



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

BIFURCACION EN UN ANILLO DE
CELDA ACOPLADAS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A :
C A R L O S G A R C I A A Z P E I T I A



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. JORGE ANDRES IZE LAMACHE



2004

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
INGENIERIA
MILITARIA

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Bifurcación en un anillo de celdas acopladas"

realizado por Carlos García Azpeitia

con número de cuenta 099502274 , quien cubrió los créditos de la carrera de:
MATEMÁTICAS.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

Dr. Jorge Andrés Ize Lamache

Propietario

Dr. Pablo Padilla longoria

Propietario

Dra. Mónica Alicia Clapp Jiménez labora


Suplente

Dra. Magali Louise Marie Folch Gabayet

Suplente

Dr. Carlos Prieto de Castro

Consejo Departamental de MATEMÁTICAS


M. en C. Alejandro Bravo Mójica

Bifurcación en un Anillo de Celdas Acopladas

Carlos García Azpeitia

2004

Contenido

Introducción	ix
1. Planteamiento del Problema	1
1.1. Deducción de las Ecuaciones	1
1.2. Ecuaciones Generales	3
1.3. Linealización	5
2. Ecuación de Bifurcación	9
2.1. Ljapunov-Schmidt	9
2.2. Equivarianza	14
2.3. Cambio de Base	18
3. Grado Equivariante	27
3.1. Grado Equivariante	27
3.2. Aplicación a Bifurcación	32
3.2.1. Bifurcación Periódica	32
3.2.2. Bifurcación Estacionaria	35
4. Grupos de Isotropía	37
4.1. Representaciones Irreducibles	37
4.2. Grupos de Isotropía	38
4.3. Espacio de Puntos Fijos	48
5. Resultados	53
5.1. El Teorema de Bifurcación	53
5.2. Descripción de las Simetrías	57
5.3. Ecuaciones de Turing	59
A. Análisis	65

Dedicatoria

A mis padres, que los amo mucho.

Agradecimientos

Al Dr. Jorge Ize, mi asesor de tesis y profesor, gracias por todo el tiempo que me has dedicado.

A mis sinodales, los doctores Pablo Padilla, Mónica Clapp, Magali Folch y Carlos Prieto.

A todos los miembros del Departamento de Matemáticas y Mecánica del IIMAS.

A CONACyT, por la beca de tesis de Licenciatura, como parte del proyecto G25427-E, Matemáticas no lineales en la física y la ingeniería.

“el individuo” está solo, solo en el mundo entero, solo - frente a Dios...
Kierkegaard

Introducción

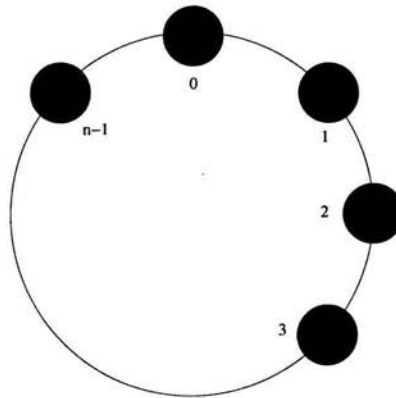
Teórica y experimentalmente en muchos estudios se han analizado diferentes arquitecturas de redes. En esta tesis se busca dar un acercamiento general al estudio de un anillo de celdas acopladas. El análisis es independiente de los detalles intrínsecos de la dinámica en las celdas y de la naturaleza del acoplamiento entre ellas. Las transiciones entre diferentes patrones de actividad son modeladas como bifurcación con simetrías.

En la tesis, se analizan las ecuaciones para un anillo de celdas acopladas con varias sustancias en cada celda y con retardo finito. Se estudia la bifurcación desde un equilibrio uniforme, es decir, se buscan ramas de soluciones periódicas. Además, se describen las simetrías de dichas ramas de soluciones. La estabilidad de las soluciones no se aborda aquí.

El problema de bifurcación, vía la reducción de Ljapunov-Schmidt, es equivalente a encontrar ceros de la ecuación de bifurcación. Por un lado, el grado topológico es una excelente técnica para encontrar condiciones que garanticen la existencia de ceros de una función. Por otro lado, una buena técnica matemática para abordar las simetrías en la naturaleza son las representaciones de grupos. El grado topológico equivariante une estas dos herramientas y brinda una poderosa manera de encontrar bifurcación con simetrías.

Usando el grado equivariante se prueba la bifurcación en el anillo. Una motivación importante para el estudio del anillo, aparte de las aplicaciones a la biología, es que varios problemas en la naturaleza tienen un tratamiento matemático similar. Esto es, los métodos utilizados para probar bifurcación en el anillo, permiten abordar una amplia gama de problemas similares como son: problemas en hidrodinámica (Couette-Taylor o Bénard), problemas de reacción-difusión o problemas en elasticidad.

Un anillo de celdas (células, neuronas, osciladores u otros) puede servir para modelar una amplia gama de fenómenos en la biología. Turing plantea



la necesidad de modelar un anillo de células para explicar la morfogénesis de un embrión, o el crecimiento de la sección transversal de un tentáculo de la hidra.

Se puede interpretar al anillo de celdas como a una red neuronal con esta forma. Su estudio es una primera aproximación a los arreglos de redes neuronales más complicadas, pues es simple comparado con los arreglos generales, y además puede servir como componente fundamental de otros circuitos.

Los anillos de osciladores acoplados se han usado extensivamente en modelos fisiológicos. Muchos investigadores han propuesto que los mecanismos musculares pueden ser modelados como sistemas de osciladores acoplados. Se ha utilizado un anillo de osciladores de Van der Pol para simular baja actividad intestinal. Otros, han considerado anillos de osciladores acoplados para un sistema generador de patrones de locomoción. También se han utilizado anillos de osciladores en la función de sistemas musculares, como en el uréter.

Existen varios modelos en la biología donde aparecen las configuraciones de anillos. Para más detalles y referencias se recomiendan [Tur], [Coll] y [Gol2].

Morfogénesis de un Embrión

Los genes son un conjunto de bases que se encuentran en el núcleo de la célula. Cada gen codifica la formación de una proteína específica, cuyo en-

samblado se lleva a cabo en los ribosomas. Las proteínas constituyen nuevo tejido y las enzimas (que son también proteínas) son catalizadores biológicos que aceleran una reacción. Es así, que los genes tienen influencia en la anatomía del organismo porque codifican proteínas y enzimas que forman nuevas células.

El embrión es un conjunto de células. Las proteínas, enzimas y hormonas son compuestos que se difunden en el embrión. Se desea modelar un embrión en crecimiento, en el instante que se encuentra en estado de homogeneidad y con una simetría esférica perfecta (blástula). Por simplicidad, el modelo considerará al embrión como a un conjunto de células distribuidas en forma de anillo.

En resumen, el modelo del embrión consiste de células distribuidas en un anillo, en cada una de las cuales hay reacciones químicas y compuestos que se difunden solamente hacia las células adyacentes. Los componentes se mueven de regiones de mayor a menor concentración, de manera proporcional al gradiente de concentración y a la difusión de la sustancia. La dinámica interna que modela las reacciones en cada célula es similar.

Se buscarán las condiciones que hagan posible el rompimiento de la homogeneidad del embrión, y la aparición de soluciones con nuevas simetrías. Estas simetrías podrían hacer que algunas células crecieran más rápido que otras, dando lugar a nuevas configuraciones espaciales en el embrión.

Técnicas Matemáticas

Se han utilizado muchos métodos para estudiar a los anillos de celdas acopladas: perturbaciones, métodos numéricos o formas normales. En esta tesis, se estudian los anillos de celdas acopladas con métodos topológicos.

En [Gol] se usan formas normales para encontrar tres simetrías en una ecuación sin retardo, y en el caso genérico (esto es, sin resonancia y con un sólo valor propio). En [Gils] se plantean ecuaciones de segundo grado con interacción por un potencial, y también se obtienen las tres soluciones con formas normales. La desventaja de las formas normales es que sólo se pueden obtener resultados con el cruce de un solo valor propio.

En [Alex] se encuentra una simetría para ecuaciones sin retardo, en la que las celdas oscilan desfasadas uniformemente. Es decir, que oscilan idénticamente y que la diferencia entre los tiempos de oscilación de dos celdas adyacentes es el mismo para todas. En este artículo se usan argumentos

topológicos, lo que permite analizar la resonancia (en este sentido es más general que [Gol] y [Gils]). Por otro lado, debido a que no se utilizan representaciones de grupos, no es posible encontrar las otras dos simetrías.

El artículo que está más cerca del estudio de esta tesis es [Kra], en donde se encuentran las tres simetrías de la bifurcación periódica. Sin embargo, el artículo tiene muchas cosas distintas respecto a esta presentación, como son la construcción del grado equivariante y las técnicas matemáticas utilizadas.

Resultados y Aportaciones

En la tesis, se encuentran tres tipos de simetrías para la bifurcación periódica y una simetría para la bifurcación estacionaria. En la bifurcación periódica, una solución es una onda viajera, que es el equivalente a las ondas rotantes en ecuaciones de reacción-difusión, las otras dos soluciones son ondas estacionarias. La solución encontrada en [Alex] es un caso particular de la onda viajera. Las tres soluciones encontradas en [Gol] y [Gil] son casos particulares de la onda viajera y de las ondas estacionarias.

Las ventajas del análisis con el grado topológico sobre las formas normales (como [Gol] y [Gils]) es que permite tener más de un valor propio, y el análisis con retardos sin dificultad adicional. La ventaja del estudio con las representaciones de grupos es que se tiene un método con el cual se encuentran todas las posibles simetrías, evitando restringirse a casos particulares (como [Alex]).

El estudio matemático mas completo para la bifurcación con simetrías en el anillo es [Kra]. Lo novedoso de la tesis respecto a [Kra] es que se hacen todos los cálculos de las representaciones de grupos, se detalla la reducción de Ljapunov-Schmidt, se permite más de una sustancia en las celdas, se estudia la bifurcación estacionaria y se da una descripción detallada de las soluciones.

Resumen de la tesis

En el primer capítulo, se deducen las ecuaciones que surgen de la necesidad de modelar las situaciones antes descritas. Después, se proponen ecuaciones más generales, y se cambia el problema de bifurcación de soluciones periódicas al de encontrar ramas de ceros de un operador.

En el segundo capítulo, el problema de encontrar ramas de ceros del

operador es cambiado por el de encontrar ceros de un sistema de ecuaciones algebraicas, debido a la reducción de Ljapunov-Schmidt. Después se prueba la equivarianza con respecto a la acción del grupo $D_n \times S^1$, donde el grupo D_n refleja las simetrías del anillo y el grupo S^1 la fase de la solución (esto último debido a que las ecuaciones diferenciales son autónomas). Al final, se hace un cambio de variables para obtener la ecuación de bifurcación.

El tercer capítulo trata sobre el grado equivariante. Este tiene la propiedad de asegurar la existencia de ceros, si el grado es no trivial. Aplicando esto al problema de bifurcación, se obtiene información sobre las condiciones para la existencia de soluciones y el tipo de simetrías de éstas. En este capítulo no hay pruebas de los teoremas utilizados, la referencia para éstos es [Ize].

En el cuarto capítulo, se analizan las representaciones irreducibles del grupo y se encuentran los grupos de isotropía y sus espacios de puntos fijos. Estos espacios imponen las simetrías de las soluciones bifurcadas.

En el quinto capítulo, se presenta el teorema de bifurcación de la tesis, se describen las soluciones y se hacen algunos comentarios acerca de las ecuaciones de Turing.

Para la lectura rápida de esta tesis, al final de cada capítulo se encuentra un resumen con los resultados principales. Además, el teorema de bifurcación del quinto capítulo está escrito de tal forma que el lector no tenga que remitirse a otras secciones en la tesis.

Capítulo 1

Planteamiento del Problema

En la primera sección, se deducen las ecuaciones para los ejemplos de la introducción. En la segunda sección, se dan las ecuaciones generales que se van a estudiar en la tesis.

En la tercera sección, se cambia el problema de encontrar soluciones periódicas de las ecuaciones generales al de encontrar ceros de un operador, esto para utilizar el grado topológico. Por último, este operador es linealizado.

1.1. Deducción de las Ecuaciones

Se dará una deducción de las ecuaciones de manera que sea adecuada para las aplicaciones. Se utilizará el término celdas para denotar osciladores, células, neuronas u otros.

En la interacción química por difusión entre dos células, el tiempo necesario para el transporte o procesamiento de componentes químicos puede ser considerable. Además, los retardos en la difusión pueden depender de cada sustancia. Entonces surge la necesidad de que la interacción entre dos celdas dependa de todo el tiempo pasado, hasta cierto momento.

Para poder tener retardos en las ecuaciones, es necesario hacer la siguiente observación: sea $u(t)$ una función continua de $[-a, b]$ en \mathbb{R}^k con $a, b > 0$, que representa las concentraciones de una celda. Para cada $t \in [0, b]$, la función $u(t + \theta)$ es continua para $\theta \in [-a, 0]$.

Definición 1.1 *Se define la función $u^t(\theta)$ como*

$$u^t(\theta) = u(t + \theta) \in C([-a, 0]; \mathbb{R}^k),$$

donde $C([-a, 0]; \mathbb{R}^k)$ representa el espacio de Banach de funciones continuas de $[-a, 0]$ a \mathbb{R}^k , provisto con la norma del supremo.

La dinámica interna de una celda debido a reacciones químicas u otros factores, está dada por un operador diferenciable

$$h(u) : C([-a, 0]; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Es decir, la ecuación para las concentraciones de una celda sola (sin acoplamientos) es

$$\frac{d}{dt}u(t) = h(u^t) = h(u(t + \theta))$$

donde h actúa como operador sobre $u(t + \theta)$ como función de θ . Lo anterior permite capturar el retardo, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.2 [Retardo Fijo] Sea $h(u) = f(u(-r))$ donde f es una función diferenciable de \mathbb{R}^m en \mathbb{R}^m y r es fijo. Entonces la ecuación anterior es

$$\frac{d}{dt}u(t) = h(u(t + \theta)) = f(u(t - r)).$$

Se considera que el acoplamiento entre cualesquiera dos celdas es el mismo. El acoplamiento es representado por el operador diferenciable

$$g(u, w) : C([-a, 0]; \mathbb{R}^m)^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$$

que considera el efecto en la dinámica de la celda u , por la interacción con la celda w . Por ejemplo:

Ejemplo 1.3 Si se acoplan dos celdas u y w , entonces sus ecuaciones son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= h(u^t) + g(u^t, w^t) \\ \frac{d}{dt}w(t) &= h(w^t) + g(w^t, u^t). \end{aligned}$$

El caso general

Se considera un anillo de n celdas, donde cada celda está descrita por una función $u_j(t) = (u_{1,j}, \dots, u_{m,j}) \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^m)$. Las componentes $u_{i,j}$ de u_j pueden ser concentraciones químicas, corrientes de iones, voltajes de membranas, etc. Para facilitar la notación se tomará a j módulo n , por ejemplo, $u_0(t) = u_n(t)$ o $u_{n+1}(t) = u_1(t)$.

Debido a que la forma del arreglo es un anillo, el acoplamiento de la celda j es sólo con las celdas adyacentes: $j + 1$ y $j - 1$. Por lo que el efecto por acoplamiento, en la ecuación de la celda j es

$$g(u_j, u_{j+1}) + g(u_j, u_{j-1}).$$

Por lo tanto, la ecuación para las concentraciones de la celda $j = 0, \dots, n - 1$ es

$$\frac{d}{dt}u_j(t) = h(u_j^t) + g(u_j^t, u_{j+1}^t) + g(u_j^t, u_{j-1}^t)$$

con j módulo n .

En las aplicaciones, el modelo puede ser alterado por pequeñas irregularidades físicas, incluyendo fluctuaciones estadísticas en la difusión o pequeños cambios que alteren la dinámica interna de las celdas. Para tener esto en cuenta, se pueden introducir parámetros que puedan representar a estas circunstancias físicas. En esta tesis, h y g dependerán de un sólo parámetro $\mu \in \mathbb{R}$, que representa los cambios externos en las celdas.

Físicamente, se supondrá que el sistema anterior está originalmente en equilibrio, es decir, que se supondrá que para cada $\mu \in \mathbb{R}$ existe $v_\mu \in \mathbb{R}^m$ tal que (v_μ, \dots, v_μ) es equilibrio del sistema de ecuaciones anteriores. Se desea conocer bajo qué circunstancias existen soluciones periódicas que se bifurcan del equilibrio. Es decir, cuándo existe una rama de soluciones periódicas que dependen del parámetro, aparte del equilibrio. En la tesis se estudian las condiciones bajo las cuales esto sucede.

1.2. Ecuaciones Generales

En esta sección se dará la generalización de las ecuaciones de la sección anterior, de manera que la notación sea más simple.

Las ecuaciones diferenciales con retardo que se estudiarán en esta tesis son

$$\frac{du_j(t)}{dt} = f(u_{j-1}^t, u_j^t, u_{j+1}^t; \mu), \quad (1.1)$$

con $j = 0, \dots, n - 1$ módulo n y las funciones u_j en $C^1([-a, b], \mathbb{R}^m)$.

Aquí f es un operador diferenciable de $C([-a, 0]; \mathbb{R}^m)^3 \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^m , que satisface la condición

$$f(v, u, w) = f(w, u, v). \quad (1.2)$$

Esta condición refleja el hecho de que el acoplamiento es simétrico con las dos celdas adyacentes. Además, se supondrá que para cada $\mu \in \mathbb{R}$ existe $v_\mu \in \mathbb{R}^m$ tal que $f(v_\mu, v_\mu, v_\mu; \mu) = 0$. Esto es, el punto $v_\mu(\cdot) = (v_\mu, \dots, v_\mu)$ es equilibrio del sistema de ecuaciones generales (1.1).

Como primer ejemplo se recuperan las ecuaciones de la sección anterior.

Ejemplo 1.4 Sean $h(u; \mu)$ y $g(u, w; \mu)$ como en la sección anterior. Entonces

$$f(v, u, w; \mu) = h(u; \mu) + g(u, w; \mu) + g(u, v; \mu)$$

satisface la condición (1.2). Por lo que las ecuaciones de la sección anterior, son un caso particular de las ecuaciones generales.

Ejemplo 1.5 [Acoplamiento no lineal] Sean $h(u; \mu)$ y $g(u; \mu)$ operadores diferenciables de $C([-a, 0]; \mathbb{R}^m) \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^m . Entonces

$$f(v, u, w) = h(u; \mu) + g(v - u; \mu) + g(w - u; \mu)$$

satisface la condición (1.2). El operador h describe la dinámica interna de las concentraciones u_j en las celdas. El operador g representa la fuerza de acoplamiento (no lineal) entre celdas adyacentes, dependiendo sólo del gradiente de concentración $(v - u)$.

Ejemplo 1.6 [Acoplamiento lineal] Sea $g(u; \mu)$ un operador lineal $G(\mu)u$. Entonces

$$f(v, u, w) = h(u; \mu) + G(\mu)(v - 2u + w)$$

satisface la condición (1.2).

Para entender un poco la notación, se dan dos ejemplos de ecuaciones con acoplamiento lineal: unas con retardo fijo en la difusión y otras sin retardo.

Ejemplo 1.7 [Retardo fijo] En este caso el operador lineal $G(\mu)u$ es $D(\mu)u(-r)$, donde $D(\mu)$ es una matriz continua con respecto a μ , que representa la fuerza de acoplamiento. El operador h es $h(u, \mu) = f(u(0); \mu)$ donde la función f es diferenciable de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^m , que representa la dinámica interna de cada celda. Entonces las ecuaciones son

$$\begin{aligned} \frac{du_j(t)}{dt} &= h(u_j^t; \mu) + G(\mu)(u_{j-1}^t - 2u_j^t + u_{j+1}^t) \\ &= f(u_j(t); \mu) + D(\mu)[(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1})(t - r)]. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.8 [Sin retardo] Si se toma $r = 0$ en el ejemplo anterior, las ecuaciones son

$$\frac{du_j(t)}{dt} = f(u_j(t); \mu) + D(\mu)(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1})(t).$$

Además, si $D(\mu)$ es una matriz diagonal positiva, que representa la fuerza de acoplamiento por difusión, entonces se tienen las ecuaciones de Turing.

Para escribir a las ecuaciones generales (1.1) en una sola ecuación vectorial, defínase a U como (u_0, \dots, u_{n-1}) y a la función U^t como $U^t(\theta) = U(t + \theta)$. Además, defínase a $F(U, \mu)$ como

$$\begin{aligned} F(U, \mu) &= (F_0(U, \mu), \dots, F_{n-1}(U, \mu)) \\ F_j(U, \mu) &= f(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}; \mu) \end{aligned} \quad (1.3)$$

con j módulo n . Entonces las ecuaciones generales (1.1), son equivalentes a la ecuación vectorial

$$\frac{dU}{dt} = F(U^t, \mu) \quad (1.4)$$

con $v_\mu(\cdot)$ equilibrio del sistema anterior, pues F satisface $F(v_\mu, \mu) = 0$.

1.3. Linealización

Se desea encontrar soluciones periódicas a la ecuación (1.4). Supóngase que U es una solución de período T . Haciendo el cambio de variable $t(\tau) = \tau/\nu$ con $\nu = 2\pi/T$, se tiene que $X(\tau) \equiv U(t(\tau)) = U(\tau/\nu)$ es una función 2π -periódica en τ . Además $dX/d\tau = (dU/dt)/\nu$ y

$$U^t(\theta) = U(t + \theta) = U((\tau + \nu\theta)/\nu) = X(\tau + \nu\theta) = X^\tau(\nu\theta).$$

Entonces X es solución 2π -periódica de la ecuación

$$\nu \frac{dX}{d\tau} = F(X^\tau(\nu\theta), \mu). \quad (1.5)$$

De esta manera, se cambia el problema de buscar soluciones de período $T = 2\pi/\nu$ de la ecuación (1.4), al de buscar soluciones 2π -periódicas de la ecuación (1.5).

