00365

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMATICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

"LIMITES INVERSOS DE ESPACIOS PROYECTIVOS DE DIMENSION PAR"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS MATEMATICAS

P R E S E N T A :

MAT. LEOPOLDO MORALES LOPEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. SERGIO MACIAS ALVAREZ

MEXICO, D.F. SEPTIEMBRE 2004

A Ivonne:

Por ser quien eres

A Cæsar:

Proverbios 18:24

A Rafael:

Por invitarme a ser parte

de MATHEMA

A Sergio:

Hiciste una buena Tesis

A mis sinodales:

Por su tiempo y consejos

A la UNAM:

Por su generosidad

A mi familia:

La vida no seria divertida sin ustedes

En el principio era el Verbo, y el Verbo era con Dios, y el Verbo era Dios. Este era en el principio con Dios. Todas las cosas por él fueron hechas, y sin él nada de lo que ha sido hecho, fue hecho. En él estaba la vida, y la vida era la luz de los hombres. La luz en las tinieblas resplandece, y las tinieblas no prevalecieron contra ella. Aquella luz verdadera, que alumbra a todo hombre, venía a este mundo. En el mundo estaba, y el mundo por él fue hecho; pero el mundo no le conoció. A lo suyo vino, y los suyos no le recibieron. **Mas a todos los que le recibieron, a los que creen en su nombre, les dio potestad de ser hechos hijos de Dios**

Juan 1

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Uno de los atractivos más grandes del quehacer matemático es indudablemente responder preguntas. Las respuestas pueden variar en cuanto a complejidad, aún más, los motivos para darlas pueden ser variados, en algunos casos, no habrá más motivación que *amor al ego*, como diría mi entrañable amigo Fernando Martínez. Pero aunque no se tenga dicha motivación, evidentemente es un placer llegar a ellas. Claro que es aún más atractivo reponder cuando la pregunta fue formulada por alguien notable o, en su defecto, si es una de esas que se mantienen durante algún tiempo sin respuesta.

Menciono lo anterior, pues la presente tesis tiene como objetivo presentar la respuesta (y generalización) dada por M. Marsh a una pregunta hecha por David Bellamy en 1983. La pregunta en cuestión dice: *¿Los límites inversos de planos proyectivos reales, con funciones de ligadura esenciales, tienen la* *propiedad del punto fijo?* [Problema 32, pág. 369, L]. La respuesta fue dada en el 2002, a casi 20 años de su formulación, lo que nos dice que si bien esta pregunta no fue una de las más difíciles que se han formulado (recuérdese que algunas llevan mucho más de 20 años sin respuesta), tampoco fue fácil darla, la respuesta es: si.

Así pues, el presente trabajo es fruto de algunos cursos de maestría impartidos por el Dr. Sergio Macías. Los temas abordados en los cursos, tienen una vinculación estrecha con los resultados que componen los capítulos de la tesis.

El artículo de M. Marsh [MM] introduce el concepto de función productora de coincidencias en cubrientes, que es una generalización del concepto de función universal. Para tener una idea clara de la herramienta matemática usada por Marsh es necesario recurrir a ciertos conceptos matemáticos como son: límites inversos, espacios cubrientes, el grado de una función de la n-esfera en sí misma, etc. Hacemos un recuento de los mismos a lo largo de toda la tesis.

La estructura de la tesis es la siguiente:

El primer capítulo es de límites inversos. Sin duda una de las herramientas más bellas en la topología. Las demostraciones del capítulo son una experiencia obligada en cualquier curso de límites inversos, se incluyen todas, pues no es sencillo encontrarlas en la literatura que existe acerca de límites inversos. Se puede omitir su lectura si se tienen buenas bases del tema.

El segundo capítulo es acerca del grupo fundamental. En éste se dan las nociones básicas de homotopía y del grupo fundamental. Se exhiben algunos de los resultados que ligan las nociones de grupo y de espacio topológico. Por último se da el ejemplo del grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$. También se puede omitir su lectura si se está familiarizado con los conceptos básicos de Topología Algebraica.

El tercer capítulo aborda el tema de espacios cubrientes. El material contenido en él es importante, pues da las bases para entender el concepto de *función productora de coincidencias* introducido por Marsh. Podemos decir que es una continuación natural del capítulo 2, de hecho pudieran estar dentro del mismo capítulo, pero preferimos separarlos para facilitar la lectura. Puede omitirse su lectura si se está familiarizado con los conceptos básicos de Topología Algebraica.

El capítulo cuarto es central en el trabajo. En primer lugar se dan dos demostraciones propias de resultados previos de funciones universales; se da el concepto introducido por Marsh y, de alguna manera, se sigue la estructura de su artículo [MM]. Pero se reformulan los teoremas 4.8 y 4.9 de los cuales Marsh solamente demostró la necesidad y nosotros demostramos su suficiencia. Se incluyen todos los resultados de Marsh incluidos en su artículo.

El último capítulo tiene como objetivo demostrar que el resultado de Marsh es el mejor posible. Se basa en una demostración que hizo Hagopian del siguiente resultado: *Si un continuo M es tipo árbol y P es un poliedro de dimensión mayor que uno, entonces M es tipo P.* Dicho resultado se incluye en el artículo de Marsh [MM]. Aunque nuestro capítulo se basa en un artículo de Hagopian, que no se publicó, pues dicho resultado ya se había demostrado y publicado con anterioridad.

Por último se incluye un apéndice, en él se discute esencialmente el concepto de grado de una función de $\mathbb{S}^n$ en sí misma, procuramos dar una versión lo más entendible posible para no confundir al lector. Se puede omitir su lectura si ya se tiene una idea clara del tema.

Capítulo 1

LÍMITES INVERSOS

En el presente capítulo daremos los resultados principales que emplearemos en este trabajo, todos ellos se relacionan con límites inversos, su lectura se puede omitir si se tienen las bases de éste campo de la teoría de los continuos. Para tener una idea más amplia de lo referente al presente capítulo, recomendamos el libro de Tom M. Ingram editado por la Sociedad Matemática Mexicana [I] y las notas de clase de Sergio Macías, creemos que la lectura de ambos sería muy provechosa, puesto que consideramos que son en cierto modo complementarios. Además, claro está, el libro de continuos de Sam B. Nadler [N2].

1.1. Definición. *Por un* ***continuo*** *entenderemos un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un* ***subcontinuo*** *de un espacio métrico, será un continuo contenido en dicho espacio.*

Notación. *Cuando digamos función queremos decir una función conti-*

nua y todos nuestros espacios serán continuos a menos de que se indique lo contrario. Pero siempre serán espacios métricos.

1.2. Definición. *Sea* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de espacios métricos la cual cumple: Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existe una función* $f_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ *de* X_{n+1} *en* X_n. *La sucesión* $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *de espacios y funciones es llamada **una sucesión inversa**. Las funciones* $f_n^{n+1} : X_{n+1} \to X_n$ *son llamadas **funciones de ligadura**.*

Notación. *Si* $n > m$ *entonces* $f_m^n = f_m^{m+1} \circ \cdots \circ f_{n-1}^n$ *y* $f_n^n = I_{X_n}$.

1.3. Definición. *El **límite inverso** de la sucesión inversa* $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *(denotado por* $\varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ *o por* X_∞*) es el subespacio del espacio producto* $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ *definido como:*

$$X_\infty = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \mid f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n \right\}$$

Notación. *Para toda* n, *sea* $f_n = \pi_n |_{X_\infty}$ *donde* π_n *es la función proyección, es decir,* f_n *es la proyección natural restringida al límite inverso. También llamaremos **proyección** a cada* f_n.

Siempre supondremos que la métrica d_n de X_n está acotada por 1. Así $d(\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty}) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n)$ es una métrica para $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. En consecuencia, X_∞ es un espacio métrico. [Teorema 4.2.2, pág. 259, **E**].

1.4. Proposición. *Si* $\beta = \{f_m^{-1}(U) : U$ *es un abierto en* X_m *y* $m \in \mathbb{N}\}$, *entonces* β *es una base para la topología de* X_∞.

Demostración: En primer lugar cada elemento de la familia β, es un abierto en X_∞, pues f_m es la restricción de π_m la cual es continua. En consecuencia sólo nos resta demostrar que cada abierto de X_∞ es la unión de elementos de β, para esto, veremos que dados un abierto V de X_∞ y $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in V$ existe una $k \in \mathbb{N}$ y un abierto U de X_k, tal que $x \in f_k^{-1}(U) \subset V$.

Procedemos de la siguiente manera: tomemos V abierto en X_∞ y $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in V$, puesto que V es un abierto en X_∞ existe W abierto en $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ que cumple: $W \cap X_\infty = V$ y, como W es un abierto que tiene a x, existe un abierto básico de $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ digamos $\pi_{n_1}^{-1}(U_{n_1}) \times \pi_{n_2}^{-1}(U_{n_2}) \times \cdots \times \pi_{n_k}^{-1}(U_{n_k})$ (donde $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$), el cual tiene a x, ahora tomemos el siguiente conjunto: $U = \bigcap_{i=1}^{k} \left(f_{n_i}^{n_k}\right)^{-1}(U_{n_i})$, U es un abierto en X_{n_k} pues es la intersección de un número finito de abiertos, cada $\left(f_{n_i}^{n_k}\right)^{-1}(U_{n_i})$ lo es y, por construcción, se cumple que $x_{n_k} \in \bigcap_{i=1}^{k} \left(f_{n_i}^{n_k}\right)^{-1}(U_{n_i})$, donde x_{n_k} es la coordenada n_k de x, tenemos entonces que las siguientes relaciones se cumplen: $x \in f_{n_k}^{-1}(U) = f_{n_k}^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{k} \left(f_{n_i}^{n_k}\right)^{-1}(U_{n_i})\right) \subset \pi_{n_1}^{-1}(U_{n_1}) \times \pi_{n_2}^{-1}(U_{n_2}) \times \cdots \times \pi_{n_k}^{-1}(U_{n_k}) \cap X_\infty \subset W \cap X_\infty = V$. lo cual concluye la demostración. $\square$

1.5. Proposición. *Sean $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ una sucesión inversa y X_∞ su límite inverso. Si Y es un subconjunto propio y cerrado de X_∞ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $f_n(Y) \neq X_n$.*

Demostración: Como Y es cerrado y propio, tenemos que existe $p \in X_\infty \setminus Y$ que cumple que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_N(p) \notin f_N(Y)$ (de no existir tal N tendriamos: $f_r(p) \in f_r(Y)$ para toda $r \in \mathbb{N}$ lo cual implica que $p \in Y$).

Ahora como f_N es continua tenemos que $f_N(p)$ y $f_N(Y)$ son un punto y un cerrado en X_N respectivamente y, como X_N es regular por ser métrico, tenemos que existe un abierto U para el cual se cumple que $f_N(p) \in U$ y $f_N(Y) \cap U = \emptyset$ lo cual quiere decir que $f_N^{-1}(U) \cap Y = \emptyset$.

Notemos, por otro lado, que si $n > N$ entonces $U = f_N^n\left(f_n\left(f_N^{-1}(U)\right)\right) \cap f_N(Y) = \emptyset$ en consecuencia: $f_n\left(f_N^{-1}(U)\right) \cap \left(f_N^n\right)^{-1}\left(f_N(Y)\right) = \emptyset$ y, por lo tanto, se cumple que $f_n(Y) \neq X_n$ para toda $n > N$. □

Ahora demostraremos unos resultados que nos serán de utilidad para demostrar el Teorema 1.8.

1.6. Proposición. *Sea* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de espacios métricos compactos tales que* $X_{i+1} \subset X_i$ *para toda* $i = 1, 2, \ldots$, *sea* $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$. *Si* U *es un abierto de* X_1, *el cual contiene a* X, *entonces existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $X_i \subset U$ *para toda* $i \geq N$, *en particular si toda* $X_i \neq \emptyset$ *entonces* X *es distinto del vacío y claramente compacto y métrico.*

Demostración: Supongamos que para toda i, existe $x_i \in X_i \setminus U$. Como $X_1 \setminus U$ es un métrico compacto, podemos suponer que la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a un punto $p \in X_1 \setminus U$.

También para todo número natural k, se cumple que $x_j \in X_k$, si $j \geq k$, por lo tanto, $p \in X_k$ para toda k, de donde $p \notin U$ y, como $p \in X$, tenemos que $X \nsubseteq U$ contradiciendo la hipótesis de que $X \subset U$.

Por otro lado, si $X_k \neq \emptyset$ para toda k, supongamos que $X = \emptyset$ entonces tomando $U = \emptyset$, tenemos que $X \subseteq U$ y, por lo demostrado anteriormente, existe N tal que $X_N \subset U = \emptyset$, por lo tanto $X_N = \emptyset$ lo cual es una contradicción y, en consecuencia, $X \neq \emptyset$. □

1.7. Teorema. *Sean* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una sucesión de continuos tales que* $X_{i+1} \subset X_i$ *para toda* $i = 1, 2, \ldots,$ *y* $X = \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i$ *entonces* X *es un continuo.*

Demostración: Por la proposición anterior tenemos que X es compacto y métrico, entonces solo nos resta demostrar que es conexo, la conexidad la demostramos así:

Supongamos que X no es conexo, entonces existen dos conjuntos cerrados no vacíos y disjuntos A y B tales que $X = A \cup B$. Como X_1 es normal, existen dos conjuntos abiertos y disjuntos V y W de X_1 tales que $A \subset V$ y $B \subset W$. Si $U = V \cup W$ entonces, por la Proposición 1.6, tenemos que, para alguna n se cumple que $X_n \subset U$, en consecuencia, $X_n = (X_n \cap V) \cup (X_n \cap W)$ y, como $X_n \supset X = A \cup B$ y tanto A como B son no vacíos, tenemos que $X_n \cap V \neq \emptyset$ y $X_n \cap W \neq \emptyset$, lo cual nos muestra que X_n es disconexo. Esto contradice la hipótesis de que cada espacio X_n es un continuo, por lo tanto, X debe ser conexo. □

Ahora ya demostrados estos resultados previos, podemos demostrar el siguiente teorema:

1.8. Teorema. *Si cada* X_n *es un continuo, entonces* X_∞ *es un continuo.*

Demostración: Definamos en primer lugar unos conjuntos auxiliares que serán de mucha utilidad.

$$Q_n = \left\{ \{x_n\}_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i \mid f_j^{j+1}(x_{j+1}) = x_j \text{ para toda } j \leqslant n \right\}$$

Afirmación. Los conjuntos Q_n cumplen las siguientes tres propiedades:

1) $Q_{n+1} \subset Q_n$.

2) Q_n es homeomorfo a $\prod\limits_{i=n+1}^{\infty} X_i$ para toda n.

3) $X_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Q_n$.

Observemos que cada Q_n es un continuo y, por el Teorema 1.7, si demostramos los tres incisos anteriores entonces tendremos como corolario que X_∞ es un continuo.

La demostración de $Q_{n+1} \subset Q_n$ es como sigue:

Tomemos $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in Q_{n+1}$ entonces por definición se cumple que $f_j^{j+1}(x_{j+1}) = x_j$ si $j \leqslant n+1$ por lo que, en particular, se cumple $f_j^{j+1}(x_{j+1}) = x_j$ si $j \leqslant n$ por lo cual $x \in Q_n$.

Ahora demostraremos Q_n es homeomorfo a $\prod\limits_{i=n+1}^{\infty} X_i$ para toda n.

Fijemos una n, ahora definamos $h : Q_n \to \prod\limits_{i=n+1}^{\infty} X_i$ como sigue: $h(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})$ $= \{x_i\}_{i=n+1}^{\infty}$ veamos que h es un homeomorfismo.

La función h, definida anteriormente, es suprayectiva pues si tomamos $y = \{y_i\}_{i=n+1}^{\infty} \in \prod\limits_{i=n+1}^{\infty} X_i$ definimos el punto $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de la siguiente forma:

$$x_i = \begin{cases} f_i^{n+1}(y_{n+1}) & \text{si } i \leqslant n \\ y_i & \text{si } i \geq n+1 \end{cases}$$

notemos que $x \in Q_n$ y, por la definición de x, $h(x) = y$.

También es inyectiva pues si tenemos dos puntos $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $x' = \{x'_i\}_{i=1}^{\infty}$ que cumplen la relación $h(x) = h(x')$ entonces por la definición de h es inmediato que $x_r = x'_r$ para toda $r \geq n+1$ y, en particular, $x_{n+1} = x'_{n+1}$ por lo que se cumple $f_j^{n+1}(x_{n+1}) = f_j^{n+1}\left(x'_{n+1}\right)$ para toda $j \leqslant n$ de donde se tiene la siguiente igualdad $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} = \{x'_i\}_{i=1}^{\infty}$ y, en consecuencia, la función es inyectiva.

También es continua, para demostrarlo procedemos así: Por [Teorema 2.2, pág. 101, D], basta demostrar que $\left(\pi_N^{n+1} \circ h\right)$ es continua para toda $N \geq n+1$, (π_N^{n+1} denota la proyección de $\prod\limits_{i=n+1}^{\infty} X_i$ en X_N). Notemos que $\pi_N^{n+1} \circ h\left(\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\right) = \pi_N^{n+1}\left(\{x_k\}_{k=n+1}^{\infty}\right) = x_N = \pi_N\left(\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\right)$, *i.e.*, $\pi_N^{n+1} \circ h = \pi_N$. Por tanto, h es continua.

Finalmente por [Teorema 3, pág. 11, Ku2], tenemos que h es un homeomorfismo pues es una función continua e inyectiva de un espacio compacto en un espacio Hausdorff, por lo tanto hemos concluido la demostración del inciso 2.

La demostración de $X_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Q_n$ es la siguiente:

Es inmediato, de la definición de las Q_n que $X_\infty \subset Q_n$ para toda n, por lo que $X_\infty \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Q_n$.

Ahora tomemos $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Q_n$ entonces $f_j^{j+1}(x_{j+1}) = x_j$ para toda j número natural, en consecuencia $x \in X_\infty$. $\square$

1.9. Teorema. *Supongamos que X_∞ y Y_∞ son los límites inversos de los* *sistemas inversos* $\{X_n, f_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *y* $\{Y_n, g_n^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ *respectivamente y que todos los rectángulos en el diagrama siguiente son conmutativos (es decir* $\varphi_i \circ f_i^{i+1} = g_i^{i+1} \circ \varphi_{i+1}$ *para cada* i*):*

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, "\varphi_1"] & X_2 \arrow[l, "f_1^2"'] \arrow[d, "\varphi_2"] & \cdots \arrow[l, "f_2^3"'] & X_i \arrow[l, "f_{i-1}^i"'] \arrow[d, "\varphi_i"] & X_{i+1} \arrow[l, "f_i^{i+1}"'] \arrow[d, "\varphi_{i+1}"] & \cdots X_{\infty} \arrow[l, "f_{i+1}^{i+2}"'] \arrow[d, "\varphi_{\infty}"] \\
Y_1 & Y_2 \arrow[l, "g_1^2"'] & \cdots \arrow[l, "g_2^3"'] & Y_i \arrow[l, "g_{i-1}^i"'] & Y_{i+1} \arrow[l, "g_i^{i+1}"'] & \cdots Y_{\infty} \arrow[l, "g_{i+1}^{i+2}"']
\end{tikzcd}$$

Definamos φ_{∞} *en* X_{∞} *por* $\varphi_{\infty}\left(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\right) = \{\varphi_i(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$, *para toda* $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in X_{\infty}$, *entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1) $\varphi_{\infty} : X_{\infty} \to Y_{\infty}$ *está bién definida.*

2) Si todas las φ_i *son continuas, entonces* φ_{∞} *también lo es.*

3) Si todas las φ_i *son biyectivas, entonces* φ_{∞} *también lo es.*

Demostración: Para demostrar 1) veamos: $\varphi_{\infty}\left(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\right) \in Y_{\infty}$, para $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in X_{\infty}$.

