría. Sin el círculo, la industria quedaría completamente coja sin la ruedas, los engranes y los ejes. La transportación regresaría a las condiciones de los tiempos prehistóricos sin la rueda no habría bicicletas, automóviles, trenes, tranvías ni aviones. Sin la rueda, la maquinaria agrícola, el equipo de las fabricas y las minas solo existirían en la forma de metal, plásticos y madera sin aplicación práctica.

La industria aplica las propiedades del círculo, construye tanques esféricos para aumentar la resistencia de los mismos. Cada año se construyen millones de metros de tubo y alambre circulares. Incontables artículos manufacturados para muebles, vajillas y herramientas tienen forma circular. La mayor parte de los envases de hoja de lata para alimentos que se encuentran en los estantes de las tiendas de abarrotes tienen una sección recta circular.

Las formas circulares se encuentran en diseños ornamentales como las ventanas del tipo de rosetón, columnas arquitectónicas, señales de trafico y diseño de paisajes.

El círculo en la historia

La invención y el uso de la rueda circular data de hace muchísimos años. Nadie sabe cuando se inventó la rueda o quien la inventó. Algunas autoridades creen que la rueda fue inventada en alguna parte de Asia hace unos 10,000 años. La rueda más antigua que existe se descubrió en Mesopotamia (1927 cuando los arqueólogos desenterraron un carro con cuatro ruedas que se sabe existió hace unos 5500 años). El círculo tuvo un atractivo estético para los griegos. Para ellos fue la más perfecta de las figuras planas. Tales, Pitágoras, Euclides y Arquímedes, cada uno contribuyo en gran parte al desarrollo de la Geometría del círculo.

Probablemente sea Tales el más conocido por el carácter deductivo de sus proposiciones geométricas. Uno de sus logros geométricos más notables fue probar que todo ángulo inscrito en un semicírculo debe ser ángulo recto.

Definiciones básicas:

Para el desarrollo de algunas demostraciones sobre círculos en el presente capítulo, deben considerarse algunas definiciones y postulados. Los conceptos aquí presentados los estudiaremos mediante actividades o prácticas, esto es se pueden aplicar en un pizarrón con regla y compás así como en el Geometer's Sketch-Pad que es uno de los más aceptables.

Actividad 3.1

Necesitamos algún objeto con el que se pueda trazar una circunferencia (un vaso, una moneda, una lata, etcétera) que no sea un compás, hojas de papel y tijeras.

Dibujemos una circunferencia sobre una hoja de papel. (No usar compás)
¿Puedes señalar con toda precisión el centro de la circunferencia?

Bueno el centro de la circunferencia resulta fácil encontrarlo, basta doblar el círculo exactamente a la mitad, desdoblarlo y volverlo a doblar por otra línea. Donde se cruzaron los dobleces ese es el **centro**. Figura 3.1.

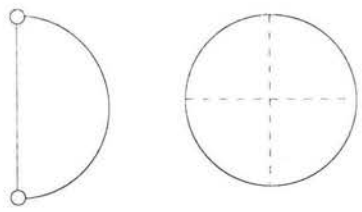


Figura 3.1

Por lo que, definimos

Definición 3.1: Sea O un punto cualquiera del plano, y sea $\overline{AB}$ un segmento cualquiera. El conjunto de todos aquellos puntos X del plano tales que $\overline{OX} \cong \overline{AB}$ se llama un **círculo** con **centro** en O y **radio** $\overline{AB}$. El **interior** del círculo es el conjunto de puntos X tales que $\overline{OX} < r$; el **exterior** del círculo es el conjunto de puntos X tales que $\overline{OX} > r$.

Observación 3.1: Todos los radios de una circunferencia son congruentes. Frecuentemente los círculos se trazan con un compás. Figura 3.2.

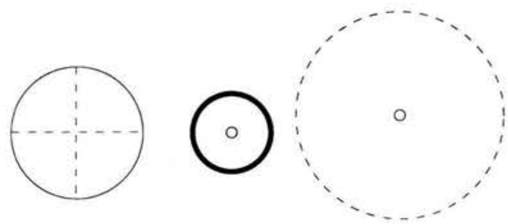


Figura 3.2

Definición 3.2: Al segmento o distancia que une al centro con cualquier punto de la circunferencia se le llama **radio**. Figura 3.3

Definición 3.3: El segmento que une dos puntos de la circunferencia se llama **cuerda**. Figura 3.3

Definición 3.4: Toda cuerda que pasa por el centro de la circunferencia se denomina **diámetro**. Y es equivalente a dos radios. Figura 3.3

Observación 3.2: El diámetro divide a la circunferencia en dos partes iguales, cada una de las cuales recibe el nombre de **semicircunferencia.** Además un diámetro es la cuerda mayor en una circunferencia. En la Figura 3.3 la parte en negrita será la semicircunferencia.

Definición 3.5: La recta que corta a la circunferencia en dos puntos se le denomina **secante**. El segmento de la secante limitado por estos dos puntos es una cuerda. Figura 3.3

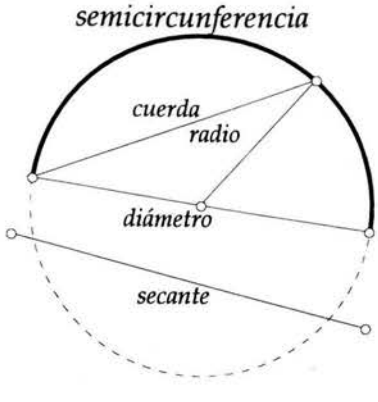


Figura 3.3

Definición 3.6: A una parte cualquiera de la circunferencia comprendida entre dos puntos se le llama **arco**. Estos dos puntos se denominan **extremos** del arco.

> **Observación 3.3**: Un arco se denota con las dos letras que designan sus extremos por ejemplo arco $\widehat{AB}$ (Figura 3.4 izquierda).Como los puntos A y B determinan dos arcos distintos de la circunferencia, en caso de ambigüedad y para poder distinguirlo perfectamente, se pone una tercera letra con la condición de que se localice entre sus extremos, ejemplo $\widehat{ACB}$. Figura 3.4.derecha.

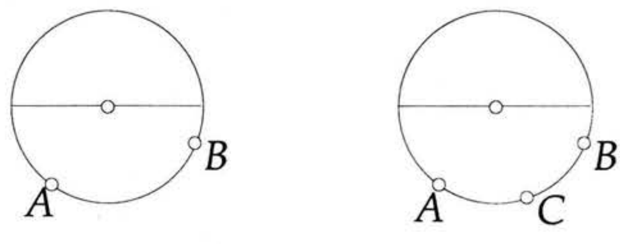


Figura 3.4

PRÁCTICA # 3.1 Construcción de una Tangente a la Circunferencia

Paso 1: Construir una circunferencia de radio arbitrario y centro en A.(Con la herramienta de circulo trazamos).

Paso 2: Localizamos un punto B sobre c1. (Con la herramienta de punto nos colocamos en c1)

Paso 3: Trazamos el radio AB. (Marcamos los puntos A y B luego del menú Construct escogemos Segment).

Paso 4: Localizamos un punto C en c1,que no sea ni A ni B. (Con la herramienta de punto nos colocamos en c1).

Paso 5: Trazamos la recta secante que pase por los puntos B y C. (Marcamos B y C y de la herramienta de regla escogemos el tercer icono, luego del menú Construct escogemos Line).

Paso 6: Medimos el ángulo ABC (Marcamos los puntos A, B y C en ese orden y del menú Measure escogemos Angle). Figura 3.5

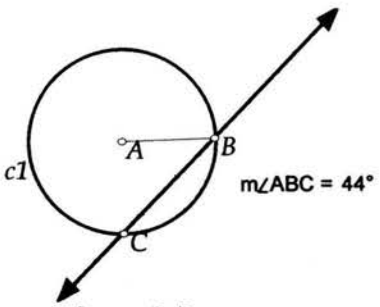


Figura 3.5

Investigación:

Hacemos que el punto C se acerque al punto B sobre la circunferencia ¿Qué le sucede al ∡ABC cuando el punto C se aproxima al punto B? ¿Cuál es la medida del ∡ABC cuando el punto C esta justo sobre el punto B?

En este punto, la línea que realiza intersección con la circunferencia en un sólo punto, es **tangente** a la circunferencia.

¿Cuál es la relación entre una tangente y el radio en el punto de tangencia? Figura 3.6

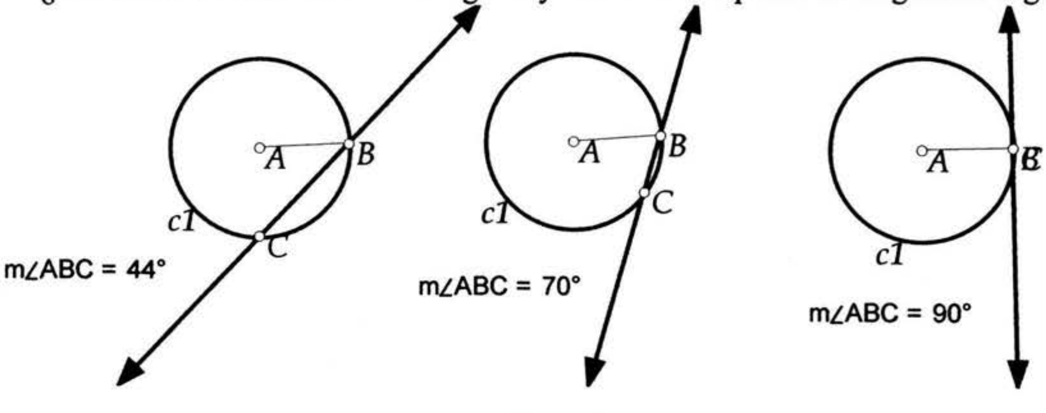


Figura 3.6

Por lo que lo concluimos en la siguiente definición

Definición 3.7: Una recta se dice que es **tangente** a una circunferencia si la toca solamente en un punto, llamado **punto de Tangencia** o **Punto de contacto**.

