UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EMPAREJAMIENTOS EN GRÁFICAS GEOMÉTRICAS ETIQUETADAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

ANDRÉS RUDIGER GENTZEN SANTIAGO PINEDA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTORA DE TESIS:
DRA. MARTHA GABRIELA ARAUJO PARDO

2004

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Emparejamientos en Gráficas Geométricas Etiquetadas

realizado por Andrés Rudiger Gentzen Santiago Pineda

con número de cuenta 400042228, quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dra.	Martha Gabriela Araujo Pardo	GAraujo
Propietario	Dr.	Jorge Urrutia Galicia	
Propietario	Dr.	Luis Montejano Peimbert	
Suplente	M. en C.	María del Pilar Valencia Saravia	Pilar Valencia S.
Suplente	M. en C.	Mucuy-Kak del Carmen Guevara Aguirre	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMÁTICAS

Índice general

1. Introducción **1**

2. Preliminares **6**

3. Coloraciones Heterocromáticas y Emparejamientos Geométricos **10**

3.1. Emparejamientos Geométricos Completos 10

3.2. Números de Catalán 16

4. Etiquetamientos **20**

5. Algoritmos de Resolución **31**

Bibliografía **37**

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a Gaby por su gran ayuda y valioso tiempo..

Pero en general, a todo matemático que durante estos cuatro años me enseñó a pensar y a sentir las cosas de una manera distinta. Ayudarme a descubrir matemáticas que para mí antes no eran posibles. Profesores como Luis Montejano y su topología, Francisco Marmolejo y su álgebra, Mónica Clapp y su análisis, pero sobre todo a aquel profesor que me fue abriendo las puertas da las gráficas de una manera apasionada y sencilla, a mi querido Profesor Víctor Neumann.

A mis padres, Lutz y Edith, por enseñarme a luchar contra la adversidad. A Indra por la vida que desde que nacimos hemos compartido. A toda mi familia por demostrarme lo que la unión significa. A los Trejo simplemente gracias por todo.

A todos mis amigos, ellos saben quienes son y todo lo que hemos vivido juntos. A mis suizos y sus ramificaciones. Pana, Cuerpecito, Betoques, Peter van der Hoogenband, Brody, Tania Andretti, Richy tex tex, Juan Gabrielle y perdonen si se me escapa uno.Se que puedo confiar ciegamente en ustedes, gracias por el historial que hemos hecho durante tantos años.

A los compañeros y amigos que hice en la carrera: Abraham, Ana, Alfredo, Mariano, Gus, Diego. En especial a mis dos chicas de la carrera Aisha y Eugenia con las que tanto tiempo pase. Gracias por todas las vivencias.

A Andrea por su magia y lo que me hace sentir.

Gracias a todo aquel que se me cruzó en el camino durante estos últimos 24 años porque estoy seguro de que algo me dejo y espero que a él también.

Gracias,

Rudiger

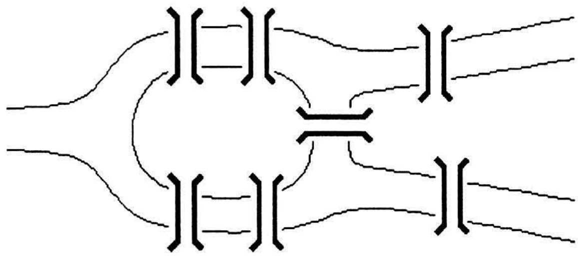
Capítulo 1

Introducción

Este trabajo está dedicado a cierto tipo de gráficas y una propiedad de éstas. Pero antes de entrar en el tema es conveniente retomar algo de historia de la Teoría de Gráficas y de cómo surgió la problemática que hoy nos interesa.

Fue un problema muy famoso de alrededor de mil setecientos que da pie a lo que hoy conocemos con el nombre de Teoría de Gráficas. Más específicamente fue su solución. El problema es conocido como los Puentes de Koenigsberg, y plantea lo siguiente: En la ciudad de Koenigsberg había dos islas unidas entre si y a la vez unidas con la tierra del río Pregel por siete puentes. El problema consistía en empezar en cualquiera de las cuatro aréas de tierra y caminar pasando por cada uno de los puentes exactamente una sola vez y regresar al punto de partida.

Una manera de resolver este dilema es empíricamente, es decir, con prueba y error. Pero todos los intentos están destinados al fracaso. La prueba de esto último es obra del brillante matemático de esa época Euler y su solución al problema. Euler representó cada área de tierra por un punto y cada puente por una arista construyendo así una "gráfica".



Los puentes de Koenigsberg

Señalando con ello que si el problema es insoluble es equivalente a demostrar que la gráfica no puede ser trazada de cierta manera.

Euler en vez de probar sólo este caso específico, generalizó el problema desarrollando con ello un criterio para que una gráfica dada sea trazada o no. El problema consistía, en términos de Teoría de Gráficas, en encontrar un recorrido que pase por todas las aristas exactamente una vez. Si dicho recorrido existe decimos que la gráfica es trazable. Euler demostró que una gráfica es trazable sí y sólo si es conexa y en todo vértice incide un número par de aristas.

Fue de esta manera que surgió una nueva rama de las matemáticas, la Teoría de Gráficas.

El problema más famoso de Teoría de Gráficas, es "La Conjetura de los Cuatro Colores".

Esta conjetura puede ser explicada por un matemático a cualquier persona en cinco minutos, al cabo de los cuales los dos entenderán el problema pero ninguno será capaz de resolverlo. La conjetura dice más o menos lo siguiente:

Cualquier mapa en el plano o en la superficie de la esfera puede ser coloreado con sólo cuatro colores, de tal manera que dos países vecinos, es decir países que comparten una frontera que no sea un sólo punto, no tengan el mismo color.

Más de medio siglo de investigación de muchos matemáticos, ha dado como resultado pruebas para casos específico.

La creencia es que la conjetura es cierta pero dificilmente demostrable para el caso en general. Da la impresión de que durante un buen tiempo tendrá la distinción de ser a la vez el más simple y más difícil problema abierto de la teoría de las gráficas.

Cabe comentar que a lo largo de su historia esta conjetura ha tenido muchas pruebas erróneas, la primera de ellas se dio en 1879 debido a Kempe y cuyo error fue encontrado once años más tarde por Heawood que además demostró que la conjetura se vuelve cierta si remplazamos la palabra "cuatro" por la de "cinco".

Lo que nos llevó a querer hacer un trabajo bajo el título de " Emparejamientos en Gráficas Geométricas Etiquetadas" fue el gusto por esta rama de las Matemáticas Discretas donde mucho tiene que ver la influencia de nuestro querido profesor el Dr. Victor Neumann que en paz descanse.

Fue mi interés por la Combinatoria, el que me llevó a acercarme a la Dra. Gabriela Araujo en busca de un tema para mi tesis.

El problema central de la tesis está ampliamente relacionado como he mencionado con la Teoría de Gráficas, sin embargo también pertence a una rama de las matemáticas conocida como la Geometría Combinatoria la cual surge con gran ímpetu durante la segunda mitad del siglo pasado.

La Geometría Combinatoria es el estudio de problemas acerca de conjuntos finitos de puntos o figuras generalmente en posición general, es decir donde no hay tres puntos colineales en el plano, o en su caso, coplanares en el espacio. Los problemas abordados dependen tanto de la combinatoria como de la distribución geométrica de los objetos con los que se está trabajando.

