

01170



**UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE MÉXICO**

---

**FACULTAD DE INGENIERÍA**  
Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería

**DETERMINACIÓN DE LA POSICIÓN DE UN ROBOT  
MÓVIL USANDO TRANSMISORES ULTRASÓNICOS**

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN INGENIERÍA  
(ELÉCTRICA)

PRESENTA  
YUKIHIRO MINAMI KOYAMA

DIRIGIDA POR  
DR. JESÚS SAVAGE CARMONA

Ciudad Universitaria, agosto de 2004



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**A Maty**

**A Yukitoshi y Chiemi**

**CONTENIDO**

<b>RESUMEN</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN</b>	<b>3</b>
<b>1.1 SISTEMAS DE MEDICIÓN DE POSICIÓN RELATIVA</b>	<b>4</b>
<b>1.1.1 Sistema basado en un odómetro</b>	<b>4</b>
<b>1.1.2 Sistema inercial</b>	<b>5</b>
<b>1.2 SISTEMAS DE MEDICIÓN DE POSICIÓN ABSOLUTA</b>	<b>6</b>
<b>1.2.1 Sistemas con faros activos</b>	<b>6</b>
1.2.1.1 Sistema de medición de los lados del triángulo	7
1.2.1.2 Sistema de medición de los ángulos del triángulo	7
<b>1.2.2 Sistema de reconocimiento de marcas artificiales</b>	<b>8</b>
<b>1.2.3 Sistema de reconocimiento de marcas naturales</b>	<b>9</b>
<b>1.2.4 Sistema de reconocimiento basado en mapas</b>	<b>9</b>
<b>1.3 TEMA Y OBJETIVO DE LA TESIS</b>	<b>10</b>
<b>1.4 METODOLOGÍA Y CONTENIDO DEL TRABAJO</b>	<b>11</b>

<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>ANÁLISIS DE LOS ELEMENTOS TEÓRICOS PARA EL DISEÑO DEL SISTEMA</b>	<b>13</b>
<b>2.1</b>	<b>PROCESADOR DIGITAL DE SEÑALES</b>	<b>13</b>
2.1.1	El <i>DSP56002</i> de <i>Motorola</i>	14
2.1.2	La unidad lógica y aritmética del <i>DSP56002</i>	17
2.1.3	La unidad generadora de direcciones del <i>DSP 56002</i>	18
<b>2.2</b>	<b>FILTROS</b>	<b>20</b>
2.2.1	Transformación de un filtro analógico paso-bajas a un filtro digital de cualquier tipo	21
2.2.2	Metodología propuesta para la transformación de un filtro analógico paso-bajas a un filtro digital de cualquier tipo	27
<b>2.3</b>	<b>SONIDO</b>	<b>29</b>
2.3.1	Velocidad de propagación del sonido	29
2.3.2	Atenuación atmosférica	30
<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>DESARROLLO DE LAS PROPUESTAS PARA LA DETERMINACIÓN DE LA POSICIÓN DEL ROBOT</b>	<b>33</b>
<b>3.1</b>	<b>PRIMERA PROPUESTA</b>	<b>33</b>
<b>3.2</b>	<b>SEGUNDA PROPUESTA</b>	<b>40</b>
<b>3.3</b>	<b>TERCERA PROPUESTA</b>	<b>44</b>
<b>3.4</b>	<b>PROPUESTA FINAL</b>	<b>47</b>

---

<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>OBTENCIÓN DE LA POSICIÓN ÓPTIMA DE LOS FAROS</b>	<b>49</b>
4.1	PRIMERA APROXIMACIÓN	49
4.2	SEGUNDA APROXIMACIÓN	64
<b>CAPÍTULO 5</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>75</b>
<b>APÉNDICE</b>		<b>79</b>
A.1	FILTRO DE <i>BUTTERWORTH</i> PASO-BAJAS	79
A.2	TRANSFORMACIÓN <i>BILINEAL</i>	84
A.3	REALIZACIÓN DE FILTROS DIGITALES EMPLEANDO EL <i>DSP56002</i>	86
A.3.1	Realización de filtros digitales empleando la forma directa en cascada	87
A.3.2	Coefficientes para los filtros paso-bandas tipo <i>Butterworth</i> de cuarto orden, de 17, 19 y 21 kHz	94
	<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>97</b>

## RESUMEN

Los sistemas de navegación de robots móviles requieren del conocimiento preciso de la posición para su funcionamiento. En este trabajo se presenta el desarrollo de un sistema para la determinación de la posición de robots en ambientes de trabajo limitados, basado en el uso de tres emisores ultrasónicos y un micrófono *omnidireccional*.

Para el diseño de este trabajo se eligió el sistema de faros activos, a partir del cual se analizaron cuatro propuestas. En la primera se determinaron las distancias entre los emisores y el micrófono con base en el tiempo que tardan en llegar las señales, las cuales se discriminaron con filtros digitales implantados en un *DSP*. La segunda se basó en la obtención de las diferencias de distancias de los emisores al micrófono, y a partir de ellas se calculó la posición del robot. En esta propuesta se eliminó sincronización en la emisión de las señales que se requiere en la primera. En la tercera se añadieron retardos de tiempo entre cada una de las señales, para evitar el uso de frecuencias diferentes para su discriminación. Y en la propuesta final se empleó la idea anterior, pero con el empleo de la computadora a bordo del robot para el procesamiento de los sonidos, sin necesidad de usar el *DSP*.

Por último, se desarrolló un proceso de optimación para determinar la mejor configuración de los emisores, para la que el área de cobertura del sistema fuera el máximo, procurando minimizar el error generado.

## CAPÍTULO 1

### INTRODUCCIÓN

Un autómata ambulante o robot móvil, como se le denominará en este trabajo de aquí en adelante, es un mecanismo controlado por un microprocesador capaz de navegar dentro de un espacio predeterminado, que tiene sensores con los que puede reconocer obstáculos que se presentan en su camino y, por consiguiente, puede esquivarlos, y que en todo momento está bajo el control de un programa de cómputo que le indica la ruta a seguir.

La navegación de un robot móvil es un problema difícil de resolver, muy diferente a como parece serlo en las películas de ciencia-ficción, en las cuales mecanismos similares se mueven con precisión sin ningún esfuerzo. De hecho, esta área de la robótica es una de las que se considera más importantes dentro del campo de la inteligencia artificial.

El problema de la navegación de un robot móvil se puede circunscribir a la resolución de las siguientes preguntas: *¿Dónde estoy?* *¿Adónde voy?* y *¿Cómo puedo hacer esto último?* (Leonard y Durrant-Whyte [1]). Es precisamente la primera pregunta la que establece el objetivo principal de este trabajo. La determinación de la ubicación del robot móvil es fundamental para resolver las dos preguntas siguientes. En trabajos afines, al proceso de determinación de la posición del robot se le conoce también como *localización*, aunque este concepto incluye no sólo el cálculo de su ubicación, sino también la determinación de la orientación que dicho robot tiene en el instante considerado.



Como antecedentes de este trabajo se pueden citar varios tipos diferentes de sistemas de localización de robots móviles. Según Borenstein, Everett y Feng [2], luego de analizar las diversas opciones de solución, una conclusión importante a la que se llega es que, a la fecha, realmente no existe aún una solución elegante para este problema.

Los mismos autores proponen dos grupos de sistemas de posicionamiento de robots móviles, dentro de los cuales se pueden clasificar las soluciones existentes: sistemas de medición de posición relativa, y sistemas de medición de posición absoluta; en los párrafos siguientes se describen cada uno de éstos, las diferentes derivaciones de ellos, así como las ventajas y desventajas principales que presentan.

## **1.1 SISTEMAS DE MEDICIÓN DE POSICIÓN RELATIVA**

Estos sistemas llevan a cabo la determinación de la posición del robot móvil con base en el conocimiento de su posición inicial, y a partir de él, calculan la posición instantánea por medio del conocimiento de las características cinemáticas de su movimiento, como son el número de revoluciones que ha dado cada uno de sus ejes motores, el ángulo que ha girado su eje de dirección, o bien, la magnitud de su aceleración, tanto lineal como angular. Como su nombre lo indica, este grupo de sistemas obtienen las coordenadas de posición del robot, relativas a la posición inicial con las que debe previamente alimentarse al sistema. Este grupo, a su vez, puede subdividirse en los siguientes subgrupos, que se presentan a continuación.

### **1.1.1 Sistema basado en un odómetro**

Se basa en la medición continua de la distancia recorrida y la dirección del movimiento del robot, por medio de sensores colocados en los ejes de sus ruedas motrices y en el eje de su motor de direccionamiento. Una ventaja que presenta este sistema es su independencia con respecto al entorno en el que navega el robot, por lo que no se requiere modificar su ambiente de trabajo, aunque la gran desventaja es que el error en el proceso se incrementa conforme avanza el robot.

Los errores que se generan en el cálculo de la posición del robot pueden ser de dos tipos: los sistemáticos, como los que se presentan debido a diferencias en los diámetros de las ruedas motoras o su falta de alineamiento; no sistemáticos, como los que se presentan cuando el robot se mueve en pisos irregulares o resbalosos.

Los errores sistemáticos son particularmente problemáticos ya que se acumulan constantemente, pero es igualmente fácil su prevención y corrección, por medio de mediciones precisas de su comportamiento, el uso de codificadores montados sobre ruedas no motoras, o la calibración cuidadosa del robot.

Para el caso de los errores no sistemáticos, el problema es que aparecen inesperadamente, por lo que se dificulta su estimación para su compensación posterior. Muchos investigadores se han abocado al problema de la estimación de los errores no sistemáticos en el funcionamiento de robots móviles, con el objeto de proponer métodos para la reducción de aquéllos.

El sistema basado en un odómetro es empleado en la mayoría de los sistemas de navegación de robots móviles, aunque es necesaria la actualización periódica de la posición absoluta, dada su naturaleza de incrementar el error con el transcurso del tiempo, lo que hace necesaria la utilización de algún sistema de medición de la posición absoluta.

### **1.1.2 Sistema inercial**

Emplea acelerómetros y giroscopios para obtener los valores de las aceleraciones a las que está sujeto el robot. Con este sistema se puede establecer indirectamente la distancia recorrida por el robot y la dirección de su movimiento, manipulando matemáticamente las magnitudes de las aceleraciones obtenidas. Este sistema presenta la desventaja adicional del alto costo de los sensores requeridos, y que el error en los valores de los datos calculados tiende a incrementarse con el tiempo, ya que como su obtención está basada en la integración de los valores medidos por los sensores, un pequeño error puede provocar que éste se dispare, luego del cálculo de la integral.

Actualmente se cuenta con giroscopios basados en láser<sup>1</sup> y fibra óptica, muy precisos y con precios considerablemente más bajos que los tradicionales, lo que ha hecho posible el empleo de esta técnica para muchas aplicaciones de robots móviles.

Los sistemas de navegación inercial, por sí mismos, son generalmente inadecuados para emplearse por periodos de tiempo que excedan de unos cuantos minutos. Sin embargo, puede proporcionar información precisa en intervalos de tiempo cortos, como los cambios de orientación durante las maniobras del robot. Asimismo, el uso de compensación por software mediante filtros de Kalman, puede mejorar significativamente la precisión de las mediciones de los cambios de dirección.

## 1.2 SISTEMAS DE MEDICIÓN DE POSICIÓN ABSOLUTA

Este grupo de sistemas se basa en el cálculo de las coordenadas del punto en donde está ubicado el robot, en un momento dado, por medio del reconocimiento de características particulares de su entorno en el que se está desplazando, como pueden ser marcas especiales colocadas ex profeso en el ambiente de trabajo, la distancia a las paredes del cuarto en el que navega, o la detección de características geométricas particulares del lugar en el que realiza su movimiento. La ventaja que presentan estos sistemas, con respecto a los de medición de la posición relativa es que el error está acotado en todo instante; empero, algunos de ellos presentan la desventaja de que requieren modificar las características del ambiente en el que operan. Los principales subgrupos se explican a continuación.

### 1.2.1 Sistemas con faros<sup>2</sup> activos

Su funcionamiento radica en el cálculo de la posición absoluta del robot, por medio de la medición de las distancias, o bien, el ángulo de incidencia de las señales de tres o más faros activos. Estos emisores por lo regular emplean ultrasonido, o señales de radio o de luz, y deben estar ubicados en posiciones conocidas dentro del entorno de trabajo.

---

<sup>1</sup> Radiación de emisión estimulada de luz amplificada, por la traducción del inglés de *light amplified stimulated emission radiation*.

<sup>2</sup> En la referencia [2] a la navegación con estos sistemas se le denomina *Active beacon navigation*, y cuya traducción directa al español es "Navegación con faros activos".

Estos sistemas proporcionan información muy precisa sobre la ubicación del robot, con muy poco procesamiento. Por tanto, son muy confiables y pueden funcionar con altas tasas de muestreo, sin implicar altos costos de instalación y mantenimiento. Presentan algunos inconvenientes, como es la necesidad de modificar el medio ambiente, el requerimiento de contactos eléctricos o baterías para alimentar a los faros estacionarios, y que para su correcto funcionamiento es necesario que estén libre de obstáculos las líneas entre los faros y el robot.

Pero por otro lado, los sistemas de faros activos han sido probados en la práctica, por lo que existen varios sistemas comerciales, los cuales emplean transductores láser, infrarrojos o ultrasónicos para su operación. Asimismo, estos sistemas son usualmente empleados cuando se requiere una alta precisión así como buena confiabilidad en la determinación de la posición del robot.

Se pueden citar dos tipos diferentes de sistemas con faros activos, los cuales se describen enseguida.

#### **1.2.1.1 Sistema de medición de los lados del triángulo<sup>3</sup>**

Este sistema se basa en la determinación de la posición del robot midiendo las distancias de éste a los faros fijos. Por lo regular este tipo de sistema usa tres o más transmisores colocados en posiciones conocidas en el ambiente de trabajo, y un receptor montado en el robot. Se emplea la información del *tiempo de vuelo*<sup>4</sup> que tarda la señal empleada en llegar de los transmisores estáticos al receptor a bordo. Dicho tiempo se traduce a distancias de los faros al robot, con las cuales geoméricamente se calcula su posición con respecto a una referencia fija en su espacio de funcionamiento, seleccionada de antemano.

#### **1.2.1.2 Sistema de medición de los ángulos del triángulo<sup>5</sup>**

En este caso, también se emplean tres o más transmisores activos colocados en posiciones conocidas en el entorno de operación del robot, el cual cuenta con un sensor giratorio que registra los ángulos a los que detecta las señales provenientes de los faros con respecto a su

---

<sup>3</sup> A este sistema se le denomina en inglés *Trilateration*.

<sup>4</sup> Por la traducción del inglés de *Time-of-flight*.

<sup>5</sup> En inglés, a este sistema se le conoce como *Triangulation*.

eje longitudinal. A partir de estos tres ángulos, es posible determinar las coordenadas de la posición en la que se encuentra dicho robot así como la orientación que tiene éste, con respecto a una referencia establecida previamente en su entorno de trabajo.

### **1.2.2 Sistema de reconocimiento de marcas artificiales**

Este sistema requiere de la colocación previa de marcas artificiales ubicados en posiciones conocidas, las cuales deben tener la característica de ser detectados con facilidad, incluso con condiciones ambientales adversas. De manera similar a los sistemas de faros activos, se requiere de la detección de tres o más de estas marcas para poder estimar la posición del robot. La desventaja de este sistema es que requiere, en general, de un procesamiento computacional intensivo, el cual muchas veces no es posible realizarlo en tiempo real y, además, el resultado obtenido no es muy preciso.

Las marcas pueden ser figuras geométricas, como rectángulos, líneas o círculos, y pueden incluir información adicional, en forma de código de barras, por ejemplo. Por lo regular dichas marcas tienen una posición fija y conocida, con respecto a la que el robot debe ser capaz de determinar la suya propia. Aquéllas deben ser fáciles de identificar, por lo que conviene que tengan el suficiente contraste con el fondo. Es necesario que sus características sean conocidas por el robot, registrándolas en la memoria de éste.

Para hacer uso del sistema citado, es necesario que se conozca aproximadamente la posición y orientación del robot, por lo cual se requiere un sistema basado en un odómetro preciso como prerrequisito para su funcionamiento correcto.

La detección de marcas artificiales es mucho más sencilla que en el caso del reconocimiento de marcas naturales, sistema que se aborda en los siguientes párrafos, puesto que se conocen de antemano tanto la medida como la forma de aquéllas. La información que se obtiene por medio de los sensores del robot, junto con el conocimiento de las mencionadas características, proporciona información geométrica de gran utilidad para la navegación del robot.

Los métodos para la detección de marcas artificiales están bastante desarrollados y son confiables. La distancia máxima que puede existir entre las marcas y el robot es sustancialmente más corta que con los sistemas de faros activos. La precisión del sistema

depende de la distancia y el ángulo entre el robot y la marca, de manera que es más impreciso mientras más alejado se encuentre el robot de la marca, o tenga un mayor ángulo con respecto a la normal a la superficie en el que ésta se encuentra. Las condiciones de iluminación son esenciales para su buen funcionamiento.

### **1.2.3 Sistema de reconocimiento de marcas naturales**

Su operación se fundamenta, como su nombre lo indica, en detectar las paredes, los límites del techo, o características naturales predeterminadas, por medio de sensores como pueden ser rastreadores infrarrojos basados en el defasamiento de la señal luminosa, el sonar, o la visión artificial. La ventaja que presenta este sistema es que no se requiere ninguna preparación adicional del entorno, aunque es menos confiable que el de marcas artificiales.

Las marcas naturales son aquellos objetos que se encuentran en el entorno de movimiento del robot, que tienen una función diferente al de su navegación, a diferencia de las marcas artificiales, que son objetos especialmente diseñados y colocados en el ambiente de funcionamiento de robot, con el solo propósito de habilitar su navegación.

El problema que se requiere resolver para la navegación con base en marcas naturales es la detección y verificación de correspondencia de sus características, a partir de las señales obtenidas con sus sensores, que por lo regular son sistemas de visión por computadora (*computer vision*). Con estos sistemas de visión artificial, se pretende detectar rectas verticales largas, como son los extremos laterales de las puertas o las esquinas de los cuartos, o bien objetos fácilmente identificables, como lo son las luces para iluminación en el techo.

Actualmente, la navegación con base en un sistema de reconocimiento de marcas naturales no está suficientemente desarrollada, lo cual implica una desventaja importante con respecto a los sistemas previamente explicados.

### **1.2.4 Sistema de reconocimiento basado en mapas**

Este sistema efectúa la comparación de las características del entorno que pudieron ser adquiridas por los sensores del robot, con un mapa o modelo total del medio ambiente. Es

capaz de determinar la posición absoluta sólo si las características detectadas del entorno corresponden a las del modelo total que posee el procesador del robot.

La determinación de la posición basado en mapas, es una técnica mediante la cual el robot crea un mapa de su ambiente local con el empleo de sus sensores, y lo compara con el mapa global que tiene grabado previamente en su memoria. Si es posible establecer una correspondencia significativa, entonces el robot es capaz de calcular la posición en la que se encuentra.

Sus principales ventajas son que: usa estructuras que ocurren naturalmente en un ambiente cerrado para determinar la posición del robot, sin necesidad de modificar su entorno; puede ser empleado para generar mapas actualizados en los ambientes de trabajo, los cuales son importantes para otras funciones del robot móvil, como la planeación de trayectorias; asimismo, permite al robot el aprendizaje de nuevos ambientes de operación, y mejorar la precisión en la determinación de su posición, por medio de la exploración de su entorno.

Algunas de las desventajas que presenta este sistema son que: requiere que las características a detectar sean fijas y fácilmente distinguibles, para ser empleadas con éxito; el mapa trazado por medio de los sensores debe ser preciso para ser útil; requiere un gran poder de procesamiento de datos, y de detección eficiente de los sensores; actualmente se encuentra aún en su etapa de investigación; además, requiere de una estimación inicial de la posición a partir de un sistema basado en un odómetro, con objeto de limitar la búsqueda inicial de características a un área pequeña, dentro de su ambiente de trabajo.

### **1.3 TEMA Y OBJETIVO DE LA TESIS**

Luego de analizar los diferentes sistemas para la determinación de la posición de un robot móvil descritos en los párrafos anteriores, se observó que uno de los que tiene mayor confiabilidad y que puede lograr una buena precisión es el sistema con faros activos, de los cuales, se percibe que el denominado sistema de medición de los lados de un triángulo, es posible diseñarlo con muy bajo costo, sin menoscabo de la precisión y el buen desempeño deseados.

Es por ello que se planteó como tema de este trabajo la *Determinación de la posición de un robot móvil con el uso de emisores ultrasónicos*. **El objetivo que se persigue es diseñar un sistema basado en tres emisores o faros ultrasónicos, colocados en lugares fijos en el área en que navega el robot, tal que sea capaz de proporcionar a éste la información de su posición en dicha área, con la mayor precisión y confiabilidad posibles, para lo cual es necesario determinar la configuración óptima de la posición y orientación de dichos emisores, y de la manera más eficiente.**

## 1.4 METODOLOGÍA Y CONTENIDO DEL TRABAJO

Para el diseño del sistema de determinación mencionado, se requiere que el robot tenga a bordo un micrófono con el cual sea capaz de recibir las señales ultrasónicas de los tres emisores, y posteriormente procesar la información acústica recibida de tal forma que se pueda discriminar el instante en que llegan a dicho micrófono cada una de las señales de los tres faros. Con esta información, el sistema debe calcular la distancia a la que se encuentra el micrófono de cada faro, y con estos valores determinar la posición que se encuentra el robot con respecto a un marco de referencia previamente establecido en su área de navegación.

La señal acústica puede ser procesada con facilidad con el empleo de un procesador digital de señales, o *DSP*<sup>6</sup> por sus siglas en inglés, en el que se pueden implementar filtros digitales que sean capaces de reconocer las señales generadas por los emisores ultrasónicos.

Asimismo, es necesario establecer algún algoritmo con el cual sea posible calcular la posición del micrófono, conocidas las distancias de éste a cada uno de los emisores. Además, dado que el ambiente en el que navega el robot puede ser ruidoso, y que el sistema que se proponga es susceptible de errores, se tiene la necesidad de establecer la naturaleza de los errores que se produzcan, para considerarla en la búsqueda de la mejor opción que logre la determinación de la posición del robot con la mayor eficiencia y el menor error.

Luego de que se haya diseñado y construido el sistema objeto de este trabajo, y que se haya establecido la opción para la cual su operación sea la idónea, se procede a verificar su funcionamiento, con base en mediciones de sus principales parámetros de operación, como

---

<sup>6</sup> *Digital Signal Processor.*



pueden ser el error medio cuadrático generado por el sistema, y el tamaño del área de navegación en la que el robot sea capaz de determinar su posición; además, se efectúa una crítica cualitativa del funcionamiento del dispositivo propuesto, con la finalidad de proponer modificaciones que puedan realizarse a futuro para mejorar su desempeño.

Dada la metodología planteada en este apartado, se procede a la revisión de los elementos teóricos para el diseño del sistema en el Capítulo 2, con base en los cuales se pueda realizar el desarrollo de las propuestas para la determinación de la posición del robot, que se aborda en el Capítulo 3.

En el Capítulo 4 se presentan los resultados de la puesta en operación del sistema diseñado, en la que se modela matemáticamente la función de error generado por el dispositivo, y con base en la cual se procede a plantear el proceso por medio del cual es posible determinar la mejor configuración de los elementos de dicho sistema de manera que su funcionamiento sea óptimo.

Finalmente, se comparan los resultados obtenidos con el objetivo planteado en este trabajo en el Capítulo 5, de tal manera que se puedan establecer las conclusiones más importantes, así como las recomendaciones que puedan darse para mejorar el sistema propuesto.

## CAPÍTULO 2

# ANÁLISIS DE LOS ELEMENTOS TEÓRICOS PARA EL DISEÑO DEL SISTEMA

En este capítulo se revisan los elementos que se emplearon en el diseño y desarrollo del sistema de determinación de la posición de un robot móvil. En primer lugar se aborda al *DSP*, y se explica con detalle el procesador *DSP56002* de *Motorola*; en seguida se presenta un breve panorama sobre la teoría del filtro digital, en el que se propone como resultado adicional de este trabajo, una metodología sencilla para la obtención de su función de transferencia; al final se efectúa el análisis de algunos aspectos importantes que tiene el sonido para el diseño de este sistema.

### 2.1 PROCESADOR DIGITAL DE SEÑALES

Un procesador digital de señales, o *DSP*, es un microprocesador electrónico especialmente diseñado para realizar eficientemente la multiplicación y la suma de números, que son las operaciones aritméticas básicas que se requieren para el procesamiento de señales digitales.

La arquitectura interna del *DSP* es el resultado de la optimación del tiempo y de la complejidad en la aplicación al procesamiento digital de señales. El origen de esta función es la ejecución de operaciones básicas similares a la siguiente:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} a(i)x(n-i) \quad (2.1)$$

para ello se requiere la multiplicación de los números  $a(i)$  y  $x(n-i)$ , y posteriormente sumar el resultado con lo que se lleva acumulado, para finalmente obtener  $y(n)$ .

Las características más importantes que debe tener un microprocesador para el procesamiento digital de señales son las que se describen a continuación.

- 1 Debe tener una multiplicación y acumulación rápida, en forma paralela.
- 2 Debe tener un tamaño adecuado de palabra, para lograr buena precisión aritmética.
- 3 Debe tener una memoria *RAM*<sup>1</sup> de alta velocidad de acceso.
- 4 Debe ser capaz de realizar direccionamiento eficiente de tablas, ya que frecuentemente requiere de coeficientes constantes.
- 5 Debe efectuar las operaciones de forma paralela, y un mecanismo eficiente para cargar datos e instrucciones simultáneamente.

Para el sistema que se desarrolló en este trabajo, se seleccionó el circuito *DSP56002* de *Motorola*, debido a su facilidad de operación, a su buena velocidad de procesamiento (hasta 80 MHz), y a la precisión numérica que proporciona, basado en un acumulador de 56 bits.

### 2.1.1 El *DSP56002* de *Motorola*

El *DSP56002* es un procesador digital de señales de 24 bits con aritmética de punto fijo, diseñado con tecnología *HCMOS*<sup>2</sup> de bajo consumo de energía. El dispositivo está conformado por tres unidades de ejecución que funcionan de manera independiente y paralela: la unidad lógica y aritmética o *ALU*<sup>3</sup>, la unidad generadora de direcciones o *AGU*<sup>4</sup>, y la unidad de control de programa o *PCU*<sup>5</sup>. Está diseñado con arquitectura *Harvard* doble, por lo que cuenta con cuatro buses de 24 bits: dos buses independientes para datos, uno para instrucciones de programa y uno de datos globales, con los cuales en un solo ciclo de

---

<sup>1</sup> Memoria de Acceso Aleatorio, o *Random Access Memory*, por sus siglas en inglés.

<sup>2</sup> Semiconductor de Óxido Metálico, Complementario de Alta Velocidad, o *High speed Complementary Metal Oxide Semiconductor*.

<sup>3</sup> Por las siglas en inglés de *Arithmetic Logic Unit*.

<sup>4</sup> Por las siglas en inglés de *Address Generation Unit*.

<sup>5</sup> Por las siglas en inglés de *Program Control Unit*.

instrucción permite el acceso simultáneo de dos números y el código de la instrucción subsiguiente (El-Sharkawy [3]).

