



UNIVERSIDAD NACIONAL
DE MEXICO

00362
AUTONOMA

POSGRADO EN CIENCIAS FISICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

EL NUCLEO ^{12}C EN UN MODELO ALGEBRAICO
DE CUMULOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS FISICAS

P R E S E N T A :

FERNANDO BENITEZ MARTINEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. ROELOF BIJKER BIJKER

MEXICO., D. F.

AGOSTO 2004



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

El núcleo ^{12}C en un modelo algebraico de
cúmulos

FERNANDO BENITEZ MARTINEZ

DIRECTOR DE TESIS:

Dr. Roelof Bijker Bijker

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la
UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el
contenido de mi trabajo receptoral.

NOMBRE: Fernando Benitez
Martinez

FECHA: 27 agosto 2014

FIRMA: [Firma]

Contenido

1	Introducción	i
2	Modelo Algebraico de Cúmulos	1
2.1	Modelo $U(7)$	1
2.2	Construcción de los operadores	3
2.3	Hamiltoniano	7
2.4	Construcción de la base	8
2.5	Elementos de matriz	9
3	Proyección de Pauli	13
3.1	Construcción de los estados permitidos	13
3.2	Caso 3α	15
4	Propiedades Electromagnéticas	19
4.1	Factores de forma	19
4.2	Operadores de transición	23
5	Resultados	27
5.1	Ajuste de parámetros	27
5.2	El núcleo ^{12}C	32
6	Conclusiones	43

1

Introducción

El carbono es uno de los elementos fundamentales para la química de la vida en la Tierra [1]. El carbono se produce en las gigantes rojas y para poder explicar el proceso de nucleosíntesis que ocurre en estas estrellas, y que hacen posible la creación de carbono, es indispensable poder entender la estructura nuclear de este elemento[2]. Es por esto que en esta tesis vamos a estudiar el núcleo de carbono y para esto utilizamos un modelo algebraico de cúmulos.

El estudio de la estructura de cúmulos que presentan algunos núcleos ligeros es una de las áreas que ha tenido un gran desarrollo dentro de la física nuclear [3], debido a que, permite modelar diferentes propiedades de los núcleos, las cuales, no se habían logrado comprender.

La posible existencia de varios tipos de estructuras de multi-cúmulos se ha presentado para diferentes núcleos ligeros[4] [5]. Hablar de una estructura de cúmulos significa que el núcleo atómico agrupa sus nucleones en varios subconjuntos, los cuales, tienen una energía de amarre alta.

Básicamente, los cúmulos en los que se subdividen los núcleos ligeros son partículas α debido a que son estructuras con una alta energía de amarre lo que les permite mantener su identidad dentro del núcleo atómico. Los modelos de cúmulos basados en partículas α tienen una larga historia dentro de la física nuclear. Las geometrías en las que se plantean los cúmulos α son bastante variadas y van desde configuraciones tetrahédricas [6](e.g. en ^{16}O) u octahédricas [7](e.g.en ^{24}Mg) a configuraciones triangulares [8] [9](e.g. en ^{12}C) o hasta arreglos completamente lineales[10] [11] que van desde dos cúmulos (en el caso del ^8Be) a cadenas de siete partículas α (como en el caso del ^{28}Si).

Las diferentes posibilidades de estructuras de cúmulos se presentan en un diagrama conocido como diagrama de Ikeda[12] [5] donde éstas se presen-

tan como función de la energía y el número de masa. Este tipos de estudios se han realizado para energías de excitación bajas, de $10 \sim 15$ MeV [3]. Para estados altamente excitados debemos tratar modelos de cúmulos más complejos, porque se espera que varios tipos de configuraciones de cúmulos se activen al incrementarse la energía (como se muestra en el diagrama de Ikeda). Sin embargo, cálculos sobre modelos de cúmulos más complejos no son sencillos debido al aumento en el número de grados de libertad que hay que considerar.

Dentro de los modelos basados en estructuras de cúmulos- α , el ^{12}C tiene una gran importancia ya que la estructura de núcleos más pesados puede pensarse como moléculas del tipo $^{12}C + (n - 3)\alpha$ [13], donde el número de nucleones es $4n$, (e.g. $^{12}C + ^8Be$ o $^{12}C + ^{12}C$).

Otro aspecto importante a considerar dentro de los modelos de cúmulos es el principio de Pauli, ya que, aunque los nucleones que constituyen el núcleo, están dentro de diferentes cúmulos estos interaccionan entre si, por lo cual no pueden ocupar los mismos estados. Hasta ahora existen varios modelos que, aunque no toman en cuenta este principio [14] obtienen resultados bastante apegados a los resultados experimentales. Ahora el objetivo de este trabajo es extender estos estudios al tomar en cuenta el principio de Pauli y determinar que efectos tiene sobre el modelo y los resultados.

Desde hace algún tiempo la formulación de la mecánica cuántica en términos de estructuras algebraicas ha surgido como una alternativa muy viable a la solución de ecuaciones diferenciales del tipo de la ecuación de Schrödinger [16], ya que, es mucho más sencillo diagonalizar una matriz a resolver un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas. Es por esto que para realizar este estudio de la estructura del ^{12}C se utiliza el llamado Modelo Algebraico de Cúmulos (ACM) [14].

Por otro lado, el ^{12}C presenta propiedades que no se pueden explicar muy bien a partir de un modelo de capas de partículas independientes, e.g. transiciones octupolares (~ 103 W.u.), $B(E3; 3^- \rightarrow 0^+)$, es decir, que el ^{12}C tiene más grados de libertad de los que se consideran en un modelo de capas y es por esto que se busca una explicación en términos de grados de libertad colectivos, que se consideran en un modelo de cúmulos, para entender ese tipo de comportamientos.

En el siguiente capítulo se discute lo que es el modelo de cúmulos, la construcción de los operadores que se utilizan, la base, y como calcular los elementos de matriz del hamiltoniano.

En el capítulo 3 se discute como implementar el principio de Pauli en nuestro modelo de cúmulos. Primero se discute el caso general para tres cúmulos cualesquiera y en seguida se explica el caso particular de 3α 's. Finalmente se presenta una tabla con los estados permitidos.

En el capítulo 4 se calculan los factores de forma y los operadores de

transición. Esto se hace utilizando tres bases diferentes, y comparando los resultados podemos mostrar el porque se utilizó el trompo simétrico, como base para hacer la diagonalización del hamiltoniano.

Finalmente, en los dos últimos capítulos se presentan los resultados obtenidos para el espectro de energía, los factores de forma y transiciones electromagnéticas y se hace una discusión de estos resultados.

Capítulo 2

Modelo Algebraico de Cúmulos

A continuación se presenta una breve introducción al modelo algebraico de cúmulos que se utiliza para el estudio del ^{12}C .

La idea general de los modelos algebraicos es describir un problema mecánico-cuántico, con ν grados de libertad, en términos de un álgebra generadora de espectros $U(\nu + 1)$ [16]

Así, en general, la estructura algebraica de un sistema de cúmulos esta dada por $\mathcal{G}_r \otimes \mathcal{G}_i$, donde \mathcal{G}_r representa los grados de libertad espaciales del movimiento relativo de los cúmulos y \mathcal{G}_i representa los grados de libertad internos de las excitaciones de los cúmulos mismos.

La descripción del problema de dos cúmulos en un núcleo, $\nu = 3n-3 = 3$, utilizando el álgebra $U(4)$ ha sido presentada hace tiempo [17] y se utilizó para describir resonancias en dispersiones de iones pesados. Para el modelo de bosones interactuantes se usa el álgebra $U(6)$ para los cinco grados de libertad de la deformación cuadrupolar.

2.1 Modelo $U(7)$

Considerando al núcleo ^{12}C como un cúmulo de tres partículas α el número de grados de libertad para el movimiento relativo de los tres cúmulos es $\nu = 3n-3 = 6$ i.e. $\mathcal{G}_r = U(7)$. Para este trabajo solo se consideran los grados de libertad espaciales. En caso que se quiera considerar la estructura interna de los cúmulos la estructura algebraica tendría que extenderse a $U(\nu + 1) \otimes \mathcal{G}_i$.

Par los grados de libertad espaciales utilizamos las coordenadas relativas

de Jacobi ρ y λ

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad (2.1)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - 2\mathbf{r}_3),$$

donde \mathbf{r}_i ($i = 1,2,3$) son las coordenadas de las tres partículas (además tenemos las coordenadas del centro de masa, sin embargo, no son relevantes para obtener el espectro de energías de excitación). En la figura 1 se ilustran las coordenadas de Jacobi para el problema de tres cuerpos.

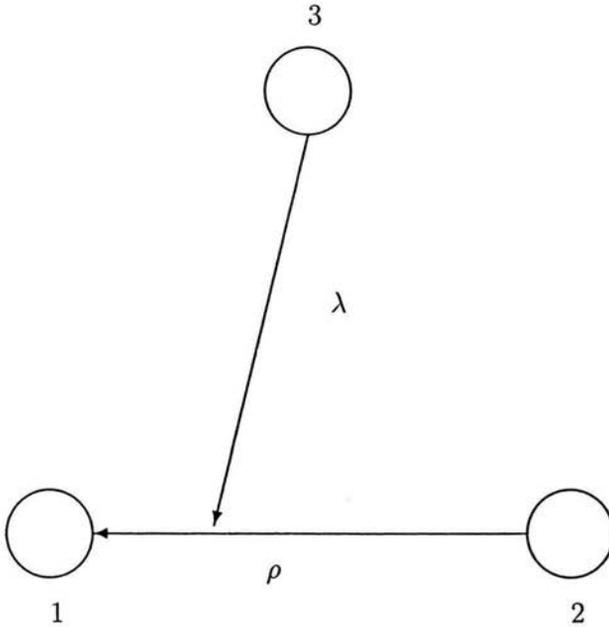


Figura 2.1: Coordenadas relativas de Jacobi.

El álgebra $U(7)$ se construye utilizando los operadores bosónicos vectoriales, uno por cada coordenada [19]. La relación entre los operadores, las coordenadas y sus momentos conjugados es la usual del oscilador armónico:

$$b_{\rho,m}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\rho_m - ip_{\rho,m}),$$

$$b_{\rho,m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\rho_m + ip_{\rho,m}), \quad (2.2)$$

$$b_{\lambda,m}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_m - ip_{\lambda,m}),$$

$$b_{\lambda,m} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_m + ip_{\lambda,m}),$$

con $m = -1, 0, 1$. Así, estos operadores de creación y aniquilación simplemente representan la segunda cuantización de las coordenadas de Jacobi y sus momentos conjugados canónicos. Además de estos operadores, se introduce un boson escalar: s^\dagger , s ya que este permite mezclar configuraciones distintas del oscilador armónico.

Los operadores satisfacen las reglas de conmutación usuales

$$\begin{aligned} [b_i^\dagger, b_j^\dagger] &= 0, \\ [b_i, b_j^\dagger] &= \delta_{i,j}, \\ [b_i, b_j] &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Si denotamos el conjunto de los operadores de creación y aniquilación por c_α^\dagger y c_α i.e.

$$b_{\rho,m}^\dagger, b_{\lambda,m}^\dagger, s^\dagger \equiv c_\alpha^\dagger \quad (2.4)$$

$$b_{\rho,m}, b_{\lambda,m}, s \equiv c_\alpha$$

con $\alpha = 1, \dots, 7$, los productos bi-lineales entre los operadores de creación y aniquilación se pueden escribir como:

$$G_{\alpha,\alpha'} = c_\alpha^\dagger c_{\alpha'}, \quad (2.5)$$

con $\alpha, \alpha' = 1, \dots, 7$, y son estos 49 productos los que generan el álgebra del grupo de Lie $U(7)$. Ahora, podemos escribir los diferentes operadores involucrados en el problema, como son, por ejemplo, el Hamiltoniano y los operadores de transiciones electromagnéticas, en términos de los generadores $G_{\alpha,\alpha'}$ y, por ende, el Hamiltoniano conserva el número total de bosones.

2.2 Construcción de los operadores

El problema de tres cuerpos idénticos presenta algunas simetrías que se tienen que tomar en cuenta [19]. Primero hay que notar que el problema

es invariante ante rotaciones. Además, presenta invariancia ante permutaciones de tres partículas idénticas. Esto significa que tenemos que construir estados y operadores que se transformen de acuerdo a las representaciones irreducibles de los grupos de rotación y permutación.

