

00574



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

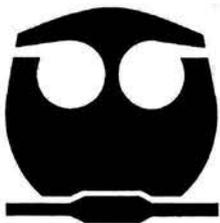
---

---

FACULTAD DE QUÍMICA

ESTIMACIÓN SIMULTÁNEA DE LAS CONDICIONES  
DE FRONTERA DE TRANSFERENCIA DE CALOR EN  
UN SISTEMA CON FLUJO 1D

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERÍA  
( M E T A L U R G I A )  
P R E S E N T A :  
I.Q.M. JORGE SERGIO TÉLLEZ MARTÍNEZ



MÉXICO, D.F.

2004



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Jurado asignado:

Presidente	Dr.	LUIS GERARDO TRÁPAGA MARTÍNEZ
Vocal	Dr.	MANUELA DÍAZ CRUZ
Secretario	M.I.	ARMANDO ORTÍZ PRADO
1er Suplente	Dr.	BERNARDO FABIÁN CAMPILLO ILLANES
2º Suplente	Dr.	JOSÉ ANTONIO BARRERA GODÍNEZ

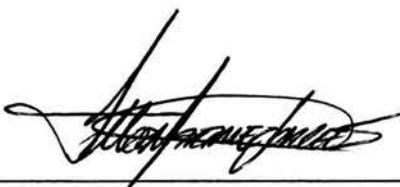
Sitio donde se desarrolló el tema:

EDIFICIO "D", FACULTAD DE QUÍMICA, U. N. A. M.

Asesor del tema:

  
\_\_\_\_\_  
Dr. JOSÉ BERNARDO HERNÁNDEZ MORALES

Sustentante:

  
\_\_\_\_\_  
I.Q.M. JORGE SERGIO TÉLLEZ MARTÍNEZ

## RESUMEN

La caracterización de condiciones de frontera térmica es una etapa crítica en el modelado del comportamiento metalúrgico de piezas sujetas a procesamiento térmico. En procesos como temple por rociado con agua existen dos o más fronteras térmicas que deben estimarse simultáneamente. Por esta razón en este trabajo se desarrollaron, verificaron y validaron programas de cómputo para estimar, simultáneamente, las dos fronteras térmicas activas para dos sistemas: 1) una placa y 2) un cilindro hueco, resolviendo el problema inverso de conducción de calor (IHCP), tomando como base la respuesta térmica medida por dos termopares localizados cerca de cada una de las fronteras. El problema inverso de conducción de calor es no lineal, por lo que su solución requiere de un método numérico. En este trabajo se generó un algoritmo basado en la técnica secuencial de especificación de la función (SFS) y el método de diferencias finitas, que fué codificado en lenguaje estructurado FORTRAN. Los requerimientos del programa de cómputo son de al menos dos respuestas térmicas medidas en el interior de cada probeta durante la experimentación. La validación del modelo matemático se realizó comparando el resultado de calcular el campo térmico de los sistemas placa y cilindro hueco con las condiciones de frontera térmicas estimadas por el problema inverso de conducción de calor, y las respuestas térmicas medidas. En ambos sistemas se obtuvieron buenos resultados. Las dos condiciones de frontera térmicas estimadas por el problema inverso de conducción de calor, muestran la fuerte dependencia con la evolución del campo térmico en los sistemas; en función de la transferencia de calor neta que pasa a través de ellos. Así, por ejemplo, en el enfriamiento de una placa, rociando una sola de sus caras, el valor estimado de la densidad de flujo de calor en la cara no rociada es el resultado de la suma de la extracción de calor asociado con el enfriamiento en aire quieto más la influencia del enfriamiento en la otra cara. En estas circunstancias, los valores de densidad de flujo de calor estimados para la cara no rociada son altos y, representan en una etapa inicial, el enfriamiento por un mecanismo combinado de radiación y convección por la exposición hacia el medio ambiente. En una segunda etapa a éste mecanismo se le suma el enfriamiento del frente que avanza desde la cara rociada. Resultados similares se obtienen para cualquier combinación de condiciones de frontera de calentamiento y/o enfriamiento.

## ABSTRACT

The characterization of thermal boundary conditions is a critical step in modelling the metallurgical response of metallic components subjected to thermal processing. In processes such as spray quenching there are two or more thermal boundaries that must be estimated simultaneously. To address this situation, we have developed, verified and validated computer programs designed to estimate, simultaneously, two active thermal boundary conditions for two experimental systems: 1) a plate and 2) a hollow cylinder, through the solution of the corresponding inverse heat conduction problem (IHCP), using the thermal response measured with two thermocouples located near each of the boundaries as input data. The inverse heat conduction problem is nonlinear and, therefore, requires the use of a numerical solution. In this work an algorithm was developed based on the sequential specification technique (SFS) and the finite difference method and coded using FORTRAN. The computer program requires, at least, two thermal responses measured within the probe during the experiments. The mathematical model was validated by comparing the results of the computed evolution of the thermal field, using the estimated thermal boundary conditions, with the measured values. For both systems studied, a good agreement was obtained when the computed and measured thermal responses were compared. The thermal boundary conditions estimated through the solution of the inverse heat conduction problem showed a strong dependency with the evolution of the thermal field within the systems, as a function of the net heat flow. Thus, for example, in the case of one-sided spray cooling of a plate, the estimated heat flux density function for the non-sprayed side reflected the sum of the heat extracted from both sides of the plate and, therefore, its magnitude was greater than that expected from cooling in still air alone. This was also observed for the other combinations of heating and/or cooling boundary condition studied experimentally.

# Agradecimientos

- Dr. J. Bernardo Hernández Morales, gracias por su ayuda profesional y dirigir este trabajo de tesis.
- M. en C. Alberto Ingalls Cruz y Dr. José Antonio Barrera Godínez, gracias por sus valiosas aportaciones para el desarrollo de esta tesis.
- Al jurado, gracias, porque sus comentarios enriquecieron este trabajo.
- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, gracias por otorgarme la beca con número de registro 166044.
- Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivo general . . . . .	4
1.2	Objetivos específicos . . . . .	4
1.3	Alcance . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Antecedentes</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Modelos matemáticos</b>	<b>12</b>
3.1	Problema directo de conducción de calor (DHCP) . . . . .	12
3.1.1	Cilindro hueco . . . . .	12
3.1.2	Placa . . . . .	14
3.2	Problema inverso de conducción de calor (IHCP) . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Verificación del modelo matemático.</b>	<b>31</b>
4.1	Primer ejercicio de verificación . . . . .	32
4.2	Segundo ejercicio de verificación . . . . .	38
4.3	Tercer ejercicio de verificación . . . . .	40
4.4	Cuarto ejercicio de verificación . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Dasarrollo Experimental</b>	<b>45</b>
5.1	Cilindro hueco . . . . .	45
5.2	Placa . . . . .	47

<b>6 Resultados y discusión</b>	<b>50</b>
6.1 Cilindro hueco . . . . .	50
6.2 Placa . . . . .	69
<b>7 Conclusiones</b>	<b>81</b>
<b>Apéndice A</b>	<b>87</b>

# Índice de figuras

2.1	Representación esquemática del problema inverso de conducción de calor (IHCP). En el esquema, $Y(t)$ representa la historia térmica registrada en la posición del termopar $x_1$ . C.F.1 representa una condición de frontera de simetría o conocida y C.F.2 esta especificada por $q(t)$ desconocida. . . . .	9
3.1	Representación esquemática del problema directo de conducción de calor uni-dimensional (radial), en un cilindro hueco. . . . .	13
3.2	Representación esquemática del problema directo de conducción de calor uni-dimensional, en una placa. . . . .	15
3.3	Representación esquemática del problema inverso de conducción de calor uni-dimensional, sobre una placa expuesta a dos historias de densidad de flujo de calor desconocidas. . . . .	16
3.4	Representación esquemática del problema inverso de conducción de calor uni-dimensional, sobre un cilindro hueco expuesto a dos historias de densidad de flujo de calor desconocidas. . . . .	17
3.3	Suposición de constancia temporal sobre dos historias independientes de densidad de flujo de calor, para su estimación por la técnica de especificación secuencial de la función (SFS). . . . .	18
3.5	Diagrama de flujo general para la codificación de los programas de cómputo para la solución del IHCP. . . . .	30
4.1	Efecto del patrón de discretización en la estimación de historias de coeficientes de transferencia de calor en función de la temperatura de superficie, manteniendo un número de pasos de tiempo futuros $r = 2$ (líneas). El cálculo se realizó a partir de las historias térmicas generadas en una placa con una función de coeficientes de transferencia de calor (símbolos cerrados) propuesta por Majorek et al. [33]. . . . .	33
4.2	Efecto del patrón de discretización en la estimación, por el IHCP, de historias de temperatura de superficie en una placa, manteniendo un número de pasos de tiempo futuros $r = 2$ (líneas). También se muestra la historia ficticia simulada por el DHCP (símbolos abiertos). . . . .	34

- 4.3 Historias de coeficientes de transferencia de calor como función de la temperatura de superficie estimadas por el IHCP (líneas), sobre las superficies de una placa ( $x = 0$  y  $x = L$ ). El cálculo se realizó a partir de las historias térmicas generadas por una función de coeficientes de transferencia de calor aplicada en ambas superficies propuesta por Majorek et al. [33] (símblos cerrados), utilizando un valor de pasos de tiempo futuros  $r = 2$  y una distribución nodal 10,40,10. . . . . 35
- 4.4 Efecto de la variación de el número de pasos de tiempo futuros ( $r = 2, 3$  y  $4$ ) sobre las historias de coeficientes de transferencia de calor como función de la temperatura de superficie estimadas por el IHCP (líneas), sobre la superficie de una placa ( $x = L$ ). El cálculo se realizó a partir de las historias térmicas generadas por una función de coeficientes de transferencia de calor propuesta por Majorek et al. [33] (símblos cerrados), utilizando una distribución nodal 10,40,10. . . . . 36
- 4.5 Efecto de la variación del número de pasos de tiempo futuros ( $r = 2$  y  $4$ ) en la estimación de la historia de temperatura de superficie por el IHCP, sobre la superficie de una placa ( $x = L$ ), utilizando una distribución nodal 10,40,10. . . . . 37
- 4.6 Comparación de las historias térmicas: estimada por la solución del IHCP (línea continua) y ficticia (símbolos abiertos) en la superficie de una placa ( $x = L$ ), utilizando un número de pasos de tiempo futuros  $r = 2$  y una distribución nodal 10,40,10. . . . . 37
- 4.7 Coeficientes de transferencia de calor como función de la temperatura de superficie estimados por el IHCP. La línea segmentada corresponde a la estimación sobre la superficie de una placa en  $x = L$ , y la línea continua a la estimación sobre  $x = 0$ . Los cálculos se realizaron a partir de las historias térmicas generadas por dos funciones diferentes de coeficientes de transferencia de calor aplicadas una en cada superficie (círculos y triángulos cerrados, respectivamente), utilizando un valor de pasos de tiempo futuros  $r = 2$  y una distribución nodal 10,40,10. . . . . 38
- 4.8 Comparación de las historias térmicas estimadas por la solución del IHCP. La línea continua corresponde a la estimación sobre la superficie de la placa en  $x = L$  y la línea segmentada a la estimación en la superficie  $x = 0$ . Las curvas ficticias obtenidas de la solución por el DHCP para cada superficie de la placa se muestran con triángulos y círculos abiertos, respectivamente. Los cálculos se realizaron utilizando un número de pasos de tiempo futuros  $r = 2$  y una distribución nodal 10,40,10. . . . . 39
- 4.9 Coeficientes de transferencia de calor como función de la temperatura de superficie estimada por el IHCP (línea continua) sobre la superficie de una placa ( $x = L$ ), utilizando un valor de pasos de tiempo futuros  $r = 2$  y una distribución nodal 10,40,10. Los cálculos se realizaron a partir de las historias térmicas generadas por una función de coeficientes de transferencia de calor (triángulos cerrados tomada de [36]). . . . . 40

4.10	Coeficientes de transferencia de calor como función de la temperatura de superficie estimada por el IHCP (línea continua) sobre la superficie de una placa ( $x = 0$ ), utilizando un valor de pasos de tiempo futuros $r = 2$ y una distribución nodal 10,40,10. Los cálculos se realizaron a partir de las historias térmicas generadas por una función de coeficientes de transferencia de calor (triángulos cerrados) tomada de [36]. . . . .	41
4.11	Comparación de las historias térmicas: estimada por la solución del IHCP (línea continua) y ficticia obtenida por la solución del DHCP (símbolos abiertos); en la superficie de una placa ( $x = L$ ), utilizando un número de pasos de tiempo futuros $r = 2$ y una distribución nodal 10,40,10. . . . .	42
4.12	Comparación de las historias térmicas: estimada por la solución del IHCP (línea continua) y ficticia calculada por el DHCP (símbolos abiertos); ambas en la superficie de una placa ( $x = 0$ ), utilizando un número de pasos de tiempo futuros $r = 2$ y una distribución nodal 10,40,10. . . . .	42
4.13	Coeficientes de transferencia de calor como función de la temperatura de superficie estimada por el IHCP (líneas continua y segmentada) sobre las superficies de un anillo, utilizando un valor de pasos de tiempo futuros $r = 2$ y una distribución nodal 10,40,10. Los cálculos se realizaron a partir de las historias térmicas generadas por una función de coeficientes de transferencia de calor (círculos cerrados) tomada de [36]. . . . .	43
4.14	Comparación de las historias térmicas estimadas por la solución del IHCP (líneas, continua y segmentada) y ficticia (símbolos cerrados), sobre las superficies interna y externa de un anillo utilizando un número de pasos de tiempo futuros $r = 2$ y una distribución nodal 10,40,10. . . . .	44
5.1	Especificación dimensional del cilindro hueco instrumentado. . . . .	46
5.2	Esquematación del dispositivo experimental montado para el cilindro hueco. . . . .	46
5.3	Especificación dimensional de la placa instrumentada. . . . .	48
5.4	Esquematación de la zona de impacto del abanico de agua sobre la placa instrumentada y setilde nalamiento de los termopares. . . . .	49
6.1	Esquematación de los procedimientos experimentales realizados con el cilindro hueco. . . . .	50
6.2	Historias térmicas registradas en las posiciones de los termopares TC1 (triángulos cerrados) y TC2 (círculos cerrados) en el cilindro hueco, durante el experimento del Caso 1. . . . .	51
6.3	Historias térmicas registradas en las posiciones de los termopares TC1 (triángulos cerrados) y TC2 (círculos cerrados) en el cilindro hueco, durante el experimento del Caso 2. . . . .	52
6.4	Historias térmicas registradas en las posiciones de los termopares TC1 (triángulos cerrados) y TC2 (círculos cerrados) en el cilindro hueco, durante el experimento del Caso 3. . . . .	53

6.5	Historias térmicas registradas en las posiciones de los termopares TC1 (triángulos cerrados) y TC2 (círculos cerrados) en el cilindro hueco, durante el experimento del Caso 4. . . . .	53
6.6	Historias de densidad de flujo de calor estimadas por la solución al IHCP, en la superficie interna (línea continua) y en la superficie externa (línea segmentada) del cilindro hueco. Caso1. . . . .	54
6.7	Resumen de las intensidades y direcciones de flujo de calor en el cilindro hueco para el análisis de resultados del procedimiento experimental del Caso 1. . . . .	56
6.8	Comparación de las historias térmicas: experimental (triángulos cerrados), estimada por el IHCP (línea continua) y simulada por el DHCP (triángulos abiertos); para el termopar TC1 localizado cerca de la superficie interna del cilindro hueco. Caso 1.	57
6.9	Comparación de las historias térmicas: experimental (círculos cerrados), estimada por el IHCP (línea continua) y simulada por el DHCP (círculos abiertos); para el termopar TC2 localizado cerca de la superficie externa del cilindro hueco. Caso 1.	57
6.10	Historias de flujo de calor estimadas por la solución al IHCP, en la superficie interna (línea continua) y en la superficie externa (línea segmentada) del cilindro hueco. Caso 1. . . . .	58
6.11	Historias de densidad de flujo de calor estimadas por la solución al IHCP, en la superficie interna (línea continua) y en la superficie externa (línea segmentada) del cilindro hueco. Caso 2. . . . .	59
6.12	Comparación de las historias térmicas: experimental (triángulos cerrados), estimada por el IHCP (línea continua) y simulada por el DHCP (triángulos abiertos); para el termopar TC1 localizado cerca de la superficie interna del cilindro hueco. Caso 2.	60
6.13	Comparación de las historias térmicas: experimental (círculos cerrados), estimada por el IHCP (línea continua) y simulada por el DHCP (círculos abiertos); para el termopar TC2 localizado cerca de la superficie externa del cilindro hueco. Caso 2.	60
6.14	Resumen de las intensidades y direcciones de flujo de calor en el cilindro hueco, para el análisis de resultados del procedimiento experimental del Caso 2. . . . .	61
6.15	Relación de densidades de flujo de calor como función del tiempo (círculos cerrados), mostrando un intervalo de estado cuasiestacionario del sistema. La razón de área externa/área interna es 4. . . . .	62
6.16	Historias del flujo de calor (en valor absoluto) a través de las superficies interna (línea continua) y externa (línea segmentada). Nótese el intervalo de estado cuasiestacionario del sistema. Caso 2. . . . .	62
6.17	Historias de densidad de flujo de calor estimadas por la solución al IHCP, en la superficie interna (línea continua) y en la superficie externa (línea segmentada) del cilindro hueco. Caso 3. . . . .	63
6.18	Comparación de las historias térmicas: experimental (triángulos cerrados), estimada por el IHCP (línea continua) y simulada por el DHCP (triángulos abiertos); para el termopar TC1 localizado cerca de la superficie interna del cilindro hueco. Caso 3.	64

6.19 Comparación de las historias térmicas: experimental (círculos cerrados), estimada por el IHCP (línea continua) y simulada por el DHCP (círculos abiertos); para el termopar TC2 localizado cerca de la superficie externa del cilindro hueco. Caso 3.	64
6.20 Historias de flujo de calor (en valor absoluto) a través de las superficies interna (línea continua) y externa (línea segmentada) del cilindro hueco. Caso 3. . . . .	65
6.21 Resumen de las intensidades y direcciones de flujo de calor en el cilindro hueco, para el análisis de resultados del procedimiento del Caso 3. . . . .	66
6.22 Historias de densidad de flujo de calor estimadas por la solución al IHCP, en la superficie interna (línea continua) y en la superficie externa (línea segmentada) del cilindro hueco. Caso 4. . . . .	67
6.23 Historias de flujo de calor a través de las superficies interna (línea continua) y externa (línea segmentada) del cilindro hueco. Caso 4. . . . .	67
6.24 Comparación de las historias térmicas: experimental (triángulos cerrados), estimada por el IHCP (línea continua) y simulada por el DHCP (triángulos abiertos); para el termopar TC1 localizado cerca de la superficie interna del cilindro hueco. Caso 4.	68
6.25 Comparación de las historias térmicas: experimental (círculos cerrados), estimada por el IHCP (línea continua) y simulada por el DHCP (círculos abiertos); para el termopar TC2 localizado cerca de la superficie externa del cilindro hueco. Caso 4.	68
6.26 Resumen de las intensidades y direcciones de flujo de calor en el cilindro hueco, para el análisis de resultados del procedimiento experimental del Caso 4. . . . .	69
6.27 Historias térmicas registradas en las posiciones de los termopares cerca de la cara rociada (TC1, TC2, TC3: símbolos cerrados) y cerca de la cara no rociada (TC4, TC5, TC6: símbolos abiertos), durante el enfriamiento de una placa desde 900 °C con el abanico de agua formado por una boquilla. . . . .	70
6.28 Efecto de la variación del número de pasos de tiempo futuros ( $r = 2, 3, 4$ y $5$ ), sobre la estimación de la historia de densidades de flujo de calor por el IHCP en la cara rociada de la placa. . . . .	71
6.29 Efecto de la variación del número de pasos de tiempo futuros ( $r = 2, 3, 4$ y $5$ ), sobre la estimación de la historia de temperatura de superficie por el IHCP en la cara rociada de la placa. . . . .	72
6.30 Efecto de la variación del número de pasos de tiempo futuros ( $r = 2, 3, 4$ y $5$ ), sobre la estimación de la historia de densidades de flujo de calor por el IHCP en la cara no rociada de la placa. . . . .	73
6.31 Efecto de la variación del número de pasos de tiempo futuros ( $r = 2, 4$ y $5$ ) sobre la estimación de la historia de temperatura de superficie por el IHCP en la cara no rociada de la placa. . . . .	74
6.32 Efecto de la variación del número de pasos de tiempo futuros ( $r = 2$ y $5$ ), sobre la estimación por el IHCP de la historia de temperatura en la posición de los termopares: TC2 cerca de la cara rociada (símbolos cerrados) y TC5 cerca de la cara no rociada (símbolos abiertos). . . . .	74

6.33	Coefficientes de transferencia de calor como función de la temperatura, aplicados como condición de frontera sobre la cara rociada para la simulación por el DHCP de las historias de distribución de temperatura dentro de la palca. . . . .	75
6.34	Coefficientes de transferencia de calor como función de la temperatura, aplicados como condición de frontera sobre la cara no rociada para la simulación por el DHCP de las historias de distribución de temperatura dentro de la palca. . . . .	76
6.35	Comparación de las historias de temperatura estimadas por el IHCP, en la superficie (línea segmentada con punto) y la posición del termopar (línea continua), con las simuladas por el DHCP, en la superficie (círculos abiertos) y la posición del termopar (cuadrados abiertos), y la medición experimental en la posición del termopar cercano a la superficie rociada de la placa (triángulos cerrados). . . . .	77
6.36	Comparación de las historias de temperatura estimadas por el IHCP, en la superficie (línea segmentada con punto) y la posición del termopar (línea continua), con las simuladas por el DHCP, en la superficie (círculos abiertos) y la posición del termopar (cuadrados abiertos), y la medición experimental en la posición del termopar cercano a la cara no rociada (triángulos cerrados). . . . .	78
6.37	Representación esquemática de la estimación, por el IHCP, del flujo de calor neto en dos casos: (a) sistema con plano de simetría térmica y (b) sistema sin plano de simetría térmica. . . . .	79

# Capítulo 1

## Introducción

Históricamente, los metales forman parte de las herramientas fundamentales en la evolución de las civilizaciones. Realizando observaciones detalladas y un amplio estudio científico, se han identificado los metales y aleaciones metálicas útiles para una tarea específica. Así, las piezas manufacturadas de diversos tipos de acero se encuentran por doquier en función de sus propiedades mecánicas.

A su vez, las propiedades mecánicas logradas en componentes de acero son función de su composición química y del procesamiento térmico aplicado. El procesamiento térmico de componentes de acero generalmente se realiza en las etapas finales de su producción y, se define como una combinación de operaciones de calentamiento y enfriamiento a una rapidez definida aplicadas a metales o aleaciones en estado sólido. Así, controlando los índices de calentamiento y enfriamiento, por efecto de la temperatura, se pretende generar transformaciones microestructurales a través de cambios de composición química localizados, especialmente si la aleación metálica presenta alotropía. La rapidez de enfriamiento adquiere gran importancia, especialmente si tiene un valor elevado (procesos de temple).

Los componentes de acero, deben someterse a un proceso térmico diseñado y controlado para que posean la microestructura óptima y, por lo tanto, las propiedades mecánicas deseadas; además de estar libre de grietas y distorsión, con la distribución óptima de esfuerzos residuales.

Desde hace algunas décadas, la relación entre las condiciones de procesamiento térmico y las propiedades mecánicas resultantes en un componente metálico, es el objetivo de in-

vestigación de ingenieros y científicos de varios países. La metodología de la ingeniería microestructural es la técnica de estudio que ha tenido mayor aceptación que cualquier otra, debido a la gran cantidad de información detallada que se puede obtener del proceso [1]. El método de análisis comprende conceptos de fenómenos de transporte, mecánica de sólidos y metalurgia física; en un intento por definir la interacción compleja entre los fenómenos térmicos, microestructurales y mecánicos. Típicamente, un modelo matemático acoplado debe incluir los tres módulos: 1) térmico, 2) microestructural, y 3) mecánico. El módulo térmico es fundamental para calcular la evolución microestructural y la generación de esfuerzos, por lo que se hace evidente la necesidad de calcular el campo térmico con la mayor exactitud posible. El desarrollo de este trabajo se enfoca en este rubro, contribuyendo a la generación de nuevos algoritmos que permitan simular efectivamente la evolución del campo térmico dentro de un componente metálico.

La metodología en el modelado de la evolución del campo térmico dentro del componente metálico, involucra la solución de ecuaciones diferenciales parciales que describen el fenómeno de transferencia de calor por conducción. En un caso de transferencia de calor por conducción en estado inestable, matemáticamente “bien planteado”, las condiciones inicial y de frontera están completamente especificadas y es posible obtener la solución única a este problema; el cuál se denomina, problema directo de conducción de calor (DHCP de sus iniciales en inglés). Las condiciones de frontera esencialmente están en términos de:

- 1) historias de flujo de calor transferido a través de las superficies expuestas, a o desde, algún medio de enfriamiento o calentamiento y
- 2) historias de temperatura de superficie (curvas de enfriamiento).

También es posible representar las condiciones de frontera como historias de densidades de flujo de calor o historias de coeficientes de transferencia de calor.

Durante el procesamiento térmico de componentes metálicos no se tiene la posibilidad de medir directamente flujos de calor en la superficie de los componentes metálicos. Además existen otros factores adversos como: 1) la complejidad de la medición de temperaturas de superficie en condiciones industriales (debido a las altas temperaturas involucradas en los procesos metalúrgicos) y 2) la incertidumbre asociada con la medición a través de sensores

(en especial si se presenta el fenómeno de transferencia de calor con ebullición). Por estas razones, la posibilidad de especificar completamente las condiciones de frontera por medios físicos durante un procesamiento térmico es nula.

En estas circunstancias comúnmente se recurre a modelos matemáticos que ayuden a estimar las condiciones de frontera térmicas. La densidad de flujo de calor y la temperatura en la superficie del componente, pueden estimarse matemáticamente a partir de la respuesta térmica medida en una o varias posiciones dentro de un componente. Con las historias térmicas registradas es posible formular una solución al llamado problema inverso de conducción de calor (IHCP de sus iniciales en inglés) [2]. El IHCP es un modelo matemático que no satisface matemáticamente los requerimientos de existencia, unicidad y estabilidad de la solución. No obstante, es un modelo utilizado efectivamente en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería.

En el análisis inverso, la determinación de la densidad de flujo de calor en la superficie de un componente tratado térmicamente constituye un problema de estimación de la función. La extracción o suministro de energía térmica a través de la superficie de un componente, se puede cuantificar matemáticamente como una función desconocida que se estima sin ningún conocimiento previo de este fenómeno en el tiempo. Por lo tanto, para determinar esta función es necesario estimar un gran número de componentes de densidad de flujo de calor.

Puesto que el IHCP depende de las respuestas térmicas medidas dentro del componente, es sensible a pequeñas fluctuaciones o errores en los valores de temperatura registrados. Este inconveniente se ha minimizado generando algoritmos que incorporan criterios que estabilizan la solución de estimación de la función [2]. Los métodos para resolver el IHCP pueden ser analíticos o numéricos y pueden aplicarse:

- 1) secuencialmente, estimando un elemento de densidad de flujo de calor por cada paso de tiempo
- 2) al dominio completo, donde todos los elementos de densidad de flujo de calor se determinan simultáneamente y
- 3) por el método de la función ensayo (combina los anteriores definiendo la unificación de ambos en una transición suave de dos casos extremos).

Debido a la naturaleza restrictiva de los métodos analíticos (que no pueden manejar problemas no lineales) prácticamente todos los problemas inversos necesitan resolverse numéricamente. Por lo tanto, el desarrollo de programas de cómputo que incluyan los algoritmos de solución a diversos problemas, constituyen una herramienta poderosa en el modelado de procesos al generar una fuente de información eficiente debido a la disponibilidad de equipo de cómputo de alto rendimiento.

En diversos sistemas la estimación de una sola condición de frontera térmica ayuda a modelar los campos térmicos, sin embargo, otros sistemas serían mejor caracterizados si pudiera estimarse más de una. Este tópico constituye el eje de este trabajo, por lo que se plantean los objetivos y el alcance siguientes:

## 1.1 Objetivo general

Generar un algoritmo basado en la técnica secuencial de especificación de la función (SFS de sus iniciales en inglés) y en el método de diferencias finitas, para caracterizar simultáneamente dos condiciones de frontera térmicas (estimando las historias de densidad de flujo de calor y de temperatura de superficie) sobre las superficies activas de un sólido de geometría simple, que experimenta transferencia de calor predominantemente uni-dimensional en ausencia de fuentes internas de calor.