La primera vez que se usó el término "Geometría Combinatoria" como tal fue en el artículo "Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie" de 1955 del matemático suizo H. Hadwinger, aunque ya años antes el gran matemático húngaro Paul Erdös había publicado un artículo sobre el tema.

Desde entonces ha habido un gran desarrollo en esta materia, al grado de haber un sin número de publicaciones al respecto.

Es importante resaltar la relación entre los problemas sobre los conjuntos de puntos en el plano y las gráficas. Simplemente, un conjunto de cualesquiera n puntos en el plano junto con los segmentos de recta que los unen induce una gráfica conocida, llamada la gráfica geométrica completa de n vértices.

Sin embargo, otra vez pensando en la geometría cada posición de los n puntos (y los segmentos entre ellos) induce una gráfica geométrica distinta que depende de "los cruces"que se dan entre los segmentos.

Así, empezamos trabajando con un tipo especial de gráficas, introducidas por el matemático alemán M.Kneser.

Pero fue un problema muy sencillo de entender y, para ocho puntos, creíamos tener la respuesta en menos de una semana. Esto nos atrajo y envolvió con el paso de las semanas y meses.

Este problema trata de emparejamientos. Cualquiera sabe emparejar, por ejemplo un hermano esta emparejando cuando compara el número de juguetes que tiene con respecto a los de su hermana o ya de más años, el ahora joven, al ir a una fiesta lo primero que hace es ver cuantas mujeres hay en comparación con los hombres.

Lamentablemente nuestro problema no es tan sencillo por que a nuestros emparejamientos les pedimos que cumplan más cosas. Pero lo bonito de este problema es que tiene una complejidad que a nuestro gusto raya en lo estético.

La tesis está dividida en cuatro capítulos. En el primer capítulo es donde damos las definiciones que se usarán a lo largo de la tesis. De estas, algunas son nuevas ya que las definimos al no contar con un nombre conocido en la literatura.

El segundo capítulo consta de emparejamientos geométricos y coloraciones heterocromáticas. Ahí se empieza a dar una introducción de nuestro problema y se obtienen resultados en gráficas geométricas sin etiquetar aún.

El tercero, como era de esperarse trata precisamente de estas gráficas que ya etiquetamos y de algunos resultados que nos fueron saliendo mientras buscábamos la demostración de nuestro problema principal.

Por último tenemos el cuarto capítulo en donde damos respuesta a nuestra pregunta, obtenida gracias a la computadora, sin la cual, debido al tamaño de estos creemos que nos hubiera sido imposible encontrarlas manualmente.

Capítulo 2

Preliminares

En esta sección daremos varias definiciones y observaciones básicas que se utilizarán en lo que resta de la tesis. Aquel familiarizado con los conceptos básicos en Teoría de Gráficas puede sin más saltarse a la siguiente sección.

Por fortuna la terminología común en Gráficas es tan intuitiva que es fácil de recordar.

Denotamos con N al conjunto de los números naturales.

Definición 2.1 *Un conjunto $B = \{A_1, ..., A_k\}$ de subconjuntos disjuntos del conjunto A es una* ***partición estricta*** *de A si $A = \cup_{i=1}^{k} A_i$, $A_i \neq \emptyset$ y $A_i \cap A_j = \varnothing$ para toda i, j.*

Definición 2.2 *A partir de un conjunto $A = \{A_1, ..., A_k\}$ podemos construir todos los subconjuntos de A con k elementos si $k \leq n$. A éstos los llamaremos $k -$ conjuntos y denotaremos por $[A]^k$.*

Definición 2.3 *Una gráfica G es un par (V, E) de conjuntos que satisfacen $E \subseteq [V]^2$; es decir, que los elementos de E son subconjuntos de dos elementos de V. Los elementos* *de V son los vértices o puntos de la gráfica G y los elementos de E son sus aristas o líneas rectas.*

Representamos una gráfica G como un dibujo en el que los elementos de V son puntos (o círculos pequeños en el plano y las parejas de E las representamos mediante una arista entre los vértices correspondientes. La manera en que se dibujan los puntos y líneas rectas de una gráfica es irrelevante, lo que importa es cuales pares de puntos son unidos por una arista y cuales no.

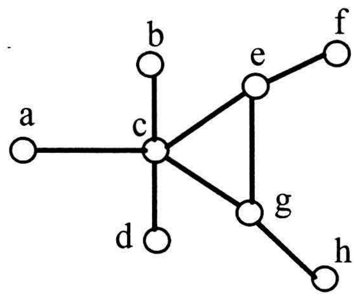


figura 2.1

Definición 2.4 *El número de vértices de una gráfica es su* ***orden****, denotado por $|G|$ y el número de aristas es el* ***tamaño*** *y es denotado por $||G||$.*

Las gráficas pueden ser finitas o infinitas dependiendo de su orden; pero en este trabajo todas las gráficas tendrán orden finito. Dos vértices x, y de G son adyacentes si $xy \in E$ Dos aristas son adyacentes si tienen un vértice en común.

Definición 2.5 *G es una gráfica* ***completa****, denotada por K_n, si todos los vértices son adyacentes.*

Cuando dos aristas no son adyacentes, se dice que son **independientes.** Un conjunto de vértices o aristas es **independiente** si no hay dos elementos del conjunto que sean adyacentes.

En la figura 2.1 tenemos una gráfica de orden 8 donde el vértice **a** es adyacente solamente con **c** y las aristas **ce** y **gh** son independientes.

Definición 2.6 *Sea $G = (V, E)$ una gráfica. El conjunto de vértices adyacentes (vecinos) a un vértice v en G recibe el nombre de* **vecindad** *de v en G y es denotado por $N_G(v)$. La* **valencia** *(o grado), $d_G(v)$, de un vértice v es el número $|E(v)|$ de aristas incidentes a v; es decir, la cardinalidad del conjunto de vecinos de v.*

Si todos los vértices de G tienen la misma valencia k, entonces G es k-regular o simplemente regular. Las gráficas **completas** son $(n-1)$-regulares. En la figura 2.2 tenemos a K_5 que es una gráfica $4-regular$ y donde todos los vértices son vecinos.

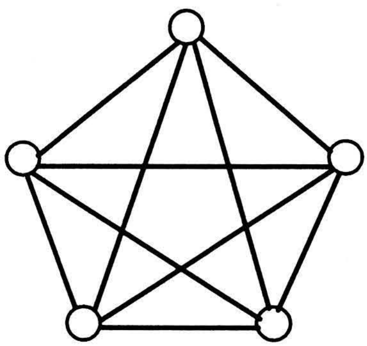


figura 2.2

Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos gráficas. Se dice que G y G' son $isomorfas$, denotado por $G \simeq G'$, si existe una bijección $\varphi : V \to V'$ tal que $xy \in E$ sí y sólo si $\varphi(x)\varphi(y) \in E'$ para toda $x, y \in V$. Si $G = G'$ entonces φ es un automorfismo. Que dos gráficas sean isomorfas quiere decir que son escencialmente la misma gráfica, por lo que no se hace distinción y para simplificar hablamos por ejemplo de la gráfica completa de n vértices.

