UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EL TEOREMA DE INCOMPLETUD DE GÖDEL-ROSSER PARA LA TEORÍA DE CONJUNTOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

M A T E M Á T I C A

P R E S E N T A :

MARIANA MARTÍNEZ GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JOSÉ ALFREDO AMOR MONTAÑO

2004

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVENMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: El Teorema de Incompletud de Gödel-Rosser para la Teoría de Conjuntos

realizado por Mariana Martínez González

con número de cuenta 9126160-3, quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario	Dr. José Alfredo Amor Montaño	
Propietario	M.en C. Rafael Rojas Barbachano	
Propietario	Dra. Gabriela Campero Arena	Gabriela Campero A.
Suplente	Mat. David Meza Alcántara	
Suplente	Dr. Carlos Torres Alcaraz	

Consejo Departamental de MATEMATICAS

M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis padres, José González y María Lorenza González, por haberme dado la posibilidad de dedicarme al estudio de las matemáticas. A mi hermano Mauricio por su apoyo a lo largo de mis estudios.

Agradezco a mis hermanos Verónica Martínez, Moisés Carmona y a la profesora Julieta Verdugo por el gran apoyo que me han dado al facilitarme el espacio y las condiciones sin las cuales no me hubiera sido posible realizar este trabajo.

Al profesor Carlos Torres mi admiración así como mi agradecimiento por sus muy valiosos comentarios. En aquéllos semestres en los que fuí estudiante, me preguntaba si algún día tendría la oportunidad de hablar con él de lógica. Ahora le agradezco el haberme dado la oportunidad de tenerlo como sinodal.

Al profesor Rafael Rojas, mi agradecimiento y reconocimiento por ser uno de los mejores profesores que he tenido, por que clases como las suyas son una motivación para que los que hemos sido sus estudiantes nos interesemos en el estudio de la lógica. Por todo lo que de él aprendí.

Agradezco de manera especial al profesor José Alfredo Amor el haber aceptado ser mi director de tesis, por todo el apoyo que me ha brindado, y por sus valiosas sugerencias. Pero también le agradezco todas sus publicaciones que, en mi época de estudiante, me ayudaron a comprender muchos resultados de la teoría de conjuntos.

Al profesor David Meza por sus constantes asesorías y a la profesora Gabriela Campero por su gran apoyo y sus sugerencias.

A una matemática admirable, la Dra. Yolanda Torres, por sus comentarios acerca del tema que sirvieron de estímulo para que yo continuara con este trabajo.

A la profesora Julieta Verdugo, por todas sus enseñanzas y a una mujer ejemplar, Marcia Gutiérrez, por sus consejos y apoyo.

He tenido la oportunidad de que, al acercarme a los profesores de Ciencias con el fin de obtener de ellos orientación en este maravilloso camino del aprendizaje, además de orientación, he encontrado en cada uno de ellos a personas llenas de virtudes.

Prefacio

Es común en la Facultad de Ciencias dedicar el tercer curso de lógica a demostrar el teorema de incompletud de Gödel y luego demostrar la generalización que propuso Rosser la cual está dada para teorías cuyo lenguaje tiene los mismos símbolos que la teoría de los números naturales y en cuyas interpretaciones todos los *individuos* comparten propiedades con los números naturales.

Ha sido sugerencia del profesor Rafael Rojas B. el implementar el resultado de Rosser empleando la teoría de conjuntos, el desarrollo de tal tema como trabajo de tesis no sólo es atractivo por lo que comprende dicho resultado, sino también porque no tenemos conocimiento de que se haya trabajado al respecto.

De manera que este trabajo está basado en los resultados dados en el curso de Lógica III impartido por los profesores Rafael Rojas B. y David Meza A. y he decidido adoptar la notación que en él se dió. Debo aclarar que si omitimos las demostraciones de algunas proposiciones es porque éstas se hicieron en el curso.

A pesar de que la demostración que hemos hecho está basada en la que dió Gödel a su teorema y de que usamos la generalización que dió Rosser, hacer una demostración de este teorema usando la teoría de conjuntos (TC) en lugar de la aritmética de Peano (AP), implica hacer demostraciones de propiedades que eran resultados inmediatos para AP, además que hemos tenido que extender el lenguaje de la TC, haciendo a la vez una extensión conservadora de la TC. Además hicimos algunas modificaciones a la generalización de Rosser, en particular, modificamos el enunciado de Rosser. Este cambio, el cual ha sido una valiosa sugerencia del profesor José Alfredo Amor y sin la cual al parecer no habría sido posible obtener la demostración, consiste en anteponer a la fórmula de Rosser una fórmula para que la cuantificación universal de la fórmula original corra únicamente sobre *individuos* que comparten algunas propiedades con los números naturales; ya que, al trabajar con ZF, además de los números naturales, se tienen otros conjuntos que no comparten nada con los números naturales, en particular la propiedad 5 de la generalización de Rosser, a saber, la tricotomía. La sugerencia del profesor José Alfredo Amor fué anteponer una fórmula que describiera en L_{ZF} a los números naturales, sin embargo, después de analizar la demostración de Rosser, me dí cuenta de que bastaba con describir sólo algunas de las propiedades que cumplen los números naturales.

Además, he decidido adoptar la definición dada por el profesor J.A. Amor de sistema axiomático, ya que considero preferible trabajar con un sistema en el que las fórmulas que son teoremas son fórmulas universálmente válidas (y vice-versa), lo cual no se tiene con la definición clásica, [Amor c]. Sin embargo, todo lo que hemos demostrado es igualmente demostrable si se trabaja en un sistema que satisfaga la definición clásia de sistema axiomático.

Índice General

Introducción

En este trabajo haremos una demostración del teorema de incompletud de Gödel-Rosser para la teoría de conjuntos. En su teorema de incompletud, Gödel (1931) enunció que si suponemos la consistencia de la aritmética de Peano entonces podremos demostrar su incompletud, esto es, que existen enunciados indecidibles para la teoría, y por tanto no es posible sumergir todas las verdades de las matemáticas en este sistema axiomático[1].

Posteriormente, Rosser en 1936, dió la generalización a este teorema estableciendo las condiciones que debe cumplir una teoría K para que sea posible demostar su incompletud como lo hizo Gödel. La idea es construir un enunciado g, llamado el enunciado de Gödel-Rosser, en el lenguaje de K, de manera que el teorema queda enunciado de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \text{Si } K \text{ es consistente, } K \nvdash g \\ \text{Si } K \text{ es consistente, } K \nvdash \neg g. \end{array}$$

A lo largo de esta introducción daremos una descripción más precisa del enunciado g y de la teoría K, y será en los siguientes capítulos donde formalizaremos la demostración en la que se usa la teoría de conjuntos, lo cual es motivo de este trabajo.

Para comprender la demostración es necesario tener presente que el trabajo de los matemáticos está íntimamente ligado a las nociones de verdad y de demostrabilidad. Cualquier cosa que esto signifique, Gödel nos muestra que tienen distinto significado, en particular que *no* todo lo verdadero es demostrable (esto se entenderá mejor al concluir la lectura de este trabajo). Lo que sí esperamos de las teorías es que en ellas lo demostrable sea verdadero.

[1]Posteriormente aclararemos estos conceptos.

0.1 Sobre Universos, Estructuras y Sistemas Formales.

Cuando trabajamos en matemáticas debemos asegurarnos de que las nuevas afirmaciones no contradigan los resultados que ya se tienen. Para ello, los matemáticos han establecido criterios que nos permiten decidir cuando algo es una consecuencia válida.

No obstante la frase "*todo es relativo*" es aplicable también en las matemáticas. "$2 + 2 = 4$" no siempre es una proposición verdadera, pues la verdad del enunciado depende de la estructura algebraica con la que estemos trabajando ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_3$, etc); de igual modo, los ángulos internos de un triángulo no suman necesariamente 180 grados, ya que esto depende del tipo de geometría que estemos considerando; la existencia de conjuntos tales como $x=\{x\}$ depende del sistema axiomático de la teoría de conjuntos de la que estamos hablando. Así, debemos establecer dentro de qué *estructura* estemos trabajando. Además debemos establecer nociones elementales a partir de las cuales se derivan las propiedades de los objetos de estudio, y nociones elementales que nos indiquen cuáles son los objetos con los que nos está *permitido* trabajar; esas nociones elementales regirán a nuestro universo de trabajo y nos permitirán establecer sin ambigüedades las propiedades, relaciones y construcciones válidas. Esas nociones elementales a las que nos referimos son lo que comúnmente se conoce como *axiomas*, así que habrá axiomas que restrinjan lo que se puede derivar, lo que se puede construir, con lo que se puede trabajar. Todo lo que podemos derivar de un conjunto de axiomas es lo que conocemos como teoría. Y al proceso de ir estableciendo las bases sobre las cuales se sostiene la veracidad de las teorías matemáticas lo conocemos como fundamentación de las matemáticas.

Fundamentar las matemáticas es establecer su no contradicción y esto es parte del trabajo que se desarrolla en la lógica[2].

Algunos matemáticos como Leibniz, Frege, Russell, Whitehead, Hilbert, Boole, han hecho grandes aportaciones a la fundamentación de las matemáticas, esto es, al proceso de establecer de manera rigurosa criterios de construcción y de derivabilidad en las teorías y de las teorías.

Con este espíritu riguroso, formalista o fundacionalista, es que algunos nos hemos involucrado en el trabajo con los *sistemas formales*.

0.1.1 Lenguajes y Sistemas Formales.

A continuación daremos una descripción de lo que son los *sistemas formales*. Explicaremos, por tanto, lo que es un *lenguaje formal*, las *reglas de inferencia*,

[2][Ladrière] página 29.

una *deducción*, la *cerradura deductiva* de un conjunto de *axiomas* y una *teoría*[3].

Un *lenguaje formal*, como todo lenguaje, se compone de un conjunto de símbolos (al cual también llamaremos *alfabeto*), con los cuales formaremos las expresiones del lenguaje. Una *expresión* en un lenguaje es una sucesión de símbolos de su alfabeto.

En ciertos lenguajes existen expresiones que se distinguen de otras por que éstas se construyeron mediante reglas de formación, de manera que las *fórmulas* son un subconjunto de las expresiones. Denotaremos con L, Φ y F, a un lenguaje, el conjunto de expresiones y el conjunto de fórmulas respectivamente.

Un conjunto de *axiomas* es un subconjunto de F.

Por una *regla de inferencia* R de aridad $n+1$ en L entenderemos una relación $n+1$-aria sobre Φ, es decir, un subconjunto del producto cartesiano Φ^{n+1}, de tal manera que para todo conjunto de n fórmulas y cada fórmula α, se pueda decidir si las n fórmulas junto con α están en la relación R. Dos reglas de inferencia que usaremos en este trabajo, el cual se desarrolla en el contexto del CP[4], son *modus ponens* (de aridad 3) y *generalización* (de aridad 2)[5], las cuales trabajan de la siguiente manera:

- *Modus Ponens*, $R \subseteq \phi^3$:
  $$R = \{(\varphi,\, \varphi \to \alpha,\, \alpha) \mid \varphi,\, \varphi \to \alpha,\, \alpha \in F\}$$
- *Generalización*, $R \subseteq \phi^2$:
  $$R = \{(\varphi,\, \forall x\varphi) \mid \varphi \in \mathrm{F}\}$$

Sea $\Gamma \subseteq$ F. Una *deducción* a partir de Γ, en un sistema formal es, de manera general, una fórmula que se deriva o se concluye a partir de previas mediante algún método permitido del sistema. Estos métodos permitidos se obtienen en los sistemas formales a partir de las reglas de inferencia. Formalmente, para $\Gamma \subseteq F$ y $\alpha \in F$ de L diremos que α es *consecuencia* o *deducción* de Γ en SF_L si y sólo si existe una sucesión finita $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de fórmulas de L tal que:

i. $\varphi_n = \alpha$

ii. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que φ_j es un elemento de Γ o φ_j es un *axioma lógico*[6] o φ_j es consecuencia directa de alguna o algunas de las fórmulas anteriores de la sucesión, en virtud de alguna de las reglas de inferencia del SF_L. La notación usual es:

[3][Rojas].
[4][Mendelson] páginas 41-115.
[5]Denotaremos con Gen a la regla de inferencia *generalización* y con M.P. a la regla *modus ponens*.
[6]Posteriormente veremos cuáles son los *axiomas lógicos*.

$$\Gamma \vdash_{SF_L} \alpha$$

En el desarrollo de este trabajo usaremos la notación $\Gamma \vdash \varphi$, donde Γ denotará únicamente al conjunto de axiomas propios[7]. En la notación $\Gamma \vdash \varphi$ va implícita la idea de que entre las fórmulas empleadas en la deducción de φ se encuentran los axiomas lógicos, pues en toda teoría de primer orden se incluyen a los axiomas lógicos.

iii. La *restricción* para el uso de la regla de inferencia generalización es la siguiente: Si $\Gamma \vdash \varphi$ y x no aparece libre en ninguna fórmula de Γ de la cual depende φ, entonces $\Gamma \vdash \forall x\varphi$.

Del mismo modo que con la definición tradicional tenemos que si suceden (i) y (ii), se dirá que la sucesión $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ es una *deducción* de α a partir de Γ en SF_L y a los elementos de Γ les llamaremos *hipótesis* o *premisas*.

Un *sistema formal* consiste de un lenguaje formal y un conjunto de reglas de inferencia, así si $\{R_i\}_{i\in I}$ es un paquete no vacío de reglas de inferencia en L, entonces a un sistema formal lo entendemos como la pareja ordenada

$$SF_L = \langle \text{ L }, \{R_i\}_{i\in I} \rangle$$

Existen ciertos tipos de sistemas formales que son los *sistemas axiomáticos*. Un *sistema axiomático* se obtiene de un sistema formal al agregarle un conjunto de axiomas Γ. La definición tradicional para un sistema axiomático difiere de la que exhibiremos a continuación en el hecho de que en esta última se ha agregado el inciso (c). De manera que, de acuerdo a la definición que da el profesor Amor[8], entenderemos por *un sistema axiomático* $\mathcal{S}$ aquél que está compuesto por:

(a) Un conjunto infinito o finito Δ de fórmulas que llamaremos *axiomas de* $\mathcal{S}$ (o *axiomas lógicos*), de tal manera que Δ sea un conjunto decidible, esto es, que dada una fórmula del lenguaje de nuestro sistema, podamos determinar si esa fórmula es o no un axioma (un elemento de Δ).

(b) Un conjunto finito y decidible de *reglas de inferencia*.

(c) Una definición de *deducción* formal de una fórmula α a partir de un conjunto de fórmulas Γ de tal manera que la deducción sea una lista finita de n fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ con $n \geq 1$, tales que $\varphi_n = \alpha$ y para

[7]Los axiomas de una teoría se pueden dividir en axiomas propios y axiomas lógicos, posteriormente veremos cómo se definen.

[8][Amor c].

> toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ o bien φ_i es un axioma de $\mathcal{S}$, o bien φ_i es una fórmula de Γ o bien φ_i se obtiene a partir de fórmulas anteriores de la lista en virtud de alguna regla de inferencia de $\mathcal{S}$ y *la aplicación de tal regla puede tener o no restricciones* y en caso de tenerlas, éstas deben ser efectivamente decidibles[9], si existe tal deducción formal, esto se denota por $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \alpha$ y se lee "α se deriva a partir de Γ en el sistema $\mathcal{S}$".

Cerradura deductiva: Sea $\Gamma \subseteq$ F, con F como se describió anteriormente, por la *cerradura deductiva* de Γ, $(\Gamma^{\vdash})$, entenderemos el conjunto de todas las fórmulas que se deducen a partir de Γ en SF_L, esto es:

$$\Gamma^{\vdash} = \{ \varphi \in \Phi \mid \Gamma \vdash_{SF_L} \varphi \}$$

En este caso, algunos autores llaman *axiomas propios* a las fórmulas de Γ.

Una *teoría formal* en SF_L es un subconjunto T de F, *deductivamente cerrado*, es decir, tal que $\mathrm{T} = \mathrm{T}^{\vdash}$, y a los elementos de T se les llama *teoremas formales de* T.

Existe un tipo particular de teorías formales, las cuales son las teorías de primer orden con igualdad. Decimos que un *lenguaje* L es de *primer orden con igualdad* si y sólo si el conjunto de símbolos, S, está formado por la unión de los siguientes conjuntos:

i. Un conjunto numerable de variables, digamos
$$\{x_1, x_2 \ \ldots \ \}$$
ii. Un conjunto vacío o finito o infinito de constantes
$$\{a_1, a_2, \ldots \ \}$$
iii. Un conjunto vacío o finito o infinito de letras funcionales cada uno con su aridad n_i
$$\{f_i^{n_i} \mid n_i < \omega \}$$
iv. Un conjunto vacío o finito o infinito de letras predicativas cada una con su aridad
$$\{P_i^{n_i} \mid n_i < \omega \}$$
v. Un conjunto mínimo de conectivos.
vi. El conjunto de símbolos de puntuación
$$\{ \ ),\ (,\ ' \ \}$$
vii. Un conjunto de cuantificadores, ya sea *el universal* $\forall x_i$ o *el existencial* $\exists x_i$, o ambos para cada variable x_i.
viii. El conjunto con el símbolo de igualdad $\approx$.

[9]Entendemos por efectivamente decidible si existe un mecanismo (algoritmo) que nos permita saber si las restricciones se aplican o no en cada caso.

Los lenguajes se distinguen entre sí según el conjunto de *constantes*, de *letras predicativas* y de *letras funcionales* que contengan. A la unión de estos conjuntos la conocemos como *el tipo de semejanza* del lenguaje, así que distinguimos a los lenguajes de primer orden por su *tipo de semejanza*. Algunas veces en lugar de referirnos al tipo de semejanza del lenguaje diremos "el tipo de semejanza de la teoría", ya que a una teoría la componen las fórmulas de su lenguaje. Así, si K simboliza una teoría, $\rho(\mathrm{K})$ simboliza a su tipo de semejanza, y se tiene:

$$\rho(\mathrm{K}) = \mathcal{P} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$

donde

- $\mathcal{P}$ simboliza al conjunto de *letras predicativas* de la teoría K.
- $\mathcal{F}$ simboliza al conjunto de *letras funcionales* de la teoría K.
- $\mathcal{C}$ simboliza al conjunto de *constantes* de la teoría K.

Cuando describamos al tipo de semejanza de una teoría lo haremos según el orden anterior, es decir, primero escribiremos al conjunto de letras predicativas, enseguida al conjunto de las letras funcionales y al últimio al conjunto de las constantes[10]. En este trabajo consideraremos a los conjuntos $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}$ como conjuntos finitos.

De manera que los símbolos de un lenguaje se clasifican en *símbolos lógicos* y *símbolos no lógicos*. Los *símbolos no lógicos* son aquéllos en los que su significado depende de la interpretación, así los símbolos que pertenecen al tipo de semejanza de una teoría son los símbolos no lógicos. Por el contrario los *símbolos lógicos* son aquéllos que siempre tienen la misma interpretación. Quiero aclarar que al símbolo para la igualdad ($\approx$) debemos clasificarlo como símbolo lógico, pues el considerarlo como una letra predicativa puede conducirnos a situaciones incorrectas[11]. Así mismo aceptaremos que los cuantificadores sean símbolos lógicos.

Como mencionamos anteriormente, se establece un procedimiento para determinar cuáles expresiones del lenguaje son *fórmulas* [12]. Decimos que un sistema formal SF_L es un *sistema formal de primer orden* si y sólo si, su lenguaje es de primer orden.

Trabajaremos con los sistemas axiomáticos AP y ZF, donde

$$\rho(ZF) = \{\in\} \cup \varnothing \cup \varnothing$$
$$\rho(AP) = \varnothing \cup \{f_s^1, f_+^2, f_\cdot^2\} \cup \{c_0\}$$

así

$$L_{ZF} = \rho(ZF) \cup \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\} \cup \{\forall, \exists\} \cup \{\approx\}$$

[10] El orden en la notación no es indispensable sin embargo preferimos considerarlo.

[11] [Amor d].

[12] Trabajaremos con la definición usual de término y fórmula para un lenguaje de primer orden con igualdad, véase [Mendelson] páginas 42 y 43.

$$L_{AP} = \rho(AP) \cup \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\} \cup \{\forall, \exists\} \cup \{\approx\}$$

También los axiomas de las teorías de primer orden se dividen en dos clases, a saber, en *axiomas propios* y *axiomas lógicos*. Los *axiomas propios* son aquéllos con los que diferenciamos a las teorías. Para fórmulas α, β, γ de teorías de primer orden con igualdad, el conjunto de *axiomas lógicos* Δ está dado por[13]:

- A_1 : $[\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)]$
- A_2 : $[\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)] \rightarrow [(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)]$
- A_3 : $[\neg\beta \rightarrow \neg\alpha] \rightarrow [(\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta]$
- A_4 : $\forall x_i \alpha(x_i) \rightarrow \alpha(t)$ si "t "es un término en el lenguaje que es *libre*[14] *para* x_i en $\alpha(x_i)$. Observemos que "t "puede ser x_i.
- A_5 : $\forall x_i(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x_i \beta)$ si α es una fórmula del lenguaje que no contiene presencias libres de x_i.
- A_6 : $\forall x_i(x_i \approx x_i)$
- A_7 : $\forall x \forall y(x \approx y \rightarrow (\alpha(x,x) \rightarrow \alpha(x,y)))$

Debemos observar que los anteriores son *esquemas de axiomas*, es decir que, por cada fórmula del lenguaje, la sustitución uniforme en alguno de A_1-A_7 produce un axioma lógico del sistema, de manera que en realidad un sistema tiene un número infinito numerable de axiomas lógicos, ya que hay una infinidad (numerable) de fórmulas. Además, dado que el lenguaje de ZF es distinto al lenguaje de AP, el conjunto de axiomas lógicos de ZF es distinto al de AP.

Los *axiomas propios* de ZF son:

- *Extensionalidad*: $\forall x \forall y[\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x \approx y]$

- *Vacío*: $\exists x \forall y \neg(y \in x)$

- *Par*: $\forall x \forall y \exists w[\forall z(z \in w \leftrightarrow (z \approx x \vee z \approx y))]$

- *Union*: $\forall x \exists y \forall z\ [z \in y \leftrightarrow \exists w\ (w \in x \wedge z \in w)]$

- *Potencia*: $\forall x \exists y \forall z[\ z \in y \leftrightarrow \forall w(w \in z \rightarrow w \in x)]$

- *Esquema de Separación*: Para toda fórmula $\varphi(z)$ de L_{ZF} que no tenga a "y" como variable libre se tiene que
  $\forall x \exists y \forall z[z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z))]$

[13] Consideramos el sistema axiomático de [Mendelson].

[14] Véase apéndice A.

- *Esquema de Sustitución o de Reemplazo*: Para cada fórmula $\varphi(x, y)$ de L_{ZF}, con variables libres "x", "y"[15], si b no es variable libre en φ, el esquema de Sustitución enuncia lo siguiente
$$\forall x \forall y \forall z[(\varphi(x,y) \wedge \varphi(x,z)) \rightarrow y \approx z] \rightarrow$$
$$\forall a \exists b \forall z[z \in b \leftrightarrow \exists x(x \in a \wedge \varphi(x,z))]$$
- *Axioma de Infinito*:Hay un conjunto inductivo.

Nuevamente tenemos que, el *esquema* de separación, enuncia un axioma para cada fórmula φ que no tenga a y como variable libre.

Los axiomas propios de AP, (AP simboliza la teoría de primer orden que se obtiene a partir de los postulados de Peano) son los siguientes:

- (AP1) $\forall x_1 \neg(c_0 \approx f_s(x_1))$
- (AP2) $\forall x_1 \forall x_2 (f_s(x_1) \approx f_s(x_2) \rightarrow x_1 \approx x_2)$
- (AP3) $\forall x_1 (f_+(x_1, c_0) \approx x_1)$
- (AP4) $\forall x_1 \forall x_2 (f_+(x_1, f_s(x_2)) \approx f_s(f_+(x_1, x_2)))$
- (AP5) $\forall x_1 (f_.(x_1, c_0) \approx c_0)$
- (AP6) $\forall x_1 \forall x_2 (f_.(x_1, f_s(x_2) \approx f_+(f_.(x_1, x_2), x_1))$
- (AP7) Para cualquier fórmula α(x) de L_{AP} ,
$$\Big(\alpha(0) \wedge \forall x(\alpha(x) \rightarrow \alpha(f_s(x)))\Big) \rightarrow \Big(\forall x \alpha(x)\Big)$$

Las reglas de inferencia, como ya mencionamos, serán *modus ponens* y *generalización*.

0.1.2 Metateoría.

Las matemáticas no han sido desarrolladas dentro de un sistema formal, y hasta antes de que Gödel diera a conocer su teorema de incompletud, eso parecía posible.

Los sistemas formales pueden ser objeto de nuestro estudio, y para nombrar a los elementos del sistema, es necesario que el lenguaje con el que se expresan sus propiedades contenga todos los símbolos que contiene el lenguaje del sistema, así que podemos hacer distinción entre el lenguaje del sistema objeto de estudio y el lenguaje con el que se le estudia, a este último lenguaje lo conocemos como *metalenguaje*. Es posible que este metalenguaje también sea objeto de estudio, entonces necesitaremos un nuevo metalenguaje con las propiedades que le pedimos al primero, y así sucesivamente. También debemos hacer distinción entre la teoría desarrollada dentro del sistema formal y la teoría que se desarrolla para su estudio desde un metalenguaje, a ésta última la conocemos como metateoría. A los teoremas de dicha metateoría los podemos llamar metateoremas,

[15]Decimos que una variable es libre en una fórmula si ésta no ocurre dentro del alcance de algún cuantificador.

éstos pueden ser acerca de las reglas de inferencia, o de las afirmaciones hechas dentro del sistema, o establecer relaciones del sistema con otros sistemas. Un ejemplo claro de esta situación la encontramos en el capítulo 1, donde enunciamos teoremas acerca de teorías, dichas teorías son nuestro objeto de estudio, para lo cual empleamos al español junto con algunos símbolos como metalenguaje para designar a los símbolos de las teorías de las cuales estamos hablando.

Entre los procedimientos de demostración están los deductivos y los constructivos. Jean Ladrière[16] dice al respecto: *La noción de demostración constructiva no puede ser definida de manera rigurosa más que por la descripción precisa de los procedimientos de deducción que son considerados como constructivos. Sin embargo, se puede decir, de manera aproximada, que un procedimiento constructivo de demostración, es un procedimiento que permite verificar efectivamente (de manera tangible) el resultado demostrado dentro de cada caso particular. Desde el aspecto metateórico sólo las demostraciones constructivas son consideradas como satisfactorias por que sólo ellas están completamente ajustadas a un método formal. Las otras dependen de suposiciones exteriores y reposan sobre evidencias incontrolables. En cuanto a formalizar la metateoría, se puede dar un contenido preciso a la noción de procedimiento constructivo,[...], según el formalismo que se adopte, se imponen las exigencias más o menos fuertes de constructividad. Así se puede tomar un formalismo que permite el razonamiento por inducción. [...] El tipo clásico de demostración metateórica es el razonamiento por inducción estructural. Se puede hacer una tal inducción sobre la construcción de las proposiciones o también sobre la derivación de una proposición. En el primer caso, se establece una propiedad para las proposiciones elementales y se muestra que ella se conserva bajo la aplicación de diferentes reglas de formación. En el segundo caso, se establece una propiedad para los axiomas y se muestra que ésta se conserva bajo la aplicación de las diferentes reglas de derivación. En los dos casos, se efectúa, etapa por etapa, una traslación de la propiedad, de los casos elementales a los casos generales. Este tipo de razonamiento es posible porque las reglas son formuladas de manera recurrente.*

Desde este punto de vista metateórico, podemos referirnos a un sistema axiomático, (el sistema axiomático de la teoría de anillos o el de la geometría euclidiana, por ejemplo). Podemos considerar al sistema de la geometría griega antigua, en donde las demostraciones se apegan a una estructura lógica, pero muchas veces se basan en afirmaciones que "resultan evidentes"esto es, se apela a la intuición. A manera de ejemplo, cito a García Bacca quien afirma en su introducción filosófica a los Elementos de Euclides· que *Euclides no define en parte alguna qué debe entenderse por prolongar según continuidad* y dice, que por tanto, hay que dar a esta palabra el significado corriente visual de no ver huecos o discontinuidades.

[16][Ladrière] página 54

Todo lo anterior podría conducirnos a discusiones filosóficas más profundas, sin embargo, mi intención es simplemente dar una idea del trabajo comúnmente hecho en matemáticas y el tipo de trabajo al que nos conducen los sistemas formales. Debo mencionar que el trabajo con los sistemas formales nos hace enfrentarnos a una una gran cantidad de limitaciones[17].

0.2 Idea general de la demostración del teorema de incompletud de Gödel-Rosser.

Con lo mencionado anteriormente podemos darnos cuenta de que la matemática presenta dos facetas: el trabajo hecho en la metateoría y el realizado dentro del rigor de un sistema formal. La demostración que conocemos del teorema de Gödel-Rosser utiliza ambas facetas.

Metateóricamente se emplea lo siguiente:

1. Los números naturales y sus operaciones (*sucesor, suma, producto*).

2. En los naturales es válido un teorema de recursión a partir del cual daremos las definiciones de los *métodos de recursión* y de *sustitución*.

3. A partir de 1) y 2) daremos las definiciones de funciones que llamaremos primitivas. Por medio de éstas y de los métodos de recursión y de sustitución obtendremos nuevas funciones que llamaremos las *funciones recursivas*, por ejemplo, la división entre naturales, la diferencia positiva entre naturales; un ejemplo de construcción de una de éstas funciones lo encontraremos en el capítulo 2, y en el capítulo 3 daremos una lista de este tipo de funciones. Además, a partir de estos conceptos definiremos subconjuntos de naturales (*subconjuntos de pares de naturales, subconjuntos de ternas de números naturales, etc.*), es decir, relaciones de números naturales las cuales, al cumplir ciertas condiciones, las llamaremos *relaciones recursivas* (por ejemplo x divide a y, y es el inverso aditivo de x, etc.)

4. Definiremos los conceptos de *representabilidad* y de *expresabilidad* para las funciones y relaciones respectivamente.

5. Enunciaremos teoremas y condiciones que establecen la representabilidad y la expresabilidad en un sistema formal de las funciones y relaciones recursivas. *Intuitivamente, una función o una relación es representable o expresable en una teoría formal si en el lenguaje de la teoría existe una expresión para ellos, es decir, hay una fórmula que bajo una interpretación describe el comportamiento de los individuos que están en la función o en*

17 [Torres].

la relación. La fórmula es una sucesión de símbolos, sin embargo, nuestra interpretación es la ya descrita.

Con respecto a los sistemas formales, la demostración que conocemos del teorema de Gödel-Rosser emplea la teoría AP (T_{AP}), es decir, utiliza el lenguaje formal de la Aritmética de Peano y la cerradura deductiva de su conjunto de axiomas para la formación y la demostración de las fórmulas que representan a las funciones recursivas, y las que expresan a las relaciones recursivas. Empleando L_{AP} es inmediata la representabilidad de un cierto tipo de funciones, llamadas funciones iniciales [18], o de las que emplean a la suma o al producto, ya que L_{AP} contiene símbolos funcionales para las operaciones elementales en los naturales, y los teoremas mencionados anteriormente nos permiten asegurar la existencia de fórmulas de L_{AP} que representan a las funciones recursivas y algo similar (aunque no igual) se tiene para las relaciones recursivas.

Se establecen dos caminos, uno de L_{AP} al universo de los números naturales y otro de los naturales a L_{AP}. El primero asignará de manera única a los símbolos, fórmulas y expresiones de L_{AP} números naturales, y será tal que podremos saber si un número proviene de un símbolo o una fórmula, o una implicación de fórmulas, o una generalización de una fórmula, etc. Además, podremos formar subconjuntos de números (pares, ternas, etc.) estableciendo relaciones de números que corresponden a conjuntos de números que provienen de axiomas, de generalizaciones, e incluso conjuntos de números que corresponden a pruebas en T_{AP}. En especial definiremos las relaciones PR y PRN que son subconjuntos de $\mathbb{N}^3$ en las cuales estarán relacionados números de pruebas de ciertos tipos de fórmulas (o de negación de fórmulas en el caso de PRN) con los números correspondientes a esas fórmulas. Estas relaciones serán escenciales en la demostración del teorema de Gödel-Rosser, así que no nos olvidemos de ellas .

El segundo camino (el de regreso) consiste en asignar símbolos del lenguaje formal (en nuestro caso ciertos términos de L_{AP} o L_{ZF}) a los números naturales, a esos símbolos los conoceremos como *numerales*. Cuando trabajamos con L_{AP}, disponemos de símbolos para el cero (c_0), para la función sucesor (f_s^1), la suma y el producto (f_+^2 *y* $f_\cdot^2$), es decir, tenemos a un elemento distinguido (constante individual), a una letra funcional de aridad 1, y dos de aridad 2. Además tenemos a un conjunto de axiomas de tal manera que

$$c_0\ ,\ f_s^1(c_0)\ ,\ f_s^1(f_s^1(c_0))\ ,\ \dots$$

son los términos del lenguaje formal a los que llamamos *numerales.*

Una vez que hemos asignado números naturales a los símbolos, fórmulas y expresiones (*a los cuales se les conoce como número de Gödel de un símbolo o de una fórmula o de una expresión*) y dado que el camino de regreso consiste en asignarle símbolos del lenguaje formal, en este caso de L_{AP}, a los números

[18]En el capítulo 3 se definen las funciones iniciales.

naturales, se tiene que los números naturales que provienen de fórmulas en L_{AP} tienen asociados en L_{AP} numerales, de manera que en L_{AP} una fórmula tiene dos expresiones, ella misma y el numeral que le corresponde. Esto es, si $\alpha \in L_{AP}$ y $m \in \mathbb{N}$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} L_{AP} & \longrightarrow & \mathbb{N} & \longrightarrow & L_{AP} \\ \alpha & \longrightarrow & m & \longrightarrow & \overline{m} \end{array}$$

Denotaremos con $\ulcorner\alpha\urcorner$ al *numeral* $\overline{m}$ asociado, como anteriormente describimos, al número m, si m es el número de Gödel de α.

Con lo dicho anteriormente tenemos que si $\alpha(x) \in L^1_{AP}$ (α habla de x en L_{AP}), entonces $\alpha(\ulcorner\alpha\urcorner)$ la entendemos de forma natural como "α habla de sí misma en L_{AP}".

Ya tenemos todo lo necesario para conocer de manera intuitiva al enunciado de Gödel-Rosser, y ha llegado el momento en que recordemos a las relaciones *PR, PRN*. Hemos dicho que *PR* y *PRN* son subconjuntos de $\mathbb{N}^3$, usando AP y $\mathbb{N}$ decimos que *(n,m,k)* $\in$ *PR* si y sólo si n es el número asociado a la deducción hecha en *AP* de la fórmula que resulta al sustituir en la fórmula cuyo número asociado es m la variable v_k por el numeral de m y decimos que *(n,m,k)* $\in$ *PRN* si y sólo si n es el número asociado a la deducción hecha en *AP* de la negación de la fórmula que resulta al sustituir en la fórmula cuyo número asociado es m la variable v_k por el numeral de m[19]. Uno de los resultados principales que se emplean en la demostración del teorema de Gödel-Rosser, es que *PR* y *PRN* son *relaciones expresables* en AP, es decir que existen fórmulas α_{PR}, α_{PRN} en L^3_{AP} de tal manera que siempre que *(x,y,z)* $\in$ *PR*, se tiene que AP $\vdash$ α_{PR} $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$; lo mismo para la relación PRN[20] donde $\overline{x}$ y $\overline{y}$ corresponden a los numerales de x y y respectivamente.

Se construye la siguiente fórmula en L^1_{AP}:

$$\gamma(x_1) \quad \rightleftharpoons \quad \forall x_0(\alpha_{PR}(x_0, x_1, \overline{1}) \rightarrow \exists y(y \leq x_0 \wedge \alpha_{PRN}(y, x_1, \overline{1}))).$$

Sea

- $g(\gamma(x_1)) = r$.

Esto es, r es el número de Gödel de $\gamma(x_1)$, así $r \in \mathbb{N}$ y $\overline{r} \in L_{AP}$.

Y de manera natural, entendemos a la fórmula $\gamma(\overline{r})$ como una fórmula que habla de sí misma.

[19] Véase capítulo 3.

[20] Para ver la definición completa de una *relación expresable* consultar el capítulo 2.

Intuitivamente $\gamma(\bar{r})$ expresa lo siguiente: "Dado cualquier x_2, si x_2 es una prueba *mía*, entonces existe $x_3 \leq x_2$ tal que x_3 es una prueba de *mi negación*". El enunciado $\gamma(\bar{r})$ es conocido como *el enunciado de Gödel-Rosser.*

El enunciado $\gamma(\bar{r})$ construido desde L_{AP} y usando AP, resulta ser un *enunciado verdadero*, ya que de suponer que $AP \vdash \gamma(\bar{r})$ se puede demostrar que $AP \vdash \neg\gamma(\bar{r})$ (si AP demuestra $\gamma(\bar{r})$, entonces AP demuestra la negación de $\gamma(\bar{r})$). De manera que si admitimos la consistencia de AP no podremos suponer que $AP \vdash \gamma(\bar{r})$, esto es, si AP es consistente entonces $AP \nvdash \gamma(\bar{r})$. Además, se ha demostrado que si se supone la consistencia de AP, y además suponemos $AP \vdash \neg\gamma(\bar{r})$ podríamos demostrar que $AP \vdash \gamma(\bar{r})$ lo cual nuevamente nos conduce a una contradicción; esto es, si AP es consistente entonces $AP \nvdash \neg\gamma(\bar{r})$, con lo que tenemos que, suponer la consistencia de AP, implica que $\gamma(\bar{r})$ es indecidible para AP.

Hasta aquí termina la descripción de la demostración para el teorema de Gödel-Rosser hecha usando AP como teoría formal. La demostración que haremos en este trabajo está basada en estas ideas, aunque con algunas variaciones. En el capítulo 4 daremos la construcción adecuada de la fórmula $\gamma(x_1)$, para que la cuantificación universal que en ella aparece se refiera a los numerales y no a *conjuntos cualesquiera*, ya que trabajaremos con ZF.

0.3 Algunas consideraciones que se deben tener para construir una demostración del teorema de Gödel-Rosser en ZF.

Para la demostración del teorema de Gödel usando ZF y la generalización que dió Rosser, debemos hacer algunas consideraciones.

La notación que usaremos a lo largo del presente trabajo es la siguiente:

- T_K denotará a la *teoría* que se obtuvo a partir de un conjunto de axiomas propios K.
- ρ(K) denotará al *tipo de semejanza* de la teoría que se obtiene a partir de K.
- L_K denotará al *lenguaje* correspondiente a la teoría que se obtiene a partir de K.

- $K^{\vdash}$ denotará la *cerradura deductiva* de el conjunto K. Recordemos que en estas deducciones implícitamente se considera el empleo de los *axiomas lógicos*, de acuerdo a lo dicho en 0.1.1.

Rosser enunció que para que en una teoría K se cumpla el teorema de Gödel, su tipo de semenjanza (ρ(K)) debe contener los mismos símbolos que ρ(AP), esto debido a la construcción de la demostración que se conoce de este teorema. Sin embargo, veremos que basta con tener definidos en ρ(K) a una constante individual y una letra funcional de aridad 1 (las correspondientes al 0 y a la función sucesor respectivamente cuando consideramos a la interpretación *estandar* de AP).

Dado que el propósito de este trabajo es hacer una demostración del teorema de Gödel-Rosser usando ZF y basándonos en la que ya se conoce, debemos extender el lenguaje de la teoría de conjuntos (L_{ZF}), pues como ya sabemos, ρ(ZF) únicamente contiene una letra predicativa de aridad 2, a saber, la correspondiente a la pertenencia "$\in$", esto es, queremos definir en L_{ZF} y usando ZF a una constante individual y a una letra funcional de aridad 1. Además, queremos obtener la demostración usando las condiciones mínimas necesarias y garantizar que efectivamente la demostración se hará para ZF y no para alguna nueva teoría que se pudiera obtener al extender L_{ZF}, así que debemos garantizar que la extensión que hagamos de L_{ZF} sea una *extensión conservadora*[21].

0.4 Estructura del trabajo.

Este trabajo está compuesto por cuatro capítulos. En el capítulo 1 daremos las definiciones y teoremas acerca de extensiones conservadoras y construiré la extensión deseada de ZF, además haremos una selección de ZF, con el fin de trabajar tan sólo con los axiomas que necesitamos para la construcción de la demostración, así que trabajaremos con una subteoría de ZF[22]. En el capítulo 2 se introducen las definiciones y resultados involucrados en el proceso constructivo de la demostración. En el capítulo 3 daremos la lista de funciones y relaciones recursivas que se emplean en la construcción de la demostración y que se obtuvieron a partir de las definiciones y resultados del capítulo 2. Finalmente el capítulo 4 está compuesto por aquéllos resultados que establecen los requisitos que debe satisfacer una teoría para que haga verdadero al teorema de Gödel-Rosser en cuestión, así como su demostración usando una subteoría de ZF y las conclusiones.

Por último quiero hacer las siguientes aclaraciones acerca del lenguaje que emplearé.

Acerca del Lenguaje formal

[21]En el capítulo 1 enunciaremos las definiciones y resultados concernientes a extensiones conservadoras de una teoría.

[22]Recordar que queremos trabajar con las condiciones mínimas necesarias.

(a) Generalmente usaremos las letras u, v, w, x, y, z para denotar variables[23]. Cuando sea necesario utilizar más variables agregaré subíndices a estas letras, de manera que u_i, v_i, w_i, x_i, y_i, z_i también denotarán variables, para $i \in \mathbb{N}$. Así que una aplicación finita de f_s a alguna de estas variables, denotará un término en $L_{E'}$[24]. Para evitar confusiones en las demostraciones, evito utilizar una sola letra indexada, esto es $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ para denotar variables, pues considero que el uso de distintas letras permite identificar de manera clara el papel que juega cada una de ellas en las fórmulas de las demostraciones.

(b) Usaré las letras a, b, c, d, e para denotar constantes.

(c) Dado que se define una función h: $\mathbb{N} \rightarrow L_{E'}$, tal que $h(n) = \overline{n}$, $h(n)$ también simboliza un término en $L_{E'}$.

La notación para los elementos de $\mathbb{N}$

(a) Para simbolizar a los elementos en $\mathbb{N}$ utilizaremos las letras n, m, p, q, r, y en algunos casos estas letras aparecerán indexadas.

[23]Será muy claro cuando esto no suceda.

[24]$L_{E'}$ denota al lenguaje de la teoría que extiende a $E \subsetneq ZF$.

Capítulo 1

Una Extensión Conservadora de ZF

En la introducción hemos definido los conceptos concernientes a teorías y sistemas formales. A continuación veremos cómo es posible extender a una teoría de manera conservadora.

Al extender de manera conservadora el lenguaje de una teoría lo que hacemos es agregar nuevos símbolos a su tipo de semejanza, e incluir a los axiomas que los definirán, y debe procederse de manera que todo lo que se puede demostrar en la extensión de la teoría usando únicamente símbolos del lenguaje de la teoría original, también sea posible demostrarlo desde la teoría original; una de las ventajas que obtenemos con este tipo de extensiones es que ahorramos notación.

En este capítulo haremos una extensión conservadora de L_{ZF} agregando una constante individual, y una letra funcional de aridad uno. La definición para la constante individual está basada en la idea de que esta constante individual sea un individuo que represente al vacío, y la letra funcional será una abreviación para la expresión metalingüística "ser un sucesor de otro conjunto", con la noción que comúnmente conocemos de este concepto.

1.1 Definiciones sobre Extensiones

Definición 1.1.1 *Sean T, T' teorías, y denotemos con $\rho(T)$ al tipo de semejanza del lenguaje de la teoría T. T' es una extensión de T si y sólo si*

1. $\rho(T) \subseteq \rho(T')$
2. $T \subseteq T'$

Notación:

– *"syss"es una abreviación de "si y sólo si".*

Observación 1.1.1.1 *Si $\Gamma^{\vdash} = T$, para que ocurra $T \subseteq T'$, basta que $T' \vdash \gamma$ para cada fórmula γ de Γ .*

Definición 1.1.2 *Sean T, T' teorías. T' es una* ***extensión conservadora*** *de T si y sólo si*

1. *T' es una extensión de T*
2. *$T = T' \cap L_T$*

Observación 1.1.2.1 *$T = T' \cap L_T$ si y sólo si para todo $\alpha \in L_T$ se tiene lo siguiente:*

1. *Si $\alpha \in T'$, entonces $\alpha \in T$.*
2. *Si $T' \vdash \alpha$, entonces $T \vdash \alpha$.*

Notación:

– $\rho(T) \rightleftharpoons \rho$
– $\rho(T') \rightleftharpoons \rho'$

1.2 Teoremas sobre extensiones conservadoras

Los siguientes tres teoremas enuncian las condiciones que deben cumplirse para que una teoría que se obtiene a partir de otra por medio de agregar nuevos símbolos, sea una extensión conservadora. Las demostraciones de estos teoremas las presentaré de forma semántica debido a que enuncian un resultado acerca de teorías, no creí necesario que su demostración deba ser sintáctica[1].