## 1.2 Objetivos específicos

- Desarrollar y verificar un programa de cómputo para estimar simultáneamente las condiciones de frontera de transferencia de calor, basado en la respuesta térmica medida en al menos dos puntos específicos (uno cerca de cada superficie) en el interior de las probetas.
- Diseñar y fabricar las probetas de estudio
- Diseñar y construir los dispositivos de experimentación.

- Medir experimentalmente la respuesta térmica para combinaciones de calentamiento y enfriamiento en las superficies activas de las probetas.
- Validar el algoritmo para la solución del problema inverso.

## 1.3 Alcance

### *Transferencia de calor uni-dimensional*

De acuerdo al objetivo general, las probetas se diseñaron en función de características geométricas y dimensionales, tal que fuera posible obtener flujo de calor predominantemente uni-dimensional.

### *Geometría de las probetas*

Para la fabricación de las probetas se considero la geometría de una placa y un cilindro hueco. Las diferencias geométricas de las probetas representan dos casos de evaluación para el modelo matemático. Esencialmente, en el análisis de flujo de calor uni-dimensional, el cilindro hueco a diferencia de la placa presenta cambios de área de transferencia en la dirección del flujo.

### *Materiales*

Las condiciones experimentales para el cilindro hueco se diseñaron a bajas temperaturas, por lo que se eligió un material comercial con buena maquinabilidad, sin transformaciones de fase en el intervalo de temperaturas de trabajo y además que se conocieran sus propiedades termofísicas como función de la temperatura. El cilindro hueco se maquinó de acero AISI 1045.

Por otra parte, los experimentos con la placa se diseñaron para temperaturas altas, por lo que la probeta se fabricó de un acero inoxidable austenítico AISI 304; que no presenta ninguna transformación de fase y tiene una susceptibilidad relativamente menor a la oxidación a la temperatura de trabajo.

### *Propiedades termofísicas*

Las propiedades termofísicas como la conductividad térmica, densidad, y capacidad calorífica, son funciones de la temperatura. Las propiedades para los materiales AISI 1045 y AISI 304 están reportados en la literatura.

# Capítulo 2

## Antecedentes

El procesamiento térmico de componentes de aleaciones metálicas es una actividad crítica en los procesos de manufactura. La industria manufacturera se ve afectada enormemente cuando los componentes no cuentan con las características que exigen las normas de calidad. Específicamente, los componentes pueden no tener las propiedades mecánicas deseadas, están afectados por distorsión y/o presentan fracturas. Por lo tanto, en la mayoría de los casos las industrias invierten grandes recursos económicos para disponer de equipos altamente sofisticados que no necesariamente resuelven sus problemas. También obtienen costos de producción elevados realizando modificaciones de parámetros de proceso mediante un gran número de operaciones de prueba y error que, potencialmente serían útiles si se realizaran para cada uno de los componentes procesados [3]. Finalmente, esta gran inversión en costos de producción desemboca en los precios al consumidor. La estrategia de algunas compañías, es desarrollar a través de grupos de investigación programas de cómputo como herramientas de predicción [4, 5]. Estas herramientas generadas a través de modelos matemáticos, permitirán diseñar virtualmente el procesamiento térmico al que un componente puede ser sometido. Los resultados de esta simulación ayudarán a definir las condiciones de operación y a disminuir significativamente los costos de producción.

En este rubro, los modelos matemáticos deben incluir las interacciones entre el comportamiento mecánico del material y el comportamiento metalúrgico, influenciados directamente por la evolución del campo térmico dentro del componente durante el procesamiento térmico [6]. Así, la comprensión de los fenómenos de transferencia de calor ocurrida en los

procesos industriales, es el punto de partida para el diseño y control en la fabricación de componentes. Siendo el enfriamiento la etapa más importante del ciclo de proceso. La descripción precisa del campo térmico en esta etapa, es el primer paso de modelado matemático y requiere del conocimiento de las propiedades termofísicas del material, las condiciones de frontera térmicas y las fuentes internas de calor. Afortunadamente, las propiedades termofísicas como función de la temperatura de aleaciones metálicas de uso comercial se pueden encontrar en la literatura (ver por ejemplo, la Referencia [7]). Las fuentes internas de calor generalmente son producto del calor liberado por las transformaciones de fase ocurridas en el material procesado, estas pueden estimarse a través del análisis de evolución microestructural con modelos apoyados en el principio de aditividad y cinética de las transformaciones de fase [8–10].

La estimación de las condiciones de frontera térmicas es el parámetro crítico en cualquier modelo térmico, especialmente si se pretende inducir una rapidez de extracción de calor elevada. Recientemente, Hernández-Morales y colaboradores [11] obtuvieron buenos resultados estimando simultáneamente dos condiciones de frontera térmicas de placas enfriadas por rociado. En ese trabajo una placa de acero inoxidable AISI 304 se enfría desde una temperatura elevada por un abanico de agua de alta presión por una de sus superficies, mientras que la otra se enfría por contacto con el medio ambiente. Este tipo de procesos son comunes en el procesamiento térmico industrial. Ejemplos de estos son: el enfriamiento secundario en colada continua convencional [12], colada continua de planchón delgado [13] y los tratamientos termomecánicos [14–16]. En [13] se estima la condición de frontera térmica sobre la superficie de una placa de acero inoxidable AISI 304 enfriada por rociado, mientras que la superficie del lado opuesto se encuentra aislada térmicamente. El rociado se realizó verticalmente con una boquilla utilizada para enfriar planchones en el proceso de colada continua. Los resultados de la estimación se correlacionaron con el patrón de distribución de agua generado por la boquilla y se aplicaron directamente en planta. En [15, 16] se estima la condición de frontera térmica sobre una superficie de placas de aceros AISI 316L y DQSK en el enfriamiento por rociado, para simular el complejo proceso termomecánico Runout Table. En este proceso el rociado se aplica horizontalmente sobre la superficie de un planchón, mientras la superficie opuesta está en contacto con el medio ambiente. La condi-

ción de frontera en la superficie no rociada se supuso constante e igual a un enfriamiento típico al aire. Los resultados obtenidos ayudaron a mejorar las condiciones de operación en planta. Los procesos estudiados en [13,15,16] se caracterizan por la rapidez de extracción de calor elevada que se alcanza con el enfriamiento por rociado. Si pudieran estimarse todas las condiciones fronteras en las superficies activas durante el enfriamiento, se lograría una mejor optimización, puesto que se tendría información más detallada del proceso. Este aspecto es el eje del trabajo realizado en [11].

Tras la formulación de modelos para la estimación de más de una condición de frontera térmica se han realizado trabajos como los presentados en [17,18]. Lin y colaboradores [17] obtienen buenos resultados utilizando una condición de frontera conocida y la condición de frontera estimada en otro trabajo de investigación. Primero calcularon el campo térmico sobre un cilindro que experimenta transferencia de calor en estado estable en dos dimensiones (radial y angular), y con esta información volvieron a estimar las condiciones de frontera. El cilindro es calentado por una resistencia eléctrica embebida que se mantiene a temperatura constante a lo largo de su eje longitudinal; esta condición de frontera se considera una fuente puntual de energía. El cilindro se enfría a través de una corriente de aire a velocidad constante que fluye perpendicularmente sobre él; de esta condición de frontera se estimaron puntualmente los coeficientes de transferencia de calor como función de la temperatura de superficie. La corriente de aire envuelve la mayor parte del cuerpo del cilindro pero genera una estela turbulenta al final; lo que conduce al patrón bi-dimensional en la distribución de temperaturas. Para la estimación se establece que las propiedades termofísicas del material del cilindro y el aire no varían con la temperatura. Chen y colaboradores [18], también estiman con buenos resultados las historias de temperatura de superficie de dos lados adyacentes de un sistema rectangular, resolviendo un problema no lineal de transferencia de calor en estado inestable en dos dimensiones. En ese trabajo se calcula el campo térmico en estado transitorio con condiciones de frontera conocidas. A su vez, esta información es utilizada para calcular nuevamente las condiciones de frontera térmicas.

Los trabajos realizados en [11,13,15–18] tienen en común la utilización de la técnica de análisis inverso. Resolver el problema inverso de conducción de calor (IHCP), permite estimar las condiciones de frontera térmicas a partir de conocer la evolución térmica en

algunos puntos dentro de un sistema. Esto representa una alternativa, puesto que una determinación directa de temperaturas de superficie o flujos de calor, sobretodo en un proceso industrial, es prácticamente imposible.

A diferencia del problema directo de conducción de calor (DHCP), el cual implica estimar la evolución térmica dentro de un sistema con condiciones de frontera térmicas conocidas, el IHCP no tiene solución única. Por lo que un gran número de funciones que representen las condiciones de frontera térmica estimadas, pueden satisfacer matemáticamente la solución de un problema de transferencia de calor. Como en el IHCP no se tiene información de la forma funcional de las condiciones de frontera y además depende fuertemente de los patrones de distribución de temperaturas dentro de un sistema, la solución es altamente sensible a errores de medición. Estas características incluyen al análisis inverso en la clasificación de problemas matemáticamente “mal planteados” [2]. La Fig. 2.1 esquematiza el planteamiento matemático del IHCP uni-dimensional para la estimación de una sola condición de frontera térmica.

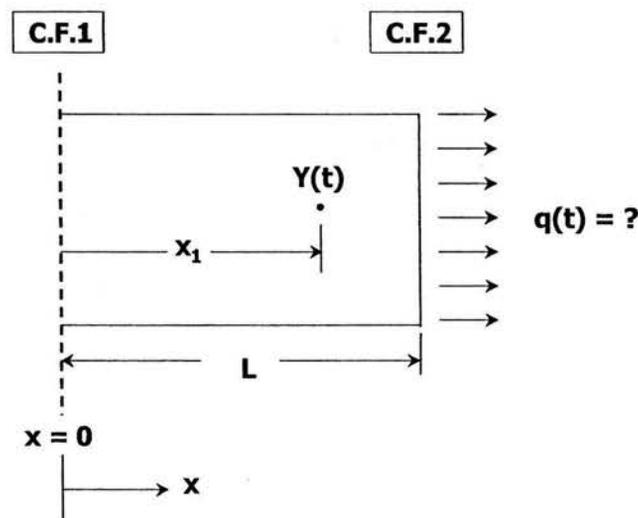


Figura: 2.1 Representación esquemática del problema inverso de conducción de calor (IHCP). En el esquema,  $Y(t)$  representa la historia térmica registrada en la posición del termopar  $x_1$ . C.F.1 representa una condición de frontera de simetría o conocida y C.F.2 esta especificada por  $q(t)$  desconocida.

Desde hace algunas décadas, se han realizado esfuerzos para desarrollar métodos de solución eficientes del IHCP en función del tiempo de cálculo [2], y técnicas analíticas y numéricas [19–21]. En la actualidad, el avance tecnológico de sistemas de cómputo robustos permite orientar los esfuerzos a desarrollar métodos de solución que ayuden a estabilizar la solución de los problemas inversos, induciendo mayor precisión en las estimaciones. Los métodos de solución pueden clasificarse de acuerdo a [2] en: 1) el método de especificación de la función, en el que se estima uno a uno cada componente de la condición de frontera térmica [2,20,21], 2) el método de dominio completo, en el cual se utiliza toda la información del fenómeno térmico para estimar simultáneamente todos los componentes de la condición de frontera [22], y 3) los métodos que intentan incorporar los dos métodos anteriores [23,24].

El método secuencial de especificación de la función (SFS) es el método más utilizado en la comunidad científica. En este algoritmo, la variación de densidad de flujo de calor en la frontera, se resuelve secuencialmente mediante la introducción del concepto de tiempos futuros, con lo cual se estabiliza la solución y se minimiza el efecto del ruido asociado con las mediciones. Matemáticamente, el algoritmo se basa en minimizar la suma del cuadrado de las diferencias entre la temperatura medida y calculada con respecto a la densidad de flujo de calor. Esta técnica de solución se ha aplicado en diversas investigaciones con aplicación industrial, resolviendo el IHCP no lineal uni-dimensional [25–28].

Otros investigadores se han enfocado en el estudio de la exactitud de los métodos de solución del IHCP. El estudio comprende el establecimiento de una metodología para definir el poder de resolución de un método en función de su sensibilidad a los errores de medición (varianza) y a su exactitud (sesgo determinístico) [29,30]. Chantasiriwan [30], realizó éste tipo de análisis sobre el método secuencial de especificación de la función, pero comparando tres distintos algoritmos para el problema no lineal de transferencia de calor uni-dimensional. Este investigador estudió el caso desarrollado por Beck y colaboradores [2] y dos variaciones sobre el método. El primer algoritmo [2] establece el criterio de mínimos cuadrados como una función de interpolación constante, al igual que la variación de la condición de frontera térmica a cierto número de pasos de tiempo futuros. Ambas consideraciones constituyen el criterio de cálculo para cada componente de la condición de frontera estimada. En el segundo algoritmo, este investigador propone un criterio de mínimos cuadrados con una

función de interpolación lineal y una variación de la condición de frontera térmica constante a cierto número de pasos de tiempo futuros. En el tercer algoritmo tanto la función de interpolación como la variación de la condición de frontera térmica varían linealmente. Los resultados muestran que con el tercer método se obtiene mejores estimaciones, al determinar una varianza de algoritmo mínima, así como una mayor exactitud. Chantasiriwan reporta un estudio sobre el tercer método en [31] y posteriormente lo expande a un sistema multidimensional en [32].

Resolver el IHCP para sistemas multidimensionales se vuelve una tarea compleja, más aún si los problemas son no lineales. Actualmente se encuentran pocos trabajos presentados para el análisis inverso en problemas de conducción de calor en dos y tres dimensiones, o bien para la estimación de más de una condición de frontera térmica en sistemas de flujo unidimensional.

# Capítulo 3

## Modelos matemáticos

Los sistemas de estudio para evaluar la efectividad del método de estimación simultánea de las fronteras térmicas son un cilindro hueco y una placa. En ambos casos se considerará flujo de calor únicamente en una dimensión. En este capítulo se presenta primero la formulación matemática de los DHCP's y luego la de los IHCP's correspondientes. También se desarrolla el algoritmo de solución para los IHCP's.

### 3.1 Problema directo de conducción de calor (DHCP)

#### 3.1.1 Cilindro hueco

Un cilindro hueco experimenta un calentamiento o enfriamiento desde una temperatura inicial  $T_0$  por sus caras interna y/o externa. El flujo de calor ocurre en la dirección radial únicamente, Fig. 3.1. Una combinación de calentamiento y enfriamiento sobre las superficies del cilindro hueco, generará diversos patrones de flujo de calor. La formulación matemática del DHCP se detalla a continuación.

La ecuación de conducción de calor en estado inestable, en una dimensión (radial) y sin fuentes de calor internas para un cilindro, esta dada por:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1)$$

donde  $k$ ,  $\rho$  y  $C_p$  son la conductividad térmica, la densidad y la capacidad térmica del material

de la placa respectivamente y son dependientes de la temperatura, por lo cual la Ec.(3.1) es no lineal. Las variables  $r$ ,  $T$  y  $t$  representan el radio del cilindro, la temperatura y el tiempo respectivamente.

Las condiciones de frontera para el sistema bajo estudio se escriben como:

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = q_1(t) \quad r = R_e \quad t > 0 \quad (3.2)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial r} = q_2(t) \quad r = R_i \quad t > 0 \quad (3.3)$$

donde  $R_i$  y  $R_e$  son los radios interno y externo del cilindro hueco, respectivamente. En las Ecs. 3.2 y 3.3,  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$  representan funciones de densidad de flujo de calor con respecto del tiempo.

La condición inicial se escribe como:

$$T(r, t) = T_0(r, t) \quad R_i \leq r \leq R_e \quad t = 0 \quad (3.4)$$

donde  $T_0(r, t)$  representa la temperatura inicial en el cuerpo del cilindro. La solución a este sistema determina la evolución del campo térmico durante el proceso de enfriamiento o calentamiento.

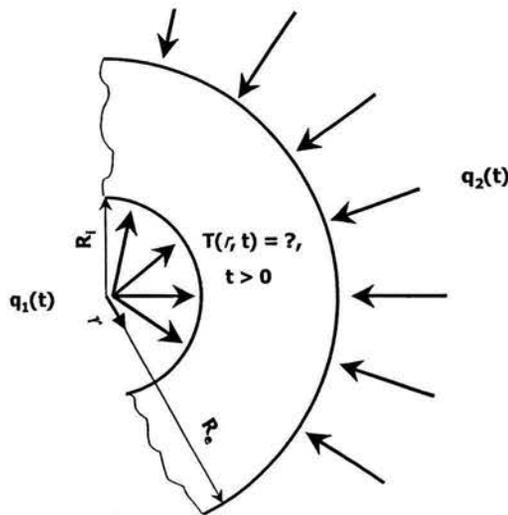


Figura: 3.1 Representación esquemática del problema directo de conducción de calor uni-dimensional (radial), en un cilindro hueco.

El DHCP formulado es no lineal, por lo tanto debe resolverse numéricamente. Para esto se utilizó el programa de cómputo comercial DEFORM3D-HT<sup>TM</sup>, basado en el método de elemento finito, para resolver el DHCP con dos objetivos:

- 1) Obtener información de campos térmicos ficticios que ayudáran a verificar el algoritmo del IHCP.
- 2) Simular los campos térmicos con las fronteras térmicas estimadas para validar el algoritmo del IHCP.

Además, la solución numérica del IHCP requiere de un algoritmo de solución del DHCP embebido en el mismo código. Esto se logró aplicando el método de diferencias finitas para generar los sistemas de ecuaciones algebraicas correspondientes.

### 3.1.2 Placa

La placa se enfría desde una temperatura inicial  $T_0$  por dos de sus caras a diferentes condiciones de enfriamiento. La placa experimenta transferencia de calor predominantemente uni-dimensional sobre su espesor, Fig. 3.2. La formulación matemática del DHCP se detalla a continuación.

La ecuación de conducción de calor en estado inestable, en una dimensión y sin fuentes de calor internas para una placa, esta dada por:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.5)$$

donde  $k$ ,  $\rho$  y  $C_p$  son la conductividad térmica, la densidad y la capacidad térmica del material del cilindro respectivamente y son dependientes de la temperatura, por lo cual la Ec. (3.5) también es no lineal. Las variables  $x$ ,  $T$  y  $t$  representan el espesor de la placa, la temperatura y el tiempo respectivamente.

Las condiciones de frontera para el sistema bajo estudio se escriben como:

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q_1(t) \quad x = 0 \quad t > 0 \quad (3.6)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = q_2(t) \quad x = L \quad t > 0 \quad (3.7)$$

donde  $L$  representa el espesor total de la placa. En las Ecs. 3.6 y 3.7,  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$  representan funciones de densidad de flujo de calor con respecto del tiempo.

La condición inicial se escribe como:

$$T(x, t) = T_0(x, t) \quad 0 \leq x \leq L \quad t = 0 \quad (3.8)$$

donde  $T_0(r, t)$  representa la temperatura inicial en el cuerpo de la placa. La solución a este sistema determina la evolución del campo térmico durante el proceso de enfriamiento.

Similarmente al caso del cilindro, el DHCP formulado es un problema no lineal y debe resolverse numéricamente. De nuevo, se utilizó el programa de cómputo comercial DEFORM3D-HT<sup>TM</sup> para resolver el DHCP con los mismos objetivos mencionados en el caso del cilindro hueco.

De nuevo, se aplicó el método de diferencias finitas para los cálculos requeridos en el algoritmo del IHCP.

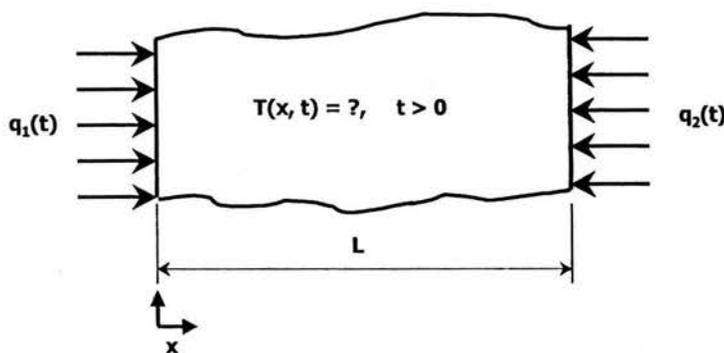


Figura: 3.2 Representación esquemática del problema directo de conducción de calor uni-dimensional, en una placa.

### 3.2 Problema inverso de conducción de calor (IHCP)

Las Figs. 3.3 y 3.4 muestran, respectivamente, una placa y un cilindro hueco que experimentan transferencia de calor en una dirección. Los sistemas consisten de una placa de espesor

$L$  y un cilindro de radios interno y externo  $R_i$  y  $R_e$ , respectivamente. Ambos sistemas se encuentran inicialmente a una temperatura  $T_0$ . Estos sistemas transfieren calor en forma predominantemente uni-dimensional a través de dos de sus caras. Las densidades de flujo de calor como función del tiempo sobre las superficies de la placa en  $x = 0$  y  $x = L$ , y  $r = R_i$ , y  $r = R_e$  para el cilindro, están representadas por  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$  respectivamente. Para ambos sistemas  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$  son desconocidas.

La formulación matemática de los problemas inversos se escribe de la misma forma que para el problema directo de conducción de calor, pero ahora las condiciones de frontera son desconocidas:  $q_1(t) = ?$ ,  $q_2(t) = ?$ . Las Ecs. 3.1 a 3.4 describen el problema para el cilindro, mientras que las Ecs. 3.5 a 3.8 lo hacen para la placa.

Ahora el objetivo es encontrar el mejor estimado de cada historia de densidad de flujo de calor utilizando al menos dos historias térmicas medidas dentro de los cuerpos ( $Y_j$ ,  $j = 2$ ), una cerca de cada superficie durante el proceso de enfriamiento. Los puntos de medición son  $x_1$  y  $x_2$  en la placa, y  $r_1$  y  $r_2$  en el cilindro, respectivamente.

La estimación de las funciones de densidad de flujo, puede realizarse por los métodos de especificación secuencial de la función, regularización ó el procedimiento que combina ambos métodos llamado método de la función ensayo. El algoritmo desarrollado en este trabajo se basa en el método secuencial de especificación de la función, propuesto por Beck y colaboradores para la estimación de una sola frontera térmica para flujo uni-dimensional [2].

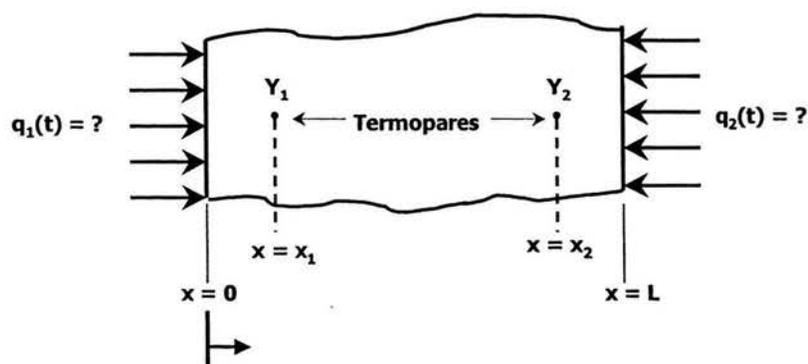


Figura: 3.3 Representación esquemática del problema inverso de conducción de calor uni-dimensional, sobre una placa expuesta a dos historias de densidad de flujo de calor desconocidas.

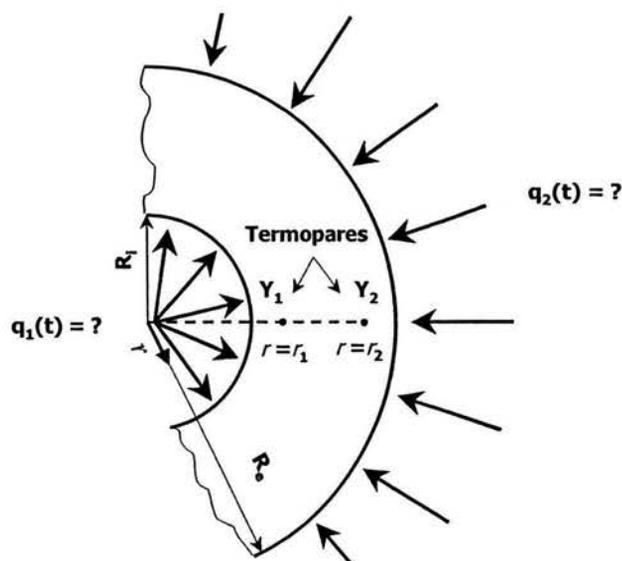


Figura: 3.4 Representación esquemática del problema inverso de conducción de calor uni-dimensional, sobre una cilindro hueco expuesto a dos historias de densidad de flujo de calor desconocidas.

En el algoritmo del método secuencial de especificación de la función, se estima un componente de la densidad de flujo de calor por cada paso de tiempo de cálculo. Para esto, se requiere conocer como varía la temperatura del sistema a intervalos de tiempo definidos, en los puntos donde se localizan los sensores. Es decir, se estima un valor de densidad de flujo de calor asociado a la distribución de temperaturas en el sistema para cada instante. Para iniciar el cálculo se propone un valor para  $q(M)$ , es decir la densidad de flujo de calor al tiempo  $t_M$ ; este valor puede ser incluso cero y se supone constante para varios pasos de tiempo hacia adelante. Esta cantidad de pasos de tiempo se establece al introducir el parámetro  $r$  ( $r$  en negritas), y se le llama *número de pasos de tiempo futuros*. Entonces, se supone que los elementos de densidad de flujo de calor son temporalmente constantes sobre  $r - 1$  pasos de tiempo hacia adelante. En otras palabras, para el paso de cálculo  $M$  (correspondiente a  $t = t_M$ ), las densidades de flujo de calor,  $q_k(M)$  con  $k = 1, 2$ , se suponen temporalmente iguales hasta un tiempo  $t_{M+r-1}$ :

$$q_1(M) = q_1(M + 1) = \dots = q_1(M + r - 1) \quad (3.9)$$

$$q_2(M) = q_2(M + 1) = \dots = q_2(M + r - 1) \quad (3.10)$$

lo cual también se muestra esquemáticamente en la Fig. 3.5, donde los valores de los elementos de densidad de flujo de calor a  $t_0, t_1, \dots, t_{M-1}$ , ya habrían sido calculados.

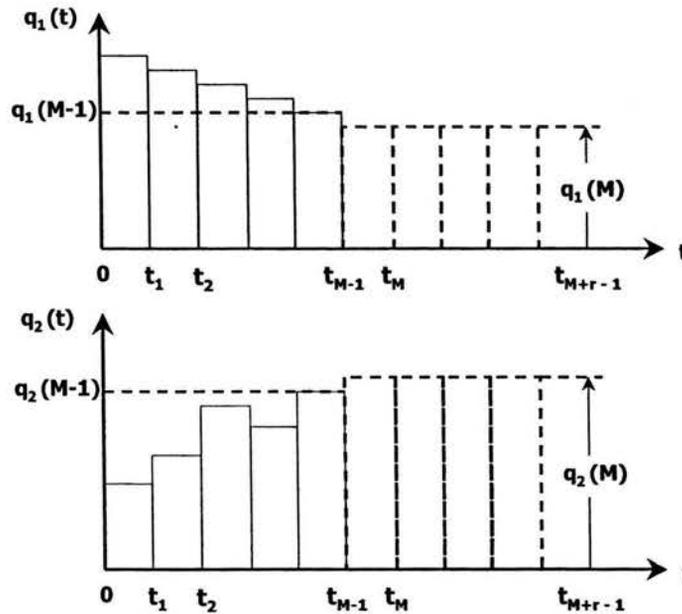


Figura: 3.5 Suposición de constancia temporal de dos historias independientes de densidad de flujo de calor, para su estimación por la técnica secuencial de especificación de la función (SFS) [2].

Finalmente la estimación de la densidad de flujo de calor al tiempo  $M$  se realizará a través del sistema de ecuaciones de diferencias finitas, planteadas para el DHCP, en conjunto con un criterio de mínimos cuadrados. El desarrollo matemático para resolver el IHCP se detalla más adelante.

Si el parámetro  $r$  tiene un valor de 1, entonces la estimación de cada valor de densidad de flujo de calor dependería solo del valor de temperatura registrado en la medición a cada instante de cálculo. Esto desestabilizaría fuertemente la solución del IHCP, puesto que una pequeña variación en la temperatura introducida por un error aleatorio generaría estimaciones disparadas de densidades de flujo de calor hacia valores positivos o negativos. Por lo tanto, si en cada paso de cálculo  $r > 1$  entonces la estimación de cada componente de

la función  $q(t)$  se realizará con más información del comportamiento térmico del sistema y consecuentemente con mayor estabilidad al aplicar el criterio de mínimos cuadrados.