Sea $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in X_{\infty}$ consideremos $\varphi_{\infty}\left(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\right) = \{\varphi_i(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$, apliquemos g_j^{j+1} a la $(j+1)$-ésima coordenada de $\{\varphi_i(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$, entonces tenemos: $g_j^{j+1}(\varphi_{j+1}(x_{j+1})) = \varphi_j\left(f_j^{j+1}(x_{j+1})\right)$, por la conmutatividad de los diagramas y, como $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in X_{\infty}$, tenemos $f_j^{j+1}(x_{j+1}) = x_j$ por lo que $\varphi_j\left(f_j^{j+1}(x_{j+1})\right) = \varphi_j(x_j)$, de donde tenemos: $g_j^{j+1}(\varphi_{j+1}(x_{j+1})) = \varphi_j(x_j)$ y, en consecuencia, $\varphi_{\infty}\left(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\right) \in Y_{\infty}$.

Ahora supongamos que cada una de las φ_i es continua y demostremos que la composición $g_n \circ \varphi_{\infty}$ es continua para toda n, recordemos que eso implica que φ_∞ es continua por ser una función cuyo codominio es un producto de espacios.

$g_n \circ \varphi_\infty(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}) = g_n(\{\varphi_i(x_i)\}_{i=1}^{\infty}) = \varphi_n(x_n) = \varphi_n(f_n(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})) = \varphi_n \circ f_n(\{x_i\}_{i=1}^{\infty})$

La demostración de la inyectividad de la función φ_∞ es como sigue:

Tomemos $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}, \{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in X_\infty$ tales que $\varphi_\infty(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}) = \varphi_\infty(\{y_i\}_{i=1}^{\infty})$, por ser dos puntos del espacio producto, tenemos que $\varphi_i(x_i) = \varphi(y_i)$ para toda i y, por hipótesis, las funciones son inyectivas por lo que $x_i = y_i$ para toda i, por lo que $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, entonces, φ_∞ es inyectiva.

La demostración de la suprayectividad es así:

Tomemos primero un punto $\{y_i\}_{i=1}^{\infty} \in Y_\infty$. Como todas las φ_i son suprayectivas, tenemos que, para cada $j \in \mathbb{N}$, dado y_j existe $x_j \in X_j$ tal que $\varphi_j(x_j) = y_j$ y, como los diagramas conmutan, es claro que existirá para y_1 un punto x_1 y de forma que $\varphi_1(x_1) = y_1$ y también $\varphi_2^{-1}(y_2) \cap (f_1^2)^{-1}(x_1) \neq \emptyset$ por lo tanto podemos escoger a x_2 en dicha intersección. Continuando con este proceso, podemos construir un punto $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in X_\infty$ tal que $\varphi_\infty(\{x_i\}_{i=1}^{\infty}) = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, por lo tanto, la función φ_∞ es suprayectiva. $\square$

1.10. Definición. *Sean $\epsilon > 0$ y $f : X \to Y$ una función de X sobre Y. Diremos que f es una $\epsilon-$función si para cada $y \in Y$, diám$(f^{-1}(y)) < \epsilon$.*

1.11. Proposición. *Si $X_\infty = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ entonces para toda $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que, para todo número natural m mayor o igual a n, $f_m : X_\infty \to X_m$ (la m-ésima proyección) es una $\epsilon-$función.*

Demostración: Sea $\epsilon > 0$, como $\Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ converge podemos encontrar $n \in$ de manera que $\Sigma_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k} < \epsilon$. Dado $x_n \in X_n$, tomemos en el conjunto $f_n^{-1}(x_n)$ un par de puntos $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{x_i'\}_{i=1}^{\infty}$ los cuales por ser puntos del límite inverso y estar en $f_n^{-1}(x_n)$ cumplen que $x_i = x_i'$ para $1 \leqslant i \leqslant n$ por lo tanto, si calculamos la distancia entre dichos puntos, tendremos que $d\left(\{x_k\}_{k=1}^{\infty}, \{x_k'\}_{k=1}^{\infty}\right) = \Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}d_k\left(x_k, x_k'\right) = \Sigma_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}d_k\left(x_k, x_k'\right) + \Sigma_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}d_k\left(x_k, x_k'\right)$ pero por la elección de dichos puntos, el primer miembro de la suma es cero y como tomamos métricas acotadas por 1 tenemos que el segundo miembro es menor o igual a $\Sigma_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$, por lo tanto menor que ϵ, por otro lado, como tomamos dos puntos cualesquiera de $f_n^{-1}(x_n)$ tenemos que su diámetro es menor que ϵ. Notemos que si tomamos m mayor que n, y procedemos de manera análoga demostraremos que la correspondiente proyección es también una ϵ-función. □

1.12. Proposición. *Si f es una $\epsilon-$función de un continuo X sobre un continuo Y entonces existe un número $\eta > 0$ tal que todo conjunto M en Y de diámetro menor que η tiene una preimagen $f^{-1}(M)$ de diámetro menor que ϵ en X.*

Demostración: Supongamos que para toda η existe un conjunto $M_\eta \subset Y$ tal que el diámetro de M_η es menor que η y el diámetro de $f^{-1}(M_\eta)$ es mayor o igual que ϵ.

Como lo anterior es válido para toda η en particular será válido para la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, eso implica que existe una sucesión de conjuntos $\left\{M_{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ tales que el diámetro de $M_{\frac{1}{n}}$ es menor que $\frac{1}{n}$ y el diámetro de $f^{-1}\left(M_{\frac{1}{n}}\right)$ es mayor o igual que ϵ.

Observemos que podemos suponer que todos los conjuntos $f^{-1}\left(M_{\frac{1}{n}}\right)$ son cerrados, pues un conjunto cualquiera tiene el mismo diámetro que su ce- rradura. Una vez hecha esta observación, podemos afirmar que para cada $n \in \mathbb{N}$, existen x_n y $x'_n \in f^{-1}\left(M_{\frac{1}{n}}\right)$ tales que $d(x_n, x'_n) \geq \epsilon$. Notemos que, como X es compacto (por ser continuo), sin pérdida de generalidad suponemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{x'_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergen a x y x'. Notemos que para x y x' se cumple que la distancia entre ellos es mayor o igual a ϵ y, por otro lado, como $f(x_n)$ y $f(x'_n) \in M_{\frac{1}{n}}$ para toda n, tenemos que $d(f(x_n), f(x'_n)) < \frac{1}{n}$ y, por lo tanto, $f(x) = f(x')$. Hemos encontrado un punto $f(x) = f(x') \in Y$ que cumple que el diámetro de su preimagen es mayor o igual a ϵ, pues x y x' están en esa preimagen, contradiciendo que f es una ϵ-función. $\square$

1.13. Definición. *Si $\wp$ denota una clase dada de poliedros (para la definición de poliedro, véase el Apéndice A) un continuo M* ***es tipo*** *$\wp$ si para toda $\epsilon > 0$, existe una ϵ-función de M sobre un elemento de $\wp$.*

1.14. Definición. *Un espacio S tiene la* ***propiedad del punto fijo*** *si toda función de S en S tiene un punto fijo.*

1.15. Definición. *Un continuo es* ***indescomponible*** *si no se puede poner como la unión de dos subcontinuos propios.*

Capítulo 2

EL GRUPO FUNDAMENTAL

Notación. *Como de costumbre, para cualquier par de números reales* a *y* b *que cumplan:* $a < b$, $[a, b]$ *denotará el intervalo cerrado que tiene a* a *y* b *como puntos extremos,* I *representará al intervalo unitario* $[0, 1]$.

Notemos que para cualesquiera dos intervalos cerrados $[a, b]$ y $[c, d]$, existen dos homeomorfismos lineales

$$h_1 \text{ y } h_0 : [a, b] \to [c, d],$$

tales que

$$\begin{aligned} h_0(a) &= c, & h_0(b) &= d, \\ h_1(a) &= d, & h_1(b) &= c. \end{aligned}$$

Los distinguiremos entre sí, diciendo que h_0 es el que *preserva la orientación* y h_1 el que *invierte la orientación.*

2.1. Definición. *Una* ***trayectoria*** *en un espacio X, es una función continua f de algún intervalo cerrado $[a,b]$ en X. Las imágenes de los puntos extremos del intervalo se llaman* ***puntos extremos*** *de la trayectoria, $f(a)$ se llamará* ***punto inicial****, y $f(b)$* ***punto final****.*

2.2. Definición. *Diremos que un espacio X es* ***conexo por trayectorias*** *si cualesquiera dos puntos de X se pueden unir por una trayectoria, es decir: para cualquier par de puntos x y y en X existe $f : [a,b] \to X$ que cumple $f(a) = x$ y $f(b) = y$.*

Un espacio conexo por trayectorias es conexo, pero lo inverso no es cierto en general. Como un ejemplo de lo anterior, consideremos la cerradura en $\mathbb{R}^2$ del siguiente conjunto: $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = sen\left(\frac{1}{x}\right), x \in (0, \frac{1}{\pi}]\right\}$, el conjunto anterior, también llamado curva sinoidal del topólogo, es conexo pero no es conexo por trayectorias, [Ejemplo 12, pág. 10, N2].

2.3. Definición. *Las* ***componentes por trayectorias*** *de X son los subconjuntos conexos por trayectorias máximales de X.*

Observemos que las componentes por trayectorias de X no son necesariamente cerradas, en la curva sinoidal del topólogo definida anteriormente, tenemos dos componentes por trayectorias, una de las cuales es abierta, dicha componente por trayectorias es: $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = sen\left(\frac{1}{x}\right), x \in (0, \frac{1}{\pi}]\right\}$.

2.4. Definición. *Un espacio X es* ***localmente conexo por trayectorias*** *si cada punto de X tiene una base local de abiertos conexos por trayectorias.*

2.5. Definición. *Si f_0 y f_1 son dos trayectorias en X, tales que $f_0(a) = f_1(a)$ y $f_0(b) = f_1(b)$ (es decir, tienen el mismo punto inicial y el mismo* *punto final). Diremos que estas dos trayectorias son* **equivalentes** *(lo cual denotaremos por $f_0 \sim f_1$), si y sólo si existe una función continua*

$$f : [a, b] \times I \to X$$

tal que, para toda $t \in [a, b]$:

$$f(t, 0) = f_0(t)$$
$$f(t, 1) = f_1(t)$$

y que, para toda $s \in I$:

$$f(a, s) = f_0(a) = f_1(a)$$
$$f(b, s) = f_0(b) = f_1(b)$$

En la definición anterior, podemos sustituir I por cualquier otro intervalo cerrado. La demostración de la siguiente proposición es sencilla:

2.6. Proposición. *Para cualquier espacio conexo por trayectorias X, la relación definida en 2.5 es una relación de equivalencia.*

Intuitivamente, diremos que dos trayectorias son equivalentes, si una puede ser deformada continuamente en la otra, en el espacio X. Durante la deformación de la figura los puntos extremos deben permanecer fijos.

2.1 El grupo fundamental de un espacio

La siguiente proposición será de mucha ayuda para demostrar los resultados que mostraremos en esta sección.

2.7. Proposición. *Sean A y B subconjuntos cerrados del espacio topológico X tales que $X = A \cup B$. Si $f : X \to Y$ es una función definida en X, tal que las restricciones $f\mid_A$ y $f\mid_B$ son ambas continuas, entonces f es continua.*

Demostración: Primero, recordemos que una función es continua, si la imagen inversa de cada cerrado en el codominio, es un cerrado en el dominio.

Así pues, dado un cerrado $W \subset Y$, como $f\mid_A$ y $f\mid_B$ son continuas, tenemos que $(f\mid_A)^{-1}(W)$ y $(f\mid_B)^{-1}(W)$ son cerrados en A y B respectivamente y, como por hipótesis A y B son cerrados en X, tenemos que $(f\mid_A)^{-1}(W)$ y $(f\mid_B)^{-1}(W)$ son cerrados en $A \cup B$ por ser cada uno de ellos un cerrado de un cerrado.

En consecuencia, tenemos que $(f\mid_A)^{-1}(W) \cup (f\mid_B)^{-1}(W)$ es un cerrado en $A \cup B$, pero también $(f\mid_A)^{-1}(W) \cup (f\mid_B)^{-1}(W) = f^{-1}(W)$ y, por consiguiente, $f^{-1}(W)$ es un cerrado en X, por lo cual la función f es continua pues la imagen inversa de cerrados de Y son cerrados en X. □

2.8. Definición. *Sean f y g dos trayectorias en X, tales que el punto terminal de f es el punto inicial de g, entonces el producto $f * g$ está definido por*

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t), & si\ 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ g(2t-1), & si\ \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

2.9. Lema. *La relación de equivalencia y el producto que hemos definido, son compatibles en el siguiente sentido: Si $f_0 \sim f_1$ y $g_0 \sim g_1$, entonces $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$ (se supone, que el punto terminal de f_j es el punto inicial de g_j, $j \in \{0, 1\}$).*

Demostración: Por hipótesis tenemos que existen dos funciones, F y G las cuales cumplen:

$$F : [0, 1] \times I \to X$$

es tal que, para toda $t \in [0, 1]$:

$$F(t, 0) = f_0(t) \text{ y } F(t, 1) = f_1(t)$$

y que, para cada $s \in I$:

$$F(a, s) = f_0(a) = f_1(a) \text{ y } F(b, s) = f_0(b) = f_1(b);$$

y

$$G : [0, 1] \times I \to X$$

es tal que, para toda $t \in [0.1]$:

$$G(t, 0) = g_0(t) \text{ y } G(t, 1) = g_1(t)$$

y que, para cada $s \in I$:

$$G(a, s) = g_0(a) = g_1(a) \text{ y } G(b, s) = g_0(b) = g_1(b).$$

Aplicando la Proposición 2.7, definimos una nueva función, de la siguiente manera:

$$H : [0, 1] \times I \to X$$

tal que

$$H(t,s)=\begin{cases}F(2t,s), & \text{si } t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ G(2t-1,s), & \text{si } t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

y, por definición, tenemos que H cumple las condiciones: para toda $t\in[0,1]$:

$$H(t,0)=(f_0*g_0)(t) \text{ y } H(t,1)=(f_1*g_1)(t)$$

y para toda $s\in I$:

$$H(a,s)=(f_0*g_0)(a)=(f_1*g_1)(a) \text{ y } H(b,s)=(f_0*g_0)(b)=(f_1*g_1)(b).$$

□

Como consecuencia del Lema 2.9, la multiplicación de trayectorias define una multiplicación de clases de equivalencia de trayectorias (siempre que el punto terminal de la primera trayectoria y el punto inicial de la segunda trayectoria coincidan). Es esta multiplicación de las clases de equivalencia a la que nos referimos en todo el capítulo.

2.10. Lema. *La multiplicación de clases de equivalencia de trayectorias es asociativa.*

Demostración. Es suficiente probar que si f, g y h son trayectorias tales que el punto terminal de f es igual al punto inicial de g y el punto terminal de g es igual al punto inicial de h, entonces:

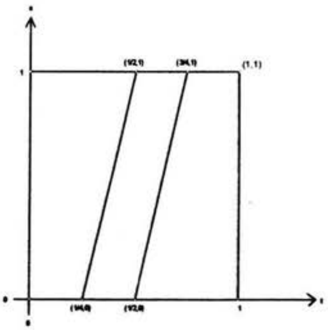
$$(f*g)*h\sim f*(g*h)$$

Para probar esto, consideremos la función $F : I \times I \to X$ definida por

$$F(t,s) = \begin{cases} f\left(\frac{4t}{1+s}\right), & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{s+1}{4}, \\ g\left(4t-1+s\right) & \text{si } \frac{s+1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{s+2}{4}, \\ h\left(1-\frac{4(1-t)}{2-s}\right) & \text{si } \frac{s+2}{4} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Entonces, F es continua, por la Proposición 2.7 y, además, cumple que $F(t,0) = [(f * g) * h](t)$ y $F(t,1) = [f * (g * h)](t)$.

En consecuencia la multiplicación de clases de equivalencia es asociativa. La definición de F está motivada por la siguiente figura:



□

Dado un punto $x \in X$, denotaremos por $[\varepsilon_x]$ a la clase de equivalencia de la función constante de I en el punto x de X. Esta clase de equivalencia de trayectorias tiene la propiedad fundamental siguiente:

2.11. Lema. *Si $[\alpha]$ es una clase de equivalencia de trayectorias con punto* *inicial x y terminal y, entonces $[\varepsilon_x] * [\alpha] = [\alpha]$ y $[\alpha] * [\varepsilon_y] = [\alpha]$.*

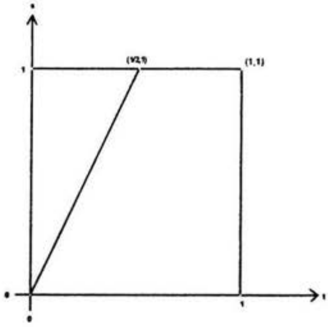
Demostración: Sean $e : I \to X$ la función constante tal que $e(I) = \{x\}$ y $f : I \to X$ un representante de la clase de trayectorias $[\alpha]$. Para probar la primera relación, es suficiente ver que $e * f \sim f$.

Definamos $F : I \times I \to X$ por:

$$F(t,s) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}s, \\ f(\frac{2t-s}{2-s}), & \text{si } \frac{1}{2}s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Entonces $F(t,0) = f(t)$ y $F(t,1) = (e * f)(t)$ por definición.

La definición de F se sugiere de la siguiente figura:



La prueba de que $[\alpha] * [\varepsilon_y] = [\alpha]$ es similar a la demostración anterior. $\square$

Notación. *Para cualquier trayectoria $f : I \to X$, $\overline{f}$ denotará la trayectoria definida por*

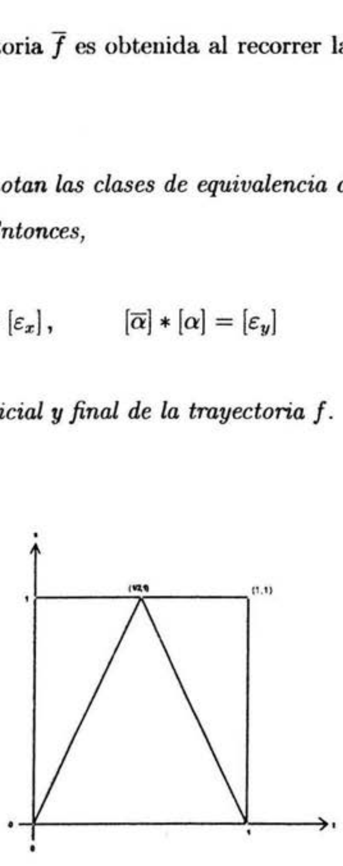
$$\overline{f}(t) = f\,(1-t)\,, \qquad t \in I.$$

Observemos que la trayectoria $\overline{f}$ es obtenida al recorrer la trayectoria f en dirección opuesta.

2.12. Lema. *Si $[\alpha]$ y $[\overline{\alpha}]$ denotan las clases de equivalencia de las trayectorias α y $\overline{\alpha}$ respectivamente. Entonces,*

$$[\alpha] * [\overline{\alpha}] = [\varepsilon_x]\,, \qquad [\overline{\alpha}] * [\alpha] = [\varepsilon_y]$$

donde x y y son los puntos inicial y final de la trayectoria f.



Demostración. Para probar la primera igualdad, es suficiente demostrar que $\alpha * \overline{\alpha} \sim e$, donde e es la trayectoria constante en el punto x. Entonces, como lo sugiere la gráfica anterior, definiremos $F : I \times I \to X$ por

$$F(t,s) = \begin{cases} f(2t), & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}s, \\ f(s), & \text{si } \frac{1}{2}s \leqslant t \leqslant 1 - \frac{1}{2}s, \\ f(2-2t), & \text{si } 1 - \frac{1}{2}s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

En consecuencia, tenemos $F(t,0) = x$ y $F(t,1) = (\alpha * \overline{\alpha})(t)$ y, por tanto, se cumple la primera ecuación.