Definición 2.7 *Sean $G \cup G' := (V \cup V', E \cup E')$ y $G \cap G' := (V \cap V', E \cap E')$. Si $G \cap G' = \varnothing$,* *entonces G y G' son **disjuntas**. Si $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, entonces G'es una **subgráfica** de G, entonces se dice que G **contiene** a G', denotado por $G' \subseteq G$.*

Definición 2.8 *Una **gráfica geométrica** G es una gráfica dibujada en el plano con segmentos de líneas rectas, es decir, definida como un par $(V(G), E(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto de puntos en el plano de los cuales no hay tres que sean colineales y las aristas son segmentos entre pares de puntos de $V(G)$.*

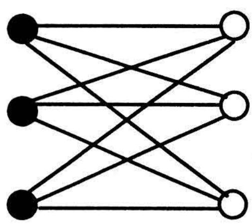
Definición 2.9 *Decimos que.una gráfica geométrica G está en **posición convexa** si el conjunto de sus vértices son los vértices de un polígono convexo.*

Recordemos que un polígono es convexo si la recta que une a cualesquiera dos puntos del polígono (en la frontera o en el interior) está totalmente contenida en el polígono.

Definición 2.10 *Sea $r \geq 2$ un entero. Una grafica $G = (V, E)$ es **r-partita** si V admite una partición en r conjuntos tal que cualquier arista tiene sus puntos terminales en conjuntos distintos, es decir, vértices del mismo conjunto no son adyacentes.*

Con lo que cada miembro de la partición es un conjunto independiente.

Cuando $r = 2$ se dice que la gráfica es bipartita. En la figura siguiente hay una gráfica bipartita explícita, es decir, que los dos conjuntos se aprecian a simple vista. La figura 2.3 muestra una gráfica bipartita no tan clara de ver. Cabe notar que las dos son la misma dibujadas de distinta manera.



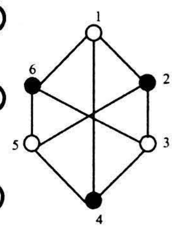


figura 2.3

Capítulo 3

Coloraciones Heterocromáticas y Emparejamientos Geométricos

3.1. Emparejamientos Geométricos Completos

Recordemos que $K_{2n} = (2n, [2n]^2)$ es la gráfica que tiene $2n$ puntos y todas las aristas entre ellos. Un emparejamiento en K_{2n} es un conjunto de aristas **independiente**, se dice completo si el conjunto tiene n aristas **independientes** ya que eso fuerza a que todos los vértices de K_{2n} estén emparejados. En la figura 3.1 damos un emparejamiento completo de K_6.

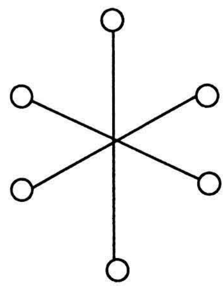


figura 3.1

Dentro del estudio de las gráficas geométricas ha jugado un papel importante el estudio de los emparejamientos geométricos.

Definición 3.1 *Un emparejamiento se dice* ***geométrico*** *si ningún par de aristas se cruzan.*

También podemos decir que un emparejamiento geométrico es un conjunto de segmentos paralelos.

La primera pregunta natural es si la gráfica K_{2n} tiene emparejamientos geométricos completos, la respuesta es trivial y aquí tenemos varios ejemplos para K_8.

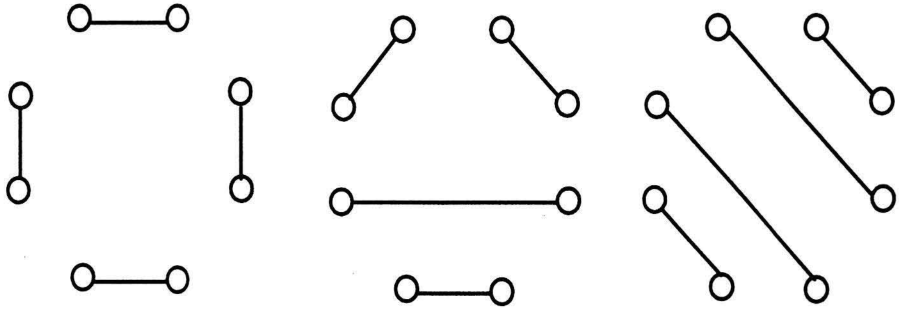


figura 3.2

Sin embargo, también se han estudiado los emparejamientos geométricos en términos de coloraciones. Una pregunta que surge es pensar en colorear las aristas de G con dos colores y buscar el emparejamiento geométrico más grande en G con alguno de los dos colores, a este tipo de emparejamientos los llamaremos **monocromáticos**.

La primera herramienta que usaremos es un teorema debido a Karolyi, Pach y Toth [1] que dice lo siguiente:

Teorema 3.2 *Si las aristas de una gráfica geométrica completa con n vértices son coloreadas con dos colores, existen al menos $\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$ aristas **independientes** de un mismo color.*

La prueba de este teorema es muy complicada ya que los puntos están en posición general. Sin embargo, podemos probar el resultado fácilmente si los puntos están en posición convexa:

Teorema 3.3 *Si G es una gráfica completa de orden n cuyos puntos están en posición convexa y coloreamos las aristas con dos colores tenemos que existen al menos $\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$ aristas **independientes** del mismo color.*

Demostración: Se hará por inducción sobre el número de vértices de nuestra gráfica. Para tres puntos el resultado es trivial. Supongamos que para gráficas de orden menor que n el resultado es cierto. Ahora bien, si para G de orden n sólo apareciera un color en la frontera, tendríamos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ aristas de un color y $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor > \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$ por lo tanto ya habríamos terminado. Por lo que los dos colores deben de estar en la frontera, con lo que en alguna parte los dos colores son consecutivos (ver figura 3.3). Sea A el conjunto de vértices que involucran a esas dos aristas, es decir $|A| = 3$ y nos fijamos en $G - A$.

Ahora bien por nuestra hipótesis de inducción existen al menos $\lfloor \frac{n-3+1}{3} \rfloor = \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor$ aristas ajenas del mismo color en $G - A$. Si le sumamos una arista de las dos de A (que tiene los dos colores) obtenemos $\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor + 1$ en G luego entonces $\lfloor \frac{n-2}{3} + 1 \rfloor = \lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$

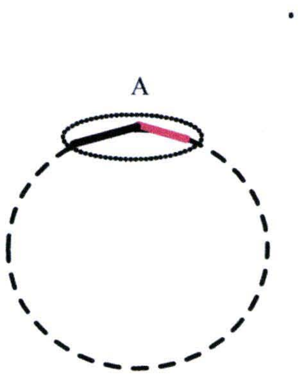


figura 3.3

■

Teorema 3.4 *Si G es como en el teorema 3.2 pero esta vez coloreamos con tres colores tenemos que existen al menos $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ aristas* ***independientes*** *de algún color.*

Demostración: Utilizaremos inducción sobre el orden de G. Para $n = 3$ el resultado se sigue de inmediato. Supongamos cierto para $|G| < n$. Luego entonces si el orden de $|G| = n$ fijemonos en las aristas del casco convexo. Si sólo hubiera un color tendríamos $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ aristas *independientes*, si en vez de un color hubiera dos, habría $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ aristas de un mismo color, en ambos casos ya habríamos terminado. Por lo tanto supongamos que están los tres colores en el casco convexo. Ahora bien tomemos una arista de cada color y los cinco puntos que los involucran, esto ya que siempre podemos tomarnos dos aristas adyacentes y de distinto color.Llamémosle Q a la gráfica generadora que nos queda si a G le quitamos esos cinco puntos. Luego entonces por inducción Q tiene $\lfloor \frac{n-5}{5} \rfloor$ aristas *independientes* de un mismo color, a ese número le sumamos una arista de las tres que habíamos quitado, obteniendo asi $\lfloor \frac{n-5}{5} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ aristas *independientes* para G. ■