Además, se considera que las propiedades termofísicas del material cambian poco para pequeños cambios de temperatura de un instante a otro. Es por esto que, para el cálculo de la densidad de flujo de calor en el paso de tiempo  $M$ , las propiedades termofísicas conservan el valor calculado en el paso de tiempo anterior ( $M - 1$ ); con esto se "linealiza temporalmente" las Ecs. 3.1 y 3.5. Entonces la distribución de temperaturas en las posiciones de los termopares dentro de los cuerpos puede darse en forma de:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\mathbf{q}=0} + \mathbf{X}\mathbf{q} \quad (3.11)$$

donde  $\mathbf{T}_{\mathbf{q}=0}$  es el vector de temperatura calculado con  $\mathbf{q} = 0$  y  $\mathbf{X}$  representa la matriz del cambio de temperatura en la posición de los sensores con respecto a un cambio en las densidades de flujo de calor <sup>1</sup>. Este término es llamado la matriz de coeficientes de sensibilidad.

En un problema donde sólo se determinará una única historia de densidad de flujo de calor, con un solo termopar, el coeficiente de sensibilidad podría escribirse matemáticamente como:

$$T_{j,M+r-1;\mathbf{q}} = \frac{\partial T_{j,M+r-1}}{\partial q_M} \quad (3.12)$$

Explícitamente, para el caso de dos componentes de densidad de flujo de calor ( $k = 2$ ) a cada tiempo, dos sensores de temperatura ( $j = 2$ ) y  $\mathbf{r}$  pasos de tiempo futuros, los términos de la Ec. 3.11 son:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_1(M) & T_2(M) \\ T_1(M+1) & T_2(M+1) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ T_1(M+r-1) & T_2(M+r-1) \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

<sup>1</sup> En las ecuaciones subsecuentes, al escribir una variable con negritas se indica un vector o una matriz.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1(M) & q_2(M) \\ q_1(M+1) & q_2(M+1) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ q_1(M+r-1) & q_2(M+r-1) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(1) & & & & \\ \mathbf{a}(2) & \mathbf{a}(1) & & & \\ \mathbf{a}(3) & \mathbf{a}(2) & \mathbf{a}(1) & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \mathbf{a}(r) & \mathbf{a}(r-1) & \cdot & \cdot & \cdot & \mathbf{a}(1) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$\mathbf{X}$  es la matriz de coeficientes de sensibilidad y por lo tanto:

$$\mathbf{a}(i) = \begin{bmatrix} a_{11}(i) & a_{12}(i) \\ a_{21}(i) & a_{22}(i) \end{bmatrix}, \quad a_{jk}(i) = \frac{\partial T(\mathbf{x}_j, t_i)}{\partial [q_k(1)]} \quad (3.16)$$

donde  $a_{jk}(i)$  representa los coeficientes de sensibilidad. Cada elemento  $\mathbf{x}_j$  representa la posición de los termopares al interior del sistema.

Para permitir una mayor generalidad:

$$\mathbf{q} = \mathbf{A}\beta \quad (3.17)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(1) \\ \mathbf{A}(2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{A}(r) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

y

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} q_1(M) \\ q_2(M) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Para la suposición de temporalidad en  $\mathbf{q}$ , se tiene:

$$\mathbf{A}(i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

por lo tanto, la matriz de coeficientes de sensibilidad se redefinirá como:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{XA} \quad (3.21)$$

En la técnica secuencial de especificación de la función, utilizar pasos de tiempo de cálculo pequeños puede ayudar a obtener la mayor información acerca de las densidades de flujo de calor. Sin embargo, esta consideración puede promover la desestabilización de la solución del IHCP, debido a la sensibilidad de la técnica a fluctuaciones en las temperaturas medidas de un instante a otro (especialmente cuando la temperatura cambia poco y hay oscilaciones generadas por ruido). Para disminuir esta dificultad, se utiliza en conjunto con los valores de temperatura futuros un criterio de mínimos cuadrados dado por la siguiente expresión:

$$S = (\mathbf{Y} - \mathbf{T})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{T}) \quad (3.22)$$

Introduciendo  $\boldsymbol{\beta}$  en la Ec. 3.21 se tiene que:

$$\mathbf{Z}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{XA}\boldsymbol{\beta} \quad (3.23)$$

de acuerdo a la Ec. 3.17, al substituir la Ec. 3.23 en 3.11 se tiene que:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\beta=0} + \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta} \quad (3.24)$$

por lo tanto, al substituir la ecuación anterior en 3.22, resulta una ecuación en términos de  $\mathbf{Z}$  y  $\boldsymbol{\beta}$ :

$$S = (\mathbf{Y} - \mathbf{T}_{\beta=0} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{T}_{\beta=0} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}) \quad (3.25)$$

Minimizando la Ec. 3.25 con respecto al vector de densidades de flujo de calor  $\left(\frac{\partial S}{\partial \beta}\right) = 0$ , se obtiene el vector de densidades de flujo de calor estimado  $\hat{\beta}$ .

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{T}_{\beta=0}) \quad (3.26)$$

Para el ejemplo propuesto en [2] de dos historias de densidad de flujo de calor ( $q_k(t)$ ,  $k = 2$ ) desconocidas, y tres historias de temperatura medidas ( $j = 3$ ), utilizando dos pasos de tiempo futuros para el cálculo ( $r = 2$ ) se tiene:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(1) & 0 \\ \mathbf{a}(2) & \mathbf{a}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}(1) \\ \mathbf{A}(2) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

por lo tanto:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(1)\mathbf{A}(1) + 0 \\ \mathbf{a}(2)\mathbf{A}(1) + \mathbf{a}(1)\mathbf{A}(2) \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

si  $r = 2$  y  $j = 3$ , entonces:

$$\mathbf{a}(1) = \begin{bmatrix} a_{11}(1) & a_{12}(1) \\ a_{21}(1) & a_{22}(1) \\ a_{31}(1) & a_{32}(1) \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{a}(2) = \begin{bmatrix} a_{11}(2) & a_{12}(2) \\ a_{21}(2) & a_{22}(2) \\ a_{31}(2) & a_{32}(2) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

por lo tanto:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}(1) + 0 & 0 + a_{12}(1) \\ a_{21}(1) + 0 & 0 + a_{22}(1) \\ a_{31}(1) + 0 & 0 + a_{32}(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} a_{11}(2) + 0 & 0 + a_{12}(2) \\ a_{21}(2) + 0 & 0 + a_{22}(2) \\ a_{31}(2) + 0 & 0 + a_{32}(2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}(1) + 0 & 0 + a_{12}(1) \\ a_{21}(1) + 0 & 0 + a_{22}(1) \\ a_{31}(1) + 0 & 0 + a_{32}(1) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{XA} = \begin{bmatrix} a_{11}(1) & a_{12}(1) \\ a_{21}(1) & a_{22}(1) \\ a_{31}(1) & a_{32}(1) \\ a_{11}(1) + a_{11}(2) & a_{12}(1) + a_{12}(2) \\ a_{21}(1) + a_{21}(2) & a_{22}(1) + a_{22}(2) \\ a_{31}(1) + a_{31}(2) & a_{32}(1) + a_{32}(2) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Si la matriz  $\mathbf{Z}^T$  es:

$$\mathbf{Z}^T = \begin{bmatrix} a_{11}(1) & a_{21}(1) & a_{31}(1) & a_{11}(1) + a_{11}(2) & a_{21}(1) + a_{21}(2) & a_{31}(1) + a_{31}(2) \\ a_{12}(1) & a_{22}(1) & a_{32}(1) & a_{12}(1) + a_{12}(2) & a_{22}(1) + a_{22}(2) & a_{32}(1) + a_{32}(2) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

el producto  $\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}$  para  $r = 2$ , da origen a una matriz de dos renglones por dos columnas, cuyos elementos son:

$$C_{11} = \begin{bmatrix} a_{11}(1)a_{11}(1) + a_{21}(1)a_{21}(1) + a_{31}(1)a_{31}(1) + \\ [a_{11}(1) + a_{11}(2)][a_{11}(1) + a_{11}(2)] + \\ [a_{21}(1) + a_{21}(2)][a_{21}(1) + a_{21}(2)] + \\ [a_{31}(1) + a_{31}(2)][a_{31}(1) + a_{31}(2)] \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} a_{11}(1)a_{12}(1) + a_{21}(1)a_{22}(1) + a_{31}(1)a_{32}(1) + \\ [a_{11}(1) + a_{11}(2)][a_{12}(1) + a_{12}(2)] + \\ [a_{21}(1) + a_{21}(2)][a_{22}(1) + a_{22}(2)] + \\ [a_{31}(1) + a_{31}(2)][a_{32}(1) + a_{32}(2)] \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} a_{12}(1)a_{11}(1) + a_{22}(1)a_{21}(1) + a_{32}(1)a_{31}(1) + \\ [a_{12}(1) + a_{12}(2)][a_{11}(1) + a_{11}(2)] + \\ [a_{22}(1) + a_{22}(2)][a_{21}(1) + a_{21}(2)] + \\ [a_{32}(1) + a_{32}(2)][a_{31}(1) + a_{31}(2)] \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

lo que indica que  $C_{12} = C_{21}$ .

Por último:

$$C_{22} = \begin{bmatrix} a_{12}(1)a_{12}(1) + a_{22}(1)a_{22}(1) + a_{32}(1)a_{32}(1) + \\ [a_{12}(1) + a_{12}(2)][a_{12}(1) + a_{12}(2)] + \\ [a_{22}(1) + a_{22}(2)][a_{22}(1) + a_{22}(2)] + \\ [a_{32}(1) + a_{32}(2)][a_{32}(1) + a_{32}(2)] \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

entonces la matriz  $\mathbf{Z}^T\mathbf{Z}$  se puede escribir como:

$$\mathbf{Z}^T\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

de la cual su matriz inversa es:

$$(\mathbf{Z}^T\mathbf{Z})^{-1} = \frac{1}{(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{12})} \begin{bmatrix} C_{22} & -C_{12} \\ -C_{12} & C_{11} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Cada componente  $C_{uv}$  para  $j = m = 3$  puede escribirse en forma simplificada como:

$$C_{uv} = \sum_{m=1}^3 a_{mu}(1)a_{mv}(1) + \sum_{m=1}^3 [a_{mu}(1) + a_{mu}(2)][a_{mv}(1) + a_{mv}(2)] \quad (3.40)$$

$u$  y  $v$  toman, cada uno, los valores 1 y 2, y representan los índices de cada componente  $C$ .

Por otra parte, la matriz  $\mathbf{Z}^T$ , puede escribirse como:

$$\mathbf{Z}^T = (\mathbf{XA})^T \quad (3.41)$$

aplicando propiedades de la transpuesta:

$$(\mathbf{XA})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{X}^T \quad (3.42)$$

donde si:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}(2) & \mathbf{a}(1) \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

entonces su transpuesta se puede escribir como:

$$\mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T(1) & \mathbf{a}^T(2) \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}^T(1) \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

cuyos elementos son:

$$\mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}(1) & a_{21}(1) & a_{31}(1) \\ a_{12}(1) & a_{22}(1) & a_{32}(1) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11}(2) & a_{21}(2) & a_{31}(2) \\ a_{12}(2) & a_{22}(2) & a_{32}(2) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11}(1) & a_{21}(1) & a_{31}(1) \\ a_{12}(1) & a_{22}(1) & a_{32}(1) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

por lo tanto, si  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$  entonces:

$$\mathbf{Z}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(1) & \mathbf{A}(2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^T(1) & \mathbf{a}^T(2) \\ \mathbf{0} & \mathbf{a}^T(1) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

o bien:

$$\mathbf{Z}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(1)\mathbf{a}^T(1) & \mathbf{A}(1)\mathbf{a}^T(2) + \mathbf{A}(2)\mathbf{a}^T(1) \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

donde:

$$\mathbf{A}(1)\mathbf{a}^T(1) = \begin{bmatrix} a_{11}(1) & a_{21}(1) & a_{31}(1) \\ a_{12}(1) & a_{22}(1) & a_{32}(1) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

y

$$\mathbf{A}(1)\mathbf{a}^T(2) + \mathbf{A}(2)\mathbf{a}^T(1) = \begin{bmatrix} a_{11}(2) & a_{21}(2) & a_{31}(2) \\ a_{12}(2) & a_{22}(2) & a_{32}(2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}(1) & a_{21}(1) & a_{31}(1) \\ a_{12}(1) & a_{22}(1) & a_{32}(1) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

cuya suma resulta en:

$$\mathbf{A}(1)\mathbf{a}^T(2) + \mathbf{A}(2)\mathbf{a}^T(1) = \begin{bmatrix} a_{11}(2) + a_{11}(1) & a_{21}(2) + a_{21}(1) & a_{31}(2) + a_{31}(1) \\ a_{12}(2) + a_{12}(1) & a_{22}(2) + a_{22}(1) & a_{32}(2) + a_{32}(1) \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

para que  $\mathbf{Z}^T$  desarrollada pueda escribirse como la matriz de dos componentes:

$$\begin{bmatrix} a_{11}(1) & a_{21}(1) & a_{31}(1) \\ a_{12}(1) & a_{22}(1) & a_{32}(1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}(2) + a_{11}(1) & a_{21}(2) + a_{21}(1) & a_{31}(2) + a_{31}(1) \\ a_{12}(2) + a_{12}(1) & a_{22}(2) + a_{22}(1) & a_{32}(2) + a_{32}(1) \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Si se tienen tres sensores de temperatura, en el paso de tiempo  $M$  se tiene que:

$$\mathbf{Y}(M) = \begin{bmatrix} Y_1(M) \\ Y_2(M) \\ Y_3(M) \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

y si la estimación de tres valores de temperatura, mediante la solución al problema de transferencia de calor se denota como:

$$\mathbf{T}(M)_{\beta=0} = \begin{bmatrix} T_1(M)_{\beta=0} \\ T_2(M)_{\beta=0} \\ T_3(M)_{\beta=0} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

por lo tanto:

$$\mathbf{Y}(M) - \mathbf{T}(M)_{\beta=0} = \begin{bmatrix} Y_1(M) - T_1(M)_{\beta=0} \\ Y_2(M) - T_2(M)_{\beta=0} \\ Y_3(M) - T_3(M)_{\beta=0} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

consecuentemente:

$$\mathbf{Y}(M+1) - \mathbf{T}(M+1)_{\beta=0} = \begin{bmatrix} Y_1(M+1) - T_1(M+1)_{\beta=0} \\ Y_2(M+1) - T_2(M+1)_{\beta=0} \\ Y_3(M+1) - T_3(M+1)_{\beta=0} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

entonces  $\mathbf{Y} - \mathbf{T}_{\beta=0}$  equivale a:

$$\mathbf{Y} - \mathbf{T}_{\beta=0} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(M) - \mathbf{T}(M)_{\beta=0} \\ \mathbf{Y}(M+1) - \mathbf{T}(M+1)_{\beta=0} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

puesto que  $\mathbf{r} = 2$ .

La operación  $\mathbf{Z}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{T}_{\beta=0})$ :

$$\left[ \mathbf{A}(1)\mathbf{a}^T(1) \quad \mathbf{A}(1)\mathbf{a}^T(2) + \mathbf{A}(2)\mathbf{a}^T(1) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(M) - \mathbf{T}(M)_{\beta=0} \\ \mathbf{Y}(M+1) - \mathbf{T}(M+1)_{\beta=0} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

define las operaciones:

$$\mathbf{A}(1)\mathbf{a}^T(1) \left[ \mathbf{Y}(M) - \mathbf{T}(M)_{\beta=0} \right] + \quad (3.58)$$

$$\left[ \mathbf{A}(1)\mathbf{a}^T(2) + \mathbf{A}(2)\mathbf{a}^T(1) \right] \left( \mathbf{Y}(M+1) - \mathbf{T}(M+1)_{\beta=0} \right) \quad (3.59)$$

donde el primer sumando  $\mathbf{A}(1)\mathbf{a}^T(1) \left[ \mathbf{Y}(M) - \mathbf{T}(M)_{\beta=0} \right]$ , es igual al vector de dos componentes definido por el producto de las matrices 3.48 y 3.54.

$$\begin{bmatrix} a_{11}(1) [Y_1(M) - T_1(M)_{\beta=0}] + \\ a_{21}(1) [Y_2(M) - T_2(M)_{\beta=0}] + \\ a_{31}(1) [Y_3(M) - T_3(M)_{\beta=0}] \\ \\ a_{12}(1) [Y_1(M) - T_1(M)_{\beta=0}] + \\ a_{22}(1) [Y_2(M) - T_2(M)_{\beta=0}] + \\ a_{32}(1) [Y_3(M) - T_3(M)_{\beta=0}] \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

y el segundo sumando  $\left[ \mathbf{A}(1)\mathbf{a}^T(2) + \mathbf{A}(2)\mathbf{a}^T(1) \right] \left( \mathbf{Y}(M+1) - \mathbf{T}(M+1)_{\beta=0} \right)$ , dará origen a otro vector de dos componentes, definido por el producto de las matrices 3.50 y 3.55.

$$\begin{bmatrix} [a_{11}(2) + a_{11}(1)] [Y_1(M+1) - T_1(M+1)_{\beta=0}] + \\ [a_{21}(2) + a_{21}(1)] [Y_2(M+1) - T_2(M+1)_{\beta=0}] + \\ [a_{31}(2) + a_{31}(1)] [Y_3(M+1) - T_3(M+1)_{\beta=0}] \\ \\ [a_{12}(2) + a_{12}(1)] [Y_1(M+1) - T_1(M+1)_{\beta=0}] + \\ [a_{22}(2) + a_{22}(1)] [Y_2(M+1) - T_2(M+1)_{\beta=0}] + \\ [a_{32}(2) + a_{32}(1)] [Y_3(M+1) - T_3(M+1)_{\beta=0}] \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

cuyo arreglo resulta en una matriz  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{Z}^T (\mathbf{Y} - \mathbf{T}_{\beta=0}) = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

La matriz  $\mathbf{D}$  tiene dos componentes, si  $w$  representa el índice de cada uno entonces:

$$\begin{aligned} D_w = & \sum_{j=1}^3 a_{jw}(1) \left[ \mathbf{Y}_j(M) - \mathbf{T}_j(M)_{q_1(M)=q_2(M)=0} \right] \\ & + \sum_{j=1}^3 [a_{jw}(1)a_{jw}(2)] \left[ \mathbf{Y}_j(M+1) - \mathbf{T}_j(M+1)_{q_1(M)=\dots=q_2(M+1)=0} \right] \end{aligned} \quad (3.63)$$

Finalmente  $\hat{q}_1(M)$  y  $\hat{q}_2(M)$  son:

$$\beta = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{D} = \frac{1}{(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{12})} \begin{bmatrix} C_{22} & -C_{12} \\ -C_{12} & C_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$\beta = \frac{1}{(C_{11}C_{22} - C_{12}C_{12})} \begin{bmatrix} C_{22}D_1 - C_{12}D_2 \\ -C_{12}D_1 + C_{11}D_2 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

$$\hat{q}_1(M) = \frac{C_{22}D_1 - C_{12}D_2}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} \quad (3.66)$$

$$\hat{q}_2(M) = \frac{C_{11}D_2 - C_{12}D_1}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} \quad (3.67)$$

Después de haber obtenido los elementos de  $\hat{\mathbf{q}}$ ,  $M$  se incrementa al siguiente paso de tiempo y se realiza el procedimiento nuevamente.

Como se especificó anteriormente, el desarrollo matemático anterior sólo considera un número de pasos de tiempo futuros  $\mathbf{r} = 2$ , y tres sensores de temperatura ( $j = 3$ ). Para propósitos de este trabajo, es necesario que el programa de cómputo a realizarse (tomando como base este desarrollo matemático) considere la opción de especificar distintos valores de  $\mathbf{r}$  y de  $j$ . Lo anterior implica una estrategia de programación apropiada, puesto que para cada valor de  $\mathbf{r} > 2$  se incrementa un nuevo término distinto en el factor  $C_{uw}$ , es decir, para  $j = m = 3$  y  $\mathbf{r} = 3$ :

$$\begin{aligned}
C_{uv} &= \sum_{m=1}^3 a_{mu}(1)a_{mv}(1) \\
&+ \sum_{m=1}^3 [a_{mu}(1) + a_{mu}(2)] [a_{mv}(1) + a_{mv}(2)] \\
&+ \sum_{m=1}^3 [a_{mu}(1) + a_{mu}(2) + a_{mu}(3)] [a_{mv}(1) + a_{mv}(2) + a_{mv}(3)]
\end{aligned} \tag{3.68}$$

donde  $u$  y  $v$  representan los índices de los componentes  $C$  en las ecuaciones 3.66 y 3.67.

Asimismo  $D_w$  para  $j = 3$  y  $r = 3$ , tiene la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
D_w &= \sum_{j=1}^3 a_{jw}(1) \left[ \mathbf{Y}_j(M) - \mathbf{T}_j(M)_{q_1(M)=q_2(M)=0} \right] \\
&+ \sum_{j=1}^3 [a_{jw}(1)a_{jw}(2)] \left[ \mathbf{Y}_j(M+1) - \mathbf{T}_j(M+1)_{q_1(M)=\dots=q_2(M+1)=0} \right] \\
&+ \sum_{j=1}^3 [a_{jw}(1)a_{jw}(2)a_{jw}(3)] \left[ \mathbf{Y}_j(M+2) - \mathbf{T}_j(M+2)_{q_1(M)=\dots=q_2(M+2)=0} \right]
\end{aligned} \tag{3.69}$$

donde  $w$  representa los índices de los componentes  $D$  de las ecuaciones 3.66 y 3.67.

Habiendo considerado el desarrollo de cualquier sistema matricial a resolver, se desarrollaron los programas de cómputo para resolver el IHCP a partir del algoritmo general de estimación esquematizado en la Fig. 3.6. El código de los programas se desarrolló en lenguaje estructurado FORTRAN.

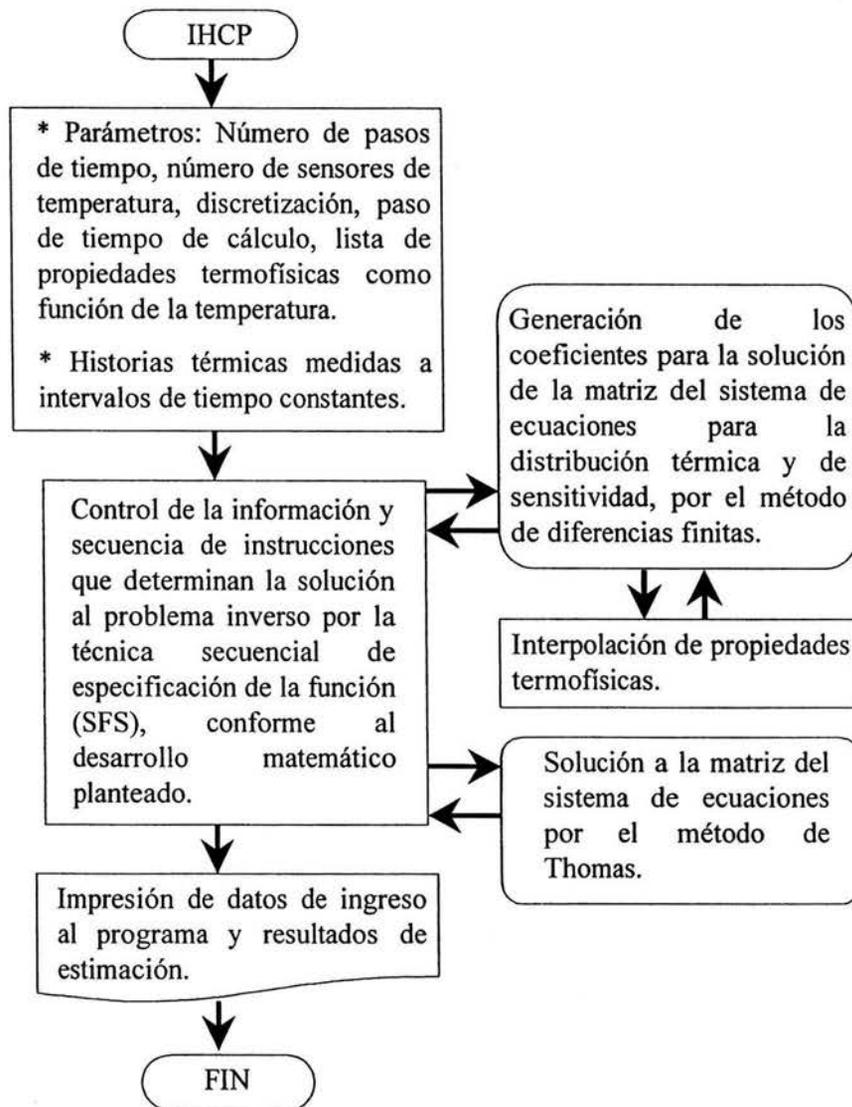


Figura: 3.6 Diagrama de flujo general para la codificación de los programas de cómputo para la solución del IHCP.

## Capítulo 4

# Verificación del modelo matemático.

Para la verificación del modelo se requiere del planteamiento de dos condiciones de frontera conocidas. Las historias térmicas calculadas resolviendo el DHCP de un sistema son el requerimiento mínimo de información que el problema inverso de conducción de calor (IHCP) requiere para volver a estimar las fronteras térmicas.

Al obtener respuestas térmicas aplicando una solución numérica del DHCP y no a través de mediciones experimentales, se genera un conjunto de datos libres de errores. A lo largo de éste documento se utilizará la terminología “respuesta térmica ficticia” para denotar a este tipo de información.

La comparación de los valores estimados contra los ficticios establecen el ciclo por el cual el programa de cómputo ha de verificarse. Las condiciones de frontera pueden compararse como funciones estimadas de densidad de flujo de calor, flujo de calor neto y/o coeficientes de transferencia de calor. Anteriormente se mencionó que la técnica de solución del IHCP es susceptible a pequeñas fluctuaciones en las temperaturas medidas. Esta condición establece la necesidad de estabilizar la solución mediante el establecimiento adecuado de parámetros como: a) intervalos de medición de temperatura, b) distribución nodal, c) paso de tiempo de cálculo, d) número de pasos de tiempo de cálculo. Si los intervalos de medición de temperatura son relativamente grandes, puede perderse información valiosa cuando se tienen enfriamientos con una rapidez alta, o en el caso opuesto, intervalos de medición muy pequeños desestabilizan la solución del IHCP debido a fluctuaciones en las mediciones (ruido). Una distribución nodal no apropiada puede desestabilizar la solución del IHCP, debido a la relación entre el espaciado internodal y el paso de tiempo de cálculo (criterio de

estabilidad). Internamente, en el algoritmo del IHCP se puede definir un paso de tiempo de cálculo más pequeño que el intervalo de medición lo que, para intervalos grandes, es útil. Esencialmente un número de pasos de tiempo futuros pequeño ( $r = 2$ ), proporciona la mayor información acerca de la condición de frontera estimada. El efecto de incrementar el valor de  $r$  en algunos sistemas cuyas respuestas no son muy estables, ayuda a “suavizar” dicha respuesta eliminando picos o comportamientos inusuales que, representados en las curvas de la frontera térmica estimada, abandonan una tendencia general. No obstante, es recomendable utilizar cuando sea posible un valor de  $r = 2$ .

## 4.1 Primer ejercicio de verificación

La frontera térmica propuesta para un primer paso de verificación se tomó específicamente de Majorek *et al.* [33]. Los datos corresponden a los coeficientes de transferencia de calor para el enfriamiento de una probeta cilíndrica sumergida en aceite y, se representan como de funciones sencillas trazadas sobre el comportamiento real (ver Figura 2 de la referencia citada). Dicha información se estableció como condición de frontera en las superficies de mayor área de una placa de dimensiones 170 mm x 90 mm x 12.7 mm (lo que asegura un enfriamiento predominantemente unidimensional y simetría térmica). El problema directo de conducción de calor se resolvió con la ayuda del programa de cómputo comercial DEFORM3D-HT<sup>TM</sup>.

En la solución del DHCP se propone un paso de tiempo de cálculo de un segundo, una temperatura del medio de enfriamiento de 42 °C y las propiedades termofísicas de un acero inoxidable tipo AISI 304 (Tabla 1(a) y 1(b) del Apéndice A ). Con esto se obtuvo una pareja de respuestas térmicas ficticias, en posiciones bien definidas por debajo de las superficies de la placa, para alimentarlas al programa que resuelve el IHCP.

El sistema (placa) está dividido en tres regiones:

- 1) superficie 1 - posición del termopar  $x_1$
- 2) posición del termopar  $x_1$  - posición del termopar  $x_2$
- 3) posición del termopar  $x_2$  - superficie.