La prueba de que $[\overline{\alpha}] * [\alpha] = [\varepsilon_y]$ es similar a la que acabamos de dar, por lo que tenemos demostrado el Lema 2.12. □

En vista de estas características de la clase de trayectorias $[\overline{\alpha}]$, la denotaremos por $[\alpha]^{-1}$ y vemos fácilmente que las condiciones del Lema 2.12 caracterizan a $[\alpha]^{-1}$ de manera única, en consecuencia, si $\alpha_0 \sim \alpha_1$ entonces $\overline{\alpha}_0 \sim \overline{\alpha}_1$.

Podemos resumir los lemas probados diciendo que el conjunto de todas las clases de trayectorias en X satisface los axiomas para ser un grupo, salvo que el producto de dos trayectorias no se defina siempre.

2.13. Definición. *Una trayectoria es llamada* ***cerrada****, o* ***lazo****, si los puntos inicial y final son iguales. El extremo común se dice que es* ***la base*** *del lazo.*

2.14. Definición. *Sean X un espacio y x un punto de X; el conjunto de las clases de equivalencia de los lazos basados en x es un grupo. Este grupo es llamado el* ***grupo fundamental*** *o* ***grupo de Poincaré*** *de X en el punto base x, y se denota este grupo por $\pi_1(X,x)$.*

2.15. Teorema. *Si X es conexo por trayectorias, los grupos $\pi_1(X,x)$ y $\pi_1(X,y)$ son isomorfos para cualesquiera dos puntos x y y elementos del espacio X.*

Demostración. Sean x y y dos puntos en X y γ una trayectoria con punto inicial x y punto final y.

Usando la trayectoria γ, definimos una función $u : \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$ por la formula $u([\alpha]) = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$ donde $[\alpha]$ denota la clase de equivalencia de α.

Esta función u es un homomorfismo de $\pi_1(X,x)$ en $\pi_1(X,y)$, pues si tomamos $[\beta]$ y $[\alpha]$ dos elementos de $\pi_1(X,x)$, tenemos:

$$\begin{aligned} u([\alpha * \beta]) &= \left[\gamma^{-1} * (\alpha * \beta) * \gamma\right] = \left[\gamma^{-1} * \left(\alpha * \left(\gamma * \gamma^{-1}\right) * \beta\right) * \gamma\right] \\ &= \left[\left(\gamma^{-1} * \alpha * \gamma\right)\right] * \left[\left(\gamma^{-1} * \beta * \gamma\right)\right] = u([\alpha]) * u([\beta]). \end{aligned}$$

La inyectividad de u es inmediata, pues la preimagen del elemento neutro de $\pi_1(X,y)$ es el neutro de $\pi_1(X,x)$. Por otro lado, la suprayectividad la obtenemos al considerar la función inversa de u, definida por $u^{-1}([\alpha]) = [\gamma * \alpha * \gamma^{-1}]$ notemos que, en consecuencia, todo lazo basado en y tiene bajo esta función una imagen en $\pi_1(X,x)$ lo cual implica la suprayectividad de u. □

La importancia de este teorema es obvia: Si $\pi_1(X,x)$ es abeliano, finito, nilpotente, libre, etc., esta característica no depende del punto x, sólo depende del espacio X, siempre que sea conexo por trayectorias.

Por otra parte, debemos de tener en mente que no hay un isomorfismo canónico o natural entre $\pi_1(X, x)$ y $\pi_1(X, y)$.

2.2 Funciones inducidas entre grupos fundamentales

Sean $\varphi : X \to Y$ una función continua y f_0 y $f_1 : I \to X$ lazos en X; si f_0 y f_1 son equivalentes, entonces es fácil ver que $\varphi \circ f_0$ y $\varphi \circ f_1$ son trayectorias equivalentes en Y.

Así, si $[\alpha]$ denota la clase de trayectorias que contiene a f_0 y a f_1, tiene sentido denotar por $[\varphi(\alpha)]$ la clase de trayectorias que contiene $\varphi \circ f_0$ y a $\varphi \circ f_1$. $[\varphi(\alpha)]$ es la imagen de la clase $[\alpha]$ en el espacio Y y, se verifica fácilmente, que la función φ_* la cual envía a $[\alpha]$ en $[\varphi(\alpha)]$ tiene las siguientes propiedades:

(a) Si $[\alpha]$ y $[\beta]$ son clases de lazos en X tales que $[\alpha] * [\beta]$ está definido, entonces $\varphi_* ([\alpha] * [\beta]) = \varphi_* ([\alpha]) * \varphi_* ([\beta])$.

(b) Para cualquier punto $x \in X$, $\varphi_* ([\varepsilon_x]) = \left[\varepsilon_{\varphi(x)}\right]$.

(c) $\varphi_* \left([\alpha]^{-1}\right) = [\varphi(\alpha)]^{-1}$

Por estas razones, llamaremos a φ_* el *homomorfismo inducido por* φ.

Si $\psi : Y \to Z$ es una función continua, entonces podemos verificar fácilmente la siguiente propiedad:

(d) $(\psi\varphi)_* = \psi_*\varphi_*$

Finalmente, si $\varphi : X \to X$ es la función identidad, entonces:

(e) $\varphi_*([\alpha]) = [\alpha]$, para cualquier clase de trayectorias $[\alpha]$ en X; es decir, la φ_* es el homomorfismo identidad.

Observemos que, en vista de estas características, una función continua $\varphi : X \to Y$ induce un homomorfismo, $\varphi_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, \varphi(x))$; y, si φ es un homeomorfismo, entonces φ_* es un isomorfismo. Este homomorfismo inducido es muy importante al estudiar al grupo fundamental.

Precaución: Si φ es inyectiva, φ_* no necesariamente lo es. Para ver esto, consideremos $i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ la inclusión de la circunferencia unitaria en el plano cartesiano, nótese que i es inyectiva, pero si consideramos i_* no lo será, de momento creeremos el resultado que se mostrará en la sección 3.3 de que el grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$ es cíclico infinito y que el grupo fundamental de $\mathbb{R}^2$ es $\{1\}$, por lo que tenemos que i_* no es inyectiva pues todos los elementos del grupo cíclico infinito tienen como imagen a 1.

Para avanzar en el estudio del homomorfismo inducido φ_*, debemos introducir el concepto de *homotopía* entre funciones continuas.

2.16. Definición. *Dos funciones continuas φ_0 y $\varphi_1 : X \to Y$ son **homotópicas** si existe una función continua $\varphi : X \times I \to Y$ tal que, para todo*

$x \in X$:

$$\begin{aligned} \varphi(x,0) &= \varphi_0(x), \\ \varphi(x,1) &= \varphi_1(x). \end{aligned}$$

Si dos funciones φ_0 y φ_1 son homotópicas, lo denotaremos por $\varphi_0 \simeq \varphi_1$. No es difícil verificar que ésta es una relación de equivalencia en el conjunto de funciones continuas de X en Y. Las clases de equivalencia se llaman *clases de homotopías de funciones.*

Intuitivamente, si ponemos $\varphi_t(x) = \varphi(x,t)$ para cualquier $(x,t) \in X \times I$. Entonces, para todo $t \in I$,

$$\varphi_t : X \to Y$$

es una función continua.

2.17. Definición. *Dos funciones φ_0 y $\varphi_1 : X \to Y$ se dicen* ***homotópicas relativas*** *al subconjunto A de X si existe una función continua $\varphi : X \times I \to Y$ tal que*

$$\begin{aligned} \varphi(x,0) &= \varphi_0(x),\ x \in X, \\ \varphi(x,1) &= \varphi_1(x),\ x \in X, \\ \varphi(a,t) &= \varphi_0(a) = \varphi_1(a),\ a \in A, t \in I. \end{aligned}$$

Observemos que esta condición implica $\varphi_0 \mid_A = \varphi_1 \mid_A$.

2.18. Teorema. *Sean φ_0 y $\varphi_1 : X \to Y$ funciones homotópicas relativas al subconjunto $\{x\}$. Entonces*

$$\varphi_{0*} = \varphi_{1*} : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y, \varphi_0(x)),$$

es decir, los homomorfismos inducidos coinciden.

La prueba es inmediata, y la omitimos.

Desafortunadamente, la condición que la homotopía debe ser concerniente al punto x es demasiado restrictiva en muchos casos. Esta condición puede eliminarse, pero entonces se complica el enunciado del Teorema 2.18.

Aplicaremos ahora algunos de estos resultados.

2.19. Definición. *Diremos que un subconjunto A de un espacio topológico X es un* ***retracto*** *de X si existe una función continua $r : X \to A$ (llamada* ***retracción****) tal que $r(a) = a$ para cualquier $a \in A$.*

Es una condición fuerte pedir que un subconjunto A sea un retracto de X. Un ejemplo simple de un retracto de un espacio es el intervalo $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$.

Ahora sea $r : X \to A$ una retracción, como en la definición anterior e, $i : A \to X$ la función inclusión. Para cualquier punto $a \in A$, consideremos los homomorfismos inducidos

$$\begin{aligned} i_* &: \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a), \\ r_* &: \pi_1(X, a) \to \pi_1(A, a). \end{aligned}$$

Dado que $r \circ i$ es la identidad en A, $r_* \circ i_*$ es el homomorfismo identidad del grupo, $\pi_1(A, a)$, por las características (d) y (e) dadas al inicio de esta sección.

De esto concluimos que i_* es *inyectiva* y r_* es *suprayectiva*. Por otra parte, la condición que $r_* \circ i_*$ sea la identidad, impone fuertes restricciones al subgrupo $i_*\pi_1(A,a)$ de $\pi_1(X,a)$.

Usaremos este resultado más adelante para probar que ciertos subespacios no son retractos.

Ahora introducimos el concepto de retracto fuerte por deformación.

2.20. Definición. *El subconjunto A de X es un **retracto fuerte por deformación** de X, si existen una retracción $r : X \to A$ y una homotopía $f : X \times I \to X$ tales que para toda $a \in A, x \in X$ y $t \in I$, se tiene que:*

$$f(a,t) = a, f(x,0) = x \text{ y } f(x,1) = r(x)$$

2.21. Teorema. *Si A es un retracto fuerte por deformación de X, entonces la inclusión $i : A \to X$ induce un isomorfismo de $\pi_1(A,a)$ sobre $\pi_1(X,a)$ para cualquier $a \in A$.*

Demostración: Como hemos visto antes, $r_* \circ i_*$ es la identidad en $\pi_1(A,a)$, completamos la prueba mostrando que $i_* \circ r_*$ es la identidad en $\pi_1(X,a)$. Esto es consecuencia de que $i \circ r$ es homotópica a la identidad en X (relativa a $\{a\}$); por lo tanto, el Teorema 2.18 es aplicable. □

2.22. Definición. *Un espacio topológico X es **contraíble** si existe un punto $x_0 \in X$ tal que $\{x_0\}$ es un retracto fuerte por deformación de X.*

2.23. Definición. *Un espacio topológico X es **simplemente conexo** si es conexo por trayectorias y $\pi_1(X,x) = \{1\}$ para algún (y, por lo tanto, para todo) $x \in X$.*

2.24. Corolario. *Si X es contraíble, entonces X es simplemente conexo.*

Demostración: La demostración es inmediata, basta notar que si X es contraíble, por la Definición 2.22 tenemos que existe $x_0 \in X$, tal que $\{x_0\}$ es un retracto fuerte por deformación de X, lo cual implica que existe una función inyectiva de $\pi_1(\{x_0\}, x_0)$ en $\pi_1(X, x_0)$ y, como $\pi_1(\{x_0\}, x_0) = \{1\}$, tenemos que $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$. Por lo tanto X es simplemente conexo. □

2.25. Definición. *Sea X un espacio topológico. Diremos que X es **ANR** (o **retracto absoluto en vecindades**)si dados Y un espacio topológico y $h : X \to Y$ un encaje, se cumple que $h(X)$ es un subconjunto cerrado de Y, existe U un abierto de Y que contiene a $h(X)$ y $h(X)$ es un retracto de U.*

2.3 El grupo fundamental de $\mathbb{S}^1$

$\mathbb{S}^1$ denotará la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 : \|z\| = 1\}$, (de igual manera, en el plano complejo $\mathbb{C}$), y $f : I \to \mathbb{S}^1$ el lazo definido, por

$$f(t) = (cos\,(2\pi t)\,, sen\,(2\pi t)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

que recorre el círculo exactamente una vez, Designemos por $[\alpha]$ a la clase de equivalencia de f.

2.26. Teorema. *El grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))$ es un grupo cíclico infinito generado por la clase $[\alpha]$.*

Demostración: Sea $g : I \to \mathbb{S}^1$, tal que $g(0) = g(1) = (1,0)$ un lazo en

$\mathbb{S}^1$. Probaremos primero que existe un entero m (positivo, negativo o cero) tal que g pertenece a la clase $[\alpha]^m$.

Sean:

$$\begin{aligned} U_1 &= \left\{(x,y) \in S^1 : y > -\frac{1}{10}\right\}, \\ U_2 &= \left\{(x,y) \in S^1 : y < +\frac{1}{10}\right\}, \end{aligned}$$

Entonces U_1 y U_2 son subconjuntos abiertos conexos de $\mathbb{S}^1$, cada uno de ellos ligeramente más largo que una semicircunferencia y, además, $U_1 \cup U_2 = \mathbb{S}^1$.

Es claro que U_1 y U_2 son homeomorfos a un intervalo abierto en la recta real y, por tanto, cada uno de ellos es contraíble. En el caso en que $g(I) \subset U_1$ o que $g(I) \subset U_2$, es evidente que g es equivalente a la trayectoria constante y, entonces, pertenece a la clase de equivalencia $[\alpha]^0$.

Supongamos ahora que $g(I) \not\subseteq U_1$ y que $g(I) \not\subseteq U_2$. Veremos que es posible dividir el intervalo unitario en subintervalos $[0,t_1],[t_1,t_2],\ldots,[t_{n-1},1]$, donde $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1$, de tal forma que se verifiquen las siguientes afirmaciones:

(a) $g([t_i,t_{i+1}]) \subset U_1$ o $g([t_i,t_{i+1}]) \subset U_2$, para $0 \leqslant i < n$.

(b) $g([t_{i-1},t_i])$ y $g([t_i,t_{i+1}])$ no están ambos contenidos en el mismo abierto U_j, para $j = 1$ o 2.

En efecto, $\{g^{-1}(U_1), g^{-1}(U_2)\}$ es una cubierta abierta de un espacio métrico compacto; sea ε un número de Lebesgue de esta cubierta [Teorema 4.3.31; pág. 276; E]

Dividimos el intervalo unitario en subintervalos de longitud menor que ε. Con esta subdivisión se verifica la condición (a), pero puede aún fallar la condición (b).

Si dos subintervalos consecutivos tienen como imagen bajo g el mismo conjunto U_j, entonces formamos con ellos un sólo subintervalo suprimiendo el extremo común. Continuamos este proceso hasta que se verifique (b).

Designemos por $[\beta]$ la clase de equivalencia de la trayectoria g, y por $[\beta_i]$ la clase de equivalencia de $g\mid_{[t_{i-1},t_i]}$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. Entonces, se tiene

$$[\beta] = [\beta_1] * [\beta_2] * \ldots * [\beta_n]$$

. Cada $[\beta_i]$ es una clase de trayectorias de U_1 o U_2. En virtud de (b), es evidente que $g(t_i) \in U_1 \cap U_2$, donde $U_1 \cap U_2$ tiene dos componentes, una de las cuales contiene el punto $(1,0)$ y la otra el punto $(-1,0)$. Para cada índice i, $0 \leqslant i \leqslant n$, elegimos una clase de trayectorias $[\gamma_i]$ en $U_1 \cap U_2$ con origen en $g(t_i)$ y extremo en $(1,0)$ o en $(-1,0)$, según qué componente de $U_1 \cap U_2$ contenga $g(t_i)$. Pongamos:

$$\begin{aligned}
[\delta_1] &= [\beta_1] * [\gamma_1], \\
[\delta_i] &= [\gamma_{i-1}]^{-1} * [\beta_i] * [\gamma_i] \text{ para } 1 < i < n \\
[\delta_n] &= [\gamma_{n-1}]^{-1} * [\beta_n].
\end{aligned}$$

Entonces, está claro que:

$$[\beta] = [\delta_1] * [\delta_2] * \ldots * [\delta_n]$$

donde cada $[\delta_j]$ es una clase de trayectorias en U_1, o en U_2, que tiene su origen y su extremo en el conjunto $\{(1,0),(-1,0)\}$. Puesto que U_1 y U_2 son simplemente conexos, si $[\delta_i]$, es una clase de lazos, entonces $[\delta_i] = 1$. Así pues, podemos suponer que un $[\delta_i]$ ha sido ya eliminado en la fórmula anterior y, cambiando de notación si es preciso, que $[\delta_1], [\delta_2], \ldots, [\delta_n]$, no son clases de lazos.

Puesto que U_1 es simplemente conexo existe una única clase de trayectorias $[\eta_1]$ de U_1 con origen en $(1,0)$ y extremo en $(-1,0)$. Por tanto, $[\eta_1]^{-1}$ es la única clase de trayectorias de U_1 con origen en $(-1,0)$ y extremo en $(1,0)$.

Análogamente, designemos por $[\eta_2]$ la única clase de trayectorias de U_2 con origen en $(-1,0)$ y extremo en $(1,0)$. Obsérvese que $[\eta_1] * [\eta_2] = [\alpha]$.

Así, tenemos que, para todo índice i,

$$[\delta_i] = [\eta_1]^{\pm 1} \text{ o } [\delta_i] = [\eta_2]^{\pm 1}$$

Según esto, puede suceder que en la fórmula pueda realizarse alguna simplificación, por ejemplo si $[\delta_i] = [\eta_1]$ y $[\delta_{i+1}] = [\eta_1]^{-1}$. Si esto ocurre se simplifica, y análogamente en otros casos.

Después de todas las simplificaciones posibles sólo pueden presentarse tres posibilidades:

$$\begin{aligned} [\beta] &= 1, \\ [\beta] &= [\eta_1] * [\eta_2] * [\eta_1] * [\eta_2] * \ldots * [\eta_1] * [\eta_2] \end{aligned}$$

o bien

$$[\beta] = [\eta_2]^{-1} * [\eta_1]^{-1} * [\eta_2]^{-1} * [\eta_1]^{-1} * \ldots * [\eta_2]^{-1} * [\eta_1]^{-1}.$$

En el segundo caso existe una $m > 0$ tal que $[\beta] = [\alpha^m]$ mientras que en el tercer caso $[\beta] = [\alpha]^m$ para un cierto entero $m < 0$. Así, en cualquier caso se tiene $[\beta] = [\alpha]^m$.

De lo anterior se sigue, que $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))$ es un grupo cíclico. Sin embargo, este argumento no da ninguna información sobre el orden de $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))$. Para probar que $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))$ no es un grupo finito, es necesario usar el concepto de *grado* de una función, definido en el Apéndice A.

Así pues, a cada elemento $[\beta] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))$ le podemos asignar un entero, el grado de $[\beta]$, unívocamente determinado. En consecuencia, para cada entero m, la función $h_m : I \to \mathbb{S}^1$ definida por:

$$h_m(t) = cos\,(2m\pi t) + \boldsymbol{i}\ sen\,(2m\pi t)$$

tiene grado m. En consecuencia, el grupo $\pi_1(\mathbb{S}^1, (1,0))$ es de orden infinito, es decir, es un grupo cíclico infinito. □

Observación: Como corolario del Teorema 2.25, tenemos que, el grupo fundamental de cualquier espacio, con una circunferencia como retracto fuerte por deformación es cíclico infinito.

Ejemplos de tales espacios son la banda de Möbius, un disco menos el centro, el plano menos un punto, una región del plano limitada por dos círculos concéntricos, etc.

Capítulo 3

ESPACIOS CUBRIENTES

3.1 Definición y ejemplos

En este capítulo supondremos que todos los espacios son conexos y localmente conexos por trayectorias, mientras no se diga lo contrario.