PRÁCTICA # 3.2

Trazar una recta tangente a una circunferencia por un punto P fuera de la circunferencia.

Sea c1 una circunferencia de radio arbitrario y P el punto fuera de c1

Paso 1: Trazamos una circunferencia c1 con centro en O. (Con la herramienta de circulo dibujamos en nuestro Sketch).

Paso 2: Localizamos el punto P fuera de c1. (Con la herramienta de punto localizamos a P).

Paso 3: Unimos P con O. (Marcamos los puntos P y O, luego del menú Construct escogemos Segment) .

Paso 4: Encontramos su punto medio de P y O y le llamamos A.(Marcamos el segmento $\overline{PO}$,luego del menú Construct escogemos Point At Midepoint).

Paso 5: Trazamos una circunferencia c2 con centro en A pasando por P y O. (Marco A y P luego del menú Construct escogemos Circle By Center And Point).

Paso 6: Encontramos los puntos T y T' que son intersección de c1 y c2. (Marcamos c1 y c2, luego del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 7: Unimos los puntos P y T. (Marcamos P y T luego del menú Construct escogemos Segment). Figura 3.7

Por lo tanto PT es tangente a la circunferencia c1. ¿ Por qué ?

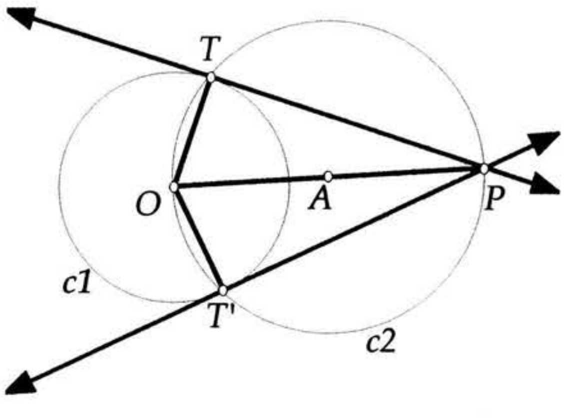


Figura 3.7

Investigación:

Une T con O ¿Son perpendiculares PT y OT?
¿Pasa lo mismo con la recta que une a P con T'?

Como ya te diste cuenta efectivamente PT y OT son perpendiculares por la definición 3.7 y en efecto sucede lo mismo para la recta PT' por construcción. Y se tiene el siguiente teorema

Teorema 3.1: Cualquier tangente a un círculo es perpendicular al radio en el punto de contacto.

Posiciones Relativas de dos Circunferencias

Dos circunferencias situadas en el mismo plano pueden tener las siguientes posiciones relativas:

3.a) Son **exteriores** si las circunferencias situadas la una fuera de la otra no tienen ningún punto en común. Figura 3.8

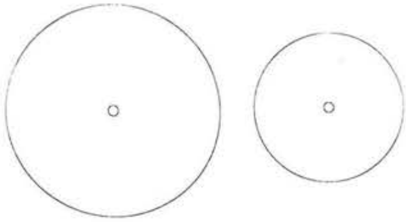
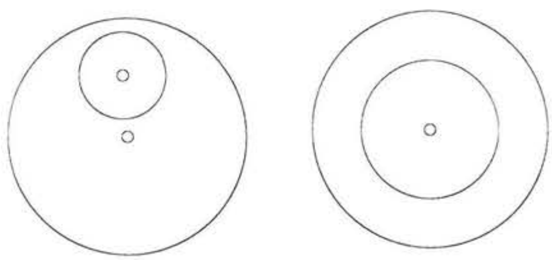


Figura 3.8

3.b) Son **interiores** si una de las circunferencias se encuentra dentro de la otra y no tienen ningún contacto. Además si dos circunferencias interiores tienen el mismo centro y radios no congruentes reciben el nombre de **concéntricas**. Figura 3.9 (a) y (b) respectivamente



(a) (b)

Figura 3.9

3.c) Son **secantes** si se cortan en dos puntos. El segmento que une los dos puntos de intersección se le llama **cuerda común**. En la Figura 3.10 $\overline{MN}$ es la cuerda común.

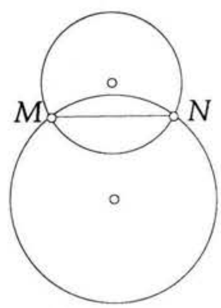


Figura 3.10

Observación 3.4: Dos círculos o más son congruentes si sus radios son iguales.

3.d) Son **tangentes exteriormente** si, situadas la una fuera de la otra, tienen un punto de contacto. Figura 3.11.

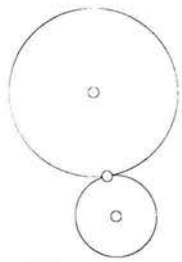


Figura 3.11

3.e) Son **tangentes interiormente** si, situadas la una dentro de la otra, tienen un punto de contacto. Figura 3.12.

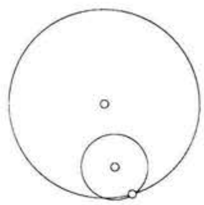


Figura 3.12

Ángulos en la Circunferencia

En esta práctica estudiaremos polígonos inscritos en una circunferencia en particular la de triángulos rectángulos. Y algunas definiciones de ángulos en la circunferencia.

PRÁCTICA # 3.2

Sea c1 una semicircunferencia de radio arbitrario con los puntos A y B como extremos del diámetro.

Paso 1: Trazamos una línea "p" y la punteamos. (Con la herramienta de regla escogemos el tercer icono y trazamos, luego del menú Display escogemos Line Style-Dashed).

Paso 2: Trazamos una circunferencia c1 de radio arbitrario con centro en O y sobre la línea "p". (Con la herramienta de círculo nos colocamos en "p" y abrimos).

Paso 3: Encontramos los puntos A y B que son extremos del diámetro. (Marcamos c1 y "p", luego del menú Display escogemos Point At Intersection).

Paso 4: Encontramos un punto P que este sobre c1 arriba o abajo de la línea "p".(Con la herramienta de punto nos colocamos sobre c1).

Paso 5: Trazamos la semicircunferencia y la ponemos en negrita. (Marcamos A, P y B luego del menú Construct escogemos Arc Through Three Points y del menú Display escogemos Line Style-Thick).

Paso 6: Unimos los puntos A, P y B "quitamos la negrita". (Marcamos los puntos A, P y B luego del menú Construct escogemos Segment). Figura 3.13.

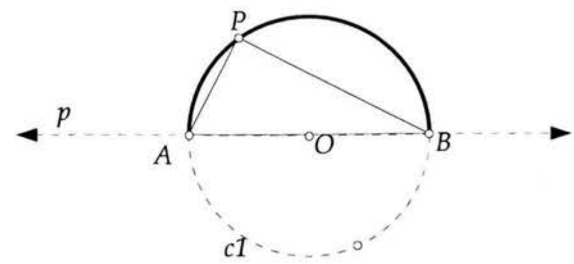


Figura 3.13

Paso 7: Ocultamos la línea "p" y c1. (Marcamos c1 y "p", luego del menú Display escogemos Hide objects).

Paso 8: Medimos el ángulo APB .(Marcamos los puntos A, P y B luego del menú Measure escogemos Angle).

Investigación:

Mueve el punto O de tal modo que la semicircunferencia sea de distinto diámetro ¿Qué observas? ¿Cómo se comporta el ángulo? Figura 3.14

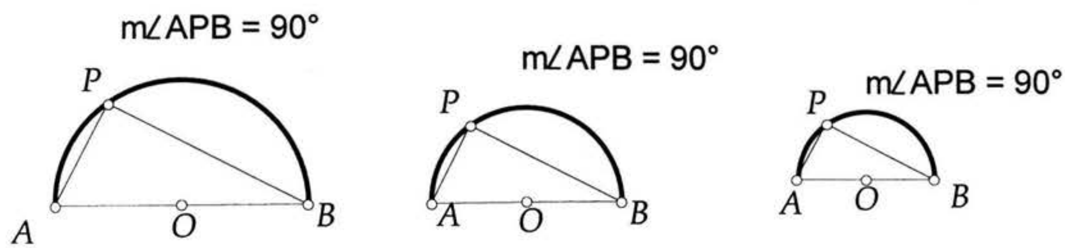


Figura 3.14

Paso 9: Une el punto O con P. (Marcamos O y P luego del menú Construct escogemos Segment)

Paso 10: Iluminamos el interior del triángulo OPA de color azul. (Marcamos los puntos O, P y A luego del menú Construct escogemos Polygon Interior y del menú Display escogemos color-azul).

Paso 11: Iluminamos de color verde el interior del triángulo OBP. (Igual que el paso anterior). Figura 3.15

Investigación:

¿Cómo son los triángulos ázul y verde?

¿Cómo son los segmentos $\overline{OB}$, $\overline{OP}$ y $\overline{OA}$? ¿Por qué?