Primero vamos a considerar el grupo de rotaciones. Los operadores de creación, b_ρ^\dagger y b_λ^\dagger , se transforman por definición como vectores bajo rotaciones. Por otro lado, los operadores de aniquilación no presentan esa misma propiedad, sin embargo, es sencillo construir operadores que se transformen apropiadamente. Estos operadores son[19]:

$$\begin{aligned}\bar{b}_{\rho,m} &= (-1)^{1-m} b_{\rho,-m}, \\ \bar{b}_{\lambda,m} &= (-1)^{1-m} b_{\lambda,-m}, \\ \bar{s} &= s\end{aligned}\quad (2.6)$$

Utilizando estos operadores se pueden reescribir los 49 elementos de $U(7)$ de la siguiente manera:

$$(c_l^\dagger \times \bar{c}_{l'})_M^{(L)} = \sum_{m,m'} \langle l, m, l', m' | L, M \rangle c_{l,m}^\dagger \bar{c}_{l',m'}, \quad (2.7)$$

donde $c_l^\dagger (\bar{c}_l)$ con $l = 1$ representan los bosones vectoriales $b_\rho^\dagger (\bar{b}_\rho)$, $b_\lambda^\dagger (\bar{b}_\lambda)$ y para $l = 0$ representan los bosones escalares $s^\dagger (\bar{s})$. La cruz denota un producto tensorial con respecto al grupo de las rotaciones en tres dimensiones.

Ahora necesitamos que los operadores se transformen como representaciones irreducibles del grupo S_3 , ya que, estamos suponiendo que los tres cúmulos son idénticos. En este caso utilizamos la trasposición $P(12)$ y la permutación cíclica $P(123)$ [26]. Todas las demas permutaciones pueden expresarse en términos de éstas. Usando las definiciones de las ecs. (2.1) y (2.2), se obtienen las siguientes propiedades de transformación para los operadores de creación bajo S_3 :

$$P(12) \begin{pmatrix} s^\dagger \\ b_{\rho,m}^\dagger \\ b_{\lambda,m}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^\dagger \\ b_{\rho,m}^\dagger \\ b_{\lambda,m}^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$$P(123) \begin{pmatrix} s^\dagger \\ b_{\rho,m}^\dagger \\ b_{\lambda,m}^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\frac{2\pi}{3}) & \text{sen}(\frac{2\pi}{3}) \\ 0 & -\text{sen}(\frac{2\pi}{3}) & \cos(\frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s^\dagger \\ b_{\rho,m}^\dagger \\ b_{\lambda,m}^\dagger \end{pmatrix}$$

Hay tres diferentes tipos de simetrías para la permutación de tres objetos:

$$\begin{aligned}
 \square\square\square &\equiv S, \\
 \\
 \square\square &\equiv M \\
 \square & \\
 \\
 \square & \\
 \square &\equiv A \\
 \square &
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

donde las representaciones simétricas (S) y antisimétricas (A) tiene dimensión uno, mientras la representación con simetría mixta, (M), posee dimensión dos. A continuación, la ec. (2.10) muestra que el boson escalar s^\dagger se transforma de acuerdo a la representación simétrica, S, mientras que los bosones vectoriales, b_ρ^\dagger y b_λ^\dagger se transforman como los dos componentes, M_ρ y M_λ , de la representación de simetría mixta.

Ahora, podemos reescribir los 49 elementos del álgebra U(7) en términos de los operadores que se transforman como representaciones irreducibles de SO(3) y S_3 .

$$\begin{aligned}
 \hat{D}_{\rho,m} &= \left(b_\rho^\dagger \times \bar{s} - s^\dagger \times \bar{b}_\rho \right)_m^{(1)}, \\
 \hat{D}_{\lambda,m} &= \left(b_\lambda^\dagger \times \bar{s} - s^\dagger \times \bar{b}_\lambda \right)_m^{(1)}, \\
 \hat{A}_{\rho,m} &= i \left(b_\rho^\dagger \times \bar{s} + s^\dagger \times \bar{b}_\rho \right)_m^{(1)}, \\
 \hat{A}_{\lambda,m} &= i \left(b_\lambda^\dagger \times \bar{s} + s^\dagger \times \bar{b}_\lambda \right)_m^{(1)}, \\
 \hat{G}_{M_\rho,m}^{(1)} &= \left(b_\rho^\dagger \times \bar{b}_\lambda + b_\lambda^\dagger \times \bar{b}_\rho \right)_m^{(1)}, \\
 \hat{G}_{M_\lambda,m}^{(1)} &= \left(b_\rho^\dagger \times \bar{b}_\rho - b_\lambda^\dagger \times \bar{b}_\lambda \right)_m^{(1)}, \\
 \hat{G}_{S,m}^{(1)} &= \left(b_\rho^\dagger \times \bar{b}_\rho + b_\lambda^\dagger \times \bar{b}_\lambda \right)_m^{(1)}, \\
 \hat{G}_{A,m}^{(1)} &= i \left(b_\rho^\dagger \times \bar{b}_\lambda - b_\lambda^\dagger \times \bar{b}_\rho \right)_m^{(1)}, \\
 \hat{n}_s &= \left(s^\dagger \times \bar{s} \right)_0^{(0)}
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde $l = 0, 1, 2$. Además definimos otros operadores que son simplemente combinaciones de los anteriores y que nos serán útiles más adelante:

$$\begin{aligned}
\hat{n}_\rho &= \sqrt{3} \left(b_\rho^\dagger \times \bar{b}_\rho \right)_0^{(0)}, \\
\hat{n}_\lambda &= \sqrt{3} \left(b_\lambda^\dagger \times \bar{b}_\lambda \right)_0^{(0)}, \\
\hat{n}_p &= \hat{n}_\rho + \hat{n}_\lambda \\
\hat{N} &= \hat{n}_s + \hat{n}_p \\
\hat{L}_m &= \sqrt{2} \hat{G}_{S,m}^{(1)}, \\
\hat{K}_m &= -\sqrt{3} \hat{G}_{A,0}^{(0)},
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Para finalizar esta sección resumimos, en la siguiente tabla, las propiedades de transformación de algunas combinaciones lineales y bi-lineales de los operadores bosónicos.

Operador	S_3
s^\dagger $\hat{n}_s, \hat{G}_S^{(l)}$ $\left(b_\rho^\dagger \times b_\rho^\dagger + b_\lambda^\dagger \times b_\lambda^\dagger \right)^{(l)}$	S
b_ρ^\dagger $\hat{D}_\rho, \hat{A}_\rho, \hat{G}_{M_\rho}^{(l)}$ $\left(b_\rho^\dagger \times b_\lambda^\dagger + b_\lambda^\dagger \times b_\rho^\dagger \right)^{(l)}$	M_ρ
b_λ^\dagger $\hat{D}_\lambda, \hat{A}_\lambda, \hat{G}_{M_\lambda}^{(l)}$ $\left(b_\rho^\dagger \times b_\rho^\dagger - b_\lambda^\dagger \times b_\lambda^\dagger \right)^{(l)}$	M_λ
$\hat{G}_A^{(l)}$ $i \left(b_\rho^\dagger \times b_\lambda^\dagger - b_\lambda^\dagger \times b_\rho^\dagger \right)^{(l)}$	A

2.3 Hamiltoniano

Los resultados mostrados en las secciones anteriores nos permiten construir el Hamiltoniano para estudiar el espectro del núcleo de ^{12}C . Este espectro se puede obtener expandiendo el Hamiltoniano en términos de los operadores del álgebra \mathcal{G}_r . Por lo cual, el hamiltoniano conserva el número de bosones. Esta expansión es usualmente un polinomio en $G_{\alpha,\alpha'}$. Debido a que los tres cúmulos son idénticos, el Hamiltoniano debe transformarse como representaciones simétricas, S, del grupo de permutaciones S_3 . El Hamiltoniano más general (hasta operadores de uno y dos cuerpos) que conserva el número total de bosones, el momento angular, la paridad y se transforma como escalar bajo permutaciones es [19]:

$$\begin{aligned}
 \hat{H} = & \epsilon_s \hat{n}_s + \epsilon_p \hat{n}_p + u_0 (s^\dagger s^\dagger \bar{s} \bar{s}) + u_1 \hat{n}_s \hat{n}_p \\
 & + v_0 \left[(b_\rho^\dagger \cdot b_\rho^\dagger + b_\lambda^\dagger \cdot b_\lambda^\dagger) \bar{s} \bar{s} + s^\dagger s^\dagger (\bar{b}_\rho \cdot \bar{b}_\rho + \bar{b}_\lambda \cdot \bar{b}_\lambda) \right] \\
 & + \sum_{l=0,2} c_l \left[(b_\rho^\dagger \times b_\rho^\dagger - b_\lambda^\dagger \times b_\lambda^\dagger)^{(l)} \cdot (\bar{b}_\rho \times \bar{b}_\rho - \bar{b}_\lambda \times \bar{b}_\lambda)^{(l)} \right. \\
 & \left. + 4 (b_\rho^\dagger \times b_\lambda^\dagger)^{(l)} \cdot (\bar{b}_\lambda \times \bar{b}_\rho)^{(l)} \right] \\
 & + c_1 (b_\rho^\dagger \times b_\lambda^\dagger)^{(1)} \cdot (\bar{b}_\lambda \times \bar{b}_\rho)^{(1)} \\
 & + \sum_{l=0,2} w_l (b_\rho^\dagger \times b_\rho^\dagger + b_\lambda^\dagger \times b_\lambda^\dagger)^{(l)} \cdot (\bar{b}_\rho \times \bar{b}_\rho + \bar{b}_\lambda \times \bar{b}_\lambda)^{(l)}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Este Hamiltoniano considera interacciones de uno y dos cuerpos únicamente. Los términos ϵ_i representan contribuciones del oscilador armónico. Los términos u_l , c_l y w_l son contribuciones anarmónicas. El término v_0 es la única interacción que produce mezclas entre diferentes capas del oscilador (con $\Delta n = \pm 2$).

Es posible escribir el mismo hamiltoniano en diferentes formas equivalentes [19]. Por ejemplo, en términos de los generadores de $U(7)$ (ver ecs. (2.10) y (2.11))

$$\begin{aligned}
 \hat{H} = & \epsilon_s \hat{n}_s + \epsilon_p \hat{n}_p + \delta_s \hat{n}_s^2 + \delta_p \hat{n}_p^2 + \delta_{sp} \hat{n}_s \hat{n}_p \\
 & + \eta_D (\hat{D}_\rho \cdot \hat{D}_\rho + \hat{D}_\lambda \cdot \hat{D}_\lambda) + \eta_A (\hat{A}_\rho \cdot \hat{A}_\rho + \hat{A}_\lambda \cdot \hat{A}_\lambda) \\
 & + \sum_{l=0}^2 \left[\alpha_l \hat{G}_S^{(l)} \cdot \hat{G}_S^{(l)} + \beta_l \hat{G}_A^{(l)} \cdot \hat{G}_A^{(l)} + \gamma (\hat{G}_\rho^{(l)} \cdot \hat{G}_\rho^{(l)} + \hat{G}_\lambda^{(l)} \cdot \hat{G}_\lambda^{(l)}) \right].
 \end{aligned}$$

(2.13)

Finalmente podemos descomponer el Hamiltoniano en su parte vibracional y rotacional. El procedimiento general para realizar esta descomposición se introdujo para el modelo IBM, y se aplicó al modelo $U(7)$ [19].

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{vib} + \hat{H}_{rot} + \hat{H}_{vib-rot} \quad (2.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{H}_{vib} &= \xi_1 \left(R^2 s^\dagger s^\dagger - b_\rho^\dagger \cdot b_\rho^\dagger - b_\lambda^\dagger \cdot b_\lambda^\dagger \right) \left(R^2 \bar{s} \bar{s} - \bar{b}_\rho \cdot \bar{b}_\rho - \bar{b}_\lambda \cdot \bar{b}_\lambda \right) \\ &\quad + \xi_2 \left[\left(b_\rho^\dagger \cdot b_\rho^\dagger - b_\lambda^\dagger \cdot b_\lambda^\dagger \right) \left(\bar{b}_\rho \cdot \bar{b}_\rho - \bar{b}_\lambda \cdot \bar{b}_\lambda \right) \right. \\ &\quad \left. + 4 \left(b_\rho^\dagger \cdot b_\lambda^\dagger \right) \left(\bar{b}_\lambda \cdot \bar{b}_\rho \right) \right], \\ \hat{H}_{rot} &= 2\xi_3 \hat{G}_S^{(1)} \cdot \hat{G}_S^{(1)} + 3\xi_4 \hat{G}_A^{(0)} \cdot \hat{G}_A^{(0)} \\ &= \xi_3 \hat{L} \cdot \hat{L} + \xi_4 \hat{K} \cdot \hat{K}, \\ \hat{H}_{vib-rot} &= \xi_5 \left(\hat{A}_\rho \cdot A_\rho + \hat{A}_\lambda \cdot A_\lambda \right) + \xi_6 \left(G_{M_\rho}^{(1)} \cdot G_{M_\rho}^{(1)} + G_{M_\lambda}^{(1)} \cdot G_{M_\lambda}^{(1)} \right), \\ \hat{H}_0 &= \xi_7 + \xi_8 (\hat{n}_\rho + \hat{n}_\lambda). \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.4 Construcción de la base

Para poder calcular el espectro necesitamos construir una base completa para las representaciones de $U(7)$. Esta base se puede obtener considerando alguna de las diferentes sub-algebras de $U(7)$ [19]. En este caso se utiliza la siguiente cadena:

$$U(7) \supset U(3)_\rho \otimes U(3)_\lambda \supset SO(3)_\rho \otimes SO(3)_\lambda \supset SO(3) \supset SO(2) \quad (2.16)$$

Esta cadena corresponde a dos osciladores armónicos acoplados en tres dimensiones. En el capítulo 4, al discutir las expresiones para los factores de forma, se justifica el porque se eligió esta base.