Las componentes más importantes del núcleo del *DSP56002* se muestran en la Figura 2.1, e incluyen:

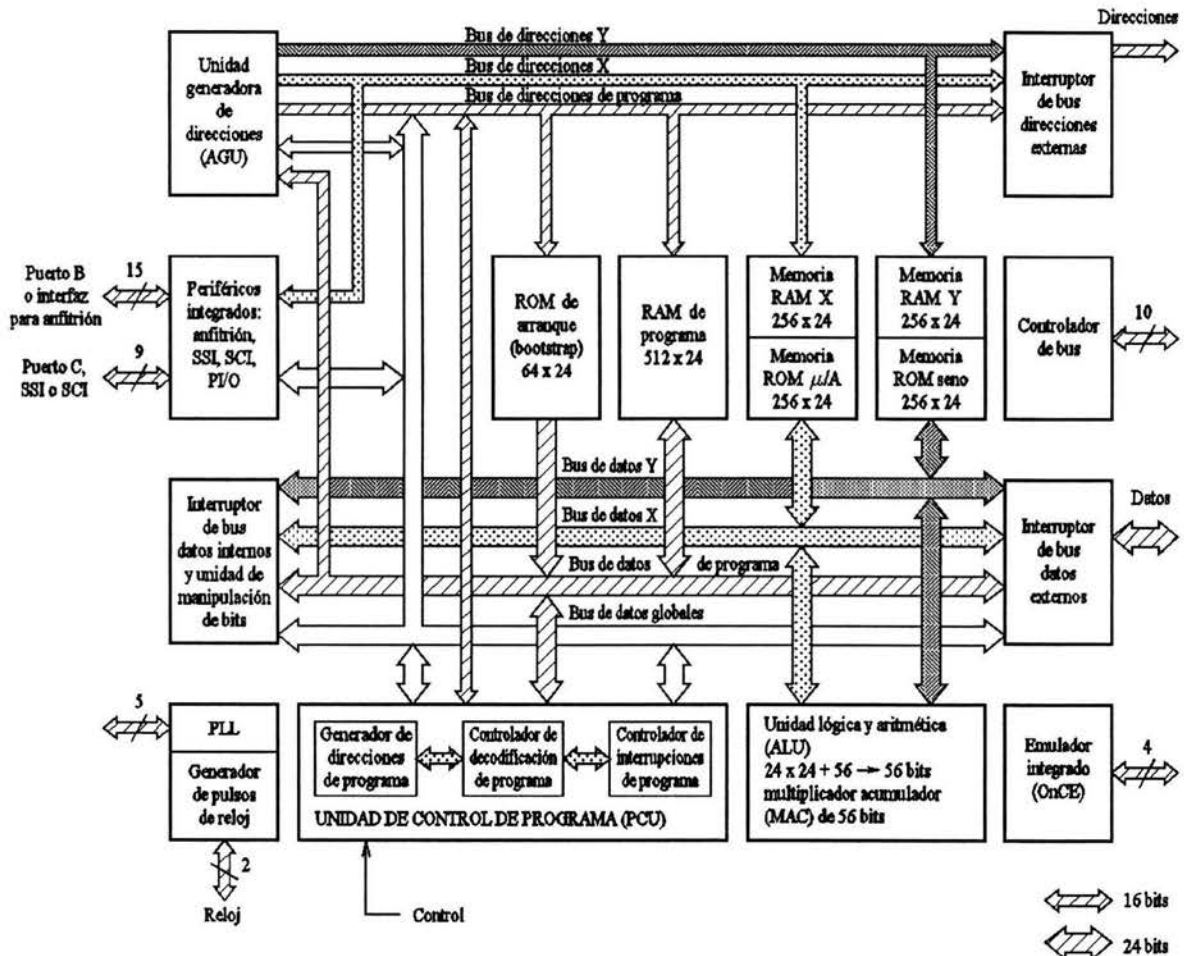


Figura 2.1 Diagrama de bloques del DSP56002.

- 1 Tres unidades de ejecución independientes:
  - a) La unidad lógica y aritmética de datos o *ALU*,
  - b) La unidad generadora de direcciones o *AGU*, y
  - c) La unidad de control de programa o *PCU*.
- 2 Cuatro buses independientes de datos de 24 bits:
  - a) El bus de datos X o *XDB*,

- b) El bus de datos Y o *YDB*,
  - c) El bus de datos de programa o *PDB*, y
  - d) El bus de datos globales o *GDB*.
- 3 Tres buses independientes de direcciones de 16 bits:
- a) El bus de direcciones X o *XAB*,
  - b) El bus de direcciones Y o *YAB*, y
  - c) El bus de direcciones de programa o *PAB*.
- 4 Un puerto A de expansión de memoria.
- 5 Un circuito emulador integrado u *OnCE*<sup>6</sup>.
- 6 Circuito de reloj basado en un *PLL*<sup>7</sup>

Las características principales del núcleo del *DSP* incluyen:

- 1 40 millones de instrucciones por segundo, o *MIPS*<sup>8</sup>, a 80 MHz.
- 2 240 millones de operaciones por segundo, o *MOPS*<sup>9</sup>, a 80 MHz.
- 3 Conjunto de instrucciones de procesamiento altamente paralelo, con modos de direccionamiento único para *DSP*.
- 4 Operación de multiplicación-acumulación de 24 x 24 bits paralelo en un ciclo de instrucción (dos ciclos de reloj).
- 5 Instrucción *DO*<sup>10</sup> de ciclos anidados con sobrepaso nulo.
- 6 Interrupciones rápidas con autorregreso.
- 7 Diseño *HCMOS* con muy bajo consumo de energía.
- 8 Modos de espera *STOP*<sup>11</sup> y *WAIT*<sup>12</sup> de baja energía.

---

<sup>6</sup> Por las siglas en inglés de *On Chip Emulator*.

<sup>7</sup> Circuito de Captura de Fase, por las siglas en inglés de *Phase-Locked Loop*.

<sup>8</sup> Por las siglas en inglés de *Million Instructions Per Second*.

<sup>9</sup> Por las siglas en inglés de *Million Operations Per Second*.

<sup>10</sup> La instrucción *DO*, cuya traducción literal es *hacer*, implica la repetición de un conjunto de instrucciones común, mientras se cumpla una condición, o bien, una serie de condiciones, preestablecidas.

<sup>11</sup> La instrucción *STOP*, o *detenerse* en español, detiene temporalmente la ejecución del programa.

Las componentes principales del área de expansión son:

- 1 Una *RAM* de programa, con 512 palabras de 24 bits.
- 2 Dos *RAM* de datos, con 256 palabras de 24 bits cada una.
- 3 Dos *ROM*<sup>13</sup> de datos, pregrabados, una con las tablas de las leyes A y  $\mu$ , la otra y con la tabla del seno trigonométrico, con 256 palabras de 24 bits cada una.
- 4 Una interfaz para anfitrión (*host*), con ancho de un byte, con soporte de *DMA*<sup>14</sup>.
- 5 Un puerto para la interfaz serial síncrona.
- 6 Un puerto para la interfaz de comunicación serial, asíncrona.

### 2.1.2 La unidad lógica y aritmética del *DSP56002*

La unidad lógica y aritmética contiene cuatro registros de entrada de 24 bits cada uno, denominados X0, X1, Y0 y Y1, y dos acumuladores de 56 bits, A y B, con tres registros cada uno, además del módulo de multiplicación de 24 x 24 bits y acumulación de 56 bits, o *MAC*, y dos módulos de corrimiento, uno de ellos con circuito limitador integrado, como se muestra en la Figura 2.2.

Además, se puede observar que el *ALU* del *DSP56002* cuenta con dos buses independientes de datos de 24 bits, e internamente dos buses también independientes de 56 bits, incluyendo uno de ellos un registro de corrimiento. Es por ello que este procesador es capaz de efectuar la multiplicación de dos números de 24 bits y sumar el resultado con el contenido del acumulador, en una sola instrucción.

---

<sup>12</sup> La instrucción *WAIT*, que se traduce como *esperar*, suspende la ejecución del programa en espera de una interrupción del circuito electrónico (*hardware*).

<sup>13</sup> Memoria de Solo Lectura, o *Read Only Memory*, por sus siglas en inglés.

<sup>14</sup> Acceso directo a memoria, o *Direct Memory Access*, por sus siglas en inglés.

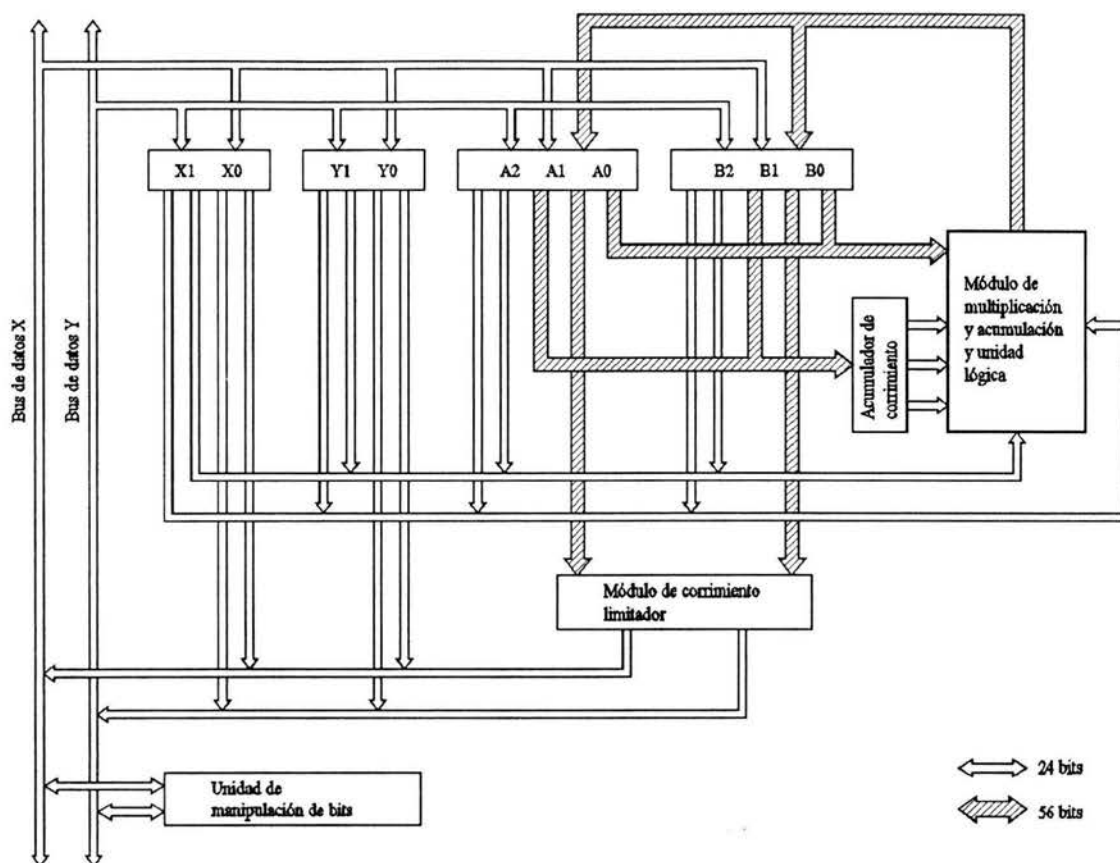


Figura 2.2 Diagrama de bloques de la unidad lógica y aritmética del DSP56002.

### 2.1.3 La unidad generadora de direcciones del DSP 56002

Una de las unidades más importantes del *DSP56002* es la unidad generadora de direcciones, la cual funciona de manera completamente independiente, y cuya función es generar las direcciones para ubicar los operandos de los datos, tanto en la memoria X como en la memoria Y y la memoria de programa. Proporciona catorce diferentes modos de direccionamiento y es capaz de emplear tres tipos diferentes de aritmética para generación de direcciones. Sus componentes principales son: 24 registros de direccionamiento de 16 bits cada uno, dos *ALU* para el cálculo de direcciones y tres multiplexores para salida de direcciones. En la Figura 2.3 se muestra el diagrama de esta unidad.

Cada registro para direcciones  $R_n$  tiene un registro de desplazamiento asociado  $N_n$  y un registro modificador asociado  $M_n$ , los tres con el mismo número  $n$ . Los registros para direcciones  $R_n$  son usados como apuntadores de direcciones para ubicar los operandos de

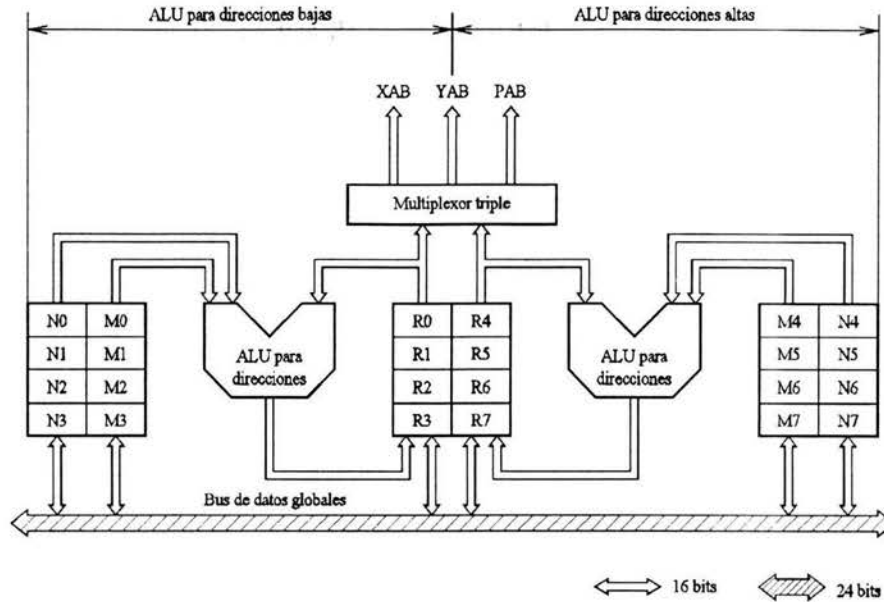


Figura 2.3 Unidad generadora de direcciones.

datos en la memoria. Los registros de desplazamiento  $N_n$  son empleados para proporcionar el valor de desplazamiento para actualizar el valor de los registros para direccionamiento. Los registros modificadores  $M_n$  sirven para elegir el tipo de aritmética para generación de direcciones a ser ejecutada cuando un registro para direcciones es actualizado.

Existen tres tipos de aritmética para generación de direcciones: lineal, módulo y acarreo en reversa. La aritmética para generación de direcciones lineal es empleada para el direccionamiento estándar. La aritmética tipo módulo es útil para apoyar sistemas circulares de direccionamiento, de manera que el valor del registro para direccionamiento se mantenga en un cierto rango limitado por una dirección baja y una alta. La aritmética de acarreo en reversa es útil para ordenar los datos en aplicaciones como el de la transformada rápida de *Fourier*.

Las características peculiares que tienen tanto la unidad lógica y aritmética como la unidad generadora de direcciones de los procesadores digitales de señales, son las razones principales por las cuales estos procesadores se distinguen de otros dispositivos similares, pues están orientados a la resolución de problemas en los que se requiere el manejo de señales discretas en el tiempo, de donde adquieren precisamente su nombre.



## 2.2 FILTROS

Se conoce como filtro a aquel dispositivo que es capaz de dejar pasar o no, los objetos que se presentan en su entrada, dependiendo de algunas características particulares de dichos objetos. Para el caso de las señales electromagnéticas o acústicas, los atributos que por lo regular sirven como discriminantes son sus componentes de frecuencia.

El filtro es una clase particularmente importante de sistema de procesamiento de señales lineal e invariante en el tiempo, que realiza un tipo de discriminación o filtrado entre los diferentes componentes en frecuencia que se tienen en su entrada. La naturaleza de esta acción de filtrado está determinada por las características de respuesta en frecuencia del sistema,  $H(s)$ , que a su vez depende de los parámetros del sistema seleccionado, es decir, los coeficientes  $\{a_k\}$  y  $\{b_k\}$ <sup>15</sup> en la ecuación diferencial que caracteriza a dicho sistema. Entonces, por medio de la selección adecuada de estos coeficientes, se pueden diseñar filtros para selección de frecuencias, que dejen pasar señales con componentes de frecuencia en algunas bandas, mientras que atenúan las señales que contienen otros componentes de frecuencia (Proakis y Manolakis [4]).

Dado que los sistemas digitales se han convertido en una poderosa herramienta para el procesamiento de señales, en la actualidad se les emplea ampliamente para aplicaciones de filtrado de señales de frecuencia baja y media. Como en este trabajo se requiere discriminar señales acústicas, éstas son factibles de abordarse con un sistema de procesamiento digital de señales.

Existen dos clases de filtros digitales: de respuesta a impulso infinita, o *IIR*<sup>16</sup>, para las cuales, la función de respuesta a impulso  $h[n]$  tiene un número infinito de sumandos; de respuesta a impulso finita, o *FIR*<sup>17</sup>, para las cuales, consecuentemente, la función de respuesta a impulso  $h[n]$  tiene un número de sumandos finito (Oppenheim y Schaffer [5]).

Los filtros *FIR* se emplean comúnmente en aplicaciones en los que se requiere de una respuesta en frecuencia con condiciones de fase lineal en la banda de paso, además de que

<sup>15</sup> Un filtro analógico puede ser modelado matemáticamente por medio de la ecuación diferencial

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^{(k)} y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^{(k)} x(t)}{dt^k}; \{a_k\} \text{ y } \{b_k\} \text{ se refiere a los coeficientes de esta ecuación.}$$

<sup>16</sup> Por las siglas en inglés de *Infinite Impulse Response*.

<sup>17</sup> Por las siglas en inglés de *Finite Impulse Response*

son estables y poco sensibles a los cambios en los parámetros. Para el caso de los filtros *IIR*, aunque no tienen una respuesta de fase lineal, son más sensibles a los cambios en los parámetros del filtro y en ocasiones presentan problemas de estabilidad, logran un mejor desempeño con mucho menor número de parámetros, por lo que requieren menos memoria y menos tiempo de procesamiento que los filtros *FIR*, y los hace ideales para aplicaciones en tiempo real. Debido a lo anterior, para este trabajo se decidió usar filtros *IIR*.

El diseño de filtros digitales involucra las siguientes etapas: primero, se requieren especificar las propiedades deseadas del sistema; luego, se procede a la obtención de una aproximación a dichas especificaciones usando un sistema causal y discreto; finalmente, se lleva a cabo la construcción del sistema.

El diseño de filtros *IIR* discretos en el tiempo involucra la transformación de un filtro analógico a un filtro digital que cumpla con las especificaciones previamente establecidas, debido a la gran cantidad de literatura existente que contiene la descripción de métodos de síntesis de filtros analógicos. Se cuenta con tres tipos principales de filtros analógicos: de *Butterworth*, de *Chebyshev* y *Elípticos*.

El filtro de *Butterworth*, comparativamente con el de *Chebyshev* y el *Elíptico*, tiene características menos favorables de error<sup>18</sup>, pero por su simplicidad de diseño, es el que más frecuentemente se selecciona para aplicaciones que no tengan especificaciones muy particulares. Es justamente el caso de este trabajo, por lo que se hará uso de él.

### 2.2.1 Transformación de un filtro analógico paso-bajas a un filtro digital de cualquier tipo

A partir de la función de transferencia analógica del filtro paso-bajas, en el dominio de la variable compleja  $s$ , es posible obtener la correspondiente función de transferencia discreta, en el dominio de la variable  $z$ , para cualquier tipo de filtro, ya sea paso-bajas con otra frecuencia de corte, paso-bandas, paso-altas o supresor de banda, usando la transformación

---

<sup>18</sup> El filtro tipo *Chebyshev* distribuye el error uniformemente en la banda de paso, o bien, en la banda de supresión, aunque tiene un comportamiento denominado de igual rizo (*equiripple*) en la banda correspondiente. Esto usualmente hace que para determinadas especificaciones, el orden del filtro sea menor que el tipo *Butterworth*. Con respecto al filtro tipo *Elíptico*, es la mejor aproximación de las tres mencionadas con respecto a la distribución del error, pues lo hace tanto en la banda de paso como en la de supresión, con el consiguiente comportamiento de igual rizo en ambas bandas.

*bilineal* y expresiones de transformación desde el prototipo de filtro digital paso-bajas con frecuencia de corte  $\theta_c$  (Oppenheim y Schafer [5]).

Por ejemplo, si se requiere un filtro digital paso-bandas tipo *Butterworth* de cuarto orden, con frecuencias de corte inferior  $f_L = 19\ 500$  Hz y superior  $f_U = 20\ 500$  Hz, para los cuales la atenuación máxima sea de  $k_1 = -3.01$  dB, con frecuencias límite de las bandas de supresión inferior  $f_1 = 19\ 000$  Hz y superior  $f_2 = 21\ 000$  Hz, para los cuales la atenuación mínima sea de  $k_2 = -20$  dB, y considerando la frecuencia de muestreo del *DSP56001* de *Motorola* de  $f_s = 48\ 000$  Hz, se puede proceder como se describe a continuación.

- 1 Se determina la frecuencia de la banda de supresión del filtro paso-bajas equivalente (El-Sharkawy [3]), con base en la expresión:

$$\Omega_r = \min \left[ \left| \frac{\Omega_U \Omega_L - \Omega_1^2}{\Omega_1 (\Omega_U - \Omega_L)} \right|, \left| \frac{\Omega_2^2 - \Omega_U \Omega_L}{\Omega_2 (\Omega_U - \Omega_L)} \right| \right] \quad (2.2)$$

Es importante señalar que las frecuencias deben ser *predeformadas* previamente, con base en la expresión:

$$\Omega_i = \frac{2}{T} \tan \left( \frac{\omega_i}{2} \right) \quad (2.3)$$

donde

$$\omega_i = \frac{2\pi f_i}{f_s} \quad (2.4)$$

Entonces, realizando las operaciones arriba mostradas, se pueden obtener los siguientes valores de frecuencias *predeformadas*, considerando  $T = 1$  s:

$$\Omega_1 = 2 \tan \left[ \frac{2\pi(19\ 000)}{2(48\ 000)} \right]$$

$$\Omega_1 = 5.8918100 \text{ rad/s}$$

de manera similar, se obtienen:

$$\Omega_L = 6.5931164 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_U = 8.5775322 \text{ rad/s}$$

$$\Omega_2 = 10.054679 \text{ rad/s}$$

de los cuales se calcula la frecuencia límite de la banda de supresión  $\Omega_r$ :

$$\left| \frac{\Omega_U \Omega_L - \Omega_1^2}{\Omega_1 (\Omega_U - \Omega_L)} \right| = \left| \frac{(8.5775322)(6.5931164) - (5.8918100)^2}{(5.8918100)(8.5775322 - 6.5931164)} \right|$$

$$\left| \frac{\Omega_U \Omega_L - \Omega_1^2}{\Omega_1 (\Omega_U - \Omega_L)} \right| = 1.8679110$$

$$\left| \frac{\Omega_2^2 - \Omega_U \Omega_L}{\Omega_2 (\Omega_U - \Omega_L)} \right| = \left| \frac{(10.054679)^2 - (8.5775322)(6.5931164)}{(10.054679)(8.5775322 - 6.5931164)} \right|$$

$$\left| \frac{\Omega_2^2 - \Omega_U \Omega_L}{\Omega_2 (\Omega_U - \Omega_L)} \right| = 2.2324789$$

$$\Omega_r = \min[1.8679110, 2.2324789]$$

por tanto:

$$\Omega_r = 1.8679110 \text{ rad/s}$$

- 2 Se considera el filtro paso-bajas prototipo, para el cual la frecuencia de corte es  $\Omega_c = 1 \text{ rad/s}$ . Aplicando la expresión A.11, cuya deducción se muestra en el Apéndice:

$$n = \left\lceil \frac{\log_{10} \left( \frac{10^{-\left(\frac{k_1}{10}\right)} - 1}{10^{-\left(\frac{k_2}{10}\right)} - 1} \right)}{2 \log_{10} \left( \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \right)} \right\rceil$$

para el cual  $\Omega_1$  es  $\Omega_c$ , y  $\Omega_2$  es  $\Omega_r$ , se calcula el orden del filtro:

$$n = \left\lceil \frac{\log_{10} \left( \frac{10^{-\left(\frac{-3.01}{10}\right)} - 1}{10^{-\left(\frac{-20}{10}\right)} - 1} \right)}{2 \log_{10} \left( \frac{1}{1.8679110} \right)} \right\rceil$$

$$n = \lceil 3.6772614 \rceil$$

por tanto, el orden del filtro será:

$$n = 4$$

- 3 A la función de transferencia analógica del filtro paso-bajas tipo *Butterworth* de cuarto orden:

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.76536686s + 1)(s^2 + 1.84775906s + 1)}$$

se le aplica la transformación *bilinear*  $s = \frac{2(1-z^{-1})}{T(1+z^{-1})}$ , considerando  $T = 1$  s y

$\Omega_c = 1$  rad/s y al simplificar queda:

$$H(z) = \frac{0.017609352(1+z^{-1})^4}{1-1.6087453z^{-1}+1.3151789z^{-2}-0.50437692z^{-3}+0.079692996z^{-4}} \quad (2.5)$$

Los antecedentes se pueden revisar en el Apéndice.

- 4 A esta última expresión se le aplica la transformación desde el prototipo de filtro digital paso-bajas con frecuencia de corte  $\theta_c$ , a filtro digital paso-bandas:

$$Z^{-1} = -\frac{\frac{k-1}{k+1} - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} - z^{-2}}{1 - \frac{2\alpha k}{k+1} z^{-1} + \frac{k-1}{k+1} z^{-2}} \quad (2.6)$$

donde

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{p2} + \omega_{p1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right)} \quad (2.7)$$

y

$$k = \cot\left(\frac{\omega_{p2} - \omega_{p1}}{2}\right) \tan\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \quad (2.8)$$

con

$$\omega_{p1} = \frac{2\pi f_1}{f_s} \quad (2.9)$$

$$\omega_{p2} = \frac{2\pi f_2}{f_s} \quad (2.10)$$

las cuales, considerando las especificaciones del filtro quedan:

$$\omega_{p1} = 2.5525440 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{p2} = 2.6834437 \text{ rad/s}$$

y dado que  $T = 1 \text{ s}$  y  $\Omega_c = 1 \text{ rad/s}$ , y además

$$\Omega_c = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\theta_c}{2}\right) \quad (2.11)$$

entonces :

$$\theta_c = 2 \text{ áng} \tan\left(\frac{\Omega_c}{2}\right) \quad (2.12)$$

$$\theta_c = 0.92729521 \text{ rad/s}$$

de donde sustituyendo en las expresiones (2.7) y (2.8):

$$\alpha = -0.86788361$$

y

$$k = 7.6285255$$

Luego, sustituyendo estos dos últimos valores en la expresión (2.6):

$$Z^{-1} = -\frac{0.76821069 + 1.5346011z^{-1} + z^{-2}}{1 + 1.5346011z^{-1} + 0.76821069z^{-2}}$$

la cual al sustituirla finalmente en la función de transferencia del filtro digital paso-bajas (2.9), la expresión para el filtro digital paso-bandas queda:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4} + b_5z^{-5} + b_6z^{-6} + b_7z^{-7} + b_8z^{-8}}{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + a_4z^{-4} + a_5z^{-5} + a_6z^{-6} + a_7z^{-7} + a_8z^{-8}} \quad (2.13)$$

donde:

$$b_0 = 1.5551729 \times 10^{-5}$$

$$a_0 = 1$$

$$b_1 = 0$$

$$a_1 = 6.6463057$$

$$b_2 = -6.2206917 \times 10^{-5}$$

$$a_2 = 20.233177$$

$$b_3 = 0$$

$$a_3 = 36.640198$$

$$b_4 = 9.3310376 \times 10^{-5}$$

$$a_4 = 43.073047$$

$$\begin{aligned} b_5 &= 0 & a_5 &= 33.633965 \\ b_6 &= -6.2206917 \times 10^{-5} & a_6 &= 17.049286 \\ b_7 &= 0 & a_7 &= 5.1410370 \\ b_8 &= 1.5551729 \times 10^{-5} & a_8 &= 0.71010444 \end{aligned}$$

En la Figura 2.4 se muestran las gráficas de la respuesta en frecuencia del filtro diseñado.