Teorema 3.5 *Si coloreamos las aristas de G con $k \geq 4$ colores hay $\lfloor \frac{n}{2k} \rfloor$ aristas independientes de un mismo color.*

Demostración: Si hubiera $k-1$ colores en la frontera, tendríamos por lo menos un color que aparece en al menos $\frac{n}{k-1}$ aristas. Esas $\frac{n}{k-1}$ aristas de un color (llamémosle azul) asegura por lo menos $\left\lfloor \frac{n}{2(k-1)} \right\rfloor > \lfloor \frac{n}{2k} \rfloor$ aristas independientes monocromáticas ya que ese número se tiene cuando todas las aristas del color azul son consecutivas, en cualquier otra distribución tendríamos más. Por lo tanto podemos suponer que los k colores están en la frontera, luego entonces siguiendo la línea de demostración del teorema 3.2, es decir, por inducción sobre el orden y removiendo los $2k$ puntos que involucran a las k aristas de distinto color tenemos que hay $\lfloor \frac{n-2k}{2k} \rfloor$ aristas independientes de un mismo color más una arista de las que quitamos, obtenemos $\lfloor \frac{n-2k}{2k} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{n}{2k} \rfloor$ ∎

Si ahora en vez de conjuntos de aristas independientes monocromáticos nos preguntamos por conjuntos heterocrómaticos. Es decir, todas las aristas de distinto color, obtenemos los siguientes resultados:

Teorema 3.6 *Si coloreamos las aristas de G una gráfica completa de orden n y con un número par de aristas con m colores, donde m es la mitad del número de aristas de G, tal que cada color se repita exactamente dos veces, existen al menos $\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$ aristas **independientes heterocromáticas**.*

Demostración: Si partimos las aristas de G en dos subconjuntos A y B cada uno con la mitad de aristas y todos los colores. Tenemos por el teorema 3.2 que uno de los dos subconjuntos contiene al menos $\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor$ aristas **independientes**, que por la forma de construir la partición tienen que ser de distintos colores. ∎

Teorema 3.7 *Si coloreamos las aristas de G una gráfica de orden n y con la suma de sus aristas igual a un múltiplo de 3 con m colores de tal manera que cada color se* *repita exactamente tres veces, podemos encontrar al menos un conjunto heterocromático de* $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ *aristas* ***independientes***

Demostración: Si partimos las aristas en tres subconjuntos cada uno de cardinalidad k y con todos los colores, usando el resultado del teorema 3.3 tenemos que en uno de los subconjuntos hay por lo menos $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ aristas **independientes** que por construcción de los conjuntos son todas de distinto color. ∎

Teorema 3.8 *Si a las aristas de G las coloreamos con m colores tal que cada color se repita el mismo número de veces,por ejemplo k,siempre y cuando mk es igual al número de aristas de G, tendríamos al menos $\frac{4mn}{(n-1)}$ aristas independientes de distinto color.*

Demostración: Ya que G tiene $\frac{n(n-1)}{2}$ aristas, al tomar $k = \frac{n(n-1)}{2m}$ tendríamos por el teorema 3.4 $\frac{n}{2k}$ aristas independientes que sustituyendo nos da $\frac{n}{2(\frac{n(n-1)}{2m})} = \frac{4mn}{(n-1)}$ ∎

Volviendo a los emparejamientos geométricos:

Observación 3.9 *Una arista x de K_{2n} que parta a los restantes $2n-2$ puntos en dos subconjuntos de cardinalidad impar no puede estar en un emparejamiento geométrico completo. Ya que en algún momento un punto del primer subconjunto tendrá que ser emparejado con uno del otro cruzando esta arista a x.*

Luego entonces de los $\binom{2n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2}$ aristas que tiene K_{2n} ¿cuantas no pueden ser tomadas para un emparejamiento geométrico?

Si fijamos un punto, éste en vez de poder ser emparejado con uno de los $2n-1$ puntos adyacentes a él, sólo puede ser apareado con n.

Con lo que la gráfica que contiene a las aristas que forman parte de los emparejamientos geométricos es una subgrafica de K_{2n} a la que llamaremos θ_{2n} y tiene $\frac{2n(n)}{2} = n^2$ aristas.

Antes de pasar a la siguiente sección demostraremos un lema que nos ayudará a entender mejor los emparejamientos geométricos más adelante:

Lema 3.10 *Para cualquier emparejamiento geométrico se toman al menos dos aristas de la frontera.*

Demostración: Para que una arista pueda ser considerada para un emparejamiento geométrico, tiene que dividir a los restantes puntos en dos subconjuntos de cardinalidad par. Con lo que conforme nos tomemos las aristas vamos partiendo nuestros puntos en subconjuntos de cardinalidad par hasta acabar con al menos dos subconjuntos de cardinalidad 2 que tienen que ser emparejados entre ellos. Estas son las aristas de la frontera. ■

3.2. Números de Catalán

Para encontrar el número de emparejamientos geométricos que tiene K_{2n} utilizamos una relación de recurrencia debida al matemáico belga Eugene Catalán(1814-1894) que precisamente se denominan **los números de Catalán**. Eugene Catalán los usó para determinar el número de formas para colocar paréntesis en la expresión $x_1x_2x_3...x_n$ En la tabla tenemos los primeros casos. El lector entusiasta puede encontrar las 42 formas para $n = 5$.

$n = 0:$	*	1 manera
$n = 1:$	( )	1 manera
$n = 2:$	( )( ), (( ))	2 maneras
$n = 3:$	( ) ( ) ( ), ( )(( )).(( ))( ),(( )( )),((( )))	5 maneras
$n = 4:$	( )( )( )( ).( )( )(( )),( )(( ))( ),( )(( )( )),( )((( ))),...	14 maneras

Es bueno y razonable definir la cuenta de $n = 0$ como uno, ya que hay exactamente una manera de colocar cero parentesis: no escribas nada.

Otro problema es el de calcular cuantas montañas puedes hacer con $2n$ palitos de tal manera de que utilices el mismo número de palitos de subida (/) y de bajada (\) y que no crucen hacia abajo la linea horizontal de donde empezaron.Este problema es análogo al problema de los paréntesis cambiando (por / y) por \ .

Y otro problema análogo es el que a nosotros nos interesa, es decir, el número de emparejamientos geométricos que tiene K_{2n}. Visto de una manera empírica, nos preguntamos de cuantas maneras se pueden estrechar la mano $2n$ personas sentadas en una mesa redonda, de tal manera de que no se crucen al hacerlo. Los primeros términos de nuestro problema son los siguientes:

Si $n = 2$ hay un único emparejamieno.