Las regiones pueden identificarse en la Fig. 3.3. Para resolver el IHCP cada región puede ser discretizada de acuerdo al método de diferencias finitas. La mejor discretización en función de una distribución nodal, será la que proporcione la mejor estimación de las

condiciones de frontera térmicas. Lo anterior se logra observando la solución del IHCP realizando diversas ejecuciones computacionales con diferentes distribuciones nodales.

Una comparación directa entre la curva de coeficientes de transferencia de calor de Majorek *et al.* [33] y la información obtenida por el IHCP, requiere que se realice un cálculo aproximado de los coeficientes de transferencia de calor ( $\bar{h}_i$ ), a partir de las densidades de flujo de calor estimadas ( $q_i$ ), las temperaturas de superficie estimadas ( $T_{s_i}$ ), y la temperatura del medio de enfriamiento ( $T_f$ ), por la expresión siguiente [34]:

$$\bar{h}_i = \frac{-q_i}{(T_f - T_{s_i})} \quad (4.1)$$

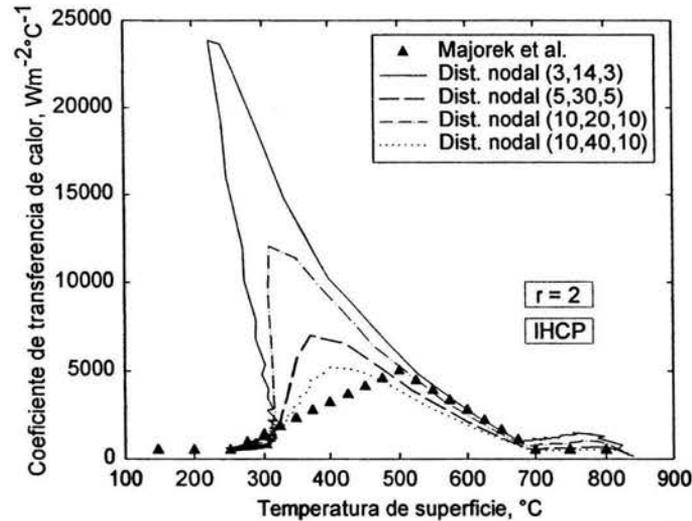


Figura: 4.1 Efecto del patrón de discretización en la estimación de historias de coeficientes de transferencia de calor en función de la temperatura de superficie, manteniendo un número de pasos de tiempo futuros  $r = 2$  (líneas). El cálculo se realizó a partir de las historias térmicas generadas en una placa con una función de coeficientes de transferencia de calor (símbolos cerrados) propuesta por Majorek *et al.* [33].

La Fig. 4.1 muestra las curvas de coeficientes de transferencia de calor estimadas en un intento de reproducir la frontera térmica ficticia (curva de Majorek *et al.* [33]) variando la distribución nodal en cada región del sistema. Los símbolos cerrados definen la curva original. Una distribución general de pocos nodos (3, 14, 3) desestabiliza fuertemente la solución, como

puede observarse por la curva trazada por la línea continua. También se muestran dos trazos con 40 nodos (líneas segmentadas) distribuidos de forma distinta (5, 30, 5 y 10, 20, 10), donde se puede observar que la solución aún no converge. Sin embargo, se ejemplifica el efecto de distribuir pocos nodos en la región 2 cuya magnitud es significativamente mayor a la de las otras regiones. Pocos nodos distribuidos en las regiones 1 y 3, no desestabilizan tanto la solución como sucede en la región 2. Finalmente, la línea punteada muestra la distribución con 60 nodos (10, 40, 10), la cual permite observar ya un sistema de solución estable aunque con un sesgo significativo hacia la izquierda. Este fenómeno se atribuye a la poca información en la respuesta térmica durante el ascenso en la curva de ficticia, resultado del tamaño del intervalo de cálculo de 1 segundo (muy grande, dada la intensidad del enfriamiento).

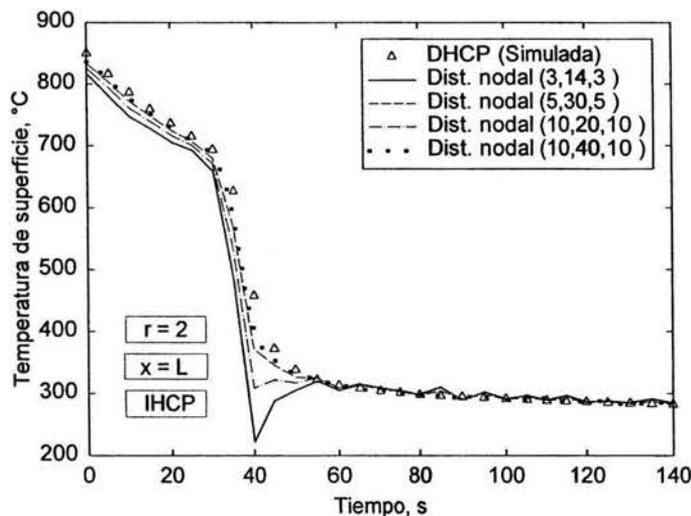


Figura: 4.2 Efecto del patrón de discretización en la estimación, por el IHCP, de historias de temperatura de superficie en una placa, manteniendo un número de pasos de tiempo futuros  $r = 2$  (líneas). También se muestra la historia ficticia simulada por el DHCP (símbolos abiertos).

La Fig. 4.2 muestra las historias térmicas en la superficie de la placa, calculadas con el DHCP y estimadas por el IHCP, con las diferentes distribuciones nodales ya mencionadas. Como puede observarse, las distribuciones (3, 14, 3) y (10, 20, 10) se alejan distintivamente de la solución con el DHCP (símbolos abiertos) mostrando un comportamiento anómalo durante

el proceso de enfriamiento. Las distribuciones (5, 30, 5) y (10, 40, 10) se ajustan mejor a la curva simulada, siendo la última distribución la que presenta la mejor aproximación.

La Fig. 4.3 muestra el resultado de la estimación por el IHCP de las dos fronteras térmicas ( $x = 0$  y  $x = L$ ) como coeficientes de transferencia de calor para el sistema de la placa con la distribución nodal (10, 40, 10), mostrando el sesgo hacia la izquierda ya identificado anteriormente. Cabe mencionar que para este ejemplo de validación, cualquier incremento en el número de nodos en cualquier sección establecida para generar un nuevo resultado, no tiene un efecto significativo sobre la respuesta del IHCP. Por lo que las causas de esta desviación pueden atribuirse a la poca información durante la primera etapa del enfriamiento, es decir, las historias térmicas obtenidas a pasos de cálculo de un segundo no proporcionan la cantidad de información suficiente dada la rapidez de enfriamiento promovida por las condiciones de frontera térmicas.

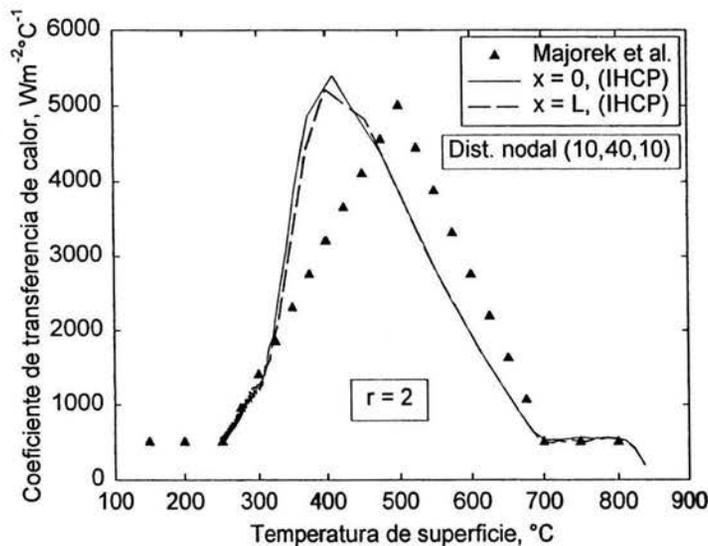


Figura: 4.3 Historias de coeficientes de transferencia de calor como función de la temperatura de superficie estimadas por el IHCP (líneas), sobre las superficies de una placa ( $x = 0$  y  $x = L$ ). El cálculo se realizó a partir de las historias térmicas generadas por una función de coeficientes de transferencia de calor aplicada en ambas superficies propuesta por Majorek et al. [33] (símblos cerrados), utilizando un valor de pasos de tiempo futuros  $r = 2$  y una distribución nodal 10,40,10.

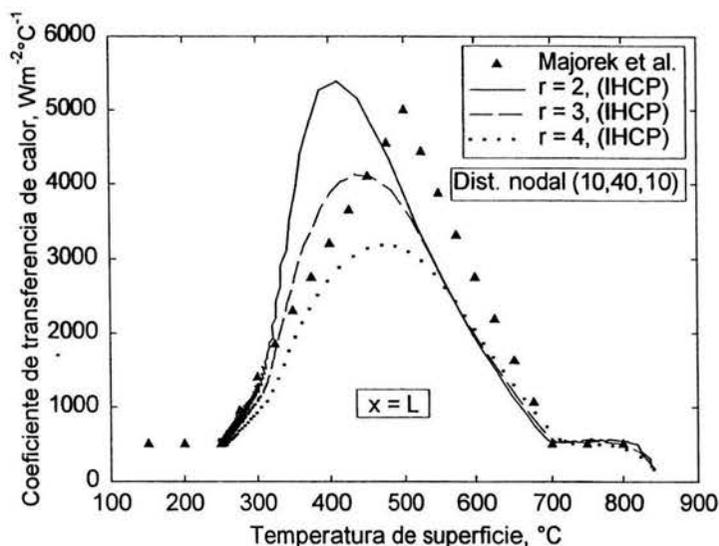


Figura: 4.4 Efecto de la variación de el número de pasos de tiempo futuros ( $r = 2$ , 3 y 4) sobre las historias de coeficientes de transferencia de calor como función de la temperatura de superficie estimadas por el IHCP (líneas), sobre la superficie de una placa ( $x = L$ ). El cálculo se realizó a partir de las historias térmicas generadas por una función de coeficientes de transferencia de calor propuesta por Majorek et al. [33] (símblos cerrados), utilizando una distribución nodal 10,40,10.

Como puede observarse en la Fig. 4.3 el valor máximo de coeficiente de transferencia de calor estimado rebasa el valor máximo del coeficiente ficticio. Un valor de  $r$  mayor a 2 puede ayudar a ajustar al valor de coeficiente de transferencia de calor estimado. El incremento en el valor de  $r$  para la estimación de la frontera térmica por el IHCP en  $x = L$  se muestra en la Fig. 4.4. En efecto, el incremento de  $r$  disminuye los valores de densidad de flujo de calor y reduce el sesgo hacia la izquierda. No obstante, se pierde substancialmente el máximo en la curva de coeficientes de transferencia de calor ( $r = 3$  y  $r = 4$ ). Esta respuesta puede observarse más claramente en la Fig. 4.5 que muestra las curvas de enfriamiento en la superficie de la placa. Para un valor de  $r = 4$  (línea segmentada) se obtienen curvas por encima de la curva para  $r = 2$  (línea continua), lo que representa un enfriamiento menos intenso y por lo tanto una mala estimación. La curva de enfriamiento sobre la superficie de la placa en  $x = L$  para el problema directo (símbolos abiertos) y el problema inverso (línea

continua), se muestra en la Fig. 4.6 con un buen ajuste.

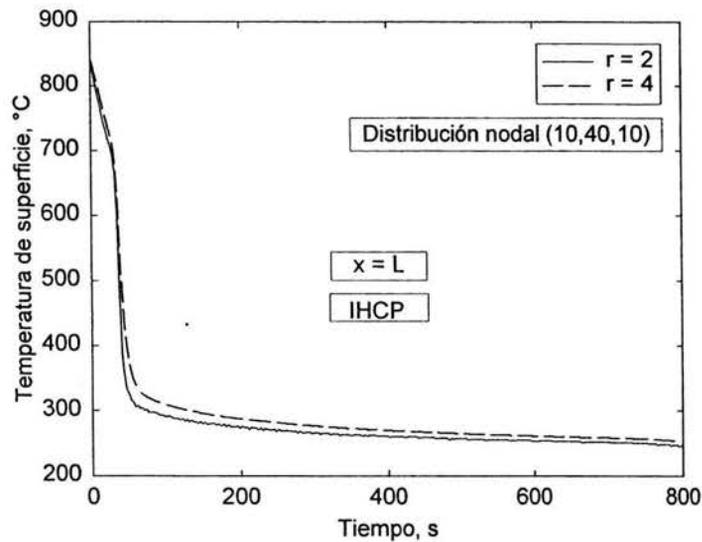


Figura: 4.5 Efecto de la variación del número de pasos de tiempo futuros ( $r = 2$ , y 4) en la estimación de la historia de temperatura de superficie por el IHCP, sobre la superficie de una placa ( $x = L$ ), utilizando una distribución nodal 10,40,10.

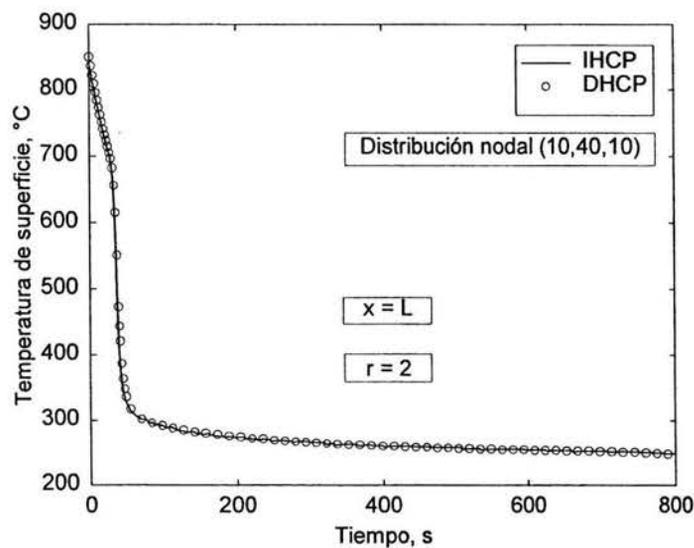


Figura: 4.6 Comparación de las historias térmicas: estimada por la solución del IHCP (línea continua) y ficticia (símbolos abiertos) en la superficie de una placa ( $x = L$ ), utilizando un número de pasos de tiempo futuros  $r = 2$ , y una distribución nodal 10,40,10.

## 4.2 Segundo ejercicio de verificación

La respuesta del programa que resuelve el IHCP en el primer ejercicio de validación es comparable a lo establecido por Téllez-Martínez [35]. Sin embargo, es necesario verificar que el programa sea lo suficientemente robusto como para determinar dos condiciones de frontera distintas. En un segundo ejercicio de verificación, cada valor de coeficiente de transferencia de calor de la curva de Majorek *et al.* [33] se divide por 2. La curva resultante se aplica como condición de frontera sobre la superficie  $x = 0$  de la placa del primer ejercicio, mientras que en la superficie de la placa  $x = L$  se mantiene como condición de frontera la curva original.

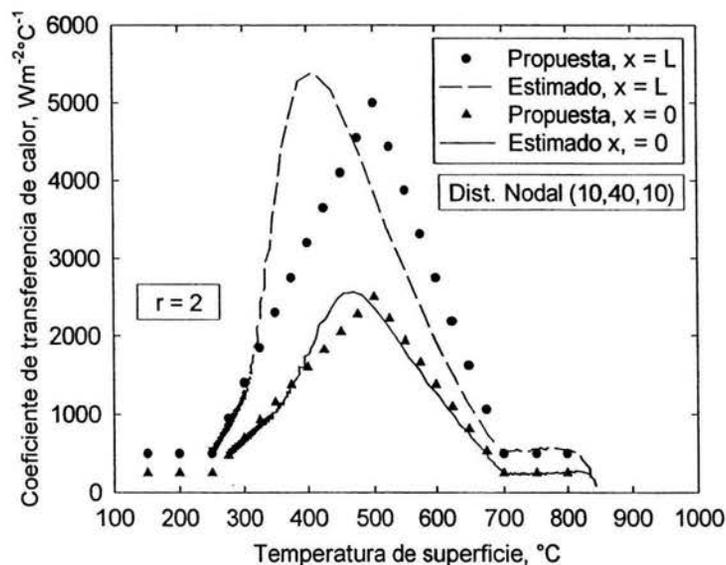


Figura: 4.7 Coeficientes de transferencia de calor como función de la temperatura de superficie estimados por el IHCP. La línea segmentada corresponde a la estimación sobre la superficie de una placa en  $x = L$ , y la línea continua a la estimación sobre  $x = 0$ . Los cálculos se realizaron a partir de las historias térmicas generadas por dos funciones diferentes de coeficientes de transferencia de calor aplicadas una en cada superficie (círculos y triángulos cerrados, respectivamente), utilizando un valor de pasos de tiempo futuros  $r = 2$  y una distribución nodal 10,40,10.

La solución del DHCP se realizó utilizando el mismo intervalo de cálculo de 1 segundo a través del programa DEFORM3D-HT<sup>TM</sup>. Nuevamente, las historias térmicas en las posiciones que simulan la localización de los termopares se utilizaron para resolver el IHCP. En

la Fig. 4.7 puede observarse que para una distribución nodal (10, 40, 10) y un valor de  $r = 2$ , la respuesta del IHCP es aceptable. Ambas condiciones de frontera estimadas se ajustan al orden de magnitud y se aproximan a la forma de las condiciones de frontera ficticias. En particular puede distinguirse que para un intervalo de paso de tiempo alto (1 segundo), si la intensidad del enfriamiento es relativamente baja, se obtiene un mejor ajuste entre las curvas estimada y ficticia; comparativamente el sesgo hacia la izquierda en la curva de coeficientes de transferencia de calor aplicado sobre la placa en  $x = 0$  es menos significativo.

La Fig. 4.8 muestra las curvas de enfriamiento en las superficies de la placa con la solución del DHCP (símbolos abiertos) y la estimación por el IHCP (líneas continua y segmentada), mostrando el buen ajuste logrado y la robustez de la solución del IHCP en este sentido.

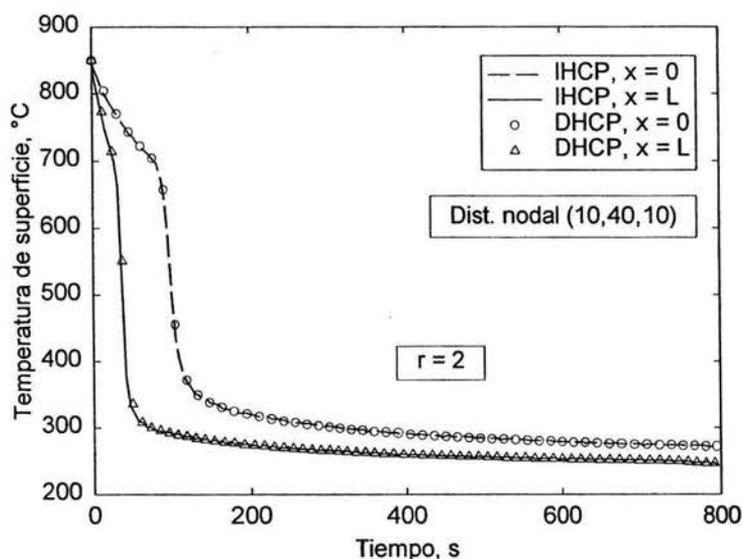


Figura: 4.8 Comparación de las historias térmicas estimadas por la solución del IHCP. La línea continua corresponde a la estimación sobre la superficie de la placa en  $x = L$  y la línea segmentada a la estimación en la superficie  $x = 0$ . Las curvas ficticias obtenidas de la solución por el DHCP para cada superficie de la placa se muestran con triángulos y círculos abiertos, respectivamente. Los cálculos se realizaron utilizando un número de pasos de tiempo futuros  $r = 2$  y una distribución nodal 10,40,10.

### 4.3 Tercer ejercicio de verificación

Un tercer ejercicio de verificación consiste en tomar una condición de frontera cuya intensidad sea mayor a la curva de Majorek *et al.* [33]. La condición de frontera reportada por Barba [36] presenta esta característica. La curva de coeficientes de transferencia de calor en ese trabajo, obedece al enfriamiento súbito por inmersión de una probeta anular de acero inoxidable AISI 304 en agua. Esta condición de frontera se aplicará sobre las superficies de la placa de los ejercicios anteriores. Nuevamente, la solución del DHCP se realizó en el programa DEFORM3D-HT<sup>TM</sup> utilizando un paso de tiempo de cálculo de 0.1 segundos. A este paso de tiempo se generará una mayor información de las historias térmicas dentro de la placa. La temperatura del agua como medio de enfriamiento en la práctica de este experimento se reportó de 25 °C.

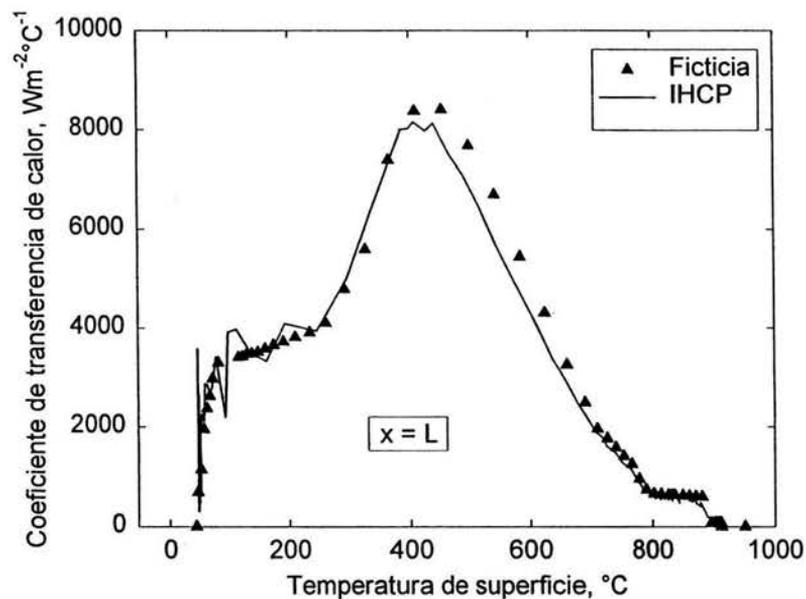


Figura: 4.9 Coeficientes de transferencia de calor como función de la temperatura de superficie estimada por el IHCP (línea continua) sobre la superficie de una placa ( $x = L$ ), utilizando un valor de pasos de tiempo futuros  $\mathbf{r} = 2$  y una distribución nodal 10,40,10. Los cálculos se realizaron a partir de las historias térmicas generadas por una función de coeficientes de transferencia de calor (triángulos cerrados tomada de [36]).

Realizado el ciclo de cálculo correspondiente se muestra en la Fig. 4.9 y en la Fig. 4.10 el resultado de la estimación del IHCP (línea continua), contra la condición de frontera ficticia (símbolos cerrados) en términos del coeficiente de transferencia de calor.

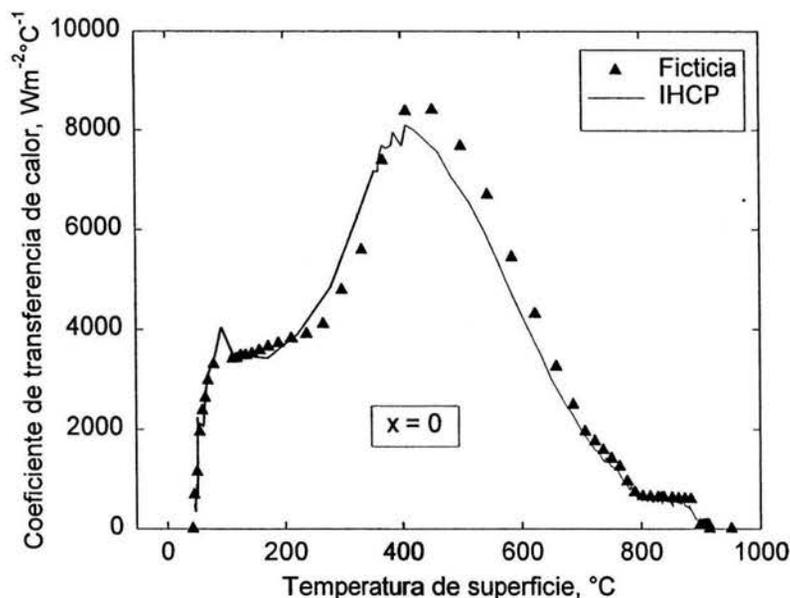


Figura: 4.10 Coeficientes de transferencia de calor como función de la temperatura de superficie estimada por el IHCP (línea continua) sobre la superficie de una placa ( $x = 0$ ), utilizando un valor de pasos de tiempo futuros  $r = 2$  y una distribución nodal 10,40,10. Los cálculos se realizaron a partir de las historias térmicas generadas por una función de coeficientes de transferencia de calor (triángulos cerrados) tomada de [36].

La distribución nodal establecida para resolver el IHCP fué (10,40,10) y el número de pasos de tiempo futuros  $r$  con un valor de 2. Como puede observarse, para este valor de  $r$  se obtiene un buen ajuste de la condición de frontera térmica, a pesar de la diferencia en intensidad de extracción de calor con respecto a la curva de Majorek *et al.* [33]. También puede distinguirse la disminución significativa del sesgo hacia la izquierda mostrado en los ejercicios anteriores.

Las Fig. 4.11 y 4.12 muestran las curvas de enfriamiento de la superficies  $x = 0$  y  $x = L$  respectivamente. Cada gráfico presenta la solución con el DHCP (símbolos abiertos) y la estimación por el IHCP (líneas continuas).

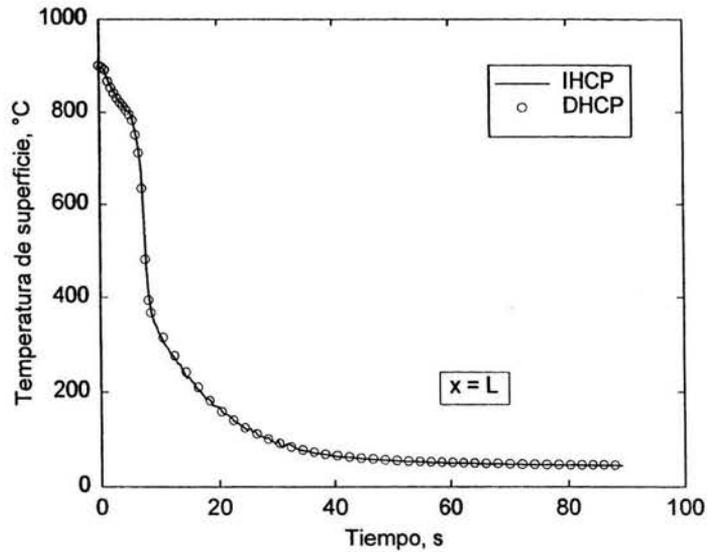


Figura: 4.11 Comparación de las historias térmicas: estimada por la solución del IHCP (línea continua) y ficticia obtenida por la solución del DHCP (símbolos abiertos); en la superficie de una placa ( $x = L$ ), utilizando un número de pasos de tiempo futuros  $r = 2$  y una distribución nodal 10,40,10.

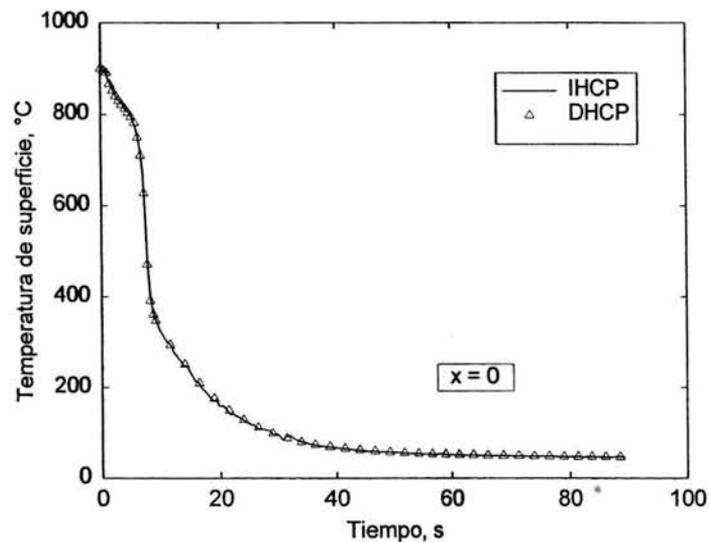


Figura: 4.12 Comparación de las historias térmicas: estimada por la solución del IHCP (línea continua) y ficticia calculada por el DHCP (símbolos abiertos); ambas en la superficie de una placa ( $x = 0$ ), utilizando un número de pasos de tiempo futuros  $r = 2$  y una distribución nodal 10,40,10.

