UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONSTRUCCIONES BASICAS DE LA GEOMETRIA EUCLIDIANA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TTULO DE:

MATEMATICO

PRESENTA:

GUADALUPE GUTIERREZ MONROY

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ENRIQUE SALVADOR BUZO CORDOVA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2004

VNIVERSDAD NACIONAL
AVFNºMA DE
MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Guadalupe Gutiérrez Monroy
FECHA: 4-Agosto-2004
FIRMA:

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Construcciones básicas de la Geometría Euclidiana"

realizado por Guadalupe Gutiérrez Monroy

con número de cuenta 083336090, quien cubrió los créditos de la carrera de:

Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr.Enrique Salvador Buzo Córdova
Propietario	Mat.Margarita Elvira Chávez Cano
Propietario	Dr.Rodolfo San Agustín Chi
Suplente	Dr.Guillermo Sienra Loera
Suplente	Mat.Guillermo Eduardo Zambrana Castañeda

Consejo Departamental de Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

M. en C. Alejandro Bravo Mojica

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional Autónoma de México
y
A la Facultad de Ciencias

Por la formación profesional y cultural recibida a través de estos años.

Al Dr. Enrique Buzo Córdova

Por el esfuerzo y apoyo que me ofreció en todo momento, por sus valiosas contribuciones en la elaboración de esta tesis, y por lograr que se realizara.

A la Mat. Margarita Elvira Chávez Cano.

Por su invaluable ayuda en la elaboración de esta tesis y por su gran amistad.

Al Dr. Rodolfo San Agustín Chí.

Por lograr que este trabajo, logre trascender en algunas de sus partes.

Al Mat. Guillermo Eduardo Zambrana Castañeda y
Al Dr. Guillermo Sienra Loera.

Por sus valiosas contribuciones y consejos, para lograr que mi formación profesional fuera más completa.

Al Mat. Francisco Struck

Por ayudarme en el inicio de esta tesis y por su gran amistad.

Al Mat. Gabriel Ocampo.

A un excelente y brillante matemático, gracias por sus enseñanzas, por su gran apoyo y la confianza depositada en mi.

Dedicatorias

A mi Padre

Maestro y colega gracias por las primeras enseñanzas en Matemáticas, por brindarme lo más valioso, una buena educación y un amplio panorama cultural y contribuir en la elaboración de estas tesis, muchas gracias.

A mi Madre

Mi mejor amiga y maestra, a quien admiro mucho, por sus valiosos consejos y por haberme brindado su apoyo incondicional en los momentos más cruciales de mi vida, gracias infinitas por su paciencia, e impulsarme siempre a ser una triunfadora, con todo mi cariño y respeto gracias por todo y por ayudarme a la realización de esta tesis.

A Elia

Primeramente gracias por hacerme en todo momento el camino menos arduo, por las primeras enseñanzas en Matemáticas, por impulsarme y ayudarme a finalizar mi proyecto.

A Claudio mi hermano.

Gracias por reír siempre con migo, desde la infancia, por darme ánimos en todo momento a seguir adelante y estar siempre al pendiente de mi, quien tiene todo mi cariño.

A Jesús

Gracias por sus valiosos consejos y ayuda en momentos difíciles; y su agradable compañía en la infancia, con cariño para el niño que ya creció.

A Jorge

Quien tiene toda mi admiración, gracias por cambiar mi vida, apoyarme en momentos críticos, e impulsarme siempre al triunfo y ayudarme en lo profesional; con todo mi amor y cariño, gracias por hacerme la vida más feliz.

A Alito

Mi pequeño maestro, gracias por tu ayuda y compañía.

A mis sobrinos

Esteban, Andy y Mariana, por su fabulosa presencia.

A Nancy

Por ser una amiga incondicional y mi mejor amiga.

A todos mis amigos

Por ser parte de mi identidad, permitirme compartir con ustedes momentos filosóficos, profundos y de mucha felicidad, para que todos estemos en el camino del triunfo.

Dedico este trabajo muy especialmente a:

Mi madre

A quien no tengo palabras para expresar mi gratitud a quien me lo ha dado todo.

A Guadalupe Ramírez C.

Una amiga muy especial.

INDICE

INTRODUCCION

Considerando que la Geometría de Euclides es la base de las Geometrías Euclidianas y de las no Euclidianas, mostramos en este trabajo los conceptos básicos de dicha Geometría; iniciando al alumno con construcciones básicas con regla y compás, y mostrando posteriormente la demostración formal de las mismas.

Las justificaciones de las construcciones, se realizaron lo más explícitamente posible con el fin de que fueran lo suficientemente claras para el alumno, así como también se exhibieron diferentes tipos de demostraciones para un mismo teorema.

Las notas históricas fueron extraídas de varios libros, los más relevantes son: Estudio de las Geometrías, Colección Obras Completas de Euclides y Euclidean and Non-Euclidean Geometries (ver bibliografía).

Mi experiencia en la docencia me hizo reflexionar acerca de los alumnos que inician el estudio de las matemáticas puras, sobre las dificultades con las que se enfrentan al tratar de entender por primera vez una demostración matemática formal, quienes necesitan conocer paso a paso lo que es una demostración y los diferentes tipos de demostraciones en matemáticas.