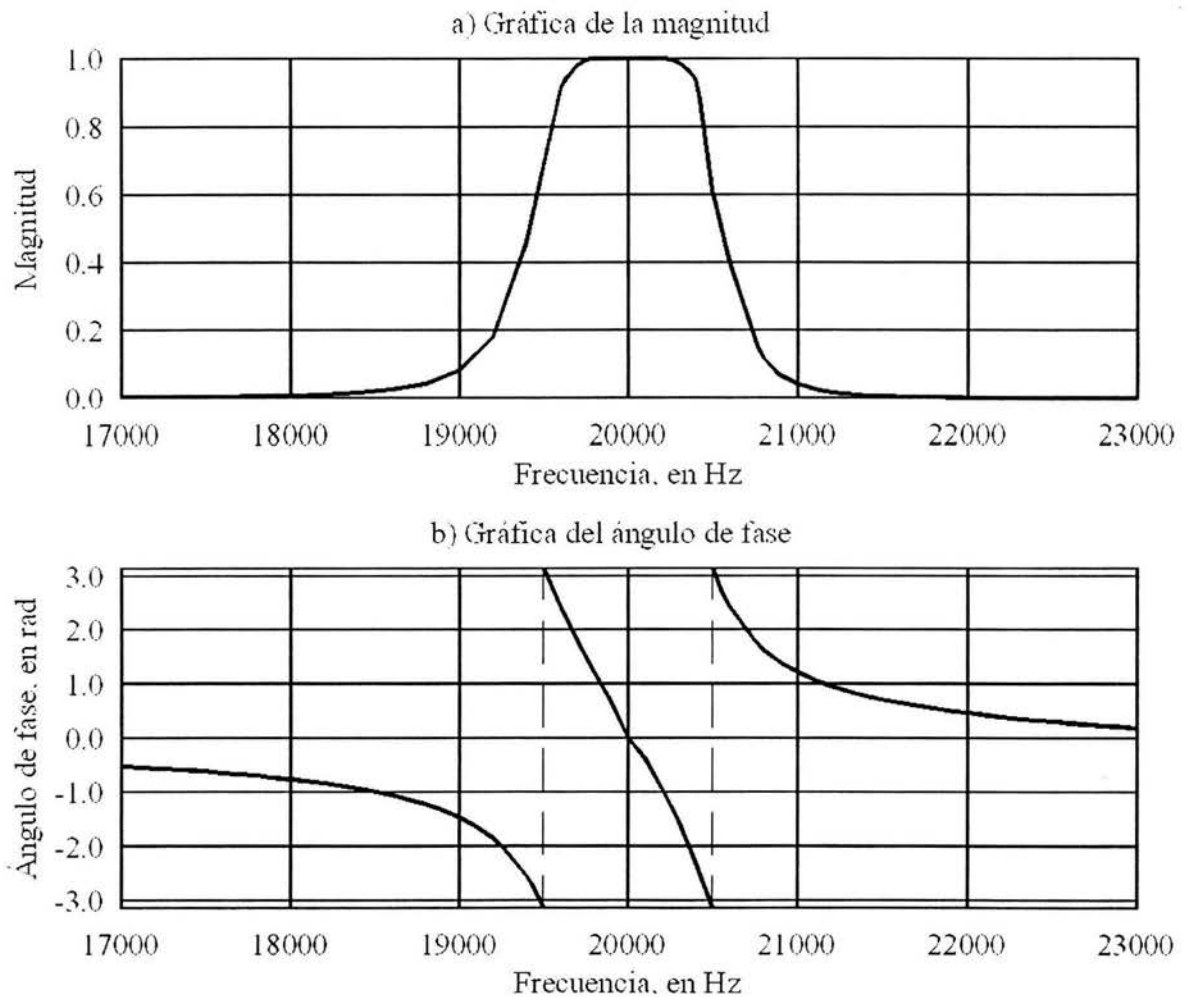


Figura 2.4 Respuesta en frecuencia del filtro paso-bandas tipo Butterworth de cuarto orden. (a) Magnitud. (b) Ángulo de fase.

### 2.2.2 Metodología propuesta para la transformación de un filtro analógico paso-bajas a un filtro digital de cualquier tipo

Existe otra forma para realizar la transformación de la función de transferencia analógica del filtro paso-bajas prototipo, a la función de transferencia discreta  $H(z)$  del filtro paso-bandas, la cual consiste en aplicar primero la transformación de la función de transferencia analógica del filtro paso-bajas a la del filtro paso-bandas también analógica, mediante la expresión de transformación:

$$S = \Omega_c \frac{s^2 + \Omega_L \Omega_U}{s(\Omega_U - \Omega_L)} \quad (2.14)$$

y posteriormente aplicar la transformación *bilineal* a la expresión obtenida, para establecer la función de transferencia discreta requerida (Proakis y Manolakis [4]).

Sin embargo, Bogner y Constantinides [6] sugieren que en lugar de realizar la doble transformación, es posible obtener con una sola transformación, a partir de la expresión analógica para el filtro paso-bajas prototipo, la función de transferencia para un filtro digital de cualquier otro tipo.

Para el caso de un filtro paso-bandas, se puede emplear la transformación:

$$s = k \cdot \frac{1 - 2\alpha z^{-1} + z^{-2}}{1 - z^{-2}} \quad (2.15)$$

La inclusión de la constante  $k$  elimina la necesidad del procedimiento de predeformación, como se muestra a continuación. Considérense el filtro analógico paso-bajas con una frecuencia de corte  $\Omega_c$ , así como las frecuencias de corte superior e inferior deseadas del filtro digital paso-bandas  $\omega_2$  y  $\omega_1$ , respectivamente. Entonces, cuando  $z^{-1} = \exp(-j\omega T)$ , es decir, cuando  $z^{-1}$  varía sobre la circunferencia unitaria, se tiene:

$$\Omega = k \cdot \frac{\alpha - \cos(\omega T)}{\sin(\omega T)} \quad (2.16)$$

por lo que el punto  $\Omega = 0$  corresponde al punto:

$$\omega = \frac{1}{T} \text{áng} \cos(\alpha) \quad (2.17)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia central de la banda de paso.



Además,

$$-\Omega_c = k \cdot \frac{\alpha - \cos(\omega_1 T)}{\sin(\omega_1 T)} \quad (2.18)$$

$$\Omega_c = k \cdot \frac{\alpha - \cos(\omega_2 T)}{\sin(\omega_2 T)} \quad (2.19)$$

por lo que a partir de (2.18) y (2.19) luego de simplificar se obtiene:

$$\alpha = \frac{\cos\left(\frac{\omega_2 T + \omega_1 T}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_2 T - \omega_1 T}{2}\right)} \quad (2.20)$$

$$k = \Omega_c \cot\left(\frac{\omega_2 T - \omega_1 T}{2}\right) \quad (2.21)$$

Entonces, aplicando esta transformación resulta:

$$\alpha = -0.86788361$$

$$k = 15.257051$$

por lo que la expresión de transformación (2.15) queda:

$$s = \frac{15.257051(1 + 1.7357622z^{-1} + z^{-2})}{1 - z^{-2}} \quad (2.22)$$

la cual, sustituyéndola en la función de transferencia del filtro analógico paso-bajas, la expresión para el filtro digital paso-bandas tipo *Butterworth* de cuarto orden, con frecuencias de corte inferior  $f_L = 19\,500$  Hz y superior  $f_U = 20\,500$  Hz, para los cuales la atenuación máxima sea de  $k_1 = -3.01$  dB, con frecuencias límite de las bandas de supresión inferior  $f_1 = 19\,000$  Hz y superior  $f_2 = 21\,000$  Hz, para los cuales la atenuación mínima sea de  $k_2 = -20$  dB, considerando la frecuencia de muestreo  $f_s = 48\,000$  Hz se obtiene:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4} + b_5 z^{-5} + b_6 z^{-6} + b_7 z^{-7} + b_8 z^{-8}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4} + a_5 z^{-5} + a_6 z^{-6} + a_7 z^{-7} + a_8 z^{-8}} \quad (2.23)$$

donde:

$$b_0 = 1.5551722 \times 10^{-5}$$

$$a_0 = 1$$

$$b_1 = 0$$

$$a_1 = 6.6463050$$

$b_2 = -6.2206887 \times 10^{-5}$	$a_2 = 20.233172$
$b_3 = 0$	$a_3 = 36.640187$
$b_4 = 9.3310331 \times 10^{-5}$	$a_4 = 43.073050$
$b_5 = 0$	$a_5 = 33.633948$
$b_6 = -6.2206887 \times 10^{-5}$	$a_6 = 17.049275$
$b_7 = 0$	$a_7 = 5.1410334$
$b_8 = 1.5551722 \times 10^{-5}$	$a_8 = 0.71010390$

valores que son iguales en seis cifras significativas a las obtenidas con el procedimiento previamente mostrado. Se concluye que para el diseño de filtros digitales de cualquier tipo a partir de la función de transferencia de un filtro paso-bajas prototipo, conviene emplear las expresiones de transformación sugeridas (Bogner y Constantinides [6]), y de esta manera disminuir el esfuerzo operacional para el cálculo de los coeficientes.

## 2.3 SONIDO

El sonido es una perturbación mecánica vibratoria que se propaga a través de un medio elástico como una onda longitudinal. El medio en el que se propaga tiene una influencia significativa en su comportamiento. A diferencia de la luz y, en general, de las ondas electromagnéticas, una de las ventajas que presenta el sonido para aplicarse en sistemas de determinación de distancias es su baja velocidad de propagación.

### 2.3.1 Velocidad de propagación del sonido

La velocidad de propagación del sonido en medios gaseosos,  $c$ , está dada por la expresión:

$$c = \sqrt{\gamma RT} \quad (2.24)$$

donde  $\gamma$  es la relación del calor específico del aire a presión constante y volumen constante,  $R$  es la constante del aire, y  $T$  es la temperatura ambiente, en K.

Entonces, dado que  $\gamma = 1.4$  y  $R = 287.0 \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$ , la velocidad de propagación del sonido a

una temperatura  $T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$  (293 K) es:

$$c = \sqrt{(1.4)(287.0)(293)}$$

$$c = 343.1 \text{ m/s.}$$

A partir de la expresión anterior se puede verificar que la velocidad de propagación del sonido depende de la temperatura del medio (Seto [7]), según la expresión:

$$\frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \quad (2.25)$$

donde  $c_1$  es la velocidad de propagación a una temperatura del medio  $T_1$ , y  $c_2$  la velocidad de propagación a una temperatura del medio  $T_2$ , por lo que, para una temperatura de  $T_1 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$  (298 K), por ejemplo:

$$c_1 = 343.1 \sqrt{\frac{298}{293}}$$

$$c_1 = 346.0 \text{ m/s}$$

### 2.3.2 Atenuación atmosférica

Conforme una onda acústica viaja a través de un medio de propagación, la potencia de la señal decrece, como una función inversa del cuadrado de la distancia medida desde la fuente. Según Everett [8], la intensidad del sonido,  $I$ , definida como su potencia por unidad de área, a una cierta distancia  $R$ , de la fuente, se puede calcular con la expresión:

$$I = \frac{I_0}{4\pi R^2} \quad (2.26)$$

donde  $I_0$  es la intensidad máxima del sonido (inicial). A este fenómeno se le denomina atenuación por divergencia esférica.

Además, se tiene una pérdida exponencial asociada con la absorción molecular de la energía del sonido por el medio por sí mismo, que depende ligeramente de la humedad, del contenido de partículas sólidas y de la frecuencia de la señal.

Combinando ambos factores, las atenuaciones por divergencia esférica y por absorción molecular, la expresión para la intensidad del sonido queda como:

$$I = \frac{I_0 e^{-2\alpha R}}{4\pi R^2} \quad (2.27)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de atenuación del medio (Everett [8]).

También conviene tener presente que la atenuación teórica máxima para la energía del sonido puede ser aproximada, según Everett [8], por la expresión:

$$a_{\max} = \frac{f}{30.48} \quad (2.28)$$

donde  $a_{\max}$  es la atenuación máxima, en dB/m, y  $f$  es la frecuencia de operación, en kHz. Por lo tanto, se puede observar que a mayor frecuencia, se tiene una mayor atenuación de la energía del sonido.

## CAPÍTULO 3

# DESARROLLO DE LAS PROPUESTAS PARA LA DETERMINACIÓN DE LA POSICIÓN DEL ROBOT

En este capítulo se presentan todas las posibles soluciones que se generaron para la resolución del problema, las ventajas y desventajas de cada una de ellas, y la evolución que tuvieron los métodos que se propusieron, hasta llegar al diseño final del sistema. Tal como se comentó en la Sección 1.3, se desarrolló el trabajo con base en el sistema de faros activos.

### 3.1 PRIMERA PROPUESTA

En este apartado se presenta la primera propuesta para la determinación de la posición del robot móvil, con base en el sistema de medición de los lados de un triángulo. Se decidió usar emisores de sonido en lugar de electromagnéticos, con objeto de lograr una mayor precisión en el cálculo de las coordenadas, ya que el tiempo que tarda en llegar el sonido al receptor es muchísimo mayor, cerca de 900,000 veces, que el que tarda en hacerlo la onda electromagnética, para una misma separación entre el emisor y el receptor. Este tiempo se midió con base en un programa de cómputo y el número de ciclos de muestreo transcurridos desde el instante en que el emisor genera la señal hasta que el receptor la detecta.

Además, se consideró para esta propuesta que la señal de sonido fuera ultrasónica, con objeto de que no causara molestias a las personas que estuvieran presentes en el entorno de operación del robot *TX8* localizado en el Laboratorio de Interfaces Inteligentes de la Facultad de Ingeniería de la UNAM, que se muestra en la Figura 3.1.



Figura 3.1 Robot TX8.

El diseño de este sistema se presentó en el artículo *Robot Localization Using Ultrasonic Beacons*, de Savage J. y otros [9], está basado en el método de determinación de la posición del robot por medio de la medición de los lados del triángulo, y funciona como se describe en los párrafos siguientes.

Se colocaron tres emisores ultrasónicos en lugares distintos, dentro del área de trabajo del robot, y con ellos se emitieron señales sinusoidales con las frecuencias mencionadas, por medio de osciladores de *Wien* y amplificadores de potencia conectados a cada uno de ellos. Fue necesario sincronizar la emisión de las señales de sonido, con objeto de establecer una referencia común para la medición de las distancias.

Con un micrófono *omnidireccional* marca *REALISTIC* colocado sobre el robot, como el que se muestra en la Figura 3.2, se recibieron dichas señales sinusoidales, las cuales llegan mezcladas. La señal resultante se preamplificó y se introdujo a un *DSP* en el que, para

poder discriminar las tres frecuencias, se implantaron filtros digitales paso-bandas de cuarto orden tipo *IIR*, centradas a las frecuencias de las señales transmitidas y, con base en las señales separadas por frecuencias, se midieron los tiempos de llegada al robot por medio de la comparación de la potencia de las señales filtradas con valores de umbral predeterminados experimentalmente, en función del número de interrupciones del procesador que se hubieran contabilizado, desde que éste envió el pulso de encendido de los emisores, hasta que recibió la señal correspondiente.



*Figura 3.2* Micrófono omnidireccional marca REALISTIC.

Y dado que la distancia entre el emisor y el micrófono es proporcional al tiempo medido, se puede determinar a partir de la expresión:

$$d_i = ct_i \quad (3.1)$$

donde  $d_i$  es la distancia entre el  $i$ 'ésimo emisor y el robot,  $c$  es la velocidad local del sonido y  $t_i$  es el tiempo medido por el sistema. De esta manera fue posible obtener el radio de las tres circunferencias cuyos centros están en los puntos en donde se ubica cada emisor, y en cuyo perímetro se encuentra el robot, y así calcular su posición por medio de la intersección de dichas circunferencias.

En la Figura 3.3. se muestra una ilustración del procedimiento geométrico empleado para este sistema.

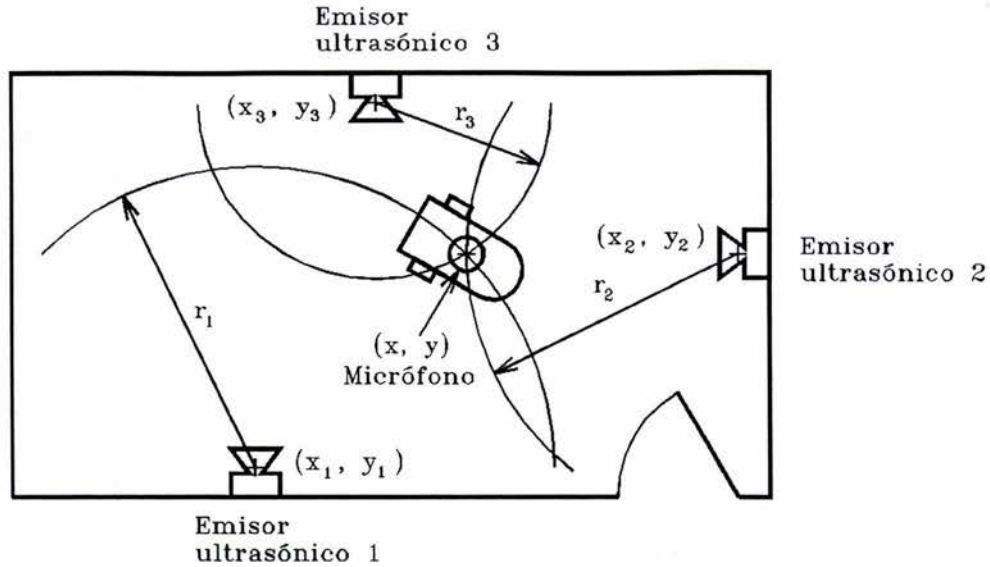


Figura 3.3 Ilustración del procedimiento geométrico de determinación de la posición del robot por medio de la medición de los lados del triángulo.

Como se puede verificar en la figura anterior, las coordenadas  $(x, y)$  se refieren a la posición del robot, las coordenadas  $(x_i, y_i)$  corresponden a la posición del  $i$ 'ésimo emisor, y el valor  $r_i$  es la distancia entre dicho emisor y el robot. Entonces, las ecuaciones de cada una de las circunferencias se pudieron expresar como:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2 \quad (3.2)$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2 \quad (3.3)$$

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = r_3^2 \quad (3.4)$$

luego de desarrollar los binomios, y restar (3.3) de (3.2) y de (3.4) se obtuvieron:

$$2x(x_2 - x_1) + x_1^2 - x_2^2 + 2y(y_2 - y_1) + y_1^2 - y_2^2 = r_1^2 - r_2^2 \quad (3.5)$$

$$2x(x_2 - x_3) + x_3^2 - x_2^2 + 2y(y_2 - y_3) + y_3^2 - y_2^2 = r_3^2 - r_2^2 \quad (3.6)$$

expresiones que en el plano cartesiano representan a dos rectas. Debido a que las distancias medidas tienen tanto errores inherentes al sistema como debidos al ruido, en general las tres circunferencias no se intersectan en un punto, sino que en el mejor de los casos sólo se puede asegurar la intersección de conjuntos de dos circunferencias. Las rectas obtenidas correspondieron a aquellas que pasan por los dos puntos de intersección de las circunferencias involucradas, o bien, perpendiculares a la recta que pasa por sus centros y que pasan por el espacio intermedio entre ellas. En la Figura 3.4 se ilustra este resultado.



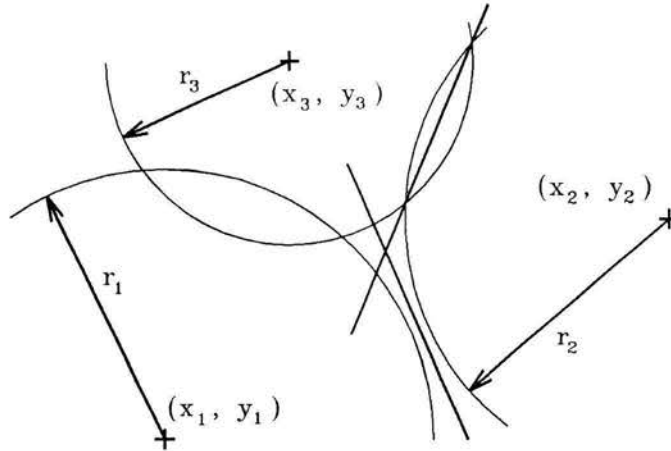


Figura 3.4 Gráfica que ilustra las rectas obtenidas al hacer simultáneas las ecuaciones de un par de circunferencias que se cortan, y de otro par que no se cortan.

Por tanto, luego de resolver las ecuaciones (3.5) y (3.6) se obtuvieron las coordenadas del punto en donde está ubicado el robot móvil, que corresponde a la intersección geométrica de las rectas que representan a las citadas expresiones:

$$x = \frac{(y_2 - y_1)(r_2^2 - r_3^2 - x_2^2 + x_3^2 - y_2^2 + y_3^2) - (y_3 - y_2)(r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 + y_2^2)}{2(x_3 - x_2)(y_2 - y_1) - 2(x_2 - x_1)(y_3 - y_2)} \quad (3.7)$$

$$y = \frac{(x_2 - x_1)(r_2^2 - r_3^2 - x_2^2 + x_3^2 - y_2^2 + y_3^2) - (x_3 - x_2)(r_1^2 - r_2^2 - x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 + y_2^2)}{2(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - 2(x_3 - x_2)(y_2 - y_1)} \quad (3.8)$$

Se puede observar que estos valores se obtuvieron en función de las distancias medidas a cada uno de los tres emisores ultrasónicos,  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$ , así como de las coordenadas en las que encuentran éstos,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$ .

Se emplearon como emisores, altavoces (bocinas) para sonidos agudos, denominados comercialmente *tweeters*, con un rango de frecuencias de emisión en la banda de  $\pm 3$  dB de 12 a 50 kHz, y como receptor un micrófono *omnidireccional*, el cual posee un rango de frecuencias de captación de 100 Hz a 20 kHz, dentro de los  $\pm 3$  dB de amplitud. En la Figura 3.5 se muestra la gráfica de la respuesta de este micrófono con respecto a la orientación de la señal recibida.

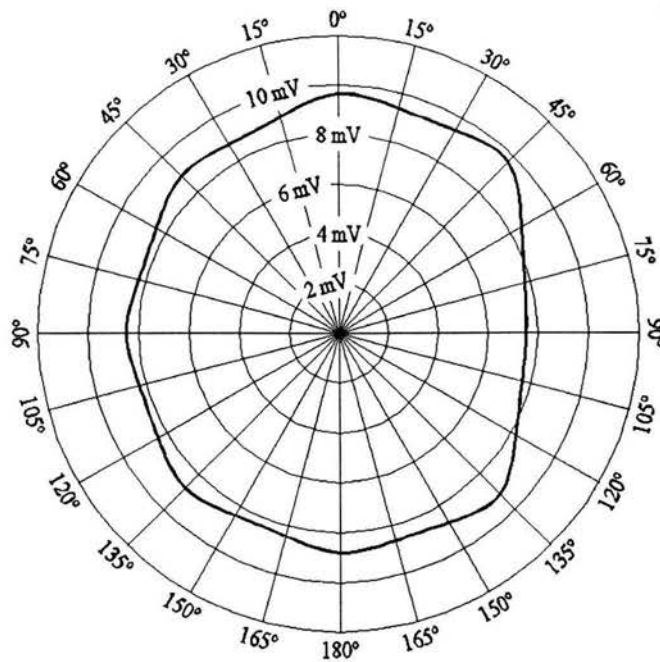


Figura 3.5 Gráfica de la respuesta del micrófono omnidireccional, en función de la orientación de la señal recibida.

Para el procesamiento de las señales ultrasónicas se consideró en primera instancia el *DSP56001* de *Motorola*, cuya tarjeta de evaluación posee un Convertidor Analógico-Digital, o ADC<sup>1</sup>, y con una frecuencia de muestreo de 48 kHz. Esta característica obligó a que la frecuencia máxima de trabajo para este sistema no pudiera sobrepasar los 24 kHz, dado por el criterio de *Nyquist*<sup>2</sup>. Por tal motivo, se escogieron señales con frecuencias de 17, 19 y 21 kHz, para que fueran emitidas por los altavoces, y que posteriormente fueran reconocidas por el sistema.

Para la realización de los filtros digitales que se requirieron para efectuar la discriminación de la llegada de las diferentes señales, fue necesario calcular los coeficientes de las secciones *bicuatricas* en cascada empleando la Forma Directa II, para cada una de las frecuencias mencionadas, tal como se describe en el Apéndice en el que se pueden consultar los valores de los coeficientes para cada una de las frecuencias consideradas.

<sup>1</sup> Por las siglas en inglés *Analogic to Digital Converter*.

<sup>2</sup> El criterio de *Nyquist* indica que la frecuencia de muestreo de una señal debe tener, cuando menos, el doble de la frecuencia máxima de la señal que se desea procesar.

Para lograr la sincronización de las señales de sonido, se empleó un pulso que envía el *DSP* a los controladores de los altavoces, a través de una señal de radio. En la Figura 3.6 se muestra un diagrama de bloques del subsistema de control de emisión de los transmisores ultrasónicos.

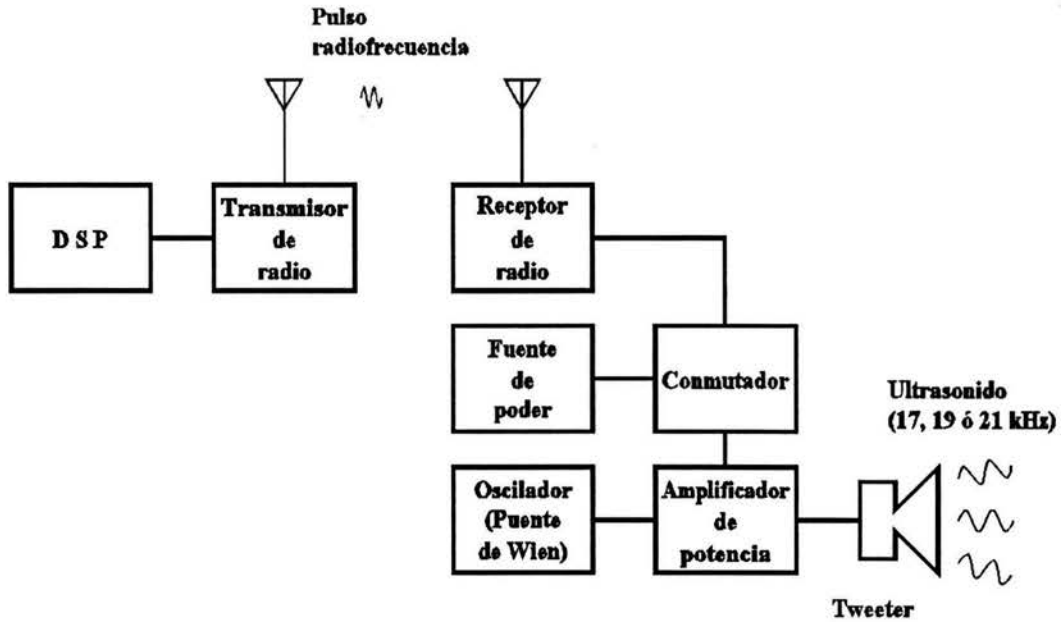


Figura 3.6 Diagrama de bloques del subsistema de control de emisión de los transmisores ultrasónicos.

Finalmente, en la Figura 3.7 se muestra el diagrama de bloques del sistema de determinación de la posición un robot móvil descrito en este apartado.