3.1. Definición. *Si X es un espacio topológico, un* **espacio cubriente** *de X es una pareja $(\widetilde{X}, p)$, donde $\widetilde{X}$ es un espacio y p una función continua, $p : \widetilde{X} \to X$ que cumple la siguiente condición: para todo punto $x \in X$ existe un abierto arco-conexo U de X, $x \in U$ tal que para cada arco componente C de $p^{-1}(U)$, $p\,|_C : C \to U$ es un homeomorfismo. Todo abierto U que satisfaga la definición anterior se llama* **vecindad elemental**. *La función p se llama* **función cubriente**.

A continuación damos algunos ejemplos de espacios cubrientes con el fin de aclarar la definición.

1 Definamos $p : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ como $p(t) = (sen(t), cos(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces la pareja $(\mathbb{R}, p)$ es un espacio cubriente de la circunferencia unitaria $\mathbb{S}^1$. Todo subintervalo abierto propio del círculo $\mathbb{S}^1$ es una vecindad elemental.

2 Utilizando coordenadas polares (r, θ) en el plano $\mathbb{R}^2$, la circunferencia unitaria $\mathbb{S}^1$ estará definida por la condición $r = 1$.

Para todo número natural n, definamos la función $p_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ por la ecuación:

$$p_n(1, \theta) = (1, n\theta).$$

La función p_n "enrolla" n veces la circunferencia sobre sí misma, si $n \neq 0$, la pareja $(\mathbb{S}^1, p_n)$ es un espacio cubriente de $\mathbb{S}^1$. Una vez más todo intervalo abierto propio de $\mathbb{S}^1$ es una vecindad elemental.

3 Si X es un espacio arbitrario e $i : X \to X$ es la identidad en X, entonces (X, i) es un ejemplo trivial de espacio cubriente de X. Análogamente, si f es un homeomorfismo de Y sobre X, entonces (Y, f) es un espacio cubriente de X, lo cual también es inmediato.

4 El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ se define como un espacio cociente de $\mathbb{S}^n$, que obtenemos de identificar los puntos antípodos, si $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ es la función cociente entonces se ve fácilmente que $(\mathbb{S}^n, p)$ es un espacio cubriente de $\mathbb{P}^n$. Podemos tomar como vecindad elemental de cada punto $x \in \mathbb{P}^n$ un disco abierto que contenga a x; ese disco abierto,

existe, pues es la imagen bajo la función proyección de un disco con centro en una de las imágenes inversas de x.

El ejemplo 4 es de mucha importancia para esta tesis, pues los principales resultados de la misma están relacionados con los espacios proyectivos.

El siguiente Lema nos servirá para probar un teorema que será de gran ayuda para construir otros ejemplos de espacios cubrientes.

3.2. Lema. *Si U y V son abiertos, entonces todas las componentes por trayectorias de $U \times V$ son iguales a productos de componentes por trayectorias de U y V respectivamente.*

Demostración. Tomemos 2 abiertos U y V y una componente por trayectorias C de su producto $U \times V$, tomemos también dos puntos de C, digamos $x_1 = (u_1, v_1)$ y $x_2 = (u_2, v_2)$ donde $u_i \in U$ y $v_i \in V$, $i = 1, 2$. Como C es una componente por trayectorias de $U \times V$, existe $\alpha : I \to U \times V$, tal que $\alpha(0) = x_1$ y $\alpha(1) = x_2$. Ahora consideremos la siguiente composición: $\pi_u \circ \alpha : I \to U$, si evaluamos en 0 y en 1, obtenemos $\pi_u \circ \alpha(0) = u_1$ y $\pi_u \circ \alpha(1) = u_2$, lo cual implica que u_1 y u_2 están en la misma componente por trayectorias en U, digamos C_u, análogamente si aplicamos la proyección π_v obtenemos que los puntos v_1 y v_2 están en la misma componente por trayectorias C_v, de V notemos que lo anterior establece: $C \subset C_u \times C_v$.

Ahora, tomemos dos puntos $x_1 = (u_1, v_1)$ y $x_2 = (u_2, v_2)$ en $C_u \times C_v$, demostraremos que están en la misma componente por trayectorias.

Dado que u_1 y u_2 están en C_u, existe una función continua $\alpha_1 : I \to$

C_u tal que $\alpha_1(0) = u_1$ y $\alpha_1(1) = u_2$ y también para v_1 y v_2, que están en C_v, existirá una función continua $\alpha_2 : I \to C_v$ tal que $\alpha_2(0) = v_1$ y $\alpha_2(1) = v_2$. Definamos ahora la función $\beta : I \to C_u \times C_v$ como sigue: $\beta(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, claramente β es continua. Por otro lado, se cumple, por construcción, que $\beta(I) \subset C_u \times C_v$, y como tomamos cualesquiera dos puntos de $C_u \times C_v$ tenemos que $C_u \times C_v$ está contenido en la componente por trayectorias C. Es decir, demostramos: $C_u \times C_v \subset C$ y, en consecuencia, tenemos $C_u \times C_v = C$. □

El siguiente teorema proporciona muchos ejemplos de espacios cubrientes.

3.3. Teorema. *Si $(\widetilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de X y $(\widetilde{Y}, q)$ un espacio cubriente de Y, entonces $(\widetilde{X} \times \widetilde{Y}, p \times q)$ es un espacio cubriente de $X \times Y$ (la función $p \times q$ está definida por $(p \times q)(x, y) = (p(x), q(y))$).*

La demostración es una consecuencia inmediata del Lema anterior, pues es claro que si U es una vecindad elemental del punto $x \in X$ y V una vecindad elemental de $y \in Y$, entonces $U \times V$ es una vecindad elemental de $(x, y) \in X \times Y$, pues el producto de dos homeomorfismos, es también un homeomorfismo. □

Usando este resultado y los ejemplos 1 y 2, fácilmente se pueden construir más ejemplos de espacios cubrientes del toro $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. En particular, el plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, el cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ o el mismo toro pueden servir como espacios cubrientes del toro.

Para aclarar más el concepto de espacio cubriente, daremos algunos ejemplos de espacios que *casi* son espacios cubrientes.

3.4. Definición. *Una función continua $f : X \to Y$ es un* ***homeomorfismo local****, si cada punto $x \in X$ tiene un abierto $V, x \in V$ tal que $f(V)$ es abierto y $f\mid_V : V \to f(V)$ es un homeomorfismo.*

Se prueba fácilmente que si $(\widetilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de X, entonces p es un homeomorfismo local (la demostración se basa en que, en un espacio localmente conexo por trayectorias, las componentes por trayectorias de un conjunto abierto son abiertas). Igualmente, la inclusión de un subconjunto abierto de un espacio topológico en el espacio total es un homeomorfismo local.

Finalmente, la composición de dos homeomorfismos locales es un homeomorfismo local. Esto nos permite construir muchos ejemplos de homeomorfismos locales.

Por otra parte, es fácil construir ejemplos de homeomorfismos locales que no sean funciones cubrientes.

Por ejemplo, sea $p : (0, 10) \to \mathbb{S}^1$, dada por $p(t) = (cos(t), sen(t))$. Este ejemplo no coincide con el primero del capítulo pues los dominos no coinciden.

Entonces p es un homeomorfismo local, pero $((0, 10), p)$ no es un espacio cubriente de $\mathbb{S}^1$. (Los puntos de $\mathbb{S}^1$ que no tienen una vecindad elemental, son los puntos $(cos(0), sen(0))$ y $(cos(10), sen(10))$.

De forma más general: si $(\widetilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de X, y V es un subconjunto propio de X, abierto y conexo, entonces la restricción de p a $p^{-1}(V)$ es un homeomorfismo local, pero $(p^{-1}(V), p\mid_{p^{-1}(V)})$ no es un espacio cubriente de V. Es importante tener presente la distinción entre funciones cubrientes y homeomorfismos locales.

Obsérvese que un homeomorfismo local es una función abierta. En particular, si $(\widetilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de X, entonces p es una función abierta.

Daremos ahora un lema que nos permitirá construir más ejemplos de espacios cubrientes.

3.5. Lema. *Sean $(\widetilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X, A un subespacio de X que es conexo y localmente conexo por trayectorias, y $\widetilde{A}$ una componente por trayectorias de $p^{-1}(A)$. Entonces $(\widetilde{A}, p\mid_{\widetilde{A}})$ es un espacio cubriente de A.*

Demostración. Dada $p \in A$, demostraremos que existe un abierto U_p en A tal que $p \in U_p$ y todas las componentes por trayectorias de $\left(p\mid_{\widetilde{A}}\right)^{-1}(U_p)$ son homeomorfas a U_p.

Tomemos una vecindad elemental U de p consideremos la componente por trayectorias de $U \cap A$, llamemos U_p a esta componente por trayectorias. Como el espacio $(\widetilde{X}, p)$ es localmente conexo por trayectorias tenemos, en consecuencia, que U_p es abierto en A y, como U era una vecindad elemental, tenemos que U_p es homeomorfo a toda componente por trayectorias de su preimagen, en particular con las que están contenidas en $\widetilde{A}$. En consecuencia, tenemos que $(\widetilde{A}, p\mid_{\widetilde{A}})$ es un espacio cubriente de A. □

3.2 Levantamiento de trayectorias

En esta sección probaremos algunos lemas que expresan una de las propiedades básicas de los espacios cubrientes.

3.6. Lema. *Sean $(\widetilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X, $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ y $x_0 = p(\widetilde{x}_0)$. Entonces para toda trayectoria $f : I \to X$ con punto inicial x_0, existe una única trayectoria $g : I \to \widetilde{X}$ con punto inicial $\widetilde{x}_0$ tal que $p \circ g = f$.*

Demostración: Consideraremos dos casos.

Caso 1: La trayectoria f está contenida en una vecindad elemental U_k de x_0.

Si designamos por V la componente por trayectorias de $p^{-1}(U)$ que contiene a $\widetilde{x}_0$, entonces, como p es un homeomorfismo de V sobre U, claramente la composición $(p\,|_V)^{-1} \circ f$ sería el levantamiento buscado.

Caso 2: La trayectoria f no está contenida en ninguna vecindad elemental de x_0.

A f la podemos poner como unión de un número finito de trayectorias *más cortas*, cada una de las cuales está contenida en una vecindad elemental, de tal forma que podamos aplicar, sucesivamente, el razonamiento del caso 1 a cada una de estas trayectorias cortas.

Los detalles de este proceso son los siguientes: Sea $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cubierta de X por vecindades elementales, entonces $\{f^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ es una cubierta abierta del espacio métrico compacto I, elegimos un entero n tal que $\frac{1}{n}$ sea menor que un número de Lebesgue de esta cubierta [Teorema 4.3.31, pág. 276, E].

Dividimos el intervalo I en los subintervalos $[0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], ..., [\frac{n-1}{n}, 1]$. Observemos que f manda a cada subintervalo $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$ en una vecindad elemental $U_{\lambda_{i+1}}$ de X. A partir de $[0, \frac{1}{n}]$, definimos g sucesivamente sobre estos intervalos, de la siguiente manera: $g = \bigcup_{i=0}^{n-1} g_i$, donde cada g_i es el levantamiento de $f \mid_{U_{\lambda_{i+1}}}$ que obtenemos al aplicar el razonamiento del caso 1, ahora bien al aplicar la Proposición 2.7, tenemos que la unión anterior es una función continua, en consecuencia una trayectoria. □

La unicidad del levantamiento de la trayectoria es consecuencia del siguiente lema.

3.7. Lema. *Sean $\left(\widetilde{X}, p\right)$ un espacio cubriente de X y Y un espacio conexo y localmente conexo. Dadas dos funciones continuas f_0 y $f_1 : Y \to \widetilde{X}$ tales que $p \circ f_0 = p \circ f_1$ el conjunto $\{y \in Y : f_0(y) = f_1(y)\}$ o es vacío, o bien es todo Y.*

Demostración: Puesto que Y es conexo, basta probar que el conjunto en cuestión es a la vez abierto y cerrado. Probaremos primero que es cerrado. Sea y un punto límite de este conjunto y supongamos que:

$$x = p \circ f_0(y) = p \circ f_1(y).$$

Sea U una vecindad elemental de x. Puesto que $p \circ f_0$ y $p \circ f_1$ son continuas y Y es localmente conexo, podemos encontrar un abierto conexo W que tenga a y tal que $p \circ f_0(W) \subset U$ y $p \circ f_1(W) \subset U$. Puesto que $f_0(W)$ y $f_1(W)$

son conexos, cada uno de ellos debe estar contenido en una componente de $p^{-1}(U)$ y, como W intersecta al conjunto $\{y \in Y : f_0(y) = f_1(y)\}$, deben estar contenidos en la misma componente de $p^{-1}(U)$.

Designemos por V esta componente de $p^{-1}(U)$. Entonces $f_0(y) = f_1(y)$, ya que p manda homeomorfamente V sobre U.

Un razonamiento análogo nos permite demostrar que todo punto del conjunto $\{y \in Y : f_0(y) = f_1(y)\}$ es interior, lo cual querría decir que este conjunto es cerrado y abierto a la vez, dado que el espacio en que estamos trabajando es conexo, tenemos que los únicos abiertos y cerrados son el total y el vacío, por lo tanto, el conjunto en cuestión es el total o el vacío. $\square$

3.8. Lema. *Sean $(\widetilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X, g_0 y $g_1 : I \to \widetilde{X}$ trayectorias en $\widetilde{X}$ con el mismo punto inicial. Si $p \circ g_0 \simeq p \circ g_1$ entonces $g_0 \simeq g_1$; en particular g_0 y g_1 tienen el mismo punto final.*

Demostración: La idea de esta demostración es esencialmente la misma que la del lema anterior. Sea $\widetilde{x}_0$ el punto inicial de g_0 y g_1. La hipótesis $p \circ g_0 \simeq p \circ g_1$ implica la existencia de una función $F : I \times I \to X$ tal que:

$F(s,0) = p \circ g_0(s)$,

$F(s,1) = p \circ g_1(s)$,

$F(0,t) = p \circ g_1(0) = p(\widetilde{x}_0)$

$F(1,t) = p \circ g_1(1)$.

Usando un número de Lebesgue [Teorema 4.3.31, pág. 276, E], podemos encontrar números $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = 1$ y $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ tales que F mande cada rectángulo $[s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$ en alguna vecindad elemental de X.

Ahora veremos que existe una única función $G : I \times I \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ G = F$ y $G(0,0) = \widetilde{x}_0$.

Primero definimos G sobre el rectángulo $[0, s_1] \times [0, t_1]$ de manera que se cumplan las propiedades requeridas. Es claro que esto puede hacerse, pues F manda este rectángulo en una vecindad elemental del punto $p(\widetilde{x}_0)$.

Entonces extendemos la definición de G sucesivamente a los rectángulos $[s_{i-1}, s_i] \times [0, t_1]$ para $i = 2, 3, \cdots, m$, teniendo en cuenta que las definiciones coinciden sobre la arista común de dos rectángulos consecutivos cualesquiera y al aplicar la Proposición 2.7 tendriamos que la función es continua. Así hemos definida G sobre la banda $I \times [0, t_1]$.

Ahora definamos a G de manera análoga a la anterior. Fijémonos en los lados $\{s_{m-1}\} \times [t_1, t_2]$ y $[s_{m-1}, s_{m-2}] \times \{t_1\}$ del rectángulo $[s_{m-1}, 1] \times [t_1, t_2]$, notemos que dichos lados se encuentran contenidos en una vecindad elemental y, de manera semejante a la anterior, podemos definir la función G en el rectángulo $[s_{m-1}, 1] \times [t_1, t_2]$ y tendrá las propiedades requeridas, el mismo razonamiento lo hacemos para los siguientes cuadrados, $([s_{m-2}, s_{m-1}] \times [t_1, t_2], [s_{m-3}, s_{m-2}] \times [t_1, t_2], \ldots, [0, s_1] \times [t_1, t_2])$ y tendremos la función sobre la banda $I \times [t_1, t_2]$, los argumentos para definir la función en las bandas restantes es análogo, sólo hay que iniciar en el cuadro que está arriba del último en el que definimos la función.

La unicidad de G está asegurada por el Lema 3.7. Análogamente, en virtud de la unicidad en el Lema 3.6, $G(s,0) = g_0(s)$, $G(0,t) = \widetilde{x}_0$, $G(s,1) = g_1(s)$ y G manda $\{1\} \times I$ en un solo punto tal que:

$$p(\widetilde{x}_1) = p \circ g_1(1) = p \circ g_1(1).$$

Por tanto, G define una equivalencia entre las trayectorias g_0 y g_1. $\square$

Como consecuencia de estos resultados sobre levantamiento de trayectorias probaremos el siguiente lema:

3.9. Lema. *Si $(\widetilde{X}, p)$ es un espacio cubriente de X, entonces los conjuntos $p^{-1}(x)$ tienen el mismo cardinal, para todo $x \in X$.*

Demostración: Sean x_0 y x_1 dos puntos arbitrarios de X. Elegimos una trayectoria f con punto inicial x_0 y punto final x_1, a partir de la trayectoria f podemos definir una función $h : p^{-1}(x_0) \to p^{-1}(x_1)$ de la siguiente manera:

Dado un punto cualquiera $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ por 3.6 podemos levantar f a una trayectoria g en $\widetilde{X}$ con punto inicial y_0 y tal que $p \circ g = f$. Llamemos y_1 al punto final de g, como $p(y_1) = x_1$ definimos $h(y_0) = y_1$.

Tomando la trayectoria inversa $\overline{f}$ (definido por $\overline{f}(t) = f(1-t)$), definimos, análogamente, una función $h^{-1} : p^{-1}(x_1) \to p^{-1}(x_0)$ observemos que h y h^{-1} son inversas una de la otra y por lo tanto, cada una es biyectiva, entonces hemos definido una función biyectiva entre los conjuntos $p^{-1}(x_1)$ y $p^{-1}(x_0)$, en consecuencia, tienen la misma cardinalidad. $\square$

3.3 El grupo fundamental del cubriente de un espacio

3.10. Teorema. *Sean $(\widetilde{X}, p)$ un espacio cubriente de X, $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ y $x_0 = p(\widetilde{x}_0)$. Entonces, la función inducida (por p) $p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ definida como: $p_*([\alpha]) = [p(\alpha)]$ donde $[\alpha] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ es inyectiva.*

Demostración: Tomemos $[\alpha]$ y $[\beta] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ de forma que $p_*([\alpha]) = p_*([\beta]) \in \pi_1(X, x_0)$ esto implica que $[p(\alpha)] = [p(\beta)]$ y, como el **Lema 3.4** nos garantiza que los levantamientos son únicos y el punto inicial de las clases α y β es $\widetilde{x}_0$, tenemos que $[\alpha] = [\beta]$ lo cual implica la inyectividad de la función p_*. □

Este teorema nos lleva a la siguiente cuestión: Supongamos que $\widetilde{x}_0$ y $\widetilde{x}_1$ son puntos de $\widetilde{X}$ tales que $p(\widetilde{x}_0) = p(\widetilde{x}_1) = x_0$ ¿Cómo podemos comparar las imágenes de las funciones inducidas por la función cubriente p?:

$$\begin{aligned} p_* &: \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0), \\ p'_* &: \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1) \to \pi_1(X, x_0). \end{aligned}$$

La respuesta nos la da el siguiente teorema:

3.11. Teorema. *Sea $\left(\widetilde{X}, p\right)$ un espacio cubriente de X, y $x_0 \in X$. Entonces, los subgrupos $p_*\left(\pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}\right)\right)$, para $\widetilde{x} \in p^{-1}(x_0)$, forman exactamente una clase de conjugación*[1] *de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$.*

[1] Recordemos que dos subgrupos H y H' de un grupo G, son conjugados, si $H' = gHg^{-1}$ para alguna $g \in G$.

