



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“Una aproximación a los materiales
con índice de refracción negativo:
materiales izquierdos”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

F Í S I C O

P R E S E N T A :

HUGO ABDIEL VIEYRA VILLEGAS

DIRECTOR DE TESIS
DR. DOROTEO MENDOZA LÓPEZ



2004



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA DE FÍSICA

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Hugo Abdiel Vieyra Villegas

FECHA: 7-Septiembre-2004

FIRMA: [Signature]

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Una aproximación a los materiales con índice de refracción negativo: materiales izquierdos"

realizado por Vieyra Villegas Hugo Abdiel

con número de cuenta 09950679-1 , quien cubrió los créditos de la carrera de:Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Dr. Doroteo Mendoza López

Propietario Dr. José Rufino Díaz Uribe

Propietario Dr. Wolf Luis Mochán Backal

Suplente Dr. Francisco Morales Leal

Suplente Dr. Angel Prieto Ruiz

Consejo Departamental de Física



DRA. PATRICIA GOLDSTEIN-MENACHE
Coordinadora de Licenciatura

Agradecimientos.

Quiero agradecer primero que nada, a la Facultad de Ciencias, U.N.A.M. por la maravillosa oportunidad para mi superación académica y personal, especialmente a mis profesores y amigos sin los cuales hubiera sido imposible concluir esta tarea.

Al Instituto de Investigaciones en Materiales, U.N.A.M., que desde hace más de dos años me ha dado todas las facilidades para la realización de este y otros proyectos de investigación.

A mi asesor el Dr. Doroteo Mendoza López, a quien le guardo un especial cariño y respeto, gracias por la confianza y el apoyo recibidos.

A mis sinodales: Dr. Díaz Uribe, Dr. Mochán Backal, Dr. Morales Leal y Dr. Prieto Ruiz, a quienes agradezco su tiempo, confianza y ayuda para la realización de este proyecto.

Al Programa de Becas para la Elaboración de Tesis de licenciatura en Proyectos de Investigación (PROBETEL), por el importante apoyo económico recibido.

Finalmente, a todos aquellos a quienes por falta de espacio he omitido en palabras: familia y amigos, pero que llevo siempre presentes en mi pensamiento, gracias a todos...

México, D. F., Septiembre de 2004.

*Con cariño para mi madre
y para todos aquellos que
confían en mi aún cuando
estén lejos.*

Índice.

	Pág.
Introducción.	3
1. Capítulo 1.	9
1.1 Ondas Electromagnéticas en Materiales Izquierdos.	9
1.1.1 Ondas Electromagnéticas Planas.	9
1.1.2 Polarización.	16
1.2 Reflexión y Refracción de Ondas Electromagnéticas.	20
1.2.1 Condiciones de Frontera.	20
1.2.2 Propiedades Cinemáticas.	21
1.2.3 Propiedades Dinámicas.	27
1.2.3a \mathbf{E}_0 perpendicular al plano de incidencia.	27
1.2.3b \mathbf{H}_0 perpendicular al plano de incidencia.	29
1.2.4 Reflectancia y Transmitancia.	33
1.2.5 Polarización por Reflexión.	
Angulo de Brewster.	35
1.2.6 Reflexión Total Interna.	38
1.2.7 Dispersión.	42
2. Capítulo 2.	50
2.1. Reflexión y Transmisión en Películas Delgadas.	50
2.2. Interferencia.	52
2.3 Principio de Fermat.	54
2.4 Coeficientes de Reflexión y Transmisión.	56
2.5 Lente de Material Izquierdo.	63
2.6 Dispersión.	67
2.7 Determinación de ϵ y μ .	72

3. Capítulo 3.	75
3.1 Una Aproximación a un Material Izquierdo.	75
3.2 Modelo PSS.	78
Conclusiones.	90
Perspectivas.	94
Referencias.	96

Introducción.

Aún cuando la discusión acerca de los llamados materiales izquierdos ha tenido un gran auge en los últimos años, fue hacia 1964 cuando se estudió por primera vez las propiedades de estos materiales. El físico ruso V. G. Veselago¹ estudió de forma teórica las características de una sustancia “hipotética” en la que simultáneamente la permitividad eléctrica ϵ y la permeabilidad magnética μ fuesen negativas. Esta sustancia tendría propiedades diferentes de aquellas en las que ϵ y μ son positivas, pero no violaría ningún principio físico fundamental. Como consecuencia del cambio simultáneo de signos, Veselago llega a resultados interesantes: fenómenos como el efecto Cerenkov y el Doppler son revertidos en materiales izquierdos y el índice de refracción tendría que ser negativo al igual que la velocidad de propagación de las ondas. Además predice que la refracción de una onda por un medio izquierdo se verá afectada de modo tal, que el haz se refractaría del lado opuesto que en los materiales ordinarios (Fig. II).

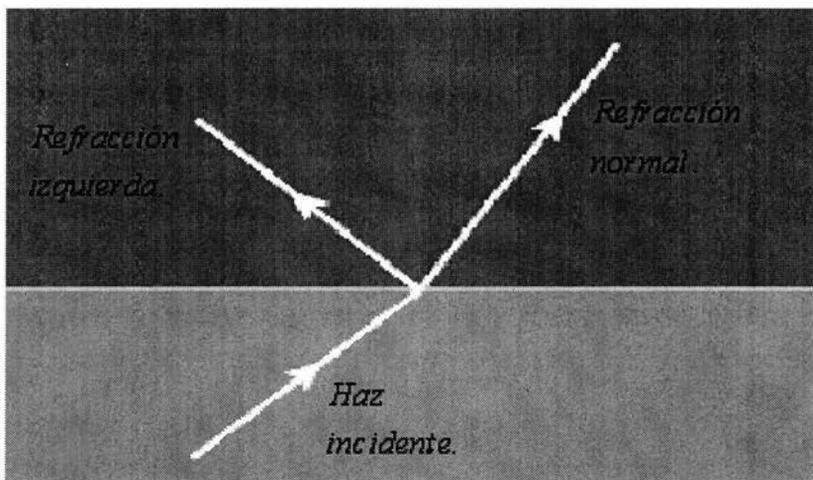


Fig. II. La refracción en un material izquierdo, como propone Veselago, es opuesta a la de los materiales ordinarios.

Este fenómeno de refracción anómala, fue quizás el de mayor interés para distintos investigadores en años posteriores. Entre ellos J. B. Pendry², retomó este resultado para proponer que los materiales izquierdos, en específico aquel en el que el índice de refracción fuese igual a -1 , podría permitir el desarrollo de nuevos sistemas como las lentes planas, en las que sería posible la transmisión sin pérdida y la formación de imágenes perfectas (Fig. I2). En ese mismo año (2000), aparece un trabajo³ en donde se demuestra que el índice de refracción en un medio con ϵ y μ negativas es también negativo, tal y como lo había sugerido Veselago.

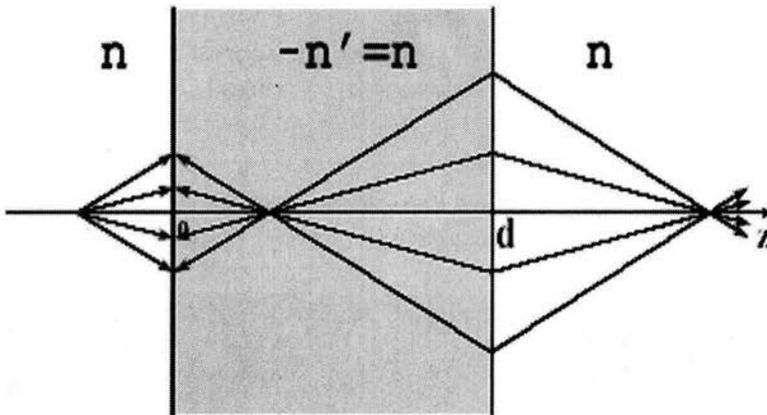


Fig. I2. El fenómeno de refracción izquierda puede conducir a nuevos sistemas ópticos como lentes planas.

Paralelamente, el grupo de trabajo de D.R. Smith⁴ se enfocó a la tarea de buscar un material compuesto (metamaterial) que tuviese las características descritas por Veselago. El resultado fue la creación de un arreglo periódico bidimensional de alambres y anillos resonantes de cobre el cual, para un rango de frecuencias cumple la condición de que ϵ y μ fuesen negativas (Fig. I3). La confirmación experimental de que este sistema tiene índice de refracción negativo⁵ para frecuencias del orden de 10 GHz, llegó a principios del año

2001. Posteriormente fue posible, primero mediante simulaciones y luego de manera experimental, comprobar el fenómeno de refracción anómala para este mismo sistema⁶⁻⁸.

Actualmente, los trabajos en el área de materiales izquierdos, se centran en el problema de la construcción experimental de materiales con permitividad eléctrica y permeabilidad magnética negativas. Dado que no existe ninguna sustancia que presente este comportamiento de manera natural, se ha tenido que recurrir a propuestas de materiales compuestos (como el ya mencionado de Smith), de tal forma que los parámetros efectivos del medio μ_{eff} y ϵ_{eff} sean simultáneamente negativos para algún rango de frecuencias. Para la mayoría de tales modelos teóricos, la respuesta de material izquierdo se predice para la región de las microondas, siendo aun muy pocas las propuestas para otras regiones del espectro como por ejemplo, el visible.

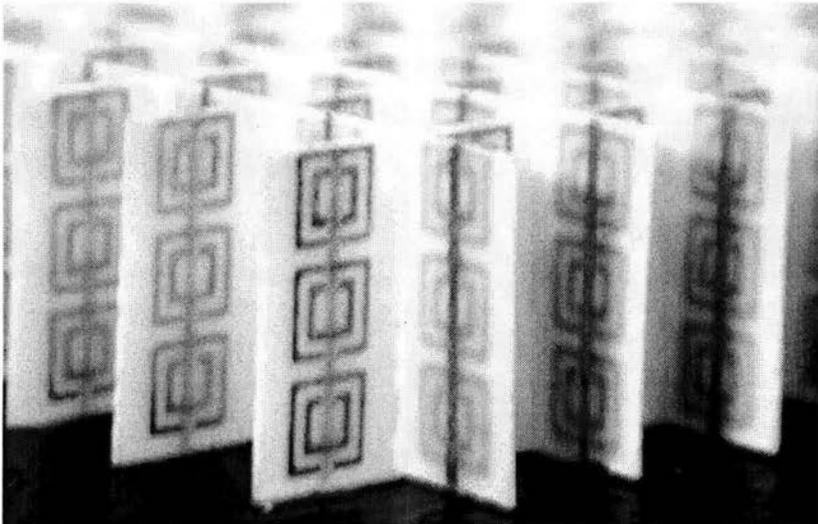


Fig. 13. Fotografía del metamaterial hecho por el grupo de Smith que ha demostrado ser un material con índice de refracción negativo para la región de microondas. Fuente: R. A. Shelby, D. R. Smith y S. Schultz, *Science*. **292**, 77, (2001).

Quizás la propuesta más viable a la fecha son los denominados cristales fotónicos^{9,10} (Fig. I4), los cuales son sistemas compuestos que esencialmente consisten en arreglos periódicos de materiales con distintas funciones dieléctricas, contrastantes entre sí, con el afán de que el índice de refracción efectivo sea positivo para alguna región del espectro electromagnético y negativo para alguna otra. Los cristales fotónicos según Notomi⁹, tendrían un comportamiento análogo al modelo de bandas electrónicas en semiconductores. En un semiconductor existe una banda de energía en la cuál la masa efectiva de los portadores de carga es negativa (banda de huecos), una banda prohibida y finalmente una banda de masa efectiva positiva (banda de electrones). En el caso de un cristal fotónico se tienen una banda de frecuencias para la que el índice de refracción efectivo es negativo (análoga a la banda de huecos en un semiconductor), una brecha prohibida y una banda de índice de refracción positivo.

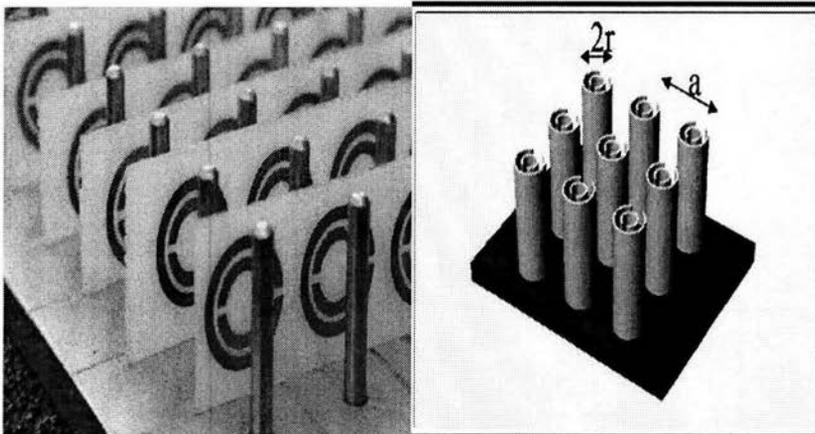


Fig. I4. Entre las propuestas para materiales izquierdos existen varios sistemas compuestos, por ejemplo los arreglos periódicos de anillos concéntricos y alambres conductores que combinados presentan parámetros ópticos efectivos menores que cero. Fuente: G. Brumfield. *Nature*. 428, 245, (2004).

Los materiales izquierdos han generado una gran polémica, aunque a la luz de estos trabajos y otros mas recientes con el apoyo experimental, la realidad de estos sistemas es indudable. Recientemente, las posibles aplicaciones de los materiales izquierdos han llamado la atención del sistema de defensa de los Estados Unidos (DARPA), el cual prevé un fondo de investigación en esta área¹¹. Por otro lado, un artículo publicado paralelamente a nuestro trabajo¹², deja ver que los materiales izquierdos pueden ser solo parte de un rango más amplio de fenómenos de comportamiento “izquierdo”. En dicho trabajo se presenta evidencia experimental de que un arreglo periódico de cilindros de cobre es capaz de enfocar ondas superficiales en un fluido, de la misma manera en que se podría enfocar imágenes con una lente de material izquierdo (Fig. I5).

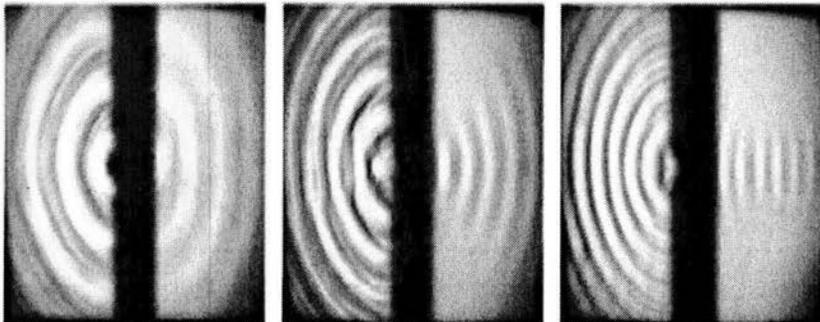


Fig. I5. Comprobación experimental de la existencia de refracción negativa en ondas superficiales en líquidos; el arreglo propuesto por Xinhua Hu *et al.* puede enfocar las ondas superficiales de distintas frecuencias de la manera prevista por Pendry. Fuente: Xinhua Hu *et al.*, *Phys. Rev. E.* **69**, 30201, (2004).

Con estas premisas, consideramos de gran importancia el estudio de los fenómenos básicos de la interacción electromagnética con un medio de índice de refracción negativo. En el presente trabajo, fenómenos tales como la reflexión y transmisión de ondas electromagnéticas en materiales izquierdos se estudiarán en el capítulo 1. Posteriormente en el capítulo 2, se estudia la reflexión y transmisión en una película de material izquierdo, haciendo énfasis en la idea novedosa de las lentes planas. Finalmente en el capítulo 3,

estudiaremos un modelo sencillo de lo que podría ser una primera aproximación a un material con índice de refracción negativo. Se estudia la viabilidad de tal modelo para ser implementado experimentalmente para el espectro visible de frecuencias.

Capítulo 1.

1.1 Campos Electromagnéticos en Materiales Izquierdos.

1.1.1 Ondas Electromagnéticas Planas.

A continuación, se analizan los resultados más importantes de la interacción de campos electromagnéticos oscilantes con materiales izquierdos. La forma más sencilla de tales campos son las ondas electromagnéticas planas. En 1964, Veselago¹ estudió de forma teórica las implicaciones que tendría el hecho de que la permitividad eléctrica ϵ y la permeabilidad magnética μ en un medio material fuesen negativas, específicamente la parte real de ambas. A estos medios Veselago los denominó como materiales izquierdos (MI). Hizo notar que una sustancia con tales características no viola ningún principio físico fundamental; en particular, las ecuaciones de Maxwell que describen a los campos electromagnéticos en medios materiales, son válidas para este caso.

Las llamadas constantes ópticas ϵ y μ , determinan las propiedades ópticas de cualquier medio, por lo que el cambio simultáneo en los signos de ϵ y μ hace pensar en un cambio en la forma de interacción de los campos electromagnéticos con el material. Un parámetro importante y de gran utilidad en la descripción de varios fenómenos ópticos es el índice de refracción del medio n . Este índice de refracción es la razón entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio y esta dado por:

$$n^2 = \frac{c^2}{v^2} = \varepsilon\mu. \quad (1.1)$$

Para medios ordinarios la parte real de n es siempre positivo. Sin embargo no existe ningún argumento que impida que el índice de refracción sea negativo, y como apunta Veselago, para materiales izquierdos lo es. Recientemente, Smith y Kroll³ han demostrado rigurosamente que si $\text{Re}(\varepsilon), \text{Re}(\mu) < 0$, necesariamente el índice de refracción también es negativo, por lo que para un material izquierdo se tiene

$$n = -\sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (1.2)$$

Para ver de manera más intuitiva la necesidad del cambio de signo en el índice de refracción, usaremos la idea desarrollada por McCall *et al*¹³. Como hemos mencionado, para un material izquierdo la parte real de ε y μ es negativa, es decir $\text{Re}(\varepsilon), \text{Re}(\mu) < 0$. Por otro lado, un resultado conocido en electrodinámica obliga a que la energía disipada por los campos electromagnéticos sea siempre positiva, esto condiciona a que las partes imaginarias de ε y μ sean tales que $\text{Im}(\varepsilon), \text{Im}(\mu) > 0$ ¹⁴. Con estos argumentos, podemos escribir a ε y μ en forma compleja como

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\phi_\varepsilon} \quad (1.3)$$

$$\mu = \mu_0 e^{i\phi_\mu}, \quad (1.4)$$

con $\frac{\pi}{2} < \phi_\varepsilon \leq \pi$, $\frac{\pi}{2} < \phi_\mu \leq \pi$, $\varepsilon_0 > 0$ y $\mu_0 > 0$. Por lo que podemos escribir al índice de refracción en forma compleja como

$$n = +\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} e^{i \frac{\phi_\epsilon + \phi_\mu}{2}}. \quad (1.5)$$

Por construcción, de la ec. (1.5) podemos concluir que $\frac{\pi}{2} < \frac{\phi_\epsilon + \phi_\mu}{2} \leq \pi$ y por tanto que $\text{Re}(n) < 0$.

Es importante que al estudiar el comportamiento de campos electromagnéticos en materiales izquierdos, se tenga siempre presente el cambio de signo en las constantes ópticas ya descritas.