Por definición de $H^1(S^1; \mathbb{R}^{mn})$ (ver apéndice), el operador derivada $\partial : H^1 \rightarrow L^2$ es continuo, con $H^1 \subset L^2$. De hecho, se conoce que $H^1(S^1) \subset C^0(S^1)$ (ver apéndice), por lo que el operador $F(X, \mu)$ está bien definido para $X \in H^1(S^1; \mathbb{R}^{mn})$.

Por lo anterior, el operador \mathcal{F} de $H^1(S^1; \mathbb{R}^{mn}) \times \mathbb{R}^2$ a $L^2(S^1; \mathbb{R}^{mn})$ dado por

$$\mathcal{F}(X; \mu, \nu) = \nu \partial X - F(X^\tau(\nu \theta), \mu) \quad (1.6)$$

está bien definido y es continuo. Además, si $\mathcal{F}(X) = 0$ entonces X es solución débil de la ecuación (1.5). Si X es además diferenciable, entonces es una solución fuerte. Así, se cambió el problema de buscar soluciones periódicas a (1.4), al de buscar ceros del operador \mathcal{F} . Esto con el fin de utilizar el grado topológico.

Se desea linealizar a $\mathcal{F}(X)$ cerca del equilibrio v_μ , pues $\mathcal{F}(v_\mu) = 0$. Para esto es necesario primero linealizar a $F(X; \mu)$ en v_μ .

Proposición 1.9 Sean $f_u(v_\mu)$ y $f_v(v_\mu)$ las derivadas (Frechet) parciales de $f(v, u, w)$ con respecto a u y v , en (v_μ, v_μ, v_μ) . Defínase el operador $L(\mu)$ de $C([-a, 0]; \mathbb{R}^{mn})$ en \mathbb{R}^{mn} como

$$L(\mu) = \begin{pmatrix} f_u & f_v & 0 & \dots & f_v \\ f_v & f_u & f_v & \dots & 0 \\ 0 & f_v & f_u & \dots & 0 \\ f_v & 0 & 0 & \dots & f_u \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

con el operador $f_u(v_\mu)$ en la diagonal y $f_v(v_\mu)$ a los lados. Entonces $L(\mu)$ es la derivada de Frechet de $F(X, \mu)$ en v_μ . Además, $L(\mu)$ es diferenciable con respecto a μ .

Prueba. Como f es diferenciable, los operadores $f_u(v_\mu)$ y $f_v(v_\mu)$ de $C([-a, 0]; \mathbb{R}^m)$ en \mathbb{R}^m son lineales, acotados y diferenciables con respecto a μ . Lo cual implica que $L(\mu)$ es un operador diferenciable con respecto a μ .

Además, de (1.2) se obtiene que $f_v(v_\mu) = f_w(v_\mu)$. Como $f(v_\mu, v_\mu, v_\mu; \mu) = 0$, entonces

$$f(v_\mu + v, v_\mu + u, v_\mu + w; \mu) = f_v(v_\mu)v + f_u(v_\mu)u + f_w(v_\mu)w + g$$

donde $g = o(\|(v, u, w)\|)$. Ahora, sea la función $X(\tau) = (x_0, \dots, x_{n-1})$ con x_j en $C([-a, 0]; \mathbb{R}^m)$, de la definición de F_j , dada en (1.3), se tiene

$$F_j(X + v_\mu, \mu) = f_v(v_\mu)x_{j-1} + f_u(v_\mu)x_j + f_w(v_\mu)x_{j+1} + g_j,$$

con $g_j(X, \mu) = o(\|X\|)$. Por lo tanto

$$F(X + v_\mu, \mu) = (F_0(X + v_\mu), \dots, F_{n-1}(X + v_\mu)) = L(\mu)X + g$$

con $g(X, \mu) = (g_0, \dots, g_{n-1})$ y $g = o(\|X\|)$. \square

Utilizando lo anterior en el operador \mathcal{F} , dado en (1.6), se obtiene

$$\mathcal{F}(X + v_\mu, \mu, \nu) = \nu \partial X - L(\mu)X^\tau(\nu\theta) + g(X, \mu, \nu)$$

donde $g(X, \mu, \nu) = -g(X^\tau(\nu\theta), \mu)$ es un operador de $H^1 \times \mathbb{R}^2$ a L^2 tal que $g = o(\|X\|)$.

Resumen

Redefínase al operador $\mathcal{F}(X, \mu, \nu)$ de $H^1 \times \mathbb{R}^2$ en L^2 como

$$\mathcal{F}(X, \mu, \nu) = \nu \partial X - L(\mu)X^\tau(\nu\theta) + g(X, \mu, \nu) \quad (1.8)$$

con $L(\mu)$ dada en la proposición (1.7). Si se encuentra (X, μ, ν) tal que $\mathcal{F}(X, \mu, \nu) = 0$ y si $X \in C^1$, entonces $U(t) = X(t\nu) + v_\mu$ es una solución $2\pi/\nu$ -periódica de la ecuación (1.4).

Por lo tanto, si se encuentra una rama conexa de ceros de \mathcal{F} distinta de la trivial, se tendrá una rama local de soluciones periódicas que bifurcan del equilibrio, esto es la bifurcación *periódica*. En el caso que la rama que bifurca es de soluciones constantes, se dice que la bifurcación es *estacionaria*.

El problema de encontrar bifurcación de soluciones periódicas se ha convertido en un problema de encontrar ceros. Por lo tanto, se puede olvidar a la ecuación diferencial y centrar la atención en el operador \mathcal{F} . En los tres capítulos siguientes se estudiará el operador \mathcal{F} y no se volverá a hacer referencia a la ecuación diferencial hasta el último capítulo.

Capítulo 2

Ecuación de Bifurcación

En la primera sección, se utilizan las series de Fourier para cambiar el problema de encontrar ceros del operador del capítulo anterior, al problema de encontrar ceros a un número finito de ecuaciones algebraicas. Esto se conoce como la reducción de Ljapunov-Schmidt.

En la segunda sección, se analizan las simetrías de las ecuaciones generales, es decir, la equivarianza. Después se hace el seguimiento de las simetrías hasta el sistema finito de ecuaciones, dado en la sección anterior.

En la tercera sección, se hace un cambio de base en el sistema finito de ecuaciones, se describen las simetrías y se prueba equivarianza en la nueva base. Como se verá después, el cambio de base es necesario para los capítulos posteriores.

2.1. Ljapunov-Schmidt

El problema de encontrar los ceros de \mathcal{F} es de dimensión infinita, puesto que \mathcal{F} es un operador definido en $H^1 \times \mathbb{R}^2$. A continuación se hace la reducción a dimensión finita (Ljapunov-Schmidt), utilizando series de Fourier para descomponer al espacio H^1 .

Sea $\sum_{l \in \mathbb{Z}} X_l e^{il\tau}$ la serie de Fourier de $X(\tau) \in H^1(S^1; \mathbb{R}^{mn})$, entonces $\bar{X}_l = X_{-l}$, pues $X(\tau)$ es real. Además, la serie de Fourier de $X^\tau(\nu\theta) = X(\tau + \nu\theta)$ es $\sum (e^{i\nu\theta} X_l) e^{il\tau}$ y la de $\partial X(\tau)$ es $\sum (ilX_l) e^{il\tau}$ (ver apéndice). Utilizando esto, el operador \mathcal{F} dado en (1.8) es

$$\mathcal{F}(X; \mu, \nu) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} [i\nu l X_l - L(\mu)(e^{i\nu\theta} X_l) + g_l] e^{il\tau}$$

donde $g_l(X) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(X(\tau), \mu, \nu) e^{-i\ell\tau} d\tau$.

Se va a estudiar el operador $L(\mu)$ aplicado a una función como $h(\theta)X$, en particular a la función $e^{i\nu\theta} X_l$.

Proposición 2.1 *Sea h una función en $C([-a, 0]; \mathbb{R})$. Supóngase que $A : C([-a, 0]; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es un operador lineal continuo. Entonces existen medidas $d\mu_{ij}$ que dependen sólo del operador A , tal que la matriz $[Ah] = \left\{ \int_{-a}^0 h(\theta) d\mu_{ij}(\theta) \right\}$ de $m \times m$ satisface*

$$A(h(\theta)X) = [Ah]X$$

para todo $X \in \mathbb{R}^m$.

Prueba. Sea $\{e_i\}_{i=1}^m$ la base canónica de \mathbb{R}^m , entonces $A = \sum_{j=1}^m A_j e_j$ donde $A_j : C([-a, 0]; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal continuo. Sea $x = (x_1, \dots, x_m)$ un vector en \mathbb{R}^m y $h(\theta) \in C([-a, 0]; \mathbb{R})$, utilizando que el funcional A_j es lineal, se obtiene que $A_j(xh(\theta)) = \sum_{i=1}^m x_i A_j(h(\theta)e_i)$. Defínase a los funcionales A_{ij} de $C([-a, 0]; \mathbb{R})$ en \mathbb{R} como $A_{ij}h(\theta) = A_j(h(\theta)e_i)$, entonces

$$A(h(\theta)x) = \sum_{j=1}^m \left(x_i \sum_{i=1}^m A_{ij}(h(\theta)) \right) e_j = [Ah]x$$

con la matriz $[Ah]$ de $m \times m$ definida como $[Ah] = \{A_{ij}(h(\theta))\}_{ij}$. Además, por el teorema de representación de Riesz (ver apéndice), existe una medida $d\mu_{ij}$ tal que $A_{ij}u = \int_{-a}^0 u d\mu_{ij}$. \square

Por la proposición anterior, se tiene la igualdad $L(\mu)(h(\theta)X) = [L(\mu)h]X$, en particular $L(\mu)(e^{i\lambda\theta}X) = [L(\mu)e^{i\lambda\theta}]X$. Sean las matrices $[f_u] = [f_u(v_\mu)e^{i\lambda\theta}]$ y $[f_v] = [f_v(v_\mu)e^{i\lambda\theta}]$. Estas matrices dependen de (μ, λ) , entonces

$$[L(\mu)e^{i\lambda\theta}] = \begin{pmatrix} [f_u] & [f_v] & 0 & \dots & [f_v] \\ [f_v] & [f_u] & [f_v] & \dots & 0 \\ 0 & [f_v] & [f_u] & \dots & 0 \\ [f_v] & 0 & 0 & \dots & [f_u] \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Además, si se define a la matriz $M(\mu, \lambda)$ como

$$M(\mu, \lambda) = i\lambda I - [L(\mu)e^{i\lambda\theta}], \quad (2.2)$$

entonces el operador \mathcal{F} es

$$\mathcal{F}(X) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} [M(\mu, l\nu)X_l + g_l]e^{il\tau}$$

con $\bar{M}(\mu, l\nu) = M(\mu, -l\nu)$ y $\bar{g}_l = g_{-l}$, pues \mathcal{F} es real.

Proposición 2.2 Para μ fija, el conjunto $\{\lambda : \det M(\mu, \lambda) = 0\}$ es finito.

Prueba. De la definición de $[L(\mu)h]$ se tiene

$$\|[L(\mu)e^{i\lambda\theta}]X\| \leq \|[L(\mu)1]X\| \leq C(\mu) \|X\|$$

con $C(\mu)$ una cota que no depende de λ . Entonces

$$\|M(\mu, \lambda)X\| \geq \|i\lambda X\| - \|[L(\mu)e^{i\lambda\theta}]X\| \geq (|\lambda| - C) \|X\|$$

por lo que $M(\mu, \lambda)$ es invertible para $|\lambda| > C$.

Sea $w(\lambda) = \det M(\mu, \lambda)$. Entonces w es una función analítica en λ y $w(\lambda) \neq 0$ para $|z| \geq C$. Como una función analítica, distinta de cero, tiene ceros aislados (ver apéndice), entonces el conjunto $\{\lambda : \det M(\mu, \lambda) = 0\}$ es finito. \square

Sea I (de Invertible) el conjunto de las l 's tal que $M(\mu_0, l\nu_0)$ es invertible. Nótese que si $l \in I$, entonces $-l \in I$ pues $M(\mu_0, -l\nu_0) = \bar{M}(\mu_0, l\nu_0)$. Además, si $l \in I$, entonces $M(\mu, l\nu)$ es invertible para $(\mu, \nu) \sim (\mu_0, \nu_0)$, pues $\det M(\mu, l\nu)$ es continua y $\det M(\mu_0, l\nu_0) \neq 0$.

Sea N (de No invertible) el conjunto de las l 's tal que $M(\mu_0, l\nu_0)$ es no invertible. Por la proposición anterior, N es finito y la matriz $M(\mu, l\nu)$ es invertible para $\nu \sim \nu_0$ ($\nu \neq \nu_0$), si $l \notin N$.

Ahora, se decompondrá el espacio L^2 en dos subespacios, el de los modos invertibles (I) y el de los no invertibles (N). Después, se utilizará el teorema de la función implícita para poner los modos invertibles en función de los no invertibles. Al final, se tendrá que encontrar ceros de \mathcal{F} es equivalente a encontrar ceros en los modos no invertibles (N), con N finito, por la proposición anterior.

Sea V_I el subespacio $\{X \in L^2 : X_l = 0 \ \forall l \in N\}$ y sea V_N el subespacio $\{X \in L^2 : X_l = 0 \ \forall l \in I\}$, entonces $L^2 = V_I \oplus V_N$. Sean X_I y X_N las proyecciones de $X \in H^1$ en V_I y V_N , entonces $X = X_I + X_N$ con $X_I = \sum_{l \in I} X_l e^{il\tau}$ y $X_N = \sum_{l \in N} X_l e^{il\tau}$.

Sean los operadores $\mathcal{F}_I(X, \mu, \nu)$ y $\mathcal{F}_N(X, \mu, \nu)$ las proyecciones en V_I y V_N de $\mathcal{F}(X, \mu, \nu)$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{F}_I(X) + \mathcal{F}_N(X)$ con

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_I(X, \mu, \nu) &= \sum_{l \in I} [M(\mu, l\nu)X_l + g_l]e^{il\tau} \quad y \\ \mathcal{F}_N(X, \mu, \nu) &= \sum_{l \in N} [M(\mu, l\nu)X_l + g_l]e^{il\tau}.\end{aligned}$$

Por lo que $\mathcal{F}(X, \mu, \nu) = 0$ si y sólo si $\mathcal{F}_I(X, \mu, \nu) = 0$ y $\mathcal{F}_N(X, \mu, \nu) = 0$. Se desea utilizar el teorema de la función implícita para $\mathcal{F}_I(X_I + X_N, \mu, \nu) = 0$, con lo que se obtendrá que $X_I = X_I(X_N)$. Esto lo garantiza lo siguiente.

Proposición 2.3 *En una vecindad U de $(0, \mu_0, \nu_0) \in V_N \times \mathbb{R}^2$, existe una única función $H(X_N, \mu, \nu)$ de U en $V_I \cap H^1$, tal que $H(0, \mu_0, \nu_0) = 0$ y $\mathcal{F}_I(H(X_N) + X_N, \mu, \nu) = 0$ para $(X_N, \mu, \nu) \in U$.*

Prueba. Sea $\mathcal{F}_I(X_I; X_N, \mu, \nu) = \mathcal{F}_I(X_I + X_N, \mu, \nu)$ el operador de $(V_I \cap H^1) \times (V_N \times \mathbb{R}^2)$ en V_I . El resultado se sigue de aplicar el teorema de la función implícita (ver apéndice), a $\mathcal{F}_I(X_I, X_N, \mu, \nu) = 0$, sólo hay que verificar las hipótesis. Como \mathcal{F}_I es la proyección en V_I del operador diferenciable $\mathcal{F}(X, \mu, \nu)$, con $\mathcal{F}(0, \mu, \nu) = 0$, entonces \mathcal{F}_I es diferenciable en una vecindad de $(0; 0, \mu_0, \nu_0)$ y $\mathcal{F}_I(0, 0, \mu, \nu) = 0$.

Sólo falta verificar que $D_{X_I}\mathcal{F}_I(0; 0, \mu_0, \nu_0)$ es un homeomorfismo lineal de $(V_I \cap H^1)$ en V_I . Defínase el operador T de $(V_I \cap H^1)$ en V_I como

$$T(X_I) = \sum_{l \in I} M(\mu_0, l\nu_0)X_l e^{il\tau} = \nu_0 \partial X_I - L(\mu_0)X_I(\tau + \nu_0 \cdot),$$

este es un operador lineal y acotado. Como

$$\mathcal{F}_I(X_I, X_N, \mu, \nu) = \sum_{l \in I} M(\mu, l\nu)X_l e^{il\tau} + o(X_I, X_N),$$

entonces $\mathcal{F}_I(0 + h, 0, \mu_0, \nu_0) = T(h) + o(h)$ y T es la derivada parcial de \mathcal{F}_I con respecto a X_I en $(0, 0, \mu_0, \nu_0)$.

Como $M(\mu_0, l\nu_0)$ es invertible para $l \in I$, el inverso de T es $T^{-1}X_I = \sum_{l \in I} M(\mu_0, l\nu_0)^{-1}X_l e^{il\tau}$. Además, para $|l\nu_0| > C(\mu_0)$ se tiene

$$(1 + l^2) \|M^{-1}(\mu_0, l\nu_0)\|^2 \leq \frac{(1 + l^2)}{(|l\nu_0| - C(\mu_0))^2} \leq K$$

donde K no depende de l , entonces

$$\|T^{-1}X_l\|_{H^1}^2 \leq \sum_{l \in I} (1+l^2) \|M^{-1}(\mu_0, l\nu_0)\|^2 \|X_l\|^2 \leq K' \|X_l\|_{L^2}^2.$$

Por lo tanto, T^{-1} es continuo y T es un homeomorfismo. \square

Defínase a $\mathcal{F}_N^*(X_N)$ como

$$\mathcal{F}_N^*(X_N, \mu, \nu) \equiv \mathcal{F}_N(H(X_N) + X_N) = \sum_{l \in N} [M(\mu, l\nu)X_l + g_l^*(X_N)]e^{il\tau} \quad (2.3)$$

con $g_l^*(X_N, \mu, \nu) = g_l(H(X_N) + X_N) = o(X_N)$. Por lo tanto, encontrar $(X, \mu, \nu) \sim (0, \mu_0, \nu_0)$ tal que $\mathcal{F}(X, \mu, \nu) = 0$, es equivalente a encontrar $(X_N, \mu, \nu) \sim (0, \mu_0, \nu_0)$ tal que $\mathcal{F}_N^*(X_N, \mu, \nu) = 0$.

Nótese que si N es vacío, entonces $X_N = 0$ es la única solución a $\mathcal{F}_N^*(X_N) = 0$, por lo que $X = H(0) + 0 = 0$ es la única solución a $\mathcal{F}(X) = 0$.

Se recuerda que $\mathcal{F}(X)$ es un operador real, entonces $\bar{X}_l = X_{-l}$, $\bar{M}(\mu, l\nu) = M(\mu, -l\nu)$ y $\bar{g}_l = g_{-l}$. Por lo tanto $\mathcal{F}_N^*(X_N) = 0$ si y sólo si $M(\mu, l\nu)X_l + g_l(\{X_l\}_{l \in N^*}) = 0$ para $l \in N^+ \equiv \{l \in N : l \geq 0\}$, con $g_l^*(\{X_l\}_{l \in N^+}) = g_l(X_N)$. Sea

$$V^* = \{\{X_l\}_{l \in N^+} : X_0 \in \mathbb{R}^{mn}, X_l \in \mathbb{C}^{mn} \text{ para } l > 0\}.$$

Se define a \mathcal{F}^* de $V^* \times \mathbb{R}^2$ en V^* como

$$\mathcal{F}^*(\{X_l\}_{l \in N^+}, \mu, \nu) = \{M(\mu, l\nu)X_l + g_l(\{X_l\}_{l \in N^+})\}_{l \in N^+}. \quad (2.4)$$

Entonces $\mathcal{F}^*(\{X_l\}_{l \in N^+}) = 0$ es equivalente a $\mathcal{F}_N^*(X_N) = 0$.

En resumen

El problema de encontrar $(X, \mu, \nu) \sim (0, \mu_0, \nu_0)$ tal que $\mathcal{F}(X, \mu, \nu) = 0$ con $X = \sum_{l \in \mathbb{Z}} X_l e^{il\tau}$, es equivalente al problema de encontrar $(\{X_l\}_{l \in N^+}, \mu, \nu) \sim (0, \mu_0, \nu_0)$ tal que $\mathcal{F}^*(\{X_l\}, \mu, \nu) = 0$, con N^+ el conjunto de l 's tal que $l \geq 0$ y $M(l\nu_0, \mu_0)$ es no invertible. Esto se conoce como la reducción de Ljapunov-Schmidt; y a $\mathcal{F}^* = 0$ se le conoce como la ecuación de bifurcación.

En la siguiente sección, se verán las simetrías y el seguimiento de estas simetrías hasta la ecuación de bifurcación.

2.2. Equivarianza

En esta sección se analizan las simetrías de las ecuaciones.

Definición 2.4 Un espacio de Banach E es una representación del grupo Γ , si existe un homomorfismo ρ de Γ en $GL(E)$, donde $GL(E)$ son los homomorfismos en E . Se dice que Γ actúa en E por la acción $\rho(\gamma)x$.

Un subgrupo de permutaciones $G \subset S_n$ actúa en el espacio $X = (x_0, \dots, x_{n-1})$ con $x^j \in \mathbb{R}^m$, como la representación $\rho(\gamma) : G \rightarrow GL(\mathbb{R}^{mn})$ inducida por

$$\rho(\gamma)X = (x_{\gamma(0)}, \dots, x_{\gamma(n-1)})$$

para $\gamma \in G \subset S_n$.

Ejemplo 2.5 El diédrico $D_n \subset S_n$, es el subgrupo de permutaciones generado por la rotación $\zeta(j) = j + 1$ y la reflexión $\kappa(j) = n - j$, con $j = 0, \dots, n - 1$ módulo n .

Obsérvese que si I es la matriz identidad de $m \times m$, entonces por definición de ρ , se tiene

$$\rho(\zeta) = \begin{pmatrix} I & \dots & & \\ & \dots I & & \\ & & \dots & I \\ I & & & \dots \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \rho(\kappa) = \begin{pmatrix} & & \dots & I \\ & & \dots I & \\ & I & \dots & \\ I & & \dots & \end{pmatrix}$$

donde $\rho(\gamma)$ es una matriz de $mn \times mn$.