## 4.4 Cuarto ejercicio de verificación

En este ejercicio de verificación, se utilizan las condiciones de frontera ficticias del ejercicio anterior, pero ahora el sistema de estudio es un anillo de acero inoxidable AISI 304 de 2 pulgadas de diámetro externo, 1 pulgada de diámetro interno y un espesor de 0.5 pulgadas. En este caso el anillo se enfriará desde 900 °C hasta temperatura ambiente, aplicando la misma condición de frontera en las superficies interna y externa del anillo. El cálculo de la distribución de temperaturas en el anillo se calculo resolviendo el DHCP en el programa DEFORM3D-HT<sup>TM</sup>. El paso de tiempo de cálculo fué de 0.1 segundos.

Las funciones de densidades de flujo de calor estimadas por el IHCP, para una distribución nodal (10,40,10) y un número de pasos de tiempo futuros  $r = 2$ , están representadas en términos de coeficientes de transferencia de calor en la Fig. 4.13.

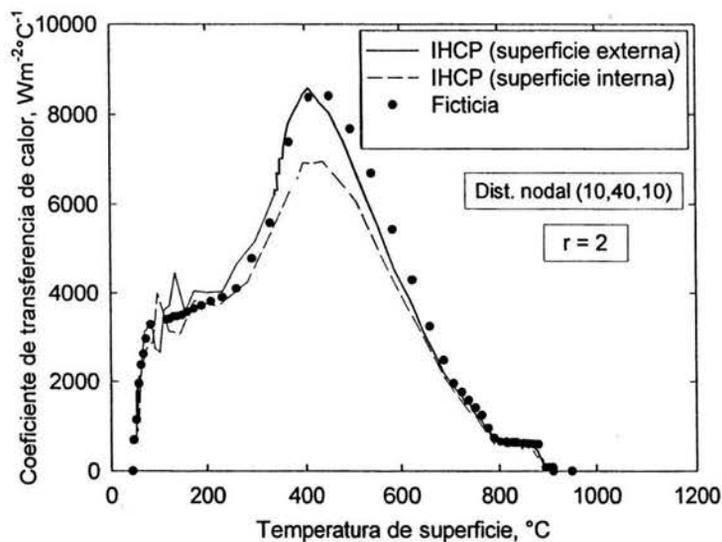


Figura: 4.13 Coeficientes de transferencia de calor como función de la temperatura de superficie estimada por el IHCP (líneas continua y segmentada) sobre las superficies de un anillo, utilizando un valor de pasos de tiempo futuros  $r = 2$  y una distribución nodal 10,40,10. Los cálculos se realizaron a partir de las historias térmicas generadas por una función de coeficientes de transferencia de calor (círculos cerrados) tomada de [36].

Como puede observarse, la función estimada para la superficie interna del anillo (línea

punteada) no alcanza los valores máximos de la condición de frontera ficticia (círculos cerrados), mientras que la función estimada para la superficie externa no presenta este problema. Sin embargo, a pesar de las diferencias en las curvas de coeficientes de transferencia de calor, esta pareja de funciones generan las mismas curvas de enfriamiento en cada superficie, ficticias (símbolos cerrados) y estimadas por el IHCP (líneas, continua y segmentada), como puede observarse en la Fig. 4.14.

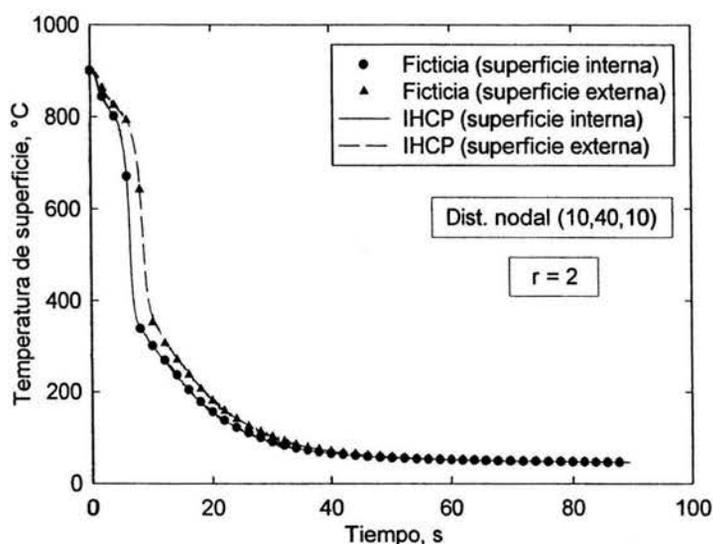


Figura: 4.14 Comparación de las historias térmicas estimadas por la solución del IHCP (líneas, continua y segmentada) y ficticia (símbolos cerrados), sobre las superficies interna y externa de un anillo utilizando un número de pasos de tiempo futuros  $r = 2$  y una distribución nodal 10,40,10.

Este comportamiento puede asociarse al balance de energía neta que pasa por el sistema, siendo más apreciable por el cambio de áreas de transferencia de calor debido a la geometría de la probeta. Es decir, los frentes de enfriamiento avanzan a distinta rapidez desde cada frontera y esto influye significativamente en la distribución de temperaturas en el interior de la probeta. La comparación de los coeficientes de transferencia de calor estimados muestra que es posible reproducir la forma de la función ficticia pero que, para la superficie interna, el máximo de la función está subestimado. Por otra parte, las historias térmicas estimadas resolviendo el IHCP para las superficies interna y externa son muy similares a las ficticias.

# Capítulo 5

## Desarrollo Experimental

Los sistemas experimentales se diseñaron para validar el modelo del IHCP, por lo tanto, se fabricaron un cilindro hueco y una placa como probetas de estudio. Las dimensiones e instrumentación de las probetas, así como los detalles de los procedimientos experimentales se describen a continuación.

### 5.1 Cilindro hueco

Un cilindro hueco se maquinó de una barra redonda de acero AISI 1045. Las dimensiones del cilindro se establecieron en 2 pulgadas (50.8 mm) de diámetro externo y 3 pulgadas (76.2 mm) de longitud, el hueco en el cilindro se realizó concéntricamente con un diámetro de 0.5 pulgadas (12.7 mm) a todo lo largo del cilindro. La instrumentación consistió en colocar un termopar tipo K a 1.5 mm de cada superficie (externa e interna del cilindro hueco) con un desfase angular de 90° y a media altura de la longitud del cilindro (Figura 5.1). Las propiedades termofísicas del acero AISI 1045 se enlistan en la Tabla 2 del Apéndice A.

El registro de las historias térmicas se realizó a intervalos de 1 segundo a través de una tarjeta de adquisición de datos (Keithley's Smartlink, Model KNM-TC42), controlada por una computadora personal mediante el programa Netacq como se muestra en la Fig. 5.2. Diversos experimentos fueron conducidos con este dispositivo experimental. En cada uno de ellos una resistencia eléctrica del tamaño exacto del hueco del cilindro conectada a un controlador, se utilizó para calentar la probeta a la temperatura inicial de cada experimento. La resistencia alcanza rápidamente la temperatura requerida desde el controlador, por lo

que se considera que se suministra energía térmica a razón de una temperatura constante. Por otro lado, corrientes de aire a flujo volumínico constante, dirigidas por boquillas, se utilizaron para enfriar una o ambas superficies. En otros experimentos, la probeta se enfrió en aire quieto a temperatura ambiente.

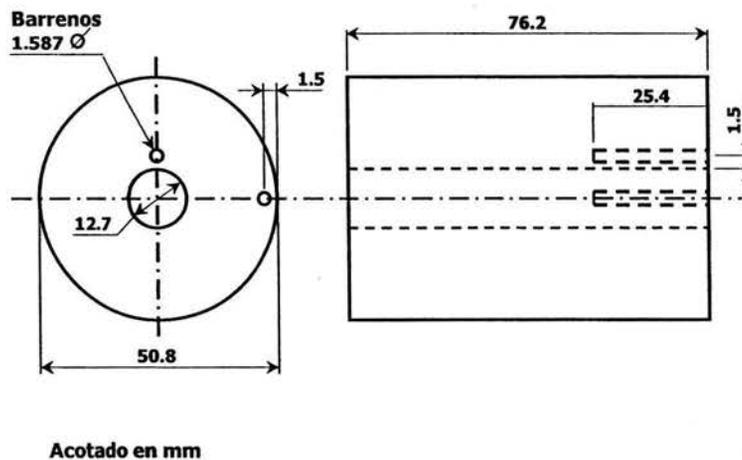


Figura: 5.1 Especificación dimensional del cilindro hueco instrumentado.

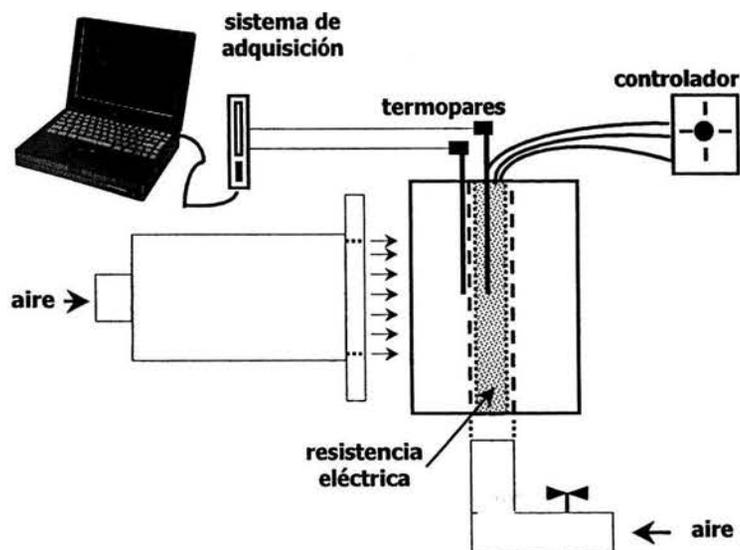


Figura: 5.2 Esquematación del dispositivo experimental montado para el cilindro hueco.

Cuatro casos experimentales se describen a continuación:

*Caso 1.* Se registraron las historias térmicas durante el calentamiento del cilindro hueco. La resistencia eléctrica se colocó en el hueco del cilindro y se suministró energía térmica a través de su superficie interna. El cilindro se encontraba inicialmente a temperatura ambiente  $T_0$ , mientras que la superficie externa se mantuvo expuesta al medio ambiente.

En los tres casos restantes se registraron las historias térmicas durante el enfriamiento del cilindro hueco. La resistencia eléctrica se colocó en el hueco del cilindro y se suministró energía térmica a través de su superficie interna. Cuando el cilindro alcanzó una temperatura homogénea  $T_0$  se realizaron los procedimientos siguientes:

*Caso 2.* Se incidió aire forzado perpendicularmente sobre la superficie externa del cilindro, mientras la resistencia siguió suministrando energía por la superficie interna.

*Caso 3.* Se extrajo la resistencia y se hizo pasar aire forzado paralelamente a la superficie interna y perpendicularmente sobre la superficie externa.

*Caso 4.* Se extrajo la resistencia y se hizo pasar aire forzado paralelamente a la superficie interna, mientras la superficie externa se expone al medio ambiente.

En cada caso la temperatura máxima no rebasó los 200 °C, por lo que el cilindro hueco no sufrió una oxidación significativa. Dado que todos los experimentos se realizaron por abajo de esta temperatura tampoco ocurrió ninguna transformación de fase. Las características de superficie para cada procedimiento experimental se obtuvieron a través del lijado con una hoja de abrasivo malla 600.

Cada experimento fué diseñado para estudiar el comportamiento térmico del sistema aplicando diferentes condiciones de frontera. El trabajo a bajas temperaturas permitió realizar variantes en el sistema para realizar un mejor análisis del modelo matemático propuesto.

## 5.2 Placa

El segundo caso considerado para validar el algoritmo desarrollado consistió en el enfriamiento de una placa por rociado [13].

Una placa de acero inoxidable AISI 304 es enfriada por rociado con agua en una de sus caras de mayor área, mientras que la cara opuesta se enfriará al dejarla expuesta al medio ambiente. La placa se instrumentó con seis termopares tipo K. Las dimensiones de la placa

se establecieron en 170 mm \* 60 mm \* 17 mm (Figura 5.3). Las propiedades termofísicas del acero AISI 304 se enlistan en las Tablas 1(a) y 1(b) del Apéndice A.

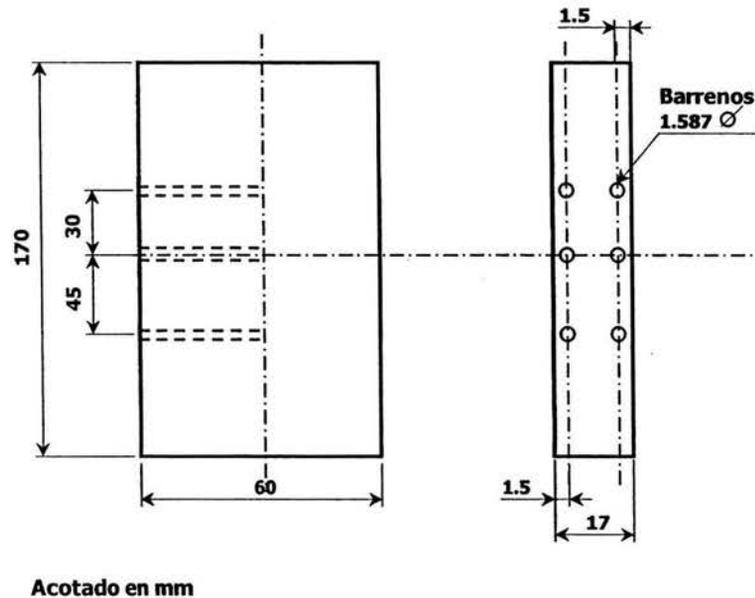


Figura: 5.3 Especificación dimensional de la placa instrumentada.

La placa se calienta en un horno cilíndrico vertical de resistencias LINDBERG 56953 CRUCIBLE FURNACE 6.8W. Cuando se alcanza la temperatura objetivo  $T_0$ , la placa se extrae y se coloca en posición vertical frente a la boquilla. La boquilla está localizada a 23 cm de la placa y generará el abanico de agua que impactará una sección de la superficie de la placa. La región de impacto quedará definida al alinear el orificio de salida de la boquilla con el centro geométrico de la superficie de la placa Fig. 5.4.

El flujo volumínico bombeado a través de la boquilla se estableció en 23 litros por minuto. Para estabilizar el flujo de rociado, el bombeo dió inicio unos instantes antes de colocar la placa en su posición de enfriamiento, mientras tanto el abanico fué bloqueado por una mampara. La mampara fué retirada con rapidez una vez que la placa alcanzó su posición final. La instrumentación permitió registrar las historias térmicas a intervalos de una décima de segundo. El registro de datos se realizó a través de una tarjeta de adquisición de datos (IOTECH model Temp Scan/1100), controlada por una computadora personal mediante el programa Chart View.

En algunas pruebas se hizo una grabación en video del experimento para corroborar el tiempo de inicio del enfriamiento por rociado con el tiempo equivalente en las historias térmicas registradas. Este procedimiento ayudó a determinar el intervalo de tiempo en el que la placa se enfría por el mecanismo combinado de radiación y convección, desde la extracción de la placa del horno hasta el inicio del enfriamiento por rociado.

La preparación de superficie de la placa para cada uno de los experimentos, se realizó a través del lijado con una hoja de abrasivo malla 600.

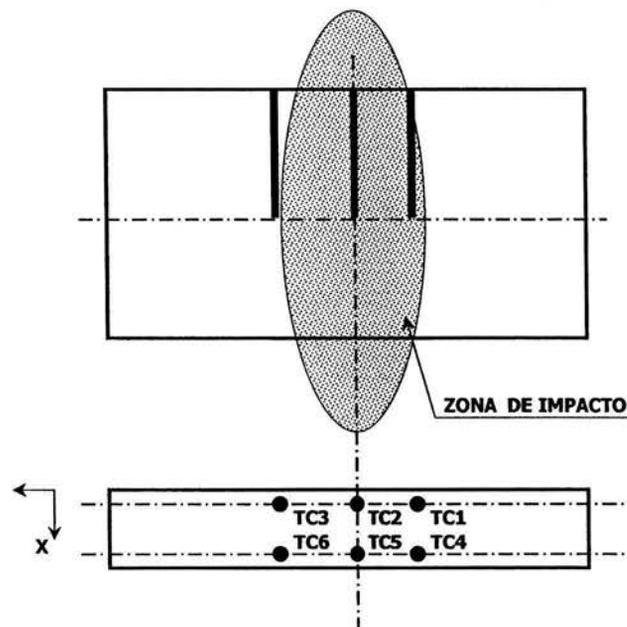


Figura: 5.4 Esquematación de la zona de impacto del abanico de agua sobre la placa instrumentada y señalamiento de los termopares.

# Capítulo 6

## Resultados y discusión

Los resultados experimentales (respuesta térmica) y el análisis de datos para la validación del modelo matemático propuesto se presentan a continuación.

### 6.1 Cilindro hueco

La Fig. 6.1 representa esquemáticamente los experimentos realizados con el cilindro hueco.

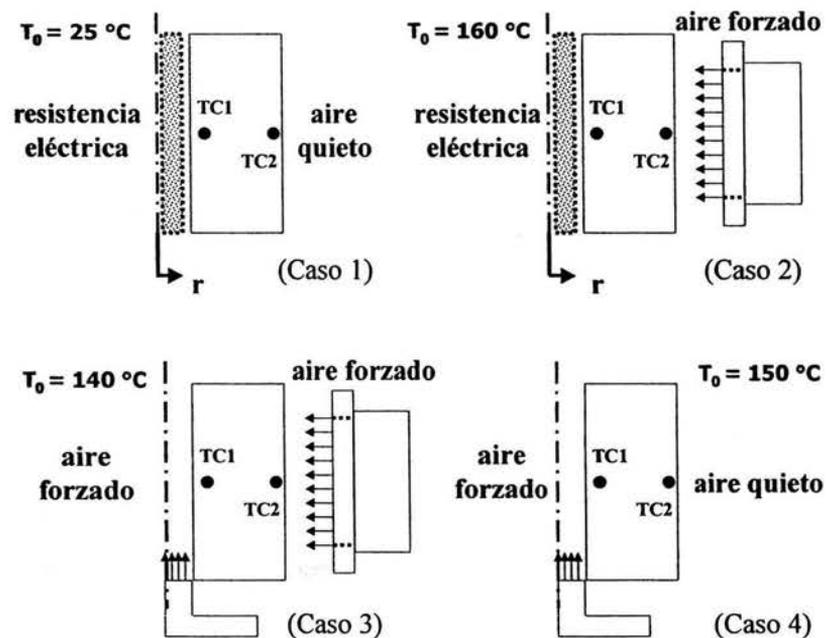


Figura: 6.1 Esquematación de los procedimientos experimentales realizados con el cilindro hueco.

La Fig. 6.1 (Caso 1), representa esquemáticamente la transferencia de calor a través de la superficie interna del cilindro hueco por medio de una fuente de calor, mientras que la superficie externa esta expuesta a aire quieto. Las mediciones experimentales de la respuesta térmica TC1 y TC2 se muestran en la Fig. 6.2. Se puede observar que las curvas son muy semejantes y tienen la misma tendencia, excepto al inicio del calentamiento donde la curva correspondiente al termopar cercano a la superficie externa (TC2) presenta una menor pendiente.

A tiempos largos de calentamiento puede encontrarse que las curvas se aproximan a un solo valor, como lo demuestran las últimas lecturas de la medición, indicando una homogeneidad en la temperatura del cilindro hueco.

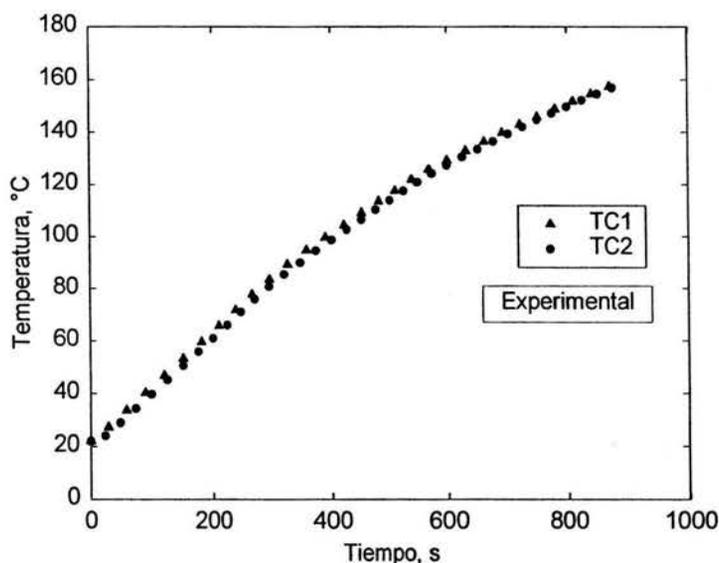


Figura: 6.2 Historias térmicas registradas en las posiciones de los termopares TC1 (triángulos cerrados) y TC2 (círculos cerrados) en el cilindro hueco, durante el experimento del Caso 1.

Un segundo experimento se representa esquemáticamente en la Fig. 6.1 (Caso 2). El experimento consiste en calentar el cilindro por su superficie interna hasta alcanzar una temperatura homogénea. Este valor de temperatura se alcanza alrededor de 160 °C. Inmediatamente después se hace pasar aire forzado sobre la superficie externa, mientras que se sigue suministrando calor.

Transcurrido un intervalo de tiempo, alrededor de 1700 segundos, el controlador de la resistencia eléctrica se apaga suspendiendo así el calentamiento por la superficie interna. La respuesta térmica medida en la posición de los termopares se muestra en la Fig. 6.3. En esta figura se puede observar que desde el inicio del enfriamiento, las curvas están separadas a razón de un valor que se vuelve casi constante después de los 1300 segundos de iniciado el enfriamiento. El valor constante se mantiene hasta el punto en el que el controlador de la resistencia eléctrica se apaga (1700 segundos aproximadamente). A partir de este instante se observa un descenso de la temperatura del sistema a una mayor rapidez.

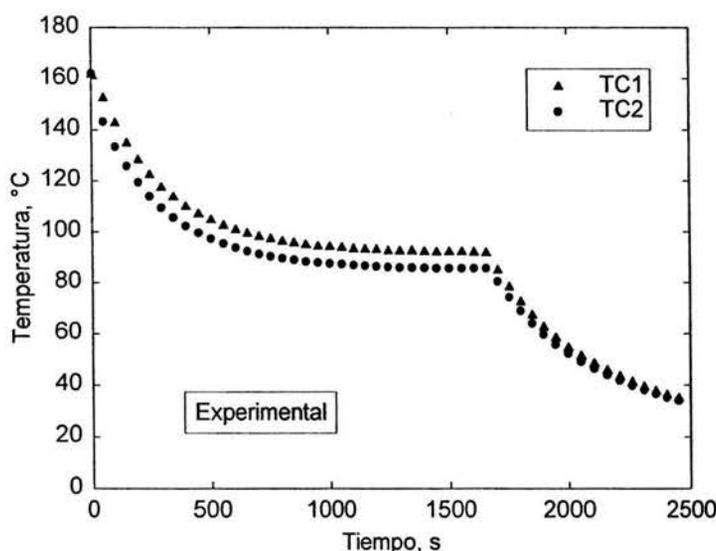


Figura: 6.3 Historias térmicas registradas en las posiciones de los termopares TC1 (triángulos cerrados) y TC2 (círculos cerrados) en el cilindro hueco, durante el experimento del Caso 2.

El experimento esquematizado en la Fig. 6.1 (Caso 3), consiste en el calentamiento del cilindro hasta alrededor de 140 °C, retirar la resistencia eléctrica de la cavidad interna del cilindro y hacer pasar una corriente de aire sobre las superficies interna y externa del cilindro. El resultado de la medición de las historias térmicas se muestra en la Fig. 6.4. Una vez más existe una separación en las curvas, indicando que la superficie externa experimenta una rapidez de enfriamiento mayor.

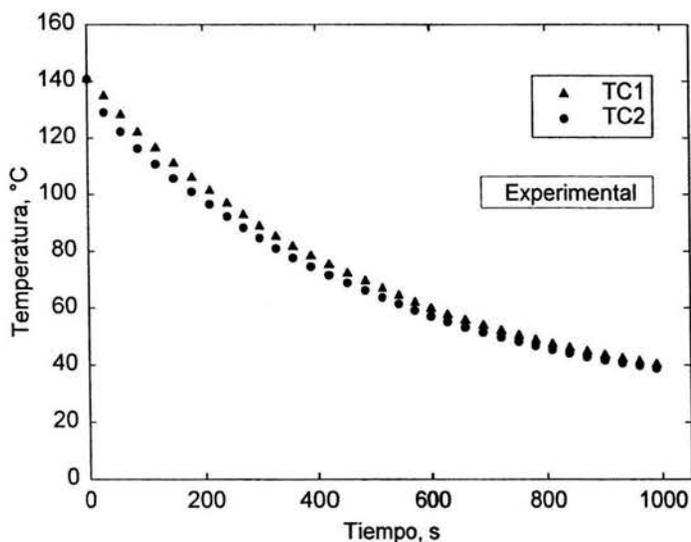


Figura: 6.4 Historias térmicas registradas en las posiciones de los termopares TC1 (triángulos cerrados) y TC2 (círculos cerrados) en el cilindro hueco, durante el experimento del Caso 3.

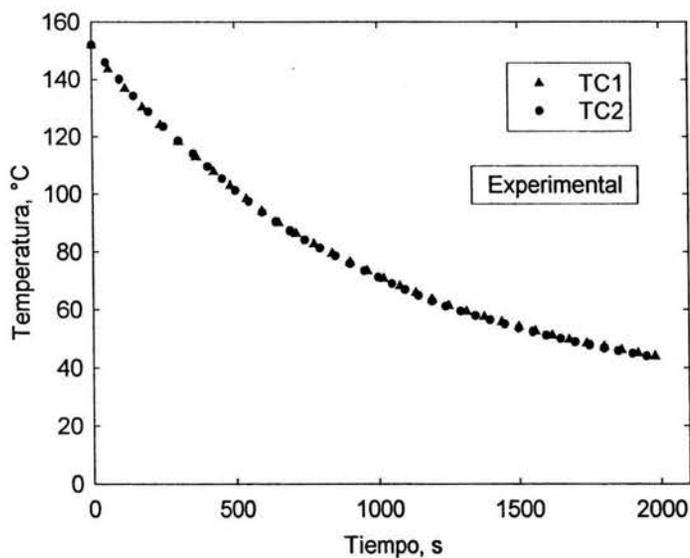


Figura: 6.5 Historias térmicas registradas en las posiciones de los termopares TC1 (triángulos cerrados) y TC2 (círculos cerrados) en el cilindro hueco, durante el experimento del Caso 4.

Un último experimento con el cilindro se esquematiza en la Fig. 6.1 (Caso 4). En este experimento se calienta el cilindro homogéneamente hasta  $150\text{ }^{\circ}\text{C}$ , se retira la resistencia eléctrica y un flujo de aire a temperatura ambiente pasa por la cavidad interna del cilindro, mientras que la superficie externa se expone a aire quieto también a temperatura ambiente. La Fig. 6.5 muestra la respuesta térmica registrada durante el enfriamiento del cilindro. En esta figura puede observarse que las curvas casi están una encima de la otra. Sin embargo, puede distinguirse que al inicio del enfriamiento la temperatura en la posición TC1 es ligeramente menor (triángulos cerrados) que en TC2 (círculos cerrados). Después de transcurridos aproximadamente 250 segundos no hay diferencias en las curvas.

Las historias térmicas mostradas en las Figs. 6.2 a 6.5 se utilizaron para estimar las densidades de flujo de calor como función del tiempo y/o de la temperatura de superficie, en las caras interna y externa del cilindro. Las estimaciones se obtuvieron mediante la solución del IHCP a intervalos de tiempo de cálculo de 1 segundo en todos los casos. Considerando los resultados de la verificación del modelo matemático del IHCP, se utilizó una distribución nodal 10,40,10 en todas las estimaciones, así como un valor de pasos de tiempo futuros  $r = 2$ .