Para cualquier medio material, los campos electromagnéticos son descritos por las ecuaciones de Maxwell, estas expresiones en el sistema gaussiano, son¹⁴⁻¹⁸:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho_f \quad (1.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_f + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.9)$$

Suponiendo que los medios son lineales, homogéneos e isotrópicos, los campos \mathbf{D} y \mathbf{H} están relacionados con los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} de una manera muy sencilla:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (1.10)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (1.11)$$

En ausencia de cargas y corrientes libres ($\rho_f = 0, \mathbf{J}_f = \mathbf{0}$), tomemos el rotacional de la ecuación (1.7) y usando (1.6), (1.9), (1.10) y (1.11) obtenemos

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.12)$$

De forma análoga, de la ecuación (1.9) se puede obtener:

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.13)$$

Se puede observar que tanto \mathbf{E} como \mathbf{H} cumplen por separado con la misma ecuación, la cual representa una onda viajera que se propaga con velocidad v_p dada por

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v_p^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.14)$$

$$v_p^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} = \frac{c^2}{n^2}, \quad (1.15)$$

donde $\psi(\mathbf{r}, t)$ representa cada una de las componentes de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} . La solución para la ecuación (1.14) es bien conocida y corresponde a funciones del tipo onda plana, cuya expresión general es:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.16)$$

donde en general A es una constante compleja. La expresión (1.16) representan ondas planas monocromáticas de frecuencia ω que se propagan en cierta dirección dada por el vector \mathbf{k} . Hay que recordar que los campos físicos están dados solo por $Re\psi(\mathbf{r}, t)$; definamos el

vector de onda en la dirección de propagación como $\mathbf{k} = k\hat{k}$, con lo que la solución para los campos electromagnéticos esta dada por

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \quad (1.17)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}. \quad (1.18)$$

Si sustituimos estos campos en las ecuaciones (1.6-1.9), obtenemos las ecuaciones de Maxwell para las ondas electromagnéticas planas:

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_0 = 0 \quad (1.19)$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0 = \frac{\omega\mu}{c}\mathbf{H}_0 \quad (1.20)$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{H}_0 = 0 \quad (1.21)$$

$$\mathbf{k}\times\mathbf{H}_0 = -\frac{\varepsilon\omega}{c}\mathbf{E}_0. \quad (1.22)$$

Combinando las ecs. (1.20) y (1.22), se obtiene la llamada relación de dispersión para modos transversales

$$k^2 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu. \quad (1.23)$$

Hasta ahora no hemos hecho ninguna suposición acerca del signo de ε y μ . De las ecuaciones (1.19) y (1.21) podemos deducir que los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} para medios ordinarios y medios izquierdos son perpendiculares a la dirección de propagación, es decir, la onda electromagnética es transversal. De las ecs. (1.20) y (1.22) tenemos que \mathbf{E} es perpendicular a \mathbf{H} y no son independientes entre sí. Una segunda observación importante a partir de estas ecuaciones es que para medios ordinarios $\{\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ forman siempre una triada ordenada de vectores ortogonales, que claramente sigue la regla de la mano

derecha. Sin embargo cuando ϵ y μ son negativas, la triada $\{\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ siguen la regla de la mano izquierda, razón por la que Veselago acuñó el término "material izquierdo".

El flujo de energía de la onda electromagnética que cruza por segundo la unidad de área está dado por el vector de Poynting \mathbf{S} como

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (1.24)$$

Por lo que $\{\mathbf{S}, \mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ forman siempre un sistema derecho; es claro por lo que hemos discutido, que para un material ordinario \mathbf{S} y \mathbf{k} son siempre paralelos, mientras que para un material izquierdo tendremos que \mathbf{S} y \mathbf{k} son antiparalelos. Este es un hecho nuevo y característico de los materiales izquierdos, para materiales izquierdos el vector de onda \mathbf{k} cambia de dirección respecto de los materiales ordinarios dada la dirección de \mathbf{S} (fig. 1.1). Este hecho tendrá como consecuencia¹ el cambio en muchos fenómenos físicos, como por ejemplo, la inversión del efecto Doppler y del efecto Cerenkov. La velocidad de propagación de la onda o velocidad de fase está dada por

$$\mathbf{v}_p = \omega \frac{\mathbf{k}}{k^2}. \quad (1.25)$$

Es claro que la velocidad de fase es también antiparalela al flujo de energía cuando ϵ y μ son negativos. Por esta razón y a partir de que el índice de refracción es negativo, los materiales izquierdos son conocidos como materiales de velocidad de fase negativa.

Cuando \mathbf{E} y \mathbf{H} varían armónicamente con el tiempo, como los campos descritos por (1.17) y (1.18), será conveniente determinar el flujo de energía promedio en un periodo de oscilación

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \rangle_T = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{c^2}{8\pi\omega\mu} |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{k}, \quad (1.26)$$

donde $*$ denota el complejo conjugado. De aquí es claro que debido a que $\mu < 0$ \mathbf{S} y \mathbf{k} son antiparalelos.

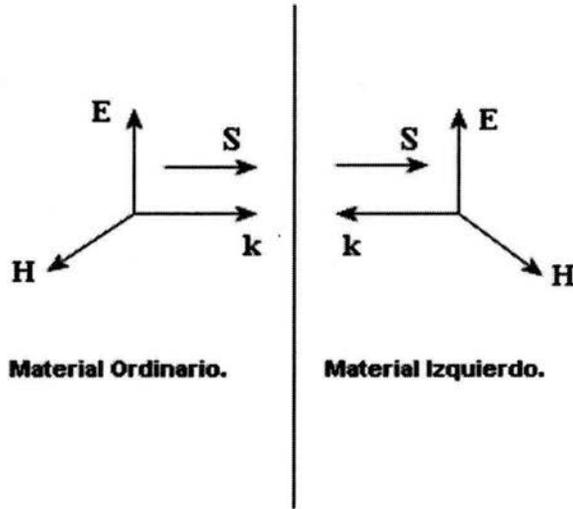


Figura 1.1. El sistema de vectores $\{\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ respecto del vector de Poynting para un material derecho e izquierdo. En este ultimo la triada $\{\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ siguen la regla de la mano izquierda .

1.1.2 Polarización.

El campo eléctrico de la ecuación (1.17) puede escribirse en una base de vectores $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ unitarios y ortogonales; eligiendo la dirección \hat{e}_3 como la dirección de propagación:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\hat{e}_1 E_1 + \hat{e}_2 E_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}. \quad (1.27)$$

Las amplitudes E_1, E_2 son en general constantes complejas, y por tanto están descritas por una magnitud y una fase, es decir

$$E_j = E_{0j} e^{i\alpha_j} \quad (1.28)$$

$j = 1, 2$

La diferencia entre las fases α_1 y α_2 posee un significado físico importante, describe los estados de polarización de la onda. Por ejemplo, si las fases difieren por un múltiplo de π , *i.e.* si $\alpha_2 = \alpha_1 \pm m\pi$, $m=0,1,2,\dots$ entonces la dirección de \mathbf{E} está restringida a una línea recta y se dice que la onda está linealmente polarizada (Fig. 1.2). Por simplicidad, tomemos la base cartesiana y supongamos que la onda se propaga a lo largo de \hat{e}_z , en este caso el campo eléctrico se puede escribir de la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = (\hat{e}_x E_{0x} + \hat{e}_y E_{0y}) e^{i(kz - \omega t + \alpha_1)}, \quad (1.29)$$

donde las componentes del campo cumplen con la ecuación de la recta

$$\frac{E_y}{E_x} = \pm \frac{E_{0y}}{E_{0x}}. \quad (1.30)$$

Si las amplitudes del campo son iguales, *i.e.* $E_{0x}=E_{0y}=E_0$ y las fases son tales que $\alpha_2 = \alpha_1 \pm \pi/2$, la onda se puede escribir como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0(\hat{e}_x \pm i\hat{e}_y)e^{i(kz - \omega t + \alpha_1)}. \quad (1.31)$$

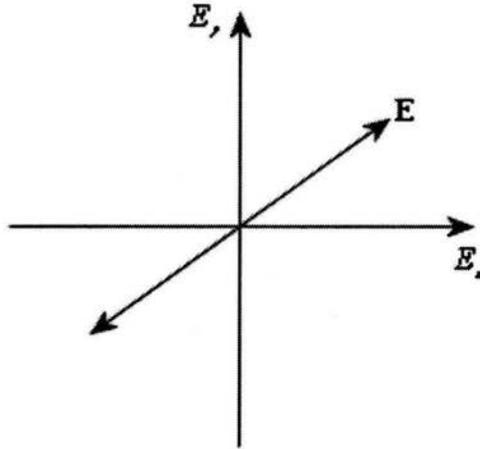


Fig. 1.2. El campo eléctrico está linealmente polarizado cuando la diferencia de fases entre las componentes del campo es un múltiplo de π .

Recordemos que los campos físicos son la parte real de (1.31), por lo que

$$E_x = E_0 \cos(kz - \omega t + \alpha_1) \quad (1.32)$$

$$E_y = \mp E_0 \text{sen}(kz - \omega t + \alpha_1). \quad (1.33)$$

(1.32) y (1.33) son las ecuaciones paramétricas de un círculo, por lo que se dice que la onda está circularmente polarizada (fig. 1.3).

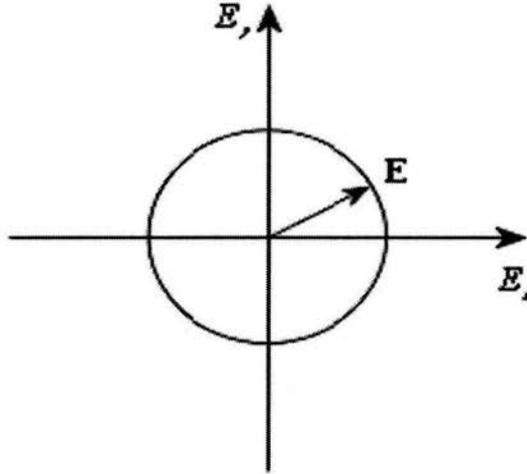


Fig. 1.3. Si la diferencia de fases entre las componentes E_x y E_y es de $\pm\pi/2$, se dice que la onda electromagnética está polarizada circularmente, el sentido de giro depende del signo que se elija en la ec. 1.33.

Dependiendo del signo elegido del lado derecho de E_y en (1.33), el campo eléctrico describirá una circunferencia en uno u otro sentido. Si se elige el signo negativo, el campo se dice que tiene polarización circular izquierda, y describe la circunferencia en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Esta convención se toma para cuando el vector de onda sale del plano de la hoja. Mientras que si se escoge el signo positivo, se tiene una onda con polarización circular derecha.

Finalmente, si $E_{0x} \neq E_{0y}$ y $\alpha_1 \neq \alpha_2$, en analogía con las ecuaciones (1.32) y (1.33), tenemos:

$$E_{0x} = E_{01} \cos(kz - \omega t + \alpha_1) \quad (1.34)$$

$$E_{0y} = E_{02} \sin(kz - \omega t + \gamma), \quad (1.35)$$

donde se ha definido para simplificar a $\gamma = \alpha_2 - \frac{\pi}{2}$. Estas expresiones describen un movimiento elíptico para \mathbf{E} , y se dice que el campo está elípticamente polarizado (Fig. 1.4). Cabe mencionar

que el estado más general de polarización es el estado elíptico, por simplicidad hemos elegido la base cartesiana, sin embargo la orientación de la elipse puede ser arbitraria en cuyo caso siempre es posible hacer una rotación para recuperar estos resultados.

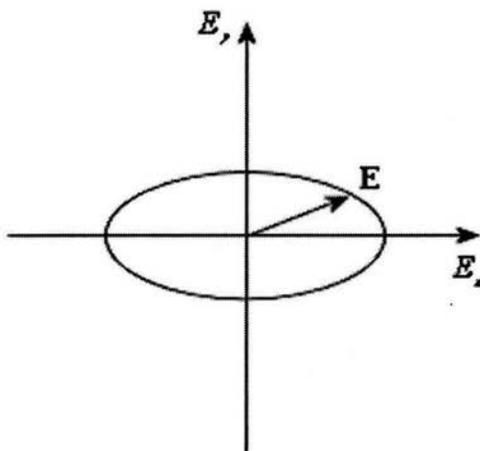


Fig. 1.4. El estado de polarización elíptico es el más general, para direcciones arbitrarias siempre es posible hacer una rotación para la base cartesiana. En este caso, la diferencia de fases entre las componentes del campo es arbitraria.

1.2 Reflexión y Refracción de Ondas Electromagnéticas.

Consideremos una onda electromagnética plana propagándose a través de un material ordinario (medio 1) semi-infinito, lineal, homogéneo, e isotrópico, con parámetros n , ϵ , μ . Dicha onda incide sobre la interfase con un material izquierdo semi-infinito, lineal, homogéneo, e isotrópico caracterizado por los parámetros $n' < 0$, $\epsilon' < 0$, $\mu' < 0$ (medio 2). Los aspectos del fenómeno de reflexión y transmisión en la superficie entre dieléctricos puede dividirse en dos clases¹⁵: las propiedades cinemáticas, que son independientes de la naturaleza de la onda y donde las condiciones de frontera deben ser siempre satisfechas; y las propiedades dinámicas que dependen de la naturaleza específica de los campos electromagnéticos y de sus condiciones de frontera.

1.2.1 Condiciones de Frontera.

Los campos eléctricos y magnéticos experimentan ciertos cambios al pasar de un medio a otro, sin embargo, cada uno de ellos debe satisfacer ciertas condiciones de contorno. Específicamente, las componentes tangenciales y normales a la superficie de transición deben satisfacer condiciones de continuidad. Estas condiciones que se muestran a continuación son condiciones generales y deben ser satisfechas para cualquier medio. Hay que aclarar que estas expresiones representan las condiciones para los campos totales, es decir, para la superposición de cada uno de los campos presentes^{15,17}

$$(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi\rho_f \quad (1.36)$$

$$(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \hat{n} = \mathbf{0} \quad (1.37)$$

$$(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad (1.38)$$

$$(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \times \hat{\mathbf{n}} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{K}_f, \quad (1.39)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es un vector normal a la superficie, ρ_f y \mathbf{K}_f son las densidades de carga y corriente superficial libres.

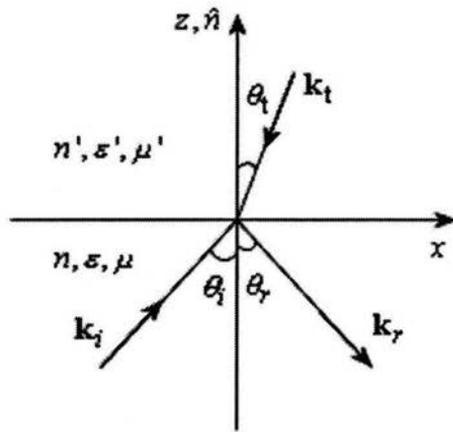
1.2.2 Propiedades Cinemáticas.

Para analizar la reflexión y transmisión en un medio izquierdo, partamos del mismo análisis que para materiales derechos cambiando únicamente la dirección del vector de onda \mathbf{k} . Esta simplificación como veremos más adelante es equivocada, pero nos ayudará a encontrar otra diferencia importante entre materiales derechos e izquierdos. Sin pérdida de generalidad, suponga que la superficie interfacial coincide con el plano XY, y el vector $\hat{\mathbf{z}}$ es normal a dicha superficie. En analogía con el caso de medios ordinarios representemos la situación por el diagrama de la figura 1.5a. Una onda electromagnética plana con vector de onda \mathbf{k}_i y frecuencia ω incide sobre la superficie interfacial, las ondas reflejada y transmitida tienen también frecuencia ω con vectores de onda \mathbf{k}_r y \mathbf{k}_t respectivamente. De las ecs. (1.17), (1.20) y (1.22), los distintos campos son:

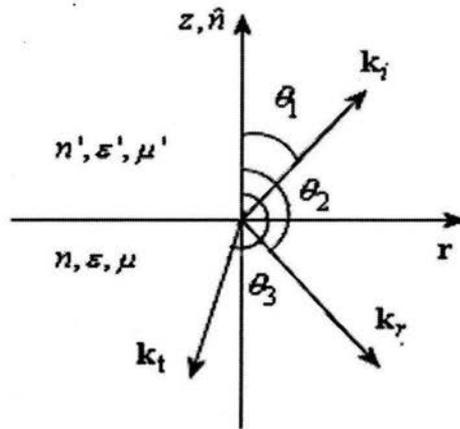
$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0j} e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega t)} = -\frac{c}{\epsilon \omega} \mathbf{k}_j \times \mathbf{H}_j \quad (1.40)$$

$$\mathbf{H}_j(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{\mu \omega} \mathbf{k}_j \times \mathbf{E}_j, \quad (1.41)$$

$$j = i, r, t.$$



(a)



(b)

Fig. 1.5. (a) La onda electromagnética incide desde un material ordinario sobre un material izquierdo, parte de la onda será reflejada y parte transmitida. Hay que notar que el vector de onda en el material izquierdo cambia de dirección respecto del medio ordinario. (b) Cada uno de los vectores de onda trasladados a un mismo origen con sus ángulos medidos desde la normal.

Como se ve en la figura 1.5a, respecto del caso de medios ordinarios hemos cambiado la dirección del vector de onda para el material izquierdo. Esto es necesario para que el flujo de energía vaya del medio 1 hacia el medio 2. Como ya hemos visto en la sección anterior, el flujo de energía dado por el vector de Poynting es antiparalelo al vector de onda en un medio izquierdo. Ahora, como las condiciones de frontera para el plano $z=0$ deben satisfacerse para cualquier valor de x y y , y para todo tiempo, entonces las fases de los campos en las ecs. (1.40) y (1.41) deben satisfacer

$$(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})_{z=0} = (\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})_{z=0} = (\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})_{z=0}, \quad (1.42)$$

para todo punto \mathbf{r} sobre la interfase. Considerando cada vector de onda en sus componentes cartesianas $\mathbf{k}_j = (k_{jx}, k_{jy}, k_{jz})$, $j = i, r, t$, a partir de la ec. (1.42), tendremos las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} k_{ix} &= k_{rx}, \quad k_{iy} = k_{ry} \\ k_{ix} &= k_{tx}, \quad k_{iy} = k_{ty}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Usando las condiciones de (1.43), se puede mostrar que los vectores de onda satisfacen la relación $\mathbf{k}_r \cdot (\mathbf{k}_i \times \hat{\mathbf{e}}_z) = \mathbf{k}_t \cdot (\mathbf{k}_i \times \hat{\mathbf{e}}_z) = \mathbf{k}_i \cdot (\mathbf{k}_i \times \hat{\mathbf{e}}_z) = 0$, es decir, los vectores de onda pertenecen a un mismo plano (plano de incidencia). En lo sucesivo y por simplicidad, consideraremos el plano de incidencia como el plano xz ($k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} = 0$).

Para mayor claridad traslademos los vectores de onda a un mismo origen y tomemos todos los ángulos a partir de la normal en el sentido de las manecillas del reloj, como se ve en la figura 1.5b.

Usando la definición de producto interno en términos del ángulo entre vectores, la condición (1.42) se reduce a:

$$|\mathbf{k}_i| \operatorname{sen} \theta_1 = |\mathbf{k}_r| \operatorname{sen} \theta_2 \quad (1.44)$$

$$|\mathbf{k}_i| \operatorname{sen} \theta_1 = |\mathbf{k}_t| \operatorname{sen} \theta_3. \quad (1.45)$$

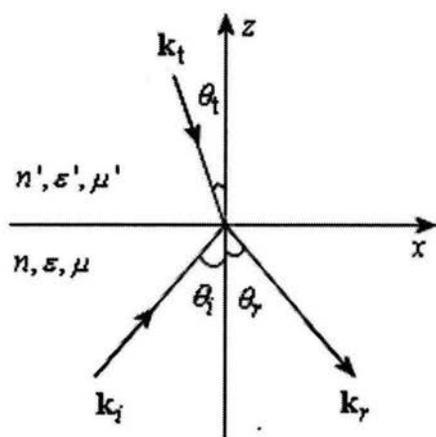
Usando (1.23) es inmediato que $|\mathbf{k}_i| = |\mathbf{k}_r|$, comparando la figura 1.5a y 1.5b se puede ver que $\theta_1 = \theta_i$ y $\theta_2 = \pi - \theta_r$, por lo que la ec. (1.44) se reduce a

$$\theta_i = \theta_r, \quad (1.46)$$

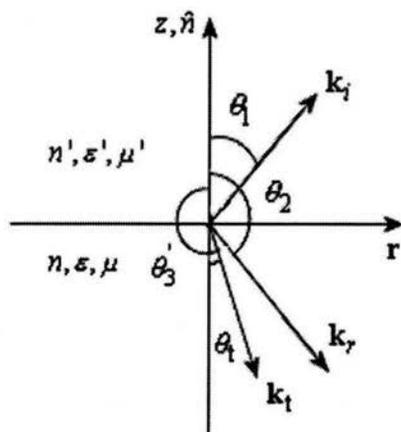
que es la conocida ley de la reflexión. Es importante hacer notar que el hecho de que el segundo medio sea izquierdo no modifica esta ley. Analicemos ahora la ecuación (1.45). Por construcción tenemos que $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2} > \theta_3 > \pi$, por lo que para que la expresión (1.45) sea consistente es necesario que $\operatorname{sen} \theta_3 > 0$, lo cual es una contradicción para tal dominio de θ_3 .

Es claro que la situación mostrada en la figura 1.5a no es una situación aceptable físicamente. Redefinamos el ángulo para el haz refractado como $\theta_3' = -\theta_3$ (fig.1.6b), en este caso $-\frac{3\pi}{2} < \theta_3' < -\pi$ y es claro ahora que la condición de frontera que se satisface es

$$|\mathbf{k}_i| \operatorname{sen} \theta_1 = |\mathbf{k}_t| \operatorname{sen} \theta_3'. \quad (1.47)$$



(a)



(b)

Fig. 1.6. Cuando el segundo medio es un material izquierdo, la onda es refractada del lado opuesto de la normal, es decir, el ángulo de refracción es negativo.