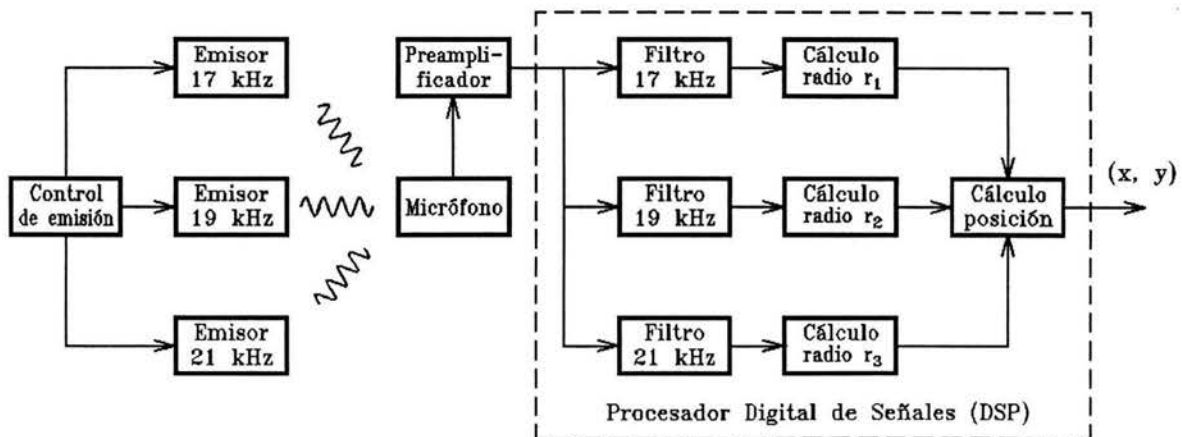


Figura 3.7 Diagrama de bloques de la primera propuesta para el sistema de determinación de la posición de un robot móvil.

### 3.2 SEGUNDA PROPUESTA

La idea de esta propuesta surgió debido a las dificultades que se tuvieron para sincronizar adecuadamente la emisión de las tres señales ultrasónicas, que se requiere en el sistema de medición de los lados de un triángulo para la determinación de la posición del robot anteriormente explicado.

Este método se basa en la obtención de las diferencias de tiempo que tardan en viajar las señales acústicas desde cada uno de los tres altavoces hasta el micrófono. Con el conocimiento de dos de estas diferencias, fue posible calcular las correspondientes diferencias de distancia que existen, y a partir de dichos valores se pudo determinar la posición del robot móvil. La propuesta surgió de la idea presentada en el artículo *Localization of unknown source of seismic vibrations*, de Pavlović V. D. y Veličković Z. S. [10], la cual se modificó con objeto de aplicarlo a este proyecto.

En la Figura 3.8 se muestra una ilustración del procedimiento geométrico de determinación de la posición del robot por medio de las diferencias de distancias a los emisores.

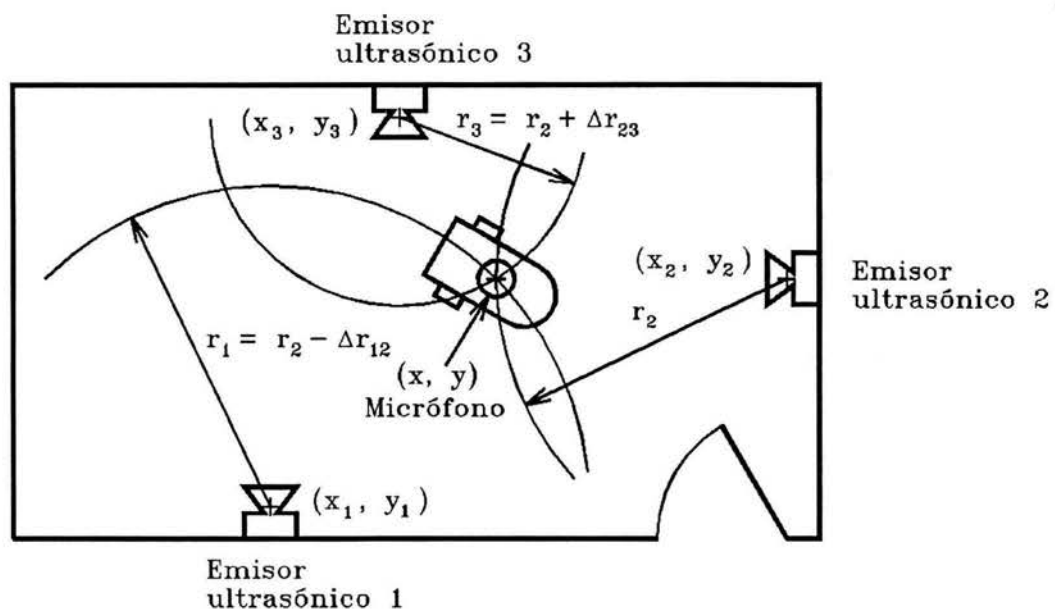


Figura 3.8 Ilustración del procedimiento geométrico de determinación de la posición del robot por medio de las diferencias de distancias a los emisores.

Para la operación de esta propuesta, se emitieron simultáneamente tres pulsos acústicos, con frecuencias de 17, 19 y 21 kHz, con una duración de 10 ms; el micrófono montado en el robot móvil los recibe, y los introduce a un DSP56002 a través de un *preamplificador*. El *DSP* procesa la señal recibida, con base en los mismos filtros paso-bandas diseñados para la primera propuesta, de tal manera que sea capaz de detectar la llegada de cada una de las señales, y poder determinar posteriormente las diferencias de tiempo que tardan en llegar las señales del primer y tercer emisores con respecto al segundo, convertir dichos valores en diferencias de distancias, y finalmente proceder a calcular la posición del robot.

El análisis geométrico de la propuesta se basó en las ecuaciones de tres circunferencias en el plano en el que se encuentra el micrófono a bordo del robot, con centro en la posición donde se localizan los altavoces, y con radios  $r_1$ ,  $r_2$  y  $r_3$ , respectivamente, que corresponden a las distancias de cada uno de los tres emisores al micrófono citado, pero en este caso los radios  $r_1$  y  $r_3$  se expresan en función de  $r_2$  y de sus diferencias con dicho valor:

$$r_1 = r_2 - \Delta r_{12}, \text{ y} \quad (3.9)$$

$$r_3 = r_2 + \Delta r_{23}, \quad (3.10)$$

donde:

$$\Delta r_{12} = r_2 - r_1, \text{ y} \quad (3.11)$$

$$\Delta r_{23} = r_3 - r_2. \quad (3.12)$$

Con base en lo anterior, las ecuaciones de las circunferencias quedaron:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (r_2 - \Delta r_{12})^2 \quad (3.13)$$

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2 \quad (3.14)$$

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 = (r_2 + \Delta r_{23})^2 \quad (3.15)$$

en donde las coordenadas  $(x, y)$  se refieren a la posición del robot, y las coordenadas  $(x_i, y_i)$  corresponden a la posición del *i*'ésimo emisor. En estas tres expresiones, (3.13), (3.14) y (3.15), las incógnitas son las coordenadas de posición del robot  $(x, y)$ , así como el radio  $r_2$ .

Con objeto de resolver el sistema de ecuaciones, primero se desarrollaron los binomios y se efectuaron las restas de la expresión (3.14) a la (3.13) y a la (3.15), de donde se obtuvieron:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y = (-2\Delta r_{12})r_2 + x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + (\Delta r_{12})^2 \quad (3.16)$$

y:

$$2(x_2 - x_3)x + 2(y_2 - y_3)y = (2\Delta r_{23})r_2 + x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2 + (\Delta r_{23})^2 \quad (3.17)$$

De estas dos ecuaciones, se calcularon las soluciones para las coordenadas (x, y) en función de  $r_2$  y de todos los demás parámetros:

$$x = \frac{-2[(\Delta r_{12})(y_2 - y_3) + (\Delta r_{23})(y_2 - y_1)]r_2 + (x_2^2 + y_2^2)(y_1 - y_3) + [x_3^2 + y_3^2 - (\Delta r_{23})^2](y_2 - y_1) - [x_1^2 + y_1^2 - (\Delta r_{12})^2](y_2 - y_3)}{2(x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2 - x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_1)} \quad (3.18)$$

$$y = \frac{2[(\Delta r_{23})(x_2 - x_1) + (\Delta r_{12})(x_2 - x_3)]r_2 + (x_2^2 + y_2^2)(x_3 - x_1) + [x_1^2 + y_1^2 - (\Delta r_{12})^2](x_2 - x_3) - [x_3^2 + y_3^2 - (\Delta r_{23})^2](x_2 - x_1)}{2(x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2 - x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_1)} \quad (3.19)$$

Para simplificar las ecuaciones anteriores se definieron las siguientes constantes:

$$A = \frac{-(\Delta r_{12})(y_2 - y_3) - (\Delta r_{23})(y_2 - y_1)}{x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2 - x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_1} \quad (3.20)$$

$$B = \frac{(x_2^2 + y_2^2)(y_1 - y_3) + [x_3^2 + y_3^2 - (\Delta r_{23})^2](y_2 - y_1) - [x_1^2 + y_1^2 - (\Delta r_{12})^2](y_2 - y_3)}{2(x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2 - x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_1)} \quad (3.21)$$

$$C = \frac{(\Delta r_{23})(x_2 - x_1) + (\Delta r_{12})(x_2 - x_3)}{x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2 - x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_1} \quad (3.22)$$

$$D = \frac{(x_2^2 + y_2^2)(x_3 - x_1) + [x_1^2 + y_1^2 - (\Delta r_{12})^2](x_2 - x_3) - [x_3^2 + y_3^2 - (\Delta r_{23})^2](x_2 - x_1)}{2(x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2 - x_1y_2 - x_2y_3 - x_3y_1)} \quad (3.23)$$

y se sustituyeron estas constantes en las expresiones (3.18) y (3.19) para obtener:

$$x = Ar_2 + B \quad (3.24)$$

$$y = Cr_2 + D \quad (3.25)$$

y finalmente se sustituyeron estas dos últimas expresiones en la (3.14) para establecer:

$$\begin{aligned} (A^2 + C^2 - 1)r_2 + (2AB - 2Ax_2 + 2CD - 2Cy_2)r_2 + \\ [B^2 + x_2^2 - 2Bx_2 + D^2 + y_2^2 - 2Dy_2] = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

la cual es una ecuación cuadrática con  $r_2$  como incógnita, y cuya solución válida (positiva) se le sustituyó en las expresiones (3.18) y (3.19) para calcular las coordenadas  $(x, y)$  de la posición del robot móvil. En este caso, estos valores se obtuvieron en función de las diferencias de distancias entre los emisores y el robot,  $\Delta r_{12}$  y  $\Delta r_{23}$ , y de las coordenadas en las que encuentran éstos,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$ .

Por último, en la Figura 3.9 se muestra el diagrama de bloques del sistema de determinación de la posición de un robot móvil con base en las diferencias de las distancias a los emisores.

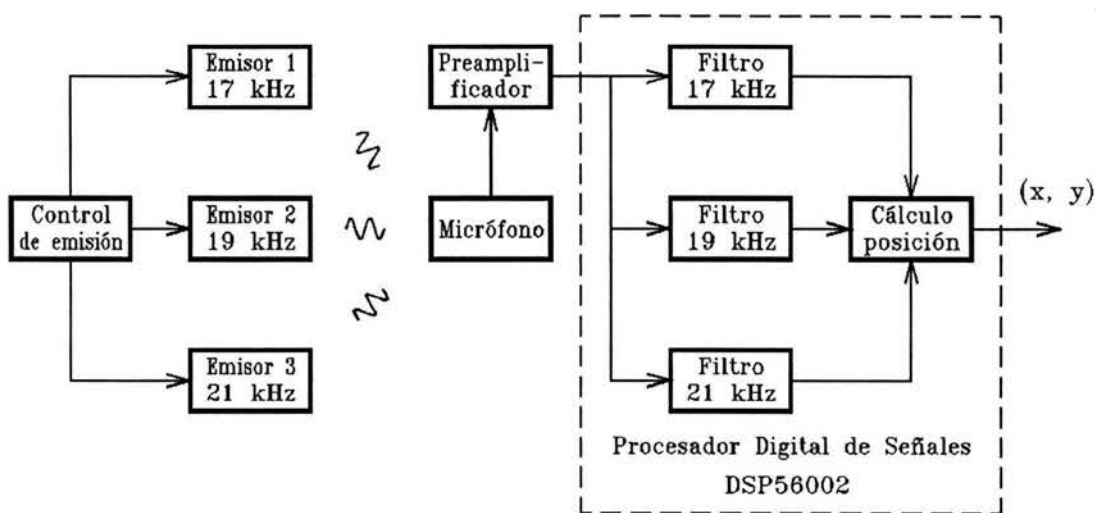


Figura 3.9 Diagrama de bloques del sistema de determinación de la posición de un robot móvil con base en las diferencias de las distancias a los emisores.

### 3.3 TERCERA PROPUESTA

La gran ventaja que presenta la segunda propuesta con respecto a la primera, es que no se requirió la sincronización de la emisión de los pulsos ultrasónicos, aunque se necesitaron las tres diferentes frecuencias para establecer el orden en el que llegaba cada una de las señales, y obtener de manera biunívoca las coordenadas en las que se encuentra el robot. Es posible determinar el orden de llegada de dichas señales con la introducción de un tiempo de retardo entre la emisión de la primera señal y la segunda, así como entre la segunda y la tercera, de manera que se pueda asegurar que el orden de llegada de las ondas acústicas al micrófono sea siempre el mismo que el de la emisión de la señal correspondiente.

El tiempo de retardo se debe calcular de tal forma que la distancia que recorra el sonido en dicho intervalo sea mayor que la distancia máxima que se tenga entre los altavoces ultrasónicos y el robot. Por ejemplo, si se considera nuevamente una habitación de 4 x 4 m en la que esté navegando el robot, la distancia máxima sería:

$$d_{\text{máx}} = 4 \times \sqrt{2} \text{ m} \Rightarrow d_{\text{máx}} = 5.657 \text{ m}$$

por lo que el retardo de tiempo deberá ser mayor de:

$$\Delta t_{\text{mín}} = 5.657 / 343.1 \text{ s} \Rightarrow \Delta t_{\text{mín}} = 16.49 \text{ ms}$$

Así se pudo simplificar el procesamiento de las señales acústicas ya que no fue necesario emplear tres frecuencias diferentes, siempre y cuando las señales fueran pulsos con una duración tal que no se produjera la superposición en tiempo de las señales de los emisores.

Con base en lo anterior, se estableció que la duración del pulso acústico fuera de  $t_p = 5 \text{ ms}$ , y que el retardo de tiempo entre pulsos sea  $\Delta t = 50 \text{ ms}$ , y de esta forma se pudieran asegurar las condiciones mínimas para el correcto funcionamiento del sistema. Además, se consideró que era conveniente que el sistema calculara la posición del robot al menos un par de veces por segundo, para que éste pudiera navegar en su espacio de trabajo de forma confiable, por lo cual se estableció que el sistema generara los conjuntos de los tres pulsos ultrasónicos cada  $t_c = 500 \text{ ms}$ .

En la Figura 3.10 se muestra el diagrama de tiempos de las señales ultrasónicas empleadas en esta propuesta.



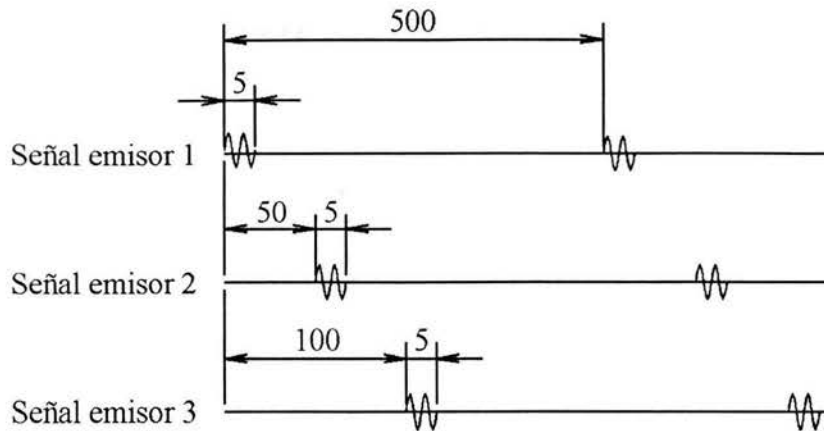


Figura 3.10 Diagrama de tiempos, en milisegundos, de las señales ultrasónicas empleadas en el sistema con base en diferencias de distancias.

Esta propuesta fue publicada con el título de Segundo método, en el artículo *Determinación de la posición de un robot móvil con ultrasonido*, de Minami Y., Savage J., y Lepe-Casillas F. [11]. Para su realización se diseñó un circuito electrónico de control que generara los pulsos con las características mencionadas, y cuyos detalles se pueden consultar en las páginas 39, 40 y 41 del trabajo de tesis con título *Sistema automático para la determinación de la posición de un robot móvil usando transmisores ultrasónicos*, de Krause M. P. [12].

En la Figura 3.11 se muestra el diagrama esquemático del circuito electrónico de control para esta propuesta.

Para el procesamiento de los pulsos ultrasónicos se empleó el *DSP56002* de *Motorola*, que tiene una frecuencia de muestreo de 48 kHz, por lo que la frecuencia de los pulsos citados se fijó en  $f_p = 20$  kHz. Se calcularon los coeficientes de las secciones *bicadráticas* en cascada para un filtro digital paso-bandas con la frecuencia de paso citada empleando la Forma Directa II; los valores de la constante y las funciones de transferencia de las secciones *bicadráticas* son las mismas a los que se obtuvieron en el Apéndice.

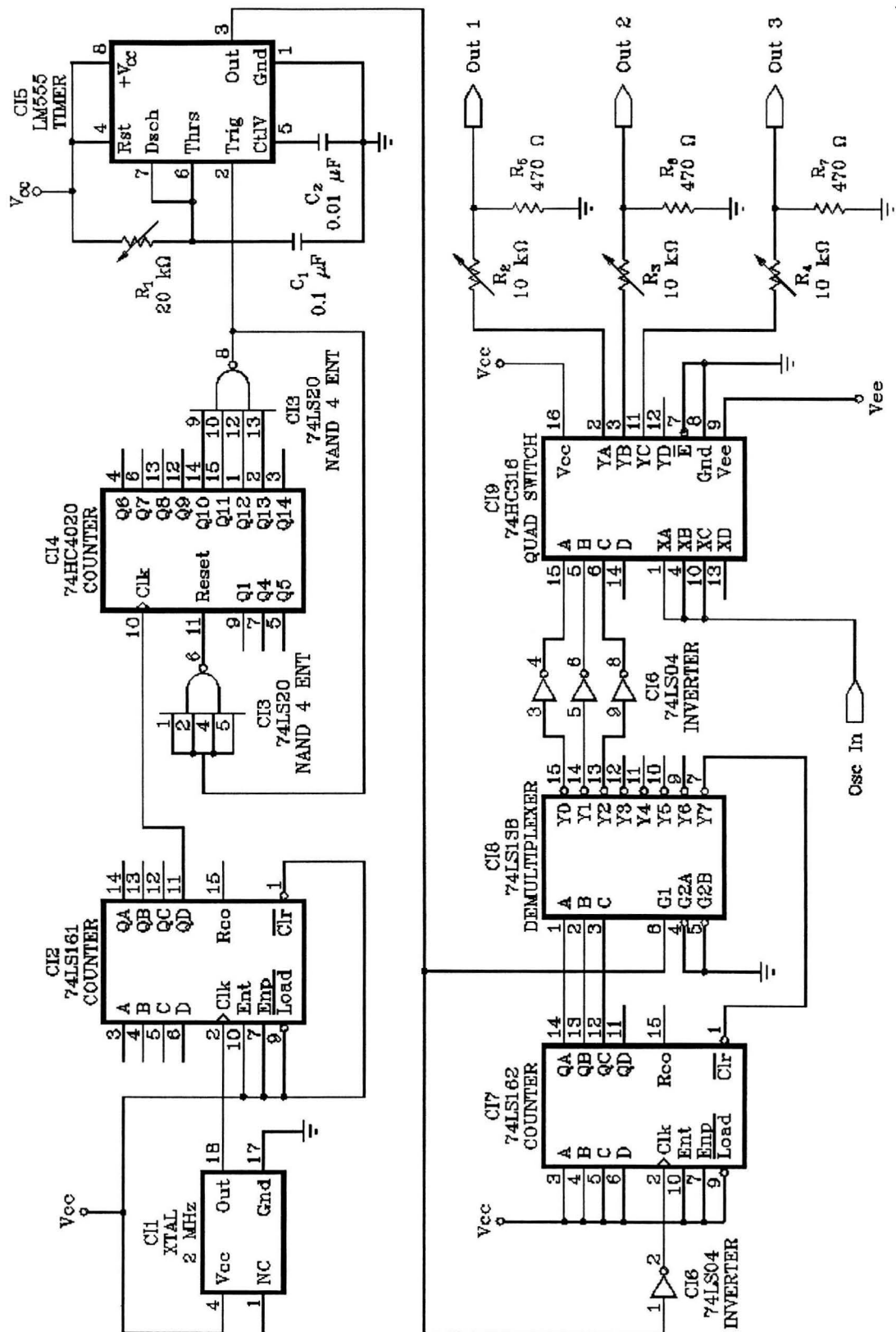


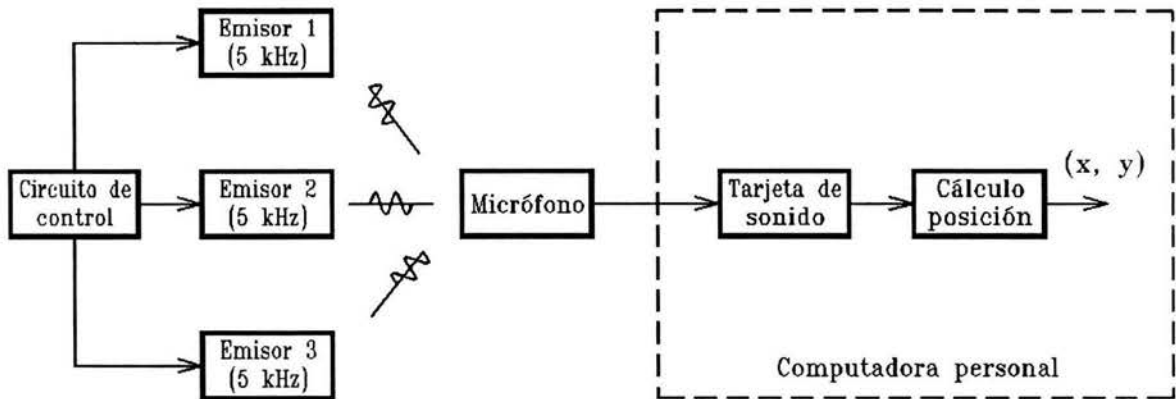
Figura 3.11 Diagrama esquemático del circuito electrónico de control para la propuesta con base en las diferencias de distancias a los emisores.

### 3.4 PROPUESTA FINAL

Al realizar algunos experimentos con el sistema descrito en la sección precedente, se observaron algunos detalles significativos que dieron pie a la establecer tres modificaciones importantes, que se explican a continuación.

- 1 Dado que se requieren introducir los valores calculados de las coordenadas de la posición estimada del robot a su sistema de navegación, el cual está controlado por un programa cargado en la computadora que está a bordo, se decidió que la señal del micrófono fuera alimentada directamente a la tarjeta de sonido de dicha PC, y de esta manera evitar la necesidad de transmisión de dichos datos del DSP a la computadora.
- 2 Debido a que la amplitud de las señales captadas por el micrófono depende de la distancia que guarda con respecto a la fuente, y que en el funcionamiento de los filtros digitales la respuesta es más rápida en la medida en que la amplitud de la entrada sea mayor, se detectaron pequeños retrasos de tiempo en las mediciones, que a su vez provocaron errores en el cálculo de la posición. Dado que los pulsos enviados por los emisores al micrófono fueron dotados de una potencia significativa, se verificó que se podía detectar la llegada de cada uno de los pulsos con mayor fidelidad sin necesidad de los filtros digitales, de manera que únicamente se requirió la comparación directa de la señal digitalizada por el *ADC* de la tarjeta de sonido de la *PC* con un cierto valor de umbral, colocado aproximadamente a la tercera parte de la potencia máxima recibida, para determinar el instante de arribo del pulso correspondiente.
- 3 Ya que los pulsos ultrasónicos enviados a los emisores causaban un chasquido audible, y que la atenuación del sonido se incrementa si aumenta la frecuencia de la señal, se decidió emplear ondas en el rango audible, con  $f = 5$  kHz, y de esta forma asegurar el funcionamiento del sistema en espacios más extensos. Cabe hacer el comentario de que se incrementó ligeramente la intensidad del mencionado chasquido con la disminución de la frecuencia de la señal emitida, pero se consideró que no es significativo en cuanto a disminuir el nivel de comodidad de las personas que se encuentren trabajando con el robot.

En la Figura 3.12 se muestra el diagrama de bloques del sistema de determinación de la posición de un robot móvil con base en las diferencias de las distancias a los emisores, considerando las modificaciones descritas.



*Figura 3.12 Diagrama de bloques de la propuesta final para el sistema de determinación de la posición de un robot móvil con base en las diferencias de distancias a los emisores.*

Se hizo funcionar este sistema en un ambiente cerrado de 4 x 4 metros, en el que se fijaron los tres altavoces en el perímetro del área de trabajo, y se colocó el micrófono a la misma altura de los emisores. Se verificó que el sistema funcionó según lo esperado, con ciertas variaciones en cuanto al error y al área de cobertura, dependiendo de la ubicación y orientación que tuvieran los faros empleados. En el siguiente capítulo se aborda con detalle el proceso de optimación de la posición de los emisores, así como los resultados obtenidos.

## CAPÍTULO 4

### OBTENCIÓN DE LA POSICIÓN ÓPTIMA DE LOS FAROS

Con base en el objetivo planteado para este trabajo, el diseño del sistema implicó la realización de mediciones experimentales, con la finalidad de verificar la magnitud del error en las coordenadas del robot, así como la ejecución de un proceso de optimación para encontrar la configuración óptima de los faros para que su desempeño sea el mejor. En este capítulo se presentan los resultados de este proceso, incluido el modelado matemático de la función de error generado por el dispositivo, con base en el cual se aplicó el proceso de optimación posterior.

#### 4.1 PRIMERA APROXIMACIÓN

Para encontrar la posición de los faros en la que se minimice el error, en el cálculo de la posición de un robot móvil con el empleo de alguno de los algoritmos propuestos, fue necesario antes que todo obtener experimentalmente una función del error inherente generado en la medición de la distancia del faro hasta el robot, la cual además está afectada por ruido, que puede considerarse de tipo *Gaussiano*.

La distancia medida del  $i$ 'ésimo faro al robot,  $rm_i$ , puede ser modelada como:

$$rm_i = r_i + f(r_i) + \xi_i \quad (4.1)$$

en la que  $r_i$  representa la distancia real del robot al faro  $i$ ,  $f(r_i)$  es la función del error inherente con respecto  $r_i$ , y  $\xi_i$  corresponde a una variable *Gaussiana*.

A partir de mediciones experimentales, se determinaron varios valores del error inherente a diversas distancias; con base en ellos, y considerando que los faros en todo momento están dirigidos hacia el robot, se obtuvo la función de error con respecto a la distancia real, y el valor de la desviación estándar del error que puede considerarse que es provocada por ruido *Gaussiano*.

Los valores experimentales que se muestran en la Tabla 4.1, se obtuvieron con base en 20 lecturas que se tomaron para cada una de las distancias reales,  $r_i$ , a partir de las que se calcularon la media de las distancias medidas,  $rm_i$ , el valor de la función de error,  $f(r_i)$ , que se calculó como  $f(r_i) = rm_i - r_i$ , y la desviación estándar de las distancias medidas,  $\sigma^2(\xi_i)$ .

Distancia real, $r_i$	Media de las distancias medidas, $rm_i$	Error, $f(r_i)$	Desviación estándar, $\sigma^2(\xi_i)$
0.200	0.178	-0.022	0.044
0.600	0.606	0.006	0.032
1.000	1.022	0.022	0.052
1.400	1.414	0.014	0.039
1.800	1.806	0.006	0.035
2.200	2.205	0.005	0.028
2.600	2.595	-0.005	0.033
3.000	3.015	0.015	0.050
3.400	3.409	0.009	0.040
3.800	3.792	-0.008	0.026
4.200	4.181	-0.019	0.033
4.600	4.590	-0.010	0.033
5.000	4.993	-0.007	0.038
5.400	5.412	0.012	0.059

Tabla 4.1 Resumen de los valores de error obtenidos experimentalmente.