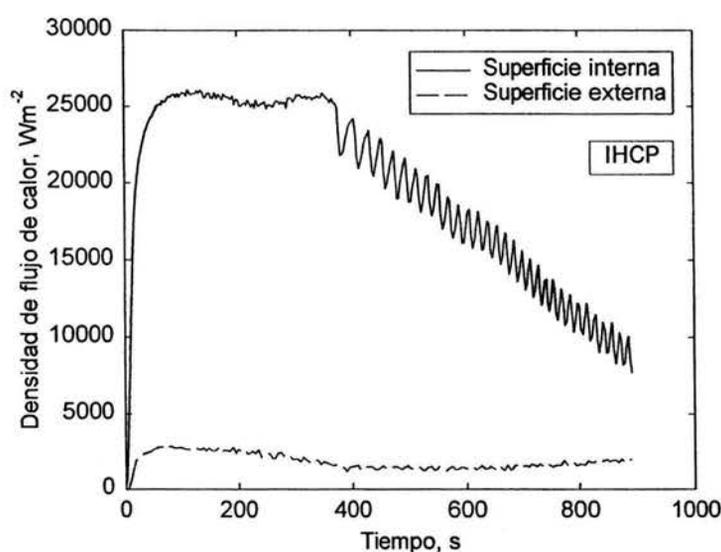


Figura: 6.6 Historias de densidad de flujo de calor estimadas por la solución al IHCP, en la superficie interna (línea continua) y en la superficie externa (línea segmentada) del cilindro hueco. Caso1.

La Fig. 6.6 muestra la relación de densidades de flujo de calor como función del tiempo para el experimento del Caso 1. La densidad de flujo de calor en la superficie interna ( $q_i$ ) crece rápidamente y en poco tiempo alcanza un valor máximo. Este valor máximo se mantiene prácticamente constante durante 300 segundos, terminando con un descenso acompañado de una fuerte oscilación. En contraste, la densidad de flujo de calor en la superficie externa ( $q_e$ ) es de una magnitud distintivamente menor y, después de aproximadamente 400 segundos también oscila hacia un valor constante.

De acuerdo al sistema de referencia establecido para el balance de energía realizado sobre el cilindro hueco en el problema inverso,  $q_i < 0$  representa una entrada de energía pero por la superficie interna del cilindro hueco y  $q_e > 0$  también representa una entrada de energía por la superficie externa. Esta situación no refleja el esquema mostrado en la Fig. 6.1 (Caso 1), puesto que se esperaría que los valores de la función  $q_e$  fueran negativos, es decir, una extracción de calor debido al contacto de la superficie externa del cilindro con aire quieto a temperatura ambiente. La razón que determina esta solución del IHCP se explica lógicamente si se considera que el termopar cerca de la superficie externa del cilindro en todo el intervalo de tiempo de calentamiento, solo registra incrementos de temperatura. Esto es debido a que la rapidez de enfriamiento por esta superficie es muy baja comparada con la rapidez de calentamiento y, como el IHCP no tiene ninguna información acerca de  $q_e$ , entonces el sistema se resuelve de manera que se establezca la distribución de temperaturas apropiada entre las posiciones de los termopares de acuerdo a la información que estos proporcionen. Es decir, el sistema se resuelve como si se estuviera calentando desde la superficie externa. Dado el planteamiento matemático del problema inverso, la estimación de estas condiciones de frontera térmicas para el cilindro, genera una de las posibles soluciones que representa la densidad de flujo de calor neto que pasa por el sistema.

Utilizando las condiciones de frontera térmicas estimadas por el IHCP, se utilizó el programa DEFORM3D-HT<sup>TM</sup> para resolver el DHCP y obtener la distribución de temperaturas en el cilindro hueco.

Las condiciones de frontera térmicas sobre superficies curvas en el programa, no pueden aplicarse como historias de coeficientes de transferencia de calor o densidad de flujo de calor con respecto de la temperatura de superficie, pero se pueden aplicar como funciones de

densidad de flujo de calor con respecto del tiempo.

La especificación de las condiciones de frontera en DEFORM3D-HT<sup>TM</sup> se establecen de tal manera que si una superficie se calienta  $q > 0$  y en el caso en el que una superficie se enfría  $q < 0$ , independientemente de la dirección en la que fluye el calor, es decir, el programa ignora el caracter vectorial del flujo o de la densidad de flujo de calor. La Fig. 6.7 resume las características de este experimento. Las magnitudes de las flechas en las paredes del cilindro indican la intensidad del flujo de calor sobre las superficies en cada etapa de análisis.

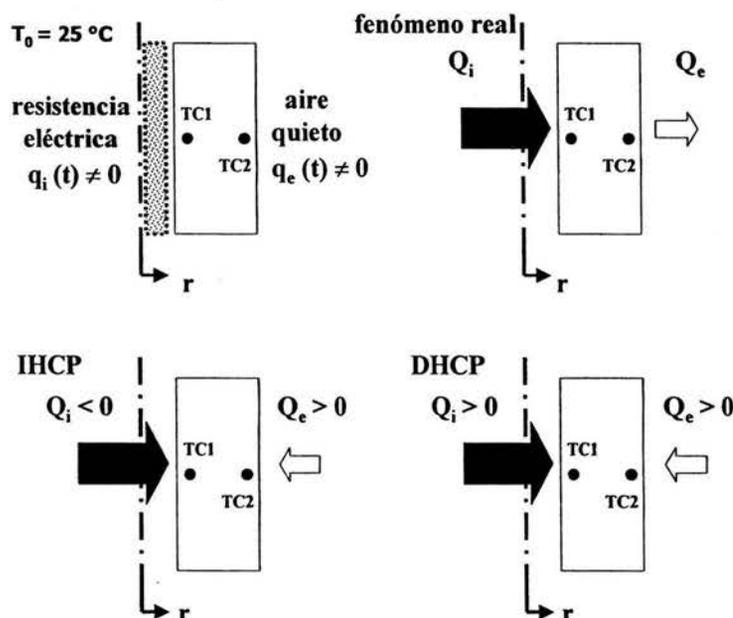


Figura: 6.7 Resumen de las intensidades y direcciones de flujo de calor en el cilindro hueco para el análisis de resultados del procedimiento experimental del Caso 1.

Las curvas de calentamiento en la posición de los termopares TC1 y TC2 para la medición experimental (símbolos cerrados) y los resultados de la estimación por el IHCP (línea continua) y los calculados con el DHCP (símbolos abiertos) se muestran en la Fig. 6.8 y la Fig. 6.9, respectivamente. En estos gráficos puede observarse un buen ajuste en la solución del problema inverso con respecto a la medición experimental TC1 y TC2. Sin embargo, la solución del DHCP presenta una ligera desviación alrededor de los 300 segundos de iniciado el calentamiento. Esta desviación se debe probablemente a la fluctuación presentada en las curvas de densidad de flujo de calor estimada sobre la superficie interna del cilindro (Fig. 6.6).

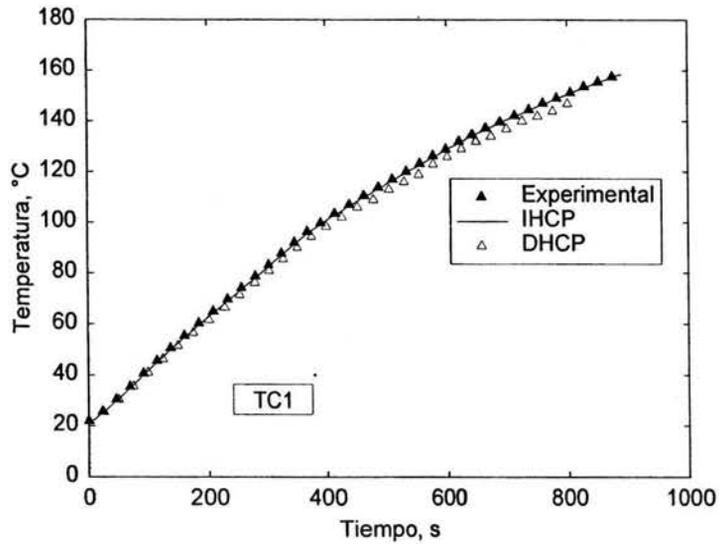


Figura: 6.8 Comparación de las historias térmicas: experimental (triángulos cerrados), estimada por el IHCP (línea continua) y simulada por el DHCP (triángulos abiertos); para el termopar TC1 localizado cerca de la superficie interna del cilindro hueco. Caso 1.

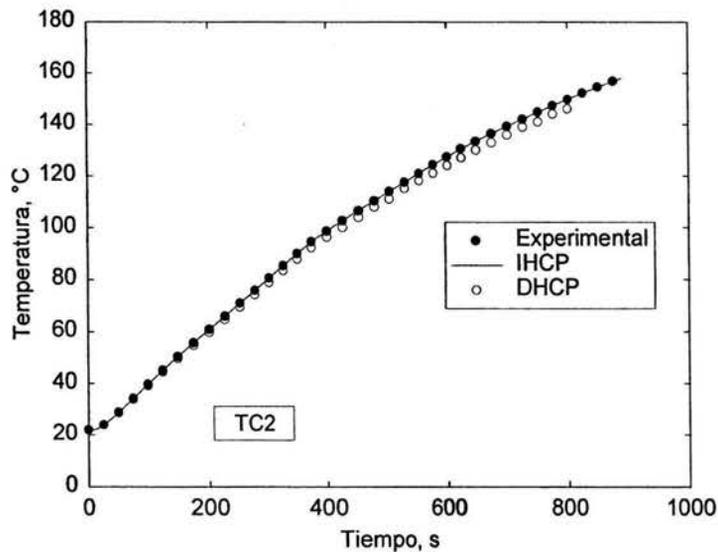


Figura: 6.9 Comparación de las historias térmicas: experimental (círculos cerrados), estimada por el IHCP (línea continua) y simulada por el DHCP (círculos abiertos); para el termopar TC2 localizado cerca de la superficie externa del cilindro hueco. Caso 1.

Anteriormente se mencionó que la curva de la Fig. 6.6 presenta una fuerte oscilación después de los 400 segundos. Si no se tuviese información acerca de la variación de la temperatura de superficie, este comportamiento podría interpretarse como ciclos en los que el sistema periódicamente se enfría y se calienta. Sin embargo, este no es el caso (ver Figura 6.2). El comportamiento observado se debe a que se pierde la estabilidad de la solución numérica del IHCP en la estimación de la condición de frontera como consecuencia de la lenta variación de temperatura de un instante a otro durante esta etapa del enfriamiento. Un valor de  $r > 2$  ayudaría a eliminar este comportamiento inusual en la curva, pero disminuiría significativamente los valores máximos alcanzados al inicio del calentamiento, por lo tanto no es una buena alternativa. En tales condiciones debe señalarse la necesidad de incorporar un paso de tiempo de cálculo variable en el algoritmo de cálculo. Debe recordarse que éste no era objetivo de este trabajo.

Finalmente, la Fig. 6.10 muestra la magnitud del flujo de calor que pasa a través de cada una de las superficies del cilindro. Este gráfico muestra que al final del proceso de calentamiento el sistema alcanza el mismo valor de flujo de calor en ambas fronteras.

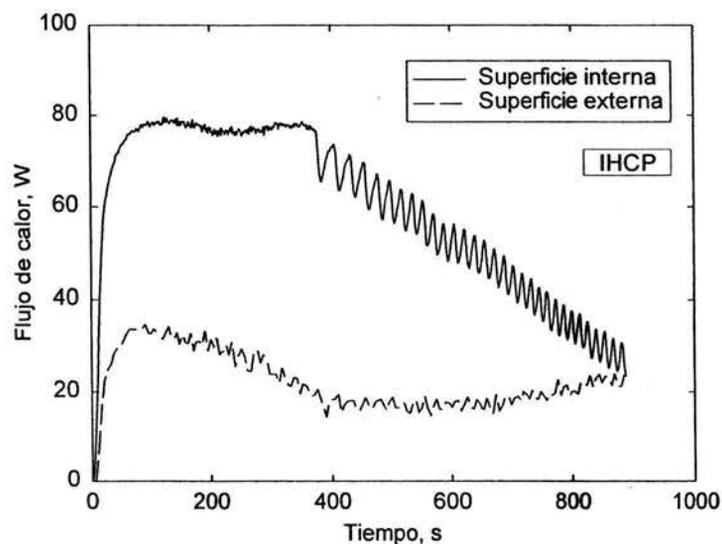


Figura: 6.10 Historias de flujo de calor estimadas por la solución al IHCP, en la superficie interna (línea continua) y en la superficie externa (línea segmentada) del cilindro hueco. Caso 1.

La estimación de las condiciones de frontera térmicas  $q_i$  y  $q_e$  para el experimento de la Fig. 6.1 (Caso 2), se muestran en la Fig. 6.11. Al igual que en el caso de las historias térmicas medidas, las densidades de flujo de calor también muestran una diferencia constante para el intervalo de tiempo entre los 1300 y 1700 segundos. Este comportamiento está representado por mesetas bien definidas en las curvas respectivas. El cambio súbito al final de las mesetas, obedece a la suspensión del calentamiento que mantenía al sistema en equilibrio térmico.

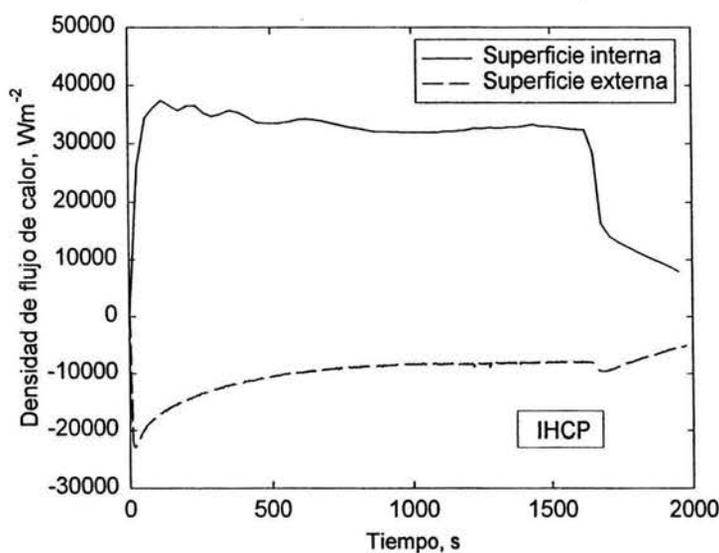


Figura: 6.11 Historias de densidad de flujo de calor estimadas por la solución al IHCP, en la superficie interna (línea continua) y en la superficie externa (línea segmentada) del cilindro hueco. Caso 2.

Las curvas de enfriamiento para la medición experimental (símbolos cerrados), estimadas por el IHCP (línea continua) y calculadas con el DHCP (símbolos abiertos), se muestran en las Figs. 6.12 y 6.13 para las posiciones de los dos termopares. En ellas se muestra nuevamente un buen ajuste entre el IHCP y los datos experimentales, además de la buena respuesta por parte del DHCP con las historias de densidades de flujo estimadas, aún en el cambio súbito que se origina después de apagado el controlador de la resistencia. La Fig. 6.14 esquematiza el resumen de este experimento.

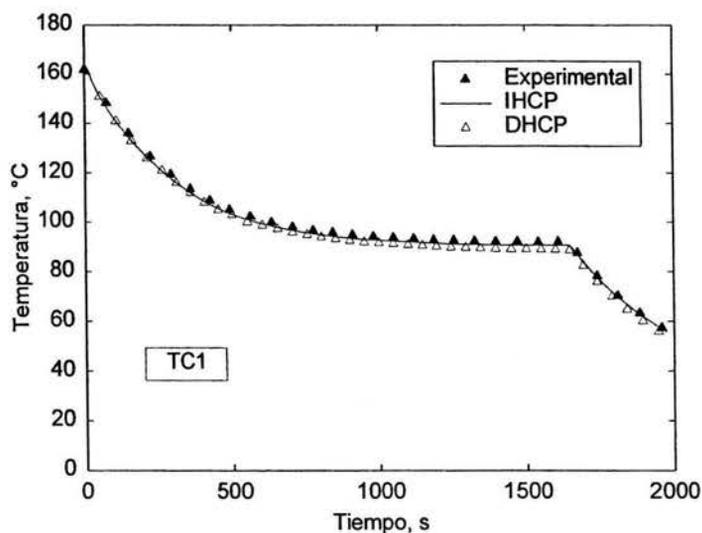


Figura: 6.12 Comparación de las historias térmicas: experimental (triángulos cerrados), estimada por el IHCP (línea continua) y simulada por el DHCP (triángulos abiertos); para el termopar TC1 localizado cerca de la superficie interna del cilindro hueco. Caso 2.

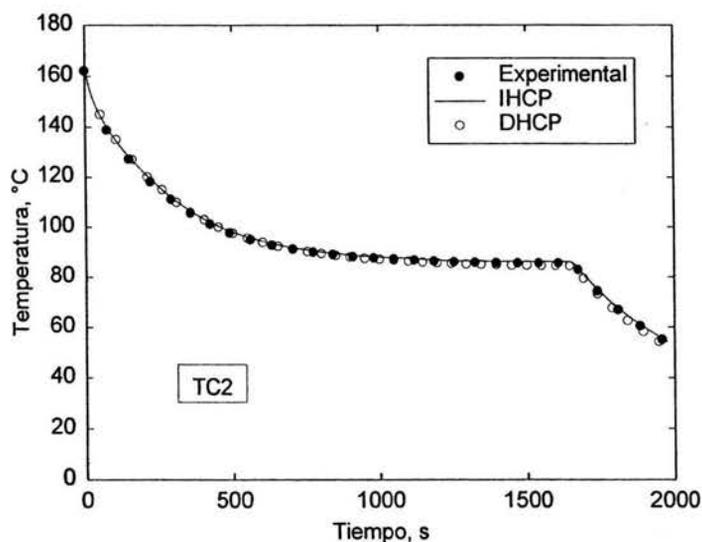


Figura: 6.13 Comparación de las historias térmicas: experimental (círculos cerrados), estimada por el IHCP (línea continua) y simulada por el DHCP (círculos abiertos); para el termopar TC2 localizado cerca de la superficie externa del cilindro hueco. Caso 2.

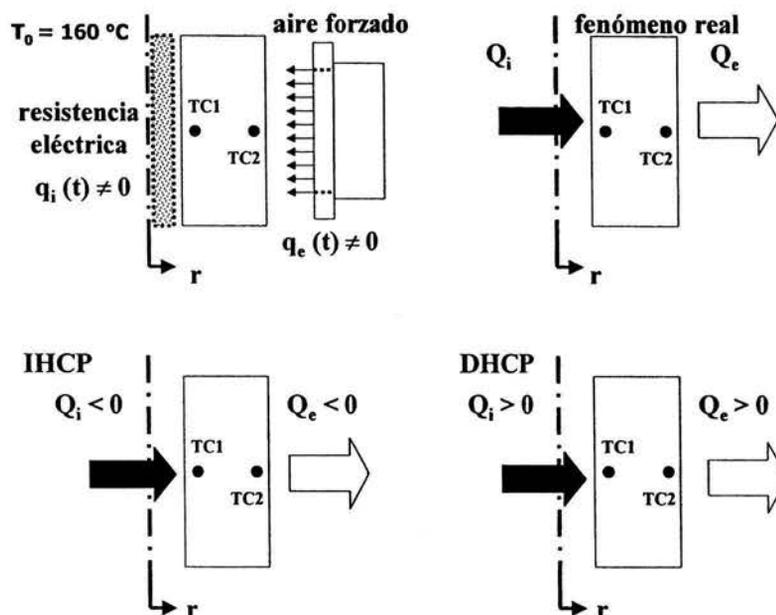


Figura: 6.14 Resumen de las intensidades y direcciones de flujo de calor en el cilindro hueco, para el análisis de resultados del procedimiento experimental del Caso 2.

En términos de densidad de flujo de calor,  $q_i$  presenta los valores de mayor magnitud debido a la razón de áreas entre las superficies interna y externa del cilindro. En la Fig. 6.15 la relación del valor absoluto de  $q_i/q_e$  (círculos cerrados) permite observar con mayor claridad que cuando el sistema alcanza un equilibrio térmico, esta relación tiene un valor de 4, que es el mismo valor que tiene la razón de áreas de transferencia del cilindro (línea continua). Lo anterior significa que está entrando la misma cantidad de energía por la superficie interna del cilindro que la que sale por la superficie externa. El punto cerca del valor -4 al tiempo  $t = 0$  no tiene sentido físico. Este valor se genera al realizar el cociente con los primeros valores de densidad flujo estimados por el IHCP. Este valor de densidad de flujo no representa una buena estimación debido a la naturaleza del método de solución. El cociente a este tiempo debería presentar la relación  $\frac{0}{0}$ , lo cual genera una indeterminación. Sin embargo, para  $t > 0$  se puede observar la tendencia esperada. La caída súbita posterior a este comportamiento se debe a que la entrada de calor a través de la superficie interna del cilindro fué suspendida.

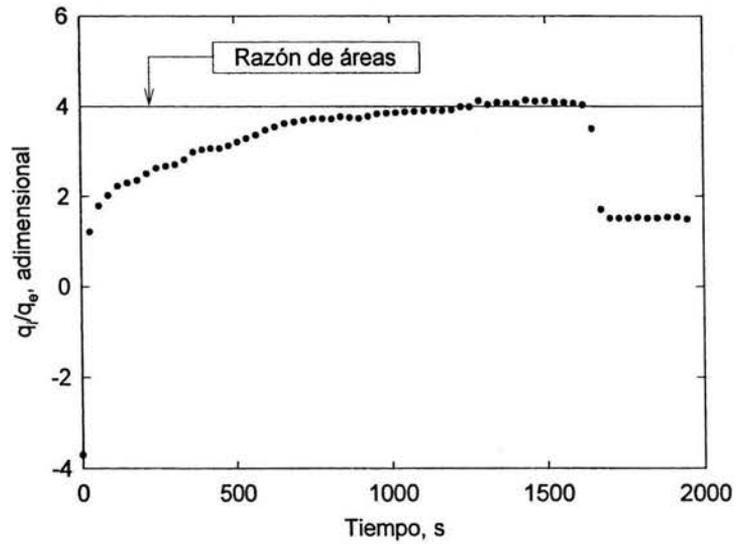


Figura: 6.15 Relación de densidades de flujo de calor como función del tiempo (círculos cerrados), mostrando un intervalo de estado cuasiestacionario del sistema. La razón de área externa/área interna es 4.

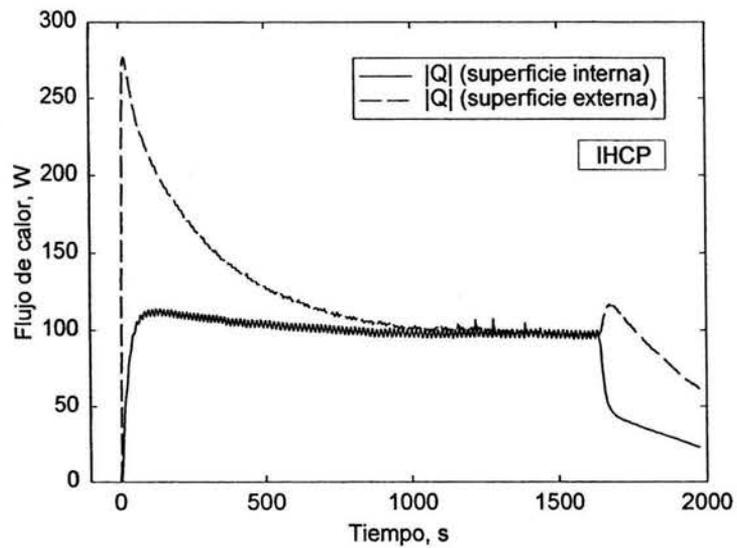


Figura: 6.16 Historias del flujo de calor (en valor absoluto) a través de las superficies interna (línea continua) y externa (línea segmentada). Nótese el intervalo de estado cuasiestacionario del sistema. Caso 2.

En términos de flujo puede apreciarse que  $Q_e$  presenta los valores más altos, como se observa en la Fig. 6.16, que muestra el valor absoluto de ambas historias de flujo de calor. Al inicio del enfriamiento el flujo es mayor a través de la superficie externa del cilindro, mientras que a través de la superficie interna se alcanza en poco tiempo un flujo prácticamente constante. El equilibrio térmico mencionado se observa más claramente cuando ambos flujos tienen la misma magnitud (estado cuasiestacionario del sistema).

Las condiciones de frontera estimadas para el experimento de la Fig. 6.1 (Caso 3) se muestran en la Fig. 6.17. A diferencia de las curvas de densidad de flujo en los experimentos anteriores, estas presentan un comportamiento suave y similar en forma, a excepción del pico en la curva de  $q_e$  cuando alcanza el máximo.

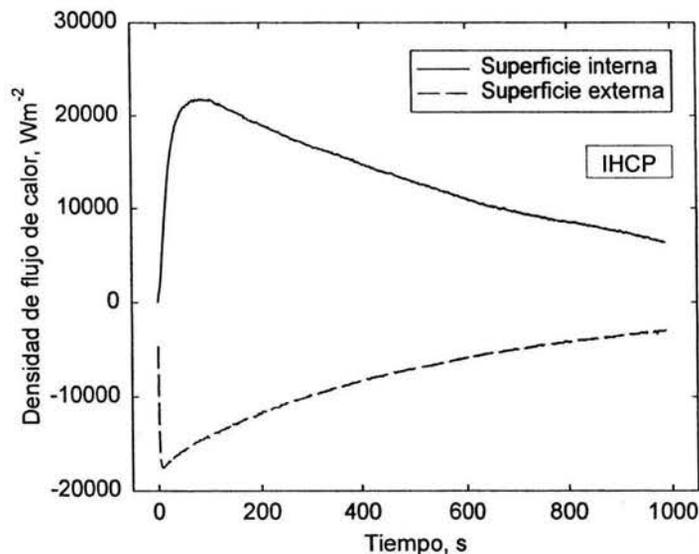


Figura: 6.17 Historias de densidad de flujo de calor estimadas por la solución al IHCP, en la superficie interna (línea continua) y en la superficie externa (línea segmentada) del cilindro hueco. Caso 3.

Las curvas de enfriamiento para las posiciones de los termopares TC1 y TC2 se muestran en las Figs. 6.18 y 6.19, respectivamente. La estimación por el IHCP muestra un excelente ajuste para ambas fronteras térmicas (líneas continuas), mientras que el DHCP utilizando estas condiciones de frontera, reproduce muy bien las mediciones experimentales (símbolos abiertos).

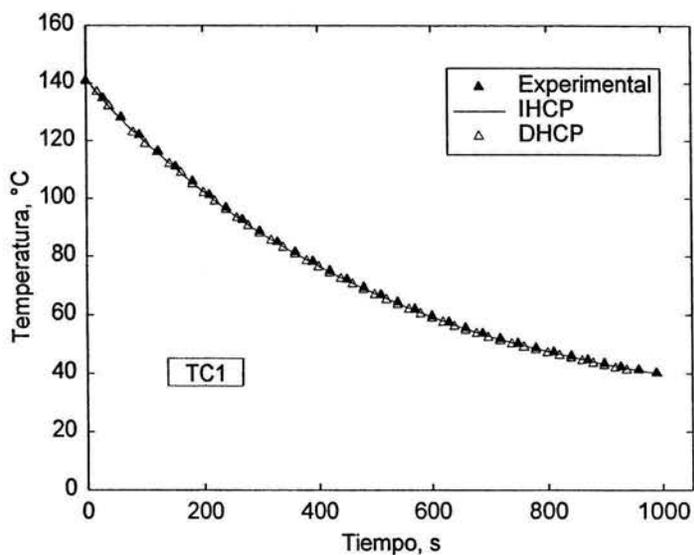


Figura: 6.18 Comparación de las historias térmicas: experimental (triángulos cerrados), estimada por el IHCP (línea continua) y simulada por el DHCP (triángulos abiertos); para el termopar TC1 localizado cerca de la superficie interna del cilindro hueco. Caso 3.

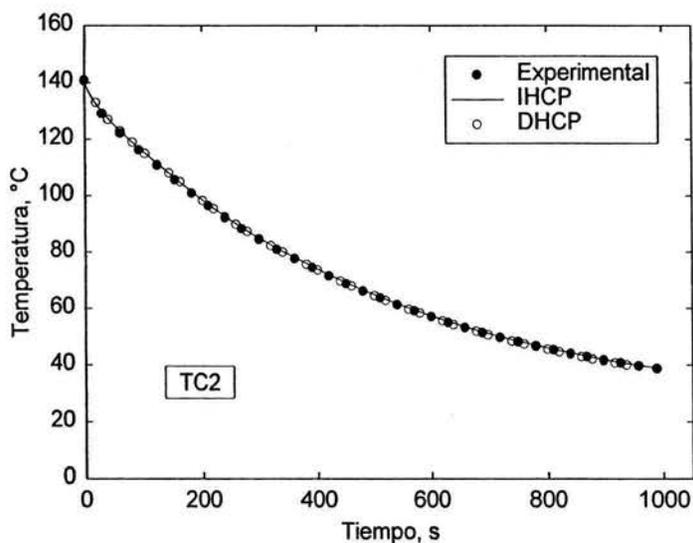


Figura: 6.19 Comparación de las historias térmicas: experimental (círculos cerrados), estimada por el IHCP (línea continua) y simulada por el DHCP (círculos abiertos); para el termopar TC2 localizado cerca de la superficie externa del cilindro hueco. Caso 3.

