UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

NUMEROSIDADES: UNA NUEVA MANERA DE CONTAR CONJUNTOS INFINITOS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

VÍCTOR MANUEL FERNANDO TORRES PÉREZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ ALFREDO AMOR MONTAÑO

2004

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: VÍCTOR MANUEL FERNANDO TORRES PÉREZ
FECHA: 27/VIII/2004
FIRMA: Víctor Torres

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: "Numerosidades: Una nueva manera de contar conjuntos infinitos."

realizado por Víctor Manuel Fernando Torres Pérez

con número de cuenta 400008376, quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Dr. José Alfredo Amor Montaño

Propietario Dra. Gabriela Campero Arena — Gabriela Campero A.

Propietario Dr. Ángel Tamariz Mascarúa

Suplente Mat. Ana Álvarez Velasco

Suplente Mat. Miguel Ángel Mota Gaytán

Consejo Departamental de
Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMÁTICAS

A mi padre y a Christian ...

Índice

1 Conjuntos etiquetados y sus numerosidades **6**
1.1 Conjuntos etiquetados 6
1.2 Operaciones de conjuntos etiquetados y numerosidades 7
1.3 Numerosidades 8
1.4 Isomorfismos de conjuntos etiquetados 11
1.5 Semianillos positivos 14

2 Ultrafiltros **20**
2.1 Definiciones Básicas 20
2.2 Ultrafiltros sobre ω 22
2.3 Combinatoria Infinita 28

3 Sobre la existencia de una función de numerosidad **32**
3.1 Numerosidades y funciones no decrecientes 32
3.2 Conjuntos calificados 34
3.3 ¿Existe una función de numerosidad? 41

4 Más propiedades de las numerosidades **50**
4.1 Numerosidades enteras y racionales 50
4.2 De las numerosidadades al análisis no estándar 52

Agradecimientos

¡Híjole!, son tantos a quiénes agradecer. El haber llegado hasta aquí es producto de que toda esa gente ha estado a mi lado y me ayudado de alguna u otra forma. Sin ellos simplemente me habría resultado imposible. Mencionaré sólo a algunos.

Mi familia:
Mi madre, quien ha estado al pie del cañón todos estos años.
Mi hermana María Luisa, quien me ha hecho sentir su apoyo.
Paty, quien ha sido mi Mecenas, pero también un apoyo moral imprescindible, pues siempre ha estado dispuesta a escuchar y darme muy buenos consejos.
Roberto, quien me ha tenido fe y con quien tengo varias deudas morales.
Armando, quien me ha mostrado en no pocas ocasiones su afecto.
Verónica, por ser tan buena y comprensiva hermana.

A mis profesores que han sido mi columna vertebral a lo largo de mi formación matemática:
Loreto Cruz, quien me inició en los laberintos de las demostraciones, y me impulsó a iniciar mis estudios en la carrera de Matemáticas a pesar de las adversidades;
Luis Briseño, por ser nuestro padre adoptivo de una buena cantidad de estudiantes al inicio de la carrera;
y por supuesto, a José Alfredo, por su infinita paciencia, tiempo y dedicación a lo largo de estos años en los que fue mi profesor de teoría de conjuntos y ahora mi director de tesis.

A mis sinodales Ana, Gaby, Miguel Ángel y Ángel por sus valiosos comentarios a la redacción de la tesis, de la cual me responsabilizo totalmente de todos los errores.

A mis amigos, que no puedo a mencionarlos a todos porque son muchísimos:
A mis amigos de la carrera de física: Cristina, Lucía, Marusia, Citlali, Igmar, Mabel, Edgar, Selene, etc.
A mis amigos de la preparatoria: Dyane, Xóchitl, Mariano, Fernando, Jesslie, Mónica, Liliana, Evelyn, Katia, Nachgieli, Sandra, Griselle, Omar, Juan Pablo, Paola, Gaby, etc.

A mis cuates compañeros de la carrera: Silvia, Maggie, Kenya, Claudio, Daniela, Abraham, Belén, Caín, Elena, Elizabeth, Sergio, Julia, Álvaro, Betsabé, Adriana, Rosalba, etc.

A los diablos de Abraham y Carlos por esos fines de semana de vida bohemia donde me ayudaron a recordar que el mundo tiene algo más que matemáticas.

A Acenet, por su cariño e invaluable compañía en estos últimos meses.

A Alma, porque su amistad y apoyo han sido fundamentales en los años que llevamos de conocernos.

A Adriana, por ser mi amiga y mi Pepe Grillo.

A todos, muchísimas gracias.

Víctor Torres, Agosto de 2004

"Die Ganzen Zahlen hat Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk (Dios creó a los números enteros, lo demás es obra del hombre)."

Leopold Kronecker

"Por lo demás, el problema central es irresoluble: La enumeración, si quiera parcial, de un conjunto infinito. "

En "El Aleph" de Jorge Luis Borges

Introducción

Incluso antes de poder contar, el ser humano es capaz de comparar cantidades, de pensar "aquí hay más", "aquí hay menos". Ikram Antaki le llama a esta idea que nos permite comparar cantidades "numerosidad", y aparece alrededor de los 6 o 7 meses de vida ([3], página 153).

Esta tesis está basada en un artículo de Vieri Benci y Mauro Di Nasso realizado en el 2003 ([4]) , donde se introduce otro concepto de numerosidad, que tiene en común con el concepto arriba mencionado la capacidad de comparar conjuntos "etiquetados". Un conjunto etiquetado es un conjunto numerable con una función etiquetadora, que es una función del conjunto a los naturales, con la condición que sea finita a uno, esto es, por cada natural, a lo más se le relacione un número finito de elementos del conjunto. Se puede pensar una función etiquetadora como la asignación de un número de "botella" a elementos de un conjunto numerable, con la condición de que en cada botella haya un número finito de elementos del conjunto.

A diferencia de los conjuntos finitos, los conjutos infinitos contienen subconjuntos propios de su misma cardinalidad. Se definirá en este trabajo una función de conteo llamada "numerosidad", donde cualquier subconjunto propio tiene estrictamente una numerosidad menor que el conjunto original. En particular, los enteros tienen el doble de numerosidad menos uno que los naturales. Se verá la posibilidad de construir este tipo de funciones, y su relación con el análisis no estándar.

Esta tesis consta de cuatro capítulos. El primer capítulo se dedica a las definiciones básicas, como son las numerosidades de los conjuntos etiquetados y los isomomorfismos de éstos. En el segundo capítulo se tratan los conceptos básicos de ultrafiltros sobre los naturales. El resultado estrella de este capítulo es la relación de los ultrafiltros de Ramsey con el teorema de Ramsey en combinatoria infinita. En el tercer capítulo se encuentra el resultado principal de la tesis. Aquí estamos interesados en mostrar si realmente existe una función de numerosidad, al menos como aquí la definimos, dentro del marco conceptual tradicional de las matemáticas, i.e., de los axiomas de ZFE. La última parte se refiere a algunas consecuencias de la existencia de una función de numerosidad, que principalmente consiste en una aproximación distinta al análisis no estándar. De hecho, parte de la construcción de esta función de numerosidad fue motivada como una interpretación distinta de los naturales no estándar, o hipernaturales. Para ver esta motivación, recomendamos leer [9].

Las aportaciones de esta tesis son, primeramente como en muchas otras, dejar más claro donde dice: "es claro que..." y "es fácil ver que..." en el artículo original pues muchas veces no resultó que fueran tan fáciles. Por ejemplo, se hicieron las demostraciones ausentes de las proposiciones 1.16, 1.22 y del teorema 3.3. Aunque ahí también se hace referencia al libro de Jech [10], muchas de estas demostraciones no están hechas a detalle, están incompletas o incluso no están hechas como en los casos del lema 2.14 y la proposición 2.20. También se corrigieron errores, como el de la proposición 3.8, donde la demostración estaba incorrecta, y se ajustó en esta tesis. En la parte del análisis no estándar, en el artículo original se asume que los elementos del conjunto base pueden ser considerados átomos, sin decir en qué sentido se puede dar esta suposición. Nosotros logramos justificarlo, usando los ejercicios 4.4.1 y 4.4.2 (página 287) del libro de teoría de modelos de Chang ([6]). Aquí aparecen sólo como ejercicios, nosotros los hicimos con detalle.

Uno de los objetivos principales de esta tesis es que, cualquier persona interesada en el tema, pueda adentrarse en él, sin tener que pasar por todo lo que el autor pasó, y tenga los resultados accesibles y a la mano. Está pensada para un nivel medio de licenciatura con conocimientos básicos de teoría de conjuntos y un poco de álgebra. Hasta donde fue posible, la tesis es autocontenida, y en las partes ausentes, damos las referencias bibliográficas.

Capítulo 1

Conjuntos etiquetados y sus numerosidades

1.1 Conjuntos etiquetados

Definición 1.1 *Un conjunto etiquetado es una pareja* $\mathbf{A} = \langle A, l_A \rangle$ *donde el dominio* A *es un conjunto contable y la función etiquetadora* $l_A : A \longrightarrow \omega$ *es finita-a-uno, es decir,* $l_A^{-1}(n)$ *es finito para toda* $n \in \omega$*. Llamemos* E *a la clase de los conjuntos etiquetados.*

Sea

$$A_n = \{a \in A : l_A(a) \leq n\}$$

Observación 1.2 *Notemos que*

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \cdots$$

y

$$A = \bigcup_{n\in\omega} A_n.$$

Observación 1.3 *También observemos que* A *es unión de conjuntos ajenos, ya que, haciendo* $A_{-1} = \emptyset$*, tenemos que*

$$n \neq m \Rightarrow (A_n - A_{n-1}) \cap (A_m - A_{m-1}) = \emptyset$$

y

$$A = \bigcup_{n\in\omega} (A_n - A_{n-1}).$$

Observación 1.4 *En particular* $A_n - A_{n-1}$ *es el conjunto de elementos de* A *que tienen la misma etiqueta* n*, esto es,*

$$A_n - A_{n-1} = \{a \in A : l_A(a) = n\}.$$

Definición 1.5 *Sea $\gamma_A : \omega \longrightarrow \omega$ tal que $\gamma_A(n) = |A_n|$. Llamamos a γ_A la sucesión aproximante a la numerosidad de* $\mathbf{A}$.

Para $A \subseteq \omega$, la etiquetación canónica $l : A \longrightarrow \omega$ está dada por $l(n) = n$ para toda $n \in A$, al igual que a los enteros se les asigna una etiquetación casi canónica, con el valor absoluto. Se denota por $\mathbf{0}$ al conjunto vacío etiquetado con la función vacía, y para todo número natural n, denotamos $\mathbf{n} = \langle n, l_n \rangle$ donde l_n es la etiquetación canónica. Éstos son los conjuntos finitos etiquetados canónicos.

Observación 1.6 *El conjunto vacío se etiqueta de manera única, puesto que cualquier función $f : \emptyset \longrightarrow M$ que tenga como dominio al vacío, es la función vacía ($f \subseteq \emptyset \times M = \emptyset$, y por lo tanto $f = \emptyset$).*

Decimos que $\mathbf{A} = \langle A, l_A \rangle$ es un subconjunto etiquetado de $\mathbf{B} = \langle B, l_B \rangle$, y se escribe $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, si $A \subseteq B$ y $l_A(a) = l_B(a)$ para toda $a \in A$. Similarmente para la inclusión estricta $\mathbf{A} \subsetneq \mathbf{B}$. Denotamos por $\mathbf{B}-\mathbf{A}$ al subconjunto de B cuyo dominio es $B - A$ etiquetado con $l_B|_{B-A}$.

Observación 1.7 *Por vacuidad,* $\mathbf{0} \subseteq \mathbf{A}$ *para todo conjunto etiquetado* $\mathbf{A}$.

La etiquetación de un conjunto tiene que ver con la manera en que vamos contando sus elementos. Es como ponerlos en botellas, y a cada botella ponerle una etiqueta con algún número natural. Por ejemplo, si colocamos a los enteros en botellas, en la botella 0 estaría el 0; en la botella 1, el 1 y el -1; y así sucesivamente. Entonces la función γ sería en realidad "la cuenta" de cuántos llevamos hasta la botella n-ésima.

1.2 Operaciones de conjuntos etiquetados y numerosidades

Por lo regular, queremos definir operaciones para el tipo de objetos con los que estamos trabajando. Con este motivo, tenemos lo siguiente:

Definición 1.8 *La suma de dos conjuntos etiquetados es*

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \langle A \uplus B, l_{A \uplus B} \rangle,$$

donde $A \uplus B$ es la unión disjunto de A y B; i.e.

$$A \uplus B = A \times \{0\} \cup B \times \{1\}.$$

Para abreviar, a $(x,i) \in A \uplus B$ *lo denotamos* x_i, *y definimos*

$$(l_{A\uplus B})(x_i) = \begin{cases} l_A(x) \text{ si } x \in A \\ l_B(x) \text{ si } x \in B \end{cases} = \begin{cases} l_A(x) \text{ si } i = 0 \\ l_B(x) \text{ si } i = 1 \end{cases}.$$

El producto es el conjunto etiquetado

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \langle A \times B, l_{A\times B} \rangle,$$

donde

$$(l_{A\times B})(x,y) = \text{máx}\{l_A(x), l_B(y)\}.$$

Lema 1.9 $\gamma_{A\uplus B} = \gamma_A + \gamma_B$ *y* $\gamma_{A\times B} = \gamma_A \cdot \gamma_B$, *donde las operaciones entre funciones están definidas puntualmente.*

Demostración. Hay que observar que

$$\{x_i \in A \uplus B : (l_{A\uplus B})(x) \leq n\} = \{x_0 | x \in A \text{ y } l_A(x) \leq n\} \cup \{x_1 | x \in B \text{ y } l_B(x) \leq n\},$$

y de aquí es inmediata la primera afirmación. Análogamente, se observa que

$$\{(x,y) \in A \times B : (l_{A\times B})(x,y) \leq n\} = \{x \in A | l_A(x) \leq n\} \times \{y \in B | l_B(y) \leq n\}$$

pues

$$l_A(x), l_B(y) \leq \text{máx}\{l_A(x), l_B(y)\} \leq n,$$

y de aquí se deriva la segunda afirmación. ∎

1.3 Numerosidades

Definición 1.10 *Una función de numerosidad para la clase* E *de conjuntos etiquetados es un funcional suprayectivo*

$$num : E \twoheadrightarrow N$$

donde $\langle N, \leq \rangle$ *es un conjunto linealmente ordenado de numerosidades tal que las siguientes propiedades son satisfechas:*

(*i*) *Si para toda* n *se tiene que* $|A_n| \leq |B_n|$, *entonces* $num(\mathbf{A}) \leq num(\mathbf{B})$;

(*ii*) $\xi < num(\mathbf{A})$ *si, y sólo si* $\xi = num(\mathbf{B})$ *para algún* $\mathbf{B} \subsetneq \mathbf{A}$;

(*iii*) *si* $num(\mathbf{A}) = num(\mathbf{A}')$ *y* $num(\mathbf{B}) = num(\mathbf{B}')$, *entonces*

$$num(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) = num(\mathbf{A}' \oplus \mathbf{B}')$$

y

$$num(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) = num(\mathbf{A}' \odot \mathbf{B}').$$

Observación 1.11 *En particular, por la propiedad (i) de una función de numerosidad, y porque N es un orden lineal, se tiene que si dos conjuntos tienen la misma sucesión aproximante, su numerosidad es la misma.*

Proposición 1.12

1. *N tiene un elemento mínimo $0 = num(\mathbf{0})$;*

2. *Todos los conjuntos unitarios tienen la misma numerosidad 1;*

3. *Toda numerosidad $\xi = num(\mathbf{A})$ tiene un sucesor $\xi + 1$, a saber, la numerosidad de $\mathbf{A} \oplus \{*\}$, donde $\{*\}$ es cualquier conjunto unitario etiquetado. Es más, si $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, entonces $\xi = num(\mathbf{A})$ tiene también un predecesor $\xi - 1$;*

4. *Si $\mathbf{A} = \langle A, l_A \rangle$ es finito, entonces $num(\mathbf{A}) = |A|$ es la cardinalidad de A.*

Demostración.

1. Es claro, por la observación 1.7 y la propiedad (ii) de la definición 1.10.

2. Por contradicción. Supongamos que existen dos conjutos etiquetados unitarios $\{\mathbf{x}\}$ y $\{\mathbf{y}\}$ tales que

$$num(\{\mathbf{x}\}) < num(\{\mathbf{y}\}).$$

Por la propiedad (ii) existe $\mathbf{A} \subsetneq \{\mathbf{y}\}$ tal que

$$num(\mathbf{A}) = num(\{\mathbf{x}\}). \tag{1.1}$$

Pero al ser subconjunto propio de un conjunto unitario, quiere decir que $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. Esto a su vez implica que $\mathbf{A} \subsetneq \{\mathbf{x}\}$ y por lo tanto,

$$num(\mathbf{A}) < num(\{\mathbf{x}\})$$

lo cual contradice a la ecuación 1.1.

3. Supongamos que existe $\xi \in N$ tal que

$$num(\mathbf{A}) < \boldsymbol{\xi} < num(\mathbf{A} \oplus \{\mathbf{x}\}) \tag{1.2}$$

Por (ii), podemos tomar $\mathbf{B} \subsetneq \mathbf{A} \oplus \{\mathbf{x}\}$ de manera que

$$num(\mathbf{B}) = \xi. \tag{1.3}$$

Usando 1.2, 1.3 y la misma propiedad (ii), se puede tomar también $\mathbf{C} \subsetneq \mathbf{B}$ tal que $num(\mathbf{C}) = num(\mathbf{A})$. Ahora escojamos $\mathbf{b} \in \mathbf{B} - \mathbf{C}$. Por el inciso *2*,

$$num(\{\mathbf{b}\}) = num(\{\mathbf{x}\}).$$

Puesto que $num(\mathbf{C}) = num(\mathbf{A})$, por la propiedad (iii), se tiene que

$$num(\mathbf{C} \oplus \{\mathbf{b}\}) = num(\mathbf{A} \oplus \{\mathbf{b}\}) \tag{1.4}$$

y

$$num(\mathbf{A} \oplus \{\mathbf{b}\}) = num(\mathbf{A} \oplus \{\mathbf{x}\}). \tag{1.5}$$

Como $\mathbf{C} \subsetneq \mathbf{B}$ y $\mathbf{b} \in \mathbf{B}$ tenemos que

$$|(C \uplus \{b\})_n| \leq |B_n|$$

para toda n, y por la propiedad (i),

$$num((\mathbf{C} \oplus \{\mathbf{b}\}) \leq num(\mathbf{B}). \tag{1.6}$$

Entonces, usando 1.4, 1.6, 1.3, 1.2 y 1.5, se deduce que

$$\begin{aligned} num(\mathbf{A} \oplus \{\mathbf{b}\}) &= num(\mathbf{C} \oplus \{\mathbf{b}\}) \\ &\leq num(\mathbf{B}) = \xi \\ &< num(\mathbf{A} \oplus \{\mathbf{x}\}) = num(\mathbf{A} \oplus \{\mathbf{b}\}), \end{aligned}$$

una contradicción.

Es fácil ver que si $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$, entonces

$$num(\mathbf{A} - \{\mathbf{a}\})$$

es el predecesor de $num(\mathbf{A})$ para cualquier $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, ya que no existe $\mathbf{B}$ tal que $\mathbf{A} - \{\mathbf{a}\} \subsetneq \mathbf{B} \subsetneq \mathbf{A}$. Por lo tanto se deduce, junto con la propiedad (ii), que tampoco existe $\eta \in N$ entre $num(\mathbf{A} - \{\mathbf{a}\})$ y $num(\mathbf{A})$.

4. Por inducción sobre la cardinalidad de los conjuntos finitos. Para todo conjunto $\mathbf{A}$, si $|A| = 0$, entonces tenemos que $A = \emptyset$, y

$$num(\mathbf{A}) = num(\emptyset) = 0.$$

Suponemos que todos los conjuntos etiquetados $\mathbf{B}$ de cardinalidad n tienen la misma numerosidad, que por comodidad, también llamamos n. Sea $\mathbf{C}$ un conjunto de cardinalidad $n + 1$, lo cual nos indica que no es vacío. Tomemos $\mathbf{c} \in \mathbf{C}$, y consideramos $\mathbf{C} - \{\mathbf{c}\}$. Entonces, por la hipótesis de inducción, $num(\mathbf{C} - \{\mathbf{c}\}) = n = num(\mathbf{n})$. Por el inciso anterior, $num(\mathbf{C} - \{\mathbf{c}\})$ es el antecesor de $num(\mathbf{C})$. Esto quiere decir que la numerosidad del sucesor de $num(\mathbf{C} - \{\mathbf{c}\})$ es igual a la numerosidad de $\mathbf{n} + \mathbf{1} = \mathbf{n} \cup \{\mathbf{n}\}$. Pero el sucesor de $num(\mathbf{C} - \{\mathbf{c}\})$ es $num(\mathbf{C})$, por lo que

$$num(\mathbf{C}) = num(\mathbf{n} + \mathbf{1}) = n + 1.$$

■

Observación 1.13 *En particular,* $0 < 1$.