Teorema 1.2.1 (Extensiones por Definiciones Relacionales)

Sea T una ρ–teoría, φ una ρ-fórmula cuyas variables libres son $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (distintas todas ellas). Sea R un símbolo relacional n–ario $R \notin \rho$ .Sea

– $\rho(T') = \rho(T) \cup \{R\}$

y sea T' la ρ'–teoría obtenida al cerrar bajo $\vdash$ al conjunto

– $T \cup \{\forall x_1, \ldots, \forall x_n\ (R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n))\}$

Así:

[1] Las demostraciones de los siguientes tres teoremas las he tomado de unas notas del Profesor J.A. Amor.

1. T' es una extensión conservadora de T.

Además para cada ρ'-fórmula α hay una ρ-fórmula α con las mismas variables libres que α y tal que*

2. $T' \vdash \forall x_1, \ldots, \forall x_n(\alpha(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \alpha^*(x_1, \ldots, x_n))$

y

3. $T' \vdash \alpha$ *si y sólo si* $T \vdash \alpha^*$

Demostración 1.2.0.1 .

1. *Es inmediato que T' es una extensión de T, así que* $T \subseteq T'$, *y como* $T \subseteq L_T$, *tenemos que* $T \subseteq T' \cap L_T$. *Veamos que* $T' \cap L_T \subseteq T$; *sea* $\psi \in T' \cap L_T$, *y sea* $\mathfrak{A}$ *una estructura de tipo* ρ, *tal que* $\models_{\mathfrak{A}} T$. *Sea* $\mathfrak{A}' = \langle \mathfrak{A}, R^{\mathfrak{A}'} \rangle$ *una* ρ' *expansión de* $\mathfrak{A}$, *donde*

$$R^{\mathfrak{A}'} = \{(a_1, \ldots, a_n) \in |\mathfrak{A}|^n \mid \models_{\mathfrak{A}} \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]\}$$

   es decir, $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}'}$ *si y sólo si* $\models_{\mathfrak{A}} \varphi[x_1/a_1, \ldots, x_n/a_n]$.

   Así que

   (a) $\models_{\mathfrak{A}'} \forall x_1, \ldots, \forall x_n(R(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n))$
   Y como tenemos que
   (b) $\models_{\mathfrak{A}'} T$
   (a) y (b) implican que
   (c) $\models_{\mathfrak{A}'} T'$
   Dado que ψ es un teorema de T', y del paso anterior obtenemos
   (d) $\models_{\mathfrak{A}'} \psi$
   Como $\psi \in L_T$, *por el paso anterior tenemos que*
   (e) $\models_{\mathfrak{A}} \psi$
   Por lo que
   (f) $T \models \psi$
   Por el teorema de correctud-completud extendido tenemos que
   (g) $T \models \psi$ *si y sólo si* $T \vdash \psi$
   Por lo que $\psi \in T$.

2. *Definiremos* α^* *por recursión sobre las fórmulas* α *de* $L_{T'}$

   – *Si α es atómica*

      i. Si α no incluye al nuevo símbolo relacional, entonces $\alpha^* \rightleftharpoons \alpha$

      ii. Si α es $R(t_1, \ldots, t_n)$, *entonces* $\alpha^* \rightleftharpoons \varphi(t_1, \ldots, t_n)$ *donde* $t_1, \ldots, t_n$ *son términos.*

   – *En general*

i. *Si* α *es* $\neg\psi$, α^* *es* $\neg(\psi^*)$
ii. *Si* α *es* $\psi_1 \wedge \psi_2$, α^* *es* $\psi_1^* \wedge \psi_2^*$
iii. *Si* α *es* $\psi_1 \vee \psi_2$, α^* *es* $\psi_1^* \vee \psi_2^*$
iv. *Si* α *es* $\forall x\psi_1$, α^* *es* $\forall x\psi_1^*$

Observación 1.2.0.2 *Basta con considerar a los conectivos* $\neg$, $\wedge$, $\vee$ *y el cuantificador universal, ya que cualquier fórmula de un lenguaje de primer orden puede expresarse usando sólamente estos símbolos*[2].

Observación 1.2.0.3 *En los siguientes capítulos, además de las anteriores, escribiremos fórmulas de la forma* $\alpha \rightarrow \beta$ *y* $\alpha \leftrightarrow \beta$.

La demostración de este punto la haremos por inducción sobre las fórmulas. Para las fórmulas atómicas, el único caso que nos interesa demostrar es cuando ésta es de la forma $R(t_1, \ldots, t_n)$, *siendo* R *el símbolo relacional que hemos agregado a* L_T. *De manera inmediata, aplicando el axioma lógico 4, y el axioma con el cual extendimos* T, *tenemos que*

(a) $T' \vdash R(t_1, \ldots, t_n) \leftrightarrow \varphi(t_n, \ldots, t_n)$

Hipótesis de Inducción: *Supongamos que para* ψ_1 *y* ψ_2 *fórmulas de* $L_{T'}$ *existen* ψ_1^* *y* ψ_2^* *fórmulas de* L_T *tales que:*

$$T' \vdash \forall x_1, \ldots, \forall x_n(\psi_1(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi_1^*(x_1, \ldots, x_n))$$
$$T' \vdash \forall x_1, \ldots, \forall x_n(\psi_2(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi_2^*(x_1, \ldots, x_n))$$

Si ψ *es de la forma* $\neg\psi_1$, *de acuerdo a lo anterior, debemos demostrar que*

$$T' \vdash \forall x_1, \ldots, \forall x_n(\psi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \neg\psi_1^*(x_1, \ldots, x_n))$$

De acuerdo a la hipótesis de inducción, obtenemos que

(a) $T' \vdash \psi_1(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \psi_1^*(x_1, \ldots, x_n)$
Como $(\psi \rightarrow \varphi) \leftrightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg\psi)$ *es tautología, entonces tenemos que*

(b) $T' \vdash \neg\psi_1^*(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \neg\psi_1(x_1, \ldots, x_n)$
Análogamente tenemos que

(c) $T' \vdash \neg\psi_1(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \neg\psi_1^*(x_1, \ldots, x_n)$
(b) y (c) implican que

(d) $T' \vdash \neg\psi_1(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \neg\psi_1^*(x_1, \ldots, x_n)$
Con lo que podemos concluir que

(e) $T' \vdash \psi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \neg\psi_1^*(x_1, \ldots, x_n)$

[2]Es decir $\{\neg, \wedge, \vee, \forall\}$ forma un cunjunto completo de conectivos, para mayor información, consultar [Enderton].

Si ψ es de la forma $\psi_1 \wedge \psi_2$, de acuerdo a la hipótesis y por una tautología[3] *tenemos*

(a) $T' \vdash \psi_1(x_1, \ldots, x_n) \wedge \psi_2(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \psi_1^*(x_1, \ldots, x_n) \wedge \psi_2^*(x_1, \ldots, x_n)$
y

(b) $T' \vdash \psi_1^*(x_1, \ldots, x_n) \wedge \psi_2^*(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \psi_1(x_1, \ldots, x_n) \wedge \psi_2(x_1, \ldots, x_n)$
Esto es

(c) $T' \vdash \psi_1(x_1, \ldots, x_n) \wedge \psi_2(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi_1^*(x_1, \ldots, x_n) \wedge \psi_2^*(x_1, \ldots, x_n)$

Si ψ es de la forma $\psi_1 \vee \psi_2$, de acuerdo a la hipótesis de inducción podemos afirmar que

(a) $T' \vdash \psi_1(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \psi_1^*(x_1, \ldots, x_n) \vee \psi_2^*(x_1, \ldots, x_n)$
y que

(b) $T' \vdash \psi_2(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \psi_1^*(x_1, \ldots, x_n) \vee \psi_2^*(x_1, \ldots, x_n)$
De (a) y (b) y por tautología[4] *obtenemos*

(c) $\vdash \psi_1(x_1, \ldots, x_n) \vee \psi_2(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \psi_1^*(x_1, \ldots, x_n) \vee \psi_2^*(x_1, \ldots, x_n)$
Análogamente tenemos que

(d) $T' \vdash \psi_1^*(x_1, \ldots, x_n) \vee \psi_2^*(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \psi_1(x_1, \ldots, x_n) \vee \psi_2(x_1, \ldots, x_n)$
Así que podemos afirmar que

(e) $\vdash \psi_1(x_1, \ldots, x_n) \vee \psi_2(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \psi_1^*(x_1, \ldots, x_n) \vee \psi_2^*(x_1, \ldots, x_n)$

Si ψ es de la forma $\forall x \psi_1$, es inmediato de la hipótesis de inducción que

(a) $T' \vdash \forall x \psi_1(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \forall x \psi_1^*(x_1, \ldots, x_n)$

3. **P.D.** $T' \vdash \alpha$ *si y sólo si* $T \vdash \alpha^*$

Sea $\alpha \in L_{T'}$ tal que $T' \vdash \alpha$, de acuerdo al inciso (2) tenemos que

(a) $T' \vdash \alpha \leftrightarrow \alpha^*$
Aplicando M.P. obtenemos que

(b) $T' \vdash \alpha^*$
Como $\alpha^* \in L_T$, usando el inciso (1), tenemos que

(c) $T \vdash \alpha^*$
Por otro lado, como T' es una extensión conservadora de T, (c) implica lo del inciso (b), de modo que aplicando M.P. en los pasos (b) y (a) obtenemos que

(d) $T' \vdash \alpha$

Teorema 1.2.2 (Extensiones por Definiciones Funcionales)

Sea T una ρ-teoría, $\varphi \in L_T^{n+1}$ cuyas únicas variables libres son $x_1, \ldots, x_n, y$ (distintas). Supóngase que

[3] Fórmula 27 del apéndice B-I.
[4] Fórmula 29 del apéndice B-I.

(a) $T \vdash \forall x_1, \ldots, \forall x_n \exists y\, \varphi(x_1, \ldots, x_n, y)$

(b) $T \vdash \forall x_1, \ldots, \forall x_n \forall y \forall z (\varphi(x_1, \ldots, x_n, y) \wedge \varphi(x_1, \ldots, x_n, z) \rightarrow y \approx z\,)$

Sean

- f *un símbolo funcional n–ario tal que* $f \notin \rho(T)$.
- $\rho(T') = \rho(T) \cup \{f\}$
- $T' = \left(T \cup \{\forall x_1, \ldots, \forall x_n, \forall y [f(x_1, \ldots, x_n) \approx y \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n, y)]\}\right)^{\vdash}$

entoces se cumplen las condiciones 1, 2 y 3 del teorema 1.2.1.

Demostración 1.2.0.2 .

1. *De manera análoga a como hicimos en la prueba del teorema 1.2.1, basta con que demostremos que* $L_T \cap T' \subseteq T$. *Sean* $\psi \in L_T \cap T'$, $\mathfrak{A}$ *una estructura de tipo* ρ, *tal que* $\models_{\mathfrak{A}} T$. *Sea* $\mathfrak{A}' = \langle \mathfrak{A}, f^{\mathfrak{A}'} \rangle$ *una* ρ' *expansión de* $\mathfrak{A}$, *tal que para cada* $a_1 \ldots a_n \in |\mathfrak{A}\,| (= |\mathfrak{A}'\,|)$, *considerando* φ *la fórmula del nuevo axioma definimos*

   $$f^{\mathfrak{A}'}(a_1, \ldots, a_n) = \text{“el único } b \text{ tal que } \models_{\mathfrak{A}} \varphi[x_1/a_1, \ldots x_n/a_n, y/b]\text{”}$$

   De acuerdo a esta definición, tenemos que

   (a) $\models_{\mathfrak{A}'} \forall x_1, \ldots, \forall x_n \forall y (f(x_1, \ldots, x_n) \approx y \leftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n, y))$
   Así que

   (b) $\models_{\mathfrak{A}'} T'$
   Como $T' \vdash \psi$, *de acuerdo al inciso anterior tenemos que*

   (c) $\models_{\mathfrak{A}'} \psi$
   Dado que $\psi \in L_T$, *(c) implica que*

   (d) $\models_{\mathfrak{A}} \psi$
   De lo cual obtenemos que

   (e) $T \models \psi$
   Finalmente por el teorema de correctud-completud extendido tenemos que

   (f) $T \vdash \psi$
   Con lo que concluimos que $\psi \in T$.

2. *Para este punto, veremos primero que para todo* ρ'*-término* t *cuyas variables son* $x_1, \ldots x_n$ *hay una fórmula* ψ_{tx} *cuyas variables libres son las de* t *y* x, *y tal que* $T' \vdash \psi_{tx} \leftrightarrow t \approx x$:

   i. *Si* $t = v_0$ *entonces* $\psi_{tx} \rightleftharpoons t \approx v_0$

ii. *Si* $t = c_0$ *entonces* $\psi_{tx} \rightleftharpoons t \approx c_0$
iii. *Si* $t = f(x_1, \ldots, x_n)$ *entonces* $\psi_{tx} \rightleftharpoons \varphi(x_1, \ldots, x_n, x)$
iv. *Si* $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ *entonces*
$$\psi_{tx} \rightleftharpoons \exists y_1, \ldots, \exists y_n(\psi_{t_1y_1} \wedge \cdots \wedge \psi_{t_ny_n} \wedge \varphi(y_1, \ldots, y_n, x)$$
v. *Si* $t = g(t_1, \ldots t_k)$ *entonces*
$$\psi_{tx} \rightleftharpoons \exists y_1, \ldots, \exists y_k(\psi_{t_1y_1} \wedge \cdots \wedge \psi_{t_ky_k} \wedge g(y_1, \ldots, y_k, x) \approx x)$$
$(g \neq f)$

Definimos α^* *recursivamente:*

– *Si* α *es atómica*

i. $(t_1 \approx t_2)^* \rightleftharpoons \exists y_1 \exists y_2(y_1 \approx y_2 \wedge \psi_{t_1y_1} \wedge \psi_{t_2y_2})$
ii. $(R(t_1, \ldots, t_n))^* \rightleftharpoons \exists y_1, \ldots, \exists y_n(\psi_{t_1y_1} \wedge \cdots \wedge \psi_{t_ny_n} \wedge R(y_1, \ldots, y_n))$

– *En general*

i. $(\neg\alpha)^* \rightleftharpoons \neg\alpha^*$
ii. $(\alpha \wedge \beta)^* \rightleftharpoons \alpha^* \wedge \beta^*$
iii. $(\alpha \vee \beta)^* \rightleftharpoons \alpha^* \vee \beta^*$
iv. $(\forall x\alpha)^* \rightleftharpoons \forall x\alpha^*$

Como lo importante para este trabajo es garantizar que de acuerdo a como hemos definido a la teoría T', ésta es una extensión conservadora de T, y dar una construcción para las fórmulas α^**, dejamos la demostración de este punto como ejercicio para el lector.*

3. *La demostración de este punto es la misma que la correspondiente en el teorema anterior.*

Teorema 1.2.3 (Extensiones por Definición de Constantes)

Sea T una ρ*–teoría,* $\varphi \in L^1_T$ *cuya única variable libre es y. Supóngase que :*

(a) $T \vdash \exists y\varphi(y)$

(b) $T \vdash \forall y \forall z(\varphi(y) \wedge \varphi(z) \rightarrow y \approx z)$

Sean

– c_0 *una constante individual tal que* $c_0 \notin \rho(T)$

– $\rho(T') = \rho(T) \cup \{c_0\}$

– $T' = (T \cup \{\forall y(y \approx c_0 \leftrightarrow \varphi(y))\})^{\vdash}$

entonces se cumplen las condiciones 1, 2 y 3 del teorema 1.2.1.

Demostración 1.2.0.3 .

1. *La demostración para este punto es análoga a la que hicimos a la correspondiente en el teorema 1.2.2.*

2. *Definimos ψ_{tx} para cada ρ' término y cada x que no aparezca en t, tal que $\models \psi_{tx} \leftrightarrow t \approx x$*

   i. *Para* $t = v_0$ $\quad \psi_{tx} \rightleftharpoons v_0 \approx x$
   ii. *Para* $t = c$ $\quad \psi_{tx} \rightleftharpoons c \approx x \ (c \neq c_0)$
   iii. *Para* $t = c_0$ $\quad \psi_{tx} \rightleftharpoons \psi(x)$
   iv. *Para* $t = f(t_1, \ldots, t_n)$
   $$\psi_{tx} \rightleftharpoons \exists y_1, \ldots, \exists y_n (\psi_{t_1 y_1} \wedge \cdots \wedge \psi_{t_n y_n} \wedge f(y_1, \ldots, y_n) \approx x)$$

   Definimos α^* recursivamente de la misma manera a como lo hicimos en el teorema 1.2.2. La demostración la dejamos como ejercicio para el lector.

3. *La demostración de este punto es la misma que la que hicimos en el teorema 1.2.1.*

1.3 Extendiendo a L_{ZF}

En esta sección construiremos una extensión de ZF, agregando al lenguaje L_{ZF} una constante individual y una letra funcional de aridad 1, y a ZF los axiomas correspondientes según los teoremas sobre extensiones conservadoras que los definen.

Recordemos que:

$$L_{ZF} = \{\in\} \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\} \cup \{\exists\ , \forall\} \cup \{) \ , (\ , \cdot\} \cup \{\approx\}$$

Los axiomas propios de ZF han sido enunciados en la introducción. Seleccionaremos de entre ZF a los axiomas de *extensionalidad*, *vacío*, *par* y *unión*, y al conjunto formado por estos axiomas lo denotaremos con E. Las reglas de inferencia de nuestro sistema formal serán, como ya hemos mencionado, *modus ponens* (M.P.) y *generalización* (Gen). Así mismo L_E denota al lenguaje de la teoría T_E que se obtiene de la cerradura deductiva de E, y tenemos que L_E coincide con L_{ZF}. Por tanto, nos referiremos a este lenguaje así como a su tipo de semejanza ya sea con el subíndice E o con el subíndice ZF.

1.3.1 Definiendo a la constante individual correspondiente al vacío

De acuerdo al teorema de extensiones por definición de constantes sea $c_0 \notin \rho(\mathrm{ZF})$, sea $\varphi_c \in L^1_{ZF}$ definida de la siguiente manera:

$$\varphi_c(\mathrm{x}) \quad \rightleftharpoons \quad \forall \mathrm{z}\neg(\mathrm{z}\in\mathrm{x})$$

Proposición 1.3.1 *La teoría que se obtiene de E' al hacer*

- $\rho'_{ZF} = \rho_{ZF} \cup \{c_0\}$
- $E' = E \cup \{\forall x(x \approx c_0 \leftrightarrow \varphi_c(x))\}$

es una extensión conservadora de T_E.

De acuerdo al teorema 1.2.3 debemos demostrar que:

(a) $\mathrm{E} \vdash \exists \mathrm{x}\forall \mathrm{z}\neg(\mathrm{z}\in\mathrm{x})$

(b) $\mathrm{E} \vdash \forall \mathrm{x}\forall \mathrm{y}((\forall \mathrm{z}\neg(\mathrm{z}\in\mathrm{x}) \wedge \forall \mathrm{z}\neg(\mathrm{z}\in\mathrm{y}) \rightarrow \mathrm{x}\approx\mathrm{y}))$

Demostración 1.3.1.1 *(Existencia)*

Tenemos que

1. $\{$*axioma del vacío*$\} \vdash \exists x\forall z\neg(z\in x)$

La unicidad la demostraremos por contrapositiva, esto es

$$\text{P.D.} \qquad \forall \mathrm{x}\forall \mathrm{y}\Big(\neg(\mathrm{x}\approx\mathrm{y}) \rightarrow (\neg(\forall \mathrm{z}\neg(\mathrm{z}\in\mathrm{x}))\vee \neg(\forall \mathrm{z}\neg(\mathrm{z}\in\mathrm{y})))\Big)$$

es decir

$$\text{P.D.} \qquad \forall \mathrm{x}\forall \mathrm{y}\Big(\neg(\mathrm{x}\approx\mathrm{y}) \rightarrow (\exists \mathrm{z}(\mathrm{z}\in\mathrm{x}) \vee (\exists \mathrm{z}\ (\mathrm{z}\in\mathrm{y}))\Big)$$

Demostración 1.3.1.2 *(Unicidad) Tenemos que*

1. $\{$*axioma de extensionalidad*$\} \vdash \neg(x \approx y) \rightarrow$
$$\exists z(\neg(z \in x \rightarrow z \in y) \vee \neg(z \in y \rightarrow z \in x))$$

si y sólo si

2. $\{$*axioma de extensionalidad*$\} \vdash \neg\ (x \approx y) \rightarrow$
$$\exists z\Big(((z\in x) \wedge \neg(z\in y)) \vee ((z\in y) \wedge \neg(z\in x))\Big)$$

Por la fórmula 4.4 del apéndice B-II tenemos

3. $\vdash \exists z\Big(((z\in x) \wedge \neg(z\in y)) \vee ((z\in y) \wedge \neg(z\in x))\Big) \rightarrow$
$$\Big(\exists z((z\in x) \wedge \neg(z\in y)) \vee \exists z((z\in y) \wedge \neg\ (z\in x))\Big)$$

Por 4.2 del apéndice B-II tenemos

4. $\vdash \Big(\exists z((z\in x) \wedge \neg(z\in y)) \vee \exists z((z\in y) \wedge \neg(z\in x))\Big) \rightarrow$
$$\Big((\exists z\ (z\in x) \wedge \exists z\neg(z\in y)) \vee (\exists z\ (z\in y) \wedge \exists z\neg(z\in x))\Big)$$

Sean:

- $\alpha \rightleftharpoons \exists z(z{\in}x)$
- $\beta \rightleftharpoons \exists z\neg(z{\in}y)$
- $\gamma \rightleftharpoons \exists z(z{\in}y)$
- $\alpha \rightleftharpoons \exists z\neg(z{\in}x)$

Se tiene que, de acuerdo a la fórmula 1 del apéndice B-I,

5. $\vdash(\alpha\wedge\beta) \vee (\gamma\wedge\delta)\rightarrow (\alpha\vee\gamma)$

   (4) y (5) implican que

6. $E\vdash\Big(\big(\exists z\ (z{\in}x) \wedge \exists z\neg(z{\in}y)\big) \vee \big(\exists z\ (z{\in}y) \wedge \exists z\neg(z{\in}x)\big)\Big) \rightarrow$
   $$\Big(\exists z(z{\in}x) \vee \exists z(z{\in}y)\Big)$$

   todos los pasos anteriores y por transitividad en la implicación tenemos que

7. $E\vdash \neg(x{\approx}y) \rightarrow (\exists z(z{\in}x) \vee \exists z(z{\in}y))$

   Lo cual ocurre si y sólo si

8. $E\vdash\neg(x{\approx}y) \rightarrow \neg(\forall z\neg(z{\in}x) \wedge \forall z\neg(z{\in}y))$

   si y sólo si

9. $E\vdash\neg(x{\approx}y) \rightarrow\neg(\varphi_c(x) \wedge \varphi_c(y))$

   si y sólo si

10. $E\vdash \varphi_c(x)\wedge\varphi_c(y)\rightarrow (x{\approx}y)$

    aplicando Gen dos veces tenemos

11. $E\vdash \forall x\,\forall y\ ((\varphi_c(x)\wedge\varphi_c(y)) \rightarrow (x{\approx}y))$

    Con lo cual queda terminada la prueba de la unicidad

1.3.1 y 1.3.2 implican que

$$\mathrm{E} \ \vdash\ \exists x\varphi_c(x)\ \wedge\ \forall x\forall y(\varphi_c(x) \wedge \varphi_c(y)\ \rightarrow\ (x{\approx}y))$$

Por lo tanto,

1. $c_0{\notin}\rho(\mathrm{E})$
2. hay una fórmula φ_c en L^1_E tal que $\mathrm{E}\vdash\exists!x\varphi_c(x)$

Recordemos que L_E es el mismo que L_{ZF}, y por tanto también lo son sus tipos de semejanza

Sean:

$\rho'_{ZF} \ = \ \rho_{ZF} \cup \{c_0\}$
E' $\ = \ \mathrm{E} \cup \{\forall x(x \approx c_0 \leftrightarrow \varphi_c(x))\}$

Entonces de acuerdo al teorema 1.2.3 la teoría que se obtiene con $E'^{\vdash}$ es una extensión conservadora de T_E.

1.3.2 Definiendo a la letra funcional correspondiente a la función sucesor

La idea del comportamiento de la función sucesor "s(x)"es la siguiente:

$$s(x) = x \cup \{x\} \tag{1.1}$$
$$= \cup\{x, \{x\}\} \tag{1.2}$$
$$y = \cup\{x, \{x\}\} \tag{1.3}$$

Entonces debemos considerar a los siguientes conjuntos
$z_1 = \{x\}$, $z_2 = \{x,\{x\}\}$
para que
$y = \cup z_2$
Ya que tenemos idea de cómo es que se construye el conjunto sucesor de un conjunto, sean

- $f_s \notin \rho(ZF)$
- $\varphi_s \in L^2_{ZF}$

queremos que

$$f_s(x) = y \quad \text{syss} \quad \varphi_s(x, y)$$

De acuerdo a lo anterior φ_s queda definida intuitivamente de la siguiente manera:

$$\varphi_s(x, y) \quad \rightleftharpoons \quad \exists w \exists v (w \approx \{x\} \wedge v \approx \{x, \{x\}\} \wedge y \approx \cup v)$$

Formalmente damos la siguiente definición para φ_s:

$$\begin{aligned} \varphi_s(x, y) \quad \rightleftharpoons \quad \exists w \exists v \Big(& \forall u_1 (u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx x) \\ & \wedge \forall u_1 (u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx x \vee u_1 \approx w) \\ & \wedge \forall u_1 (u_1 \in y \leftrightarrow \exists z (z \in v \wedge u_1 \in z) \Big). \end{aligned}$$

Observemos que:

- $w \approx \{x\}$
- $v \approx \{x, w\}$
- φ_s $(x,y) \rightleftharpoons y \approx \cup v$

Proposición 1.3.2 *La teoría que se obtiene de E' al hacer*

- $\rho'_{ZF} = \rho_{ZF} \cup \{f_s\}$
- $E' = E \cup \{\forall x \forall y (f_s(x) \approx y \leftrightarrow \varphi_s(x, y))\}$

es una extensión conservadora de $\mathcal{T}_E$.

A continuación probaremos que para cada x existe un único y tal que φ_s(x,y), es decir:

P.D.

(a) $\mathrm{E} \vdash \forall \mathrm{x}\ \exists \mathrm{y} \varphi_s(\mathrm{x,y})$

(b) $\mathrm{E} \vdash \forall \mathrm{x}\ \forall \mathrm{y}\ \forall \mathrm{z}\ (\varphi_s(\mathrm{x,y}) \wedge \varphi_s(\mathrm{x,z}) \rightarrow \mathrm{y} \approx \mathrm{z})$

Demostraremos primero la existencia y luego la unicidad. Observemos que la existencia es equivalente a tener lo siguiente:

$$\begin{aligned}\mathrm{E} \vdash \forall x \exists y \exists w \exists v \Big(& \forall u_1 (u_1 \in \mathrm{w} \leftrightarrow u_1 \approx \mathrm{x}) \\ & \wedge \forall u_1 (u_1 \in \mathrm{v} \leftrightarrow u_1 \approx \mathrm{x} \vee u_1 \approx \mathrm{w}) \\ & \wedge \forall u_1\ (u_1 \in \mathrm{y} \leftrightarrow \exists\ \mathrm{z}\ (\mathrm{z} \in \mathrm{v} \wedge u_1 \in \mathrm{z}))\Big)\end{aligned}$$

Demostración 1.3.2.1 *(Existencia).*

Sean:

$$\begin{aligned} - A_1(w,x) &\rightleftharpoons \forall u_1\ (u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx x) \\ - A_2(w,v,x) &\rightleftharpoons \forall u_1\ (u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx x \vee u_1 \approx w) \\ - A_3(v,y) &\rightleftharpoons \forall u_1\ (u_1 \in y \leftrightarrow \exists z\ (z \in v \wedge u_1 \in z))\end{aligned}$$

1. $\{axioma\ del\ par\} \vdash \forall z\ \forall y\ \exists w\ \Big(\forall u_1\ (u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx z \vee u_1 \approx y)\Big)$

   Aplicando el axioma 4 (A_4) dos veces con el término x *el cual es libre para* z *y para* y *en la fórmula anterior, obtenemos*

2. $E \vdash \exists w\ \forall\ u_1\ (u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx x \vee u_1 \approx x)$.

   Lo cual implica que

3. $E \vdash \exists w\ \forall u_1\ (u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx x)$,

   es decir,

4. $E \vdash \exists w\ A_1(w,x)$.

   Análogamente,

5. $\{axioma\ del\ par\} \vdash \forall x\ \forall w\ \exists v\ \forall u_1\ (u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx x \vee u_1 \approx w)$,

   es decir,

6. $E \vdash \forall x\ \forall w\ \exists v\ A_2(w,v,x)$.

   Aplicando A_4 con el término x obtenemos

7. $E \vdash \forall w\ \exists v\ A_2(w,v,x)$

   De (4) y (7) obtenemos

8. $E \vdash \exists w\, A_1(w,x) \wedge \forall w\, \exists v\, A_2(w,v,x)$

De 5.1 del apéndice B-II y M.P. obtenemos

9. $E \vdash \exists w\, \big(A_1(w,x) \wedge \exists v\, A_2(w,v,x)\big)$

Ahora, por 7.4 del apéndice B-II y dado que la variable v no ocurre en $A_1(w,x)$ tenemos que

10. $E \vdash \exists v \exists w\, \big(A_1(w,x) \wedge A_2(w,v,x)\big)$

Por otro lado, sabemos que

11. $\{\textit{axioma de unión}\} \vdash \forall v\, \exists y \big(\forall u_1\, (u_1 \in y \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))\,\big)$

Esto es

12. $\{\textit{axioma de unión}\} \vdash \forall v\, \exists y\, A_3(v,y)$

Así que, de (10) y (12), obtenemos

13. $E \vdash \exists v \exists w\, \big(A_1(w,x) \wedge A_2(w,v,x)\,\big) \wedge \forall v\, \exists y\, A_3(v,y)$

De 5.1 del apéndice B-II y usando M.P., obtenemos

14. $E \vdash \exists v \Big(\exists w\, \big(A_1(w,x) \wedge A_2(w,v,x)\big) \wedge \exists y\, A_3(v,y)\Big)$

Como w no ocurre en $\exists y\, A_3(v,y)$, tenemos de acuerdo a la fórmula 7.4 del apéndice B-II y usando M.P. que:

15. $E \vdash \exists w \exists v \Big(\big(A_1(w,x) \wedge A_2(w,v,x)\big) \wedge \exists y\, A_3(v,y)\Big)$

y como y no ocurre en $(A_1(w,x) \wedge A_2(w,v,x))$, por 7.4 y usando M.P.tenemos

16. $E \vdash \exists y \exists w \exists v \Big(A_1(w,x) \wedge A_2(w,v,x) \wedge A_3(v,y)\Big)$

Lo cual equivale a

17. $$E \vdash \exists y\, \exists w\, \exists v\, \Big(\forall u_1\, (u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx x) \\ \wedge \forall\, u_1\, (u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx x \vee u_1 \approx w) \\ \wedge \forall\, u_1\, (u_1 \in y \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))\Big),$$

es decir,

18. $E \vdash \exists y\, \varphi_s(x,y)$

Aplicando Gen, tenemos que

19. $E \vdash \forall x\, \exists y\, \varphi_s(x,y)$

Con lo que hemos terminado esta parte de la demostración.

Ahora demostraremos la unicidad, esto es:

P.D. $\mathrm{E} \vdash \forall \mathrm{x} \forall y_1 \forall y_2 (\varphi_s(\mathrm{x},y_1) \wedge \varphi_s(\mathrm{x},y_2) \rightarrow y_1 \approx y_2)$

es decir,

P.D. $E \vdash$

$$\exists w \exists v\, [\forall u_1 (u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx x) \wedge \forall u_1\, (u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx x \vee u_1 \approx w) \wedge \forall u_1\, (u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z\, (z \in v \wedge u_1 \in z))]$$
$$\wedge\ \exists w \exists v\, [\forall u_1 (u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx x) \wedge \forall u_1\, (u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx x \vee u_1 \approx w) \wedge \forall u_1\, (u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z\, (z \in v \wedge u_1 \in z))]$$
$$\rightarrow (y_1 \approx y_2)$$

Esta demostración está dividida en 4 partes.

Demostración 1.3.2.2 *(Unicidad)*
Sean:

- $A_1(w,x) \rightleftharpoons \forall u_1 (u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx x)$
- $A_2(w,v,x) \rightleftharpoons \forall u_1 (u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx w \vee u_1 \approx x)$
- $A_3(v,y_1) \rightleftharpoons \forall u_1 (u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z\, (z \in v \wedge u_1 \in z))$

las cuales son subfórmulas de la fórmula $\varphi_s(x,y)$.

Consideremos la siguiente deducción, en la cual utilizaremos constantes provisionales a, b, c, d.

De la fórmula (4) del apéndice B-I, tenemos que

1. $E\,,\ \Big[\Big(A_1(a,x) \wedge A_2(a,b,x) \wedge A_3(b,y_1)\Big) \wedge \Big(A_1(c,x) \wedge A_2(c,d,x) \wedge A_3(d,y_2)\Big)\Big] \vdash \Big[A_1(a,x) \wedge A_1(c,x)\Big]$

y que

2. $E\,,\ \Big[\Big(A_1(a,x) \wedge A_2(a,b,x) \wedge A_3(b,y_1)\Big) \wedge \Big(A_1(c,x) \wedge A_2(c,d,x) \wedge A_3(d,y_2)\Big)\Big] \vdash \Big[A_2(a,b,x) \wedge A_2(c,d,x)\Big]$

y que

3. $E\,,\ \Big[\Big(A_1(a,x) \wedge A_2(a,b,x) \wedge A_3(b,y_1)\Big) \wedge \Big(A_1(c,x) \wedge A_2(c,d,x) \wedge A_3(d,y_2)\Big)\Big] \vdash \Big[A_3(b,y_1) \wedge A_3(d,y_2)\Big]$

Veamos cuál es la idea de lo que demostraremos a continuación. Para facilitar la notación, durante la redacción de la idea, denotemos por:

$$B(x,y_1,y_2) \rightleftharpoons (A_1(a,x) \wedge A_2(a,b,x) \wedge A_3(b,y_1)) \wedge (A_1(c,x) \wedge A_2(c,d,x) \wedge A_3(d,y_2))$$

Demostraremos lo siguiente:

(a) E , $B(x,y_1,y_2) \vdash A_1(a,x) \wedge A_1(c,x) \rightarrow a \approx c$

De esta manera podremos aplicar M.P. usando el paso (1) y de acuerdo a (2) tendremos que:

(b) E , $B(x,y_1,y_2) \vdash [a \approx c \wedge A_2(a,b,x) \wedge A_2(c,d,x)]$

Además demostraremos que

(c) E , $B(x,y_1,y_2) \vdash \left[a \approx c \wedge A_2(a,b,x) \wedge A_2(c,d,x)\right] \rightarrow \left[b \approx d\right]$

Con lo que tendremos de acuerdo a M.P. en (1) y (a), por (b) y (c) que

(d) E , $B(x,y_1,y_2) \vdash ((a \approx c) \wedge (b \approx d))$

Además, de acuerdo a (3) y (d) tendremos que:

(e) E , $B(x,y_1,y_2) \vdash (A_3(b,y_1) \wedge A_3(d,y_2) \wedge (a \approx c) \wedge (b \approx d))$

Finalmente demostraremos que:

(f) E , $B(x,y_1,y_2) \vdash (A_3(b,y_1) \wedge A_3(d,y_2) \wedge (a \approx c) \wedge (b \approx d)) \rightarrow (y_1 \approx y_2)$

Con lo que habremos terminado la prueba de la unicidad.

Así que la parte II de nuestra demostración consiste en demostrar el inciso (a) anterior, es decir

P.D E , $B(x,y_1,y_2) \vdash A_1(a,x) \wedge A_1(c,x) \rightarrow a \approx c$

P.D. E , $B(x,y_1,y_2) \vdash \forall u_1(u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \approx x) \wedge \forall u_1(u_1 \in c \leftrightarrow u_1 \approx x) \rightarrow (a \approx c)$

Parte II- *(Inciso(a)) Por la fótmula 4.1 del apéndice B-II tenemos que*

1. $E, B(x,y_1,y_2) \vdash [\forall u_1(u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \approx x) \wedge \forall u_1 (u_1 \in c \leftrightarrow u_1 \approx x)] \rightarrow \forall u_1 [(u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \approx x) \wedge (u_1 \in c \leftrightarrow u_1 \approx x)]$

   Por A_4 con el mismo término u_1 se tiene que

2. E , $B(x,y_1,y_2) \vdash \forall u_1 [(u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \approx x) \wedge (u_1 \in c \leftrightarrow u_1 \approx x)] \rightarrow [(u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \approx x) \wedge (u_1 \in c \leftrightarrow u_1 \approx x)]$

   Así que por los dos pasos anteriores y por transitividad de la implicación,

3. E , $B(x,y_1,y_2) \vdash [\forall u_1(u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \approx x) \wedge \forall u_1 (u_1 \in c \leftrightarrow u_1 \approx x)] \rightarrow [(u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \approx x) \wedge (u_1 \in c \leftrightarrow u_1 \approx x)]$

   Además por 22 del apéndice B-II tenemos que

   $[(u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \approx x) \wedge (u_1 \in c \leftrightarrow u_1 \approx x)] \rightleftharpoons [(u_1 \in a \rightarrow u_1 \approx x) \wedge (u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in a) \wedge (u_1 \in c \rightarrow u_1 \approx x) \wedge (u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in c)]$

   Entonces podemos afirmar que

4. E , $B(x,y_1,y_2) \vdash [(u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \approx x) \wedge (u_1 \in c \leftrightarrow u_1 \approx x)] \leftrightarrow [(u_1 \in a \rightarrow u_1 \approx x) \wedge (u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in a) \wedge (u_1 \in c \rightarrow u_1 \approx x) \wedge (u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in c)]$

   Por (3) y (4) y la transitividad de la implicación,

5. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [A_1(a,x) \wedge A_1(c,x)] \rightarrow$
$$[(u_1 \in a \rightarrow u_1 \approx x) \wedge (u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in a) \wedge (u_1 \in c \rightarrow u_1 \approx x) \wedge (u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in c)]$$

De la fórmula 4 del apéndice B-I y la transitividad de la implicación, se tiene que

6. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [A_1(a,x) \wedge A_1(c,x)] \rightarrow$
$$[(u_1 \in a \rightarrow u_1 \approx x) \wedge (u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in c)]$$

Por 13 del apéndice B-II,

7. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(u_1 \in a \rightarrow u_1 \approx x) \wedge (u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in c)] \rightarrow$
$$(u_1 \in a \rightarrow u_1 \in c)$$

De (6) y (7) y la transitividad de la implicación, se tiene que

8. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [A_1(a,x) \wedge A_1(c,x)] \rightarrow (u_1 \in a \rightarrow u_1 \in c)$

Análogamente, de (5) obtenemos:

9. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [A_1(a,x) \wedge A_1(c,x)] \rightarrow$
$$[(u_1 \in c \rightarrow u_1 \approx x) \wedge (u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in a)]$$

Nuevamente por la fórmula 13 del apéndice B-II

10. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(u_1 \in c \rightarrow u_1 \approx x) \wedge (u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in a)] \rightarrow$
$$(u_1 \in c \rightarrow u_1 \in a)$$

Estos dos últimos pasos dan como resultado que

11. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [A_1(a,x) \wedge A_1(c,x)] \rightarrow (u_1 \in c \rightarrow u_1 \in a)$

De (8) y (11),

12. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [A_1(a,x) \wedge A_1(c,x)] \rightarrow$
$$(u_1 \in a \rightarrow u_1 \in c) \wedge (u_1 \in c \rightarrow u_1 \in a)$$

Esto es,

13. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [A_1(a,x) \wedge A_1(c,x)] \rightarrow (u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \in c)$

Aplicando Generalización obtenemos

14. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash \forall u_1\ [[A_1(a,x) \wedge A_1(c,x)] \rightarrow (u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \in c)]$

Como u_1 no ocurre en las fórmulas $A_1(a,x)$ y $A_1(c,x)$, entonces por 7.2 del apéndice B-II tenemos que

15. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash \forall u_1\ [[A_1(a,x) \wedge A_1(c,x)] \rightarrow (u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \in c)]$
$$\rightarrow [[A_1(a,x) \wedge A_1(c,x)] \rightarrow \forall u_1\ (u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \in c)]$$

Aplicando M.P. a (14) y (15),

16. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [A_1(a,x) \wedge A_1(c,x)] \rightarrow \forall u_1\ [u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \in c]$

El axioma de Extensionalidad implica que

17. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \rightarrow\ \vdash \forall x\, \forall y\ (\forall u_1 (u_1 \in x \leftrightarrow u_1 \in y) \rightarrow x \approx y)$

Aplicando A_4 con los términos a y c que ocurren libres en esta fórmula tenemos que

18. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash (\forall u_1 (u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \in c) \rightarrow a \approx c)$

Por la transitividad de la implicación para las fórmulas 16) y 18),

19. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [A_1(a,x) \wedge A_1(c,x)] \rightarrow [a \approx c]$

Con lo cual queda demostrado el inciso (a).