Las curvas del valor absoluto de flujo de calor de la Fig. 6.20, muestran claramente la relación de magnitud de flujo de calor en cada una de las fronteras térmicas, y nuevamente el comportamiento suave típico de un enfriamiento al aire.

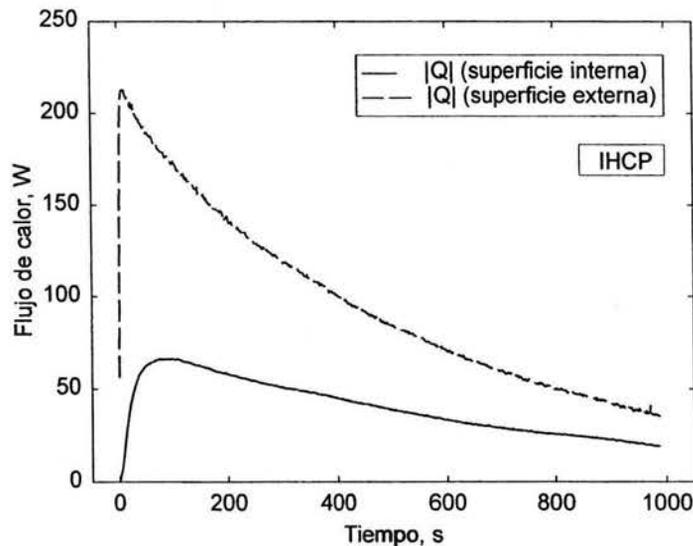


Figura: 6.20 Historias de flujo de calor (en valor absoluto) a través de las superficies interna (línea continua) y externa (línea segmentada) del cilindro hueco. Caso 3.

La Fig. 6.21 esquematiza el resumen de este experimento, donde ahora el flujo de calor real sobre la superficie interna  $Q_i$  se esperaría fuera positivo en el balance de energía del IHCP, es decir, una cantidad de calor tendría que extraerse por esta superficie ya que está en contacto con una corriente de aire.

Sin embargo, la magnitud de  $Q_e$  es considerablemente mayor, lo que promueve que la mayor cantidad de energía se transfiera hacia el medio de enfriamiento en ese sentido.

El IHCP balancea esta situación considerando un suministro de energía por la superficie interna y de esta forma es como se alimentan las condiciones de frontera en la solución al DHCP.

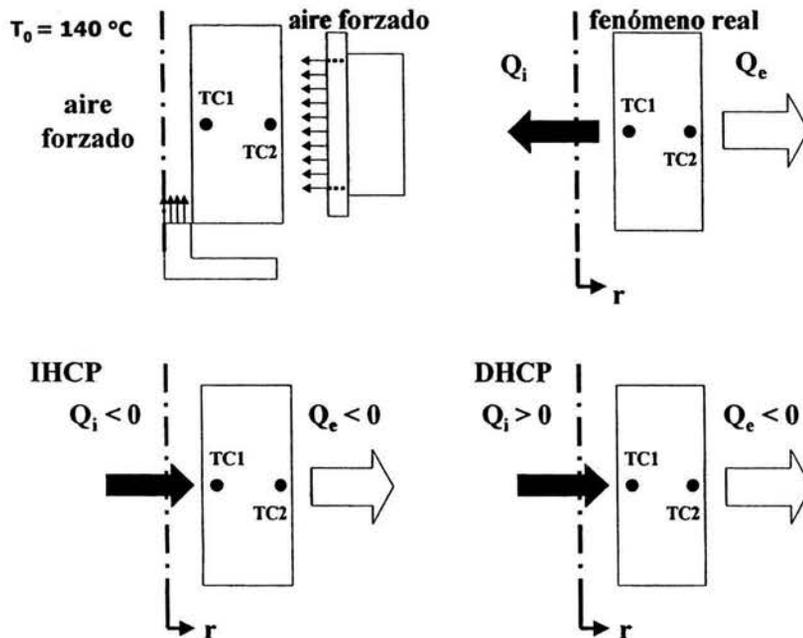


Figura: 6.21 Resumen de las intensidades y direcciones de flujo de calor en el cilindro hueco, para el análisis de resultados del procedimiento del Caso 3.

Las condiciones de frontera térmicas estimadas para el experimento de la Fig. 6.1 (Caso 4), se muestran en la Fig. 6.22. Como puede apreciarse, la intensidad de la densidad de flujo de calor sobre la superficie interna es relativamente mayor (línea continua).

Puesto que la superficie interna del cilindro es una cuarta parte de la superficie externa, se necesitan densidades de flujo mayores que esta proporción para poder lograr que por la superficie interna puedan extraerse mayores cantidades de energía que por la superficie externa.

Si se observa la Fig. 6.23 (donde se trazan las curvas de valor absoluto de flujo para ambas fronteras térmicas), puede notarse claramente que al inicio del enfriamiento la magnitud del flujo de calor a través de la superficie interna es mayor hasta que las curvas se interceptan alrededor de los 250 segundos, tiempo en el cual, se encuentra que no hay diferencias apreciables entre los valores de temperatura en las curvas de enfriamiento.

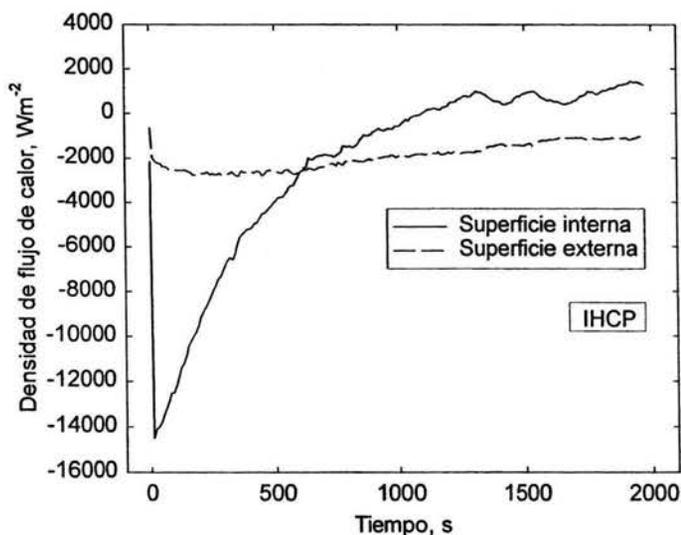


Figura: 6.22 Historias de densidad de flujo de calor estimadas por la solución al IHCP, en la superficie interna (línea continua) y en la superficie externa (línea segmentada) del cilindro hueco. Caso 4.

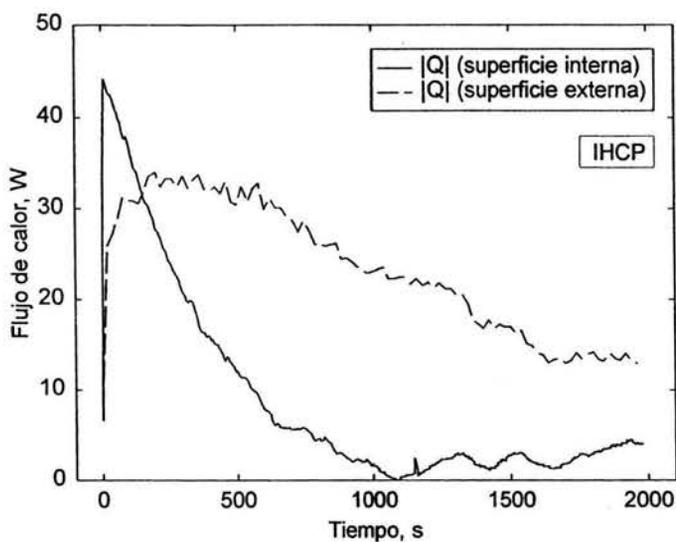


Figura: 6.23 Historias de flujo de calor a través de las superficies interna (línea continua) y externa (línea segmentada) del cilindro hueco. Caso 4.

Las Figs. 6.24 y 6.25 muestran las curvas de enfriamiento para la posición de los termopares: experimental (símbolos cerrados), IHCP (línea continua) y DHCP (símbolos abiertos), observándose un excelente ajuste en el ciclo de cálculo.

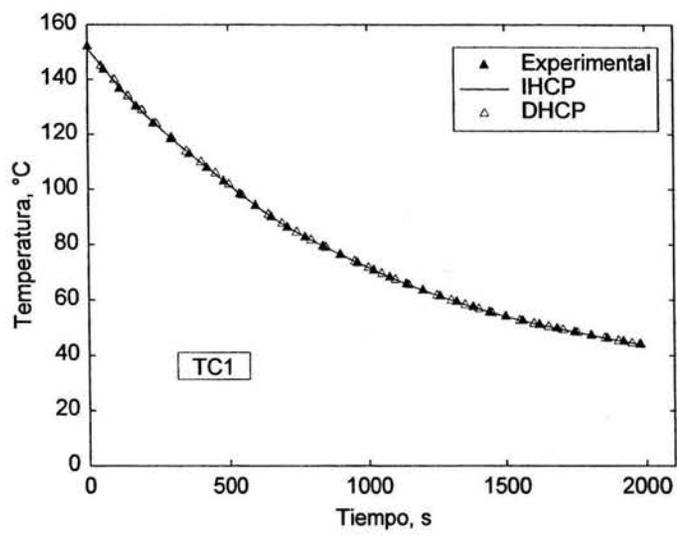


Figura: 6.24 Comparación de las historias térmicas: experimental (triángulos cerrados), estimada por el IHCP (línea continua) y simulada por el DHCP (triángulos abiertos); para el termopar TC1 localizado cerca de la superficie interna del cilindro hueco. Caso 4.

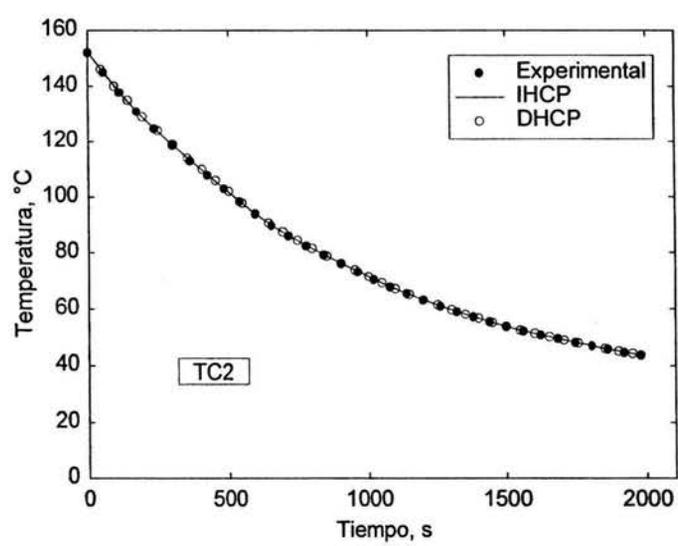


Figura: 6.25 Comparación de las historias térmicas: experimental (círculos cerrados), estimada por el IHCP (línea continua) y simulada por el DHCP (círculos abiertos); para el termopar TC2 localizado cerca de la superficie externa del cilindro hueco. Caso 4.

Finalmente el resumen del experimento del Caso 4 se esquematiza en la Fig. 6.26.

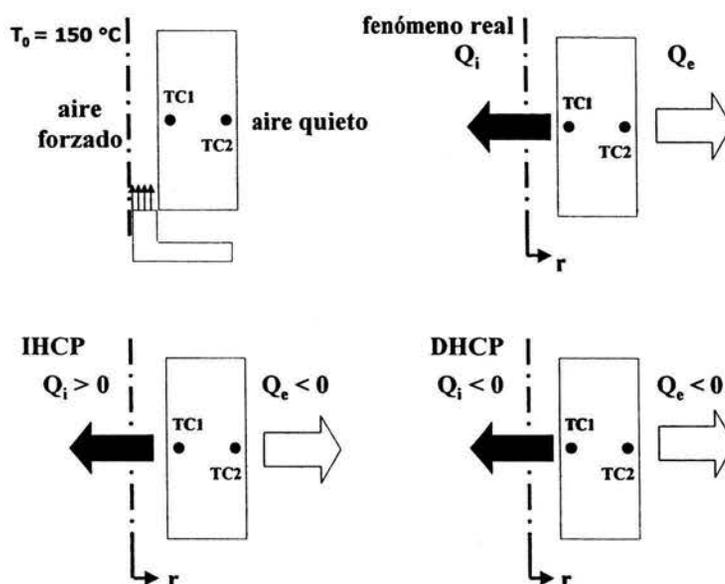


Figura: 6.26 Resumen de las intensidades y direcciones de flujo de calor en el cilindro hueco, para el análisis de resultados del procedimiento experimental del Caso 4.

## 6.2 Placa

La respuesta térmica medida experimentalmente en las seis posiciones de los termopares de la placa (ver la Fig. 5.3) se muestra en la Fig. 6.27. Los resultados muestran que los termopares localizados cerca de la superficie rociada (símbolos cerrados) tienen una mayor rapidez de enfriamiento que los localizados cerca de la superficie no rociada (símbolos abiertos). La magnitud del ancho del abanico de agua que impacta directamente sobre la placa es de entre 40 y 45 mm, bajo las condiciones de presión y flujo de agua establecidas. El comportamiento de los termopares localizados en el eje del abanico y aquellos localizados en la orilla de la zona de impacto directo responden en forma distinta. Estos resultados fueron corroborados con el video grabado durante cada prueba. En el video se observa un área alrededor del centro del eje del abanico que se enfría rápidamente. Además puede distinguirse un frente de mojado rectangular que avanza hacia las orillas laterales de la placa. La mayor rapidez de enfriamiento ocurre en la posición del termopar TC2 y es muy distinta de la observada para el termopar TC5 (que está localizado en el mismo plano). No se observa mayor diferencia

entre las respuestas térmicas de los termopares TC1 y TC3 ni entre las correspondientes a los termopares TC4 y TC6.

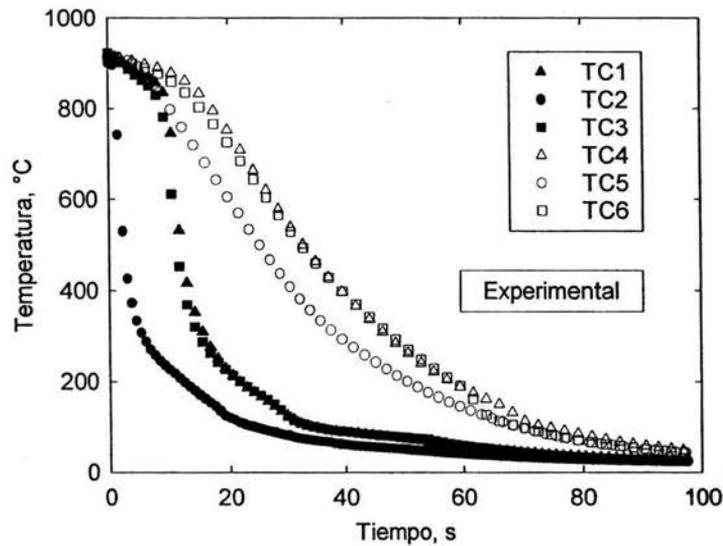


Figura: 6.27 Historias térmicas registradas en las posiciones de los termopares cerca de la cara rociada (TC1, TC2, TC3: símbolos cerrados) y cerca de la cara no rociada (TC4, TC5, TC6: símbolos abiertos), durante el enfriamiento de una placa desde 900 °C con el abanico de agua formado por una boquilla.

Puesto que el área de impacto se presupone constante y dada la elevada rapidez de extracción de calor en la misma, se estima que esta sección de la placa puede comportarse como un sistema uni-dimensional. Asimismo, demostraremos esta suposición realizando el análisis de datos sobre este plano particular de la placa y, por lo tanto, en adelante consideraremos solo la respuesta térmica de los pares de termopares TC2 y TC5.

Al igual que en los casos experimentales con el cilindro hueco, en la solución del IHCP para la placa se utilizó una distribución nodal 10,40,10. Además, para encontrar la mejor combinación de parámetros se realizaron diversas ejecuciones computacionales variando el número de pasos de tiempo futuros ( $r$ ) y el paso de tiempo de cálculo ( $\Delta t$ ).

Considerando la intensidad de extracción de calor característica del enfriamiento por rociado, es necesario tener la mayor información sobre las historias de temperatura monitoreadas. Esta situación obliga a realizar un análisis a intervalos de cálculo relativamente

pequeños sin desestabilizar la solución del IHCP. Por lo tanto, se hace necesaria la adquisición de lecturas experimentales a intervalos de tiempo pequeños. En función de la capacidad del dispositivo de adquisición de datos, estos intervalos se establecieron en 0.1 segundos. A su vez, este intervalo se tomó como el paso de tiempo de cálculo para el análisis de datos. La densidad de flujo de calor estimada como una función de la temperatura de superficie para un paso de tiempo futuro  $r = 2, 3, 4$  y  $5$ , se muestra en la Fig. 6.28.

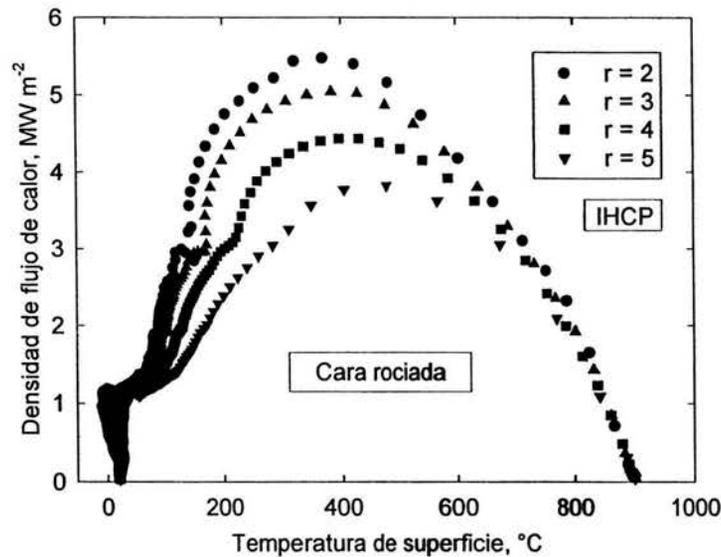


Figura: 6.28 Efecto de la variación del número de pasos de tiempo futuros ( $r = 2, 3, 4$  y  $5$ ), sobre la estimación de la historia de densidades de flujo de calor por el IHCP en la cara rociada de la placa.

Cuando el abanico de agua impacta la placa, se observa que la densidad de flujo de calor se incrementa continuamente hasta alcanzar un valor máximo; después de este punto en la curva se inicia un descenso hasta alcanzar un valor de cero cuando la temperatura de la superficie es igual a la temperatura del agua. Gráficamente, se puede observar que hay una mayor concentración de símbolos en las curvas al final del proceso de enfriamiento. Esta situación está ligada a la rapidez con la que se enfría la placa a través de la superficie rociada. Una menor rapidez de enfriamiento indica cambios de temperatura pequeños de un instante a otro. Asimismo, los cambios de pendiente significativos de la curva de densidades de flujo de calor, obedecen a cambios significativos en la rapidez de enfriamiento. Al final de cada

curva se puede identificar un segmento con una pendiente casi unitaria, lo que significa que la placa alcanza el valor de temperatura del fluido.

También se observa que el efecto de incrementar del número de pasos de tiempo futuros ( $r$ ) disminuye el valor máximo de la densidad de flujo de calor.

La respuesta térmica estimada en la superficie se muestra en la Fig. 6.29. En esta figura puede observarse que para  $r = 2, 3$  y  $4$  se obtienen valores temperatura de la superficie por debajo de la temperatura del agua, mostrando un comportamiento no real.

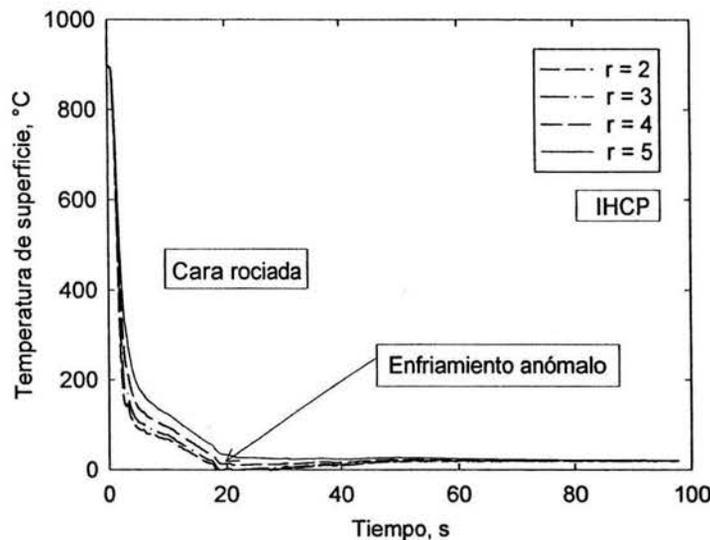


Figura: 6.29 Efecto de la variación del número de pasos de tiempo futuros ( $r = 2, 3, 4$  y  $5$ ), sobre la estimación de la historia de temperatura de superficie por el IHCP en la cara rociada de la placa.

Por otra parte, la Fig. 6.30 muestra los valores de densidades de flujo de calor para la superficie no rociada para valores de  $r = 2, 3, 4$  y  $5$ .

Con valores de  $r$  de 2 y 3 se pueden observar oscilaciones significativas en la solución. Sin embargo, con valores de  $r = 4$  y 5 las oscilaciones disminuyen considerablemente. Este comportamiento es esperado debido a que, a diferencia de la superficie rociada, la superficie no rociada se enfría con menor rapidez. Por ejemplo, la cantidad de calor extraída comparando los valores máximos de densidad de flujo de calor para las curvas de  $r = 5$ , es casi 24 veces mayor. En consecuencia, los cambios de temperatura de un instante a otro es pequeño, lo cual desestabiliza la solución.

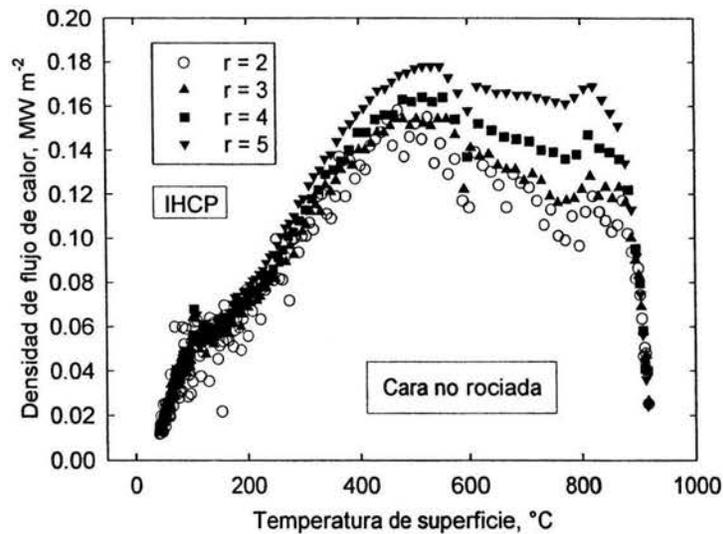


Figura: 6.30 Efecto de la variación del número de pasos de tiempo futuros ( $r = 2, 3, 4$  y  $5$ ), sobre la estimación de la historia de densidades de flujo de calor por el IHCP en la cara no rociada de la placa.

También se observa que a valores mayores de  $r$ , a diferencia del caso en la superficie rociada, los valores de densidad de flujo de calor máximos (cresta de la curva) aumentan. Esta situación puede explicarse haciendo referencia al caso del cilindro hueco. En él se estableció que la solución del IHCP, presenta un balance en la estimación de condiciones de frontera térmicas en función de la cantidad de energía neta que pasa a través del sistema, influenciados por el avance de los frentes.

La Fig. 6.31 muestra que un incremento en el valor de  $r$  no modifica significativamente la estimación de temperaturas de superficie en la cara no rociada de la placa debido a la rapidez de enfriamiento alcanzada en esta zona.

Las historias térmicas medidas en la posición de los termopares se compara, en la Fig. 6.32, con las estimadas por el IHCP. En esta figura se puede observar que en la estimación de la historia térmica para el termopar cerca de la cara rociada (círculos cerrados), resulta en la misma curva de enfriamiento registrada (triángulos cerrados) cuando se utiliza  $r = 2$ . Mientras que utilizar un valor de  $r = 5$  en la estimación, generará cambios en la pendiente de la curva a valores más positivos, es decir, disminuirá la rapidez de enfriamiento.

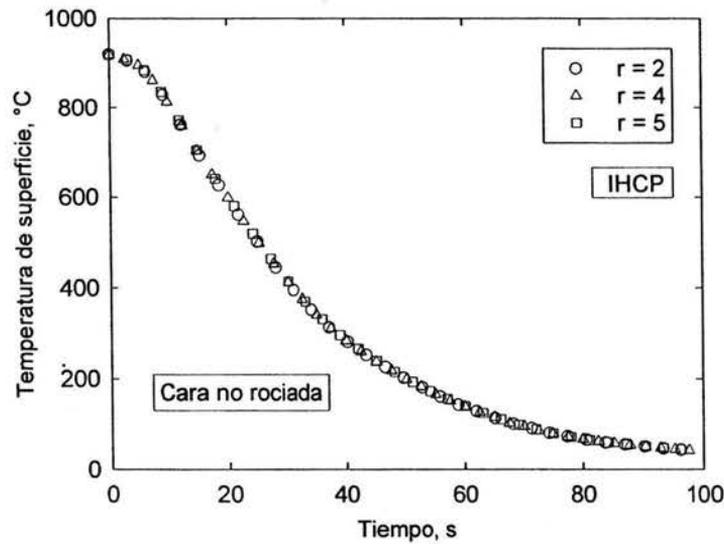


Figura: 6.31 Efecto de la variación del número de pasos de tiempo futuros ( $r = 2, 4$  y  $5$ ) sobre la estimación de la historia de temperatura de superficie por el IHCP en la cara no rociada de la placa.

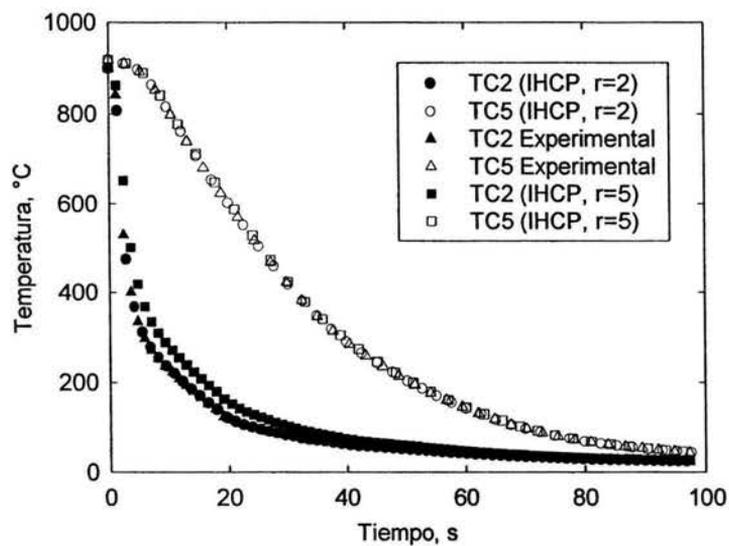


Figura: 6.32 Efecto de la variación del número de pasos de tiempo futuros ( $r = 2$  y  $5$ ), sobre la estimación por el IHCP de la historia de temperatura en la posición de los termopares: TC2 cerca de la cara rociada (símbolos cerrados) y TC5 cerca de la cara no rociada (símbolos abiertos).

Además, en la Fig. 6.32 se muestra que el incremento de  $r$  en la estimación de las historias térmicas en la posición del termopar cerca de la superficie no rociada (símbolos abiertos), no genera desviaciones de las curvas con respecto a la registrada experimentalmente.

Una vez que las historias de densidad de flujo de calor fueron estimadas, los coeficientes de transferencia de calor pueden calcularse aproximadamente a partir de la ecuación 4.1. Las Figs. 6.33 y 6.34 muestran los coeficientes de transferencia de calor calculados como una función de la temperatura de superficie, para las superficies rociada y no rociada, respectivamente.

El coeficiente de transferencia de calor estimado para la superficie rociada es dos órdenes de magnitud más grande que el de la superficie no rociada. La curva para la superficie no rociada sigue el comportamiento asociado con el enfriamiento en aire pero repentinamente aumenta alrededor de los 844 °C. Este cambio representa la influencia del frente de enfriamiento desde la superficie rociada.