Demostración: Elijamos una trayectoria γ en $\widetilde{X}$ de $\widetilde{x}_0$ a $\widetilde{x}_1$, por el Teorema 2.15, esta trayectoria induce una función biyectiva $u : \pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right) \to \pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1\right)$ mediante $u([\alpha]) = [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$. Obtenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right) & \xrightarrow{p_*} & \pi_1(X, x_0) \\
{\scriptstyle u}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle v} \\
\pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1\right) & \xrightarrow{p'_*} & \pi_1(X, x_1)
\end{array}$$

donde $v([\beta]) = (p_*[\gamma])^{-1} * [\beta] * (p_*([\gamma]))$. Pero $p_*([\gamma])$ es la clase de una trayectoria cerrada y, por tanto, un elemento de $\pi_1(X, x_0)$. Así, vemos que las imágenes de $\pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right)$ y $\pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1\right)$ por p_* son subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x_0)$.

Surge entonces la siguiente pregunta: ¿puede obtenerse cada subgrupo conjugado de $p_*\pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right)$ como imagen de $p_*\pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_1\right)$, para algún $\widetilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$?.

La respuesta es: sí. Para probarlo, observemos que todo subgrupo de esta clase de conjugación es de la forma $\alpha^{-1}\left[p_*\pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right)\right]\alpha$, para algún elemento $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$.

Elijamos una trayectoria cerrada $f : I \to X$ que represente a α.

Aplicando el Lema 3.6 obtenemos una trayectoria $g : I \to \widetilde{X}$, levantamiento de f con $\widetilde{x}_0$ como punto inicial. Sea $\widetilde{x}_1$ el extremo de este levantamiento de la trayectoria. Entonces se ve fácilmente que:

$$p_*\pi_1\left(\widetilde{X},\widetilde{x}_1\right)=\alpha^{-1}\left[p_*\pi_1\left(\widetilde{X},\widetilde{x}_0\right)\right]\alpha.$$

□

3.4 Levantamiento de funciones

En la sección 3.2 estudiamos el levantamiento de trayectorias de X a un espacio cubriente $\widetilde{X}$. Estudiaremos ahora el problema análogo para funciones de un espacio arbitrario Y en X.

Para discutir esta cuestión, introducimos la siguiente notación: Si X y Y son espacios topológicos, $x \in X$ y $y \in Y$, entonces $f:(X,x)\to(Y,y)$ significa que f es una función continua de X en Y y que $f(x)=y$.

Con esta notación podemos establecer de manera concisa nuestro objetivo principal, como sigue:

Sean $(\widetilde{X},p)$ un espacio cubriente de X, $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$, $x_0=p(\widetilde{x}_0)$, $y_0 \in Y$ y $\varphi:(Y,y_0)\to(X,x_0)$ ¿Bajo qué condiciones existe una función $\widetilde{\varphi}:(Y,y_0)\to\left(\widetilde{X},\widetilde{x}_0\right)$, tal que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & \left(\widetilde{X},\widetilde{x}_0\right) \\ & \widetilde{\varphi}\nearrow & \\ (Y,y_0) & & \downarrow p \\ & \varphi\searrow & \\ & & (X,x_0) \end{array}$$

sea conmutativo? Si tal función $\widetilde{\varphi}$ existe, decimos que φ puede ser levantada a $\widetilde{\varphi}$, o que $\widetilde{\varphi}$ es un levantamiento de φ, el resultado principal es el siguiente teorema:

3.12. Teorema. *Sean $\left(\widetilde{X}, p\right)$ un espacio cubriente de X, Y un espacio conexo y localmente conexo por trayectorias, $y_0 \in Y$, $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$, y $x_0 = p(\widetilde{x}_0)$. Dada una función $\varphi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ existe un levantamiento $\widetilde{\varphi} : (Y, y_0) \to \left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right)$ si y sólo si $\varphi_* \pi_1 (Y, y_0) \subset p_* \pi_1 \left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right)$.*

Demostración: Si suponemos que $\widetilde{\varphi}$ existe, entonces obtenemos el siguiente diagrama conmutativo de grupos y homomorfismos:

$$\begin{tikzcd} & \pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(Y, y_0) \arrow[ur, "\widetilde{\varphi}_*"] \arrow[r, "\varphi_*"'] & \pi_1(X, x_0) \end{tikzcd}$$

Como 3.10 implica que p_* es inyectiva, la existencia de un homomorfismo $\widetilde{\varphi}_* : \pi_1 (Y, y_0) \to \pi_1 \left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right)$, inducido por φ, que haga conmutativo el diagrama, es equivalente a la condición de que la imagen de φ_* esté contenida en la imagen de p_*.

Una vez probada la necesidad, ahora probarermos su suficiencia. Para ello debemos definir la función $\widetilde{\varphi}$.

Las siguientes consideraciones demuestran que, esencialmente, existe una única manera de definir $\widetilde{\varphi}$, si es que existe.

Supongamos que existe; sea y un punto arbitrario de Y. Puesto que Y es conexo por trayectorias, existe una trayectoria $f : I \to Y$ con punto inicial y_0 y punto final y.

Consideremos las trayectorias $\varphi \circ f$ y $\widetilde{\varphi} \circ f$ en X y $\widetilde{X}$ respectivamente. La trayectoria $\widetilde{\varphi} \circ f$ es un levantamiento de la trayectoria $\varphi \circ f$ y $\widetilde{\varphi}(y)$ es el punto final de la trayectoria $\widetilde{\varphi} \circ f$.

En vista de estas observaciones, definimos la función $\widetilde{\varphi} : (Y, y_0) \to \left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right)$ de la siguiente manera: para cada punto $y \in Y$ elegimos una trayectoria $f : I \to Y$ con punto inicial y_0 y punto final y.

Entonces $\varphi \circ f$ es una trayectoria en X con punto inicial x_0. Aplicando el Lema 3.6 obtenemos una trayectoria $g : I \to \widetilde{X}$ cuyo punto inicial es $\widetilde{x}_0$ y tal que $p \circ g = \varphi \circ f$.

Definimos

$$\widetilde{\varphi}(y) = \text{punto final de } g$$

Para justificar esta definición tenemos que demostrar que $\widetilde{\varphi}(y)$ es independiente de la elección de la trayectoria f. En virtud del Lema 3.8, podemos reemplazar f por una trayectoria equivalente sin alterar la definición de $\widetilde{\varphi}(y)$; es decir, $\widetilde{\varphi}(y)$ sólo depende de la clase de equivalencia de la trayectoria f.

Supongamos que $[\alpha]$ y $[\beta]$ son dos clases de equivalencia distintas de trayectorias en Y de y_0 a y. Entonces, $[\alpha] * [\beta]^{-1}$ es un trayectoria cerrada con punto base y_0; así pues, $[\alpha] * [\beta]^{-1} \in \pi_1(Y, y_0)$ y, por tanto, por las hipótesis del teorema, $\varphi_* \left([\alpha] * [\beta]^{-1}\right) \in p_* \left(\pi_1\left(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0\right)\right)$.

Existe, pues, en $\widetilde{X}$ una clase de lazos con punto base $\widetilde{x}_0$ que se proyecta sobre $(\varphi_*([\alpha]))*(\varphi_*([\beta]))^{-1}$, es decir, si $(\varphi_*[\alpha])*(\varphi_*[\beta])^{-1}$ se levanta a una trayectoria en $\widetilde{X}$ con origen $\widetilde{x}_0$, el resultado es una trayectoria cerrada en $\widetilde{X}$. Por tanto, si $\varphi_*([\alpha])$ y $\varphi_*([\beta])$ se levantan cada una a trayectorias en $\widetilde{X}$ con origen $\widetilde{x}_0$, deben tener el mismo punto final.

Debemos probar ahora que la función $\widetilde{\varphi}$, así definida, es continua. Sean $y \in Y$ y U una vecindad arbitraria de $\widetilde{\varphi}(y)$. Debemos demostrar que existe una vecindad V de y tal que $\widetilde{\varphi}(V) \subset U$. Elijamos una vecindad elemental U' de $p(\widetilde{\varphi}(y)) = \varphi(y)$ tal que $U' \subset p(U)$.

Sean W la componente por trayectorias de $p^{-1}(U')$ que contiene a $\widetilde{\varphi}(y)$ y U'' una vecindad elemental de $\varphi(y)$ tal que $U'' \subset p(U \cap W)$.

Entonces se demuestra fácilmente que la componente por trayectorias de $p^{-1}(U'')$ que tiene a $\widetilde{\varphi}(y)$ está contenida en U. Puesto que φ es continua, podemos elegir V de manera que $\varphi(V) \subset U'$. También podemos elegir V conexo por trayectorias, ya que Y es localmente conexo por trayectorias, la vecindad V, así elegida, cumple con las propiedades requeridas.

Tal como hemos definido $\widetilde{\varphi}$ es obvio que se da la relación de conmutatividad $p \circ \widetilde{\varphi} = \varphi$. □

Observacion: La función $\widetilde{\varphi}$ es única en virtud del Lema 3.7. La unicidad de $\widetilde{\varphi}$ resulta también evidente a partir de la demostración del teorema.

Finalizamos con una definición importante en nuestro trabajo.

3.13. Definición. *Si X es un espacio topológico, la* ***cubriente universal***

de X es el espacio cubriente $(\widehat{X}, \widehat{p})$, donde $\widehat{X}$ es un espacio simplemente conexo, es decir, donde el grupo fundamental de $\widehat{X}$ es el trivial.

Capítulo 4

LÍMITES INVERSOS DE ESPACIOS PROYECTIVOS

Este capítulo ocupa un lugar central en la presente tesis, está basado en el artículo de M. Marsh [MM], el cual responde y generaliza la pregunta de Bellamy: *¿Los límites inversos de planos proyectivos reales, con funciones de ligadura esenciales, tienen la propiedad del punto fijo?* [Problema 32, pág. 369, Lew]. Además, se demuestran resultados que involucran a los límites inversos y la propiedad del punto fijo, se usa el concepto dado por Marsh de *función productora de coincidencias en cubrientes* que es una generalización de función *universal* (productora de coincidencias) dado por Holsztyński [Hol].

Hemos de mencionar que introducimos algunas demostraciones propias, además de que en los Teoremas 4.8 y 4.9 demostramos la necesidad y suficiencia de las cuales M. Marsh [MM] solamente demuestra una de ellas. Por último, hemos de mencionar que todo lo anterior es fruto de los cursos impartidos por Sergio Macías de límites inversos.

Sólo usaremos funciones continuas. Decimos que $f : X \to Y$ es **inesencial** si es homotópica a una constante. En otro caso la función es **esencial**. A lo largo de este capítulo, para $i \geq 0$, $\widetilde{X}_i$ será un espacio cubriente, conexo y localmente conexo por trayectorias para X_i, donde X_i es un **ANR** (retracto de vecindad absoluto). Denotaremos como $p_i : \widetilde{X}_i \to X_i$ a la proyección cubriente.

Holsztyński [Ho1] llamó a una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos, **universal** si dada cualquier función $g : X \to Y$, se cumple que f y g tienen **coincidencia** es decir: existe $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$. Más recientemente, otros autores (por ejemplo [B]) dicen que este tipo de funciones son **productoras de coincidencias**. Adoptamos la última terminología, en el caso de los espacios cubrientes. En [Ho1] se demuestra que si $f : X \to Y$ es productora de coincidencias, entonces f es suprayectiva y Y tiene la propiedad del punto fijo.

4.1. Definición. *Sean X y Y espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función continua, diremos que f es **productora de coincidencias (universal)**, si dada cualquier otra función $g : X \to Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$.*

Antes de seguir definiendo los conceptos que utilizaremos a lo largo del presente capítulo, demostraremos algunos resultados interesantes.

4.2. Lema. *Sean X y Y dos espacios no vacíos, métricos compactos y f :*

$X \to Y$ una función continua. Si para toda $\epsilon > 0$, existen un espacio Z_ϵ y una ϵ-función $f_\epsilon : Y \to Z_\epsilon$, de forma que $f_\epsilon \circ f : X \to Z_\epsilon$ es productora de coincidencias, entonces f también es productora de coincidencias.

Demostración: Tomemos, en primer lugar, una función $g : X \to Y$. Ahora, por hipótesis, para cada número de la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, existe f_n, una $\frac{1}{n}$-función, la cual cumple que la composición $f_n \circ f$ es productora de coincidencias, por lo tanto, existe $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, tal que $(f_n \circ f)(x_n) = (f_n \circ g)(x_n)$, para toda $n \in \mathbb{N}$ y, como f_n es una $\frac{1}{n}$-función, es inmediata la desigualdad: $d(f(x_n), g(x_n)) < \frac{1}{n}$. Por otro lado, puesto que X es compacto, podemos suponer que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene un punto límite, digamos x.

Demostremos que $g(x) = f(x)$. Sea $\epsilon > 0$, como f y g son continuas, para $\frac{\epsilon}{3}$ existen:

1) $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f(x), f(x_{m_1})) < \frac{\epsilon}{3}$ para toda $m_1 \geq k_1$.

2) $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f(x_{m_2}), g(x_{m_2})) < \frac{\epsilon}{3}$ para toda $m_2 \geq k_2$, (basta tomar $\frac{1}{k_2} < \frac{\epsilon}{3}$).

3) $k_3 \in \mathbb{N}$ tal que $d(g(x), g(x_{m_3})) < \frac{\epsilon}{3}$ para toda $m_3 \geq k_3$.

Tomemos $k = máx\{k_1, k_2, k_3\}$, entonces para $m \geq k$, tenemos:

$d(f(x), g(x)) \leqslant d(f(x), f(x_m)) + d(f(x_m), g(x_m)) + d(g(x_m), g(x)) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$

De esta forma, para cada $\epsilon > 0$, $d(f(x), g(x)) < \epsilon$, por lo cual $f(x) = g(x)$, en consecuencia f es productora de coincidencias. $\square$

4.3. Teorema. *Supongamos que* $\{X_n, f_n^{n+1}\}$ *es un sistema inverso donde para toda* $n \in \mathbb{N}$*, se tiene que* X_n *es ANR y, además,* $f_v^u : X_u \to X_v$ *es productora de coincidencias para toda* $u \geq v$*. Entonces* $X_\infty = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$ *tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración: Recordemos que $\pi_t : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \to X_t$ es la proyección natural, fijemos un punto $a \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$, definamos $i_t : X_t \to \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ como sigue:

$$\pi_u \circ i_t(x) = \begin{cases} f_u^t(x), \text{ si } u \leqslant t; \\ \pi_u(a), \text{ si } u > t. \end{cases}$$

Primero mostraremos que $f_t : X_\infty \to X_t$ es productora de coincidencias para toda $t \in \mathbb{N}$, para demostrarlo, fijemos $n \geq 1$.

Consideremos una función $g : X_\infty \to X_n$. Como cada X_n es ANR por [Teorema 4.1, pág. 87, Bo], existen un abierto G de $\prod_{m=1}^{\infty} X_m$ que contiene a X_∞ y una función $g' : G \to X_n$ que extiende a g, además, a partir de cierto número natural m, $i_k(X_k) \subset G$ si $k \geq m$.

Ahora, sea $u \geq n$, claramente $i_u : X_u \to i_u(X_u)$ es un homeomorfismo. Por otro lado, por hipótesis, $f_n^u : X_u \to X_n$ es productora de coincidencias, entonces $f_n^u \circ i_u^{-1} : i_u(X_u) \to X_n$ también lo es y, por lo tanto, para u mayor que n y m, existe un punto $x_u \in X_u$ tal que $f_n^u(x_u) = g' \circ i_u(x_u)$.

Sea $\left\{i_{u_j}\left(x_{u_j}\right)\right\}_{j=1}^{\infty}$ una subsucesión de $\{i_u(x_u)\}$ que converge a un punto $x \in X_\infty$, tomemos puntos $z_j \in X_\infty$ tales que $f_{u_j}(z_j) = x_{u_j}$, notemos que $\left\{g'\left(i_{u_j}\left(x_{u_j}\right)\right)\right\}_{j=1}^{\infty}$ converge a $g'(x)$ y que $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ converge a x. Además se tiene:

$$
\begin{aligned}
g(x) = g'(x) &= \text{lím}_{j\to\infty} g'\left(i_{u_j}(x_{u_j})\right) \\
&= \text{lím}_{j\to\infty} f_n^{u_j}(x_{u_j}) \\
&= \text{lím}_{j\to\infty} f_n^{u_j}(f_{u_j}(z_j)) \\
&= \text{lím}_{j\to\infty} f_n(z_j) \\
&= f_n(\text{lím}_{j\to\infty} z_j) \\
&= f_n(x).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, f_n es productora de coincidencias para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, como $f_n \circ Id_{X_\infty} : X_\infty \to X_n$ es productora de coincidencias para toda $n \in \mathbb{N}$ entonces, por el Lema 4.2, Id_{X_∞} es productora de coincidencias, por lo tanto, X_∞ tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

4.4. Definición. *Sean $f, g : (\widetilde{X}_1, p_1) \to (\widetilde{X}_2, p_2)$ dos funciones entre espacios cubrientes de X_1 y X_2 respectivamente. Diremos que f y g tienen una* ***coincidencia en cubrientes*** *(con respecto a X_1 y X_2) si existen un punto $x \in (\widetilde{X}_1, p_1)$ y un punto $y \in p_1^{-1} \circ p_1(x)$ tales que $p_2 \circ f(x) = p_2 \circ g(y)$.*

Notemos que si $x = y$ en la definición anterior, entonces las funciones $p_2 \circ f$ y $p_2 \circ g$ tienen una coincidencia en el sentido usual.

4.5. Definición. *Sea $f : (\widetilde{X}_1, p_1) \to (\widetilde{X}_2, p_2)$ una función, diremos que f es* ***productora de coincidencias en cubrientes*** *(con respecto a X_1 y X_2) si dada cualquier función $g : (\widetilde{X}_1, p_1) \to (\widetilde{X}_2, p_2)$, se cumple que f y g tienen una coincidencia en cubrientes (con respecto a X_1 y X_2).*

4.6. Teorema. *Sea $k : X_1 \to X_2$ una función. Supongamos que $(\widetilde{X}_1, p_1)$ es simplemente conexo y que $f : (\widetilde{X}_1, p_1) \to (\widetilde{X}_2, p_2)$ es un levantamiento de*

$k \circ p_1 : (\widetilde{X}_1, p_1) \to X_2$, entonces la función f es productora de coincidencias en cubrientes si y sólo si la función $k \circ p_1 : (\widetilde{X}_1, p_1) \to X_2$ es productora de coincidencias.

Demostración: Supongamos que f es productora de coincidencias en cubrientes y sea $g : (\widetilde{X}_1, p_1) \to X_2$ una función, como $(\widetilde{X}_1, p_1)$ es simplemente conexo, su grupo fundamental es el grupo trivial, entonces, por 3.12, dado un punto $x_0 \in (\widetilde{X}_1, p_1)$ existe un único levantamiento $\psi : (\widetilde{X}_1, p_1) \to (\widetilde{X}_2, p_2)$ de g tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{X}_1, p_1) \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "g"'] & & (\widetilde{X}_2, p_2) \arrow[dl, "p_2"] \\
& X_2 &
\end{tikzcd}$$

tenemos también el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
(\widetilde{X}_1, p_1) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_1"] & (\widetilde{X}_2, p_2) \arrow[d, "p_2"] \\
X_1 \arrow[r, "k"] & X_2
\end{tikzcd}$$

Como f es productora de coincidencias en cubrientes, f y ψ tienen una coincidencia en cubrientes, entonces existen $x \in (\widetilde{X}_1, p_1)$ y $y \in p_1^{-1} \circ p_1(x)$ tales que $p_2 \circ f(x) = p_2 \circ \psi(y)$.

Notemos:

(1) $g(y) = p_2 \circ \psi(y)$, por que ψ es un levantamiento de g.

(2) $p_2 \circ \psi(y) = p_2 \circ f(x)$, pues f y ψ tienen una coincidencia en cubrientes.