Ahora comenzaremos la tercera parte de la demostración la que corresponde al inciso (c), esto es,

P.D. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash (a \approx c) \wedge A_2(a,b,x) \wedge A_2(c,d,x) \rightarrow (b \approx d)$

P.D. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(a \approx c) \wedge$

$$\begin{aligned} &\forall u_1\ (u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge \\ &\forall u_1\ (u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)] \rightarrow \\ &\qquad (b \approx d) \end{aligned}$$

Parte III-*(Inciso (c))*

Por la fórmula 4 del apéndice B-I tenemos que

1. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(a \approx c) \wedge$

$$\begin{aligned} &\forall u_1\ (u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge \\ &\forall u_1\ (u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)] \rightarrow \\ &\qquad [\forall u_1\ (u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge \\ &\qquad \forall u_1\ (u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)] \end{aligned}$$

Por la fórmula 4.1 del apéndice B-II,

2. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash \forall u_1\ (u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge$

$$\begin{aligned} &\forall u_1\ (u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x) \rightarrow \\ &\qquad \forall u_1\ ((u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge \\ &\qquad (u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)) \end{aligned}$$

Entonces, por la transitividad de la implicación obtenemos

3. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(a \approx c) \wedge$

$$\begin{aligned} &\forall u_1\ (u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge \\ &\forall u_1\ (u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)] \rightarrow \\ &\qquad \forall u_1\ ((u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge \\ &\qquad (u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)) \end{aligned}$$

Pero también tenemos que

4. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(a \approx c) \wedge$

$$\begin{aligned} &\forall u_1\ (u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge \\ &\forall u_1\ (u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)] \rightarrow \\ &\qquad (a \approx c) \end{aligned}$$

Como u_1 no ocurre en $(a \approx c)$, por 2.1 del apéndice B-II, *5.* $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash (a \approx c) \rightarrow \forall u_1 (a \approx c)$

Aplicando la transitividad de la implicación a los dos pasos anteriores, tenemos que

6. $$E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(a \approx c) \wedge \forall u_1\ (u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge \forall u_1\ (u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)] \rightarrow \forall u_1 (a \approx c)$$

Entonces, por los pasos (3) y (6) y la fórmula 9 del apéndice B-I,

7. $$E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(a \approx c) \wedge \forall u_1\ (u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge \forall u_1\ (u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)] \rightarrow \forall u_1 (a \approx c) \wedge \forall u_1\ [(u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge (u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)]$$

Nuevamente por la fórmula 4.1 del apéndice B-II, tenemos que

8. $$E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash \forall u_1 (a \approx c) \wedge \forall u_1\ ((u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge (u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)) \rightarrow \forall u_1 [(a \approx c) \wedge (u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge (u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)]$$

Así que aplicando la transitividad de la implicación a estos dos últimas pasos obtenemos

9. $$E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(a \approx c) \wedge \forall u_1\ (u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge \forall u_1\ (u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)] \rightarrow \forall u_1\ [(a \approx c) \wedge ((u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge (u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x))]$$

Por A_4 tenemos que

10. $$E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash \forall u_1\ [(a \approx c) \wedge ((u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge (u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x))] \rightarrow [(a \approx c) \wedge ((u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge (u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x))]$$

De los pasos (9) y (10) y por 13 del apéndice B-II, y usando M.P., tenemos que

11. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(a \approx c) \wedge$
$\forall u_1\ (u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge$
$\forall u_1\ (u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)] \rightarrow$
$[(a \approx c) \wedge$
$((u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge$
$(u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x))]$

Por otro lado, por 22 del apéndice B-II para "$\leftrightarrow$"tenemos que

12. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(a \approx c) \wedge$
$((u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge$
$(u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x))] \rightarrow$
$[(a \approx x) \wedge$
$((u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge$
$(u_1 \approx a \vee u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in b)) \wedge$
$((u_1 \in d \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x) \wedge$
$(u_1 \approx c \vee u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in d))]$

Como $(\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta)$, el paso anterior, 13 del apéndice B-II y M.P. implican que

13. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(a \approx c) \wedge$
$(\ (u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge$
$(u_1 \in d \leftrightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x))] \rightarrow$
$[(a \approx c) \wedge$
$(u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge$
$(u_1 \approx c \vee u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in d)]$

Los siguientes quince pasos son para demostrar lo siguiente:

$$(a \approx c) \wedge\ (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \rightarrow (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)$$

Sea $A(z,z)\ \rightleftharpoons\ (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx z \vee u_1 \approx x)$, entonces por el Axioma 7 (A_7) tenemos lo siguiente

14. $\vdash (z \approx y) \rightarrow$
$((u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx z \vee u_1 \approx x) \rightarrow (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx y \vee u_1 \approx x))$

Aplicando Generalización a la variable z, obtenemos

15. $\vdash \forall z[(z \approx y\ ) \rightarrow$
$((u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx z \vee u_1 \approx x) \rightarrow (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx y \vee u_1 \approx x))]$

Luego, aplicando A_4 con el término a que es libre para z en la fórmula anterior, obtenemos

16. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(a \approx y\ ) \rightarrow$
$((u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \rightarrow$
$(u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx y \vee u_1 \approx x))]$

Ahora, aplicando Generalización a la variable y, tenemos que

17. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash \forall y[(a \approx y) \rightarrow$
$$((u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \rightarrow (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx y \vee u_1 \approx x))]$$

Por A_4 con el término c el cual es libre para y en la fórmula anterior,

18. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash (a \approx c) \rightarrow$
$$((u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \rightarrow (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x))$$

Observamos que

19. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash (a \approx c) \wedge (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \rightarrow (a \approx c)$

Por otro lado, usando el Axioma 2 (A_2), haciendo la siguiente sustitución de fórmulas:

$$\begin{array}{lcl} A & \rightleftharpoons & ((a \approx c) \wedge (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x)) \\ B & \rightleftharpoons & (a \approx c) \\ C & \rightleftharpoons & (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \rightarrow (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x) \end{array}$$

tenemos lo siguiente:

20. $$\vdash \Big[\Big((a \approx c) \wedge (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x)\Big) \rightarrow \Big((a \approx c) \rightarrow ((u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \rightarrow (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x))\Big)\Big]$$
$$\rightarrow \Big[\Big(((a \approx c) \wedge (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x)) \rightarrow (a \approx c)\Big) \rightarrow \Big(((a \approx c) \wedge (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x)) \rightarrow ((u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \rightarrow (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x))\Big)\Big]$$

Dada una expresión de la forma $\vdash \beta \rightarrow \gamma$ se tiene que $\vdash \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$. Así que, considerando como α a la fórmula $(a \approx c) \wedge (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x)$ y el paso (18), afirmamos que:

21. $E,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(a \approx c) \wedge (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x)] \rightarrow$
$$[((a \approx c) \rightarrow ((u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \rightarrow (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)))]$$

Aplicando M.P. a (21) y (20), obtenemos

22. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash \Big[((a \approx c) \wedge$
$$(u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x)) \rightarrow (a \approx c)\Big] \rightarrow$$
$$\Big[((a \approx c) \wedge (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x)) \rightarrow$$

$$\left((u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \rightarrow (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)\right)\Big]$$

Aplicando la tautología $(\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta)$,

23. $E\,,\, B(x,y_1,y_2) \vdash \big((a \approx c) \wedge (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x)\big) \rightarrow \big(a \approx c\big)$

Aplicando M.P. a (23) y (22),

24. $E\,,\, B(x,y_1,y_2) \vdash [(a \approx c) \wedge (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x)] \rightarrow [(u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \rightarrow (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)]$

Luego, por A_2 *y la fórmula del paso anterior,*

25. $E\,,\, B(x,y_1,y_2) \vdash \Big[\big[(a \approx c) \wedge (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x)\big] \rightarrow \big[(u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \rightarrow (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)\big]\Big] \rightarrow \Big[\big[((a \approx c) \wedge (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x)) \rightarrow (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x)\big] \rightarrow \big[((a \approx c) \wedge (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x)) \rightarrow (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)\big]\Big]$

Aplicando M.P. a (24) y (25),

26. $E\,,\, B(x,y_1,y_2) \vdash \Big[(a \approx c) \wedge (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \rightarrow (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x)\Big] \rightarrow \Big[(a \approx c) \wedge (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \rightarrow (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x)\Big]$

De acuerdo a la tautología $(\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta)$, *obtenemos*

27. $\vdash ((a \approx c) \wedge (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x)) \rightarrow (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x)$

Aplicando M.P. a (27) y (26),

28. $E\,,\, B(x,y_1,y_2) \vdash ((a \approx c) \wedge (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x)) \rightarrow (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x))$

Esto último es lo que nos propusimos probar después del paso (13). Continuemos con la demostración de la parte III. Sabemos que $((\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta \wedge \delta \rightarrow \gamma))$ *(ver fórmula 2 del apéndice B-I) entonces del paso (28) podemos afirmar que*

29. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash (a \approx c) \wedge$
$$(u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge$$
$$(u_1 \approx c \vee u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in d) \rightarrow$$
$$((u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x))$$

Además, de $(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \rightarrow \gamma)$ obtenemos

30. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash (a \approx c) \wedge$
$$(u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge$$
$$(u_1 \approx c \vee u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in d) \rightarrow$$
$$(u_1 \approx c \vee u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in d)$$

Sabemos que de $\alpha \rightarrow \beta$ y $\alpha \rightarrow \gamma$ se puede obtener $\alpha \rightarrow \beta \wedge \gamma$, (fórmula 9 del apéndice B-I). Aplicando esta última fórmula a los pasos (29) y (30) obtenemos

31. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(a \approx c) \wedge$
$$(u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge$$
$$(u_1 \approx c \vee u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in d)] \rightarrow$$
$$[(u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x) \wedge$$
$$(u_1 \approx c \vee u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in d)]$$

Si observamos las dos últimas fórmulas del paso anterior y recordamos que $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$ (fórmula 5 del apéndice), tenemos que

32. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x) \wedge$
$$(u_1 \approx c \vee u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in d)] \rightarrow$$
$$(u_1 \in b \rightarrow u_1 \in d)$$

Nuevamente por la fórmula 5 del apéndice B-I, con las fórmulas de los pasos (31) y (32), por M.P., tenemos que

33. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(a \approx c) \wedge$
$$(u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge$$
$$(u_1 \approx c \vee u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in d)] \rightarrow$$
$$[(u_1 \in b \rightarrow u_1 \in d)]$$

De manera análoga se demuestra que

34. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(a \approx c) \wedge$
$$(u_1 \in d \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x) \wedge$$
$$(u_1 \approx a \vee u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in b)] \rightarrow$$
$$[(u_1 \in d \rightarrow u_1 \in b)]$$

Entonces en el paso (33), aplicamos que $(\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta)\ )$ y por M.P., obtenemos

35. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash \Big[((a \approx c) \wedge$
$$(u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge$$
$$(u_1 \approx c \vee u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in d)) \wedge$$
$$((a \approx c) \wedge$$

$$(u_1 \in d \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x) \wedge$$
$$(u_1 \approx a \vee u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in b))\Big] \rightarrow$$
$$\Big[(u_1 \in b \rightarrow u_1 \in d)\Big]$$

Análogamente del paso 34 obtenemos

36. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash \Big[((a \approx c) \wedge (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge (u_1 \approx c \vee u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in d)) \wedge ((a \approx c) \wedge (u_1 \in d \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x) \wedge (u_1 \approx a \vee u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in b))\Big] \rightarrow \Big[(u_1 \in d \rightarrow u_1 \in b)\Big]$

Usando la fórmula 9 del apéndice B-I,

37. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash \Big[((a \approx c) \wedge (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx a \vee u_1 \approx x) \wedge (u_1 \approx c \vee u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in d)) \wedge ((a \approx c) \wedge (u_1 \in d \rightarrow u_1 \approx c \vee u_1 \approx x) \wedge (u_1 \approx a \vee u_1 \approx x \rightarrow u_1 \in b))\Big] \rightarrow \Big[(u_1 \in b \rightarrow u_1 \in d) \wedge (u_1 \in d \rightarrow u_1 \in b)\Big]$

De la definición de las fórmulas $A_2(a,b,x)$ y $A_2(c,d,x)$ que dimos al inicio de la demostración, tenemos que de acuerdo al paso anterior

38. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(a \approx c \wedge A_2(a,b,x) \wedge A_2(c,d,x))] \rightarrow ((u_1 \in b \rightarrow u_1 \in d) \wedge (u_1 \in d \rightarrow u_1 \in b))$

Es decir, que

39. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(a \approx c \wedge A_2(a,b,x) \wedge A_2(c,d,x))] \rightarrow [u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \in d]$

Aplicando Gen con la variable u_1

40. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash \forall u_1 \Big[[(a \approx c \wedge A_2(a,b,x) \wedge A_2(c,d,x))] \rightarrow [u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \in d]\Big]$

Como u_1 no ocurre ni en $a \approx c$, ni en $A_2(a,b,x)$, ni en $A_2(c,d,x)$, usando 7.2 del apéndice B-II y M.P., tenemos que

41. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(a \approx c \wedge A_2(a,b,x) \wedge A_2(c,d,x))\ ] \rightarrow \forall u_1 [u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \in d]$

Así que, por el axioma de extensionalidad, usando la fórmula 5 del apéndice B-I y M.P., obtenemos

42. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(a{\approx}c \wedge A_2(a,b,x) \wedge A_2(c,d,x))] \rightarrow [b \approx d]$

Con lo que hemos concluido la parte III de esta demostración, o bien el inciso (c) de la idea de la demostración.

PARTE IV. *Esta parte consiste en demostrar el inciso (f) de la idea de la demostración, es decir,*

$$P.D.\quad E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash a{\approx}c \wedge b{\approx}d \wedge A_3(b,y_1) \wedge A_3(d,y_2) \rightarrow y_1{\approx}y_2$$

Para lo cual basta probar que:

$$\begin{aligned} E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash \Big[&(b{\approx}d) \wedge \\ &\forall u_1(u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(\ z \in b \wedge u_1 \in z\ )) \wedge \\ &\forall u_1(u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z)\Big] \rightarrow \\ &\qquad\qquad\qquad \Big[(y_1 \approx y_2)\Big] \end{aligned}$$

De acuerdo a la fórmula 4.1 del apéndice B-II, tenemos que

$$\begin{aligned} 1.\ E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [&\forall u_1(u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \wedge \\ &\forall u_1(u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z)] \\ &\quad \rightarrow \forall u_1[(u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \wedge \\ &\qquad (u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(\ z \in d \wedge u_1 \in z))] \end{aligned}$$

Luego, por la fórmula 12 del apéndice B-I $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta \wedge \gamma))$ *y del paso anterior agregando* $b{\approx}d$ *obtenemos*

$$\begin{aligned} 2.\ E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [&(b \approx d) \wedge \\ &\forall u_1(u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \wedge \\ &\forall u_1(u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z))] \rightarrow \\ &\quad [(b \approx d) \wedge \\ &\quad \forall u_1\ ((u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z) \wedge \\ &\quad (u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z))] \end{aligned}$$

Por la fórmula 4 del apéndice, tenemos que:

$$\begin{aligned} 3.\ E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash\ &(b{\approx}d) \wedge \\ &\forall u_1\ ((u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z) \wedge \\ &(u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z)) \rightarrow \\ &\qquad\qquad (b{\approx}d) \end{aligned}$$

Por la fórmula 2.1 del apéndice B-II, como u_1 *no ocurre en* $(b{\approx}d)$, *tenemos que*

$$4.\ \vdash (b{\approx}d) \rightarrow \forall u_1(b{\approx}d)$$

Así que, por la fórmula 7 del apéndice B-I y M.P., tenemos que

$$\begin{aligned} 5.\ E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash\ &(b{\approx}d) \wedge \\ &\forall u_1\ ((u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z) \wedge \\ &(u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z)) \rightarrow \\ &\qquad\qquad \forall u_1(b{\approx}d) \end{aligned}$$

Además,

6. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash (b \approx d) \wedge$
$$\forall u_1\ ((u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z) \wedge (u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z)) \rightarrow \forall u_1\ ((u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z) \wedge (u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z))$$

Así que de estos dos últimos pasos obtenemos

7. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash (b \approx d) \wedge$
$$\forall u_1\ ((u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \wedge (u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z)) \rightarrow \forall u_1 (b \approx d) \wedge \forall u_1\ ((u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z) \wedge (u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z\ (z \in d \wedge u_1 \in z))$$

Con lo que de acuerdo a las fórmula 4.1 y 13 del apéndice B-II y usando M.P., podemos afirmar que

8. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash (b \approx d) \wedge$
$$\forall u_1\ ((u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \wedge (u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z)) \rightarrow \forall u_1\ [(b \approx d) \wedge ((u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z) \wedge (u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z))]$$

De acuerdo a 13 del apéndice B-II para las fórmulas de los pasos (2) y (8), obtenemos

9. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(b \approx d) \wedge$
$$\forall u_1 (u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \wedge \forall u_1 (u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z))] \rightarrow \forall u_1\ [(b \approx d) \wedge ((u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z) \wedge (u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z))]$$

Aplicando A_4 con la variabe u_1 de la última fórmula del paso anterior, y usando como término a la misma variable, obtenemos

10. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [\forall u_1\ ((b \approx d) \wedge$
$$((u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z) \wedge (u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z))))] \rightarrow [(b \approx d) \wedge ((u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z) \wedge (u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z))]$$

Así que estos dos últimos pasos y 13 del apéndice B-II $\Rightarrow$

11. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(b \approx d) \wedge$
$$\forall u_1 (u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \wedge \forall u_1 (u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z))] \rightarrow ((b \approx d) \wedge$$

$$((u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z{\in}b{\wedge}u_1 \in z) \wedge$$
$$(u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z{\in}d{\wedge}u_1 \in z)))$$

Por otro lado, de acuerdo con 22 del apéndice B-II para "$\leftrightarrow$",

12. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(b{\approx}d) \wedge$
$$((u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z) \wedge$$
$$(u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z))] \rightarrow$$
$$((b \approx d) \wedge$$
$$(u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \wedge$$
$$(\exists z(z \in b \wedge u_1 \in z) \rightarrow u_1 \in y_1) \wedge$$
$$(u_1 \in y_2 \rightarrow \exists z(z{\in}d{\wedge}u_1 \in z)) \wedge$$
$$(\exists z(z{\in}d{\wedge}u_1 \in z) \rightarrow u_1 \in y_2))$$

La fórmula 13 del apéndice B-II y los dos últimos pasos implican que

13. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(b{\approx}d) \wedge$
$$\forall u_1(u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \wedge$$
$$\forall u_1(u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z{\in}d{\wedge}u_1 \in z))] \rightarrow$$
$$[(b \approx d) \wedge$$
$$(u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \wedge$$
$$(\exists z(z \in b \wedge u_1 \in z) \rightarrow u_1 \in y_1) \wedge$$
$$(u_1 \in y_2 \rightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z)) \wedge$$
$$(\exists z(z \in d \wedge u_1 \in z) \rightarrow u_1 \in y_2)]$$

Ahora demostraremos que:

$$(b \approx d) \wedge (u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z{\in}b{\wedge}u_1 \in z)) \rightarrow (u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z{\in}d{\wedge}u_1 \in z)$$

Sea $A(v,v) \quad \rightleftharpoons \quad (u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z{\in}v{\wedge}u_1 \in z)$

Tenemos que

14. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash (b \approx d) \wedge (u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z{\in}b{\wedge}u_1 \in z)) \rightarrow (b \approx d)$

Con el axioma 7 y con la fórmula $A(v,v)$, se tiene que

15. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash v \approx w \rightarrow (A(v,v) \rightarrow A(v,w))$

La regla de Generalización implica que

16. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash \forall v(v \approx w \rightarrow (A(v,v) \rightarrow A(v,w)))$

Por el axioma 4 con el término (constante) b, el cual es libre para v en la fórmula del paso anterior,

17. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash b \approx w \rightarrow (A(b,b) \rightarrow A(b,w))$

Aplicando nuevamente Gen, ahora a la variable w, tenemos que

18. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash \forall w(b \approx w \rightarrow (A(b,b) \rightarrow A(b,w)))$

Nuevamente por el por el axioma 4 con el término d el cual es libre para w en la fórmula del paso anterior,

19. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash b \approx d \rightarrow (A(b,b) \rightarrow A(b,d))$

Sustituyendo por las definiciones de $A(b,b)$ *y* $A(b,d)$ *respectivamente,*

20. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash b \approx d \rightarrow$
$$((u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \rightarrow$$
$$(u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z))$$

De la fórmula 2 del apéndice B-I y del paso anterior, obtenemos

21. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(b \approx d) \wedge$
$$(u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z{\in}b{\wedge}u_1 \in z))] \rightarrow$$
$$[(u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z{\in}b{\wedge}u_1 \in z)) \rightarrow$$
$$(u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z{\in}d{\wedge}u_1 \in z\ ))]$$

Luego, por el Axioma 2 y M.P., tenemos que

22. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [((b \approx d) \wedge$
$$(u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \rightarrow$$
$$(u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(\ z \in b \wedge u_1 \in z)] \quad \rightarrow$$
$$[\ (b \approx d) \wedge$$
$$(u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(\ z \in b \wedge u_1 \in z)) \rightarrow$$
$$(u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z)]$$

Por la fórmula 4 del apéndice B-I,

23. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash ((b \approx d) \wedge (u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \rightarrow$
$$(u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z))$$

Entonces, aplicando M.P. a los dos pasos anteriores, obtenemos

24. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash ((b \approx d) \wedge (u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \rightarrow$
$$(u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z))$$

Con lo que hemos demostrado lo que nos propusimos después del paso (13). Ahora, por la fórmula 12 del apéndice B-I, tenemos que

25. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash ((b \approx d) \wedge$
$$(u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \wedge$$
$$\exists z(z \in d \wedge u_1 \in z) \rightarrow u_1 \in y_2) \rightarrow$$
$$(u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z)) \wedge$$
$$(\exists z(z \in d \wedge u_1 \in z) \rightarrow u_1 \in y_2))$$

Por otro lado, de acuerdo a la fórmula que está después de la implicación principal en el paso (13), tenemos que

26. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(b \approx d) \wedge$
$$(u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \wedge$$
$$(\exists z(z \in b \wedge u_1 \in z) \rightarrow u_1 \in y_1) \wedge$$
$$(u_1 \in y_2 \rightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z)) \wedge$$
$$(\exists z(z \in d \wedge u_1 \in z) \rightarrow u_1 \in y_2)] \rightarrow$$
$$[(b \approx d) \wedge$$

$$(u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z))\wedge$$
$$(\exists z(z \in d \wedge u_1 \in z) \rightarrow u_1 \in y_2)]$$

Entonces, la fórmula 5 del apéndice B-I y los pasos (13) y (26) implican que

27. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(b{\approx}d) \wedge$
$$\forall u_1 (u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \wedge$$
$$\forall u_1 (u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z))] \rightarrow$$
$$((b \approx d) \wedge$$
$$(u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \wedge$$
$$(\exists z(z \in d \wedge u_1 \in z) \rightarrow u_1 \in y_2))$$

De la fórmula de este último paso, de la fórmula del paso (25) y por la fórmula 13 del apéndice B-II, afirmamos lo siguiente

28. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(b{\approx}d) \wedge$
$$\forall u_1 (u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \wedge$$
$$\forall u_1 (u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z))] \rightarrow$$
$$(u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z)) \wedge$$
$$(\exists z(z \in d \wedge u_1 \in z) \rightarrow u_1 \in y_2))$$

De acuerdo a la fórmula 5 del apéndice B-I, tenemos que

29. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash\ [(u_1 \in y_1 \rightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z)) \wedge$
$$(\exists z(z \in d \wedge u_1 \in z) \rightarrow u_1 \in y_2))] \rightarrow$$
$$(u_1 \in y_1 \rightarrow u_1 \in y_2)$$

Entonces, de estos dos últimos pasos y por la fórmula 5 del apéndice B-I, tenemos que

30. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(b{\approx}d) \wedge$
$$\forall u_1 (u_1 \in y_1 \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \wedge$$
$$\forall u_1 (u_1 \in y_2 \leftrightarrow \exists z(z \in d \wedge u_1 \in z))] \rightarrow$$
$$(u_1 \in y_1 \rightarrow u_1 \in y_2)$$

De acuerdo a la definición de la fórmula $A_3(v,y)$ y al paso anterior, tenemos que

31. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash\ (b{\approx}d) \wedge A_3(b,y_1) \wedge A_3(d,y_2) \ \rightarrow (u_1 \in y_1 \rightarrow u_1 \in y_2)$

De manera totalmente análoga, se demuestra que

32. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash\ (b{\approx}d) \wedge A_3(b,y_1) \wedge A_3(d,y_2) \ \rightarrow (u_1 \in y_2 \rightarrow u_1 \in y_1)$

Así que, de los pasos (31) y (32), afirmamos que

33. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash\ (b{\approx}d) \wedge A_3(b,y_1) \wedge A_3(d,y_2) \ \rightarrow [u_1 \in y_1 \leftrightarrow u_1 \in y_2]$

Por el Axioma de Extensionalidad, tenemos que

34. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash\ [u_1 \in y_1 \leftrightarrow u_1 \in y_2] \rightarrow [y_1 \approx y_2]$

La fórmula 13 del apéndice B-II y los dos pasos anteriores implican que

35. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash [(b \approx d) \wedge A_3(b,y_1) \wedge A_3(d,y_2)] \ \rightarrow [y_1 \approx y_2]$

Con lo que queda terminada esta parte de la demostración.

Entonces, por el paso (1) del principio de la demostración y (19) de la parte II, se tiene que

36. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash a \approx c$

Por(2) del principio de la demostración y (42) de la parte III,

37. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash b \approx d$

De (3) del principio de la demostración y este paso (37), obtenemos

38. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash (b \approx d) \wedge A_3(b,y_1) \wedge A_3(d,y_2)$

Así que por M.P. de (35) y (38), se tiene que

39. $E\ ,\ B(x,y_1,y_2) \vdash y_1 \approx y_2$

De acuerdo a la definición de la fórmula $B(x,y_1,y_2)$ y por la Regla C aplicada 4 veces, obtenemos

40. $E,\ \exists w_1 \exists v_1 \exists w_2 \exists v_2 \Big((A_1(w_1,x) \wedge A_2(w_1,v_1,x) \wedge A_3(v_1,y_1)) \wedge (A_1(w_2,x) \wedge A_2(w_2,v_2,x) \wedge A_3(v_2,y_2)) \Big) \vdash y_1 \approx y_2$

Lo cual es equivalente a

41. $E,\ \exists w_1 \exists v_1\ (A_1(w_1,x) \wedge A_2(w_1,v_1,x) \wedge A_3(v_1,y_1)) \wedge \exists w_2 \exists v_2 (A_1(w_2,x) \wedge A_2(w_2,v_2,x) \wedge A_3(v_2,y_2)) \vdash y_1 \approx y_2$

O bien a que

42. $E,\ \exists w \exists v (A_1(w,x) \wedge A_2(w,v,x) \wedge A_3(v,y_1)) \wedge \exists w \exists v (A_1(w,x) \wedge A_2(w,v,x) \wedge A_3(v,y_2)) \vdash y_1 \approx y_2$

Con lo que, de acuerdo a como hemos definido A_1, A_2 y A_3, lo anterior es equivalente a

43. $E,\ \varphi_s(x,y_1) \wedge \varphi_s(x,y_2) \vdash y_1 \approx y_2$

El metateorema de la deducción implica que

44. $E \vdash \varphi_s(x,y_1) \wedge \varphi_s(x,y_2) \rightarrow y_1 \approx y_2$

Por generalización, obtenemos

45. $E \vdash \forall y_1 \forall y_2 (\varphi_s(x,y_1) \wedge \varphi_s(x,y_2) \rightarrow y_1 \approx y_2)$

Con esto queda demostrada la unicidad para la variable "y"de la fórmula $\varphi_s(x,y)$.

De acuerdo al teorema por definiciones funcionales (Teorema 1.2.2) la extensión que se hace a L_E al agregar la letra funcional f_s y a E al agragar el axioma

$$\{\forall x_1 \forall y(f_s(x_1) \approx y \leftrightarrow \varphi_s(x_1, y))\}$$

es una extensión conservadora de T_E.

Sea:

$$E' = E \cup \{x \approx c_0 \leftrightarrow \varphi_c\ (x)\} \cup \{\forall x_1 \forall y(f_s(x_1) \approx y \leftrightarrow \varphi_s(x_1, y))\}$$

de modo que $T_{E'}$ denota a la teoría que se obtiene al cerrar deductivamente al conjunto E' y $L_{E'}$ el lenguaje formal de dicha teoría, donde

$$L_{E'} = L_{ZF} \cup \{c_0\} \cup \{f_s\}$$

Debemos precisar que si T es una teoría, T' una extensión conservadora de T y a su vez T" es una extensión conservadora de T', entonces T" es una extensión conservadora de T. En efecto, tenemos que T", es en sí una extensión de T, y que T = T' $\cap$ L_T, pero como T' = T" $\cap$ $L_{T'}$, entonces T = T" $\cap$ $L_{T'}$ $\cap$ L_T, y como $L_T \subseteq L_{T'}$, entonces obtenemos T = T" $\cap$ L_T.

Capítulo 2

Teoría y Metateoría en la Demostración del Primer Teorema de Gödel

En este capítulo daremos las definiciones y proposiciones necesarias para la construcción de la demostración del teorema de incompletud de Gödel-Rosser desde la extensión que ya tenemos de ZF.

2.1 Aritmética Recursiva

Denotemos con

- $\mathbb{N}$ al conjunto de números naturales ($\{0, 1, 2, \dots\}$)
- f : $\mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ una función u operación entre números naturales de aridad n con $n \geqslant 1$.
- R $\subseteq \mathbb{N}^n$ una relación R entre números naturales de aridad n, con $n \geqslant 1$.

Definición 2.1.1 (Funciones Iniciales)

Las siguientes son funciones iniciales*:*

1. *La **función sucesor**, la cual está definida de la siguiente manera:*
   $^+ : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
   $p^+ = q \quad \rightleftharpoons \quad$ *en el conjunto de los números naturales, "q" es el natural consecutivo de "p". Ejemplo:* $12^+ = 13$.

2. *Las **funciones constantes**, C_k^n, definidas para números naturales n y k como:*

   $C_k^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$
   $\forall p_1, \ldots, \forall p_n C_k^n(p_1, \ldots, p_n) = k$

   Ejemplo: $\forall p_1, \ldots, \forall p_n C_2^n(p_1, \ldots, p_n) = 2$.

3. *Las **funciones proyección** π_k^n (con $1 \leqslant k \leqslant n$) definidas para números n y k como:*

   $\pi_k^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$
   $\forall p_1, \ldots, \forall p_n \pi_k^n(p_1, \ldots, p_n) = p_k$

   Ejemplo: $\forall p_1, \ldots, \forall p_n \pi_3^n(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p_3$.

Definición 2.1.2 (Método de Recursión)

(a) *Sean $a \in \mathbb{N}$ y $G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. La función $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por*

   i. $F(0) = m$

   ii. $\forall\ p\ F(p^+) = G\ (F(p),\ p)$

   se dice que se obtuvo por recursión a partir de m y de G.

(b) *Sean $H : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ y $G : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$. La función $F : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ dada por*

   i. $\forall p_1, \ldots, \forall p_k F(p_1, \ldots, p_k,\ 0) \;=\; H(p_1, \ldots, p_k)$

   ii. $\forall p_1, \ldots, \forall p_k \forall q\ F(p_1, \ldots, p_k,\ q^+) \;=\; G\ (p_1, \ldots, p_k,\ F(p_1, \ldots, p_k, q),\ q)$

   se dice que se obtuvo por recursión a partir de H y de G.

Definición 2.1.3 (Método de Sustitución)

Sea $G : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ y sean $H_1, \ldots, H_m : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. La función $F : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ dada por

$$\forall p_1, \ldots, \forall p_n F(p_1, \ldots, p_n) = G\ (H_1(p_1, \ldots, p_n),\ \ldots\ ,\ H_m(p_1, \ldots, p_n))$$

se dirá que se obtuvo por sustitución a partir de G y de $H_1, \ldots, H_m$.

Ejemplo: Definiremos por recursión y sustitución una función suma

$$F_+ \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$

haciendo uso de las funciones

(a) $\pi_1^1 \colon \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}$ (función proyección de aridad 1),
(b) $\pi_2^3 \colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ (función proyección de aridad 3),
(c) ${}^+ \colon \mathbb{N}^1 \to \mathbb{N}$ (función sucesor).

Primero definimos, usando el método de sustitución y haciendo uso de las funciones de los incisos (b) y (c) anteriores, una función F_1: $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

$$F_1(p_1,p_2,p_3) = (\pi_2^3(p_1,p_2,p_3))^+$$

Para las funciones π_1^1: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y F_1: $\mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$, se define por recursión a la función F_+: $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ de la siguiente forma:

- $F_+(p_1,0) = \pi_1^1(p_1)$
- $F_+(p_1,p_2^+) = F_1(p_1, F_+(p_1,p_2),p_2) = (\pi_2^3(p_1, F_+(p_1,p_2),p_2))^+$

Definición 2.1.4 (Funciones Recursivas Primitivas)

Una función F es una función recursiva primitiva *si y sólo si hay una lista finita de funciones, digamos $F_1,\ldots,F_n$, de tal forma que*

(a) $F_n \rightleftharpoons F$
y

(b) Para toda $i \in \{1,\ldots,n\}$ se tiene que, o bien

i. F_i es función inicial.
o bien

ii. F_i se obtuvo por el método de recursión o por el método de sustitución a partir de funciones anteriores de la lista.

Las funciones recursivas primitivas son aquéllas que se obtienen al aplicar un número finito de veces los métodos de recursión y/o sustitución a funciones recursivas, así la función definida en el ejemplo anterior resulta ser una función recursiva primitiva.

Entre los resultados acerca de funciones primitivas tenemos lo siguiente.

Proposición 2.1.1 *Sea $G: \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ una función primitiva, y sean $p_1,\ldots,p_n$ metavariables*[1] *distintas. Para $i \in \{1,\ldots,m\}$, sea q_i alguna de las variables $p_1,\ldots,p_n$. La función*

$$F: \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$$
$$F(p_1,\ldots,p_n) = G(q_1,\ldots,q_m)$$

también es primitiva.

[1]Una metavariable es una de esas variables que comúnmente usamos en matemáticas, no debe confundirse con las variables del lenguaje formal.

Las siguientes son algunas aplicaciones de la proposición anterior:

1. *Añadir variables Artificiales.* Si $G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es una función primitiva, entonces la función F descrita de la siguiente manera

$$F : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$$
$$F(p_1, p_2, p_3) = G(p_1, p_3)$$

es primitiva.

2. *Permutar variables.* Si $G : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es primitiva, entonces

$$F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$
$$F(p_1, p_2) = G(p_2, p_1)$$

es primitiva.

3. *Repetir variables.* Si $G : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ es primitiva, entonces

$$F : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$$
$$F(p_1, p_2) = G(p_1, p_2, p_1)$$

es primitiva.

Proposición 2.1.2 *Si damos la siguiente definición para las funciones iniciales:*

1. *La función sucesor* $^+ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *($^+$ como en la definición 2.1.1).*
2. *La función constante cero* $\mathcal{Z}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*; para todo* $p \in \mathbb{N}$ $\mathcal{Z}(p) = 0$.
3. *Las funciones proyección* $\pi_k^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. *($\pi_k^n$ como en la definición 2.1.1).*

entonces esta definición es equivalente a la definición 2.1.1.

Demostración 2.1.2.1 *Basta con demostrar que de acuerdo a esta nueva definición para las funciones inciciales se tiene que para todo* $k \in \mathbb{N}$, C_k^n *es primitiva*[2]*.*
La demostración la haré por inducción sobre k.
Sea $k = 0$,

$$C_0^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$$
$$C_0^n(p_1, \ldots, p_n) = 0$$

Usando el método de sustitución, sea $\mathcal{Z}: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *y sea* $\pi_1^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$. *La función* $C_0^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, *definida como*

[2]Véanse las definiciónes 2.1.1 y 2.1.4.

$$\forall p_1, \ldots, \forall p_n C_0^n(p_1, \ldots, p_n) = \mathcal{Z}(\pi_1^n(p_1, \ldots, p_n))$$

se dice que se obtuvo por sustitución a partir de las funciones $\mathcal{Z}$ *y* π_1^n*, las cuales son primitivas. Así que de acuerdo a la definición de funciones primitivas (ver definición 2.1.4), podemos afirmar que la función* C_0^n *es primitiva. Por tanto queda demostrada la base de la inducción.*

Hipótesis de Inducción: *Supongamos que la proposición es válida para* $k \in \mathbb{N}$*, es decir, supongamos que la función*

$$C_k^n \colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$$
$$\forall p_1, \ldots, \forall p_n C_k^n(p_1, \ldots, p_n) = k$$

es primitiva.

De acuerdo al método de sustitución, sean $^+\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $C_k^n\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, *las cuales son primitivas. La función* $C_{k+1}^n\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, *definida como*

$$\begin{aligned}\forall p_1, \ldots, \forall p_n \; C_{k+1}^n(p_1, \ldots, p_n) &= (C_k^n(p_1, \ldots, p_n))^+ \\ &= (k)^+ \\ &= k+1\end{aligned}$$

de manera que

$$\forall p_1, \ldots, \forall p_n \; (C_{k+1}^n(p_1, \ldots, p_n) = k + 1)$$

es una función primitiva, ya que C_{k+1}^n *se obtuvo por sustitución a partir de funciones primitivas. Con lo que queda demostrada la proposición.*

Definición 2.1.5 (Método de Sustitución')

Sea $G'\colon \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ *primitiva. Para cada* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *sean* $n_i \in \{1, \ldots, n\}$ *y* $H_i'\colon \mathbb{N}^{n_i} \to \mathbb{N}$ *primitivas. Entonces la función* $F'\colon\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, *dada por*

$$\forall p_1, \ldots, \forall p_n F'(p_1, \ldots, p_n) = G' \; (H_1'(q_{1_1}, \ldots, q_{n_1}), \; \ldots \;, \; H_m'(q_{1_m}, \ldots, q_{n_m}))$$

donde $q_{j_k} \in \{p_1, \ldots, p_n\}$*, también es primitiva.*

Definición 2.1.6 (Método de Recursión')

Sean $H' : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$, $G' : \mathbb{N}^s \to \mathbb{N}$. *La función* $F' : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$, *dada por*

$$\forall p_1, \ldots, \forall p_n F'(p_1, \ldots, p_n, 0) = H'(r_1, \ldots, r_m)$$
$$\text{con } r_i \in \{p_1, \ldots, p_n\} \text{ para toda } i \in \{1, \ldots, max(m,s)\}$$
$$\forall p_1, \ldots, \forall p_n F'(p_1, \ldots, p_n, q^+) = G'(r_1, \ldots, r_s)$$
$$\text{con } r_i \in \{p_1, \ldots, p_n,\ F'(p_1, \ldots, p_n, q),\ q\}$$

es recursiva primitiva y se obtuvo por recursión apartir de H' y G'.

En el capítulo 3 daremos una lista de funciones recursivas primitivas.

Definición 2.1.7 (El operador μ)
Sea $G : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ con la propiedad de que para cada $\vec{p} \in \mathbb{N}^n$ existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $G(\vec{p},q) = 0$. Definimos

$$\mu_q(G(\vec{p},q) = 0) = min\ \{q \in \mathbb{N} \mid G(\vec{p},q) = 0\}$$

Así,

$$F : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$$
$$F(\vec{p}) = \mu_q(G(\vec{p},q) = 0))$$

se dirá que se obtiene de aplicar el operador μ a G.

Definición 2.1.8 (Función Recursiva General)
Una función f es una función recursiva general *si y sólo si hay una lista finita de funciones $F_1, \ldots, F_n$ tales que*

(a) $F_n = F$

(b) Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ F_i es una función inicial o F_i se obtiene por recursión, por sustitución o aplicando el operador μ a funciones anteriores de la lista.

2.2 Aritmetización de la Teoría

Formalizaremos a continuación lo que en la introducción llamamos el *primer camino*. Recordemos que este primer camino consiste en dar una asignación que a cada símbolo, expresión o sucesión de expresiones le asocie un número natural de tal manera que cada número natural tenga asignado un sólo símbolo, una sola expresión o una sola sucesión de expresiones. Es decir, queremos definir una función

$$g : L_{E'} \quad \to \quad \mathbb{N}$$

de manera que g sea inyectiva.

Tal y como hemos hecho la distinción entre símbolos, expresiones y sucesión de expresiones, esta distinción la haremos también en la formalización del *primer camino*[3]. De manera que definiremos tres funciones

- $g_1 : L_{E'} \to \mathbb{N}$ *asignación de cada símbolo de $L_{E'}$ con un número natural,*
- $g_2 : Exp_E \to \mathbb{N}$ *asignación de cada expresión de $L_{E'}$ con un número natural,*
- $g_3 : \overset{\omega}{\smile}Exp_E \to \mathbb{N}$ *asignación de cada sucesión finita de expresiones de $L_{E'}$ con un número natural*

Estas funciones quedan definidas de la siguiente forma.

Definición 2.2.1 *Sea $g_1 : L_{E'} \to \mathbb{N}$ tal que*

$L_{E'}$	g_1
(	3
)	5
,	7
$\approx$	9
$\to$	11
$\neg$	13
$\forall$	15

$L_{E'}$	g_1
c_0	17
f_s	19
$\in$	21
x_0	23
x_1	25
.	
.	
.	
x_n	$23 + 2n$

De modo que si $s \in L_{E'}$, $g_1(s) \in \mathbb{N}$, y decimos que

$g_1(s)$ es el número de Gödel del símbolo s.

Observación 2.2.1.1 *La imagen de la función g_1 es un subconjunto de los números impares en $\mathbb{N}$.*

Observación 2.2.1.2 *La función g_1 es inyectiva por construcción.*

Definición 2.2.2 *Definimos $g_2 : Exp_{E'} \to \mathbb{N}$ de la siguiente manera:*

Dados $s_0, s_1, \ldots, s_n \in L_{E'}$

$$g_2(s_0, s_1, \ldots, s_n) = P_0^{g_1(s_0)} P_1^{g_1(s_1)} \cdots P_n^{g_1(s_n)}$$

[3]El que va de $L_{E'}$ a $\mathbb{N}$.

en donde P_i denota al i-ésimo número primo en $\mathbb{N}$ *en orden ascendente, esto es*

$$P_0 = 2,\ P_1 = 3,\ P_2 = 5,\ etc.$$

Observación 2.2.2.1 *La imagen de la función g_2 (Im_{g_2}) es un subconjunto de los números pares en* $\mathbb{N}$.

Observación 2.2.2.2 *Si $n \in Im_{g_2}$, los exponentes de la descomposición en factores primos de n son impares.*

Observación 2.2.2.3 *La función g_2 inyectiva.*

Definición 2.2.3 $g_3 : \overset{\omega}{\smile}Exp_E \rightarrow \mathbb{N}$

Sean $E_0, E_1, \ldots, E_n \in Exp_E$ (E_i es una expresión de $L_{E'}$)

$$g_3(E_1, E_2, \ldots, E_n) = P_0^{g_2(E_0)} P_1^{g_2(E_1)} \cdots P_n^{g_2(E_n)}.$$

Observación 2.2.3.1 *La imagen de la función g_3 (Im_{g_3}) es un subconjunto de los números pares.*

Observación 2.2.3.2 *Si $n \in Im_{g_3}$, los exponentes de la descomposición en factores primos de n son pares.*

Observación 2.2.3.3 *La función g_3 es inyectiva.*

Observación 2.2.3.4 *Aunque Im_{g_2} es un subconjunto de números pares y Im_{g_3} también es un subconjunto de números pares, $Im_{g_2} \cap Im_{g_3} = \varnothing$.*

Observación 2.2.3.5 *Los símbolos tienen tres números naturales asociados. Por ejemplo*

$g_1(c_0) = 17$,
$g_2(c_0) = 2^{17}$,
$g_3(c_0) = 2^{2^{17}}$.

Así queda concluida la asignación de números naturales para los símbolos, expresiones y sucesiones finitas de expresiones del lenguaje. Entenderemos que $n \in \mathbb{N}$ es el número de Gödel de un símbolo, expresión o sucesión finita de expresiones, si n está en la imagen de alguna de las funciones g_1, g_2 o g_3 respectivamente. Muchas veces designaremos la trayectoria de $L_{E'}$

a $\mathbb{N}$ haciendo referencia simplemente a g[4], con lo cual, según sea el caso, nos estaremos refiriendo a g_1, g_2 o a g_3[5].

El *segundo camino* del cual hablamos en la introducción (el que va de $\mathbb{N}$ a $L_{E'}$) será descrito mediante una función h que definiremos usando el teorema de recursión para $\mathbb{N}$. Recordémoslo.

Teorema 2.2.1 (Teorema de Recursión para $\mathbb{N}$)
Para toda función $f : B \rightarrow B$ y todo $a \in B$, existe una única función h tal que:

(a) $h(0) = a$

(b) $h(n^+) = f(h(n))$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$

Con el fin de no desviarme de lo que trata este trabajo, no incluiré la demostración de este teorema[6].

Definición 2.2.4 *Consideremos a los símbolos c_0 y f_s definidos en el capítulo 1, y sea $B \subseteq L_{E'}$ de manera que*

$$B = \{c_0, f_s(c_0), f_s(f_s(c_0)), f_s(f_s(f_s(c_0))), \dots\}$$

sea f la función $f : B \rightarrow B$ definida como

$$f = \{(c_0, f_s(c_0)),\ (f_s(c_0), f_s(f_s(c_0)))\ ,\ (f_s(f_s(c_0)), f_s(f_s(f_s(c_0)))), \dots\}$$

De acuerdo al teorema de recursión para $\mathbb{N}$ existe una única función $h : \mathbb{N} \rightarrow B$ tal que

(a) $h(0) = c_0$

(b) $h(n^+) = f_s(h(n))$.

Esta es la función h que define la trayectoria de $\mathbb{N}$ a $L_{E'}$ y a los términos que se obtienen mediante la función h les llamaremos numerales.

Notación. Sea $n \in \mathbb{N}$. De acuerdo a como hicimos en la introducción denotaremos h(n) como $\overline{n}$, a $\overline{n}$ le llamamos "el numeral de n". Para una fórmula α de $L_{E'}$, denotaremos h(g(α)) como $\ulcorner\alpha\urcorner$, a $\ulcorner\alpha\urcorner$ le llamamos "el numeral del número de Gödel de α".

---

[4]Tal como sucede en el capítulo 4 que corresponde a la demostración.

[5]De acuerdo al contexto en el que estemos trabajando será muy claro cuál es la función a la que estamos apelando.

[6]Una demostración para dicho teorema se incluye en [Amor b].

2.3 Funciones Representables y Relaciones Expresables

Continuando con la trayectoria de $\mathbb{N}$ a $L_{E'}$ y ya que los números tienen asociadas expresiones en $L_{E'}$, haremos algo parecido con algunos subconjuntos de números naturales. En particular, para algunas relaciones y funciones, definiremos lo siguiente:

Definición 2.3.1 (Relaciones Expresables)
Sea

- $R \subseteq \mathbb{N}^n$

Decimos que R es expresable *en E' si y sólo si hay una fórmula $\alpha_R \in L^n_{E'}$ tal que:*

(a) *si* $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in R$, *entonces* $E' \vdash \alpha_R(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \ldots, \overline{p_n})$

(b) *si* $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \notin R$, *entonces* $E' \vdash \neg\alpha_R(\overline{p_1}, \overline{p_2}, \ldots, \overline{p_n})$.