*Seguramente llegaste a la conclusión de que $\overline{OB} = \overline{OP} = \overline{OA}$ ya que son radios de la circunferencia original c1 por tanto los triángulos OPA y OPB son **isósceles**.*

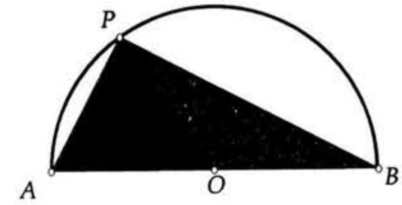


Figura 3.15

Sigamos deduciendo algunos otros resultados bastante interesantes, esto es;

Llama α a los ángulos iguales del triángulo OPA y β a los ángulos iguales del triángulo OBP. ¿Cuánto mide la suma de estos cuatro triángulos? Figura 3.16

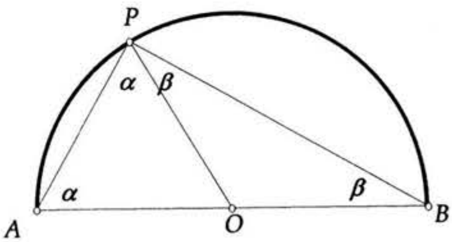


Figura 3.16

Nota 3.1: Los ángulos interiores del triángulo original ABP son precisamente $\alpha, (\alpha+\beta), y\ \beta$.

Recuerda que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180^0.

Por lo que:

$$\alpha + (\alpha+\beta) + \beta = 180^0$$

$$2\alpha + 2\beta = 180^0$$

$$2(\alpha+\beta) = 180^0$$

$$(\alpha+\beta) = 90^0 \text{.............}(1)$$

Por (1) acabas de mostrar que:

Todo triángulo inscrito en una circunferencia y que tiene un diámetro por lado es un triángulo rectángulo.

Observación 3.5: A los triángulos que tienen sus tres vértices sobre una circunferencia se les llama triángulos **inscritos** en la circunferencia. En general se dice que un polígono está circunscrito alrededor de una circunferencia cuando contiene todos los vértices del polígono. Por tanto sus lados serán cuerdas de la circunferencia.

PRÁCTICA # 3.3 ÁNGULOS INSCRITOS

Paso 1: Trazamos una circunferencia c1 de radio arbitrario. (Con la herramienta de círculo dibujamos en nuestro Sketch en blanco).

Paso 2: Trazamos sobre c1 una cuerda con extremos A y B. (Con la herramienta de punto localizamos los puntos A y B en c1, marcamos A y B luego del menú Construct escogemos Segment).

Paso 3: Localizamos un punto P en el arco mayor $\widehat{AB}$. (Con la herramienta de punto localizamos P).

Paso 4: Medimos el ángulo que se forma en el vértice P. (Marcamos A, P y B en ese orden, luego del menú Measure escogemos Angle).

Paso 5: Trazamos los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$. (Marcamos los puntos A y P luego del menú Construct escogemos Segment, $\overline{PB}$ similar a lo anterior).

> **Observación 3.6**: El ángulo que se forma en el vértice P se conoce como el **ángulo inscrito** en la circunferencia que subtiende a la cuerda $\widehat{AB}$ o es aquel que tiene su vértice en un punto de la circunferencia y su lados determinan dos cuerdas de la misma. Figura 3.17

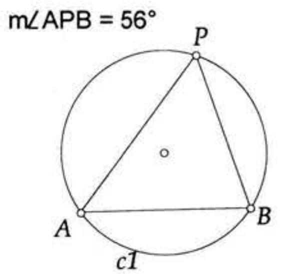


Figura 3.17

Paso 6: Elegimos otros puntos P', P'' y P''' sobre el mismo arco mayor de la circunferencia. (Con la herramienta de punto localizamos los puntos P', P'' y P''').

Paso 7: Medimos los ángulos en los vértices P',P'' y P'''. (Marcamos AP'B luego del menú Measure escogemos Angle y así sucesivamente con P'' y P'''). Figura 3.18

> **Nota 3.2**: Si se desea se trazan los triángulos AP'B, AP''B y AP'''B.

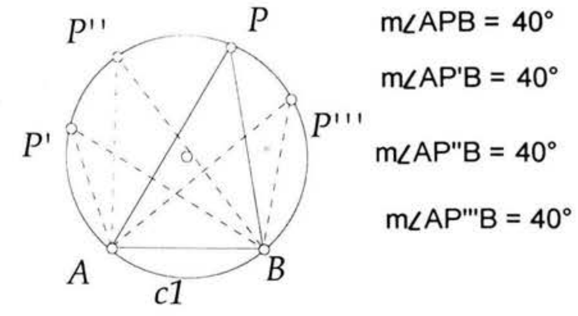


Figura 3.18

Investigación:

¿Qué observas en la medidas de los ángulos?

¿Cómo son todos estos ángulos?

Mueve el centro de la circunferencia ¿Qué sucede con la medida de los ángulos?

Mueve el punto A o B ¿Qué conclusiones obtienes?

Seguro afirmas que si tienes circunferencias de radios distintos la medida del ángulo siempre es el mismo (Figura 3.19) y si mueves el punto A o B la medida del ángulo cambia, pero en cualquiera de sus puntos P, P',P'' o P''' sigue siendo el mismo y en cualquier otro punto también. Figura 3.20

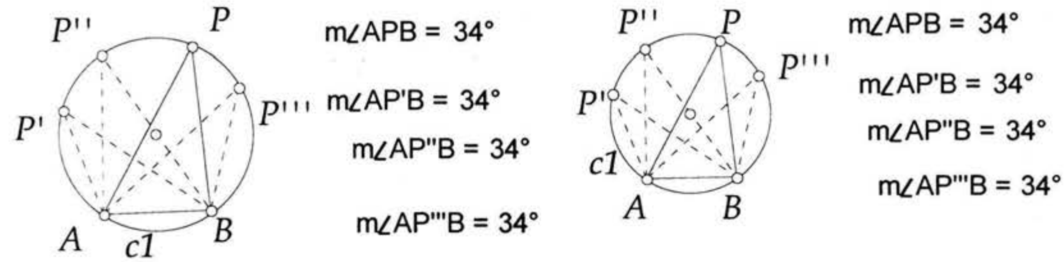


Figura 3.19

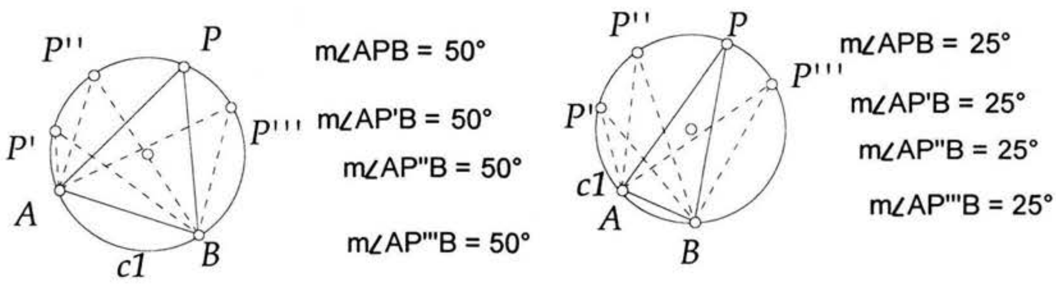


Figura 3.20

Siguiendo con la **Práctica # 3.3**

Paso 8: Une los puntos A y B con el centro de la circunferencia que le llamaremos O. (Marcamos A y O luego del menú Construct escogemos Segment, lo mismo para B y O).

Paso 9: Medimos el ángulo que se forma en el vértice en O. (Marcamos los puntos A, O y B, luego del menú Measure escogemos Angle). Figura 3.21

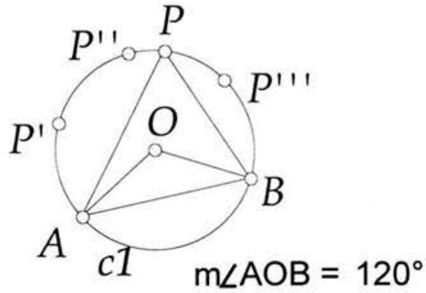


Figura 3.21

Pero antes escribimos lo siguiente

Observación 3.7: Se entenderá por **ángulo central** aquel cuyo vértice del ángulo esta en el centro de la circunferencia.

Investigación:

Compara las medidas del ángulo central y de los ángulos inscritos ¿Qué observas? Figura 3.22

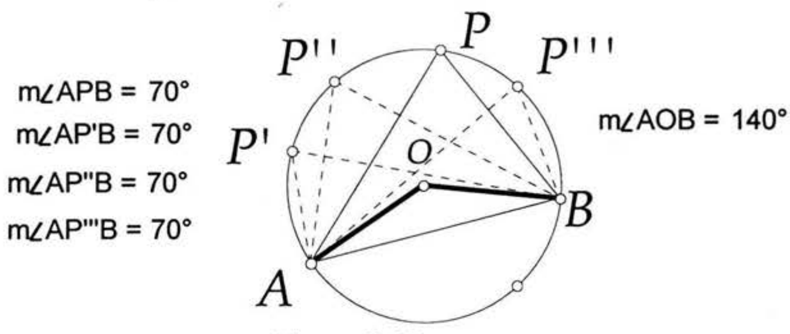


Figura 3.22

Seguramente llegaste a las siguientes conclusiones:

1. **Todos los ángulos inscritos que subtienden la misma cuerda en una circunferencia dada miden lo mismo.**
2. **El ángulo central que subtiende a una cuerda mide el doble que cualquiera de los ángulos inscritos que subtienden a la misma cuerda.**

Daremos una serie de argumentos que garantizan que estas conclusiones son validas; es decir, que no dependen de las medidas particulares de los segmentos o los ángulos.