(3) $p_2 \circ f(x) = k \circ p_1(x)$, por la conmutatividad del segundo diagrama.

(4) $k \circ p_1(x) = k \circ p_1(y)$, pues como $y \in p_1^{-1} \circ p_1(x)$ se tiene que $p_1(y) = p_1(x)$, por lo tanto, $k \circ p_1(y) = k \circ p_1(x)$.

De las igualdades anteriores tenemos que y es una coincidencia de las funciones g y $k \circ p_1$. Por lo tanto $k \circ p_1 = p_2 \circ f$ es productora de coincidencias.

Ahora supongamos que $k \circ p_1$ es productora de coincidencias y sea $g : (\widetilde{X}_1, p_1) \to (\widetilde{X}_2, p_2)$ una función. Como $k \circ p_1$ es productora de coincidencias existe $x \in \widetilde{X}_1$ tal que $p_2 \circ g(x) = k \circ p_1(x) = p_2 \circ f(x)$. Por lo tanto, f y g tienen una coincidencia en cubrientes y, por lo tanto, f es productora de coincidencias en cubrientes. $\square$

4.7. Corolario. *Si el levantamiento f es un productor de coincidencias en cubrientes entonces la función k es productora de coincidencias.*

Demostración: Sea $h : X_1 \to X_2$ una función. Demostraremos que existe $b \in X_1$ tal que $h(b) = k(b)$. Consideremos $h \circ p_1 : \widetilde{X}_1 \to X_2$. Como $k \circ p_1$ es productora de coincidencias, existe $e \in \widetilde{X}_1$ tal que $(h \circ p_1)(e) = (k \circ p_1)(e)$. Notemos que, de estas igualdades, se tiene que $h[p_1(e)] = k[p_1(e)]$, de donde tenemos que k también es productora de coincidencias.

$\square$

4.8. Teorema. *Sean $\left(\widehat{X}_1, \widehat{p}_1\right)$ y $\left(\widehat{X}_2, \widehat{p}_2\right)$ las cubrientes universales de X_1 y X_2 respectivamente, $\left(\widetilde{X}_1, p_1\right)$ y $\left(\widetilde{X}_2, p_2\right)$ espacios cubrientes de X_1 y X_2,* *sean también $q_1 : \widehat{X}_1 \to \widetilde{X}_1$ y $q_2 : \widehat{X}_2 \to \widetilde{X}_2$ funciones cubrientes tales que $\widehat{p}_1 = p_1 \circ q_1$ y $\widehat{p}_2 = p_2 \circ q_2$. Ahora, si $f, g : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ son funciones y $\widehat{f}$ y $\widehat{g}$ son levantamientos de $f \circ q_1$ y $g \circ q_1$ respectivamente, entonces $f, g : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ tienen una coincidencia en cubrientes con respecto a X_1 y a X_2 si y sólo si $\widehat{f}$ y $\widehat{g}$ tienen una coincidencia en cubrientes con respecto a X_1 y a X_2.*

Demostración: Supongamos que f y g tienen una coincidencia en cubrientes con respecto a X_1 y a X_2. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
(\widehat{X}_1, \widehat{p}_1) & & & \xrightarrow{\widehat{f}, \widehat{g}} & & & (\widehat{X}_2, \widehat{p}_2) \\
& \searrow q_1 & & & & q_2 \swarrow & \\
\widehat{p}_1 \downarrow & & (\widetilde{X}_1, p_1) & \xrightarrow{f, g} & (\widetilde{X}_2, p_2) & & \widehat{p}_2 \downarrow \\
& \swarrow p_1 & & & & p_2 \searrow & \\
X_1 & & & & & & X_2
\end{array}$$

Como f y g tienen una coincidencia en cubrientes con respecto a X_1 y a X_2, existen $x \in \left(\widetilde{X}_1, p_1\right)$ $y \in p_1^{-1} \circ p_1(x)$ tales que $p_2 \circ f(x) = p_2 \circ g(y)$.

Sean $z \in q_1^{-1}(x)$ y $w \in q_1^{-1}(y)$. Entonces, por la elección de z, se cumple $\widehat{p}_1(z) = p_1 \circ q_1(z) = p_1(x)$ y, por la elección de w, se tiene $\widehat{p}_1(w) = p_1 \circ q_1(w) = p_1(y) = p_1(x)$, luego entonces $w \in \widehat{p_1}^{-1} \circ \widehat{p}_1(z)$.

Por otra parte, por la conmutatividad del diagrama y la elección de z y de w, tenemos que: $\widehat{p}_2 \circ \widehat{f}(z) = p_2 \circ q_2 \circ \widehat{f}(z) = p_2 \circ f \circ q_1(z) = p_2 \circ f(x) = p_2 \circ g(y) = p_2 \circ g \circ q_1(w) = p_2 \circ q_2 \circ \widehat{g}(w) = \widehat{p}_2 \circ \widehat{g}(w)$. Por lo tanto $\widehat{f}$ y $\widehat{g}$

tienen una coincidencia en cubrientes con respecto a X_1 y a X_2.

Ahora supongamos que $\widehat{f}$ y $\widehat{g}$ tienen una coincidencia en cubrientes con respecto a X_1 y a X_2. Entonces, existen $\widehat{x}_0 \in \widehat{X}_1$, $\widehat{y}_0 \in \widehat{p_1}^{-1} \circ \widehat{p}_1(\widehat{x}_0)$ que cumplen con que $\widehat{p}_2 \circ \widehat{f}(\widehat{x}_0) = \widehat{p}_2 \circ \widehat{g}(\widehat{y}_0)$, definamos $x = q_1(\widehat{x}_0), y = q_1(\widehat{y}_0)$ los cuales, por la conmutatividad de los diagramas, cumplen:

$$p_1(x) = p_1 \circ q_1(\widehat{x}_0) = \widehat{p}_1(\widehat{x}_0) \text{ y } p_1(y) = p_1 \circ q_1(\widehat{y}_0) = \widehat{p}_1(\widehat{y}_0)) = \widehat{p}_1(\widehat{x}_0).$$

Por lo tanto, $y \in p_1^{-1} \circ p_1(x)$ y, como también se cumple que $\widehat{p}_2 = p_2 \circ q_2$, entonces: $\widehat{p}_2 \circ \widehat{f}(\widehat{x}_0) = (p_2 \circ q_2) \circ \widehat{f}(\widehat{x}_0) = p_2 \circ \left(q_2 \circ \widehat{f}\right)(\widehat{x}_0) = p_2 \circ (f \circ q_1)(\widehat{x}_0) = p_2 \circ f(x)$ y $\widehat{p}_2 \circ \widehat{g}(\widehat{y}_0) = (p_2 \circ q_2) \circ \widehat{g}(\widehat{y}_0) = p_2 \circ (q_2 \circ \widehat{g})(\widehat{y}_0) = p_2 \circ (g \circ q_1)(\widehat{y}_0) = p_2 \circ g(y)$.

De donde, $p_2 \circ f(x) = p_2 \circ g(y)$. Por tanto, f y g tienen una coincidencia en cubrientes con respecto a X_1 y a X_2. $\square$

4.9. Teorema. *Sea $f : (\widehat{X}_1, \widehat{p}_1) \to (\widetilde{X}_2, \widetilde{p}_2)$ una función continua, donde $(\widehat{X}_1, \widehat{p}_1)$ es la cubriente universal del espacio X_1, y $(\widetilde{X}_2, \widetilde{p}_2)$ es la cubriente universal del espacio X_2 con función cubriente $\widehat{p}_2$. Sea $q_2 : \widehat{X}_2 \to \widetilde{X}_2$ una función cubriente tal que $\widehat{p}_2 = p_2 \circ q_2$, si $\widehat{f} : \widehat{X}_1 \to \widehat{X}_2$ es un levantamiento de f. Entonces f es un productor de coincidencias en cubrientes con respecto a X_1, p_1 y a X_2, p_2 si y sólo si $\widehat{f}$ es un productor de coincidencias en cubrientes con respecto a $X_1, \widehat{p}_1$ y a $X_2, \widehat{p}_2$.*

$$\begin{tikzcd}
(\widehat{X}_1,\widehat{p}_1) \arrow[rr, "\widehat{f}"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[dd, "\widehat{p}_1"'] & & (\widehat{X}_2,\widehat{p}_2) \arrow[dl, "q_2"] \arrow[dd, "\widehat{p}_2"] \\
 & (\widetilde{X}_2,p_2) \arrow[dr, "p_2"'] & \\
X_1 & & X_2
\end{tikzcd}$$

Demostración: Supongamos que f es un productor de coincidencias con respecto a X_1, p_1 y a X_2, p_2. Sea $g : (\widehat{X}_1, \widehat{p}_1) \to (\widehat{X}_2, \widehat{p}_2)$ una función, entonces por hipótesis $q_2 \circ g : (\widehat{X}_1, p_1) \to (\widetilde{X}_2, p_2)$ y f tienen una coincidencia en cubrientes con respecto a X_1, p_1 y a X_2, p_2. Luego entonces, por el Teorema 4.6, $\widehat{f}$ y g (que es un levantamiento de $q_2 \circ g$) tienen una coincidencia en cubrientes con respecto a $X_1, \widehat{p}_1$ y a $X_2, \widehat{p}_2$. Es decir, $\widehat{f}$ es un productor de coincidencias en cubrientes.

Ahora, supongamos que $\widehat{f}$ es un productor de coincidencias con respecto a X_1, p_1 y a X_2, p_2. Tomemos $g : (\widehat{X}_1, \widehat{p}_1) \to (\widetilde{X}_2, p_2)$, debemos mostrar que existen $x \in \widehat{X}_1$ y $y \in \widehat{p_1}^{-1} \circ \widehat{p}_1(x)$ tales que $p_2 \circ f(x) = p_2 \circ g(y)$.

Consideremos $\widehat{g} : (\widehat{X}_1, \widehat{p}_1) \to (\widehat{X}_2, \widehat{p}_2)$ un levantamiento de g. Como $\widehat{f}$ es un productor de coincidencias, existen $\widehat{x}_0 \in \widehat{X}_1$ y $\widehat{y}_0 \in \widehat{p_1}^{-1} \circ \widehat{p}_1(\widehat{x}_0)$ tales que $\widehat{p}_2 \circ \widehat{f}(\widehat{x}_0) = \widehat{p}_2 \circ \widehat{g}(\widehat{y}_0)$.

Como $\widehat{p}_2 = p_2 \circ q_2$, entonces se cumple:

$\widehat{p}_2 \circ \widehat{f}(\widehat{x}_0) = (p_2 \circ q_2) \circ \widehat{f}(\widehat{x}_0) = p_2 \circ \left(q_2 \circ \widehat{f}\right)(\widehat{x}_0) = p_2(f(\widehat{x}_0))$, y $\widehat{p}_2 \circ \widehat{g}(\widehat{y}_0) = (p_2 \circ q_2) \circ \widehat{g}(\widehat{y}_0) = p_2 \circ (q_2 \circ \widehat{g})(\widehat{y}_0) = p_2(g(\widehat{y}_0))$.

De donde $p_2 \circ f(\widehat{x}_0) = p_2 \circ g(\widehat{y}_0)$. Por tanto, f y g tienen una coincidencia con respecto a X_1, p_1, X_2, p_2. $\square$

Para $n \geq 1$, $\mathbb{P}^n$ denota el espacio proyectivo real de dimensión n y la función cubriente de $\mathbb{S}^n$ en $\mathbb{P}^n$ será simplemente p.

4.10. Teorema. *Si $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ es una función esencial, donde $\mathbb{S}^n$ es una esfera de dimensión par, entonces f es productora de coincidencias en cubrientes con respecto a $\mathbb{P}^n, p$.*

Demostración: Sea $T : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ la función antípoda, supongamos que f no es productora de coincidencias en cubrientes. Entonces por nuestra suposición, existe una función $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ para la cual f y g no tienen coincidencia en cubrientes con respecto a $\mathbb{P}^n, p$, luego entonces para toda $x \in \mathbb{S}^n$, $f(x) \neq g(x)$ y $f(x) \neq -g(x)$, ya que $p(x) = p(-x)$. Por lo que podemos definir una homotopía $\phi : \mathbb{S}^n \times I \to \mathbb{S}^n$ de la siguiente manera: $\phi(x,t) = \frac{(t-1)f(x)+tg(x)}{\|(t-1)f(x)+tg(x)\|}$, nótese que la función anterior está bién definida y es continua, pues la obtenemos a partir de un número de operaciones entre funciones continuas y el cociente no se anula, por otro lado, la norma de la función en cualquier punto es 1, por lo tanto, toda su imagen está contenida en $\mathbb{S}^n$, además $\phi(x,0) = -f(x), \phi(x,1) = g(x)$, lo cual implica que $g \simeq -f = T \circ f$. También tenemos que, para toda $x \in \mathbb{S}^n$, $g(x) \neq T \circ f(x)$; entonces de manera análoga tenemos: $g \simeq T \circ (T \circ f) = f$. Destaquemos de lo anterior: $T \circ f \simeq g$, $f \simeq g$ entonces $T \circ f \simeq f$, en consecuencia $f \simeq T \circ f$.

Para cualquier función h, sea $D(h)$ el grado de h (véase el apéndice). Entonces tenemos que $D(f) = D(T \circ f) = D(T)D(f) = (-1)^{n+1}D(f)$[1] y, como f es esencial, por el Lema A.12, tenemos que $D(f) \neq 0$. Entonces tenemos que $1 = (-1)^{n+1}$, pero esto implica que n debe ser impar, lo cual es una contradicción, por lo tanto f es productora de coincidencias en cubrientes. $\square$

Notemos que la prueba anterior muestra que $p \circ f$ y $p \circ g$ tienen una coincidencia para toda $g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ (donde n es par)

Se sabe que $\mathbb{P}^n$ tiene la propiedad del punto fijo para n par [Corolario 17, pág. 815, W] el Corolario 4.11 da una prueba alternativa.

4.11. Corolario. *Para n par la función cubriente $p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ es productora de coincidencias y, en consecuencia, $\mathbb{P}^n$ tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración: Como la función identidad $id : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ es esencial, es un productor de coincidencias en cubrientes con respecto a $\mathbb{P}^n, p$. Como el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{Id_{\mathbb{S}^n}} & \mathbb{S}^n \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathbb{P}^n & \xrightarrow{Id_{\mathbb{P}^n}} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

por el Teorema 4.6 $id \circ p = p : \mathbb{S}^n \to \mathbb{P}^n$ es productora de coincidencias. $\square$

4.12. Corolario. *Si $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ $(n \geq 1)$ y f no es homotópica a g, entonces f y g tienen una coincidencia en cubrientes.*

[1] La igualdad $D(T) = (-1)^{n+1}$ es consecuencia directa de la definición, [Ejercicio 4, pág. 339, D]

Demostración: Notemos que en la prueba del Teorema 4.10, sin la hipótesis de n, tenemos que si f y g no tienen coincidencia en cubrientes entonces g es homotópica con f. $\square$

El Corolario 4.12 es, también, consecuencia del Teorema 4.6 y del Corolario 4.7.

4.13. Teorema. *Si $X = \varprojlim \{\mathbb{P}^m, f_n^{n+1}\}$ donde m es par, $\mathbb{P}^m$ es m-espacio proyectivo real y toda f_n^{n+1} es esencial. Entonces X tiene la propiedad del punto fijo.*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{S}^m & \xleftarrow{g_1^2} & \mathbb{S}^m & \xleftarrow{g_2^3} & \cdots \xleftarrow{g_{i-1}^i} & \mathbb{S}^m & \xleftarrow{g_i^{i+1}} & \mathbb{S}^m & \xleftarrow{g_{i+1}^{i+2}} & \cdots Y \\
\downarrow{\scriptstyle p} & & {\scriptstyle p}\downarrow & & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \cdots \downarrow{\scriptstyle p'} \\
\mathbb{P}^m & \xleftarrow{f_1^2} & \mathbb{P}^m & \xleftarrow{f_2^3} & \cdots \xleftarrow{f_{i-1}^i} & \mathbb{P}^m & \xleftarrow{f_i^{i+1}} & \mathbb{P}^m & \xleftarrow{f_{i+1}^{i+2}} & \cdots X
\end{array}
$$

Demostración: Sea $p : \mathbb{S}^m \to \mathbb{P}^m$ la función cubriente y, para toda $n \geq 1$, fijemos un punto $x_0 \in \mathbb{P}^m$. Sea $g_n^{n+1} : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ el levantamiento de $f_n^{n+1} \circ p : \mathbb{S}^m \to \mathbb{P}^m$ el cual, por 3.12, es único, sea $Y = \varprojlim \{\mathbb{S}^m, g_n^{n+1}\}$, fijemos $u > n \geq 1$. Notemos que (por la conmutatividad del diagrama anterior) $g_n^u : \mathbb{S}^m \to \mathbb{S}^m$ es un levantamiento de $f_n^u \circ p : \mathbb{S}^m \to \mathbb{P}^m$. Como toda f_i^{i+1} es esencial y la composición de funciones esenciales es una función esencial, tenemos que f_n^u es esencial, por [Lema 7.29, pág. 164, L] se sabe, que $p : \mathbb{S}^m \to \mathbb{P}^m$ es esencial, luego entonces se muestra que g_n^u es esencial. Por el Teorema 4.10, g_n^u es productora de coincidencias en cubrientes con respecto a $\mathbb{P}^m, p$. Por el Corolario 4.7 f_n^u produce coincidencias, y por el Teorema 4.3 concluimos que X tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Hagopian [MM] recientemente demostró que existen continuos tipo $\mathbb{P}^m$ (ver Definición 1.12), para toda $m \geq 2$, los cuales admiten funciones sin puntos fijos.

Por Mardešić y Segal [Mar], todo continuo tipo $\mathbb{P}^m$ es homeomorfo a un límite inverso de $\mathbb{P}^m$ con funciones de ligadura suprayectivas, de ahí, el Teorema 4.13 es el mejor posible. J Segal y T. Watanabe [SW] demostraron que todo límite inverso de espacios proyectivos complejos de dimensión par, con funciones de ligadura esenciales tienen la propiedad del punto fijo.

Si $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ denota el n-espacio proyectivo complejo. Segal y Watanabe usaron la teoría de coincidencia de Lefschetz para mostrar que si n es par, $f : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es esencial y $g : \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ es cualquier función, entonces el número de coincidencia de Lefschetz de f y g no es cero. De ahí, las funciones esenciales de ligadura son productoras de coincidencias.

En suma mostraron [Corolario 6.10, SW], para n par, si X es un continuo Hausdorff tipo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ que no es movible [Kr], entonces X tiene la propiedad del punto fijo.

Nadler [N1] ha demostrado que todo límite inverso de discos con funciones de ligadura débilmente confluentes tiene la propiedad del punto fijo. Observemos que el límite inverso de planos proyectivos, $\mathbb{P}^2$, con funciones de ligadora monótonas tiene la propiedad del punto fijo [Observación 3.11, pág. 233, N1]. Por lo tanto, es natural preguntarse si el límite inverso de planos proyectivos con funciones de ligadura débilmente confluentes tiene la propiedad el punto fijo.

Notemos, además, que una función débilmente confluente de $\mathbb{P}^2$ a $\mathbb{P}^2$ no necesariamente es esencial. Sean $r : \mathbb{P}^2 \to D$ una retracción sobre el disco, $\eta : D \to \mathbb{S}^2$ la función que manda la frontera de D a un punto y $p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{P}^2$ la proyección cubriente. Ahora bien, una consecuencia directa de la definición de función débilmente confluente dada en [N1] es que las retracciones lo son, η es monótona, y p es una función abierta, de ahí, $p \circ \eta \circ r : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ es débilmente confluente. Pero como η y r son inesenciales, lo es $p \circ \eta \circ r$.

Similarmente, tenemos que las funciones debilmente confluentes de espacios proyectivos de dimensiones "altas" tampoco son esenciales.