Definición 2.3.2 (Funciones Representables)
Sea

- $F : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$

Decimos que F es representable *en E' si y sólo si existe una fórmula $\alpha_F \in L^{n+1}_{E'}$ de tal manera que para $p_1, \ldots, p_n, p_{n+1} \in \mathbb{N}$*

(a) *si* $F(p_1, \ldots, p_n) = p_{n+1}$, *entonces* $E' \vdash \alpha_F(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{p_{n+1}})$

(b) *y se tiene que* $E' \vdash \exists u \alpha_F(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, u) \wedge \forall u \forall v (\alpha_F(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, u) \wedge \alpha_F(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, v) \rightarrow u \approx v)$.

Veremos a continuación que las funciones iniciales definidas al comienzo de este capítulo son representables en $L_{E'}$. Lo primero que demostraremos es que la función sucesor es representable en $L_{E'}$ para lo cual necesitamos primero demostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.3.1 *Sean n, $m \in \mathbb{N}$. Se tiene que*

$$\text{si } n = m \quad \text{entonces} \quad E' \vdash \overline{n} \approx \overline{m}.$$

Demostración 2.3.1.1 *Por definición de la función h tenemos que*

- $\overline{n} = f_s(f_s(\ldots(f_s(c_0))\ldots))$, *$f_s$ aplicada a c_0 n veces*
- $\overline{m} = f_s(f_s(\ldots(f_s(c_0))\ldots))$, *$f_s$ aplicada a c_0 m veces*

Por otro lado

1. $E' \vdash c_0 \approx c_0$

Además tememos que

2. $E' \vdash f_s(c_0) \approx f_s(c_0)$

Aplicando este proceso n veces tenemos la aplicación de f_s a la constante individual c_0 n veces, esto es:

3. $E' \vdash f_s(f_s(\ldots(f_s(c_0))\ldots)) \approx f_s(f_s(\ldots(f_s(c_0))\ldots))$

Por definición de la función $h : \mathbb{N} \rightarrow L_{E'}$[7] *tenemos que*

- $\overline{0} = c_0$
- $\overline{n^+} = f_s(\overline{n})$

Es fácil verificar semánticamente que $\overline{n^+}$ es aplicar "n^+"veces el símbolo f_s y obtener

$$\underbrace{f_s(f_s(\ldots f_s(c_0)\ldots))}_{n^+ \text{ veces}}$$

Esto es,

$$\overline{n} = \underbrace{f_s(f_s(\ldots f_s(c_0)\ldots))}_{n \text{ veces}}$$

De modo que de acuerdo al paso (3) y como $n = m$, aplicar n veces el símbolo f_s a c_0 es lo mismo que aplicar m veces el símbolo f_s a c_0, es decir,

$$\overline{m} = \underbrace{f_s(f_s(\ldots f_s(c_0)\ldots))}_{m \text{ veces}}$$

Por todo lo anterior, podemos decir que

4. $E' \vdash \overline{n} \approx \overline{m}$

Esto es

5. $n = m$ *implica que* $E' \vdash \overline{n} \approx \overline{m}$

Con lo que queda concluida la demostración de la proposición 2.3.1.

Ya estamos listos para demostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.3.2 *La función sucesor, $^+ : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, es representable en $L_{E'}$.*

[7] Definición 2.2.4 de la sección anterior.

De acuerdo con la definición 2.3.2 sea φ_s la fórmula de $L^2_{E'}$ que definimos en el capítulo 1,[8] entonces debemos demostrar que

(a) $(n)^+ = m$ entonces $E' \vdash \varphi_s(\overline{n}, \overline{m})$

(b) $E' \vdash (\exists y \varphi_s(\overline{n}, y)) \wedge \forall y \forall z (\varphi_s(\overline{n}, y) \wedge \varphi_s(\overline{n}, z) \rightarrow y \approx z)$.

Demostración 2.3.2.1 Inciso(a)

De acuerdo a la proposición anterior, tenemos que para $n^+, m \in \mathbb{N}$

1. *si* $n^+ = m$ *entonces* $E' \vdash \overline{n^+} \approx \overline{m}$

   Del paso anterior y como por definición tenemos $\overline{n^+} = h(n^+) = f_s(h(n)) = f_s(\overline{n})$,

2. *si* $n^+ = m$ *entonces* $E' \vdash f_s(\overline{n}) \approx \overline{m}$

   Como la siguiente fórmula es un axioma de E',

3. $E' \vdash \forall x \forall y (f_s(x) \approx y \leftrightarrow \varphi_s(x, y))$

   Por A4 aplicado dos veces, primero con el término $\overline{n}$ y luego con el término $\overline{m}$, se tiene que

4. $E' \vdash f_s(\overline{n}) \approx \overline{m} \leftrightarrow \varphi_s(\overline{n}, \overline{m})$

   por definición de "$\leftrightarrow$"y M.P.,

5. $E' \vdash f_s(\overline{n}) \approx \overline{m} \rightarrow \varphi_s(\overline{n}, \overline{m})$

   Aplicando M.P. a los pasos (3) y (6),

6. $E' \vdash \varphi_s(\overline{n}, \overline{m})$

   Así que semánticamente por la transitividad de la implicación y de acuerdo a los pasos anteriores podemos afirmar que

7. *si* $n^+ = m$ *entonces* $E' \vdash \varphi_s(\overline{n}, \overline{m})$

De esta manera queda demostrado el inciso (a).

Inciso(b)

En el capítulo 1 hemos demostrado que

1. $E' \vdash \forall x \exists u \varphi_s(x, u)$

   Aplicando A4 con el término $\overline{n}$,

2. $E' \vdash \exists u \varphi_s(\overline{n}, u)$

   Además, en el capítulo 1 hemos demostrado que

[8] φ_s es la fórmula con la que definimos, en el capítulo 1, a la nueva letra funcional f_s.

3. $E' \vdash \forall x \forall y \forall z(\varphi_s(x,y) \wedge \varphi_s(x,z) \rightarrow y \approx z)$

Nuevamente aplicando A4 con el término $\overline{n}$,

4. $E' \vdash \forall y \forall z(\varphi_s(\overline{n},y) \wedge \varphi_s(\overline{n},z) \rightarrow y \approx z)$

De (2) y (4),

5. $E' \vdash \exists u \varphi_s(\overline{n},u) \wedge \forall y \forall z(\varphi_s(\overline{n},y) \wedge \varphi_s(\overline{n},z) \rightarrow y \approx z)$

Por lo tanto la función sucesor es representable en E' por la fórmula $\varphi_s \in L^2_{\mathrm{E}}$.

Proposición 2.3.3 *La función constante cero,* $\mathcal{Z} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, *es representable en* $L_{E'}$.

Recordemos que

$$\forall n \mathcal{Z}(\mathrm{n}) = 0.$$

Entonces, de acuerdo a la definición 2.3.2, tenemos que demostrar que existe $\beta \in L^2_{\mathrm{E}}$ tal que para $n \in \mathbb{N}$,

(a) si $\mathcal{Z}(n) = 0$ entonces E' $\vdash \beta(\overline{n},\overline{0})$

(b) E' $\vdash \exists u \beta(\overline{n},u) \wedge \forall u \forall v(\beta(\overline{n},u) \wedge \beta(\overline{n},v) \rightarrow u \approx v)$.

Consideremos la fórmula φ_c con la cual extendimos a L_{ZF} para introducir a la constante individual c_0, y definamos la fórmula β que necesitamos de la siguiente manera:

$$- \ \beta(x,y) \quad \rightleftharpoons \quad x \approx x \wedge \varphi_c(y).$$

Demostración 2.3.3.1 Inciso(a)

Debemos tener presente que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\overline{n} \in L_{E'}$ *es un término, y* $\overline{0}$=$c_0 \in \mathbb{N}$. *Entonces sea* $n \in \mathbb{N}$.

Supongamos que $\mathcal{Z}(n) = 0$ *P.D.* $E' \vdash \beta(\overline{n},\overline{0})$

Por axioma de igualdad, podemos afirmar que

1. $E' \vdash \overline{n} \approx \overline{n}$

Por ser axioma de E' tenemos que

2. $E' \vdash x \approx c_0 \leftrightarrow \varphi_c(x)$

Aplicando Gen obtenemos

3. $E' \vdash \forall x(x \approx c_0 \leftrightarrow \varphi_c(x))$

Aplicando A4 con el término $\overline{0} \in L_{E'}$ *el cual es libre para* x *en la fórmula del paso anterior,*

4. $E' \vdash \overline{0} \approx c_0 \leftrightarrow \varphi_c(\overline{0})$

Por definición de "$\leftrightarrow$*"y M.P., tenemos que*

5. $E' \vdash \overline{0} \approx c_0 \rightarrow \varphi_c(\overline{0})$

Por definicón de $\overline{0}$ *tenemos que* $\overline{0} = c_0$,

6. $E' \vdash c_0 \approx c_0 \rightarrow \varphi_c(\overline{0})$

Como $E' \vdash c_0 \approx c_0$

7. $E' \vdash \varphi_c(\overline{0})$

Entonces de (3) y (9) obtenemos

8. $E' \vdash \overline{n} \approx \overline{n} \wedge \varphi_c(\overline{0})$

Esto es

9. $E' \vdash \beta(\overline{n}, \overline{0})$

Con lo que queda demostrado el inciso (a).

Inciso(b)

Demostraremos primero que

- $E' \vdash \exists u \beta(\overline{n}, u)$

  es decir

- $E' \vdash \exists u(\overline{n} \approx \overline{n} \wedge \varphi_c(u))$

Hemos demostrado

1. $E' \vdash \overline{n} \approx \overline{n}$

En el capítulo 1 demostramos que

2. $E' \vdash \exists u \varphi_c(u)$

De (1) y (2),

3. $E' \vdash \overline{n} \approx \overline{n} \wedge \exists u \varphi_c(u)$

Como u *no ocurre en* $\overline{n} \approx \overline{n}$, *por la fórmula 7.4 del apéndice B-II y M.P.,*

4. $E' \vdash \exists u(\overline{n} \approx \overline{n} \wedge \varphi_c(u))$

Esto es

5. $E' \vdash \exists u \beta(\overline{n}, u)$

Hasta aquí hemos demostrado una parte del inciso(b). Ahora

$$P.D. \quad E' \vdash \forall u \forall v(\beta(\overline{n}, u) \wedge \beta(\overline{n}, v) \rightarrow u \approx v)$$

Recordemos que

$$\beta(x, y) \rightleftharpoons x \approx x \wedge \varphi_c(y)$$

En el capítulo 1 demostramos que

6. $E' \vdash \forall u \forall v(\varphi_c(u) \wedge \varphi_c(v) \rightarrow u \approx v)$

   Aplicando A4 dos veces con los términos variables u y v respectivamente,

7. $E' \vdash \varphi_c(u) \wedge \varphi_c(v) \rightarrow u \approx v$

   Por la fórmula 2 del apéndice B-I podemos afirmar que

8. $E' \vdash (x \approx x \wedge x \approx x \wedge \varphi_c(u) \wedge \varphi_c(v)) \rightarrow u \approx v$

   De lo cual se tiene que

9. $E' \vdash (x \approx x \wedge \varphi_c(u) \wedge x \approx x \wedge \varphi_c(v)) \rightarrow u \approx v$

   Esto es

10. $E' \vdash \beta(x, u) \wedge \beta(x, v) \rightarrow u \approx v$

    Aplicando generalización,

11. $E' \vdash \forall x(\beta(x, u) \wedge \beta(x, v) \rightarrow u \approx v)$

    Aplicando A4 con el término $\overline{n}$,

12. $E' \vdash \beta(\overline{n}, u) \wedge \beta(\overline{n}, v) \rightarrow u \approx v$

    Aplicando generalización dos veces con los términos variables u y v,

13. $E' \vdash \forall u \forall v(\beta(\overline{n}, u) \wedge \beta(\overline{n}, v) \rightarrow u \approx v)$

    De (5) y (13),

14. $E' \vdash \exists u \beta(\overline{n}, u) \wedge \forall u \forall v(\beta(\overline{n}, u) \wedge \beta(\overline{n}, v) \rightarrow u \approx v)$

Con lo que queda demostrado el inciso(b). Finalmente, ya que hemos demostrado los incisos ((a) y (b)), podemos afirmar que la función constante cero es representable en E'.

Proposición 2.3.4 *Las funciones proyección, $\pi_k^n : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, son representables en $L_{E'}$.*

Consideremos a la función π_k^n. De acuerdo a la definición de estas funciones tenemos que

$$\pi_k^n(p_1, \ldots, p_n) = p_k \quad k \leq n$$

Sea

$$\alpha_{\pi_k^n}(x_1, \ldots, x_n, y) \quad \rightleftharpoons \quad x_1 \approx x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \approx x_n \wedge y \approx x_k$$

Veamos que efectivamente esta fórmula representa a la función π_k^n.

Demostración 2.3.4.1 (a)
Sabemos que si $\pi_k^n(p_1, \ldots, p_n) = m$ *entonces* $m = p_k$, *entonces, por la proposición 2.3.1, tenemos que* $E' \vdash \overline{m} \approx \overline{p_k}$. *De lo cual y por algunas fórmulas lógicamente válidas tenemos que*

$$E' \vdash \overline{p_1} \approx \overline{p_1} \wedge \cdots \wedge \overline{p_n} \approx \overline{p_n} \wedge \overline{m} \approx \overline{p_k}$$

Con lo que obtenemos que

$$\text{Si } \pi_k^n(p_1, \ldots, p_n) = m, \quad \text{entonces} \quad E' \vdash \alpha_{\pi_k^n}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{m})$$

(b)

Como $E' \vdash \alpha_{\pi_k^n}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{m})$, *tenemos que*

1. $E' \vdash \exists u \alpha_{\pi_k^n}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, u)$
   Ahora demostremos que

$$\forall u_1 \forall u_2 \Big(\alpha_{\pi_k^n}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, u_1) \wedge \alpha_{\pi_k^n}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, u_2) \rightarrow u_1 \approx u_2 \Big)$$

   Por (29-iii) del apéndice B-II,

2. $E' \vdash u_1 \approx \overline{p_k} \wedge \overline{p_k} \approx u_2 \rightarrow u_1 \approx u_2$
   De acuerdo con la definición de la fórmula $\alpha_{\pi_k^n}$ *tenemos que,*

3. $E', \alpha_{\pi_k^n}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, u_1) \wedge \alpha_{\pi_k^n}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, u_2) \ \vdash \ u_1 \approx \overline{p_k} \wedge \overline{p_k} \approx u_2$
   Entonces por M.P. aplicado a los pasos (3) y (2),

4. $E', \alpha_{\pi_k^n}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, u_1) \wedge \alpha_{\pi_k^n}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, u_2) \ \vdash \ u_1 \approx u_2$
   Así que, por el metateorema de la deducción, obtenemos

5. $E' \vdash \alpha_{\pi_k^n}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, u_1) \wedge \alpha_{\pi_k^n}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, u_2) \ \rightarrow \ u_1 \approx u_2$
   Finalmente, aplicando generalización a las variables u_1 *y* u_2, *afirmamos que*

6. $E' \vdash \forall u_1 \forall u_2 \Big(\alpha_{\pi_k^n}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, u_1) \wedge \alpha_{\pi_k^n}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, u_2) \ \rightarrow \ u_1 \approx u_2 \Big)$

Por lo tanto las funciones proyección son representables en E'.

Ya que tenemos la representabilidad de las funciones iniciales, veremos a continuación que las funciones recursivas primitivas (FRP) son representables; como las funciones iniciales lo son, y las FRP son aquéllas que se obtienen por medio de aplicar los métodos de recursión y/o sustitución a las que son representables y la manera de generarlas es comenzar con las funciones iniciales, entonces sólo tendremos que demostrar que las funciones que se obtienen por medio de recursión y por medio de sustitución a través de funciones representables son representables. Para demostrar que las que se obtienen por recursión son representables, utilizaremos[9] la llamada función "beta"de Gödel[10] (f_β). Para comprender la utilidad de esta función, observemos que al calcular $f(p_1, \ldots, p_n, m)$ (con f una función que se obtuvo por el método de recursión), es necesario conocer el valor $q_{m-1} = f(p_1, \ldots, p_n, m-1)$ si m es distinto de cero. En cualquier caso f genera una sucesión de números naturales $q_0, \ldots, q_m$ y siendo f representable por una fórmula φ_f se tiene

$$\text{Si } f(p_1, \ldots, p_n, m) = q_m, \quad \text{entonces} \quad E' \vdash \varphi_f(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{q_m})$$

Para demostrar que una tal función f es representable usaremos a la sucesión $q_0, \ldots, q_m$ y a la sucesión de sus numerales correspondientes $\overline{q_0}, \ldots, \overline{q_m}$. Es aquí en donde emplearemos a la función f_β, ya que dada una sucesión de k números naturales, existen números n, m, tales que la función f_β evaluada en estos números y en un número i da como resultado el i-ésimo elemento de la sucesión[11] como se puede observar en el ejemplo que damos después de la proposición 2.3.6.

Para la definición de la función f_β (función "beta"de Gödel) haremos uso de la función res: $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, la cual está incluida en la lista de funciones recursivas del capítulo 3. La función $res(n, m)$ da como resultado el número correspondiente al residuo de la división de m entre n.

Definición 2.3.3 (Función "beta"de Gödel)

Sea $f_\beta : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$. *Definida de la siguiente manera:*

$$f_\beta(p_1, p_2, p_3) = res(1 + (p_3+1)\cdot p_2\ ,\ p_1)$$

de manera que f_β *calcula el residuo de la división de* p_1 *entre* $(1 + (p_3+1))\cdot p_2$. *Esto es,* f_β *calcula el número natural* r *tal que*

$$p_1 = (1 + (p_3+1)p_2)q + r\ ; \quad q \in \mathbb{N}\ y\ 0 \leqslant r \lneqq 1 + (p_3+1)\cdot p_2$$

Se afirma que la función f_β es representable en $L_{E'}$, esto es, se tiene la siguiente proposición.

[9]De igual forma que para cuando se demuestra el primer teorema de Gödel usando AP.

[10]Normalmente esta función es nombrada como "función β-Gödel", sin embargo en este trabajo la denotaré como f_β y al referirme a ella diré explícitamente "función beta de Gödel".

[11]Para números i que toman valores desde cero hasta n, si la sucesión tiene n elementos.

Proposición 2.3.5 *La función f_β es representable en $L_{E'}$.*

Sea $\beta \in L^4_E$ la fórmula que representa a la función f_β definida de la siguiente forma

$$\beta(x_1,x_2,x_3,x_4) \rightleftharpoons \exists w \exists u_1 \exists u_2 \exists u_3 \exists u_4 [\alpha_+(x_3,1,u_1) \wedge \alpha_.(u_1,x_2,u_2) \wedge \alpha_+(1,u_2,u_3) \wedge \alpha_.(u_3,w,u_4) \wedge \alpha_+(u_4,x_4,u_5) \wedge \varphi_<(x_4,u_3) \wedge x_1 \approx u_5]$$

La demostración de la proposición anterior para el caso de E' es la misma que para el caso de AP[12].

Se tiene que:

Proposición 2.3.6 *Para cualquier sucesión de números naturales $q_0, q_1, \ldots, q_k$ existen números naturales n, m , tales que*

$$f_\beta(n,m,i) = q_i \qquad \textit{para} \quad i \in \{0,1,\ldots,k\}.$$

Como la anterior es una propiedad para los números naturales (y no involucra en ningún sentido el uso del sistema formal), no es necesario incluir en este trabajo su demostración[13].

EJEMPLO *(Una aplicación de la función f_β).*

Consideremos la sucesión definida por los 3 primeros elementos de la sucesión de Fibonacci:

$$b_0{=}0,\ b_1{=}1,\ b_2{=}1$$

Veremos que existen números naturales n, m, tales que $f_\beta(n,m,0){=}0$, $f_\beta(n,m,1)=1$, $f_\beta(n,m,2){=}1$. Como

$$f_\beta(n,m,i){=}res(1+(i+1)\cdot m, n)$$

donde

$$n = (1+(i+1)\cdot m)\cdot q + r \quad \text{con } 0 \leq r \leq 1+(i+1)\cdot m$$

y así

$$f_\beta(n,m,i) = r.$$

Hacemos[14]

$$p = max\{2, b_0, b_1, b_2\};$$

[12] En el libro [Mendelson] página 142 se da una demostración para esta proposición.
[13] [Mendelson] página 143.
[14] Particularizando la idea de la demostración.

donde 2 es el subíndice del último elemento de la sucesión, así

$$p = max\{2, 0, 1, 1\} = 2,$$

Sea $c = p!$, en este caso tenemos $c = 2$. El número m que buscamos será el valor de c (en este caso $m = 2$). Para encontrar el valor de n, se considera la nueva sucesión:

$$\begin{array}{ll} u_0 = 1 + c\ ; & u_0 = 3, \\ u_1 = 1 + 2c\ ; & u_1 = 5, \\ u_2 = 1 + 3c\ ; & u_0 = 7. \end{array}$$

Dada la sucesión de los u_is, tenemos que para $i \neq j$, u_i y u_j son primos relativos, por lo que, de acuerdo con el emphteorema chino del residuo el sistema de congruencias:

$$\begin{array}{llllll} x \equiv b_0 & (mod\ u_0) & \text{es decir,} & x \equiv 0 & (mod\ 3) \\ x \equiv b_1 & (mod\ u_1) & \text{es decir,} & x \equiv 1 & (mod\ 5) \\ x \equiv b_2 & (mod\ u_2) & \text{es decir,} & x \equiv 1 & (mod\ 7) \end{array}$$

tiene solución, a saber

$$x = \text{-}69 + 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot r, \quad \text{con } r \in \mathbb{Z}$$

en particular, $x = 36$ es solución, de manera que el número natural n que buscamos será el valor de x, es decir, $n = 36$. Así que, para $n = 36$ y $m = 2$, se tendrá que

$$\begin{array}{l} f_\beta(36, 2, 0){=}0, \\ f_\beta(36, 2, 1){=}1, \\ f_\beta(36, 2, 2){=}1, \end{array}$$

lo cual verificaremos sólo para el caso de $f_\beta(36, 2, 2)$. De acuerdo a la definición de la función f_β tenemos que $f_\beta(36, 2, 2){=}res(1+(2+1)\cdot 2, 36)$; $36 = 7 \cdot \mathrm{q} + \mathrm{r}$; esto es $36 = 7 \cdot 5 + 1$, así que

$$1 = r = res(1 + (2 + 1) \cdot\ 2, 36) = f_\beta(36, 2, 2).$$

Además de la función f_β de Gödel, usaremos las siguientes proposiciones.

Proposición 2.3.7 *Dado cualquier número natural* n *se tiene*

$$\begin{array}{l} E' \vdash u_1 \approx \overline{0} \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{n}) \\ E' \vdash u_1 \approx \overline{1} \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{n}) \\ \quad\quad\quad\quad \vdots \\ E' \vdash u_1 \approx \overline{n} \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{n}). \end{array}$$

Demostración 2.3.7.1 (Por Inducción sobre n).
Base de la Inducción

– $n = 0$

De acuerdo al axioma con el cual extendimos a L_{ZF} tenemos que

1. $E' \vdash f_s(\overline{0}) \approx y \rightarrow \varphi_s(\overline{0}, y)$

   Por generalización y A_4,

2. $E' \vdash f_s(\overline{0}) \approx f_s(\overline{0}) \rightarrow \varphi_s(\overline{0}, f_s(\overline{0}))$

   De modo que podemos afirmar que

3. $E' \vdash \varphi_s(\overline{0}, f_s(\overline{0}))$

   Esto es,

4. $E' \vdash \exists w \exists v (\forall u_1 (u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx \overline{0})$
   $\wedge \forall u_1 (u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx \overline{0} \vee u_1 \approx w)$
   $\wedge \forall u_1 (u_1 \in f_s(\overline{0}) \leftrightarrow \exists z (z \in v \wedge u_1 \in z)))$

   Consideremos ahora la siguiente deducción (aplicación de la Regla C).

   Como hipótesis :

   i. $\forall u_1 (u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \approx \overline{0})$
   $\wedge \forall u_1 (u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx \overline{0} \vee u_1 \approx a)$
   $\wedge \forall u_1 (u_1 \in f_s(\overline{0}) \leftrightarrow \exists z (z \in b \wedge u_1 \in z))$
   A partir del cual, por la fórmula 4 del apéndice B-I y por el axioma 4, podemos afirmar que

   ii. $u_1 \approx \overline{0} \rightarrow u_1 \in a$
   Por generalización y A4,

   iii. $\overline{0} \approx \overline{0} \rightarrow \overline{0} \in a$
   Lo que implica que

   iv. $\overline{0} \in a$
   Del paso (i), la fórmula 4 del apéndice B-I y M.P. tenemos que

   v. $(u_1 \approx \overline{0} \vee u_1 \approx a) \rightarrow u_1 \in b$
   Aplicando Gen a la variable u_1 y de A_4,

   vi. $(a \approx \overline{0} \vee a \approx a) \rightarrow a \in b$
   Como $a \approx a \rightarrow a \approx a \vee a \approx \overline{0}$, del paso anterior, por el Axioma 2 y M.P. podemos afirmar que

   vii. $a \approx a \rightarrow a \in b$
   Con lo que obtenemos por medio de M.P.

   viii. $a \in b$
   De (iv) y (viii),

   ix. $\overline{0} \in a \wedge a \in b$
   Por medio de la regla existencial, obtenemos

$x.$ $\exists z(\overline{0} \in z \wedge z \in b)$

De (i) tenemos que

$xi.$ $\exists z(u_1 \in z \wedge z \in b) \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{0})$

Aplicando generalización a la variable u_1 y por A_4 con el término $\overline{0}$, obtenemos

$xii.$ $\exists z(\overline{0} \in z \wedge z \in b) \rightarrow \overline{0} \in f_s(\overline{0})$

Aplicando M.P. a (x) y (xii),

$xiii.$ $\overline{0} \in f_s(\overline{0})$

De manera que hemos obtenido que

5. $E' , \forall u_1(u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \approx \overline{0})$
$\wedge \forall u_1(u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx \overline{0} \vee u_1 \approx a)$
$\wedge \forall u_1(u_1 \in f_s(\overline{0}) \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z)) \vdash \overline{0} \in f_s(\overline{0})$

Entonces, por la regla C,

6. $E' , \exists w \exists v(\forall u_1(u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx \overline{0})$
$\wedge \forall u_1(u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx \overline{0} \vee u_1 \approx w)$
$\wedge \forall u_1(u_1 \in f_s(\overline{0}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))) \vdash \overline{0} \in f_s(\overline{0})$

Por el metateorema de la deducción,

7. $E' \vdash \exists w \exists v(\forall u_1(u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx \overline{0})$
$\wedge \forall u_1(u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx \overline{0} \vee u_1 \approx w)$
$\wedge \forall u_1(u_1 \in f_s(\overline{0}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))) \rightarrow \overline{0} \in f_s(\overline{0})$

Aplicando M.P. a los pasos (4) y (7),

8. $E' \vdash \overline{0} \in f_s(\overline{0})$

Esto es,

9. $E' \vdash u_1 \approx \overline{0} \rightarrow \overline{0} \in f_s(\overline{0})$

Ya que tenemos que $x \approx t \rightarrow (\varphi(x,t) \rightarrow \varphi(x,x))$ (véase apéndice A), podemos afirmar que

10. $E' \vdash u_1 \approx \overline{0} \rightarrow (\overline{0} \in f_s(\overline{0}) \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{0}))$

Por el axioma 2 y M.P.,

11. $E' \vdash (u_1 \approx \overline{0} \rightarrow \overline{0} \in f_s(\overline{0})) \rightarrow (u_1 \approx \overline{0} \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{0}))$

Aplicando M.P. a (18) y (20),

12. $E' \vdash u_1 \approx \overline{0} \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{0})$

Con lo que queda concluida la base de la inducción.

Hipótesis de Inducción

Supongamos que para $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$E' \vdash u_1 \approx \overline{0} \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{n})$$
$$E' \vdash u_1 \approx \overline{1} \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{n})$$
$$\vdots$$
$$E' \vdash u_1 \approx \overline{n} \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{n})$$

Debemos demostrar que el resultado es válido para n^+.

Consideremos la siguiente deducción (aplicación de regla C).

Como hipótesis los dos primeros pasos:

i. $u_1 \in f_s(\overline{n})$

ii. $\forall u_1 (u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \approx f_s(\overline{n}))$
$\wedge \forall u_1 (u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx f_s(\overline{n}) \vee u_1 \approx a)$
$\wedge \forall u_1 (u_1 \in f_s(f_s(\overline{n})) \leftrightarrow \exists z (z \in b \wedge u_1 \in z))$
Del paso anterior, obtenemos

iii. $u_1 \approx f_s(\overline{n}) \vee u_1 \approx a \rightarrow u_1 \in b$
Aplicando generalizando a la variable u_1 *y por axioma 4, obtenemos*

iv. $f_s(\overline{n}) \approx f_s(\overline{n}) \vee f_s(\overline{n}) \approx a \rightarrow f_s(\overline{n}) \in b$
Por una tautología tenemos que,

v. $f_s(\overline{n}) \approx f_s(\overline{n}) \rightarrow f_s(\overline{n}) \approx f_s(\overline{n}) \vee f_s(\overline{n}) \approx a$
Así que la por transitividad de la implicación en los dos pasos anteriores,

vi. $f_s(\overline{n}) \approx f_s(\overline{n}) \rightarrow f_s(\overline{n}) \in b$
Por una tautología y M.P., obtenemos

vii. $f_s(\overline{n}) \in b$
Usando la hipótesis en (i) y este último paso, tenemos que

viii. $u_1 \in f_s(\overline{n}) \wedge f_s(\overline{n}) \in b$
Por la regla existencial,

ix. $\exists z (u_1 \in z \wedge z \in b)$
De la hipótesis (ii), tenemos que

x. $\exists z (u_1 \in z \wedge z \in b) \rightarrow u_1 \in f_s(f_s(\overline{n}))$
Aplicando M.P. a (ix) y (x),

xi. $u_1 \in f_s(f_s(\overline{n}))$

De la deducción anterior, tenemos que

13. $E' \cup \{u_1 \in f_s(\overline{n})\}$,
$\forall u_1 \ (u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \approx f_s(\overline{n}))$
$\wedge \forall u_1 (u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx f_s(\overline{n}) \vee u_1 \approx a)$
$\wedge \forall u_1 (u_1 \in f_s(f_s(\overline{n})) \leftrightarrow \exists z (z \in b \wedge u_1 \in z)) \ \vdash \ u_1 \in f_s(f_s(\overline{n}))$
Por la regla C,

14. $E \cup \{u_1 \in f_s(\overline{n})\}$, $\cup$
$\{\exists w \exists v (\forall u_1 (u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx f_s(\overline{n}))$
$\wedge\ \forall u_1 (u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx f_s(\overline{n}) \vee u_1 \approx w)$
$\wedge\ \forall u_1 (u_1 \in f_s(f_s(\overline{n})) \leftrightarrow \exists z (z \in v \wedge u_1 \in z)))\} \ \vdash \ u_1 \in f_s(f_s(\overline{n}))$

De manera análoga a como obtuvimos el paso (4) previo a la Hipótesis de Inducción, y de acuerdo a uno de nuestros axiomas de E', podemos probar que

15. $E' \vdash \ \exists w \exists v \Big(\forall u_1 \ (u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx f_s(\overline{n}))$
$\wedge\ \forall u_1 (u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx f_s(\overline{n}) \vee u_1 \approx w)$
$\wedge\ \forall u_1 (u_1 \in f_s(f_s(\overline{n})) \leftrightarrow \exists z (z \in v \wedge u_1 \in z))\Big)$

Por el metateorema de la deducción aplicado al paso (14), M.P. y el paso (15), se tiene que

16. $E' \cup \{u_1 \in f_s(\overline{n})\} \ \vdash \ u_1 \in f_s(f_s(\overline{n}))$

Nuevamente por el metateorema de la deducción, tenemos que

17. $E' \ \vdash \ u_1 \in f_s(\overline{n}) \rightarrow u_1 \in f_s(f_s(\overline{n}))$

De acuerdo a nuestra hipótesis de inducción, tenemos que

18. $E' \vdash u_1 \approx \overline{0} \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{n})$
$E' \vdash u_1 \approx \overline{1} \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{n})$
.
.
.
$E' \vdash u_1 \approx \overline{n} \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{n})$

Usando estos dos últimos pasos, la transitividad de la implicación y de acuerdo a como denotamos a $f_s(f_s(\overline{n}))$*, afirmamos que*

19. $E' \vdash u_1 \approx \overline{0} \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{n^+})$
$E' \vdash u_1 \approx \overline{1} \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{n^+})$
.
.
.
$E' \vdash u_1 \approx \overline{n} \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{n^+})$

Además, como la demostración de la Base Inductiva es válida para cualquier término que coloquemos en lugar del término $\overline{0}$*, se tiene en particular que*

20. $E' \vdash u_1 \approx \overline{n^+} \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{n^+})$

Esto es

21. $E' \vdash u_1 \approx \overline{0} \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{n^+})$
$E' \vdash u_1 \approx \overline{1} \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{n^+})$
.
.

$E' \vdash u_1 \approx \overline{n^+} \rightarrow u_1 \in f_s(\overline{n^+})$

Esto es lo que queríamos demostrar.

Proposición 2.3.8 *Para cualquier número natural n se tiene*

$$E' \vdash (x \approx \overline{0} \vee \cdots \vee x \approx \overline{n}) \leftrightarrow (x \in \overline{n} \vee x \approx \overline{n})$$

Demostración 2.3.8.1 (Inducción sobre n)

Base de la Inducción

$- \; n = 0 \quad P.D. \; E' \vdash (x \approx \overline{0}) \leftrightarrow (x \in \overline{0} \vee x \approx \overline{0})$

De acuerdo a la fórmula 20.1 del apéndice B-II ($\alpha \rightarrow \alpha$), tenemos que

1. $E' \vdash x \approx \overline{0} \rightarrow x \approx \overline{0}$

   Por la fórmula 11 del apéndice B-I,

2. $E' \vdash x \approx \overline{0} \rightarrow (x \approx \overline{0} \vee x \in \overline{0})$

Ahora veamos que

$$E' \vdash (x \approx \overline{0} \vee x \in \overline{0}) \rightarrow x \approx \overline{0}$$

Usando el axioma con el que hemos definido $\overline{0} = c_0$, podemos afirmar que

3. $E' \vdash x \approx c_0 \rightarrow \varphi_c(c_0)$

   Aplicando generalización,

4. $E' \vdash \forall x(x \approx c_0 \rightarrow \varphi_c(c_0))$

   Aplicando A_4 con el término c_0,

5. $E' \vdash \varphi_c(c_0)$

   De acuerdo con la definición de $\varphi_c(c_0)$,

6. $E' \vdash \forall x \neg x \in c_0$

   Por A_4,

7. $E' \vdash \neg\, x \in c_0$

   De acuerdo con la fórmula 25 del apéndice B-I, modus ponens y la definición de $\overline{0}$, tenemos que

8. $E' \vdash \neg\, x \in c_0 \vee x \approx c_0$

   Además, por 24 del apéndice B-II, tenemos que

9. $E' \vdash x \approx c_0 \vee \neg\, x \approx c_0$

   De (8) y (9),

10. $E' \vdash (\neg\, x \in c_0 \vee x \approx c_0) \wedge (\neg\, x \approx c_0 \vee x \approx c_0)$

Por 13.2 del apéndice B-II y modus ponens, usando la fórmula del paso anterior, tenemos que

11. $E' \vdash (\neg\, x \in c_0 \wedge \neg\, x \approx c_0) \vee (x \approx c_0)$

Esto es

12. $E' \vdash (x \in c_0 \vee x \approx c_0) \rightarrow (x \approx c_0)$

De (12) y (2) y dada la definición de $\overline{0}$, tenemos que

13. $E' \vdash x \approx \overline{0} \leftrightarrow (x \approx \overline{0} \vee x \in \overline{0})$

Con lo que queda demostrada la Base de la Inducción.

Hipótesis Inductiva *Supongamos ahora que para $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$E' \vdash x \approx \overline{0} \vee \cdots \vee x \approx \overline{n} \leftrightarrow (x \in \overline{n} \vee x \approx \overline{n})$$

Caso n+1: Debemos demostrar

$$E' \vdash (x \approx \overline{0} \vee \cdots \vee x \approx \overline{n} \vee x \approx \overline{n^+}) \leftrightarrow (x \in \overline{n^+} \vee x \approx \overline{n^+})$$

Es decir que debemos demostrar

(a) $E' \vdash (x \approx \overline{0} \vee \cdots \vee x \approx \overline{n} \vee x \approx \overline{n^+}) \rightarrow (x \in \overline{n^+} \vee x \approx \overline{n^+})$

(b) $E' \vdash (x \in \overline{n^+} \vee x \approx \overline{n^+}) \rightarrow (x \approx \overline{0} \vee \cdots \vee x \approx \overline{n} \vee x \approx \overline{n^+})$

Inciso(a)

Tememos que

14. $E' \vdash x \approx \overline{n^+} \rightarrow x \approx \overline{n^+}$

En la proposición anterior hemos demostrado que para cualquier número natural n, se tiene que

15. $E' \vdash x \approx \overline{0} \rightarrow x \in f_s(\overline{n})$
$E' \vdash x \approx \overline{1} \rightarrow x \in f_s(\overline{n})$
.
.
.
$E' \vdash x \approx \overline{n} \rightarrow x \in f_s(\overline{n})$

De la fórmula 16 del apéndice B-I y 1.2 del apéndice B-II,

16. $E' \vdash x \approx \overline{0} \vee \ldots \vee x \approx \overline{n} \rightarrow x \in f_s(\overline{n})$

Nuevamente, aplicando la fórmula 16 del apéndice B-I a los pasos (14) y (16), tenemos que

17. $E' \vdash x \approx \overline{0} \vee \ldots \vee x \approx \overline{n} \vee x \approx \overline{n^+} \rightarrow x \in f_s(\overline{n}) \vee x \approx \overline{n^+}$

Recordemos que hemos denotado con $\overline{n^+}$ *a* $f_s(\overline{n})$,

18. $E' \vdash x \approx \overline{0} \vee \ldots \vee x \approx \overline{n} \vee x \approx \overline{n^+} \rightarrow x \in \overline{n^+} \vee x \approx \overline{n^+}$

Con lo que queda concluida la demostración del inciso (a).

Inciso (b)

Haciendo uso de uno de los axiomas con los que hemos extendido a L_{ZF}, *aplicando generalización y el axioma 4, podemos afirmar que*

19. $E' \vdash f_s(\overline{n}) \approx y \rightarrow \varphi_s(\overline{n}, y)$

Nuevamente aplicando generalizando y A_4 *obtenemos*

20. $E' \vdash f_s(\overline{n}) \approx f_s(\overline{n}) \rightarrow \varphi_s(\overline{n}, f_s(\overline{n}))$

Por lo que podemos afirmar que

21. $E' \vdash \varphi_s(\overline{n}, f_s(\overline{n}))$

De acuerdo con la definición de φ_s,

22. $E' \vdash \exists w \exists v (\forall u_1 (u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n})$
$\wedge \forall u_1 (u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n} \vee u_1 \approx w)$
$\wedge \forall u_1 (u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z (z \in v \wedge u_1 \in z)))$

Consideremos la siguiente deducción (aplicación de regla C, usando a y b como constantes*)*

Como hipótesis:

i. $\forall u_1 (u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n})$
$\wedge \forall u_1 (u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n} \vee u_1 \approx a)$
$\wedge \forall u_1 (u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z (z \in b \wedge u_1 \in z)) \wedge$
$(u_1 \in f_s(\overline{n}) \rightarrow c \in b \wedge u_1 \in c)$
De (i) tenemos

ii. $\forall u_1 (u_1 \in b \rightarrow u_1 \approx \overline{n} \vee u_1 \approx a)$
Aplicando el axioma 4 con el término c,

iii. $c \in b \rightarrow c \approx \overline{n} \vee c \approx a$
De acuerdo con la fórmula 2 del apéndice B-I, se tiene

iv. $(c \in b \wedge u_1 \in c) \rightarrow (c \approx \overline{n} \vee c \approx a)$
De (i) y (iv),

v. $(u_1 \in f_s(\overline{n})) \rightarrow (z_0 \approx \overline{n} \vee z_0 \approx a)$
Además, del paso (iv), podemos afirmar que

vi. $(u_1 \in f_s(\overline{n})) \rightarrow (u_1 \in c)$
Así que

vii. $(u_1 \in f_s(\overline{n})) \rightarrow ((c \approx \overline{n} \vee c \approx a) \wedge (u_1 \in c))$
De 13.1 del apéndice B-II,

viii. $(u_1 \in f_s(\overline{n})) \rightarrow ((c \approx \overline{n} \wedge u_1 \in c) \vee (c \approx a \wedge u_1 \in c))$
Veamos a continuación que

$$u_1 \in c \wedge c \approx \overline{n} \rightarrow u_1 \in \overline{n}$$

Por el axioma 7, tenemos que

ix. $z \approx \overline{n} \rightarrow (u_1 \in z \rightarrow u_1 \in \overline{n})$

Aplicando generalización y por axioma 4

x. $c \approx \overline{n} \rightarrow (u_1 \in c \rightarrow u_1 \in \overline{n})$

Por la fórmula 2 del apéndice B-I,

xi. $c \approx \overline{n} \wedge u_1 \in c \rightarrow (u_1 \in c \rightarrow u_1 \in \overline{n})$

Aplicando A_2 *y M.P.,*

xii. $(c \approx \overline{n} \wedge u_1 \in c \rightarrow u_1 \in c) \rightarrow (c \approx \overline{n} \wedge u_1 \in c \rightarrow u_1 \in \overline{n})$

Por la fórmula 4 del apéndice B-I y M.P.,

xiii. $c \approx \overline{n} \wedge u_1 \in c \rightarrow u_1 \in \overline{n}$

Análogamente podemos obtener

xiv. $c \approx a \wedge u_1 \in c \rightarrow u_1 \in a$

De la hipótesis (i) obtenemos

xv. $u_1 \in a \rightarrow u_1 \approx \overline{n}$

De estos dos últimos pasos y por la transitividad de la implicación, tenemos que

xvi. $c \approx a \wedge u_1 \in c \rightarrow u_1 \approx \overline{n}$

Por (xiii) y (xvi), 16 del apéndice B-I y M.P.,

xvii. $(c \approx \overline{n} \wedge u_1 \in c) \vee (c \approx a \wedge u_1 \in c) \rightarrow (u_1 \in \overline{n} \vee u_1 \approx \overline{n})$

Por (viii) y (xvii) y la transitividad de la implicación,

xviii. $u_1 \in f_s(\overline{n})\ ) \rightarrow (u_1 \in \overline{n} \vee u_1 \approx \overline{n})$

Hasta aquí hemos obtenido que

23. E' , $\forall u_1(u_1 \in a \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n})$
$\wedge\ \forall u_1(u_1 \in b \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n} \vee u_1 \approx a)$
$\wedge\ \forall u_1(u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z))\ \wedge$
$(u_1 \in f_s(\overline{n}) \rightarrow c \in b \wedge u_1 \in c)\ \vdash u_1 \in f_s(\overline{n})) \rightarrow (u_1 \in \overline{n} \vee u_1 \approx \overline{n})$

Entonces por la regla C, tenemos que

24. E' , $\exists w \exists v \exists z \Big[\forall u_1(u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n})$
$\wedge\ \forall u_1(u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n} \vee u_1 \approx w)$
$\wedge\ \forall u_1(u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))\ \wedge$
$(u_1 \in f_s(\overline{n}) \rightarrow z \in b \wedge u_1 \in z)\Big] \vdash\ u_1 \in f_s(\overline{n})) \rightarrow (u_1 \in \overline{n} \vee u_1 \approx \overline{n})$

Pero tenemos que

25. $E' \vdash \exists w \exists v \Big[\forall u_1(u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n}) \wedge$
$\forall u_1(u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n} \vee u_1 \approx w\ ) \wedge$
$\forall u_1(u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))\Big] \rightarrow$

$$\exists w \exists v \Big[\forall u_1(u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n}) \wedge$$

$$\forall u_1 (u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n} \vee u_1 \approx w\ )\wedge$$
$$\forall u_1 (u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))\Big]$$

Tenemos, de acuerdo con 4.2 del apéndice B-II, que

26. $E' \vdash \exists w \exists v \Big[\forall u_1(u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n}) \wedge$
$\forall u_1 (u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n} \vee u_1 \approx w\ )\wedge$
$\forall u_1 (u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))\Big] \rightarrow$
$\exists w \exists v\ \forall u_1(u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n})\wedge$
$\exists w \exists v\ \forall u_1 (u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n} \vee u_1 \approx w)\wedge$
$\exists w \exists v\ \forall u_1 (u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))\Big]$

Se tiene que

27. $E' \vdash \exists w \exists v\ \forall u_1(u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n})\wedge$
$\exists w \exists v\ \forall u_1 (u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n} \vee u_1 \approx w)\wedge$
$\exists w \exists v\ \forall u_1 (u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))\Big] \rightarrow$
$\exists w \exists v\ \forall u_1 (u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))$

Ya que ni w ni v ocurren en la subfórmula que está después de la implicación principal del paso anterior, se tiene que

28. $E' \vdash \exists w \exists v\ \forall u_1 (u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))\ \rightarrow$
$\forall u_1 (u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))$

Así que, por la transitividad de la implicación, de (27) y (28), obtenemos

29. $E' \vdash \exists w \exists v\ \forall u_1(u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n})\wedge$
$\exists w \exists v\ \forall u_1 (u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n} \vee u_1 \approx w)\wedge$
$\exists w \exists v\ \forall u_1 (u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))\Big] \rightarrow$
$\forall u_1 (u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))$

Por el axioma 4, tenemos que

30. $E' \vdash \forall u_1 (u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))\ \rightarrow$
$(u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))$

Dado que z no ocurre en la fórmula $u_1 \in f_s(\overline{n})$, se tiene que

31. $E' \vdash (u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))\ \rightarrow$
$\exists z (u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow (z \in v \wedge u_1 \in z))$

Aplicando dos veces la transitividad de la implicación desde los pasos (29)-(30) y (31), obtenemos

32. $E' \vdash \exists w \exists v\ \forall u_1(u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n})\wedge$
$\exists w \exists v\ \forall u_1 (u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n} \vee u_1 \approx w)\wedge$
$\exists w \exists v\ \forall u_1 (u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))\Big] \rightarrow$
$\exists z (u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow (z \in v \wedge u_1 \in z))$

Por la transitividad de la implicación, de (26) y (32), se tiene que

33. $E' \vdash \exists w \exists v \Big[\forall u_1(u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n}) \wedge$
$\forall u_1(u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n} \vee u_1 \approx w) \wedge$
$\forall u_1(u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge u_1 \in z))\Big] \rightarrow$
$\exists z(u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow (z \in v \wedge u_1 \in z))$

Por (25) y (33),

34. $E' \vdash \exists w \exists v \Big[\forall u_1(u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n}) \wedge$
$\forall u_1(u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n} \vee u_1 \approx w) \wedge$
$\forall u_1(u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))\Big] \rightarrow$
$\exists w \exists v \Big[\forall u_1(u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n}) \wedge$
$\forall u_1(u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n} \vee u_1 \approx w) \wedge$
$\forall u_1(u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))\Big]$
$\wedge\ \exists z\Big[u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow (z \in v \wedge u_1 \in z)\Big]$

Como z no ocurre libre en la fórmula que precede al conectivo $\wedge$ de la fórmula que está después de la implicación principal, se tiene que

35. $E' \vdash \exists w \exists v \Big[\forall u_1(u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n}) \wedge$
$\forall u_1(u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n} \vee u_1 \approx w) \wedge$
$\forall u_1(u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))\Big] \rightarrow$
$\exists w \exists v \exists z \Big[\forall u_1(u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n}) \wedge$
$\forall u_1(u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n} \vee u_1 \approx w) \wedge$
$\forall u_1(u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))$
$\wedge\ (u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow (z \in v \wedge u_1 \in z))\Big]$

Aplicando M.P. a los pasos (22) y (35),

36. $E' \vdash \exists w \exists v \exists z \Big[\forall u_1(u_1 \in w \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n}) \wedge$
$\forall u_1(u_1 \in v \leftrightarrow u_1 \approx \overline{n} \vee u_1 \approx w) \wedge$
$\forall u_1(u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge u_1 \in z))$
$\wedge\ (u_1 \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow (z \in v \wedge u_1 \in z))\Big]$

Entonces, aplicando el metateorema de la deducción al paso (24), y aplicando M.P. usando también este último paso, obtenemos

37. $E' \vdash u_1 \in f_s(\overline{n}) \rightarrow u_1 \in \overline{n} \vee u_1 \approx \overline{n}$

De acuerdo con nuestra Hipótesis Inductiva, tenemos que

$$u_1 \in \overline{n} \vee u_1 \approx \overline{n} \rightarrow x \approx \overline{0} \vee \cdots \vee x \approx \overline{n}$$

De H.I. y (37),

38. $E' \vdash u_1 \in f_s(\overline{n}) \rightarrow x \approx \overline{0} \vee \cdots \vee x \approx \overline{n}$

De (14) y (38), la fórmula 16 del apéndice B-I y M.P.,

39. $E' \vdash u_1 \in f_s(\overline{n}) \vee x \approx f_s(\overline{n}) \rightarrow x \approx \overline{0} \vee \cdots \vee x \approx \overline{n} \vee x \approx f_s(\overline{n})$

Con lo que queda concluida la prueba para el inciso (b) y, por lo tanto, la prueba de esta proposición.