De la figura 1.6b se tiene que $\theta_3' = -\pi + \theta_i$, donde θ_i es el ángulo de refracción que por construcción es negativo. Sustituyendo en la ec. (1.47) y usando (1.2) y (1.23) tenemos:

$$n \operatorname{sen} \theta_i = n' \operatorname{sen} \theta_i. \quad (1.48)$$

Esta expresión es equivalente a la ley de Snell. Sin embargo hemos encontrado un hecho nuevo para los materiales izquierdos: el ángulo de refracción θ_i tiene que ser también negativo ($\theta_i < 0$), es decir, la onda se refracta del lado opuesto de la normal como en la figura 1.6a. Dicho fenómeno fue descrito por primera vez en el trabajo de Veselago¹, y actualmente la refracción anómala ya ha sido demostrada experimentalmente⁶⁻⁸. Este hecho se ha constituido como uno de los más importantes de los materiales izquierdos.

Dado que lo utilizaremos posteriormente, de la figura 1.6a tenemos que el vector de onda \mathbf{k}_i en componentes cartesianas está dado por

$$\mathbf{k}_i = \left(\frac{\omega}{c} n' \operatorname{sen} \theta_i, 0, \frac{\omega}{c} n' \cos \theta_i \right). \quad (1.49)$$

Con la finalidad de conservar el trazado rayos convencional para este fenómeno y para evitar confusiones con el vector de propagación en medios izquierdos, es conveniente presentar los diagramas en términos del vector de Poynting. Esta representación da la dirección correcta del flujo de energía y es análogo a la representación para medios ordinarios en términos del vector de onda. Recordemos siempre que el ángulo de refracción es ahora negativo (fig. 1.7).

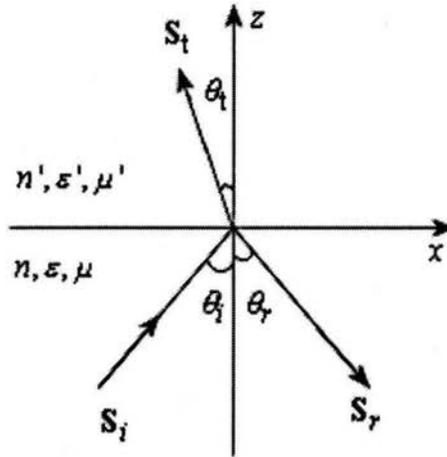


Fig. 1.7. Para evitar confusiones es conveniente presentar los diagramas para la reflexión y transmisión en términos del vector de Poynting. El ángulo de transmisión como ya hemos visto, es negativo

1.2.3 Propiedades Dinámicas.

Por simplicidad, es conveniente considerar por separado dos casos de polarización lineal: cuando \mathbf{E} es perpendicular al plano de incidencia (polarización “s”) y cuando \mathbf{H} es perpendicular al plano de incidencia (\mathbf{E} paralelo al plano de incidencia ó polarización “p”). Cualquier estado de polarización más general puede expresarse como la superposición de dos ondas con estos estados lineales de polarización.

1.2.3a. \mathbf{E}_0 perpendicular al plano de incidencia ($\mathbf{E}_0 \cdot \hat{n} = 0$).

Para el medio 1 (Fig. 1.8), el campo eléctrico total es la suma del campo incidente y el campo reflejado. En ausencia de cargas y corrientes libres ($\rho_f = 0, \mathbf{J}_f = \mathbf{0}$) y la condición (1.36) se satisface

inmediatamente. El resto de las condiciones de contorno se reducen usando (1.41) a

$$E_{0i} + E_{0r} - E_{0t} = 0 \quad (1.50)$$

$$\frac{k_{iz}}{\mu} (E_{0i} - E_{0r}) = \frac{k_{iz}}{\mu'} E_{0t}. \quad (1.51)$$

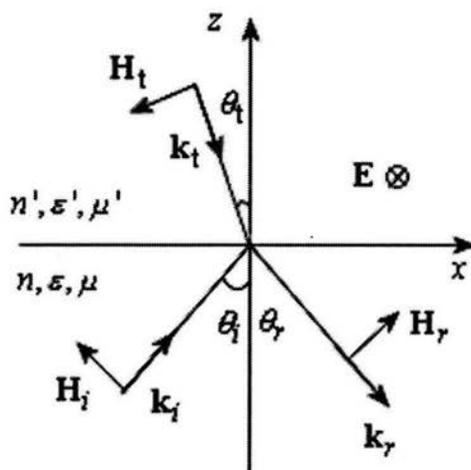


Fig. 1.8. El campo eléctrico E es perpendicular al plano de incidencia.

Resolviendo para los campos reflejados y refractados

$$r_{\perp} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{\mu' k_{iz} - \mu k_{iz}}{\mu' k_{iz} + \mu k_{iz}} \quad (1.52)$$

$$t_{\perp} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2\mu' k_{iz}}{\mu' k_{iz} + \mu k_{iz}}. \quad (1.53)$$

Estas expresiones son conocidas como las ecuaciones de Fresnel. Usando la forma explícita de k_t dada por la ec. (1.49), estas expresiones toman la forma

$$r_{\perp} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n \cos \theta_i - \frac{\mu}{\mu'} n' \cos \theta_t}{n \cos \theta_i + \frac{\mu}{\mu'} n' \cos \theta_t} \quad (1.54)$$

$$t_{\perp} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n \cos \theta_i}{n \cos \theta_i + \frac{\mu}{\mu'} n' \cos \theta_t} \quad (1.55)$$

1.2.3b \mathbf{H}_0 perpendicular al plano de incidencia ($\mathbf{H}_0 \cdot \hat{n} = 0$).

Para este caso la ec. (1.38) se satisface inmediatamente, usando la ec. (1.40) las condiciones de frontera restantes son

$$\frac{k_{iz}}{\varepsilon} (H_{0i} - H_{0r}) = \frac{k_{tz}}{\varepsilon'} H_{0t} \quad (1.56)$$

$$H_{0t} = H_{0i} + H_{0r} \quad (1.57)$$

De nuevo, resolviendo el sistema obtenemos los coeficientes de Fresnel para \mathbf{H}_0 perpendicular al plano de incidencia¹⁴

$$r_{\parallel} = \frac{H_{0r}}{H_{0i}} = \frac{\varepsilon' k_{iz} - \varepsilon k_{tz}}{\varepsilon' k_{iz} + \varepsilon k_{tz}} \quad (1.58)$$

$$t_{\parallel} = \frac{H_{0t}}{H_{0i}} = \frac{2\varepsilon' k_{iz}}{\varepsilon' k_{iz} + \varepsilon k_{tz}} \quad (1.59)$$

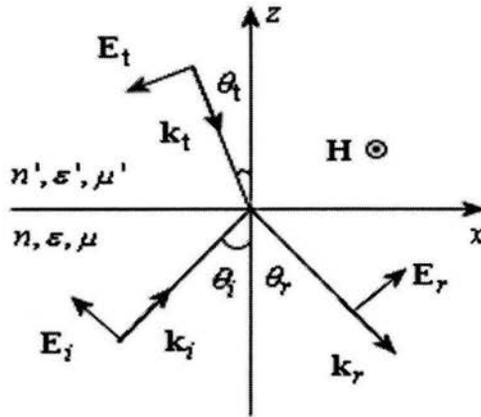


Fig. 1.9. El campo eléctrico E es paralelo al plano de incidencia.

Usando las ecs. (1.41), (1.48) y (1.49), las ecuaciones de Fresnel en este caso toman la forma

$$r_{\parallel} = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{\frac{\mu}{\mu'} n' \cos \theta_i - n \cos \theta_t}{\frac{\mu}{\mu'} n' \cos \theta_i + n \cos \theta_t} \quad (1.60)$$

$$t_{\parallel} = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n \cos \theta_i}{\frac{\mu}{\mu'} n' \cos \theta_i + n \cos \theta_t} \quad (1.61)$$

Como se puede observar de las ecs. (1.54), (1.55), (1.60) y (1.61), las ecuaciones de Fresnel para materiales izquierdos tienen la misma forma que para materiales ordinarios, es decir, las ecuaciones de Fresnel no se ven alteradas tras el cambio simultáneo en el signo de ϵ y μ .

Bajo la hipótesis de que los medios son lineales, homogéneos, e isotrópicos, las ecuaciones (1.54), (1.55), (1.60) y (1.61) representan cantidades reales (excepto en el caso de reflexión total interna que veremos mas adelante). Sin embargo, dado que tales cantidades

pueden ser positivas o negativas, podemos interpretarlas como cantidades complejas con dos fases posibles, cero ó π . Los coeficientes t_{\perp} y t_{\parallel} son siempre positivos aún para materiales izquierdos, ya que μ' y n' son simultáneamente negativas; por lo que el cambio de fase entre la onda incidente y la refractada es igual a cero. Por otro lado, r_{\perp} y r_{\parallel} pueden ser positivos o negativos, de hecho, como podemos observar en la figura 1.10, estos coeficientes pueden tener un cambio de signo a partir de cierto valor que estudiaremos a continuación (ángulo de Brewster). En el caso en que estos coeficientes sean negativos, el cambio de fase entre la onda incidente y la reflejada es igual a π .

Podemos observar que los coeficientes de Fresnel para la polarización p, se pueden obtener de aquellos para la polarización s tras intercambiar $H \rightarrow E$ y $\mu \rightarrow \varepsilon$. Otro hecho que se deriva de las ecuaciones de Fresnel y que no tiene análogo en materiales ordinarios, es el caso particular en donde $\varepsilon' = -\varepsilon$, $\mu' = -\mu$ y por tanto $n' = -n$. Nos podemos dar cuenta que bajo estas condiciones se tiene que $\theta_i = -\theta_r$, $r_{\perp} = r_{\parallel} = 0$ y $t_{\perp} = t_{\parallel} = 1$, es decir, no existe onda reflejada. Entre otras cosas, este hecho motivó a Pendry² para sugerir que los materiales izquierdos podrían permitir la creación de lentes planas de material izquierdo que transmitirían sin pérdidas y formarían imágenes perfectas. Esta idea ha tenido gran apoyo en trabajos posteriores, en los cuales se afirma que tal efecto de enfocamiento es un efecto real bajo ciertas condiciones¹⁹⁻²³.

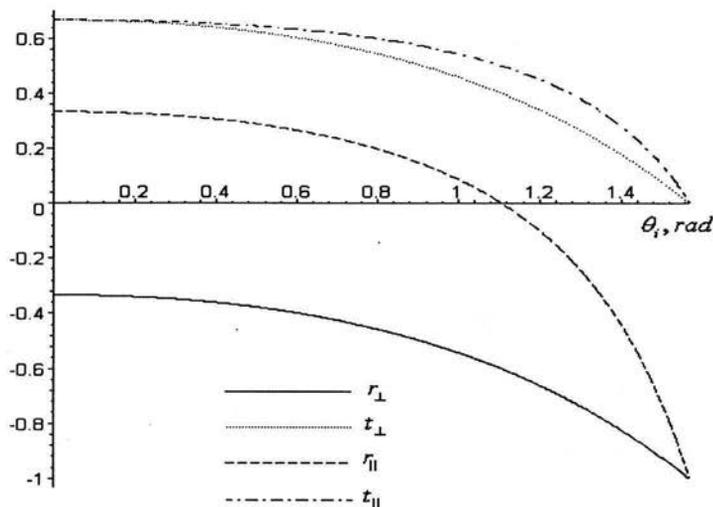


Fig. 1.10. Comportamiento de r_{\perp} , r_{\parallel} , t_{\perp} , t_{\parallel} respecto al ángulo de incidencia para un material izquierdo con $n'=-2$, $\mu'=-1$, la onda incide desde el vacío ($n=\mu=1$). Note que r_{\parallel} cambia de signo en el llamado ángulo de Brewster.

Un caso particular de las ecuaciones de Fresnel que es muy utilizado por diversas técnicas de medición, ocurre cuando la onda incide normalmente. En este caso $\theta_i = \theta_t = 0$ y las ecuaciones (1.54), (1.55), (1.60) y (1.61) se reducen a

$$r_{\perp} = -r_{\parallel} = \frac{n - \frac{\mu}{\mu'} n'}{n_i + \frac{\mu}{\mu'} n'} = \frac{Z' - Z}{Z' + Z} \quad (1.62)$$

$$t_{\perp} = t_{\parallel} = \frac{2n}{n + \frac{\mu}{\mu'} n'} = \frac{2Z'}{Z' + Z}, \quad (1.63)$$

donde definimos la impedancia del medio como

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (1.64)$$

Es importante aclarar que, a diferencia del índice de refracción que toma el signo negativo de la raíz para un medio izquierdo, la impedancia no se ve afectada por el cambio simultaneo de signos en ε y μ ^{2,3}. Esto debido a que la impedancia es proporcional a la energía disipada por el medio, la cual es estrictamente positiva, de donde necesariamente $ReZ > 0$ ¹⁴.

1.2.4 Reflectancia y Transmitancia.

En la práctica, es posible determinar experimentalmente las intensidades incidentes y transmitidas de las ondas electromagnéticas, por lo que es necesario definir la reflectancia y la transmitancia que relacionan los promedios temporales del flujo de energía. La reflectancia R está dada como el cociente de las componentes normales del vector de Poynting para la onda incidente y la onda reflejada, de la ecuación (1.26) se tiene

$$R = \frac{\left| \langle \mathbf{S}_r(\mathbf{r}, t) \rangle_t \cdot \hat{n} \right|}{\left| \langle \mathbf{S}_i(\mathbf{r}, t) \rangle_t \cdot \hat{n} \right|} = \frac{\left| |\mathbf{E}_{0r}|^2 \mathbf{k}_r \cdot \hat{n} \right|}{\left| |\mathbf{E}_{0i}|^2 \mathbf{k}_i \cdot \hat{n} \right|} = \frac{\left| |\mathbf{E}_{0r}|^2 k_{rz} \right|}{\left| |\mathbf{E}_{0i}|^2 k_{iz} \right|}, \quad (1.65)$$

mientras que la transmitancia T es la fracción de la energía incidente que es transmitida:

$$T = \frac{\left| \langle \mathbf{S}_t(\mathbf{r}, t) \rangle_t \cdot \hat{n} \right|}{\left| \langle \mathbf{S}_i(\mathbf{r}, t) \rangle_t \cdot \hat{n} \right|} = \frac{\left| \frac{1}{\mu'} |\mathbf{E}_{0t}|^2 \mathbf{k}_t \cdot \hat{n} \right|}{\left| \frac{1}{\mu} |\mathbf{E}_{0i}|^2 \mathbf{k}_i \cdot \hat{n} \right|} = \frac{\left| \mu |\mathbf{E}_{0t}|^2 k_{tz} \right|}{\left| \mu' |\mathbf{E}_{0i}|^2 k_{iz} \right|}. \quad (1.66)$$

Estos valores son tales que cumplen con la conservación de la energía (si el medio no es absorbente): $R+T=1$. Usando las ecs. (1.49), (1.54), (1.55), (1.60) y (1.61) se tiene que

$$R_{\perp} = \left| \frac{n \cos \theta_i - \frac{\mu}{\mu'} n' \cos \theta_t}{n \cos \theta_i + \frac{\mu}{\mu'} n' \cos \theta_t} \right|^2 \quad (1.67)$$

$$T_{\perp} = \frac{\mu n' \cos \theta_t}{\mu' n \cos \theta_i} \left| \frac{2n \cos \theta_i}{n \cos \theta_i + \frac{\mu}{\mu'} n' \cos \theta_t} \right|^2 \quad (1.68)$$

$$R_{\parallel} = \left| \frac{\frac{\mu}{\mu'} n' \cos \theta_t - n \cos \theta_i}{\frac{\mu}{\mu'} n' \cos \theta_t + n \cos \theta_i} \right|^2 \quad (1.69)$$

$$T_{\parallel} = \frac{\mu n' \cos \theta_t}{\mu' n \cos \theta_i} \left| \frac{2n \cos \theta_i}{\frac{\mu}{\mu'} n' \cos \theta_t + n \cos \theta_i} \right|^2 \quad (1.70)$$

De nuevo recordemos que el flujo de energía dado por el vector de Poynting, siempre va del medio 1 al medio 2, aún cuando éste sea izquierdo.

1.2.5 Polarización por Reflexión. Ángulo de Brewster.

Analizando la ecuación (1.60), es posible determinar bajo que condiciones una onda electromagnética con polarización arbitraria, puede ser polarizada linealmente tras reflejarse en la interfase; es decir, para que ángulo de incidencia la componente paralela del campo eléctrico reflejado es cero. Utilizando la ley de Snell ec. (1.48) y la condición de que $r_{\parallel} = 0$ en la ecuación (1.60) se obtiene después de algunos cálculos

$$\tan^2 \theta_B = \frac{\mu\epsilon'^2 - \mu'\epsilon'\epsilon}{\mu'\epsilon'\epsilon - \mu\epsilon^2}, \quad (1.71)$$

siempre que $(\mu\epsilon'^2 - \mu'\epsilon'\epsilon)/(\mu'\epsilon'\epsilon - \mu\epsilon^2) \geq 0$. Al ángulo θ_B se le denomina ángulo de Brewster o ángulo de polarización. Si $\mu' = -\mu$ se obtiene una expresión mucho más simple que es análoga a la de materiales ordinarios no magnéticos

$$\tan \theta_B = -\frac{n'}{n}. \quad (1.72)$$

En este caso, usando la ley de Snell (1.48), la ec. (1.72) se cumple siempre que $\theta_B - \theta_t = \frac{\pi}{2}$ como se ve en la figura 1.11.

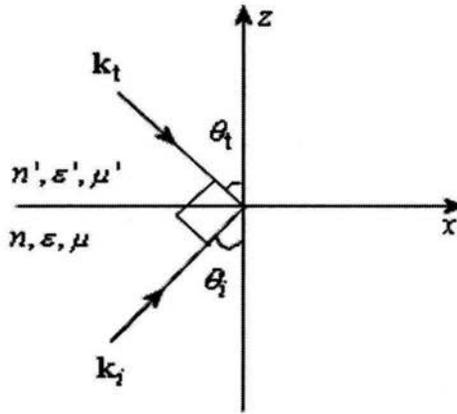


Fig. 1.11. Cuando el ángulo de incidencia es igual al ángulo de Brewster, la componente paralela del campo eléctrico se anula. Para el caso en que $\mu = \mu'$, la onda incidente y la refractada forman un ángulo de $\pi/2$.

Se puede trabajar de forma análoga con la condición $r_{\perp} = 0$ en la ecuación (1.54). Este caso normalmente no es tratado para materiales ordinarios ya que en general los materiales son tales que $\mu' = \mu = 1$, y la condición de que la componente normal se anule implica que los índices de refracción son iguales, *i.e.* que no existe interfase óptica. Sin embargo, para medios con $\mu' \neq 1$, como los materiales izquierdos, la componente perpendicular al plano de incidencia puede desaparecer para un ángulo de Brewster dado por²⁴

$$\tan^2 \theta_{B\perp} = \frac{\mu'^2 \varepsilon - \mu \mu' \varepsilon'}{\mu \mu' \varepsilon' - \mu \varepsilon^2}, \quad (1.73)$$

con $(\mu'^2 \varepsilon - \mu \mu' \varepsilon') / (\mu \mu' \varepsilon' - \mu \varepsilon^2) \geq 0$. Por lo que en el caso más general, una onda electromagnética con polarización arbitraria tras ser reflejada en la superficie de un material izquierdo, puede tener polarización lineal paralela ó perpendicular al plano de incidencia. El ángulo de Brewster representa el valor en que la diferencia de fases

entre la onda incidente y la reflejada cambia de cero a π , esto es, el valor a partir del cual $r_{\perp} < 0$ o $r_{\parallel} < 0$.

Para un material ordinario no magnético, el coeficiente r_{\perp} nunca se anula, sin embargo, para los materiales izquierdos es posible que esta componente del campo sea cero para el valor que hemos denominado como $\theta_{B\perp}$ (Fig. 1.12). Para los parámetros de la figura 1.10, la componente paralela es la que se anula, mientras que en el caso de la figura 1.12 es la componente normal la que es cero para el ángulo de Brewster.