De la Figura 3.21 si trazamos el segmento $\overline{OP}$ (hacerlo) queda Figura 3.23

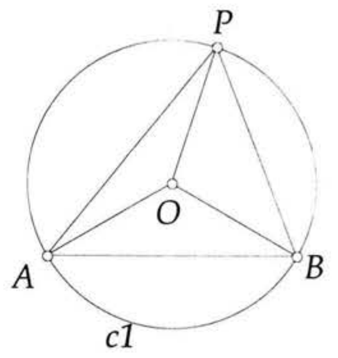


Figura 3.23

Investigación:

¿Cómo son los triángulos ABO, BPO y PAO ?

¿Son isósceles todos?

Sea α a los ángulos iguales del triángulo isósceles ABO

β a los ángulos iguales del triángulo BPO,

γ a los ángulos iguales del triángulo PAO y

δ al ángulo correspondiente al vértice en O en el triángulo ABO. Figura 3.24

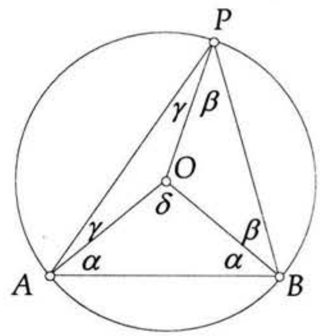


Figura 3.24

¿Cuánto es la suma de estos seis ángulos?

En efecto;

$$(\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)+(\gamma+\alpha)=180^0$$

es decir:

$$2\alpha+2\beta+2\gamma=180^0$$

$$2(\alpha+\beta+\gamma)=180^0$$

¿Cuánto mide la suma de los ángulos del triángulo ABO?

Pues $2\alpha+\delta=180^0$ ya que son ángulos interiores de dicho triángulo entonces;

$$2\alpha+2\beta+2\gamma=180^0=2\alpha+\delta \;\ldots\ldots\ldots(1)$$

es decir;

$$2\beta+2\gamma=2(\beta+\gamma)=\delta \qquad \text{por ley de la cancelación en (1)}$$

¡Fíjate que $(\beta+\gamma)$ en la figura anterior es el ángulo en el vértice P.

Esto muestra que el ángulo central mide el doble que el ángulo inscrito ó sea $\delta = 2(\beta+\gamma)$.(Conclusión 2); como esta relación entre los ángulos vale para cualquier ángulo inscrito que subtiende la misma cuerda AB, también es cierta la conclusión 1.

□

En esta práctica desarrollaremos un método geométrico para encontrar la raíz cuadrada de cualquier número; es decir, si tenemos un segmento de longitud **a,** construiremos un segmento de longitud $\sqrt{a}$.

PRÁCTICA # 3.4

Pero antes daremos la siguiente definición, pues la ocuparemos en esta practica y más adelante.

Definición 3.8: La **altura** de un triángulo es la recta perpendicular trazada desde un vértice de un triángulo al lado opuesto o a su prolongación

3.4a) De lo que se estudio en la **Práctica # 3.2** sabemos que es un triángulo rectángulo en P, Figura 3.13; entonces realizamos lo siguiente:

Paso 1: Trazamos la altura sobre la hipotenusa $\overline{AB}$ y la punteamos. (Marcamos $\overline{AB}$ y el punto P luego del menú Construct escogemos Perpendicular Line y del menu Display escogemos Line Style Dashed).

Paso 2: Llamamos D al pie de esta altura. (Marcamos $\overline{AB}$ y la altura, luego del menú Construct escogemos Point At Intersection) . Figura 3.25

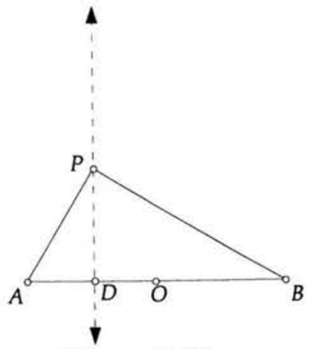


Figura 3.25

Investigación:

¿Son semejantes los triángulos PAB y PBD? ¿Por qué?
¿Cuáles son los lados correspondientes?

Sabemos que;

$\measuredangle APB \cong \measuredangle PDB$ son rectos sus lados correspondientes son

$\overline{PB}$ en $\overline{DB}$, $\overline{AP}$ en $\overline{PD}$ o $\dfrac{\overline{PB}}{\overline{DB}} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{PD}}$

$\therefore$ $\triangle APB \approx \triangle PDB$ por criterio de semejanza LAL. De otra manera:

1. $\measuredangle P \cong \measuredangle D$ son rectos
2. $\measuredangle B$ es común a los triángulos APB y PDB

$\therefore$ $\triangle APB \approx \triangle PDB$ pues con esto damos el tercer criterio de semejanza que dice:

Si los ángulos correspondientes son congruentes, entonces los triángulos son semejantes. ó Si dos triángulos son mutuamente equiángulos, son semejantes. Normalmente la notación que se utiliza es: **AA**

Ahora: ¿$\triangle PAB \approx \triangle PAD$?
¡Sí!, En vista del criterio tres de semejanza, esto es $\measuredangle A$ es común a los triángulos PAB y PAD y $\measuredangle P \cong \measuredangle D$ son rectos $\therefore$ $\triangle PAB \approx \triangle PAD$ por criterio AA

y por último

¿$\triangle APD \approx \triangle PDB$? ¡Sí!
$\measuredangle D$ es recto para ambos triángulos y
$\overline{DB}$ es correspondiente a $\overline{DP}$
$\overline{DP}$ es correspondiente a $\overline{DA}$ $\therefore$ $\triangle APD \approx \triangle PDB$ por criterio de semejanza LAL

3.4b) De la Figura 3.25 sea $x = \overline{PD}$ usando la semejanza de triángulos PAD y PDB se obtiene que

$\dfrac{\overline{AD}}{x} = \dfrac{x}{\overline{DB}}$ de donde ;

La media proporcional de dos cantidades a y b es el número x que satisface la relación $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{b}$.

3.4c) Dibuja dos segmentos cualesquiera; llama **a** y **b** a sus longitudes ¿Podrías construir un segmento cuya longitud sea la media proporcional de ellos?

Esta parte de la práctica la realizaremos con regla y compás.

Sean $\overset{a}{\circ\text{———}\circ}$ $\overset{b}{\circ\text{——————————}\circ}$ los segmentos dados.

Paso 1: Sobre una línea cualquiera tracemos un segmento de longitud **a + b.** (Abrimos nuestro compás del tamaño del segmento **a** y con punta en la línea dada trazamos un arco, ahora con abertura del compás de tamaño **b,** en uno de los extremos del segmento **a** colocamos la punta del compás y trazamos)

Paso 2: Construye un semicircunferencia de diámetro **a + b.**(Encontramos el punto medio del segmento **a + b** ,ahora con abertura del compás del punto medio a uno de los extremos trazamos una semicircunferencia de diámetro **a + b**)

Paso 3: Localizamos un punto P sobre la semicircunferencia

Paso 4: Traza la perpendicular que pasa por el punto P.

Paso 5: Llámale D al pie de esta altura.

Paso 6: Sea x igual al segmento PD es decir; ($x = \overline{PD}$)

Paso 7: Une los extremos de **a + b** con el punto P. Figura 3.26

> **Nota 3.3**: Por lo hecho en la **práctica # 3.2** se garantiza que se trata de un triángulo rectángulo.

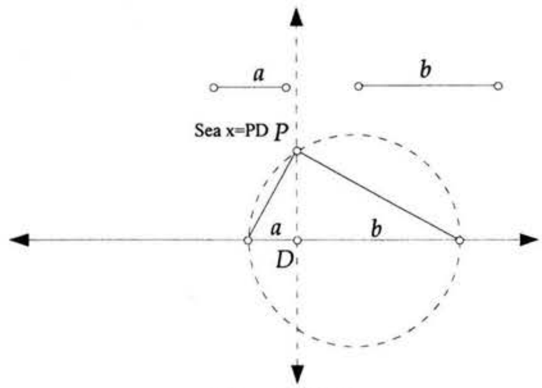


Figura 3.26

Conclusiones:

En efecto, x es la media proporcional de a y b pues $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$

3.4d) Traza un segmento de longitud **1** y otro de longitud **a,** repite la construcción hecha en el inciso 3.4c y queda algo como en la Figura 3.27.

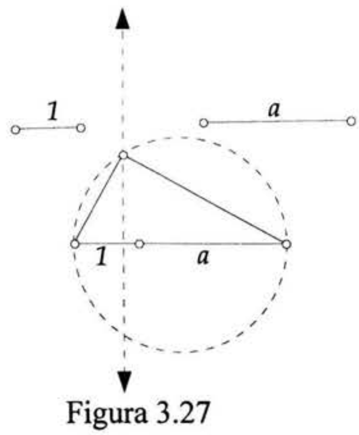


Figura 3.27

Conclusiones:

x es la media proporcional de **a** y **1**

es decir, $\frac{a}{x} = \frac{x}{1}$,Despejando a **a** en esta igualdad se tiene;

$a = x^2 \therefore x = \sqrt{a}$

Observación 3.8: A la circunferencia que pasa por los tres vértices de un triángulo se le llama circunferencia circunscrita al triángulo. Que en el próximo capítulo se hará esta y otras más construcciones.