Los estados de esta base se caracterizan por un conjunto de números cuánticos relacionados con las representaciones irreducibles de los subgrupos.

$$\left| \begin{array}{ccccccc} U(7) & U_\rho(3) & U_\lambda(3) & SO_\rho(3) & SO_\lambda(3) & SO(3) & SO(2) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ N & n_\rho & n_\lambda & L_\rho & L_\lambda & L & M_L \end{array} \right\rangle$$

Para un valor dado de N , i.e., del número total de bosones con el que se va a trabajar, los números cuánticos pueden tomar los siguientes valores

$$\begin{aligned}
n_\rho &= 0, 1, \dots, N, \\
n_\lambda &= 0, 1, \dots, N - n_\rho, \\
L_\rho &= n_\rho, n_\rho - 2, \dots, 1 \text{ o } 0, \\
L_\lambda &= n_\lambda, n_\lambda - 2, \dots, 1 \text{ o } 0, \\
L &= |L_\rho - L_\lambda|, |L_\rho - L_\lambda| + 1, \dots, L_\rho + L_\lambda, \\
M_L &= -L, -L + 1, \dots, L.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

La paridad de los estados está dada por $\pi = (-1)^{n_\rho + n_\lambda} = (-1)^{L_\rho + L_\lambda}$. Así, los estados base se pueden identificar de manera unívoca

$$|N, (n_\rho, L_\rho), (n_\lambda, L_\lambda); L, M_L \rangle \tag{2.18}$$

2.5 Elementos de matriz

Los eigenvalores y los correspondientes eigenvectores del Hamiltoniano se pueden obtener de manera exacta al diagonalizarlo en la base de la ec. (2.18). Las funciones de onda que se obtenga de este proceso tiene, por construcción, momento angular, paridad y simetría de permutación correctas.

Las funciones de onda en el límite de dos osciladores armónicos acoplados se pueden expresar en términos de los operadores bosónicos. Como se menciona en la sección 2.1 el operador s^\dagger es simplemente un operador de creación sobre el número total de bosones, N , por lo cual, es posible reescribir las funciones de la ec. (2.18) como:

$$\begin{aligned}
|N, (n_\rho, L_\rho), (n_\lambda, L_\lambda); L, M_L \rangle &= \frac{1}{\sqrt{(N - n_\rho - n_\lambda)!}} (s^\dagger)^{N - n_\rho - n_\lambda} \\
&| (n_\rho, L_\rho), (n_\lambda, L_\lambda); L, M_L \rangle, \tag{2.19}
\end{aligned}$$

donde el primer término es simplemente un factor de normalización. Además, es posible desacoplar los términos restantes de la ec. anterior mediante los coeficientes de Clebsch-Gordon.

$$\begin{aligned}
| (n_\rho, L_\rho), (n_\lambda, L_\lambda); L, M_L \rangle &= \sum_{M_\rho, M_\lambda} \langle L_\rho M_\rho L_\lambda M_\lambda | LM \rangle \\
&| n_\rho, L_\rho, M_\rho \rangle | n_\lambda, L_\lambda, M_\lambda \rangle \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Así, hemos expresado la función de onda en términos de dos funciones de onda independientes, las cuales, generan los espacios de las coordenadas ρ y λ respectivamente. Ahora, tenemos las funciones de onda del oscilador armónico que podemos escribir en términos de A_{nL} y Q_+ [29].

$$|n, L, M\rangle = A_{nL}(Q_+)^{\frac{n-L}{2}} |L, L, M\rangle, \quad (2.21)$$

donde $Q_+ = \frac{1}{2}b^\dagger \cdot b^\dagger$ y

$$A_{nL} = (-1)^{\frac{n-L}{2}} \sqrt{\frac{2^{n-L}(2L+1)!!}{(n-L)!(n+L+1)!!}}. \quad (2.22)$$

Ahora, ya podemos obtener los elementos de matriz de los operadores s^\dagger y b^\dagger , para así, determinar los elementos de matriz del hamiltoniano en la base de la ec. (2.18).

De la ec. (2.19) obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle N+1, (n_\rho, L_\rho), (n_\lambda, L_\lambda); L, M | s^\dagger | N, (n_\rho, L_\rho), (n_\lambda, L_\lambda); L, M \rangle = \\ \sqrt{(N+1-n_\rho-n_\lambda)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

A partir del teorema de Wigner-Eckart escribimos los elementos de matriz en términos de los coeficientes de Clebsch-Gordon y los elementos reducidos de matriz:

$$\begin{aligned} & \langle N+1, (n_\rho, L_\rho), (n_\lambda, L_\lambda); L, M | s^\dagger | N, (n_\rho, L_\rho), (n_\lambda, L_\lambda); L, M \rangle \\ &= (-1)^{L-M} \begin{pmatrix} L & 0 & L \\ -M & 0 & M \end{pmatrix} \\ & \langle N+1, (n_\rho, L_\rho), (n_\lambda, L_\lambda) || s^\dagger || N, (n_\rho, L_\rho), (n_\lambda, L_\lambda) \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2L+1}} \langle N+1, (n_\rho, L_\rho), (n_\lambda, L_\lambda); L || s^\dagger || N, (n_\rho, L_\rho), (n_\lambda, L_\lambda); L \rangle \end{aligned} \quad (2.24)$$

De las ecs. (2.24) y (2.25) determinamos que los elementos de matriz reducidos del operador s^\dagger son:

$$\begin{aligned} & \langle N+1, (n_\rho, L_\rho), (n_\lambda, L_\lambda); L || s^\dagger || N, (n_\rho, L_\rho), (n_\lambda, L_\lambda); L \rangle \\ &= \sqrt{(N-n_\rho-n_\lambda+1)(2L+1)}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

De manera similar podemos determinar los elementos de matriz para los operadores dipolares, $b_{i,m}^\dagger$ con $i = \rho, \lambda$ y $m = -1, 0, 1$, en la base del

oscilador armónico. Primero escribimos los elementos de matriz utilizando las funciones de onda ecs. (2.21) y (2.22)

$$\begin{aligned} & \langle n+1, L+1, L+1 | b_1^\dagger | n, L, L \rangle \\ &= A_{nL} \langle n+1, L+1, L+1 | b_1^\dagger (Q_+)^{\frac{n-L}{2}} | L, L, L \rangle, \end{aligned} \quad (2.26)$$

donde la función de onda

$$|L, L, L \rangle = \frac{1}{\sqrt{L!}} (b_1^\dagger)^L |0 \rangle \quad (2.27)$$

Ahora utilizamos las reglas de conmutación de la ec. (2.3)

$$A_{nL} \langle n+1, L+1, L+1 | (Q_+)^{\frac{n-L}{2}} b_1^\dagger | L, L, L \rangle, \quad (2.28)$$

Aplicando el operador de creación b_1^\dagger sobre la función de onda tenemos:

$$A_{nL} \sqrt{L+1} \langle n+1, L+1, L+1 | (Q_+)^{\frac{n-L}{2}} | L+1, L+1, L+1 \rangle. \quad (2.29)$$

Finalmente, según la definición de las funciones de onda en términos del operador Q_+ , ec. (2.22), llegamos a

$$\begin{aligned} & \langle n+1, L+1, L+1 | b_1^\dagger | n, L, L \rangle \\ &= \sqrt{L+1} \frac{A_{nL}}{A_{n+1, L+1}} \\ &= \sqrt{\frac{(n+L+3)(L+1)}{2L+3}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} & \langle n+1, L+1, L+1 | b_1^\dagger | n, L, L \rangle \\ &= \begin{pmatrix} L+1 & 1 & L \\ -L-1 & 1 & L \end{pmatrix} \langle n+1, L+1 | b^\dagger | n, L \rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2L+3}} \langle n+1, L+1 | b^\dagger | n, L \rangle \end{aligned} \quad (2.31)$$

Combinando las dos últimas ecuaciones, obtenemos que los elementos reducidos de matriz son:

$$\langle n+1, L+1 | b^\dagger | n, L \rangle = \sqrt{(n+L+3)(L+1)} \quad (2.32)$$

Ahora obtenemos los elementos de matriz del operador b_{-1}^\dagger . Esto se hace de manera análoga a como se obtuvieron los elementos de matriz para el operador b_1^\dagger :

$$\begin{aligned}
& \langle n+1, L-1, L-1 | b_{-1}^\dagger | n, L, L \rangle \\
&= A_{nL} \langle n+1, L-1, L-1 | (Q_+)^{\frac{n-L}{2}} b_{-1}^\dagger | L, L, L \rangle \\
&= \frac{A_{nL} A_{L+1, L-1}}{A_{n+1, L-1}} \langle L+1, L-1, L-1 | b_{-1}^\dagger | L, L, L \rangle \\
&= \frac{A_{nL} A_{L+1, L-1}}{A_{n+1, L-1}} A_{L+1, L-1} \langle L-1, L-1, L-1 | (Q_-) b_{-1}^\dagger | L, L, L \rangle \\
&= -\frac{A_{nL} A_{L+1, L-1}}{A_{n+1, L-1}} A_{L+1, L-1} \langle L-1, L-1, L-1 | b_{-1} | L, L, L \rangle \\
&= -\frac{A_{nL} A_{L+1, L-1}}{A_{n+1, L-1}} A_{L+1, L-1} \sqrt{L} \\
&= \sqrt{\frac{(n-L+2)L}{2L+1}}. \tag{2.33}
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned}
& \langle n+1, L-1, L-1 | b_{-1}^\dagger | n, L, L \rangle \\
&= \begin{pmatrix} L-1 & 1 & L \\ -L+1 & -1 & L \end{pmatrix} \langle n+1, L-1 | | b^\dagger | | n, L \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2L+1}} \langle n+1, L-1 | | b^\dagger | | n, L \rangle \tag{2.34}
\end{aligned}$$

Combinando las dos últimas ecuaciones, obtenemos que los elementos reducidos de matriz son:

$$\langle n+1, L-1 | | b^\dagger | | n, L \rangle = \sqrt{(n-L+2)L}. \tag{2.35}$$

Los elementos reducidos de matriz para los operadores \bar{s} y \bar{b} se obtienen a partir de la siguiente relación:

$$\langle \alpha_1, L_1 | | \bar{b}_l | | \alpha_2, L_2 \rangle = (-1)^{L_1-L_2-l} \langle \alpha_2, L_2 | | b_l^\dagger | | \alpha_1, L_1 \rangle \tag{2.36}$$

para $l = 0, 1$. Esta relación es una consecuencia directa del teorema de Wigner-Eckart.

A partir de los resultados anteriores y, usando el álgebra de Racah (métodos de reducción), es posible calcular los elementos de matriz del Hamiltoniano (2.17) y así, en principio, obtener el espectro de energía. Sin embargo, aun falta considerar el principio de Pauli, que es el tema del siguiente capítulo.

Capítulo 3

Proyección de Pauli

Existen modelos de cúmulos, para el núcleo de carbono, en los cuales no se toma en cuenta el principio de Pauli [14], i.e. se permite que los nucleones que se encuentran en diferentes cúmulos estén en el mismo estado. Sin embargo, estos cúmulos no son independientes, por lo cual, es lógico suponer que los nucleones de estos cúmulos no pueden estar en los mismos estados al mismo tiempo[15]. La figura (3.1) ilustra la discusión anterior. Así, vemos que en el estado base de las partículas α los dos protones y los dos neutrones ocupan la capa s . Sin embargo, en el núcleo ^{12}C , el estado base no puede contener más de dos protones y dos neutrones en la capa s , razón por la cual, por lo menos ocho nucleones se encuentran en capas excitadas.

Es por esto que para intentar modelar el núcleo de carbono de una forma más realista vamos a construir los estados que son permitidos por el principio de Pauli. A continuación se hace una revisión del método OCM (orthogonality condition model) para obtener los estados permitidos por el principio de Pauli para tres cúmulos cualesquiera. Después, se discute la aplicación de este método al caso particular de tres cúmulos α idénticos de acuerdo al trabajo desarrollado por Horiuchi [24], el cual, consiste en diagonalizar el operador cuadrático de Casimir del grupo $SU(3)$.

3.1 Construcción de los estados permitidos

A continuación solamente se bosqueja la construcción de los estados permitidos de Pauli, ya que, la construcción a detalle se presenta en el trabajo original de Horiuchi [4].