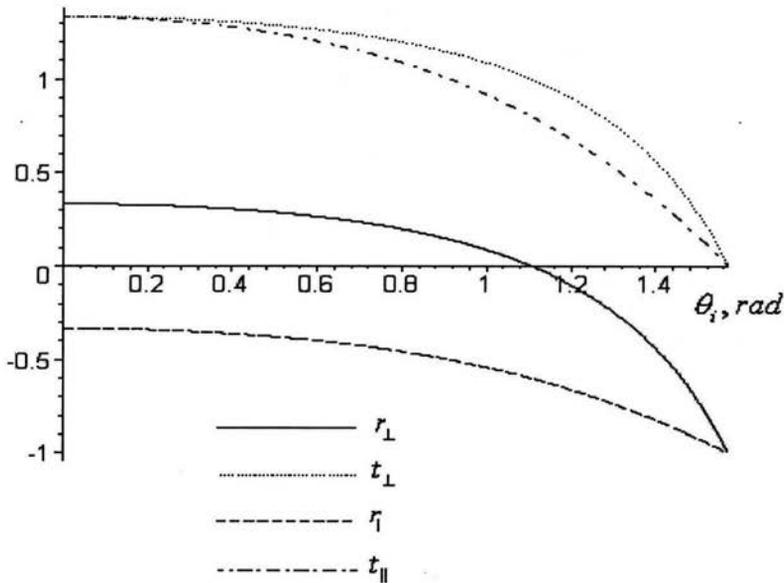


Fig. 1.12. Comportamiento de r_{\perp} , r_{\parallel} , t_{\perp} , t_{\parallel} respecto al ángulo de incidencia para un material izquierdo con $n'=-2$, $\mu'=-4$, la onda incide desde el vacío ($n=\mu=1$). Note que ahora es r_{\perp} quien cambia de signo para el ángulo de Brewster $\theta_{B\perp}$, este ángulo solo aparece para materiales con $\mu' \neq 1$.

1.2.6 Reflexión Total Interna.

Hasta ahora nos hemos limitado al hecho de que tanto el ángulo de incidencia, como el ángulo de transmisión son reales. Esto se cumple siempre que $|n| \leq |n'|$, en cuyo caso de la de la ley de Snell ec. (1.48) obtenemos que $-\text{sen}\theta_i \leq \text{sen}\theta_t \leq 1$, y por tanto $-\theta_i \leq \theta_t$. Sin embargo puede ocurrir que $|n| > |n'|$, para analizar este caso definamos el ángulo crítico como

$$\text{sen}\theta_c = -\frac{n'}{n}. \quad (1.74)$$

Por lo que la ley de Snell puede ser escrita como

$$-\text{sen}\theta_i = \frac{\text{sen}\theta_t}{\text{sen}\theta_c}. \quad (1.75)$$

En el caso en que el medio 1 sea ópticamente más denso ($|n| > |n'|$) tendremos tres posibilidades:

- $\theta_i < \theta_c$. En este caso $-\text{sen}\theta_i < 1$ y θ_t sigue siendo un ángulo real
- $\theta_i = \theta_c$. Este caso, es un caso límite ya que $-\text{sen}\theta_i = 1$ y $\theta_t = -\frac{\pi}{2}$, es decir, la onda refractada es paralela a la superficie (figura 1.13).
- $\theta_i > \theta_c$. En cuyo caso de la ec. (1.75) podemos ver que $-\text{sen}\theta_i > 1$, lo cuál no ocurre para ángulos reales. Definamos el ángulo de refracción complejo como

$$\theta_t = -\frac{\pi}{2} - i\alpha, \quad (1.76)$$

donde $\alpha \neq 0$ es un numero real, de esta manera se satisface que $-\text{sen}\theta_t = \cosh \alpha > 1$. Con esto podemos obtener la siguiente relación:

$$\cos \theta_t = \pm i \sqrt{\text{sen}^2 \theta_t - 1} = \pm i \sqrt{\frac{\text{sen}^2 \theta_i}{\text{sen}^2 \theta_c} - 1}. \quad (1.77)$$

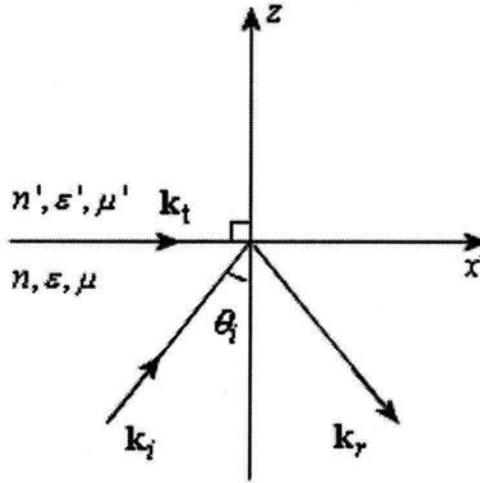


Fig. 1.13. Cuando la onda incide al ángulo crítico, el haz refractado se propaga paralelo a la interfase.

La onda transmitida puede ser escrita según la ec. (1.40) como

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_{0t} e^{i\left(\frac{\omega}{c} n' \text{sen} \theta_t x + \frac{\omega}{c} n' \cos \theta_t z - \omega t\right)} = \\ &= \mathbf{E}_{0t} e^{i\left(-\frac{\omega}{c} n' \frac{\text{sen} \theta_i}{\text{sen} \theta_c} x - \omega t\right)} e^{\frac{\omega}{c} n' z \sqrt{\frac{\text{sen}^2 \theta_i}{\text{sen}^2 \theta_c} - 1}}, \quad (1.78) \end{aligned}$$

donde el signo negativo se ha tomado para $\cos \theta_t$, ya que $n' < 0$ y los campos deben ser finitos cuando $z \rightarrow \infty$. De la ec. (1.78) podemos

observar dos cosas: la primera es que la onda se propaga en la dirección positiva del eje x , lo cual intuitivamente se puede esperar al hacer $\theta_i \rightarrow -\frac{\pi}{2}$. La segunda observación es que el campo decae exponencialmente dentro del material izquierdo, es decir, el campo se atenúa con la profundidad z . A este tipo de onda se le conoce como onda evanescente. La distancia de penetración de la onda (cuando la amplitud decae a $1/e$) es

$$\delta_z = \frac{c}{-\omega n' \sqrt{\frac{\text{sen}^2 \theta_i}{\text{sen}^2 \theta_c} - 1}}. \quad (1.79)$$

Sustituyendo la ec. (1.77) (con el signo negativo) en los coeficientes de Fresnel ecs. (1.54) y (1.60)

$$r_{\perp} = \frac{n \cos \theta_i + i \frac{\mu}{\mu'} n' \sqrt{\frac{\text{sen}^2 \theta_i}{\text{sen}^2 \theta_c} - 1}}{n \cos \theta_i - i \frac{\mu}{\mu'} n' \sqrt{\frac{\text{sen}^2 \theta_i}{\text{sen}^2 \theta_c} - 1}} = \frac{A + iB}{A - iB} \quad (1.80)$$

$$r_{\parallel} = \frac{\frac{\mu}{\mu'} n' \cos \theta_i + i n \sqrt{\frac{\text{sen}^2 \theta_i}{\text{sen}^2 \theta_c} - 1}}{\frac{\mu}{\mu'} n' \cos \theta_i - i n \sqrt{\frac{\text{sen}^2 \theta_i}{\text{sen}^2 \theta_c} - 1}} = \frac{C + iD}{C - iD}. \quad (1.81)$$

En este caso, las ecuaciones de Fresnel representan cantidades complejas, rescribiendo las ecs. (1.80) y (1.81)

$$r_{\perp} = \frac{A+iB}{A-iB} = \frac{(A^2+B^2)e^{i\delta_{\perp}}}{(A^2+B^2)e^{-i\delta_{\perp}}} = e^{2i\delta_{\perp}} \quad (1.82)$$

$$r_{\parallel} = \frac{C+iD}{C-iD} = \frac{(C^2+D^2)e^{i\delta_{\parallel}}}{(C^2+D^2)e^{-i\delta_{\parallel}}} = e^{2i\delta_{\parallel}}, \quad (1.83)$$

de aquí es claro que $|r_{\perp}|^2 = |r_{\parallel}|^2 = 1$, por lo que toda la energía es reflejada, *i.e.* $R_{\perp,\parallel} = 1$ y no existe fracción de energía que sea transmitida. Además, de las ecs. (1.82) y (1.83) los campos experimentan un cambio de fase igual a $2\delta_{\perp,\parallel}$, donde

$$\tan \delta_{\perp} = \frac{B}{A} = \frac{\frac{\mu}{\mu'} n' \sqrt{\frac{n^2}{n'^2} \text{sen}^2 \theta_i - 1}}{n \cos \theta_i} \quad (1.84)$$

$$\tan \delta_{\parallel} = \frac{D}{C} = \frac{n \sqrt{\frac{n^2}{n'^2} \text{sen}^2 \theta_i - 1}}{\frac{\mu}{\mu'} n' \cos \theta_i}. \quad (1.85)$$

Debido a que estas fases son distintas entre sí, una onda electromagnética que incida linealmente polarizada, tras reflejarse sus componentes paralela y perpendicular se reflejarán con distintos corrimientos de fase y la onda tendrá en general una polarización elíptica, tal como en medios ordinarios.

1.2.7 Dispersión.

Hasta ahora, hemos considerado que los parámetros ϵ y μ son constantes. En el caso en que no existe dispersión, es decir dependencia con la frecuencia, de la ecuación (1.24)

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})]. \quad (1.86)$$

Usando las ecuaciones de Maxwell (1.7) y (1.9) (en ausencia de corrientes libres) obtenemos que

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = -\frac{\partial W}{\partial t} \quad (1.87)$$

$$W = \frac{1}{8\pi} [\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2], \quad (1.88)$$

donde W es la densidad de energía de los campos electromagnéticos y es siempre positiva. Es fácil ver que para materiales izquierdos en que $\epsilon' < 0$, $\mu' < 0$, se tendría que $W < 0$, por lo que la ec. (1.88) no puede ser aplicada para materiales izquierdos. Por esta razón, es necesario considerar los materiales izquierdos como dispersivos, es decir, que los parámetros ópticos dependen de la frecuencia: $\epsilon' = \epsilon'(\omega)$ y $\mu' = \mu'(\omega)$. En el caso de medios dispersivos, la energía del campo electromagnético está dado por¹⁴

$$W = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{d[\omega \epsilon'(\omega)]}{d\omega} \mathbf{E}^2 + \frac{d[\omega \mu'(\omega)]}{d\omega} \mathbf{H}^2 \right]. \quad (1.89)$$

Si ϵ y μ fuesen constantes, la ec. (1.89) se reduciría a la ec. (1.88). La condición necesaria y suficiente para que $W > 0$ es, aún para materiales izquierdos

$$\frac{d[\omega\varepsilon'(\omega)]}{d\omega} > 0, \frac{d[\omega\mu'(\omega)]}{d\omega} > 0. \quad (1.90)$$

Todos los resultados obtenidos hasta ahora siguen siendo válidos aún cuando ε y μ dependen de la frecuencia. Esta dependencia puede ser tan compleja dependiendo del tipo de material del que se trate, tal y como veremos mas adelante.

Uno de los modelos más sencillos para modelar la función dieléctrica $\varepsilon(\omega)$ de un metal, es el modelo de plasma (ó de electrón libre) dado por²⁵

$$\varepsilon'(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (1.91)$$

donde ω_p es la frecuencia de plasma y está dada por

$$\omega_p = \frac{4\pi Ne^2}{m}, \quad (1.92)$$

donde N es el número de electrones por unidad de volumen en el plasma, e y m la carga y la masa del electrón respectivamente. La dependencia con la frecuencia de la permeabilidad magnética en general puede ser distinta a la de la función dieléctrica, por simplicidad consideremos un comportamiento de plasma magnético con la misma frecuencia de plasma, es decir

$$\mu'(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (1.93)$$

Aunque la forma funcional de la permitividad eléctrica y de la permeabilidad magnética que hemos escogido es sencilla y puede no representar un material izquierdo real nos será útil como ejemplo. Para justificar esta elección debemos comentar que este modelo es también punto de partida para modelos mucho más complejos usados por otros autores, ya que existen sistemas que pueden ser descritos por separado con dichas expresiones. Por ejemplo, la ecuación (1.91) puede describir el comportamiento de un arreglo de alambres metálicos isotrópicos; mientras que el modelo de plasma magnético en la ec. (1.93) ha mostrado que puede describir una estructura que contiene anillos de alambres conductores. Por tanto, dicho modelo con los parámetros adecuados bien podría describir en una primera aproximación a un material izquierdo con ambos tipos de componentes^{2,26,27}. o incluso un MI como el presentado por O'Brien *et al.* conformado por anillos resonantes²⁸. Con este sencillo modelo se puede estudiar el comportamiento de los coeficientes de Fresnel respecto de la frecuencia.

Dado que las ecuaciones (1.58) y (1.59) son iguales a las ecuaciones (1.52) y (1.53) tras reemplazar $H \rightarrow E$ y $\mu \rightarrow \varepsilon$ solo estudiaremos los coeficientes de Fresnel (1.52) y (1.53) para polarización s. De las ecs. (1.91) y (1.93), podemos observar que $\varepsilon(\omega), \mu(\omega) < 0$ para $\omega < \omega_p$, por lo que en esta región el índice de refracción está dado por la ec. (1.2):

$$n'(\omega) = -\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2}. \quad (1.94)$$

Para el resto del espectro consideraremos la definición usual con el signo positivo. Suponga que la onda incide desde el vacío ($n = \mu = 1$) sobre un material izquierdo modelado por las ecuaciones (1.91), (1.93) y (1.94). Suponga también que la onda incide a un ángulo de 45° y que la frecuencia de plasma es la misma que la frecuencia de plasma de la plata ($\omega_p = 5.72 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$), metal que ha mostrado ser

una posibilidad en la creación de materiales izquierdos^{2,19}. El comportamiento de los coeficientes de Fresnel ecs. (1.49) y (1.50) para $\omega < \omega_p$ se muestran en las figuras 1.14 y 1.15.

En la ec. (1.54), $r_{\perp} = 0$ cuando $\mu' \cos \theta_i - n' \cos \theta_t = 0$, usando la ley de Snell ec. (1.48) esta condición se puede describir como

$$\left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right] \cos \theta_i + \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2} \sqrt{1 - \frac{\text{sen}^2 \theta_i}{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2}} = 0. \quad (1.95)$$

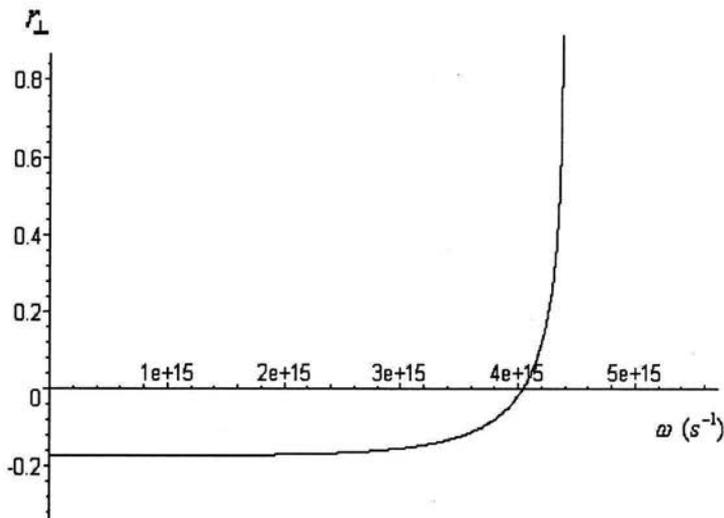


Fig. 1.14. Comportamiento del coeficiente de reflexión r_{\perp} respecto a la frecuencia con el modelo de plasma. ($\theta_i=45^\circ$, $n=1$, $\mu=1$)

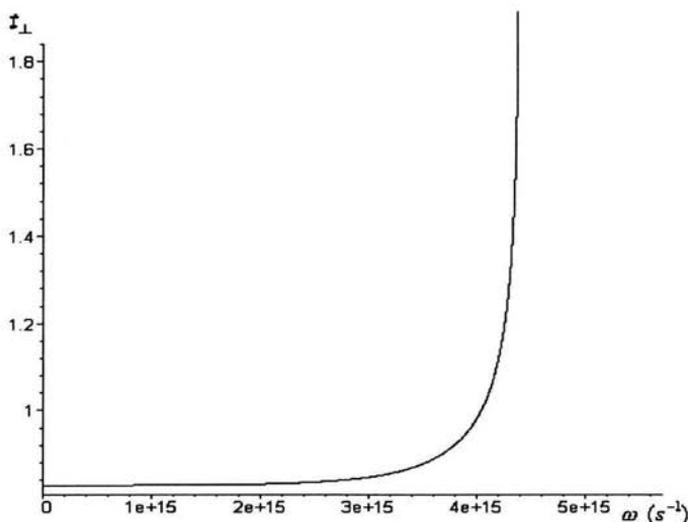


Fig. 1.15. Comportamiento del coeficiente de transmisión t_{\perp} con el modelo de plasma. ($\theta_i=45^\circ$, $n=1$, $\mu=1$)

Se puede comprobar fácilmente que la ec. (1.95) se satisface para cualquier ángulo de incidencia si:

$$\omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}. \quad (1.96)$$

El valor dado en 1.96 es una frecuencia característica para metales.

La frecuencia $\omega_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_p$ es conocida como la frecuencia de oscilación de los plasmones de superficie en un metal. Recordemos que un plasmón es la cuantización de las oscilaciones del plasma, y es de gran importancia en el estudio de la respuesta de los metales con la radiación electromagnética como veremos posteriormente^{25,29,30}. En nuestro ejemplo, el coeficiente de reflexión se anula para $\omega_s = 4.04 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$.

Si sustituimos la ec. (1.96) en (1.94) tendremos que $n' = -1$, es decir, $n' = -n$ condición que ya habíamos discutido con anterioridad. De manera similar, encontramos que el coeficiente de reflexión alcanza su valor máximo ($r_{\perp} = 1$) si se cumple la condición

$$\sqrt{1 - \frac{\text{sen}^2 \theta_i}{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2}} = 0. \quad (1.97)$$

Dicha ecuación tiene dos raíces

$$\omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \text{sen} \theta_i}}. \quad (1.98)$$

$$\omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{1 - \text{sen} \theta_i}}. \quad (1.99)$$

La condición (1.97) también nos dice para qué valores de la frecuencia el coeficiente de reflexión es complejo, lo cual ocurre siempre que el argumento de la raíz sea negativo. Es inmediato que el coeficiente de reflexión es complejo para el intervalo de frecuencias entre las raíces ecs. (1.98) y (1.99), es decir para

$$\frac{\omega_p}{\sqrt{1 + \text{sen} \theta_i}} < \omega < \frac{\omega_p}{\sqrt{1 - \text{sen} \theta_i}}. \quad (1.100)$$

En nuestro ejemplo, dicho intervalo es $4.37 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} < \omega < 1.05 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$, en cuyo caso, el coeficiente r_{\perp} toma la misma forma que en la ec. (1.80) y por tanto $|r_{\perp}|^2 = 1$, es decir en este intervalo la totalidad de la energía es reflejada.

De las ecs. (1.67) y (1.68), la reflectancia y la transmitancia tienen el comportamiento dado en la figura 1.16.

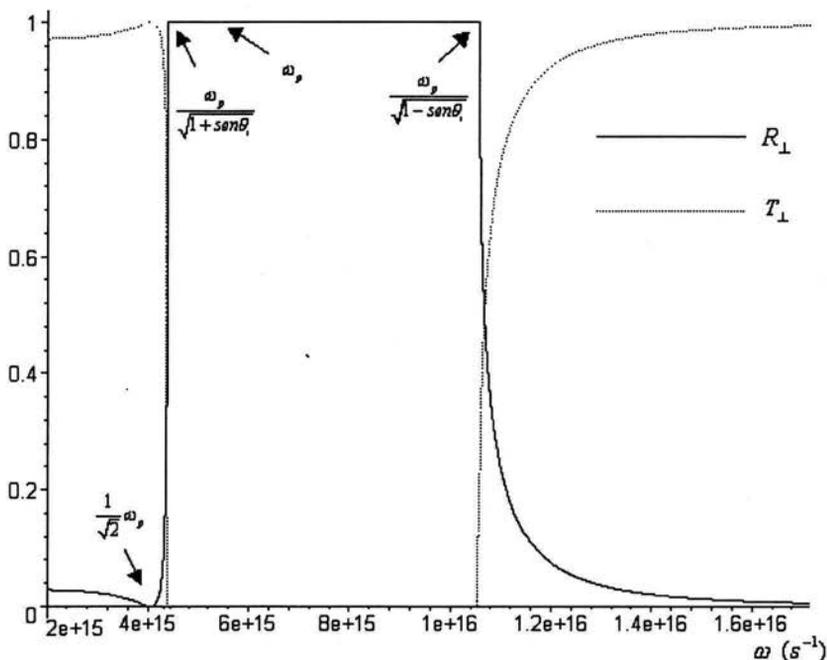


Fig. 1.16. Comportamiento de la reflectancia y transmitancia en el modelo de plasma

En esta figura se puede observar claramente lo que hemos discutido. Existe un solo valor para el cual la reflectancia se hace cero y corresponde al valor dado en la ecuación (1.96). Para el intervalo dado en la ecuación (1.100), la reflectancia es máxima y la totalidad de la energía es reflejada, por lo que el material izquierdo es totalmente opaco en este rango de frecuencias. De aquí también se puede ver un aspecto interesante acerca de que el índice de refracción es negativo para frecuencias por debajo de la frecuencia de plasma; de lo contrario, el valor para la frecuencia dado en la ec. (1.96)

representaría un polo de las ecuaciones de Fresnel (y no un cero), con lo que los valores de r y t divergen y las intensidades serían infinitas (fig. 1.17). Por arriba de la frecuencia de plasma el material se comporta como un material ordinario y en este caso sí es necesario considerar que $n' > 0$.