Para concluir el presente capítulo demostraremos de dos maneras este importante teorema: **PITÁGORAS:**

Nota 3.4: Demostrar un resultado geométrico consiste en proporcionar una serie de argumentos indiscutibles que garantizan la veracidad del resultado, independiente de las magnitudes de la figura.

Teorema 3.1: En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

Sobre el triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa c de color azul. Se construyen cuatro triángulos rectángulos de color morado, verde y amarillo respectivamente quedando como en la Figura 3.28.

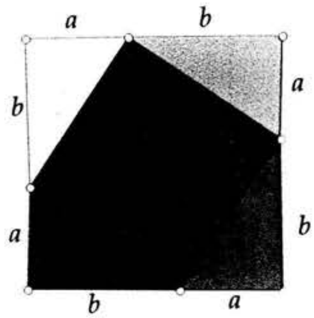


Figura 3.28

¿Estos cuatro triángulos son congruentes? Sí, por criterio LAL

Demostración:

El área de cada uno de los triángulos es $\frac{ab}{2}$ por tanto de los cuatro será $4\left(\frac{ab}{2}\right)$.

El área del cuadrado formado por las hipotenusas es c^2 y

El área del cuadrado grande es $(a+b)^2$

Por adición de áreas, el área del cuadrado mayor es igual al área del cuadrado menor, más la suma de las áreas de los cuatro triángulos congruentes.

Esto da:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\left(\frac{ab}{2}\right)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{o} \quad c^2 = a^2 + b^2$$ por ley de la cancelación

□

Otra forma de demostrar el teorema de Pitágoras es:

Utilizando semejanza de triángulos, y apoyándonos en la Figura 3.25, se tiene que,

los triángulos ADP y PDB son semejantes al igual que los triángulos BPA y PDA por lo visto en Práctica # 3.4 □.

Sean a, b, c, h, p y q los lados de éstos triángulos. Nótese que $q + p = c \ldots *$. Figura 3.29.

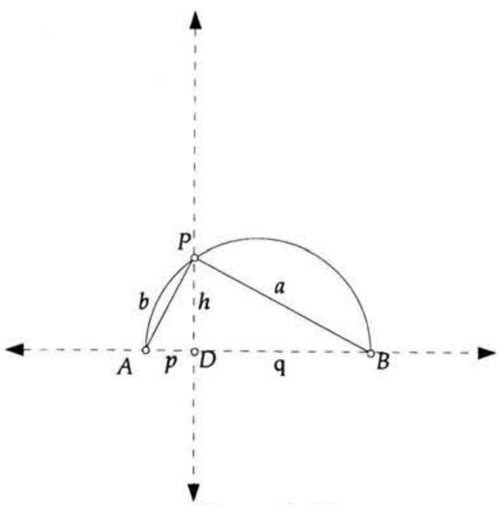


Figura 3.29

Demostración:

Como $\triangle PDB \approx \triangle ABP$ sus lados correspondientes son proporcionales, en particular

$\frac{a}{c} = \frac{q}{a}$, de donde $a^2 = qc \ldots\ldots(1)$

como $\triangle BPA \approx \triangle PDA$, tenemos que

$\frac{b}{p} = \frac{c}{b}$, de donde $b^2 = cp \ldots\ldots(2)$

al sumar (1) y (2) queda,

$$\begin{array}{r} a^2 = qc \\ + \ b^2 = cp \\ \hline \end{array}$$

$a^2 + b^2 = qc+cp$ Factorizamos

$a^2 + b^2 = c(q+p)$ pero $q+p=c$ de $*$

entonces,

$a^2 + b^2 = c \bullet c$ $\therefore$ $a^2 + b^2 = c^2$ $\square$

CAPÍTULO 4

Puntos y Rectas Notables en un Triángulo

Daremos algunos conceptos de recta y puntos en un triángulo, así como sus respectivos algoritmos que se sugiere seguir para la construcción a regla y compás utilizando Sketch-Pad. Además estas construcciones se sugiere hacerlas también a regla y compás en el pizarrón pues por experiencia después, de realizarlas en Sketch-Pad el alumno se familiariza y va comprendiendo más los conceptos que se hallan planteado como objetivos previamente para la realización de dicha práctica.

Definición 4.1: En un triángulo la **mediana**, es el segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

> **Nota 4.1**: La intersección de las tres medianas recibe el nombre de **Baricentro** o **Centroíde**

PRÁCTICA # 4.1 Construcción del Baricentro

Paso 1: Dibujamos tres puntos no alineados A, B y C . (Con la herramienta de punto damos clic por cada punto).

Paso 2: Construimos los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{CA}$. (Seleccionamos A, B y C, luego del menú Construct escogemos Segment).

Paso 3: Construimos los puntos medios de cada lado del triángulo ABC. (Seleccionamos los tres lados y del menú Construct escogemos Point At Midepoint)

Paso 4: Construimos la mediana del lado $\overline{BC}$. (Seleccionamos el vértice A y el punto medio del segmento $\overline{BC}$ y del menú Construct escogemos Line).

Paso 5: Construimos la mediana del lado $\overline{CA}$. (Seleccionamos el vértice B y el punto medio del segmento $\overline{CA}$ y del menú Construct escogemos Line).

Paso 6: Construimos la mediana del lado $\overline{AB}$. (Seleccionamos el vértice C y el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y del menú Construct escogemos Line).

Paso 7: Construimos el punto P que es intersección de las medianas "**Baricentro**".(Seleccionamos dos medianas y del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 8: Construimos el interior del polígono. (Seleccionamos los puntos A, B y C y del menú Construct escogemos Polygon Interior).

Paso 9: Sea F el punto medio del segmento $\overline{AB}$, E el punto medio de $\overline{BC}$ y D el punto medio de $\overline{CA}$. (Con la herramienta de texto damos clic en cada punto).

Paso 10: Encontrar las distancias de $\overline{BP}$, $\overline{PD}$ *y* $\frac{\overline{BP}}{\overline{PD}}$. (Marcamos B y P, luego del menú Measure escogemos Distance, marcamos P y D, luego del menú Measure escogemos Distance por último del menú Measure escogemos Calculate, marcamos $\frac{\overline{BP}}{\overline{PD}}$.

Investigación:

Al construir la tercera mediana, ¿Siempre pasa por el punto de intersección de las otras dos medianas?

Arrastremos cualquier vértice o lado del triángulo.

¿Las tres medianas siempre realizan intersección en un sólo punto?

¿Qué sucede con el valor de $\frac{\overline{BP}}{\overline{DP}}$ cuando cambia el triángulo?

Seleccionar las dos mediciones y la razón de estas. Escoger **Tabulate** en el menú **Measure** y registrar cuatro o más resultados.

Ejercicio 4.1: Realizar lo mismo pero con los segmentos $\overline{AP}$, $\overline{PE}$ y $\frac{\overline{AP}}{\overline{PE}}$ y $\overline{CP}$, $\overline{PF}$ y $\frac{\overline{CP}}{\overline{PF}}$

¿Qué observas? Figura 4.1

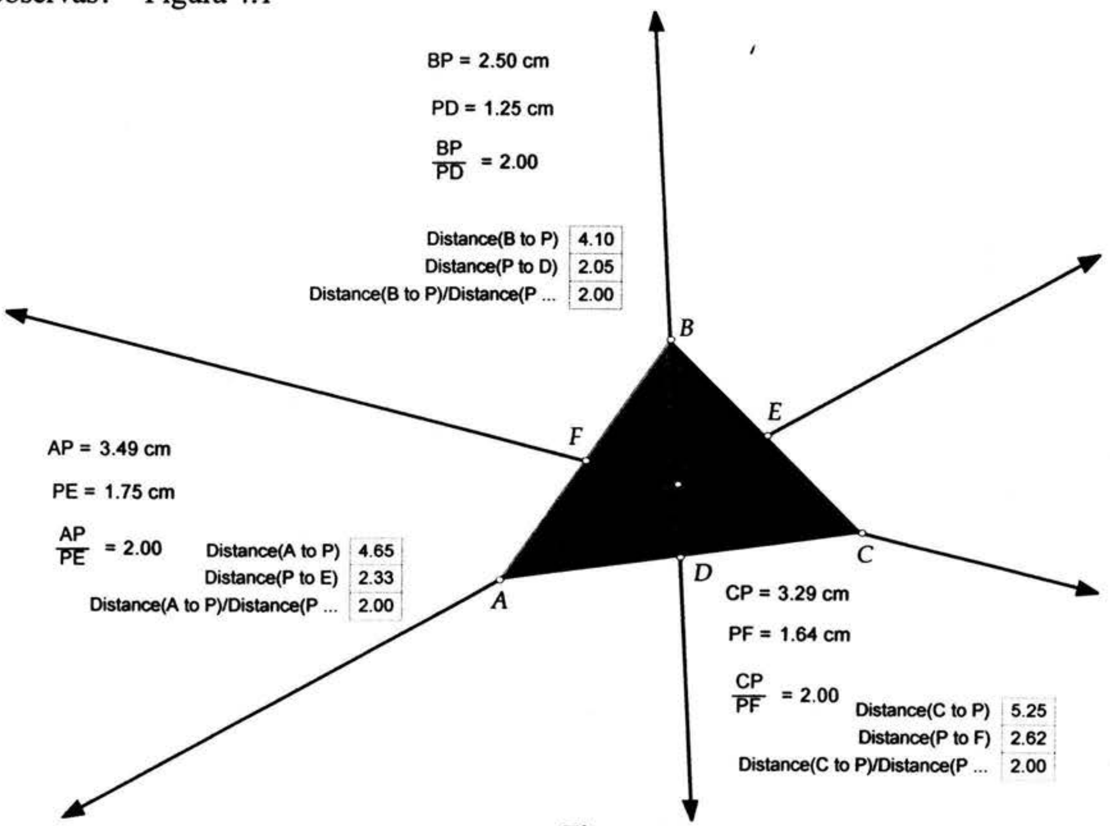


Figura 4.1

Conclusiones:

Teorema 4.1: Las tres medianas de un triángulo concurren en un punto cuya distancia a cada vértice es dos tercios de la mediana correspondiente a dicho vértice.