Proposición 2.3.9 *Para cualquier número natural n y cualquier fórmula φ, se tiene que*

$$E' \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{n-1}) \rightarrow \forall u(u \in \overline{n} \rightarrow \varphi(u))$$

Demostración 2.3.9.1 (Inducción sobre n)

Base de la Inducción

– $n = 0$: *P.D.* $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \rightarrow \forall u(u \in \overline{0} \rightarrow \varphi(u))$

De acuerdo con los axiomas con los que extendimos a L_{ZF}, tenemos que

1. $E' \vdash v \approx c_0 \rightarrow \varphi_c(v)$

Esto es

2. $E' \vdash v \approx c_0 \rightarrow \forall u(\neg u \in v)$

Aplicando generalización a la variable v y aplicando A_4 con el término c_0,

3. $E' \vdash c_0 \approx c_0 \rightarrow \forall u(\neg u \in c_0)$

Como

4. $E' \vdash c_0 \approx c_0$

Por M.P.,

5. $E' \vdash \forall u(\neg u \in c_0)$

Por A_4,

6. $E' \vdash \neg u \in c_0$

Entonces

7. $E' \vdash \neg u \in c_0 \vee \varphi(u)$

Esto es

8. $E' \vdash u \in c_0 \rightarrow \varphi(u)$

Aplicando generalización, se tiene

9. $E' \vdash \forall u(u \in c_0 \rightarrow \varphi(u))$

Entonces

10. $E' \vdash \varphi(c_0) \to \forall u(u \in c_0 \to \varphi(u))$

Ya que hemos denotado a c_0 con $\overline{0}$, hemos demostrado que

11. $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \to \forall u(u \in \overline{0} \to \varphi(u))$

Con lo que queda demostrada la Base Inductiva.

Hipótesis de Inducción

Supongamos que

$$E' \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{n-1}) \to \forall u(u \in \overline{n} \to \varphi(u))$$

Demostremos que

$$E' \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{n}) \to \forall u(u \in \overline{n^+} \to \varphi(u))$$

En el paso (38) del inciso (b) de la demostración de la proposición 2.3.8 demostramos que

12. $E' \vdash u \in f_s(\overline{n}) \to u \in \overline{n} \vee u \approx \overline{n}$

Tenemos, por Hipótesis Inductiva y la fórmula 2 del apéndice B-I, que

13. $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{n-1}) \wedge \varphi(\overline{n}) \to \forall u(u \in \overline{n} \to \varphi(u))$

Por el axioma 7, tenemos que

14. $E' \vdash u \approx \overline{n} \to (\varphi(\overline{n}) \to \varphi(u))$

Por medio del axioma 2 y M.P. obtenemos

15. $E' \vdash (u \approx \overline{n} \to \varphi(\overline{n})) \to (u \approx \overline{n} \to \varphi(u))$

Tenemos que

16. $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{n}) \to \varphi(\overline{n})$

Pot la fórmula 11 del apéndice B-I,

17. $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{n}) \to \neg(u \approx \overline{n}) \vee \varphi(\overline{n})$

Esto es

18. $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{n}) \to (u \approx \overline{n} \to \varphi(\overline{n}))$

De los pasos (15) y (18) y por la transitividad de la implicación, tenemos que

19. $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{n}) \to (u \approx \overline{n} \to \varphi(u))$

De la Hipótesis de Inducción, tenemos que

20. $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{n}) \to (u \in \overline{n} \to \varphi(u))$

Además, del paso (12) podemos afirmar que

21. $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{n}) \rightarrow (u \in f_s(\overline{n}) \rightarrow u \in \overline{n} \vee u \approx \overline{n})$

También tenemos, de acuerdo a la fórmula 22 del apéndice B-I, que

22. $E' \vdash ((u \in \overline{n} \rightarrow \varphi(u)\ ) \wedge (\ u \approx \overline{n} \rightarrow \varphi(u))) \rightarrow$
$(u \in \overline{n} \vee u \approx \overline{n} \rightarrow \varphi(u))$

Por lo pasos (19) y (20), tenemos que

23. $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{n}) \rightarrow \Big((u \in \overline{n} \rightarrow \varphi(u)) \wedge (u \approx \overline{n} \rightarrow \varphi(u))\Big)$

De los pasos (22) y (23) y por la transitividad de la implicación, tenemos que

24. $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{n}) \rightarrow (u \in \overline{n} \vee u \approx \overline{n} \rightarrow \varphi(u))$

De los pasos (21) y (24) y por 9 del apéndice B-I, tenemos que

25. $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{n}) \rightarrow$
$\Big((u \in f_s(\overline{n}) \rightarrow u \in \overline{n} \vee u \approx \overline{n}) \wedge (u \in \overline{n} \vee u \approx \overline{n} \rightarrow \varphi(u))\Big)$

Entonces, por la fórmula 5 del apéndice B-I,

26. $E' \vdash \Big((u \in f_s(\overline{n}) \rightarrow u \in \overline{n} \vee u \approx \overline{n}) \wedge (u \in \overline{n} \vee u \approx \overline{n} \rightarrow \varphi(u))\Big) \rightarrow$
$(u \in f_s(\overline{n}) \rightarrow \varphi(u))$

Por la transitividad de la implicación para las fórmulas de los pasos (25) y (26),

27. $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{n}) \rightarrow (u \in f_s(\overline{n}) \rightarrow \varphi(u))$

Aplicando generalización,

28. $E' \vdash \forall \mathbf{u}\Big(\varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{n}) \rightarrow (u \in f_s(\overline{n}) \rightarrow \varphi(u))\Big)$

Por 7.2 del apéndice B-II y M.P., concluimos que

29. $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{n}) \rightarrow \forall u(u \in f_s(\overline{n}) \rightarrow \varphi(u))$.

Proposición 2.3.10 *Para cualquier número natural n y cualquier fórmula φ se tiene que*

$$E' \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{n}) \rightarrow \forall u((u \in \overline{n} \vee u \approx \overline{n}) \rightarrow \varphi(u))$$

Demostración 2.3.10.1 (Inducción sobre n)

Base de la Inducción

– $n = 0$

De acuerdo al paso 8 en la base de la inducción de la demostración de la proposición anterior, tenemos que

1. $E' \vdash u \in \overline{0} \rightarrow \varphi(u)$

   De lo cual tenemos que

2. $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \rightarrow (u \in \overline{0} \rightarrow \varphi(u))$

   Además, de acuerdo al axioma 7,[15] *tenemos que*

3. $E' \vdash u \approx \overline{0} \rightarrow (\varphi(\overline{0}) \rightarrow \varphi(u))$

   Haciendo dos instancias del axioma 2, luego, por el axioma 1 y M.P., del paso (3) obtenemos

4. $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \rightarrow (u \approx \overline{0} \rightarrow \varphi(u))$

   De los pasos (2) y (4) obtenemos

5. $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \rightarrow ((u \in \overline{0} \rightarrow \varphi(u)) \wedge (u \approx \overline{0} \rightarrow \varphi(u)))$

   De acuerdo a la fórmula 29 del apéndice B-I tenemos que

6. $E' \vdash ((u \in \overline{0} \rightarrow \varphi(u)) \wedge (u \approx \overline{0} \rightarrow \varphi(u))) \rightarrow (u \in \overline{0} \vee u \approx \overline{0} \rightarrow \varphi(u))$

   De los pasos (5) y (6) obtenemos

7. $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \rightarrow (u \in \overline{0} \vee u \approx \overline{0} \rightarrow \varphi(u))$

   Aplicando generalización y ya que la variable u *no tiene presencia en la fórmula* $\varphi(\overline{0})$

8. $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \rightarrow \forall u (u \in \overline{0} \vee u \approx \overline{0} \rightarrow \varphi(u))$

Hipótesis de Inducción

$$E' \vdash \varphi(\overline{0}) \wedge \cdots \wedge \varphi(\overline{n-1}) \rightarrow \forall u (u \in \overline{n-1} \vee u \approx \overline{n-1} \rightarrow \varphi(u))$$

Demostremos ahora que la proposición es válida para el número natural n*.*

Aplicar generalización en el paso (24) de la proposición 2.3.9.

Proposición 2.3.11 *Para cualquier número natural* n*, se tiene que*

$$E' \vdash w \in \overline{n} \rightarrow w \in \overline{n+1}$$

Demostración 2.3.11.1 *Tenemos que de manera completamente análoga a como obtuvimos el paso (3) en la Demostración 2.3.7.1, obtenemos*

1. $E' \vdash \varphi_s(\overline{n}, f_s(\overline{n}))$

   Consideremos la siguiente deducción (aplicación de la regla C con a, b como constantes provisionales)

[15] Véase el apéndice A.

Los primeros dos pasos los tomamos como hipótesis.

i. $\forall w(w \in a \leftrightarrow w \approx \overline{n})$
$\quad \wedge \forall w(w \in b \leftrightarrow w \approx \overline{n} \vee w \approx a)$
$\quad \wedge \forall w(w \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge w \in z))$

ii. $w \in \overline{n}$

De acuerdo a la fórmula 4 del apéndice B-I y por M.P., obtenemos

iii. $\forall w(w \in b \leftrightarrow w \approx \overline{n} \vee w \approx a)$

Aplicando A_4 y de acuerdo a la definición de "$\leftrightarrow$", obtenemos

iv. $w \approx \overline{n} \vee w \approx a \rightarrow w \in b$

Además, siempre sucede que

v. $w \approx \overline{n} \rightarrow w \approx \overline{n}$

Así que por la fórmula 11 del apéndice B-I, tenemos que

vi. $w \approx \overline{n} \rightarrow w \approx \overline{n} \vee w \approx a$

Por otro lado del paso (iv), se tiene que

vii. $w \approx \overline{n} \rightarrow (w \approx \overline{n} \vee w \approx a \rightarrow w \in b)$

Aplicando el axioma 2 y M.P., obtenemos

viii. $(w \approx \overline{n} \rightarrow w \approx \overline{n} \vee w \approx a) \rightarrow (w \approx \overline{n} \rightarrow w \in b)$

Por M.P. aplicado a los pasos (vi) y (viii),

ix. $w \approx \overline{n} \rightarrow w \in b$

Aplicando generalización y A_4 con el término $\overline{n}$,

x. $\overline{n} \approx \overline{n} \rightarrow \overline{n} \in b$

Como

xi. $\overline{n} \approx \overline{n}$

Por M.P. aplicado a (xi) y (x),

xii. $\overline{n} \in b$

De (ii) y (xii),

xiii. $w \in \overline{n} \wedge \overline{n} \in b$

Por la regla existencial,

xiv. $\exists z(w \in z \wedge z \in b)$

De (i), y por la fórmula 4 del apéndice, el axioma A_4, la definición de "$\leftrightarrow$"y M.P., obtenemos

xv. $\exists z(w \in z \wedge z \in b) \rightarrow w \in f_s(\overline{n})$

Aplicando M.P. a los pasos (xiv) y (xv),

xvi. $w \in f_s(\overline{n})$

De acuerdo a esta deducción, tenemos que

2. $E' \cup \{\forall w(w \in a \leftrightarrow w \approx \overline{n})$
$\quad \wedge \forall w(w \in b \leftrightarrow w \approx \overline{n} \vee w \approx a)$
$\quad \wedge \forall w(w \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge w \in z))\}$
$\quad \cup \{w \in \overline{n}\} \vdash w \in f_s(\overline{n})$

Entonces por la regla C, se tiene que

3. $E' \cup \{\exists u \exists v \Big[\forall w (w \in u \leftrightarrow w \approx \overline{n})$
$\wedge \forall w (w \in v \leftrightarrow w \approx \overline{n} \vee w \approx u)$
$\wedge \forall w (w \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z (z \in v \wedge w \in z))\Big]\}$
$\cup \{w \in \overline{n}\} \vdash w \in f_s(\overline{n})$

Aplicando el metateorema de la deducción dos veces, obtenemos

4. $E' \vdash \exists u \exists v \Big[\forall w (w \in u \leftrightarrow w \approx \overline{n})$
$\wedge \forall w (w \in v \leftrightarrow w \approx \overline{n} \vee w \approx u)$
$\wedge \forall w (w \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z (z \in v \wedge w \in z))\Big] \rightarrow$
$\Big[w \in \overline{n} \rightarrow w \in f_s(\overline{n})\Big]$

Aplicando M.P. a los pasos (1) y (4), tenemos que

5. $E' \vdash w \in \overline{n} \rightarrow w \in f_s(\overline{n})$

Como no hemos aplicado generalización para ninguna variable, entonces podemos aplicar el metateorema de la deducción y obtener

6. $E' \vdash w \in \overline{n} \rightarrow w \in f_s(\overline{n})$

Esto es lo que queríamos demostrar.

Las siguientes dos proposiciones son básicas para la demostración del teorema principal de este trabajo. Cabe mencionar que estos son resultados que se tienen para AP, pero su justificación es distinta para E'.

Proposición 2.3.12 *Las funciones aritméticas que se obtienen por el método de recursión a partir de funciones representables son representables.*

Sea f una función de aridad $n+1$ que se obtuvo por el método de recursión a partir de funciones representables. Esto es, existen funciones H, G tales que

- $H : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$
- $G : \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}$

  y tenemos
- $F : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$

de tal manera que

- $F(p_1, \ldots, p_n, 0) = H(p_1, \ldots, p_n)$
- $F(p_1, \ldots, p_n, n^+) = G(p_1, \ldots, p_n, F(p_1, \ldots, p_n, n), n)$

y α_G , α_H denotarán a las fórmulas de $L_{E'}$ que representan a G y H, respectivamente.

Debemos dar una fórmla φ_F del lenguaje de nuestra teoría tal que:

- $F(p_1,\ldots,p_n,n)=m$ syss $\varphi_F(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{n},\overline{m})$

y debemos recordar que $h(n)$ representa un término en el lenguaje, el cual le fué asociado mediante la función h dada en la definición 2.2.4 , al número natural n.

Demostraremos que

(a) Si $F(p_1,\ldots,p_n,n)=m$, entonces $E'\vdash\varphi_F(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{n},\overline{m})$

(b) $E'\vdash\exists u\,\varphi_F(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{n},u)\quad\wedge$
$$\forall u\forall v\Big(\varphi_F(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{n},u)\wedge\varphi_F(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{n},v)\quad\rightarrow\quad \mathrm{u}\approx\mathrm{v}\Big).$$

Salvo por una pequeña variación, la fórmula propuesta es la dada para la correspondiente proposición en [Mendelson]. La demostración que a continuación daré, está basada en la que se da en el libro mencionado, sin embargo, la que ahí se presenta carece de la formalidad que se requiere cuando se obtienen deducciones en un sistema formal. Además, la fórmula que daremos no involucra a la que representa a la relación "$<$"como se hace en [Mendelson], a pesar de que esta relación queda definida de la misma manera que como se define cuando se está trabajando con AP. Aprovecharemos que tenemos en el lenguaje a una letra predicativa de la misma aridad que la definida relación "$<$".

Además, debemos observar que para n número natural, se tiene definida una sucesión $q_0,q_1,\ldots,q_n$ de números naturales tales que:

- $q_0=F(p_1,\ldots,p_n,0)=H(p_1,\ldots,p_n)$
- $q_{n^+}=F(p_1,\ldots,p_n,n^+)=G(p_1,\ldots,p_n,F(p_1,\ldots,p_n,n),n)$

Demostraremos por inducción sobre n, el número de elementos de la sucesión, que la función F así obtenida es representable. La fórmula de $L_{E'}^{n+2}$ que se propone para reprentarla es la siguiente:

$$\begin{aligned}\varphi_F(x_1,\ldots,x_n,y_1,y_2)&\\ \fallingdotseq\ \exists u\exists v\Big[&\exists w\ (\beta(u,v,\overline{0},w)\wedge\alpha_H(x_1,\ldots,x_n,w))\\ &\wedge\ \beta(u,v,y_1,y_2)\\ &\wedge\ \forall w\Big(w\in y_1\rightarrow\\ &\qquad\exists y_w\exists z_w(\beta(u,v,w,y_w)\wedge\beta(u,v,f_s(w),z_w)\\ &\qquad\qquad\wedge\alpha_G(x_1,\ldots,x_n,y_w,w,z_w))\Big)\Big]\end{aligned}$$

de manera que

$$F(p_1,\ldots,p_n,n)=m \quad \leftrightharpoons \quad \varphi_F(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{n},\overline{m})$$

Demostración 2.3.12.1 (Inciso (a))
(Inducción sobre n)

$$-\ q_0 = F(p_1,\ldots,p_n\ ,\ 0) = H(p_1,\ldots,p_n)$$

Consideremos a una sucesión de números naturales formada únicamente por q_0. De acuerdo a la proposición 2.3.6 conserniente a la función f_β de Gödel[16]*, sabemos que existen números naturales r y s tales que:*

1. $f_\beta(r,\ s,\ 0) = q_0$

   Como f_β es representable en E' por la fórmula β[17]*, se tiene que*

2. $E' \vdash \beta(\overline{r},\overline{s},\overline{0},\overline{q_0})$

   Por otro lado, también tenemos que $q_0 = H(p_1,\ldots,p_n)$ y que H es representable en E' por la fórmula α_H, entonces

3. $E' \vdash \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{q_0})$

   Recordemos además, que hemos definido $\overline{0} = c_0$ y es posible demostrar de acuerdo al axioma con que introdujimos a c_0 en L_{ZF} que $(\forall x(x \approx c_0 \leftrightarrow \varphi_c(c_0)))$, entonces

4. $E' \vdash \varphi_c(\overline{0})$

   Esto es, de acuerdo a la definición de φ_c

5. $E' \vdash \forall w(\neg w \in \overline{0})$,

   Entonces, tenemos de los pasos (2) y (3) que

6. $E' \vdash \beta(\overline{r},\overline{s},\overline{0},\overline{q_0}) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{q_0})$

   Por la regla existencial,

7. $E' \vdash \exists w\Big(\beta(\overline{r},\overline{s},\overline{0},w)) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},w)\Big)$

   De (2) y (7), afirmamos

8. $E' \vdash \exists w\Big(\beta(\overline{r},\overline{s},\overline{0},w)) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},w)\Big) \wedge \beta(\overline{r},\overline{s},\overline{0},\overline{q_0})$

   Por otro lado, del paso 5 aplicando A_4, tenemos que

9. $E' \vdash \neg w \in \overline{0}$

   Entonces, podemos afirmar de acuerdo a la fórmula 25 del apéndice B-I y M.P. que

[16] Definición 2.3.3.
[17] Proposición 2.3.5.

10. $E' \vdash \neg w \in \overline{0} \vee \exists y_w \exists z_w \Big(\beta(u,v,w,y_w) \wedge \beta(u,v,f_s(w),z_w) \wedge$

$\alpha_G(\overline{p_1},\dots,\overline{p_n},y_w,w,z_w)\Big)$

Esto es,

11. $E' \vdash w \in \overline{0} \rightarrow \exists y_w \exists z_w \Big(\beta(u,v,w,y_w) \wedge \beta(u,v,f_s(w),z_w) \wedge$

$\alpha_G(\overline{p_1},\dots,\overline{p_n},y_w,w,z_w)\Big)$

Aplicando generalización a las variable w, v, u, obtenemos

12. $E' \vdash \forall u \forall v \forall w \Big(w \in \overline{0} \rightarrow \exists y_w \exists z_w \Big(\beta(u,v,w,y_w) \wedge \beta(u,v,f_s(w),z_w) \wedge$

$\alpha_G(\overline{p_1},\dots,\overline{p_n},y_w,w,z_w)\Big)\Big)$

Aplicando A_4 dos veces con los términos $\overline{r}$, $\overline{s}$ obtenemos

13. $E' \vdash \forall w \Big(w \in \overline{0} \rightarrow \exists y_w \exists z_w \Big(\beta(\overline{r},\overline{s},w,y_w) \wedge \beta(\overline{r},\overline{s},f_s(w),z_w)$

$\wedge\, \alpha_G(\overline{p_1},\dots,\overline{p_n},y_w,w,z_w)\Big)\Big)$

Así que, de los pasos (8) y (12),

14. $$\begin{aligned} E' \vdash \exists w \Big(\beta(\overline{r},\overline{s},\overline{0},w)) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\dots,\overline{p_n},w)\Big) \\ \wedge\, \beta(\overline{r},\overline{s},\overline{0},\overline{q_0}) \\ \wedge\, \forall w \Big(w \in \overline{0} \rightarrow \exists y_w \exists z_w \Big(\beta(\overline{r},\overline{s},w,y_w) \wedge \beta(\overline{r},\overline{s},f_s(w),z_w) \\ \wedge\, \alpha_G(\overline{p_1},\dots,\overline{p_n},y_w,w,z_w)\Big)\Big) \end{aligned}$$

Aplicando la regla existencial dos veces a los términos $\overline{r}$ y $\overline{s}$, obtenemos

15. $$\begin{aligned} E' \vdash \exists u \exists v \Big[\exists w \Big(\beta(u,v,\overline{0},w) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\dots,\overline{p_n},w)\Big) \\ \wedge\, \beta(u,v,\overline{0},\overline{q_0}) \\ \wedge\, \forall w \Big(w \in \overline{0} \rightarrow \exists y_w \exists z_w \Big(\beta(u,v,w,y_w) \wedge \beta(u,v,f_s(w),z_w) \\ \wedge\, \alpha_G(\overline{p_1},\dots,\overline{p_n},y_w,w,z_w)\Big)\Big)\Big] \end{aligned}$$

Con lo que queda demostrada la Base Inductiva.

Hipótesis Inductiva

Supongamos que

Si $F(p_1,\dots,p_n,n) = q_n$, entonces

- $$\begin{aligned} E' \vdash \exists u \exists v \Big[\exists w \Big(\beta(u,v,\overline{0},w)) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\dots,\overline{p_n},w)\Big) \\ \wedge\, \beta(u,v,\overline{n},\overline{q_n}) \\ \wedge\, \forall w \Big(w \in \overline{n} \rightarrow \exists y_w \exists z_w \Big(\beta(u,v,w,y_w) \wedge \beta(u,v,f_s(w),z_w) \\ \wedge\, \alpha_G(\overline{p_1},\dots,\overline{p_n},y_w,w,z_w)\Big)\Big)\Big] \end{aligned}$$

(n + 1) :

P.D. Si $F(p_1,\ldots,p_n,n+1) = q_{n+1}$, *entonces*

- $$E' \vdash \exists u \exists v \Big[\exists w\Big(\beta(u,v,\overline{0},w)) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},w)\Big) \\ \wedge\ \beta(u,v,\overline{n^+},\overline{q_{n^+}}) \\ \wedge\ \forall w\Big(w \in \overline{n^+} \rightarrow \exists y_w \exists z_w\Big(\beta(u,v,w,y_w) \wedge \beta(u,v,f_s(w),z_w) \\ \wedge\ \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},y_w,w,z_w)\Big)\Big)\Big]$$

Tenemos

$$- \ q_n = F(p_1,\ldots,p_n,n)$$
$$- \ q_{n^+} = F(p_1,\ldots,p_n,n^+) = G(p_1,\ldots,p_n,F(p_1,\ldots,p_n,n),n) \\ = G(p_1,\ldots,p_n,q_n,n)$$

Como G es representable,

16. $E' \vdash \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{q_n},\overline{n},\overline{q_{n^+}})$

Además, deben tenerse números naturales $q_0,\ldots,q_n$ *tales que*

$$- \ q_0 = F(p_1,\ldots,p_n,0) = H(p_1,\ldots,p_n)$$
$$- \ q_{r^+} = F(p_1,\ldots,p_n,r^+) = G(p_1,\ldots,p_n,F(p_1,\ldots,p_n,r),r) \\ r \in \{0,\ldots,n-1\}$$

Como H es representable,

17. $E' \vdash \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{q_0})$

Para la sucesión de $q_0,\ldots,q_{n^+}$, *de acuerdo a la definición de la función* f_β *de Gödel*[18] *y a la proposición 2.3.6, existen números naturales* k_1 *y* k_2 *tales que*

$$- \ f_\beta(k_1,k_2,i) = q_i \qquad con\ i \in \{0,1\ldots,n^+\}$$

Como f_β *está representada por la fórmula* β *se tiene que*

18. $E' \vdash \beta(\overline{k_1},\overline{k_2},\overline{0},\overline{q_0})$
$E' \vdash \beta(\overline{k_1},\overline{k_2},\overline{1},\overline{q_1})$
.
.
.
$E' \vdash \beta(\overline{k_1},\overline{k_2},\overline{n},\overline{q_n})$
$E' \vdash \beta(\overline{k_1},\overline{k_2},\overline{n^+},\overline{q_{n^+}})$

De los pasos (17) y (18),

[18] Definición 2.3.3.

19. $E' \vdash \beta(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \overline{0}, \overline{q_0}) \wedge \alpha_H(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{q_0})$

Por la regla existencial,

20. $E' \vdash \exists w\ \big(\beta(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \overline{0}, w) \wedge \alpha_H(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, w)\big)$

De los pasos (18) y (20),

21. $E' \vdash \exists w\ \big(\beta(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \overline{0}, w) \wedge \alpha_H(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, w)\big)$
$\wedge\ \beta(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \overline{n^+}, \overline{q_{n^+}})$

Por otro lado, reescribiendo las $n + 1$ últimas fórmulas en el paso (18) y de acuerdo a la definición de $\overline{n}$, (recordar $\overline{n}$ es notación para $h(n)$, y que por definión de la función h, $h(n^+) = f_s(h(n))$ y $h(0) = c_0 = \overline{0}$)

22. $E' \vdash \beta(\overline{k_1}, \overline{k_2}, f_s(\overline{0}), \overline{q_1})$
$E' \vdash \beta(\overline{k_1}, \overline{k_2}, f_s(\overline{1}), \overline{q_2})$
.
.
.
$E' \vdash \beta(\overline{k_1}, \overline{k_2}, f_s(\overline{n}), \overline{q_{n^+}})$

Además, como

- $q_1 = G(x_1, \ldots, x_n, q_0, 0)$
- $q_2 = G(x_1, \ldots, x_n, q_1, 1)$

.
.
.

- $q_n = G(x_1, \ldots, x_n, q_{n-1}, n-1)$
- $q_{n^+} = G(x_1, \ldots, x_n, q_n, n)$

y G es representable,

23. $E' \vdash \alpha_G(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{q_0}, \overline{0}, \overline{q_1})$
$E' \vdash \alpha_G(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{q_1}, \overline{1}, \overline{q_2})$
.
.
.
$E' \vdash \alpha_G(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{q_n}, \overline{n}, \overline{q_{n^+}})$

Entonces, de los pasos (21), (22) y (23), obtenemos que

24. $E' \vdash \beta(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \overline{0}, \overline{q_0}) \wedge \beta(\overline{k_1}, \overline{k_2}, f_s(\overline{0}), \overline{q_1}) \wedge$
$\alpha_G(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{q_0}, \overline{0}, \overline{q_1})$

$E' \vdash \beta(\overline{k_1}, \overline{k_2}, \overline{1}, \overline{q_1}) \wedge \beta(\overline{k_1}, \overline{k_2}, f_s(\overline{1}), \overline{q_2}) \wedge$
$\alpha_G(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{q_1}, \overline{1}, \overline{q_2})$

.

.

.

$$E' \vdash \beta(\overline{k_1},\overline{k_2},\overline{n},\overline{q_n}) \wedge \beta(\overline{k_1},\overline{k_2},f_s(\overline{n}),\overline{q_{n+}}) \wedge \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{q_n},\overline{n},\overline{q_{n+}})$$

Sea

$$\mathcal{A}(\overline{n}) \;\leftrightharpoons\; \exists y \exists z \Big(\beta(\overline{k_1},\overline{k_2},\overline{n},y) \wedge \beta(\overline{k_1},\overline{k_2},f_S(\overline{n}),z) \wedge \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},y,\overline{n},z)\Big)$$

y sean

$$\alpha_i \leftrightharpoons \beta(\overline{k_1},\overline{k_2},\overline{i},\overline{q_i}) \wedge \beta(\overline{k_1},\overline{k_2},f_s(\overline{i}),\overline{q_{i+}}) \wedge \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{q_i},\overline{i},\overline{q_{i+}})$$

Entonces, del paso (24) aplicando la regla existencial dos veces, tenemos que

25. $E'\ ,\ \alpha_0 \vdash \mathcal{A}(\overline{0})$
$E'\ ,\ \alpha_1 \vdash \mathcal{A}(\overline{1})$

.

.

.

$E'\ ,\ \alpha_n \vdash \mathcal{A}(\overline{n})$

Aplicando el metateorema de la deducción, obtenemos

26. $E' \vdash \alpha_0 \rightarrow \mathcal{A}(\overline{0})$
$E' \vdash \alpha_1 \rightarrow \mathcal{A}(\overline{1})$

.

.

.

$E' \vdash \alpha_n \rightarrow \mathcal{A}(\overline{n})$

Con M.P. aplicado a los pasos (24) y (26), podemos obtener

27. $E' \vdash \mathcal{A}(\overline{0}) \wedge \mathcal{A}(\overline{1}) \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}(\overline{n})$

De acuerdo a la proposición 2.3.9, podemos afirmar que

28. $E' \vdash \mathcal{A}(\overline{0}) \wedge \mathcal{A}(\overline{1}) \wedge \ldots \wedge \mathcal{A}(\overline{n}) \quad \rightarrow \quad \forall w(w \in \overline{n^+} \rightarrow \mathcal{A}(w))$

Aplicando M.P. a los pasos (27) y (28),

29. $E' \vdash \forall w\Big(w \in \overline{n^+} \rightarrow \exists y \exists z\Big(\beta(\overline{k_1},\overline{k_2},w,y) \wedge \beta(\overline{k_1},\overline{k_2},f_S(w),z) \wedge \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},y,w,z)\Big)\Big)$

Entonces, de los pasos (21) y (29), obtenemos

30. $E' \vdash \exists w\ (\beta(\overline{k_1},\overline{k_2},\overline{0},w) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},w)) \wedge \beta(\overline{k_1},\overline{k_2},h(n^+),h(q_{n+}))$

$$\wedge \forall w\Big(w \in \overline{n^+} \rightarrow \exists y \exists z\Big(\beta(\overline{k_1}, \overline{k_2}, w, y) \wedge \beta(\overline{k_1}, \overline{k_2}, f_S(w), z) \wedge \alpha_G(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, y, w, z)\Big)\Big)$$

De modo que, aplicando la regla existencial dos veces a los términos $\overline{k_1}$ *y* $\overline{k_2}$*, concluimos*

31. $E' \vdash \exists u \exists v \Big[\exists w\ (\beta(u, v, \overline{0}, w) \wedge \alpha_H(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, w))$
$\wedge\ \beta(u, v, \overline{n^+}, \overline{q_{n^+}})$
$\wedge\ \forall w\Big(w \in \overline{n^+} \rightarrow \exists y \exists z\Big(\beta(u, v, w, y) \wedge \beta(u, v, f_S(w), z) \wedge \alpha_G(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, y, w, z)\Big)\Big)\Big]$

Es decir que hemos demostrado

32. $E' \vdash \varphi(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{n}, \overline{m})$

De esta manera hemos terminado el inciso (a) de la demostración.

Demostración 2.3.12.2 (Inciso (b))

La demostración correspondiente a este inciso estará dividida en dos partes, a saber:

i. $E' \vdash \exists w_m \varphi_f(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{n}, w_m)$

ii. $E' \vdash \forall w_{m_1} \forall w_{m_2}\Big(\varphi_f(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{n}, w_{m_1}) \wedge \varphi_f(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{n}, w_{m_2}) \rightarrow w_{m_1} \approx w_{m_2}\Big)$

Para demostrar la primera parte, observemos que en la conclusión del inciso (a) obtuvimos

1. $E' \vdash \varphi(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{n}, \overline{m})$

   De modo que aplicando la regla existencial, tenemos

2. $E' \vdash \exists w_m \varphi(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{n}, w_m)$

   con lo que queda demostrada esta primera parte.

Comencemos a demostrar la segunda parte del inciso (b), por inducción sobre n.

(Inducción sobre n)

Base de la Inducción

P.D. $\quad E' \vdash \varphi_f(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{0}, z_1) \wedge \varphi_f(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{0}, z_2) \rightarrow z_1 \approx z_2$

Tenemos que

3. $E'\ ,\ \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_1)\wedge\varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_2)$

$$\vdash\ \exists u\exists v\Big[\exists w\Big(\beta(u,v,\overline{0},w)\wedge\alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},w)\Big)$$
$$\wedge\ \beta(u,v,\overline{0},z_1)$$
$$\wedge\ \forall w\Big(w\in\overline{0}\to\exists y_w\exists z_w\big(\beta(u,v,w,y_w)\wedge\beta(u,v,f_s(w),z_w)$$
$$\wedge\ \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},y_w,w,z_w)\big)\Big)\Big]$$

Además,

4. $E'\ ,\ \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_1)\wedge\varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_2)$

$$\vdash\ \exists u\exists v\Big[\exists w\Big(\beta(u,v,\overline{0},w)\wedge\alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},w)\Big)$$
$$\wedge\ \beta(u,v,\overline{0},z_1)$$
$$\wedge\ \forall w\Big(w\in\overline{0}\to\exists y_w\exists z_w\big(\beta(u,v,w,y_w)\wedge\beta(u,v,f_s(w),z_w)$$
$$\wedge\ \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},y_w,w,z_w)\big)\Big)\Big]$$

Ahora, consideremos la siguiente deducción (aplicación de la Regla C con a, b, d, e como constantes provisionales):

Los siguientes dos pasos como hipótesis

i. $\exists w\Big(\beta(a,b,\overline{0},w)\wedge\alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},w)\Big)$
$\wedge\ \beta(a,b,\overline{0},z_1)$
$\wedge\ \forall w\Big(w\in\overline{0}\to\exists y_w\exists z_w\big(\beta(a,b,w,y_w)\wedge\beta(a,b,f_s(w),z_w)$
$\wedge\ \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},y_w,w,z_w)\big)\Big)$

ii. $\exists w\Big(\beta(d,e,\overline{0},w)\wedge\alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},w)\Big)$
$\wedge\ \beta(d,e,\overline{0},z_2)$
$\wedge\ \forall w\Big(w\in\overline{0}\to\exists y_w\exists z_w\big(\beta(d,e,w,y_w)\wedge\beta(d,e,f_s(w),z_w)$
$\wedge\ \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},y_w,w,z_w)\big)\Big)$

De acuerdo a la fórmula 4 del apéndice B-I, la 4 del apéndice B-II y M.P., de la hipótesis (i) tenemos que

iii. $\beta(a,b,\overline{0},z_1)$

y que

iv. $\exists w\Big(\beta(a,b,\overline{0},w)\wedge\alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},w)\Big)$

De la hipótesis (ii), tenemos que

v. $\beta(d,e,\overline{0},z_2)$

y que

vi. $\exists w\Big(\beta(d,e,\overline{0},w)\wedge\alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},w)\Big)$

Además, teniendo como hipótesis los siguientes dos pasos (aplicación interna de la regla C con constantes provicionales c y f)

A. $\beta(a,b,\overline{0},c)\wedge\alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},c)$

B. $\beta(d,e,\overline{0},f) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},f)$
Podemos obtener de (A)

C. $\beta(a,b,\overline{0},c)$
y

D. $\alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},c)$
Por ser β la fórmula que representa a la función f_β[19], *tenemos que*

E. $\beta(a,b,\overline{0},u) \wedge \beta(a,b,\overline{0},v) \rightarrow u \approx v$
De (iii) y de (C),

F. $\beta(a,b,\overline{0},z_1) \wedge \beta(a,b,\overline{0},c)$
De acuerdo al paso (E),

G. $\beta(a,b,\overline{0},z_1) \wedge \beta(a,b,\overline{0},c) \rightarrow z_1 \approx c$
Por (F) y (G) y M.P.,

H. $z_1 \approx c$
De manera totalmente análoga, obtenemos

I. $z_2 \approx f$
De (B), obtenemos

J. $\alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},f)$
Por (D) y (J),

K. $\alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},c) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},f)$
Como α_H es la fórmula que representa a la función H, tenemos que

L. $\alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},c) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},f) \rightarrow c \approx f$
Aplincando M.P. a estos dos últimos pasos,

M. $c \approx f$
Por otro lado, por el axioma 7, tenemos que

N. $x \approx y \rightarrow z_1 \approx x \rightarrow z_1 \approx y$
Aplicando generalización y el axioma 4 dos veces,

O. $c \approx f \rightarrow z_1 \approx c \rightarrow z_1 \approx f$
Por el axioma 2 y M.P.,

P. $(c \approx f \rightarrow z_1 \approx c) \rightarrow (c \approx f \rightarrow z_1 \approx f)$
Del paso (H) obtenemos que ($c \approx f \rightarrow z_1 \approx c$), así que, aplicando M.P.,

Q. $c \approx f \rightarrow z_1 \approx f$
Por (M),

R. $z_1 \approx f$
De (I) y (R), tenemos que

S. $z_1 \approx f \wedge f \approx z_2$
Por 29.3 del apéndice B-II, obtenemos

T. $z_1 \approx f \wedge f \approx z_2 \rightarrow z_1 \approx z_2$
Aplicando M.P. a estos dos últimos pasos,

[19] Definición 2.3.3.

U. $z_1 \approx z_2$

Entonces de suponer $\beta(a,b,\overline{0},c) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},c)$ *y* $\beta(d,e,\overline{0},f) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},f)$ *demostramos* $z_1 \approx z_2$*, por lo tanto, podemos decir, de acuerdo a la regla C para las constantes provisionales c y d, que*

vii. $\exists w_1 \exists w_2 \Big[\beta(a,b,\overline{0},w_1) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},w_1) \wedge \beta(d,e,\overline{0},w_2) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},w_2)\Big] \rightarrow \Big[z_1 \approx z_2\Big]$

Por M.P. usando los pasos (v) y (vi), tenemos que

viii. $z_1 \approx z_2$

Sean

$$- \ \psi_1(a,b) \ \rightleftharpoons \ \exists w\Big[\beta(a,b,\overline{0},w) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},w)\Big) \wedge \beta(a,b,\overline{0},z_1) \wedge \forall w\Big(w \in \overline{0} \rightarrow \exists y_w \exists z_w \big(\beta(a,b,w,y_w) \wedge \beta(a,b,f_s(w),z_w) \wedge \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},y_w,w,z_w)\big)\Big]$$

y

$$- \ \psi_2(d,e) \ \rightleftharpoons \ \exists w\Big[\beta(d,e,\overline{0},w) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},w)\Big) \wedge \beta(d,e,\overline{0},z_2) \wedge \forall w\Big(w \in \overline{0} \rightarrow \exists y_w \exists z_w \big(\beta(d,e,w,y_w) \wedge \beta(d,e,f_s(w),z_w) \wedge \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},y_w,w,z_w)\big)\Big]$$

Así, tenemos que

5. $E', \ \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_1) \wedge \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_2), \ \ \psi_1(a,b) \wedge \psi_2(d,e) \vdash z_1 \approx z_2$

Entonces, por la regla C,

6. $E', \ \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_1) \wedge \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_2),$
$\exists u_1 \exists v_1 \exists u_2 \exists v_2 \Big[\psi_1(u_1,v_1) \wedge \psi_2(u_2,v_2)\Big] \vdash z_1 \approx z_2$

Como u_1 *y* v_1 *no ocurren en* ψ_2 *y como* u_2 *y* v_2 *no ocurren en* ψ_1*, lo anterior es equivalente a tener*

7. $E', \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_1) \wedge \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_2),$
$\exists u_1 \exists v_1 \psi_1(u_1,v_1) \wedge \exists u_2 \exists v_2 \psi_2(u_2,v_2) \vdash z_1 \approx z_2$

O bien,

8. $E', \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_1) \wedge \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_2),$
$\exists u \exists v \psi_1(u,v) \wedge \exists u \exists v \psi_2(u,v) \ \vdash \ z_1 \approx z_2$

Aplicando el metateorema de la deducción, tenemos que

9. $E' \ , \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_1) \wedge \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_2) \ \vdash$
$\exists u \exists v \ \psi_1(u,v) \wedge \exists u \exists v \psi_2(u,v) \ \rightarrow \ z_1 \approx z_2$

De acuerdo a los pasos (3) y (4), tenemos que

10. $E', \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_1) \wedge \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_2) \ \vdash \ \exists u \exists v \ \psi_1(u,v) \wedge \exists u \exists v \psi_2(u,v)$

Aplicando M.P. a (10) y (9),

11. $E' \ , \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_1) \wedge \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_2) \ \vdash \ z_1 \approx z_2$

Por el metateorema de la deducción, tenemos que

12. $E' \ \vdash \ \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_1) \wedge \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_2) \ \rightarrow \ z_1 \approx z_2$

Aplicando generalización dos veces, tenemos

13. $E' \ \vdash \ \forall z_1 \forall z_2 \big(\varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_1) \wedge \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{0},z_2) \ \rightarrow \ z_1 \approx z_2\big)$

Con lo cual queda demostrada la Base Inductiva.