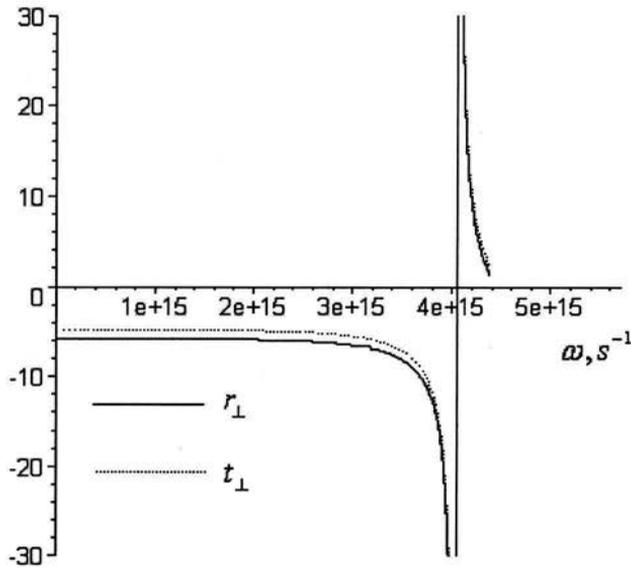


Fig. 1.17. Por debajo de la frecuencia de plasma, es necesario considerar al índice de refracción como negativo, de lo contrario, las amplitudes de los campos reflejados y transmitidos se hacen infinitos para $\omega_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_p$.

El comportamiento por debajo de la frecuencia de plasma es característico para medios izquierdos ya que requiere necesariamente el cambio de signo en el índice de refracción. Además no existe una simetría entre la región izquierda y la región de comportamiento ordinario, siendo característica para la primera la frecuencia de plamones superficiales. Este hecho, para nuestro sencillo modelo teórico sería suficiente para caracterizar el material izquierdo experimentalmente a través de un espectro de reflexión.

Capítulo 2.

2.1 Reflexión y Transmisión en Películas Delgadas.

En muchas ocasiones, debido a las características de un material, es difícil obtener una muestra en “bulto”. Como veremos más adelante, existen propuestas de sistemas de comportamiento izquierdo con dimensiones del orden de nanómetros, por lo que lo más sencillo de obtener es una muestra de la sustancia en forma de película delgada³⁰. Por otro lado, muchas de las técnicas experimentales para determinar los parámetros ópticos de un material³¹, se basan en la reflexión y transmisión de ondas electromagnéticas en películas delgadas. Por esta razón y motivados por la idea de tener herramientas para la caracterización de materiales izquierdos, se estudia la transmisión y reflexión de ondas electromagnéticas planas en una película de material izquierdo rodeado por sustancias ordinarias.

Suponga como hasta ahora que una onda electromagnética incide desde un medio ordinario con parámetros ϵ_1, μ_1, n_1 , sobre una película de material izquierdo con parámetros $\epsilon_2', \mu_2', n_2' < 0$ y grosor d . La película se encuentra sobre un sustrato de material ordinario con parámetros ϵ_3, μ_3, n_3 . (Figura 2.1).

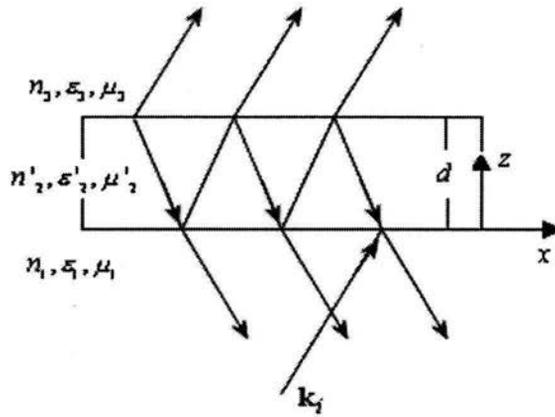


Fig. 2.1. Dentro de la película, la onda transmitida sufre múltiples reflexiones y transmisiones en las fronteras con los otros medios. En este caso representamos los vectores de onda.

Por lo que ya hemos visto en el capítulo anterior, parte de la onda será reflejada por la primera interfase, y parte será transmitida a la película. Dentro del material izquierdo la onda sufrirá múltiples reflexiones y transmisiones hacia el sustrato y de regreso al medio 1 hasta alcanzar un estado estacionario, es decir, la película forma una cavidad resonante. Por tanto, los coeficientes de reflexión y transmisión tendrán todas las contribuciones individuales debidas a las múltiples reflexiones y transmisiones en la película. Tal superposición de ondas electromagnéticas necesariamente hará que las ondas interfieran entre sí, por lo que, antes de trabajar con los coeficientes de reflexión y transmisión estudiaremos los aspectos más generales de interferencia.

2.2 Interferencia.

El fenómeno de interferencia es una consecuencia del principio de superposición, esto es, del hecho de que si ψ_1 y ψ_2 son soluciones de la ecuación de onda ec. (1.14), entonces $\psi = \psi_1 + \psi_2$ es también solución.

Suponga que dos ondas electromagnéticas \mathbf{E}_1 y \mathbf{E}_2 dadas por la ec. (1.17) se superponen en un punto del espacio, usando el principio de superposición el campo resultante está dado por^{16,18}

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{01} e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_{02} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} e^{-i\omega t}, \quad (2.1)$$

donde \mathbf{E}_{01} y \mathbf{E}_{02} son en general vectores complejos y cada componente tiene la forma dada por la ec. (1.28), una parte real y una fase. De la ec. (2.1) se tiene

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2. \quad (2.2)$$

De nuevo, para campos que varían armónicamente con el tiempo es conveniente estudiar solo los promedios temporales

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle_T = \langle \mathbf{E}_1^2 \rangle_T + \langle \mathbf{E}_2^2 \rangle_T + 2\langle \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \rangle_T. \quad (2.3)$$

Los términos $\langle \mathbf{E}_1^2 \rangle_T$ y $\langle \mathbf{E}_2^2 \rangle_T$ son independientes entre sí, por lo que toda la información de cómo interfieren las dos ondas se encuentra en el tercer término.

Si $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 = 0$, las ondas no interfieren. Como hemos visto en el capítulo 1, las ondas electromagnéticas son transversales, por lo que no habrá interferencia si éstas se encuentran polarizadas perpendicularmente entre sí. Como consecuencia de esto, solo las ondas electromagnéticas polarizadas paralelamente (o las componentes paralelas de ambos campos) interfieren entre sí.

Usando este hecho y sin pérdida de generalidad, supongamos que las ondas se encuentran polarizadas linealmente en la dirección y mientras que se propagan en el plano xz . El término de interferencia para campos complejos, usando las ecs. (2.1) y (1.28) esta dado por:

$$\begin{aligned} 2\langle \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} \rangle_T &= \text{Re}(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2^*) = \text{Re}(E_{1y} E_{2y} e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} + \alpha_1 - \alpha_2)}) = \\ &= E_{1y} E_{2y} \cos \beta \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\beta = (\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}) + (\alpha_1 - \alpha_2), \quad (2.5)$$

donde E_{1y} y E_{2y} son cantidades reales, y α_1 y α_2 las fases iniciales de los campos. Dado que la intensidad $I \propto \langle \mathbf{E}^2 \rangle_T$ la ecuación (2.3) se puede describir como:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \beta. \quad (2.6)$$

A β se le denomina la diferencia de fase total y tiene 2 componentes, la primera es la diferencia entre las fases iniciales de las amplitudes de los campos ($\alpha_1 - \alpha_2$), y el segundo es la diferencia de fase debida a la diferencia en el camino de propagación de la onda ($\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}$). De la ec. (2.6) podemos observar que la intensidad I posee máximos y mínimos dependiendo del valor de β : si $\beta = 2m\pi$ el valor de la intensidad será máximo y se dice que hay interferencia constructiva, mientras que si $\beta = (2m+1)\pi$ la intensidad es mínima y se dice que hay interferencia destructiva. Esto da lugar a los bien conocidos patrones de interferencia.

2.3 Principio de Fermat.

Debido a que la velocidad de propagación de la luz depende del medio, es conveniente definir una trayectoria equivalente para la luz en medios distintos y así poder evaluar sus diferencias de fase. Esta trayectoria equivalente se define en base a la trayectoria en el vacío y es conocida como la longitud de camino óptico. Así pues, la longitud de camino óptico entre dos puntos A y B en un medio con índice de refracción n , se define como la distancia que una onda recorrería en el vacío en el mismo tiempo en el que viaja de A a B en el medio actual; es decir, si la velocidad de propagación en el medio esta dada por v_p de la ecuación (1.15), el tiempo necesario para ir de A a B en el medio con índice de refracción n es: $\tau = \frac{\overline{AB}}{v_p}$, en

consecuencia, la longitud de camino óptico será: $c\tau = \overline{nAB}$.

De manera más precisa, la longitud de camino óptico está dada por la expresión:

$$\mathcal{L} = \int_A^B n dl . \quad (2.7)$$

Vemos que la definición de longitud de camino óptico está estrechamente vinculada con el índice de refracción n , por lo que es válido preguntarse que sucede en el caso de materiales izquierdos en que $n < 0$. Para estudiar esto, Veselago³² discute la relación entre otro principio físico fundamental, el principio de Fermat y el cambio de signo en el índice de refracción. En su formulación más común, el principio de Fermat establece que la luz viaja de un punto del espacio a otro por aquella trayectoria que minimice la longitud de camino óptico. Por ejemplo, en medios ordinarios, se puede demostrar que la ley de Snell será válida solo si se cumple el principio variacional $\delta\mathcal{L} = 0$, y entonces el camino óptico es mínimo y positivo¹⁶. Para

materiales izquierdos la longitud de camino óptico no necesariamente es mínimo o positivo; pero si estos materiales no violan ningún principio físico fundamental, la ley de Snell que se obtuvo en la ecuación (1.48) se debe derivar del mismo principio variacional $\delta\mathcal{L} = 0$, en cuyo caso, del camino óptico solo se puede asegurar que es un extremal. Así, Veselago aclara que la formulación correcta del principio de Fermat debe enunciar que el camino real de la luz corresponde a un extremo local de la longitud de camino óptico; con lo que en la ecuación (2.7), \mathcal{L} no está restringido a ser positivo y de hecho debe considerar el signo del índice de refracción.

2.4 Coeficientes de Reflexión y Transmisión.

Como se apuntó, estamos interesados en determinar los coeficientes de reflexión y transmisión para una onda electromagnética plana incidiendo sobre una película de material izquierdo. Para esto es necesario determinar la diferencia de fase total entre dos ondas que interfieren tras reflejarse sobre distintas caras de una película. Suponga que la radiación incide a un ángulo θ_i en un punto A (fig. 2.2) del plano xz ; parte de la amplitud de la onda es reflejada en la primera interfase y parte es transmitida a un ángulo θ_t hacia B. Dentro de la película, la onda es reflejada en la segunda interfase (B) y posteriormente retransmitida al medio 1 (C). La onda retransmitida, de acuerdo a la ley de Snell ec. (1.48) será paralela al primer haz reflejado, de tal forma que si ambas ondas se hacen converger en un punto P (por ejemplo, mediante una lente), habrá interferencia entre los campos.

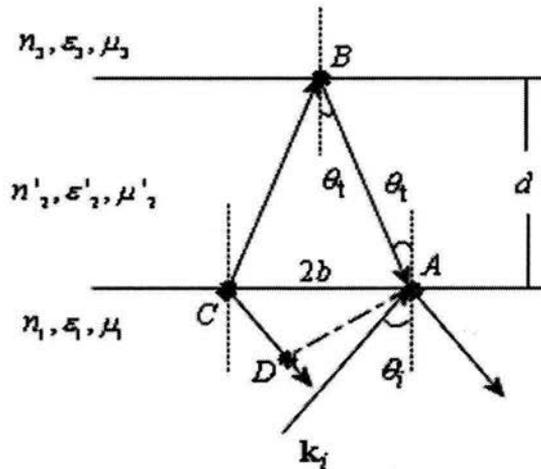


Fig. 2.2. Película de material izquierdo de índice de refracción $n'_2 < 0$, los haces que emergen de la película tendrán una diferencia de fase entre sí. A partir de A y D, ambas ondas recorren la misma longitud de camino.

Para determinar la diferencia de fase total debido a las reflexiones y transmisiones en las caras de la película, usaremos el modelo geométrico de la figura 2.2 y el concepto de diferencia de camino óptico entre las ondas introducido con anterioridad. Si suponemos que las condiciones iniciales son tales que la diferencia de fases inicial es igual a cero, por ejemplo cuando ambas ondas provienen de la división de la amplitud de una misma onda electromagnética incidente, en este caso

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0. \quad (2.8)$$

Así, la diferencia de fase total β solo se debe a la reflexión y transmisión a través de la película y por tanto solo contribuye la diferencia de camino óptico recorrido por ambas ondas. Como se observa en la figura 2.2, los caminos ópticos a partir de C y D son iguales para ambos rayos, por lo que la diferencia de camino óptico para ambos rayos estará dada por

$$\Delta\mathcal{L} = n'_2 (\overline{AB} + \overline{BC}) - n_1 \overline{CD}. \quad (2.9)$$

Usando la misma figura 2.2 encontramos

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{d}{\cos\theta_i} \quad (2.10)$$

$$\overline{CD} = 2b \operatorname{sen}\theta_i = 2d \tan\theta_i \operatorname{sen}\theta_i. \quad (2.11)$$

Usando las ecs. (1.48), (2.10) y (2.11), la diferencia de camino óptico recorrido es

$$\Delta\mathcal{L} = n'_2 \frac{2d}{\cos\theta_i} - n_1 2d \tan\theta_i \operatorname{sen}\theta_i = 2dn'_2 \cos\theta_i. \quad (2.12)$$

De las ecs. (2.5), (2.8) y (2.12), la diferencia de fase total

$$\beta = \frac{\omega}{c} \Delta L = \frac{2d\omega}{c} n'_2 \cos \theta_i. \quad (2.13)$$

Evidentemente, podemos hacer la misma consideración para la luz transmitida. Se puede mostrar¹⁶ que la diferencia de camino óptico entre dos haces consecutivos es igual a la expresión dada en la ec. (2.12) y por tanto la diferencia de fases viene dada por la ec. (2.13), por lo que cada rayo refractado tiene una diferencia de fase igual a β respecto del anterior.

En el caso general mostrado en la figura 2.1, la onda experimenta múltiples reflexiones y transmisiones en las caras de la película, por lo que una serie de haces de amplitud cada vez menor emerge de cada una de las caras. Cuando la reflectancia de las superficies es baja, una buena aproximación es despreciar los haces que sufran más de dos reflexiones, como en el caso de la figura 2.2, pero en general, hay que considerar todos haces reflejados en la película.

Suponga que una onda plana monocromática ec. (1.17) incide sobre la película; por simplicidad suponga que la onda esta polarizada linealmente y perpendicular al plano de incidencia (plano xz), recordemos que para el caso de polarización paralela al plano de incidencia es suficiente intercambiar $H \rightarrow E$ y $\mu \rightarrow \varepsilon$. Sea E_{0i} la amplitud (compleja) de la onda incidente; como hemos visto cada una de las fases de las ondas reflejadas sucesivas y transmitidas sucesivas difiere de la anterior por β ec. (2.13). Las amplitudes de cada una de las ondas respecto de la onda incidente está determinada por los coeficientes de Fresnel ecs. (1.52) y (1.53). Denotando por r_{ab} y t_{ab} los coeficientes de reflexión y transmisión respectivamente para cuando la onda viaja del medio a al medio b , se tiene que la amplitud de la primera onda reflejada esta dada por $r_{12}E_{0i}$. La amplitud de la siguiente onda reflejada será el resultado de la

transmisión en la primera frontera, la reflexión en la segunda cara y la retransmisión nuevamente en la primera de ellas; considerando el cambio de fase, la segunda onda reflejada es $t_{12}r_{23}t_{21}E_{0i}e^{i\beta}$, procediendo de forma análoga, las amplitudes de las ondas reflejadas son^{16,31}

$$r_{12}E_{0i}, t_{12}r_{23}t_{21}E_{0i}e^{i\beta}, t_{12}r_{23}r_{21}r_{23}t_{21}E_{0i}e^{2i\beta}, t_{12}r_{23}r_{21}r_{23}r_{21}r_{23}t_{21}E_{0i}e^{3i\beta} \dots$$

El coeficiente de reflexión, estará dado por la suma de todas las amplitudes reflejadas, es decir:

$$\begin{aligned} r &= r_{12} + t_{12}r_{23}t_{21}e^{i\beta} + t_{12}r_{23}r_{21}r_{23}t_{21}e^{2i\beta} + t_{12}r_{23}r_{21}r_{23}r_{21}r_{23}t_{21}e^{3i\beta} + \dots = \\ &= r_{12} + t_{12}r_{23}t_{21}e^{i\beta} \left[1 + (r_{23}r_{21}e^{i\beta}) + (r_{23}r_{21}e^{i\beta})^2 + (r_{23}r_{21}e^{i\beta})^3 + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Usando que la suma de la serie geométrica

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}; |x| < 1, \quad (2.15)$$

el coeficiente de reflexión queda como

$$r = r_{12} + \frac{t_{12}r_{23}t_{21}e^{i\beta}}{1 - r_{23}r_{21}e^{i\beta}}. \quad (2.16)$$

Para las ondas transmitidas el procedimiento es análogo; recordemos que el cambio en la fase de los campos es debido a que la onda cruza la película, por lo que la primera onda transmitida (que solo la cruza una vez) tendrá un cambio de fase igual a $\beta/2$, es decir: $t_{12}t_{23}E_{0i}e^{i\beta/2}$.

El resto de las ondas tendrá una diferencia de fase igual a β respecto de la anterior, las amplitudes de las ondas transmitidas son

$$t_{12}t_{22}E_0e^{i\frac{\beta}{2}}, t_{12}r_{23}r_{21}t_{23}E_0e^{i\frac{3\beta}{2}}, t_{12}r_{23}r_{21}r_{23}r_{21}t_{23}E_0e^{i\frac{5\beta}{2}}, t_{12}r_{23}r_{21}r_{23}r_{21}r_{23}r_{21}t_{23}E_0e^{i\frac{7\beta}{2}} \dots$$

por lo que el coeficiente de transmisión será

$$\begin{aligned} t &= t_{12}t_{22}e^{i\frac{\beta}{2}} + t_{12}r_{23}r_{21}t_{23}e^{i\frac{3\beta}{2}} + t_{12}r_{23}r_{21}r_{23}r_{21}t_{23}e^{i\frac{5\beta}{2}} + t_{12}r_{23}r_{21}r_{23}r_{21}r_{23}r_{21}t_{23}e^{i\frac{7\beta}{2}} \dots = \\ &= t_{12}t_{22}e^{i\frac{\beta}{2}} \left[1 + (r_{23}r_{21}e^{i\beta}) + (r_{23}r_{21}e^{i\beta})^2 + (r_{23}r_{21}e^{i\beta})^3 + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.17)$$

Usando de nuevo la ec. (2.15)

$$t = \frac{t_{12}t_{23}e^{i\frac{\beta}{2}}}{1 - r_{23}r_{21}e^{i\beta}} \quad (2.18)$$

Se puede mostrar³¹ que los coeficientes de Fresnel, cuando cambia la dirección de propagación, cumplen con la siguiente propiedades:

$$r_{ba} = -r_{ab} \quad (2.19)$$

$$t_{ba} = \frac{1 - r_{ab}^2}{t_{ab}} \quad (2.20)$$

Sustituyendo estas relaciones en las ecuaciones (2.16) y (2.18) obtenemos

$$r = \frac{r_{12} + r_{23}e^{i\beta}}{1 + r_{23}r_{12}e^{i\beta}} \quad (2.21)$$

$$t = \frac{t_{12}t_{23}e^{i\frac{\beta}{2}}}{1 + r_{23}r_{12}e^{i\beta}}. \quad (2.22)$$

Estas ecuaciones son los coeficientes de reflexión y transmisión a través de la película. Expresiones similares se obtienen para el caso en que el campo eléctrico esta polarizado paralelamente al plano de incidencia, con la diferencia de que los coeficientes de Fresnel involucrados estarán dados por las ecs. (1.60) y (1.61).