Los estados redundantes de un sistema de tres cúmulos $\{C_1, C_2, C_3\}$ son

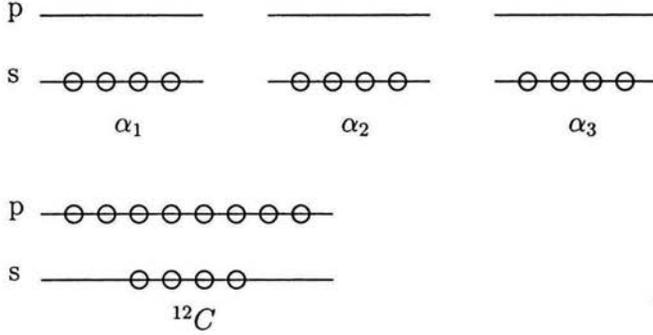


Figura 3.1: Acomodo de los nucleones en los diferentes estados. En la figura superior se muestran tres partículas α que no interaccionan entre sí. Mientras en la parte inferior se muestra como están distribuidos los nucleones en un núcleo de carbono.

las soluciones ortogonales y normalizadas, ω , de las ecuaciones:

$$\mathcal{A}\{\omega(s, t)\phi\} = 0. \quad (3.1)$$

donde \mathcal{A} es el anti-simetrizador, $\omega(s, t)$ representa la función de onda correspondiente al movimiento relativo de los tres cúmulos y

$$\phi = \phi_1(C_1)\phi_2(C_2)\phi_3(C_3) \quad (3.2)$$

es el producto de las funciones de onda internas de cada cúmulo. Las coordenadas s y t están definidas en términos de las coordenadas del centro de masa de cada cúmulo como

$$t = r_2 - r_1 \quad (3.3)$$

$$s = r_3 - \frac{M_1 r_1 + M_2 r_2}{M_1 + M_2}.$$

El problema ahora es encontrar las soluciones ω de la ec. (3.1). Denotamos los estados redundantes para el sub-sistema de dos cúmulos, $\{C_1, C_2\}$, como $F(t)$ que, por definición, satisface la ecuación

$$\mathcal{A}\{F(t)\phi_1(C_1)\phi_2(C_2)\} = 0 \quad (3.4)$$

De aquí podemos ver que todas las funciones de la forma $f(s)F(t)$, donde f es una función arbitraria de la coordenada relativa s , satisfacen la ec. (3.1)

y, por esto, son estados redundantes del sistema de tres cúmulos. Hasta el momento no existe ninguna demostración matemática que pruebe que en un sistema de tres cuerpos existe una función redundante que no pueda ser representada en términos de funciones redundantes de dos cuerpos. Sin embargo, para el caso de 3 cúmulos α se ha podido demostrar que no existen tales funciones [4].

En general, el problema de redundancia se puede formular como un problema de eigenvalores de la siguiente manera:

$$\langle \phi | A \{ \omega(s, t) \phi \rangle = a \omega(s, t), \quad (3.5)$$

para $a = 0$ obtenemos los estados no permitidos de Pauli (PFS), $\omega(s, t)$, de la ec (3.1), mientras que los estados permitidos de Pauli (PAS) se definen como las eigenfunciones con $a \neq 0$. Debido a que las funciones $\omega(s, t)$ se suponen descritas por el oscilador armónico podemos utilizar los siguientes números cuánticos para clasificarlas.

- Para cada uno de los cúmulos C_1 , C_2 y C_3 tenemos que la representación $SU(3)$ es $(\lambda_i, \mu_i) = (0, 0)$ con $i = 1, 2, 3$. Así, los valores de (λ, μ) del núcleo ^{12}C están dados solamente por el movimiento relativo de los cúmulos.
- Los eigenestados $\omega(s, t)$ se clasifican por medio de n , número total de cuantos del oscilador armónico, por el momento angular total y por la representación de $SU(3)$, (λ, μ) , propuesta por Elliott [25]. Para n fijo existe un número finito de eigenfunciones que se pueden obtener a partir de los brackets de Talmi-Brody-Moshinsky [26].
- Los PAS tiene un número mínimo de cuantos de oscilación [15], $n_0 = 8$, por lo cual, el valor de n debe ser tal $n \geq n_0$ (ver figura 3.1).
- En general los PAS, $|n(\lambda, \mu)\rangle$ tienen una multiplicidad. Para poder distinguir los estados con su multiplicidad se introduce un número cuántico adicional ζ .

3.2 Caso 3α

El método de proyección, propuesto por Horiuchi [4], para construir los estados permitidos por el principio de Pauli (PAS) se basa en suponer que el espacio generado por todos los PAS del sistema de cúmulos es igual al espacio generado por las funciones de onda relativas que son ortogonales a todos los estados prohibidos de dos cúmulos entre cualesquiera dos cúmulos.

Se ha mostrado que esta hipotesis es válida para sistemas de tres cúmulos idénticos [4].

Para el ^{12}C tenemos un sistema que consiste de tres cúmulos idénticos C_1, C_2 y C_3 y, como se dijo anteriormente, están descritos por las funciones de onda del oscilador armónico, $\phi_1(C_1), \phi_2(C_2)$ y $\phi_3(C_3)$, donde todas tienen la misma constante de oscilación ν . Además, en este caso las coordenadas, s y t se reducen a las coordenadas ρ y λ que se definieron en la ec. (2.1)(la demostración de esto se encuentra en [20])

$$\begin{aligned} t &= -\sqrt{2}\rho \\ s &= -\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Como se mencionó anteriormente suponemos que los PFS (eigenfunciones de la ec. (3.5) con $a = 0$) para el sistema de 3α se pueden reducir a PFS de 2α [24]. Como sabemos [27] [28] los PFS para el caso 2α son las funciones de onda para el oscilador armónico, $R_{n_\rho, L_\rho}(\rho)Y_{L_\rho, M_\rho}(\theta_\rho, \phi_\rho)$, tal que $n_\rho = \text{impar}$ o $n_\rho = 0$ o 2 , lo cual nos lleva a que, los estados con $L_\rho = \text{impar}$ están prohibidos entre los grupos 2α . De ahí tenemos que los PAS para el sistema de 3α deben transformarse de acuerdo a la representación simétrica del grupo S_3 [31]. Dentro de los estados simétricos las funciones del subespacio generado por

$$\mathcal{S}\left\{ \sum_{L_\rho, L_\lambda} \langle (n_\rho, 0)L_\rho(n_\lambda, 0)L_\lambda | (\lambda, \mu)\kappa L \rangle \phi(n_\rho L_\rho n_\lambda L_\lambda L) \right\} \tag{3.7}$$

con $n_\rho = 0$ o 2 son PFS, donde \mathcal{S} es el simetrizador para 3 cuerpos.

Como se menciona en la seccion anterior los estados con $n < 8$ son PFS y solo los estados con $(0,4)$ para $n = 8$ son PAS. La clasificación de los estados se representa en la tabla siguiente. Ahora vamos a mostrar de manera general como se pueden construir los estados permitidos. De acuerdo con Moshinsky [26], podemos construir los estados del oscilador armónico que se transforma de acuerdo a la representación simétrica de S_3 como:

$$\begin{aligned} \phi(n'_\rho L'_\rho n'_\lambda L'_\lambda L[3]) &= \sqrt{\frac{2}{1 + \delta_{n'_\rho, n'_\lambda} \delta_{L'_\rho, L'_\lambda}}} \sum'_{n_\rho L_\rho n_\lambda L_\lambda} \langle n_\rho L_\rho n_\lambda L_\lambda | \rangle n'_\rho L'_\rho n'_\lambda L'_\lambda \rangle_L \\ &(-1)^{\frac{n_\rho}{2}} \phi(n_\rho L_\rho n_\lambda L_\lambda L), \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde \sum' indica una suma sobre los valores pares de n_ρ y el coeficiente $\langle n_\rho L_\rho n_\lambda L_\lambda | \rangle n'_\rho L'_\rho n'_\lambda L'_\lambda \rangle_L$ representa los brackets de Talmi-Moshinsky.

Si definimos los brackets reducidos de Talmi-Brody-Moshinsky como:

$$\begin{aligned}
\langle n_\rho L_\rho n_\lambda L_\lambda \rangle \{ n'_\rho L'_\rho n'_\lambda L'_\lambda \rangle_L &= \sum_{(\lambda, \mu), \kappa} \langle (n_\rho, 0) L_\rho, (n_\lambda, 0) L_\lambda \parallel (\lambda, \mu), \kappa L \rangle \\
&\times \langle (n'_\rho, 0) L'_\rho, (n'_\lambda, 0) L'_\lambda \parallel (\lambda, \mu), \kappa L \rangle \\
&\times \langle n_\rho n_\lambda \rangle \{ n'_\rho n'_\lambda \rangle_{(\lambda, \mu)} \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Lo cual se debe a la conmutatividad de las transformaciones de Talmi-Brody-Moshinsky con respecto a $SU(3)$. Así, obtenemos que los PAS son:

$$\begin{aligned}
\phi(n'_\rho n'_\lambda(\lambda, \mu) \kappa L[3]) &= \sqrt{\frac{2}{1 + \delta_{n'_\rho, n'_\lambda}}} \times \sum'_{n_\rho L_\rho n_\lambda L_\lambda} \langle n_\rho n_\lambda \rangle \{ n'_\rho n'_\lambda \rangle_{(\lambda, \mu)} \\
&(-1)^{\frac{n_\rho}{2}} \phi(n_\rho n_\lambda(\lambda, \mu) \kappa L), \quad (3.10)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\phi(n_\rho n_\lambda(\lambda, \mu) \kappa L) &= \sum_{L_\rho, L_\lambda} \langle (n_\rho, 0) L_\rho, (n_\lambda, 0) L_\lambda \parallel (\lambda, \mu), \kappa L \rangle \\
&\phi(n_\rho L_\rho n_\lambda L_\lambda L), \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Así, los PAS con (λ, μ) se obtienen tomando combinaciones lineales de los estados $\phi(n_\rho n_\lambda(\lambda, \mu) \kappa L)$ sobre n'_ρ, n'_λ , tal que los coeficientes de $\phi(n_\rho n_\lambda(\lambda, \mu) \kappa L)$ sean cero para $n_\rho = 0, 2$.

En el programa se simplificó el proceso para obtener las funciones, $\phi(n'_\rho n'_\lambda(\lambda, \mu) \kappa L[3])$. Primero se hizo la diagonalización de los operadores de Casimir de $SU(3)$, utilizando la base $\phi(n_\rho L_\rho n_\lambda L_\lambda L)$, para finalmente hacer la antisimetrización de las funciones que se obtuvieron.

Finalmente presentamos la clasificación de los estados permitidos de Pauli:

N	(λ, μ)								
8	(0,4)								
9	(3,3)								
10	(6,2)	(2,4)							
11	(9,1)	(5,3)	(3,4)						
12	(12,0)	(8,2)	(6,3)	(4,4)	(0,6)				
13	(11,1)	(9,2)	(7,3)	(5,4)	(3,5)				
14	(14,0)	(12,1)	(10,2)	(8,3)	(6,4) ²	(2,6)			
15	(15,0)	(13,1)	(11,2)	(9,3) ²	(7,4)	(5,5)	(3,6)		
16	(16,0)	(14,1)	(12,2) ²	(10,3)	(8,4) ²	(6,5)	(4,6)	(0,8)	
17	(17,0)	(15,1) ²	(13,2)	(11,3) ²	(9,4) ²	(7,5)	(5,6)	(3,7)	
18	(18,0) ²	(16,1)	(14,2) ²	(12,3) ²	(10,4) ²	(8,5)	(6,6) ²	(2,8)	
19	(19,0)	(17,1) ²	(15,2) ²	(13,3) ²	(11,4) ²	(9,5) ²	(7,6)	(5,7)	(3,8)

Estos resultados concuerdan con los obtenidos por Horiuchi [5] y también con los obtenidos por Smirnov [30]. Aunque en ambos casos solamente se obtiene resultados para $N \leq 14$.

Capítulo 4

Propiedades Electromagnéticas

A partir de los resultados mostrados en los capítulos anteriores, podemos determinar el espectro de energías de excitación para el núcleo ^{12}C , pero además de determinar el espectro, es importante evaluar otras propiedades que presenta el núcleo ^{12}C como son los factores de forma y las probabilidades de transición, ya que, estas propiedades son más sensibles a los detalles de las funciones de onda, lo cual nos permite probar de manera más rigurosa el modelo propuesto.

Es por esto que en este capítulo se muestra la forma de calcular los factores de forma y los operadores de transición, para que, finalmente en el siguiente capítulo se muestren los resultados obtenidos para las diferentes propiedades del núcleo.

4.1 Factores de forma

Primero, el factor de forma se define como

$$F_{i,f}(\vec{q}) = \int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \langle f | \hat{\rho}(\vec{r}) | i \rangle d\vec{r} \quad (4.1)$$

donde $|i\rangle$, $\langle f|$ son los estados iniciales y finales del sistema y $\hat{\rho}(\vec{r})$ representa la densidad de carga del núcleo. A partir de esta ecuación y de los resultados de la sección (2.5) podemos obtener una expresión para el factor de forma.