Definición 4.2: **Mediatriz** es la recta perpendicular a un segmento y que lo divide en partes iguales.

> **Nota 4.2**: En un triángulo, la intersección de las tres mediatrices es un punto llamado **Circuncentro.**

PRÁCTICA # 4.2 Construcción del Circuncentro y Circuncírculo

> **Observación 4.1** **Circuncírculo** de un triángulo es el círculo con centro en el circuncentro y que pasa por los tres vértices del triángulo.

Paso 1: Dibujamos tres puntos no alineados P, Q y R. (Con la herramienta de punto damos clic por cada punto).

Paso 2: Construimos los segmentos $\overline{PQ}, \overline{QR}$ y $\overline{RP}$. (Seleccionamos P, Q y R luego del menú Construct escogemos Segment).

Paso 3: Construimos los puntos medios de cada lado del triángulo. (Seleccionamos los lados del triángulo y del menú Construct escogemos Point At Midpoint).

Paso 4: Construimos la mediatriz del lado $\overline{PR}$. (Seleccionamos el tercer icono de la herramienta de regla, después marcamos el punto medio de $\overline{PR}$ y este segmento, luego del menú Construct escogemos Perpendicular Line).

Paso 5: Construimos la mediatriz del lado $\overline{RQ}$. (Seleccionamos el punto medio de $\overline{RQ}$ y este segmento, luego del menú Construct escogemos Perpendicular Line).

Paso 6. Construimos la mediatriz del lado $\overline{QP}$. (Seleccionamos el punto medio de $\overline{QP}$ y este segmento, luego del menú Construct escogemos Perpendicular Line).

Paso 7. Construimos el punto A que es intersección de las mediatrices **"Circuncentro"** (Seleccionamos dos mediatrices y del menú Construct escogemos Point At Intersection)

Construcción del Circuncírculo

Paso 8. Construimos el círculo con centro en A "**circuncentro"** y que pasa por los tres vértices del triángulo. (Seleccionamos el punto A **"circuncentro"** y cualquier vértice del triángulo, luego del menú Construct escogemos Circle By Center and Point).

Investigación:

Al construir la tercera mediatriz,
¿Siempre pasa por el punto de intersección de las otras dos mediatrices?.

Arrastrar cualquier vértice o un lado del triángulo.
¿Las tres mediatrices siempre realizan intersección en un solo punto? ¿El círculo de radio AP siempre pasa por los vértices Q y R? ¿Qué se puede decir de las distancias de A a Q, a R y P?

Observa que cuando se mueva un vértice, A puede quedar dentro, sobre o fuera del triángulo. Figura 4.2

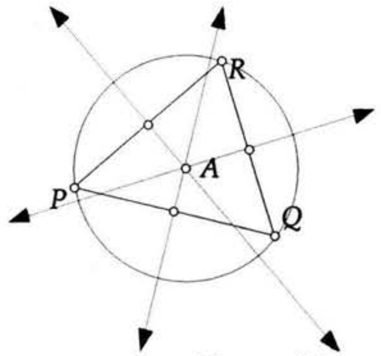


Figura 4.2

Medir el ∡PQR

Conclusiones:

Cuando Q se encima con P o R, el ángulo es indefinido y el circuncentro (A) se va al infinito y queda algo como en la Figura 4.3.

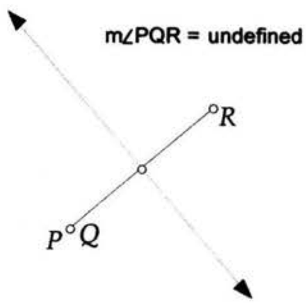


Figura 4.3

Cuando Q se va al punto medio del segmento $\overline{PR}$, el ángulo PQR vale 180 y el circuncentro (A) se va al infinito y quedando las tres mediatrices así: Figura 4.4

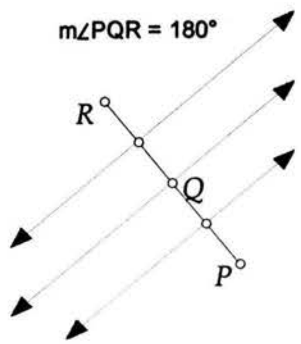


Figura 4.4

Teorema 4.2: Las mediatrices de los tres lados de un triángulo concurren en un punto que equidista de los tres vértices.

Observación 4.2: Equidista estar a igual distancia

Definición 4.3: Bisectriz es la semirrecta que parte del vértice de un ángulo y lo divide en dos ángulos iguales.

Nota 4.2: En un triángulo, la intersección de las tres bisectrices es un punto llamado **incentro.**

PRÁCTICA # 4.3 Construcción de la Bisectriz

Sea el $\measuredangle AOB$ dado

Paso 1: Construimos una circunferencia c1 con centro en O y radio arbitrario, a sus intersecciones con los lados $\overline{AO}$ *y* $\overline{BO}$ les llamamos X e Y respectivamente. (Con la herramienta de circulo, arrastramos hasta el punto O y trazamos a c1, después marcamos c1 y $\overline{AO}$ y del menú Construct escogemos Point At Intersection lo mismo c1 y $\overline{BO}$).

Paso 2: Construimos una circunferencia c2 con centro en X y radio mayor que la circunferencia c1. (Seleccionamos la herramienta de círculo arrastramos hasta X, y trazamos)

Paso 3: Determinamos el segmento $\overline{RX}$ el cual es radio de c2. (Marcamos un punto R sobre c2 después marcamos R y X luego del menú Construct escogemos Segment).

Paso 4: Construimos una circunferencia c3 con el mismo radio de c2 pero centro en Y. (Marcamos el punto Y más el segmento $\overline{RX}$ luego del menú Construct escogemos Circle By Center and Radius).

Paso 5: Encontramos los puntos de intersección de las circunferencias c2 y c3 y les llamamos P y Q respectivamente. (Marcamos las circunferencias c2 y c3 luego del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 6: Unimos O y Q siendo esta la **bisectriz** del $\measuredangle AOB$ además si esta se prolonga pasa por el punto P. (Marcamos los puntos O y Q luego del menú Construct escogemos Segment).Figura 4.5

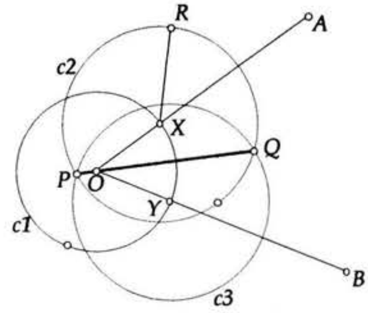


Figura 4.5

Investigación:

Ocultamos c1,c2 , c3 y $\overline{RX}$

Trazamos el polígono con vértices OXQY respectivamente,

¿$\overline{OX} = \overline{OY}$? ¿por qué?

¿$\overline{XQ} = \overline{YQ}$? ¿por qué?

$\overline{OQ}$ es lado común $\therefore \Delta OXQ \cong \Delta OYQ$ ¿ por criterio ?. Figura 4.6

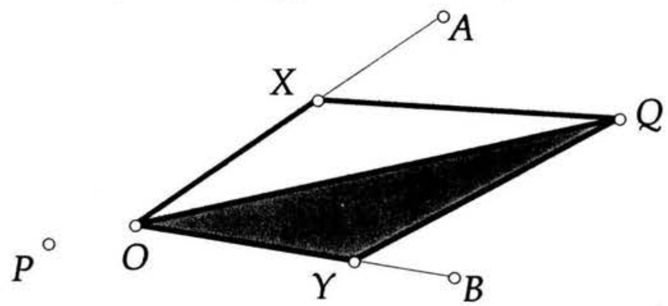


Figura 4.6

PRÁCTICA # 4.4 Construcción del Incentro

Incírculo de un triángulo, es el círculo con centro en el **Incentro** y que es tangente a los tres lados del triángulo.

Paso 1: Dibujamos tres puntos no alineados P, Q y R. (Con la herramienta de punto damos clic por cada punto).

Paso 2: Construimos los segmentos $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ y $\overline{RP}$. (Seleccionamos P, Q y R y del menú Construct escogemos Segment).

Paso 3: Construimos la bisectriz del ángulo en P.(Marcamos los puntos R, P, y Q en ese orden luego del menú Construct escogemos Angle Bisector).

Paso 4: Construimos la bisectriz del ángulo en Q. (Marcamos los puntos P, Q, y R en ese orden luego del menú Construct escogemos Angle Bisector).

Paso 5: Construimos la bisectriz del ángulo R. (Marcamos los puntos Q, R y P en ese orden luego del menú Construct escogemos Angle Bisector).

Paso 6: Encontramos el punto de intersección de las tres bisectrices y le llamamos T. (Seleccionamos dos bisectrices y del menú Construct escogemos Point At Intersection donde T será el **Incentro**).

Construcción del **Incírculo**.