Si $n = 4$ hay $1 + 1$ ya que cualquier punto puede ser emparejados de dos maneras

Si $n = 6$ hay $2 + 1 + 2$

Si $n = 8$ hay $5 + 2 + 2 + 5$

Si $n = 10$ hay $14 + 5 + 2 * 2 + 5 + 14$

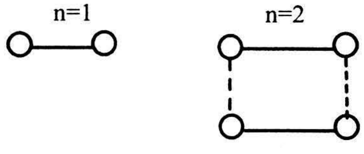


figura 3.4

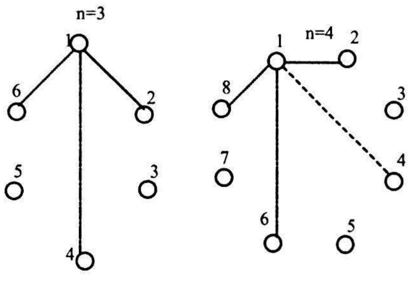


figura 3.5

Nuestro problema es equivalente al de los paréntesis de la siguiente manera:

Numeremos nuestros vértices empezando desde un vértice cualquiera y conforme a las manecillas del reloj. Luego entonces el primer vértice que etiquetamos representa el primer paréntesis que se abre, ahora bien como ya sabemos un vértice no puede ser emparejado con cualquier otro (vease el caso $n = 8$ de la figura anterior). Si nos paramos en el vértice del cual partimos y si suponemos que donde estamos es en K_8, entonces el vértice uno sólo puede ser emparejado a algúno de los vértices $\{2, 4, 6, 8\}$. Regresando al problema de los paréntesis, si el primer párentesis que se abre se cierra de inmediato quiere decir en nuestro ejemplo que el vértice 1 se empareja con el 2 lo escribimos como $(1, 2)$. Si en cambio el primero que se abre se cierra hasta el final tenemos $(1, 8)$. Tomemos un ejemplo un poco más elaborado: (( )(( )))

Lo que quiere decir en nuestro problema es $[(1, 8)(2, 3)(4, 7)(5, 6)]$

Podemos hacer notar la relación de recurrencia de la siguiente manera:

$C_0 = 1$, $C_1 = C_0C_0 = 1$, $C_2 = C_1C_0 + C_0C_1 = 2$, $C_3 = C_2C_0 + C_1C_1 + C_0C_2 = 5$, $C_4 = C_3C_0 + C_2C_1 + C_1C_2 + C_0C_3 = 14$

en general $C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + ... + C_{n-1}C_1 + C_nC_0$

Recordemos que en nuestro problema C_n te da el número de emparejamientos de K_{2n}.

Hay varias maneras de llegar a la fórmula explícita para encontrar el enésimo término, nosotros llegaremos a la fórmula usando el ejemplo de las montañas. Si nosotros ignoramos si la montaña es válida o no (recordemos que la condición es que haya el mismo número de palitos hacia arriba que hacia abajo) tenemos n palitos hacia arriba que podemos escoger de entre los $2n$ palitos. En otras palabras, de cuantas maneras podemos ordenar una colección de n palitos hacia arriba y n hacia abajo. La respuesta es claramente $\binom{2n}{n}$.

Ahora tenemos que restar las montañas prohibidas, ¿cuántas de esas prohibidas hay? El mismo número que hay de escoger $n + 1$ palitos que van hacia abajo del total, es decir $\binom{2n}{2n+1}$

Por lo tanto **el número de Catalán** está dado por la siguiente fórmula:

$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{(n+1)}\binom{2n}{n}$

Capítulo 4

Etiquetamientos

En este capítulo volvemos a plantearnos el problema central y motivación para esta tesis. Empezaremos dando una serie de definiciones que usaremos a lo largo de este capítulo.

Definición 4.1 *Un* ***etiquetamiento inyectivo*** *en los vértices de* G *es una función inyectiva* $f : V(G) \to \{1, 2, ..., n\}$ *Si existe dicha función decimos que la gráfica* G *esta* ***etiquetada uno a uno*** *o simplemente* ***etiquetada.*** *(en la figura 4.1 tenemos un etiquetamiento de* K_4*)*

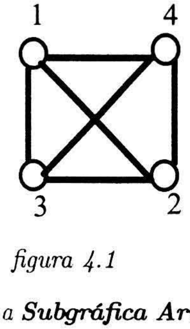


figura 4.1

Definición 4.2 *Decimos que* H *es una* ***Subgráfica Armónica*** *de* G *si es una subgráfica generadora de* G *etiquetada en donde el peso de la arista* xy *está dada por* $f(x)+f(y)$

y todos los pesos de las aristas de H son distintas.(figura 4.2)

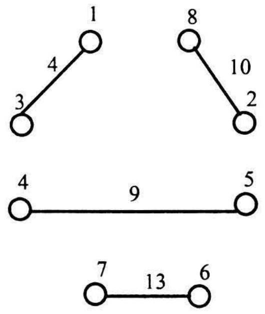


figura 4.2

Definición 4.3 *Decimos que H es una* ***Subgráfica Graciosa*** *de G si es una subgráfica generadora de G etiquetada y en donde el peso de la arista xy está dado por $|f(x) - f(y)|$ y todos los pesos de las aristas de H son distintos.(figura 4.3)*

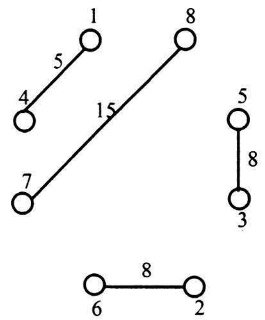


figura 4.3

Definición 4.4 *Sea G_n la gráfica geométrica con n puntos en posición convexa. Y sea f un etiquetamiento de G_n decimos que f es un* ***etiquetamiento geométrico armónico*** *y lo abreviamos como* ***eg-armónico*** *si contiene al menos un emparejamiento* *geométrico armónico y decimos que f es un etiquetamiento* ***neg-armónico*** *si ningún emparejamiento geométrico lo es.*

Análogamente definimos que f es un etiquetamiento **eg-gracioso** si al menos un etiquetamiento geométrico es graciso y decimos que f es un etiquetamiento **neg-gracioso** si ningún emparejamiento geométrico lo es.

Podemos de esta manera reformular nuestro problema central de la siquiente manera:

Conjectura 4.5 *Dada una gráfica geométrica de orden $2n$ en posición convexa, será cierto que todo etiquetamiento es* ***eg-armónico (eg-gracioso)****, es decir, que siempre podemos extraer al menos un emparejamiento geométrico* ***armónico (gracioso)*** *completo de G_{2n}.*

Si el emparejamiento aceptara cruces (es decir, que no fuera geométrico) un algoritmo muy sencillo para encontrar un emparejamiento armónico sería el siguiente:

Algoritmo 4.6 *Empareja los dos puntos que tengan a 1 y 2 como etiquetas y así sucesivamente hasta emparejar los dos últimos puntos con las etiquetas n y $n-1$, obtenemos así un emparejamiento armónico completo de G pero en el que puede haber cruces. Y para uno gracioso emparejamos los puntos que tienen a 1 y n como etiquetas, luego a 2 y $n-1$, y asi sucesivamente hasta $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2}-1$.*

Pero el problema es si a lo armónico (o gracioso) también le quisieramos añadir que las aristas no se cruzaran, es decir su caracter geométrico. Las soluciones dependiendo de si el emparejamiento es armónico o gracioso resultaron muy distintas en grado de dificultad y lo veremos más adelante.

Analizando la pregunta del emparejamiento tendríamos un algoritmo que tendría que jugar con el número de catalan, lo cual para conjuntos de puntos muy pequeños la computadora puede calcular pero el tiempo de respuesta de la máquina aumenta exponencialmente a medida que aumentamos dos puntos al conjunto. En el siguiente capítulo damos un algoritmo y los resultados que arrojó la máquina.