Hipótesis de Inducción

Supongamos que

$$E' \vdash \forall z_1 \forall z_2 \big(\varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{n},z_1) \wedge \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{n},z_2) \rightarrow z_1 \approx z_2\big)$$

P.D.

$$E' \vdash \forall z_1 \forall z_2 \big(\varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{n+1},z_1) \wedge \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{n+1},z_2) \rightarrow z_1 \approx z_2\big)$$

Tenemos que

- $q_0 = f(x_1,\ldots,x_n,0) = H(x_1,\ldots,x_n)$
- $q_n = f(x_1,\ldots,x_n,n)$
- $q_{n+1} = f(x_1,\ldots,x_n,n+1) = G(x_1,\ldots,x_n,q_n,n)$

Obsérvese que q_0, q_n, q_{n+1} *son números naturales, entonces*

14. $E' \vdash \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{q_n},\overline{n},\overline{q_n+1})$

15. $E' \vdash \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{q_0})$

16. $E' \vdash \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{n},\overline{q_n})$

17. $E' \vdash \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{n+1},\overline{q_{n+1}})$

18. $E' \vdash \exists z \varphi_f(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{n}, z)$

19. $E' \vdash \forall z_1 \forall z_2 \big(\varphi_f(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{n}, z_1) \wedge \varphi_f(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{n}, z_2) \rightarrow z_1 \approx z_2\big)$

Se tiene que:

$$\begin{aligned}\varphi_f(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{n+1}, y_{n+1}) \leftrightharpoons&\\ &\exists u \exists v \Big[\exists w \Big(\beta(u, v, \overline{0}, w) \wedge \alpha_H(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, w)\Big)\\ &\quad \wedge \beta(u, v, \overline{n+1}, z_i)\\ &\quad \wedge \forall w \Big(w \in \overline{n+1} \rightarrow \exists y_w \exists z_w \big(\beta(u, v, w, y_w) \wedge \beta(u, v, f_s(w), z_w)\\ &\qquad\qquad \wedge \alpha_G(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, y_w, w, z_w)\big)\Big)\Big]\end{aligned}$$

Entonces afirmamos que

20. $$\begin{aligned}E', \varphi_f(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{n+1}, y_{n+1}) \vdash&\\ &\exists u \exists v \Big[\exists w \Big(\beta(u, v, \overline{0}, w) \wedge \alpha_H(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, w)\Big)\\ &\quad \wedge \beta(u, v, \overline{n+1}, z_i)\\ &\quad \wedge \forall w \Big(w \in \overline{n+1} \rightarrow\\ &\qquad\qquad \exists y_w \exists z_w \big(\beta(u, v, w, y_w) \wedge \beta(u, v, f_s(w), z_w)\\ &\qquad\qquad \wedge \alpha_G(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, y_w, w, z_w)\big)\Big)\Big]\end{aligned}$$

Veremos que

$$\varphi_f(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{n+1}, z_1) \wedge \varphi_f(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{n+1}, z_2) \rightarrow z_1 \approx z_2$$

Consideremos la siguiente deducción (aplicación de la regla C usando como constantes provisionales a, b, e y f):

El siguiente paso como hipótesis

i. $$\begin{aligned}&\exists w (\beta(a, b, \overline{0}, w) \wedge \alpha_H(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, w))\\ &\wedge \beta(a, b, \overline{n+1}, z_1)\\ &\wedge \forall w \Big(w \in \overline{n+1} \rightarrow\\ &\qquad \exists y_w \exists z_w \big(\beta(a, b, w, y_w) \wedge \beta(a, b, f_s(w), z_w)\\ &\qquad\qquad \wedge \alpha_G(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, y_w, w, z_w)\big)\Big)\\ &\wedge \exists w (\beta(e, f, \overline{0}, w) \wedge \alpha_H(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, w))\\ &\wedge \beta(e, f, \overline{n+1}, z_2)\\ &\wedge \forall w \Big(w \in \overline{n+1} \rightarrow\\ &\qquad \exists y_w \exists z_w \big(\beta(e, f, w, y_w) \wedge \beta(e, f, f_s(w), z_w)\\ &\qquad\qquad \wedge \alpha_G(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, y_w, w, z_w)\big)\Big)\end{aligned}$$

Del cual obtenemos

ii. $\exists w (\beta(a, b, \overline{0}, w) \wedge \alpha_H(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, w)$

y

iii. $\beta(a, b, \overline{n+1}, z_1)$

y

iv. $\forall w\Big(w \in \overline{n+1} \rightarrow$
$$\exists y_w \exists z_w \big(\beta(a, b, w, y_w) \wedge \beta(a, b, f_s(w), z_w) \wedge \alpha_G(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, y_w, w, z_w)\big)\Big)$$

Por el axioma 4 aplicado a este último paso, obtenemos

v. $w \in \overline{n+1} \rightarrow$
$$\exists y_w \exists z_w \big(\beta(a, b, w, y_w) \wedge \beta(a, b, f_s(w), z_w) \wedge \alpha_G(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, y_w, w, z_w)\big)$$

De acuerdo a la proposición 2.3.11, tenemos que

vi. $w \in \overline{n} \rightarrow w \in \overline{n+1}$

Por la transitividad de la implicación aplicada a estos dos últimos pasos,

vii. $w \in \overline{n} \rightarrow$
$$\exists y_w \exists z_w \big(\beta(a, b, w, y_w) \wedge \beta(a, b, f_s(w), z_w) \wedge \alpha_G(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, y_w, w, z_w)\big)$$

Por otro lado, por el axioma 4 con el término $\overline{n}$ en el paso (iv),

viii. $\overline{n} \in \overline{n+1} \rightarrow$
$$\exists y_w \exists z_w \big(\beta(a, b, \overline{n}, y_w) \wedge \beta(a, b, f_s(\overline{n}), z_w) \wedge \alpha_G(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, y_w, \overline{n}, z_w)\big)$$

Por la proposición 2.3.7, tenemos

ix. $\overline{n} \in \overline{n+1}$

Aplicando M.P. a (ix) y (viii),

x. $\exists y_w \exists z_w \Big(\beta(a, b, w, y_w) \wedge \beta(a, b, f_s(w), z_w) \wedge \alpha_G(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, y_w, w, z_w)\Big)$

Anaálogamente, obtenemos

xi. $\exists y_w \exists z_w \Big(\beta(e, f, w, y_w) \wedge \beta(e, f, f_s(w), z_w) \wedge \alpha_G(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, y_w, w, z_w)\Big)$

Ahora consideremos la siguiente deducción (aplicación interna de la regla C usando como constantes provisionales c, d, c',d'):

Los siguientes dos pasos como hipótesis

A. $\beta(a, b, \overline{n}, c) \wedge \beta(a, b, f_s(\overline{n}), d) \wedge \alpha_G(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, c, \overline{n}, d)$

B. $\beta(e, f, \overline{n}, c') \wedge \beta(e, f, f_s(\overline{n}), d') \wedge \alpha_G(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, c', \overline{n}, d')$

De A, usando la fórmula 4 del apéndice B-I, obtenemos

C. $\beta(a, b, \overline{n}, c)$

De los pasos (ii), (B) y generalización para w en el paso (vii), tenemos que

D. $\exists w\Big(\beta(a, b, \overline{0}, w) \wedge \alpha_H(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, w)\Big)$
$\wedge\ \beta(a, b, \overline{n}, c)$
$\wedge\ \forall w\Big(w \in \overline{n} \rightarrow$

$$\exists y_w \exists z_w \big(\beta(a,b,w,y_w) \wedge \beta(a,b,f_s(w),z_w)\big) \wedge \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},y_w,w,z_w)\Big)$$

Por la regla existencial,

E. $\exists u \exists v \Big[\exists w\big(\beta(u,v,\overline{0},w) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},w)\big) \wedge \beta(u,v,\overline{n},c) \wedge \forall w\Big(w \in \overline{n} \rightarrow \exists y_w \exists z_w \big(\beta(u,v,w,y_w) \wedge \beta(u,v,f_s(w),z_w)\big) \wedge \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},y_w,w,z_w)\Big)\Big]$

Esto es

F. $\varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},c)$

De (16) y (E) y de acuerdo a la Hipótesis de Inducción, tenemos que

G. $\overline{q_n} \approx c$

Del paso (A) podemos obtener

H. $\alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},c,\overline{n},d)$

De los pasos (F) y (G), tenemos que

I. $\alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{q_n},\overline{n},d)$

De (14) y (17) (d es el elemento q_{n+1} *de la sucesión generada por la función f),*

J. $d \approx \overline{q_{n+1}}$

Por (A) e (I),

K. $\beta(a,b,f_s(\overline{n}),\overline{q_{n+1}})$

De (iii) e (I) y dado que β *representa a la función* f_β*, se tiene*

L. $z_1 \approx \overline{q_{n+1}}$

De manera totalmente análoga se obtiene que

M. $z_2 \approx \overline{q_{n+1}}$

Así, tenemos que

N. $z_1 \approx \overline{q_{n+1}} \wedge \overline{q_{n+1}} \approx z_2$

De acuerdo a 29.3 del apéndice B-II, podemos afirmar que

O. $z_1 \approx z_2$

Así que al considerar como hipótesis a las fórmulas $\beta(a,b,\overline{n},c) \wedge \beta(a,b,f_s(\overline{n}),d) \wedge \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},c,\overline{n},d)$, $\beta(e,f,\overline{n},c') \wedge \beta(e,f,f_s(\overline{n}),d') \wedge \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},c',\overline{n},d')$, *cuyas constantes provisionales son c, d, c', d' hemos demostrado que* $z_1 \approx z_2$. *Entonces, por la regla C y usando la fórmula 4.2 del apéndice B-II, podemos afirmar que*

xii. $\exists y_w \exists z_w \Big(\beta(a,b,w,y_w) \wedge \beta(a,b,f_s(w),z_w) \wedge \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},y_w,w,z_w)\Big) \wedge \exists y_w \exists z_w \Big(\beta(e,f,w,y_w) \wedge \beta(e,f,f_s(w),z_w) \wedge \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},y_w,w,z_w)\Big) \rightarrow$

$z_1 \approx z_2$

Aplicando M.P. a los pasos (x), (xi) y (xii),

xiii. $z_1 \approx z_2$

Sean:

$$\begin{aligned}
-\ \psi_1(a,b) \quad \rightleftharpoons \quad & \exists w(\beta(a,b,\overline{0},w) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},w)) \\
& \wedge\ \beta(a,b,\overline{n+1},z_1) \\
& \wedge\ \forall w\Big(w \in \overline{n+1} \rightarrow \\
& \quad \exists y_w \exists z_w\ \big(\beta(a,b,w,y_w) \wedge \beta(a,b,f_s(w),z_w) \\
& \qquad \wedge\ \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},y_w,w,z_w))\Big)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
-\ \psi_1(e,f) \quad \rightleftharpoons \quad & \exists w(\beta(e,f,\overline{0},w) \wedge \alpha_H(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},w)) \\
& \wedge\ \beta(e,f,\overline{n+1},z_2) \\
& \wedge\ \forall w\Big(w \in \overline{n+1} \rightarrow \\
& \quad \exists y_w \exists z_w\big(\beta(e,f,w,y_w) \wedge \beta(e,f,f_s(w),z_w) \\
& \qquad \wedge\ \alpha_G(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},y_w,w,z_w))\Big)
\end{aligned}$$

En la deducción anterior obtuvimos

21. $E',\ \psi_1(a,b) \wedge \psi_2(e,f)\ \vdash\ z_1 \approx z_2$

Aplicando la regla C, tenemos que

22. $E',\ \exists u_1 \exists v_1 \exists u_2 \exists v_2 \Big[\psi_1(u_1,v_1) \wedge \psi_2(u_2,v_2)\Big]\ \vdash\ z_1 \approx z_2$

Como u_1, v_1 *no ocurren en* ψ_2 *y* u_2, v_2 *no ocurren en* ψ_1, *por 7.4 del apéndice B-II, el paso anterior es equivalente a tener*

23. $E',\ \exists u \exists v \psi_1(u,v) \wedge \exists u \exists v \psi_2(u,v)\ \vdash\ z_1 \approx z_2$

Como tenemos que

$$\begin{aligned}
-\ \exists u \exists v \psi_1(u,v) \quad &\rightleftharpoons \quad \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{n+1},z_1) \\
-\ \exists u \exists v \psi_2(u,v) \quad &\rightleftharpoons \quad \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{n+1},z_2),
\end{aligned}$$

El paso (23) es equivalente a

24. $E'\ \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{n+1},z_1) \wedge \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{n+1},z_2)\ \vdash\ z_1 \approx z_2$

Aplicando el metateorema de la deducción, se tiene

25. $E' \vdash \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n},\overline{n+1},z_1) \wedge \varphi_f(\overline{p_1},\ldots,\overline{p_n+1},\overline{n},z_2) \rightarrow$

$$z_1 \approx z_2$$

Como z_1 *y* z_2 *son variables, aplicando generalización dos veces, obtenemos*

26. $E' \vdash \forall z_1 \forall z_2 \Big(\varphi_f(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{n+1}, z_1) \wedge \varphi_f(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n+1}, \overline{n}, z_2) \rightarrow z_1 \approx z_2 \Big)$

Con lo que queda demostrada la segunda parte del inciso (b) y queda concluida la prueba de esta proposición.

Antes de enunciar el resultado similar al de la proposición anterior pero con las funciones que se obtienen por el método de sustitución, enunciaré un resultado que nos servirá para su demostración.

Proposición 2.3.13 *Sean a, b términos que son libres para x en la fórmula $\phi(x,x)$ en el lenguaje de una teoría T de primer orden con igualdad. Entonces*

$$T \vdash a \approx b \;\rightarrow\; (\phi(a,b) \rightarrow \phi(a,a)),$$

donde $\phi(x,x)$ es cualquier fórmula, y $\phi(a,b)$ es la fórmula que surge a partir de $\phi(x,x)$ al sustituir alguna o todas las ocurrencias libres de x por a y/o algunas (o todas) las ocurrencias libres de x por b.

Demostración 2.3.13.1 *De acuerdo al axioma 7 tenemos que, para x y y cualesquiera variables del lenguaje,*

1. $T \vdash x \approx y \;\rightarrow\; (\phi(x,x) \rightarrow \phi(x,y))$

   $\phi(x,x)$ es cualquier fórmula, y $\phi(x,y)$ se obtiene a partir de $\phi(x,x)$ por medio de reemplazar algunas, pero no necesariamente todas las ocurrencias libres de x por y, con la condición de que y sea libre para x en $\phi(x,x)$, de modo que $\phi(x,y)$ puede contener o no ocurrencias libres de x.

   Sea $\phi'(y,y) \rightleftharpoons \phi(x,y)$; con $\phi(x,y)$ como se enuncia en el axioma 7, de modo que, aplicando este mismo axioma a $\phi'(y,y)$, tenemos que:

2. $T \vdash x \approx y \;\rightarrow\; (\phi'(y,y) \rightarrow \phi'(y,x))$

   En términos de la fórmula ϕ,

3. $T \vdash x \approx y \;\rightarrow\; (\phi(x,y) \rightarrow \phi(x,x))$

   Aplicando generalización, tenemos que

4. $T \vdash \forall x \; [x \approx y \;\rightarrow\; (\phi(x,y) \rightarrow \phi(x,x))]$

   Por el axioma 4 con un término a libre para x en la fórmula anterior,

5. $T \vdash a \approx y \;\rightarrow\; (\phi(a,y) \rightarrow \phi(a,a))$

   Nuevamente aplicamos generalización a la variable "y" obtenemos

6. $T \vdash \forall y\ [a \approx y \ \rightarrow \ (\phi(a,y) \rightarrow \phi(a,a))]$

Por el axioma 4 con un término b libre para y en la fórmula anterior, se tiene

7. $T \vdash a \approx b \ \rightarrow \ (\phi(a,b) \rightarrow \phi(a,a))$

Con lo cual queda concluida la demostración de esta proposición.

Ya tenemos lo que necesitamos para demostrar la siguiente proposición.

Proposición 2.3.14 *Las funciones aritméticas que se obtienen por el método de sustitución a partir de funciones representables en $L_{E'}$ son representables en $L_{E'}$, esto es, si $G : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, y $H_i : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, son funciones representables, entonces la función $F : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$ dada por*

$$F(x_1, \ldots, x_m) = G(H_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, H_n(x_1, \ldots, x_m))$$

es representable.

Así que debemos demostrar que existe $\alpha \in L_E^{m+1}$ tal que:

(a) Si $F(p_1, \ldots, p_m) = q$, $\quad \mathrm{K} \vdash \alpha(\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_m, \overline{q})$

(b) $\mathrm{K} \vdash \exists w \alpha(\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_m, w) \land$
$\forall v_1 \forall v_2\ (\alpha(\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_m, v_1) \land \alpha(\overline{p}_1, \ldots, \overline{p}_m, v_2) \rightarrow v_1 \approx v_2)$

Demostración 2.3.14.1 *Por la representabilidad de las funciones h_i, sabemos que existen fórmulas β_i que representan en L_E a las funciones h_i y $\gamma \in L_{E'}^{n+1}$ que representan a la función g según las hipótesis:*

I]

1. *Si* $H_1(p_1, \ldots, p_m) = q_1$, *entonces* $E' \vdash \beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, \overline{q_1})$

2. *Si* $H_2\ (p_1, \ldots, p_m) = q_2$, *entonces* $E' \vdash \beta_2(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, \overline{q_2})$

.

.

.

n. *Si* $H_n\ (p_1, \ldots, p_m) = q_n$, *entonces* $E' \vdash \beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, \overline{q_n})$

II]

1. $E' \vdash \exists w_1 \beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, w_1) \quad \land$
$$\forall z_1 \forall w_1 \ \left(\beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, z_1) \land \beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, w_1) \rightarrow z_1 \approx w_1\right)$$

2. $E' \vdash \exists w_2 \beta_2(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, w_2) \quad \land$
$$\forall z_2 \forall w_2 \ \left(\beta_2(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, z_2) \land \beta_2(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, w_2) \rightarrow z_2 \approx w_2\right)$$

.

.

.

$n.$ $E' \vdash \exists w_n \beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, w_n) \quad \wedge$
$$\forall z_n \forall w_n \left(\beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, z_n) \wedge \beta_2(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, w_n) \rightarrow z_n \approx w_n\right)$$

III]

i) Si $G(q_1, \ldots, q_n) = r$, *se tiene que* $E' \vdash \gamma(\overline{q_1}, \ldots, \overline{q_n}, \overline{r})$

j) $E' \vdash \exists v \gamma(\overline{q_1}, \ldots, \overline{q_n}, v) \quad \wedge$
$$\forall u \forall v \left(\gamma(\overline{q_1}, \ldots, \overline{q_n}, u) \wedge \gamma(\overline{q_1}, \ldots, \overline{q_n}, v) \rightarrow u \approx v\right)$$

Sea

$$\alpha(v_1, \ldots, v_m, u) \rightleftharpoons \exists u_1, \exists u_2, \ldots, \exists u_n [\beta_1(v_1, \ldots, v_m, u_1) \wedge \ldots \wedge \beta_n(v_1, \ldots, v_m, u_n) \wedge \gamma(u_1, \ldots, u_n, u)]$$

la fórmula que proponemos, par representar a la función f en $L_{E'}$. *Demostremos que se cumple el inciso (a) enunciado previamente.*

Inciso(a)

Sea

1. $q = F(p_1, \ldots, p_m)$
   Entonces, por definición y por hipótesis, tenemos que

2. $F(p_1, \ldots, p_m) = G(H_1(p_1, \ldots, p_m), \ldots, H_n(p_1, \ldots, p_m))$
   Así que existen $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{N}$ *tales que*

3. *Si* $H_1(p_1, \ldots, p_m) = q_1$, *entonces* $E' \vdash \beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, \overline{q_1})$
   .
   .
   .
   Si $H_n(p_1, \ldots, p_m) = q_n$, *entonces* $E' \vdash \beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, \overline{q_n})$
   Esto último implica que

4. $E' \vdash \beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, \overline{q_1}) \wedge \cdots \wedge \beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, \overline{q_n})$
   Tenemos que

5. *Si* $q = F(p_1, \ldots, p_m) = G(q_1, \ldots, q_n)$, *entonces* $E' \vdash \gamma(\overline{q_1}, \ldots, \overline{q_n}, \overline{y})$
   De manera que de (3),(4) y (5),

6. $E' \vdash \beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, \overline{q_1}) \wedge \cdots \wedge \beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, \overline{q_n}) \wedge \gamma(\overline{q_1}, \ldots, \overline{q_n}, \overline{q})$
   Como $\overline{q_i}$ *es un término en* $L_{E'}$, *sean* u_i *(* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*) variables tales que los términos* $\overline{q_i}$ *son libres para sus correspondientes* u_i. *Así que por la regla existencial, tenemos lo siguiente*

7. $E' \vdash \exists u_1, \ldots, \exists u_n\ [\beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, u_1) \wedge \cdots \wedge \beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, u_n) \wedge \gamma(u_1, \ldots, u_n, \overline{q})]$

   Esto es

8. $E' \vdash \alpha(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, \overline{q})$

   Así que si $\quad q = F(p_1, \ldots, p_m)$,

   entonces deducimos que $\quad E' \vdash \alpha(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, \overline{q})$

   Con lo que queda concluida la demostración del inciso (a).

Inciso(b)

La demostración correspondiente a este inciso estará dividida en dos partes:

Inciso(b-i) : $E' \vdash \exists w \alpha(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, w)$
Inciso(b-ii) : $E' \vdash \forall v_1 \forall v_2\ (\alpha(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, v_1) \wedge \alpha(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, v_2) \rightarrow v_1 \approx v_2)$

Inciso(b-i)

Por el paso (7) del inciso (a) tenemos

1. $E' \vdash \exists u_1, \ldots, \exists u_n\ [\beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, u_1) \wedge \cdots \wedge \beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, u_n) \wedge \gamma(u_1, \ldots, u_n, \overline{q})]$

   Aplicando la regla existencial para el término $\overline{q}$

2. $E' \vdash \exists w \exists u_1, \ldots, \exists u_n\ [\beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, u_1) \wedge \cdots \wedge \beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, u_n) \wedge \gamma(u_1, \ldots, u_n, w)]$

   Esto es

3. $E' \vdash \exists w \alpha(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, w)$

   Con lo que queda concluida esta parte de la demostración.

Inciso(b-ii).

Sea $\overline{p} \rightleftharpoons \overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}$, *tenemos, de acuerdo a como hemos definido a la fórmula* $\alpha \in L_E^{m+1}$, *que*

1. $E', \alpha(\overline{p}, v_1), \alpha(\overline{p}, v_1) \vdash \exists u_1, \ldots, \exists u_n\ \beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, u_1) \wedge \cdots \wedge \beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, u_n) \wedge \gamma(u_1, \ldots, u_n, v_1)]$

   Consideremos la siguiente deducción (aplicación de la Regla C con las constantes provisionales $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$*):*

   Los siguientes dos pasos como hipótesis

   i. $\beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, a_1) \wedge \cdots \wedge \beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, a_n) \wedge \gamma(a_1, \ldots, a_n, v_1)$

   ii. $\beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, b_1) \wedge \cdots \wedge \beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, b_n) \wedge \gamma(b_1, \ldots, b_n, v_2)$
   De la hipótesis (i), de acuerdo a la fórmula 4 del B-I y por M.P., podemos afirmar que

iii. $\beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, a_1)$

.

.

.

$\beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, a_n)$

De la misma manera, de la hipótesis (ii) obtenemos que

iv. $\beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, b_1)$

.

.

.

$\beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, b_n)$

Recordemos que tenemos

$$\begin{aligned} q &= G(H_1(p_1, \ldots, p_m), \ldots, H_n(p_1, \ldots, p_m)) \\ &= G(q_1, \ldots, q_n). \end{aligned}$$

De modo que

$$q_1 = H_1(p_1, \ldots p_m); \ldots; q_n = H_n(p_1, \ldots, p_m)$$

y, como H_i *es representable en* $L_{E'}$ *para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *entonces tenemos*

v. $\beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, \overline{q_1})$

.

.

.

$\beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, \overline{q_n})$

De manera que de los pasos (iii) y (v), tenemos

vi. $\beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, a_1) \wedge \beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, \overline{q_1})$

.

.

.

$\beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, a_n) \wedge \beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, \overline{q_n})$

De acuerdo a [II] previo al inciso (a), podemos afirmar que

vii. $a_1 \approx \overline{q_1}$

.

.

.

$a_n \approx \overline{q_n}$

De igual manera de los pasos (iii) y (iv), tenemos

viii. $\beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, a_1) \wedge \beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, b_1)$

.

.

.

$\beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, a_n) \wedge \beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, b_n)$

De acuerdo a [II] previo al inciso (a), podemos afirmar que

ix. $a_1 \approx b_1$

.

.

.

$a_n \approx b_n$

Lo cual implica

x. $a_1 \approx b_1 \wedge \ldots \wedge a_n \approx b_n$

De los pasos (i) y (ii), de acuerdo a la fórmula 4 del apéndice B-I y por M.P., tenemos

xi. $\gamma(a_1, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(b_1, \ldots, b_n, v_2)$

De acuerdo a estos dos últimos pasos, afirmamos que

xii. $a_1 \approx b_1 \wedge \ldots \wedge a_n \approx b_n \wedge$
$\gamma(a_1, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(b_1, \ldots, b_n, v_2)$

Por otro lado, sea

$$\phi(x,x) \rightleftharpoons \gamma(x, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(x, b_2, \ldots, b_n, v_2)$$

Entonces, de acuerdo a la proposición anterior, observamos que

$$\phi(a_1, b_1) \rightleftharpoons \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(b_1, b_2, \ldots, b_n, v_2)$$

A partir de esto, usando la proposición 2.3.12, afirmamos que

xiii. $a_1 \approx b_1 \rightarrow$
$\big[\gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(b_1, b_2, \ldots, b_n, v_2)$
$\rightarrow \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, b_2, \ldots, b_n, v_2)\big]$

De manera similar, tenemos que

xiv. $a_2 \approx b_2 \rightarrow$
$\big[\gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, b_2, \ldots, b_n, v_2)$
$\rightarrow \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, b_n, v_2)\big]$

.

.

.

$a_n \approx b_n \rightarrow$
$\big[\gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b_n, v_2)$
$\rightarrow \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_2)\big]$

Agregando hipótesis al paso (xiii), o bien de acuerdo a la fórmula 2 del apéndice B-I en el paso (xiii), tenemos

xv. $a_1 \approx b_1 \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(b_1, b_2, \ldots, b_n, v_2) \rightarrow$
$\Big[\gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(b_1, b_2, \ldots, b_n, v_2) \rightarrow$
$\gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, b_2, \ldots, b_n, v_2)\Big]$

De acuerdo al axioma 2 aplicado al paso anterior y por M.P., tenemos

xvi. $(a_1 \approx b_1 \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(b_1, b_2, \ldots, b_n, v_2) \rightarrow$
$\gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(b_1, b_2, \ldots, b_n, v_2))$
$\rightarrow (a_1 \approx b_1 \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(b_1, b_2, \ldots, b_n, v_2)$
$\rightarrow \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, b_2, \ldots, b_n, v_2))$

De la fórmula 4 del apéndice, el paso anterior y M.P.,

xvii. $a_1 \approx b_1 \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(b_1, b_2, \ldots, b_n, v_2)$
$\rightarrow \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, b_2, \ldots, b_n, v_2)$

Ahora, usando la primera expresión del paso (xiv) y agregando hipótesis de acuerdo a la fórmula 2 del apéndice B-I,

xviii. $a_2 \approx b_2 \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, b_2, \ldots, b_n, v_2) \rightarrow \Big[\gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, b_2, \ldots, b_n, v_2) \rightarrow \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, b_n, v_2)\Big]$

Por el axioma 2, M.P. y la fórmula 4 del apéndice B-I, podemos afirmar que

xix. $a_2 \approx b_2 \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, b_2, \ldots, b_n, v_2) \rightarrow \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, b_n, v_2$

De acuerdo a la fórmula 12 del apéndice B-I aplicándola a lo que tenemos en el paso (xvii), podemos afirmar que

xx. $a_1 \approx b_1 \wedge a_2 \approx b_2 \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(b_1, b_2, \ldots, b_n, v_2) \rightarrow a_2 \approx b_2 \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, b_2, \ldots, b_n, v_2)$

Por la transitividad de la implicación, de los pasos (xx) y (xix), obtenemos

xxi. $a_1 \approx b_1 \wedge a_2 \approx b_2 \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(b_1, b_2, \ldots, b_n, v_2) \rightarrow \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, b_n, v_2)$

Siguiendo con este razonamiento, podemos afirmar que

xxii. $a_1 \approx b_1 \wedge a_2 \approx b_2 \wedge \cdots \wedge a_n \approx b_n \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(b_1, b_2, \ldots, b_n, v_2) \rightarrow \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_2)$

Aplicando M.P. a los pasos (xii) y (xxii), tenemos que

xxiii. $\gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_2)$

Por otro lado, de acuerdo a la proposición anterior, tenemos

xxiv. $a_1 \approx \overline{q_1} \rightarrow \Big[\gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_2) \rightarrow \gamma(\overline{q_1}, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(\overline{q_1}, a_2, \ldots, a_n, v_2)\Big]$

Aplicando el axioma 2 al paso anterior y por M.P.,

xxv. $(a_1 \approx \overline{q_1} \rightarrow \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_2)) \rightarrow (a_1 \approx \overline{q_1} \rightarrow \gamma(\overline{q_1}, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(\overline{q_1}, a_2, \ldots, a_n, v_2))$

Del paso (xxiii), podemos afirmar que

xxvi. $a_1 \approx \overline{q_1} \rightarrow \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n, v_2)$

Así, que aplicando M.P. a (xxvi) y (xxv),

xxvii. $a_1 \approx \overline{q_1} \rightarrow \gamma(\overline{q_1}, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(\overline{q_1}, a_2, \ldots, a_n, v_2)$

Agregando hipótesis en el paso anterior y de acuerdo a la fórmula 2 del apéndice B-I, tenemos que

xxviii. $a_1 \approx \overline{q_1} \wedge a_2 \approx \overline{q_2} \rightarrow \gamma(\overline{q_1}, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(\overline{q_1}, a_2, \ldots, a_n, v_2)$

De manera similar a como hemos procedido, tenemos, por la proposición anterior, que

xxix. $a_2 \approx \overline{q_2} \rightarrow [\gamma(\overline{q_1}, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(\overline{q_1}, a_2, \ldots, a_n, v_2) \rightarrow \gamma(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \dot{s}, a_n, v_1) \wedge \gamma(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \ldots, a_n, v_2)]$

Agregando hipótesis a lo que tenemos en el paso anterior y de acuerdo a la fórmula 2 del apéndice,

xxx. $a_1 \approx \overline{q_1} \wedge a_2 \approx \overline{q_2} \;\rightarrow$
$$\Big[\gamma(\overline{q_1}, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(\overline{q_1}, a_2, \ldots, a_n, v_2)) \rightarrow$$
$$\gamma(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \ldots, a_n, v_2)\Big]$$
Por el axioma 2 y M.P., tenemos

xxxi. $(a_1 \approx \overline{q_1} \wedge a_2 \approx \overline{q_2} \rightarrow$
$$\gamma(\overline{q_1}, a_2, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(\overline{q_1}, a_2, \ldots, a_n, v_2)) \Rightarrow$$
$(a_1 \approx \overline{q_1} \wedge a_2 \approx \overline{q_2} \rightarrow$
$$\gamma(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \ldots, a_n, v_2))$$
Aplicando M.P. a los pasos (xxviii) y (xxxi),

xxxii. $a_1 \approx \overline{q_1} \wedge a_2 \approx \overline{q_2} \rightarrow \gamma(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \ldots, a_n, v_1) \wedge \gamma(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \ldots, a_n, v_2)$
Procediendo de igual manera, obtenemos

xxxiii. $a_1 \approx \overline{q_1} \wedge a_2 \approx \overline{q_2} \wedge \cdots \wedge a_n \approx \overline{q_n} \quad \rightarrow$
$$\gamma(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \ldots, \overline{q_n}, v_1) \wedge \gamma(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \ldots, \overline{q_n}, v_2)$$
Aplicando M.P. a los pasos (x) y (xxxiii),

xxxiv. $\gamma(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \ldots, \overline{q_n}, v_1) \wedge \gamma(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \ldots, \overline{q_n}, v_2)$
De acuerdo a la representabilidad de la función g y dado que estamos suponiendo que
$$\begin{aligned} q &= F(p_1, \ldots, p_m) \\ &= G(H_1(p_1, \ldots, p_m) \ldots, H_n(p_1, \ldots, p_m)) \\ &= G(q_1, \ldots, q_n), \end{aligned}$$
podemos afirmar que

xxxv. $\gamma(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \ldots, \overline{q_n}, v_1) \wedge \gamma(\overline{q_1}, \overline{q_2}, \ldots, \overline{q_n}, v_2) \quad \rightarrow v_1 \approx v_2$
Así, que por M.P. en (xxxiv) y (xxxv), tenemos que

xxxvi. $v_1 \approx v_2$

De la deducción anterior, tenemos que

2. $E', \beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, a_1) \wedge \cdots \wedge \beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, a_n) \wedge \gamma(a_1, \ldots, a_n, v_1)$
$$\wedge \beta_1(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, b_1) \wedge \cdots \wedge \beta_n(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, b_n) \wedge \gamma(b_1, \ldots, b_n, v_2) \vdash \; v_1 \approx v_2$$

Por la regla C aplicada 2n veces, podemos obtener que

3. $E', \alpha(\overline{p}, v_1) \wedge \alpha(\overline{p}, v_2) \;\vdash\; v_1 \approx v_2$

Por el metateorema de la deducción, tenemos que

4. $E' \vdash \alpha(\overline{p}, v_1) \wedge \alpha(\overline{p}, v_2) \;\rightarrow\; v_1 \approx v_2$

Aplicando generalización dos veces, tenemos

5. $E' \vdash \forall v_1 \forall v_2 (\alpha(\overline{p}, v_1) \wedge \alpha(\overline{p}, v_2) \;\rightarrow\; v_1 \approx v_2)$

Con lo que queda concluida esta parte de la demostración.

De (a), (b-i) y (b-ii) podemos concluir que toda función que se obtiene por el método de sustitución a partir de funciones representables es representable.

Como ya tenemos que las funciones iniciales son representables y que las funciones que se obtienen por medio de los métodos de recursión y de sustitución apartir de funciones representables son representables, y de acuerdo a la definición de las F.R.P., se tiene demostrada la siguiente proposición.

Proposición 2.3.15 *Las* funciones recursivas primitivas *son representables en* E'.

Demostración 2.3.15.1 *Definición de F.R.P. y proposiciones 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4, 2.3.11, 2.3.13.*

A continuación veremos resultados similares a los que obtuvimos con las F.R.P. para las relaciones. Daremos la definición de *relaciones recursivas primitivas* (R.R.P.) y las definiciones y resultados necesarios para garantizar que este tipo de relaciones sean *expresables* en E'.

Definición 2.3.4 (Función Representante de una Relación)

Sea $R \subseteq \mathbb{N}^n$. *Una* función representante *de* R *es una función* $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ *tal que*

$$\forall p_1, \ldots, \forall p_n (f(p_1, \ldots, p_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R(p_1, \ldots, p_n)).$$

Definición 2.3.5 (Relaciones Recursivas Primitivas)

Sea $R \subseteq \mathbb{N}^n$. R *es una* relación recursiva primitiva *(R.R.P.) si y sólo si* R *tiene una función representante recursiva primitiva.*

Proposición 2.3.16 *Las* relaciones recursivas primitivas *son expresables en* E'.

Demostración 2.3.16.1 *Sea* R *una* relación recursiva primitiva, *entonces tiene una función representante* f_R *que es recursiva primitiva (F.R.R.). Por ser* f_R *una F.R.R. y de acuerdo con la proposición 2.3.14, existe una fórmula* α_{f_R} *que representa a* f_R. *Sea* φ_R, *definida por:*

$$\varphi_R(x_1, \ldots, x_k) \quad \rightleftharpoons \quad \alpha_{f_R}(x_1, \ldots, x_k, c_0)$$

donde c_0 *es la constante que agregamos a* L_{ZF}. *De manera que:*

- *Si* $(p_1, \ldots, p_k) \in R$, *entonces* $f_R(p_1, \ldots, p_k) = 0$, *por lo que*

$$E' \vdash \alpha_{f_R}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_k}, \overline{0}).$$

• *Si* $(p_1, \ldots, p_k) \notin R$, *entonces* $f_R(p_1, \ldots, p_k) \neq 0$, *y como* $f_R : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$, *tal que* $f_R(p_1, \ldots, p_k) = n_0$ *y* $E' \vdash \alpha_{f_R}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_k}, \overline{n_0})$ *De acuerdo a la definición 2.3.2,*

$$E' \vdash \alpha_{f_R}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_k}, \overline{0}) \wedge \alpha_{f_R}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_k}, \overline{m}) \to \overline{m} \approx \overline{0}$$

Por contrapositiva y dado que para todo número natural m, *si* $m \neq 0$, *entonces* $E' \vdash \neg\, \overline{m} \approx \overline{0}$[20], *aplicando lo anterior con* n_0 *(*$n_0 \neq 0$*) y por* modus ponens *tenemos que*

$$-\ E' \vdash \alpha_{f_R}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_k}, \overline{n_0}) \to \neg\alpha_{f_R}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_k}, \overline{0})$$

Y, por lo dicho anteriormente, se tiene que

$$E' \vdash \neg\alpha_{f_R}(\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_k}, \overline{0})$$

De manera que con la fórmula φ_R *se satisfacen las condiciones de la definición 2.3.1, para la representabilidad de la* relación recursiva primitiva R.

[20]Véase la proposición 2.2 del apéndice A.

Capítulo 3

Lista de Funciones y de Relaciones Recursivas Primitivas

Por definición tenemos que las funciones iniciales son recursivas. La siguiente es una lista de funciones que obtuvimos por el método de recursión[1] a partir de las iniciales y que por tanto son funciones recursivas[2], en el capítulo 2 también demostramos que las funciones recursivas son representables en $L_{E'}$, por tanto la siguiente es una lista de funciones representables en $L_{E'}$.

Función	Definición de la Función	Nombre de la Función
$^+ : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$	$m + 0 = m$ $m + (n)^+ = (m + n)^+$ Para cualesquiera m, $n \in \mathbb{N}$.	Función Suma de números naturales.
$\cdot : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$	$m \cdot 0 = 0$ $m \cdot n^+ = m \cdot n + m$ Para cualesquiera m, $n \in \mathbb{N}$.	Función Producto de números naturales.
$^\smile : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$	$m^0 = 1$ $m^{n^+} = m^n \cdot m$ Para cualesquiera m, $n \in \mathbb{N}$.	Función Exponenciación.

[1]Capítulo 2, definición 1.1.2.

[2]En el curso de Lógica III impartido por los profesores Rafael Rojas B. y David Meza A. comprobamos que efectivamente las funciones que en esta sección se enlistan se pueden obtener por el método de recursión.

Función	Definición de la Función	Nombre de la Función
$! : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$	$0! = 1$ $n^+! = (n+1) \cdot n!$ Para cualquier $n \in \mathbf{N}$.	La Función Factorial de un número.
$\delta : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$	$\delta(\mathrm{n}) = n-1$ si $n > 1$ $= 0$ si $n = 0$	Función Predecesor
$\dot{-} : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$	$m \dot{-} n = m - n$ si $m \geq n$ $= 0$ si $m < n$	Diferencia Positiva
$\vert - \vert : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$	$\vert m - n \vert = m - n$ si $m \geq n$ $= n - m$ si $n < m$	Valor Absoluto de la Diferencia
$min : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$	$min(m,n) = m$ si $m \leq n$ $= n$ si $m > n$	El Mínimo de dos números.
$max : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$	$max(m,n) = m$ si $m > n$ $= n$ si $n \geq m$	El Máximo de dos números.
$sg : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$	$sg(n) = 1$ si $n > 0$ $= 0$ si $n = 0$	El Signo de un número.
$\overline{sg} : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$	$\overline{sg}(n) = 0$ si $n > 0$ $= 1$ si $n = 0$	El Signo Contrario de un número.

Las siguientes también son llamadas sumas o productos, según sea el caso, de funciones primitivas, es decir que en las siguientes definiciones supondremos que la función f para cada caso es una función recursiva primitiva.

- $\sum_{q<r} f(p_1, \ldots p_n, q) = \begin{cases} 0 & \text{si } r = 0\ ; \\ f(p_1, \ldots, p_n, 0) + \cdots + f(p_1, \ldots, p_n, r-1) & \text{si } r > 0 \end{cases}$
- $\sum_{q \leq r} f(p_1, \ldots p_n, q) = \sum_{q<r^+} f(p_1, \ldots p_n, q)$
- $\prod_{q<r} f(p_1, \ldots p_n, q) = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 0\ ; \\ f(p_1, \ldots, p_n, 0) \cdot \ \ldots \ \cdot f(p_1, \ldots, p_n, r-1) & \text{si } r > 0 \end{cases}$
- $\prod_{q \leq r} f(p_1, \ldots p_n, q) = \prod_{q<r^+} f(p_1, \ldots p_n, q)$
- $\sum_{s<q<r} f(p_1, \ldots p_n, q) = \sum_{q<(r \dot{-} s) \dot{-} 1} f(p_1, \ldots p_n, q + s + 1)$

A partir de las definiciones anteriores es posible definir sumas y productos de funciones recursivas primitivas para $<<$, $<\leq$, $\leq<$, $\leq\leq$.

En algunas de las siguientes funciones se hace referencia a algunas relaciones, como por ejemplo a la relación $PRIM \subseteq \mathbf{N}$, o a la relación $| \subseteq \mathbf{N}^2$, dichas relaciones son definidas en la siguiente sección. (*Las relaciones las denotaremos con letras mayúsculas.*)

Función	Definición de la Función	Nombre de la Función
$res : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$	$res(m,0) = 0$ $res(m, n^+) =$ $(res(m,n))^+ \cdot (sg(\|m - (res(m, n))^+ \|))$	El residuo de dividir n entre m.
$d : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$	$d(x) = \sum_{y \leq x} \overline{sg}(res(x,y))$	Número de Divisores de un número.
$coc : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$	$coc(m,0) = 0$ $coc(m,n^+) =$ $coc(m,n) + \overline{sg}(\|m - (res(m,n))^+ \|)$	El Cociente de dividir n entre m.
$C_R : \mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$	$C_R(p_1, \ldots, p_n) = 0$ si $(p_1, \ldots, p_n) \in$ R $C_R(p_1, \ldots, p_n) = 1$ si $(p_1, \ldots, p_n) \notin$ R donde R $\subseteq \mathbf{N}^n$	Función Característica.
$\mu\, y : \mathbf{N}^{n+2} \to \mathbf{N}$	$\mu y_{y<z} R(\vec{x},y) =$ z si $\nexists\ y < z$ tal que $(\vec{x},y) \in R$ o en otro caso lo siguiente $min\ \{y \in \mathbf{N}\ \|y < z$ y $(\vec{x},y) \in R\}$ donde R $\subseteq \mathbf{N}^{n+1}$, $\vec{x} \in \mathbf{N}^n$, $z \in \mathbf{N}$.	El Mínimo Natural y tal que $(\vec{x}, y) \in R$.
$\mu\, y : \mathbf{N}^{n+2} \to \mathbf{N}$	$\mu y_{y<z}$R$(\vec{x},y) = \sum_{y<z}(\prod_{w<y} C_R(\vec{x}, w))$	El Mínimo Natural y tal que $(\vec{x},y) \in$ R.
$P : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$	$P(0) = 2$ $P(n^+) =$ $\mu y_{y<P(n)!+1}(PRIM(y)\ \&\ y > P(n))$ *Notación* : $P_n \rightleftharpoons P(n)$	El n-ésimo Primo en orden ascendente.