Como N contiene un segmento inicial propio que es isomorfo en orden al conjunto de los números naturales ω, por simplicidad asumimos directamente que $\omega \subseteq N$ y denotamos por n al n-ésimo sucesor de $num(0)$.

Definición 1.14

$$num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{B}) = num(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B});$$

$$num(\mathbf{A}) \cdot num(\mathbf{B}) = num(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}).$$

Estas operaciones están bien definidas (no dependen de los representantes en los conjuntos etiquetados), ya que si

$$num(\mathbf{A}) = num(\mathbf{A}')$$

y

$$num(\mathbf{B}) = num(\mathbf{B}'),$$

por la propiedad (iii) de una función de numerosidad,

$$num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{B}) = num(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) = num(\mathbf{A}' \oplus \mathbf{B}') = num(\mathbf{A}') + num(\mathbf{B}'),$$

y

$$num(\mathbf{A}) \cdot num(\mathbf{B}) = num(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) = num(\mathbf{A}' \odot \mathbf{B}') = num(\mathbf{A}') \cdot num(\mathbf{B}').$$

1.4 Isomorfismos de conjuntos etiquetados

Definición 1.15 *Dos conjuntos etiquetados* $\mathbf{A}$,$\mathbf{B}$ *son isomorfos (denotado como* $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$*) si existe una biyección* $f : A \longrightarrow B$ *que preserva las etiquetas, i.e., tal que* $l_B \circ f = l_A$.

$$\begin{tikzcd} & \omega & \\ A \arrow[ur, "l_A"] \arrow[rr, "f"] & & B \arrow[ul, "l_B"'] \end{tikzcd}$$

A f le llamamos isomorfismo de conjuntos etiquetados.

Hay muchos conjuntos etiquetados finitos no isomorfos. Por ejemplo, si $\mathbf{A} = \langle\{a\}, l_A\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle\{b\}, l_B\rangle$ son dos conjuntos unitarios, entonces $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ si, y sólo si $l_A(a) = l_B(b)$. La noción de isomorfismo es consistente con sumas, productos, y numerosidades de los conjuntos etiquetados.

Proposición 1.16

1. $\mathbf{A} \cong \mathbf{B} \Leftrightarrow \gamma_A = \gamma_B$;

2. $\mathbf{A} \cong \mathbf{B} \Rightarrow num(\mathbf{A}) = num(\mathbf{B})$;

3. $\mathbf{A} \cong \mathbf{A}'$ *y* $\mathbf{B} \cong \mathbf{B}' \Rightarrow \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} \cong \mathbf{A}' \oplus \mathbf{B}'$ *y* $\mathbf{A} \odot \mathbf{B} \cong \mathbf{A}' \odot \mathbf{B}'$.

Demostración.

1. $\Rightarrow$) Sea f un isomorfismo entre $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ y tomemos $n \in \omega$. Queremos demostrar que $f|_{A_n}$ es una biyección entre A_n y B_n. Basta demostrar que su imagen cae en B_n y que es sobreyectiva, ya que la inyectividad es heredada. Demostremos que $f[A_n] \subseteq B_n$. Sea $a \in A_n$. Entonces $l_A(a) \leq n$. Como f es isomorfismo de conjuntos etiquetados, $l_B(f(a)) = l_A(a)$, y por lo tanto $f(a) \in B_n$. Concluimos que $f[A_n] \subseteq B_n$. Ahora veamos que f es sobre. Sea $b \in B_n$; entonces, por definición, $l_B(b) \leq n$. Como f es biyectiva, podemos tomar $f^{-1}(b)$, y afirmamos que éste es el elemento de A que buscamos: Como f es un isomorfismo entre estos conjuntos etiquetados,

$$l_A(f^{-1}(b)) = l_B(f(f^{-1}(b))) = l_B(b) \leq n.$$

Por lo tanto $f^{-1}(b) \in A_n$ y f es sobreyectiva. Entonces,

$$f|_{A_n} : A_n \longrightarrow B_n$$

es biyectiva, y $\gamma_A(n) = |A_n| = |B_n| = \gamma_B(n)$.

$\Leftarrow$) Para no escribir dos casos (cuando es cero y cuando es sucesor), sea

$$A_{-1} = B_{-1} = \emptyset$$

Como

$$|A_n - A_{n-1}| = |A_n| - |A_{n-1}| = \gamma_A(n) - \gamma_A(n-1)$$

y

$$|B_n - B_{n-1}| = |B_n| - |B_{n-1}| = \gamma_B(n) - \gamma_B(n-1)$$

(A_n, A_{n-1}, B_n y B_{n-1} son finitos), entonces

$$|B_n - B_{n-1}| = |A_n - A_{n-1}|$$

ya que, por hipótesis,

$$\gamma_A = \gamma_B.$$

Tomemos

$$f_n : A_n - A_{n-1} \longrightarrow B_n - B_{n-1},$$

donde f_n es biyectiva para toda $n \in \omega$. Sea

$$F = \cup_{n \in \omega} f_n.$$

Por la observación 1.3 los conjuntos $A_n - A_{n-1}$ son ajenos entre sí; por tal motivo, F es una función. Vamos a comprobar que

$$F : A \longrightarrow B$$

es biyectiva.

Sea $b \in B$ y como $B = \bigcup_{n\in\omega} (B_n - B_{n-1})$, existe una única n tal que

$$b \in B_n - B_{n-1}$$

por la observación 1.3. Como f_n es sobre, hay una $a \in A_n - A_{n-1}$ tal que $f_n(a) = b$; entonces

$$F(a) = f_n(a) = b.$$

Por lo tanto, F es sobre. Ahora veamos que F es inyectiva. Sea $F(a_1) = F(a_2)$. Entonces existen h, m tales que $f_h(a_1) = f_m(a_2)$. Pero

$$f_h(a_1), f_m(a_2) \in B = \bigcup_{n\in\omega} (B_n - B_{n-1})$$

por lo que existe una única k tal que $f_h(a_1), f_m(a_2) \in (B_k - B_{k-1})$ por la observación 1.3. Entonces, $h = m = k$ y $f_k(a_1) = f_k(a_2)$. Como f_k es inyectiva, $a_1 = a_2$. Por lo tanto, F es una función inyectiva. Por último, verifiquemos que respeta etiquetas. Sea $a \in A$. Por construcción, $F(a) \in B_{l_A(a)} - B_{l_A(a)-1}$; entonces

$$l_B F((a)) = l_A(a)$$

(ver observación 1.4). Así concluimos que F es un isomorfismo entre conjuntos etiquetados.

2. Es claro por la observación 1.11 y el inciso anterior.

3. Por la ida del inciso *1* tenenos que

$$\gamma_A = \gamma_{A'}$$

y

$$\gamma_B = \gamma_{B'}.$$

Sumando ambas ecuaciones y usando el lema 1.9 obtenemos que

$$\gamma_{A \uplus B} = \gamma_A + \gamma_B = \gamma_{A'} + \gamma_{B'} = \gamma_{A' \uplus B'}.$$

Otra vez por el inciso *1*, pero ahora usando el regreso, concluimos que

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B} \cong \mathbf{A}' \oplus \mathbf{B}'.$$

La prueba es similar para el producto.

■

1.5 Semianillos positivos

Definición 1.17 *Un semianillo es una tripleta* $\langle R, +, \cdot\rangle$ *tal que*

$$+, \cdot : R \times R \longrightarrow R.$$

A estas operaciones se les llama por lo común suma y producto, Además, haciendo $+(a,b) = a+b$ *y* $\cdot(a,b) = a \cdot b$*, se cumple que, para todo* a*,* b *y* c *en* R*:*

1. $a+b=b+a$ *(Conmutatividad de la suma);*
2. $a+(b+c)=(a+b)+c$ *(Asociatividad de la suma);*
3. $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ *(Asociatividad del producto);*
4. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ *y* $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ *(Distributividad).*

Un semianillo es conmutativo si su producto lo es.

Definición 1.18 *Un semianillo parcialmente ordenado es un semianillo junto con un orden parcial* $\leq$ *tal que* $x \leq y$ *implica* $x+z \leq y+z$ *y* $x \cdot z \leq y \cdot z$ *para todo* x, y, z*. Un semianillo positivo es un semianillo conmutativo parcialmente ordenado, donde* $x \leq y$ *si, y sólo si existe una única* z *tal que* $y = x+z$*.*

Lema 1.19 *Sea* $\mathcal{F} = \{\varphi : \omega \longrightarrow \omega : \varphi$ *es no decreciente*$\}$*. Definimos* $(\varphi+\psi)(n) = \varphi(n)+\psi(n)$ *y* $(\varphi\cdot\psi)(n) = \varphi(n)\cdot\psi(n)$ *para toda* $n \in \omega$*. Decimos que* $\varphi \leq \psi \Leftrightarrow \varphi(n) \leq \psi(n)$ *para toda* $n \in \omega$*. Entonces* $\langle \mathcal{F}, +, \cdot, \leq\rangle$ *es un semianillo conmutativo parcialmente ordenado.*

Demostración. Lo hereda de las propiedades de los naturales. ■

Observación 1.20 *En particular, para todo conjunto etiquetado* $\mathbf{A}$*, su sucesión aproximante* $\gamma_A \in \mathcal{F}$*.*

Regresemos ahora a las numerosidades.

Proposición 1.21 (Leyes de la Cancelación para Numerosidades)

1. *Si*
$$num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{B}) \leq num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{C}),$$
entonces
$$num(\mathbf{B}) \leq num(\mathbf{C});$$

2. *Si*
$$num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{B}) = num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{C}),$$
entonces
$$num(\mathbf{B}) = num(\mathbf{C}).$$

Demostración.

1. Demostremos la contrapuesta. Supongamos que $num(\mathbf{B}) > num(\mathbf{C})$. Entonces existe $\mathbf{C}' \subsetneq \mathbf{B}$ tal que $num(\mathbf{C}') = num(\mathbf{C})$. Es claro que
$$A \uplus C' \subsetneq A \uplus B,$$
por lo que $\mathbf{A} \oplus \mathbf{C}' \subsetneq \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$, y $num(\mathbf{A} \oplus \mathbf{C}') < num(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B})$. Por lo tanto
$$\begin{aligned} num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{C}) &= num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{C}') \\ &= num(\mathbf{A} \oplus \mathbf{C}') \\ &< num(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) = num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{B}). \end{aligned}$$

2. Como
$$num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{B}) = num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{C}),$$
en particular
$$num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{B}) \leq num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{C})$$
y
$$num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{B}) \geq num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{C}).$$
Usando el incisio anterior, obtenemos
$$num(\mathbf{B}) \leq num(\mathbf{C})$$
y
$$num(\mathbf{B}) \geq num(\mathbf{C}).$$
Entonces, como N es un orden lineal,
$$num(\mathbf{B}) = num(\mathbf{C}).$$

■

Hay que recordar que un semianillo positivo incluye un orden $\leq$ compatible con las operaciones y que $x \leq y$ implica la existencia de un único z tal que $x + z = y$ (definición 1.18).

Proposición 1.22 $\langle N, +, \cdot, \leq, 1, 0\rangle$ *es un semianillo positivo con elementos neutros.*

Demostración. Sean $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ conjuntos etiquetados.

- **Conmutatividad de la suma.** Usando los lemas 1.9, 1.19, y la observación 1.20 se obtiene que
$$\begin{aligned} \gamma_{A \uplus B} &= \gamma_A + \gamma_B \\ &= \gamma_B + \gamma_A \\ &= \gamma_{B \uplus A}. \end{aligned}$$

Por la tanto, usando la observación 1.11, $num(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) = num(\mathbf{B} \oplus \mathbf{A})$, y recordando la definición 1.14 tenemos que

$$\begin{aligned} num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{B}) &= num(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) \\ &= num(\mathbf{B} \oplus \mathbf{A}) \\ &= num(\mathbf{B}) + num(\mathbf{A}). \end{aligned}$$

- **Asociatividad de la suma.** De manera similar,

$$\begin{aligned} \gamma_{A \uplus (B \uplus C)} &= \gamma_A + \gamma_{B \uplus C} \\ &= \gamma_A + (\gamma_B + \gamma_C) \\ &= (\gamma_A + \gamma_B) + \gamma_C \\ &= \gamma_{A \uplus B} + \gamma_C \\ &= \gamma_{(A \uplus B) \uplus C}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$num(\mathbf{A} \oplus (\mathbf{B} \oplus \mathbf{C})) = num((\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) \oplus \mathbf{C})$$

y entonces

$$\begin{aligned} num(\mathbf{A}) + (num(\mathbf{B}) + num(\mathbf{C})) &= num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{B} \oplus \mathbf{C}) \\ &= num(\mathbf{A} \oplus (\mathbf{B} \oplus \mathbf{C})) \\ &= num((\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) \oplus \mathbf{C}) \\ &= num(\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}) + num(\mathbf{C}) \\ &= ((num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{B})) + num(\mathbf{C}). \end{aligned}$$

- **Asociatividad del producto.** Demostración análoga a la de la suma.
- **Conmutatividad del producto.** Demostración análoga a la de la suma.
- **Distributividad.**

$$\begin{aligned} \gamma_{A \times (B \uplus C)} &= \gamma_A \cdot \gamma_{B \uplus C} \\ &= \gamma_A \cdot (\gamma_B + \gamma_C) \\ &= \gamma_A \cdot \gamma_B + \gamma_A \cdot \gamma_C \\ &= \gamma_{A \times B} + \gamma_{A \times C} \\ &= \gamma_{(A \times B) \uplus (A \times C)} \\ &\Rightarrow \\ num(\mathbf{A} \odot (\mathbf{B} \oplus \mathbf{C})) &= num((\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) \oplus (\mathbf{A} \odot \mathbf{C})) \\ &\Rightarrow \\ num(\mathbf{A}) \cdot (num(\mathbf{B}) + num(\mathbf{C})) &= num(\mathbf{A}) \cdot num(\mathbf{B} \oplus \mathbf{C}) \\ &= num(\mathbf{A} \odot (\mathbf{B} \oplus \mathbf{C})) \\ &= num((\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) \oplus (\mathbf{A} \odot \mathbf{C})) \\ &= num(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}) + num(\mathbf{A} \odot \mathbf{C}) \\ &= num(\mathbf{A}) \cdot num(\mathbf{B}) + num\mathbf{A} \cdot num(\mathbf{C}). \end{aligned}$$

- **Existencia de neutro aditivo.** La sucesión aproximante del vacío $\gamma_\emptyset$ es idénticamente cero. Entonces,

$$\begin{aligned}\gamma_{A\uplus\emptyset} &= \gamma_A+\gamma_\emptyset\\ &= \gamma_A.\end{aligned}$$

  Por lo tanto,

$$\begin{aligned}num(\mathbf{A})+num(\mathbf{0}) &= num(\mathbf{A}\oplus\mathbf{0})\\ &= num(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

- **Existencia de neutro multiplicativo.** Sólo hay que resaltar que, para toda n, $\{a\in 1 : l_1(a)\leq n\}=\{\emptyset\}$. Por ende, la sucesión aproximante del uno γ_1 es idénticamente 1. De aquí se tiene que

$$\begin{aligned}\gamma_{A\times 1} &= \gamma_A\cdot\gamma_1\\ &= \gamma_A.\end{aligned}$$

  Concluimos que

$$\begin{aligned}num(\mathbf{A})\cdot\mathbf{1} &= num(\mathbf{A}\odot\mathbf{1})\\ &= num(\mathbf{A}).\end{aligned}$$

- **Preservación del orden por el producto.** Sea

$$num(\mathbf{A})\leq num(\mathbf{B})$$

  y $\mathbf{C}$ dado. Escogemos $\mathbf{A}'\subseteq\mathbf{B}$ con

$$num(\mathbf{A}')=num(\mathbf{A}).$$

  Entonces $A'\times C\subseteq B\times C$ y por ende $\mathbf{A}'\odot\mathbf{C}\subseteq\mathbf{B}\odot\mathbf{C}$. Por lo tanto

$$num(\mathbf{A}'\odot\mathbf{C})\leq num(\mathbf{B}\odot\mathbf{C}),$$

  lo que a su vez implica que

$$num(\mathbf{A})\cdot num(\mathbf{C})=num(\mathbf{A}'\odot\mathbf{C})\leq num(\mathbf{B}\odot\mathbf{C})=num(\mathbf{B})\cdot num(\mathbf{C})$$

- **Preservación del orden por la suma.** Demostración análoga a la producto.

- **Es anillo positivo.** Sea $num(\mathbf{A}) \leq num(\mathbf{B})$. Escogemos $\mathbf{A}' \subseteq \mathbf{B}$ con

$$num(\mathbf{A}') = num(\mathbf{A}).$$

Observemos que para toda $n \in \omega$ se tiene que

$$\{b \in B : l_B(a) \leq n\} = \{a \in A' : l_{A'}(a) \leq n\} \cup \{b \in (B - A') : l_{A'}(a) \leq n\},$$

pues $A' \subseteq B$. Estos últimos conjuntos son ajenos, por lo que

$$\begin{aligned} \gamma_B &= \gamma_{A'} + \gamma_{B-A'} \\ &= \gamma_{A' \uplus (B-A')}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

De aquí se deduce que

$$num(\mathbf{B}) = num(\mathbf{A}' \oplus (\mathbf{B} - \mathbf{A}')).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{B} - \mathbf{A}') &= num(\mathbf{A}') + num(\mathbf{B} - \mathbf{A}') \\ &= num(\mathbf{A}' \oplus (\mathbf{B} - \mathbf{A}')) \\ &= num(\mathbf{B}). \end{aligned}$$

Finalmente, la unicidad se ve usando las leyes de la cancelación: Supongamos que

$$\begin{aligned} num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{D}) &= num(\mathbf{B}) \\ &= num(\mathbf{A}') + num(\mathbf{B} - \mathbf{A}') \\ &= num(\mathbf{A}) + num(\mathbf{B} - \mathbf{A}'), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$num(\mathbf{D}) = num(\mathbf{B} - \mathbf{A}').$$

■

Daremos una aplicación del hecho de que las numerosidades sean un semianillo positivo con elementos neutros.

Sea $\alpha = num(\omega)$ la numerosidad de los números naturales. Entonces la numerosidad del producto cartesiano $\omega \times \omega$ es $num(\omega \odot \omega) = \alpha^2$. Observemos también que $\mathbb{Z} \cong \omega \oplus (\omega - \{\mathbf{0}\})$; de esta forma $num(\mathbb{Z}) = 2\alpha - 1$[1] es el predecesor de $\alpha + \alpha$.

Demos el isomorfismo entre $\mathbb{Z}$ y $\omega \oplus (\omega - \{\mathbf{0}\})$. Sea

$$F : \mathbb{Z} \longrightarrow \omega \uplus (\omega - \{0\})$$

[1] $2\alpha - 1$ no se entiende como resta, sino como el predecesor de 2α (ver proposición 1.12) y 2α abrevia $\alpha + \alpha$.

tal que

$$F(x) = \begin{cases} x_0 \text{ si } x \geq 0 \\ (-x)_1 \text{ si } x < 0 \end{cases} .$$

Veamos que F es un isomorfismo de conjuntos etiquetados.

Por definición,

$$l_{\omega \uplus (\omega - \{0\})}(x_i) = x$$

para $i \in \{0, 1\}$ con la etiquetación canónica de ω. Entonces

$$\begin{aligned} l_{\omega \oplus (\omega - \{0\})}(F(x)) &= \begin{cases} l_{\omega \oplus (\omega - \{0\})}(x_0) & \text{si} \quad x \geq 0 \\ l_{\omega \oplus (\omega - \{0\})}((-x)_1) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \\ &= |x| \\ &= l_{\mathbb{Z}}(x). \end{aligned}$$

Ya vimos que preserva la etiquetación. Si definimos

$$F^{-1}(x_i) = \begin{cases} x \text{ si } i = 0 \\ -x \text{ si } i = 1 \end{cases}$$

es fácil corroborar que $F^{-1} \circ F = 1_{\mathbb{Z}}$, y que $F \circ F^{-1} = 1_{\omega \uplus (\omega - \{0\})}$.

Como una consecuencia de la proposición anterior, la resta de numerosidades $\xi \geq \eta$ está bien definida: Sea $\xi - \eta$ la única ζ tal que $\eta + \zeta = \xi$.

Capítulo 2

Ultrafiltros

2.1 Definiciones Básicas

Definición 2.1 *Un filtro sobre un conjunto S es una colección F de subconjuntos de S tal que:*

1. $S \in F$;
2. *Si* $X \in F$ *y* $Y \in F$, *entonces* $X \cap Y \in F$;
3. *Si* $X, Y \subseteq S$, $X \in F$, *y* $X \subseteq Y$, *entonces* $Y \in F$.