Hasta este momento no se ha mencionado el porque se escogió el hamiltoniano (2.12) para modelar el núcleo de carbono y, es el cálculo de los

factores de forma el que nos muestra, de manera intuitiva, el porque de esta elección del Hamiltoniano. Así, vamos a calcular el factor de forma para tres casos límites del grupo $U(7)$: el oscilador armónico, el oscilador deformado y el trompo simétrico. Hay que notar que hasta este punto no se va a considerar la reducción de base.

La derivación de los factores de forma, se puede encontrar en varias publicaciones [20]. Así, el factor de forma elástico:

$$\begin{aligned}
 F_{elas.}(q) &= e^{-\frac{q^2\beta^2}{6}} && \text{Oscilador armónico,} \\
 F_{elas.}(q) &= \frac{4J_2(q\beta\sqrt{2})}{q^2\beta^2} && \text{Oscilador deformado,} \\
 F_{elas.}(q) &= j_0(q\beta) && \text{Trompo Simétrico.}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Los tres factores de forma elásticos dan lugar a la misma expresión para el radio del núcleo [20]:

$$\langle r^2 \rangle = -6 \left. \frac{dF_{elas}(q^2)}{dq^2} \right|_{q^2=0} = \beta^2 \tag{4.3}$$

En la figura (4.1) se muestra el factor de forma experimental [19] del ^{12}C y los valores obtenidos con las expresiones (4.2). Como se puede ver, experimentalmente el factor de forma presenta un mínimo, mientras que el factor de forma elástico que se obtiene a partir del oscilador armónico decrece de manera monótona, por lo cual, no presenta un mínimo. Con esto podemos excluir el hamiltoniano de oscilador armónico. Para los otros dos casos el factor de forma elástico no nos proporciona información concluyente que nos permita elegir cual es la mejor opción.

Para poder distinguir mejor las propiedades de cada uno de estos Hamiltonianos y determinar cual es el que mejor modela el núcleo de carbono vamos a comparar el factor de forma inelástico, $0_2^+ \rightarrow 0_1^+$, que se obtiene en cada caso, con el resultado experimental [14]

$$\begin{aligned}
 F_{inel.}(q^2) &= \frac{1}{6\sqrt{3}} q^2 \beta^2 e^{-\frac{q^2\beta^2}{6}} && \text{Oscilador armonico,} \\
 F_{inel.}(q^2) &= 0 && \text{Oscilador deformado,} \\
 F_{inel.}(q^2) &= -\frac{1-R^2}{2R\sqrt{N}} q\beta j_1(q\beta) && \text{Trompo Simétrico,}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

De la figura (4.2) podemos ver que el factor de forma experimental presenta un mínimo relativo alrededor de $q = 4.51/fm^2$, y mientras los factores de forma del oscilador armónico y el oscilador deformado no presentan ningun

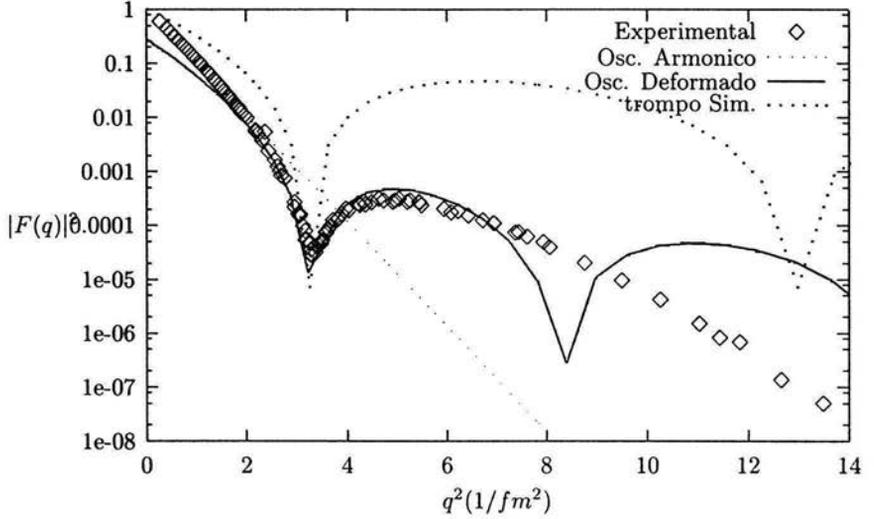


Figura 4.1: Comparación entre el factor de forma elástico experimental y los valores obtenidos con los diferentes hamiltonianos.

mínimo el Hamiltoniano del trompo simétrico presenta un mínimo y es por esto que se escoge este tipo de Hamiltoniano.

Hasta ahora no se han considerado la estructura de los cúmulos. Para tomar en cuenta que los cúmulos no son puntuales se multiplica los factores de forma (4.3) y (4.4) con el factor de forma de la partícula alfa, $e^{-\alpha q^2}$, con lo cual, la expresión para el radio cambia a

$$\langle r^2 \rangle = \beta^2 + 6\alpha \quad (4.5)$$

Así, tenemos dos parámetros, α y β , los cuales podemos fijar a partir de los valores experimentales. Primero, para β utilizamos la definición del factor de forma elástico:

$$\begin{aligned} F(q) &= j_0(q\beta)e^{-\alpha q^2} \\ &= \frac{\text{sen}(q\beta)}{q\beta} e^{-\alpha q^2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ya que el seno es una función periódica y que sabemos que tiene su primer mínimo en π tenemos

$$q_{\min}\beta = \pi$$

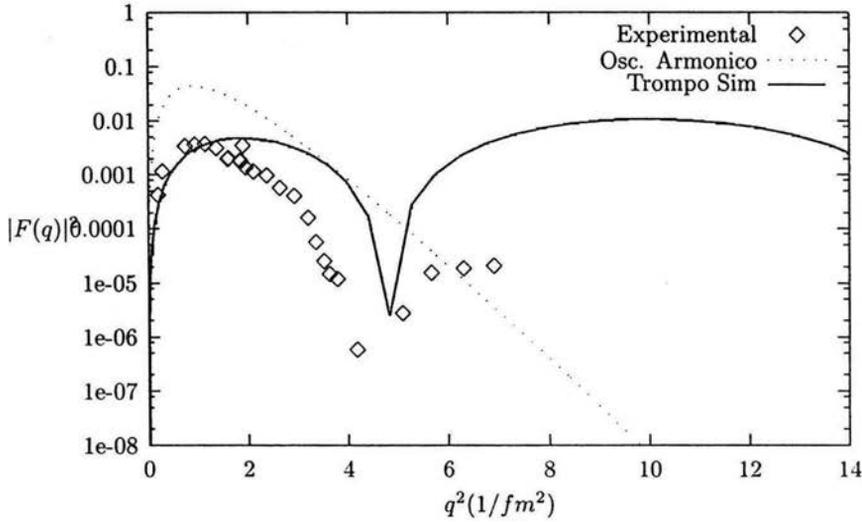


Figura 4.2: Comparación entre el factor de forma inelástico experimental y los valores obtenidos con los diferentes hamiltonianos.

$$\beta = \frac{\pi}{q_{min}} \quad (4.7)$$

Así, al tomar q_{min} como el valor experimental en el mínimo, podemos fijar el valor de β . Por otro lado para determinar el valor de α utilizamos el valor experimental del factor de forma elástico en el segundo máximo y lo igualamos al valor teórico del trompo simétrico.

$$\begin{aligned} |F(q_{max})|_{exp}^2 &= |j_0(q_{max}\beta)|^2 e^{-2\alpha^2 q_{max}^4} \\ e^{-2\alpha^2 q_{max}^4} &= \frac{|F(q_{max})|_{exp}^2}{|j_0(q_{max}\beta)|^2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde q_{max} es el valor de q en el segundo máximo de la función. A partir de esta última expresión podemos obtener un valor para α (de igual forma podemos obtener el valor de α a partir del valor experimental radio y β mediante la ec. (4.5)).

Con esto ya tenemos fijos los valores de los parámetros α y β con lo cual tenemos como parámetros N y R^2 . En el caso general, es decir, tomando en cuenta la proyección de los estados permitidos por el principio de Pauli

y para cualquier Hamiltoniano, se pueden calcular los factores de forma numéricamente, pero de manera exacta.

4.2 Operadores de transición

A continuación se deriva la forma de los operadores de transición. Para esto expandemos la ec. (4.1) en términos de ondas planas, con lo cual, tenemos:

$$\begin{aligned}
 F_{f_i}(\vec{q}) &= \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \langle f|\hat{\rho}(\vec{r})|i \rangle d\vec{r} \\
 &= 4\pi \sum_{L,M} i^L Y_{L,M}^*(\vec{q}) \int j_L(qr) Y_{L,M}(\vec{r}) \langle f|\hat{\rho}(\vec{r})|i \rangle d\vec{r} \\
 &= 4\pi \sum_{L,M} i^L Y_{L,M}^*(\vec{q}) \langle f|\hat{M}_{L,M}(q)|i \rangle
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

Donde $j_L(qr)$ representa la función de Bessel y

$$\langle f|\hat{M}_{L,M}|i \rangle = \int j_L(qr) Y_{L,M}(\vec{r}) \langle f|\hat{\rho}(\vec{r})|i \rangle d\vec{r}, \tag{4.10}$$

con lo cual, llegamos a la siguiente expresión:

$$\sum_{M_i, M_f} |F_{f_i}(\vec{q})|^2 = 4\pi \sum_L | \langle f|\hat{M}_L(q)|i \rangle |^2 \tag{4.11}$$

A partir de la ecuación (4.11) podemos obtener los operadores de transición. Dividiendo entre $2L_i + 1$ y tomando el límite de ondas largas (i.e. $qr \ll 1$) obtenemos

$$B(EL; L_i \rightarrow L_f) = \frac{[(2L+1)!!]^2}{4\pi(2L_i+1)} \lim_{q \rightarrow 0} \sum_{M_i, M_f} \frac{1}{q^{2L}} |F_{f_i}(\vec{q})|^2. \tag{4.12}$$

Ahora necesitamos obtener una expresión para $|F_{f_i}(\vec{q})|^2$. Suponemos que la densidad de carga es puntual sobre los tres cúmulos, i.e. $\hat{\rho}(\vec{r}) = \frac{Ze}{3} \sum_{i=1}^3 \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ con lo cual tenemos

$$\begin{aligned}
 F_{f_i}(\vec{q}) &= \int e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \langle f|\hat{\rho}(\vec{r})|i \rangle d\vec{r} \\
 &= \left\langle \alpha_f, L_f, M_f \left| \frac{Ze}{3} \sum_i e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_i} \right| \alpha_i, L_i, M_i \right\rangle.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Por simetría la suma se reduce a

$$\begin{aligned}
F_{fi}(\vec{q}) &= Ze \langle \alpha_f, L_f, M_f | e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}_3} | \alpha_i, L_i, M_i \rangle \\
&= Ze \langle \alpha_f, L_f, M_f | R(\hat{q}) e^{iq\cdot r_{3z}} R(-\hat{q}) | \alpha_i, L_i, M_i \rangle \\
&= Ze \sum_M \langle \alpha_f, L_f, M_f | R(\hat{q}) | \alpha_f, L_f, M \rangle \\
&\quad \langle \alpha_f, L_f, M | e^{iqr_{3z}} | \alpha_i, L_i, M \rangle \\
&\quad \langle \alpha_i, L_i, M | R(-\hat{q}) | \alpha_i, L_i, M_i \rangle
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Utilizando la definición de las funciones de Wigner tenemos

$$F_{fi}(\vec{q}) = Ze \sum_M D_{M_f, M}^{L_f}(\hat{q}) \langle \alpha_f, L_f, M | e^{iqr_{3z}} | \alpha_i, L_i, M \rangle D_{M_i, M}^{L_i}(-\hat{q}). \tag{4.15}$$

De la ec. anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{M_i, M_f} |F_{fi}(\vec{q})|^2 &= (Ze)^2 \left| \sum_M D_{M_f, M}^{L_f}(q) \langle \alpha_f, L_f, M | e^{iqr_{3z}} | \alpha_i, L_i, M \rangle D_{M_i, M}^{L_i}(-q) \right|^2 \\
&= (Ze)^2 \sum_M \left| \langle \alpha_f, L_f, M | e^{iqr_{3z}} | \alpha_i, L_i, M \rangle \right|^2
\end{aligned} \tag{4.16}$$

tomando $r_{3z} \rightarrow -\beta \hat{D}_{\lambda z} / X_D$, con X_D una constante de normalización, y expandiendo en serie la función exponencial

$$\begin{aligned}
\sum_{M_i, M_f} |F_{fi}(\vec{q})|^2 &= (Ze)^2 \sum_M \left| \langle \alpha_f, L_f, M | e^{-iq\beta \hat{D}_{\lambda z} / X_D} | \alpha_i, L_i, M \rangle \right|^2 \\
&= (Ze)^2 \sum_M \left| \langle \alpha_f, L_f, M | \sum_l \frac{1}{l!} (-iq\beta)^l \left(\frac{\hat{D}_{\lambda z}}{X_D} \right)^l | \alpha_i, L_i, M \rangle \right|^2.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Ahora podemos utilizar la ecuación anterior para obtener las probabilidades de transición de la ec. (4.4), con lo cual

$$\begin{aligned}
B(EL; L_i \rightarrow L_f) &= (Ze)^2 \frac{[(2L+1)!!]^2}{4\pi(2L_i+1)} \frac{1}{L!L!} \beta^{2L} \\
&\quad \sum_M \left| \langle \alpha_f, L_f, M | \left(\frac{\hat{D}_{\lambda z}}{X_D} \right)^L | \alpha_i, L_i, M \rangle \right|^2
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Finalmente llegamos a

$$\begin{aligned}
 B(EL; L_i \rightarrow L_f) &= (Ze)^2 \frac{[(2L+1)!!]^2}{4\pi(2L_i+1)} \frac{1}{L!L!} \left(\frac{\beta}{X_D}\right)^{2L} \\
 &\quad \langle 1010|20 \rangle^2 \langle 2010|30 \rangle^2 \dots \langle L-1, 010|L0 \rangle^2 \\
 &\quad \left| \langle \alpha_f, L_f || [\dots [[\hat{D}_L \hat{D}_L]^{(2)} \hat{D}_L]^{(3)} \dots]^{(L-1)} \hat{D}_L]^{(L)} || \alpha_i, L_i \rangle \right|^2
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

Capítulo 5

Resultados

En los capítulos anteriores se mostró la estructura del modelo algebraico de cúmulos, el Hamiltoniano, los factores de forma, el radio nuclear, las transiciones electromagnéticas los estados base, la derivación de los elementos de matriz y, finalmente, la introducción del principio de Pauli. Ahora, ya tenemos todas las herramientas necesarias para comenzar a obtener resultados.