Es claro que si sólo usamos una etiqueta es imposible encontrar un emparejamientogeométrico armónico (a menos de que se tratara de dos puntos nada más). Luego entonces, otra pregunta que nos hicimoses cual es el máximo número de etiquetas que se pueden utilizar para asegurar que nuestro problema tiene solución negativa, es decir que para al menos una manera de colocar las etiquetas no hay forma de encontrar un emparejamiento armónico completo. Obtuvimos el siguiente resultado:

Teorema 4.7 *Para G una gráfica en posición convexa de orden $2n$ y $\{1, 2, ..., n\}$ como etiquetas tal que cada etiqueta aparece dos veces, existen etiquetamientos* ***no armónicos.***

Antes de seguir con la demostración del teorema vamos a demostrar un lema que vamos a usar en la demostración. Por la observación 1 del capítulo anterior tenemos que de la gráfica completa sólo nos teníamos que fijar en una subgráfica para de ahí sacar el emparejamiento geométrico, a esta subgráfica la habíamos denotado θ_{2n} luego el lema dice lo siguiente:

Lema 4.8 *La subgráfica θ_{2n} de G es una gráfica bipartita completa.*

Demostración: Numeramos los vértices de θ_{2n} con $\{1, 2, ..., 2n\}$ partiendo de cualquier vértice y en el sentido de las manecillas del reloj. Observemos que si i es par la vecindad de i, $N_G(i)$, está dada por todos los vértices impares y análogamente si i es impar su vecindad son todos los vértices pares. De ahí, si partimos los vértices de G_{2n} en dos conjuntos ajenos I y P tal que I contiene a todos los vértices impares y P a todos los pares. Obtenemos que $I \cup P = V(G_{2n})$ y $xy \in A(G_{2n})$ si y sólo si x e y pertenecen uno a I y el otro a P pero no al mismo.

Por lo tanto encontramos una partición que implica que G_{2n} es una gráfica bipartita completa. ∎

En la figura 4.4 tenemos el ejemplo de θ_6. Observemos que los vértices están divididos en dos subconjuntos uno de negro el otro de blanco.

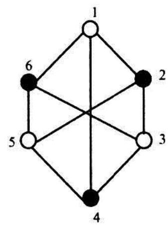


figura 4.4

Ahora si estamos en condiciones de demostrar el teorema:

Demostración: Si nos fijamos en los dos conjuntos de puntos de θ_{2n} y etiquetamos al primero con las $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ primeras etiquetas y sus repeticiones y al segundo conjunto con las restantes $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ hasta n tendríamos $n-1$ sumas distintas y para un emparejamiento armónico se necesitan n pesos distintos. En la figura 4.5 mostramos el ejemplo para K_8 con cuatro etiquetas. En el dibujo de la izquierda se ve más clara la partición y con ello los distintos pesos que son 3 y para K_8 se necesitan cuatro pesos distintos en un emparejamiento armónico.

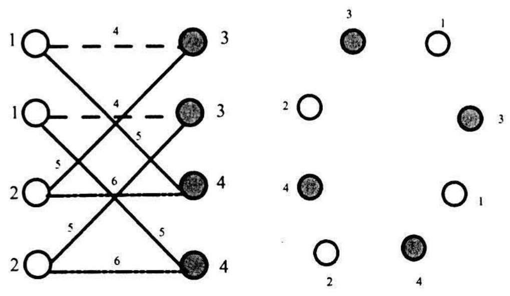


figura 4.5

■

Un resultado parecido encontramos para los emparejamientos graciosos pero la gran diferencia es que aquí si hacemos uso del mismo número de etiquetas que de puntos, es decir el **etiquetamiento** es **inyectivo.** El resultado afirma lo siguiente:

Teorema 4.9 *Para G una gráfica de orden $2n$ en posición convexa. Al etiquetar sus vértices con $\{1, 2..., 2n\}$ existen emparejamientos geométricos no graciosos.*

Demostración: Si partimos los puntos de la gráfica por medio de una línea que deje n de un lado y n del otro. Empezando en cualquiera de los dos lados etiquetamos de arriba abajo con los impares en orden creciente y del otro los pares de la misma manera (ver figura 4.6) Por el lema 3.10 del capítulo anterior acerca de los emparejamientos geométricos tenemos que al menos dos aristas de la frontera se tienen que tomar en un emparejamiento geométrico pero en este etiquetamiento esta condición implica que tomemos al menos dos aristas del mismo peso y por lo tanto no hay emparejamientos geométricos graciosos en este etiquetamiento.

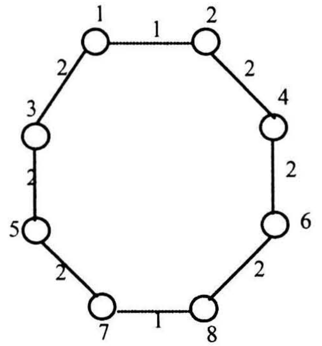


figura 4.6

■

Volviendo a los emparejamientos armónicos:

Lo que hace a nuestro problema central difícil de resolver es el número de pesos (sumas distintas) que tiene y la manera en que se repiten.Para hacer más fácil los cálculos en adelante pensemos que n es par y sea G_n la gráfica geométrica completa de orden n y sus puntos en posición convexa.

Si utilizamos a $\{1, 2, ..., n\}$ como etiquetas, en G_n tenemos $2n - 3$ pesos distintos y donde el peso que más se repite es $n + 1$ que se repite $\frac{n}{2}$ veces. Por otro lado los pesos 3, 4 y $n + (n - 2), n + (n - 1)$ aparecen una sola vez. Los demás pesos van aumentando en repeticiones hasta llegar al peso $n + 1$ que aparece $\frac{n}{2}$ y es el que más se repite y luego decrecen de la misma manera.

Ejemplo 4.10 *En G_8 tenemos* 13 *pesos distintos y el peso* 9 *se repite cuatro veces.*

repeticiones:	1	1	2	2	3	3	4	3	3	2	2	1	1
peso:	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Del capítulo anterior sabemos que dependiendo de la arista, ésta se puede o no tomar para un emparejamiento geométrico, es claro que al reetiquetar se puede o no tomar un peso específico. Como lo ilustra el ejemplo siguiente:

Ejemplo 4.11 *En el etiquetamento (1,2,3,4) en G_4 podemos tomarnos el peso 3 para un emparejamiento pero si reetiquetamos (1,3,2,4) ya no, porque la arista que une a 1 con 2 en el primer etiquetamiento pertenece a la gráfica que induce los emparejamientos, mientras que en el segundo no.*

Ahora si utlizaramos series o conjuntos de enteros en donde no se repiten o se repiten poco los pesos tendríamos que nuestro problema central sería fácil de resolver afirmativamente, es decir cualquier etiquetamiento es armónico, más aún:

Teorema 4.12 *Si etiquetamos a G_n con $\{2, 2^2, 2^3, ..., 2^n\}$ ó $\{1, 2, 2^2, ..., 2^{n-1}\}$ obtenemos que la gráfica completa es armónica, es decir todas las aristas de la gráfica completa tienen pesos distintos.*

Demostración: En las potencias de 2 nunca se repiten sumas, si utilizaramos colores distintos para pesos distintos tendríamos al etiquetar los vértices con potencias de 2 que la gráfica tendría tantos colores como aristas. ∎

Corolario 4.13 *Si etiquetamos a G_n con $\{2, 2^2, 2^3, ..., 2^n\}$ ó $\{1, 2, 2^2, ..., 2^{n-1}\}$ todo etiquetamiento es **eg-armónico**.*

Demostración: Se sigue claramente del teorema anterior porque si todas las aristas tienen pesos distintos cualquier emparejamiento geométrico también. ∎

El problema de etiquetar de esta manera es que si tu conjunto de puntos es grande las etiquetas mucho más y se torna difícil, en el caso de una computadora de procesador lento, calcular las etiquetas.