Obsérvese que un filtro F es propio ($F \subsetneq P(S)$) si, y sólo si $\emptyset \notin F$. Tomaremos en cuenta sólo filtros propios, por lo que asumimos siempre que

4. $\emptyset \notin F$.

Observación 2.2 *Por inducción, se demuestra fácilmente que cualquier intersección finita de miembros de un filtro también está en el filtro.*

Definición 2.3 *Un filtro F sobre S es llamado filtro principal si existe $X_o \in F$ tal que $F = \{X \subseteq S : X \supseteq X_o\}$; i.e., si tiene un $\subseteq$ −mínimo. Un filtro es no principal si, y sólo si no es principal.*

Ejemplos:

1. Si $a \in S$, $F = \{X \subseteq S : a \in X\}$ es un filtro principal sobre S.
2. Si S es infinito, $F = \{X \subseteq S : S - X \text{ es finito}\}$ se llama el filtro de Fréchet sobre S. El filtro de Fréchet es no principal.

Definición 2.4 *Un filtro U sobre S es un ultrafiltro si, y sólo si $\forall X \subseteq S$, $X \in U$ o $S - X \in U$ (mas no ambos: $X \cap (S - X) = \emptyset$ y $\emptyset \notin U$).*

Lema 2.5 *Sea U un filtro sobre S. Entonces U es un ultrafiltro si, y sólo si, para toda $X, Y \subseteq S$, el hecho de que $X \cup Y \in U$, implica que $X \in U$ o $Y \in U$.*

Demostración. Supongamos que U es un ultrafiltro, y que $X \cup Y \in U$. Si ninguno de X o Y está, entonces están su complementos; es decir, $X^C \in U$ y $Y^C \in U$, y por ser filtro, $X^C \cap Y^C = (X \cup Y)^C \in U$, una contradicción. Ahora, supongamos que es válido que, para toda $X, Y \in S$, si $X \cup Y \in U$, entonces $X \in U$ o $Y \in U$. Sea $A \subseteq S$. Como $A \cup A^C = S \in U$, por nuestra suposición, $A \in U$ o $A^C \in U$. ∎

El siguiente lema nos dice que la condición de que cualquier conjunto que contenga a un elemento del ultrafiltro está también en el ultrafiltro, se deduce de las demás condiciones. Usando este lema, nos ahorramos demostrar una condición cuando queramos ver que una colección de conjuntos es un ultrafiltro.

Lema 2.6 *Sea U una familia de subconjuntos de S. Entonces U es ultrafiltro si, y sólo si U cumple que:*

1. $\emptyset \notin U$;
2. *Si $X \in U$ y $Y \in U$, entonces $X \cap Y \in U$;*
3. $\forall X \subseteq S$, $X \in U$ *o* $S - X \in U$.

Demostración. La ida es trivial. Supongamos que U es una familia de subconjuntos de S que cumple *1*, *2* y *3*. Basta demostrar la primera y tercera propiedad de los filtros definidas en 2.1. Como $\emptyset \notin U$, entonces $S - \emptyset = S \in U$. Por otro lado, supongamos que $X, Y \subseteq S$, $X \in U$ y $X \subseteq Y$. Si $Y \notin U$, entonces $S - Y \in U$, y como $X \subseteq Y$, $(S - Y) \cap X = \emptyset$, por lo que $\emptyset$ estaría en U, lo cual es una contradicción. ∎

Lema 2.7 *Un ultrafiltro U es no principal si, y sólo si ninguno de sus elementos es un conjunto unitario.*

Demostración. Sea U un ultrafiltro sobre S. La demostración va a ser por contrapuesta en ambos casos.

$\Rightarrow$) Supongamos $\{a\} \in U$ para algún $a \in S$. Sea $X \in U$. Entonces $X \cap \{a\} \in U$. Como $\emptyset \notin U$, $a \in X$. Así, para toda $X \in U$, $\{a\} \subseteq X$ y $U = \{X \subseteq S : \{a\} \subseteq X\}$ de donde U es principal.

$\Leftarrow$) Supongamos que U es principal. Por lo tanto, existe $X_0 \in U$ tal que $U = \{X \subseteq S : X_0 \subseteq X\}$. Supongamos que para toda $a \in S$, $\{a\} \notin U$. Entonces, para toda $a \in S$, $(S - \{a\}) \in U$ y para toda $a \in S$, $X_0 \subseteq (S - \{a\})$. Por lo tanto, $X_0 = \emptyset$, contradicción. Así pues, tiene que existir $a \in S$ tal que $\{a\} \in U$.

∎

Corolario 2.8 *Sea U un ultrafiltro sobre S. Entonces U es no principal si, y sólo si ninguno de sus elementos es un conjunto finito.*

Demostración. Basta observar que si U es ultrafiltro, entonces

$$\text{hay un unitario en } U \Leftrightarrow \text{hay un finito en } U.$$

La ida es trivial. Supongamos que $\{a_1, \ldots, a_n\} \in U$. Entonces $\{a_1\} \cup \cdots \cup \{a_n\} \in U$. Como U es ultrafiltro, aplicando el lema 2.5 a lo más n veces, algún unitario está en U. ∎

2.2 Ultrafiltros sobre ω

De aquí en adelante trabajaremos con ultrafiltros sobre ω.

Definición 2.9 *Un ultrafiltro no principal U sobre ω se llama selectivo o de Ramsey si, y sólo si para toda partición $\{X_n : n \in \omega\}$ de ω, tal que $X_n \notin U$ para toda $n \in \omega$, existe un conjunto "selectivo" $X \in U$ de manera que, para toda $n \in \omega$, la intersección $X_n \cap X$ tiene, a lo más, un elemento. Esta definición es equivalente a pedir que exista una X' selectiva de tal forma que $X' \cap X_n$ tiene exactamente un elemento: si existe $X \in U$ tal que $|X \cap X_n| \leq 1$, tomamos $X' = X \cup \{x_n\}$ de manera que $x_n \in X_n$ para toda $n \in \omega$; entonces $X \subseteq X'$ y por lo tanto $X' \in U$ y $|X' \cap X_n| = 1$.*

Proposición 2.10 *Sea U un ultrafiltro no principal sobre ω. Entonces las propiedades siguientes son equivalentes:*

1. *U es selectivo;*
2. *Para toda función $\varphi : \omega \longrightarrow \omega$ existe $D \in U$ tal que $\varphi|_D$ es o constante o inyectiva;*
3. *Para toda función $\varphi : \omega \longrightarrow \omega$ existe $D \in U$ tal que $\varphi|_D$ es o constante o creciente;*
4. *Para toda función $\varphi : \omega \longrightarrow \omega$ existe $D \in U$ tal que $\varphi|_D$ es no decreciente.*

Demostración.

$1 \Leftrightarrow 2$ Dada $\varphi : \omega \longrightarrow \omega$, para cada n definimos $X_n = \{m : \varphi(m) = n\}$. No consideraremos los X_n vacíos para que sea partición. Si alguna $X_n \in U$, entonces $\varphi|_{X_n}$ es constante. En caso contrario, existe un conjunto *selectivo* $X \in U$ tal que, para toda n, $X \cap X_n$ contiene a lo más un elemento. Entonces la restricción $\varphi|_X$ es inyectiva. Inversamente, sea $\{X_n : n \in \omega\}$ una partición de ω donde $X_n \notin U$ para toda n. Sea

$$\varphi(k) = n \Leftrightarrow k \in X_n.$$

Como $\{X_n : n \in \omega\}$ es una partición, φ está bien definida. Para toda $D \in U$, $\varphi|_D$ no puede ser constante (pues si lo fuera $D \subseteq X_n$ para alguna $n \in \omega$, lo que implicaría que $X_n \in U$, y estamos suponiendo que eso no pasa), entonces tomamos $D \in U$ tal que $\varphi|_D$ es inyectiva. Por lo tanto $X = D$ es el conjunto selectivo deseado.

$2 \Rightarrow 3$ Sean $\varphi : \omega \longrightarrow \omega$ y $D \in U$ tales que $\varphi|_D$ es inyectiva (si $\varphi|_D$ es constante para alguna D, entonces no hay nada que demostrar). Definimos por inducción la siguiente sucesión:

$$\begin{aligned} n_0 &= mín D; \\ n_{k+1} &= máx\{n \in D : \varphi(n) \leq \varphi(m) \text{ para alguna } m \leq \xi_k\} \end{aligned}$$

donde

$$\xi_k = mín\{n \in D : n > n_k\}.^1$$

Claramente

$$n_{k+1} \geq \xi_k > n_k,^2$$

por lo que podemos construir la sucesión siguiente de intervalos no vacíos:

$$\begin{aligned} X_0 &= [0, n_0]; \\ X_{k+1} &= [n_k + 1, n_{k+1}]. \end{aligned}$$

Por hipótesis, existe un conjunto selectivo $X \in U$ para la partición $\{X_n | n \in \omega\}$. Sean $X' = \cup\{X_{2k} : k \in \omega\}$ y $X'' = \cup\{X_{2k+1} : k \in \omega\}$. Por la propiedad de ultrafiltro, o bien $X' \in U$ o $X'' \in U$. Supongamos que $X' \in U$, y por ende, $X'' \notin U$ (en el otro caso, la prueba es similar), y consideremos $E = (X \cap X' \cap D) \in U$. Tenemos que verificar que $\varphi|_E$ es creciente. Si $x, y \in E$ con $x < y$, entonces $x \in X_{2k}$ para alguna k y $y \in X_{2h}$ para alguna $h > k$ (recordemos que X es un conjunto selectivo para la partición). Notemos que $y \in D$; también resaltemos que $2k < 2k+1 < 2h$, por lo que $y > n_{2k+1}$. De esta forma, por la definición de n_{2k+1}, tenemos que $\varphi(y) > \varphi(m)$ para toda $m \leq \xi_{2k} \leq n_{2k+1}$. En particular $x \leq n_{2k} \leq \xi_{2k}$, y por lo tanto $\varphi(y) > \varphi(x)$.

$3 \Rightarrow 4$ Trivial.

$4 \Rightarrow 1$ Sea $\{X_n : n \in \omega\}$ una partición de ω donde cada $X_n \notin U$. Definimos

$$\varphi(m) = n \Leftrightarrow m \in X_n.$$

Por hipótesis existe $D \in U$ tal que $\varphi|_D$ es no decreciente.

Afirmación 2.11 *Cada conjunto*

$$D_n = D \cap X_n$$

es finito.

---

[1] $|\{n \in \omega : n \leq \xi_k\}| = \xi_k + 1$, por lo cual existe $\alpha_k = máx\{\varphi(m) : m \leq \xi_k\}$. Esto implica que $|\{n \in D : \varphi(n) \leq \varphi(m) \text{ para alguna } m \leq \xi_k\}| \leq \alpha_k$, pues φ es inyectiva. Entonces sí tiene sentido tomar $n_{k+1} = máx\{n \in D : \varphi(n) \leq \varphi(m) \text{ para alguna } m \leq \xi_k\}$.

[2] En particular, $\xi_k \in \{n \in D : \varphi(n) \leq \varphi(m) \text{ para alguna } m \leq \xi_k\}$.

Sea $k \in \{m \geq mínD_n\} \cap D$. Es obvio que $k \geq mínD_n$. Como $\{k, mínD_n\} \subseteq D$, y φ es no decreciente en D, entonces

$$\varphi(k) \geq \varphi(mínD_n) = n, \tag{2.1}$$

pues $mínD_n \in D_n \subseteq X_n$. Si suponemos que D_n es un conjunto infinito, existe $m \in D_n$ tal que $m \geq k$. Entonces

$$n = \varphi(m) \geq \varphi(k). \tag{2.2}$$

Podemos concluir, por las ecuaciones 2.1 y 2.2, que $\varphi(k) = n$ para toda $k \in \{m \geq mínD_n\} \cap D$. Esto quiere decir que $\{m \geq mínD_n\} \cap D \subseteq X_n$. Pero $D \in U$ y $\{m \geq mínD_n\} \in U$ (su complemento es finito), por lo que $X_n \in U$, una contradicción. Por lo tanto, D_n no es un conjunto infinito.

Ahora definamos una función $\psi : \omega \longrightarrow \omega$ como sigue:

$$\psi(a) = 0$$

si $a \notin D$; si $a \in D$, entonces está en alguna $D_n = D \cap X_n$. Como vimos que D_n es un conjunto finito, podemos decir que es de la forma $D_n = \{m_1^{(n)} < \cdots < m_{k_n}^{(n)}\}$. Entonces $a = m_i^{(n)}$ para alguna $i = 1, \cdots, k_n$. Definimos

$$\psi(m_i^{(n)}) = k_n - i.$$

Por hipótesis, existe $D' \in U$ tal que $\psi|_{D'}$ es no decreciente.

Afirmación 2.12 *Para toda n, $D' \cap D_n$ contiene a lo más un punto.*

Supongamos que existen $x, y \in D' \cap D_n$ tal que $x < y$. Pero $x = m_i^{(n)}$, $y = m_j^{(n)}$ para algunas $i, j \in \{1, \cdots, k_n\}$. Entonces $i < j$, lo que implica que $-j < -i$ y que

$$\psi(y) = k_n - j < k_n - i = \psi(x).$$

Pero quedamos que $\psi|_{D'}$ era no decreciente, una contradicción.

Si tomamos $X = D \cap D'$, entonces $X \in U$ es un conjunto selectivo para $\{X_n : n \in \omega\}$, pues

$$\begin{aligned} X_n \cap X &= X_n \cap (D \cap D') \\ &= (X_n \cap D) \cap D' \\ &= D_n \cap D', \end{aligned}$$

como ya vimos, tiene a lo más un punto.

■

Definición 2.13 *Sea U un ultrafiltro no principal sobre ω. U es un p-punto si, y sólo si para toda partición $\{A_n | n \in \omega\}$ de ω en $\aleph_0$ partes, tal que $A_n \notin U$ para toda n, existe $X \in U$ de manera que $X \cap A_n$ es finita, para toda $n \in \omega$.*

En particular, todo ultrafiltro selectivo es un $p-$punto.

Lema 2.14 *Un ultrafiltro no principal U sobre ω es un p-punto si, y sólo si satisface lo siguiente: Si*

$$A_o \supseteq A_1 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$$

es una sucesión decreciente de elementos de U, entonces existe $X \in U$ tal que, para toda n, $X - A_n$ es finito.

Demostración. Supongamos que U es un p-punto, y sea

$$A_o \supseteq A_1 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$$

una sucesión decreciente de elementos de U. Para simplificar el razonamiento, podemos hacer $A_{-1} = \omega$. Construimos la siguiente partición de ω,

$$P = \{A_{n-1} - A_n : n \in \omega \text{ y } A_n - A_{n-1} \neq \emptyset\} \cup \{\{x\} : x \in \acute{i}nf_{n\in\omega}(A_n)\}$$

donde el ínfimo está definido con el orden dado por la contención. Veamos que los miembros de la partición no pertenecen al ultrafiltro.

Afirmación 2.15 *Para todo conjunto $B \subseteq \omega$ y toda $X \in U$, $B - X \notin U$.*

Sea $X \in U$, y supongamos que $B - X \in U$. Como $B - X \subseteq \omega - X$, implica que $\omega - X \in U$, pero esto no es posible, ya que U es un ultrafiltro.

Por lo tanto, en nuestro caso particular,

$$A_{n-1} - A_n \notin U.$$

Tampoco los elementos de la partición

$$\{x\} \subseteq \acute{i}nf_{n\in\omega}(A_n)$$

pertenecen al ultrafiltro, ya que son finitos y nuestro ultrafiltro es no principal.

Verifiquemos ahora que P es una partición. Es claro que

$$\cup P \subseteq \omega.$$

Sea ahora $x \in \omega$.

Si $\forall n \in \omega(x \in A_n)$, entonces

$$x \in \acute{i}nf_{n\in\omega}(A_n) \Rightarrow \{x\} \in P \Rightarrow x \in \cup P.$$

En caso contrario, sea $n_x = m\acute{i}n\{n \in \omega : x \notin A_n\}$. Esto quiere decir que $x \in A_{n_x-1}$, y que $x \in A_{n_x-1} - A_{n_x}$. Por lo tanto, $A_{n_x-1} - A_{n_x} \neq \emptyset$, y entonces $A_{n_x-1} - A_{n_x} \in P$. Podemos concluir que $x \in \cup P$. Por lo tanto

$$\omega \subseteq \cup P,$$

y

$$\omega = \cup P.$$

Demostremos ahora que son ajenos dos a dos. Sean X y Y en P. Tenemos tres casos:

Primero: Que X y Y estén contenidos en $inf_{n\in\omega}(A_n)$; i.e. que sean de la forma $X = \{x\}$y $Y = \{y\}$ para algunas x y y en $inf_{n\in\omega}(A_n)$. Entonces es claro que

$$X \neq Y \Leftrightarrow \{x\} \neq \{y\} \Leftrightarrow x \neq y \Leftrightarrow X \cap Y = \{x\} \cap \{y\} = \emptyset.$$

Segundo: Que uno de ellos esté contenido en $inf_{n\in\omega}(A_n)$ y el otro sea de la forma $A_{n-1} - A_n$ para alguna $n \in \omega$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $X = \{x\}$ para alguna $x \in inf_{n\in\omega}(A_n)$, y que $Y = A_{m-1} - A_m$ para alguna $m \in \omega$. Tenemos que $X = \{x\} \subseteq inf_{n\in\omega}(A_n) \subseteq A_m$. Entonces,

$$X \cap Y = \{x\} \cap A_{m-1} - A_m = \emptyset.$$

Tercero: $X = A_{n-1} - A_n$, y $Y = A_{m-1} - A_m$ para alguna n y m en ω. Como $X \neq Y \Rightarrow n \neq m$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $n < m$. Entonces

$$n \leq m - 1 \Rightarrow A_n \supseteq A_{m-1} \Rightarrow (A_{n-1} - A_n) \cap (A_{m-1} - A_m) = \emptyset.$$

Por lo tanto, P sí es una partición de ω.

Como U es p-punto, existe $X \in U$ tal que, para toda $Y \in P$, $X \cap Y$ es finito. Aseguramos que $X - A_n$ es finito para toda $n \in \omega$. Antes, hay que demostrar que:

Afirmación 2.16 $\bigcup\limits_{k=0}^{n} (X \cap (A_{k-1} - A_k)) = X - A_n$.

Si $\bigcup\limits_{k=0}^{n} (X \cap (A_{k-1} - A_k)) = \emptyset$, la contensión

$$\bigcup_{k=0}^{n} (X \cap (A_{k-1} - A_k)) \subseteq X - A_n$$

es trivial. Supongamos pues que no es vacía. Sea

$$x \in \bigcup_{k=0}^{n} (X \cap (A_{k-1} - A_k));$$

en particular, pertenece a alguna $X \cap (A_{m-1} - A_m)$ para alguna m tal que $0 \leq m \leq n$. Esto implica que $A_m \supseteq A_n$. Entonces

$$x \in X \text{ y } x \notin A_m \supseteq A_n \Rightarrow x \in X \text{ y } x \notin A_n \Rightarrow x \in X - A_n.$$

Por lo tanto,

$$\bigcup_{k=0}^{n} (X \cap (A_{k-1} - A_k)) \subseteq X - A_n.$$

De igual forma, si $X - A_n$ es vacía, la contención

$$\bigcup_{k=0}^{n}(X \cap (A_{k-1} - A_k)) \supseteq X - A_n$$

es trivial. Supongamos ahora que $X - A_n \neq \emptyset$. Sea $x \in X - A_n$ y $n_0 = mín\{n \in \omega : x \notin A_n\}$. Entonces $x \in A_{n_0-1}$ y por lo tanto,

$$x \in X \cap (A_{n_0-1} - A_{n_0}) \subseteq \bigcup_{k=0}^{n}(X \cap (A_{k-1} - A_k)).$$

Concluimos que

$$X - A_n \subseteq \bigcup_{k=0}^{n}(X \cap (A_{k-1} - A_k)),$$

y finalmente

$$X - A_n = \bigcup_{k=0}^{n}(X \cap (A_{k-1} - A_k)).$$

Para cada k, $A_{k-1} - A_k = \emptyset$ o $A_{k-1} - A_k \in P$. Esto quiere decir dos cosas: la primera que si $k \neq k'$, entonces $(A_{k'-1} - A_{k'}) \cap (A_{k-1} - A_k) = \emptyset$; y la otra que $|X \cap (A_{k-1} - A_k)|$ es cero (si $A_{k-1} - A_k = \emptyset$) o es a lo más finita, si $A_{k-1} - A_k \in P$, pues U es p-punto. Entonces $X - A_n = \bigcup_{k=0}^{n}(X \cap (A_{k-1} - A_k))$ es unión finita de conjuntos finitos, y por lo tanto $X - A_n$ es finito.

Ahora, sea U un ultrafiltro no principal de tal forma, que para cada sucesión $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$, donde $A_n \in U$ para toda $n \in \omega$, existe una $X \in U$ tal que $X - A_n$ es finita para toda $n \in \omega$.