Valores, en metros.

Después de realizar un ajuste con el método de mínimos cuadrados a un polinomio de primer grado, la función de error sobre el eje central de propagación de la bocina se pudo aproximar a una función lineal en  $r_i$ , dada por:

$$f(r_i) = 0.0014r_i - 0.0053 \text{ m} \quad (4.2)$$

Dado que la desviación estándar debida al ruido *Gaussiano* tiene un valor que tiende a ser constante, se le consideró como el promedio de los valores obtenidos experimentalmente, es decir:

$$\sigma_{\xi_i}^2 = 0.039 \text{ m} \quad (4.3)$$

En la Figura 4.1 se ilustra la posición real,  $(x, y)$ , y la posición estimada,  $(x_e, y_e)$ , del robot móvil. Esta última es aquélla que el sistema diseñado puede determinar, con base en las distancias medidas  $rm_i$ .

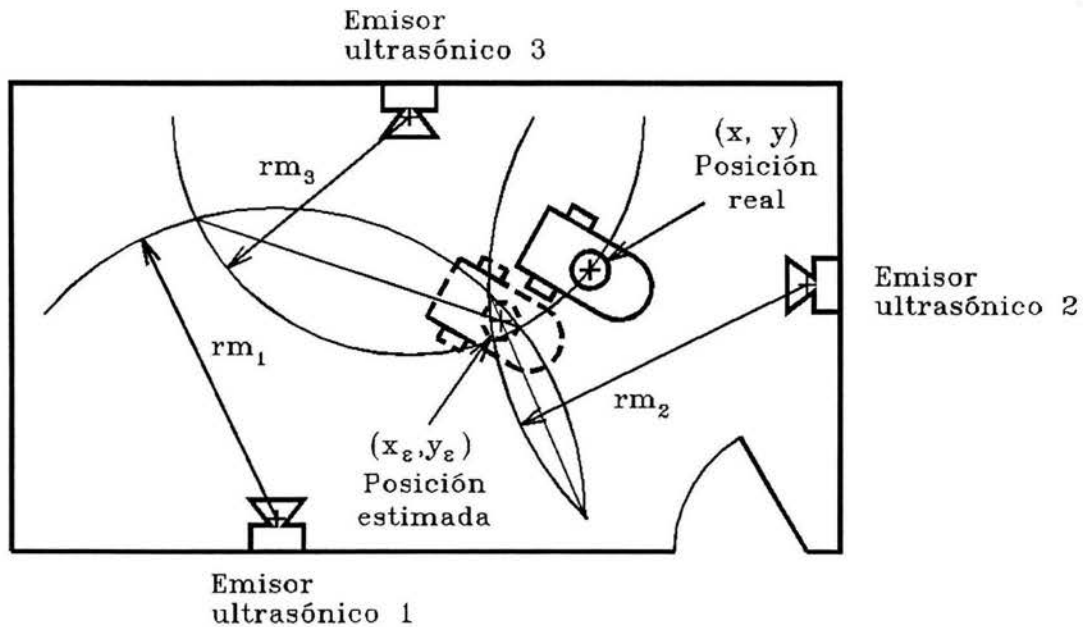


Figura 4.1 Posición real y posición estimada del robot móvil.

Con base en las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5) que se establecieron en el capítulo anterior, para determinar las coordenadas de la posición estimada del robot,  $(x_\epsilon, y_\epsilon)$ , mediante la aplicación de la primera propuesta, se sustituyó  $rm_i$  por  $r_i$ ,  $(x_\epsilon, y_\epsilon)$  por  $(x, y)$  y se obtuvieron:

$$(x_\epsilon - x_1)^2 + (y_\epsilon - y_1)^2 = rm_1^2 \quad (4.4)$$

$$(x_\epsilon - x_2)^2 + (y_\epsilon - y_2)^2 = rm_2^2 \quad (4.5)$$

$$(x_\epsilon - x_3)^2 + (y_\epsilon - y_3)^2 = rm_3^2 \quad (4.6)$$

y cuya solución para la variable  $y_\epsilon$  fue:

$$y_\epsilon = \frac{(x_2 - x_1)(rm_2^2 - rm_3^2 - x_2^2 + x_3^2 - y_2^2 + y_3^2) - (x_3 - x_2)(rm_1^2 - rm_2^2 - x_1^2 + x_2^2 - y_1^2 + y_2^2)}{2(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - 2(x_3 - x_2)(y_2 - y_1)} \quad (4.7)$$

y al sustituir la expresión (4.1) en (4.7) se llegó a que:

$$\begin{aligned} & x_1^2 x_3 - x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 - x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 - x_1 x_3^2 \\ & + x_1 y_2^2 - x_1 y_3^2 + x_2 y_3^2 - x_2 y_1^2 + x_3 y_1^2 - x_3 y_2^2 \\ & + x_1 \left[ r_3^2 + f^2(r_3) + \xi_3^2 + 2r_3 f(r_3) + 2r_3 \xi_3 + 2f(r_3) \xi_3 \right] \\ & - x_1 \left[ r_2^2 + f^2(r_2) + \xi_2^2 + 2r_2 f(r_2) + 2r_2 \xi_2 + 2f(r_2) \xi_2 \right] \\ & + x_2 \left[ r_1^2 + f^2(r_1) + \xi_1^2 + 2r_1 f(r_1) + 2r_1 \xi_1 + 2f(r_1) \xi_1 \right] \\ & - x_2 \left[ r_3^2 + f^2(r_3) + \xi_3^2 + 2r_3 f(r_3) + 2r_3 \xi_3 + 2f(r_3) \xi_3 \right] \\ & + x_3 \left[ r_2^2 + f^2(r_2) + \xi_2^2 + 2r_2 f(r_2) + 2r_2 \xi_2 + 2f(r_2) \xi_2 \right] \\ & y_\epsilon = \frac{-x_3 \left[ r_1^2 + f^2(r_1) + \xi_1^2 + 2r_1 f(r_1) + 2r_1 \xi_1 + 2f(r_1) \xi_1 \right]}{2x_1 y_2 - 2x_1 y_3 + 2x_2 y_3 - 2x_2 y_1 + 2x_3 y_1 - 2x_3 y_2} \quad (4.8) \end{aligned}$$

Dado que la ordenada real en la que se encuentra el robot quedó determinada por la expresión:

$$\begin{aligned} & x_1^2 x_3 - x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 - x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 - x_1 x_3^2 \\ & + x_1 y_2^2 - x_1 y_3^2 + x_2 y_3^2 - x_2 y_1^2 + x_3 y_1^2 - x_3 y_2^2 \\ & y_\epsilon = \frac{+x_1 r_3^2 - x_1 r_2^2 + x_2 r_1^2 - x_2 r_3^2 + x_3 r_2^2 - x_3 r_1^2}{2x_1 y_2 - 2x_1 y_3 + 2x_2 y_3 - 2x_2 y_1 + 2x_3 y_1 - 2x_3 y_2} \quad (4.9) \end{aligned}$$

fue posible obtener la discrepancia de  $y_\epsilon$  con respecto a  $y$ :



$$\begin{aligned}
& x_1 \left[ f^2(r_3) + \xi_3^2 + 2r_3f(r_3) + 2r_3\xi_3 + 2f(r_3)\xi_3 \right] \\
& - x_1 \left[ f^2(r_2) + \xi_2^2 + 2r_2f(r_2) + 2r_2\xi_2 + 2f(r_2)\xi_2 \right] \\
& + x_2 \left[ f^2(r_1) + \xi_1^2 + 2r_1f(r_1) + 2r_1\xi_1 + 2f(r_1)\xi_1 \right] \\
& - x_2 \left[ f^2(r_3) + \xi_3^2 + 2r_3f(r_3) + 2r_3\xi_3 + 2f(r_3)\xi_3 \right] \\
& + x_3 \left[ f^2(r_2) + \xi_2^2 + 2r_2f(r_2) + 2r_2\xi_2 + 2f(r_2)\xi_2 \right] \\
& - x_3 \left[ f^2(r_1) + \xi_1^2 + 2r_1f(r_1) + 2r_1\xi_1 + 2f(r_1)\xi_1 \right] \\
y_\varepsilon - y = & \frac{-x_3 \left[ f^2(r_1) + \xi_1^2 + 2r_1f(r_1) + 2r_1\xi_1 + 2f(r_1)\xi_1 \right]}{2x_1y_2 - 2x_1y_3 + 2x_2y_3 - 2x_2y_1 + 2x_3y_1 - 2x_3y_2} \quad (4.10)
\end{aligned}$$

y a partir de esta última expresión, se pudo establecer el error medio cuadrático como la raíz cuadrada de la esperanza matemática del cuadrado de la discrepancia de  $y_\varepsilon$  con respecto a  $y$ :

$$E_{\text{rms}} = \sqrt{E\{(y_\varepsilon - y)^2\}} \quad (4.11)$$

Con objeto de simplificar las expresiones matemáticas, se establecieron las variables:

$$A = f^2(r_1) + \xi_1^2 + 2r_1f(r_1) + 2r_1\xi_1 + 2f(r_1)\xi_1 \quad (4.12)$$

$$B = f^2(r_2) + \xi_2^2 + 2r_2f(r_2) + 2r_2\xi_2 + 2f(r_2)\xi_2 \quad (4.13)$$

$$C = f^2(r_3) + \xi_3^2 + 2r_3f(r_3) + 2r_3\xi_3 + 2f(r_3)\xi_3 \quad (4.14)$$

con las cuales, la expresión (4.10) elevada al cuadrado quedó como:

$$\begin{aligned}
& x_1^2(C - B)^2 + x_2^2(A - C)^2 + x_3^2(B - A)^2 \\
& + 2x_1x_2(C - B)(A - C) + 2x_1x_3(C - B)(B - A) \\
(y_\varepsilon - y)^2 = & \frac{+ 2x_2x_3(A - C)(B - A)}{4(x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2)^2} \quad (4.15)
\end{aligned}$$

además, se estableció la variable den como el denominador de esta última expresión:

$$\text{den} = 4(x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2)^2 \quad (4.16)$$

Dado que la esperanza matemática es una función lineal, la expresión para el error medio cuadrático quedó como:

$$E_{\text{rms}} = \left[ \begin{aligned} & \frac{x_1^2}{\text{den}} E\{(C-B)^2\} + \frac{x_2^2}{\text{den}} E\{(A-C)^2\} + \frac{x_3^2}{\text{den}} E\{(B-A)^2\} \\ & + \frac{2x_1x_2}{\text{den}} E\{(AC-AB+BC-C^2)\} \\ & + \frac{2x_1x_3}{\text{den}} E\{(AB-AC+BC-B^2)\} \\ & + \frac{2x_2x_3}{\text{den}} E\{(AB-A^2+AC-BC)\} \end{aligned} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.17)$$

asimismo, como A y C se pueden considerar funciones independientes, el segundo factor del segundo sumando del miembro derecho pudo expresarse como:

$$E\{(A-C)^2\} = E\{A^2\} - 2E\{A\}E\{C\} + E\{C^2\} \quad (4.18)$$

Los otros cinco sumandos se simplificaron de manera similar.

Entonces, para el cálculo del error medio cuadrático fue suficiente determinar los valores de  $E\{A\}$ ,  $E\{A^2\}$ ,  $E\{B\}$ ,  $E\{B^2\}$ ,  $E\{C\}$  y  $E\{C^2\}$ . Para el primer término, dado que:

$$E\{A\} = E\{f^2(r_1)\} + E\{\xi_1^2\} + 2E\{r_1 f(r_1)\} + 2E\{r_1\}E\{\xi_1\} + 2E\{f(r_1)\}E\{\xi_1\} \quad (4.19)$$

en la que  $r_1$  y  $\xi_1$  son variables independientes, y además, como  $\xi_1$  es una función *Gaussiana*, lo que implica que  $E\{\xi_1\} = 0$ , la expresión quedó como:

$$E\{A\} = E\{f^2(r_1)\} + \sigma_{\xi_1}^2 + 2E\{r_1 f(r_1)\} \quad (4.20)$$

Luego de emplear las aproximaciones para la función de error y la desviación estándar del ruido Gaussiano,  $f(r_1) = 0.0014r_1 - 0.0053$ , y  $\sigma_{\xi_1}^2 = 0.039$ , se obtuvieron:

$$\begin{aligned} E\{A\} &= 0.00000196E\{r_1^2\} - 0.00001484E\{r_1\} + E\{0.00002809\} + 0.039 \\ &+ 0.0014E\{r_1^2\} - 0.0053E\{r_1\} \end{aligned}$$

es decir,

$$E\{A\} = 0.001402E\{r_1^2\} - 0.005315E\{r_1\} + 0.03903 \quad (4.21)$$

Para el cálculo del valor esperado de  $A$ , es decir, de  $E\{A\}$ , se determinaron previamente los valores de  $E\{r_1^2\}$  y de  $E\{r_1\}$ , aplicando la definición de valor esperado y el valor de  $r_1$  en el plano  $r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$ ; así, para  $E\{r_1^2\}$ :

$$E\{r_1^2\} = \frac{\int_A [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2] dA}{\int_A dA} \quad (4.22)$$

Se consideró que el área de trabajo es un cuadrado de 4 m x 4 m, por lo cual:

$$\int_A [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2] dA = \int_0^4 \left\{ \int_0^4 [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2] dy \right\} dx \quad (4.23)$$

y cuyo resultado es:

$$\int_A [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2] dA = 16x_1^2 + 16y_1^2 - 64x_1 - 64y_1 + \frac{512}{3} \quad (4.24)$$

Como  $\int_A dA = A$ , y éste es igual a 16 m<sup>2</sup>:

$$E\{r_1^2\} = x_1^2 + y_1^2 - 4x_1 - 4y_1 + 10.67 \quad (4.25)$$

Para el cálculo de  $E\{r_1\}$ , se usó la aproximación de  $r_1$  con su polinomio de Taylor de segundo grado en  $r_{1,0} = (2, 2)$ , dada por la expresión:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} &\approx \sqrt{(2 - x_1)^2 + (2 - y_1)^2} \\ &+ \frac{2 - x_1}{\sqrt{(2 - x_1)^2 + (2 - y_1)^2}} (x - 2) + \frac{2 - y_1}{\sqrt{(2 - x_1)^2 + (2 - y_1)^2}} (y - 2) \\ &+ \frac{(2 - y_1)^2}{2[(2 - x_1)^2 + (2 - y_1)^2]^{\frac{3}{2}}} (x - 2)^2 \\ &- \frac{(2 - x_1)(2 - y_1)}{[(2 - x_1)^2 + (2 - y_1)^2]^{\frac{3}{2}}} (x - 2)(y - 2) \\ &+ \frac{(2 - x_1)^2}{2[(2 - x_1)^2 + (2 - y_1)^2]^{\frac{3}{2}}} (y - 2)^2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

de la que se llegó a que:

$$E\{r_1\} \approx \sqrt{(2-x_1)^2 + (2-y_1)^2} + \frac{2}{3\sqrt{(2-x_1)^2 + (2-y_1)^2}} \quad (4.27)$$

Luego de sustituir (4.25) y (4.27) en (4.21), se obtuvo:

$$\begin{aligned} E\{A\} \approx & 0.001402x_1^2 + 0.001402y_1^2 - 0.005608x_1 - 0.005608y_1 \\ & - 0.005315\sqrt{(2-x_1)^2 + (2-y_1)^2} - \frac{0.003543}{\sqrt{(2-x_1)^2 + (2-y_1)^2}} \\ & + 0.05398 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Los valores de  $E\{B\}$  y  $E\{C\}$  se obtuvieron de forma similar; fácilmente se verifica que:

$$\begin{aligned} E\{B\} \approx & 0.001402x_2^2 + 0.001402y_2^2 - 0.005608x_2 - 0.005608y_2 \\ & - 0.005315\sqrt{(2-x_2)^2 + (2-y_2)^2} - \frac{0.003543}{\sqrt{(2-x_2)^2 + (2-y_2)^2}} \\ & + 0.05398 \end{aligned} \quad (4.29)$$

y que:

$$\begin{aligned} E\{C\} \approx & 0.001402x_3^2 + 0.001402y_3^2 - 0.005608x_3 - 0.005608y_3 \\ & - 0.005315\sqrt{(2-x_3)^2 + (2-y_3)^2} - \frac{0.003543}{\sqrt{(2-x_3)^2 + (2-y_3)^2}} \\ & + 0.05398 \end{aligned} \quad (4.30)$$

Luego, se pudo calcular el valor de  $E\{A^2\}$ , con base en que:

$$\begin{aligned} A^2 = & f^4(r_1) + \xi_1^4 + 4r_1^2f^2(r_1) + 4r_1^2\xi_1^2 + 6f^2(r_1)\xi_1^2 + 4r_1f^3(r_1) \\ & + 12r_1f^2(r_1)\xi_1 + 4f^3(r_1)\xi_1 + 12r_1f(r_1)\xi_1^2 + 4r_1\xi_1^3 + 4f(r_1)\xi_1^3 \\ & + 8r_1^2f(r_1)\xi_1 \end{aligned} \quad (4.31)$$

y dado que  $\xi_1$  es una función Gaussiana,  $E\{\xi_1\} = 0$ ,  $E\{\xi_1^2\} = \sigma_{\xi_1}^2$ ,  $E\{\xi_1^3\} = 0$  y  $E\{\xi_1^4\} = 3(\sigma_{\xi_1}^2)^2$ , por lo cual:

$$\begin{aligned}
E\{A^2\} = & E\{f^4(r_1)\} + 3(\sigma_{\xi_1}^2)^2 + 4E\{r_1^2 f^2(r_1)\} + 4E\{r_1^2\}\sigma_{\xi_1}^2 \\
& + 6E\{f^2(r_1)\}\sigma_{\xi_1}^2 + 4E\{r_1 f^3(r_1)\} + 12E\{r_1 f(r_1)\}\sigma_{\xi_1}^2
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Al sustituir (4.2) y (4.3) en (4.32), se llegó a que:

$$\begin{aligned}
E\{A^2\} = & 0.000007851 E\{r_1^4\} - 0.00005948 E\{r_1^3\} + 0.1568 E\{r_1^2\} \\
& - 0.002484 E\{r_1\} + 0.004570
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Para calcular esta última expresión, se requirió emplear las ecuaciones (4.25) y (4.27), así como los valores de  $E\{r_1^4\}$  y  $E\{r_1^3\}$ , los cuales se determinarán a continuación.

Dado que:

$$E\{r_1^4\} = E\{(x - x_1)^4 + 2(x - x_1)^2(y - y_1)^2 + (y - y_1)^4\}$$

luego de resolver la integral asociada, la expresión quedó como:

$$\begin{aligned}
E\{r_1^4\} = & x_1^4 + 2x_1^2 y_1^2 + y_1^4 - 8x_1^3 - 8x_1^2 y_1 - 8x_1 y_1^2 - 8y_1^3 \\
& + 42.67x_1^2 + 32x_1 y_1 + 42.67y_1^2 - 106.7x_1 - 106.7y_1 + 159.3
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Para el cálculo de  $E\{r_1^3\}$ , se substituyó la función  $r_1^3 = [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]^{\frac{3}{2}}$  por su correspondiente polinomio de Taylor de segundo grado en  $r_{1,0} = (2, 2)$ :

$$\begin{aligned}
[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]^{\frac{3}{2}} \approx & [(2 - x_1)^2 + (2 - y_1)^2]^{\frac{3}{2}} \\
& + 3(2 - x_1)\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}(x - 2) \\
& + 3(2 - y_1)\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}(y - 2) \\
& + \frac{3[2(2 - x_1)^2 + (2 - y_1)^2]}{2\sqrt{(2 - x_1)^2 + (2 - y_1)^2}}(x - 2)^2 \\
& + \frac{3(2 - x_1)(2 - y_1)}{\sqrt{(2 - x_1)^2 + (2 - y_1)^2}}(x - 2)(y - 2) \\
& + \frac{3[(2 - x_1)^2 + 2(2 - y_1)^2]}{2\sqrt{(2 - x_1)^2 + (2 - y_1)^2}}(y - 2)^2
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Por lo tanto,  $E\{r_1^3\}$  quedó como:

$$E\{r_1^3\} \approx \left[ (2-x_1)^2 + (2-y_1)^2 \right]^{\frac{3}{2}} + 6\sqrt{(2-x_1)^2 + (2-y_1)^2} \quad (4.36)$$

Después de sustituir (25), (27), (34) y (36) en (33), se obtuvo:

$$\begin{aligned} E\{A^2\} \approx & 0.000007851x_1^4 + 0.00001570x_1^2y_1^2 + 0.000007851y_1^4 \\ & - 0.00006281x_1^3 - 0.00006281x_1^2y_1 - 0.00006281x_1y_1^2 \\ & - 0.00006281y_1^3 + 0.1571x_1^2 + 0.0002512x_1y_1 + 0.1571y_1^2 \\ & - 0.6279x_1 - 0.6279y_1 - 0.00005948 \left[ (2-x_1)^2 + (2-y_1)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\ & - 0.002841\sqrt{(2-x_1)^2 + (2-y_1)^2} - \frac{0.001656}{\sqrt{(2-x_1)^2 + (2-y_1)^2}} + 1.678 \end{aligned} \quad (4.37)$$

Los valores de  $E\{B^2\}$  y  $E\{C^2\}$  se obtuvieron de forma similar; se puede verificar fácilmente que para obtener las expresiones correspondientes sólo es necesario cambiar el subíndice 1 de la expresión anterior por el dígito 2, para obtener el valor esperado de  $B^2$ , y por el 3 para el de  $C^2$ , como se muestra enseguida:

$$\begin{aligned} E\{B^2\} \approx & 0.000007851x_2^4 + 0.00001570x_2^2y_2^2 + 0.000007851y_2^4 \\ & - 0.00006281x_2^3 - 0.00006281x_2^2y_2 - 0.00006281x_2y_2^2 \\ & - 0.00006281y_2^3 + 0.1571x_2^2 + 0.0002512x_2y_2 + 0.1571y_2^2 \\ & - 0.6279x_2 - 0.6279y_2 - 0.00005948 \left[ (2-x_2)^2 + (2-y_2)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\ & - 0.002841\sqrt{(2-x_2)^2 + (2-y_2)^2} - \frac{0.001656}{\sqrt{(2-x_2)^2 + (2-y_2)^2}} + 1.678 \end{aligned} \quad (4.38)$$

y,

$$\begin{aligned} E\{C^2\} \approx & 0.000007851x_3^4 + 0.00001570x_3^2y_3^2 + 0.000007851y_3^4 \\ & - 0.00006281x_3^3 - 0.00006281x_3^2y_3 - 0.00006281x_3y_3^2 \\ & - 0.00006281y_3^3 + 0.1571x_3^2 + 0.0002512x_3y_3 + 0.1571y_3^2 \\ & - 0.6279x_3 - 0.6279y_3 - 0.00005948 \left[ (2-x_3)^2 + (2-y_3)^2 \right]^{\frac{3}{2}} \\ & - 0.002841\sqrt{(2-x_3)^2 + (2-y_3)^2} - \frac{0.001656}{\sqrt{(2-x_3)^2 + (2-y_3)^2}} + 1.678 \end{aligned} \quad (4.39)$$

De las expresiones (4.16), (4.17), (4.28), (4.29), (4.30), (4.37), (4.38) y (4.39), se obtuvieron los seis términos de  $E_{rms}$  en función de  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2$  y  $y_3$ .

El primero de ellos fue:

$$\frac{x_1^2}{den} E\{(C-B)^2\} \approx \frac{x_1^2}{4(x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 - x_2y_1 + x_3y_1 - x_3y_2)^2} * \left[ \begin{aligned} &0.000007851x_3^4 + 0.00001570x_3^2y_3^2 + 0.000007851y_3^4 \\ &- 0.00006281x_3^3 - 0.00006281x_3^2y_3 - 0.00006281x_3y_3^2 \\ &- 0.00006281y_3^3 + 0.1571x_3^2 + 0.0002512x_3y_3 + 0.1571y_3^2 \\ &- 0.6279x_3 - 0.6279y_3 - 0.00005948[(2-x_3)^2 + (2-y_3)^2]^{\frac{3}{2}} \\ &- 0.002841\sqrt{(2-x_3)^2 + (2-y_3)^2} - \frac{0.001656}{\sqrt{(2-x_3)^2 + (2-y_3)^2}} + 1.678 \\ &- 2 * \left( \begin{aligned} &0.001402x_2^2 + 0.001402y_2^2 - 0.005608x_2 \\ &- 0.005608y_2 - 0.005315\sqrt{(2-x_2)^2 + (2-y_2)^2} \\ &- \frac{0.003543}{\sqrt{(2-x_2)^2 + (2-y_2)^2}} + 0.05398 \end{aligned} \right) \\ &* \left( \begin{aligned} &0.001402x_3^2 + 0.001402y_3^2 - 0.005608x_3 \\ &- 0.005608y_3 - 0.005315\sqrt{(2-x_3)^2 + (2-y_3)^2} \\ &- \frac{0.003543}{\sqrt{(2-x_3)^2 + (2-y_3)^2}} + 0.05398 \end{aligned} \right) \\ &+ 0.000007851x_2^4 + 0.00001570x_2^2y_2^2 + 0.000007851y_2^4 \\ &- 0.00006281x_2^3 - 0.00006281x_2^2y_2 - 0.00006281x_2y_2^2 \\ &- 0.00006281y_2^3 + 0.1571x_2^2 + 0.0002512x_2y_2 + 0.1571y_2^2 \\ &- 0.6279x_2 - 0.6279y_2 - 0.00005948[(2-x_2)^2 + (2-y_2)^2]^{\frac{3}{2}} \\ &- 0.002841\sqrt{(2-x_2)^2 + (2-y_2)^2} - \frac{0.001656}{\sqrt{(2-x_2)^2 + (2-y_2)^2}} + 1.678 \end{aligned} \right] \quad (4.40)$$

La función  $E_{rms}$  es extremadamente complicada y larga, por lo que sólo como ejemplo se presentó su primer término.

Atendiendo a que para la obtención de la posición óptima de los faros, se requieren obtener las derivadas parciales de  $E_{rms}$  con respecto a  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $y_1$ ,  $y_2$  y  $y_3$ , igualarlas a cero, y resolver el sistema de ecuaciones que se genera, y que todo esto implica una enorme dificultad matemática. Dado que la respuesta de los altavoces empleados es tal que el sonido prácticamente no se propaga detrás de él, se pudo establecer una simplificación significativa al considerar que los faros 1 y 3 se colocaran en la pared “inferior” del cuarto, de manera que  $y_1 = 0$  y  $y_3 = 0$ , y de forma similar, el faro 2 se colocara en la pared contraria, por lo que  $y_2 = 4$  m. En la Figura 4.2 se muestra la gráfica de la respuesta de las bocinas con respecto al ángulo de propagación, con base en la captación de su señal por el micrófono omnidireccional.