Definición 2.6 Si B y E son Γ -representaciones, con acciones $\rho(\gamma)$ y $\rho'(\gamma)$ respectivamente, entonces $F : B \rightarrow E$ es Γ -equivariante si $F(\rho(\gamma)x) = \rho'(\gamma)F(x)$.

Si $F(X)$ es equivariante por ρ , se dice que el grupo Γ son las simetrías de las ecuaciones.

Proposición 2.7 La función $F(X, \mu)$, dada en (1.3), es D_n -equivariante. Es decir, $F(\rho(\gamma)X, \mu) = \rho(\gamma)F(X, \mu)$ para todo $\gamma \in D_n$.

Prueba. Obsérvese que $\rho(\gamma)F(X, \mu) = (F_{\gamma(0)}, \dots, F_{\gamma(n-1)})$, por lo que $F(X, \mu)$ es Γ -equivariante si la condición

$$F_j(\rho(\gamma)X) = F_{\gamma(j)}(X)$$

es válida para todo j . Como D_n está generado por la rotación ζ y por la reflexión κ , para probar la equivarianza de $F(U, \mu)$ sólo es necesario verificar la condición para ζ y κ .

Para la reflexión κ , utilizando $f(v, u, w) = f(w, u, v)$ se obtiene

$$\begin{aligned} F_j(\rho(\kappa)U) &= f(u_{\kappa(j-1)}, u_{\kappa(j)}, u_{\kappa(j+1)}) = f(u_{-j+1}, u_{-j}, u_{-j-1}) \\ &= f(u_{-j-1}, u_{-j}, u_{-j+1}) = F_{-j}(U) = F_{\kappa(j)}(U). \end{aligned}$$

Para la rotación ζ , se tiene

$$\begin{aligned} F_j(\rho(\zeta)U) &= f(u_{\zeta(j-1)}, u_{\zeta(j)}, u_{\zeta(j+1)}) \\ &= f(u_j, u_{j+1}, u_{j+2}) = F_{j+1}(U) = F_{\zeta(j)}(U). \end{aligned}$$

Con lo cual se obtiene la equivarianza. □

Proposición 2.8 Sea (γ, φ) la acción de $\Gamma = D_n \times S^1$ en el espacio $L^2(S^1, \mathbb{R}^{mn})$ dada por

$$(\gamma, \varphi)X(\tau) = \rho(\gamma)X(\tau + \varphi).$$

Entonces el operador \mathcal{F} , dado en (1.6), es Γ -equivariante.

Prueba. De la proposición anterior y debido a que $F(X^\tau(\nu\theta), \mu)$ no depende explícitamente del tiempo, se tiene

$$\begin{aligned} (\gamma, \varphi)F(X^\tau(\nu\theta)) &= \rho(\gamma)F(X^{\tau+\varphi}(\nu\theta)) \\ &= F(\rho(\gamma)X^{\tau+\varphi}(\nu\theta)) = F((\gamma, \varphi)X^\tau(\nu\theta)). \end{aligned}$$

Además el operador derivada ∂ es Γ -equivariante. Por lo que $\mathcal{F}(X) = \nu\partial X - F(X^\tau(\nu\theta))$ es Γ -equivariante. □

Definición 2.9 Sea $x \in E$. El grupo de isotropía de Γ en x es el conjunto $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma : \gamma x = x\}$.

Proposición 2.10 Si $F(\rho(\gamma)X) = \rho'(\gamma)F(X)$ y F es C^1 en X_0 , entonces

$$DF(\rho(\gamma)X_0)\rho(\gamma) = \rho'(\gamma)DF(X_0)$$

para todo γ en Γ . En particular, si $H = \Gamma_{X_0}$, entonces $DF(X_0)$ es H -equivariante.

Prueba. Por un lado

$$F(\rho(\gamma)(X + X_0)) - F(\rho(\gamma)X_0) = DF(\rho(\gamma)X_0)\rho(\gamma)X + \dots,$$

por otro lado

$$\begin{aligned} F(\rho(\gamma)(X + X_0)) - F(\rho(\gamma)X_0) &= \rho'(\gamma)[F(X + X_0) - F(X_0)] \\ &= \rho'(\gamma)(DF(X_0) + \dots). \end{aligned}$$

Por unicidad de la derivada, se tiene $Df(\rho(\gamma)X_0)\rho(\gamma) = \rho'(\gamma)DF(X_0)$. \square

Por la proposición anterior, debido a que \mathcal{F} es Γ -equivariante y a que $\Gamma_0 = D_n \times S^1$, entonces $\nu\partial - L(\mu)$ es Γ -equivariante. Además, la parte no lineal $g(X) = \mathcal{F}(X) - (\nu\partial X - L(\mu)X)$ es diferencia de funciones Γ -equivariantes, por lo que $g(X)$ también es Γ -equivariante.

Proposición 2.11 El operador $\mathcal{F}_N^*(X_N)$, dado en (2.3), es Γ -equivariante.

Prueba. Como \mathcal{F} es Γ -equivariante, entonces

$$(\gamma, \varphi)\mathcal{F}_I(X) + (\gamma, \varphi)\mathcal{F}_N(X) = \mathcal{F}_I((\gamma, \varphi)X) + \mathcal{F}_N((\gamma, \varphi)X)$$

por lo que \mathcal{F}_I y \mathcal{F}_N son Γ -equivariantes.

Si $\mathcal{F}_I(H(X_N) + X_N) = 0$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= (\gamma, \varphi)^{-1}\mathcal{F}_I(H(X_N) + X_N) \\ &= \mathcal{F}_I((\gamma, \varphi)^{-1}H(X_N) + (\gamma, \varphi)^{-1}X_N) = \mathcal{F}_I[(\gamma, \varphi)^{-1}H((\gamma, \varphi)Y_N) + Y_N], \end{aligned}$$

con $Y_N = (\gamma, \varphi)^{-1}X_N$. Pero $\mathcal{F}_I(H(Y_N) + Y_N) = 0$ y $H(Y_N)$ es única, entonces

$$H(Y_N) = (\gamma, \varphi)^{-1}H((\gamma, \varphi)Y_N)$$

y H es Γ -equivariante.

Utilizando lo anterior

$$\begin{aligned}(\gamma, \varphi) \mathcal{F}_N^*(X_N) &= \mathcal{F}_N((\gamma, \varphi)H(X_N) + (\gamma, \varphi)X_N) \\ &= \mathcal{F}_N(H((\gamma, \varphi)X_N) + (\gamma, \varphi)X_N) = \mathcal{F}_N^*((\gamma, \varphi)X_N)\end{aligned}$$

que es la equivarianza. \square

Esto sugiere que la función \mathcal{F}^* , dada en (2.4), es Γ -equivariante por la siguiente acción.

Proposición 2.12 *Sea $(\gamma, \varphi)^*$ la acción de $\Gamma = D_n \times S^1$ en el espacio V^* dada por*

$$(\gamma, \varphi)\{X_l\}_{l \in N^+} = \{\rho(\gamma)e^{i l \varphi} X_l\}_{l \in N^+}.$$

Entonces la función \mathcal{F}^* de V^* en V^* es Γ -equivariante.

Prueba. Se utiliza que \mathcal{F}_N^* es Γ -equivariante. Se recuerda que $X_N(\tau) = \sum_{l \in N} [M(l\nu, \mu)X_l]e^{i l \tau}$. Entonces

$$(\gamma, \varphi)X_N(\tau) = \sum_{l \in N} (e^{i l \varphi} \rho(\gamma)X_l)e^{i l \tau} \quad y$$

$$F_N^*((\gamma, \varphi)X) = \sum_{l \in N} [M(l\nu, \mu)e^{i l \varphi} \rho(\gamma)X_l + g_l^*(\{e^{i l \varphi} \rho(\gamma)X_l\})]e^{i l \tau}.$$

Además

$$(\gamma, \varphi)\mathcal{F}_N^*(X) = \sum_{l \in N} \rho(\gamma)e^{i l \varphi} [M(l\nu, \mu)X_l + g_l^*(\{X_l\})]e^{i l \tau}.$$

Como la expansión en series de Fourier es única se tiene

$$e^{i l \varphi} \rho(\gamma) [M(l\nu, \mu)X_l + g_l^*] = M(l\nu, \mu)e^{i l \varphi} \rho(\gamma)X_l + g_l^*(\{e^{i l \varphi} \rho(\gamma)X_l\})$$

que es la equivarianza. \square

2.3. Cambio de Base

El grupo $\Gamma = D_n \times S^1$ actúa en $\{X_l\} \in V^*$ como $(\gamma, \varphi)\{X_l\} = \{\rho(\gamma)e^{i\ell\varphi}X_l\}$. Obsérvese que D_n actúa igual en el modo X_l para toda l ; la única diferencia es que el modo X_0 es real, y el modo X_l es complejo si $l > 0$. Puesto que \mathbb{R}^{mn} está identificado con $\{X \in \mathbb{C}^{mn} : \bar{X} = X\}$, se puede pensar al modo X_0 en \mathbb{C}^{mn} .

Notación 2.13 Se usará a ζ para denotar a $\zeta = 2\pi/n$ donde n es el número de celdas. Ya se ha utilizado a ζ como la rotación en D_n , en lo sucesivo se utilizará indistintamente a ζ .

Definición 2.14 Para $k = 0, \dots, n-1$ módulo n , se define a los subespacios $V(k)$ de \mathbb{C}^{mn} como

$$V(k) = \{(ze^{0ik\zeta}, ze^{ik\zeta}, \dots, ze^{(n-1)ik\zeta}) : z \in \mathbb{C}^m\}.$$

Además, se definen isomorfismos $T(k)$ de \mathbb{C}^m en $V(k)$ como

$$T(k)z = \frac{1}{\sqrt{n}}(ze^{0ik\zeta}, ze^{ik\zeta}, \dots, ze^{(n-1)ik\zeta}).$$

Por ejemplo, se tiene que $V(n-k) = V(-k)$ y $T(n-k) = T(-k)$. Además, se puede probar que $\overline{T(k)z} = T(-k)\bar{z}$.

Lema 2.15

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{ij(k-l)\zeta} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \text{ módulo } n \\ n & \text{si } k = l \text{ módulo } n \end{cases}.$$

Prueba. Sea $k' = k - l \neq 0$ módulo n , como $e^{in\zeta} = 1$, entonces

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{ijk'\zeta} = (1 - e^{ik'n\zeta})/(1 - \zeta) = 0.$$

Sea $k' = 0$ módulo n , entonces $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ijk'\zeta} = n$. □

Sea usará a $[x]$ para denotar al primer entero superior de $x \in \mathbb{R}$. Entonces $[n/2]$ es $n/2$ si n es par, y $[n/2]$ es $(n+1)/2$ si n es impar.

Proposición 2.16 Sea $\{e_i\}_{i=1}^m$ la base canónica de \mathbb{C}^m y sea $\{T(k)e_i\}_1^m = \{T(k)e_1, \dots, T(k)e_m\}$. Se define a la matriz P de $mn \times mn$ como

$$P = [\{T(0)e_i\}_1^m, \{T(1)e_i\}_1^m, \{T(-1)e_i\}_1^m, \dots, \{T(\lfloor n/2 \rfloor - 1)e_i\}_1^m, \{T(-(\lfloor n/2 \rfloor - 1))e_i\}_1^m, \{T(\lfloor n/2 \rfloor)e_i\}_1^m].$$

En el caso que n es impar, los vectores $\{T(\lfloor n/2 \rfloor)e_i\}_1^m$ no aparecen.

Entonces P es una matriz ortogonal, esto es, $P^{-1} = P^T$.

Prueba. Utilizando el lema anterior se tiene

$$\langle T(k)e_i, T(l)e_j \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} e^{ij(k-l)\zeta} \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } (k, i) = (l, j) \\ 0 & \text{si } (k, i) \neq (l, j) \end{cases}$$

Por lo que las columnas $\{T(k)e_i\}_{k,i=1}^{n,m}$ de P forman una base ortonormal de \mathbb{C}^{mn} . \square

Por lo tanto, para todo $X \in \mathbb{C}^{mn}$ existe un único

$$Z = (z_0, z_1, z_{-1}, \dots, z_{\lfloor n/2 \rfloor - 1}, z_{-(\lfloor n/2 \rfloor - 1)}, z_{\lfloor n/2 \rfloor}) \in \mathbb{C}^{mn}$$

tal que $X = PZ = \sum_{k=0}^{n-1} T(k)z_k$, donde $z_{\lfloor n/2 \rfloor}$ no aparece si n es impar.

Proposición 2.17 Sea V_R el subespacio $P^{-1}(\mathbb{R}^{mn})$ de \mathbb{C}^{mn} , entonces la transformación lineal $P : V_R \rightarrow \mathbb{R}^{mn}$ es una biyección y

$$V_R = \{(z_0, z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{\lfloor n/2 \rfloor}) \in \mathbb{C}^{mn} : z_0, z_{\lfloor n/2 \rfloor} \in \mathbb{R}^m\}.$$

En el caso que n es impar, el término $z_{\lfloor n/2 \rfloor}$ no aparece.

Prueba. Si $Z = (z_0, z_1, z_{-1}, \dots, z_{\lfloor n/2 \rfloor}) \in V_R$, entonces $PZ = \sum_{k=0}^{n-1} T(k)z_k \in \mathbb{R}^{mn}$, por lo que $PZ = \overline{PZ}$ y

$$\sum_{k=0}^{n-1} T(k)z_k = \sum_{k=0}^{n-1} \overline{T(k)z_k} = \sum_{k=0}^{n-1} T(-k)\bar{z}_k.$$

Como las z_k son únicas, necesariamente $z_{-k} = \bar{z}_k$. Por lo tanto, z_0 es real, $z_{-k} = \bar{z}_k$ para $0 < k < n/2$ y $z_{n/2}$ es real (si n es par). \square

Notación 2.18 Se usará la notación $M = \text{diag}(M_1, M_2, \dots, M_m)$, para denotar la matriz diagonal

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_m \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.19 Sea $M_k(\mu, \lambda)$ la matriz de $m \times m$

$$M_k(\mu, \lambda) = i\lambda I - 2 \cos k\zeta [f_v] - [f_u] \quad (2.5)$$

con k módulo n . Defínase a la matriz $M'(\mu, \lambda)$ como

$$M'(\mu, \lambda) = \begin{pmatrix} M_0 & & & & & & \\ & M_1 & & & & & \\ & & M_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & M_{[n/2]-1} & & \\ & & & & & M_{[n/2]-1} & \\ & & & & & & M_{[n/2]} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

donde el bloque $M_{[n/2]}$ no aparece si n es impar. Entonces $P^{-1}M(\mu, \lambda)P = M'(\mu, \lambda)$.

Prueba. Sea $z \in \mathbb{C}^m$, entonces

$$M(\mu, \lambda)T(k)z = (i\lambda I - [L(\mu)e^{i\lambda\theta}])(ze^{0ik\zeta}, \dots, ze^{ik(n-1)\zeta}) = (y_0, \dots, y_{n-1}).$$

Usando la definición de $[L(\mu)e^{i\lambda\theta}]$, (2.1), se obtiene que

$$\begin{aligned} y_j &= (i\lambda e^{jik\zeta} - [f_v]e^{(j-1)ik\zeta} - [f_u]e^{jik\zeta} - [f_v]e^{(j+1)ik\zeta})z \\ &= e^{jik\zeta}(i\lambda - (e^{-ik\zeta} + e^{ik\zeta})[f_v] - [f_u])z = e^{jik\zeta}M_k(\mu, \lambda)z \end{aligned}$$

con j módulo n . Por lo tanto $M(\mu, \lambda)T(k)z = T(k)M_k(\mu, \lambda)z$. Utilizando que $M(\mu, \lambda)$ es lineal en $PZ = \sum_{k=0}^{n-1} T(k)z_k$, se tiene

$$M(\mu, \lambda)PZ = \sum_{l=0}^{n-1} M(\mu, \lambda)T(k)z_k = \sum_{l=0}^{n-1} T(k)M_k(\mu, \lambda)z_k = PM'(\mu, \lambda)Z$$

por lo que $MP = PM'$. □

Defínase a V' como

$$V' = \{\{Z_l\}_{l \in \mathbb{N}^+} : Z_0 \in V_R, Z_l \in \mathbb{C}^{mn} \ l > 0\}$$

y a $\mathcal{F}' : V' \rightarrow V'$ como

$$\mathcal{F}'(\{Z_l\}_{l \in \mathbb{N}^+}) \equiv P^{-1} \mathcal{F}^*(\{PZ_l\}_{l \in \mathbb{N}^+}).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(\{Z_l\}) &= \{P^{-1}M(\mu, l\nu)PZ_l + P^{-1}g_l(\{PZ_l\})\} \\ &= \{M'(\mu, l\nu)Z_l + g'_l(\{Z_l\})\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

con $g'_l(\{Z_l\}) = Pg_l^*(\{PZ_l\})$. Como P es invertible, entonces $\mathcal{F}^*(\{X_l\}) = 0$ es equivalente a $\mathcal{F}'(\{Z_l\}) = 0$. Por lo tanto, se ha cambiado el problema de buscar ceros de la ecuación de bifurcación, $\mathcal{F}^* = 0$, al de buscar ceros de \mathcal{F}' . Ahora, se verá la equivarianza de \mathcal{F}' .

Proposición 2.20 Sea $(\gamma, \varphi)'$ la acción de $\Gamma = D_n \times S^1$ en el espacio V' , dada por

$$(\gamma, \varphi)' \{Z_l\}_{l \in \mathbb{N}^+} = \{\rho'(\gamma) e^{il\varphi} Z_l\}_{l \in \mathbb{N}^+}$$

con

$$\rho'(\zeta) = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & e^{ik\zeta} I & & & \\ & & e^{-ik\zeta} I & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -I \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \rho'(\kappa) = \begin{pmatrix} I & & & & \\ & 0 & I & & \\ & I & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I \end{pmatrix}.$$

Entonces la función $\mathcal{F}'(\{Z_l\}_{l \in \mathbb{N}^+})$ de V' en V' es Γ -equivariante.

Prueba. La acción de $\rho(\zeta)$ en $T(k)z$ es

$$\begin{aligned} \rho(\zeta)T(k)z &= \rho(\zeta)(ze^{0ik\zeta}, ze^{ik\zeta}, \dots, ze^{(n-1)ik\zeta}) \\ &= (ze^{ik\zeta}, ze^{2ik\zeta}, \dots, ze^{(n-1)ik\zeta}, ze^{0ik\zeta}) = T(k)(e^{ik\zeta}z). \end{aligned}$$

Bajo la acción de $\rho(\kappa)$ se tiene además que

$$\begin{aligned}\rho(\kappa)T(k)z &= \rho(\kappa)(ze^{0ik\zeta}, ze^{ik\zeta}, \dots, ze^{(n-1)ik\zeta}) \\ &= (ze^{0ik\zeta}, ze^{-ik\zeta}, \dots, ze^{-(n-1)ik\zeta}) = T(-k)z.\end{aligned}$$

Usando que $\rho(\gamma)$ es lineal en $PZ = \sum_{k=0}^{n-1} T(k)z_k$, se tiene

$$\begin{aligned}\rho(\zeta)PZ &= \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\zeta)T(k)z_k = \sum_{l=0}^{n-1} T(k)(e^{ik\zeta}z_k) = P\rho'(\zeta)Z \\ \rho(\kappa)PZ &= \sum_{k=0}^{n-1} \rho(\kappa)T(k)z_k = \sum_{l=0}^{n-1} T(-k)z_k = \sum_{l=0}^{n-1} T(k)z_{-k} = P\rho'(\kappa)Z.\end{aligned}$$

Por lo tanto $\rho(\gamma)P = P\rho'(\gamma)$ para $\gamma \in D_n$.

Utilizando lo anterior

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'((\gamma, \varphi)' \{Z_l\}) &= \mathcal{F}'(\{\rho'(\gamma)e_i^{i\varphi}Z\}) = P^{-1}\mathcal{F}^*(\{P\rho'(\gamma)e^{i\varphi}Z\}) \\ &= P^{-1}\mathcal{F}^*(\{\rho(\gamma)e^{i\varphi}PZ_l\}) = P^{-1}\mathcal{F}^*((\gamma, \varphi)^* \{PZ_l\}) \\ &= P^{-1}(\gamma, \varphi)^*\mathcal{F}^*(\{PZ_l\}) = (\gamma, \varphi)'P^{-1}\mathcal{F}^*(\{PZ_l\}) \\ &= (\gamma, \varphi)'\mathcal{F}'(\{Z_l\})\end{aligned}$$

que es la equivarianza. □

Se recuerda que la matriz $M'(\mu, 0)$ está restringida a $Z_0 \in V_R$, un subespacio de dimensión mn real. Si $Z_0 \in V_R$, entonces $Z_0 = (z_0, z_1, \bar{z}_1, \dots, z_{[n/2]})$ con $z_0, z_{[n/2]} \in \mathbb{R}^m$ y $z_k \in \mathbb{C}^m$ para $0 < k < [n/2]$. En el caso $0 < k < [n/2]$, se tiene que el bloque $\text{diag}(M_k(\mu, 0), M_k(\mu, 0))$ de la matriz $M'(\mu, 0)$, está restringido al subespacio $\{(z, \bar{z}) : z \in \mathbb{C}^m\}$. La acción en este bloque está dada por

$$\rho(\varphi) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \rho'(\zeta) = \begin{pmatrix} e^{ik\zeta}I & 0 \\ 0 & e^{-ik\zeta}I \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \rho'(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Lo anterior es equivalente por el isomorfismo $T(z, \bar{z}) = z$ de $\{(z, \bar{z}) : z \in \mathbb{C}^m\}$ en \mathbb{C}^m , a la aplicación de la matriz $M_k(\mu, 0)$ en \mathbb{C}^m , con la acción dada por

$$\rho'(\varphi) = I, \quad \rho'(\zeta) = e^{ik\zeta}I, \quad \rho'(\kappa)z = \bar{z}. \quad (2.8)$$

Por lo tanto, se puede redefinir a $M'(\mu, 0)$ como

$$M'(\mu, 0) = \text{diag}(M_0(\mu, 0), \dots, M_k(\mu, 0), \dots, M_{[n/2]}(\mu, 0)).$$

Donde los bloques $M_0(\mu, 0)$ y $M_{[n/2]}(\mu, 0)$ están restringidas a \mathbb{R}^m . Además, la acción en M_0 es la trivial, y la acción en $M_{[n/2]}$ está dada por: $\rho'(\varphi) = I$, $\rho'(\zeta) = -I$ y $\rho'(\kappa) = I$.