Sea $P = \{X_n\}_{n\in\omega}$ una partición de ω tal que $X_n \notin U$ para toda $n \in \omega$.

Construimos la siguiente sucesión:

$$A_n = (\bigcup_{k=0}^{n} X_k)^C.$$

Como

$$\begin{aligned}\bigcup_{k=0}^{0} X_k &\subseteq \bigcup_{k=0}^{2} X_k \subseteq \bigcup_{k=0}^{3} X_k \subseteq \cdots \\ &\Rightarrow (\bigcup_{k=0}^{0} X_k)^C \supseteq (\bigcup_{k=0}^{1} X_k)^C \supseteq (\bigcup_{k=0}^{2} X_k)^C \cdots\end{aligned}$$

por lo que

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots.$$

Por otro lado $A_n = \bigcup_{k=0}^{n} X_k)^C = \bigcap_{k=0}^{n} X_k^C$ por las leyes de De Morgan. Como U es ultrafiltro,

$$X_k^C \in U \Rightarrow \bigcap_{k=0}^{n} X_k^C = A_n \in U.$$

Por la hipótesis, existe $X \in U$ tal que $X - A_n$ es finito. Además

$$X - A_n = X \cap A_n^C = X \cap (\bigcup_{k=0}^{n} X_k) = \bigcup_{k=0}^{n}(X \cap X_k)$$

por la propiedad distributiva de la unión y la intersección. Concluimos que $|X \cap X_n| \leq |\bigcup_{k=0}^{n}(X \cap X_k)| = |X - A_n|$ el cual ya vimos arriba que es finito. Por lo tanto $|X \cap X_n|$ es finito. ■

2.3 Combinatoria Infinita

Definición 2.17 *Sea A un conjunto y $n \in \omega$ tal que $|A| \geq n$. Definimos $[A]^n = \{X \subseteq A : |X| = n\}$. A los elementos de $[A]^n$ les llamamos los $n-$conjuntos de A.*

Definición 2.18 *Sea $\{X_1, ..., X_k\}$ una partición de $[A]^n$. H es homogéneo para la partición si, y sólo si $H \subseteq A$ y $[H]^n \subseteq X_i$ para alguna $i \in \{1, ..., k\}$.*

Un resultado muy conocido de combinatoria infinita es el siguiente. (Una demostración detallada puede consultarse en [10], páginas 321 y 322).

Lema 2.19 (Teorema de Ramsey) *Sean n y k números naturales. Toda partición $\{X_1, ..., X_k\}$ de $[\omega]^n$ en k pedazos tiene un conjunto infinito homogéneo. De manera equivalente, para toda $F : [\omega]^n \twoheadrightarrow k$, F sobreyectiva, existe una H infinita tal que $H \subseteq \omega$, y F es constante en $[H]^n$.*

Para entender un poco más este teorema, ayuda pensar en las particiones como coloraciones; es decir, pintamos los $n-$conjuntos de ω de k colores distintos. Por lo tanto, el teorema de Ramsey nos dice que bajo estas condiciones, existe un subconjunto infinito de ω, cuyos $n-$conjuntos son todos del mismo color.

Como vimos, un ultrafiltro selectivo también es llamado de Ramsey. El siguiente teorema nos da una idea de la razón de este nombre. La diferencia con el teorema de Ramsey es que se sustituye al conjunto homogéneo infinito, por un conjunto homogéneo miembro del ultrafiltro.

Proposición 2.20 *Sea U un ultrafiltro no principal sobre ω. Entonces U es selectivo si, y sólo si toda partición finita $\{Y_1, ..., Y_k\}$ del conjunto $[\omega]^n$ de subconjuntos de ω de n elementos (n un número finito) tiene un conjunto homogéneo $H \in U$. Esto es, $[H]^n \subseteq Y_i$ para alguna i.*

Demostración. Supongamos que U tiene la propiedad de partición asumida por el teorema, y queremos demostar que U es selectivo. Tomamos una partición $P = \{X_i\}_{i \in I}$ de ω, donde $X_i \notin U$ para toda $X_i \in P$. Tenemos que encontrar un conjunto $X \in U$ de tal forma que $|X \cap X_i| \leq 1$ para toda $X_i \in P$. Definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \{\{x, y\} \in [\omega]^2 : x, y \text{ están en el mismo miembro de la partición } P\}; \\ Y_2 &= [\omega]^2 - Y_1. \end{aligned}$$

$\{Y_1, Y_2\}$ es una partición de $[\omega]^2$. Por la hipótesis, existe un elemento $H \in U$ tal que H es homogéneo para la partición. Este H es el conjunto selectivo que buscamos. Veamos que $|H \cap X_i| \leq 1$ para toda $X_i \in P$. Supongamos que para alguna $i \in I$, existen $n \neq m$ tales que $\{n, m\} \subseteq H \cap X_i$. Por ser H homogéneo para $\{Y_1, Y_2\}$, $[H]^2 \subseteq Y_1$ o $[H]^2 \subseteq Y_2$; pero n y m están en el mismo miembro de la partición X_i, entonces $\{n, m\} \subseteq Y_1$ por la definición de Y_1. Por lo tanto,

$$[H]^2 \subseteq Y_1.$$

Fijemos n y sea $k \in H$. Entonces $\{n, k\} \in [H]^2 \subseteq Y_1$, por lo que k está en el mismo miembro de la partición que n. Por ende, $H \subseteq X_i$. Como $H \in U$ y U es ultrafiltro, tenemos que $X_i \in U$, una contradicción. Por lo tanto, la cardinalidad de $H \cap X_i$ es, a lo más, uno.

Ahora supongamos que U es un ultrafiltro selectivo. Vamos a demostrar primero que:

Afirmación 2.21 *Si $X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \cdots$ son conjuntos en U, entonces existe una sucesión $a_o < a_1 < a_2 < \cdots$ tal que $\{a_n\}_{n\in\omega} \in U$ y $a_{n+1} \in X_{a_n}$ para toda n.*

Ahí vamos. Sean $X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq ...$ conjuntos en U. Como U es un p-punto, existe $Y \in U$ tal que cada $Y - X_n$ es finita por el lema 2.14.

Definamos una sucesión $y_0 < y_1 < \cdots$ en Y como sigue:

$$\begin{aligned} y_0 &= \min\{y \in Y : \{z \in Y : z > y\} \subseteq X_0\}; \\ y_{n+1} &= \min\{y \in Y : y > y_n \text{ y } \{z \in Y : z > y\} \subseteq X_{y_n}\}. \end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned} A_0 &= \{y \in Y : y \leq y_0\}; \\ A_{n+1} &= \{y \in Y : y_n < y \leq y_{n+1}\}. \end{aligned}$$

$\{A_n\}_{n\in\omega}$ es una partición de Y. Por lo tanto, podemos definir una partición de ω como sigue:

$$P = \{A_n\}_{n\in\omega} \cup \{Y^C : \text{si } Y^C \neq \emptyset\}.$$

Es claro que toda A_n es finita por lo que ninguna pertenece a U; por otro lado, $Y \in U$ implica que $Y^C \notin U$. Entonces P es una partición, cuyos elementos no son miembros de U. Como U es selectivo, entonces existe $X \in U$ tal que su intersección con cada miembro de P es de un elemento. Sea

$$X' = X \cap Y;$$

es decir, elementos de X que se encuentren exclusivamente en alguna A_n. Además, X' es intersección de elementos de U, por lo que $X' \in U$. Entonces podemos decir que $X' \cap A_n = \{z_n\}$, pues $X' \subseteq X$ y $|X \cap A_n| = 1$. Si $x \in X' \subseteq Y$, entonces $x \in A_n$ para alguna $n \in \omega$, pues P es una partición de ω. Entonces $x = z_n$. De esta forma, $\{z_n\}_{n\in\omega} \supseteq X'$, por lo que $\{z_n\}_{n\in\omega} \in U$. Por lo tanto, $\{z_n\}_{n\in\omega}$ es un conjunto de manera que $\{z_n\}_{n\in\omega} \in U$ y $z_n \in A_n$ para toda n.

Como

$$z_{n+2} \in A_{n+2} = \{y \in Y : y_{n+2} < y \leq y_{n+3}\},$$

entonces $z_{n+2} > y_{n+2}$. Por la definición de y_{n+2},

$$z_{n+2} \in X_{y_{n+1}}.$$

Como $y_{n+1} \geq z_n$ (ya que $z_n \in A_n = \{y \in Y : y_n < y \leq y_{n+1}\}$),

$$X_{y_{n+1}} \subseteq X_{z_n}$$

y por lo tanto

$$z_{n+2} \in X_{z_n}.$$

Si hacemos $a_n = z_{2n}$ y $b_n = z_{2n+1}$ para toda n, ya sea que $\{a_n\}_{n\in\omega} \in U$ o que $\{b_n\}_{n\in\omega} \in U$ por el lema 2.5. En cualquier caso obtenemos una sucesión donde se cumple la afirmación 2.21.

Ahora utilicemos esta afirmación para probar la propiedad de la partición. Procedamos por inducción.

Para $n = 1$, sea F una partición de $[\omega]$ en k partes[3]. Podemos hacer $G : \omega \longrightarrow k$ de tal forma que $G(n) = F(\{n\})$. Tenemos dos casos: Si existe $m < k$, $G^{-1}(m) \in U$, ya terminamos, pues $[G^{-1}(m)] = F^{-1}(m)$. En caso contrario, $\forall m < k$, $G^{-1}(m) \notin U$; entonces $(G^{-1}(m))^C \in U$ porque U es ultrafiltro y por ende $\bigcap\limits_{m<k} [G^{-1}(m)]^C \in U$. Como G es una partición de ω, usando las leyes de De Morgan se obtiene que

$$\bigcap_{m<k}(G^{-1}(m))^C = (\bigcup_{m<k} G^{-1}(m))^C = G^{-1}(k)$$

y por lo tanto $G^{-1}(k)$ sería el homogéneo que estamos buscando.

Sea F una función sobreyectiva de $[\omega]^{n+1}$ en $\{1, ..., k\}$. Para cada $a \in \omega$, sea F_a una función sobre $[\omega - \{a\}]^n$ definida por

$$F_a(\{x_1, ..., x_n\}) = F(\{x_1, ..., x_n\} \cup \{a\}).$$

Queremos usar la hipótesis de inducción, pero aún no es posible, pues la partición F_a está definida sobre $[\omega - \{a\}]^n$ y no sobre $[\omega]^n$. Pero a F_a la podemos extender a una $F'_a : [\omega]^n \longrightarrow k + 1$ de tal forma que $F'(x) = F_a(x)$ si $a \notin x$, y $F'(x) = k+1$ si $a \in x$. Entonces, por hipótesis de inducción, existe una $H'_a \in U$ tal que $[H'_a]^n$ es homogéneo para F' sobre $[\omega]^n$. Ahora hacemos $H_a = H'_a - \{a\}$, y es claro que este conjunto es homogéneo sobre $[\omega - \{a\}]^n$ para la partición F. Además, como $\{a\}$ es finito esto quiere decir que $\{a\}^C \in U$. Así que

$$H'_a - \{a\} = H'_a \cap \{a\}^C = H_a \in U.$$

Hagamos la siguiente partición de los naturales: Sea G definida en ω tal que $G(a) = F_a[H_a]$; es decir, a cada natural a le asigna el "color" de los $n-$conjuntos del conjunto homogéneo correspondiente H_a. Entonces, por un razonamiento similar al de la base de inducción, existe $X \in U$ tal que G es constante en U. Por lo tanto, existe $X \in U$ tal que el valor constante de F_a es el mismo para toda $a \in X$; digamos que $F_a(x) = r$ para toda $a \in X$ y toda $x \in [H_a]^n$.

[3]Recordemos que una partición de un conjunto X en k pedazos puede ser visto como una función sobreyectiva $F : X \twoheadrightarrow k$, y donde el pedazo $i-$ésimo es $F^{-1}(i)$ para $i \in k$.

Tomamos esta X, y para cada n, sea

$$X_n = X \cap H_0 \cap H_1 \cap \cdots \cap H_n.$$

Por la afirmación 2.21, existe una sucesión $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots$ tal que $a_{n+1} \in X_{a_n}$ para cada n, y que $\{a_n\}_{n\in\omega} \in U$. Sea

$$H = \{a_{n+1}\}_{n\in\omega}.$$

Para toda $a_{i+1} \in H$, como $a_i \geq 0$, se tiene que

$$a_{i+1} \in X_{a_i} \subseteq X_0 = X \cap H_0 \subseteq X,$$

lo que quiere decir que, en todos los conjuntos homogéneos $H_{a_{i+1}}$, sus n-conjuntos son "coloreados" del mismo color r de acuerdo con la coloración respectiva $F_{a_{i+1}}$. Además, si $m = i + r + 1$, entonces

$$a_m = a_{i+r+1} \in X_{a_{i+r}} = X \cap H_0 \cap H_1 \cap \cdots \cap H_{a_i} \cdots \cap H_{a_{i+r}},$$

por lo que

$$\{a_m : m > i\} \subseteq H_{a_i},$$

Entonces $F_{a_i}(x) = r$ para toda $x \in [\{a_m : m > i\}]^n$. Por lo tanto, para toda $x \in [H]^{n+1}$, con $\beta = mín\{m : a_m \in x\}$,

$$\begin{aligned} F(x) &= F_{a_\beta}(x - a_\beta) \\ &= r. \end{aligned}$$

■

Capítulo 3

Sobre la existencia de una función de numerosidad

3.1 Numerosidades y funciones no decrecientes

Sabiendo que $\langle N, +, \cdot, \leq, 1, 0\rangle$ es un semianillo positivo con elementos neutros, lo relacionaremos con el semianillo parcialmente ordenado $\langle \mathcal{F}, +, \cdot, \leq\rangle$ viendo que son homomorfos. Para ello, asociamos a cada $\varphi \in \mathcal{F}$ un conjunto etiquetado A_φ, del cual nos fijaremos en su numerosidad.

Ya hicimos notar que la familia de funciones

$$\mathcal{F} = \{\varphi : \omega \longrightarrow \omega : \ \varphi \text{ es no decreciente}\}$$

es un semianillo parcialmente ordenado (lema 1.19). Para todo conjunto etiquetado $\mathbf{A}$, la sucesión aproximante

$$\gamma_A : n \longmapsto |A_n|$$

es no decreciente, y por tanto está en $\mathcal{F}$. Inversamente, toda $\varphi \in \mathcal{F}$ es la sucesión aproximante γ_A de algún conjunto etiquetado $\mathbf{A}$. Para toda $\varphi \in \mathcal{F}$ definamos $\varphi(-1) = 0$ y sea

$$A_{\varphi,n} = \{0, 1, ..., \varphi(n) - \varphi(n-1) - 1\}$$

para toda $n \in \omega$ (algunos de estos conjuntos pueden ser vacíos). Entonces

$$|A_{\varphi,n}| = \varphi(n) - \varphi(n-1).$$

Sea

$$A_\varphi = \uplus A_{\varphi,n} = \cup (A_{\varphi,n} \times \{n\})$$

la unión disjunta de los conjuntos $A_{\varphi,n}$ y como antes, a $(x, n) \in A_\varphi$ lo escribimos como x_n.

Sea

$$l_\varphi : A_\varphi \longrightarrow \omega$$

la etiquetación tal que, para toda $a_n \in A_\varphi$,

$$l_\varphi(a_n) = n.$$

Es decir, a cada miembro de A_φ le asigna el "color" del que está "pintado" de acuerdo a la unión ajena. Claramente $\mathbf{A}_\varphi = \langle A_\varphi, l_\varphi \rangle$ es un conjunto etiquetado. Además,

$$\gamma_{A_\varphi} = \varphi \tag{3.1}$$

pues, para toda n,

$$\begin{aligned}
\gamma_{A_\varphi}(n) &= |(A_\varphi)_n| \\
&= |A_{\varphi,0}| + |A_{\varphi,1}| + \cdots + |A_{\varphi,n-1}| + |A_{\varphi,n}| \\
&= (\varphi(0) - \varphi(-1)) + (\varphi(1) - \varphi(0)) + \cdots \\
&\quad + (\varphi(n-1) - \varphi(n-2)) + (\varphi(n) - \varphi(n-1)) \\
&= \varphi(n) - \varphi(-1) \\
&= \varphi(n) - 0 \\
&= \varphi(n).
\end{aligned}$$

Recordemos que dos conjuntos etiquetados poseedores de la misma sucesión aproximante tienen la misma numerosidad (observación 1.11). Dado un conjunto etiquetado $\mathbf{B}$, su función aproximante γ_B define un conjunto etiquetado $\mathbf{A}_{\gamma_B}$. Como los dos tienen la misma sucesión aproximante, por ende tienen la misma numerosidad. Por esta razón la siguiente función está bien definida:

Definición 3.1 *Sea* $\nu : \mathcal{F} \twoheadrightarrow N$ *la función tal que* $\nu(\varphi) = num(\mathbf{A}_\varphi)$.

Observación 3.2 *Para todo conjunto etiquetado* $\mathbf{B}$, $\nu(\gamma_B) = num(\mathbf{B})$.

Teorema 3.3 ν *es un homomorfismo de semianillos parcialmente ordenados.*

Demostración.

-

- Preserva la suma. Por un lado, la ecuación 3.1 nos dice que

$$\gamma_{A_{\varphi+\psi}} = \varphi + \psi.$$

Por otro lado, usando el lema 1.9 y la ecuación 3.1,

$$\gamma_{A_\varphi \uplus A_\psi} = \gamma_{A_\varphi} + \gamma_{A_\psi} = \varphi + \psi.$$

Por lo tanto,

$$\gamma_{A_{\varphi+\psi}} = \gamma_{A_\varphi \uplus A_\psi}.$$

Por la observación 1.11, $num(\mathbf{A}_{\varphi+\psi}) = num(\mathbf{A}_{\varphi} \oplus \mathbf{A}_{\psi})$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \nu(\varphi+\psi) &= num(\mathbf{A}_{\varphi+\psi}) \\ &= num(\mathbf{A}_{\varphi} \oplus \mathbf{A}_{\psi}) \\ &= num(\mathbf{A}_{\varphi}) + num(\mathbf{A}_{\psi}) \\ &= \nu(\varphi+\psi) \\ &= \nu(\varphi)+\nu(\psi). \end{aligned}$$

- La demostración que preserva producto es análoga a la demostración de la preservación de la suma.
- Falta demostrar que ν preserva el orden. Sea $\varphi \leq \psi$. Entonces para toda n,

  $$\gamma_{A_{\varphi}}(n) = |(\mathbf{A}_{\varphi})_n| = \varphi(n) \leq \psi(n) = |(\mathbf{A}_{\psi})_n| = \gamma_{A_{\psi}}(n),$$

  y por lo tanto

  $$\nu(\varphi) = num(\mathbf{A}_{\varphi}) \leq num(\mathbf{A}_{\psi}) = \nu(\psi)$$

  por la propiedad (i) de las numerosidades.

■

3.2 Conjuntos calificados

En esta sección damos la definición de un conjunto calificado. La colección de conjuntos calificados resultará ser un ultrafiltro selectivo.

Definición 3.4 *Un conjunto $D \subseteq \omega$ está calificado si existen $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$*[1] *con $\nu(\varphi) = \nu(\psi)$ y $D = \{n : \varphi(n) = \psi(n)\}$.*

En otras palabras, D está calificado si, y sólo si existen dos conjuntos etiquetados equinumerosos $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tales que D es el conjunto de niveles n en las que las aproximaciones finitas $\gamma_A(n) = \gamma_B(n)$ coinciden. Sea

$$\mathcal{C} = \{D \subseteq \omega : D \text{ está calificado}\}.$$

Los siguientes resultados muestran que los conjuntos calificados son los elementos de un ultrafiltro selectivo.

Lema 3.5 $\emptyset \notin \mathcal{C}$. *Esto es, si $\varphi(n) \neq \psi(n)$ para toda n, entonces $\nu(\varphi) \neq \nu(\psi)$.*

[1] Recordemos que $\mathcal{F} = \{\varphi : \omega \longrightarrow \omega$ tales que φ es no decreciente$\}$(lema 1.19).