Paso 7: Construimos la recta que pasa por el Incentro y que es perpendicular al lado $\overline{PR}$, este interseca a $\overline{PR}$ en el punto S. (Seleccionamos el lado $\overline{PR}$ y el punto T Incentro y del menú Construct escogemos Perpendicular Line luego seleccionamos el lado $\overline{PR}$, la recta perpendicular y del menú Construct escogemos Point At Intersection)

Paso 8: Construimos la circunferencia con centro en el Incentro y que es tangente a los tres lados del triángulo. (Seleccionamos el punto T Incentro luego el punto S, y del menú Construct escogemos, Circle By Center And Point). Figura 4.7

Paso 9: Encontremos los puntos U. (Marcamos el incírculo y el segmento $\overline{QP}$, luego el menú Construct scogemos Point At Intersection).

Paso 10: Encontramos V. (Marcamos el incírculo y el segmento $\overline{QR}$, luego del menú Construct escogemos Point At Intersection) . Figura 4.7

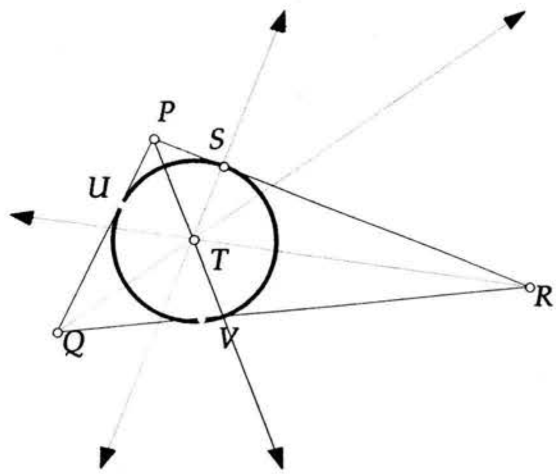


Figura 4.7

Investigación:

Al construir la tercera bisectriz,
¿Siempre pasa por el punto de intersección de las otras dos bisectrices?

Arrastrar cualquier vértice o lado del triángulo
¿Las tres bisectrices siempre realizan intersección en un solo punto? ¿El incírculo deja de ser tangente a los lados del triángulo? ¿Qué se puede decir de las distancias de T a S a U y V? ¿ éstas cambian?

Encontrar las distancias de $\overline{TS}, \overline{TU} y \overline{TV}$, seguir moviendo el triángulo ¿Qué ocurre con estas medidas?

Conclusiones:

Teorema 4.3: Las bisectrices de los tres ángulos interiores de un triángulo concurren en un punto que equidista de los lados. Figura 4.8

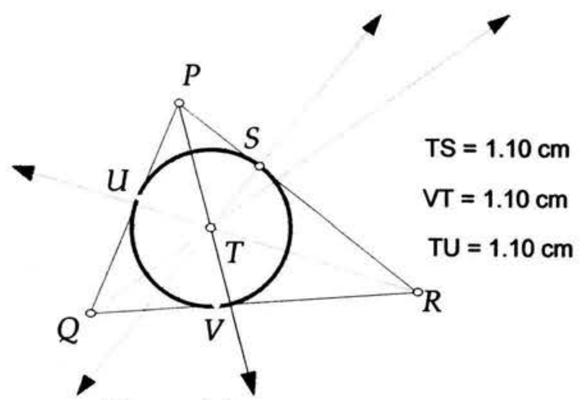


Figura 4.8

Definición 4.4: La altura de un triángulo es la perpendicular trazada desde un vértice a su lado opuesto o a su prolongación.

Observación 4.3: La intersección de las tres alturas es un punto llamado **Ortocentro.**

PRÁCTICA # 4.5 Construcción del Ortocentro

Paso 1: Dibujamos tres puntos no alineados P, Q y R. (Con la herramienta de punto damos clic por cada punto).

Paso 2: Construimos los segmentos $\overline{PQ}$,$\overline{QR}$ y $\overline{RP}$. (Marcamos P ,Q y R y del menú Construct escogemos Segment).

Paso 3: Construimos la altura del segmento $\overline{PQ}$ y que pasa por R. (Marcamos el vértice R y su lado opuesto $\overline{PQ}$ y del menú Construct escogemos Perpendicular Line).

Paso 4: Construimos la altura del segmento $\overline{PR}$ y que pasa por Q. (Marcamos el vértice Q y su lado opuesto $\overline{PR}$, del menú Construct escogemos Perpendicular Line).

Paso 5: Construimos la altura que pasa por el segmento $\overline{QR}$ y que pasa por P. (Marcamos el vértice P y su lado opuesto $\overline{QR}$, del menú Costruct escogemos Perpendicular Line).

Paso 6: Construimos el punto de intersección de las alturas T "**ortocentro**". (Marcamos dos alturas y del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Investigación:

Al construir la tercera altura,
¿Siempre pasa por el punto de intersección de las otras dos alturas?
Arrastrar cualquier vértice o lado del triángulo
¿Las tres alturas siempre realizan intersección en un solo punto?

Cómo te das cuenta el punto T puede estar dentro, fuera del triángulo o encima de cualquier vértice. Figura 4.9

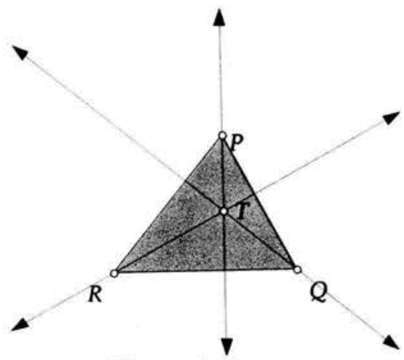


Figura 4.9

Siguiendo con la práctica # 4.5 realicemos los siguientes pasos para concluir con la demostración del teorema 4.5

Teorema 4.5: Las tres alturas de un triángulo son concurrentes.

Paso 7: Construimos una recta paralela "x" al segmento $\overline{PQ}$ y que pasa por el punto R, la dibujamos en color rojo y punteada. (Marcamos $\overline{PQ}$ y R, luego del menú Construct escogemos Parallel Line).

Paso 8: Construimos un recta paralela "y" al segmento $\overline{QR}$ y que pasa por el punto P. (Marcamos $\overline{QR}$ y P, luego del menú Construct escogemos Parallel Line).

Paso 9: Construimos una recta paralela "z" al segmento $\overline{RP}$ y que pasa por el punto Q. (Marcamos $\overline{RP}$ y Q, luego del menú Construct escogemos Parallel Line).

Paso 10: Formamos el punto P', que es intersección de las paralelas "z" y "x". (Marcamos "z" y "x", luego del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 11: Formamos el punto Q', que es intersección de las paralelas "y" y "x". (Marcamos "y" y "x", luego del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 12: Formamos el punto R'que es intersección de "y" y "z". (Marcamos "y" y "z",luego del menú Construct escogemos Point At Intersection).

Paso 13: Trazamos la circunferencia c1 con centro en T y que pasa por los puntos P', Q' y R'. (Marcamos T y P' luego del menú Construct escogemos Circle By Center And Point) .
Figura 4.10.

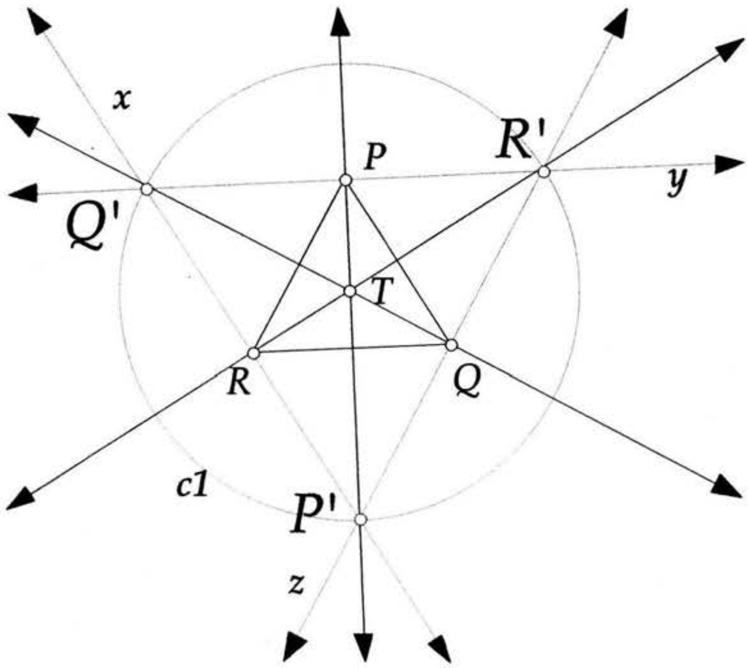


Figura 4.10

Demostración del Teorema 4.5

Por lo realizado a partir del paso 7 se ha construido el ΔP'Q'R' Figura 4.10

Sean D, E y F los pies de las alturas correspondientes, respectivamente, a los vértices P, R y Q. Figura 4.11

Ocultemos las alturas para visualizar mejor nuestra demostración;

Ahora bien en el paralelogramo Q'RQP tenemos que $\overline{Q'P} = \overline{RQ}$

En el paralelogramo PRQR' tenemos que $\overline{RQ} = \overline{PR'}$

Luego P es el punto medio del segmento $\overline{Q'R'}$.