Así, a continuación presentamos la estructura del espectro de energía que se obtiene a partir del Hamiltoniano del trompo simétrico, discutimos cómo establecer el valor de algunos parámetros a través de los factores de forma y, finalmente, mostramos una comparación entre los resultados obtenidos y los valores experimentales.

5.1 Ajuste de parámetros

En esta sección se muestra de manera cualitativa como se hizo el ajuste de los diferentes parámetros. El hamiltoniano que hemos utilizado, el cual corresponde a un trompo simétrico, es (ec. (2.14)):

$$\hat{H} = \hat{H}_{vib} + \hat{H}_{rot} \quad (5.1)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{H}_{vib} = & \xi_1 \left(R^2 s^\dagger s^\dagger - b_\rho^\dagger \cdot b_\rho^\dagger - b_\lambda^\dagger \cdot b_\lambda^\dagger \right) \left(R^2 \bar{s} \bar{s} - \bar{b}_\rho \cdot \bar{b}_\rho - \bar{b}_\lambda \cdot \bar{b}_\lambda \right) \\ & + \xi_2 \left[\left(b_\rho^\dagger \cdot b_\rho^\dagger - b_\lambda^\dagger \cdot \bar{b}_\lambda^\dagger \right) \left(\bar{b}_\rho \cdot \bar{b}_\rho - \bar{b}_\lambda \cdot \bar{b}_\lambda \right) \right. \\ & \left. + 4 \left(b_\rho^\dagger \cdot b_\lambda^\dagger \right) \left(\bar{b}_\lambda \cdot \bar{b}_\rho \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{rot} &= 2\xi_3 \hat{G}_S^{(1)} \cdot \hat{G}_S^{(1)} + 3\xi_4 \hat{G}_A^{(0)} \cdot \hat{G}_A^{(0)} \\
&= \xi_3 \hat{L} \cdot \hat{L} + \xi_4 \hat{K} \cdot \hat{K},
\end{aligned} \tag{5.2}$$

la definición de los operadores se presentó en la ec (2.10). Este Hamiltoniano contiene contribuciones correspondientes a vibraciones y rotaciones mientras que se ha dejado de lado el término mixto, $H_{vib-rot}$, y el término H_0 de la ec. (2.15). El trompo simétrico no corresponde a una simetría dinámica del Hamiltoniano (2.12), y es por esto que el espectro del trompo simétrico ec. (5.1) se obtiene diagonalizandolo numéricamente en una base apropiada. Sin embargo, es posible obtener una fórmula aproximada para la energía que nos permite tener una visión cualitativa del espectro.

Para obtener esta formula primero consideramos el término H_{vib} , en el caso de N muy grande las energías vibracionales están dadas por [22]:

$$E_{vib} = \epsilon_1 v_1 + \epsilon_2 v_2 \tag{5.3}$$

donde

$$\begin{aligned}
\epsilon_1 &= 4N\xi_1 R^2 \\
\epsilon_2 &= \frac{4N\xi_2 R^2}{1 + R^2}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Aquí, v_1 denota el número de cuantos para el modo de vibración v_1 con simetría S y v_2 el número total de cuantos en los modos v_{2a} y v_{2b} los cuales forman un estado doblemente degenerado con simetría mixta M (ver figura (5.1)). Así podemos clasificar los estados vibracionales a partir de (v_1, v_2^l) donde $l = v_2, v_2 - 2, \dots, 1$ o 0 .

Por otro lado para H_{rot} el espectro de energía esta dado por[21]:

$$E_{rot} = \xi_3 L(L + 1) + \xi_4 (K \mp 2l)^2 \tag{5.5}$$

donde L es el momento angular y K su proyeccion sobre el eje de simetría (ec (3.11)). El último término contiene en parte la fuerza de Coriolis a través de la contribución $\mp 4Kl\xi_4$.

Con estas fórmulas aproximadas tenemos que el espectro de energía para el trompo simétrico tiene la siguiente estructura:

$$E = \epsilon_1 v_1 + \epsilon_2 v_2 + \xi_3 L(L + 1) + \xi_4 (K \mp 2l)^2 \tag{5.6}$$

Así, el espectro de energía (ver figura (5.2)) muestra que sobre cada vibración existe una banda rotacional y la degeneración de estados con K iguales se elimina mediate el último término de la ec. (5.5).

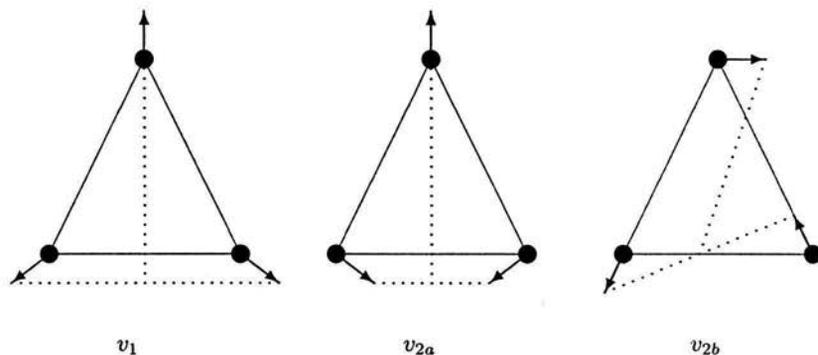


Figura 5.1: Representación esquemática de los modos normales de vibración para tres cuerpos idénticos.

La ec. (5.4) nos muestra que no es posible determinar los coeficientes N , R^2 , ξ_1 y ξ_2 a partir de las frecuencias ϵ_1 y ϵ_2 y, de igual manera, no tenemos una forma cualitativa que nos permita fijar los valores de ξ_3 y ξ_4 . Es por esto, que en la práctica lo que hacemos es ajustar los parámetros ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 y ξ_4 del Hamiltoniano de tal manera que el espectro que se obtenga coincida con el espectro experimental.

El proceso de ajuste para los parámetros ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 y ξ_4 comienza haciendo una suposición sobre los posibles valores de los parámetros, después se determinan los eigenvalores y eigenvectores. Estos eigenvalores que se obtienen a partir de estos parámetros generalmente difieren bastante de los valores experimentales y para obtener un mejor conjunto de parámetros se hace un ajuste de mínimos cuadrados sobre los eigenvalores. Una vez que se determinó este nuevo conjunto de parámetros se vuelven a calcular los eigenvalores y eigenvectores, los resultados se pueden mejorar repitiendo el proceso hasta obtener una diferencia mínima con los resultados experimentales. En la figura (5.3) se presenta en esquema del proceso.

En las dos siguientes tablas, se muestran algunos de los valores que se obtienen para ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 y ξ_4 para diferentes valores de N , con R^2 fija, y viceversa.

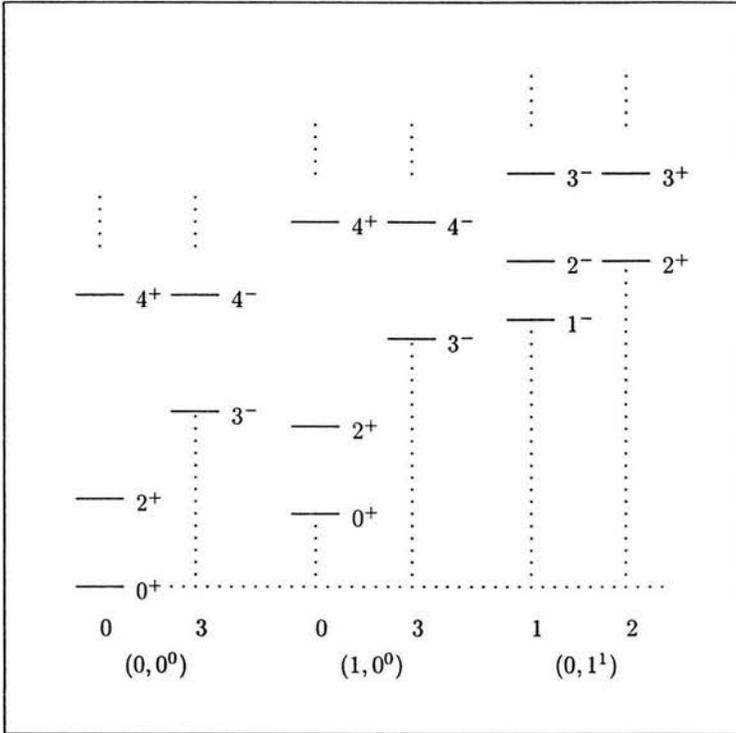


Figura 5.2: Espectro de energía para un sistema de tres cuerpos idénticos. Donde (v_1, v_2^l) representan modos de vibración y l^P representan el momento angular y la paridad.

N	R^2	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
10	1.0	0.2533	0.4757	1.4866	-0.9651
12	1.0	0.1517	0.3280	1.1795	-0.5045
14	1.0	0.1168	0.2568	1.0338	-0.2928
16	1.0	0.0975	0.2123	0.9431	-0.1617
18	1.0	0.0850	0.1824	0.8816	-0.0754
20	1.0	0.0762	0.1614	0.8380	-0.0161

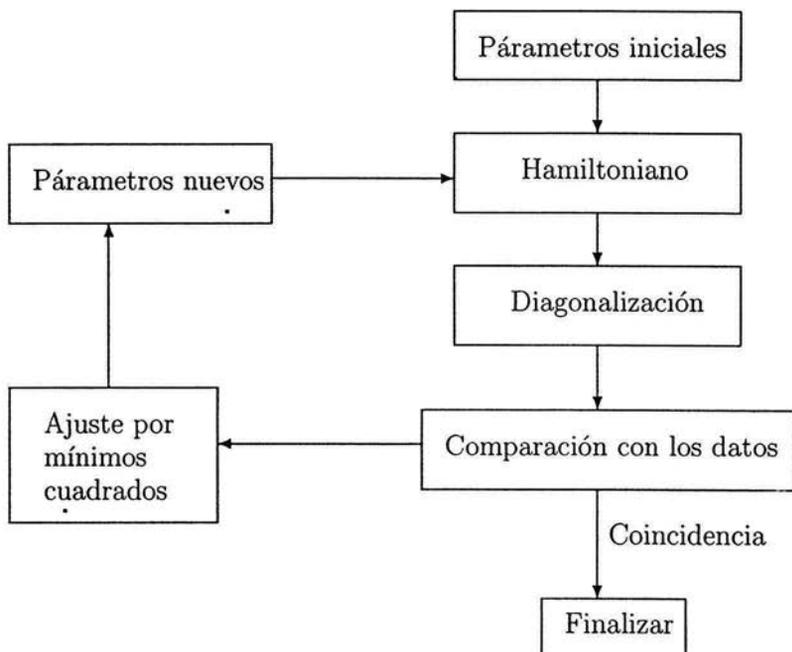


Figura 5.3: Esquema que muestra los pasos que se siguen para realizar el ajuste de los parámetros del hamiltoniano

N	R^2	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4
12	0.6	0.1971	0.3969	1.3285	-0.6983
12	0.8	0.1766	0.3637	1.2555	-0.6080
12	1.0	0.1517	0.3280	1.1795	-0.5045

Ahora falta determinar el valor de R^2 , para esto recurrimos al factor de forma inelástico para la transición $0_1^+ \rightarrow 0_2^+$, ya que , este es muy sensible a cambios en el valor de R^2 especialmente con respecto a la posición del mínimo (ver figura 5.4). Así, el valor de R^2 se fija ajustando el factor de forma inelástico de tal manera que el mínimo coincida con el mínimo

experimental $q^2 \sim 4.5(1/fm^2)$.