Resumen

En la primera sección se probó que encontrar una rama de ceros de $\mathcal{F}(X, \mu, \nu)$ cerca de $(0, \mu_0, \nu_0)$, es equivalente, a encontrar una rama de ceros de la función $\mathcal{F}^*(Z, \mu, \nu)$ cerca de $(0, \mu_0, \nu_0)$.

En la segunda sección se probó que \mathcal{F} es equivariante por la acción del grupo $D_n \times S^1$, donde D_n está generado por la rotación ζ y la reflexión κ . Después, se probó que \mathcal{F}^* es equivariante usando que \mathcal{F} lo es. Por lo que las simetrías de las bifurcaciones de \mathcal{F}^* , son las simetrías de las bifurcaciones de \mathcal{F} .

En la tercera sección se cambio de base la función \mathcal{F}^* , con lo que se obtuvo \mathcal{F}' . Por lo tanto, encontrar una rama de ceros de $\mathcal{F}(X, \mu, \nu)$ cerca de $(0, \mu_0, \nu_0)$ es equivalente a encontrar una rama de ceros de $\mathcal{F}'(Z, \mu, \nu)$ cerca de $(0, \mu_0, \nu_0)$. Además, las simetrías de las ramas de ceros de \mathcal{F} y \mathcal{F}' son las mismas.

Ahora, para no hacer referencia al contenido del capítulo, se presentarán con algunas modificaciones, las definiciones y resultados del capítulo que se necesitarán después.

Ecuación de Bifurcación

Se encontraron matrices $[f_u]$ y $[f_v]$, que dependen de (μ, λ) , las cuales satisfacen

$$[f_u]X = f_u(v_\mu)(e^{i\lambda} X) \quad [f_v]X = f_v(v_\mu)(e^{i\lambda} X)$$

para todo $X \in \mathbb{R}^m$ (ver la proposición 2.1). Se definió a la matriz $M_k(\mu, \lambda)$ como

$$M_k(\mu, \lambda) = i\lambda I - (2 \cos k\zeta)[f_v] - [f_u].$$

La matriz $M_k(\mu, \lambda)$ no es invertible para un número finito de λ 's, por la proposición (2.2). Además, para (μ_0, ν_0) fijo, se definió a $N^+ = \{l_1, \dots, l_m\}$ como el conjunto de l 's tal que $l \geq 0$ y $M_k(\mu_0, l\nu_0)$ es no invertible para algún $k = 0, \dots, [n/2]$.

La función \mathcal{F}' de V' en V' está dada por

$$\mathcal{F}'(Z, \mu, \nu) = B'(\mu, \nu)Z + G'(Z, \mu, \nu)$$

con $G'(Z, \mu, \nu) = o(Z)$, $Z = (Z_{l_0}, Z_{l_1}, \dots, Z_{l_m}) \in V'$ y

$$B'(\mu, \nu) = \text{diag}(M'(\mu, l_0\nu), \dots, M'(\mu, l_m\nu))$$

con M' definida en la proposición (2.19).

Ahora, se dará la matriz B' explícitamente y se describirá la equivarianza en cada bloque de B' . Dentro del análisis de la bifurcación, se distinguirán dos casos, según sean las matrices $M_k(\mu_0, 0)$ invertibles o no.

Se pedirá como hipótesis, que la matriz $B'(\mu, \nu)$ sea invertible para $\mu \sim \mu_0$ ($\mu \neq \mu_0$), esto se necesitará para poder definir el grado topológico.

1. Bifurcación Periódica

En este caso, se pedirá que la matriz $M_k(\mu_0, 0)$ sea invertible para todo k . Para (μ_0, ν_0) fijo, entonces $0 \notin N^+ = \{l_1, \dots, l_m\}$. Se define a $B_{k,l}(\mu, \nu)$ para $l > 0$ como

$$B_{k,l}(\mu, \nu) = \begin{cases} M_k(\mu, l\nu) & k = 0, [n/2] \\ \text{diag}(M_k(\mu, l\nu), M_k(\mu, l\nu)) & 0 < k < [n/2] \end{cases}.$$

Entonces la matriz $M'(\mu, l\nu) = (B_{0,l}, \dots, B_{[n/2],l})$. Como $0 \notin N^+$, la matriz $B'(\mu, \nu)$ es

$$\begin{aligned} B'(\mu, \nu) &= \text{diag}(M'(\mu, l_0\nu), \dots, M'(\mu, l_m\nu)) \\ &= \text{diag}(B_{0,l_1}, \dots, B_{[n/2],l_1}, \dots, B_{k,l}, \dots, B_{0,l_m}, \dots, B_{[n/2],l_m}). \end{aligned}$$

Sea I la identidad de $m \times m$. La equivarianza de la ecuación de bifurcación, se puede describir en los subespacios correspondientes a los bloques $B_{k,l}(\mu, \nu)$, como sigue:

- a) En el subespacio \mathbb{C}^m de la matriz $B_{0,l}$, se tiene la acción $\rho'(\varphi) = e^{i\varphi}I$ y $\rho'(\gamma) = I$.
- b) En el subespacio $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m$ de la matriz $B_{k,l}$ con $0 < k < [n/2]$, se tiene la acción $\rho'(\varphi) = e^{i\varphi} \text{diag}(I, I)$,

$$\rho'(\zeta) = \begin{pmatrix} e^{ik\zeta}I & 0 \\ 0 & e^{-ik\zeta}I \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \rho'(\kappa) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

- c) En el subespacio \mathbb{C}^m de la matriz $B_{[n/2],t}$, se tiene la acción $\rho'(\varphi) = e^{i\ell\varphi}I$, $\rho'(\zeta) = -I$ y $\rho'(\kappa) = I$.

En este caso, la matriz $B'(\mu, \nu)$ es invertible para $\nu \sim \nu_0$ ($\nu \neq \nu_0$), por la proposición (2.2). Y se pedirá que $B'(\mu, \nu)$ sea invertible para $\mu \sim \mu_0$ ($\mu \neq \mu_0$).

2. Bifurcación Estacionaria

Si $M_k(\mu_0, 0)$ no es invertible para algún k , entonces se puede tomar un ν_0 tal que $N^+ = \{0\}$. En este caso $B'(\mu, \nu) = M'(\mu, 0)$ y la matriz $B'(\mu, \nu)$ no depende de ν . Defínase a $B_k(\mu)$ como

$$B_k(\mu) = \begin{cases} M_k(\mu, 0) & k = 0, [n/2] \\ \text{diag}(M_k(\mu, 0), M_k(\mu, 0)) & 0 < k < [n/2]. \end{cases}$$

Entonces $N^+ = \{0\}$ y la matriz $B'(\mu, \nu)$ es

$$B'(\mu) = M'(\mu, 0) = \text{diag}(B_0, \dots, B_k, \dots, B_{[n/2]}).$$

La equivarianza de la ecuación de bifurcación, se puede describir en los subespacios correspondientes a los bloques $B_k(\mu)$, como sigue:

- a) En el subespacio \mathbb{R}^m de la matriz $B_0(\mu)$, se tiene la acción trivial $\rho'(\gamma, \varphi) = I$.
- b) En el subespacio $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{C}^m$ de la matriz $B_k(\mu)$ con $0 < k < [n/2]$, se tiene la acción en $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{R}^{2m}$ dada por $\rho'(\varphi)z = z$, $\rho'(\zeta)z = e^{ik\zeta}z$ y $\rho'(\kappa)z = \bar{z}$.
- c) En el subespacio \mathbb{R}^m de la matriz $B_{[n/2]}(\mu)$, se tiene la acción $\rho'(\varphi) = I$, $\rho'(\zeta) = -I$ y $\rho'(\kappa) = I$.

En este caso, la matriz $B'(\mu)$ no depende de ν , esta es la razón por la que se toman dos casos. Se pedirá que $B'(\mu)$ sea invertible para $\mu \sim \mu_0$ ($\mu \neq \mu_0$).

En este momento se puede olvidar el operador \mathcal{F} . Ahora, el problema es encontrar ramas de ceros de la ecuación algebraica equivariante: $\mathcal{F}' = B'Z + G'(Z) = 0$. En el siguiente capítulo, se define el grado topológico equivariante, necesario para aplicarlo a la ecuación $\mathcal{F}' = 0$, lo cual dará las condiciones para la bifurcación.

Capítulo 3

Grado Equivariante

En el capítulo anterior, se redujo el problema de encontrar soluciones periódicas, al de encontrar ramas de ceros de la ecuación de bifurcación.

En la primera sección, se resumen las definiciones y los resultados de representaciones de grupos. Se hace la construcción del grado topológico equivariante y se dan sus principales propiedades. Además, se dan los resultados topológicos necesarios para resolver el problema de la tesis. Es importante mencionar que los teoremas no se presentan en su forma general, sino enunciados de la manera como se utilizarán en la tesis.

En la segunda sección, se utilizan los resultados del grado equivariante, para encontrar las condiciones que garanticen la existencia de ceros en la ecuación de bifurcación, del capítulo anterior.

3.1. Grado Equivariante

Si Γ un grupo de Lie compacto, se recuerda que un espacio de Banach E es un Γ -espacio o **representación**, si existe un homomorfismo de grupos $\rho : \Gamma \rightarrow GL(E)$, donde $GL(E)$ es el grupo de isomorfismos lineales en E . A ρ se le llama una **representación** de Γ . En lo sucesivo B y E serán Γ -espacios.

Representaciones de grupos

Sea $x \in E$, se recuerda que el **grupo de isotropía** de Γ en x es el conjunto $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma : \gamma x = x\}$ y que es un subgrupo cerrado de Γ . Se dice que $x \in E$ es un punto fijo de Γ , si $\Gamma_x = \Gamma$.

Definición 3.1 Sea H un subgrupo de Γ ($H < \Gamma$), se define el **espacio de puntos fijos** de H , como el subespacio de E dado por $E^H = \{x \in E : \gamma x = x \forall \gamma \in H\}$.

Nótese que E^H es cerrado. En particular, $x \in E$ es un punto fijo de Γ , si y sólo si $x \in E^\Gamma$, a E^Γ se le llama el espacio de puntos fijos de Γ . Además, si $H < K$, entonces $E^K < E^H$.

Definición 3.2 La **órbita** de x por Γ es el conjunto $\Gamma x = \{\gamma x : \gamma \in \Gamma\}$.

Se puede probar que Γx es homeomorfo a Γ/Γ_x , que $\Gamma_{\gamma x} = \gamma\Gamma_x\gamma^{-1}$ y que las órbitas forman una partición de E . El conjunto E/Γ es el espacio de órbitas de E con respecto a Γ .

Definición 3.3 Dos puntos x y y tienen el **tipo de órbita** (H), si existen γ_0 y γ_1 tal que $H = \gamma_0^{-1}\Gamma_x\gamma_0 = \gamma_1^{-1}\Gamma_y\gamma_1$.

Es decir, x y y tienen el mismo tipo de órbita si tienen grupos de isotropía conjugados; ésto sucede en particular si x y y están en la misma órbita Γx . Si E es de dimensión finita, entonces existe un número finito de tipos de órbita.

Definición 3.4 Un conjunto $\Omega \subset B$ es Γ -**invariante**, si para toda $x \in \Omega$ se tiene $\Gamma x \subset \Omega$. Una función $f : \Omega \rightarrow E$ es Γ -**equivariante** en un conjunto invariante Ω , si $f(\gamma x) = \gamma f(x)$ para $x \in \Omega$.

Si la acción en E es trivial, se dice que f es Γ -invariante. Nótese que si $f(x) = 0$, entonces $f(\gamma x) = 0$ para $\gamma \in \Gamma$, es decir, f se anula en toda la órbita Γx .

Definición 3.5 Una representación E de Γ es **irreducible**, si E no tiene subespacios invariantes propios.

Es decir, E es irreducible, si los únicos subespacios invariantes son E y $\{0\}$.

Definición 3.6 Si H es un subgrupo de Γ , el **normalizador** de H en Γ es el subgrupo

$$N_\Gamma(H) = \{\gamma \in \Gamma : \gamma^{-1}H\gamma \subset H\}$$

y el grupo de **Weyl** de H es $W_\Gamma(H) = N_\Gamma(H)/H$.

Observación 3.7 Como Γ es un grupo de Lie y la acción es lineal, existe una integral para las funciones reales continuas definidas en Γ , con la propiedad de invarianza y normalización. Esta integral es la de Haar.

Esto permite probar que toda representación finita es equivalente a una representación ortogonal; construir vecindades invariantes, proyecciones y extensiones equivariantes; probar el teorema de extensión homotópica equivariante de Borsuk, etc. (ver [Ize]).

Grupos de homotopía

Definición 3.8 Sean $F_0, F_1 : \bar{\Omega} \rightarrow E$ funciones Γ -equivariantes, no nulas en $\partial\Omega$. Se dice que F_0 y F_1 son Γ -**homotópicas**, $F_0 \stackrel{\Gamma}{\sim} F_1$, si existe una deformación continua $F_t : \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow E$, tal que F_t es Γ -equivariante y no nula en $\partial\Omega$ para toda t .

Sea $B_r = \{x \in B : \|x\| \leq r\}$ una bola de B . Si la representación ρ es una isometría (como en la tesis), entonces B_r es invariante. Sea ϑ el conjunto de todas las funciones equivariantes:

$$\begin{aligned} F &: [0, 1] \times B_r \rightarrow \mathbb{R} \times E \\ F &: S^B \simeq \partial([0, 1] \times B_r) \rightarrow S^E \simeq \mathbb{R} \times E - \{0\}. \end{aligned}$$

Si $E^\Gamma = \{0\}$, se restringe ϑ a funciones con la primera variable positiva, esto para poder definir la suma.

La Γ -homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto ϑ . Denótese a la clase de equivalencia de F por $[F]_\Gamma$ y al conjunto de clases de equivalencia por $\Pi^\Gamma[S^B, S^E] = \vartheta / \sim$. Contrayendo las tapas $\{0\} \times B_r$ y $\{1\} \times B_r$ a un punto, se puede probar que para toda $F \in \vartheta$, existe una $G \in \vartheta$, tal que $[F]_\Gamma = [G]_\Gamma$ y $G(t, x) = (1, 0)$ para $t = 0, 1$. Con esto se puede dar una suma en Π^Γ

$$[F]_\Gamma + [G]_\Gamma = [F \oplus G]_\Gamma \text{ con } F \oplus G = \begin{cases} F(2t, x) & \text{para } t \in [0, 1/2] \\ G(2t - 1, x) & \text{para } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

que está bien definida y con la cual $\Pi^\Gamma[S^B, S^E]$ es un grupo. El elemento neutro del grupo es $[(1, 0)]_\Gamma$ y el inverso de $[F]_\Gamma$ es $[F(1 - t, x)]_\Gamma$. Además, el grupo Π^Γ es abeliano si $\dim B^\Gamma > 0$ (ver [Ize]).

Teorema 3.9 Si $B = \mathbb{R}^k \times E$, el grupo

$$\Pi^\Gamma[S^{\mathbb{R}^k \times E}, S^E] = \Pi_{k-1} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$$

tiene una copia de \mathbb{Z} , por cada tipo de órbita (H) tal que $\dim W(H) = k$ y H es biorientable, es decir, tiene una orientación invariante por traslaciones izquierdas o derechas. El grupo Π_{k-1} comprende a las órbitas (H) con $\dim W(H) < k$.

Definición del Grado

Definición 3.10 Sea U una Γ -representación, la Γ -suspensión de una función equivariante $f : B \rightarrow E$, es el mapeo $\Sigma^U f = (f(x), u)$ de $B \times U$ en $E \times U$.

Si a $F \in \vartheta$ le asociamos $[F]_\Gamma$ en $\Pi^\Gamma[S^B, S^E]$, entonces a $\Sigma^U F = (F(x), u)$ le asociamos un elemento $[\Sigma^U F]_\Gamma$ en $\Pi^\Gamma[S^{B \times U}, S^{E \times U}]$. Se puede probar que la función Σ^U de $\Pi^\Gamma[S^B, S^E]$ en $\Pi^\Gamma[S^{B \times U}, S^{E \times U}]$, dada por $\Sigma^U [F]_\Gamma = [\Sigma^U F]_\Gamma$, está bien definida y es un morfismo de grupos.

Sea $f : B_r \rightarrow E$ una función equivariante tal que $f(x) \neq 0$ para $x \in \partial B_r$. Se define a la suspensión de f por $2t - 1$, como el mapeo $(\Sigma^0 f)(t, x) = (2t - 1, f(x))$ de $[0, 1] \times B_r$ en $\mathbb{R} \times E$. Entonces $\Sigma^0 f \in \vartheta$ pues $\Sigma^0 f = 0$ sólo si $t = 1/2$ y $f(x) = 0$.

Definición 3.11 El grado Γ -equivariante de f es la clase de homotopía de $\Sigma^0 f$

$$\deg_\Gamma(f; B_r) = [\Sigma^0 f]_\Gamma \in \Pi^\Gamma[S^B, S^E].$$

Observación 3.12 Se puede definir el grado equivariante en cualquier dominio invariante y acotado. Primero, se extiende la función de forma equivariante, a una bola que contenga al dominio. Si la extensión no tiene nuevos ceros, se define el grado como la clase de homotopía de la suspensión, de la extensión. Si la extensión tiene nuevos ceros, se construye una función de Urysohn invariante para una vecindad del dominio y se suma a la primer variable, para que los ceros estén en el dominio (ver [Ize]).

Se puede probar que el grado tiene las siguientes propiedades.

(P1): Existencia. Si $\deg(f; \Omega)$ es no trivial, entonces existe un $x \in \Omega$ tal que $f(x) = 0$

(P2): Invarianza Γ -homotópica Si $f_1 \stackrel{\Gamma}{\sim} f_2$, entonces se tiene $\deg(f_1; \Omega) = \deg(f_2; \Omega)$.

(P3): Escisión. Sea $\Omega_0 \subset \Omega$ un subconjunto abierto e invariante de Ω . Si $f : \bar{\Omega} \rightarrow E$ es no cero en el complemento de Ω_0 , entonces $\deg(f; \Omega) = \deg(f; \Omega_0)$

Universalidad Sea $\Delta(f; \Omega)$ otro grado Γ -equivariante con las propiedades anteriores. Si Σ^0 es uno a uno, entonces $\Delta(f; \Omega) \neq 0$ implica que $\deg(f; \Omega) \neq 0$.

El J^Γ -homomorfismo

Sea $\lambda \in \mathbb{R}^n$, supóngase que $B(\lambda)$ es una familia de matrices Γ -equivariantes para $B_\rho = \{\|\lambda\| \leq \rho\}$, invertibles en $\partial B_\rho \simeq S^{n-1}$. Se tiene una aplicación $B(\lambda) : S^{n-1} \rightarrow GL_\Gamma(V)$, donde V es una representación de dimensión finita y $GL_\Gamma(V)$ es el conjunto de matrices invertibles Γ -equivariantes.

La matriz $B_0(\lambda)$ es Γ -deformable a $B_1(\lambda)$, si existe un mapeo $B_t : [0, 1] \times S^{n-1} \rightarrow GL_\Gamma(V)$ continuo. Si se consideran todas las Γ -homotopías de familias de matrices $B(\lambda) : S^{n-1} \rightarrow GL_\Gamma(V)$, se obtiene un elemento de $\Pi^\Gamma[S^{n-1}, GL(V)]$.

Teorema 3.13 *El grupo $GL(\mathbb{R}^d)$ tiene dos componentes caracterizadas por el signo del determinante y $\Pi[S^0, GL(\mathbb{R}^d)] \simeq \mathbb{Z}_2$, donde $B(\lambda)$ es no trivial si y sólo si su determinante cambia de signo.*

Sea $GL^+(\mathbb{R}^d)$ el conjunto de matrices con determinante positivo. El grupo $\Pi[S^1, GL^+(\mathbb{R}^d)]$ es abeliano con $[B] + [D] = [BD]$. Además, este grupo es isomorfo a \mathbb{Z} y está generado por

$$A(\mu, \nu) = \begin{pmatrix} \mu & -\nu \\ \nu & \mu \end{pmatrix}.$$

Si $d > 2$, el grupo $\Pi[S^1, GL^+(\mathbb{R}^d)]$ es isomorfo a \mathbb{Z}_2 y está generado por $\text{diag}(A, I_{d-2})$.

El grupo $\Pi[S^1, GL(\mathbb{C}^d)]$ es isomorfo a \mathbb{Z} , donde $M(\lambda)$ es deformable a $\text{diag}(\det M(\lambda), I_{d-1})$. Además, dos familias son homotópicas, si y sólo si los determinantes complejos, como mapeos de S^1 en $\mathbb{C} - \{0\}$, son homotópicos.

Sea $\mathcal{B}(2\rho, 2\varepsilon)$ la bola

$$B_{2\rho} \times B_{2\varepsilon} = \{(\lambda, x) \in \mathbb{R}^n \times V : \|\lambda\| \leq 2\rho, \|x\| \leq 2\varepsilon\}$$

y sea $B(\lambda)$ como antes, se define el mapeo J^Γ de $\mathcal{B}(2\rho, 2\varepsilon)$ en $\mathbb{R} \times V$ como

$$J^\Gamma(B(\lambda)x) = (\rho - \|\lambda\|, B(\lambda)x).$$

Entonces $J^\Gamma(B(\lambda))$ es no cero en la frontera de $\mathcal{B}(2\rho, 2\varepsilon)$. Además, si $B(\lambda)$ es Γ -homotópica a $C(\lambda)$ en $\partial B_{2\rho} \simeq S^{n-1}$, entonces $J^\Gamma(B(\lambda))$ es Γ -homotópica a $J^\Gamma(C(\lambda))$. Por lo tanto se induce un mapeo J^Γ de $\Pi^\Gamma[S^{n-1}, GL(V)]$ en $\Pi^\Gamma[S^{\mathbb{R}^{n-1} \times V}, S^V]$. Este mapeo es un morfismo de grupos, si todos los determinantes de los bloques con representación real de $B(\lambda)$, son positivos.