Demostración. Para cada n,

$$\begin{aligned}
&[\varphi(n) - \psi(n)]^2 > 0 \\
\Rightarrow\ &\varphi^2(n) - 2\varphi(n)\psi(n) + \psi^2(n) > 0 \\
\Rightarrow\ &\varphi^2(n) - 2\varphi(n)\psi(n) + \psi^2(n) \geq 1 \\
\Rightarrow\ &\varphi^2(n) + \psi^2(n) \geq 2\varphi(n)\psi(n) + 1.
\end{aligned}$$

Como ν es un homomorfismo de anillos parcialmente ordenados, obtenemos que

$$\nu^2(\varphi) + \nu^2(\psi) \geq 2\nu(\varphi)\nu(\psi) + 1. \tag{3.2}$$

Sucede que $\nu(\varphi) \neq \nu(\psi)$: en caso contrario tendríamos que

$$\nu^2(\varphi) + \nu^2(\varphi) = 2\nu^2(\varphi) \tag{3.3}$$

y

$$2\nu(\varphi)\nu(\psi) + 1 = 2\nu^2(\varphi) + 1. \tag{3.4}$$

Sustituyendo las ecuaciones 3.3 y 3.4 en la desigualdad 3.2 nos quedaría la desigualdad

$$2\nu^2(\varphi) \geq 2\nu(\varphi)^2 + 1,$$

lo que a su vez implicaría, aplicando las leyes de cancelación de las numerosidades (proposición 1.21), que $0 \geq 1$, contradiciendo la observación 1.13. ■

El siguiente lema nos será de utilidad en varios de los resultados subsecuentes cuando queramos demostrar que un conjunto está calificado.

Lema 3.6 *Sea ϑ_D la función no decreciente tal que*

$$\vartheta_D(n) = n$$

si $n \in D$ y

$$\vartheta_D(n) = n + 1$$

en otro caso. Entonce $D \in \mathcal{C}$ si, y sólo si $\nu(\vartheta_D) = \nu(1_\omega)$.

Demostración. Por definición, si $\nu(\vartheta_D) = \nu(1_\omega)$, tenemos que

$$n \in D \Leftrightarrow \vartheta_D(n) = n = 1_\omega(n).$$

Entonces $D = \{n | \vartheta_D(n) = 1_\omega(n)\}$ y por lo tanto, $D \in \mathcal{C}$. Recíprocamente, supongamos que $D \in \mathcal{C}$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que

$$D = \{n : \varphi(n) = \psi(n)\},$$

donde $\nu(\varphi) = \nu(\psi)$ y ambas φ y ψ son estrictamente crecientes (en otro caso, consideramos $\varphi' = \varphi + 1_\omega$ y $\psi' = \psi + 1_\omega$, y es claro que $\varphi(n) = \psi(n) \Leftrightarrow \varphi'(n) = \psi'(n)$). Consideremos la función no decreciente τ tal que

$$\tau(n) = \varphi(n)$$

si $n \in D$ y

$$\tau(n) = \varphi(n) + 1$$

en otro caso. Si $n \in D$,

$$\tau(n) = \varphi(n) = \psi(n) \neq \psi(n) + 1$$

pues ψ es estrictamente creciente; si $n \notin D$, entonces

$$\tau(n) = \varphi(n) + 1 \neq \psi(n) + 1,$$

ya que $\varphi(n) \neq \psi(n)$, por lo que, para toda $n \in \omega$, $\tau(n) \neq \psi(n) + 1$. Así, por el lema 3.5, $\nu(\tau) \neq \nu(\psi) + 1 = \nu(\varphi) + 1$. Puesto que $\varphi \leq \tau \leq \varphi + 1$, tiene que ser

$$\nu(\tau) = \nu(\varphi). \tag{3.5}$$

Pero

$$\begin{aligned}
(\tau + 1_\omega)(n) &= \begin{cases} \varphi(n) + n \text{ si } n \in D \\ (\varphi(n) + 1) + n \text{ si } n \notin D \end{cases} \\
&= \begin{cases} \varphi(n) + n \text{ si } n \in D \\ \varphi(n) + (n+1) \text{ si } n \notin D \end{cases} \\
&= (\varphi + \vartheta_D)(n),
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\nu(\tau) + \nu(1_\omega) = \nu(\varphi) + \nu(\vartheta_D),$$

y, usando la ecuación 3.5 junto con las leyes de la cancelación,

$$\nu(1_\omega) = \nu(\vartheta_D).$$

■

Ya vimos que un conjunto calificado está compuesto de elementos donde concuerdan las sucesiones aproximantes de conjuntos etiquetados y cuyas numerosidades correspondientes son las mismas. Pero se puede decir más: dadas dos funciones cualesquiera, si el conjunto donde coinciden es un conjunto calificado (es decir, el conjunto calificado no necesariamente tiene que estar determinado por estas dos funciones) entonces tienen la misma numerosidad asociada.

Proposición 3.7 $D = \{n : \varphi(n) = \psi(n)\} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \nu(\varphi) = \nu(\psi)$.

Demostración. Una dirección es la definición de conjunto calificado. Para la otra, notemos que

$$\varphi \cdot 1_\omega + \varphi + \psi \cdot \vartheta_D = \psi \cdot 1_\omega + \psi + \varphi \cdot \vartheta_D,$$

ya que

$$
\begin{aligned}
(\varphi \cdot 1_\omega)(n) + \varphi(n) + (\psi \cdot \vartheta)(n) &= \begin{cases} \varphi(n) \cdot n + \varphi(n) + \psi(n) \cdot n \text{ si } n \in D \\ \varphi(n) \cdot n + \varphi(n) + \psi(n) \cdot (n+1) \text{ si } n \notin D \end{cases} \\
&= \begin{cases} \varphi(n) \cdot n + \varphi(n) + \psi(n) \cdot n \text{ si } n \in D \\ \varphi(n) \cdot n + \varphi(n) + \psi(n) \cdot n + \psi(n) \text{ si } n \notin D \end{cases} \\
&= \begin{cases} \psi(n) \cdot n + \varphi(n) + \varphi(n) \cdot n \text{ si } n \in D \\ \psi(n) \cdot n + \psi(n) + \varphi(n) \cdot n + \varphi(n) \text{ si } n \notin D \end{cases} \\
&= \begin{cases} \psi(n) \cdot n + \varphi(n) + \varphi(n) \cdot n \text{ si } n \in D \\ \psi(n) \cdot n + \psi(n) + \varphi(n) \cdot (n+1) \text{ si } n \notin D \end{cases} \\
&= (\psi \cdot 1_\omega)(n) + \psi(n) + (\varphi \cdot \vartheta)(n).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\nu(\varphi) \cdot \nu(1_\omega) + \nu(\varphi) + \nu(\psi) \cdot \nu(\vartheta_D) = \nu(\psi) \cdot \nu(1_\omega) + \nu(\psi) + \nu(\varphi) \cdot \nu(\vartheta_D).$$

Si $\nu(\vartheta_D) = \nu(1_\omega)$, entonces claramente $\nu(\varphi) = \nu(\psi)$. ∎

Proposición 3.8 *Sean D y E subconjuntos de ω. Entonces*

1. $D \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \omega - D \notin \mathcal{C}$;
2. Si D es unitario, entonces $D \notin \mathcal{C}$;
3. Si D y E están calificados, entonces $D \cap E \in \mathcal{C}$.

Demostración.

1. Para cada $n \in \omega$,
$$\vartheta_D(n) + \vartheta_{D^C}(n) = n + n + 1$$
que a su vez quiere decir que
$$\vartheta_D + \vartheta_{D^C} = 1_\omega + 1_\omega + 1.$$
Entonces
$$\nu(\vartheta_D) + \nu(\vartheta_{D^C}) = \nu(1_\omega) + \nu(1_\omega) + 1. \tag{3.6}$$
Sea $D \in \mathcal{C}$. Si $D^C \in C$, usando el lema 3.6, tenemos que
$$\nu(\vartheta_D) = \nu(\vartheta_{D^C}) = \nu(1_\omega).$$
Pero sustituyendo estas igualdades en la ecuación 3.6, y usando las leyes de la cancelación de numerosidades (proposición 1.21), tendríamos que $0 = 1$, lo que contradice a la observación 1.13. Por lo tanto, $D^C \in \mathcal{C}$.

Inversamente, notemos que para toda $n \in \omega$,
$$n \leq \vartheta_D(n) \leq n + 1,$$

o lo que es lo mismo,

$$1_\omega \leq \vartheta_D \leq 1_\omega + 1.$$

Por ende,

$$\nu(1_\omega) \leq \nu(\vartheta_D) \leq \nu(1_\omega + 1) = \nu(1_\omega) + 1.$$

Si $\nu(\vartheta_D) \neq \nu(1_\omega)$, i.e., si D no está calificado (lema 3.6), entonces,

$$\nu(\vartheta_D) = \nu(1_\omega) + 1. \tag{3.7}$$

Usando las ecuaciones 3.7 y 3.6 obtenemos que $\nu(\vartheta_{D^C}) = \nu(1_\omega)$, y por lo tanto D^C es calificado por el lema 3.6.

2. Sea k dado, y consideramos los conjuntos etiquetados $\mathbf{A} = \langle\{0,1\}, l_A\rangle$ y $\mathbf{B} = \langle\{1\}, l_B\rangle$ donde

$$\begin{aligned} l_A(0) &= 0; \\ l_A(1) &= k+1 \end{aligned}$$

y

$$l_B(1) = k.$$

El lector observador se habrá dado cuenta que no estamos usando la etiquetación canónica, pero se utilizan números naturales para mayor claridad, ya que para la prueba no importa en absoluto el tipo de elementos sino que los conjuntos sean de cardinal 2 y 1 respectivamente. Aclarado esto, sigamos con la prueba. Por un lado,

$$\gamma_A(n) = 1 \text{ si } n \leq k$$

y

$$\gamma_A(n) = 2 \text{ si } n > k.$$

Por otro lado

$$\gamma_B(n) = 1 \Leftrightarrow n \geq k.$$

Entonces $\{n : \gamma_A(n) = \gamma_B(n)\} = \{k\}$. Como

$$\nu(\gamma_A) = num(\mathbf{A}) = 2 \neq 1 = num(\mathbf{B}) = \nu(\gamma_B),$$

(la numerosidad de los conjuntos finitos coincide con su cardinal, ver proposición 1.12, inciso *4*) $\{k\}$ no está calificado por la proposición 3.7.

3. Tenemos dos casos:

   (a) $0 \notin (E-D) \cup (D-E)$. De manera equivalente $0 \in (D \cap E)$ o $0 \notin (D \cup E)$; es decir, el cero está en los dos o no está en ninguno de los dos. Por hipótesis $\nu(\vartheta_D) = \nu(\vartheta_E) = \nu(1_\omega)$, y por tanto

$$\nu(\vartheta_D \cdot \vartheta_E) = \nu^2(1_\omega) = \nu(1_\omega \cdot 1_\omega). \tag{3.8}$$

Queremos que $\vartheta_D \cdot \vartheta_E$ y $1_\omega \cdot 1_\omega$ sean las funciones que definan a $E \cap D$. Por un lado

$$\begin{aligned} D \cap E &= \{n \in \omega : n \in D \text{ y } n \in E\} \\ &= \{n \in \omega : \vartheta_D(n) = n \text{ y } \vartheta_E(n) = n\} \\ &\subseteq \{n \in \omega : (\vartheta_D \cdot \vartheta_E)(n) = n^2\}. \end{aligned}$$

Sea

$$n \in \{n : \vartheta_D(n) \cdot \vartheta_E(n) = n^2\}. \tag{3.9}$$

Supongamos que $n \notin D \cap E$. Tenemos otra vez dos casos:

- n no pertence ni a D ni a E. Entonces, usando la definición de ϑ y 3.9

  $$\vartheta_D(n) \cdot \vartheta_E(n) = (n+1)^2 = n^2.$$

  Pero esto no puede ser: Si

  $$(n+1)^2 = n^2,$$

  entonces

  $$n^2 + 2n + 1 = n^2,$$

  que a su vez implicaría que

  $$2n + 1 = 0,$$

  una contradicción (el cero no es impar).

- n está en uno, pero no está en otro, esto es, $n \in (E - D) \cup (D - E)$. Entonces

  $$\vartheta_D(n) \cdot \vartheta_E(n) = n(n+1) = n^2,$$

  lo que implicaría que

  $$n^2 + n = n^2,$$

  y por lo tanto

  $$n = 0.$$

  Pero supusimos que $0 \notin (E - D) \cup (D - E)$.

Por lo tanto, $n \in D \cap E$, y

$$\{n \in \omega : (\vartheta_D \cdot \vartheta_E)(n) = n^2\} = D \cap E. \tag{3.10}$$

Entonces, por las ecuaciones 3.8, 3.10 y la definición 3.4, $D \cap E$ está calificado.

(b) Ahora supongamos que $0 \in (E - D) \cup (D - E)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $0 \in D$ (y no está en E).

Afirmación 3.9 *Para cualesquiera $A, B \subseteq \omega$, si $A \cup B \in \mathcal{C}$, y $0 \notin (A \cup B)$, entonces $A \in \mathcal{C}$ o $B \in \mathcal{C}$.*

Sea

$$A \cup B \in \mathcal{C}. \tag{3.11}$$

Seguiremos de manera muy parecida la prueba del lema 2.5. Si ninguno de A o B está, entonces está su complemento; es decir, $A^C \in \mathcal{C}$ y $B^C \in \mathcal{C}$. Como

$$0 \notin (A \cup B),$$

entonces

$$0 \in (A \cup B)^C = A^C \cap B^C.$$

Pero esto querría decir, por el inciso (a), que

$$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C \in \mathcal{C},$$

una contradicción con 3.11 y el primer inciso de esta proposición que estamos demostrando.

Regresemos a lo que estábamos haciendo. Como $\{0\}$ es unitario, no está calificado por el inciso *2*. Entonces

$$\{0\}^C = (D - \{0\}) \cup D^C \in \mathcal{C},$$

y por lo que acabamos de demostrar en la afirmación 3.9, $D^C \in \mathcal{C}$ o $D - \{0\} \in \mathcal{C}$. Pero $D \in \mathcal{C}$, por lo que sólo puede suceder que $(D - \{0\}) \in \mathcal{C}$. Entonces, $D \cap E = (D - \{0\}) \cap E$ está calificado por lo que demostramos en el caso (a).

■

El lema 3.5, la proposición 3.8 y el lema 2.6 nos demuestran que la colección $\mathcal{C}$ de conjuntos calificados es un ultrafiltro no principal.

Proposición 3.10 *Para toda función $\varphi : \omega \longrightarrow \omega$ existe una $\psi \in \mathcal{F}$ tal que $\{n : \varphi(n) = \psi(n)\} \in \mathcal{C}$.*

Demostración. Primero definimos dos funciones ξ y ζ de la siguiente manera:

$$\xi(n+1) = \zeta(n) = \varphi(0) + \cdots + \varphi(n)$$

y

$$\xi(0) = 0.$$

Claramente ξ y ζ son funciones no decrecientes, y además son tales que

$$\xi + \varphi = \zeta, \tag{3.12}$$

pues

$$\begin{aligned}
\xi(0)+\varphi(0) &= 0+\varphi(0)\\
&= \varphi(0)\\
&= \zeta(0),
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\xi(n+1)+\varphi(n+1) &= (\varphi(0)+\cdots+\varphi(n))+\varphi(n+1)\\
&= \zeta(n+1).
\end{aligned}$$

En particular $\xi \leq \zeta$. Por lo tanto existen conjuntos etiquetados $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$ tales que

$$\nu(\xi) = num(\mathbf{A}) \tag{3.13}$$

y

$$\nu(\zeta) = num(\mathbf{B}). \tag{3.14}$$

Sea $\mathbf{C} = \mathbf{B}-\mathbf{A}$. Como siempre, denotemos por γ_A, γ_B y γ_C a las sucesiones aproximantes correspondientes.Ya vimos que $\gamma_{A\uplus C}=\gamma_B$ (ver demostración de que N es un semianillo positivo, proposición 1.22, ecuación 1.7), entonces

$$\nu\left(\gamma_{A\uplus C}\right) = \nu(\gamma_B),$$

i.e.,

$$\nu(\gamma_A) + \nu(\gamma_C) = \nu(\gamma_B). \tag{3.15}$$

Sabemos por la observación 3.2 y las ecuaciones 3.13 y 3.14 que

$$\nu(\gamma_A) = num(\mathbf{A}) = \nu(\xi) \tag{3.16}$$

y

$$\nu(\gamma_B) = num(\mathbf{B}) = \nu(\zeta). \tag{3.17}$$

Por lo tanto, sustituyendo las ecuaciones 3.16 y 3.17 en la ecuación 3.15,

$$\nu\left(\xi\right) + \nu\left(\gamma_C\right) = \nu(\xi + \gamma_C) = \nu(\zeta). \tag{3.18}$$

Entonces

$$\{n : \xi(n) + \gamma_C(n) = \zeta(n)\} = \{n : \gamma_C(n) = \varphi(n)\}$$

(la igualdad se da por la ecuación 3.12) está calificado por la ecuación 3.18, y la función $\psi = \gamma_C$ satisface la tesis. ∎

3.3 ¿Existe una función de numerosidad?

La mayor parte de esta sección se dedica a la demostración de que la existencia de una función de numerosidad es equivalente a la existencia de un ultrafiltro selectivo.

Sea D un ultrafiltro propio sobre un conjunto I, tal que $I \neq \emptyset$, y para toda $i \in I$, los conjuntos $A_i \neq \emptyset$. Sea

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i : \text{ para toda } i \in I,\, f(i) \in A_i \right\}$$

el producto cartesiano. Sea

$$f =_D g \Leftrightarrow \{i \in I : f(i) = g(i)\} \in D.$$

Se trata de establacer qué tan parecidas son dos "I−adas" según D.

Lema 3.11 $=_D$ *es una relación de equivalencia.*

Demostración. La relación $=_D$ hereda la simetría de la igualdad y es reflexiva debido a que $\{i \in I : f(i) = f(i)\} = I \in D$, por la propiedad *1* de los ultrafiltros. Sea $f =_D g$ y $g =_D h$. Esto quiere decir que

$$\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in D$$

y

$$\{i \in I : g(i) = h(i)\} \in D.$$

Por lo tanto,

$$\{i \in I : f(i) = g(i)\} \cap \{i \in I : g(i) = h(i)\} \in D.$$

Como

$$\{i \in I : f(i) = g(i)\} \cap \{i \in I : g(i) = h(i)\} \subseteq \{i \in I : f(i) = h(i)\},$$

entonces

$$\{i \in I : f(i) = h(i)\} \in D,$$

y por lo tanto, $f =_D h$. ■

Notación 3.12 *Sea* $[f] = \left\{ g \in \prod_{i \in I} A_i : f =_D g \right\}$.

Definición 3.13 *El producto reducido de las A_i módulo D es*

$$\prod_D A_i = \left\{ [f] : f \in \prod_{i \in I} A_i \right\}.$$

A I se le llama el conjunto índice para $\prod_D A_i$. En el caso especial donde D es un ultrafiltro sobre I, el producto reducido $\prod_D A_i$ se le llama ultraproducto. Cuando todos los conjuntos A_i son los mismos, por decir $A_i = A$ para toda $i \in I$, el producto puede ser escrito A_D^I, y se le llama la potencia reducida de A módulo D. En particular, si D es un ultrafiltro, a A_D^I se le llama la ultrapotencia de A módulo D o la D-ultrapotencia de A.

Ahora vamos a realizar la demostración de uno de los resultados principales de la tesis.

Teorema 3.14 *Existe una función de numerosidad si, y sólo si existe un ultrafiltro selectivo.*

Ya hicimos notar que la familia $\mathcal{C}$ de conjuntos calificados es un ultrafiltro no principal sobre ω. La selectividad de $\mathcal{C}$ se sigue directamente de la proposición 3.10 (y la proposición 2.10).

Ahora supongamos que existe un ultrafiltro selectivo U. Consideramos la ultrapotencia de ω módulo U:

$$N = \omega_U^\omega = \{[\varphi] | \varphi : \omega \longrightarrow \omega\}$$

donde $[\varphi]$ es la clase de equivalencia de φ módulo la relación de equivalencia

$$\varphi =_U \psi \Leftrightarrow \{n : \varphi(n) = \psi(n)\} \in U.$$

Se dice que φ es U-equivalente a ψ.

Definición 3.15 *Sea* $[\varphi] \leq [\psi] \Leftrightarrow \{n : \varphi(n) \leq \psi(n)\} \in U$.