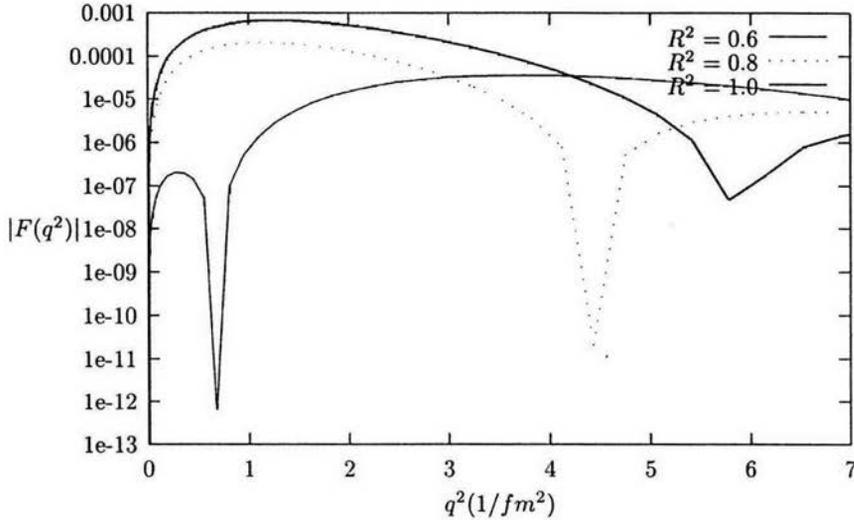


Figura 5.4: Factor de forma inelástico, $0_1^+ \rightarrow 0_2^+$, calculado para diferentes valores de R^2 .

Finalmente determinamos los valores de los parámetros α , β , sin embargo, debido a que estos dos parámetros tienen la misma dependencia en q^2 , no es posible determinarlos de manera independiente. Para fijar su valor recurrimos al factor de forma elástico y al radio nuclear

El factor de forma elástico es sensible a cambios en el valor de β (ver figura (5.5)), es por esto que a través del primer mínimo del factor de forma elástico ($q^2 \sim 3.2(1/fm^2)$) podemos fijar el valor de β .

Una vez que fijamos el valor de β , mediante la ec. (4.5) y el valor experimental del radio nuclear $\langle r^2 \rangle^{1/2} = 2.468 \pm 0.012$ Fm, podemos determinar el valor de α . Con esto hemos fijado todos los parámetros que utilizamos.

5.2 El núcleo ^{12}C

Una vez que se ha determinado el valor de todos los parámetros podemos comparar los resultados que se obtienen con los resultados experimentales.

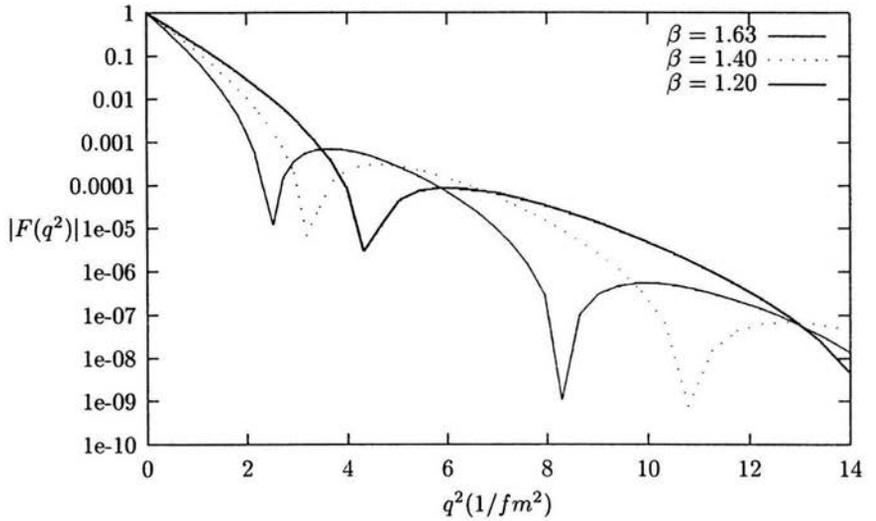


Figura 5.5: Factor de forma elástico para diferentes valores de β .

Los resultados que se obtienen no varían significativamente para diferentes combinaciones de N y R^2 , por lo cual, solo se presentan los resultados para uno de los ajustes. Los valores de los parámetros del Hamiltoniano y de los operadores de transición que se utilizaron para todos los cálculos que se presentan son:

Parámetro	Valor
ξ_1	0.1766 MeV
ξ_2	0.3637 MeV
ξ_3	1.2555 MeV
ξ_2	-0.6080 MeV
N	12
R^2	0.80
β	1.33 fm
α	0.40 fm^{-2}

En la siguiente tabla se comparan los valores de energía experimental y teórica

Nivel	E_{exp}	E_{teo}	dev
0_2^+	7.65	7.65	0.00
1_1^-	10.84	10.84	-0.00
2_1^+	4.23	4.23	0.00
3_1^-	9.63	9.63	0.00
4_1^+	14.08	14.13	-0.06

y en la figura (5.6) se muestra una comparación gráfica entre el espectro teórico, considerando el principio de Pauli, y el espectro experimental.

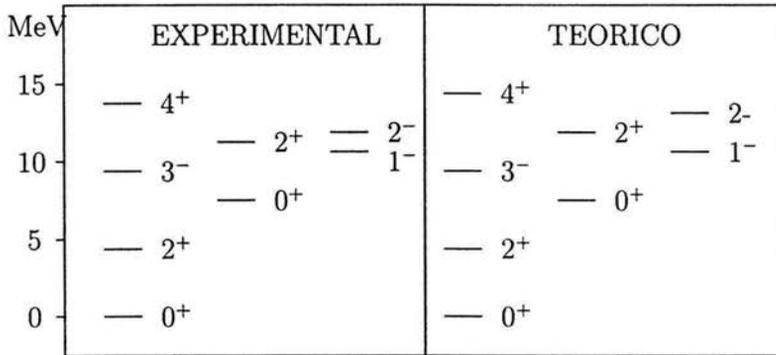


Figura 5.6: Comparación entre el espectro experimental y los resultados obtenidos usando el hamiltoniano (5.1) con $N = 12$, $R^2 = 0.8$, $\xi_1 = 0.1766$, $\xi_2 = 0.3637$, $\xi_3 = 1.2555$ y $\xi_4 = -0.6080$

Para los factores de forma los resultados se presentan en las gráficas 5.7 a 5.12. En estos casos se compara el valor experimental con los valores teóricos que se obtienen cuando se considera el principio de Pauli y los resultados que se obtienen al no considerar el principio de Pauli[23].

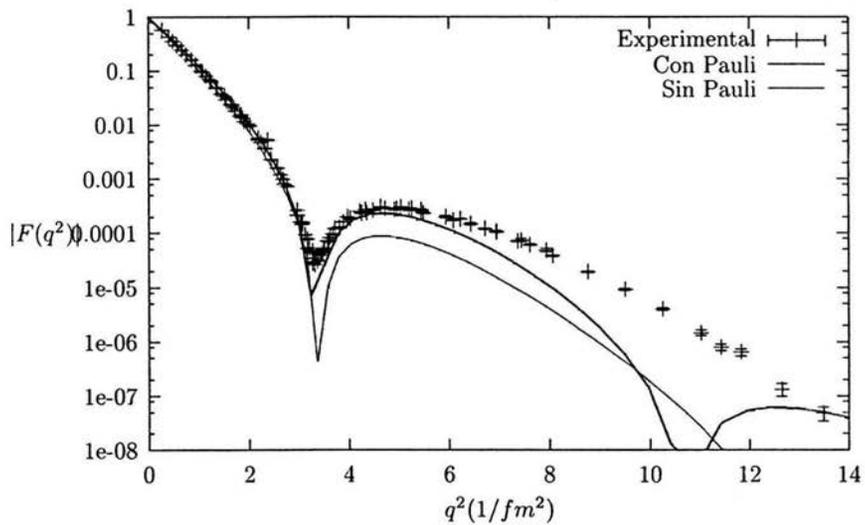


Figura 5.7: Factor de forma elástico, experimental y teórico, tomando en cuenta el principio de Pauli, y sin considerar el principio de Pauli [23]

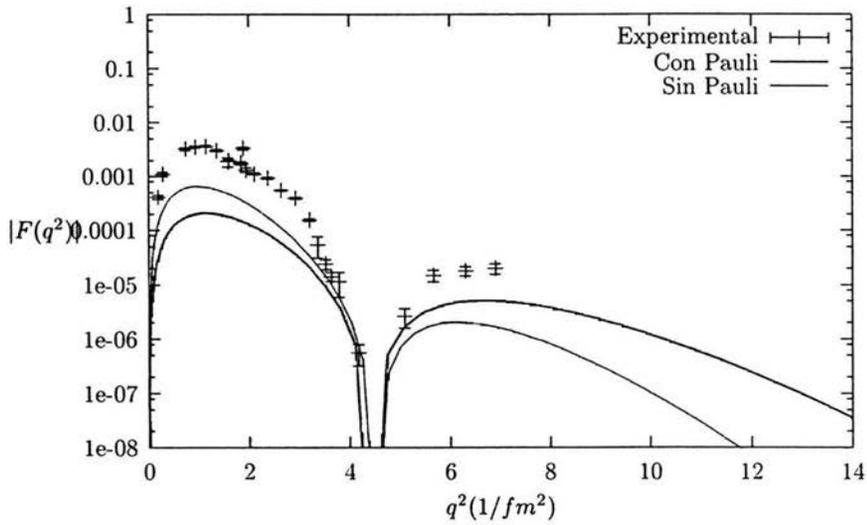


Figura 5.8: Comparación del factor de forma inelástico, $0_1^+ \rightarrow 0_2^+$, experimental y teórico, tomando en cuenta el principio de Pauli, y sin considerar el principio de Pauli

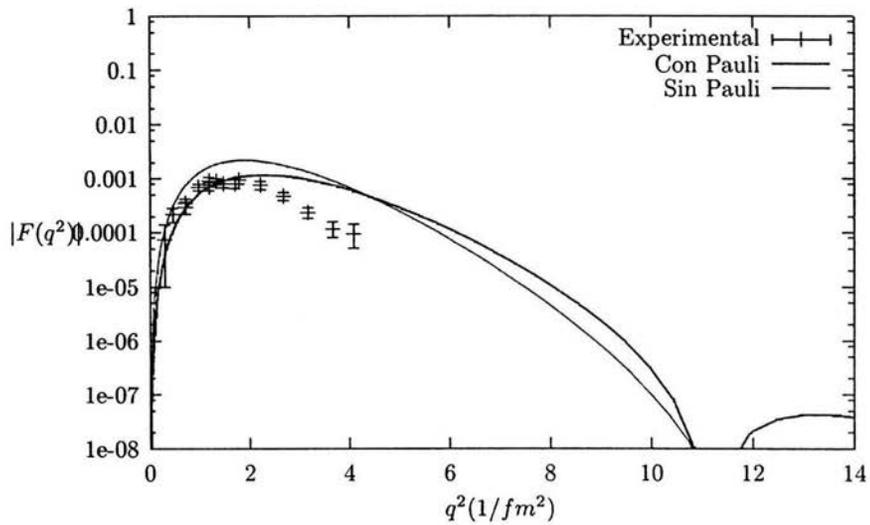


Figura 5.9: Comparación del factor de forma inelástico, $0_1^+ \rightarrow 1_1^-$, experimental y teórico, tomando en cuenta el principio de Pauli, y sin considerar el principio de Pauli

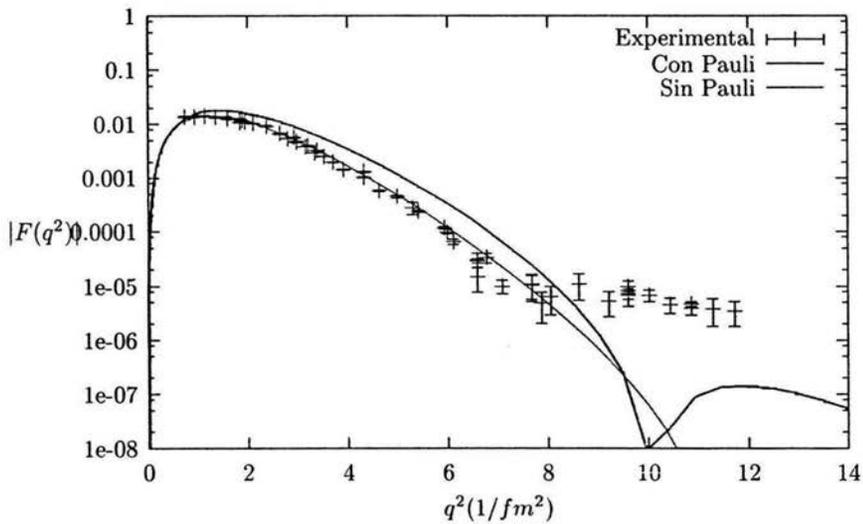


Figura 5.10: Comparación del factor de forma inelástico, $0_1^+ \rightarrow 2_1^+$, experimental y teórico, tomando en cuenta el principio de Pauli, y sin considerar el principio de Pauli