3.2. Aplicación a Bifurcación

Ya se definió el grado, ahora, se usará para la ecuación de bifurcación del capítulo anterior. En el resumen del capítulo anterior se presentaron dos casos, ahora, se analizarán estos.

3.2.1. Bifurcación Periódica

Este es el caso en el que $0 \notin N^+$. Sea $\lambda = (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$, para $\lambda_0 = (\mu_0, \nu_0)$ fijo, defínase

$$B(\lambda)x + G(x, \lambda) \equiv B'(\lambda + \lambda_0)x + G'(x, \lambda + \lambda_0)$$

con $B'(\lambda)x + G'(x, \lambda)$ dada en el resumen del capítulo anterior.

Entonces $B(\lambda)$ es invertible para $\|\lambda\| \sim 0$ ($\lambda \neq 0$), pues $B'(\lambda)$ es invertible para $\lambda \sim \lambda_0$ ($\lambda \neq \lambda_0$). Además, la ecuación de bifurcación $B'(\lambda)x + G'(x, \lambda)$ tiene una rama de ceros cerca de $(0, \lambda_0)$, si $B(\lambda)x + G(x, \lambda)$ tiene una rama de ceros cerca de $(0, 0)$.

Defínase el mapeo $F(\lambda, x) : \mathcal{B}(2\rho, 2\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \times V$ como

$$F(\lambda, x) = (\|x\| - \varepsilon, B(\lambda)x + G(x, \lambda))$$

con $\mathcal{B}(2\rho, 2\varepsilon) = \{(\lambda, x) \in \mathbb{R}^2 \times V : \|\lambda\| \leq 2\rho, \|x\| \leq 2\varepsilon\}$. Aquí $\partial\mathcal{B}(2\rho, 2\varepsilon) \simeq S^{\mathbb{R} \times V}$. Si $\deg(F; \mathcal{B})$ está bien definido y $\deg(F; \mathcal{B}) \neq 0$ para $\rho, \varepsilon \sim 0$, entonces existe x tal que $F(\lambda, x) = 0$. Esto es, para $\varepsilon \sim 0$ y $\lambda \sim 0$ existe x tal que $\|x\| = \varepsilon$ y $B(\lambda)x + G(x, \lambda) = 0$, que es una rama local conexa de ceros de la ecuación de bifurcación.

Proposición 3.14 *El grado $\deg(F; \mathcal{B})$ está bien definido y*

$$\deg(F; \mathcal{B}(2\rho, 2\varepsilon)) = \Sigma^0 J^\Gamma([B(\lambda)x]) \in \Pi^\Gamma(S^{\mathbb{R}^2 \times V}, S^{\mathbb{R} \times V}).$$

Prueba. Si $(\lambda, x) \in \partial\mathcal{B}$, entonces $\|\lambda\| = 2\rho$ o $\|x\| = 2\varepsilon$. Si $\|\lambda\| = 2\rho$, la matriz $B(\lambda)$ es invertible para $\rho \sim 0$ y por el teorema de la función implícita, si $\varepsilon \sim 0$, la única solución de $B(\lambda)x + G(x, \lambda) = 0$ es $x = 0$, por lo que $F = (-\varepsilon, G) \neq 0$. Si $\|x\| = 2\varepsilon$, se tiene $F = (\varepsilon, Bx + G) \neq 0$. Por lo tanto $F \neq 0$ en $\partial\mathcal{B}$ y el grado equivariante de F está bien definido.

Ahora, el mapeo $H_t = (\|x\| - \varepsilon, B(\lambda)x + tG(x, \lambda))$ es Γ -equivariante y distinto de cero en $\partial\mathcal{B}$ para cada t , pues $G(x, \lambda) = o(x)$ es Γ -equivariante. Por lo tanto, H_t es una Γ -homotopía admisible que deforma F en

$$(\|x\| - \varepsilon, B(\lambda)x).$$

Además, sea

$$H_t = (t(\|x\| - \varepsilon) + (1 - t)(\rho - \|\lambda\|), B(\lambda)x).$$

Si $B(\lambda)x = 0$ en $(\lambda, x) \in \partial\mathcal{B}$, entonces $\|x\| = 2\varepsilon$ y $B(\lambda)$ es no invertible o $\|\lambda\| = 2\rho$ y $B(\lambda)$ es invertible, pues $B(\lambda)$ es invertible para $\lambda \neq 0$ ($\lambda \sim 0$). En el primer caso $\|x\| = 2\varepsilon$ y $\lambda = 0$, por lo que la primera componente de H_t es positiva. En el segundo caso $\|\lambda\| = 2\rho$ y $x = 0$, por lo que la primera componente de H_t es negativa. Por lo tanto, $H_t \neq 0$ en $\partial\mathcal{B}$ y H_t es una Γ -homotopía admisible de $(\|x\| - \varepsilon, B(\lambda)x)$ en

$$J^\Gamma(B(\lambda)x) = (\rho - \|\lambda\|, B(\lambda)x).$$

Por la propiedad (P2), de invarianza Γ -homotópica, se tiene que $\deg(F; \mathcal{B}) = \deg(J^\Gamma(B(\lambda)x); \mathcal{B})$. \square

Proposición 3.15 *Sea $[F_H]$ el generador de una copia de \mathbb{Z} en el grupo $\Pi^\Gamma(S^{\mathbb{R}^2 \times V}, S^{\mathbb{R} \times V})$. Se tiene que*

$$\deg(F; \mathcal{B}(2\rho, 2\varepsilon)) = [F_0]_\Gamma + \sum d_H [F_H]_\Gamma$$

donde la suma es sobre los tipos de órbita (H) tales que $\dim W(H) = 1$ y H es biorientable. Donde d_H es el número de rotación de $\det B_{k,l}$ tal que V^H corresponde al bloque $B_{k,l}$.

Prueba. Como $J^\Gamma : \Pi_1(GL(V)) \rightarrow \Pi^\Gamma(S^{\mathbb{R} \times V}, S^V)$ es un morfismo de grupos y

$$\begin{aligned} B(\mu, \nu) &= \text{diag}_{k,l}(B_{k,l}) = \prod_{k,l} \text{diag}(I, B_{k,l}, I) \\ &= \text{diag}(B_{0,l_1}, I) \dots \text{diag}(I, B_{k,l}, I) \dots \text{diag}(B_{[n/2],l_m}). \end{aligned}$$

Entonces $J^\Gamma([B]) = \sum_{k,l} J^\Gamma([\text{diag}(I, B_{k,l}, I)])$. Denótese por Σ^Γ a la suspensión por identidades, $\Sigma^\Gamma J^\Gamma([B_{k,l}]) = J^\Gamma([\text{diag}(I, B_{k,l}, I)])$, entonces

$$J^\Gamma([B]) = \sum_{k,l} \Sigma^\Gamma J^\Gamma([B_{k,l}]).$$

Ahora, cada matriz $M_k(l\nu, \mu)$ es deformable a la matriz $\text{diag}(\det M_k, I)$, pues son matrices complejas. Para $k = 0$ o $k = n/2$, se tiene que $B_{k,l} = M_k$ y el grupo actúa multiplicando por una constante. Entonces $B_{k,l}$ es Γ -deformable a $\text{diag}(\det B_{k,l}, I)$. Para $0 < k < n/2$, los bloques $B_{k,l}$ son $B_{k,l} = \text{diag}(M_k, M_k)$ y el grupo actúa constante en los bloques. Entonces $B_{k,l}$ es Γ -deformable a

$$\text{diag}(\det M_k, I, \det M_k, I)$$

que se denotará por $\text{diag}(\det B_{k,l}, I)$. Por lo tanto, se tiene que $J^\Gamma([B]) = \sum_{k,l} \Sigma^\Gamma J^\Gamma([\det B_{k,l}])$ y

$$\deg(F; \mathcal{B}(2\rho, 2\varepsilon)) = \sum_{k,l} \Sigma^0 \Sigma^\Gamma J^\Gamma([\det B_{k,l}]).$$

Ahora, el grupo

$$\Pi^\Gamma(S^{\mathbb{R}^2 \times V}, S^{\mathbb{R} \times V}) = \Pi_0 \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$$

tiene una copia de \mathbb{Z} por cada tipo de órbita (H) tal que $\dim W(H) = 1$ y H es biorientable. Esto es, si $[F]_\Gamma \in \Pi^\Gamma(S^{\mathbb{R}^2 \times V}, S^{\mathbb{R} \times V})$ entonces

$$[F]_\Gamma = [F_0]_\Gamma + \sum_{(H), \dim W(H)=1} d_H [F_H]_\Gamma$$

con $d_H \in \mathbb{Z}$ y con $[F_H]_\Gamma$ un generador de una copia de \mathbb{Z} en el grupo Π^Γ .

Sea $d_{k,l}$ el número de rotación del mapeo de $\det B_{k,l}(\lambda)$ de $S^1 = \{\mu^2 + \nu^2 = 4\rho^2\}$ a $\mathbb{C} - \{0\}$. Usando condiciones para conocer cuándo Σ^0 y Σ^Γ son

inyectivas o suprayectivas, y viendo directamente los generadores, se puede probar que

$$\Sigma^0 \Sigma^\Gamma J^\Gamma([\det B_{k,l}]) = [F_*]_\Gamma + \sum d_{k,l} [F_H]_\Gamma,$$

donde la suma es sobre las tipos de órbita (H) tal que $\dim W(H) = 1$ y H es biorientable, con el subespacio V^H correspondiendo al bloque $B_{k,l}$. \square

Si $d_H \neq 0$, como cada $[F_H]_\Gamma$ es un generador, no se puede extender sin ceros en V^H a F , entonces existe $x \in V^H$ tal que $F(\mu, \nu, x) = 0$. Además, como F es equivariante, F se anula en toda la órbita Γx .

Más aún, el número de rotación de $\det B_{k,l}$ es distinto de cero si y sólo si el número de rotación de $\det M_k(\mu, l\nu)$ es distinto de cero, pues

$$\det B_{k,l} = \begin{cases} \det M_k(\mu, l\nu) & k = 0, [n/2] \\ [\det M_k(\mu, l\nu)]^2 & 0 < k < [n/2] \end{cases}.$$

3.2.2. Bifurcación Estacionaria

Este es el caso en el que $0 \in N^+$. Defínase el mapeo $F(\mu, x) : \mathcal{B}(2\rho, 2\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R} \times V$ como

$$F(\mu, x) = (\|x\| - \varepsilon, B'(\mu + \mu_0)x + G'(x, \mu + \mu_0)).$$

con $\mathcal{B}(2\rho, 2\varepsilon) = \{(\mu, x) \in \mathbb{R} \times V : \|\lambda\| \leq 2\rho, \|x\| \leq 2\varepsilon\}$. Aquí $\partial\mathcal{B}(2\rho, 2\varepsilon) \simeq S^V$. Si $\deg(F; \mathcal{B})$ está bien definido y $\deg(F; \mathcal{B}) \neq 0$ para $\rho, \varepsilon \sim 0$, entonces existe x tal que $F(\mu, x) = 0$. Esto es, para $\varepsilon \sim 0$ y $\mu \sim \mu_0$ existe x tal que $\|x\| = \varepsilon$ y $B'(\mu)x + G'(x, \mu) = 0$, que es una rama local conexa de ceros de la ecuación de bifurcación.

Con los mismos argumentos anteriores, se puede probar que

$$\deg(F; \mathcal{B}(2\rho, 2\varepsilon)) = \Sigma^0 J^\Gamma([B(\mu)x]) \in \Pi^\Gamma(S^{\mathbb{R} \times V}, S^{\mathbb{R} \times V}),$$

donde $J^\Gamma(B(\lambda)x) = (\rho - \mu^2, B(\mu)x)$ es un morfismo de grupos de $\Pi(S^0, GL(V))$ en $\Pi^\Gamma(S^V, S^V)$. Con esto se prueba que

$$\deg(F; \mathcal{B}(2\rho, 2\varepsilon)) = [F_0]_\Gamma + \sum d_H [F_H]_\Gamma,$$

donde la suma es sobre los tipos de órbita (H) tales que $|W(H)| < \infty$. Con $[F_H]$ el generador de un \mathbb{Z} en $\Pi^\Gamma(S^{\mathbb{R} \times V}, S^{\mathbb{R} \times V})$ y con d_H el índice de $\det B_k(\mu)$ tal que V^H corresponde al bloque $B_k(\mu)$.

Si $d_H \neq 0$, F no se puede extender sin ceros en V^H pues cada $[F_H]_\Gamma$ es un generador, entonces existe $x \in V^H$ tal que $F(\mu, \nu, x) = 0$. Además, el índice de $\det B_k(\mu)$, d_H , es no trivial si y sólo si $\det B_k(\mu)$ cambia de signo cuando μ cruza por μ_0 .

Ahora, si $0 < k < [n/2]$, entonces $\det B_k(\mu) = [\det M_k(\mu, 0)]^2$ es positivo. Por lo tanto, el índice de $\det M_k(\mu, 0)$ para $0 < k < [n/2]$ es cero y no existe bifurcación en estos casos.

Resumen

Para (μ_0, ν_0) fijo, la ecuación de bifurcación $\mathcal{F}' = B'(\mu, \nu)x + G'(x, \mu, \nu)$, que se obtuvo en el capítulo anterior, tendrá una rama de ceros cerca de $(0, \mu_0, \nu_0)$, dependiendo de que $M_k(\mu_0, 0)$ sea o no invertible.

1. **Bifurcación Periódica.** En este caso, se necesita que la matriz $M_k(\mu_0, 0)$ es invertible para todo k .

Sea $Rot_{k,l}(\mu_0, \nu_0)$ el número de rotación de $\det M_k(\mu, l\nu)$ alrededor de (μ_0, ν_0) . Si $Rot_{k,l}(\mu_0, \nu_0) \neq 0$, entonces por cada tipo de órbita (H) tal que $\dim W(H) = 1$ y con V^H correspondiente a $B_{k,l}$, existe $x \in (L^2)^H$ tal que $\mathcal{F}'(x, \mu, \nu) = 0$ para (x, μ, ν) cerca de $(0, \mu_0, \nu_0)$. Es decir, *existe una rama local conexa de ceros de \mathcal{F} que bifurca de $(0, \mu_0, \nu_0)$, con simetrías H .*

2. **Bifurcación Estacionaria**

Para $k = 0, [n/2]$, si $\det M_k(\mu, 0)$ cambia de signo en μ_0 , entonces por cada tipo de órbita (H) tal que $\dim W(H) = 0$ y con V^H correspondiente a B_k , existe $x \in (L^2)^H$ tal que $\mathcal{F}'(x, \mu, \nu) = 0$ para (x, μ, ν) cerca de $(0, \mu_0, \nu_0)$. Es decir, *existe una rama local conexa de ceros de \mathcal{F} que bifurca de $(0, \mu_0, \nu_0)$, con simetrías H .*

Ya se han encontrado las condiciones para la bifurcación. Ahora, el problema es encontrar los grupos de isotropía que darán bifurcación. En el siguiente capítulo se encontrarán los grupos de isotropía y sus espacios de puntos fijos. Estos darán las simetrías de las ramas bifurcadas.

Capítulo 4

Grupos de Isotropía

En el capítulo anterior se encontraron las condiciones para la bifurcación. Ahora se darán los resultados algebraicos necesarios para conocer las simetrías.

En la primera sección, se encuentran las representaciones irreducibles del grupo de simetrías. En la segunda sección, se buscan los grupos de isotropía de estas representaciones, con sus grupos de Weyl. En la tercera sección, se encuentran los espacios de puntos fijos.

4.1. Representaciones Irreducibles

En el resumen del capítulo dos, se describió la acción ρ' de $D_n \times S^1$ en los subespacios de las matrices $B_{k,l}(\mu, \nu)$ de $B(\mu, \nu)$. Ahora, se probará que cada subespacio correspondiente a $B_{k,l}$, consta de m copias de la misma representación irreducible.

Sea $\{e_i\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^m , se tendrán los siguientes casos.

1. Para $B_{k,l}$.

a) Para el subespacio \mathbb{C}^m de la matriz $B_{0,l}$ se tiene $\mathbb{C}^m = \bigoplus_{i=1}^m E_i$ con $E_i = \{ze_i : z \in \mathbb{C}\}$. La acción en $z \in E_i$ está dada por:

$$\rho'(\varphi)z = e^{il\varphi}z, \quad \rho'(\gamma)z = z \quad \text{y} \quad \rho'(\kappa)z = z.$$

b) Para el subespacio $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m$ de la matriz $B_{k,l}$ con $0 < k < [n/2]$, se tiene $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m = \bigoplus_{i=1}^m E_i$ con $E_i = \{(z_1e_i, z_2e_i) : z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$.

La acción en $(z_1, z_2) \in E_i$ está dada por:

$$\begin{aligned}\rho(\varphi)(z_1, z_2) &= e^{i\varphi}(z_1, z_2), \\ \rho(\zeta)(z_1, z_2) &= (e^{ik\zeta}z_1, e^{-ik\zeta}z_2), \\ \rho'(\kappa)(z_1, z_2) &= (z_2, z_1).\end{aligned}$$

- c) Para el subespacio \mathbb{C}^m de la matriz $B_{[n/2],l}$ se tiene $\mathbb{C}^m = \bigoplus_{i=1}^m E_i$ con $E_i = \{ze_i : z \in \mathbb{C}\}$. La acción en $z \in E_i$ dada por:

$$\rho(\varphi)z = e^{i\varphi}z, \quad \rho(\zeta)z = -z \quad \text{y} \quad \rho(\kappa)z = z.$$

2. Para B_k .

- a) Para el subespacio \mathbb{R}^m de la matriz B_0 se tiene $\mathbb{R}^m = \bigoplus_{i=1}^m E_i$ con $E_i = \{xe_i : x \in \mathbb{R}\}$. La acción en $x \in E_i$ es la trivial: $\rho(\gamma, \varphi)x = x$.
- b) Para el subespacio $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ de la matriz B_k se tiene $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m = \bigoplus_{i=1}^m E_i$ con $E_i = \{(x_1e_i, x_2e_i) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. La acción en $z = x_1 + ix_2 \in E_i$ está dada por:

$$\rho(\varphi)z = z, \quad \rho(\zeta)z = e^{ik\zeta}z \quad \text{y} \quad \rho(\kappa)z = \bar{z}.$$

- c) Para el subespacio \mathbb{R}^m de la matriz $B_{[n/2]}$ se tiene $\mathbb{R}^m = \bigoplus_{i=1}^m E_i$ con $E_i = \{xe_i : x \in \mathbb{R}\}$. La acción en $x \in E_i$ está dada por:

$$\rho'(\varphi)x = x, \quad \rho'(\zeta)x = -x \quad \text{y} \quad \rho'(\kappa)x = x.$$

Se probó que cada subespacio correspondiente al bloque $B_{k,l}$, es la suma directa $\bigoplus_1^m E_i$. Como las acciones en los subespacios E_i son idénticas e irreducibles, entonces cada subespacio consta de m copias de representaciones irreducibles idénticas.

4.2. Grupos de Isotropía

Se necesitarán los grupos de isotropía de las representaciones irreducibles anteriores, junto con sus grupos de Weyl. Se recuerda que el grupo de isotropía de Γ en x es el subgrupo cerrado $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma : \gamma x = x\}$ y el grupo de Weyl $W_\Gamma(H)$ de $H < \Gamma$ es $W_\Gamma(H) = N_\Gamma(H)/H$.

Claramente, el grupo de isotropía de 0, Γ_0 , es $D_n \times S^1$ para cualquier representación y su grupo de Weyl es $W_\Gamma(\Gamma_0) = 0$. Como no hay bifurcación en el caso de la representación (2.b), esta no se necesitará. La única representación difícil de analizar es (1.b), las demás representaciones se pueden verificar fácilmente y se encuentran resumidas en la siguiente tabla:

R. Irreducible	G. Isotropía	G. Weyl
(1.a)	$\Gamma_{z \neq 0} = D_n \times \langle 2\pi/l \rangle$	$\{0\} \times S^1$
(1.c)	$\Gamma_{z \neq 0} = D_{n/2} \times \langle 2\pi/l \rangle$	$\langle \pi \rangle \times S^1$
(2.a)	$\Gamma_z = D_n \times S^1$	$\{0\}$
(2.c)	$\Gamma_{z \neq 0} = D_{n/2} \times S^1$	$\langle \pi \rangle \times \{0\}$

Caso Simple

En lo sucesivo, se pensará al grupo D_n como el subgrupo de $O(2)$ generado por $\zeta = 2\pi/n$ y la reflexión κ . Así, ζ es $2\pi/n$ y ζ es la rotación en D_n .

Sea $\rho'(\gamma, \varphi)$ la acción del grupo $(\gamma, \varphi) \in D_n \times S^1$ en el espacio $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dada por

$$\begin{aligned} \zeta(z_1, z_2) &= (e^{i\zeta} z_1, e^{-i\zeta} z_2), \\ \kappa(z_1, z_2) &= (z_2, z_1), \\ \varphi(z_1, z_2) &= (e^{i\varphi} z_1, e^{i\varphi} z_2). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Esta es la acción (1.b) con $k = l = 1$, que será llamado el caso simple. Se encontrarán primero los grupos de isotropía de la acción $\rho'(\gamma, \varphi)$ y después los de la representación (1.b), que será llamado el caso general.

El grupo de isotropía de $(0, 0)$ es $D_n \times S^1$. Si $(z_1, z_2) \neq (0, 0)$ aplicando κ si es necesario para suponer $z_1 \neq 0$ y aplicando algún elemento de S^1 se puede transformar el punto (z_1, z_2) en un punto de la forma $(a, re^{i\psi})$ con $a > 0$.