Teorema 4.14 *Si usamos como etiquetas de G_n a los términos de la serie de Fibonacci obtenemos que la gráfica completa es armónica.*

Demostración: Al igual que con las potencias de 2, en la serie de Fibonacci no se repiten sumas. Esto por que el enésimo término de la serie es la suma de los dos términos anteriores. ∎

Y nuevamente como corolario obtienes que:

Corolario 4.15 *Si usamos como etiquetas de G_n a los términos de la serie de Fibonacci, obtenemos que todo emparejamiento es armónico.*

Regresando a nuestro problema principal y la razón de este trabajo, volveremos a los etiquetamientos inyectivos y probaremos la conjetura para 4 y 6 puntos en posición convexa. Una primera observación, es que en todo etiquetamiento inyectivo, dos aristas incidentes en un vértice tienen siempre pesos distintos. Esto ya que de ninguna manera puede un número x sumar lo mismo con dos números distintos y y z.

Teorema 4.16 *Todo etiquetamiento inyectivo de G_4 es **eg-armónico.***

Demostración: Definamos las posiciones como $a, b, c, d.$(ver figura 4.7)

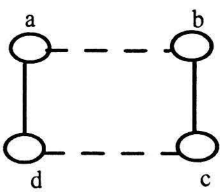


figura 4.7

Ahora bien la única manera de no tener el emparejamiento geométrico con pesos distintos es que $a+b=c+d$ y $a+d=b+c$ ocurra. Pero si las tuvieramos las dos igualdades tendríamos sumando las dos ecuaciones que $2a + b + d = 2c + b + d$ lo cual implica que $a = c$!

Por lo tanto las dos igualdades no se pueden dar al mismo tiempo. Con lo que en G_4 siempre hay un emparejamiento armónico con pesos distintos. ∎

Teorema 4.17 *Todo etiquetamiento inyectivo de G_6 es* ***eg-armónico.***

Demostración: Para la demostración necesitamos analizar las distintas maneras en que puede aparecer el peso 7, que es el peso que más se repite. Los distintos casos están en la figura 4.8, donde el peso 7 está representado por la línea conexa.

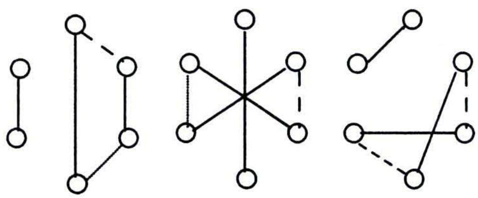


figura 4.8

Se distinguen dos casos, cuando las aristas de peso 7 son paralelas y cuando se cruzan, aunque la demostración es la misma.

Recordemos que por la demostración del teorema anterior, cualquier cuadrángulo que tenga dos aristas del mismo peso tiene las otras dos de diferentes pesos. Luego entonces en el caso en el que las aristas de peso 7 son paralelas basta tomarse un cuadrángulo con dos aristas de peso 7 y las otras dos son de distinto peso y junto con la arista de peso 7 restante tenemos nuestro emparejamiento deseado.

Para el caso en el que las aristas se cruzan hacemos lo mismo tomando las aristas adecuadas como se muestra en la figura. ∎

El resultado es cierto para G_8 si embargo la demostración es muy laboriosa, con muchos casos y como se verá en el siguiente y último capítulo de la tesis creemos que es inecesaria.

Capítulo 5

Algoritmos de Resolución

Una de las maneras de demostrar nuestro problema de los emparejamientos armónicos geométricos es construir un algoritmo eficaz que, para cualquier etiquetación dada de la gráfica encuentre uno o el total de emparejamientos armónicos geométricos, o en su defecto decir que dicho etiquetamiento no tiene emparejamientos geométricos armónicos.

Al pensar un poco en ello nos dimos cuenta que no es del todo sencillo encontrarlo, ya que este algoritmo tendría que servir para todos los etiquetamientos y sabemos que al cambiar de etiquetamiento se cambia toda la estructura de nuestra gráfica. Es decir, que las aristas que te podías tomar en un etiquetamiento no necesariamente pueden ser tomados en otro. Además conforme aumentamos los puntos de nuestra gráfica se aumentan también las aristas y con ello las distintas opciones aumentan.

Un algortimo que seguro sirve es aquel que analiza cada una de las posibilidades. Por ejemplo, si la gráfica es, G_4 hay dos posibles emparejamientos y $3!$ distinas maneras de etiquetarla, estas son el número de permutaciones de tres y no de cuatro elementos ya que puedes fijar arbitrariamente al 1 y de ahí empezar a etiquetar y además como es lo mismo etiquetar en el sentido de las manecillas del reloj que al reves podemos reducirlas a $\frac{3!}{2}$ permutaciones.

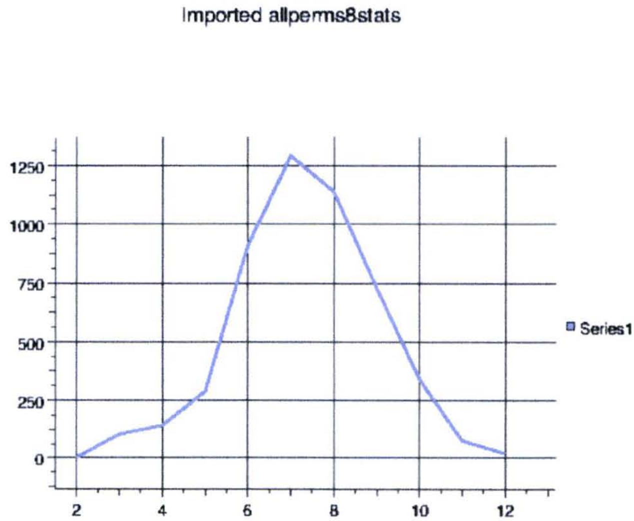
Entonces un algoritmo eficaz sería recorrer esas $\frac{3!}{2}$ maneras de etiquetar y en cada una de ellas checar los dos posibles emparejamientos. Esto ya suena algo tardado y por suerte, en el capítulo anterior, ya dimos una demostración bastante más corta para este caso. Fue con este razonamiento que acudimos a la computadora a tratar de programar este algoritmo para ver si encontrabamos un patrón o mejor aun un contraejemplo, que sería encontrar un eiquetamiento no armónico.

En colaboración con Ruy, un amigo de la carrera que sabe programar y muy bien de hecho, tratamos de escribirlo. El primero que tratamos de programar fue para el caso de ocho puntos. Tomamos a la permutación $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ como la permutación estándar. Misma que nos sirvió para dar un primer etiquetamiento definido por $f(i) = i$. Sabíamos por el número de Catalan que teníamos que analizar 14 emparejamientos geométricos, y lo hicimos para esta permutación. Luego guardamos en un archivo los catorce emparejamientos, por ejemplo el $[(1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)]$ que empareja al 1 con el 2 al 3 con el 4 etc...

Y cuyos pesos son $[(3)(7)(11)(15)]$ por lo tanto es un emparejamiento armónico. La computadora generaba todas las permutaciones una por una y conforme las generaba las iba analizando, por ejemplo la permutación $(1, 5, 8, 3, 7, 4, 6, 2)$, nos inducía el etiquetamiento $f(1) = 1$, $f(2) = 5$, $f(3) = 8$, etc... Lo analizaba en los emparejamientos geométricos del estándar. es decir el 5 lo mandaba al 2 el 8 al 3 etc... con lo que el emparejamiento del ejemplo anterior quedaba como $[(1, 5)(8, 3)(7, 4)(6, 2)]$ ahora bien la computadora tenía en un arreglo de longitud $2n - 3$, un registro de las sumas que ya se habían utilizado, es decir, en el lugar i-ésimo del arreglo tenía un cero si la suma todavía no aparecía y un uno en caso contrario. De tal manera que al encontrarse con la suma j bastaba checar el lugar j-ésimo del arreglo para saber si la suma ya había aparecido en el emparejamiento y empezar a analizar el siguiente emparejamiento geométrico. En nuestro ejemplo la secuencia de las sumas es [(6)(11)(11)(8)] y la otra [11] con lo que se salta al siguiente emparejamiento. De esta manera analizaba todos los emparejamientos.