Proposición 3.16 $\leq$ *está bien definida (i.e., no depende de los representantes escogidos en las clases de equivalencia).*

Demostración. Sean $[\varphi] \leq [\psi], \varphi =_U \varphi'$ y $\psi =_U \psi'$. Entonces $\{n : \varphi(n) \leq \psi(n)\}, \{n : \varphi(n) = \varphi'(n)\}$ y $\{n : \psi(n) = \psi'(n)\}$ están en U. Por lo que

$$\{n : \varphi(n) = \varphi'(n)\} \cap \{n : \psi(n) = \psi'(n)\} \cap \{n : \varphi(n) \leq \psi(n)\} \in U;$$

pero

$$\{n : \varphi(n) = \varphi'(n)\} \cap \{n : \psi(n) = \psi'(n)\} \cap \{n : \varphi(n) \leq \psi(n)\} \subseteq \{n : \varphi'(n) \leq \psi'(n)\},$$

lo que implica que

$$\{n : \varphi'(n) \leq \psi'(n)\} \in U.$$

Por lo tanto, $[\varphi'] \leq [\psi']$. ∎

Proposición 3.17 $\langle N, \leq \rangle$ *es un conjunto linealmente ordenado.*

Demostración. Sean $\varphi,\psi : \omega \longrightarrow \omega$. Entonces

$$\omega = \{n : \varphi(n) \leq \psi(n)\} \cup \{n : \psi(n) \leq \varphi(n)\}.$$

Como U es ultrafiltro sobre ω, $\omega \in U$. Por el lema 2.5, $\{n : \varphi(n) \leq \psi(n)\} \in U$ o $\{n : \psi(n) \leq \varphi(n)\} \in U$; es decir, $[\varphi] \leq [\psi]$ o $[\psi] \leq [\varphi]$. ∎

Proposición 3.18 *Cada* $\varphi : \omega \longrightarrow \omega$ *es U-equivalente a alguna sucesión no decreciente.*

Demostración. Puesto que U es selectivo, existe $D \in U$, tal que $\varphi|_D$ es no decreciente (proposición 2.10). Definamos

$$\psi(n) = \varphi(d_n),$$

donde

$$d_n = mín\{d \in D | d \geq n\}.$$

Es claro que

$$n \leq d_n. \tag{3.19}$$

Veamos que ψ es no decreciente. Sean $n, m \in \omega$ tales que

$$n \leq m.$$

Basta mostrar que $d_n \leq d_m$ pues $\varphi|_D$ es no decreciente. Pero, usando la desigualdad 3.19,

$$n \leq m \leq d_m,$$

por lo que

$$d_n = mín\{d \in D | d \geq n\} \leq d_m.$$

Entonces,

$$\psi(n) = \varphi(d_n) \leq \varphi(d_m) = \psi(m).$$

Además, si $n \in D$, entonces $d_n = n$, por lo que $\psi(n) = \varphi(n)$. Entonces $D \subseteq \{n \in \omega : \varphi(n) = \psi(n)\}$, y por ende $\{n \in \omega : \varphi(n) = \psi(n)\} \in U$. Por lo tanto $\varphi =_U \psi$. ∎

Para todo conjunto etiquetado $\mathbf{A}$, definimos $num(\mathbf{A}) = [\gamma_A]$ como la clase de equivalencia de su sucesión aproximante $\gamma_A : n \longrightarrow |A_n|$. Vimos en la proposición de arriba que cada $\varphi : \omega \longrightarrow \omega$ es U-equivalente a alguna sucesión no decreciente, y por tanto, la sucesión aproximante de algún conjunto etiquetado. Esto prueba que num es sobre. Para probar que num es una función de numerosidad, tenemos que demostrar las propiedades (i), (ii), y (iii) establecidas en la definición 1.10.

Como siempre, sea γ_A la sucesión aproximante de $\mathbf{A}$.

Proposición 3.19 *Si* $[\gamma_A] = [\gamma_{A'}]$ *y* $[\gamma_B] = [\gamma_{B'}]$, *entonces* $[\gamma_{A \uplus B}] = [\gamma_{A' \uplus B'}]$ *y* $[\gamma_{A \times B}] = [\gamma_{A' \times B'}]$.

Demostración. Sabemos que

$$\{n \in \omega | \gamma_A(n) = \gamma_{A'}(n)\} \in U$$

y

$$\{n \in \omega | \gamma_B(n) = \gamma_{B'}(n)\} \in U.$$

Entonces

$$\{n \in \omega | \gamma_A(n) = \gamma_{A'}(n)\} \cap \{n \in \omega | \gamma_B(n) = \gamma_{B'}(n)\} \in U,$$

y como

$$\begin{aligned} & \{n\in\omega|\gamma_A(n)=\gamma_{A'}(n)\}\cap\{n\in\omega|\gamma_B(n)=\gamma_{B'}(n)\} \\ \subseteq\ & \{n\in\omega|(\gamma_A+\gamma_B)(n)=(\gamma_{A'}+\gamma_{B'})(n)\}, \end{aligned}$$

entonces

$$\{n\in\omega|(\gamma_A+\gamma_B)(n)=(\gamma_{A'}+\gamma_{B'})(n)\}\in U,$$

i.e,

$$[\gamma_A+\gamma_B]=[\gamma_{A'}+\gamma_{B'}].$$

Pero, por el lema 1.9,

$$\gamma_A+\gamma_B=\gamma_{A\uplus B}$$

y

$$\gamma_{A'}+\gamma_{B'}=\gamma_{A'\uplus B'}.$$

Por lo tanto

$$[\gamma_{A\uplus B}]=[\gamma_{A'\uplus B'}].$$

De manera análoga se demuestra que

$$[\gamma_{A\times B}]=[\gamma_{A'\times B'}].$$

■

La primera propiedad de las numerosidades se cumple de manera trivial de la definición, porque si

$$|A_n|\leq|B_n|$$

para toda n, entonces claramente

$$num(\mathbf{A})=[\gamma_A]\leq[\gamma_B]=num(\mathbf{B}),$$

pues el conjunto donde se da la desigualdad es todo ω, y $\omega\in U$.

Si $num(\mathbf{A})=num(\mathbf{A}')$ y $num(\mathbf{B})=num(\mathbf{B}')$, esto es, si $[\gamma_A]=[\gamma_{A'}]$ y $[\gamma_B]=[\gamma_{B'}]$, entonces

$$[\gamma_{A\uplus B}]=[\gamma_{A'\uplus B'}]$$

por la proposición 3.19. Por lo tanto,

$$num(\mathbf{A}\oplus\mathbf{B})=num(\mathbf{A}'\oplus\mathbf{B}').$$

Similarmente,

$$num(\mathbf{A}\odot\mathbf{B})=num(\mathbf{A}'\odot\mathbf{B}')$$

y la propiedad (iii) está probada. Hacemos notar que hasta este punto no se ha utilizado el hecho de que U sea selectivo.

Supongamos que $\mathbf{B}\subsetneq\mathbf{A}$. Por lo tanto, existe $a_0\in A-B$. Sea $n_0=l_A(a_0)$. Como $B\subsetneq A$, y para toda $b\in B$, $l_B(b)=l_A(b)$ sucede que, para toda $m\geq n_0$,

$$\{b\in B|l_B(b)\leq m\}\subsetneq\{a\in A|l_A(a)\leq m\}.$$

Ya que ambos conjuntos son finitos,

$$\gamma_B(m) = |\{b \in B : l_B(b) \leq m\}| < |\{a \in A : l_A(a) \leq m\}| = \gamma_A(m)$$

para toda $m \geq n_0$. Entonces $\{n \in \omega | \gamma_B(n) < \gamma_A(n)\}$ es cofinito y, por lo tanto, en U. De esta forma,

$$num(\mathbf{B}) = [\gamma_B] < [\gamma_A] = num(\mathbf{A}).$$

Inversamente, sea $[\varphi] < num(\mathbf{A})$, que mentalmente lo debemos tomar como $\{n \in \omega | \varphi(n) < \gamma_A(n)\} \in U$. Puesto que U es selectivo, podemos asumir sin pérdida de generalidad que φ es no decreciente por la proposición 2.10. Tenemos que encontrar un subconjunto etiquetado propio $\mathbf{B} \subsetneq \mathbf{A}$ tal que $num(\mathbf{B}) = [\varphi]$. Primero probaremos lo siguiente.

Afirmación 3.20 *Afirmamos que existe un conjunto*

$$H = \{k_0 < k_1 < k_2 < \cdots\} \in U$$

tal que

$$\varphi(k_n) - \varphi(k_{n-1}) \leq \gamma_A(k_n) - \gamma_A(k_{n-1})$$

para toda $n > 0$.

Se sigue de la propiedad de Ramsey de la propisición 2.20. Consideremos el siguiente subconjunto de $[\omega]^2$:

$$Y = \{\{m, m'\} : m > m' \text{ y } \varphi(m) - (m') \leq \gamma_A(m) - \gamma_A(m')\}$$

y escojamos un conjunto homogéneo $H = \{k_0 < k_1 < k_2 < \cdots\} \in U$ para la partición $\{Y, Y'\}$, donde $Y' = [\omega]^2 - Y$. Notemos que $[H]^2 \subseteq Y'$ es imposible: Supongamos que es cierto que $[H]^2 \subseteq Y'$; entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi(k_n) - \varphi(k_{n-1}) &> \gamma_A(k_n) - \gamma_A(k_{n-1}) \Rightarrow \varphi(k_n) - \varphi(k_{n-1}) \geq \gamma_A(k_n) - \gamma_A(k_{n-1}) + 1 \\
&\vdots \\
\varphi(k_1) - \varphi(k_0) &> \gamma_A(k_1) - \gamma_A(k_0) \Rightarrow \varphi(k_1) - \varphi(k_0) \geq \gamma_A(k_1) - \gamma_A(k_0) + 1
\end{aligned}$$

para toda $n > 0$, lo cual implica que

$$\varphi(k_n) - \varphi(k_0) \geq \gamma_A(k_n) - \gamma_A(k_0) + n$$

para toda $n > 0$. De esta desigualdad, tenemos que

$$\varphi(k_n) - \gamma_A(k_n) \geq \varphi(k_0) - \gamma_A(k_0) + n.$$

Basta entonces que $n > \gamma_A(k_0) - \varphi(k_0)$, para que $\varphi(k_n) > \gamma_A(k_n)$ que, a su vez, implica $\varphi(k_n) > \gamma_A(k_n)$ para todas, excepto un número finito de n's, contradiciendo la hipótesis $\{n : \varphi(n) < \gamma_A(n)\} \in U$. Por lo tanto, debe ser que $[H]^2 \subseteq Y$, y H satisface la afirmación.

Ahora queremos definir $\mathbf{B} \subsetneq \mathbf{A}$ con $num(\mathbf{B}) = [\varphi]$. Sin perder generalidad, podemos asumir que

$$\varphi(h) < \gamma_A(h) \tag{3.20}$$

para toda $h \in H$ (de otro modo, tomemos $H' = H \cap \{n \in \omega : \varphi(n) < \gamma_A(n)\}$). Igual que antes, para no hacer dos casos, sea $A_{k_{-1}} = \emptyset$ y $\varphi(k_{-1}) = 0$. Escogemos $A'_n \subseteq A_{k_n} - A_{k_{n-1}}$ con

$$|A'_n| = \varphi(k_n) - \varphi(k_{n-1}).$$

Esto es posible pues $|A_{k_n} - A_{k_{n-1}}| = |A_{k_n}| - |A_{k_{n-1}}| = \gamma_A(k_n) - \gamma_A(k_{n-1})$, y por la propiedad de H en la afirmación 3.20 (y por la desigualdad 3.20 cuando $n = 0$). Sea $\mathbf{B}$ el subconjunto etiquetado de $\mathbf{A}$ cuyo dominio es la unión de todos los A'_n. Para toda $a \in A'_n \subseteq A_{k_n} - A_{k_{n-1}}$, tenemos que $l_B(a) = l_A(a) = k_n$ (ver observación 1.4). Entonces

$$|\{a \in B : l_B(a) = k_n\}| = |A'_n| = \varphi(k_n) - \varphi(k_{n-1}).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\gamma_B(k_n) &= |A'_0| + |A'_1| + \cdots + |A'_{n-1}| + |A'_n| \\
&= (\varphi(k_0) - \varphi(k_{-1})) + (\varphi(k_1) - \varphi(k_0)) + \cdots \\
&\quad + (\varphi(k_{n-1}) - \varphi(k_{n-2})) + (\varphi(k_n) + \varphi(k_{n-1})) \\
&= \varphi(k_n) - \varphi(k_{-1}) \\
&= \varphi(k_n) - 0 \\
&= \varphi(k_n)
\end{aligned}$$

Entonces la función aproximante γ_B de $\mathbf{B}$ es tal que $\gamma_B(h) = \varphi(h)$ para toda $h \in H$. Concluímos que la $num(\mathbf{B}) = [\gamma_B] = [\varphi]$, como queríamos. ∎

Hacemos notar que la construcción de arriba muestra que la asignación de numerosidades a conjuntos etiquetados no está determinada de manera única (depende del ultrafiltro selectivo). Por ejemplo, sean $PAR = \{2n : n \in \omega\}$ e $IMPAR = \{2n+1 : n \in \omega\}$ los conjuntos de números naturales *pares* e *impares*, respectivamente. Comparemos sus sucesiones aproximantes (con la etiquetación canónica):

$$\begin{array}{cccccccccc}
n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
\gamma_{PAR}(n) & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & \cdots \\
\gamma_{IMPAR}(n) & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \cdots
\end{array}.$$

Como ω tiene la sucesión aproximante

$$\begin{array}{cccccccccc}
n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
\gamma_{\omega}(n) & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \cdots
\end{array}$$

es claro que

$$\gamma_{PAR} + \gamma_{IMPAR} = \gamma_{\omega},$$

y por lo tanto,

$$num\,(\mathbf{PAR}) + num\,(\mathbf{IMPAR}) = num\,(\omega) = \alpha.$$

Cuando el ultrafiltro selectivo subyacente U de conjuntos calificados contenga al conjunto de los números impares (siempre contiene a uno de los dos, ya que $PARES \cup IMPARES = \omega$ y $\omega \in U$, ver lema 2.5), entonces

$$IMPAR = \{n \in \omega : \gamma_{PAR}(n) = \gamma_{IMPAR}(n)\},$$

y por lo tanto

$$num(\mathbf{PAR}) = num(\mathbf{IMPAR}).$$

Entonces

$$\alpha = num(\omega) = num(\mathbf{PAR}) + num(\mathbf{IMPAR})$$

es par. Por el contrario, si U contiene al conjunto de los números pares, entonces

$$\{n \in \omega : \gamma_{PAR}(n) = \gamma_{IMPAR}(n) + 1\} = PAR.$$

Por lo tanto,

$$num(\mathbf{PAR}) = num(\mathbf{IMPAR}) + 1$$

y α es impar.

Enfaticemos que este ejemplo, al igual que otros similares, son fácilmente solubles postulando condiciones adicionales. Por ejemplo, podríamos poner las siguientes dos condiciones naturales:

($\alpha 1$) Para todo número natural $k > 0$, α es múltiplo de k (i.e. $\alpha = k \cdot \beta$ para alguna numerosidad β);

($\alpha 2$) Para todo número natural $k > 0$, α es una k-ésima potencia (i.e. $\alpha = \beta^k$ para alguna numerosidad β).

Es decir, la numerosidad de los números naturales es múltiplo de cualquier número natural. Si denotamos por $k\omega = \{kn : n \in \omega\}$ y $\omega^{(k)} = \{n^k : n \in \omega\}$, entonces se prueba la siguiente proposición:

Proposición 3.21 *Las propiedades de arriba son equivalentes a las condiciones:* $(\alpha 1)'\, num(k\omega) = \alpha/k$, *y* $(\alpha 2)'\, num(\omega^{(k)}) = \sqrt[k]{\alpha}$, *respectivamente.*

Demostración. $(\alpha 1)'$ y $(\alpha 2)'$ implican trivialmente a $(\alpha 1)$ y $(\alpha 2)$ resvectivamente de manera trivial. Demostremos que $(\alpha 1)$ implica $(\alpha 1)'$. Sea $k > 0$. Por un lado, notemos que

$$\begin{array}{cccccccccc} n & 0 & \cdots & k-1 & k & \cdots & 2k-1 & 2k & \cdots \\ \gamma_{k\omega}(n) & 1 & \cdots & 1 & 2 & \cdots & 2 & 3 & \cdots \end{array}$$

o dicho de otro modo,

$$\gamma_{k\omega}(n) = m + 1 \text{ cuando } km < n + 1 \leq k\,(m+1)\,.$$

En particular, cuando $n+1 = k \cdot m$ para alguna $m \in \omega$,

$$\gamma_{k\omega}(n) = m. \tag{3.21}$$

Por otro lado, nuestra hipótesis implica que existe un conjunto etiquetado $\mathbf{A}$ tal que $k \cdot num(\mathbf{A}) = \alpha$, es decir, $\{n \in \omega : k \cdot \gamma_A(n) = n+1\} \in U$ (recordemos que $\gamma_\omega(n) = n+1$). Sea n en este conjunto. Entonces $n+1 = k \cdot \gamma_A(n)$, y usando la ecuación 3.21, $\gamma_{k\omega}(n) = \gamma_A(n)$, y por ende, $k \cdot \gamma_{k\omega}(n) = k \cdot \gamma_A(n) = n+1$. Por lo tanto,

$$\{n \in \omega : k \cdot \gamma_A(n) = n+1\} \subseteq \{n \in \omega : k \cdot \gamma_{k\omega}(n) = n+1\},$$

y

$$\{n \in \omega : k \cdot \gamma_{k\omega}(n) = n+1\} \in U;$$

es decir, $[\gamma_\omega] = [k \cdot k\omega]$. Análgoamente, $(\alpha 2)$ implica $(\alpha 2)'$. ■

Es sabido que la existencia de ultrafiltros selectivos es independiente de ZFE. De hecho, por un lado, los ultrafiltros selectivos existen si asumimos el *axioma de Martin* (ver referencia en [4]). Por otro lado, Kunen mostró que, suponiendo la consistencia de ZFE, es consistente ZFE con la no existencia de ultrafiltros selectivos (véase [10]). Entonces, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.22 *La existencia de una función de numerosidad no es demostrable dentro de los axiomas de ZFE.*

Capítulo 4

Más propiedades de las numerosidades

4.1 Numerosidades enteras y racionales

Definición 4.1 *Un anillo $\langle R, +, \cdot \rangle$ es un semianillo con neutro aditivo tal que, para toda $a \in R$, existe $a' \in R$ tal que $a + a' = 0$. Se dice que un anillo es conmutativo si su multiplicación lo es. Un anillo con identidad multiplicativa se dice que es un anillo con unitario. Nos referiremos a un anillo R, en lugar de a un anillo $\langle R, +, \cdot \rangle$, cuando no exista riesgo confusión.*

Definición 4.2 *Si a y b son dos elementos distintos de cero de un anillo R tal que $ab = 0$, entonces se dice que a y b son divisores de cero.*

La proposición y los dos teoremas siguientes los enunciaremos sin demostración. Para profundizar un poco más en esta parte algebraica, recomendamos leer [8].

Proposición 4.3 *Sea R un anillo. Las leyes de la cancelación valen en R si, y sólo si R no tiene divisores de cero.*

Definición 4.4 *Sea R un anillo con unitario. Un elemento $u \in R$ es una unidad de R si tiene un inverso multiplicativo en R. Si todo elemento distinto de cero en R es una unidad, entonces R es un semi campo o anillo con división. Un campo es un anillo conmutativo con división.*

Definición 4.5 *Un dominio entero D es un anillo conmutativo unitario que no contiene divisores de cero.*

Teorema 4.6 *Cualquier dominio entero D puede incrustarse en un campo F, tal que todo elemento de F puede expresarse como cociente de dos elementos. (Dicho campo F es un campo cociente de D).*

Definición 4.7 *Un campo linealmente ordenado* $\langle F, +, \cdot, 0, 1, \leq \rangle$ *es arquimedeano si, y sólo si para cualquier par de elementos* a, b *en* F *existe un número natural* n *tal que* $b \leq na$.

Definición 4.8 *Un subgrupo* $\langle N, + \rangle$ *de un anillo* R *que satisface* $rN \subseteq N$ *y* $Nr \subseteq N$ *para todas las* $r \in R$ *es un ideal de* R.

Definición 4.9 *Un ideal maximal de un anillo* R *es un ideal* M *tal que no existe ningún ideal propio* N *de* R *que contenga propiamente a* M.

Teorema 4.10 *Sea* R *un anillo conmutativo unitario. Entonces,* M *es un ideal maximal de* R *si, y sólo si* R/M *es un campo.*

Por un procedimiento bastante conocido, los enteros pueden ser representados como pares ordenados de números naturales identificados módulo la relación de equivalencia siguiente:

$$\langle a, b \rangle \sim \langle a', b' \rangle \Leftrightarrow a + b' = a' + b$$

El par $\langle a, b \rangle$ se piensa como $a - b$. Respectivamente, cada número natural n se identifica con la clase de equivalencia del par $\langle n, 0 \rangle$. Las operaciones y la ordenación están definidas como sigue:

$$\begin{aligned}
\langle a, b \rangle + \langle c, d \rangle &= \langle a + c, b + d \rangle; \\
\langle a, b \rangle \cdot \langle c, d \rangle &= \langle ac + bd, bc + ad \rangle; \\
\langle a, b \rangle \leq \langle c, d \rangle &\Leftrightarrow a + d \leq b + c.
\end{aligned}$$

Como ω es un semianillo positivo linealmente ordenado con elementos neutros, se prueba que la construcción mencionada arriba genera un anillo conmutativo linealmente ordenado con identidad, donde $x \leq y \Leftrightarrow y = x + z$ para algún $z \in \omega$. De igual forma, empezando con N, tenemos el anillo conmutativo linealmente ordenado Z de *numerosidades enteras*. Notemos que Z no tiene divisores de cero (porque N no tiene), y así podemos considerar su campo cociente:

$$Q = \left\{ \pm \frac{num(\mathbf{A})}{num(\mathbf{B})} : \mathbf{A}, \mathbf{B} \text{ conjuntos etiquetados, } \mathbf{B} \neq \mathbf{0} \right\}$$

Llamamos Q al campo ordenado de *numerosidades racionales.* Un elemento $\xi \in Q$ está acotado si $-n < \xi < n$ para algún número natural n. Decimos que ϵ es *infinitesimal* si $-1/n < \epsilon < 1/n$ para toda $n > 0$.Claramente $\alpha = num(\omega)$ no está acotada y su recíproco $1/\alpha$ es infinitesimal. Por lo tanto Q no es arquimedeano.