En el caso límite en que el grosor de la película $d \rightarrow 0$ debemos recuperar los coeficientes de Fresnel para la interfase del medio 1 con el medio 3. De las ecs. (2.21) y (2.22) tendremos que

$$r_{13} = \frac{r_{12} + r_{23}}{1 + r_{23}r_{12}}, \quad (2.23)$$

$$t_{13} = \frac{t_{12}t_{23}}{1 + r_{23}r_{12}}. \quad (2.24)$$

Se puede verificar que efectivamente estas expresiones se reducen a las ecuaciones (1.49) y (1.50) para los medios 1 y 3.

De las ecs. (1.65) y (1.66), la reflectancia y transmitancia son

$$R = |r|^2 = \frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 + 2r_{12}r_{23} \cos \beta}{1 + r_{23}^2 r_{12}^2 + 2r_{23}r_{12} \cos \beta} \quad (2.25)$$

$$T = \frac{\cos \theta_3}{\cos \theta_i} |t|^2 = \frac{\cos \theta_3}{\cos \theta_i} \frac{t_{12}^2 t_{23}^2}{1 + r_{23}^2 r_{12}^2 + 2r_{23}r_{12} \cos \beta}, \quad (2.26)$$

donde θ_3 es el ángulo de refracción del medio 3. Las ecuaciones (2.21) y (2.22) representan en general cantidades complejas, por lo que los cambios de fase totales para la reflexión y para la transmisión (δ_r , δ_t) están dadas por

$$\tan \delta_r = \tan(\arg r) = \frac{r_{23}(1-r_{12}^2)\text{sen}\beta}{r_{12}(1+r_{23}^2)+r_{23}(1+r_{12}^2)} \quad (2.27)$$

$$\tan \delta_t = \tan(\arg t) = \frac{1-r_{12}r_{23}}{1+r_{12}r_{23}} \tan \frac{\beta}{2}. \quad (2.28)$$

Suponga por simplicidad, que la luz incide normalmente sobre la película de material izquierdo, en cuyo caso los coeficientes de Fresnel están dados por las ecs. (1.62) y (1.63). Suponga además, como en la sección 1.2.3., que $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -\varepsilon'_2$, $\mu_1 = \mu_3 = -\mu'_2$ y $n_1 = n_3 = -n'_2$. En este caso, $r_{12} = r_{23} = 0$ y $t_{12} = t_{23} = 1$, sustituyendo en las ecs. (2.21) y (2.22), obtendremos

$$r = 0 \quad (2.29)$$

$$t = e^{\frac{i\beta}{2}} = e^{ik'_{2z}d}. \quad (2.30)$$

Por lo que no existe onda reflejada y toda la energía es transmitida, hecho que solo ocurre en materiales izquierdos bajo estas condiciones. Junto con el posible enfocamiento, este hecho ha motivado la idea de crear lentes de materiales izquierdos.

2.5 Lente de Material Izquierdo.

El hecho de que una película de material izquierdo pueda transmitir la totalidad de la onda incidente fue estudiado por Pendry² para el caso particular en el que $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -\varepsilon'_2 = 1$ y $\mu_1 = \mu_3 = -\mu'_2 = 1$. Esta característica de los materiales izquierdos puede permitir la creación de novedosos sistemas como la lente plana de la figura I2; además Pendry mostró un hecho nuevo en materiales izquierdos, de la ecuación (1.23) fácilmente se puede obtener la siguiente relación

$$k_z = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}, \quad \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} > k_x^2 + k_y^2. \quad (2.31)$$

Como ya hemos visto, el signo negativo debe ser tomado para materiales izquierdos. Para ciertos valores de ε y μ , la onda se propaga por el medio para aquellas frecuencias que cumplan con que $\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} > k_x^2 + k_y^2$, de lo contrario, k_z en la ec. (2.31) es complejo:

$$k_z = +i\sqrt{k_x^2 + k_y^2 - \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2}}, \quad \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} < k_x^2 + k_y^2. \quad (2.32)$$

Cuando esto ocurre, sustituyendo en la ec. (1.14) podemos observar que el campo decae exponencialmente con la profundidad del medio z (ondas evanescentes) y la onda no se propaga. Como muestra Pendry, es necesario tomar solo el signo positivo para k_z en la ec. (2.32), aún para materiales izquierdos, con la finalidad de que los campos decaigan. Con esto, para el caso de la película de material izquierdo podemos construir la siguiente tabla para las componentes k_z en los distintos medios:

	Ondas Propagadas $\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} > k_x^2 + k_y^2$	Ondas Evanescentes $\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} < k_x^2 + k_y^2$
$k_{1z} = k_{3z}$	$+\sqrt{\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}$	$+i\sqrt{\frac{\varepsilon\mu\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}$
k'_{2z}	$-\sqrt{\frac{\varepsilon'\mu'\omega^2}{c^2} - k_x'^2 - k_y'^2}$	$+i\sqrt{\frac{\varepsilon'\mu'\omega^2}{c^2} - k_x'^2 - k_y'^2}$

Tabla I. Se comparan las componentes k_z para ondas que se propagan y ondas evanescentes.

En el caso en que $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = -\varepsilon'_2 = 1$ y $\mu_1 = \mu_3 = -\mu'_2 = 1$, de la tabla 1 podemos obtener la siguiente relación para ondas que se propagan

$$k'_{2z} = -k_{1z} = -k_{3z}, \quad (2.33)$$

mientras que para ondas evanescentes

$$k'_{2z} = k_{1z} = k_{3z}. \quad (2.34)$$

Ahora, expresemos la ecuación (2.22) usando las ecuaciones de Fresnel dadas por (1.52) y (1.53) (el resultado es análogo para la polarización s y polarización p):

$$t = \frac{-4k_{1z}k'_{2z}e^{ik'_{2z}d}}{(-k_{1z} + k'_{2z})^2 - (k_{1z} + k'_{2z})^2 e^{2ik'_{2z}d}}, \quad (2.35)$$

Por lo que sustituyendo en las ecs. (2.33) y (2.34):

$$t_{prop} = e^{ik'_{2z}d} = e^{-ik_{1z}d} \quad (2.36)$$

$$t_{evan} = e^{-ik_2 z d} = e^{-ik_1 z d} . \quad (2.37)$$

Podemos ver que las ondas propagadas se transmiten íntegramente, como ya habíamos mencionado. Pero hay un resultado nuevo: también las ondas evanescentes son transmitidas. Pendry concluye que el medio izquierdo transmite las ondas evanescentes y que estas, junto con las ondas propagadas deberían contribuir a la resolución de la imagen. Pendry hace otra afirmación, menciona que la lente de material izquierdo podría amplificar las ondas evanescentes con lo que una placa de material izquierdo podría funcionar como una lente perfecta.

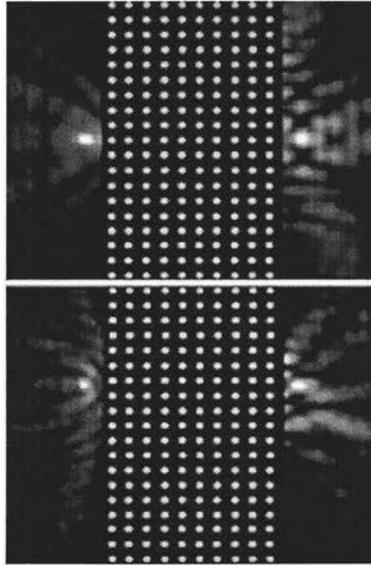


Fig. 2.3. Una fuente de microondas se coloca frente a un arreglo periódico de cilindros de alúmina. El sistema (cristal fotónico) muestra comportamiento izquierdo para este rango de frecuencia. Se puede observar la imagen de la fuente formada del lado opuesto del material, y además muestra que el sistema no tienen un eje óptico único tras desplazar la fuente. Fuente: P. V. Parimi *et al. Nature*. **426**, 404 (2003).

Además del gran respaldo a esta idea, ya existe evidencia experimental de que los medios izquierdos actúan como lentes^{19-23,33} (fig. 2.3) aunque no de manera perfecta como afirma Pendry, la evidencia experimental muestra que la formación de imágenes en lentes planas de material izquierdo esta restringida por grandes disipaciones, inhomogeneidades y la anisotropía del material.

2.6 Dispersión.

Ahora, volvamos a nuestro modelo de dispersión que hemos definido por las ecuaciones (1.91), (1.93) y (1.94). Suponga que el medio 1 y el medio 3 son el vacío ($\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 1$, $\mu_1 = \mu_3 = 1$), entonces es inmediato que $r_{13} = 0$ y $t_{13} = 1$, sustituyendo en las ecs. (2.23) y (2.24) se tiene

$$r_{12} = -r_{23} \quad (2.38)$$

$$1 - r_{12}^2 = t_{12}t_{23}, \quad (2.39)$$

y de las ecs. (2.21) y (2.22) se sigue que

$$r = \frac{r_{12}(1 - e^{i\beta})}{1 - r_{12}^2 e^{i\beta}} \quad (2.40)$$

$$t = \frac{(1 - r_{12}^2)e^{i\frac{\beta}{2}}}{1 - r_{12}^2 e^{i\beta}}. \quad (2.41)$$

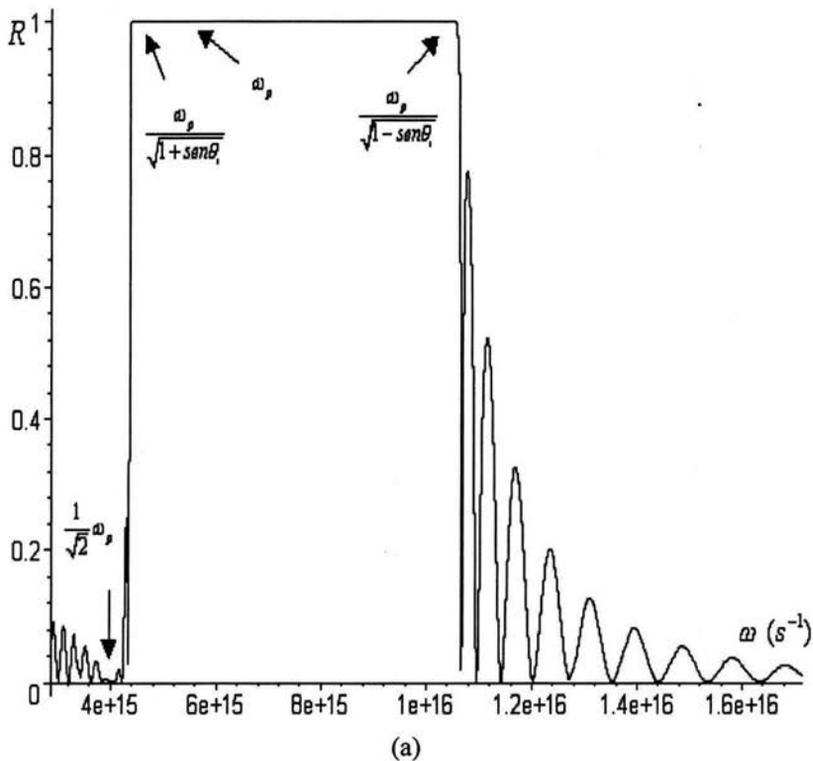
Mientras que la reflectancia y la transmitancia están dadas por

$$R = \frac{2|r_{12}|^2 - 2|r_{12}|^2 \cos \beta}{1 + |r_{12}|^4 - 2|r_{12}|^2 \cos \beta} \quad (2.42)$$

$$T = \frac{\mu_1 n_3 \cos \theta_3}{\mu_3 n_1 \cos \theta_1} \frac{(1 - |r_{12}|^2)^2}{1 + |r_{12}|^4 - 2|r_{12}|^2 \cos \beta} \quad (2.43)$$

Sustituyendo las ecuaciones del modelo de plasma para un ángulo de incidencia de 45° y un espesor $d=1\mu\text{m}$, la reflectancia y transmitancia tienen el comportamiento de la figura 2.4, podemos observar que los valores para R y T fluctúan como función de la frecuencia.

Al igual que en el caso de una sola interfase, la potencia reflejada se anula para $\omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$, ya que por separado todos los términos $|r_{12}|^2 = 0$ como hemos visto en la sección 1.2.7. Sustituyendo en las ecs. (2.42) y (2.43) es inmediato que $R=0$ y $T=1$, recordemos que para este valor $n' = -1$.



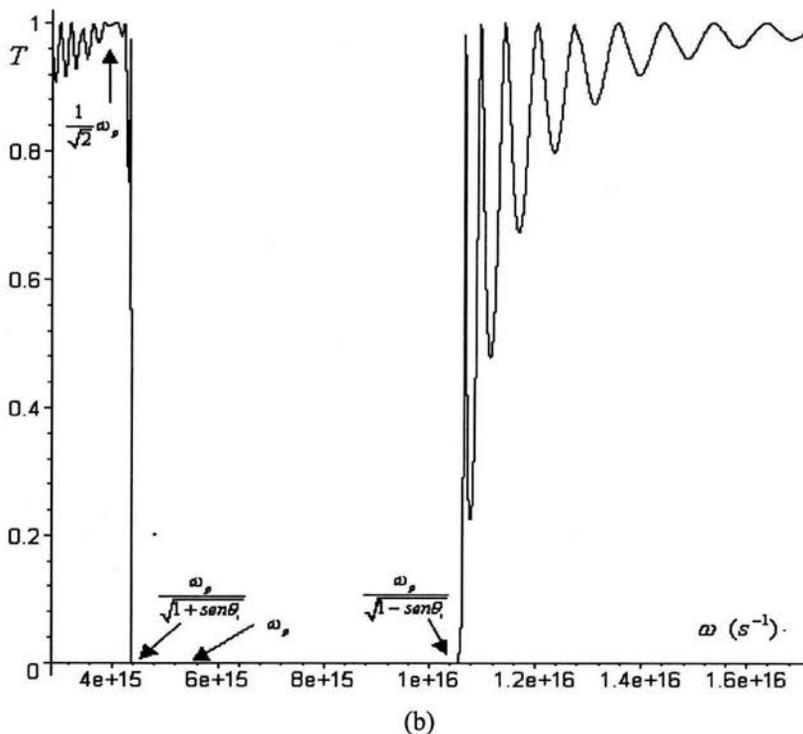


Fig. 2.4. (a) Reflectancia como función de la frecuencia para una película de material izquierdo de $1\mu\text{m}$ de grosor. (b) Transmitancia como función de la frecuencia.

La reflectancia vuelve a ser máxima para el intervalo definido por la ecuación (1.100), es decir, para $4.37 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} < \omega < 1.05 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$. En esta región, los términos $|r_{12}|^2 = 1$, por lo que sustituyendo en las ecs. (2.42) y (2.43) tenemos $R=1$ y $T=0$.

Como ya hemos visto este intervalo depende del ángulo de incidencia, por lo que la región de máxima reflectancia será más o menos angosta dependiendo si el ángulo es mayor o menor. Eventualmente, a incidencia normal, este intervalo colapsaría a una sola frecuencia, la frecuencia de plasma. A pesar de las fluctuaciones, el comportamiento de la reflectancia y la transmitancia

es similar al mostrado para una sola interfase en la figura 1.16, como se muestra en la siguiente figura.

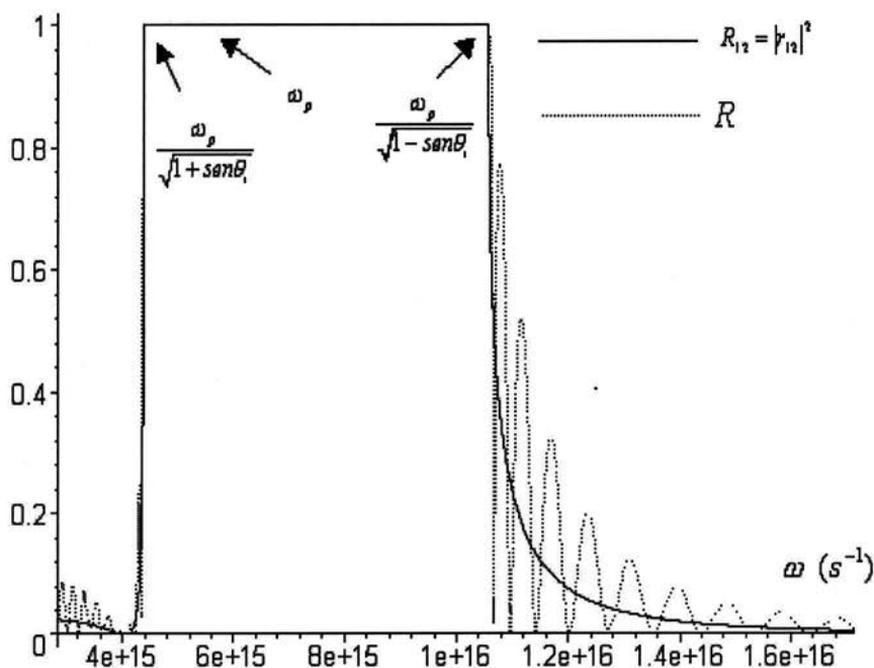


Fig. 2.5. Las reflectancias para una sola interfase R_{12} y para la película delgada R tienen un comportamiento análogo.

El grosor de la película afecta directamente los periodos de oscilación en la reflectancia, pero no la forma general mostrada en la figura 2.5, esto debido a que los coeficientes $|r_{12}|^2$ no dependen del espesor. En la figura 2.6 se compara la reflectancia para una película de $1\mu\text{m}$ y de $0.5\mu\text{m}$.

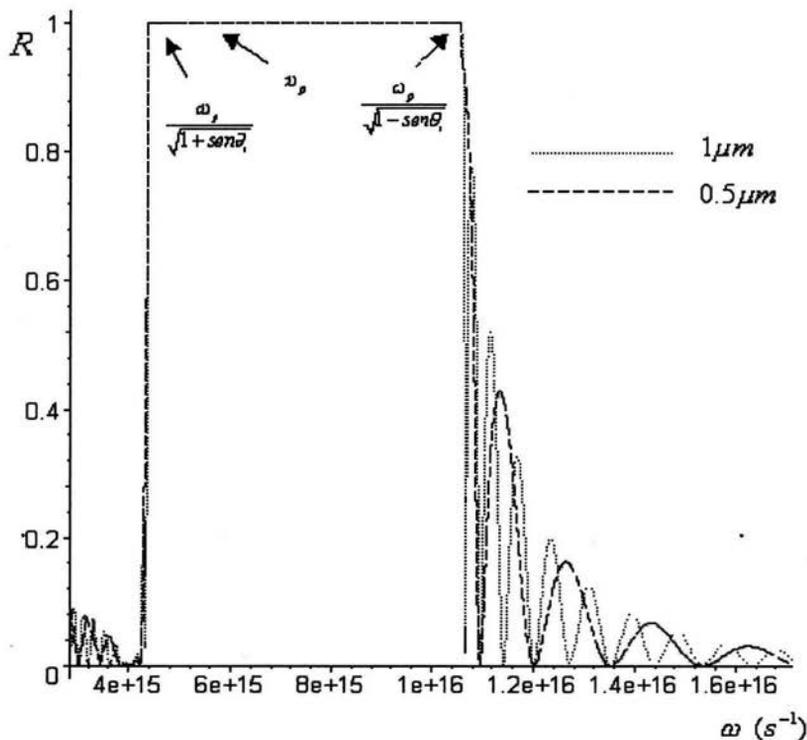


Fig. 2.6. El grosor de la película determina el periodo de las oscilaciones en la reflectancia. La forma cualitativa de la reflectancia no se ve alterada por la variación en el grosor.

Podemos ver que el comportamiento por encima y por debajo de la frecuencia de plasma es asimétrico, por lo que para nuestro sencillo modelo sería posible determinar si un medio es izquierdo o no a partir de un espectro de reflexión, donde un indicio inequívoco de comportamiento izquierdo estaría relacionada, como hemos visto, con la frecuencia $\omega_s = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_p$.