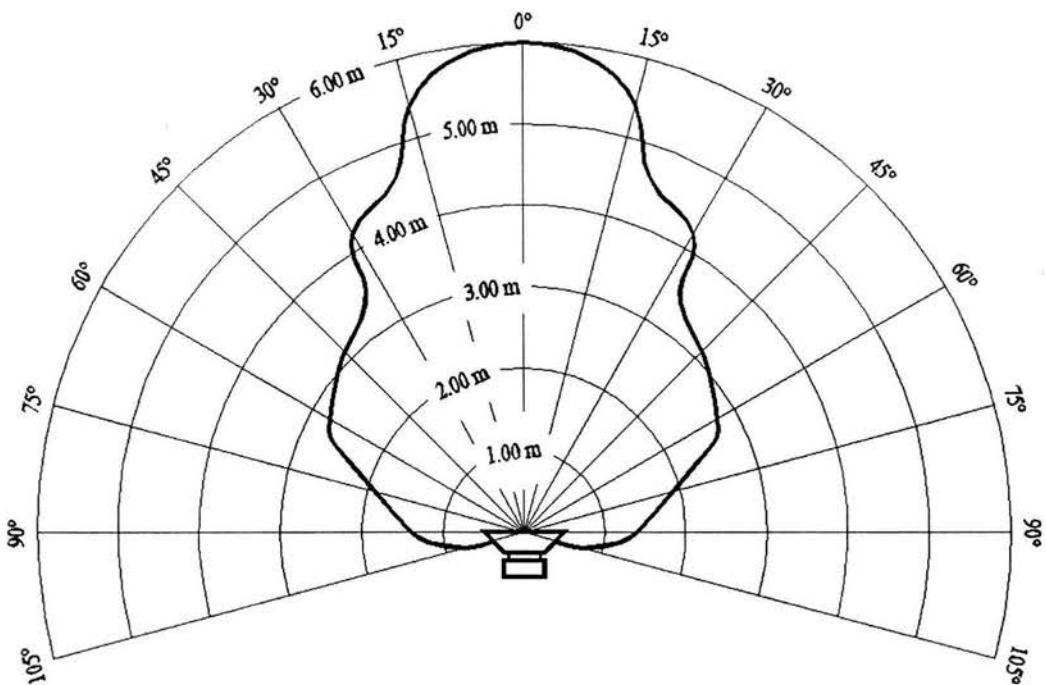


Figura 4.2 Gráfica de la respuesta de las bocinas con respecto al ángulo de propagación.



De esta forma, la expresión (4.28) quedó:

$$E\{A\} \approx 0.001402x_1^2 - 0.005608x_1 - 0.005315\sqrt{x_1^2 - 4x_1 + 8} - \frac{0.003543}{\sqrt{x_1^2 - 4x_1 + 8}} + 0.05398 \quad (4.41)$$

Las expresiones (4.29) y (4.30) quedaron similares a la anterior, sólo con B o C en lugar de A, y subíndice 2 ó 3 en lugar de 1. Cabe hacer notar que en la expresión (4.29), aunque es diferente el valor de  $y_2 = 4$  m, con respecto a los otros dos casos en los que  $y_i = 0$  m, la expresión permaneció sin cambio.

Para el caso de la expresión (4.37), se convirtió a:

$$E\{A^2\} \approx 0.000007851x_1^4 - 0.00006281x_1^3 + 0.1571x_1^2 - 0.6279x_1 - 0.00005948[x_1^2 - 4x_1 + 8]^{\frac{3}{2}} - 0.002841\sqrt{x_1^2 - 4x_1 + 8} - \frac{0.001656}{\sqrt{x_1^2 - 4x_1 + 8}} + 1.678 \quad (4.42)$$

La ecuación (4.38) quedó como:

$$E\{B^2\} \approx 0.000007851x_2^4 - 0.00006281x_2^3 + 0.1571x_2^2 - 0.6279x_2 - 0.00005948[x_2^2 - 4x_2 + 8]^{\frac{3}{2}} - 0.002841\sqrt{x_2^2 - 4x_2 + 8} - \frac{0.001656}{\sqrt{x_2^2 - 4x_2 + 8}} + 1.678 \quad (4.43)$$

Y la expresión (4.39) se pudo expresar como sigue;

$$E\{C^2\} \approx 0.000007851x_3^4 - 0.00006281x_3^3 + 0.1571x_3^2 - 0.6279x_3 - 0.00005948[x_3^2 - 4x_3 + 8]^{\frac{3}{2}} - 0.002841\sqrt{x_3^2 - 4x_3 + 8} - \frac{0.001656}{\sqrt{x_3^2 - 4x_3 + 8}} + 1.678 \quad (4.44)$$

Con base en que el objetivo de este proceso de optimación es determinar la posición de los faros de manera que el error medio cuadrático en la ordenada de la posición del robot sea

cercano al mínimo, se efectuó una simplificación más a las expresiones anteriores, al sustituir por polinomios de Taylor los términos que involucraban potencias fraccionarias, y luego de establecer a priori que las abscisas de los faros quedarían dentro de los rangos:

$$0 \leq x_1 \leq 2$$

$$1 \leq x_2 \leq 3$$

y

$$2 < x_3 \leq 4$$

Por tanto, las expresiones que involucraron a  $x_1$  se centraron en el valor  $x_1 = 1$ , las que involucraron a  $x_2$  en el valor  $x_2 = 2$ , y las que involucraron a  $x_3$  en el valor  $x_3 = 3$ .

Entonces, las expresiones para  $E\{A\}$ ,  $E\{B\}$ ,  $E\{C\}$ ,  $E\{A^2\}$ ,  $E\{B^2\}$  y  $E\{C^2\}$ , se simplificaron a los polinomios siguientes:

$$\begin{aligned} E\{A\} = & 0.03771 - 0.002204x_1 + 0.0009710x_1^2 \\ & - 0.0001775x_1^3 + 0.00001268x_1^4 \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} E\{B\} = & 0.03782 - 0.002508x_2 + 0.001291x_2^2 \\ & - 0.0003322x_2^3 + 0.00004152x_2^4 \end{aligned} \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} E\{C\} = & 0.04762 - 0.008623x_3 + 0.002340x_3^2 \\ & - 0.0002789x_3^3 + 0.00001268x_3^4 \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} E\{A^2\} = & 1.668 - 0.6251x_1 + 0.1565x_1^2 \\ & - 0.00009576x_1^3 + 0.000007392x_1^4 \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} E\{B^2\} = & 1.668 - 0.6252x_2 + 0.1567x_2^2 \\ & - 0.0001735x_2^3 + 0.00002168x_2^4 \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} E\{C^2\} = & 3.545 - 1.252x_3 + 0.1572x_3^2 \\ & - 0.0001549x_3^3 + 0.000007392x_3^4 \end{aligned} \quad (4.50)$$

A partir de las expresiones anteriores, se obtuvo la función de error medio cuadrático en el cálculo de la ordenada de la posición del robot móvil, luego de sustituir (4.45), (4.46), (4.47), (4.48), (4.49) y (4.50) en la ecuación (4.17):

$$E_{\text{rms}} = \frac{\left( \begin{aligned} &338.8 \times 10^{-9} x_1^4 x_2^2 + 115.5 \times 10^{-9} x_1^4 x_3^2 - 231.0 \times 10^{-9} x_1^4 x_2 x_3 \\ &+ 338.8 \times 10^{-9} x_1^2 x_2^4 + 338.8 \times 10^{-9} x_2^4 x_3^2 - 677.6 \times 10^{-9} x_1 x_2^4 x_3 \\ &+ 115.5 \times 10^{-9} x_1^2 x_3^4 + 115.5 \times 10^{-9} x_2^2 x_3^4 - 231.0 \times 10^{-9} x_1 x_2 x_3^4 \\ &- 4.739 \times 10^{-9} x_1^3 x_2^3 - 8.275 \times 10^{-9} x_1^3 x_3^3 + 4.739 \times 10^{-9} x_1^3 x_2^2 x_3 \\ &+ 8.275 \times 10^{-9} x_1^3 x_2 x_3^2 - 4.739 \times 10^{-9} x_2^3 x_3^3 + 4.739 \times 10^{-9} x_1^2 x_2^3 x_3 \\ &+ 4.739 \times 10^{-9} x_1 x_2^3 x_3^2 + 8.275 \times 10^{-9} x_1^2 x_2 x_3^3 + 4.739 \times 10^{-9} x_1 x_2^2 x_3^3 \\ &- 17.75 \times 10^{-9} x_1^2 x_2^2 x_3^2 - 1.477 \times 10^{-6} x_1^3 x_2^2 - 1.435 \times 10^{-6} x_1^3 x_3^2 \\ &+ 2.912 \times 10^{-6} x_1^3 x_2 x_3 - 2.694 \times 10^{-6} x_1^2 x_2^3 - 2.675 \times 10^{-6} x_2^3 x_3^2 \\ &+ 5.369 \times 10^{-6} x_1 x_2^3 x_3 - 2.392 \times 10^{-6} x_1^2 x_3^3 - 2.401 \times 10^{-6} x_2^2 x_3^3 \\ &+ 4.793 \times 10^{-6} x_1 x_2 x_3^3 + 61.61 \times 10^{-9} x_1^2 x_2^2 x_3 - 52.22 \times 10^{-9} x_1^2 x_2 x_3^2 \\ &- 9.399 \times 10^{-9} x_1 x_2^2 x_3^2 + 96.79 \times 10^{-9} x_1^3 x_2 - 96.79 \times 10^{-9} x_1^3 x_3 \\ &+ 51.62 \times 10^{-9} x_1 x_2^3 - 51.62 \times 10^{-9} x_2^3 x_3 - 6.659 \times 10^{-9} x_1 x_3^3 \\ &+ 6.659 \times 10^{-9} x_2 x_3^3 - 0.004889 x_1^2 x_2 x_3 + 0.004892 x_1^2 x_2^2 \\ &+ 0.004901 x_1^2 x_3^2 + 0.004903 x_2^2 x_3^2 - 0.004895 x_1 x_2^2 x_3 \\ &- 0.004912 x_1 x_2 x_3^2 - 0.009768 x_1^2 x_2 - 0.01956 x_1^2 x_3 \\ &- 0.009764 x_1 x_2^2 - 0.01956 x_2^2 x_3 - 0.009764 x_1 x_3^2 \\ &- 0.009768 x_2 x_3^2 + 0.07819 x_1 x_2 x_3 + 0.08140 x_1^2 + 0.08140 x_2^2 \\ &+ 0.05208 x_3^2 - 0.1107 x_1 x_2 - 0.05208 x_1 x_3 - 0.05208 x_2 x_3 \end{aligned} \right)^{\frac{1}{2}}}{x_1 - x_3} \quad (4.51)$$

Con el empleo del programa Maple V, versión 5, se pudo comprobar con éxito el resultado anterior. Además, se aplicó el mismo programa para obtener las derivadas parciales de dicha función de error medio cuadrático,  $E_{\text{rms}}$ , con respecto a las variables,  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ .

Finalmente, se resolvió el sistema no lineal de ecuaciones formado por las derivadas parciales obtenidas igualadas a cero, para lo cual fue necesario establecer que las variables quedaran dentro de los rangos de valores  $0 \leq x_1 \leq 2$ ,  $1 \leq x_2 \leq 3$ ,  $2 < x_3 \leq 4$ ; los resultados obtenidos fueron:

$$x_1 = 1.444 \text{ m}$$

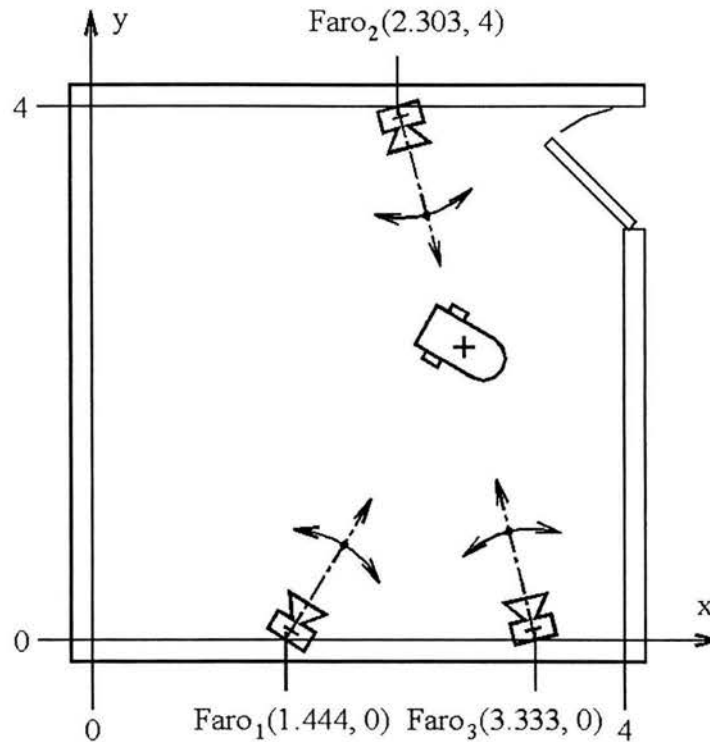
$$x_2 = 2.303 \text{ m}$$

$$x_3 = 3.333 \text{ m}$$

Con estos valores de abscisas, el error medio cuadrático tuvo el valor mínimo siguiente:

$$E_{\text{rms}} = 0.1586 \text{ m}$$

En la Figura 4.3 se ilustra la posición de los faros para la cual se obtuvo el valor mínimo del error medio cuadrático, obtenido con el proceso explicado en los párrafos precedentes.



*Figura 4.3 Ilustración de la posición de los faros para la cual se obtuvo el valor mínimo del error medio cuadrático.*

Como se mencionó anteriormente, esta propuesta tiene la restricción de que los faros deben estar dirigidos en todo momento hacia el robot, para lo cual es necesario montar las bocinas en unas bases giratorias operadas por un controlador, que sea capaz de moverlas de forma automática para lograr la orientación deseada.

## 4.2 SEGUNDA APROXIMACIÓN

Con objeto de no complicar la solución del problema, para esta aproximación se estableció que los faros quedarían fijos, orientados a un determinado ángulo con respecto a las paredes

de la habitación en donde navegará dicho robot, para la obtención de las coordenadas óptimas del robot móvil. Al simplificar este aspecto, la parte que se complicó es la función del error inherente generado en la medición de la distancia del faro al robot. Por tanto, la citada función no sólo dependió de la distancia mencionada, sino que además influyó también la desviación angular a la que se encontrara el robot, entendiéndose como tal el ángulo que forman la semirrecta que va del faro al robot y el eje central de propagación de la bocina.

Se obtuvo la función del error inherente de forma experimental, luego de colocar el emisor a una distancia con respecto al micrófono dentro del intervalo de 0.200 a 5.400 metros con incrementos de 0.400 metros, y desviaciones angulares de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  con incrementos variables, según la distancia considerada.

Para obtener datos confiables, se tomaron veinte lecturas para cada valor de distancia así como de desviación angular, de las cuales se determinaron la media y la desviación estándar para cada conjunto de medidas.

En la Tabla 4.2 se muestra un resumen de los resultados obtenidos, con base en el cálculo del error esperado para algunas distancias y desviaciones angulares específicas. Para dicho cálculo se empleó la expresión siguiente:

$$e_{\text{esp}} = d_{\text{real}} - \mu \quad (4.52)$$

en la que  $e_{\text{esp}}$  es el error esperado,  $d_{\text{real}}$  la distancia real establecida, y  $\mu$  la media de las lecturas tomadas experimentalmente. Es importante señalar que conforme se incrementó la distancia, no fue posible obtener lecturas confiables para desviaciones angulares mayores a una determinada medida. En la mencionada Tabla 4.2 se muestra al final de algunos renglones y entre paréntesis, la última desviación angular para la que fue posible determinar un valor confiable, junto con el dato de error esperado correspondiente.

Como se puede observar en la Tabla citada, los valores de error esperado,  $e_{\text{esp}}$ , varían de manera incierta. Durante el proceso experimental de toma de lecturas se observó que la medida calculada variaba si se modificaba el entorno, por ejemplo, quitando o poniendo objetos cerca del micrófono o del emisor.

Por lo tanto, con base en este hecho se pudo proponer que para el proceso de optimización de determinación de la posición de los faros, era conveniente repetir el procedimiento experimental de obtención del error esperado, en el mismo lugar en donde se va a instalar el sistema, con la presencia de todos los objetos físicos que normalmente se encuentren en dicho espacio.

Distancia real, $d_{real}$	Desviación angular, $\Delta\theta$					
	0°	20°	40°	60°	80°	90°
0.200	0.024	0.015	-0.013	-0.102	-0.088	-0.086
0.600	-0.001	-0.009	-0.064	-0.091	-0.067	-0.073
1.000	-0.013	-0.027	-0.045	-0.058	-0.072	-0.080
1.400	-0.001	-0.026	-0.044	-0.092	-0.050	-0.084
1.800	0.010	0.008	-0.032	-0.080	(70°) -0.081	
2.200	0.015	-0.023	-0.031	-0.023	(70°) -0.084	
2.600	0.028	-0.058	-0.242	-0.127	(65°) -0.067	
3.000	0.012	-0.014	-0.308	(50°) -0.272		
3.400	0.022	0.009	(35°) -0.156			
3.800	0.042	0.013	(25°) -0.015			
4.200	0.057	0.002	(30°) 0.021			
4.600	0.051	(20°) 0.041				
5.000	0.052	(15°) 0.031				
5.400	0.037	(15°) 0.029				

*Tabla 4.2 Valores de error esperado,  $e_{esp}$ , en metros, en función de la distancia real,  $d_{real}$ , en metros, y la desviación angular,  $\Delta\theta$ .*

Para realizar el proceso de optimización con esta aproximación, fue necesario determinar la función del error esperado,  $f(d_{real}, \Delta\theta)$ , con respecto a dos parámetros: la distancia real,  $d_{real}$ , y la desviación angular,  $\Delta\theta$ .

Ya que la obtención analítica de esta función de error es complicada, por una parte, y por otra que el proceso matemático posterior es más complejo que el presentado para la primera aproximación, para este caso se decidió realizar un proceso numérico.

Dicho proceso estuvo basado en la obtención de una función de error numérica, cuya determinación se hizo como sigue.

- 1 Con base en los valores experimentales obtenidos, se calcularon los coeficientes de polinomios de tercer grado para la función de error,  $f(\Delta\theta)$ , que se ajustaran a los datos de cada renglón, es decir, para cada valor de distancia real, con la desviación angular,  $\Delta\theta$ , como variable independiente, y el empleo del método de mínimos cuadrados. Para ello, se partió de que dicho polinomio de tercer grado es de la forma

$$f(\Delta\theta) = a + b \Delta\theta + c \Delta^2\theta + d \Delta^3\theta \quad (4.53)$$

y los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  se obtuvieron al resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a N + b \sum_{i=1}^N \Delta\theta_i + c \sum_{i=1}^N \Delta^2\theta_i + d \sum_{i=1}^N \Delta^3\theta_i &= \sum_{i=1}^N f_i(\Delta\theta) \\ a \sum_{i=1}^N \Delta\theta_i + b \sum_{i=1}^N \Delta^2\theta_i + c \sum_{i=1}^N \Delta^3\theta_i + d \sum_{i=1}^N \Delta^4\theta_i &= \sum_{i=1}^N \Delta\theta_i f_i(\Delta\theta) \\ a \sum_{i=1}^N \Delta^2\theta_i + b \sum_{i=1}^N \Delta^3\theta_i + c \sum_{i=1}^N \Delta^4\theta_i + d \sum_{i=1}^N \Delta^5\theta_i &= \sum_{i=1}^N \Delta^2\theta_i f_i(\Delta\theta) \\ a \sum_{i=1}^N \Delta^3\theta_i + b \sum_{i=1}^N \Delta^4\theta_i + c \sum_{i=1}^N \Delta^5\theta_i + d \sum_{i=1}^N \Delta^6\theta_i &= \sum_{i=1}^N \Delta^3\theta_i f_i(\Delta\theta) \end{aligned} \quad (4.54)$$

donde  $N$  es el total de puntos para cada conjunto de valores.

- 2 Con el uso de los coeficientes de los polinomios de tercer grado obtenidos, se recalcularon los valores del error esperado, pero ahora para valores de desviación angular,  $\Delta\theta$ , cada  $5^\circ$ , desde  $0^\circ$  hasta el valor para el que se determinó el último dato confiable, para cada uno de los renglones, es decir, para cada una de las distancias reales,  $d_{\text{real}}$ .
- 3 Se obtuvieron los valores del error esperado para las distancias intermedias,  $d_{\text{real}}$ , cada  $0.100$  m, con base en la interpolación lineal de los valores para cada una de las desviaciones angulares.

En principio, no se consideraron para el cálculo de la función de error las desviaciones estándar obtenidas experimentalmente, las cuales se pueden considerar que son generadas por ruido *Gaussiano*.

Luego de obtener la función de error numérica, se procedió al proceso de determinación de la posición y orientación óptima de los faros de manera que se minimizara el error medio cuadrático total.

El citado proceso de optimización se realizó de forma numérica con ayuda de un programa para computadora. De manera similar a la primera aproximación, se consideró un cuarto con medidas de 4 x 4 m, y se estableció que el primer faro así como el tercero estarían pegados a una de las paredes de la habitación en la que esté navegando el robot, sobre la que se hace pasar el eje x, y por tanto  $y_1 = 0$  m,  $y_3 = 0$  m, y el segundo faro pegado a la pared opuesta, lo que implica que  $y_2 = 4$  m.

Asimismo, se hizo variar la posición del primer faro dentro del intervalo de valores  $0 \leq x_1 \leq 2$  m, la del segundo dentro del intervalo  $1 \leq x_2 \leq 3$  m, y la del tercero en el intervalo  $2 \leq x_3 \leq 4$  m.

Con respecto a la orientación del eje de propagación de los faros con respecto al eje x, al primero se le hizo variar dentro del intervalo  $0^\circ \leq \theta_1 \leq 90^\circ$ , al segundo dentro del intervalo  $225^\circ \leq \theta_2 \leq 315^\circ$ , y al tercero dentro del intervalo  $90^\circ \leq \theta_3 \leq 180^\circ$ , de tal forma que el robot siempre se encontrara en una posición tal que fuera capaz de detectar la señal de cada uno de los faros.

Para cada una de las combinaciones de abscisa y orientación de los tres faros, se calculó el error medio cuadrático; dado que este error se puede determinar como:

$$E_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{\int_A [(x - x_\epsilon)^2 + (y - y_\epsilon)^2] dA}{\int_A dA}} \quad (4.55)$$

se procedió al cálculo numérico de la integral; se estableció la región de área como:

$$R_A = \{(x, y) \mid 0.2 \leq x \leq 3.8 \text{ m}, 0.2 \leq y \leq 3.8 \text{ m}, x, y \in \mathfrak{R}\}$$

cuyos límites inferior y superior se obtuvieron considerando las dimensiones del área de trabajo del robot móvil y el radio aproximado de éste último, que es de 0.2 m.



En la Figura 4.4 se muestra el intervalo de valores de abscisa y de orientación dentro de los que se hizo variar a cada uno de los faros durante el proceso de optimización.

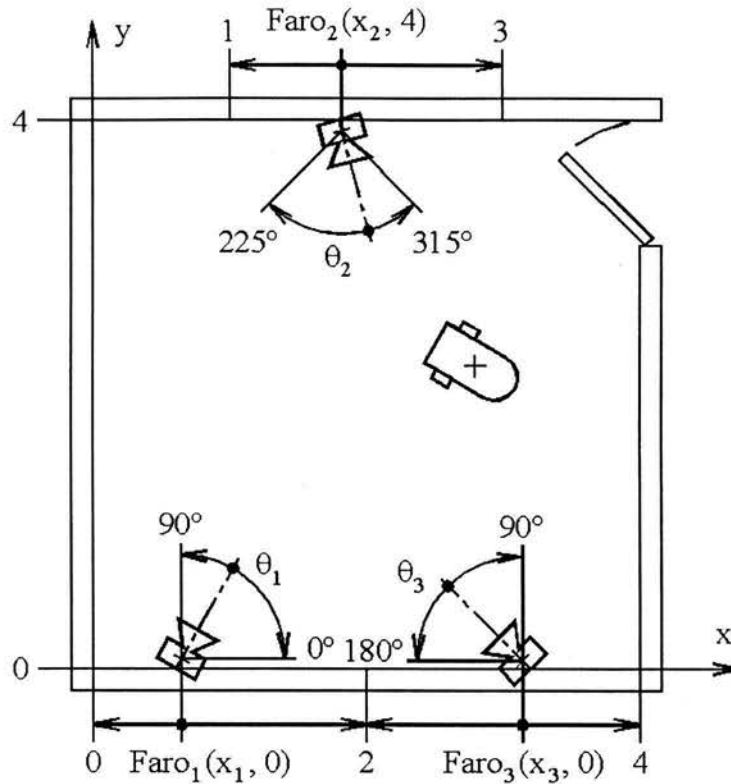


Figura 4.4 Intervalo de valores dentro de los que se varió la ubicación y la orientación de cada uno de los faros durante el proceso de optimización. Coordenadas, en metros.

Se estableció que la variación de la abscisa y la ordenada de la posición del robot fuera cada 0.1 m; para cada punto en el que puede ubicarse el robot se determinó la distancia real a cada uno de los faros, así como la desviación angular correspondiente. Con estos dos valores, se obtuvo a partir de la función de error el valor de la discrepancia asociada para cada uno de los faros, empleando un procedimiento similar al redondeo simétrico. Por ejemplo, si la distancia real era de 3.18 m y la desviación angular de  $22^\circ$ , se tomó el valor del error correspondiente a  $d_{\text{real}} = 3.20$  m y  $\Delta\theta = 20^\circ$ .

El valor de error obtenido se sumó a la distancia real de tal manera de que se obtuviera la distancia medida por el sistema, luego de considerar despreciable el error  $\xi$  debido a ruido:

$$dm = d_{\text{real}} + f(d_{\text{real}}, \Delta\theta) + \xi \quad (4.56)$$

y con las distancias medidas a cada uno de los tres faros, se determinó la posición estimada.

Luego, se obtuvieron las discrepancias con las coordenadas reales, las cuales se elevaron al cuadrado y se sumaron, con lo que se obtuvo el error cuadrático que generaba el sistema para este punto.

Finalmente, se sumaron los errores cuadráticos de todos los puntos en los que se subdividió el área total, se dividió entre el número de dichos puntos y se le extrajo su raíz cuadrada, para obtener el valor del error medio cuadrático correspondiente a la configuración particular que fue sujeto de este procedimiento numérico.

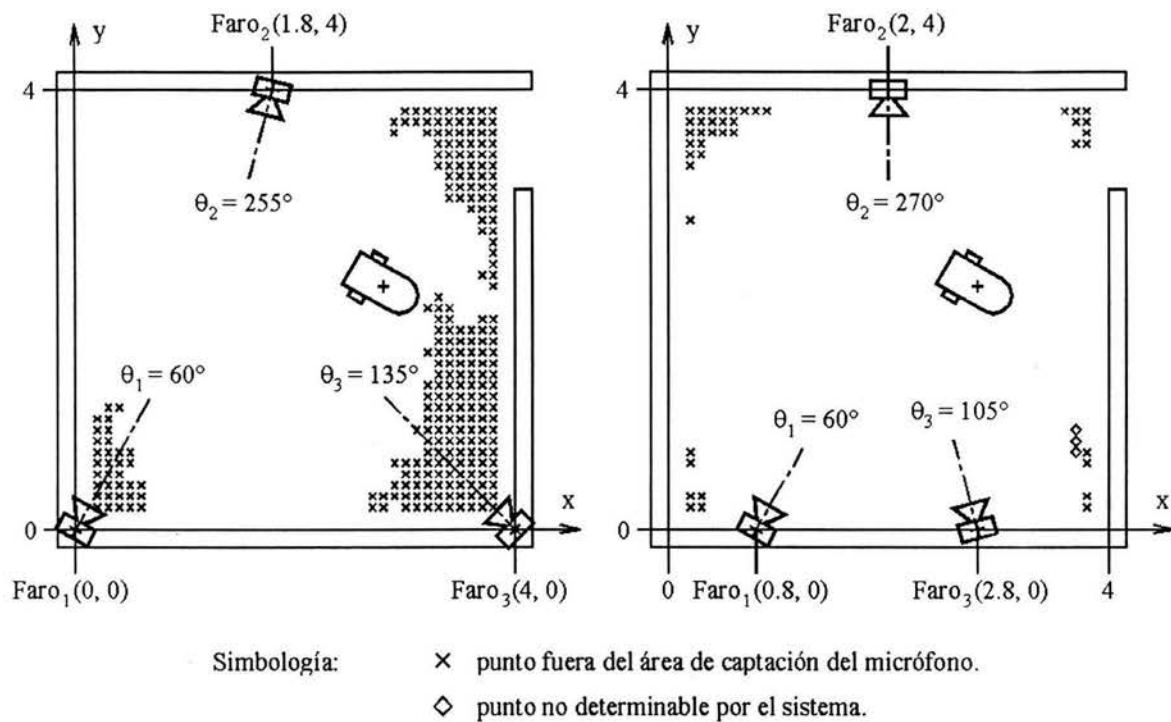
Cabe mencionar que se obtuvieron varios puntos en los que no fue posible determinar la posición del robot porque quedaron fuera del área de captación del micrófono, y uno que otro punto que tampoco fue posible establecer su ubicación con base en las distancias medidas por el sistema, o bien, cuyas coordenadas tenían un error muy grande.