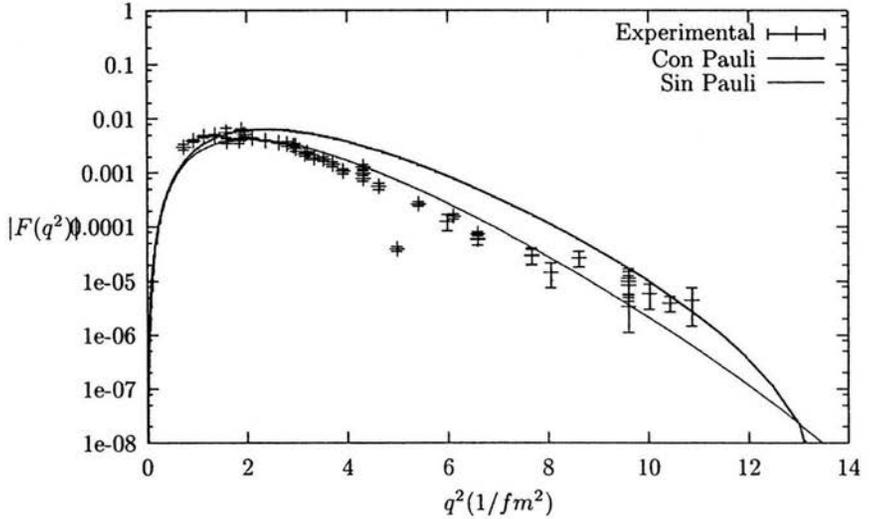


Figura 5.11: Comparación del factor de forma inelástico, $0_1^+ \rightarrow 3_1^-$, experimental y teórico, con $R^2 = 0.8$, $\alpha = 0.4$ y $\beta = 1.33$.

A partir de las figuras 5.7 a 5.12 podemos ver que los resultados donde se considera el principio de Pauli y los cálculos donde no se considera, no presentan diferencias significativas (aunque es importante destacar que el Principio de Pauli debe de tomarse en cuenta siempre, ya que es un principio básico, que rige la física a nivel cuántico). Sin embargo, hay dos puntos que es importante mencionar. Primero, para el factor de forma elástico (figura 5.7) los cálculos que consideran el principio de Pauli presentan un segundo mínimo alrededor de $q^2 \sim 10(1/fm^2)$ para lo cual no hay evidencia experimental, los cálculos que no consideran el principio de Pauli no muestran un segundo mínimo para $q^2 < 14$; en segundo lugar los cálculos que consideran el principio de Pauli para el factor de forma inelástico $0_1^+ \rightarrow 2_1^+$ (figura 5.10) presentan un mínimo alrededor de $q^2 \sim 10(1/fm^2)$ y los datos experimentales muestran evidencia de un mínimo alrededor de $q^2 \sim 8.5(1/fm^2)$, por otro lado los cálculos que no consideran el principio de Pauli no dan un mínimo para $q^2 < 14$.

Finalmente mostramos los resultados obtenidos para las probabilidades de transición, en este caso solo presentamos los resultados que se obtienen tomando en cuenta el Principio de Pauli.

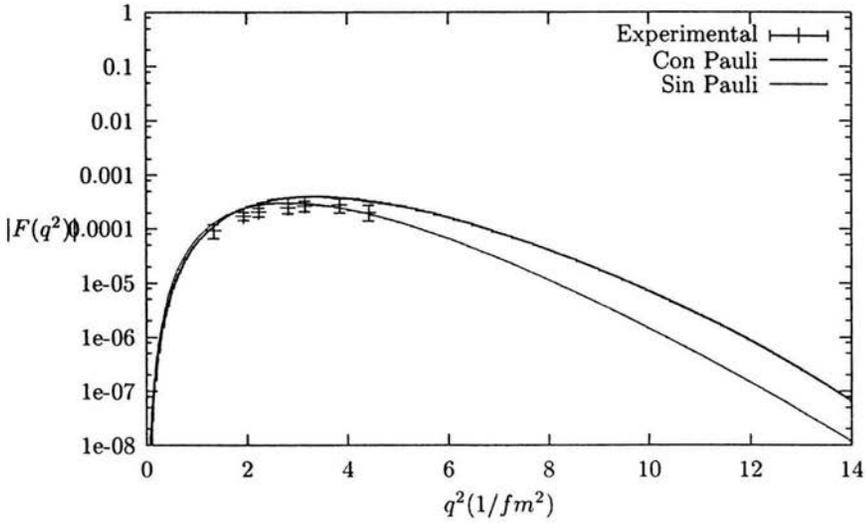


Figura 5.12: Comparación del factor de forma inelástico, $0_1^+ \rightarrow 4_1^+$, experimental y teórico, con $R^2 = 0.8$, $\alpha = 0.4$ y $\beta = 1.33$.

	Teo.	Exp.
$B(E2, 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$	7.9	7.6 ± 0.4
$B(E3, 3_1^- \rightarrow 0_1^+)$	43	103 ± 17
$B(E4, 4_1^+ \rightarrow 0_1^+)$	46	
$B(E2, 0_2^+ \rightarrow 2_1^+)$	0.65	13.1 ± 1.8
$M(E0, 0_2^+ \rightarrow 0_1^+)$	0.20	5.5 ± 0.2
$\langle r^2 \rangle^{1/2}$	2.402	2.468 ± 0.12

Para el monopolo en vez de dar el valor de $B(E0)$, se presenta el elemento de matriz $M(E0)$ Los valores de las probabilidades de transición corresponden al límite de ondas largas de los factores de forma, ec. (4.19). Como podemos ver en la tabla anterior los valores de $B(E2, 2_1^+ \rightarrow 0_1^+)$, $B(E3, 3_1^- \rightarrow 0_1^+)$ y el radio nuclear son del mismo orden que los valores experimentales, pero, otro lado, los valores de $B(E2, 0_2^+ \rightarrow 2_1^+)$ y $M(E0, 0_2^+ \rightarrow 0_1^+)$ difieren en

un orden de magnitud de los valores experimentales, esto puede indicar que la naturaleza del estado 0_2^+ no proviene completamente de un modo de vibración. Además, es importante mencionar que los resultados que se presentan se obtuvieron al ajustar los parámetros para el factor de forma, es por esto, que los resultados para las probabilidades de transición no sean tan apegadas a los datos experimentales.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se hizo un estudio del núcleo ^{12}C suponiendo que éste está compuesto de tres partículas alfa que se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero. En el análisis teórico se utilizó un modelo algebraico de cúmulos (ACM por sus siglas en inglés). En particular se incorporó el principio de Pauli para las partículas α en el modelo ACM. Este método ya había sido utilizado para estudiar el núcleo ^{12}C suponiendo una estructura de 3 cúmulos α [14], sin embargo, no se consideró el principio de Pauli. La principal motivación de este trabajo fue determinar como afecta en los resultados el incluir en los cálculos el principio de Pauli.

El método ACM es muy general y se basa en la cuantización bosónica para un sistema de varios cuerpos [18], así, un problema que tiene ν grados de libertad se cuantiza en términos de los elementos del álgebra de Lie $U(\nu + 1)$. Este método ha sido usado para estudiar una gran variedad de problemas que van desde la física nuclear hasta la física de polímeros. Las razones principales por las cuales se utilizó este método son dos. Primero, este enfoque nos permite modelar de manera relativamente sencilla lo que ocurre dentro del núcleo atómico, donde la estructura de cúmulos no es una estructura rígida, como la que se presenta en las moléculas, sino una estructura más *suave*. Segundo, podemos obtener una serie de fórmulas analíticas para calcular las energías de excitación, las probabilidades de transición y los factores de forma.

El estudio del núcleo ^{12}C se hizo mediante tres características básicas que son las energías de excitación, los factores de forma y las probabilidades de transición para los estados 0_1^+ , 2_1^+ , 3_1^- , 4_1^+ , 0_2^+ y 1_1^- . A partir de la comparación de los resultados que se obtuvieron en este trabajo con los datos experimentales podemos decir que una configuración triangular de tres partículas alfa describe de manera razonable los niveles de energía,

los factores de forma y las probabilidades de transición para la banda rotacional 0_1^+ , 2_1^+ , 3_1^- , 4_1^+ , aunque con grandes interacciones vibración-rotación. Los resultados para los estados vibracionales 0_2^+ y 1_1^- son diferentes, ya que, la estructura de los factores de forma está de acuerdo con los datos experimentales, pero no así su magnitud, de igual manera las probabilidades de transición difieren en un orden de magnitud con respecto a los valores experimentales. Además, podemos decir que tomar o no en cuenta el principio de Pauli, no afecta de manera significativa los resultados que se obtienen, aunque siempre es importante destacar que el Principio de Pauli debe de cumplirse para cualquier sistema de fermiones.

Con esto, podemos concluir que para cálculos posteriores es necesario incluir los acoplamientos rotación-vibración para así poder modelar de mejor manera las características de los estados vibracionales 0_2^+ y 1_1^- .

Referencias

- [1] E.E. Salpeter, *Phys. Rev.*, **88**, 326 (1952).
- [2] F. Hoyle, D.N.F. Dumbbar, W.A. Wenzel y W. Waling, *Phys. Rev.*, **92**, 1095 (1953).
- [3] Y. Fujiwara, H. Horiuchi, K. Ikeda, M. Kamimura, *Prog. Theo. Phys. Suppl.*, **68**, 29 (1980).
- [4] H. Horiuchi, Y. Suzuki, *Prog. Theo. Phys.*, **49**, 1974 (1973).
- [5] H. Horiuchi, K. Ikeda y Y. Suzuki, *Prog. Theo. Phys. Suppl.*, **52**, 173 (1972).
- [6] D. Robson, *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 876 (1979).
- [7] D.M. Brink, H. Friedrich, A. Weiguny *Phys. Lett.*, **33B**, 147 (1970).
- [8] W.D.M. Rae, A.C. Merchant *Phys. Lett.*, **A8**, 2435 (1993).
- [9] J. Zhang, W.D.M. Rae *Nucl. Phys.*, **A564**, 252 (1993).
- [10] A.C. Merchant, W.D.M. Rae *Nucl. Phys.*, **A549**, 431 (1992).
- [11] A.H. Wuosmaa, R.R. Betts, B.B. Back, et. al., *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 1295 (1992).
- [12] K. Ikeda, N. Takigawa y H. Horiuchi, *Prog. Theo. Phys. Suppl. Extra Number*, 464 (1968).
- [13] G.S. Anagnostators *Phys. Rev.*, **C51**, 152 (1995).
- [14] R. Bijker, F. Iachello *Phys. Rev. C*, **61**, 540 (2000).
- [15] K. Wildermuth, W. McClure *Cluster Representations of Nuclei* Springer-Verlag, New York 1966.

- [16] F. Iachello *Nucl. Phys.*, **A560**, 23 (1993).
- [17] F. Iachello *Phys. Rev. C* , **23**, 2778 (1981).
- [18] F. Iachello *Lie Algebras, Cohomologies and new applications of quantum mechanics.* , Contemporary Mathematics, AMS, Vol 160, p 151 1994.
- [19] R. Bijker, F. Iachello y A. Leviatan *Ann. Phys.*, **236**, 69 (1994).
- [20] R. Bijker y A. Leviatan *Rev. Mex. Fis. Suppl 2*, **44**, 15 (1998).
- [21] R. Bijker, A.E.L. Dieperink and A. Leviatan, *Phys. Rev. A* **52** (1995), 2786.
- [22] R. Bijker y A. Leviatan *Nucl. Phys.*, **A631**, 727 (1998).
- [23] R. Bijker, F. Iachello, *Ann. Phys.* **298** (2002), 334.
- [24] H. Horiuchi *Prog. Theo, Phys.*, **53**, 447 (1975).
- [25] Elliott, J.P., *Roy. Soc. London A* **245**, 128, 562 (1958).
- [26] M. Moshinsky, *The harmonic Oscillator in Modern Physics: From atoms to Quarks* Gordon and Breach, New York 1969.
- [27] S. Saito, *Prog. Theo, Phys.*, **51**, 705 (1969).
- [28] R. Tamagaki, *Prog. Theo, Phys. Suppl. Extra Number*, 242, (1968).
- [29] A. Frank, P van Isacker, *Algebraic methods in molecular and nuclear physics* (Gordon and Breach) 19.
- [30] Smirnov, Yu.F., et. al. *Nucl. Phys A* **235**, 128, 289 (1974).
- [31] Arima, A., Horiuchi, H