Proposición 4.1 *Los grupos de isotropía de $(a, re^{i\psi})$, por la acción anterior son:*

n impar		n par	
$(0, 0)$	$D_n \times S^1$	$(0, 0)$	$D_n \times S^1$
$(a, 0)$	$\langle (\zeta, -\zeta) \rangle$	$(a, 0)$	$\langle (\zeta, -\zeta) \rangle$
(a, a)	$\langle (\kappa, 0) \rangle$	(a, a)	$\langle (\kappa, 0), (\pi, \pi) \rangle$
$(a, -a)$	$\langle (\kappa, \pi) \rangle$	$(a, ae^{i\zeta})$	$\langle (\kappa\zeta, 0), (\pi, \pi) \rangle$
<i>otro</i>	$\langle (0, 0) \rangle$	<i>otro</i>	$\langle (\pi, \pi) \rangle$

Prueba. Los elementos del grupo $D_n \times S^1$ son de la forma $(m\zeta, \varphi)$ o $(\kappa(m\zeta), \varphi)$. Estos actúan en $(a, re^{i\psi})$ como

$$\begin{aligned}(m\zeta, \varphi)(a, re^{i\psi}) &= (ae^{i(m\zeta+\varphi)}, re^{i(\psi-m\zeta+\varphi)}), \\ (\kappa(m\zeta), \varphi)(a, re^{i\psi}) &= (re^{i(\psi-m\zeta+\varphi)}, ae^{i(m\zeta+\varphi)}).\end{aligned}$$

Para conservar la forma de una primera componente real y positiva, es necesario $\varphi = -m\zeta \pmod{2\pi}$ en el caso $(m\zeta, \varphi)$ y $\varphi = m\zeta - \psi \pmod{2\pi}$ en el caso $(\kappa(m\zeta), \varphi)$.

Por lo anterior, los únicos elementos de $D_n \times S^1$ que podrían conservar la forma de $(a, re^{i\psi})$ son de la forma $(m\zeta, -m\zeta)$ o $(\kappa(m\zeta), m\zeta - \psi)$, y por lo tanto, estos elementos son los únicos de $D_n \times S^1$ que pueden estar en los grupos de isotropía de $(a, re^{i\psi})$. Además, estos elementos actúan como

$$(m\zeta, -m\zeta)(a, re^{i\psi}) = (a, re^{i(\psi-2m\zeta)}), \quad (4.2)$$

$$(\kappa(m\zeta), m\zeta - \psi)(a, re^{i\psi}) = (r, ae^{i(2m\zeta-\psi)}). \quad (4.3)$$

Para los elementos del tipo $(m\zeta, -m\zeta)$ se tienen dos casos:

- Si $r = 0$. Usando (4.2), cualquier elemento $(m\zeta, -m\zeta)$ está en el grupo de isotropía de $(a, 0)$.
- Si $r \neq 0$. Usando (4.2), los elementos $(m\zeta, -m\zeta)$ pertenecen al grupo de isotropía de $(a, re^{i\psi})$, si $\psi - 2m\zeta = \psi \pmod{2\pi}$, esto es, $m\zeta = q\pi$. Por lo tanto, los posibles elementos en el grupo de isotropía de la forma $(m\zeta, -m\zeta)$ son

$$(q\pi, -q\pi).$$

Puesto que se necesita además la condición $q\pi \in D_n$, se tienen dos casos:

- Si n es par, entonces $\pi \in D_n$ y (π, π) está en el grupo de isotropía.
- Si n es impar, entonces $\pi \notin D_n$ y no hay elementos de la forma $(m\zeta, -m\zeta)$ en el grupo de isotropía.

Para los elementos del tipo $(\kappa(m\zeta), m\zeta - \psi)$, se tienen dos casos:

- Si $r \neq a$. Usando (4.3), no hay elementos de la forma $(\kappa(m\zeta), m\zeta - \psi)$ en el grupo de isotropía.

- Si $r = a$. Usando (4.3), los elementos $(\kappa(m\zeta), m\zeta - \psi)$ están en el grupo de isotropía de $(a, re^{i\psi})$, si $2m\zeta - \psi = \psi \pmod{2\pi}$, esto es, $\psi = m\zeta - q\pi$. Por lo tanto, los posibles elementos en el grupo de isotropía de la forma $(\kappa(m\zeta), m\zeta - \psi)$ son

$$(\kappa(\psi + q\pi), q\pi).$$

Como se necesita además la condición $\psi + q\pi \in D_n$, se tienen dos casos:

- Si n es par, entonces $\pi \in D_n$ y la condición es $\psi \in D_n$. Los puntos $(a, re^{i\psi})$ con $\psi = 2l\zeta$ tiene grupos de isotropía conjugados, del mismo modo que los puntos con $\psi = (2l + 1)\zeta$. Por lo tanto, se tienen dos casos :
 - (a, a) con $\psi = 0$ y elementos en el grupo de isotropía $(\kappa(q\pi), q\pi)$.
 - $(a, ae^{i\zeta})$ con $\psi = \zeta$ y elementos en el grupo de isotropía $(\kappa(\zeta + q\pi), q\pi)$.
- Si n es impar, usando que $\pi = \frac{n}{2}\zeta$, se tiene $q\pi = q[\zeta + (n-1)\zeta]/2$ con $(n-1)\zeta/2 \in D_n$. Entonces la condición $\psi + q\pi \in D_n$ es equivalente a

$$\psi + q\zeta/2 \in D_n.$$

Por lo tanto, $\psi = l\zeta$ cuando $q = 0$ y $\psi = (l + 1/2)\zeta$ cuando $q = 1$. Los puntos con $\psi = l\zeta$ tienen grupos de isotropía conjugados, del mismo modo que los puntos con $\psi = (l + 1/2)\zeta$. Entonces se tienen dos casos:

- (a, a) con $\psi = 0$ y elementos en el grupo de isotropía $(\kappa, 0)$.
- $(a, -a)$ con $\psi = \pi$ y elementos en el grupo de isotropía (κ, π) .

Se usó que los puntos $(a, re^{i(\psi+2l\zeta)})$ tienen grupos de isotropía conjugados, pues están en la misma órbita de $D_n \times S^1$:

$$(\zeta, -\zeta)(a, re^{i\psi}) = (a, re^{i(\psi-2\zeta)}).$$

Si n es impar, 2ζ genera el grupo $\langle \zeta \rangle$, por lo que los puntos $(a, re^{i(\psi+l\zeta)})$ tienen grupos de isotropía conjugados. \square

Se van a necesitar los grupos de Weyl, de los grupos de isotropía anteriores. Para esto es necesario el siguiente teorema.

Teorema 4.2 Sea $T : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ un homomorfismo de grupos, sea K el núcleo de T . Si H es un subgrupo de Γ tal que $K < H$, entonces se tiene el isomorfismo

$$W_{T(\Gamma)}(T(H)) \cong W_{\Gamma/K}(H/K) \cong W_{\Gamma}(H).$$

Prueba. Como K es el núcleo de T , para todo subgrupo H tal que $K < H < \Gamma$, se tiene

$$T(H) \cong H/K < \Gamma/K \cong T(\Gamma).$$

Por lo tanto, se tiene que $W_{T(\Gamma)}(T(H)) \cong W_{\Gamma/K}(H/K)$.

Ahora se probará el segundo isomorfismo. De la definición de normalizador, se obtiene

$$N_{\Gamma/K}(H/K) = \{\gamma K \in \Gamma/K : (\gamma K)^{-1}H/K(\gamma K) \subset H/K\}.$$

K es el elemento neutro en H/K y $(\gamma K)^{-1} = \gamma^{-1}K$, por lo que $\gamma^{-1}H/K\gamma = (\gamma K)^{-1}H/K(\gamma K)$ para toda $\gamma \in \Gamma$. Utilizando lo anterior

$$\begin{aligned} N_{\Gamma/K}(H/K) &= \{\gamma K, \gamma \in \Gamma : \gamma^{-1}H/K\gamma \subset H/K\} \\ &= \{\gamma \in \Gamma : \gamma^{-1}H/K\gamma \subset H/K\} / K. \end{aligned}$$

Nótese que $\gamma^{-1}H/K\gamma \subset H/K$ es equivalente a $\gamma^{-1}(hK)\gamma \in H/K$ para toda $h \in H$. Entonces

$$\begin{aligned} N_{\Gamma/K}(H/K) &= \{\gamma \in \Gamma : \gamma^{-1}h\gamma K \in H/K, \quad \forall h \in H\} / K \\ &= \{\gamma \in \Gamma : \gamma^{-1}h\gamma \in H, \quad \forall h \in H\} / K = N_{\Gamma}(H)/K. \end{aligned}$$

Por lo tanto $N_{\Gamma/K}(H/K) = N_{\Gamma}(H)/K$. Utilizando esto

$$\begin{aligned} W_{\Gamma/K}(H/K) &= \frac{N_{\Gamma/K}(H/K)}{H/K} \\ &\cong \frac{N_{\Gamma}(H)/K}{H/K} \cong \frac{N_{\Gamma}(H)}{H} = W_{\Gamma}(H). \end{aligned}$$

□

Proposición 4.3 Sea $\Gamma = D_n \times S^1$, entonces

$$\begin{aligned} W_{\Gamma}(\langle\langle \zeta, -\zeta \rangle\rangle) &\cong W_{\Gamma}(\langle\zeta\rangle \times \{0\}), \\ W(\langle\langle \kappa, \pi \rangle\rangle) &\cong W(\langle\kappa\rangle \times \{0\}). \end{aligned}$$

Si n es par, entonces

$$\begin{aligned} W(\langle(\kappa, 0), (\pi, \pi)\rangle) &= W(\langle(\kappa, \pi) \times \{0\}\rangle), \\ W(\langle(\kappa\zeta, 0), (\pi, \pi)\rangle) &= W(\langle(\kappa, \pi) \times \{0\}\rangle) \end{aligned}$$

donde $\langle(\kappa, \pi) \times \{0\}\rangle = \langle(\kappa\zeta, 0), (\pi, \pi)\rangle$.

Prueba. Se definen homomorfismos T_i de $\Gamma = D_n \times S^1$ en Γ , como

$$T_i(0, \varphi) = (0, \varphi)$$

T_1	T_2	T_3	T_4	
$(\zeta, -\zeta)$	$(\zeta, 0)$	(ζ, π)	(ζ, π)	$\rightarrow (\zeta, 0)$
$(\kappa, 0)$	(κ, π)	$(\kappa, 0)$	$(\kappa\zeta, 0)$	$\rightarrow (\kappa, 0)$

por ejemplo: $T_1((\zeta, -\zeta)) = (\zeta, 0)$ o $T_2((\kappa, \pi)) = (\kappa, 0)$. Los homomorfismos T_i se definen en generadores del mismo orden y se extienden a todo $D_n \times S^1$ de esta manera, por lo que son isomorfismos de grupo. Utilizando el teorema anterior para un T_i , se tiene que si $H < \Gamma$, entonces

$$W_\Gamma(H) \cong W_\Gamma(T_i(H)).$$

El resultado se sigue de aplicar lo anterior a:

$$\begin{aligned} T_1(\langle(\zeta, -\zeta)\rangle) &= \langle\zeta\rangle \times \{0\}, \\ T_2(\langle(\kappa, \pi)\rangle) &= \langle\kappa\rangle \times \{0\}, \\ T_3(\langle(\kappa, 0), (\pi, \pi)\rangle) &= \langle\kappa, \pi\rangle \times \{0\}, \\ T_4(\langle(\kappa\zeta, 0), (\pi, \pi)\rangle) &= \langle\kappa, \pi\rangle \times \{0\}. \end{aligned}$$

□

Proposición 4.4 Sea $\Gamma = D_n \times S^1$, entonces

$$W_\Gamma(\langle\zeta\rangle \times \{0\}) = \langle\kappa\rangle \times S^1.$$

Si n es impar, entonces

$$W_\Gamma(\langle\kappa\rangle \times \{0\}) = \langle 0 \rangle \times S^1.$$

Si n es par, entonces

$$W_\Gamma(\langle\kappa, \pi\rangle \times \{0\}) = \begin{cases} \langle 0 \rangle \times S^1 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ \langle \pi \rangle \times S^1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \end{cases}.$$

Prueba. Sea H un subgrupo de D_n , entonces $(\gamma, \varphi) \in N_\Gamma(H \times \{0\})$ si

$$(\gamma^{-1}\gamma'\gamma, 0) = (\gamma, \varphi)^{-1}(\gamma', 0)(\gamma, \varphi) \in H \times \{0\}$$

para todo $(\gamma', 0) \in H \times \{0\}$. Por lo tanto $N_\Gamma(H \times \{0\}) = N_{D_n}(H) \times S^1$ y

$$W_\Gamma(H \times \{0\}) \cong \frac{N_{D_n}(H) \times S^1}{H \times \{0\}} \cong W_{D_n}(H) \times S^1. \quad (4.4)$$

Ahora sólo es necesario encontrar $W_{D_n}(H)$ para $H < D_n$. Para esto, se utiliza que $D_n = Z_n \cup \kappa Z_n$, con Z_n el subgrupo generado por ζ . Los casos necesarios son:

- Si $\kappa \notin H$. Entonces H es conmutativo, por lo que $Z_n \subset N(H)$. Además, si $\gamma \in H$ se tiene $\kappa^{-1}\gamma\kappa = \gamma^{-1} \in H$, por lo que $\kappa \in N(H)$. Por lo tanto $N_{D_n}(H) = D_n$. En particular, el grupo de Weyl de $Z_n = \langle \zeta \rangle$ es

$$W_{D_n}(\langle \zeta \rangle) = D_n/Z_n \cong \langle \kappa \rangle.$$

- Si $\kappa \in H$. Entonces $\kappa \in H \subset N(H)$. Además, $m\zeta \in N(H)$ si y sólo si $\kappa(2m\zeta) = (-m\zeta)\kappa(m\zeta) \in H$. Como $\kappa \in H$ entonces

$$m\zeta \in N(H) \Leftrightarrow 2m\zeta \in H.$$

En particular se tienen dos casos:

- Si n es impar y $H = \langle \kappa \rangle$. Entonces $m\zeta \in N(H)$ sólo si $2m\zeta = 2k\pi$, que es equivalente a $m\zeta = k\pi$. Pero $\pi \notin D_n$ si n es impar, por lo que $N(\langle \kappa \rangle) = \langle \kappa \rangle$ y el grupo de Weyl de H es

$$W(\langle \kappa \rangle) = \langle \kappa \rangle / \langle \kappa \rangle \cong \{0\}.$$

- Si n es par y $H = \langle \kappa, \pi \rangle$. Entonces $m\zeta \in N(H)$ sólo si $2m\zeta = k\pi$, que es equivalente a $m\zeta = k\pi/2$. Pero $\pi/2 \notin D_n$ si $n = 2 \pmod{4}$, por lo que se tienen dos casos:

$$N(\langle \kappa, \pi \rangle) = \begin{cases} \langle \kappa, \pi \rangle & \text{si } n = 2 \pmod{4} \\ \langle \kappa, \pi/2 \rangle & \text{si } n = 0 \pmod{4} \end{cases}.$$

Por lo tanto, el grupo de Weyl de H es

$$W(H) = \begin{cases} \langle \kappa, \pi \rangle / \langle \kappa, \pi \rangle \cong \{0\} & \text{si } n = 2 \pmod{4} \\ \langle \kappa, \pi/2 \rangle / \langle \kappa, \pi \rangle \cong \langle \pi \rangle & \text{si } n = 0 \pmod{4} \end{cases}.$$

Con lo que se ha terminado la prueba. \square

Lo obtenido se puede resumir en la siguiente tabla:

Paridad	Punto	G. Isotropía	G. Weyl
<i>cualquiera</i>	$(a, 0)$	$\langle\langle \zeta, -\zeta \rangle\rangle$	$\langle \kappa \rangle \times S^1$
$n = 2p + 1$	(a, a)	$\langle\langle \kappa, 0 \rangle\rangle$	$\langle 0 \rangle \times S^1$
$n = 2p + 1$	$(a, -a)$	$\langle\langle \kappa, \pi \rangle\rangle$	$\langle 0 \rangle \times S^1$
$n = 4p + 2$	(a, a)	$\langle\langle \kappa, 0 \rangle, \langle \pi, \pi \rangle\rangle$	$\langle 0 \rangle \times S^1$
$n = 4p + 2$	$(a, ae^{i\zeta})$	$\langle\langle \kappa\zeta, 0 \rangle, \langle \pi, \pi \rangle\rangle$	$\langle 0 \rangle \times S^1$
$n = 4p + 0$	(a, a)	$\langle\langle \kappa, 0 \rangle, \langle \pi, \pi \rangle\rangle$	$\langle \pi \rangle \times S^1$
$n = 4p + 0$	$(a, ae^{i\zeta})$	$\langle\langle \kappa\zeta, 0 \rangle, \langle \pi, \pi \rangle\rangle$	$\langle \pi \rangle \times S^1$
$n = 2p$	<i>otro</i>	$(0, 0)$	$D_n \times S^1$
$n = 2p + 1$	<i>otro</i>	$\langle\langle \pi, \pi \rangle\rangle$	$D_{n/2} \times S^1$

Caso General

Sea $\rho(\gamma, \varphi)$ la acción del grupo $(\gamma, \varphi) \in D_n \times S^1$ en el espacio $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dada por

$$\begin{aligned} \zeta(z_1, z_2) &= (e^{ik\zeta} z_1, e^{-ik\zeta} z_2), \\ \kappa(z_1, z_2) &= (z_2, z_1), \\ \varphi(z_1, z_2) &= (e^{i\varphi} z_1, e^{i\varphi} z_2). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Esta es la acción (1.b) con $0 < k < [n/2]$. Este es el caso general e incluye al anterior. Se recuerda que $\rho'(\gamma, \varphi)$ es la representación $\rho(\gamma, \varphi)$ cuando $k = 1$ y $l = 1$.

Se define el homomorfismo T de $\Gamma = D_n \times S^1$ en Γ como

$$T(\zeta) = k\zeta, \quad T(\kappa) = \kappa, \quad T(\varphi) = l\varphi$$

donde ζ y κ son los generadores de Γ . El morfismo T se necesitará para encontrar los grupos de isotropía y los grupos de Weyl de la representación $\rho(\gamma, \varphi)$, utilizando el hecho que ya se conocen en el caso de la representación $\rho'(\gamma, \varphi)$.

Notación 4.5 En lo sucesivo h será el máximo común divisor de k y n , con $n' = n/h$ y $k' = k/h$ primos relativos.

Proposición 4.6 *El núcleo de T es $\langle n'\zeta \rangle \times \langle 2\pi/l \rangle$ y la imagen es $D_{n'} \times S^1 < \Gamma$, con $D_{n'} = \langle h\zeta, \kappa \rangle$.*

Prueba. El elemento (γ, φ) está en el núcleo de T si y sólo si $\varphi \in \langle 2\pi/l \rangle$ y $T(\gamma) = 0$. Si $m\zeta \in \ker T$, entonces $0 = km\zeta = m(2\pi k'/n')$, por lo que $m = jn'$ para $j \in \mathbb{Z}$ y $m\zeta = jn'\zeta$. Además $\kappa \notin \ker T$, por lo tanto $\ker T = \langle n'\zeta \rangle \times \langle 2\pi/l \rangle$.

Ahora, $T(m\zeta) = mk'(h\zeta) = mk'(2\pi/n')$, como k' y n' son primos relativos, la imagen de T es

$$T(D_n \times S^1) = \langle h\zeta, \kappa \rangle \times S^1 = D_{n'} \times S^1.$$

□

Se tiene la igualdad

$$\rho(\gamma, \varphi)(z_1, z_2) = \rho'(T(\gamma, \varphi))(z_1, z_2)$$

donde el homomorfismo $T : D_n \times S^1 \rightarrow D_{n'} \times S^1$ es sobre y con núcleo $K = \langle n'\zeta \rangle \times \langle 2\pi/l \rangle$. Estas serán las hipótesis para la siguiente proposición.

Proposición 4.7 *Sea $T : \Gamma \rightarrow \Gamma'$ un homomorfismo de grupos. Supóngase que el grupo Γ actúa en X con la representación $\rho(\gamma)$ y el grupo Γ' actúa en X con la representación $\rho'(\gamma)$. Si se satisface la hipótesis*

$$\rho(\gamma)x = \rho'(T\gamma)x$$

para todo $\gamma \in \Gamma$, entonces $\Gamma_x = T^{-1}(\Gamma'_x)$. Si además, T es sobre, entonces $W_\Gamma(\Gamma_x) \cong W_{\Gamma'}(\Gamma'_x)$.

Prueba. La hipótesis $\rho(\gamma)x = \rho'(T\gamma)x$ implica que

$$\begin{aligned} T^{-1}(\Gamma'_x) &= \{\gamma \in \Gamma : T(\gamma) \in \Gamma'_x\} \\ &= \{\gamma \in \Gamma : \rho'(T\gamma)x = x\} \\ &= \{\gamma \in \Gamma : \rho(\gamma)x = x\} = \Gamma_x. \end{aligned}$$

Si además T es sobre, entonces $T(\Gamma) = \Gamma'$ y $\Gamma'_x = T(T^{-1}(\Gamma'_x))$, por lo que $T(\Gamma_x) = \Gamma'_x$. Aplicando el teorema (4.2) al subgrupo Γ_x ($K < \Gamma_x$) se tiene

$$W_\Gamma(\Gamma_x) \cong W_{T(\Gamma)}(T(\Gamma_x)) = W_{\Gamma'}(\Gamma'_x).$$

□

Definición 4.8 Sean H y G subgrupos de Γ , la suma directa de H y G , $H \oplus G$, es el subgrupo de Γ generado por $H \cup G$.