En forma análoga, se sigue que $\overline{Q'R} = \overline{PQ} = \overline{R'P}$ y que $\overline{P'Q} = \overline{RP} = \overline{QR'}$
es decir, R y Q son también los respectivos puntos medios de los segmentos $\overline{P'Q'}$ y $\overline{P'R'}$.
Por lo tanto, las alturas del ΔPQR son precisamente las mediatrices del $\Delta P'Q'R'$, y de acuerdo con la definición 4.2 deben concurrir □ Figura 4.11

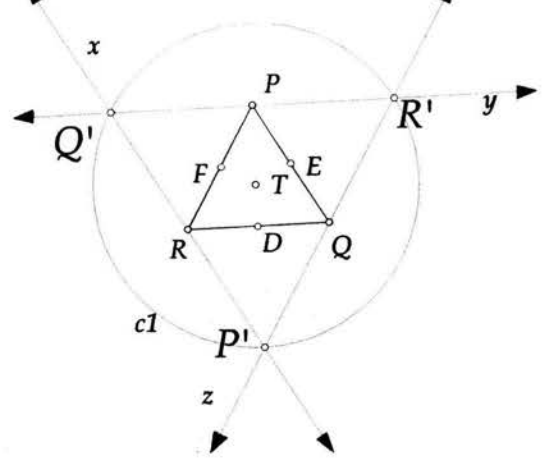


Figura 4.11

PRÁCTICA # 4.6 Proporciones con Áreas

En esta práctica se estudiará una relación entre las áreas de figuras semejantes.

Paso1: Construimos dos segmentos $\overline{AB}, \overline{CD}$ con la condición de que $\overline{AB} > \overline{CD}$. (Con la herramienta de regla trazamos en nuestro Sketch en blanco).

Paso 2: Construimos cualquier polígono y su interior. (Con la herramienta de regla trazamos un cuadrilátero con vértices E, F, G y H, luego marcados los vértices del menú Construct le damos Segment).

Paso 3: Construimos un punto I fuera del polígono, y seleccionarlo, después marcarlo como **center,** con la opción **Mark center** del menú **Transform.**

Paso 4: Seleccionamos $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$ y marcar $\overline{AB}/\overline{CD}$ con la opción **Mark Ratio** en el menú **Transform.**

Paso 5: Marcamos los segmentos $\overline{AB}$ *y* $\overline{CD}$ y medimos su razón. (Marcamos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ luego del menú **Measure** escogemos **Ratio.**).

Paso 6: Dilatamos el polígono en la razón marcada. (Seleccionamos el polígono, luego seleccionamos **Dilate** del menú **Transform,** además dibujamos)

Paso 6: Dilatamos el polígono en la razón marcada. (Seleccionamos el polígono, luego seleccionamos **Dilate** del menú **Transform,** además dibujamos)

Paso 7: Encontramos los puntos H',G', F' y E' que son correspondientes a los vértices del polígono original).

Paso 8: Medir la razón de un lado del polígono dilatado con el lado correspondiente del polígono original. (Marcamos $\overline{H'G'}$ *y* $\overline{HG}$ y del menú **Measure** Escogemos **Ratio**.)

Paso 9: Repetir el paso 7 usando un lado diferente. ¿Cuál es la razón?

Paso 10: Medir las áreas de los polígonos. (Marcamos el interior del polígono dilatado y del menú **Measure** escogemos **Área**, lo mismo para el polígono original).

Paso 11. Medir la razón de sus áreas (Seleccionamos del menú **Measure Calculate** marcamos el área del polígono dilatado entre la del polígono original).

Paso 12: Seleccionamos la medida de la razón de los lados y la medida de la razón de las áreas, en este orden. Escogemos **Plot As (x, y)** en el menú **Graph**, Se debe observar un punto en el plano cartesiano que se ha generado así marcado escoger **Trace Point** en el menú **Display**.

Investigación:

Arrastrar el punto B para experimentar con escalas diferentes.

Observación 4.4: El punto que se ha graficado dibujará la razón de las longitudes de los lados contra la razón de las áreas de las figuras

¿La gráfica proporciona alguna idea de que relación esta entre la razón de las longitudes de los lados y la razón de las áreas de figuras semejantes?

Medir las coordenadas del punto graficado:

Seleccionamos el punto y seleccionar **Coordinates** del menú **Measure.**

Para visualizar mejor las relaciones es mejor tomar números adecuados es decir;

Mover B, de tal modo que, la razón de las longitudes de sus lados (la coordenada "x") sea 2

¿Cuál es la razón de sus áreas?
¿Cual es la razón de las áreas cuando la razón de las longitudes es 3?
¿Qué sucede con la figura cuando la razón de las longitudes es 1?
¿Se observa un relación entre la razón de los lados y la razón de las áreas ?

Conclusiones:

Seguramente ya te diste cuenta que cuando la coordenada en x es 2 (razón de sus longitudes) la razón de sus áreas es 4 (La coordenada en y), cuando es x =3, y = 9, x = 4, y =16 ...

Si B esta encima de A no existe razón de áreas ni de longitudes además el polígono original desaparece quedando sólo el polígono dilatado y la **Parábola**. Figura 4.12

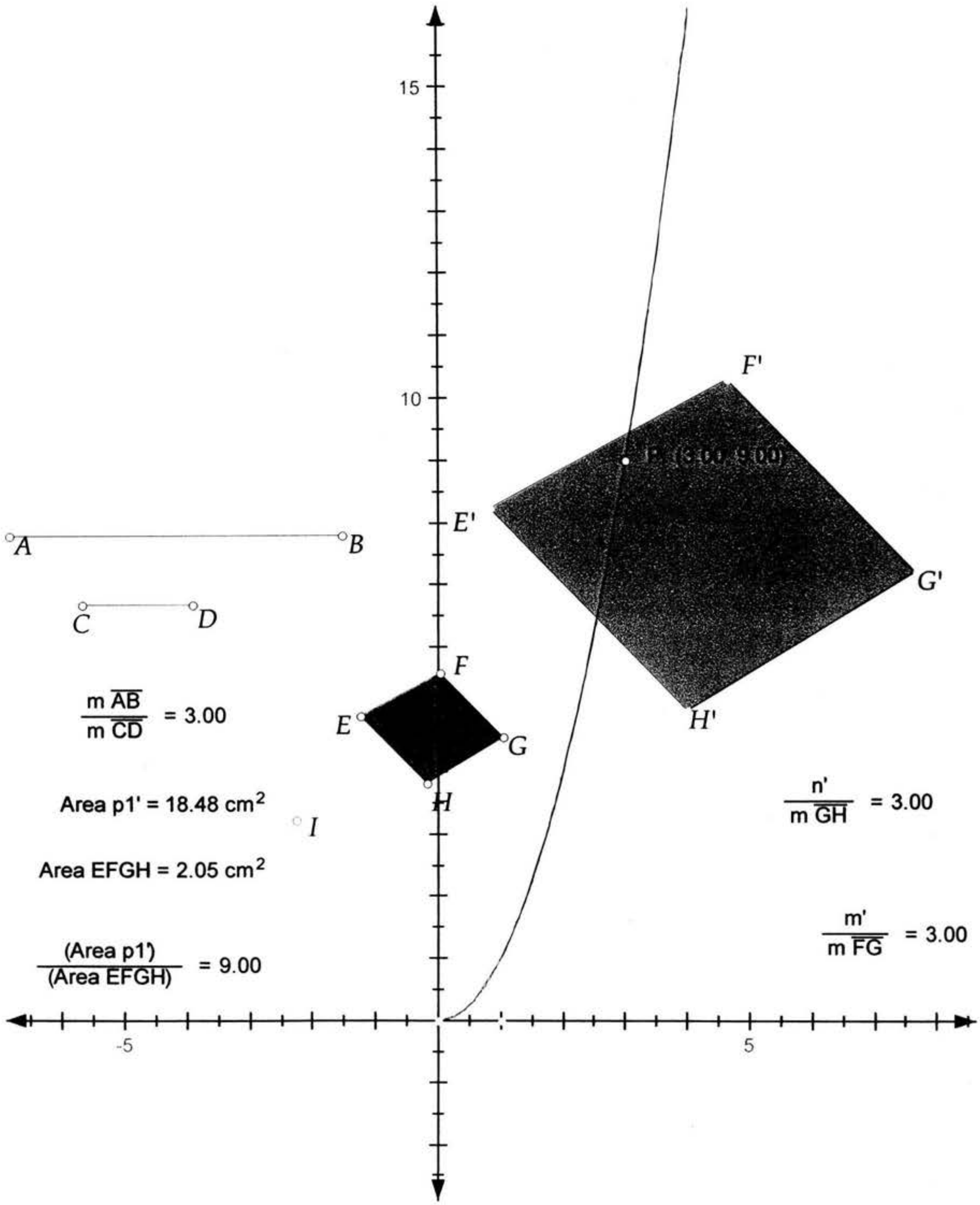


Figura 4.12

Bibliografía

- HÉCTOR DE J. ARGUETA VILLAMAR / MARÍA JUANA LINARES ALTAMIRANO Taller de Geometría con The Geometer's Sketchpad Julio de 1997

- SILVESTRE CÁRDENAS RUBIO */DOS O TRES TRAZOS/* Temas de Matemáticas para Bachillerato Instituto de Matemáticas U.N.A.M 2003

- HEMMERLING */GEOMETRÍA ELEMENTAL/* México 1994

- ALBERTO LUQUE LUNA /ELEMENTOS DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA/ México 1989

- MOISE-DOWNS /GEOMETRÍA MODERNA/ México 1989.

- A.V. POGORELOV / GEOMETRÍA ELEMENTAL/ México 1998.

- SMITH, et al /ÁLGEBRA/ México 2001.

- GABRIEL VELASCO SOTOMAYOR /TRATADO DE GEOMETRÍA/ México 1983.