Dado el resultado arriba mencionado, para obtener la configuración óptima, no fue suficiente con la simple comparación del error medio cuadrático de cada una de las configuraciones analizadas, ya que para la de error mínimo el resultado que se obtuvo fue que los puntos del área de trabajo que pudo determinar el sistema fueron muy pocos. Por tanto, se decidió considerar la configuración que tuviera el menor error con 80% o más del área de captación.

Otro criterio de optimación que se tomó en cuenta fue el de la configuración para la que se tuviera la máxima cobertura de puntos determinados por el sistema. Aunque para este caso el valor del error creció, aun así se mantuvo dentro de un rango de operación permisible.

Una de las ventajas que presentó este procedimiento numérico de optimación, es que se pudo aplicar para las dos propuestas de determinación de la posición del robot. Lo único que se requirió cambiar fueron las ecuaciones para la obtención de las coordenadas estimadas ( $x$ ,  $y$ ) de la posición a calcular.

En la Figura 4.5 a) se ilustra el resultado obtenido en el proceso numérico descrito en este apartado, para la configuración de menor error con 80% o más del área de captación, y en la Figura 4.5 b) la configuración con máxima cobertura. En ambas figuras se muestra la posición y la orientación óptima de los emisores, el área de cobertura lograda y el error generado, con base en la primera propuesta para la determinación de la posición del robot.



a) Configuración con menor error  
 error:  $E_{\text{rms}} = 0.0936$  m  
 cobertura: 81.9%

b) Configuración con máxima cobertura  
 error:  $E_{\text{rms}} = 0.1734$  m  
 cobertura: 96.7%

Figura 4.5 Ilustración de los resultados obtenidos con el proceso numérico de optimización para la localización de los emisores, con base en la propuesta para la determinación de la posición del robot con el cálculo de las distancias a los altavoces. Coordenadas, en metros.

Para poder comparar los resultados de los dos métodos para la determinación de la posición del robot móvil, también se efectuó el proceso numérico de optimización con base en el método de la diferencia de distancias. En la Figura 4.6 a) se ilustra el resultado obtenido para la configuración de menor error con 80% o más del área de captación, y en la Figura 4.6 b) la configuración con máxima cobertura.

En ambas figuras se muestra la posición y la orientación óptima de los emisores, así como el área de cobertura lograda y el error generado.

Asimismo, fue posible establecer otro tipo de regresiones para el modelado de la función de error numérica, como por ejemplo, con base en ajustes a polinomios de primero o de segundo grados, o bien, considerar que el error máximo que puede ocurrir equivale a la

suma del valor obtenido y la desviación estándar que se determinó experimentalmente, para cada uno de los puntos.

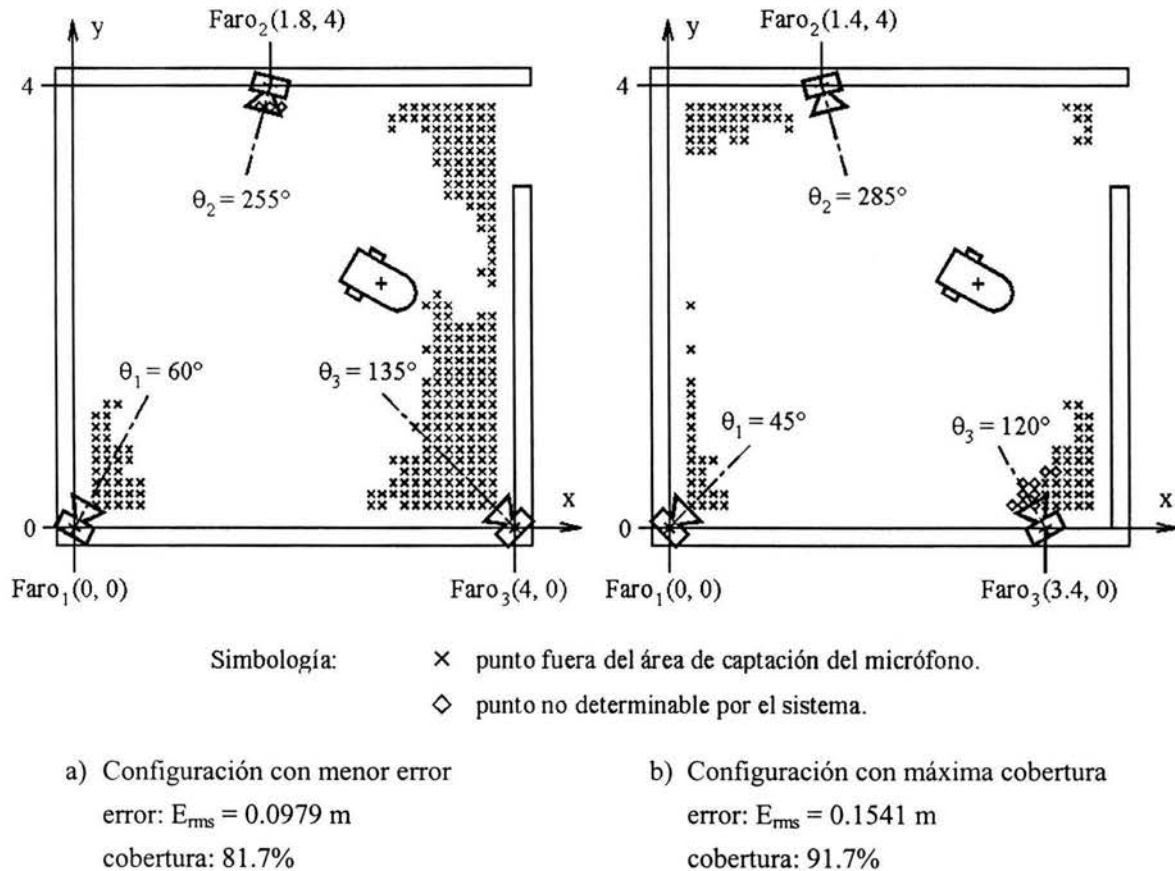


Figura 4.6 Ilustración de los resultados obtenidos con el proceso numérico de optimización para la localización de los emisores, con base en la propuesta para la determinación de la posición del robot con el cálculo de las diferencias de distancias. Coordenadas, en metros.

Al aplicar el proceso numérico de optimización con diferentes funciones de error, se verificaron los siguientes resultados.

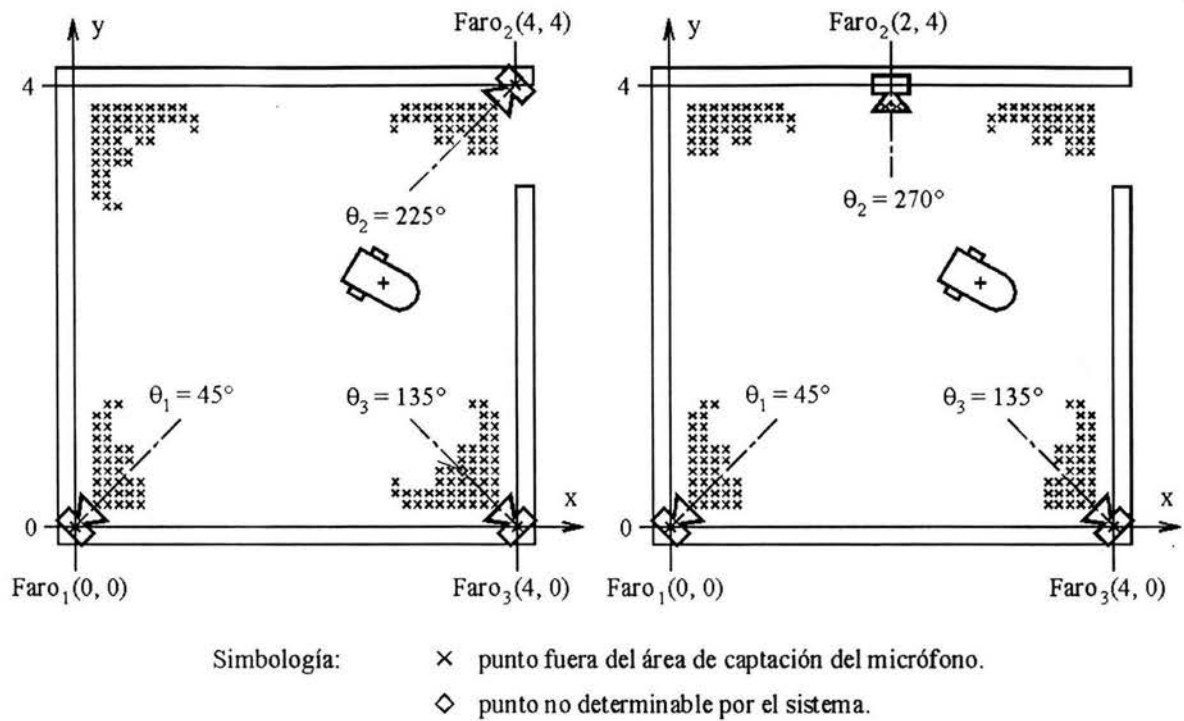
- 1 Con el empleo del algoritmo basado en la medición de distancias a los faros, la ubicación y orientación de los emisores tuvieron variaciones pequeñas, para funciones de error ajustados con polinomios de primero y de segundo grado; conforme se disminuyó el orden del polinomio de ajuste, el error medio cuadrático también disminuyó, y el área de cobertura aumentó ligeramente.

- 2 Con el método basado en el cálculo de las diferencias de distancias a los emisores, la localización de los faros tuvo mayor variación que con respecto a la primera propuesta, para las funciones de error basadas en regresiones con polinomios de primero y de segundo grado; de manera similar a esta última propuesta, conforme decreció el orden del polinomio de ajuste, el error promedio disminuyó y el área de cobertura aumentó un poco.
- 3 Cuando se realizó el incremento de los valores de la función de error con la desviación estándar para cada uno de los puntos, las configuraciones obtenidas fueron muy similares a las anteriores, y únicamente se incrementaron los valores del error medio cuadrático, en términos generales.

Finalmente, se aplicó el proceso numérico de optimación a dos configuraciones para las cuales se contaba con resultados experimentales, con objeto de comparar los valores correspondientes. El análisis de los resultados experimentales de dichas configuraciones se pueden revisar en la tesis de Krause M. P. [12], pp. 43 a 49. En las Figuras 4.7 a) y 4.7 b) se ilustran las configuraciones mencionadas, junto con la posición y orientación de los emisores y el área de cobertura para cada caso.

Estos resultados experimentales se obtuvieron con base en la propuesta para la determinación de la posición del robot con base en el cálculo de las diferencias de distancias a los faros. Por tanto, se aplicó este mismo algoritmo en el proceso de optimación numérica. Se consideró la función de error basada en ajuste con polinomios de tercer grado.

Los resultados experimentales que se obtuvieron fueron, para la configuración especial 1, un error medio cuadrático  $E_{rms} = 0.0646$ , y una cobertura del 90.3% del área total, y para la configuración especial 2, un error  $E_{rms} = 0.1658$ , y una cobertura del 93.6%. Los resultados obtenidos por el proceso numérico difieren significativamente en cuanto al error producido por la primera configuración especial, para la cual dicho error para el proceso de optimación numérica es más del doble del generado experimentalmente. Sin embargo, para la segunda configuración especial, los errores fueron del mismo orden. En cuanto al área de cobertura, los resultados son sumamente parecidos, pues la discrepancia es menor del 5% para ambos casos.



a) Configuración especial 1  
 error:  $E_{rms} = 0.1463$  m  
 cobertura: 88.1%

b) Configuración especial 2  
 error:  $E_{rms} = 0.1363$  m  
 cobertura: 89.8%

Figura 4.7 Ilustración de los resultados obtenidos con el proceso numérico de optimación para las dos configuraciones especiales. Coordenadas, en metros.

La causa probable de la diferencia en el error medio cuadrático obtenido experimentalmente con respecto al del proceso de optimación numérico, es la diferencia del ambiente físico en el que se realizó el proceso experimental de operación del sistema diseñado, con respecto al ambiente en el cual se efectuó la determinación de la función de error esperado.

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSIONES

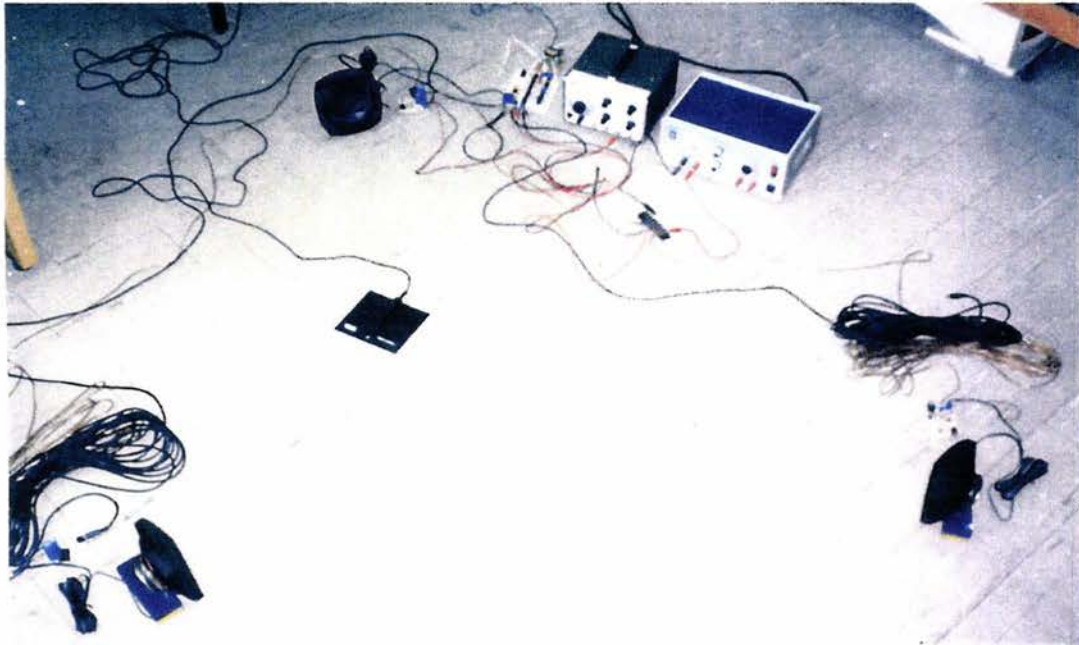
Con base en el objetivo de este trabajo plasmado en la introducción, que es el diseño de un sistema basado en tres emisores o faros ultrasónicos, colocados en lugares fijos en el área de navegación del robot, tal que sea capaz de proporcionar a éste la información de su posición en dicha área, con la mayor precisión y confiabilidad posibles, es necesario determinar la configuración óptima de la posición y orientación de dichos emisores de la manera más eficiente; en este capítulo se realiza la comparación de este objetivo con los resultados obtenidos.

Asimismo, durante el desarrollo de este proyecto se pudieron verificar varios hechos significativos que vale la pena consignarlos, para que puedan servir de referencia a otros trabajos similares.

El diseño del sistema de determinación de la posición de un robot móvil se realizó con tres altavoces ultrasónicos colocados en puntos específicos de las paredes del área de trabajo del robot, y que emiten pulsos acústicos que deben captarse con un micrófono omnidireccional a bordo del robot.

La señal recibida por el micrófono se procesó con la ayuda de un *DSP*, para el primer método, y con la *PC* montada en el mismo robot, para el segundo, de tal manera que se

podiera discriminar el instante en que llegan los pulsos de cada uno de los tres faros, y con esta información se pueda calcular la distancia a la que se encuentra el robot de cada uno de dichos emisores, para finalmente determinar la posición en la que se encuentre el robot con respecto al marco de referencia preestablecido en su área de navegación. En la Figura 5.1 se muestran los dispositivos experimentales empleados en este trabajo.



*Figura 5.1 Dispositivos experimentales empleados en el sistema para la determinación de la posición del robot móvil.*

Con respecto a los métodos geométricos empleados para la determinación de la posición del robot, se propusieron dos, uno basado en la medición de las distancias de los faros al robot, y el segundo con base en la medición de las diferencias de distancias de los emisores al robot. Para este segundo método, se establecieron tres propuestas diferentes, la primera con base en señales con frecuencias diferentes, la segunda con señales con la misma frecuencia pero procesadas con un *DSP*, y la tercera similar a la segunda pero con el procesamiento de las señales realizadas por la *PC* del robot.

Para lograr establecer la posición y orientación óptima de cada uno de los altavoces, fue necesario modelar la función de error generado por el sistema, con respecto a la distancia real entre la bocina y el micrófono, así como con respecto a la desviación angular entre el eje de propagación del emisor y la línea imaginaria que une dicho emisor y el robot. A



partir de esta función de error, se aplicaron dos algoritmos, uno analítico-numérico, y otro puramente numérico, para obtener la configuración de los altavoces para la que se tuviera el mínimo error cuadrático medio, o la máxima cobertura del área en la que se mueve el robot.

El sistema que se diseñó y construyó como producto de este trabajo, funcionó de manera confiable en un área de trabajo de 4 x 4 metros sin obstáculos que impidieran la captación de las señales acústicas por el micrófono, y en cuyo desempeño generó un error medio cuadrático del orden de los 100 mm.

La función de error asociada a la distancia medida por este dispositivo es una función no lineal, y depende de la distancia real a la que se encuentre el micrófono del emisor, de la desviación angular del segmento que une el micrófono con el emisor con respecto al eje de propagación de este último, de los objetos que puedan encontrarse en el entorno de trabajo del robot, de la frecuencia y la potencia de la señal generada por los altavoces, entre los parámetros más importantes. Por lo tanto, estos parámetros influyeron significativamente en el error medio cuadrático generado en la operación del sistema, así como en el área de cobertura que éste pudo lograr. En particular para lograr una mayor área de cobertura, es necesario incrementar la potencia de los emisores.

Para verificar el desempeño del sistema, se colocaron los emisores a la misma altura que el micrófono; dado que en este caso es más fácil que se presente el problema de que el micrófono no sea capaz de captar la señal acústica debido a obstáculos que se puedan encontrar entre éste y los citados emisores, es más recomendable colocar éstos en la parte superior de las paredes, en cuyo caso a las ecuaciones de operación del sistema se deberán añadir como parámetros las diferencias de alturas entre ellos.

El desempeño de un filtro digital realizado en un procesador digital de señales como el *DSP56002* de *Motorola* fue sobresaliente, ya que funcionó con apego a las características aplicadas en su diseño, una de las cuales es la respuesta en frecuencia del dispositivo, particularmente importante para este sistema. Finalmente se decidió no emplearlo, ya que las señales acústicas captadas por el micrófono fueron introducidas directamente a una *PC* a través de su tarjeta de sonido, y de esta manera se pudo evitar el problema de la comunicación entre dicho *DSP* con la computadora, además de que para la detección de la llegada de la señal acústica sólo fue necesaria la comparación de la amplitud de la señal captada con un umbral determinado experimentalmente, dado que dicha amplitud fue mucho mayor que la del sonido ambiental del lugar en el que se desarrollaron las pruebas.

De las propuestas presentadas en este trabajo, se considera que la mejor es la que se basa en la medición de las diferencias de distancias entre el micrófono y los faros, ya que no requirió de la sincronización de las señales emitidas, ni el empleo del *DSP*. Tal como se comentó en el capítulo anterior, tanto el error generado por el sistema como el área de cobertura de las propuestas discutidas fueron prácticamente iguales.

Es posible disminuir significativamente el error cuadrático medio y al mismo tiempo incrementar el área de cobertura, si se colocan en lugar de una sola bocina en cada una de las tres posiciones, un arreglo semicircular de dos o más bocinas con diferentes orientaciones, de tal manera que la señal acústica generada por dicho arreglo cubra la mayor área posible del espacio de trabajo del robot.

Los pulsos ultrasónicos que se requirieron generar para la operación del sistema provocaron chasquidos audibles, y ésta fue la causa por la cual se decidió bajar la frecuencia de las señales de manera que disminuyera la atenuación de la señal producida por los emisores. Este inconveniente podría salvarse si en lugar del pulso se enviara una señal modulada en frecuencia, de tal manera que el tiempo en el que se requiera el pulso se tuviera una frecuencia, y durante el tiempo de no pulso otra frecuencia diferente, ambas ultrasónicas. Con esta solución sería necesario el empleo de un filtro digital.

Con respecto a la optimación de la configuración de los faros, se considera que lo más conveniente es maximizar el área de cobertura aunque el error medio cuadrático sea mayor, en lugar de minimizar dicho error, siempre y cuando se mantenga dentro un rango permisible, es decir, que sea menor que la resolución necesaria en la posición del robot para lograr su adecuada navegación en su entorno de trabajo.

Como trabajo a futuro se propone probar el sistema diseñado en un ambiente de trabajo con ruido ambiental más o menos intenso y con obstáculos tanto fijos (mesas, sillas, cajas) como móviles (personas, animales, otros robots) en el área de navegación del robot, de tal forma que se pueda verificar su desempeño, en términos de cobertura y de error generado. Una de las posibilidades interesantes que pueden proponerse para lograr el funcionamiento del sistema en entornos con obstáculos es el de colocar los faros en el techo de la habitación, de manera que dichos obstáculos prácticamente no impidan la captación de las señales acústicas por el micrófono a bordo del robot.

## APÉNDICE

### A.1 FILTRO DE *BUTTERWORTH* PASO-BAJAS

Un filtro de *Butterworth* paso-bajas tiene la propiedad de que la respuesta en magnitud es máximamente plana en la banda de paso, lo cual implica que para un filtro de orden  $n$ , las primeras  $(2n - 1)$  derivadas de la función de magnitud cuadrada son cero para el valor de abscisa  $\Omega = 0$  (Oppenheim y Schaffer [5]). La función de magnitud cuadrada de un filtro paso-bajas analógico de *Butterworth* es de la forma:

$$|H_n(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\Omega}{j\Omega_c}\right)^{2n}} \quad (\text{A.1})$$

en el que  $n$  es el orden del filtro,  $\Omega$  es la frecuencia angular analógica y  $\Omega_c$  es la frecuencia angular de corte del mismo.

De la función de magnitud cuadrada (A.1) de este filtro, se desprenden las siguientes características:

- 1  $|H_n(j\Omega)|_{\Omega=0}^2 = 1$
- 2  $|H_n(j\Omega)|_{\Omega=\Omega_c}^2 = 0.5$

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

- 3  $|H_n(j\Omega)|_{\Omega=\Omega_c} = 0.7071$ , lo cual implica que  
 $20 \log(0.7071) = -3.01 \text{ dB}$
- 4 La función de magnitud cuadrada es *monotónica* decreciente, tanto en la banda de paso como en la de supresión.
- 5 A medida que  $n$  se hace más grande,  $|H_n(j\Omega)|^2$  se aproxima a un filtro ideal paso-bajas (ver Figura A.1).

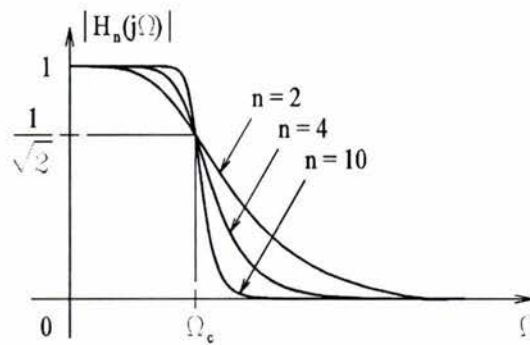


Figura A.1 Gráfica de la función de magnitud de la respuesta en frecuencia de un filtro paso-bajas tipo Butterworth, para diferentes valores de  $n$ .

A partir de la función de magnitud cuadrada, se puede verificar que:

$$|H_n(j\Omega)|^2 = H_n(j\Omega)H_n(-j\Omega) \quad (\text{A.2})$$

y sustituyendo  $j\Omega$  por la variable compleja  $s$  en (2.3), la expresión queda:

$$H_n(s)H_n(-s) = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2n}} \quad (\text{A.3})$$

cuyos polos se pueden obtener determinando las raíces de su denominador, es decir, los valores de  $s$  que satisfacen a la expresión:

$$1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2n} = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$s^{2n} = (-1)(j\Omega_c)^{2n}$$

de donde<sup>1</sup>:

$$s = (-1)^{\frac{1}{2n}} (j\Omega_c)$$

$$s_k = \Omega_c \exp\left(\frac{j\pi(2k+n+1)}{2n}\right) \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1 \quad (\text{A.5})$$

es decir, se obtienen  $2n$  polos igualmente espaciados en ángulo sobre la circunferencia con radio  $\Omega_c$  en el plano complejo de la variable  $s$ , con el eje imaginario  $j\Omega$  como eje de simetría (Oppenheim y Schafer [5]).

Por ejemplo, para un filtro paso-bajas tipo *Butterworth* de cuarto orden, los polos tendrán un espaciamiento de  $\frac{\pi}{4}$  rad, tal como se muestra en la Figura A.2.

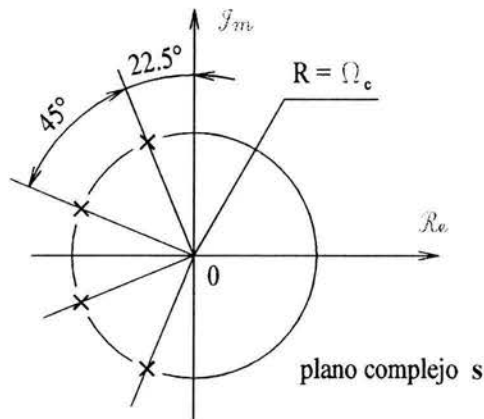


Figura A.2 Ubicación de los polos de un filtro paso-bajas tipo *Butterworth* de cuarto orden, en el plano complejo  $s$ .

<sup>1</sup> La obtención de (A.5) se puede entender si se considera que  $(-1)^{\frac{1}{2n}} = [\exp(j\pi)]^{\frac{1}{2n}}$ , es decir,  $(-1)^{\frac{1}{2n}} = \exp\left(\frac{j\pi}{2n}\right)$  la cual tiene  $2n$  valores posibles:  $(-1)^{\frac{1}{2n}} = \exp\left(\frac{j2\pi k}{2n} + \frac{j\pi}{2n}\right)$ , que al simplificar queda  $(-1)^{\frac{1}{2n}} = \exp\left(\frac{j\pi(2k+1)}{2n}\right)$ , y por tanto,  $(-1)^{\frac{1}{2n}} (j\Omega_c) = \Omega_c \exp\left(\frac{j\pi(2k+1)}{2n}\right) \exp\left(\frac{j\pi}{2}\right)$ , de donde finalmente se obtiene que:  $(-1)^{\frac{1}{2n}} (j\Omega_c) = \Omega_c \exp\left(\frac{j\pi(2k+n+1)}{2n}\right)$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$ .