Función	Definición de la Función	Nombre de la Función
$()_{\smile} : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$	$(n)_{\underset{\smile}{i}} = \mu y_{y<n}(\sim (P_i^{y+1} \mid n))$	El Exponente del i-ésimo Primo en la descomposición de n.
$ld : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$	$ld(n) = \sum_{y<n}(sg((n)_{\underset{\smile}{y}}))$	Longitud (calcula el número de exponentes no cero de la descomposición de n si $n \neq 0$, y da cero si $n = 0$).
$lh : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$	$lh(n) = \mu y_{y<n} [\forall z_{z<n}(z \geq y \Rightarrow (\sim(P_z \mid n)))]$	Una variación de la función anterior.
$\star : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$	$n \star m = n \cdot \prod_{j<ld(m)} (P_{ld(n)+j}^{(m)_{\underset{\smile}{j}}})$	Función Concatenación.
$pp : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$	$pp(n) = 2^3 \star n \star 2^5$	Función Poner Paréntesis.
$ppc : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$	$ppc(m,n) = pp(m \star 2^7 \star n)$	Función Poner Paréntesis con Coma.
$neg : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$	$neg(n) = pp(2^{g_1(neg)} \star n)$	Función que da el número de Gödel de la negación de la expresión con número de secuencia n.
$imp : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$	$imp(n,m) = pp(n \star 2^{g_1(\to)} \star m)$ $imp(n,m) = pp(n \star 2^{11} \star m)$	Función que da el número de Gödel de la implicación de las expresiones con número de secuencia n y m.
$cu : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$	$cu(n,m) = pp(2^{g_1(\forall)} \cdot 3^{g_1(v_n)} \star m)$	Función que da el número de Gödel de la cuantificación universal respecto a la variable v_n de la expresión con número de secuencia m.
$lol : \mathbf{N}^3 \to \mathbf{N}$	$lol(n,m,0) = \mu y_{y<ld(m)}[\mathrm{VOL}(n,m,y)]$ $lol(n,m,k^+) = \mu y_{y<ld(m)} [\mathrm{VOL}(n,m,y) \wedge y > lol(n,m,k)]$	Función que da la posición que ocupa en su ocurrencia libre número k la variable v_n en la fórmula con número de secuencia m.

Función	Definición de la Función	Nombre de la Función
$nol : \mathbf{N}^2 \rightarrow \mathbf{N}$	$nol(n,m) =$ $\mu y_{y<ld(m)}\ [\ lol(n,m,y) = ld\ (m)\ ]$	Función que da el número de veces en que la variable v_n ocurre en la fórmula con número de secuencia m.
$nml : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$	$nml(0) = 2^{g_1(c_0)}$ $nml(n^+) = 2^{g_1(f_\bullet)} \star pp(\ nml(n)\ )$	Función que da el número de secuencia de un numeral.
$remp : \mathbf{N}^3 \rightarrow \mathbf{N}$	$remp(n,m,p) =$ $\prod_{i<p} P_i^{(n)_{\breve{i}}} \star m \prod_{i<ld(n)\dot{-}p} P_i^{(n)_{p+\breve{i}+1}}$	Función que da el número de secuencia de la expresión que resulta de la expresión con número de secuencia n al quitar el símbolo del lugar p y poner en su lugar a la expresión con número de secuencia m.
$sus : \mathbf{N}^4 \rightarrow \mathbf{N}$	$sus(n,m,k,0) = n$ $sus(n,m,k,r^+) =$ $remp(sus(n,m,k,r),k,lol(m,n,r))$	Función que da el número de secuencia de la fórmula que resulta de sustituir las primeras l-ocurrencias libres de la variable v_m por la expresión con número de secuencia k en la fórmula con número de secuencia n.
$sub : \mathbf{N}^4 \rightarrow \mathbf{N}$	$sub(n,m,k,0) = n$ $sub(n,m,k,r^+) =$ $remp(sub(n,m,k,r),k,lol(m,n,r^+)\dot{-}1)$	Función que da el número de secuencia de la fórmula que resulta de sustituir las primeras r-ocurrencias libres de la variable v_m por la expresión con número de secuencia k en la fórmula con número de secuencia n.

Función	Definición de la Función	Nombre de la Función
$Sb : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$	$Sb(n,m,k) = sub(n,m,k,nol(m,n))$	Función que da el número de secuencia de la fórmula que resulta de sustituir todas las ocurrencias libres de la variable v_m por la expresión con número de suecuencia k en la fórmula con número de secuencia n.
$sust : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$	$sust(m,k) = Sb(m,k,nml(m))$	Función que da el número de secuencia de la fórmula que se obtiene al sustituir todas las ocurrencias libres de la variable v_k por el número de secuencia de esa misma fórmula.

3.1 Lista de Relaciones Recursivas Primitivas

Relación	Definición de la Relación	Comportamiento de la Relación
$\mid \subseteq \mathbb{N}^2$	$(n,m) \in \mid \;\rightleftharpoons\; res(n,m) = 0$	n Divide a m.
$PRIM \subseteq \mathbb{N}$	$PRIM(n) \;\rightleftharpoons\; \lvert d(n) - 2 \rvert = 0$	n es un Número Primo.
$< \subseteq \mathbb{N}^2$	$(n,m) \in < \;\rightleftharpoons\; \overline{sg}(\dot{-}(n,m)) = 0$	n es Menor que m.
$VAR \subseteq \mathbb{N}$	$VAR(n) \;\rightleftharpoons\; \exists y_{y<n}\,(\, n = 2^{g_1(v_y)}\,)$	n es el Número de Secuencia de una. Variable
$TERM \subseteq \mathbb{N}$	$TERM(n) \;\rightleftharpoons\; VAR(n) \vee (n = 2^{g_1(c_0)}) \vee \left[\exists y_{y<n}(TERM(y) \wedge (n = 2^{g_1(f_*)} \star pp(y)))\right]$	n es un Término.
$ATOM \subseteq \mathbb{N}$	$ATOM(n) \;\rightleftharpoons\; \exists y_{y<n} \exists z_{z<n} \left[TERM(y) \wedge TERM(z) \wedge \left(n = pp(y \star 2^{g_1(\approx)} \star z\,) \vee n = pp(y \star 2^{g_1(\in)} \star z)\right)\right]$	n es el Número de Secuencia de una Fórmula Atómica de L_E. .

Función	Definición de la Función	Nombre de la Función
$FORM \subseteq \mathbb{N}$	$FORM(n) \rightleftharpoons ATOM(n) \vee \left[\exists y_{y<n}(FORM(y) \wedge (n = neg(y)))\right] \vee \left[\exists y_{y<n}\exists z_{z<n}(FORM(y) \wedge FORM(z) \wedge (n = imp(y,z)))\right] \vee \left[\exists y_{y<n}\exists z_{z<n}(FORM(y) \wedge n = cu(z,y))\right]$	n es el Número de Secuencia de una E'-Fórmula.
$MP \subseteq \mathbb{N}$	$MP(x,y,z) \rightleftharpoons FORM(x) \wedge FORM(y) \wedge FORM(z) \wedge y = imp(x,z)$	z es el Número de Gödel de una Fórmula que se obtiene por Modus Ponens de las fórmulas cuyos números de Gödel son x , y.
$GEN \subseteq \mathbb{N}^2$	$GEN(n,m) \rightleftharpoons FORM(n) \wedge FORM(m) \wedge \exists z_{z<m}\Big(m = cu(z,n)\Big)$	m es el Número de Gödel de una Fórmula que se obtuvo por la Regla de Generalización aplicada a la fórmula con número de Gödel n.
$VO \subseteq \mathbb{N}^3$	$VO(n,m,p) \rightleftharpoons FORM(m) \wedge \Big((m)_{p} = g_1(v_n)\Big)$	La Variable v_n Ocurre en la E-Fórmula con número de secuencia m en el Lugar p.
$VOF \subseteq \mathbb{N}^2$	$VOF(n,m) \rightleftharpoons \exists y_{y<ld(m)}(VO(n,m,y))$	La Variable v_n Ocurre en la Fórmula con número de secuencia m.
$VOA1 \subseteq \mathbb{N}^3$	$VOA1(n,m,p) \rightleftharpoons VO(n,m,p) \wedge \Big((m)_{p-1} = g_1(\forall)\Big)$	La Variable v_n Ocurre en la E-Fórmula con número de secuencia m en el lugar p y es la Variable de un Cuantificador Universal $\forall v_n$.
$VOA2 \subseteq \mathbb{N}^3$	$VOA2(n,m,p) \rightleftharpoons VOA1(n,m,p) \wedge \left[\exists y_{y<m}(m = cu(n,y)) \vee \exists x_{x<m}\exists y_{y<m}\exists z_{z<m}((m = x \star cu \star z) \wedge VOF(n,y))\right]$	La Variable v_n Ocurre en la E-Fórmula con número de secuencia m en el lugar p y está al alcance de un Cuantificador Universal $\forall v_n$.
$VOA \subseteq \mathbb{N}^3$	$VOA(n,m,p) \rightleftharpoons VOA1(n,m,p) \vee VOA2(n,m,p)$	La Variable v_n Ocurre Acotada en la E-Fórmula con número de secuencia m en el lugar p.

Relación	Definición de la Relación	Comportamiento de la Relación
$VOAF \subseteq \mathbb{N}^2$	$VOAF(n,m) \rightleftharpoons$ $\exists y_{y<ld(m)}\Big(VOA(n,m,y)\Big)$	La Variable v_n Ocurre Acotada en la E'-Fórmula con número de secuencia m.
$VOL \subseteq \mathbb{N}^3$	$VOL(n,m,p) \rightleftharpoons$ $VO(n,m,p) \wedge \sim VOA(n,m,p)$	La Variable v_n Ocurre Libre en la E'-Fórmula con número de secuencia m en el Lugar p.
$VOLF \subseteq \mathbb{N}^2$	$VOLF(n,m) \rightleftharpoons$ $VOF(n,m) \wedge \sim VOAF(n,m)$	La Variable v_n Ocurre Libre en la E'-Fórmula con número de secuencia m, en todas sus ocurrencias.
$VOT \subseteq \mathbb{N}^2$	$VOT(n,m) \rightleftharpoons$ $TERM(m)$ $\wedge \exists y_{y<ld(m)}\Big((m)_{\underset{\smile}{y}} = g_1(v_n)\Big)$	La Variable v_n Ocurre en el término con número de secuencia m.
$SFOR \subseteq \mathbb{N}^2$	$SFOR(n,m) \rightleftharpoons$ $FORM(n) \wedge FORM(m)$ $\wedge \big[n = m \vee$ $(n \neq m \wedge$ $\exists x_{x<ld(m)} \exists y_{y<ld(m)}(m = x \star n \star y))\big]$	n Es el Número de secuencia de una Subfórmula de la Fórmula con número de secuencia m.
$TLVF \subseteq \mathbb{N}^3$	$TLVF(n,m,p) \rightleftharpoons$ $TERM(n) \wedge FORM(p)$ $\wedge \sim \exists x_{x<p}\big[SFOR(x,p) \wedge VOLF(m,x)$ $\wedge \exists y \exists z(x = cu(y,z) \wedge VOT(y,n)$ $\wedge \sim \exists w_{w<p} \exists k_{k<p}\ (SFOR(w,p)$ $\wedge w = cu(m,k) \wedge SFOR(x,k)))\big]$	El Término con número de secuencia n es para la Variable v_m en la Fórmula con número de secuencia p.

3.2 Axiomas Lógicos

Axioma Lógico #	Definición de la Relación	Definición del Axioma
$AL1 \subseteq \mathbf{N}$	$AL1(x) \rightleftharpoons$ $\exists y_{y<x} \exists z_{z<x} [FORM(y) \wedge FORM(z) \wedge$ $x = imp(y, imp(z,y))]$	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$
$AL2 \subseteq \mathbf{N}$	$Al2(x) \rightleftharpoons$ $\exists y_{y<x} \exists z_{z<x} \exists w_{w<x}$ $[FORM(y) \wedge FORM(z) \wedge FORM(w) \wedge$ $x{=}imp(imp(y,imp(z,w)), imp(imp(y,z),imp(y,w)))]$	$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow$ $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$
$AL3 \subseteq \mathbf{N}$	$AL3(x) \rightleftharpoons$ $\exists y_{y<x} \exists z_{z<x} [FORM(y) \wedge FORM(z) \wedge$ $x = imp(imp(neg(z),neg(y)),$ $imp(imp(neg(z,y),z))]$	$(\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow$ $((\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$
$AL4 \subseteq \mathbf{N}^2$	$AL4(x,n) \rightleftharpoons$ $\exists y_{y<x} \exists z_{z<x} [FORM(y) \wedge TERM(z)$ $\wedge TLVF(z,n,y)$ $\wedge x = imp(cu(n,y) , sb(y,n,z))]$	$\forall x_n \alpha(x_n) \rightarrow \alpha(t)$ Para t un término que es libre para x_n en $\alpha(x_n)$.
$AL5 \subseteq \mathbf{N}^2$	$AL5(x,n) \rightleftharpoons$ $\exists y_{y<x} \exists z_{z<x} [FORM(y) \wedge FORM(z)$ $\wedge \neg VOLF(n,y)$ $\wedge x = imp(cu(n,imp(y,z)),imp(y,cu(n,z)))]$	Si α no contiene ocurrencias libres de x_n, se tiene que $\forall x_n(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow$ $(\alpha \rightarrow \forall x_n \beta)$
$AL6 \subseteq \mathbf{N}$	$AL6 \rightleftharpoons$ $x = cu(0 , 2^{g_1(()} . 3^{g_1(v_0)} . 5^{g_1(\approx)} . 7^{g_1(v_0)} . 11^{g_1())})$	$\forall x_0(x_0 \approx x_0)$
$AL7 \subseteq \mathbf{N}$	$AL7 \rightleftharpoons$ $\exists y_{y<x} [FORM(y) \wedge$ $x = imp(2^{g_1(v_1)} . 3^{g_1(\approx)} . 5^{g_1(v_2)} ,$ $imp(y, sb(y, 1 , {}^*g_2(v_2))))]$	$x \approx y \rightarrow (\alpha(x,x) \rightarrow \alpha(x,y))$

3.3 Axiomas Propios

(a) Extensionalidad:

$$\forall v_1 \forall v_2 \big[\, \forall v_3 (\, (\, v_3 \in v_1 \rightarrow v_3 \in v_2 \,) \wedge (\, v_3 \in v_2 \rightarrow v_3 \in v_1 \,)\,) \rightarrow v_1 \approx v_2 \,\big]$$

$$\begin{aligned}\text{APEE'(n)} \leftrightharpoons \exists m_1, \ldots, \exists m_{11}\ \big[& m_1 = 2^{g_1(v_3)} \,.\, 3^{g_1(\in)} \,.\, 5^{g_1(v_1)} \\ & \wedge\, m_2 = 2^{g_1(v_3)} \,.\, 3^{g_1(\in)} \,.\, 5^{g_1(v_2)} \\ & \wedge\, m_3 = 2^{g_1(v_1)} \,.\, 3^{g_1(\approx)} \,.\, 5^{g_1(v_2)} \\ & \wedge\, m_4 = imp(m_1, m_2) \\ & \wedge\, m_5 = imp(m_2, m_1) \\ & \wedge\, m_6 = neg(m_5) \\ & \wedge\, m_7 = imp(m_4, m_6) \\ & \wedge\, m_8 = neg(m_7) \\ & \wedge\, m_9 = cu(3, m_8) \\ & \wedge\, m_{10} = imp(m_9, m_3) \\ & \wedge\, m_{11} = cu(2, m_{10}) \\ & \wedge\, n = cu(1, m_{11})\big]\end{aligned}$$

(b) Vacío:

$$\exists v_0 \forall v_1 (\ \neg v_0 \in v_1\ )$$

$$\begin{aligned}\text{APVE'(n)} \leftrightharpoons \exists m_1, \ldots \exists m_5\ \big[& m_1 = 2^{g_1(v_0)} \,.\, 3^{g_1(\in)} \,.\, 5^{g_1(v_1)} \\ & \wedge\, m_2 = neg(m_1) \\ & \wedge\, m_3 = cu(1, m_2) \\ & \wedge\, m_4 = neg(m_3) \\ & \wedge\, m_5 = cu(0, m_4) \\ & \wedge\, n = neg(m_5)\big]\end{aligned}$$

(c) Par:

$$\forall v_0 \forall v_1 \exists v_2 \big[\forall v_3\ \big((v_3 \in v_2 \rightarrow v_3 \approx v_0 \vee v_3 \approx v_1) \wedge (v_3 \approx v_0 \vee v_3 \approx v_1 \rightarrow v_3 \in v_2)\big)\big]$$

$$\begin{aligned}\text{APPE'(n)} \leftrightharpoons \exists m_1, \ldots, \exists m_1 5\ \big[& m_1 = 2^{g_1(v_3)} \,.\, 3^{g_1(\in)} \,.\, 5^{g_1(v_2)} \\ & \wedge\, m_2 = 2^{g_1(v_3)} \,.\, 3^{g_1(\approx)} \,.\, 5^{g_1(v_0)} \\ & \wedge\, m_3 = 2^{g_1(v_3)} \,.\, 3^{g_1(\approx)} \,.\, 5^{g_1(v_1)} \\ & \wedge\, m_4 = neg(m_2) \\ & \wedge\, m_5 = imp(m_4, m_3) \\ & \wedge\, m_6 = imp(m_1, m_5) \\ & \wedge\, m_7 = imp(m_5, m_1) \\ & \wedge\, m_8 = neg(m_7) \\ & \wedge\, m_9 = imp(m_6, m_8) \\ & \wedge\, m_{10} = neg(m_9) \\ & \wedge\, m_{11} = cu(3, m_{10})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\wedge m_{12} = neg(m_{11}) \\
&\wedge m_{13} = cu(2, m_{12}) \\
&\wedge m_{14} = neg(m_{13}) \\
&\wedge m_{15} = cu(1, m_{14}) \\
&\wedge n = cu(0, m_{15})\big]
\end{aligned}
$$

(d) Unión:
$$
\begin{aligned}
\forall v_0 \exists v_1 \forall v_2 \ \big[&\big((v_2 \in v_1 \rightarrow \exists v_3(v_3 \in v_0 \wedge v_2 \in v_3)) \\
&\wedge (\exists v_3(v_3 \in v_0 \wedge v_2 \in v_3) \rightarrow v_2 \in v_1)\big)\big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{APUE'(n)} \leftrightharpoons \exists m_1, \ldots, \exists m_{18} \ \big[&m_1 = 2^{g_1(v_2)} \,.\, 3^{g_1(\in)} \,.\, 5^{g_1(v_1)} \\
&\wedge m_2 = 2^{g_1(v_3)} \,.\, 3^{g_1(\in)} \,.\, 5^{g_1(v_0)} \\
&\wedge m_3 = 2^{g_1(v_2)} \,.\, 3^{g_1(\in)} \,.\, 5^{g_1(v_3)} \\
&\wedge m_4 = neg(m_3) \\
&\wedge m_5 = imp(m_2, m_4) \\
&\wedge m_6 = neg(m_5) \\
&\wedge m_7 = neg(m_6) \\
&\wedge m_8 = cu(3, m_7) \\
&\wedge m_9 = neg(m_8) \\
&\wedge m_{10} = imp(m_1, m_9) \\
&\wedge m_{11} = imp(m_9, m_1) \\
&\wedge m_{12} = neg(m_{11}) \\
&\wedge m_{13} = imp(m_{10}, m_{12}) \\
&\wedge m_{14} = neg(m_{13}) \\
&\wedge m_{15} = cu(2, m_{14}) \\
&\wedge m_{16} = neg(m_{15}) \\
&\wedge m_{17} = cu(1, m_{16}) \\
&\wedge m_{18} = neg(m_{17}) \\
&\wedge n = cu(0, m_{18})\big]
\end{aligned}
$$

3.4 Las Relaciones que se emplean en la Demostración

Relación	Definición de la Relación	Comportamiento de la Relación
$PRU \subseteq \mathbb{N}^2$	$PRU(n,m) \rightleftharpoons$ $FORM(m) \wedge (n)_{ld(n)-1} = m \wedge$ $\forall i_{i<ld(n)}[FORM((n)_i) \wedge$ $(AL((n)_i) \vee AE((n)_i) \vee$ $\exists j_{j<i}\exists k_{k<i}\,(MP((n)_j, (n)_k, (n)_i))$ $\vee\ \exists j_{j<i}(GEN((n)_j, (n)_i)))]$	n Es el Número de Gödel de una sucesión de fórmulas la cual es una Prueba, en el Sistema E', de la fórmula con número de secuencia m.
$PR \subseteq \mathbb{N}^3$	$PR(n,m,k) \rightleftharpoons$ $PRU(\ n,\ sust(m,k)\ )$	n es el número de Gödel de una Prueba de la fórmula que resulta al sustituir en la fórmula con número de Gödel m la variable v_k por el numeral de m.
$PRN \subseteq \mathbb{N}^3$	$PRN(n,m,k) \rightleftharpoons$ $PRU(\ n,\ neg(\ sb(m,k,\ nml(m)\ )\ )\ )$	n es el número de Gödel de una prueba en E de la negación de la fórmula que resulta de sustituir en la fórmula con número de Gödel m la variable v_k por el numeral de m.

Capítulo 4

La Demostración

4.1 Algunos resultados previos y el teorema de Gödel-Rosser para ZF

En la introducción he dado una descripción del teorema de incompletud de Gödel–Rosser. En los capítulos anteriores hicimos las construcciones necesarias para dar una demostración de este teorema. Ha llegado el momento de enunciarlo y demostrarlo formalmente.

El enunciado de Gödel-Rosser se obtiene a partir de la fórmula

$$- \gamma(x_1) \;\rightleftharpoons\; \forall x_0(\alpha_{PR}(x_0, x_1, \overline{1}) \to \exists y(y \leq x_0 \wedge \alpha_{PRN}(y, x_1, \overline{1})))$$

Recordemos que α_{PR} y α_{PRN} son las fórmulas que *expresan* a las relaciones PR y PRN definidas en el capítulo 3. Observamos que esta fórmula escrita desde L_{AP}, bajo interpretación, enuncia algo que involucra a todos los números naturales. Como es de suponer, para el caso de $L_{E'}$, la cuantificación univiersal, bajo interpretación, no enuncia un "para todo número natural", lo cual ha sido un problema al querer demostrar el enunciado original de Rosser. Hemos decidido[1] relativizar dicho enunciado a los naturales. De manera que, en lugar de pedir el inciso 5 de la hipótesis de Rosser, a saber, *para todo número natural* k

$$T \vdash \forall x(x \leqslant \overline{k} \vee \overline{k} \leqslant x)$$

pediremos que cumplan la tricotomía con los numerales ciertos *individuos* que satisfagan la propiedad definida por la fórmula φ_N. Donde

$$\varphi_N(x) \;\rightleftharpoons$$

$$- x \approx \overline{0} \vee \left[\, \overline{0} \in x \;\wedge\; \exists y(y \in x \wedge f_s(y) \approx x) \;\wedge\; \forall y(y \in x \to (f_s(y) \in x \vee f_x(y) \approx x))\right]$$

Entonces, la definición que daremos para $\gamma(x_1)$ es la siguiente:

[1] Sugerencia del Profesor J.A. Amor.

$$
\begin{aligned}
-\ \gamma(x_1) \ \rightleftharpoons \ & \forall x_0 \Big[\varphi_N(x_0) \rightarrow \\
& \qquad \Big(\alpha_{PR}(x_0, x_1, \overline{1}) \rightarrow \\
& \qquad\qquad \exists y((y \in x_0 \vee y \approx x_0) \wedge \\
& \qquad\qquad\quad \alpha_{PRN}(y, x_1, \overline{1}))\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

A continuación enunciaré algunas propiedades que deben cumplir los numerales, y los individuos que *cumplen* φ_N. Pero antes de enunciarlas debemos recordar que en el capítulo 2 hemos definido por recursión una función h: $\mathbb{N} \rightarrow L_{E'}$ tal que:

- $\mathrm{h}(0) = c_0$
- $\mathrm{h}(n^+) = f_s(h(n))$

y que tenemos la siguiente notación:

$\overline{0} = \mathrm{h}(0)$
$\overline{n+1} = \mathrm{h}(\mathrm{n}+1) = f_s(h(n)) = f_s(\overline{n})$.

Proposición 4.1.1 *Para todo número natural n se tiene que*

$$E' \vdash \forall y \big(y \in \overline{n+1} \rightarrow (f_s(y) \in \overline{n+1} \vee f_s(y) \approx \overline{n+1})\big).$$

Demostración 4.1.1.1 *(Inducción sobre n)*

Base de Inducción

- $n = 0$

1. $E' \vdash f_s(\overline{0}) \approx \overline{1}$

   De acuerdo a la proposición 2.3.7, tenemos que

2. $E' \vdash x \approx \overline{0} \rightarrow x \in f_s(\overline{0})$

   Entonces, por Gen, el axioma 4 y M.P., obtenemos

3. $E' \vdash \overline{0} \in \overline{1}$

   Por otro lado, 1 implica que

4. $E' \vdash f_s(\overline{0}) \in \overline{1} \vee f_s(\overline{0}) \approx \overline{1}$

   Sea $\varphi(\overline{0}) \ \rightleftharpoons \ f_s(\overline{0}) \in \overline{1} \vee f_s(\overline{0}) \approx \overline{1}$, *entonces, de acuerdo a la proposición 2.3.10, tenemos que*

5. $E' \vdash \varphi(\overline{0}) \rightarrow \forall y(y \in f_s(\overline{0}) \rightarrow \varphi(y))$

   Así que, de acuerdo a lo que expresa $\varphi(\overline{0})$ *y aplicando M.P. en (4) y (5), tenemos que*

6. $E' \vdash \forall y(y \in f_s(\overline{0}) \rightarrow (f_s(y) \in \overline{1} \vee f_s(y) \approx \overline{1}))$

   Esto es, reescribiendo al térmio $f_s(\overline{0})$

7. $E' \vdash \forall y(y \in \overline{0+1} \rightarrow (f_s(y) \in \overline{0+1} \vee f_s(y) \approx \overline{0+1}))$

   Con lo que queda demostrada la proposición para la base de inducción.

Hipótesis de Inducción: *Supongamos que, para* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que*

$$E' \vdash \forall y(\, y \in \overline{n} \rightarrow (f_s(y) \in \overline{n} \vee f_s(y) \approx \overline{n})).$$

P.D.

$$E' \vdash \forall y(y \in \overline{n+1} \rightarrow (f_s(y) \in \overline{n+1} \vee f_s(y) \approx \overline{n+1}))$$

La idea es: $\overline{n+1} \;=\; f_s(\overline{n})$ "=" "$n \cup \{n\}$ ",
luego "$y \in n \cup \{n\} \;\Rightarrow\; y \in n \vee y = n$".
Por H.I., "$f_s(y) \in n \vee f_s(y) = n$ *o* $f_s(y) = f_s(n) = n+1$".

De acuerdo a uno de los axiomas que agregamos en el capítulo 1 para extender L_{ZF}, *sabemos que*

8. $E' \vdash x \approx f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \varphi_s(\overline{n}, x)$

   Esto es

9. $$E' \vdash x \approx f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists w \exists v \Big[\forall y(y \in w \leftrightarrow y \approx \overline{n}) \wedge \forall y(y \in v \leftrightarrow y \approx w \vee y \approx \overline{n}) \wedge \forall y(y \in x \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge y \in z))\Big]$$

   Entonces, generalizando a la variable x, *luego aplicando el axioma 4 con el término* $f_s(\overline{n})$, *usando sólo la implicación* "$\rightarrow$ "*y por M.P., obtenemos*

10. $$E' \vdash \exists w \exists v \Big[\forall y(y \in w \leftrightarrow y \approx \overline{n}) \wedge \forall y(y \in v \leftrightarrow y \approx w \vee y \approx \overline{n}) \wedge \forall y(y \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in v \wedge y \in z))\Big]$$

    Sea

$$\beta(a,b) \;\rightleftharpoons\; \Big[\forall y(y \in a \leftrightarrow y \approx \overline{n}) \wedge \forall y(y \in b \leftrightarrow y \approx w \vee y \approx \overline{n}) \wedge \forall y(y \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge y \in z))\Big]$$

   Entonces tenemos que

11. $$E', \beta(a,b) \vdash \Big[\forall y(y \in a \leftrightarrow y \approx \overline{n}) \wedge \forall y(y \in b \leftrightarrow y \approx w \vee y \approx \overline{n}) \wedge \forall y(y \in f_s(\overline{n}) \leftrightarrow \exists z(z \in b \wedge y \in z))\Big]$$

De lo cual, usando sólo un sentido de la implicación en las subfórmulas de la fórmula del paso anterior, el axioma 4, la fórmula 4 del apéndice B-I y M.P., podemos deducir que

12. $E', \beta(a,b) \vdash y \in a \rightarrow y \approx \overline{n}$

13. $E', \beta(a,b) \vdash \forall y(y \in b \rightarrow y \approx w \vee y \approx \overline{n})$

14. $E', \beta(a,b) \vdash y \in f_s(\overline{n}) \rightarrow \exists z(z \in b \wedge y \in z)$

Ahora consideremos la siguiente deducción

Admitamos como Hipótesis

i. $r \in b \wedge y \in r$
Por el axioma 4 para la fórmula del paso (13), con el mismo término r empleado en el paso anterior, obtenemos

ii. $r \in b \rightarrow r \approx \overline{n} \vee r \approx a$
Por la tautología $(\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha)$ *aplicada en el paso (i), tenemos que*

iii. $y \in r$
El axioma 7, implica que

iv. $r \approx \overline{n} \rightarrow (y \in r \rightarrow y \in \overline{n})$
De la misma manera, por el axioma 7, tenemos que

v. $r \approx a \rightarrow (y \in r \rightarrow y \in a)$
Por una instancia de tautología y usando los pasos (iv) y (v), obtenemos

vi. $r \approx \overline{n} \vee r \approx a \rightarrow \big((y \in r \rightarrow y \in \overline{n}) \vee (y \in r \rightarrow y \in a)\big)$
Usando la fórmula 28 del apéndice B-I, tenemos que

vii. $\big((y \in r \rightarrow y \in \overline{n}) \vee (y \in r \rightarrow y \in a)\big) \rightarrow \big(y \in r \rightarrow (y \in \overline{n} \vee y \in a)\big)$
Así que, por transitividad de la implicación para los pasos (vi) y (vii), obtenemos

viii. $r \approx \overline{n} \vee r \approx a \rightarrow \big(y \in r \rightarrow (y \in \overline{n} \vee y \in a)\big)$
Nuvevamente, por la transitividad de la implicación en (ii) y (viii),

ix. $r \in b \rightarrow (y \in r \rightarrow (y \in \overline{n} \vee y \in a))$
Por la fórmula 2 del apéndice B-I a partir del paso anterior, obtenemos

x. $r \in b \wedge y \in r \rightarrow (y \in r \rightarrow (y \in \overline{n} \vee y \in a))$
El axioma lógico 2, la fórmula 4 del apéndice B-I y M.P. implican que

xi. $r \in b \wedge y \in r \rightarrow (y \in \overline{n} \vee y \in a)$
Por otro lado, por la hipótesis de inducción de nuestra deducción principal, tenemos que

xii. $y \in \overline{n} \rightarrow (f_s(y) \in \overline{n} \vee f_s(y) \approx \overline{n})$

Del paso (12) de nuestra deducción principal, del paso (xii) de esta deducción y por la fórmula 16 del apéndice B-I, tenemos que

xiii. $y \in \overline{n} \vee y \in a \rightarrow (f_s(y) \in \overline{n} \vee f_s(y) \approx \overline{n} \vee y \approx \overline{n})$

Además, por el axioma 7, usando una tautología y M.P., obtenemos

xiv. $y \approx \overline{n} \rightarrow f_s(y) \approx f_s(\overline{n})$

De acuerdo a la proposición 2.3.11,

xv. $y \in \overline{n} \rightarrow y \in f_s(\overline{n})$

Aplicando Gen y el axioma 4 con el término $f_s(y)$, el cual será libre para y, obtenemos

xvi. $f_s(y) \in \overline{n} \rightarrow f_s(y) \in f_s(\overline{n})$

Por la proposición 2.3.7, tenemos que $\overline{n} \in f_s(\overline{n})$, así que, a partir del axioma 7 y del paso anterior, obtenemos

xvii. $f_s(y) \approx \overline{n} \rightarrow f_s(y) \in f_s(\overline{n})$

Los pasos (xiv), (xvi), (xvii), y la fórmula 16 del apéndice B-I, implican que

xviii. $(f_s(y) \in \overline{n} \vee f_s(y) \approx \overline{n} \vee y \approx \overline{n}) \rightarrow$
$$(f_s(y) \approx f_s(\overline{n}) \vee f_s(y) \in f_s(\overline{n}))$$

Por la transitividad de la implicación en los pasos (xiii) y (xviii), obtenemos

xix. $y \in \overline{n} \vee y \in a \rightarrow (f_s(y) \approx f_s(\overline{n}) \vee f_s(y) \in f_s(\overline{n}))$

Nuevamente, por la transitividad de la implicación para los pasos (xi) y (xix), tenemos que

xx. $r \in b \wedge y \in r \rightarrow (f_s(y) \approx f_s(\overline{n}) \vee f_s(y) \in f_s(\overline{n}))$

Aplicando M.P. a los pasos (i) y (xx), obtenemos

xxi. $f_s(y) \approx f_s(\overline{n}) \vee f_s(y) \in f_s(\overline{n})$

De esta última deducción, tenemos que

15. $E', \beta(a,b), r \in b \wedge y \in r \vdash f_s(y) \approx f_s(\overline{n}) \vee f_s(y) \in f_s(\overline{n})$

Entonces, por la regla C, podemos afirmar que

16. $E', \beta(a,b), \exists z(z \in b \wedge y \in z) \vdash f_s(y) \approx f_s(\overline{n}) \vee f_s(y) \in f_s(\overline{n})$

Por el metateorema de la deducción, tenemos que

17. $E', \beta(a,b) \vdash \exists z(z \in b \wedge y \in z) \rightarrow (f_s(y) \approx f_s(\overline{n}) \vee f_s(y) \in f_s(\overline{n}))$

Por la transitividad de la implicación en los pasos (14) y (17), tenemos que

18. $E', \beta(a,b) \vdash y \in f_s(\overline{n}) \rightarrow (f_s(y) \approx f_s(\overline{n}) \vee f_s(y) \in f_s(\overline{n}))$

Recordemos que, $f_s(\overline{n})$ y $\overline{n+1}$ denotan al mismo término, así que, reescribiendo el paso anterior, tenemos que

19. $E', \beta(a,b) \vdash \; y \in \overline{n+1} \rightarrow (f_s(y) \approx \overline{n+1} \vee f_s(y) \in \overline{n+1})$

Entonces, aplicando la regla C dos veces, obtenemos

20. $E' \; \exists w \exists v(\beta(w,v)) \vdash \; y \in \overline{n+1} \rightarrow (f_s(y) \approx \overline{n+1} \vee f_s(y) \in \overline{n+1})$

De acuerdo con el metateorema de la deducción, lo anterior implica que

21. $E' \vdash \; \exists w \exists v(\beta(w,v)) \rightarrow$
$$\big(y \in \overline{n+1} \rightarrow (f_s(y) \approx \overline{n+1} \vee f_s(y) \in \overline{n+1})\big)$$

De acuerdo a la definición de $\beta(w,v)$, y aplicando M.P. a los pasos (10) y (21), tenemos que

22. $E' \vdash \; y \in \overline{n+1} \rightarrow (f_s(y) \approx \overline{n+1} \vee f_s(y) \in \overline{n+1})$

Aplicando generalización, obtenemos

23. $E' \vdash \; \forall y\big(y \in \overline{n+1} \rightarrow (f_s(y) \approx \overline{n+1} \vee f_s(y) \in \overline{n+1})\big)$

Con lo que queda terminada la demostración.

Proposición 4.1.2 *Para todo número natural n, se tiene que*

$$E \vdash \varphi_N(\overline{n}).$$

Demostración 4.1.2.1 *(Por casos)*

CASO I: $n = 0$ *así* $\overline{n} = \overline{0}$

Por una tautología, tenemos que

1. $E' \vdash \overline{0} \approx \overline{0}$

Así, obtenemos

2. $$E' \vdash \overline{0} \approx \overline{0} \vee \Big(\overline{0} \in \overline{0} \wedge \exists y(y \in \overline{0} \wedge f_s(y) \approx \overline{0}) \wedge \forall y(y \in \overline{0} \rightarrow (f_s(y) \in \overline{0} \vee f_s(y) \approx \overline{0}))\Big)$$

Es decir,

3. $E' \vdash \varphi_N(\overline{0})$

CASO II: $n+1$ *con* $\boldsymbol{n}$ *un número natural*

Se tiene que

$$\begin{aligned}\varphi_N(\overline{n+1}) \;\; \rightleftharpoons \;\; & \overline{n+1} \approx \overline{0} \vee \\ & \Big(\overline{0} \in \overline{n+1} \; \wedge \\ & \exists y(y \in \overline{n+1} \wedge f_s(y) \approx \overline{n+1}) \; \wedge \\ & \forall y(y \in \overline{n+1} \rightarrow (f_s(y) \in \overline{n+1} \vee f_s(y) \approx \overline{n+1}))\Big)\end{aligned}$$

De acuerdo a la proposición 2.3.7, para todo número natural n, tenemos que

1. $E' \vdash x \approx \overline{0} \to x \in f_s(\overline{n})$

   Por Gen y el axioma 4 con el término $\overline{0}$, *el cual será libre para* x, *tenemos que*

2. $E' \vdash \overline{0} \approx \overline{0} \to \overline{0} \in f_s(\overline{n})$

   Con lo cual obtenemos

3. $E' \vdash \overline{0} \in f_s(\overline{n})$

   De la misma forma, por la proposición 2.3.7, tenemos que

4. $E' \vdash x \approx \overline{n} \to x \in f_s(\overline{n})$

   Así que

5. $E' \vdash \overline{n} \in f_s(\overline{n})$

   Como tenemos que $f_s(\overline{n}) = \overline{n+1}$, *lo que se enuncia en el paso anterior es lo mismo que*

6. $E' \vdash \overline{n} \in \overline{n+1}$

   Es decir,

7. $E' \vdash f_s(\overline{n}) \approx \overline{n+1}$

   Por lo que de los pasos (6) y (7), obtenemos

8. $E' \vdash \overline{n} \in \overline{n+1} \wedge f_s(\overline{n}) \approx \overline{n+1}$

   Entonces, por la regla existencial, tenemos que

9. $E' \vdash \exists y \ (y \in \overline{n+1} \wedge f_s(y) \approx \overline{n+1})$

   De acuerdo a lo que demostramos en la proposición 4.0.1, tenemos que

10. $E' \vdash \forall y(y \in \overline{n+1} \to (\ f_s(y) \in \overline{n+1} \vee f_s(y) \approx \overline{n+1}))$

    Los pasos (3), (9) y (10) implican que

11. $E' \vdash \overline{0} \in \overline{n+1} \wedge$
    $\exists y(y \in \overline{n+1} \wedge f_s(y) \approx \overline{n+1}) \wedge$
    $\forall y(y \in \overline{n+1} \to (\ f_s(y) \in \overline{n+1} \vee f_s(y) \approx \overline{n+1}))$

    Esto es

12. $E' \vdash \varphi_N(\overline{n+1})$

    Con lo que queda demostrado este caso y por lo tanto la proposición.

Una propiedad importante que cumple la relación "$<$" en los números naturales es que satisface la tricotomía. Veremos sintácticamente a continuación que los *individuos* que cumplen $\varphi_N(x)$ son $\in$ - comparables con los números naturales.

Proposición 4.1.3 *Para todo número natural n, se tiene que*

$$E' \vdash \varphi_N(x) \rightarrow (\overline{n} \in x \vee \overline{n} \approx x \vee x \in \overline{n}).$$

Demostración 4.1.3.1 *(Inducción sobre n)*

Base de Inducción

$- \ n = 0$

Por instancia de tautología, tenemos que

1. $E' \vdash x \approx \overline{0} \rightarrow x \approx \overline{0}$

   Así que

2. $E' \vdash x \approx \overline{0} \rightarrow x \approx \overline{0} \vee x \in \overline{0}$

   Por otro lado, usando la tautología $(\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha)$, tenemos que

3. $$\begin{aligned} E' \vdash\ & \overline{0} \in x \\ & \wedge \exists y(y \in x \wedge f_s(y) \approx x) \wedge \\ & \forall y(y \in x \rightarrow (f_s(y) \in x \vee f_s(y) \approx x)) \rightarrow \\ & \qquad \overline{0} \in x \end{aligned}$$

   De los pasos (2) y (3) y usando la fórmula 16 del apéndice B-I, obtenemos

4. $$\begin{aligned} E' \vdash x \approx \overline{0} \vee \big[& \overline{0} \in x \wedge \\ & \exists y(y \in x \wedge f_s(y) \approx x) \wedge \\ & \forall y(y \in x \rightarrow (f_s(y) \in x \vee f_s(y) \approx x)\big] \rightarrow \\ & \qquad [\overline{0} \in x \vee x \approx \overline{0} \vee \ \vee x \in \overline{0}] \end{aligned}$$

   Con lo que queda demostrado el caso cuando $n = 0$.