Finalmente, consideraremos la generalización del Teorema 4.13 para límites inversos de espacios ANR y sus espacios cubrientes.

Sea $X = \varprojlim \{X_n, f_n^{n+1}\}$, donde toda X_n es un ANR y toda f_n^{n+1} es una función suprayectiva. Para toda $n \geq 1$, sea $\widetilde{X}_n$ un espacio cubriente universal de X_n con funciones cubrientes p_n. También fijemos x_0 en $\widetilde{X}_n$ para toda $n \geq 1$, sea g_n^{n+1} el levantamiento de $f_n^{n+1} \circ p_{n+1}$ y sea $Y = \varprojlim \left\{\widetilde{X}_n, g_n^{n+1}\right\}$.

Tenemos una sucesión inversa y los cuadrados conmutativos siguientes:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\widetilde{X}_1 & \xleftarrow{g_1^2} & \widetilde{X}_2 & \xleftarrow{g_2^3} & \cdots & \xleftarrow{g_{n-1}^n} & \widetilde{X}_n & \xleftarrow{g_n^{n+1}} & \widetilde{X}_{n+1} & \xleftarrow{g_{n+1}^{n+2}} & \cdots Y \\
\downarrow p_1 & & \downarrow p_2 & & & & \downarrow p_n & & \downarrow p_{n+1} & & \downarrow p \\
X_1 & \xleftarrow{f_1^2} & X_2 & \xleftarrow{f_2^3} & \cdots & \xleftarrow{f_{n-1}^n} & X_n & \xleftarrow{f_n^{n+1}} & X_{n+1} & \xleftarrow{f_{n+1}^{n+2}} & \cdots X
\end{array}$$

Finalmente supongamos que para toda $u \geq n \geq 1$, $g_n^u : \widetilde{X}_u \to \widetilde{X}_n$ es productora de coincidencias en cubrientes con respecto a X_u, p_u y X_n, p_n.

Como en la prueba del Teorema 4.13, se muestra, del Corolario 4.7, que toda f_n^u es productora de coincidencias y entonces, por Holsztyński [H1], X tiene la propiedad del punto fijo. Del diagrama anterior del límite inverso, podemos inducir una función $p : Y \to X$ definida por $f_n \circ p(y) = p_n \circ g_n(y)$ para toda $n \geq 1$, donde $g_n : Y \to \widetilde{X}_n$ y $f_n : X \to X_n$ son las proyecciones naturales del límite inverso. Obtenemos el resultado fuerte de que la función inducida p es productora de coincidencias.

4.14. Teorema. *La función inducida $p : Y \to X$, definida anteriormente, es productora de coincidencias.*

Demostración. Los métodos son similares a los usados por Holsztyński en sus artículos (digamos [H1, H2]) de funciones universales. Si $\pi_i : \prod_{n=1}^{\infty} \widetilde{X}_n \to \widetilde{X}_i$ es la i-ésima proyección y fijamos $a \in \prod_{n=1}^{\infty} \widetilde{X}_n$. Denotamos por $\alpha_n : \widetilde{X}_n \to \prod_{i=1}^{\infty} \widetilde{X}_i$ el encaje donde:

$$\pi_i \alpha_n(y) = \begin{cases} g_i^n(y) \text{ para } i \leqslant n \\ \pi_i(a) \text{ para } i > n \end{cases}$$

Primero mostraremos que $f_n \circ p : Y \to X_n$ es productora de coincidencias para toda $n \geq 1$. Para ver esto, fijamos $n \geq 1$ y sea $h : Y \to X_n$ una función, entonces por [Teorema 4.1, pág. 87, Bo] existe una vecindad U de $\prod_{i=1}^{\infty} \widetilde{X}_i$ y una función $h' : U \to X_n$ que es una extensión de h (como X_n es un ANR). Para alguna $m \geq 1$, si $u \geq m$, entonces $\alpha_u(\widetilde{X}_u) \subseteq U$.

Ahora para $u \geq n$, tenemos que $g_n^u : \widetilde{X}_u \to \widetilde{X}_n$ es productora de coincidencias en cubrientes. Por el Teorema 4.6, $f_n^u \circ p_u : \widetilde{X}_u \to X_n$ es productor de coin- cidencias, como α_u es un encaje, se muestra que $f_n^u \circ p_u \circ \alpha_u^{-1}$:

$\alpha_u(\widetilde{X}_u) \to X_n$ es productora de coincidencias para toda $u \geq n$. Entonces, al fijar un número u mayor o igual a m y a n, existe un punto $y_u \in \widetilde{X}_u$ tal que $f_n^u \circ p_u(y_u) = h' \circ \alpha_u(y_u)$. Sea $\{\alpha_{u_i}(y_{u_i})\}_{i\geq 1}$ una subsucesión de $\{\alpha_u(y_u)\}$ que converge al punto $y \in Y$. Tomemos puntos $z_i \in Y$ tales que $g_{u_i}(z_i) = y_{u_i}$. Notemos que $\{h'(\alpha_{u_i}(y_{u_i}))\}_{i\geq 1}$ converge a $h'(y)$ y que $\{z_i\}_{i\geq 1}$ converge a y. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
h(y) = h'(y) &= \text{lím}_{i\to\infty} h' \circ \alpha_{u_i}(y_{u_i}) \\
&= \text{lím}_{i\to\infty} f_n^{u_i} \circ p_{u_i}(y_{u_i}) \\
&= \text{lím}_{i\to\infty} f_n^{u_i} \circ p_{u_i}(g_{u_i}(z_i)) \\
&= \text{lím}_{i\to\infty} f_n^{u_i} \circ f_{u_i} \circ p(z_i) \\
&= \text{lím}_{i\to\infty} f_n \circ p(z_i) \\
&= f_n \circ p(\text{lím}_{i\to\infty} z_i) \\
&= f_n \circ p(y).
\end{aligned}$$

De aquí, $f_n \circ p$ tiene coincidencias con h y hemos probado que $f_n \circ p$ es productora de coincidencias.

Ahora, por el Lema 4.2, tenemos que $p : Y \to X$ es productora de coincidencias, por lo tanto el límite inverso X tiene la propiedad del punto fijo. $\square$

Capítulo 5

CONTINUOS TIPO POLIEDRO

El espacio proyectivo real $\mathbb{P}^n$ admite una función sin puntos fijos si n es un entero impar. Por otro lado, si n es par entonces $\mathbb{P}^n$ tiene la propiedad del punto fijo [Corolario 2, pág. 31, B]. Supongamos que L es el límite inverso de espacios $\mathbb{P}^n$ con n par y fijo, M. Marsh [Teorema 5, MM] (4.13 en este trabajo) probó que L tiene la propiedad del punto fijo si las funciones de ligadura son esenciales, estas funciones son suprayectivas. Mostraremos que el teorema de Marsh no se puede extender a todos los espacios que son límites inversos de espacios proyectivos reales de dimensión par y con funciones de ligadura suprayectivas.

S. Mardešić y J. Segal [Teorema 1, Mar] probaron que un continuo M es tipo $\wp$ si y sólo si M es un límite inverso de elementos de $\wp$ con funciones de ligadura suprayectivas. Pedir funciones de ligadura suprayectivas es una condición necesaria [pág. 147, Mar]. Algunas veces reemplazaremos a $\wp$ con palabras u otros símbolos que describan la clase, por ejemplo: si $\wp$ es la clase de todos los árboles, entonces un continuo tipo $\wp$ es tipo árbol, si existe un único poliedro P en $\wp$, entonces un continuo tipo $\wp$ es un continuo tipo P.

Para todo entero positivo n, K. Kuratowski [Ku1] probó que la n-celda no es tipo n-esfera. M. K. Fort [F] y T. Ganea [G] probaron que el disco no es tipo toro. De hecho Ganea [Teorema 5.1, G] mostró que el disco no es tipo 2-variedad para ninguna 2-variedad compacta.

D. P. Bellamy [B] en 1979 definió un continuo tipo árbol que admite una función sin puntos fijos. De manera similar a Bellamy se construyeron otros continuos tipo árbol sin la propiedad del punto fijo, por L. G. Oversteegen y J. T. Rogers [O1] y [O2] y por P. Minc [Mi1], [Mi2], [Mi3] y [Mi4]. Minc [Mi1] definió un continuo tipo árbol que admite funciones arbitrariamente cercanas a la identidad sin puntos fijos. Aún más, Minc [Mi2] definió un continuo tipo árbol que admite un homeomorfismo sin un punto periódico.

Sea P un poliedro de dimensión mayor que 1. Probaremos que todo continuo tipo árbol es tipo P. De lo anterior se sigue que para todo poliedro P, de dimensión mayor que 1, existe un continuo tipo P el cual no tiene la propiedad del punto fijo. En consecuencia para toda n, existe un continuo tipo $\mathbb{P}^n$ sin la propiedad del punto fijo.

Sea $\mathbb{CP}^n$ el espacio proyectivo complejo de dimensión n. Sea n par y X es un continuo tipo $\mathbb{CP}^n$. Segal y Watanabe [6.10 y 6.11, SW] probaron que X

tiene la propiedad del punto fijo, si X es *fijo* o tiene la *forma* de $\mathbb{CP}^n$. Después de estos resultados, ellos redujeron a sólo una clase a estudiar, nombrando la clase de los continuos con forma trivial [Wa] y [KS]. Segal y Watanabe [6.12, SW] preguntaron si todo continuo tipo $\mathbb{CP}^n$, con n par, tiene la propiedad del punto fijo. Damos una respuesta negativa a esta pregunta. Además, se demuestra, de un teorema de Segal [Teorema 1, S], que para todo poliedro P, de dimensión mayor que 1, existe un continuo indescomponible tipo P.

Todos los poliedros (véase el apéndice) son finitos y conexos. Un árbol es una gráfica finita que no contiene curvas cerradas simples. Los continuos sin la propiedad del punto fijo definidos en [B], [OR1], [OR2], [Mi1], [Mi2] y [Mi3] son indescomponibles.

5.1. Teorema. *Sean M un continuo tipo árbol y P un poliedro de dimensión n, mayor que 1, entonces M es tipo P.*

Demostración: Sean ϵ un entero positivo y f una *ϵ-función* de M sobre un árbol T, A denotará el conjunto de puntos de orden 2 en T, B denotará el conjunto de puntos de ramificación de T. Sea C un subconjunto finito de puntos de A, tal que toda componente de $T \setminus B$ contiene al menos un punto de C.

Para toda componente D de $T \setminus C$, $\Gamma(D)$ denotará la cerradura de la unión de D y todas las componentes de $T \setminus C$ que comparten un punto final con D, por el Lema 1.11 supondremos, sin pérdida de generalidad, que $f^{-1}(\Gamma(D))$ tiene diámetro menor que ϵ para toda componente D de $T \setminus C$.

Sea o un punto extremo de T, $\prec$ denotará el orden parcial en T, tal que,

$p \prec q$ si p separa a o de q en T. Sea E el subespacio de P que es homeomorfo al espacio euclidiano de dimensión n, supongamos sin pérdida de generalidad, que T es un árbol poligonal en E.

Denotaremos la frontera y el interior de un subconjunto dado Z de P por $Fr(Z)$ e $Int(Z)$.

Para todo punto p de C, definamos una *n-celda* $F(p)$ en E tal que:

(1) $T \cap Fr(F(p)) = \{p\}$;

(2) $T \cap Int(F(p)) = \{q \in T : p \prec q\}$;

(3) Si $q \in C$ y $p \prec q$, entonces $F(q) \subset int(F(p))$

y

(4) Si $q \in C, p \not\prec q$ y $q \not\prec p$, entonces $F(p) \cap F(q) = \phi$.

Sea H la cerradura de una componente de $T \setminus C$, notemos que H es un arco o un árbol con un punto de ramificación, definiremos una función especial g_H de H en P, para esto, consideremos tres casos:

Caso 1: Supongamos que $o \in H$, entonces H es un arco. Sea p el punto extremo de H que está en C, por el teorema de Hahn-Mazurkiewicz-Sierpiński[1], podemos definir $g_H : H \to P \setminus Int(F(p))$ tal que $g_H(p) = p$.

[1]Una demostración de dicho teorema está en [Teorema 2, pág. 256, Ku1].

Caso 2: Supongamos que todo punto extremo de H está en C. Sea p el punto extremo de H que precede (con respecto a $\prec$) a todos los otros puntos extremos $q_1, q_2, ..., q_m$ de H, nuevamente por el teorema de Hahn-Mazurkiewicz-Sierpiński, definimos $g_H : H \to F(p) \setminus \bigcup_{i=1}^{m} Int(F(q_i))$ tal que g_H deja todo punto final de H fijo.

Caso 3: Supongamos que H tiene un punto extremo de T distinto de o, entonces H es un arco con un sólo punto extremo $p \in C$. Nuevamente existe $g_H : H \to F(p)$ tal que $g_H(p) = p$.

Sea g la función de T sobre P definida por $g(r) = g_H(r)$, si $r \in H$ la composición $g \circ f$ es una $\epsilon - función$ de M sobre P, por lo tanto M es tipo P. □

5.2. Corolario. *Todo continuo tipo árbol es tipo disco.*

La prueba es inmediata por lo que la omitimos.

5.3. Teorema. *Para todo poliedro P de dimensión mayor que 1, existe un continuo tipo P que no tiene la propiedad del punto fijo.*

Demostración: Por el Teorema 5.1, los continuos tipo árbol sin la propiedad del punto fijo definidos por Bellamy [B], Oversteegen y Rogers [O1] y [O2] y Minc [Mi1], [Mi2], [Mi3] y [Mi4] son tipo P. □

Aplicando el Teorema 5.1 a los ejemplos de Minc [Mi1] y [Mi2], tenemos el siguiente teorema:

5.4. Teorema. *Para todo poliedro P de dimensión mayor que 1, existe un* *continuo tipo P que admite funciones sin puntos fijos con trayectorias arbitrariamente pequeñas y existe un continuo tipo P que admite un homeomorfismo sin un punto periódico.*

Sea Π la clase de poliedros con la propiedad del punto fijo, ¿qué condiciones adicionales aseguran que todo continuo tipo Π tiene la propiedad del punto fijo? O. H. Hamilton [Ham] probó que todo continuo tipo arco tiene la propiedad del punto fijo. No se sabe si todo continuo tipo triodo tiene la propiedad del punto fijo, de acuerdo con el Teorema 5.4, es necesario que los elementos de Π sean de dimensión uno.

Por lo que las funciones de ligadura esenciales en el teorema del punto fijo de M. Marsh [Teorema 5, MM] (4.13 en este trabajo) no se pueden reemplazar con funciones suprayectivas arbitrarias y, la respuesta a la pregunta de Segal y Watanabe [6.12, SW] es no. Finalmente, tenemos el siguiente Corolario que es inmediato de los resultados anteriores, por lo que omitimos su demostración.

5.5. Corolario. *Para todo entero n mayor que 1, existen continuos tipo $\mathbb{P}^n$ y tipo $\mathbb{CP}^n$ que no tienen la propiedad del punto fijo.*

Apéndice A

EL GRADO DE UNA FUNCIÓN

Consideremos $\mathbb{R}^{n+1}$ el espacio euclidiano de dimensión $n+1$, con un sistema fijo de coordenadas,

A.1. Definición. *Diremos que un conjunto de puntos $\{p_0, \ldots, p_k\}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$, **está en posición general** si el conjunto $\{p_1 - p_0, \ldots, p_k - p_0\}$ es linealmente independiente.*

A.2. Definición. *Sea $\{p_0, \ldots, p_{n+1}\}$ un conjunto de $n+2$ puntos en $\mathbb{R}^{n+1}$ y σ su casco convexo (lo denotaremos como $\sigma = (p_0, \ldots, p_{n+1})$). Diremos que σ está **generado** por $\{p_0, \ldots, p_{n+1}\}$ y que $\{p_0, \ldots, p_{n+1}\}$ es el conjunto de los **vértices** de σ. Por otro lado, si $\{p_0, \ldots, p_{n+1}\}$ está en posición general, a σ lo llamaremos un $(n+1)$-**simplejo geométrico** y, si $\{p_0, \ldots, p_{n+1}\}$ no está en posición general, diremos que σ es **degenerado**.*

A.3. Definición. *Sea σ un simplejo geométrico. Llamaremos* ***cara** de σ* *a todo simplejo generado por un subconjunto no vacío de sus vértices. Las caras que no sean iguales a σ las llamaremos* ***caras propias**.*

A.4. Definición. *Diremos que dos $(n+1)$-simplejos están* ***traslapados*** *si la intersección de ambos es distinta del vacío y distinta de cualquier cara de ellos.*

Una condición necesaria y suficiente para que los simplejos sean no degenerados es: si $\left(x_i^1, \ldots, x_i^{n+1}\right)$ son las coordenadas de p_i, entonces:

$$\det(p_0, \ldots, p_{n+1}) = \begin{vmatrix} x_0^1 \ \ldots \ x_0^{n+1} \ 1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n+1}^1 \ldots x_{n+1}^{n+1} 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

A.5. Definición. *Un $(n+1)$-**simplejo ordenado** es un $(n+1)$-simplejo, junto con un orden total de sus vértices; el simplejo $\sigma = (p_0, ..., p_{n+1})$ con el orden $p_0 < \cdots < p_{n+1}$ se escribirá $[\sigma] = [p_0, ..., p_{n+1}]$.*

El signo del simplejo ordenado $[p_0, ..., p_{n+1}]$ es igual al de $\det(p_0, \ldots, p_{n+1})$, un simplejo degenerado ordenado no tiene signo y, por las propiedades de los determinantes, una permutación par de los vértices del simplejo ordenado $[\sigma]$ no cambia el signo del simplejo.

A.6. Lema. *Sean $[\sigma] = [p_0, p_1, ..., p_{n+1}]$ y $[\sigma'] = [p_0', p_1, ..., p_{n+1}]$ dos $(n+1)$-simplejos no degenerados ordenados, que tienen la cara común $(p_1, ..., p_{n+1})$, si L es el n-hiperplano que contiene esta cara, entonces p_0 y p_0' están en el mismo lado de L (es decir el segmento de recta que los une no intersecta a L) si y sólo si $[\sigma]$ y $[\sigma']$ tienen el mismo signo.*

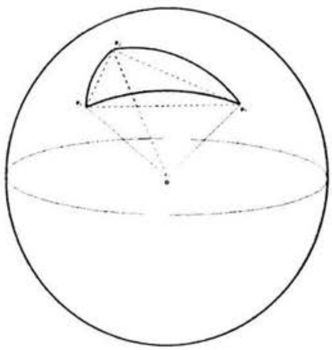
Demostración: Como $\lambda p_0 + (1-\lambda)p_0'$, con $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ es el segmento de recta que une a p_0 con p_0', sólamente necesitamos recordar que:

$$\det\left[\lambda p_0 + (1-\lambda)\, p_0', p_1, \ldots, p_{n+1}\right] = \lambda \det[\sigma] + (1-\lambda)\det[\sigma'],$$

entonces los valores están en el intervalo $[\det[\sigma], \det[\sigma']]$ que es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y $\det(q, p_1, ..., p_{n+1}) = 0$ si y sólo si $q \in L$. $\square$

A.7. Definición. *Sea $A = \{p_1, ..., p_n\}$ donde $p_i \in \mathbb{S}^n$, si el casco convexo de A no contiene al centro O de $\mathbb{S}^n$, diremos que el* ***diámetro de A es menor que uno*** *y lo escribiremos así:* $\text{diám}(A) < 1$.