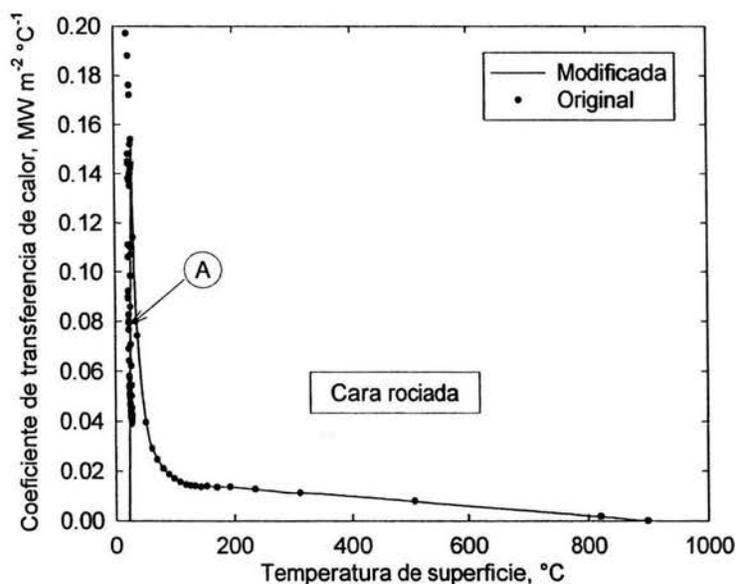


Figura: 6.33 Coeficientes de transferencia de calor como función de la temperatura, aplicados como condición de frontera sobre la cara rociada para la simulación por el DHCP de las historias de distribución de temperatura dentro de la palca.

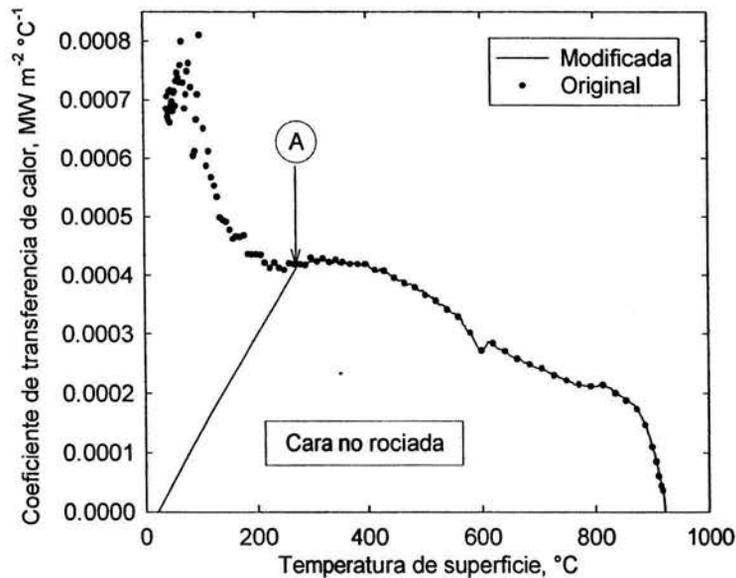


Figura: 6.34 Coeficientes de transferencia de calor como función de la temperatura, aplicados como condición de frontera sobre la cara no rociada para la simulación por el DHCP de las historias de distribución de temperatura dentro de la palca.

Si observáramos únicamente esta curva sin conocer el fenómeno, esta situación indicaría un fuerte incremento en la extracción de calor por la superficie no rociada. Sin embargo, esa cierta cantidad de energía que debería extraerse por esta superficie, se extrae por la superficie rociada a consecuencia del fuerte gradiente térmico establecido en los planos de enfriamiento, al menos en la zona de impacto. Este aspecto en la determinación de condiciones de frontera térmicas por el método matemático propuesto, indica su capacidad para generar pares de soluciones en función de la cantidad de energía neta que pasa a través del sistema. Los puntos marcados en las curvas de las Figs. 6.33 y 6.34 como “A” indican el valor desde el cuál se extrapola el coeficiente de transferencia de calor con una línea recta hasta el valor de cero a temperatura ambiente. Dicha extrapolación obedece a que conforme la temperatura de superficie alcanza el valor de la temperatura del fluido, el coeficiente de transferencia de calor tiende a valores grandes, debido a la relación existente en la ecuación 4.1. Así, el criterio para establecer el punto “A” obedece a la tendencia esperada del coeficiente de transferencia de calor, establecida sin ningún fundamento matemático.

Para validar las condiciones de frontera térmicas estimadas a partir de la solución del IHCP, la respuesta térmica dentro del área de impacto directo del abanico de agua fue simulada utilizando el código comercial DEFORM3D-HT<sup>TM</sup>. La placa fué discretizada utilizando 5000 elementos superficiales y un paso de tiempo de 0.1 s. Una comparación de las respuestas térmicas estimadas (IHCP) y simuladas (DHCP) determinadas en la posición del termopar cercano a la superficie rociada se presenta en la Fig. 6.35. Los valores correspondientes para la superficie no rociada se muestran en la Fig. 6.36. Un buen ajuste se observa en ambos casos. Mientras que un gradiente térmico significativo se genera cerca de la superficie rociada, la frontera no rociada presenta una región de gradientes térmicos poco significativo. Esto es consistente con las diferencias calculadas en los coeficientes de transferencia de calor.

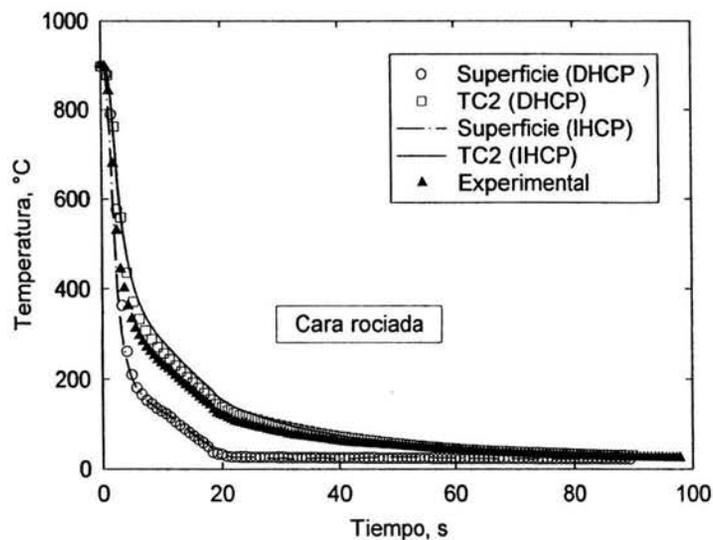


Figura: 6.35 Comparación de las historias de temperatura estimadas por el IHCP, en la superficie (línea segmentada con punto) y la posición del termopar (línea continua), con las simuladas por el DHCP, en la superficie (círculos abiertos) y la posición del termopar (cuadrados abiertos), y la medición experimental en la posición del termopar cercano a la superficie rociada de la placa (triángulos cerrados).

Debido a la heterogeneidad inicial del campo de temperaturas en la placa, para el caso de la estimación en la cara no rociada, los valores de temperatura al inicio del experimento no coinciden con los valores de inicio establecidos para la simulación. La Fig. 6.36 muestra

que la temperatura inicial de la cara no rociada está casi 20 °C por arriba de la temperatura de inicio utilizada para resolver el DHCP, que corresponde a la temperatura de inicio experimental de la cara rociada. Sin embargo, también se observa que alrededor de los 800 °C las curvas simuladas y experimental tienen la misma rapidez de enfriamiento, indicado por la sobreposición de las curvas. La diferencia significativa que inicia nuevamente entre ellas alrededor de los 300 °C se debe a la consideración de extrapolación del coeficiente de transferencia de calor.

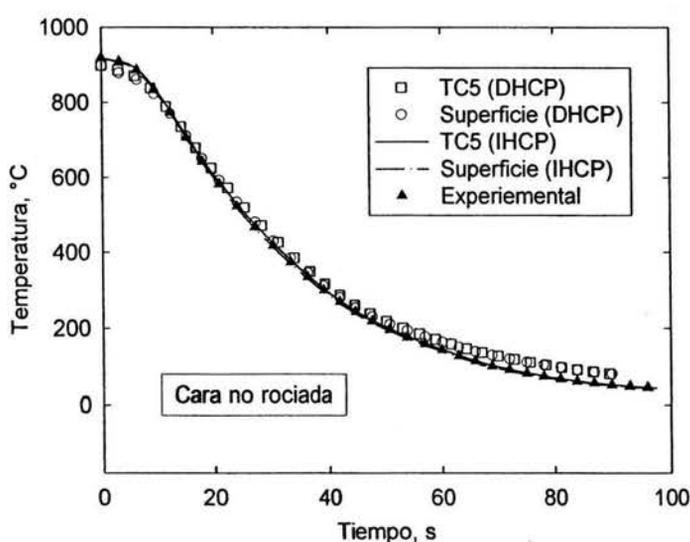


Figura: 6.36 Comparación de las historias de temperatura estimadas por el IHCP, en la superficie (línea segmentada con punto) y la posición del termopar (línea continua), con las simuladas por el DHCP, en la superficie (círculos abiertos) y la posición del termopar (cuadrados abiertos), y la medición experimental en la posición del termopar cercano a la cara no rociada (triángulos cerrados).

Otros resultados de la estimación simultánea de dos condiciones de frontera térmicas durante el rociado de placas de acero se publicaron en [11]. Los resultados de la investigación mostraron que la aplicación del modelo matemático para la solución del problema inverso, fue exitosa para caracterizar la extracción de calor en ese sistema.

### Flujo de calor

Todos los casos experimentales se simularon exitosamente a través de la solución del DHCP. Esto fué posible tras el conocimiento de las condiciones de frontera térmica estimadas resolviendo el IHCP.

El análisis de resultados mostró que la estimación simultánea de las parejas de historias de densidades de flujo de calor produce valores de intensidad y dirección del flujo de calor que, en algunos casos, difieren de los valores esperados en primera instancia. Sin embargo, un análisis más detallado muestra que los resultados obtenidos en este trabajo son consistentes. Como se discutió anteriormente, la solución del IHCP depende únicamente de las respuestas térmicas registradas en la posición de los termopares embebidos en los sistemas de estudio. En el primer y tercer caso de verificación se estudió el comportamiento térmico de una placa que presenta un plano de simetría térmica, como se esquematiza en la Fig. 6.37 (a). El plano de simetría térmica se genera a partir de que la placa experimenta la misma extracción de calor en ambas fronteras activas, como lo muestran las flechas blancas en esta figura. Por lo tanto, la magnitud de las condiciones de frontera estimadas por el IHCP son similares y de la misma magnitud que las condiciones ficticias.

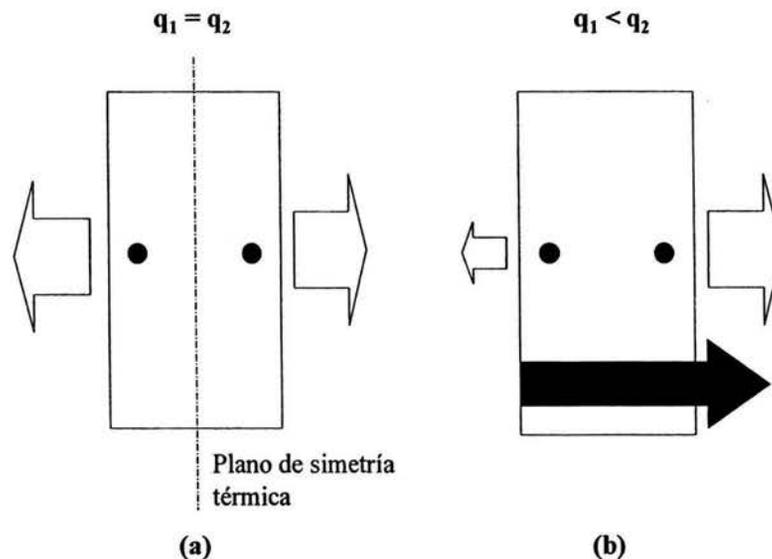


Figura: 6.37 Representación esquemática de la estimación, por el IHCP, del flujo de calor neto en dos casos: (a) sistema con plano de simetría térmica y (b) sistema sin plano de simetría térmica.

La Fig 6.37 (b) esquematiza un caso como los estudiados en la parte experimental de esta investigación. En ella se muestra un sistema en el cuál no existe un plano de simetría térmica: las flechas blancas indican la intensidad de las condiciones de frontera reales, mientras que la flecha negra indica el flujo de calor neto caracterizado por el IHCP. En el análisis inverso, el flujo de calor neto se divide entre las dos fronteras térmicas activas a consecuencia del balance térmico que el modelo matemático del IHCP realiza implícitamente. Esto representa una de las posibles soluciones al sistema. Por ejemplo, durante la etapa inicial del rociado de placas, la cara no rociada experimenta el enfriamiento debido a la exposición al medio ambiente. El frente de enfriamiento más intenso, correspondiente a la cara rociada, avanza rápidamente hacia la cara no rociada. Cuando el frente se aproxima a la posición del termopar localizado cerca de la cara no rociada, éste comienza a registrar una disminución de la temperatura en esta posición aún si la temperatura desde ésta posición hasta la superficie de la cara no rociada presente valores de temperatura más altos. Por lo tanto, en la condición de frontera estimada para la cara no rociada, se cuantifica además del enfriamiento por la exposición al medio ambiente, el flujo de calor hacia la cara rociada promovido por el frente de enfriamiento.

La estimación de esta interacción de dos frentes de enfriamiento y/o calentamiento es la aportación más valiosa de este trabajo de investigación.

# Capítulo 7

## Conclusiones

- Por primera vez se desarrolló e implementó un algoritmo, basado en la técnica secuencial de especificación de la función (SFS de sus iniciales en inglés) y en el método de diferencias finitas, para caracterizar simultáneamente dos condiciones de frontera térmicas en un sólido de geometría simple, que experimenta transferencia de calor uni-dimensional, en ausencia de fuentes internas de calor.
- En todos los casos estudiados experimentalmente (cuatro para el cilindro hueco y uno para la placa) fue posible estimar simultáneamente las condiciones de frontera térmica a través de los programas de cómputo desarrollados. Los requerimientos para obtener la solución del IHCP son de al menos dos historias térmicas medidas, una cerca de cada frontera activa.
- La estabilidad de la solución del IHCP puede ser controlada a través del concepto de tiempos futuros y la combinación apropiada de: 1) espaciamiento internodal y 2) paso de tiempo de cálculo; en función de la intensidad de extracción o suministro de energía. Dicha combinación permite disminuir los sesgos y alcanzar los valores máximos en la estimación, estableciendo un alto porcentaje de confianza.
- De acuerdo a los resultados obtenidos, se determinó la existencia de una interdependencia en la solución del IHCP entre las dos condiciones de frontera térmicas estimadas, en función de la transferencia de calor neta que pasa a través del sistema de estudio. Esta observación no ha sido reportado anteriormente. La interdependencia citada se debe a que, dentro del algoritmo, la estimación de las condiciones de frontera se realiza

simultáneamente a través de la aplicación de un criterio de minimización que involucra a ambas respuestas térmicas, las cuales, son afectadas por la rapidez de avance de los frentes de enfriamiento o calentamiento desde cada frontera activa.

- Con este trabajo se muestra que resolver el problema inverso de conducción de calor (IHCP) es un procedimiento alternativo y eficaz al análisis complejo de la dinámica de fluidos, para la estimación de condiciones de frontera térmica y caracterización de la extracción de calor para sistemas sólido fluido.
- El comportamiento metalúrgico en un procesamiento térmico puede simularse si se cuenta con una buena estimación de la evolución del campo térmico, ya que la evolución de los campos microestructural y de esfuerzos dependen, en gran medida, de la extracción de calor en la pieza.

#### **Futuros desarrollos:**

- Debido a que, los sistemas experimentan cambios en la rapidez de extracción de calor a medida que pasa el tiempo, se determinó la necesidad de incorporar en el futuro, criterios en los algoritmos para redefinir dinámicamente el paso de tiempo de cálculo, principalmente en función de la variación de temperatura de un instante a otro en las historias térmicas medidas.
- Dada la condición de estado cuasiestacionario establecida, en un procedimiento experimental con el cilindro hueco (Caso 2), existe ahora la posibilidad de utilizar un sistema similar para la determinación, en diversos materiales, de propiedades termofísicas como la conductividad térmica y el producto de la capacidad calorífica y la densidad, ambas propiedades como función de la temperatura.

## Bibliografía

- 1 P.Campbell, J.K. Brimacombe y E.B. Hawbolt. "Application of Microstructural Engineering to the Controlled Cooling of Steel Wire Rod". **Memorias de la Conf. Accelerated Cooling of Rold Steel**. Ed. por G.E. Ruddle y A.F. Crawley. CIM, 1987, pp. 309 - 330.
- 2 J.V. Beck, B.Litkouhi y C.R. St. Clair Jr. "Efficient Solution of the Nonlinear Inverse Heat Conduction Problem". *Numerical Heat Transfer*, 5, 1982, pp. 275 - 286.
- 2 J.V. Beck, B. Blackwell y C.R. St-Clair-Jr. "**Inverse Heat Conduction**". **Ill Posed Problems**. A. Wiley-Interscience Publication, New York, 1985.
- 3 T.E. Lim. "Optimizing Heat Treatment with Factorial Design". *Journal of Metals*, Marzo 1989, pp. 52 - 53.
- 4 W. Dowling, T. Pattok, B.L. Ferguson, D. Shick, Y. Helen-Gu, M. Howes. "Development of a Carburising and Quenching Simulation Tool: Program Overview". En **Proceedings of the Second International Conference on Quenching and Control of Distortion**, Cleveland Ohio, 1996, pp. 349 - 355.
- 5 K. Arimoto, G. Li, A. Arvind, W.T. Wu. "The Modeling of Heat Treating Process". En **Proceedings of the First International Conference on Quenching & Control of Distortion**, Chicago, Illinois, USA, 22 - 25 September, 1992, pp. 23 - 30.
- 6 S. Denis, S. Sjöström y A. Simon. "Coupled Temperature, Stress, Phase Transformation Calculation Model Numerical Illustration of the Internal Stresses Evolution During Cooling of a Eutectoid Carbon Steel Cylinder". *Metallurgical Transactions A*, 18 A, Julio 1987, pp. 1203 - 1212.
- 7 British Iron and Steel Research Association. "**Physical Constants of Some Commercial Steels at Elevated Temperatures**". Butterworth,s Scientific Publications, Surrey, U.K., 1953.
- 8 P.K. Agarwal y J.K. Brimacombe. "Mathematical Model of Heat Flow and Austenite-Perlite Transformation in Eutectoid Carbon Steel Rods for Wire". *Metallurgical Transactions B*, 12B, 1981, pp. 121 - 133.
- 9 P.C. Campbell, E.B. Hawbolt y J.K. Brimacombe "Microstructural Engineering Applied to the Controlled Cooling of Steel Wire Rod: Part III. Mathematical Model - Formulation and Predictions". *Metallurgical Transactions A*, 22A, 1991, 2769 - 2778.
- 10 F.M.B. Fernandes, S. Denis y A. Simon. "Mathematical Model Coupling Phase Transformation and Temperature Evolution During Quenching of Steels". *Materials Science and Technology*, 1, Octubre 1985, pp. 838 - 844.

- 11 B. Hernández-Morales, J.S. Téllez-Martínez, E.B. Montufar-Jiménez, A. Ingalls-Cruz y J.A. Barrera-Godínez. "Simultaneous Estimation of Heat Transfer Boundary Conditions During One-Sided Spray Cooling" *Materials Science Forum*, 426-432, 2003, pp. 3885 - 3890.
- 12 W.R. Irving. "Continuous Casting of Steel". Machine Components, Heat Transfer and Strand Solidification, Cap. 3, pp. 37 - 92, Institute of Materials, Cambridge, 1993.
- 13 E. Muñoz, B. Hernández-Morales y A.H. Catilejos. "Determinación de las Condiciones de Frontera Durante el Enfriamiento Secundario en una Máquina de Colada Continua en un Proceso CPS". En *Memorias del XXII Simposio Nacional de Siderurgia*, pp. 18-1 a 18-2, Morelia Mich., México, 2001.
- 14 U.S.S. "The Making, Shaping and Treating of Steel". Thermomechanical Treatment, sección 7, capítulo 20, pp. 607 - 609, Ed. Herbick & Held, USA, 1971.
- 15 Z.D. Liu, D. Fraser y I.V. Samarasekera. "Experimental Study and Calculation of Boiling Heat Transfer on Steel Plates During Runout Table Operation". *Canadian Metallurgical Quarterly*, 41 - 1, 2002, pp. 63 - 74.
- 16 Z.D. Liu, D. Fraser, I.V. Samarasekera y G.T. Lockhart. "Experimental Observations and Modelling of Thermal History Within A Steel Plate During Water Jet Impingement". *Canadian Metallurgical Quarterly*, 41 - 1, 2002, pp. 75 - 86.
- 17 J.H. Lin, C.K. Chen y Y.T. Yang. "An Inverse Method for Simultaneous Estimation of the Center and Surface Thermal Behavior of a Heated Cylinder Normal to a Turbulent Air Stream". *Journal of Heat Transfer*, 124, 2002, pp. 601 - 608.
- 18 H.T. Chen, S.Y. Lin, H.R. Wang y L.C. Fang. "Estimation of Two-Sided Boundary Conditions for Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problems". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45, 2002, pp. 15 - 23.
- 19 G. Stolz-Jr. "Numerical Solutions to a Inverse Problem of Heat Conduction for Simple Shapes". *Journal of Heat Transfer*, 82, 1960, pp. 20 - 26.
- 20 G.W. Krutz, R.J. Schoenhals y P.S. Hore. "Application of the Finite Element Method to the Inverse Heat Conduction Problem". *Numerical Heat Transfer*, 1, 1978, pp. 489 - 498.
- 21 D. Maillet, A. Degiovanni y R. Pasquetti. "Inverse Heat Conduction Applied to the Measurement of Heat Transfer Coefficient on a Cylinder: Comparison between an Analytical and a Boundary Element Technique". *Journal of Heat Transfer*, 113, 1991, pp. 549 - 557.
- 22 A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin. "Solutions of Ill-Posed Problems". V.H. Winston & Sons, Washington D.C., 1977.

- 23 K.J. Dowding, J.V. Beck. "A Sequential Gradient Method for the Inverse Heat Conduction Problem (IHCP)". *Journal of Heat Transfer*, 121, 1999, pp. 300 - 306.
- 24 J.V. Beck, D.A. Murio. "Combined Function Specification - Regularization Procedure for Solution of Inverse Heat Conduction Problem". *AAIA Journal*, 24 - 1, 1986, pp. 180 - 185.
- 25 M. Raynaud y P. Bransier. "Experimental Validation of New Space Matching Finite Difference Algorithm for the Inverse Heat Conduction Problem". En **8th Int. Heat Transfer Conference**. Hemisphere Publishing Corporation, N.Y., 1986, pp. 17 - 22.
- 26 P. Archambault y A. Azim. "Inverse Resolution of the Heat Transfer Equation: Application to Steel and Aluminum Alloy Quenching". ASM International, 4, 1995, pp. 730 - 736.
- 27 B. Hernandez-Morales, J.K. Brimacombe y E.B. Hawbolt. "Characterization of the Boundary Condition in Heat Treatment Operations Using an Inverse Heat Conduction Algorithm". *Proceedings of the ASME Heat Transfer Division*, 317 (2), 1995, pp. 559 - 566.
- 28 B. Hernández-Morales, J.S. Téllez-Martínez, A. Ingalls-Cruz y J.A. Barrera Godinez. "Cooling Curve Analysis Using an Interstitial-Free Steel". En **19th ASM Heat Treating Conference**, ASM International, Cincinnati, Ohio, 1999.
- 29 M. Raynaud y J.V. Beck. "Methodology for Comparasion of Inverse Heat Conduction Methods". *Transaction of the ASME, Journal of Heat Transfer*, 110, February 1988, pp. 30 - 37.
- 30 S. Chantasiriwan. "Comparasion of Three Sequential Function Specification Algorithms for the Inverse Heat Conduction Problem". *International Communication of Heat and Mass Transfer*, 26 - 1, 1999, pp. 115 - 124.
- 31 S. Chantasiriwan. "Inverse Heat Conduction Problem of Determining Time - Dependent Heat Transfer Coefficient". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42, 1999, pp. 4275 - 4285.
- 32 S. Chantasiriwan. "An Algorithm for Solving Multidimensional Inverse Heat Conduction Problem". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44, 2001, pp. 3823 - 3832.
- 33 A. Majorek, B. Scholtes, H. Müller, y E. Moncherauch. "The Influence of Heat Transfer on the Development of Stresses, Residual Stresses and Distortions in Martensitically Hardened SAE 1045 and SAE 4140", En **Proceedings of the First International Conference on Quenching & Control of Distortion**, Chicago, Illinois, USA, 22 - 25 September, 1992, pp. 171 - 179.

- 34 M. Necati Özisik. "**Heat Conduction**", Inverse Heat Conduction Problems (IHCP), Capítulo 14, pp. 571 - 616, Ed. John Wiley and Sons 2nd Edition, New York 1993.
- 35 J.S. Téllez-Martínez. "Desarrollo de un Dispositivo para Caracterizar la Extracción de Calor en Baños de Temple". Tesis de Licenciatura, Facultad de Química, UNAM, México, 2000.
- 36 O. Barba-Méndez. "Modelado Matemático de la Distorsión de la Probeta Navy-C". Tesis de Maestría, Facultad de Química, UNAM, México, 2002.
- 37 J.V. Beck, "User's Manual for **CONTA - Program for Calculating Surface Heat Fluxes from Transient Temperatures Inside Solids**". Sandia Nat. Lab. SAND 84 - 7134, 1983.
- 38 G.E. Totten, C.E. Bates y N.A. Clinton. "**Handbook of Quenchants and Quenching Technology**", Cooling Curve Analysis, Capítulo 3, pp. 69 - 128, Ed. ASM International, 1993.
- 39 S. Jenkins, S.R. Story y R.H. Davis. "**Quenching and Carburising**". The Institute of Materials, pp. 161 - 175, Melbourne, 1991.

## Apéndice A

Tabla 1(a). Conductividad térmica del acero tipo AISI 304 [7]

Temperatura °C	k (W m <sup>-1</sup> K <sup>-1</sup> )
20	11.02
100	12.21
180	13.41
220	14.01
260	14.61
300	15.2
380	16.4
420	17
500	18.19
540	18.79
580	19.39
620	19.99
660	20.59
700	21.19
740	21.78
780	22.38
792	22.54
832	23.07
912	24.13

Tabla 1(b). Propiedades termofísicas del acero tipo AISI 304 [7]

Temperatura °C	$\rho C_p$ (J m <sup>-3</sup> K <sup>-1</sup> )
13	3.53219E6
33	3.56387E6
53	3.59555E6
73	3.62723E6
93	3.65891E6
113	3.69059E6
133	3.72227E6
153	3.75395E6
173	3.78563E6
193	3.81731E6
213	3.84899E6
233	3.88067E6
253	3.91235E6
273	3.94403E6
293	3.97571E6
313	4.00739E6
333	4.03907E6
353	4.07075E6
373	4.10243E6
393	4.13411E6
413	4.16579E6
433	4.19747E6
453	4.22915E6
473	4.26083E6
493	4.29251E6
513	4.32419E6
533	4.35587E6
553	4.38755E6

Temperatura °C	$\rho C_p$ (J m <sup>-3</sup> K <sup>-1</sup> )
573	4.41923E6
593	4.45091E6
613	4.48259E6
633	4.51427E6
653	4.54595E6
673	4.57763E6
693	4.60931E6
713	4.64099E6
733	4.67267E6
753	4.70435E6
773	4.75196E6
792	4.84164E6
812	4.93604E6
832	5.03044E6
852	5.12484E6
872	5.21924E6
873	5.224E6
892	5.186E6
912	5.146E6
932	5.106E6
952	5.066E6

Tabla 2. Propiedades termofísicas del acero tipo AISI 1045 [7]

Temperatura °C	$k$ ( $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$ )	$\rho C_p$ ( $\text{J m}^{-3} \text{K}^{-1}$ )
0	52.34	0.3506E7
50	52.07	0.3671E7
100	51.64	0.3837E7
150	51.03	0.4002E7
200	50.24	0.4168E7
250	49.28	0.4333E7
300	48.15	0.4498E7
350	46.85	0.4664E7
400	45.37	0.4829E7
450	43.72	0.4994E7
500	41.89	0.5160E7
550	39.89	0.5325E7
600	37.71	0.5491E7
650	35.37	0.5656E7
700	32.85	0.5821E7
750	30.15	0.5987E7
800	27.28	0.6152E7
850	24.24	0.6317E7
900	21.02	0.6483E7