Así pudimos checar todos los casos para ocho puntos y de hecho en la gráfica aparece el número de emparejamientos geométricos armónicos y cuantos etiquetamientos lo tienen, se ve a primera vista que no hay un etiquetamiento que no tenga emparejamientos geométricos armónicos y de hecho tampoco hay uno que tenga nada más un emparejamiento geométrico armónico,es decir sea como sea el etiquetamiento siempre hay más de un emparejamiento geométrico armónico.

min=2	max=12
2	2
3	104
4	142
5	288
6	910
7	1292
8	1138
9	728
10	340
11	78
12	20



No tomamos el tiempo que tardó la computadora en correr el programa sobre todas las permutaciones, pero no fue mucho, alrededor de $\frac{1}{3}$ de segundo, para diez puntos tomó alrededor de 28 segundos, para 12 puntos una hora y finalmente para 14 puntos tardó siete días y medio.

Todas arrojaron más o menos los mismos resultados, es decir , no había un etiquetamiento que no tuviera un emparejamiento geométrico armónico, ni uno que sólo tuviera uno. De lo que si nos dimos cuenta es que cada vez los etiquetamientos con el número máximo de emprejamientos geométricos armónicos se alejaban del número de Catalán conforme aumentabamos los puntos, es decir que para ocho el número de Catalán es 14 y el máximo era de etiquetaciones con 12 emparejamientos geométricos armónicos, mientras que para doce el número de Catalán es 132 y el máximo es 99.

Ahora surgía un problema, si queríamos analizar todos los casos para 16 puntos tardaría la computadora casi 5 años!!!

Ni se diga para más puntos, claro que nuestra computadora pentium 4 a 2.0 GHZ y con 768 de memoria RAM va ha ser mejorada por mucho en poco tiempo pero para nuestra desgracia no lo suficiente.

Sin embargo debido a los resultados anteriores nuestra conjetura cobraba fuerza y seguía siendo la misma : Dada una gráfica geométrica con $2n$ puntos en posición convexa y un etiquetamiento cualquiera de sus puntos con etiquetas $\{1, 2, ..., 2n\}$ siempre existe un emparejamiento geométrico armónico, es decir que en G_{2n} todo etiquetamiento es **eg-armónico**, es decir todo etiquetamiento en G_{2n} es armónico.

Sin embargo, utilizando los resultados de nuestro trabajo teórico pensamos en replantear el algoritmo sobre las etiquetaciones que tuvieran mayor probabilidad de no tener emparejamientos armónicos geométricos, es decir en donde aparecieran el mínimo número posible de sumas distintas y estas se repitieran el máximo número posible de veces.

Recurrimos entonces a lo que ya sabíamos de etiquetamientos en gráficas geométricas, es decir que un emparejamiento es una subgráfica generadora de la también subgráfica generadora θ_{2n} de G_{2n} . Recordemos que esta gráfica θ_{2n} es la subgráfica de G_{2n} en donde sólo aparecen los saltos pares entre los vértices y de hecho es una gráfica bipartita completa.

Así para ocho puntos colocamos de un lado del 1 al 4 y del otro los restantes tenemos siete sumas distintas que es lo menos que puede tener nuestra gráfica para ocho puntos, lo mismo ocurre cuando ponemos en una clase los pares y en la otra los impares.

Concentrándonos en esos dos casos críticos para 16 puntos pudimos analizar todos esos casos específicos ya que no es los mismo correr sobre 16! que sobre 8!*8! de hecho es este último es 12´870 veces más pequeño y por lo tanto ejecutable.

Fue entonces cuando ¡ Oh sorpresa ! empezaron a salir las etiquetaciones que no tenían ni un sólo emparejamiento geométrico armónico.

Y por lo tanto se concluye que en G_n para $n = \{4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ todo etiquetamiento es **eg-armónico**, sin embargo en G_{16} existen etiquetamientos **neg-armónicos**. Aquí tenemos algunos ejemplos en G_{16} de etiquetamientos **neg-armónicos**:

Las primeras 8 etiquetas pertenecen a una clase de la gráfica bipartita completa y las demás a la otra:

(1,15,2,14,3,12,4,13,8,9,7,10,6,11,5,16)

(1,16,2,15,3,14,4,9,8,10,7,11,6,13,5,12)

(1,13,3,15,5,9,7,11,6,10,8,12,2,14,4,16)

(1,12,6,11,7,10,8,9,4,13,5,14,3,15,2,16)

En éstos ejemplos los números impares forman una clase de la bipartición y los pares otra:

(1,14,3,12,5,8,7,10,15,2,13,4,11,6,9,16)

(1,16,3,14,5,12,7,2,15,4,13,6,11,10,9,8)

(1,10,5,14,9,2,13,6,11,4,15,8,3,12,7,16)

(1,8,11,6,13,4,15,2,7,10,9,12,5,14,3,16)

También damos contraejemplos para mayor número de puntos:

Los dos siguientes contraejemplos son para 18 puntos

(3,15,1,18,4,16,2,14,8,12,6,10,9,13,7,11,5,17)

(5,12,1,18,7,14,3,10,15,6,11,2,17,8,13,4,9,16)

Tenemos también para 20,22,24,26 y el más grande hasta el momento es para 28 puntos que damos a continuación:

(1,28,3,26,5,24,7,22,9,20,11,18,13,2,27,4,25,8,23,10,21,6,19,12,17,16,15,14)

Lamentablemente no damos una demostración de alguno de estos etiquetamientos ya que son muchos casos los que analiza la computadora, tan sólo en K_{16} hay 1430 maneras de hacer un emparejamiento geométrico.

Lo interesante es que en estos contraejemplos podemos siempre tomar al menos $\frac{n}{4}$ aristas paralelas de distinto peso. Esto ya que todos los ejemplos de etiquetamientos en donde no hay emparejamientos geométricos armónicos tienen las aristas de peso más repetido paralelas y de ahí podemos aritméticamente sacar las $\frac{n}{4}$ aristas de pesos distintos. La demostración no la damos ya que es por casos y sólo para los contraejemplos que tenemos. Pero lo que sí creemos firmemente es que la cota es lineal ya que si de estos casos que no tienen nigún emparejamiento podemos tomar $\frac{n}{4}$ con más razón para las que de hecho tienen emparejamientos geométricos armónicos.

Bibliografía

[1] G. Araujo, A.Dumitrescu, F.Hurtado, M.Noy, J.Urrutia; On the chromatic number of some geometric type Kneser graphs (11,12,2003)

[2] Reinhard Diestel; Graph Theory second edition, Springer GMT 173

[3] János Pach, Pankaj K. Agarwal; Combinatorial Geometry, Wiley-Interscience

[4] Bernardo Ábrego; Problemas combinatorios sobre conjuntos finitos de puntos, Aportaciones Matemáticas 19

[5] Ralph Grimaldi; Matemáticas Discretas y Combinatoria, 3a edición Addison Wesley Longman

[6] Tom Davis; Catalan Numbers (10,24,2001)