Ahora sea Q_a la colección de elementos acotados, e i la colección de todos los infinitesimales. Notemos que Q_a es un subanillo de Q e i es un ideal maximal de Q_a . De hecho, i es cerrado bajo la suma; si ξ es acotado y ϵ es infinitesimal, entonces el producto $\xi \cdot \epsilon$ es infinitesimal; y la maximalidad se cumple porque cada numerosidad acotada (no cero) cuyo inverso no es acotado es infinitesimal. Como consecuencia, el cociente de Q_a módulo i es un campo ordenado. Pero podemos decir más:

Teorema 4.11 *El cociente Q_a /i y los números reales* $\mathbb{R}$ *son isomorfos como campos ordenados.*

En particular, si denotamos por $\approx$ la relación de equivalencia de ser infinitamente cercano (i.e. $\xi \approx \eta \Leftrightarrow \xi - \eta$ es infinitesimal) entonces todo número real r está representado (salvo infinitesimales) como una fracción:

$$r \approx \pm \frac{num(\mathbf{A})}{num(\mathbf{B})}.$$

Así, mientras un número racional es la razón de las numerosidades de dos conjuntos finitos, un número real es el radio de las numerosidades de dos conjuntos etiquetados (salvo infinitesimales).

Por ejemplo, en nuestro contexto, el número real $\sqrt{2}$ está representado como sigue:

$$\sqrt{2} \approx \frac{num(\{1^2, 2^2, 3^2, ...\})}{num(\{2 \cdot 1^2, 2 \cdot 2^2, 2 \cdot 3^2, ...\})}$$

Debemos resaltar que, aislando unas cuantas propiedades de la numerosidad $\alpha = num(\omega)$, una presentación alternativa del análisis no estándar puede ser dada en términos realmente elementales.

4.2 De las numerosidadades al análisis no estándar

Definición 4.12 *Dado un conjunto X, construimos la superestructura $V_\infty(X)$ de X como sigue:*

$V_0(X) = X;$

$V_{k+1}(X) = V_k(X) \cup P(V_k(X));$

$V_\infty(X) = \cup_{k\in\omega} V_k(X).$

Es común considerar que $X \supseteq \omega$ es un conjunto de átomos o conjunto base, es decir, $x \cap V_\infty(X) = \emptyset$ para cada $x \in X$.

De cualquier forma, con los siguientes resultados, dado un conjunto X, podemos construir un conjunto de átomos X' con la misma cardinalidad de X.

Definición 4.13 *La jerarquía acumulativa de conjuntos se define de la manera siguiente por recursión transfinita.*

$$\begin{aligned} V_0 &= \emptyset, \\ V_{\alpha+1} &= P(V_\alpha), \\ V_\alpha &= \cup_{\beta<\alpha} V_\beta \text{ si } a \text{ es límite.} \end{aligned}$$

Lema 4.14 *Para todo ordinal α,*

(a) *V_α es transitivo*[1].

(b) *Si $\xi \leq \alpha$, entonces $V_\xi \subseteq V_\alpha$.*

Demostración. Hagámoslo por inducción transfinita; asumimos que el lema es cierto para todas las $\beta < \alpha$, y concluimos que es cierto para α. Hagámoslo por casos:

- $\alpha = 0$; trivial.
- α es límite: (b) es inmediato de la definición, y (a) sigue del hecho de que la unión de conjuntos transitivos es transitiva.
- $\alpha = \beta + 1$. Puesto que V_β es transitivo, $P(V_\beta) = V_\alpha$ es transitivo y $V_\beta \subseteq V_\alpha$. Esto prueba (a) y (b) para α.

∎

El Axioma de Regularidad (o de Buena Fundación) implica que todo conjunto está en alguna V_a. Podemos por lo tanto dar la siguiente definición.

Definición 4.15 *El rango(x) (se lee el rango de x) se define como*

$$\textit{rango}(x) = \textit{el mínimo ordinal } \alpha \textit{ tal que } x \in V_{\alpha+1}.$$

Por lo tanto, si α =rango(x), entonces $x \subseteq V_\alpha, x \notin V_\alpha$, y $x \in V_\beta$ para toda $\alpha > \beta$.

Lema 4.16 *Para toda α, $V_\alpha = \{x : \textit{rango}(x) < \alpha\}$.*

Demostración. rango(x) $< \alpha \Leftrightarrow$ existe $\beta < \alpha$ tal que $x \in V_{\beta+1} \Leftrightarrow x \in V_\alpha$. ∎

Lema 4.17 *Si $x \in y$, entonces rango(x) <rango(y).*

Demostración. Sea α =rango(y), entonces $y \in V_{\alpha+1} = P(V_\alpha)$. Si $x \in y$, entonces $x \in V_\alpha$, por lo que rango(x) $< \alpha$ por el lema 4.16. ∎

Lema 4.18 *rango(X) $= \beta + 1 \Leftrightarrow$ existe $x_0 \in X$ tal que*

$$\textit{rango}(x_0) = \beta = \textit{máx}\{\textit{rango}(x) : x \in X\}.$$

Demostración. Primero el regreso. Sea $x \in X$. Como

$$\beta = \textit{máx}\{\text{rango}(x) : x \in X\},$$

entonces rango(x) $\leq \beta$, lo que a su vez implica que $x \in V_{\text{rango}(x)+1} \subseteq V_{\beta+1}$. Por lo tanto, $X \subseteq V_{\beta+1}$ y

$$\text{rango}(X) \leq \beta + 1.$$

[1] Un conjunto z es transitivo si $\bigcup z \subseteq z$. Para profundizar en las propiedades de los conjuntos transitivos, se recomienda [2], capítulo 2.1.

Ya que existe $x_0 \in X$ tal que rango$(x_0) = \beta$ y

$$\text{rango}\,(x_0) < \text{rango}\,(X)\,,$$

se concluye que

$$\beta < \text{rango}\,(X) \leq \beta + 1;$$

i.e. rango$(X) = \beta + 1$.

Sea rango$(X) = \beta + 1$. Primero demostremos que existe $x_0 \in X$ tal que rango$(x_0) = \beta$. Supongamos que no es cierto. Sea $x \in X$. Entonces rango$(x) \neq \beta$. Como $\beta < \beta + 1$ y rango(x) <rango$(X) = \beta + 1$ tenemos que

$$\text{rango}\,(x) < \beta.$$

Esta desigualdad nos lleva a que rango$(x) + 1 \leq \beta$, que a su vez quiere decir que $x \in V_{\text{rango}(x)+1} \subseteq V_\beta$; i.e. $X \subseteq V_\beta$. Por lo tanto, rango$(x) \leq \beta < \beta + 1$, una contradicción con nuestra suposición. Veamos ahora que $\beta = \textit{máx}\,\{\text{rango}\,(x) : x \in X\}$. Supongamos que para toda $x \in X$, existe $y \in X$ tal que rango(x) <rango(y). Vimos que existe $x_0 \in X$ tal que rango$(x_0) = \beta$. Entonces existe $y \in X$ tal que β <rango(y). Pero rango(y) <rango$(X) = \beta + 1$ por lo que β <rango$(X) < \beta + 1$, una contradicción. ■

Lema 4.19 *rango*$\{x, y\} = \textit{máx}\,\{\textit{rango}\,(x)\,,\ \textit{rango}\,(y)\} + 1$.

Demostración. Sea $\alpha = \textit{máx}\,\{\text{rango}\,(x)\,, \text{rango}\,(y)\}$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} x &\in V_{\text{rango}(x)+1} \subseteq V_{\alpha+1} \text{ y } y \in V_{\text{rango}(y)+1} \subseteq V_{\alpha+1} \\ &\Rightarrow \{x, y\} \subseteq V_{\alpha+1} \\ &\Rightarrow \{x, y\} \in V_{\alpha+2} = P\,(V_{\alpha+1})\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{rango}\,(\{x, y\}) \leq \alpha + 1. \tag{4.1}$$

Usando el lema 4.17,

$$\begin{aligned} x, y &\in \{x, y\} \\ &\Rightarrow \text{rango}\,(x) < \text{rango}\,\{x, y\} \text{ y rango}\,(y) < \text{rango}\,(\{x, y\}) \\ &\Rightarrow \alpha = \textit{máx}\,\{\text{rango}\,(x)\,, \text{rango}\,(y)\} < \text{rango}\,(\{x, y\})\,. \end{aligned}$$

Usando esta última desigualdad y 4.1, se obtiene que α <rango$(\{x, y\}) \leq \alpha + 1$, i.e. rango$(\{x.y\}) = \alpha + 1$. ■

Lema 4.20 *rango*$(\langle x, y\rangle) = \textit{máx}\,\{\textit{rango}\,(x)\,,\ \textit{rango}\,(y)\} + 2$.

Demostración. Sea $\alpha = \textit{máx}\,\{\text{rango}\,(x)\,, \text{rango}\,(y)\}$. Por definición, $\langle x, y\rangle = \{\{x\}\,, \{x, y\}\}$. Entonces, usando el lema 4.19,

$$\text{rango}\,(\{x\}) = \text{rango}\,(x) + 1 \leq \textit{máx}\,\{\text{rango}\,(x)\,, \text{rango}\,(y)\} + 1 = \text{rango}\,(\{x, y\})\,.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
máx\left\{\text{rango}\left(\{x\}\right),\text{rango}\left(\{x,y\}\right)\right\} &= \text{rango}\left(\{x,y\}\right)\\
&= máx\left\{\text{rango}\left(x\right),\text{rango}\left(y\right)\right\}+1,
\end{aligned}$$

y concluimos con el lema 4.19 que

$$\begin{aligned}
\text{rango}\left(\langle x,y\rangle\right) &= máx\left\{\text{rango}\left(\{x\}\right),\text{rango}\left(\{x,y\}\right)\right\}+1\\
&= máx\left\{\text{rango}\left(x\right),\text{rango}\left(y\right)\right\}+2.
\end{aligned}$$

■

Lema 4.21 *Sea α un ordinal infinito y sea $X\neq\emptyset$, tal que $\emptyset\notin X$ y todo elemento de los elementos de X tienen rango α. Entonces X es un conjunto base.*

Demostración. Sea α un ordinal infinito. Sea X un conjunto distinto del vacío de tal forma que, para toda $x\in X$, si $y\in x$, entonces rango$(y)=\alpha$. Primero demostremos lo siguiente.

Afirmación 4.22 *Para toda $x\in V_n(X)$, rango$(x)<n$ o $\alpha<$rango$(x)\leq\alpha+n+1$.*

Procedamos por inducción. Como $V_0(X)=X$ y $x\neq\emptyset$, existe $y\in x$, y por la hipótesis de este lema, rango$(y)=\alpha$. Esto quiere decir además que, para toda $y\in x$, $y\in V_{\alpha+1}$. Entonces, $x\in V_{\alpha+2}=P(V_{\alpha+1})$. Por lo tanto, rango$(x)\leq\alpha+1$. De hecho, se da la igualdad: como $y\in x$, entonces, por el lema 4.17, $\alpha=$rango$(y)<$rango(x). Entonces $\alpha+1\leq$rango(x), y por ende, rango$(x)=\alpha+1$.

Supongamos que vale para n.

Sea $x\in V_{n+1}(X)=V_n(X)\cup P(V_n(X))$.

Si $x\in V_n(X)$, por la hipótesis de inducción,

$$\text{rango}\left(x\right)<n<n+1$$

o

$$\alpha<\text{rango}\left(x\right)\leq\alpha+n+1<\alpha+n+2.$$

Sea $x\in P(V_n(X))$. Si $x=\emptyset$, entonces rango$(x)=0<n+1$. Sea $x\neq\emptyset$. Para toda $y\in x$, $y\in V_n(X)$. Por hipótesis de inducción,

$$\text{rango}\left(y\right)<n\text{ o }\alpha<\text{rango}\left(y\right)\leq\alpha+n+1.$$

Entonces tiene sentido si tomamos

$$\xi=máx\left\{\alpha\in OR:\text{existe }y\in x\text{ tal que rango}\left(y\right)=\alpha\right\}.$$

Tenemos dos casos:

- $\xi < n$. Para toda $y \in x$, rango$(y) \leq \xi$. Entonces, para toda $y \in x$, $y \in V_{\text{rango}(y)+1} \subseteq V_{\xi+1} \subseteq V_n$. Por lo tanto, $x \in V_{n+1} = P(V_n)$, y

$$\text{rango}(x) \leq n < n+1.$$

- $\alpha < \xi \leq \alpha + n + 1$. Como $x \neq \emptyset$, existe $y \in x$ tal que rango$(y) = \xi$. Por lo tanto,

$$\text{rango}(x) > \xi > \alpha.$$

Por otro lado, para toda $y \in x$, rango$(y) \leq \xi \leq \alpha + n + 1$. Entonces rango$(y) + 1 \leq \xi + 1 \leq \alpha + n + 2$. Esto implica que, para toda $y \in x$, $y \in V_{\text{rango}(y)+1} \subseteq V_{\xi+1} \subseteq V_{\alpha+n+2}$. Por lo tanto, $x \in V_{\alpha+n+3} = P(V_{\alpha+n+2})$, y

$$\text{rango}(x) \leq \alpha + n + 2.$$

Así concluimos la demostración de nuestra afirmación.

Ahora sí veamos que X es un conjunto de átomos. Supongamos que hay una $x \in X$, tal que $x \cap V(X) \neq \emptyset$. Entonces existe $y \in x \cap V(X)$. En particular $y \in V_n(X)$ para alguna $n \in \omega$. Entonces,

$$\text{rango}(y) < n < \alpha,$$

pues α es infinito, o

$$\alpha < \text{rango}(y) \leq \alpha + n + 1,$$

pero en ambos casos, rango$(y) \neq \alpha$, una contradicción con nuestra hipótesis. ■

Lema 4.23 *Sea X un conjunto de rango β y sea D un ultrafiltro sobre un conjunto I de rango γ tal que $\beta + \omega \leq \gamma$. Entonces la ultrapotencia X_D^I es un conjunto base.*

Demostración. Basta demostrar que todas las funciones $f : X \longrightarrow I$ tienen el mismo rango, pues los elementos de X_D^I son clases de equivalencia, que a su vez tienen como elementos a estas funciones, y usamos el lema anterior. Observemos que para toda $i \in I$ y para toda $x \in X$,

$$\text{rango}(i) < \text{rango}(I) = \gamma$$

y

$$\text{rango}(x) < \text{rango}(X) = \beta \leq \beta + \omega \leq \gamma.$$

Entonces,

$$\textit{máx}\{\text{rango}(i),\ \text{rango}(x)\} < \gamma \tag{4.2}$$

para toda $i \in I$ y para toda $x \in X$. Sea $f \in \prod_{i \in I} X$. Tenemos dos casos:

- γ es límite. Sea $(i, x) \in f$. Por el lema 4.20,

$$\text{rango}(i, x) = \textit{máx}\{\text{rango}(i),\ \text{rango}(x)\} + 2. \tag{4.3}$$

Como estamos suponiendo que γ es límite, usando 4.2 y 4.3, tenemos que

$$\text{rango}\,(i,x) < \gamma.$$

Más áun, rango$(i,x)+1 < \gamma$. Entonces, para toda $(i,x) \in f$, tenemos que $(i,x) \in V_{\text{rango}(i,x)+1} \subsetneq V_\gamma$ y por ende, $f \subseteq \gamma$. Por lo tanto, rango$(f) \leq \gamma$. Supongamos que rango$(f) < \gamma$. Como γ es límite, existe $i \in I$ tal que

$$\gamma > \text{rango}\,(i) > \text{rango}\,(f) \tag{4.4}$$

(de otra forma, existiría una $i_0 \in I$ tal que rango$(i_0) = máx\,\{\text{rango}\,(i) : i \in I\}$, lo cual implicaría que γ =rango(I) =rango$(i_0) + 1$ y no sería límite, sería sucesor). Por otro lado, existe $x \in X$ tal que $(i,x) \in f$. Pero

$$\begin{aligned}\text{rango}\,(i) &\leq máx\,\{\text{rango}\,(i)\,,\text{rango}\,(x)\}\\ &< máx\,\{\text{rango}\,(i)\,,\text{rango}\,(x)\} + 2\\ &= \text{rango}\,(i,x)\\ &< f,\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción con 4.4. Por lo tanto, rango$(f) = \gamma$.

- γ es sucesor, entonces, por el lema 4.18, existe $\xi = máx\,\{\text{rango}\,(i) : i \in I\}$ y además $\gamma = \xi + 1$. Sea $x \in X$. Tenemos entonces que

$$\text{rango}\,(x) < \text{rango}\,(X) = \beta.$$

Por lo tanto, rango$(x) + 1 \leq \beta \leq \beta + \omega \leq \gamma = \xi + 1$ y

$$rango\,(x) \leq \xi. \tag{4.5}$$

Con esta desigualdad obtenemos que $máx\,\{\text{rango}\,(i)\,, \text{rango}\,(x)\} \leq \xi$ para $i \in I$ y $x \in X$. Entonces, si $\langle i,x\rangle \in f$ tenemos que rango

$$(\langle i,x\rangle) = máx\,\{\text{rango}\,(i)\,, \text{rango}\,(x)\} + 2 \leq \xi + 2 = \gamma + 1.$$

Por lo tanto, para todo par ordenado $\langle i,x\rangle \in f$ se tiene que

$$\langle i,x\rangle \in V_{\text{rango}(\langle i,x\rangle)+1} \subseteq V_{\gamma+2}.$$

Esto quiere decir que $f \subseteq V_{\gamma+2}$ y

$$rango\,(f) \leq \gamma + 2. \tag{4.6}$$

Por el lema 4.18, existe $i_0 \in I$ tal que rango$(i_0) = \xi$. Como I es el dominio de f, existe $x \in X$ tal que $\langle i_0, x\rangle \in f$. Pero rango$(x) \leq \xi$ (desigualdad 4.5), por lo que

$$\begin{aligned}\text{rango}\,(\langle i_0,x\rangle) &= máx\,\{\text{rango}\,(i_0)\,, \text{rango}\,(x)\} + 2\\ &= máx\,\{\xi, \text{rango}\,(x)\} + 2\\ &= \xi + 2 = \gamma + 1\\ &< \text{rango}\,(f)\,.\end{aligned}$$

Con esto, y la desigualdad 4.6, $\gamma + 1$ <rango$(f) \leq \gamma + 2$; i.e. rango$(f) = \gamma + 2$..

■

Basta tomar $X' = \{[c_x] : x \in X\}$, donde $[c_x]$ es la clase de equivalencia de la función constante $c_x(i) = x$ para toda $i \in I$ y $x \in X$.

Definición 4.24 $\mathcal{F}_\infty = \cup_k \mathcal{F}_k$ *donde* $\mathcal{F}_k = \{\varphi | \varphi : \omega \longrightarrow V_k(\omega)\}$.

Llamemos nuevamente $\mathcal{C}$ el conjunto de los conjuntos calificados de ω.

Definición 4.25 *Para* $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_\infty$, *escribimos* $\varphi =_\mathcal{C} \psi$ *si* $\{n : \varphi(n) = \psi(n)\} \in \mathcal{C}$. *Similarmente, escribimos* $\varphi \in_\mathcal{C} \psi$ *si* $\{n : \varphi(n) \in \psi(n)\}$ *está calificado.*

Proposición 4.26 $=_\mathcal{C}$ *es una relación de equivalencia.*

Demostración. Ver lema 3.11. ■

Por simplicidad, en lo siguiente abusamos de la notación y directamente escribimos A en lugar de la sucesión constante correspondiente c_A (por ejemplo, escribiremos $\varphi \in_\mu A$ para decir que $\{n : \varphi(n) \in A\} \in \mathcal{C}$).

Supongamos que $N \supseteq \omega$ es un conjunto de átomos, al menos con respecto a su superestructura, i.e., conjuntos de numerosidades no forman una numerosidad. Sea $\rho : \mathcal{F}_\infty \longrightarrow V_\infty(N)$ como sigue:

1. Si $\varphi =_\mathcal{C} \emptyset$, entonces $\rho(\varphi) = \emptyset$;
2. Si $\varphi \in_\mathcal{C} \omega$, entonces $\rho(\varphi) = \nu(\varphi')$ para alguna $\varphi' \in \mathcal{F}$ y $\varphi =_\mathcal{C} \varphi'$;
3. Si $\varphi \notin \omega$ y $\varphi \neq \emptyset$, entonces $\rho(\varphi) = \{\rho(\eta) : \eta \in_\mathcal{C} \varphi\}$.