2.7 Determinación de ϵ y μ .

Sin duda, un aspecto importante para el desarrollo de materiales izquierdos es poder determinar a partir de datos experimentales los parámetros ópticos del medio. Como ya hemos mencionado, las evidencias experimentales muestran que los materiales izquierdos construidos son inhomogéneos y anisotrópicos. Sin embargo, como una primera aproximación para determinar el índice de refracción n y la impedancia del medio Z , podemos regresar a las expresiones obtenidas para el coeficiente de reflexión y transmisión en una película delgada lineal, homogénea e isotrópica. De nuevo supongamos que los medios 1 y 3 son el vacío y que la onda incide normalmente a la superficie. Usando la definición de impedancia ec. (1.64) de donde $Z_1 = Z_3 = 1$, después de algunos cálculos podemos describir las ecs. (2.21) y (2.22) usando las ecs. (1.62) y (1.63) como

$$r = -\frac{it}{2} \left(Z_2 - \frac{1}{Z_2} \right) \text{sen} \frac{\beta}{2} \quad (2.44)$$

$$t = \frac{1}{\cos \frac{\beta}{2} - \frac{i}{2} \left(Z_2 + \frac{1}{Z_2} \right) \text{sen} \frac{\beta}{2}} \quad (2.45)$$

Estas ecuaciones se pueden invertir para encontrar n_2' y Z_2 en términos de r y t ³⁴

$$\cos \frac{\beta}{2} = \cos \left(\frac{\omega}{c} n_2' d \right) = \frac{1}{2t} [1 - (r^2 - t^2)] \quad (2.46)$$

$$Z_2 = \pm \sqrt{\frac{(1+r)^2 - t^2}{(1-r)^2 - t^2}}. \quad (2.47)$$

Una vez que se conoce n_2' y Z_2 se pueden determinar la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética como

$$\varepsilon'_2 = \frac{n_2'}{Z_2} \quad (2.48)$$

$$\mu'_2 = n_2' Z_2. \quad (2.49)$$

Como apunta Smith³⁴, en general n_2' y Z_2 involucradas en las expresiones (2.46) y (2.47) son cantidades complejas que pueden llevar a ambigüedades en sus expresiones finales, por lo que es necesario hacer uso de toda la información que se tenga del material para evitarlas. Como ya hemos visto, la parte real de la impedancia siempre es una cantidad positiva:

- $Re(Z_2) > 0$, lo cual determinaría el signo de la raíz en la ec. (2.47).

Para el índice de refracción es más complicado determinar sin ambigüedades el signo, debido a que la función \cos^{-1} es una función multivaluada. Como menciona Smith³⁴ y Markos³⁵ un conjunto de soluciones aceptables está determinado por la siguiente condición que define a los medios pasivos:

- $Im(n_2') > 0$, que determinaría el signo en la ec. (2.46).

Con esto, la parte real del índice de refracción estará determinada hasta un factor $2\pi m/(kd)$ con m entero, por lo que finalmente:

- Es necesario utilizar datos experimentales para diversos valores de d .

De esta manera, es posible determinar el signo de la parte real del índice de refracción.

Con esta información experimental que se puede obtener por técnicas de reflectometría o elipsometría, es posible determinar Z y n junto con sus respectivos signos (para la parte real), y así caracterizar el material determinando si existe comportamiento izquierdo.

Capítulo 3.

3.1 Una Primera Aproximación a un Material Izquierdo.

Actualmente, existen varias propuestas para construir experimentalmente materiales izquierdos. Como ya hemos apuntado, la dificultad radica en que tanto la permitividad eléctrica como la permeabilidad magnética sean ambas negativas para un mismo rango de frecuencias.

Entre los sistemas propuestos están materiales como la plata, que según Pendry² en la región en que $\varepsilon(\omega) < 0$ presenta ciertas características de material izquierdo, como la posibilidad de ser usada para la creación de lentes perfectas. Tal metal puede ser descrito por un modelo tan sencillo como el de la ecuación (1.91). En este sentido, de forma paralela a nuestro trabajo ha aparecido evidencia experimental contundente de que películas de plata pueden actuar como lentes planas en la región del visible³⁶.

Chui y Hu³⁷ han estudiado la posibilidad de incorporar nanopartículas metálicas ferromagnéticas en una matriz dieléctrica controlando las direcciones de magnetización (compuestos granulares).

La mayoría de las propuestas son materiales compuestos en arreglos espaciales periódicos y con variaciones en las funciones dieléctricas de los medios constituyentes. Tales materiales son conocidos como cristales fotónicos^{9,38-40}. Entre estas propuestas se encuentra la de Shvets⁴¹ quien propone la creación de guías de onda dieléctricas, que consisten en regiones alternadas de vacío rodeadas por algún material dieléctrico. Tales guías estarían distribuidas en arreglos periódicos como redes cuadradas o triangulares. Los medios estratificados⁴² alternan materiales en los que $\varepsilon_1 < 0, \mu_1 > 0$ y $\varepsilon_2 > 0, \mu_2 < 0$, dando como resultado regiones en las que el índice de refracción efectivo es

negativo. Mallas de cobre de red cuadrada apiladas⁴³ o materiales como los de la figura I4, propuestos por Smith *et al.*, compuestos de anillos concéntricos resonantes.

La mayoría de estos materiales prevén una respuesta para el rango de microondas, siendo aun pocos los trabajos en otras regiones del espectro. Esto debido a que las dimensiones de las estructuras construidas son fáciles de manejar y producir para la región de las microondas. Consideramos importante el desarrollo de materiales izquierdos para la región del visible, donde podríamos pensar se tendría un impacto aún mayor y múltiples aplicaciones, por ejemplo como lentes. Por otro lado, la mayoría de los trabajos mencionados representan una gran complejidad tanto experimental como teórica, siendo muy difícil describir y simular posibles resultados.

De entre el gran número de propuestas existentes consideramos de particular interés el propuesto por Podolskiy, Sarychev y Shalaev³⁰ (PSS). Comparado con otros modelos, PSS representa una opción que se puede implementar con mayor facilidad en el laboratorio. La idea general del modelo consiste en un arreglo de nanoalambres metálicos paralelos entre sí, para los cuales existen expresiones bien conocidas de ϵ y μ . Estas expresiones hacen posible la simulación de la respuesta del medio para distintos rangos de frecuencia en los que se podría tener un comportamiento izquierdo, entre ellos, la región del visible. Una de las grandes virtudes del modelo PSS es el hecho de que los parámetros ópticos dependen fuertemente de la geometría del arreglo, por lo que en principio tendríamos la posibilidad de obtener un material izquierdo para distintas regiones espectrales simplemente variando la geometría del sistema.

Aún cuando los cristales fotónicos parecen la opción mas viable en la construcción de materiales izquierdos, el modelo PSS representa una primera aproximación mucho más sencilla, que gracias a la teoría bien conocida y a las técnicas experimentales disponibles podría ser llevado al laboratorio con posibilidades de éxito.

3.2 Modelo PSS.

Podolskiy *et al.*³⁰, han abordado el problema de la distribución de campos electromagnéticos en sistemas de nanoalambres metálicos. En dicho trabajo, realizan simulaciones numéricas de las distribuciones de los campos en nanoalambres individuales y sistemas compuestos de nanoalambres tras hacer incidir ondas planas monocromáticas. Sus resultados para nanoalambres individuales sugieren que la excitación de plasmones de superficie y su acoplamiento con los fotones de la luz incidente (polaritones²⁵), dan como resultado la existencia de resonancias para los plasmones como función de la longitud del nanoalambre. Para una distribución de nanoalambres, sus resultados sugieren la existencia de modos de plasmón localizados y campos locales muy fuertes asociados a estos modos.

Como un caso particular, analizan un sistema formado por una película delgada compuesta por pares de nanoalambres metálicos paralelos entre sí separados por una distancia d . Cada alambre tiene una longitud $2b_1$ y diámetro $2b_2$, de tal forma que $b_2 \ll d \ll b_1$, y están inmersos en una matriz dieléctrica con permitividad ϵ_d (Fig. 3.1). Una onda electromagnética incide normalmente a la superficie, de tal forma que el campo eléctrico es paralelo a los nanoalambres y el campo magnético es perpendicular a ellos.

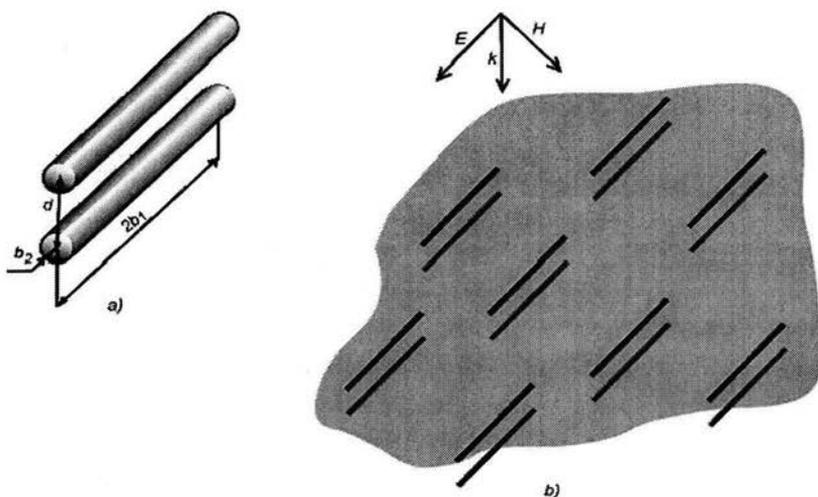


Fig. 3.1. (a) En el sistema, los nanoalambres están distribuidos por pares y son paralelos entre sí, se muestran los distintos parámetros geométricos. La onda plana incidente es tal que el campo eléctrico es paralelo a los pares de nanoalambres.

Para determinar las características ópticas del sistema, es necesario determinar la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica efectivas del compuesto. Para esto, asumiremos que los campos interactúan con un par de nanoalambres de manera independiente al resto de los pares en el compuesto. El campo magnético externo dado por la ec. (1.18) es aplicado perpendicularmente al plano formado por el par de alambres. Dicho campo magnético oscilante en el tiempo induce corrientes en los alambres, de tal forma que fluyen en direcciones opuestas en cada uno de ellos. Las corrientes de desplazamiento inducidas entre los alambres cierran el circuito (Fig. 3.2). La corriente inducida J en el circuito puede ser determinada por la ecuación del telegrafista¹⁴:

$$\frac{1}{C} \frac{\partial^2 J}{\partial z^2} - R \frac{\partial J}{\partial t} - \frac{L}{c^2} \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = 0. \quad (3.1)$$

Con C , R y L son la capacitancia, la resistencia y la autoinductancia del circuito respectivamente, las expresiones para cada una de ellas son conocidas (ver por ejemplo Ref.[14], secciones 3 y 33 y Ref.[44]). Explícitamente solo necesitaremos la expresión para la capacitancia:

$$C = \frac{\epsilon_d}{4 \ln\left(\frac{d}{b_2}\right)}. \quad (3.2)$$

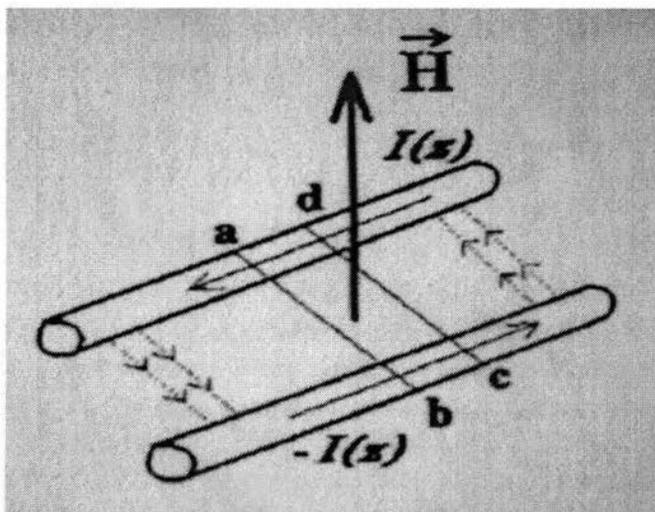


Fig. 3.2.El campo magnético es perpendicular al plano de los nanoalambres. Dicho campo induce corrientes en los alambres y corrientes de desplazamiento que cierran el circuito.

El campo magnético excita los momentos magnéticos en los pares que están asociados a las corrientes inducidas. El momento magnético está dado por:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \int \mathbf{r} \times \mathbf{J}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (3.3)$$

Integrando sobre el circuito se obtiene⁴⁴:

$$m = 2H_0 b_1^3 C(kd)^2 \frac{\tan(gb_1) - gb_1}{(gb_1)^3}, \quad (3.4)$$

donde

$$g = k \sqrt{\varepsilon_d + i \frac{\varepsilon_d}{2\Delta^2 f(\Delta) \ln\left(\frac{d}{b_2}\right)}}. \quad (3.5)$$

Aquí Δ es la razón del radio del nanoalambre respecto de la longitud de penetración del campo eléctrico asociado en el conductor, mientras que la función $f(\Delta)$ se ha introducido para tomar en cuenta efecto de superficie del conductor, estas expresiones tienen la forma¹⁴:

$$\Delta = \frac{b_2}{c} \sqrt{2\pi\sigma_m \omega} \quad (3.6)$$

$$f(\Delta) = \frac{(1-i) J_1[(1+i)\Delta]}{\Delta J_0[(1+i)\Delta]}, \quad (3.7)$$

donde σ_m es la conductividad de los nanoalambres, J_0 y J_1 son las funciones de Bessel de primera clase de orden cero y uno respectivamente.

Por otro lado, el campo eléctrico incidente también induce corriente en los alambres, que se consideran como independientes entre sí. Tal sistema de nanoalambres puede ser considerado como un sistema de dipolos eléctricos⁴⁴. El campo eléctrico será el encargado de excitar los plasmones en los alambres.

Nuevamente, hay que determinar la corriente inducida por el campo eléctrico con la cual podremos calcular la distribución de carga y por tanto la el momento dipolar del sistema. El cálculo es más complejo que en el caso del momento magnético, y se puede consultar en la Ref.[44]; el momento dipolar para los nanoalambres esta dado por

$$d_E = \frac{2}{3} b_1 b_2^2 f(\Delta) E_{0i} \varepsilon_m \frac{1}{1 + f(\Delta) \varepsilon_m \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 \ln\left(1 + \varepsilon_d \frac{b_1}{b_2}\right) \cos \Omega}, \quad (3.8)$$

donde la frecuencia adimensional Ω se define como

$$\Omega^2 = (b_1 k)^2 \frac{\ln\left(\frac{b_1}{b_2}\right) + i\sqrt{\varepsilon_d} k b_1}{\ln\left(1 + \varepsilon_d \frac{b_1}{b_2}\right)}. \quad (3.9)$$

Finalmente, la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética efectivas para la película están dadas por⁴⁵

$$\varepsilon_{eff} = 1 + \frac{4p}{b_1 b_2 d} \frac{d_E}{E_{0i}} \quad (3.10)$$

$$\mu_{eff} = 1 + \frac{4p}{b_1 b_2 d} \frac{m}{H_{0i}}, \quad (3.11)$$

donde p es la concentración superficial de los nanoalambres. Podolskiy *et al.*, simulan las constantes ópticas efectivas para un sistema de nanoalambres paralelos, con los parámetros $p=0.1$, $b_1=230 \text{ nm}$, $b_2=5 \text{ nm}$, $d=150 \text{ nm}$. Encuentran que el material se comporta como izquierdo para longitudes de onda alrededor de

1.5 μm , y proponen que el rango de longitudes de onda puede moverse al espectro visible tras variar los parámetros geométricos. A excepción de los geométricos, el artículo original no indica el resto de parámetros usados para tal simulación.

Con la finalidad de reproducir los resultados obtenidos por el modelo PSS, supongamos por simplicidad, que los nanoalambres están en el vacío ($\varepsilon_d = 1$) y que la onda incide también desde el vacío ($k = \frac{\omega}{c}$). Supongamos como hasta ahora que la función dieléctrica del metal (ε_m) está dada por el modelo de plasma de la ecuación (1.88). La conductividad eléctrica para este modelo está dada por la siguiente expresión:

$$\sigma_m = -i \frac{\varepsilon_m \omega}{4\pi}. \quad (3.12)$$

Suponga también que la frecuencia de plasma es la misma que la de la plata ($\omega_p = 5.72 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$), es decir, pensemos que los alambres son metálicos, motivados por la idea propuesta por Pendry² en la cual la plata podría mostrar un comportamiento izquierdo. Sustituyendo estos valores y el resto de los parámetros geométricos dados por Podolskiy *et al* en las ecuaciones (3.10) y (3.11), podemos simular ε_{eff} y μ_{eff} como función de la longitud de onda.

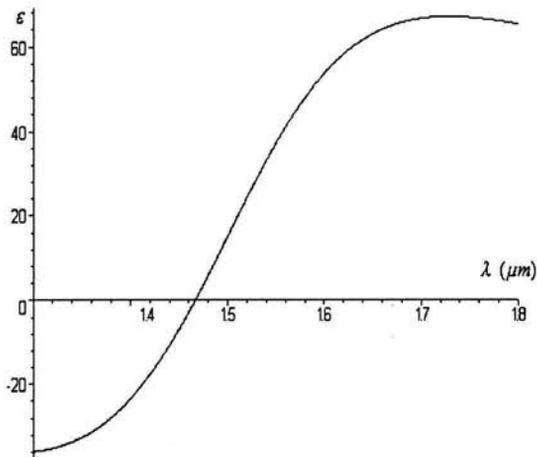
Aquí es necesario aclarar un detalle, usando la expresión que da el modelo PSS para el momento dipolar d_E ec. (3.8) no nos fue posible reproducir las simulaciones para ε_{eff} que son publicadas por Podolskiy *et al.*³⁰. Los autores remiten a la referencia [44] como la fuente de donde obtienen la expresión para el momento dipolar; en dicho artículo, encontramos que la expresión para ε_{eff} está dada por

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_d \frac{2}{9} p \frac{a^2}{b^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)} \frac{1}{\cos \Omega + \frac{\sigma_d}{f(\Delta) \sigma_m}}, \quad (3.13)$$

donde σ_d esta dada de la misma manera que la ecuación (3.12). La expresión (3.13) resulta ser ligeramente distinta a la propuesta en el modelo PSS, sin embargo como a continuación veremos, reproduce las simulaciones hechas por Podolskiy *et al.* Sustituyendo los parámetros en las ecuaciones (3.11) y (3.13) podemos reproducir las simulaciones* de los parámetros efectivos del sistema presentadas en el modelo PSS (figs. 3.3 y 3.4).

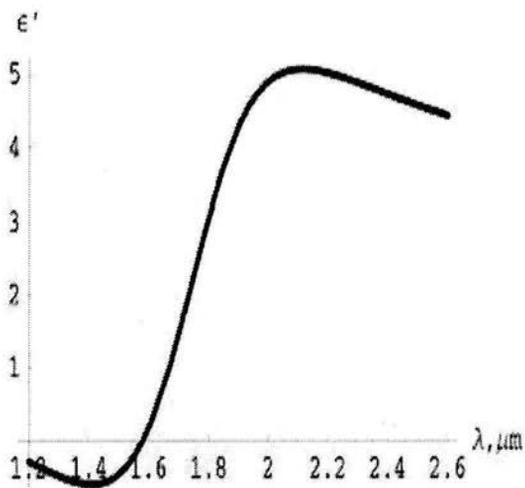
Como se puede observar, tanto la permeabilidad magnética como la permitividad eléctrica tiene la estructura resonante predicha por el modelo. En dichas regiones de resonancia, existe también una cierta región de frecuencias para la que ε_{eff} y μ_{eff} son simultáneamente negativos (comportamiento izquierdo). La simulación que hemos hecho concuerda cualitativamente con los resultados obtenidos por Podolskiy *et al.*. Hay que considerar que en el artículo original aparte de los parámetros geométricos, no se menciona ninguna otra característica de los materiales usados. Aun así, nuestros resultados muestran una resonancia que concuerda con la región reportada por Podolskiy *et al.*, para comportamiento izquierdo ($\sim 1.5 \mu m$).

* Para todas las simulaciones hechas en el texto se utilizo el software **Maple 8.00**.



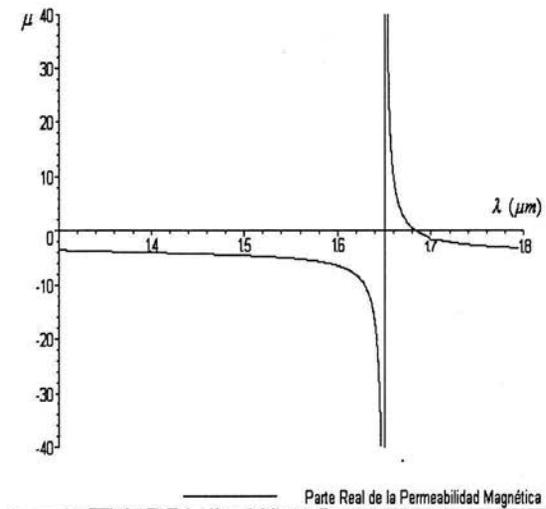
— Parte Real de la Permitividad Eléctrica.