Proposición 4.9 Sea $K = \langle n'\zeta \rangle \times \langle 2\pi/l \rangle$ y ρ la acción de $\Gamma = D_n \times S^1$ dada en (1.b), entonces sus grupos de isotropía y sus grupos de Weyl, son:

Paridad	Punto	G . Isotropía	G . Weyl
cualquiera	$(a, 0)$	$\langle (\zeta, -(k/l)\zeta) \rangle \oplus K$	$\langle \kappa \rangle \times S^1$
$n' = 2p + 1$	(a, a)	$\langle (\kappa, 0) \rangle \oplus K$	$\langle 0 \rangle \times S^1$
$n' = 2p + 1$	$(a, -a)$	$\langle (\kappa, \pi/l) \rangle \oplus K$	$\langle 0 \rangle \times S^1$
$n' = 4p + 2$	(a, a)	$\langle (\kappa, 0), ((n'/2)\zeta, \pi/l) \rangle \oplus K$	$\langle 0 \rangle \times S^1$
$n' = 4p + 2$	$(a, ae^{ik\zeta})$	$\langle (\kappa\zeta, 0), ((n'/2)\zeta, \pi/l) \rangle \oplus K$	$\langle 0 \rangle \times S^1$
$n' = 4p + 0$	(a, a)	$\langle (\kappa, 0), ((n'/2)\zeta, \pi/l) \rangle \oplus K$	$\langle \pi \rangle \times S^1$
$n' = 4p + 0$	$(a, ae^{ik\zeta})$	$\langle (\kappa\zeta, 0), ((n'/2)\zeta, \pi/l) \rangle \oplus K$	$\langle \pi \rangle \times S^1$
$n' = 2p + 1$	otro	K	$D_{n'} \times S^1$
$n' = 2p + 0$	otro	$\langle ((n'/2)\zeta, \pi/l) \rangle \oplus K$	$D_{n'/2} \times S^1$

donde $\zeta = 2\pi/n$, h es el máximo común múltiplo de n y k , $n' = n/h$.

Prueba. El homomorfismo T satisface las condiciones de la proposición anterior. Por lo tanto el grupo de isotropía del punto x , cuando $\Gamma = D_n \times S^1$ actúa como $\rho(\gamma, \varphi)$, es la imagen inversa por T del grupo de isotropía de x cuando $\Gamma' = D_{n'} \times S^1$ actúa como $\rho'(\gamma, \varphi)$, es decir $\Gamma_x = T^{-1}(\Gamma'_x)$. Además T es suprayectivo, por lo que los grupos de Weyl son isomorfos, es decir $W_\Gamma(\Gamma_x) \cong W_{\Gamma'}(\Gamma'_x)$.

Por lo tanto, sólo hay que encontrar las imágenes inversas de los grupos de isotropía de la tabla del caso simple. Para esto, si se encuentra un grupo G tal que $T(G) = \Gamma'_x$, entonces

$$\Gamma_x = T^{-1}(\Gamma'_x) = G \oplus K,$$

donde K es el núcleo de T . Se consideran los siguientes casos:

- $x = (a, 0)$ tiene grupo de isotropía $\Gamma'_x = \langle (2\pi/n', -2\pi/n') \rangle$. Además

$$T(\zeta, -(k/l)\zeta) = (k\zeta, -k\zeta) = k'(2\pi/n', -2\pi/n')$$

y como k' y n' son primos relativos, entonces $T(\zeta, -(k/l)\zeta)$ genera Γ'_x . Así, puesto que T es un morfismo

$$T \langle (\zeta, -(k/l)\zeta) \rangle = \Gamma'_x.$$

▪ n' impar

- $x = (a, a)$ tiene grupo de isotropía $\Gamma'_x = \langle (\kappa, 0) \rangle$. Como $T(\kappa, 0) = (\kappa, 0)$, entonces $T(\kappa, 0)$ genera Γ'_x , por lo que

$$T \langle (\kappa, 0) \rangle = \Gamma'_x.$$

- $x = (a, -a)$ tiene grupo de isotropía $\Gamma'_x = \langle (\kappa, \pi) \rangle$. Como $T(\kappa, \pi/l) = (\kappa, \pi)$, entonces $T(\kappa, \pi)$ genera Γ'_x , por lo que

$$T \langle (\kappa, \pi/l) \rangle = \Gamma'_x.$$

- n' par. Nótese que k' es impar porque n' y k' son primos relativos. Entonces

$$k(n'/2)\zeta = k(n'/n)\pi = k'\pi = \pi$$

pues k' es impar.

- $x = (a, a)$ tiene grupo de isotropía $\Gamma'_x = \langle (\kappa, 0), (\pi, \pi) \rangle$. Como $T((n'/2)\zeta, \pi/l) = (k(n'/2)\zeta, \pi) = (\pi, \pi)$, entonces $T((n'/2)\zeta, \pi/l)$ y $T(\kappa, 0)$ generan Γ'_x , por lo que

$$T \langle (\kappa, 0), ((n'/2)\zeta, \pi/l) \rangle = \Gamma'_x.$$

- $x = (a, ae^{ik\zeta})$. Nótese que $x = (a, ae^{ik'(2\pi/n')})$ tiene grupo de isotropía conjugado al de $(a, ae^{i(2\pi/n')})$ en $D_{n'} \times S^1$, pues k' es impar. Ahora x tiene grupo de isotropía $\Gamma'_x = \langle (\kappa(k\zeta), 0), (\pi, \pi) \rangle$. Como $T(\kappa\zeta, 0) = (\kappa(k\zeta), 0)$, entonces $T(\kappa\zeta, 0)$ y $T((n'/2)\zeta, \pi/l)$ generan Γ'_x , por lo que

$$T \langle (\kappa\zeta, 0), ((n'/2)\zeta, \pi/l) \rangle = \Gamma'_x.$$

□

4.3. Espacio de Puntos Fijos

Los grupos de isotropía se encuentran resumidos en las tablas anteriores. Ahora, se encontrarán los espacios de puntos fijos que se van a necesitar. Se recuerda que el espacio de puntos fijos de $H < \Gamma$, es el subespacio cerrado

$$E^H = \{x \in E : \gamma x = x \quad \forall \gamma \in H\}.$$

La acción de $(\gamma, \varphi) \in D_n \times S^1$ en $U(t) \in L^2(S^1; \mathbb{R}^{mn})$ está dada por

$$(\gamma, \varphi)U(t) = \rho(\gamma)U(t + \varphi),$$

donde $\gamma \in D_n$ actúa en $U(t) = (u_0, u_1, \dots, u_{n-1})$ como $\rho(\zeta)U = (u_1, u_2, \dots, u_0)$ y $\rho(\kappa)U = (u_0, u_{n-1}, \dots, u_1)$. Entonces

$$\begin{aligned} U(t) = \rho(\zeta)U(t) &\iff u_j(t) = u_{j+1}(t) \\ U(t) = \rho(\kappa)U(t) &\iff u_j(t) = u_{n-j}(t). \end{aligned}$$

Sea $p = 2\pi/l$, una función $U(t)$ está fija por $(0, 2\pi/l)$, si $U(t) = U(t + 2\pi/l)$. Es decir, $U(t)$ es $p = 2\pi/l$ periódica. Sea H_p^1 el espacio de Sobolev de funciones en $H^1(\mathbb{R}^m)$ que son p -periódicas, entonces $U \in H_p^1$. Ahora, si la función $U(t)$ está fija por $\varphi \in S^1$, es decir, si $U(t + \varphi) = U(t)$ para toda $\varphi \in S^1$, entonces $U(t)$ es constante.

Por otro lado, si $U(t)$ está fija por $(n'\zeta, 0)$, entonces

$$u_j(t) = u_{j+n'}(t).$$

1. Los tipos de órbitas (H) con $\dim W(H) = 1$, correspondientes a bloques $B_{k,l}$ son:

- a) Para $B_{0,l}$, se tiene el grupo de isotropía $D_n \times \langle 2\pi/l \rangle$, que está generado por

$$(\kappa, 0), (\zeta, 0) \text{ y } (0, 2\pi/l).$$

El espacio de puntos fijos de este grupo es

$$\{U \in H_p^1 : u_0(t) = u_j(t) \quad \forall j\}. \quad (1.a)$$

- b) Para $B_{k,l}$ con $0 < k < [n/2]$, se tienen tres grupos de isotropía. Sea $n' = n/h$, con h el máximo común divisor de n y k .

•Un grupo de isotropía está generado por

$$(\zeta, -(k/l)\zeta), (n'\zeta, 0) \text{ y } (0, 2\pi/l).$$

La función U está fija por $(\zeta, -(k/l)\zeta)$, si $u_j(t) = u_{j+1}(t - (p/n')k')$ para toda j . Entonces el espacio de puntos fijos es

$$\{U \in H_p^1 : u_j(t) = u_{j+1}(t - (p/n')k')\}. \quad (1.b1)$$

Dependiendo de n , se tienen además otros dos grupos:

Si n es impar

- Un grupo de isotropía, está generado por

$$(\kappa, 0), (n'\zeta, 0) \text{ y } (0, 2\pi/l).$$

Entonces el espacio de puntos fijos es

$$\{U \in H_p^1 : u_j = u_{j+n'} \quad u_j(t) = u_{n-j}(t)\}. \quad (1.b2)$$

- El otro grupo de isotropía está generado por

$$(\kappa, \pi/l), (n'\zeta, 0) \text{ y } (0, 2\pi/l)\}.$$

La función U está fija por $(\kappa, \pi/l)$, si $u_j(t) = u_{n-j}(t + p/2)$ para toda j . Entonces el espacio de puntos fijos es

$$\{U \in H_p^1 : u_j = u_{j+n'} \quad u_j(t) = u_{n-j}(t + p/2)\}. \quad (1.b3)$$

Si n es par.

- Un grupo de isotropía está generado por

$$(\kappa, 0), ((n'/2)\zeta, \pi/l), (n'\zeta, 0) \text{ y } (0, 2\pi/l).$$

La función U está fija por $(n'/2)\zeta, \pi/l)$, si $u_j(t) = u_{j+n'/2}(t + p/2)$ para toda j . Entonces el espacio de puntos fijos es

$$\{U \in H_p^1 : u_j = u_{j+n'}, \quad u_j(t) = u_{n-j}(t), \quad u_j(t) = u_{j+n'/2}(t + p/2)\}. \quad (1.b4)$$

- El otro grupo de isotropía está generado por

$$(\kappa\zeta, 0), ((n'/2)\zeta, \pi/l), (n'\zeta, 0) \text{ y } (0, 2\pi/l).$$

La función U está fija por $(\kappa\zeta, 0)$, si $u_j(t) = u_{n-(j+1)}(t)$ para toda j . Entonces el espacio de puntos fijos es

$$\{U \in H_p^1 : u_j = u_{j+n'}, \quad u_j(t) = u_{n-(j+1)}(t), \quad u_j(t) = u_{j+n'/2}(t + p/2)\} \quad (1.b5)$$

Nótese, que en los espacios de puntos fijos con $u_j = u_{j+n'}$, se puede reemplazar la condición $u_j = u_{n-j}$, por la condición $u_j = u_{n'-j}$.

- c) Para $B_{n/2,l}$, si n es par, se tiene el grupo de isotropía $D_{n/2} \times \langle 2\pi/l \rangle$, que está generado por

$$(\kappa, 0), (2\zeta, 0) \text{ y } (0, 2\pi/l).$$

La función U está fija por $(2\zeta, 0)$, si $u_j(t) = u_{j+2}(t)$ para toda j . Por lo que el espacio de puntos fijos del grupo es

$$\{U \in H_p^1 : u_j(t) = u_{j+2}(t)\}. \quad (1.c)$$

2. Los tipos de órbitas (H) con $W(H)$ finito, son:

Para B_0 , se tiene el grupo de isotropía $D_n \times S^1$. El espacio de puntos fijos de este grupo es

$$\{(u, \dots, u) : u = cte \in \mathbb{R}^m\}. \quad (2.a)$$

Para $B_{[n/2]}$, si n es par, se tiene el grupo de isotropía $D_{n/2} \times S^1$. Por lo que el espacio de puntos fijos de este grupo es

$$\{(u_0, \dots, u_{n-1}) : u_j = u_{j+2} = cte \in \mathbb{R}^m \quad \forall j\}. \quad (2.c)$$

Resumen

Ya se han encontrado los espacios de puntos fijos, de los grupos de isotropía que darán bifurcación. Se tienen dos casos:

1. **Bifurcación Periódica.**

Para los bloques $B_{k,l}$ con $l > 0$, se han encontrado los tipos de órbita con grupo de Weyl de dimensión uno:

Para el bloque $B_{0,l}$, se tienen un grupo con espacio de puntos fijos (1.a).

Para el bloque $B_{k,l}$ con $0 < k < n/2$. Si n es impar, se tienen tres grupos con espacios de puntos fijos (1.b1), (1.b2) y (1.b3). Si n es par, se tienen tres grupos con espacios de puntos fijos (1.b1), (1.b4) y (1.b5).

Para el bloque $B_{n/2,l}$, se tienen un grupo con espacio de puntos fijos (1.c).

2. Bifurcación Estacionaria.

Para los bloques B_0 y $B_{n/2}$, se han encontrado los tipos de órbita con grupo de Weyl finitos:

Para el bloque B_0 , se tienen un grupo con espacio de puntos fijos (2.a).

Para el bloque $B_{[n/2]}$, se tienen un grupo con espacio de puntos fijos (2.c).

Capítulo 5

Resultados

En la primera sección, se enuncia finalmente el teorema de bifurcación: las condiciones que aseguran la existencia de bifurcación y el tipo de simetrías impuestas. Se enunciará el teorema en tal forma que pueda ser leído sin hacer referencia a los capítulos anteriores.

En la segunda sección, se describen las simetrías de las soluciones que se encontraron en el teorema de bifurcación.

En la tercera sección, se da un ejemplo particular, las ecuaciones de Turing. Además, se hacen algunos comentarios sobre sincronización de células acopladas por difusión.

5.1. El Teorema de Bifurcación

Sea f un operador diferenciable de $C([-a, 0]; \mathbb{R}^m)^3 \times \mathbb{R}$ en \mathbb{R}^m , que satisface la condición $f(v, u, w) = f(w, u, v)$, tal que para cada $\mu \in \mathbb{R}$ existe $v_\mu \in \mathbb{R}^m$ con $f(v_\mu, v_\mu, v_\mu; \mu) = 0$.

Se desea encontrar ramas de bifurcación de la ecuación

$$\frac{du_j(t)}{dt} = f(u_{j-1}^t(\theta), u_j^t(\theta), u_{j+1}^t(\theta); \mu)$$

con $j = 0, \dots, n-1$ módulo n . Como ejemplo de tomar j módulo n , se tiene que $u_n = u_0$ o $u_{-1} = u_{n-1}$. Además, el operador f está aplicado en $u_j^t(\theta) = u_j(t + \theta)$ como función de (θ) , esto es, $f(u_{j-1}^t(\theta), u_j^t(\theta), u_{j+1}^t(\theta); \mu)$ es una función de t .

Sean $f_u(v_\mu)$ y $f_v(v_\mu)$ las derivadas (Frechet) parciales de f en v_μ . Sean $[f_u]$ y $[f_v]$ matrices de $m \times m$ tal que

$$f_u(v_\mu)(e^{i\lambda \cdot} X) = [f_u]X, \quad f_v(v_\mu)(e^{i\lambda \cdot} X) = [f_v]X$$

para todo $X \in \mathbb{R}^m$. Estas matrices, que dependen de (μ, λ) , se encontraron en la proposición (2.1). Sea $\zeta = 2\pi/n$, para $0 \leq k \leq n/2$ defínase a $M_k(\mu, \lambda)$ como

$$M_k(\mu, \lambda) = i\lambda I - (2 \cos k\zeta)[f_v](\mu, \lambda) - [f_u](\mu, \lambda).$$

Sea $Rot_k(\mu_0, \lambda_0)$ el número de rotación de $\det M_k(\mu, \lambda)$ como mapeo de $S^1 = \{(\mu - \mu_0)^2 + (\nu - \nu_0)^2 = \rho^2\}$ en $\mathbb{C} - \{0\}$, que está bien definido para $\rho \sim 0$, si $M_k(\mu, \lambda_0)$ es invertible $\mu \sim \mu_0$ ($\mu \neq \mu_0$).

Teorema 5.1 Bifurcación Estacionaria.

Para $k = 0$ o $k = n/2$ (si n es par), si $\det M_k(\mu, 0)$ cambia de signo en μ_0 , entonces la ecuación diferencial tiene una solución estacionaria que bifurca de μ_0 , con las siguientes simetrías:

Para $k = 0$, se tiene una solución con $u_j = u_0$.

Para $k = n/2$ con n par, se tiene una solución con $u_j = u_{j+2}$.

Teorema 5.2 Bifurcación Periódica. En este caso, se necesita que la matriz $M_k(\mu_0, 0)$ sea invertible para toda k .

Si $Rot_k(\mu_0, \lambda_0)$ es distinto de cero, entonces la ecuación diferencial tiene soluciones periódicas que bifurcan de μ_0 , con períodos iniciales $p = 2\pi/\lambda_0$ y con las siguientes simetrías:

Para $k = 0$. Se tiene una solución con $u_0(t) = u_j(t)$ para toda j . En este caso se dice que oscilan en sincronía.

Para $k = n/2$, con n par, se tiene una solución con $u_j(t) = u_{j+2}(t)$.

Para $0 < k < n/2$. Sea $n' = n/h$ y $k' = k/h$, con h el máximo común divisor de n y k . Se tienen tres soluciones, cada una con la simetría

$$u_j(t) = u_{j+n'}(t). \quad (\text{Ond})$$

• Una solución tiene además de (Ond), la simetría

$$u_j(t) = u_{j+1}(t - (p/n')k'). \quad (5.1)$$

Esta solución se llama onda rotante. Las otras dos soluciones dependen de la paridad de n y se llaman ondas estacionarias.

Si n' es impar.

- Una solución tiene además de (Ond), la simetría

$$u_j(t) = u_{n'-j}(t). \quad (5.2)$$

- La otra solución tiene además de (Ond), la simetría

$$u_j(t) = u_{n'-j}(t + p/2). \quad (5.3)$$

Si n' es par.

- Una solución tiene además de (Ond), las simetrías

$$u_j(t) = u_{n'-j}(t) \quad y \quad u_j(t) = u_{j+n'/2}(t + p/2). \quad (5.4)$$

- La otra solución tiene además de (Ond), las simetrías

$$u_j(t) = u_{n'-(j+1)}(t) \quad y \quad u_j(t) = u_{j+n'/2}(t + p/2). \quad (5.5)$$

Prueba. En el capítulo uno se vio que el problema de encontrar soluciones periódicas, es equivalente al de encontrar ceros de un operador. En el capítulo dos se probó que encontrar ceros del operador, es equivalente a encontrar ceros de la ecuación de bifurcación equivariante.

En el capítulo tres se probó que si $Rot_k(\mu_0, \lambda_0)$ es distinto de cero, entonces para los grupos de isotropía que satisfacen ciertas condiciones, se tiene una rama de ceros de la ecuación de bifurcación, con simetrías en el espacio de puntos fijos del grupo. Por último, en el capítulo cuatro, se encuentran los espacios de puntos fijos de los grupos de isotropía que dan bifurcación. \square

Observación 5.3 Para $0 < k < n/2$, por la condición (Ond), se tienen tres soluciones tipo onda discreta, con período espacial n' y número de onda h . Las otras simetrías de cada solución, imponen la forma del período espacial $(u_0, \dots, u_{n'-1})$. Una descripción de estas soluciones se encuentra en la sección siguiente.

Observación 5.4 Se puede probar que las ramas de bifurcación, son ramas globales, es decir, van a infinito o regresan a otro punto de bifurcación. Este resultado es cierto en general, en el contexto de operadores de Fredholm de índice cero, y se conoce como la alternativa de Rabinowitz (ver [Ize]).

Observación 5.5 En principio se tienen órbitas de ceros del operador \mathcal{F} , pero no se puede conocer si cada cero da una solución distinta a la ecuación diferencial. Tampoco se puede conocer si el cero correspondiente al modo l , de la ecuación de bifurcación en (μ_0, ν_0) , es distinto del cero correspondientes al modo 1, de la ecuación de bifurcación en $(\mu_0, l\nu_0)$. Además, para $0 < k < n/2$, las tres soluciones pueden corresponder a la misma solución, si la simetría es común.

Ejemplo 5.6 [Retardo Fijo] Considérese un retardo fijo en la difusión,

$$f(v, u, w; \mu) = h(u_j(t); \mu) + D(\mu)(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1})(t - r)$$

donde $D(\mu)$ es una matriz que representa la fuerza de acoplamiento por difusión y f es una función que representa la dinámica interna. Para que v_μ sea equilibrio, es suficiente $h(v_\mu; \mu) = 0$.

Sea $h'(\mu)$ la derivada de $h(u; \mu)$ en v_μ , entonces

$$f_v(v_\mu)u(\theta) = D(\mu)u(-r) \quad y \quad f_u(v_\mu)u(\theta) = h'(\mu)u(0) - 2D(\mu)u(-r).$$

Como $f_v(v_\mu)(e^{i\lambda\theta}X) = e^{-i\lambda r}D(\mu)X$, entonces

$$[f_v] = e^{-i\lambda r}D(\mu) \quad y \quad [f_u] = h'(\mu) - 2e^{-i\lambda r}D(\mu).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} M_k(\mu, \lambda) &= i\lambda I - h'(\mu) - (\cos 2k\pi/n - 2)e^{-i\lambda r}D(\mu) \\ &= i\lambda I - h'(\mu) + (4 \sin^2 k\pi/n)e^{-i\lambda r}D(\mu). \end{aligned}$$

Si el número de rotación de $\det M_k(\mu, \lambda)$, es distinto de cero, se tendrá bifurcación con las simetrías descritas anteriormente.

En particular, para ecuaciones sin retardo, $r = 0$, se tiene $M_k(\mu, \lambda) = i\lambda I - M_k(\mu)$ con $M_k(\mu) = h'(\mu) - (4 \sin^2 k\pi/n)D(\mu)$. En este caso, se tiene una manera sencilla de calcular $Rot_k(\mu_0, \lambda_0)$.

Teorema 5.7 Sea $M(\mu, \lambda) = i\lambda I - M(\mu)$. Sea σ_+ el número de eigenvalores que cruzan en μ_0 por $i\lambda_0$, de derecha a izquierda, contados con multiplicidad. Respectivamente, sea σ_- el número de eigenvalores que cruzan de izquierda a derecha. Entonces $Rot(\mu_0, \lambda_0) = \sigma_+ - \sigma_-$.