Por otro lado, para que el filtro sea causal y estable, se requiere que sus polos estén en el lado izquierdo del plano complejo  $s$ . Entonces, si se quiere obtener la función de transferencia para un filtro paso-bajas tipo *Butterworth* de cuarto orden, por ejemplo, se puede verificar que los polos deben ser los primeros cuatro de la expresión (A.5):

$$s_0 = \Omega_c \exp(j\frac{5}{8}\pi)$$

$$s_1 = \Omega_c \exp(j\frac{7}{8}\pi)$$

$$s_2 = \Omega_c \exp(j\frac{9}{8}\pi)$$

y

$$s_3 = \Omega_c \exp(j\frac{11}{8}\pi)$$

es decir:

$$s_0 = \Omega_c [\cos(\frac{5}{8}\pi) + j\sin(\frac{5}{8}\pi)]$$

$$s_0 = \Omega_c (-0.38268343 + j0.92387953)$$

de manera similar, se pueden obtener:

$$s_1 = \Omega_c (-0.92387953 + j0.38268343)$$

$$s_2 = \Omega_c (-0.92387953 - j0.38268343)$$

y

$$s_3 = \Omega_c (-0.38268343 - j0.92387953)$$

Por tanto, la función de transferencia de dicho filtro estará dada por la expresión:

$$H(s) = \frac{1}{(s + 0.38268343 - j0.92387953)(s + 0.92387953 - j0.38268343)} \cdot \frac{1}{(s + 0.92387953 + j0.38268343)(s + 0.38268343 + j0.92387953)}$$

de donde, al reducir los polos conjugados, se llega a la expresión:

$$H(s) = \frac{1}{(s^2 + 0.76536686s + 1)(s^2 + 1.84775906s + 1)} \quad (A.6)$$

Para determinar el orden de un filtro paso-bajas tipo *Butterworth*, usualmente se establece la frecuencia límite de la banda de paso,  $\Omega_1$ , con su respectiva atenuación máxima,  $k_1$ , así como la frecuencia límite de la banda de supresión,  $\Omega_2$ , con su respectiva atenuación mínima,  $k_2$ .

Con base en las especificaciones mencionadas se puede establecer que para el intervalo

$$0 \leq \Omega \leq \Omega_1$$

$$k_1 \leq 10 \log_{10} |H(j\Omega)|^2 \leq 0 \quad (\text{A.7})$$

por lo cual, para  $\Omega = \Omega_1$ :

$$k_1 = 10 \log_{10} \left[ \frac{1}{1 + \left( \frac{\Omega_1}{\Omega_c} \right)^{2n}} \right]$$

$$\left( \frac{\Omega_1}{\Omega_c} \right)^{2n} = 10^{-\left( \frac{k_1}{10} \right)} - 1 \quad (\text{A.8})$$

y además debe cumplir que para

$$\Omega_2 \leq \Omega$$

$$10 \log_{10} |H(j\Omega)|^2 \leq k_2, \quad (\text{A.9})$$

por lo que si  $\Omega = \Omega_2$ :

$$10 \log_{10} \left[ \frac{1}{1 + \left( \frac{\Omega_2}{\Omega_c} \right)^{2n}} \right] = k_2$$

de donde:

$$\left( \frac{\Omega_2}{\Omega_c} \right)^{2n} = 10^{-\left( \frac{k_2}{10} \right)} - 1 \quad (\text{A.10})$$

Dividiendo (A.8) por (A.10):

$$\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2}\right)^{2n} = \frac{10^{-\left(\frac{k_1}{10}\right)} - 1}{10^{-\left(\frac{k_2}{10}\right)} - 1}$$

por tanto:

$$n = \left\lceil \frac{\log_{10} \left( \frac{10^{-\left(\frac{k_1}{10}\right)} - 1}{10^{-\left(\frac{k_2}{10}\right)} - 1} \right)}{2 \log_{10} \left( \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \right)} \right\rceil \quad (\text{A.11})$$

es decir, para que cumpla con las condiciones establecidas, es necesario escoger el valor de  $n$  que sea el entero mayor al obtenido.

## A.2 TRANSFORMACIÓN *BILINEAL*

El proceso que es necesario ejecutar para obtener la función de transferencia de un filtro digital, es la aplicación de algún tipo de transformación de la variable analógica  $s$  a la variable discreta  $z$ . Lo que se encuentra frecuentemente en la literatura correspondiente, es aquella conocida como transformación *bilineal*.

La deducción de la expresión para la transformación *bilineal* se presenta a continuación (Lane y Hillman [13]). A partir de la función de transferencia de un filtro de primer orden, en el dominio de la frecuencia:

$$H(s) = \frac{b}{s + a} \quad (\text{A.12})$$

por tanto, la expresión se puede reescribir como:

$$sY(s) + aY(s) = bX(s) \quad (\text{A.13})$$



y si se obtiene su *antitransformada de Laplace*:

$$\frac{d}{dt} y(t) = -ay(t) + bx(t) \quad (\text{A.14})$$

luego, integrando ambos miembros de la ecuación:

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{dt} y(t) dt = \int_{t_0}^t [-ay(t) + bx(t)] dt \quad (\text{A.15})$$

Se integra el miembro derecho aplicando la fórmula trapezoidal:

$$y(t) - y(t_0) = \frac{1}{2} [-ay(t) + bx(t) - ay(t_0) + bx(t_0)](t - t_0) \quad (\text{A.16})$$

si se establece que  $t = nT$  y  $t_0 = (n - 1)T$ , donde  $T$  representa el periodo de muestreo de la señal discreta, y se desarrolla la ecuación, queda:

$$2y(nT) - 2y((n - 1)T) + aTy(nT) + aTy((n - 1)T) = bx(nT) + bx((n - 1)T) \quad (\text{A.17})$$

y se obtiene su transformada  $z$ :

$$2Y(z) - 2Y(z)z^{-1} + aTY(z) + aTY(z)z^{-1} = bX(z) + bX(z)z^{-1} \quad (\text{A.18})$$

se agrupan términos semejantes:

$$[2(1 - z^{-1}) + aT(1 + z^{-1})]Y(z) = bT(1 + z^{-1})X(z) \quad (\text{A.19})$$

de donde se obtiene la función de transferencia en el dominio de  $z$ :

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{bT(1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1}) + aT(1 + z^{-1})} \quad (\text{A.20})$$

y se divide el numerador y el denominador por  $T(1 + z^{-1})$ :

$$H(z) = \frac{b}{\frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})} + a} \quad (\text{A.21})$$

Al comparar esta última expresión con la función de transferencia en el dominio de la frecuencia, es fácil determinar que, para este caso:

$$s = \frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})} \quad (\text{A.22})$$

expresión que se conoce como transformación *bilineal*.

Aunque para la deducción se partió de una expresión de primer orden, esta transformación es aplicable a funciones de transferencia de cualquier orden.

### **A.3 REALIZACIÓN DE FILTROS DIGITALES EMPLEANDO EL DSP56002**

A partir de la función de transferencia discreta  $H(z)$  de un filtro *IIR*, es posible llevarlo a la práctica con el empleo de un *DSP*, de varias maneras diferentes. Los procedimientos más populares son:

1. la Forma Directa I, también conocida como Forma Transpuesta;
2. la Forma Directa II, o Forma Canónica;
3. la Forma Directa en Cascada;
4. la Forma Directa en Paralelo.

La realización de filtros digitales mediante la Forma Directa en Cascada y la Forma Directa en Paralelo, requiere de sustituir la función de transferencia original por el producto o la suma, respectivamente, de funciones de transferencia parciales de segundo orden, a los que se les denomina secciones *bicadráticas*<sup>2</sup>.

Para este trabajo se decidió emplear la Forma Directa en Cascada para la construcción de los filtros requeridos, debido a que con este procedimiento el número de operaciones de retraso ( $z^{-1}$ ) se reduce en casi un factor de dos, por cada sección *bicadrática* involucrada, además de que se simplifica el diseño del programa de operación para el *DSP*, y de que la salida obtenida prácticamente no tiene diferencia con la de cualquier otra manera de realización (Lane y Hillman [13]).

---

<sup>2</sup> Se les denomina *bicadráticas*, porque la función de transferencia tiene, tanto en el numerador como en el denominador, polinomios cuadráticos en la variable discreta  $z$ .

### A.3.1 Realización de filtros digitales empleando la forma directa en cascada

La implantación de la Forma Directa en Cascada requiere transformar la función de transferencia discreta:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (\text{A.23})$$

es decir:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_N z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (\text{A.24})$$

en el producto de funciones de transferencia *bicuadráticas*, conocidas como secciones *bicuadráticas*, de tal manera que siendo N un número par:

$$H(z) = k \prod_{i=1}^M H_i(z) \quad (\text{A.25})$$

donde:

$$H_i(z) = \frac{Y_{i+1}(z)}{Y_i(z)} \quad (\text{A.26})$$

que es equivalente a:

$$H_i(z) = \frac{1 + b_{1,i} z^{-1} + b_{2,i} z^{-2}}{1 + a_{1,i} z^{-1} + a_{2,i} z^{-2}}, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, M \quad (\text{A.27})$$

con:

$$Y_1 = kX(z) \quad (\text{A.28})$$

y

$$Y_{M+1}(z) = Y(z) \quad (\text{A.29})$$

expresiones en las que  $M = 0.5 N$ ,  $k$  es una ganancia positiva, y la salida de la  $i$ 'ésima sección *bicuadrática* es la entrada de la  $(i+1)$ 'ésima sección *bicuadrática*. La Figura A.1 muestra la conformación de una función de transferencia  $H(z)$  empleando secciones *bicuadráticas* en cascada (El-Sharkawy [3]).

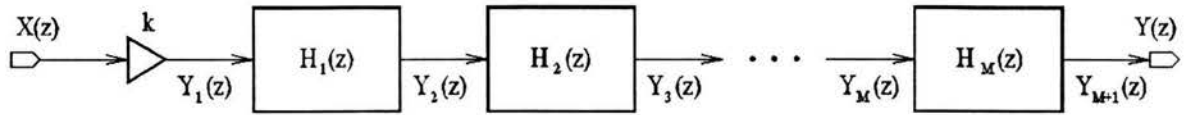


Figura A.1 Conformación de una función de transferencia  $H(z)$  empleando secciones bicuadráticas en cascada.

Para garantizar la estabilidad de un filtro digital *IIR*, las magnitudes  $a_{1,i}$  y  $a_{2,i}$  deben ser menores a 2.0 y 1.0, respectivamente.

La realización de una sección *bicuadrática* empleando la Forma Directa II, puede entenderse analizando una función de transferencia discreta de segundo orden,

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (\text{A.30})$$

la cual puede describirse como se muestra a continuación:

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \cdot b_0 \cdot \left(1 + \frac{b_1}{b_0} z^{-1} + \frac{b_2}{b_0} z^{-2}\right) \quad (\text{A.31})$$

y se puede considerar que si:

$$H_1(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (\text{A.32})$$

y

$$H_2(z) = 1 + \frac{b_1}{b_0} z^{-1} + \frac{b_2}{b_0} z^{-2} \quad (\text{A.33})$$

entonces:

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z) \quad (\text{A.34})$$

De la Figura A.2 se puede observar que:

$$H_1(z) = \frac{W(z)}{X(z)} \quad (\text{A.35})$$

por lo que:

$$W(z) = X(z) \cdot H_1(z) \quad (\text{A.36})$$

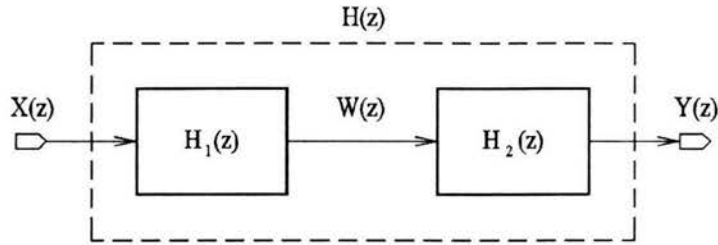


Figura A.2 Descomposición de la función de transferencia de segundo orden en las funciones  $H_1(z)$  y  $H_2(z)$ .

es decir:

$$W(z) = X(z) \cdot \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (\text{A.37})$$

de donde:

$$W(z) = b_0 X(z) - W(z) \cdot (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) \quad (\text{A.38})$$

y cuya transformada inversa es:

$$w(n) = b_0 x(n) - a_1 w(n-1) - a_2 w(n-2) \quad (\text{A.39})$$

Por otra parte, de forma similar que con  $H_1(z)$ :

$$H_2(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} \quad (\text{A.40})$$

por lo cual:

$$Y(z) = W(z) \cdot H_2(z) \quad (\text{A.41})$$

es decir:

$$Y(z) = W(z) \cdot \left(1 + \frac{b_1}{b_0} z^{-1} + \frac{b_2}{b_0} z^{-2}\right) \quad (\text{A.42})$$

y cuya transformada inversa es:

$$y(n) = w(n) + \frac{b_1}{b_0} w(n-1) + \frac{b_2}{b_0} w(n-2) \quad (\text{A.43})$$

Con base en las expresiones (A.26), (A.27), (A.39) y (A.43), se pueden determinar las expresiones para la  $i$ 'ésima sección cuadrática, las cuales quedan como sigue:

$$w_i(n) = y_i(n) - a_{1,i}w_i(n-1) - a_{2,i}w_i(n-2) \tag{A.44}$$

$$y_{i+1}(n) = w_i(n) + b_{1,i}w_i(n-1) + b_{2,i}w_i(n-2) \tag{A.45}$$

Se puede observar que en la función de transferencia para la sección *bicuadrática*, el coeficiente  $b_0$  es igual a uno. Con base en estas dos últimas expresiones, en la Figura A.3 se muestra la estructura para la  $i$ 'ésima sección *bicuadrática* empleando la Forma Directa II.

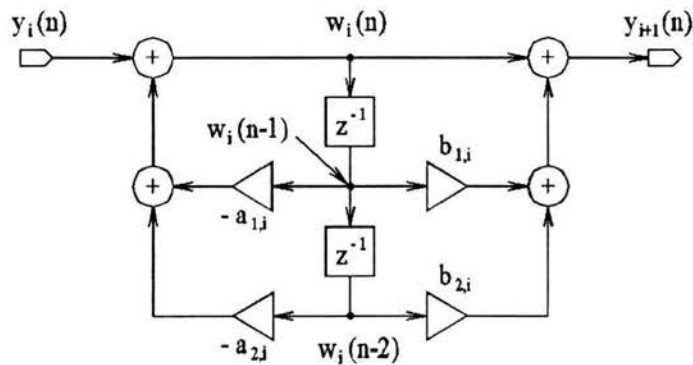


Figura A.3 Estructura de la  $i$ 'ésima sección bicuadrática de un filtro digital, empleando la Forma Directa II.

Por consiguiente, un filtro digital de orden  $N$ , con  $N$  par, con una función de transferencia similar a la expresión (A.24), puede implantarse con secciones *bicuadráticas* en cascada con el empleo de la Forma Directa II, y cuya estructura se muestra en la Figura A.4.

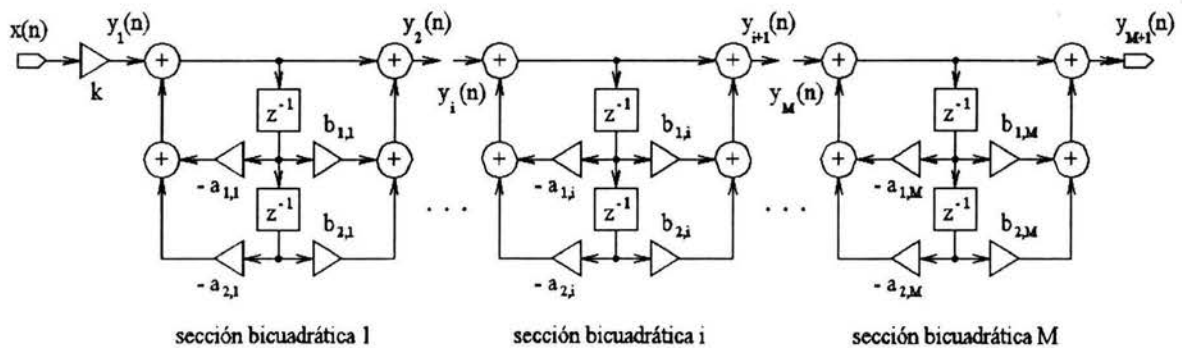


Figura A.4 Estructura de un filtro digital de orden  $N$ , implantado con secciones bicuadráticas en cascada empleando la Forma Directa II.

Como ejemplo de realización con base en secciones *bicuatrálicas* en cascada con el empleo de la Forma Directa II, se presenta a continuación el del filtro paso-bandas tipo *Butterworth* de cuarto orden, con frecuencia de paso  $f_p = 20$  kHz mencionado en el apartado 3.3, y cuya función de transferencia discreta es la siguiente:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3} + b_4 z^{-4} + b_5 z^{-5} + b_6 z^{-6} + b_7 z^{-7} + b_8 z^{-8}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + a_4 z^{-4} + a_5 z^{-5} + a_6 z^{-6} + a_7 z^{-7} + a_8 z^{-8}} \quad (\text{A.47})$$

para el cual:

$b_0 = 1.5551722 \times 10^{-5}$	$a_0 = 1$
$b_1 = 0$	$a_1 = 6.6463050$
$b_2 = -6.2206887 \times 10^{-5}$	$a_2 = 20.233172$
$b_3 = 0$	$a_3 = 36.640187$
$b_4 = 9.3310331 \times 10^{-5}$	$a_4 = 43.073050$
$b_5 = 0$	$a_5 = 33.633948$
$b_6 = -6.2206887 \times 10^{-5}$	$a_6 = 17.049275$
$b_7 = 0$	$a_7 = 5.1410334$
$b_8 = 1.5551722 \times 10^{-5}$	$a_8 = 0.71010390$

A partir de ella se necesita obtener su equivalencia con el producto de funciones de transferencia *bicuatrálicas*. Para ello se requiere descomponer los polinomios en  $z$ , tanto del numerador como del denominador, en productos de polinomios de segundo grado, lo cual se puede realizar a mano empleando el método de *Bairstow* para factores cuadráticos (Gerald [14]), o bien aplicando los comandos *roots* y *poly* de *Matlab*<sup>3</sup>.

Procediendo de la manera indicada, la función de transferencia (A.47) se puede descomponer en cuatro funciones *bicuatrálicas*, de tal manera que:

$$H(z) = k H_1(z) \cdot H_2(z) \cdot H_3(z) \cdot H_4(z) \quad (\text{A.48})$$

<sup>3</sup> El comando *roots(a)* determina las raíces del polinomio cuyos coeficientes, en orden decreciente del exponente, conforman al vector  $a$ . Conocidas las raíces del polinomio, con el comando *poly([u v])* es posible encontrar los coeficientes de los factores cuadráticos, dos de cuyas raíces son  $u$  y  $v$ . Es importante hacer notar que los factores cuadráticos deben obtenerse agrupando las raíces conjugadas, o en caso de que no lo sean, se debe buscar que para los factores cuadráticos del denominador, el coeficiente del término lineal sea menor a dos, en valor absoluto, y que el término independiente sea menor a uno, también en valor absoluto, de tal forma que los filtros sean estables.

y para el cual:

$$k = 1.5551722 \times 10^{-5}$$

$$H_1(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 1.6240921 z^{-1} + 0.94624821 z^{-2}}$$

$$H_2(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 1.7507218 z^{-1} + 0.95625251 z^{-2}}$$

$$H_3(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 1.6079420 z^{-1} + 0.88114217 z^{-2}}$$

y

$$H_4(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 1.6635508 z^{-1} + 0.89063191 z^{-2}}$$

Dado que los coeficientes  $b_{1,i}$  son todos nulos, para el cálculo de la salida de cada factor cuadrático se requieren únicamente tres multiplicaciones con acumulación.

Asimismo, es muy importante tomar en cuenta que los coeficientes  $a_{1,i}$  son todos mayores a uno pero menores a dos, por lo que para evitar el problema que conlleva la aplicación de algún sistema numérico diferente al natural del *DSP*, se dividen todos los coeficientes entre dos y se recurre al uso del modo de escalamiento hacia arriba, el cual afecta al resultado de cualquier instrucción aritmética del procesador con un corrimiento hacia la izquierda, es decir, lo multiplica por dos, y de esta manera se compensa la división entre dos de los coeficientes.

Tomando como referencia el *macro*<sup>4</sup> *STIIR.ASM* que se presenta en las pp. 245, 246 del El-Sharkawy [3], se desarrolló un segmento de programa que efectúa las funciones del filtro digital *IIR* tipo *Butterworth* paso-bandas de cuarto orden, diseñado en los párrafos anteriores con secciones *bicadráticas* en cascada empleando la Forma Directa II.

La variable *gain* contiene la dirección de memoria en el bloque X, en el que está el valor de la ganancia global, *k*, de la función de transferencia (A.48) del filtro; la variable *states* contiene la dirección de inicio en el bloque X de memoria, en el que se encuentran los

---

<sup>4</sup> Así se le denomina a las subrutinas o conjunto de instrucciones repetitivas que se efectúan en la ejecución de un programa para el *DSP56002*.



valores de la variable intermedia  $w_i(n)$ ; la variable *coefs* contiene la dirección de inicio en el bloque Y de memoria, en el que están los valores de los coeficientes  $a_{j,i}$  y  $b_{j,i}$  de las secciones *bicuadráticas*; y, finalmente, en la variable *numsec* se tiene el número de secciones *bicuadráticas* en las que está descompuesta la función de transferencia original, en este caso cuatro. El segmento de programa citado se muestra a continuación.

```

iir_pbfilter      macro      gain,states,coefs,numsec
;
;*****
; Put the input signal in x1 register
;*****
;
;           move      x0,x1
;           move      #gain,r1
;           nop
;
;*****
; Multiply the input by the overall gain
;*****
;
;           move      x:(r1),x0
;           nop
;           mpy       x1,x0,a
;           nop
;
;
;*****
; Initialize R2, R4, M2 and M4
;*****
;
;           move      #$ffff,m2
;           move      m2,m4
;           move      #states,r2
;           move      #coefs,r4
;
;*****
; Pass-band IIR Filter
;*****
;
;           ori       #$8,mr      ; Set upscaling
;           nop
;           move      x:(r2)+,x0  y:(r4)+,y0
;
;           do        #numsec,_pbfilterend
;           mac       x0,y0,a      x:(r2)-,x1  y:(r4)+,y0
;           macr      x1,y0,a      x1,x:(r2)+  y:(r4)+,y0
;           mac       x0,y0,a      a,x:(r2)+   y:(r4)+,y0
;           move      x:(r2)+,x0
;_pbfilterend
;
;           rnd       a

```

```

andi    #$f7,mr    ; Clear upscaling
rol     a          ; Multiply accumulator A by 2

endm                    ; End macro

```

Es importante observar que tanto el registro M2 como el M4 tienen valores de FFFF *hexadecimal*, lo que implica una aritmética de direcciones lineal. A partir de la dirección contenida en la variable *states* en el bloque de memoria X, se guardaron los valores de las variables intermedias  $w_1(n-2)$ ,  $w_1(n-1)$ ,  $w_2(n-2)$ ,  $w_2(n-1)$  y así sucesivamente. Asimismo, a partir de la dirección contenida en la variable *coefs* en el bloque de memoria Y, se guardaron los valores de los coeficientes de las secciones *bicuatricas* diferentes de cero, iniciando con la primera sección, es decir, los valores  $-a_{2,1}$ ,  $-a_{1,1}$ ,  $b_{2,1}$ ,  $-a_{2,2}$ ,  $-a_{1,2}$ ,  $b_{2,2}$ , y así sucesivamente.

La ejecución de este segmento de programa se realizó con  $(20 + numsec*4)$  instrucciones, es decir, 36 instrucciones para el caso del multicitado filtro paso-bandas, lo cual, para un DSP con velocidad de reloj interno de 40 MHz implica una duración de 1.8  $\mu$ s, valor que es compatible con la velocidad de muestreo del convertidor analógico digital de la tarjeta de evaluación del DSP56002, que es de 48 000 muestras por segundo, para llevar a cabo la operación de filtrado.

### A.3.2 Coeficientes para los filtros paso-bandas tipo *Butterworth* de cuarto orden, de 17, 19 y 21 kHz

Para el filtro con frecuencia de paso  $f_p = 17$  kHz, la constante y las funciones de transferencia de las secciones *bicuatricas* fueron:

$$k = 1.5551722 \times 10^{-5}$$

$$H_1(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 1.2810833 z^{-1} + 0.95345250 z^{-2}}$$

$$H_2(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 1.1886814 z^{-1} + 0.88796006 z^{-2}}$$

$$H_3(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 1.1109712 z^{-1} + 0.88379350 z^{-2}}$$

$$H_4(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 1.0911988 z^{-1} + 0.94902707 z^{-2}}$$

Para el filtro con frecuencia de paso  $f_p = 19$  kHz, la constante y las funciones de transferencia de las secciones *bicadráticas* fueron:

$$k = 1.5551722 \times 10^{-5}$$

$$H_1(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 1.6206083 z^{-1} + 0.95500531 z^{-2}}$$

$$H_2(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 1.5301467 z^{-1} + 0.88943427 z^{-2}}$$

$$H_3(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 1.4710100 z^{-1} + 0.94748398 z^{-2}}$$

$$H_4(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 1.4668189 z^{-1} + 0.88232864 z^{-2}}$$

Y finalmente, para el filtro con frecuencia de paso  $f_p = 21$  kHz, la constante y las funciones de transferencia de las secciones *bicadráticas* fueron:

$$k = 1.5551722 \times 10^{-5}$$

$$H_1(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 1.8517262 z^{-1} + 0.95824728 z^{-2}}$$

$$H_2(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 1.7693416 z^{-1} + 0.89258441 z^{-2}}$$

$$H_3(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 1.7485395 z^{-1} + 0.94427842 z^{-2}}$$

$$H_4(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 1.7206988 z^{-1} + 0.87921470 z^{-2}}$$

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Leonard J. J., Durrant-Whyte H. F. *Directed Sonar sensing for Mobile Robot Navigation*, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1992.
- [2] Borenstein Johann, Everett H. R., Feng Liqiang, *Navigating Mobile Robots*, A. K. Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1996.
- [3] El-Sharkawy Mohamed, *Digital Signal Processing Applications with Motorola's DSP56002 Processor*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
- [4] Proakis John G., Manolakis Dimitris G., *Digital Signal Processing*, Third Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
- [5] Oppenheim Alan V., Schafer Ronald W., *Discrete-Time Signal Processing*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [6] Bogner R. E., Constantinides A. G., *Introduction to Digital Filtering*, John Wiley & Sons, Chichester, Great Britain, 1975.
- [7] Seto William W., *Acoustics*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York, NY, 1970.
- [8] Everett H. R., *Sensors for Mobile Robots*, A. K. Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1995.

- [9] Savage Jesús, Lepe-Casillas Fernando, Minami Yukihiro, Rivera Carlos, Psenička Bohumil, *Robot Localization Using Ultrasonic Beacons*, Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Conference on Signal Processing Applications and Technology, Boston MA, 1997.
  
- [10] Pavlović V. D. y Veličković Z. S., *Localization of unknown source of seismic vibrations*, Proceedings of the 8<sup>th</sup> International Conference of Signal Processing Applications and Technology, pp. 1099-1103, 1997.
  
- [11] Minami Yukihiro, Savage Jesús, Lepe-Casillas Fernando, *Determinación de la posición de un robot móvil con ultrasonido*, Ponencia presentada en el Coloquio “La investigación en la Facultad de Ingeniería 1998”, UNAM, México, D. F., 1998.
  
- [12] Krause Pablo, *Sistema automático para la determinación de la posición de un robot móvil usando transmisores ultrasónicos*, Tesis profesional, Facultad de Ingeniería, UNAM, México, D. F., 2000.
  
- [13] Lane John, Hillman Garth, *Implementing IIR/FIR Filters with Motorola's DSP56000/DSP56001*, Motorola Inc., Phoenix, AZ, 1991.
  
- [14] Gerald Curtis, *Análisis numérico*, Alfaomega, México, D. F., 1991.