Hipótesis de Inducción: *Supongamos que para n número natural se tiene:*

$$E' \vdash \varphi_N(x) \rightarrow \overline{n} \in x \vee \overline{n} \approx x \vee x \in \overline{n}$$

P.D.

$$E' \vdash \varphi_N(x) \rightarrow \overline{n+1} \in x \vee \overline{n+1} \approx x \vee x \in \overline{n+1}$$

La idea es: *Veamos que*

- $x \approx \overline{n} \rightarrow x \in f_s(\overline{n})$
- $x \in \overline{n} \rightarrow x \in f_s(\overline{n})$
- $\overline{n} \in x \rightarrow f_s(\overline{n}) \in x \vee f_s(\overline{n}) \approx x$

Por la proposición 2.3.7, tenemos que

5. $E' \vdash x \approx \overline{n} \rightarrow x \in f_s(\overline{n})$

La proposición 2.3.11 implica que

6. $E' \vdash x \in \overline{n} \rightarrow x \in f_s(\overline{n})$

Por otro lado, de acuerdo a la definición de $\varphi_N(x)$, *dado que* $(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma \wedge \delta) \rightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee \delta))$, *y por la fórmula 4 del apéndice B-I, tenemos que*

7. $E' \vdash \varphi_N(x) \rightarrow x \approx \overline{0} \vee \forall y(y \in x \rightarrow (f_s(y) \in x \vee f_s(y) \approx x))$

Además, por el axioma con el que extendimos a L_{ZF} *para agregar la constante* $\overline{0}$, *tenemos que*

8. $E' \vdash x \approx \overline{0} \rightarrow \forall z \neg(z \in x)$

Por contrapositiva, lo anterior implica que

9. $E' \vdash \exists z(z \in x) \rightarrow \neg(x \approx \overline{0})$

Ahora consideremos la siguiente deducción, en la cual las dos primeras fórmulas son hipótesis:

i. $\overline{n} \in x$

ii. $x \approx \overline{0} \vee \forall y(y \in x \rightarrow (f_s(y) \in x \vee f_s(y) \approx x))$
Por la fórmula 7.2 del apéndice B-II, la fórmula del paso anterior y M.P., tenemos que

iii. $\forall y\big((x \approx \overline{0}\ ) \vee (y \in x \rightarrow (f_s(y) \in x \vee f_s(y) \approx x))\big)$
El axioma 4 con el término $\overline{n}$ *implica que*

iv. $(x \approx \overline{0}) \vee (\overline{n} \in x \rightarrow (f_s(\overline{n}) \in x \vee f_s(\overline{n}) \approx x))$
Por otro lado, del paso (i), tenemos que

v. $\exists z(z \in x)$
Entonces, de acuerdo al paso (9) de nuestra deducción principal,

vi. $\neg x \approx \overline{0}$
Por una tautología, del paso (iv), obtenemos

vii. $\neg x \approx \overline{0} \rightarrow (\overline{n} \in x \rightarrow (f_s(\overline{n}) \in x \vee f_s(\overline{n}) \approx x))$
Aplicando M.P. a los pasos (vi) y (vii), obtenemos

viii. $\overline{n} \in x \rightarrow (f_s(\overline{n}) \in x \vee f_s(\overline{n}) \approx x)$
Nuevamente aplicando M.P. a los pasos (i) y (viii),

ix. $f_s(\overline{n}) \in x \vee f_s(\overline{n}) \approx x$

Denotemos por α *y* β *a las fórmulas que aparecen en los incisos (i), (ii), entonces en la deducción anterior obtuvimos que*

10. $E', \alpha, \beta \vdash f_s(\overline{n}) \in x \vee f_s(\overline{n}) \approx x$

Así que, por el metateorema de la deducción aplicado dos veces, tenemos que

11. $E' \vdash \overline{n} \in x \to \Big[\Big(x \approx \overline{0} \vee \forall y(y \in x \to (f_s(y) \in x \vee f_s(y) \approx x))\Big) \to$
$$\Big(f_s(\overline{n}) \in x \vee f_s(\overline{n}) \approx x\Big)\Big]$$

De los pasos (5), (6) y (11) y de la fórmula 16 del apéndice B-I, tenemos que

12. $E' \vdash x \in \overline{n} \vee x \approx \overline{n} \vee \overline{n} \in x \to$
$$\Big[\Big(x \in f_s(\overline{n})\Big) \vee$$
$$\Big((x \approx \overline{0} \vee \forall y(\ y \in x \to (f_s(y) \in x \vee f_s(y) \approx x))) \to$$
$$(f_s(\overline{n}) \in x \vee f_s(\overline{n}) \approx x)\Big)\Big]$$

Denotemos por

$$\begin{aligned} -\ \delta &\rightleftharpoons x \in \overline{n} \vee x \approx \overline{n} \vee \overline{n} \in x \\ -\ \gamma &\rightleftharpoons \Big(x \in f_s(\overline{n})\Big) \vee \\ &\quad \Big((x \approx \overline{0} \vee \forall y(y \in x \to (f_s(y) \in x \vee f_s(y) \approx x))) \to \\ &\quad (f_s(\overline{n}) \in x \vee f_s(\overline{n}) \approx x)\Big) \end{aligned}$$

De modo que la fórmula del paso (12) es de la forma $\delta \to \gamma$, *de lo cual podemos obtener*

13. $E' \vdash \varphi_N(x) \to (\delta \to \gamma)$

El axioma 2 y M.P. implican que

14. $E' \vdash (\varphi_N(x) \to \delta) \to (\varphi_N(x) \to \gamma)$

Por hipótesis de inducción, tenemos que

15. $E' \vdash \varphi_N(x) \to \delta$

Aplicando M.P. a los pasos (15) y (14), obtenemos

16. $E' \vdash \varphi_N(x) \to \gamma$

Esto es,

17. $E' \vdash \varphi_N(x) \to \Big[x \in f_s(\overline{n})\Big] \vee$
$$\Big[\Big(x \approx \overline{0} \vee \forall y\big(y \in x \to (f_s(y) \in x \vee f_s(y) \approx x)\big)\Big) \to$$
$$\Big(f_s(\overline{n}) \in x \vee f_s(\overline{n}) \approx x\Big)\Big]$$

Denotemos ahora con

$$\begin{aligned} -\ \psi_1 &\rightleftharpoons (x \approx \overline{0} \vee \forall y(y \in x \to (f_s(y) \in x \vee f_s(y) \approx x))) \\ -\ \psi_2 &\rightleftharpoons (f_s(\overline{n}) \in x \vee f_s(\overline{n}) \approx x) \end{aligned}$$

Así que, en términos de ψ_1 *y de* ψ_2, *el paso (17) es de la forma*

18. $E' \vdash \varphi_N(x) \to [x \in f_s(\overline{n}) \vee (\psi_1 \to \psi_2)]$

Por tautología del paso anterior, tenemos que

19. $E' \vdash \varphi_N(x) \to [x \in f_s(\overline{n}) \vee \neg\psi_1 \vee \psi_2]$

Permutando las fórmulas del lado derecho se tiene que

20. $E' \vdash \varphi_N(x) \to [\neg\psi_1 \vee x \in f_s(\overline{n}) \vee \vee\psi_2]$

Por tautología obtenemos

21. $E' \vdash \varphi_N(x) \to [\psi_1 \to (x \in f_s(\overline{n}) \vee \psi_2)]$

Sustituyendo a ψ_1 *y a* ψ_2 *por su definición, tenemos que*

22. $$E' \vdash \varphi_N(x) \to \Big[\big(x \approx \overline{0} \vee \forall y(y \in x \to (f_s(y) \in x \vee f_s(y) \approx x))\big) \to \big(x \in f_s(\overline{n}) \vee f_s(\overline{n}) \in x \vee f_s(\overline{n}) \approx x\big)\Big]$$

Como

23. $E' \vdash \varphi_N(x) \to \big(x \approx \overline{0} \vee \forall y(y \in x \to (f_s(y) \in x \vee f_s(y) \approx x))\big)$

Aplicando el axioma 2 en el paso (22) y por M.P., tenemos que

24. $E' \vdash \varphi_N(x) \to \big(x \in f_s(\overline{n}) \vee f_s(\overline{n}) \approx x \vee f_s(\overline{n}) \in x\big)$

De acuerdo a lo que dijimos al principio de este capítulo, ya tenemos que

25. $E' \vdash \varphi_N(x) \to (x \in \overline{n+1} \vee x \approx \overline{n+1} \vee \overline{n+1} \in x)$

Con lo que queda concluida la demostración para esta proposición.

En el Capítulo 3 hemos definido las relaciones PR y PRN de la siguiente forma:

- $(n, m, k) \in PR$ $\rightleftharpoons$ n es el número de Gödel de una prueba en E' de la fórmula que resulta al sustituir en la fórmula con número de Gödel m la variable v_k por el numeral de m.
- $(n, n, k) \in PRN$ $\rightleftharpoons$ n es el número de Gödel de una prueba en E' de la negación de la fórmula que resulta de sustituir en la fórmula con número de Gödel m la variable v_k por el numeral de m.

Consideremos la siguiente fórmula

$$\gamma(x_1) \rightleftharpoons \forall x_0\big[\varphi_N(x_0) \to \big(\alpha_{PR}(x_0, x_1, \overline{1}) \to \exists y\,((y \in x_0 \vee y \approx x_0) \wedge \alpha_{PRN}(y, x_1, \overline{1}))\big)\big]$$

Sea r el número de Gödel de $\gamma(x_1)$. Para **el enunciado** $\gamma(\overline{r})$ **de Rosser** tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.1.1 **(GÖDEL-ROSSER (1936))**

(a) Si E' es Consistente, entonces $E' \nvdash \gamma(\overline{r})$

(b) Si E' es Consistente, entonces $E' \nvdash \neg\gamma(\overline{r})$

Demostración 4.1.3.2 ***(Inciso (a)****, por reducción a lo absurdo)*

Supongamos que E' es consistente y que

1. $E' \vdash \gamma(\overline{r})$

   Sea n_0 el número de Gödel de una prueba en E' de $\gamma(\overline{r})$, así que, $(n_0, r, 1) \in PR$ implica que

2. $E' \vdash \alpha_{PR}(\overline{n_0}, \overline{r}, \overline{1})$

   De (1) y por la definición de γ, tenemos que

3. $$E' \vdash \forall x_0 \big[\varphi_N(x_0) \rightarrow \big(\alpha_{PR}(x_0, \overline{r}, \overline{1}) \rightarrow \exists y((y \in x_0 \vee y \approx x_0\ ) \wedge \alpha_{PRN}(y, \overline{r}, \overline{1}))\big)\big]$$

   Aplicando el axioma 4 con el término $\overline{n_0}$, obtenemos

4. $$E' \vdash \varphi_N(\overline{n_0}) \rightarrow \big(\ \alpha_{PR}(\overline{n}_0, \overline{r}, \overline{1}) \rightarrow \exists y((y \in \overline{n}_0 \vee y \approx \overline{n}_0) \wedge \alpha_{PRN}(y, \overline{r}, \overline{1}))\big)$$

   Por la proposición 4.0.2 tenemos que para todo número natural n *se tiene $\varphi_N(\overline{n})$, entonces en particular para n_0*

5. $E' \vdash \varphi_N(\overline{n}_0)$

   Como E' es consistente,

6. $E' \nvdash \neg\gamma(\overline{r})$

   De lo cual, tenemos que para todo número natural p,

   $$(p, r, 1) \notin PRN$$

   Así que, para todo $p \in \mathbb{N}$

7. $E' \vdash \neg\alpha_{PRN}(\overline{p}, \overline{r}, \overline{1})$

   En particular

8. $E' \vdash \neg\alpha_{PRN}(\overline{0}, \overline{r}, \overline{1}) \wedge \ldots \wedge \neg\alpha_{PRN}(\overline{n}_0, \overline{r}, \overline{1})$

   Entonces, por la proposición 2.3.10 del capítulo 2 y M.P., tenemos que

9. $E' \vdash \forall y\big((y \in \overline{n}_0 \vee y \approx \overline{n}_0) \rightarrow \neg\alpha_{PRN}(y, \overline{r}, \overline{1})\big)$

   Esto es

10. $E' \vdash \neg\exists y\big((y \in \overline{n}_0 \vee y \approx \overline{n}_0) \wedge \alpha_{PRN}(y, \overline{r}, \overline{1})\big)$

    Entonces, por los pasos (2), (5) y (10), tenemos que

11. $E' \vdash \varphi_N(\overline{n}_0) \wedge \alpha_{PR}(\overline{n}_0, \overline{r}, \overline{1}) \wedge$
$$\neg\exists y((y \in \overline{n}_0 \vee y \approx \overline{n}_0) \wedge \alpha_{PRN}(y, \overline{r}, \overline{1}))$$

Esto es,

12. $E' \vdash \neg\Big(\varphi_N(\overline{n}_0) \rightarrow$
$$\big(\alpha_{PR}(\overline{n}_0, \overline{r}, \overline{1}) \rightarrow \exists y((y \in \overline{n}_0 \vee y \approx \overline{n}_0) \wedge \alpha_{PRN}(y, \overline{r}, \overline{1}))\big)\Big)$$

Por la regla existencial, tenemos que

13. $E' \vdash \exists x_0 \neg\Big(\varphi_N(x_0) \rightarrow$
$$\big(\alpha_{PR}(x_0, \overline{r}, \overline{1}) \rightarrow \exists y((y \in x_0 \vee y \approx x_0) \wedge \alpha_{PRN}(y, \overline{r}, \overline{1}))\big)\Big)$$

Lo cual equivale a

14. $E' \vdash \neg\gamma(\overline{r})$

Con lo que concluimos que, o bien no es cierto que E' sea consistente, o no es cierto que $E' \vdash \gamma(\overline{r})$. Como queremos admitir la consistencia de E', concluimos que:

$$E' \nvdash \gamma(\overline{r})$$

*(**Inciso (b)**, reducción a lo absurdo)*
Supongamos que E' es consistente y que

1. $E' \vdash \neg\gamma(\overline{r})$

Sea p el número de Gödel de una prueba en E' de $\neg\gamma(\overline{r})$, así que, como $(p, r, 1) \in PRN$,

2. $E' \vdash \alpha_{PRN}(\overline{p}, \overline{r}, \overline{1})$

Afirmamos que

$$E' \vdash \Big(\overline{p} \in x_0 \vee \overline{p} \approx x_0\Big) \rightarrow \exists y\Big((y \in x_0 \vee y \approx x_0) \wedge \alpha_{PRN}(y, \overline{r}, \overline{1})\Big)$$

ya que, si suponemos como hipótesis que

i. $\overline{p} \in x_0 \vee \overline{p} \approx x_0$
Entonces, por (2) tenemos que

ii. $\alpha_{PRN}(\overline{p}, \overline{r}, \overline{1})$
(i) y (ii) implican que

iii. $(\overline{p} \in x_0 \vee \overline{p} \approx x_0) \wedge \alpha_{PRN}(\overline{p}, \overline{r}, \overline{1})$
Por la regla existencial, obtenemos

iv. $\exists y\Big((y \in x_0 \vee y \approx x_0) \wedge \alpha_{PRN}(y, \overline{r}, \overline{1})\Big)$

Esto es

3. E', $(\overline{p} \in x_0 \vee \overline{p} \approx x_0) \vdash \exists y\Big((y \in x_0 \vee y \approx x_0) \wedge \alpha_{PRN}(y, \overline{r}, \overline{1})\Big)$

   Por medio del metateorema de la deducción, obtenemos

4. $E' \vdash \Big(\overline{p} \in x_0 \vee \overline{p} \approx x_0\Big) \rightarrow \exists y\Big((y \in x_0 \vee y \approx x_0) \wedge \alpha_{PRN}(y, \overline{r}, \overline{1})\Big)$

   Por otro lado, como E' es consistente,

5. $E' \nvdash \gamma(\overline{r})$

   Tenemos que para todo número natural n, $(n, r, 1) \notin PR$. Entonces para todo número natural n

6. $E' \vdash \neg\alpha_{PR}(\overline{n}, \overline{r}, \overline{1})$

   En particular

7. $E' \vdash \neg\alpha_{PR}(\overline{0}, \overline{r}, \overline{1}) \wedge \ldots \wedge \neg\alpha_{PR}(\overline{p}, \overline{r}, \overline{1})$

   Así que, por la proposición 2.3.10 y M.P., tenemos que

8. $E' \vdash \forall x_0((x_0 \in \overline{p} \vee x_0 \approx \overline{p}) \rightarrow \neg\alpha_{PR}(x_0, \overline{r}, \overline{1}))$

   Por el axioma 4, tenemos

9. $E' \vdash (x_0 \in \overline{p} \vee x_0 \approx \overline{p}) \rightarrow \neg\alpha_{PR}(x_0, \overline{r}, \overline{1})$

   *Ahora consideremos la siguiente deducción (*para obtener $\gamma(\overline{r})$*)*

   Hipótesis

   i. $\varphi_N(x_0)$
   Por (4),

   ii. $(\overline{p} \in x_0 \vee \overline{p} \approx x_0) \rightarrow \exists y\Big((y \in x_0 \vee y \approx x_0) \wedge \alpha_{PRN}(y, \overline{r}, \overline{1})\Big)$
   Por (9),

   iii. $x_0 \in \overline{p} \vee \overline{p} \approx x_0 \rightarrow \neg\alpha_{PR}(x_0, \overline{r}, \overline{1})$
   Por la fórmula 16 del apéndice B-I y de (ii) y (iii), obtenemos

   iv. $(\overline{p} \in x_0 \vee \overline{p} \approx x_0) \vee (x_0 \in \overline{p} \vee \overline{p} \approx x_0) \rightarrow$
   $\Big(\neg\alpha_{PR}(x_0, \overline{r}, \overline{1}) \vee \exists y(\,(y \in x_0 \vee y \approx x_0) \wedge \alpha_{PRN}(y, \overline{r}, \overline{1}))\Big)$
   Sustituyendo las fórmulas de la implicación principal por fórmulas lógicamente equivalentes, tenemos que

   v. $(\overline{p} \in x_0 \vee \overline{p} \approx x_0) \vee (x_0 \in \overline{p} \vee \overline{p} \approx x_0) \rightarrow$
   $\Big(\alpha_{PR}(x_0, \overline{r}, \overline{1}) \rightarrow \exists y\ (\,(y \in x_0 \vee y \approx x_0) \wedge \alpha_{PRN}(y, \overline{r}, \overline{1}))\Big)$

De manera que si denotamos por

$$
\begin{aligned}
-\ \alpha \quad &\rightleftharpoons \quad (\overline{p} \in x_0 \vee \overline{p} \approx x_0) \vee (x_0 \in \overline{p} \vee \overline{p} \approx x_0) \\
&\rightleftharpoons \quad (\overline{p} \in x_0 \vee \overline{p} \approx x_0 \vee x_0 \in \overline{p}) \\
-\ \beta \quad &\rightleftharpoons \quad \Big(\alpha_{PR}(x_0, \overline{r}, \overline{1}) \rightarrow \\
&\qquad\qquad \exists y(y \in x_0 \vee y \approx x_0) \wedge \alpha_{PRN}(y, \overline{r}, \overline{1})\Big)
\end{aligned}
$$

Tenemos que

10. $E', \varphi_N(x_0) \vdash (\alpha \to \beta)$

Entonces, por el metateorema de la deducción, obtenemos

11. $E' \vdash \varphi_N(x_0) \to (\alpha \to \beta)$

El axioma 2 y M.P. implican que

12. $E' \vdash (\varphi_N(x_0) \to \alpha) \to (\varphi_N(x_0) \to \beta)$

Esto es

13. $$E' \vdash \Big(\varphi_N(x_0) \to (\overline{p} \in x_0 \vee \overline{p} \approx x_0 \vee x_0 \in \overline{p})\Big) \to \Big(\varphi_N(x_0) \to \big(\alpha_{PR}(x_0, \overline{r}, \overline{1}) \to \exists y\big((y \in x_0 \vee y \approx x_0\ ) \wedge \alpha_{PRN}(y, \overline{r}, \overline{1})\big)\big)\Big)$$

Aplicando M.P., usando lo ya demostrado en la proposición 4.0.3 y este último paso, obtenemos

14. $$E' \vdash \varphi_N(x_0) \to \Big(\alpha_{PR}(x_0, \overline{r}, \overline{1}) \to \exists y\big((y \in x_0 \vee y \approx x_0) \wedge \alpha_{PRN}(y, \overline{r}, \overline{1})\big)\Big)$$

Aplicando Gen, tenemos que

15. $E' \vdash \gamma(\overline{r})$

Por lo que o no es cierto que E' sea consistente o no es cierto que $E' \vdash \neg\gamma(\overline{r})$, con lo que concluimos que:

$$E' \nvdash \neg\gamma(\overline{r})$$

Así queda demostrado el teorema de Gödel-Rosser para T.C.

Observamos que, *de cierta forma*, con el inciso (a) de la demostración de este teorema, tenemos la verdad del enunciado $\gamma(\overline{r})$, ya que éste enuncia que, "si existe una prueba para él, entonces hay una prueba para su negación, y el número de ésa prueba es menor o igual al de la prueba de $\gamma(\overline{r})$". Sin embargo, probamos que E' $\nvdash \gamma(\overline{r})$ por lo que el antecedente de la condicional es falso y así $\gamma(\overline{r})$ es verdadero en una interpretación.

4.2 Conclusiones

Hasta el momento sólo hemos demostrado que nuestro enunciado $\gamma(\overline{r})$ es indecidible para la teoría que obtenemos de E',[2] sin embargo, podemos concluir que,

[2]Recurdese que E' denota al conjunto de axiomas formado por Extensionalidad, Vacío, Par, Unión y los dos axiomas con los que extendimos a la teoría de manera conservadora.

al igual que como se hace para la aritmética de Peano, a continuación veremos que toda extensión recursiva consistente de $T_{E'}$[3] es incompleta.

Proposición 4.2.1 *Sea* $\Sigma \subseteq L_\rho^0$, *con* $L_{E'} \subseteq L_\rho$[4], *tal que*

i. $\Sigma \vdash \sigma$ *para todo* $\sigma \in T_{E'}$
ii. Σ *es recursivo.*

Si Σ *es consistente entonces* Σ *tiene indecidibles, esto es, si* Σ *es consistente entonces* Σ *es incompleta.*

Demostración 4.2.1.1 *Para* Σ *definimos en* $\mathbb{N}^2$ *la relación* $PRU_\Sigma(n,m)$, *que difiere de la relación PRU que definimos en el capítulo 3 únicamente en el hecho de que debemos agregar una fórmula que indique que entre las deducciones se consideran también a aquéllas que usan los axiomas de* Σ, *es decir*

$$\begin{aligned} PRU_\Sigma(n,m) \quad &\rightleftharpoons \quad FORM(m) \wedge (n)_{\underset{\smile}{ld(n)\dot{-}1}} \approx m \wedge \\ &\forall i_{i<ld(n)}[FORM((n)_{\underset{\smile}{i}}) \wedge (AL((n)_{\underset{\smile}{i}}) \vee AE'((n)_{\underset{\smile}{i}}) \vee \\ &A\Sigma((n)_{\underset{\smile}{i}}) \vee \exists j_{j<i}\exists k_{k<i}\,(MP((n)_{\underset{\smile}{j}}, (n)_{\underset{\smile}{k}}, (n)_{\underset{\smile}{i}})) \\ &\vee \exists j_{j<i}(GEN((n)_{\underset{\smile}{j}}, (n)_{\underset{\smile}{i}}))))] \end{aligned}$$

donde $A\Sigma((n)_{\underset{\smile}{i}})$ *si y sólo si n es el número de Gödel de un axioma de* Σ *que no es de* E'. Σ *es un conjunto recursivo por lo que es una relación expresable en* $L_{E'}$. *Así que a partir de la definición de esta nueva relación, definimos las relaciones* PR' *y* PRN' *de manera análoga a como se definieron en el capítulo 3 las relaciones* PR *y* PRN, *sólo que ahora usaremos a la relación* $PRU_\Sigma(n,m)$ *en lugar de* PRU. *Es claro que estas nuevas relaciones siguen siendo recursivas primitivas y que por lo tanto son expresables en el lenguaje de E' mediante fórmulas* $\alpha_{PR'}$ *y* $\alpha_{PRN'}$, *y que si consideramos al enunciado* $\gamma(\bar{r})'$, *el cual está definido usando estas fórmulas, de manera completamente análoga obtendremos su indecidibilidad, por lo tanto* Σ *es incompleta bajo el supuesto de que es consistente.*

Además, recordemos que si T es una teoría en la que $\neg\sigma$ no se demuestra (σ es un enunciado escrito en el lenguaje de la teoría), entonces la teoría que se obtiene de $T \cup \{\sigma\}$ es consistente. De manera que, al igual que para el caso de la aritmética de Peano, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.2.2 *Si suponemos que la teoría que se obtiene de* E' *es consistente, entonces la teoría que se obtiene de* $E' \cup \{\gamma(\bar{r})\}$ *es incompleta*[5].

[3] $T_{E'}$ denota a la cerradura deductiva de E'.

[4] $L_{E'} \subseteq L_\rho$ denota al conjunto de fórmulas del lenguaje L_ρ que no tiene variables libres, es decir, al conjunto de enunciados.

[5] Obsérvese que se tiene la consistencia de la teoría $T_{E' \cup \{\gamma(\bar{r})\}}$.

Demostración 4.2.2.1 *Definamos una relación PRU', que se obtiene a partir de la definida en el capítulo 3 por medio de agregar la condición de que en la deducción puede aparecer este nuevo axioma, esto es*

$$\begin{aligned} PRU'(n,m) \quad \rightleftharpoons \quad & FORM(m) \wedge (n)_{\underset{\smile}{ld(n)-1}} \approx m \wedge \\ & \forall i_{i<ld(n)}[FORM((n)_{\underset{\smile}{i}}) \wedge (AL((n)_{\underset{\smile}{i}}) \vee AE'((n)_{\underset{\smile}{i}}) \\ & \qquad \vee (n)_{\underset{\smile}{i}} \approx g_2(\gamma(\overline{r})) \\ & \qquad \vee \exists j_{j<i} \exists k_{k<i} (MP((n)_{\underset{\smile}{j}}, (n)_{\underset{\smile}{k}}, (n)_{\underset{\smile}{i}})) \\ & \qquad \vee \exists j_{j<i}(GEN((n)_{\underset{\smile}{j}}, (n)_{\underset{\smile}{i}}))))] \end{aligned}$$

y se procede de manera completamente análoga, con la única diferencia de que simplemente estamos considerando un axioma más, es decir que, procediendo de la misma manera, en la nueva teoría construiremos un enunciado $\gamma'(\overline{r})$ el cual es indecidible[6] *para dicha teoría.*

Finalmente agregamos lo siguiente:

(a) Siendo ZF lo más cercano a una buena fundamentación de las matemáticas, y aunque es bien conocido que ZF es una teoría incompleta, ha quedado demostrado que no importa cuanto extendamos (recursivamente) ZF, dichas extensiones siempre serán incompletas. En efecto, a partir de la proposición 1 y suponiendo la consistencia de la Teoría de Conjuntos tenemos su incompletud en el sentido recursivo, esto es, siempre que demos un conjunto decidible de axiomas para la Teoría de Conjuntos, tendremos su incompletud, (repito, suponiendo su consistencia), así, por ejemplo, $ZF \cup \{AC\}$, $ZF \cup \{HC\}$, $ZF \cup \{HGC\}$, etc., son teorías incompletas[7].

(b) Rosser describió las condiciones que deben satisfacer las teorías para las cuales es posible demostrar su incompletud siguiendo el método que utilizó Gödel. Este trabajo es un ejemplo de que es posible pedir condiciones menos fuertes para establecer la incompletud, ya que en lugar de pedir la condición de que *todos* cumplan tricotomía con los naturales pedimos que la cumplan sólo aquéllos *individuos* que satisfacen la propiedad enunciada por la fórmula φ_N. A continuación enuncio las hipótesis que establece Rosser en su generalización y las que pedimos en este trabajo.

[6]Siguiendo exactamente los mismos argumentos.

[7]Es decir que *Teo(ZF)* no es recursivamente axiomatizable, donde *Teo(ZF)* es el conjunto de enunciados verdaderos en una interpretación de ZF.

Condiciones que pide Rosser: Sea **K** una teoría de primer orden con igualdad que tiene los mismos símbolos que AP y la cual satisface las siguientes condiciones:

i. La relación *ser axioma propio* es recursiva.
ii. $\vdash_K \neg\overline{0} \approx \overline{1}$.
iii. Cada función recursiva es representable en **K**.
iv. $\vdash_K x \leq \overline{n} \leftrightarrow (x \approx \overline{0} \vee x \approx \overline{1} \vee \cdots \vee x \approx \overline{n})$.
v. Para cualquier número natural se tiene que $\vdash_K x \leq \overline{n} \vee \overline{n} \leq x$.

Condiciones que pedimos en este trabajo:

i. La relación *ser axioma propio* es recursiva.
ii. Cada función recursiva es representable en **E'**.
iii. Para cada número natural n se tiene que $\vdash_{E'} \varphi_N(\overline{n})$.
iv. $\vdash_{E'} \forall y(y \in \overline{n+1} \rightarrow (f_s(y) \in \overline{n} \vee f_s(y) \approx \overline{n+1}))$.
v. Para cada número natural n se tiene que $\vdash_{E'} \varphi_N(x) \rightarrow (\overline{n} \in x \vee \overline{n} \approx x \vee x \in \overline{n}$

Apéndice A

Resultados de la lógica clásica para lenguajes de primer orden que son empleados en las demostraciones.

En la introducción hemos hablado acerca de los lenguajes y de las teorías formales. Los siguientes son algunos resultados acerca de las teorías formales para lenguajes de primer orden.

Definición A.0.1 (Ser término libre para una variable.)

Sean φ una fórmula en un lenguaje formal de primer orden, t un término, y x_i una variable del lenguaje, se dice que t es **libre** *para x_i en φ, si ninguna ocurrencia libre de x_i en φ se encuentra dentro del alcance de cualquier cuantificador $(\forall x_j)$, donde x_j es una variable en t. Esto significa que, si t es sustituido en todas las ocurrencias libres de x_i en $\varphi(x_i)$ ninguna ocurrencia de una variable de t será una ocurrencia acotada en $\varphi(t)$.*

Definición A.0.2 (Una fórmula depende sobre otra)

Sea φ una fórmula en un conjunto Γ de fórmulas bien formadas, y sea γ_1 , ... , γ_n una deducción desde Γ. Decimos que γ_i **depende de** *φ en esta prueba, sí y sólo si* *i.* γ_i *es* φ *y la justificación para* γ_i *es que ésta pertenece a* Γ.

ii. γ_i *está justificada como una consecuencia directa por medio de M.P. o generalización de alguna de las precedentes fórmulas de la sucesión, en donde al menos una de estas fórmulas precedentes dependen de* φ.

Proposición A.0.3 (Teorema de la Deducción)

Si se tiene una deducción de la forma $\Gamma, \varphi \vdash \gamma$, *entonces* $\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \gamma$.

Definición A.0.3 (Regla Existencial)

Sea t *un término que es libre para* x *en una fórmula* $\varphi(x,t)$, *y sea* $\varphi(t,t)$ *la fórmula que se obtiene a partir de* $\varphi(x,t)$ *por medio de reemplazar todas las ocurrencias libres de* x *por* t[1]. *Entonces,* $\varphi(t,t) \vdash \exists x\varphi(x,t)$.

Definición A.0.4 (Regla C o Regla de Elección)

Si se obtiene una deducción $\Gamma, \varphi(d) \vdash \gamma$, *y el símbolo constante* d *no aparece ni en* φ *ni en* γ *ni en* Γ, *entonces*

$$\Gamma, \exists x\varphi(x) \vdash \gamma$$

Además hay una deducción de γ *a partir de* $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ *en la cual* d *no aparece*[2].

[1]Es posible que $\varphi(x,t)$ tenga o no ocurrencias de t.
[2]Véase [Amor a].

A.1 Definiciones concernientes a la demostración del Primer Teorema de Gödel-Rosser.

Definición A.1.1 (ω-Consistencia para AP)

Sea $T \subseteq L^0_{AP}$. T es ω-Consistente si y sólo si para toda $\alpha \in L^1_{AP}$, si para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$Si \quad T_{AP} \vdash \alpha(\overline{n}), \quad entonces \quad T_{AP} \nvdash \exists w \neg\alpha(w).$$

A.2 Algunos Resultados cuya demostración no se incluye en los capítulos

Proposición A.2.1 *Sea φ una fórmula del lenguaje de una teoría T formal de primer orden con igualdad, y sea t un término de dicho lenguaje. Se afirma la siguiente particularización del axioma 7:*

$$x \approx t \rightarrow (\varphi(x,t) \rightarrow \varphi(x,x)).$$

Demostración A.2.1.1 *Sea*

$$\psi(y,y) \quad \leftrightharpoons \quad \varphi(x,y)$$

EL axioma 7 implica que

1. $T \vdash x \approx y \rightarrow (\psi(y,y) \rightarrow \psi(y,x))$
   Por Gen sobre la varible "y" y por A_4 obtenemos
2. $T \vdash x \approx t \rightarrow (\psi(t,t) \rightarrow \psi(t,x))$
   Usando la fórmula φ en el paso anterior se tiene que
3. $T \vdash x \approx t \rightarrow (\varphi(x,t) \rightarrow \varphi(x,x))$.

Proposición A.2.2 *Para todo número natural n se tiene que:*

$$Si \quad n \neq 0, \quad entonces \quad E' \vdash \neg\overline{n} \approx \overline{0}.$$

Demostración A.2.2.1 *Sea n un número natural tal que $n \neq 0$, entonces existe otro número natural m tal que el sucesor de m es n. De acuerdo a la proposición 2.3.7[3] tenemos que:*

1. $E' \vdash x \approx \overline{0} \rightarrow x \in f_s(\overline{m})$
   Como consecuencia de la definición proposición 2.3.2, $(m)^+ = n$ implica que

[3]Véase el capítulo 2.

2. $E' \vdash f_s(\overline{m}) \approx \overline{n}$

Por el axioma 7 y de (1) tenemos que

3. $E' \vdash f_s(\overline{m}) \approx \overline{n} \rightarrow \big((x \approx \overline{0} \rightarrow x \in f_s(\overline{m})) \rightarrow (x \approx \overline{0} \rightarrow x \in \overline{n})\big)$

Aplicando modus ponens dos veces obtenemos

4. $E' \vdash x \approx \overline{0} \rightarrow x \in \overline{n}$

Lo cual, por Gen, el axioma 4 y modus ponens, implica que

5. $E' \vdash \overline{0} \in \overline{n}$

Aplicando la regla existencial, obtenemos

6. $E' \vdash \exists x(x \in \overline{n})$

Por otro lado, de acuerdo a 1.3.1 tenemos que

7. $E' \vdash \neg(x \in \overline{0})$

Aplicando la proposición A.2.1 tenemos que

8. $E' \vdash y \approx \overline{0} \rightarrow (\forall x(\neg x \in \overline{0}) \rightarrow \forall x(\neg x \in y))$

Generalizando y aplicando el axioma 4 obtenemos

9. $E' \vdash \overline{n} \approx \overline{0} \rightarrow (\forall x(\neg x \in \overline{0}) \rightarrow \forall x(\neg x \in \overline{n}))$

De 7, el axioma 2 y modus ponens podemos deducir que

10. $E' \vdash \overline{n} \approx \overline{0} \rightarrow \forall x(\neg x \in \overline{n}))$

Lo cual, por cotrapositiva, es equivalente a

11. $E' \vdash \exists x(x \in \overline{n}) \rightarrow \neg(\overline{n} \approx \overline{0})$

Finalmente, aplicando modus ponens a los pasos (6) y (11), obtenemos

12. $E' \vdash \neg(\overline{n} \approx \overline{0})$.

Apéndice B

Lógicamente válidas

B.1

1. $((\alpha \wedge \beta) \vee (\gamma \wedge \delta)) \rightarrow (\alpha \vee \gamma)$
2. $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \beta \rightarrow \gamma)$
3. $\exists x(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\exists x\alpha \vee \exists x\beta)$
4. $(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma)$
5. $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
6. $(\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma))$
7. $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
8. $((\alpha \wedge \beta) \vee (\gamma \wedge \delta)) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \delta))$
9. $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$
10. $(\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$
11. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma))$
12. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma \rightarrow \beta \wedge \gamma)$
13. $(\alpha \rightarrow (\neg\gamma \rightarrow \neg\beta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$
14. $\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta \wedge \gamma)$
15. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \wedge (\beta \vee \gamma))$
16. $(\alpha \rightarrow \delta \wedge \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow (\delta \vee \gamma))$
17. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

18. $((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \wedge (\gamma \rightarrow \delta)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \delta))$

19. $(\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \vee (\alpha \rightarrow \gamma))$

20. $(\alpha \rightarrow (\beta \wedge \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$

21. $((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$

22. $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\delta \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\alpha \vee \delta) \rightarrow \beta)$

23. $((\alpha \wedge \beta) \vee (\gamma \wedge \beta)) \rightarrow ((\alpha \vee \gamma) \wedge \beta)$

24. $(\alpha \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma))$

25. $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$

26. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$

27. $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\gamma \rightarrow \delta)) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \delta))$

28. $((\alpha \rightarrow \beta) \vee (\alpha \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \vee \gamma))$

B.2

Sean x, y Variables, y sean α, β Fórmulas:

1.
   i. $\forall x\alpha \leftrightarrow \neg\exists x\neg\alpha$
   ii. $\exists x\alpha \leftrightarrow \neg\forall x\neg\alpha$
   iii. $\neg\forall x\alpha \leftrightarrow \exists x\neg\alpha$
   iv. $\neg\exists x\alpha \leftrightarrow \forall x\neg\alpha$
   v. $\forall x\alpha \rightarrow \exists x\alpha$

2. Sea α una ρ-fórmula en la cual la variable x no ocurre
   i. $\forall x\alpha \leftrightarrow \alpha$
   ii. $\exists x\alpha \leftrightarrow \alpha$

3. Si $\alpha(z)$ es una ρ-fórmula en la cual las variables x y y no ocurren
   i. $\forall x\alpha(z/x) \leftrightarrow \forall y\alpha(z/y)$
   ii. $\exists x\alpha(z/x) \leftrightarrow \exists y\alpha(z/y)$

4. Factorización - Distribución

i. $\forall x[\alpha \,\&\, \beta] \leftrightarrow [\forall x\alpha \,\&\, \forall x\beta]$
ii. $\exists x[\alpha \,\&\, \beta] \rightarrow [\exists x\alpha \,\&\, \exists x\beta]$
iii. $(\forall x\alpha \vee \forall x\beta) \rightarrow \forall x(\alpha \vee \beta)$
iv. $\exists x(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\exists x\alpha \vee \exists x\beta)$
v. $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta)$
vi. $(\exists x\alpha \rightarrow \exists x\beta) \rightarrow \exists \mathrm{x}(\alpha \rightarrow \beta)$
vii. $\forall x(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow [\forall x\alpha \leftrightarrow \forall x\beta]$
viii. $\exists x(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow [\exists x\alpha \leftrightarrow \exists x\beta]$

5. Combinación $\forall$ - $\exists$

i. $\exists x[\alpha \,\&\, \beta] \leftrightarrow [\forall x\alpha \,\&\, \exists x\beta]$
ii. $\forall x[\alpha \vee \beta] \rightarrow [\forall x\alpha \vee \exists x\beta]$
iii. $\forall x[\alpha \rightarrow \beta] \rightarrow [\exists x\alpha \rightarrow \exists x\beta]$
iv. $(\exists x\alpha \rightarrow \forall x\beta) \rightarrow \forall x(\alpha \rightarrow \beta)$
v. $\exists x[\alpha \rightarrow \beta] \leftrightarrow [\forall x\alpha \rightarrow \exists x\beta]$
vi. $(\forall x\alpha \rightarrow \forall x\beta) \rightarrow \exists x(\alpha \rightarrow \beta)$
vii. $\forall x[\alpha \leftrightarrow \beta] \rightarrow [\exists x\alpha \leftrightarrow \exists x\beta]$
viii. $\exists x[\alpha \rightarrow \beta] \leftrightarrow [\forall x\alpha \rightarrow \exists x\beta]$

6. Doble Cuantificación

i. $\forall x\forall x\alpha \leftrightarrow \forall x\alpha$
ii. $\exists x\exists x\alpha \leftrightarrow \exists x\alpha$
iii. $\forall x\forall y\alpha \leftrightarrow \forall y\forall x\alpha$
iv. $\exists x\exists y\alpha \leftrightarrow \exists y\exists x\alpha$
v. $\exists x\forall y\alpha \rightarrow \forall y\exists x\alpha$

7. Si x no ocurre en α

i. $\forall x[\alpha \vee \beta] \leftrightarrow [\alpha \vee \exists x\beta]$
ii. $\forall x[\alpha \rightarrow \beta] \leftrightarrow [\alpha \rightarrow \forall x\beta]$
iii. $\forall x[\beta \rightarrow \alpha] \leftrightarrow [\exists x\beta \rightarrow \alpha]$
iv. $\exists x[\alpha \,\&\, \beta] \leftrightarrow [\alpha \,\&\, \exists x\beta]$
v. $\exists x[\alpha \rightarrow \beta] \leftrightarrow [\alpha \rightarrow \exists x\beta]$
vi. $\exists x[\beta \rightarrow \alpha] \leftrightarrow [\forall x\beta \rightarrow \alpha]$

8. Paradoja de Roussell Generalizada

   i. $\neg\exists x\forall y[\alpha(y,x) \leftrightarrow \neg\alpha(y,y)]$

9. Principio del bebedor

   i. $\exists x[\beta(x) \rightarrow \forall x\beta(x)]$

10. Idempotencia

    i. $(\alpha \,\&\, \alpha) \leftrightarrow \alpha$
    ii. $(\alpha \vee \alpha) \leftrightarrow \alpha$

11. Conmutatividad

    i. $(\alpha \,\&\, \beta) \leftrightarrow (\beta \,\&\, \alpha)$
    ii. $(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\beta \vee \alpha)$
    iii. $(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \alpha)$

12. Asociatividad

    i. $(\alpha \,\&\, (\beta \,\&\, \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \,\&\, \beta) \,\&\, \gamma)$
    ii. $(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$
    iii. $(\alpha \leftrightarrow (\beta \leftrightarrow \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow \gamma)$

13. Distributividad

    i. $(\alpha \,\&\, (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \,\&\, \beta) \vee (\alpha \,\&\, \gamma))$
    ii. $(\alpha \vee (\beta \,\&\, \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \vee \beta) \,\&\, (\alpha \vee \gamma))$

14. Doble Negación

    i. $\neg(\neg\alpha) \leftrightarrow \alpha$

15. De Morgan

i. $\neg(\alpha \,\&\, \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$
ii. $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \,\&\, \neg\beta)$

16. Implicación Material

i. $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$

17. Negación de la Implicación Material

i. $\neg(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\alpha \,\&\, \neg\beta)$

18. Contrapositiva

i. $(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$
ii. $(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta)$

19. Importación - Exportación

i. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \leftrightarrow ((\alpha \,\&\, \beta) \rightarrow \gamma)$

20. Reflexividad o Identidad

i. $(\alpha \rightarrow \alpha)$
ii. $(\alpha \leftrightarrow \alpha)$

21. Transitividad

i. $((\alpha \rightarrow \beta) \,\&\, (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
ii. $((\alpha \leftrightarrow \beta) \,\&\, (\beta \leftrightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \leftrightarrow \gamma)$

22. Equivalencia Material

i. $(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \,\&\, (\beta \rightarrow \alpha))$
ii. $(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow ((\alpha \,\&\, \beta) \vee (\neg\alpha \,\&\, \neg\beta))$

23. Negación de la Equivalencia Material

i. $\neg(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vee \neg(\beta \rightarrow \alpha))$
ii. $\neg(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow ((\alpha \,\&\, \neg\beta) \vee (\neg\alpha \,\&\, \beta))$

24. Tercero Excluido

i. $\alpha \vee \neg\alpha$

25. No Contradicción

i. $\neg(\alpha \,\&\, \neg\alpha)$

26. Absorción

i. $\alpha \,\&\, (\beta \vee \neg\beta) \leftrightarrow \alpha$
ii. $\alpha \vee (\beta \,\&\, \neg\beta) \leftrightarrow \alpha$

27. Reducción a lo Absurdo

i. $(\alpha \rightarrow (\gamma \,\&\, \neg\gamma)) \leftrightarrow \neg\alpha$
ii. $((\alpha \,\&\, \neg\beta) \rightarrow (\gamma \,\&\, \neg\gamma)) \leftrightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$

28. Consecuentia Mirabilis

i. $(\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$

29. Igualdad

i. $\forall x[x \approx x]$
ii. $\forall x \forall y[x \approx y \rightarrow y \approx x]$
iii. $\forall x \forall y \forall z[(x \approx y \,\&\, y \approx z) \rightarrow x \approx z]$
iv. $\forall x \forall y[x \approx y \rightarrow (\alpha(x,x) \rightarrow \alpha(x,y))]$

Bibliografía

[Amor a] **Compacidad en la Lógica de Primer Orden y su relación con el teorema de Completud,** J.A. Amor, Coord. Serv. Ed., Facultad de Ciencias, UNAM, 1999, pp. 137 y 138.

[Amor b] **Teoría de Conjuntos para estudiantes de ciencias,** J.A. Amor, Coord. Serv. Ed., Facultad de Ciencias, UNAM, 1997, pp. 47-50.

[Amor c] **Un Refinamiento del Concepto de Sistema Axiomático,** J.A. Amor, Signos Filosóficos Vol. VI, No.11, UAM. Por aparecer.

[Amor d] **Por qué la igualdad no es definible en lógica de primer orden?,** J.A. Amor, Aportaciones Matemáticas No.32, SMM, 2003.

[Enderton] **A Mathematical Introduction to Logic,** H. B. Enderton, Academic Press, New York, 1972, pp. 45-52.

[Feferman] **Kurt Gödel Collected Works,** Vol.I, Solomon Feferman, Ed., Oxford University Press, 1986. Ed. Solomón Feferman.

[Gödel] **On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems,** Basic Books, New York, 1962. Traducción del artículo de Kurt Gödel de 1931.

[Heijenoort Van] **From Frege to Gödel, a source book in mathematical logic, 1879-1931,** Jean Van Heijenoort, Harvard University Press, 1967.

[Ladrière] **Les limitations Internes des Formalismes,** Jean Ladrière, Louvan E. Nauwelaerts éditeur, 1957, pp. 2-78.

[Mendelson] **Introduction to Mathematical Logic**, Elliot Mendelson, Wadsworth&Books, 1987.

[Mosterín] **Kurt Gödel Obras Completas,** Jesús Mosterín, Alianza Editorial, 1981. Ed. Jesús Mosterín.

[Rojas] **Sistemas Formales,** R. Rojas Barbachano, J.A. Amor Montaño, Vínculos Matemáticos. No.149. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, 1997, pp. 2-14.

[Torres a] **Los teoremas de Gödel,** C. Torres Alcaraz, Tesis de Maestría, Facultad de Ciencias, UNAM, 1988.

[Torres] **Teoremas limitativos de la lógica clásica de primer orden,** Yolanda Torres Falcón, Signos Filosóficos No.7, UAM, 2002, pp. 245-262.