(a)

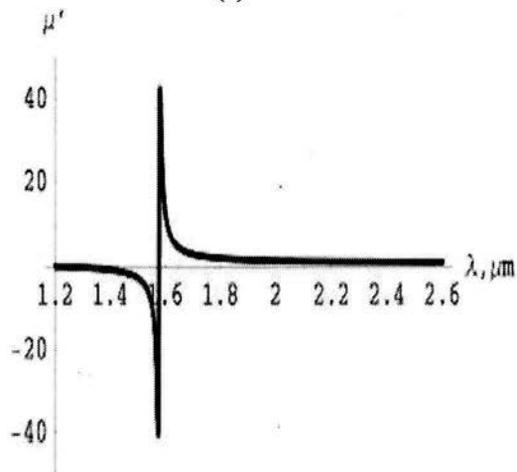


(b)

Fig. 3.3. Simulación de los parámetros ópticos del compuesto dados por las ecuaciones del modelo PSS. Se muestra nuestra simulación de la parte real de la permitividad eléctrica (a) comparada con la simulación hecha por PSS (b), hay que recalcar que dichos resultados pueden variar ya que no existe información sobre las características del medio usadas por Podolskiy *et al.*



(a)



(b)

Fig. 3.4. Se muestra los resultados de la parte real de la permeabilidad magnética para nuestra simulación (a) y la simulación hecha por PSS (b); el comportamiento izquierdo se da en la región de microondas.

Como sugiere el modelo PSS, las constantes ópticas dependen de los parámetros geométricos de los nanoalambres. Así, hemos hecho simulaciones para ϵ_{eff} y μ_{eff} variando dichos parámetros intentando llevar la región de resonancia, en donde los parámetros ópticos son negativos, hacia la región del visible ($3.8 \mu m - 7.8 \mu m$).

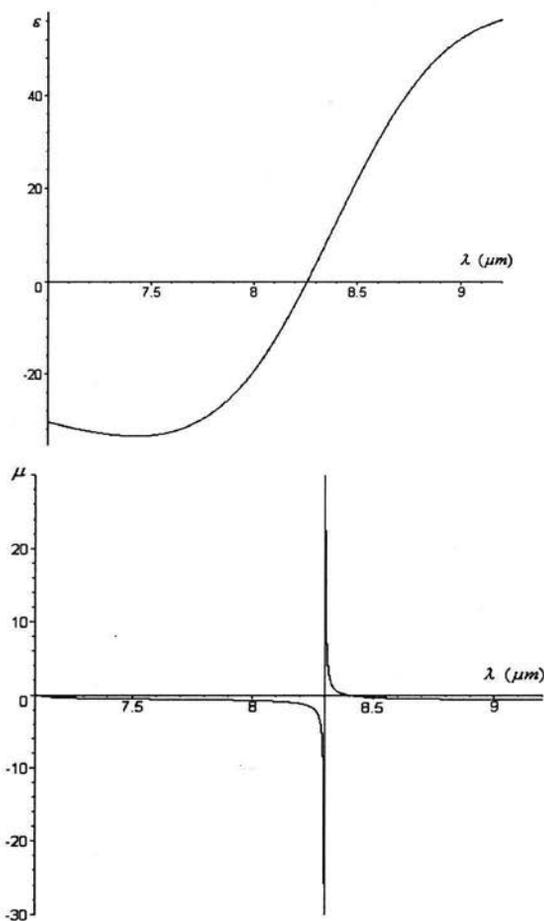


Fig. 3.5. Simulación de las partes reales de ϵ y μ para la región del visible (en la vecindad de $0.8 \mu m$). Los parámetros usados son $p=0.1$, $b_1=180$ nm, $b_2=3$ nm, $d=90$ nm.

Nuestros resultados (fig. 3.5) muestran una zona de resonancia importante en donde la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica efectivas son negativas desde $0.75\mu\text{m}$ y hasta $0.82\mu\text{m}$, es decir en la región del rojo cercano. Los parámetros geométricos usados son $p=0.1$, $b_1=180\text{ nm}$, $b_2=3\text{ nm}$, $d=90\text{ nm}$.

Es complicado tratar de ampliar el rango de frecuencias en el visible, las regiones de resonancia para la permeabilidad magnética son cada vez más angostas. Este comportamiento es descrito por Podolskiy *et al.*⁴⁶ en un artículo posterior. Hacen notar que los parámetros del sistema, y por tanto respuesta resonante del mismo, están limitados por otros factores. En sus simulaciones muestran que las resonancias son menos fuertes si se disminuye el radio de los alambres b_2 de tal forma que sea comparable o menor a la distancia de penetración δ (Ref. [45], fig. 7), ó si se aumenta la separación entre alambres d (Ref. [45], fig. 8), mientras que la longitud de los mismos b_1 debe ser comparable a la longitud de onda de la luz incidente para que la excitación de plasmones sea eficiente. Aun así, en nuestra simulación (fig. 3.5), las resonancias de ϵ_{eff} y μ_{eff} encontradas para la región del visible son significativas y del mismo orden que las simulaciones que hemos reproducido para la región del infrarrojo (figs. 3.3a y 3.4a); aunque como ya hemos mencionado, la región en la que el medio se comportaría como izquierdo es ahora más angosta. Aún así, como una primera aproximación el comportamiento izquierdo es aún significativo y viable experimentalmente.

Existen técnicas para la producción de nanoalambres de plata con diámetros de hasta 0.4 nm ⁴⁷ y longitud del orden de micras crecidos en matrices porosas, así como otras técnicas que han demostrado ser efectivas para el crecimiento de nanoalambres de carbono, silicio y germanio⁴⁸. Hay que recordar también que hemos hecho varias suposiciones acerca de la naturaleza de la matriz dieléctrica y de los nanoalambres, los cuales hemos considerado como nanoalambres de plata, esto debido a que el modelo original PSS no menciona las características de la matriz ni de los nanoalambres usados en la

simulaciones. Así pues, aún es posible realizar correcciones para la función dieléctrica y la conductividad eléctrica que permitan modelar de mejor manera el comportamiento de los nanoalambres, con lo que tal vez se podría ampliar el rango de frecuencias posible.

La ventaja del modelo PSS ante otros modelos, es que permite realizar simulaciones con las expresiones explícitas de los parámetros ópticos, para analizar la respuesta de algún material específico antes de llevarlo al laboratorio. Desde el punto de vista práctico, el modelo PSS representa una aproximación a un material izquierdo mucho más sencillo que otras propuestas ya que existen diversas técnicas experimentales para su realización^{47,48}. Comparado con los cristales fotónicos, el modelo PSS no requiere de arreglos periódicos bien definidos para los alambres, es suficiente con que estos estén alineados y formados por pares. Podolskiy *et al.*⁴⁶ han propuesto una alternativa que puede disminuir aun mas la dificultad práctica al construir el sistema. En ella, en lugar de utilizar pares de nanoalambres reales se puede preparar una película de nanoalambres sencillos y colocarla sobre una superficie metálica. De esta forma al hacer incidir luz sobre el sistema, para cada alambre real se inducirá una imagen eléctrica suya dentro del metal. De esta manera, colocando alguna película dieléctrica se puede controlar la separación entre el par de nanoalambres: el real y su imagen inducida.

Conclusiones.

Como mencionamos al principio de este trabajo, los materiales denominados izquierdos han retomado gran interés en los últimos años, sobre todo debido a los reportes experimentales de materiales con parámetros ópticos negativos, y a sus posibles aplicaciones. Hemos discutido la importancia de estudiar las consecuencias que tiene el hecho de que la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética sean simultáneamente negativas.

Así pues, abordamos el problema de la propagación de ondas electromagnéticas planas en materiales izquierdos. Partiendo de la idea de que estos sistemas no violan ningún principio físico fundamental hemos hecho uso de las ecuaciones Maxwell. Una solución particular de estas ecuaciones (y de la ecuación de onda) son los campos electromagnéticos del tipo onda plana ecs. (1.17) y (1.18). Junto con el hecho de que el índice de refracción cambia de signo, como consecuencia del cambio simultáneo en el signo de ϵ y μ , hemos reproducido tres resultados importantes:

- El sistema de vectores ortogonales $\{\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}\}$, con \mathbf{k} el vector de propagación, forman un sistema que sigue la regla de la mano izquierda.
- El vector de propagación \mathbf{k} apunta en la dirección opuesta al vector de Poynting \mathbf{S} que determina la dirección del flujo de energía. De la misma manera, la velocidad de fase \mathbf{v}_p es también antiparalela al vector de Poynting.

Estos son los mismos resultados que obtuvo Veselago en su artículo original y que representan los cambios fundamentales respecto de los materiales ordinarios.

Usando estos resultados, estudiamos la incidencia de ondas electromagnéticas planas en la interfase entre un material ordinario y

un material izquierdo. Tras aplicar condiciones de frontera para los campos, hemos encontrado los siguientes resultados:

- La ley de la reflexión no se ve alterada por el cambio de signo en los parámetros del material izquierdo. (ec. 1.41)
- La ley de la transmisión, o ley de Snell, sigue siendo válida, con la restricción de que el cambio de signo en el índice de refracción implica que las ondas sean refractadas a un ángulo negativo. (ec.1.42)
- Las expresiones para los coeficientes de reflexión y transmisión, o coeficientes de Fresnel, no se ven alteradas ante el cambio de signo en ϵ y μ . Ecs. (1.54), (1.55), (1.60) y (1.61)
- Bajo las condiciones $\epsilon' = -\epsilon$, $\mu' = -\mu$ y $n' = -n$, para cualquier ángulo de incidencia los coeficientes de reflexión se anulan, es decir, no existe onda reflejada y la totalidad de la onda es transmitida.
- Existen dos valores para el ángulo de incidencia (ángulo de Brewster) para los cuales alguna de las componentes de la onda reflejada se anula, es decir, la onda puede ser polarizada paralela o perpendicularmente al plano de incidencia tras reflejarse. La existencia de un segundo ángulo de Brewster solo ocurre para medios con permeabilidad magnética $\mu \neq 1$ como los medios izquierdos. Ecs. (1.71) y (1.73)
- El fenómeno de reflexión total interna ocurre tal como en materiales ordinarios. A partir de un ángulo crítico, toda la potencia incidente es reflejada y la onda refractada se propaga paralela a la interfase y decae exponencialmente dentro del medio izquierdo.
- Encontramos que para un medio izquierdo, los parámetros ϵ y μ necesariamente dependen de la frecuencia, es decir los materiales izquierdos son dispersivos.

Hemos analizado también la reflexión y transmisión de ondas electromagnéticas a través de una película de material izquierdo. Partiendo de la interferencia de ondas electromagnéticas hemos

determinado los coeficientes de reflexión y transmisión para la película:

- Las expresiones para los coeficientes de reflexión y transmisión, son las mismas que para materiales ordinarios, y solo existe un cambio de signo en los factores de fase que en ellos aparecen. Ecs. (2.21) y (2.22)
- De nuevo, bajo las condiciones $\varepsilon' = -\varepsilon$, $\mu' = -\mu$ y $n' = -n$, no existe onda reflejada. Ecs. (2.29) y (2.30)
- Es posible invertir las expresiones para los coeficientes de reflexión y refracción para obtener las expresiones para el índice de refracción y la impedancia del medio. A partir de datos experimentales es posible también determinar el signo del índice de refracción, lo que nos permite la caracterización experimental de materiales izquierdos. Como comenta Smith³⁴, es necesario hacer consideraciones extras para el material con el fin de evitar ambigüedades en las expresiones para n y Z .

Finalmente, hemos estudiado el modelo propuesto por Podolskiy, Sarychev y Shalaev³⁰ (PSS) para desarrollar un material izquierdo basado en un medio compuesto de pares de nanoalambres. Logramos reproducir las simulaciones hechas por Podolskiy *et al.*, suponiendo una función dieléctrica de tipo Drude para modelar nanoalambres de plata (figs. 3.3 y 3.4). Tras variar los parámetros geométricos del sistema, hemos logrado encontrar zonas de resonancia para los parámetros efectivos ε_{eff} y μ_{eff} en la región visible del espectro, para dichas resonancias existen regiones de comportamiento izquierdo para el sistema (fig 3.6). Consideramos que esta es una primera aproximación a un material izquierdo para el visible; en este caso, los parámetros encontrados para el sistema fueron: la concentración $p=0.1$, la longitud de los nanoalambres $2b_1=360 \text{ nm}$, el radio $b_2=3 \text{ nm}$, y la separación entre pares $d=90 \text{ nm}$. Nanoalambres de estas dimensiones pueden ser obtenidos experimentalmente mediante diversas técnicas^{47,48}. El sistema responde como material izquierdo para la región de $0.75 \mu\text{m}$ y hasta $0.82 \mu\text{m}$ (rojo cercano).

Consideramos que el modelo PSS no puede ser utilizado para regiones del visible mas allá del rango mencionado ya que la zona de resonancia es más angosta debido a que los parámetros geométricos están restringidos a ciertas condiciones del sistema⁴⁶.

Perspectivas.

Hemos estudiado algunos de los aspectos fundamentales del problema de la interacción electromagnética con los materiales izquierdos, pero aun hay otros muchos problemas abiertos en este sentido, entre ellos quizá el más importante es el desarrollo de materiales con tal comportamiento. Los materiales izquierdos han recibido serias críticas por parte de algunos grupos, sin embargo, ante las recientes confirmaciones experimentales de las propiedades previstas, como la refracción negativa y el comportamiento de lente plana, han hecho que estos materiales se afiancen como una posibilidad real.

Las investigaciones recientes muestran que las posibilidades más viables para materiales izquierdos son los denominados cristales fotónicos. Como ya hemos mencionado, tanto las predicciones teóricas como los cristales fotónicos ya desarrollados experimentalmente muestran comportamiento izquierdo solo para la región de las microondas, y aun cuando son pocas las propuestas para otras regiones de interés como el visible, no dudamos que pronto aparezcan novedades en este sentido. Como hemos visto en la parte final de este trabajo, el modelo PSS se presenta como una aproximación en este sentido, debido a sus características resulta una propuesta accesible para ser desarrollada experimentalmente. La propuesta de Podolskiy *et al.*^{30,46} de pares de nanoalambres aun puede tener otras modificaciones, por ejemplo la que ellos mismos han sugerido donde utilizarían las imágenes eléctricas de nanoalambres reales inducidas dentro de un metal tras ser iluminados. Podríamos pensar en otra posibilidad, por ejemplo la formación de sistemas multicapas usando esta idea, donde cada película estaría compuesta de pares de nanoalambres. Incluso se podrían formar sistemas que alternaran películas de metal, de dieléctrico y de nanoalambres, con la finalidad de hacer más patente el comportamiento izquierdo ya mostrado por el modelo PSS para regiones más amplias del espectro. Esta idea estaría en la misma

línea de los cristales fotónicos si el sistema multicapa se construyese con cierta periodicidad.

Referencias.

1. V. G. Veselago. *Soviet Physics Uspekhi*. **10**, 509 (1968).
2. J. B. Pendry. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3966, (2000).
3. D. R. Smith y N. Kroll. *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2933 (2000).
4. D. R. Smith, W. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser y S. Schultz, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4184 (2000).
5. R. A. Shelby, D. R. Smith y S. Schultz, *Science*. **292**, 77 (2001).
6. S. Foteinopoulou, E. N. Economou, y C. M. Soukoulis. *Phys. Rev. Lett.* **90**, 107402 (2003).
7. C. G. Parazzoli, R. B. Greigor, K. Li, B. E. C. Koltenbah y M. Tanielian, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 107401 (2003).
8. A. A. Houck, J. B. Brock, y I. L. Chuang, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 137401 (2003).
9. M. Notomi. *Optical and Quantum Electronics*. **34**, 133 (2002).
10. D. Mendoza. *Materiales Avanzados*, **1**, 41 (2003).
11. G. Brumfield. *Nature*. **428**, 245 (2004).
12. Xinhua Hu, Yifeng Shen, Xiaohan Liu, Rongtang Fu, y Jian Zi, *Phys. Rev. E*. **69**, 30201 (2004).
13. M. W. McCall, A. Lakhtakia y W. S. Weiglhofer. *Eur. J. Phys.* **23**, 353 (2002)
14. L. D. Landau & E. M. Lifshitz. *Electrodinámica de los cuerpos continuos*. Ed. Reverté. 1981.
15. J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, 1975. 2nd ed.
16. M. Born & E. Wolf. *Principles of Optics*. Cambridge University Press, Crambridge, England, 1999. 7th ed.
17. M. A. Heald y B. J. Marion. *Classical Electromagnetic Radiation*. HBJ Publishers, 1980. 2^a ed.
18. R. Guenther. *Modern Optics*. John Wiley & Sons, New York, 1990.
19. S. A. Ramakrishna & J. B. Pendry. *Phys. Rev. B*. **67**, 201101 (2003).

20. I. V. Shadrivov, A. A. Sukhorukov y Y. S. Kivshar. *Appl. Phys. Lett.* **82**, 3820 (2003).
21. N. Fang & X. Zhang. *Appl. Phys. Lett.* **82**, 161-163 (2003).
22. D. R. Smith, D. Shuring, J. B. Pendry. *Appl. Phys. Lett.* **81**, 2713 (2002).
23. S. A. Cummer. *Appl. Phys. Lett.* **82**, 1503 (2003).
24. L. V. Panina, A. N. Grigorenko, y D. P. Makhnovskiy. *Phys. Rev. B.* **66**, 155411 (2002).
25. C. Kittel. *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley & Sons, New York, 1986. 6th ed.
26. R. Ruppin. *J. Phys.:Condens Matter.* **13**, 1811-1819 (2001).
27. J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, y W. J. Stewart. *J. Phys.:Condens Matter.* **10**, 4785 (1998).
28. S. O'Brien, D. McPeake, S. A. Ramakrishna y J. B. Pendry. *Phys. Rev. B.* **69**, 241101 (2004).
29. J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart e I. Youngs. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4773 (1996).
30. V. A. Podolskiy, A. K. Sarychev, V. M. Shalaev. *Journal of Nonlinear Optical Physics & Materials.* **11**, 65-74 (2002).
31. H. G. Tompkins y W. A. McGahan, *Spectroscopic Ellipsometry and Reflectometry*. John Wiley & Sons New York, 1999.
32. V. G. Veselago. Sin publicar.
<http://arxiv.org/pdf/cond-mat/0203451>
<http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2002/036e.pdf>
33. P. V. Parimi, W. T. Lu, P. Vodo, y S. Sridhar. *Nature.* **426**, 404 (2003).
34. D. R. Smith, S. Schultz, P. Markos y C. M. Soukoulis. *Phys. Rev. B.* **65**, 195104 (2002).
35. Peter Markos y C. M. Soukoulis. *Phys. Stat. Sol.* **197**, 595 (2003).
36. D. O. S. Melville, R. J. Blaikie y C. Wolf. *Appl. Phys. Lett.* **84** 4403 (2004).
37. S. T. Chui y L. Hu. *Phys. Rev. B.* **65**, 144407 (2002).
38. E. Cubuckcu, *et al.* *Nature.* **423**, 604 (2003).

39. A. L. Pokrovsky y A. L. Efros. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 093901 (2002).
40. C. Luo, S. G. Jonson, J. D. Joannopoulos y J. B. Pendry. *Optic Express.* **11**, 746 (2003).
41. G. Shvets. *Phys. Rev. B.* **67**, 035109 (2003).
42. D. R. Fredkin y A. Ron. *Appl. Phys. Lett.* **81**, 1753 (2002).
43. S. Enoch, G. Gèrad, P. Sabouroux, N. Guérin y P. Vincent. *Phys. Rev. Lett.* **89**, 213902 (2002).
44. A. N. Lagarkov y A. K. Sarychev. *Phys. Rev. B.* **53**, 10 (1996).
45. A. P. Vinogradov. *Physica.* **A241**, 216 (1997).
46. V. A. Podolskiy, A. K. Sarychev, V. M. Shalaev. *Optics Express.* **11**, 735 (2003).
47. B. H. Hong, S. C. Bae, C. Lee, S. Jeong y K. S. Kim. *Science.* **294**, 348 (2001).
48. N. Nilius, T. M. Wallis y W. Ho. *Science.* **297**, 1853 (2002).