A.8. Definición. *Sea A un subconjunto de n puntos de $\mathbb{S}^n$ con* $\text{diám}(A) < 1$*; tomemos la proyección del casco convexo de A en $\mathbb{S}^n$ (en la figura siguiente se muestra el proceso para $\mathbb{S}^3$), la llamamos σ y diremos que σ es un* ***n-simplejo esférico.***



A.9. Definición. *Diremos que el simplejo esférico es* ***degenerado****, si el casco convexo de sus vértices y el centro O de $\mathbb{S}^n$ es un n-simplejo degenerado.*

A.10. Definición. *El **signo** del simplejo esférico σ, es el signo del siguiente determinante:*

$$\det(p_1, \ldots, p_n, O) = \begin{vmatrix} x_1^1 \ldots x_1^{n+1} 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^1 \ldots x_n^{n+1} 1 \\ 0 \ldots\ldots 0 \; 1 \end{vmatrix}$$

A.11. Definición. *Por una **triangulación de** $\mathbb{S}^n$, entenderemos una descomposición de $\mathbb{S}^n$ en n-simplejos esféricos no degenerados y no traslapados, tales que toda $(n-1)$-cara de un n-simplejo es la cara común de exactamente dos n-simplejos.*

A.12. Definición. *Sean $\mathbb{S}^n$ y Σ^n dos n-esferas y T una triangulación de $\mathbb{S}^n$, una **función vértice propia** $\varphi : T \to \Sigma^n$ es una función definida sólo en los vértices de T que cumple que: Si $p_0, \ldots, p_n$ son vértices de un simplejo esférico de T entonces el conjunto $\{\varphi(p_0), .., \varphi(p_n)\} \subset \Sigma^n$ tiene diámetro menor que 1.*

Una consecuencia inmediata de la Definición A.12 es que a todo simplejo $\sigma \in T$ le corresponde un único simplejo $\varphi(\sigma)$ contenido en Σ^n. Por lo tanto, al simplejo esférico ordenado[1] $[\sigma] = [p_0, \ldots, p_n]$, le corresponde el n-simplejo esférico ordenado $\varphi([\sigma]) = [\varphi(p_0), \ldots, \varphi(p_n)]$ en Σ^n.

Notemos que el orden de $[\sigma]$ determina el de $\varphi([\sigma])$, es claro que, en general, el signo de $[\sigma]$ es distinto del de $\varphi([\sigma])$.

[1]El orden en los simplejos esféricos lo definimos de manera análoga a los simplejos euclidianos.

La familia de conjuntos $\{\varphi(\sigma) \mid \sigma \in T\}$ no necesariamente forma una triangulación de Σ^n puesto que pudiera tener simplejos traslapados o degenerados, sin embargo, esta familia tiene la siguiente propiedad fundamental:

Notación: *Sea T una triangulación de $\mathbb{S}^n$ y $\varphi : T \to \Sigma^n$ una función vértice propia. Si ordenamos a todo n-simplejo de T positivamente y si ξ es cualquier punto de Σ^n que no está en la frontera de ninguna $\varphi(\sigma)$ entonces $P(\xi, T, \varphi)$ denota el número de simplejos $\varphi(\sigma)$ con signo positivo que tienen a ξ y $n(\xi, T, \varphi)$ el número de simplejos $\varphi(\sigma)$ con signo negativo que tienen a ξ.*

A.13. Lema. *Sean T una triangulación de $\mathbb{S}^n$ y $\varphi : T \to \Sigma^n$ una función vértice propia. Si ordenamos a todo n-simplejo de T positivamente y si ξ es cualquier punto que no está en la frontera de ningún $\varphi(\sigma)$. Entonces: $D(\xi, T, \varphi) = P(\xi, T, \varphi) - n(\xi, T, \varphi)$ es el mismo para toda $\xi \in \Sigma^n$ que no está en la frontera de ningún $\varphi(\sigma)$.*

Demostración: Consideremos dos casos:

(a) Primer caso: Ninguna $\varphi(\sigma)$ es degenerada.

Sea $\zeta \in \Sigma^n$ cualquier otro punto que no esté en la frontera de ningún $\varphi(\sigma)$.

Unamos ξ con ζ con una curva γ en Σ^n que no pase por ninguna cara de dimensión menor que $(n-1)$ de cualquier $\varphi(\sigma)$[2]. Observemos que toda

[2]Esto se puede hacer pues $\mathbf{S}^n$ es una variedad de Cantor y no se puede separar por un conjunto de dimensión menor o igual a $(n-2)$. [N3, 10.8].

$(n-1)$-cara de T, es la cara común de exactamente 2 n-simplejos $\sigma = (p_0, \ldots, p_n)$ y $\sigma' = (p'_0, \ldots, p_n)$ en T.

Ahora, si ς es un punto que se mueve hacia ζ a lo largo de la curva γ, claramente $D(\varsigma, T, \varphi)$ sufre cambios sólo cuando ς cruza una $(n-1)$-cara de algún $\varphi(\sigma)$ y dicho cambio depende de la posición de $\varphi(p_0)$ y $\varphi(p'_0)$ relativa a L (donde L es el hiperplano generado por el centro de Σ^n y la cara común $(\varphi(p_1), \ldots, \varphi(p_n))$), para la posición relativa de dichos puntos tanto tenemos dos casos:

i) $\varphi(p_0)$ y $\varphi(p'_0)$ están del mismo lado de L.

Entonces, al entrar o salir de $\varphi(\sigma)$ y $\varphi(\sigma')$ cruza por L. De acuerdo con el Lema A.6, $\varphi([\sigma])$ y $\varphi([\sigma'])$ tendrían el mismo signo, pero, como el signo de toda $\varphi([\sigma])$ depende de usar simplejos positivos de T, se sigue en este caso que tienen signos opuestos, entonces ς al cruzar la cara común, sale (o entra) de un simplejo positivo y uno negativo, por lo que $D(\varsigma, T, \varphi)$ permanece constante.

ii) $\varphi(p_0)$ y $\varphi(p'_0)$ están en lados opuestos de L.

Ahora ς sale (digamos) de $\varphi(\sigma)$ y entra en $\varphi(\sigma')$, razonando como en *i)* vemos que ς cambia un simplejo de un signo, por otro del mismo signo, luego entonces, $D(\varsigma, T, \varphi)$ no cambia, por lo tanto, también en este caso, $D(\varsigma, T, \varphi) = D(\zeta, T, \varphi)$.

(b) Segundo caso: Existe una $\varphi(\sigma)$ degenerada.

Fijemos ς y ζ. Sean $T' = \{\varsigma, \zeta\} \cup \{\varphi(p) \mid p$ es un vértice de T y $p \notin \sigma\}$ y $A = \{d(\varphi(\sigma), q) \mid q \in T'\}$, diremos que ϵ es el mínimo del conjunto A, el cual existe pues dicho conjunto de reales tiene un número finito de elementos.

Supongamos que el conjunto de vértices de σ es $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ de donde $\varphi(\sigma)$ tiene como vértices a $\{\varphi(p_0), \varphi(p_1), \dots, \varphi(p_n)\}$ y, como $\varphi(\sigma)$ es degenerado, $\varphi(\sigma)$ es un k-simplejo ($k \leqslant n-1$), por lo tanto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\varphi(\sigma)$ es el casco convexo (en Σ^n) de $\{\varphi(p_0), \varphi(p_1), \dots, \varphi(p_{k-1})\}$.

Ahora bien, como $(\Sigma^n \setminus \varphi(\sigma)) \cap B_\epsilon^{n+1}(\varphi(p_k)) \neq \emptyset$ pues $B_\epsilon^{n+1}(\varphi(p_k)) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x - \varphi(p_k)\| < \epsilon\}$ y $\varphi(\sigma)$ tiene dimensión $k \leqslant n-1$, podemos tomar un punto $q_k \in (\Sigma^n \setminus \varphi(\sigma)) \cap B_\epsilon^{n+1}(\varphi(p_k))$ y, por la elección de p_k, el casco convexo (en Σ^n) del conjunto $\{\varphi(p_0), \varphi(p_1), \dots, \varphi(p_{k-1}), q_k\}$ es un $k+1$ simplejo esférico.

Notemos que, dado el conjunto $\{\varphi(p_0), \varphi(p_1), \dots, \varphi(p_{k-1}), q_k\}$ de manera similar a la que encontramos q_k, podemos encontrar un punto q_{k+1}, de forma que el casco convexo (en Σ^n) de $\{\varphi(p_0), \varphi(p_1), \dots, \varphi(p_{k-1}), q_k, q_{k+1}\}$ es un $k+2$ simplejo esférico y, procediendo análogamente obtenemos el conjunto: $\{\varphi(p_0), \varphi(p_1), \dots, \varphi(p_{k-1}), q_k, q_{k+1}, \dots, q_n\}$ del cual, su casco convexo (en Σ^n) es un simplejo esférico no degenerado.

Definamos, ahora la función vértice propia $\varphi' : T \to \Sigma^n$:

$$\varphi'(p_i) = \begin{cases} \varphi(p_i) \text{ si } 0 \leqslant i \leqslant k-1 \\ q_k \text{ si } k \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

Notemos que, dada la definición de φ' esa función vértice propia cumple:

(1) $\varphi'(\sigma)$ no es degenerada y $|\varphi(p) - \varphi'(p)| < \epsilon$ para todo vértice $p \in T$.

(2) Siempre que $\varphi(\sigma)$ es no degenerado, $\varphi([\sigma])$ y $\varphi'([\sigma])$ tienen el mismo signo.

(3) ς, (respectivamente ζ) está en el interior de $\varphi'(\sigma)$ si y sólo si está en el interior de $\varphi(\sigma)$.

Usando el caso (a) para φ', tenemos $D(\varsigma, T, \varphi) = D(\varsigma, T, \varphi') = D(\zeta, T, \varphi')$ $= D(\zeta, T, \varphi)$. $\square$

Una consecuencia inmediata de los resultados anteriores es el siguiente lema, del cual omitimos su demostración.

A.14. Lema. *Dados T, φ y ζ como en el Lema A.13, existe $\epsilon > 0$ tal que si cualquier función vértice propia $\varphi' : T \to \Sigma^n$ satisface $|\varphi(p) - \varphi'(p)| < \epsilon$ para todo vértice p, entonces $D(\zeta, T, \varphi') = D(\zeta, T, \varphi)$.*

De ahora en adelante $D(\zeta, T, \varphi)$ se denotará simplemente como $D(T, \varphi)$.

El siguiente resultado tiene el siguiente objetivo : Dada $f : \mathbb{S}^n \to \Sigma^n$ una función continua, como $\mathbb{S}^n$ es compacta, podemos encontrar una triangulación T de $\mathbb{S}^n$ tal que diám$(f(\sigma)) < 1$ para toda $\sigma \in T$ remplazando f por la función vértice propia $\varphi_f : T \to \Sigma^n$ dada por $\varphi_f(p) = f(p)$ para todo vértice $p \in T$. Tenemos el siguiente lema:

A.15. Lema. *El número $D(T, \varphi_f)$ es independiente de la triangulación T de $\mathbb{S}^n$.*

Demostración. Primeramente, demostraremos que $D(T, \varphi_f)$ no cambia si añadimos un número finito de vértices a la triangulación T con vértices $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Esto se muestra de manera inductiva. Introduzcamos un nuevo vértice, digamos p_{k+1}, a la triangulación T, como T es una triangulación, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que p_{k+1} está en el interior de algún n-simplejo esférico σ de T; por otro lado, como $\text{diám}(f(\sigma)) < 1$, para toda $\sigma \in T$, podemos encontrar un punto $\zeta \in \Sigma^n$ en el interior de una $\varphi(\sigma')$ para el cual $D(\zeta, T, \varphi_f)$ no se alteró, es decir: si η es un n-simplejo esférico que se añadió (al introducir el punto p_{k+1} en T) a los que tenía T originalmente, entonces $\zeta \notin \varphi(\eta)$. Notemos que el valor de $D(T, \varphi_f, \zeta)$ permanece constante y, claramente es el mismo que $D(T, \varphi_f)$. Del Lema A.9, como el número $D(T, \varphi_f)$ es el mismo en cualquier punto, por lo tanto, al añadir un solo punto a la triangulación, $D(T, \varphi_f)$ se altera.

De manera análoga, podemos afirmar que si introducimos un número finito de puntos a T, el número $D(T, \varphi_f)$ permanecerá constante, lo que nos trae en consecuencia que si T y T' son dos triangulaciones de $\mathbb{S}^n$ entonces tienen una triangulación T'' en común y se cumple que $D(T, \varphi_f) = D(T', \varphi'_f) = D(T'', \varphi)$, lo cual completa la demostración del lema. $\square$

A.16. Definición. *El valor $D(T, \varphi_f)$ lo llamaremos el* ***grado*** *de f y se escribirá $D(f)$.*

A.17. Lema. *Sea $n \geq 0$, si f y $g : \mathbb{S}^n \to \Sigma^n$ son homotópicas, entonces $D(f) = D(g)$.*

Demostración: Si $n = 0$, es trivial, supongamos, entonces, $n \geq 1$.

Definamos una homotopía $\phi : \mathbb{S}^n \times I \to \Sigma^n$ de forma que $\phi(x, 0) =$

$f(x)$ y $\phi(x,1) = g(x)$. Como $\mathbb{S}^n \times I$ es compacto, ϕ es uniformemente continua, por lo tanto, dado el número 1 existe $\delta > 0$ tal que si $d(x,x') < \delta$ entonces $|\phi(x,t) - \phi(x',t)| < 1$ para toda $t \in I$, en consecuencia, existe una triangulación T de $\mathbb{S}^n$ que cumple $diám(f_t(\sigma)) < 1$ para toda $\sigma \in T$ y $t \in I$.

Ahora trabajaremos con T, dado t_0 y, fijando cualquier $\zeta \in \Sigma^n$ el Lema A.14 nos garantiza que existe una $\epsilon > 0$ para la cual, si $|\varphi(p) - \varphi'(p)| < \epsilon$ entonces $D(\zeta, T, \varphi_{f_{t_0}})$ permanece constante.

Por continuidad uniforme, tenemos que existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $|t - t_0| < \delta$ implica $|\phi(x,t) - \phi(x,t_0)| < \epsilon$ para toda $x \in \mathbb{S}^n$, por lo que tenemos $D(f_t) = D(f_{t_0})$. Si $|t - t_0| < \delta$ diremos que la función $D(\phi(x,t))$ con valores en los enteros es continua para toda $t_0 \in I$ y, por lo tanto $D(\phi(x,t))$ es constante en I. □

Ahora, daremos algunas definiciones que nos serán de utilidad en el Capítulo 5.

A.18. Definición. *Diremos que una colección $\mathcal{K}$ de simplejos geométricos, es un* ***complejo simplicial****, si cumple las siguientes condiciones: 1) Si $\sigma \in \mathcal{K}$ entonces cualquier cara β de σ está también en $\mathcal{K}$. 2) La intersección de cualesquiera dos simplejos de $\mathcal{K}$ es vacía o una cara de ellos. 3) Para todo punto p en un simplejo de $\mathcal{K}$ existe un abierto U tal que $p \in U$ y U intersecta sólo a una cantidad finita de simplejos de $\mathcal{K}$.*

A.19. Definición. *Dado un complejo simplicial $\mathcal{K}$, la unión de todos los simplejos geométricos en $\mathcal{K}$ con la topología heredada de $\mathbb{R}^n$, es un espacio* *topológico llamado el* ***poliedro*** P *de* $\mathcal{K}$.

BIBLIOGRAFÍA

[A] P. S. Aleksandrov, *Combinatorial Topology*, Vol. 1 Graylock Press, Rochester, N. Y. (1956).

[B] R. F. Brown and H. Schirmer, *Nielsen Coincidence Theory and Coincidence Producing Maps for Manifolds with Boundary*, Topology & Its Applications 46(1992), 65-79.

[Bo] K. Borsuk, *Theory of retracts*, Monografie Mat., Tomo 44, PWN, Warsaw (1966).

[D] J. Dugundji, *Topology*, Allyn & Bacon, Inc. (1966).

[E] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag Berlin, (1989).

[F] M. F. Fort, *ϵ-mappirigs of a disc onto a torus*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 7 (1959), 51-54.

[G] T. Ganea, *On ϵ-maps onto manifolds*, Fund. Math. 47 (1959), 35-44.

[Ha] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[Ham] O. H. Hamilton, *A fixed point theorem for pseudo-arcs and certain other metric continua*, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 173-174.

[Ho1] W. Holsztyński, *Universal Mappings and Fixed Point Theorems*, Bull. Acad. Polon. Sci. 15 (1967), 433-438.

[Ho2] ______, *On the Composition and Products of Universal Mappings*, Fund. Math. 4 (1969), 181-188.

[I] W. T. Ingram, *Inverse Limits*, Sociedad Matemática Mexicana, 2000.

[Kr] J. Krasinkiewicz, *Continuous Images of Continua and 1-movability*, Fund. Math., 98 (1978), 141-164.

[KS] J. Krasinkiewicz and M. Smith, *Hereditarily indecomposable continua with trivial shape*, Fund. Math. 119 (1983), 133-134.

[Ku1] K. Kuratowski, *Sur les transformations des sphères en des surfaces sphèriques*, Fund. Math. 20 (1933), 206-213.

[Ku2] K. Kuratowski, *Topology*, Vol. 2, 3a. ed, Monografie Mat., Tomo 21, PWN, Warsaw (1961); Traducción al Ingles, Academic Press, N.Y. (1968).

[Lee] J. M. Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, Springer-verlag. 2000.

[Lew] W. Lewis, *Continuum Theory Problems*, Topology Proc. 8(1983), #2, Problem 32 (D.Bellamy), 369.

[Lo] O. W. Lokuciewski, *On a Theorem on Fixed Points*, Усп. Mat. Hayk 12 3(75)(1957), 171-172.

[Ma] S. Macías, *Notas de clase del curso de Límites Inversos.*

[Mar] S. Mardešic and J. Segal, *ϵ-mappings onto Polyhedra*, Trans. Amer. Math. Soc. 109(1963), 146-164.

[Mas] W. S. Massey, *Algebraic Topology An Introduction*, Springer-verlag, 1967.

[Mi1] P. Minc, *A Tree-like Continuum admitting Fixed Point Free Maps with Arbitrarily Small Trajectories*, Topology & Its Applications 46 (1992), 99-106.

[Mi2] ——, *A Periodic Point Free Homeomorphism of a Tree-like Continuum*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 1487-1519.

[Mi3] ——, *A Weakly Chainable Tree-like Continuum without the Fixed Point Property*, Trans. Amer. Math. Soc. 351 (1999), 1109-1121.

[Mi4] ——, *A Hereditarily Indecomposable Tree-like Continuum without the Fixed Point Property*, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), 643-654.

[MM] M. M. Marsh, *Covering Spaces, Inverse Limits, and Induced Coincidence Producing Mappings*, Houston Journal of Math. 29 (2003), 983-992.

[N1] S. B. Nadler, Jr; *Universal Mappings and Weakly Confluent Mappings*, Fund. Math. CX(1980), 221-235.

[N2] S. B. Nadler, Jr, *Continuum Theory An Introduction*, Marcel Dekker Inc. 1992.

[N3] S. B. Nadler, Jr, *Dimension Theory An Introduction with Exercises*, Sociedad Matemática Mexicana, 2002.

[O1] L.G. Oversteegen and J.T. Rogers, Jr, *An Inverse Limit Description of an Atriodic Tree-like Continuum and an Induced Map without a Fixed Point*, Houston J. Math. 6 (1980), 549-564.

[O2] ——, *Fixed Point Free Maps on Tree-like Continua*, Topology & Its Applications 13 (1982), 85-95.

[R] R.L. Russo, *Universal Continua*, Fund. Math. 105 (1979), #1, 41-60.

[S] J. Segal, *Mapping norms and indecomposability*, J. London Math. Soc. 39 (1964), 598-602.

[SW] J. Segal and T. Watanabe, *Cosmic Approximate Limits and Fixed Points*, Trans. Amer. Math. Soc. 333(1992), #1, 1-61.

[W] E.F. Whittlesey, *Fixed Points and Antipodal Points*, Amer. Math. Monthly 70 (1963), 807-821.

[Wa] T. Watanabe, *Shape classifications for complex projective space-like and wedges of n-spheres-like continua*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A 12 (1974), 233—245.