En el punto 2, esta φ' existe, debido a que $\varphi =_\mathcal{C} \eta$, donde $\eta(n) = \varphi(n)$ si $\varphi(n) \in \omega$, y $\eta(n) = 0$ en otro caso. Entonces $\eta : \omega \longrightarrow \omega$, y por la proposición 3.18, existe $\varphi' \in \mathcal{F}$ tal que $\varphi' =_\mathcal{C} \eta =_\mathcal{C} \varphi$.

Proposición 4.27 (Extensionalidad) *Sea* $\varphi, \psi \in \mathcal{F}_\infty$. *Entonces* $\varphi =_\mathcal{C} \psi \Leftrightarrow \forall \eta \in \mathcal{F}_\infty(\eta \in_\mathcal{C} \varphi \leftrightarrow \eta \in_\mathcal{C} \psi)$.

Demostración. Supongamos que $\varphi =_\mathcal{C} \psi$ y $\eta \in_\mathcal{C} \varphi$. Entonces

$$\{n : \varphi(n) = \psi(n)\} \cap \{n : \eta(n) \in \varphi(n)\} \subseteq \{n : \eta(n) \in \psi(n)\} \in \mathcal{C}.$$

Por lo tanto, $\eta \in_\mathcal{C} \psi$. Análogamente, si $\eta \in_\mathcal{C} \psi$, entonces $\eta \in_\mathcal{C} \varphi$.

Supongamos que $\forall \eta \in \mathcal{F}_\infty(\eta \in_\mathcal{C} \varphi \leftrightarrow \eta \in_\mathcal{C} \psi)$. Basta mostrar que $\varphi \subseteq_\mathcal{C} \psi$ y $\psi \subseteq_\mathcal{C} \varphi$. Supongamos que no es cierto. Entonces

$$\{n : \exists m_n \in V_\infty(\omega)[m_n \in \psi(n) y m_n \notin \varphi(n)]\} \in \mathcal{C}.$$

Podemos construir entonces la función $\eta(n) = m_n$ si $n \in \{n : \exists m_n \in V_\infty(\omega)[m_n \in \psi(n)$ y $m_n \notin \varphi(n)]\}$, y $\varphi(n) = \emptyset$ en otro caso. Es claro que, dado este caso, $\psi \in \mathcal{F}_k$, donde $k \geq 1$, pues la imagen de ψ tiene elementos, y quedamos que los naturales, esto es, cuando $k = 0$, son átomos. Entonces $\eta \in \mathcal{F}_{k-1} \subseteq \mathcal{F}_\infty$. Esto quiere decir que $\eta \in_\mathcal{C} \psi$, pero por otro lado $\eta \notin_\mathcal{C} \varphi$, una contradicción. Por lo tanto, $\varphi \subseteq_\mathcal{C} \psi$. Análogamente, $\psi \subseteq_\mathcal{C} \varphi$. Entonces,

$$\{n : \varphi(n) \subseteq \psi(n)\} \cap \{n : \psi(n) \subseteq \varphi(n)\} \subseteq \{n : \varphi(n) = \psi(n)\} \in \mathcal{C},$$

y por lo tanto, $\varphi =_\mathcal{C} \psi$. ■

Proposición 4.28 *ρ es única y cumple que:*

1. *$\rho(\varphi) = \nu(\varphi)$ para toda $\varphi \in \mathcal{F}$;*

2. *Si $c_\emptyset$ es la sucesión constante igual al conjunto vacío, entonces $\rho(c_\emptyset) = \emptyset$;*

3. *$\rho(\psi) \in \rho(\varphi) \Leftrightarrow \psi \in_{\mathcal{C}} \varphi$;*

4. *$\rho(\psi) = \rho(\varphi) \Leftrightarrow \psi =_{\mathcal{C}} \varphi$.*

Demostración. Por construcción, *1* y *2* son claros.

Demostremos *3* por casos.

Si $\varphi =_{\mathcal{C}} \emptyset$, entonces no existe ninguna $\psi \in_{\mathcal{C}} \varphi$, pues para toda ψ,

$$\{n : \varphi(n) = \emptyset\} \cap \{n : \psi(n) \in \varphi(n)\} = \emptyset,$$

y el vació no pertenece a $\mathcal{C}$ por ser ultrafiltro, y por vacuidad se cumple. El regreso se cumple también por vacuidad, puesto que $\rho(\varphi) = \emptyset$ y al vacío no le puede pertenecer elemento alguno.

Ahora, sea $\varphi \in_{\mathcal{C}} \omega$. Entonces, si $\psi \in_{\mathcal{C}} \varphi$, tenemos que $\{n : \psi(n) \in \varphi(n)\} \cap \{n : \varphi(n) \in \omega\} \subseteq \{n : \exists m \in n\} = \emptyset$, pues $\omega \subseteq N$, que es un conjunto de átomos por lo que también la proposición se cumple por vacuidad. Ahora supongamos que $\rho(\psi) \in \rho(\varphi) = \nu(\varphi')$ para alguna $\varphi' \in \mathcal{F}$. Pero esto no es posible, porque las numerosidades son átomos y la proposición se cumple por vacuidad.

Veamos ahora cuando $\varphi \notin_{\mathcal{C}} \omega$ y $\varphi \neq_{\mathcal{C}} \emptyset$. Entonces $\rho(\varphi) = \{\rho(\eta) : \eta \in_{\mathcal{C}} \varphi\}$, con lo que tenemos que $\rho(\psi) \in \rho(\varphi) \Leftrightarrow \psi \in_{\mathcal{C}} \varphi$.

Demostremos el inciso de la igualdad. Hagámoslo nuevamente por casos. Sea $\varphi =_{\mathcal{C}} \emptyset$. Supongamos que $\varphi =_{\mathcal{C}} \psi$. Como $=_{\mathcal{C}}$ es relación de equivalencia, tenemos que $\psi =_{\mathcal{C}} \emptyset$, por lo que $\rho(\varphi) = \rho(\psi) = \emptyset$. Ahora veamos que pasa si $\rho(\psi) = \rho(\varphi) = \emptyset$, pero no puede suceder que $\psi \in_{\mathcal{C}} \omega$, pues ninguna numerosidad es el vacío, y tampoco que no sea el vacío módulo el ultrafiltro, porque querría decir que el vacío tiene elementos. Por lo tanto, $\psi =_{\mathcal{C}} \emptyset =_{\mathcal{C}} \varphi$.

Supongamos que $\varphi \in_{\mathcal{C}} \omega$.

Si $\varphi =_{\mathcal{C}} \psi$, entonces

$$\{n : \varphi(n) \in \omega\} \cap \{n : \varphi(n) = \psi(n)\} \subseteq \{n : \psi(n) \in \omega\} \in \mathcal{C}.$$

Entonces $\rho(\varphi) = \nu(\varphi')$ y $\rho(\psi) = \nu(\psi')$ donde $\varphi', \psi' \in \mathcal{F}$, $\varphi =_{\mathcal{C}} \varphi'$ y $\psi =_{\mathcal{C}} \psi'$. Como $=_{\mathcal{C}}$es relación de equivalencia, $\varphi' =_{\mathcal{C}} \psi'$, y por la proposición 3.7, $\rho(\varphi) = \nu(\varphi') = \nu(\psi') = \rho(\psi)$.

Supongamos ahora que $\rho(\varphi) = \rho(\psi)$. Pero $\rho(\varphi) = \nu(\varphi')$ para alguna $\varphi' \in \mathcal{F}$ y $\varphi' =_{\mathcal{C}} \varphi$. Esto quiere decir que $\nu(\varphi') = \rho(\psi)$ por lo que $\varphi' \in_{\mathcal{C}} \omega$ puesto que las numerosidades son átomos (no pueden ser el vacío ni conjuntos de cosas). Entonces $\varphi' =_{\mathcal{C}} \psi$, y concluimos que $\psi =_{\mathcal{C}} \varphi$.

Supongamos ahora que $\varphi \notin_{\mathcal{C}} \omega$ y $\varphi \neq_{\mathcal{C}} \emptyset$.

Supongamos entonces que $\varphi =_{\mathcal{C}} \psi$. Por un lado tenemos que $\rho(\varphi) = \{\rho(\eta) : \eta \in_{\mathcal{C}} \varphi\}$. Pero por la proposición de extensionalidad, $\eta \in_{\mathcal{C}} \varphi \Leftrightarrow \eta \in_{\mathcal{C}} \psi$, por lo que $\psi \neq_{\mathcal{C}} \emptyset$ y $\psi \notin_{\mathcal{C}} \omega$ (recordemos que los naturlaes son átomos). Entonces $\rho(\varphi) = \{\rho(\eta) : \eta \in_{\mathcal{C}} \varphi\} = \{\rho(\eta) : \eta \in_{\mathcal{C}} \psi\} = \rho(\psi)$. ■

Definición 4.29 *Una función* $*: V_\infty(X) \longrightarrow V_\infty(Y)$ *entre el modelo estándar* $V_\infty(X)$ *y el módelo no estándar* $V_\infty(Y)$ *es un encaje no estándar si las siguientes condiciones son satisfechas:*

1. $\forall x \in X({}^*x = x)$ *y* ${}^*X = Y$;

2. $\omega \neq {}^*\omega$;

3. *Principio de Transferencia: Una "propiedad elemental"* σ *es verdadera acerca de los elementos estándar* $a_1, ..., a_n$ *si, y sólo si es verdadera acerca de los elementos no estándares correspondientes* ${}^*a_1, ..., {}^*a_n$.

El *principio de transferencia* se formaliza como sigue: Para toda fórmula $\sigma(x_1, ..., x_n)$ en el lenguaje de la teoría de conjuntos, y para toda $a_1, ..., a_n \in V_\infty(X)$, $V_\infty(X) \models \sigma(a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow V_\infty(Y) \models \sigma({}^*a_1, ..., {}^*a_n)$.

Un conjunto $B \in V_\infty(Y)$ se llama *interno* si $B \in {}^*A$ para algún $A \in V_\infty(X)$. En particular, todos los conjuntos de la forma ${}^*A$ son internos. Un encaje no estándar es *contablemente saturado* si para toda familia contable B de conjuntos internos con la propiedad de la intersección finita (i.e. tal que $\cap B' \neq \emptyset$ para todas las subfamilias finitas $\emptyset \neq B' \subseteq B$) tiene intersección no vacía $\cap B \neq \emptyset$. Se asume que $B \subseteq {}^*A$ para algún A.

Definición 4.30 *Para toda* $x \in V_\infty(\omega)$, *sea* ${}^*x = \rho(c_x)$ *donde* c_x *es la sucesión constante con valor* x.

Observación 4.31

1. ${}^*n = n$ *si* $n \in \omega$;

2. ${}^*A = \{\rho(\varphi) | \varphi : \omega \longrightarrow A\}$ *si* $A \in V_\infty(\omega) - \omega$ *es un conjunto.*

Por inducción, se prueba fácilmente que $\varphi \in \mathcal{F}_k$ implica que $\rho(\varphi) \in V_k(N)$, por lo tanto $*$ toma valores en la superestructura sobre N.

Teorema 4.32 *La función* $*: V_\infty(\omega) \longrightarrow V_\infty(N)$ *es un encaje contable saturado no estándar, cuya colección de elementos internos es precisamente el rango de* ρ.

Demostración. Primero, probemos lo siguiente:

·Para toda fórmula acotada $\sigma(x_1, ..., x_n)$ en el lenguaje de la teoría de conjuntos, y para toda $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \mathcal{F}_\infty$:

$\sigma(\rho(\varphi_1), ..., \rho(\varphi_n)) \Leftrightarrow \{k : \sigma(\varphi_1(k), ..., \varphi_n(k))\}$ está calificado.

Para las fórmulas atómicas $\rho(\varphi_1) = \rho(\varphi_2)$ y $\rho(\varphi_1) \in \rho(\varphi_2)$, la tesis está dada por *3* y *4* de la proposición 4.28. Los pasos de la conjunción $\sigma_1 \wedge \sigma_2$ y la negación $\neg\sigma$ se siguen directamente de las propiedades *1* y *3* de la proposición 3.8, respectivamente. Ahora vayamos al cuantificador existencial, y asumamos que $\exists x \in \rho(\varphi)\sigma(x, \rho(\varphi_1), ..., \rho(\varphi_n))$.

Entonces existe ψ tal que $\psi \in_\mu \varphi$ y $\sigma(\rho(\psi), \rho(\varphi_1), ..., \rho(\varphi_n))$. Por la hipótesis de inducción, $D = \{k : \psi(k) \in \varphi(k)\}$ y $E = \{k : \sigma(\psi(k), \varphi_1(k), ..., \varphi_n(k))\}$ son ambos calificados. Por lo tanto,

$$\{k : \exists x \in \varphi(k)\sigma(x, \varphi_1(k), ..., \varphi_n(k))\}$$

está calificado también, porque es un supraconjunto de $D \cap E$. Inversamente, asumamos que $D = \{k : \exists x \in \rho(k)\sigma(x, \varphi_1(k), ..., \varphi_n(k))\}$. Para toda $k \in D$, escogemos $\xi_k \in \varphi(k)$ con $\sigma(\xi_k, \varphi_1(k), ..., \varphi_n(k))$. Tomamos $\psi \in \mathcal{F}_\infty$ una secuencia tal que $\psi(k) = \xi_k$ para toda $k \in D$. Entonces $\psi \in_\mu \varphi$, y por la hipótesis de inducción $\rho(k)\sigma(x, \varphi_1(k), ..., \varphi_n(k))$. Concluimos que $\exists x \in \rho(\varphi)\sigma(x, \rho(\varphi_1), ..., \rho(\varphi_n))$.

Ahora regresemos al principio de transferencia de Leibniz. Recordemos el siguiente hecho en la teoría de conjuntos: Si $T \subseteq T'$ son clases transitivas, $\tau(x_1, ..., x_n)$ es una fórmula acotada, y $t_1, ..., t_n \in T$, entonces $T \models \tau(t_1, ..., t_n) \Leftrightarrow T' \models \tau(t_1, ..., t_n)$. En particular esto es verdad cuando $T = V_\infty(\omega)$ o $T = V_\infty(N)$, y T' es el universo de todos los conjuntos. Ahora sea una fórmula acotada $\sigma(x_1, ..., x_n)$ y elementos $a_1, ..., a_n \in V_\infty(\omega)$ dados. Usando la propiedad de arriba $(\cdot)$, obtenemos las siguientes
equivalencias:

$$\begin{aligned}
\sigma({}^*a_1, ..., {}^*a_n) &\Leftrightarrow V_\infty(N) \models \sigma({}^*a_1, ..., {}^*a_n) \\
&\Leftrightarrow \sigma(\rho(c_{a_1}), ..., \rho(c_{a_n})) \\
&\Leftrightarrow V_\infty(\omega) \models \sigma(a_1, ..., a_n) \\
&\Leftrightarrow \sigma(a_1, ..., a_n)
\end{aligned}$$

Esto prueba al teorema de transferencia. Ahora regresemos a la saturación, y consideremos la familia $B \subseteq {}^*A$ de conjuntos internos. Por la definición de elemento interno, es fácil ver que $B = \{\rho(\varphi_n) : n \in \omega\}$ para una sucesión *ad hoc* $\varphi_n : \omega \longrightarrow A$. Para cada $n \in \omega$, escogemos $x_n \in \cap_{i=0}^n \rho(\varphi_i)$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x_n = \rho(\psi_n)$ donde $\psi_n(k) \in \varphi_i(k)$ para todas las $k \in \omega$ y para todas las $i = 0, ..., n$. Definimos $\vartheta(n) = \psi_n(n)$. Notemos que $A \in V_m(\omega) \Rightarrow \vartheta \in \mathcal{F}_m \subseteq \mathcal{F}_\infty$. Ahora, para cada n, $\{k : \vartheta(k) \in \varphi_i(k)\} = \{k : k \geq n\}$ es cofinito, por tanto, calificado, y por lo tanto $\rho(\vartheta) \in \cap B$ es el elemento que estábamos buscando. ■

En particular, el conjunto de numerosidades $N = {}^*\omega$ es un conjunto de hipernaturales (i.e., números naturales no estándar). Más aún, el conjunto de numerosidades enteras Z y el conjunto de numerosidades racionales Q coincide con el conjunto de hiperenteros ${}^*\mathbb{Z}$ e hiperracionales ${}^*\mathbb{Q}$, respectivamente.

Para $\xi, \eta \in \mathbb{Q}$, denotemos $\xi \approx \eta$ cada que $\xi - \eta$ es un infinitesimal, y sea

$${}^*\mathbb{Q}_a = \{\xi \in^* \mathbb{Q} : |\xi| < n \text{ para algún } n \in \omega\}$$

la colección de hiperracionales acotados. El siguiente es un ampliamente conocido hecho del análisis no estándar (ver [7]).

Proposición 4.33 *El cociente* ${}^*\mathbb{Q}_a/\approx$ *y los números reales* $\mathbb{R}$ *son isomorfos como campos ordenados.*

Como $Q = {}^*\mathbb{Q}$, esto prueba el teorema 4.11.

Con esto terminamos la construcción de los reales no estándar a partir de las numerosidades, y el último capítulo. Para concluir, haremos un recuento de lo que hicimos a lo largo de la tesis.

Conclusiones

Como pudimos observar en el capítulo 3, una función de numerosidad está fuera de los axiomas tradicionales de las matemáticas, ya que su existencia depende de la existencia de ultrafiltros selectivos. También observamos que la segunda propiedad de una función de numerosidad es muy fuerte, ya que durante la construcción de una función de numerosidad, fue la única de las tres condiciones que requirío que el ultrafiltro fuera selectivo. Pero no son tan malas noticias. El axioma de Martin y sus generalizaciones están tomando fuerza entre la comunidad matemática, debido a sus implicaciones interesantes, como que el cardinal del continuo es $\aleph_2$, y por supuesto, que un ultrafiltro selectivo existe, lo que querría decir que también una función de numerosidad existe, suponiendo el axioma de Martin.

La fuerza y utilidad de los ultrafiltros quedó más que confirmada a lo largo de la tesis, por lo cual se le dedicó todo un capítulo. Aunque en este trabajo se utilizaron como una herramienta, pues sirvieron para demostrar muchísmos resultados, son un objeto de trabajo matemático interesante en sí.

También vimos en el último capítulo que los naturales no estándar también son un sistema de conteo, algo realmente novedoso. De paso, descubrimos que es posible la construcción de conjuntos no vacios que se comportan como atomos sin elementos o "urelementos" dentro de la superestructura de un conjunto dado.

Entre los resultados que se omitieron fue la prueba de que existen modelos sin ultrafiltros selectivos. Esta demostración utiliza el método de *forcing,* y que el axioma de Martin implica la existencia de ultrafiltros selectivos, un resultado más o menos reciente.

Por otra parte dejamos aún abierto el problema propuesto por Benci y Di Nasso de modificar las propiedades de las funciones de numerosidad para que puedan ser demostradas en ZFE.

Bibliografía

[1] Amor Montaño, J. A. *Compacidad en la lógica de primer orden y su relación con el teorema de completud.* México: Servicios Editoriales, Facultad de Ciencias, UNAM, 1999.

[2] Amor Montaño, J. A. *Teoría de conjuntos para estudiantes de ciencias.* México: Servicios Editoriales, Facultad de Ciencias, UNAM, 1997.

[3] Antaki, Ikram. *En el banquete de Platón. Ciencia.* México: Editorial Planeta Mexicana. 1997.

[4] Benci, V. y Dinasso, M. *Numerosities of labelled sets: a new way of counting.* Advances in Mathematics, vol 173, 2003, pp. 50-67.

[5] Borges, Jorge Luis. *El libro de los seres imaginarios.* Barcelona: Bruguera, 1980.

[6] Chang, C.C. y Keisler, H. J. *Model Theory.* Amsterdam: North-Holland, 1990.

[7] Davis, M. *Applied Nonstandard Analysis,* John Wiley & Sons, 1977

[8] Fraleigh, Percy A. *Álgebra Abstracta. Primer Curso.* Mexico, D.F.: Sistemas técnicos de edición, c1988

[9] Gilbert, T. y Rouch, N. *Y a-t-il vraiment autant de nombres pairs que de naturels?*, en "Méthodes et Analysis Non Standard", A. Pétry ed., Cahiers du Centre de Logique 9, Louvain-la-Neuve (Bélgica): Bruylant-Academia, 1996, pp. 99-139.

[10] Jech, T. *Set Theory.* New york : Academic Press, 1978

[11] Jech, T. *Set Theory.* The 3rd millennium ed., rev. and expanded. Berlin: Springer, c2003.

[12] Kunen, Kenneth. *Set theory : an introduction to independence proofs.* Amsterdam ; New York: Elsevier North-Holland, 1980.

[13] *Mathworld.* <http://mathworld.wolfram.com/>.