Prueba. Sean $\lambda_i(\mu) = a_i(\mu) + ib_i(\mu)$ los valores propios de $M(\mu)$. Si $M(\mu)$ dependen continuamente de μ , entonces $\lambda_i(\mu)$ también. Entonces

$$\det M(\mu, \lambda) = \prod_{i=1}^m (i\lambda - \lambda_i(\mu)).$$

Usando el grado de Brouwer, el número de rotación de $i\lambda - \lambda_i(\mu)$ es $\deg(i\lambda - \lambda_i(\mu); B_\rho)$, donde B_ρ es una bola de centro (μ_0, λ_0) y radio ρ con $\rho \sim 0$. Deformando, se puede suponer que $i\lambda - \lambda_i(\mu)$ es diferenciable. Ahora, si $i\lambda_0 - \lambda_i(\mu_0) \neq 0$, tomando $\rho \ll 1$, el grado es cero y $i\lambda - \lambda_i(\mu)$ es deformable a una constante. Si $\lambda_i(\mu_0) = i\lambda_0$, tomando $\rho \ll 1$, (μ_0, ν_0) es el único cero de $i\lambda - \lambda_i(\mu)$ en $B_\rho(\mu_0, \lambda_0)$ y el grado es

$$\deg((-a_i(\mu), \lambda - b_i(\mu)); B_\rho) = \text{sig} \left(\begin{array}{cc} -a'_i(\mu_0) & 0 \\ -b'_i(\mu_0) & 1 \end{array} \right) = -\text{sig}(a'_i(\mu_0))$$

que está bien definido si $a'_i(\mu_0) \neq 0$, es decir, el valor propio cruza por $i\lambda_0$. Por lo tanto, si $a'_i(\mu_0) > 0$, entonces $\deg = -1$ y $i\lambda - \lambda_i(\mu)$ da una vuelta. Si $a'_i(\mu_0) < 0$, entonces $\deg = 1$ y $i\lambda - \lambda_i(\mu)$ da una vuelta con orientación contraria.

Por lo tanto $\prod_{i=1}^m (i\lambda - \lambda_i(\mu))$ es deformable a $\sigma_+ - \sigma_-$ vueltas, por lo que el número de rotación de $\det M(\mu, \lambda)$, $Rot(\mu_0, \lambda_0)$, es $\sigma_+ - \sigma_-$ módulo orientación. \square

5.2. Descripción de las Simetrías

Las simetrías difíciles de visualizar son las correspondientes a Rot_k para $0 < k < n/2$. En este caso, se tiene la simetría $u_j(t) = u_{j+n'}(t)$, por lo que las celdas $u_j(t)$ para $0 \leq j < n'$ se repiten h veces a lo largo del anillo; esto es:

$$(u_0, \dots, u_{n-1}) = \left(\underbrace{u_0, \dots, u_{n'-1}}, \dots, \underbrace{u_0, \dots, u_{n'-1}} \right).$$

Por lo tanto, sólo es necesario describir $(u_0, \dots, u_{n'-1})$ y repetirlo h veces.

Notación 5.8 Si $u(t)$ es una función p -periódica, se usará a $u^*(t)$ para denotar a la función $u(t)$ desfasada por $p/2$, $u^*(t) = u(t + p/2)$.

Cuando n' es par, la solución (5.4) tiene las simetrías $u_j(t) = u_{n'-j}(t)$ y $u_j(t) = u_{j+n'/2}^*(t)$. Combinando éstas se tiene

$$u_j(t) = u_{n'-j}(t) = u_{(n'-j)+n'/2}^*(t) = u_{n'/2-j}^*(t).$$

Además, la solución (5.5) tiene las simetrías $u_j(t) = u_{n'-(j+1)}(t)$ y $u_j(t) = u_{j+n'/2}^*(t)$. Combinando éstas se tiene otra simetría

$$u_j(t) = u_{n'-(j+1)}(t) = u_{n'-(j+1)+n'/2}^*(t) = u_{n'/2-(j+1)}^*(t).$$

Onda rotante

Se tiene la simetría $u_j(t) = u_{j+1}(t - (p/n')k')$, es decir, todas las celdas oscilan idéntico, pero desfasadas por un múltiplo constante de p/n' . En particular si $k' = 1$, entonces $u_j(t) = u_{j+1}(t - (p/n'))$ y la diferencia entre las fases de cualesquiera dos celdas es p/n' . Es decir, cada vez que se avanza una celda, se cambia la fase por p/n' .

Ondas estacionarias

Si $n' = 2q + 1$

La solución (5.2) tiene la simetría $u_j(t) = u_{2q+1-j}(t)$. Si se toma (u_0, \dots, u_q) y se usa la simetría, se obtiene

$j =$	0	1	...	q	$q + 1$...	$2q$
$u^j =$	$u_0(t)$	$u_1(t)$...	$u_q(t)$	$u_q(t)$...	$u_1(t)$

La solución (5.3) tiene la simetría $u_j(t) = u_{2q+1-j}(t + p/2) = u_{2q+1-j}^*(t)$. Si se toma (u_0, \dots, u_q) y se usa la simetría, se obtiene

$j =$	0	1	...	q	$q + 1$...	$2q$
$u^j =$	$u_0(t)$	$u_1(t)$...	$u_q(t)$	$u_q^*(t)$...	$u_1^*(t)$

Si $n' = 4q + 2$

La solución (5.4) tiene las simetrías $u_j(t) = u_{4q+2-j}(t)$, $u_j(t) = u_{j+2q+1}^*(t)$ y $u_j(t) = u_{2q+1-j}^*(t)$. Si se toma (u_0, \dots, u_q) y se usan las simetrías, se obtiene

0	1	...	q	$q + 1$...	$2q$	$2q + 1$	$2q + 2$...	$4q + 1$
u_0	u_1	...	u_q	u_q^*	...	u_1^*	u_0^*	u_1^*	...	u_1

La solución (5.5), tiene las simetrías $u_j(t) = u_{4q+1-j}(t)$, $u_j(t) = u_{j+2q+1}^*(t)$ y $u_j(t) = u_{2q-j}^*(t)$. Si se toma (u_0, \dots, u_q) y se usan las simetrías, se obtiene

0	...	q	...	$2q$	$2q + 1$...	$3q + 1$...	$4q + 1$
u_0	...	$u_q = u_q^*$...	u_0^*	u_0^*	...	$u_q^* = u_q$...	u_0

Si $n' = 4q$

La solución (5.4) tiene las simetrías $u_j(t) = u_{4q-j}(t)$, $u_j(t) = u_{j+2q}^*(t)$ y $u_j(t) = u_{2q-j}^*(t)$. Si se toma (u_0, \dots, u_q) y se usan las simetrías, se obtiene

0	1	...	q	...	$2q - 1$	$2q$	$2q + 1$...	$3q$...	$4q - 1$
u_0	u_1	...	$u_q = u_q^*$...	u_1^*	u_0^*	u_1^*	...	$u_q^* = u_q$...	u_1

La solución (5.5) tiene las simetrías $u_j(t) = u_{4q-(j+1)}(t)$, $u_j(t) = u_{j+2q}^*(t)$ y $u_j(t) = u_{2q-(j+1)}^*(t)$. Si se toma (u_0, \dots, u_{q-1}) y se usan las simetrías, se obtiene

0	...	$q - 1$	q	...	$2q - 1$	$2q$...	$3q - 1$	$3q$...	$4q - 1$
u_0	...	u_{q-1}	u_{q-1}^*	...	u_0^*	u_0^*	...	u_{q-1}^*	u_{q-1}	...	u_0

En estas soluciones, se toma un paquete de celdas (u_0, \dots, u_q) , este se refleja y/o se le cambia la fase, dos o cuatro veces, para llenar todo el período físico $(u_0, \dots, u_{n'})$. Después, este período físico se repite h veces a lo largo del anillo, lo que da la apariencia de tener h ondas en el anillo, cada onda formada de dos o cuatro pedazos similares.

5.3. Ecuaciones de Turing

Las ecuaciones de Turing son

$$\frac{du_j(t)}{dt} = f(u_j(t); \mu) + D(\mu)(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1})$$

donde $D(\mu)$ es una matriz diagonal positiva, que representa el acoplamiento por difusión. En este caso, $M_k(\mu, \lambda) = iI\lambda - M_k(\mu)$ con $M_k(\mu) = f'(\mu) - (4 \sin^2 k\pi/n)D(\mu)$. El número de rotación $Rot_k(\mu_0, \lambda_0)$, es la diferencia del número de cruces de valores propios de $M_k(\mu_0)$ en $i\lambda_0$.

Corolario 5.9 Si existe un único valor propio de $M_k(\mu)$ que cruza por $i\lambda_0$ en μ_0 , entonces la ecuación diferencial tiene soluciones periódicas que bifurcan de μ_0 , con períodos iniciales $2\pi/\lambda_0$ y con las simetrías correspondientes a k .

Sea $\sigma_k(\mu)$ el espectro de $M_k(\mu)$. Si los coeficientes de difusión son iguales, entonces $D = d(\mu)I$ y $\sigma_k(\mu) = \sigma_0(\mu) - 4 \sin^2(\pi k/n)d(\mu)$. Es decir, los valores propios de $M_k(\mu)$ se encuentran a la izquierda, con respecto al eje imaginario,

de los valores propios de $M_0(\mu)$. Si además $\sigma_0(\mu)$ se encuentra a la izquierda del eje imaginario, esto es el equilibrio es estable, el primer valor propio que cruza el eje imaginario debe estar en $\sigma_0(\mu)$. Por lo tanto, *en la primera bifurcación todas las celdas oscilan en sincronía*, pues se está en el caso de bifurcación periódica con $k = 0$.

Proposición 5.10 *Sea $A = \{a_{ij}\}$ una matriz de $m \times m$ y sea $\sigma(A)$ el conjunto de valores propios, entonces*

$$\sigma(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(a_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_{ij}|)$$

con $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$.

Prueba. Si $\lambda \in \sigma(A)$, entonces existe $x = (x_1, \dots, x_m)$ tal que $(\lambda I - A)x = 0$. Sea x_i un número tal que $|x_i| \geq |x_j|$ para todo j . Del renglón i de $(\lambda I - A)x = 0$ se obtiene $(\lambda - a_{ii})x_i - \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j = 0$. Entonces

$$|\lambda - a_{ii}| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j/x_i \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

pues $x_i \neq 0$ y $|x_j/x_i| \leq 1$. Por lo tanto $\lambda \in B(a_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_{ij}|)$ para algún i . \square

Ahora, sea $D(\mu) = \text{diag}(d_0(\mu), \dots, d_m(\mu))$ y $f'(\mu) = \{a_{ij}(\mu)\}$. Usando la proposición para $M_k(\mu) = \{a_{ij}(\mu)\} - 4 \sin^2(\pi k/n) \text{diag}(d_0, \dots, d_m)$, se tiene

$$\begin{aligned} \sigma_k(\mu) &\subseteq \bigcup_{i=1}^m B[a_{ii}(\mu) - 4 \sin^2(\pi k/n)d_i(\mu), \sum_{j \neq i} |a_{ij}(\mu)|] \\ &\subseteq \bigcup_{i=1}^m \{B[a_{ii}(\mu), \sum_{j \neq i} |a_{ij}(\mu)|] - 4 \sin^2(\pi k/n)d_i(\mu)\}. \end{aligned}$$

En particular $\sigma_0(\mu) \subseteq \bigcup_{i=1}^m B[a_{ii}(\mu), \sum_{j \neq i} |a_{ij}(\mu)|]$.

En el caso que d_i sea grande comparado con $\sum_{j \neq i} |a_{ij}(\mu)|$, como d_i es positivo para toda i , entonces $\sigma_k(\mu)$ está a la izquierda de $\sigma_0(\mu)$, con respecto al eje imaginario. Por lo que si el equilibrio es estable, entonces *en la primera bifurcación todas las celdas oscilan en sincronía*.

Conclusiones

En la tesis se estudiaron los casos de bifurcación periódica y estacionaria. Para la bifurcación estacionaria se encontró una simetría para $k = 0, n/2$, la cual no había sido abordada antes. Para la bifurcación periódica se encontró una simetría para $k = 0, n/2$ y tres simetrías para $0 < k < n/2$ (una es onda rotante y dos son ondas estacionarias).

Se probó en las ecuaciones de Turing, que si el sistema tiene un equilibrio estable y los coeficientes de difusión son muy grandes (o no son muy diferentes), entonces en el primer rompimiento de simetrías el sistema tiene una solución que corresponde al caso donde las celdas oscilan en sincronía.

Se han examinado fenómenos de ritmos biológicos donde la sincronización se explicada con el acoplamiento por difusión. Muchos organismos multinucleares exhiben espontánea sincronización de mitosis cuando interactúan. Si la división nuclear es controlada por osciladores bioquímicos, la sincronización puede explicarse por un simple acoplamiento. Esto sugiere que el acoplamiento por difusión es un buen mecanismo de sincronización.

Existen ejemplos en la biología, en donde el acoplamiento de dos procesos distintos, cada uno estacionario por si solo, puede producir oscilaciones. Esto sucede si $f'(\mu)$ no tienen valores propios imaginarios puros, pero $B_k(\mu)$ sí. Es decir, el proceso de difusión o el proceso interno de las celdas no produce oscilaciones por si solo.

Trabajos futuros

Existen muchas extensiones o variantes de las ecuaciones aquí expuestas; para ideas de este tipo se recomienda [Gol2]. Algunos ejemplos son:

- Se puede modelar al anillo en forma continua, lo cual da una ecuación parcial, equivariante por la acción del grupo $O(2) \times S^1$. En este caso

se tendrán dos soluciones, una es una onda rotante y la otra una onda estacionaria.

- Se pueden hacer arreglos distintos al de un anillo. Si el arreglo tiene un grupo de simetrías G , las simetrías de las soluciones las darán los grupos de isotropía de $G \times S^1$. Además, se pueden poner simetrías internas a la dinámica de la celda, lo que da más posibilidades.
- También se pueden modelar ecuaciones de reacción-difusión en dos dimensiones. Por ejemplo, si las condiciones son de periodicidad en un cuadrado, se tendrá equivarianza por el grupo $O(2) \times O(2) \times S^1$.

Aportaciones y Referencias

El capítulo dos está basado en teoremas abstractos, los cuales aseguran que todo lo que se hizo en este capítulo es posible, como la reducción de Ljapunov-Schmidt equivariante o el cambio de base. Las pruebas se encuentran en el libro [Ize] y el artículo [Ize2]; el libro tiene casi todas las pruebas, pero el artículo tiene más ideas. La aportación de este capítulo está en que se hacen las pruebas en un problema concreto y con todos los detalles. La idea del cambio de base se encuentra en [Tur], lo cual tiene que ver con la serie de Fourier discreta.

En el capítulo tres, el autor sólo aplicó los resultados de [Ize] y no hay nada nuevo en cuanto a técnicas matemáticas, pero sí en cuanto al problema, puesto que en la literatura no se habían usado estos métodos topológicos para el anillo. En este capítulo se usan teoremas sin prueba debido a que no son sencillos; el lector puede comprobarlo en las referencias [Ize] y [Kra].

La referencia más cercana al capítulo cuatro es [Gol], donde están los grupos de isotropía del caso *simple* ($k = 1$). Los grupos de isotropía del caso *general* están mencionados sin pruebas en [Kra]. La forma de encontrar los grupos de isotropía del caso *general* y sus grupos de Weyl es nueva.

La bifurcación periódica había sido abordada en varios trabajos:

Para ecuaciones sin retardo, en [Gol] y [Gils] se encuentran las tres simetrías en el caso *genérico* y *simple*, esto es, sin resonancia y con un solo valor propio que cruza en el bloque $k = 1$. En [Alex] se encuentra el caso *simple* ($k = 1$) de la onda rotante.

En [Kra] se encontraron todas las simetrías para la bifurcación periódica, pero con una sustancia en cada celda. En dicho artículo, se menciona que se

tiene una órbita de soluciones y que por cada copia de S^1 se tiene una solución distinta, lo cual no se puede probar. En [Kra] también se pide la hipótesis de que los ceros sean aislados, lo cual no sucede en el modo de Fourier real, por lo que en dicho artículo no es posible encontrar la bifurcación estacionaria.

Los mejores trabajos en el anillo son [Gol], [Gils], [Alex] y [Kra]. Otros artículos interesantes son [Gol3] y [Kra2]. Para la parte de aplicaciones se recomiendan las referencias [Tur], [Coll] y [Gol2]. Para técnicas y métodos matemáticos utilizados aquí, se recomiendan los libros [Ize], [Kra3] y [Ber].

Apéndice A

Análisis

El espacio de Lebesgue $L^2(S^1; \mathbb{C}^k)$ es un espacio de Hilbert con la base ortonormal $\{(2\pi)^{-1/2} e^{ilt}\}_{l \in \mathbb{Z}}$. Es decir, si $X(t) \in L^2$ entonces

$$X = (2\pi)^{-1/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} X_l e^{ilt}$$

con $X_l = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} X(t) e^{-ilt} dt$. Además, su norma es $\|X\|_{L^2}^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |X_l|^2$. Por lo tanto L^2 es equivalente al espacio

$$l^2(\mathbb{C}^k) = \left\{ \{X_l\}_{l \in \mathbb{Z}} : \sum_{l \in \mathbb{Z}} |X_l|^2 < \infty \right\}.$$

El espacio de Sobolev $H^1(S^1; \mathbb{C}^k)$ es el conjunto de funciones $X \in L^2$, tal que la derivada ∂X pertenece a L^2 , con la norma $\|X\|_{H^1}^2 = \|X\|_{L^2}^2 + \|\partial X\|_{L^2}^2$. Ahora $\partial X \in L^2$ por lo que $\partial X(t) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} (\partial X)_l e^{ilt}$ con

$$(\partial X)_l = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} \partial X(t) e^{-ilt} dt = -(2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} X(t) (e^{-ilt})' dt = ilX_l.$$

Entonces $\partial X = \sum_{l \in \mathbb{Z}} ilX_l e^{ilt}$ y su norma es $\|\partial X\|_{L^2}^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} l^2 |X_l|^2$. Por lo tanto la norma de X en H^1 es $\|X\|_{H^1}^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} |X_l|^2 (1 + l^2)$ y el espacio H^1 es equivalente a

$$\left\{ \{X_l\}_{l \in \mathbb{Z}} : \sum_{l \in \mathbb{Z}} |X_l|^2 l^2 < \infty \right\} \subset l^2(\mathbb{C}^k).$$

Teorema A.1 *El espacio $H^1(S^1, \mathbb{R}^k)$ está contenido en $C^0(S^1, \mathbb{R}^k)$, es decir, si $f \in H^1$, entonces f es continua.*

Teorema A.2 [Función Implícita] Sean X , Y , y Z espacios de Banach. Supóngase que $f(x, y)$ es una función continuamente diferenciable de una vecindad U de (x_0, y_0) en $X \times Y$ a Z , $f(x_0, y_0) = 0$ y $D_y f(x_0, y_0)$ tiene un inverso continuo. Entonces existe una única función g definida en un vecindad U_1 de x_0 , $g : U_1 \rightarrow Y$, tal que $g(x_0) = y_0$ y $f(x, g(x)) = 0$ para $x \in U_1$.

Teorema A.3 [Mapeo Abierto] Sean X y Y espacios de Banach. Si L es un operador continuo de X en Y , sobre. Entonces L manda abiertos en abiertos.

Teorema A.4 [Representación de Riesz] Sea X un espacio compacto de Hausdorff, entonces el conjunto de funcionales continuos en X , $C(X)^*$, es isométricamente isomorfo al conjunto de medidas, $M(X)$, en X . En particular, para todo funcional F en $C([-a, 0])$ existe una medida μ tal que $F(u) = \int u d\mu$.

Teorema A.5 [Ceros Aislados] Sea f una función analítica en un dominio, distinta de cero. Entonces los ceros de f son puntos aislados.

Todos los teoremas anteriores, son estándar en análisis, ver [Foll] y [Ber].

Bibliografía

- [Alex] Alexander J.C. y Auchmuty G. (1986) *Global bifurcations of phase-locked oscillators*. Arch. Rational Mech. Anal., 253-270.
- [Ber] Berger M.S. (1977) *Nonlinearity and Functional Analysis*. Academic Press.
- [Coll] Collins J.J. y Stewart I. (1994) *A group-theoretic approach to rings of coupled biological oscillators*. Biol. Cybern. 71, 95-103.
- [Foll] Folland G.B. (1999) *Real Analysis* (2nd ed.). Wiley-Interscience.
- [Gils] van Gils S.A. y Valkerin T. (1986) *Hopf bifurcation and symmetry: Standing and Travelling waves in a circular-chain*. Japan J. Appl. Math. 3, 207-222.
- [Gol] Golubitsky M. y Schaeffer D.G. (1986) *Singularities and groups in bifurcation theory II*. Appl. Math. Sci. 51, Springer-Verlag.
- [Gol2] Golubitsky M., Luss D. y Strogatz S., Ed. (1999) *Pattern Formation in Continuous and Coupled Systems*. Springer-Verlag.
- [Gol3] Golubitsky M., Nicol M. and Stewart I. (2004) *Some curious phenomena in coupled cell systems*. J. Nonlinear Sci. 14 (2), 119-236.
- [Ize] Ize J. y Vignoli A. (2003) *Equivariant Degree Theory* Walter de Gruyter.
- [Ize2] Ize J. (1994) Topological bifurcation, en *Topological Nonlinear Analysis* (M. Matzeu y A. Vignoli, Ed.). Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. 15, Birkhäuser, Boston, 341-463.

- [Kra] Krawcewicz W. y Wu J. (1998) *Hopf Bifurcations of Functional Differential Equations with Dihedral Symmetries*. J. differential Equations 146, 157-184.
- [Kra2] Krawcewicz W. y Wu J. (1998) *Theory and applications of Hopf bifurcation in symmetric functional-differential equations*. Nonlinear Anal. 35 (7), 845-870.
- [Kra3] W. Krawcewicz and J. Wu (1997) *Theory of Degrees with Applications to Bifurcations and Differential Equations*. CMS Series of Monographs, John Wiley and Sons, New York.
- [Tur] Turing A. (1952) *The chemical basis of morphogenesis*. Phil. Trans. Roy. Soc. B 273 , 37-72.