Es cierto que se han elaborado ya muchos libros de Geometría Moderna para estudiantes de primer ingreso a nivel licenciatura, este no es un libro más puesto que el lector quedará maravillado con los resultados obtenidos desde su primer capítulo hasta el capítulo final, al encontrar que lo comprende en su totalidad y que lo estudio de manera autodidacta, sin necesidad de un maestro y más aun que esta preparado para iniciar un estudio más avanzado de la geometría Moderna; invito a los estudiantes a leerlo y a los profesores a recomendarlo, al inicio de su curso de geometría Moderna.

Cabe mencionar que a esta tesis se le implementarán posteriormente una mayor cantidad de ejercicios didácticos en cada capítulo y se hará un libro para los estudiantes de primer ingreso, con el afán de que el alumno se familiarice de manera gradual con las demostraciones en geometría, o bien un libro de ejercicios para el maestro que inicia a sus alumnos en el estudio de la geometría.

En el primer capítulo deducimos los criterios de congruencia de triángulos a través de construcciones sencillas con regla y compás, posteriormente aplicamos estos criterios para demostrar otro tipo de construcciones como son: la bisección de ángulo, la construcción de un triángulo isósceles y sus propiedades, y la construcción de una recta perpendicular a otra recta dada.

En el capítulo 2 deducimos los criterios de semejanza de triángulos basándonos en el concepto de proporcionalidad y construcciones geométricas; y como consecuencia y aplicación de estos criterios demostramos el Teorema de Thales de Mileto.

En el capítulo 3 aplicaremos los criterios de congruencia y semejanza para justificar la construcción de las rectas más notables dentro de un triángulo cualquiera, como son: la mediatriz, bisectriz, altura y mediana; así como también la concurrencia de las mismas y algunos corolarios derivados

En el capítulo 4 demostraremos teoremas básicos para el estudio de la geometría moderna como son: Teorema de Pitágoras como lo demostró Euclides y por los criterios de semejanza, el Teorema de la circunferencia de los nueve puntos y la Linea de Euler, el Teorema de Ceva y Menelao, la concurrencia de las medianas por el Teorema de Ceva y el Teorema de la división interna y externa por el teorema de Ceva y Menelao.

En el capítulo 5 estudiaremos los principales ángulos entre rectas que se cruzan; y diferentes construcciones de rectas paralelas y las propiedades básicas de sus ángulos; consecuentemente veremos ampliamente el 5to. Postulado de Euclides y algunas de sus proposiciones equivalentes, así como también los intentos más importantes que hicieron los matemáticos por demostrarlo, lo cual dio lugar al descubrimiento de una nueva geometría; como aplicación demostraremos el Teorema de las rectas paralelas.

En el capítulo 6 estudiaremos las principales rectas y ángulos dentro de la circunferencia y, a partir del estudio de los rectángulos inscritos en el círculo y la construcción de líneas antiparalelas deduciremos las condiciones necesarias para generar cuadrilátero cíclicos; veremos también algunas propiedades entre sus ángulos y finalizaremos con el Teorema de Ptolomeo para cuadriláteros cíclicos y cruzados y otra demostración del Teorema de Pitágoras por Ptolomeo.

Finalmente en el capítulo 7 estudiaremos las relaciones numéricas que existen entre los lados y los ángulos de un triángulo, es decir deduciremos las funciones trigonométricas como son: seno, coseno y tangente de un ángulo, su representación geométrica y algunas aplicaciones; concluiremos con las leyes de los senos, cosenos y la ley de los senos generalizada.

Glosario de símbolos.

Δ	=	triángulo
$\cong$	=	congruente a
i.e	=	es decir que
$<$	=	menor que
$>$	=	mayor que
$\angle$	=	ángulo
$\therefore$	=	por lo tanto
pm	=	punto medio de un segmento.
$\parallel$	=	paralela
$\measuredangle$	=	ángulo
$\measuredangle\hat{s}$	=	ángulos
$\Delta\hat{s}$	=	triángulos
$\approx$	=	semejante a
▲	=	área de un triángulo
AB	=	segmento de A a B.
$\perp$	=	perpendicular
1R	=	1 ángulo recto
2R	=	2 ángulos rectos
$\Rightarrow$	=	entonces

Capitulo 1.

1.1 Congruencia.

En esta primera parte estudiaremos la congruencia, una de las propiedades básicas de los triángulos; es decir, diremos cómo obtener triángulos idénticos, realizando construcciones sencillas con regla y compás.
Suponemos que el alumno tiene la idea intuitiva de lo que es un punto, un segmento, una recta, un arco, un ángulo, una circunferencia y su medida, un círculo y su medida, el área de una figura, un triángulo, los diferentes tipos de triángulos y su orientación, la distancia entre dos puntos, así como también el uso de la regla y el compás. Formalizaremos posteriormente nuestras construcciones aplicando los criterios de congruencia para justificar la validez de algunas construcciones geométricas vistas con anterioridad como son: la bisectríz de un ángulo, la construcción de una recta perpendicular, la construcción de un triángulo isósceles y algunas de sus rectas importantes como: la altura, mediatríz y mediana.

Induciremos el concepto de congruencia, partiendo de construcciones geométricas sencillas y resolviendo el problema inicial de encontrar las condiciones suficientes para construir únicamente con regla y compás un triángulo congruente a otro, y que cumpla con la misma orientación; como consecuencia encontraremos los criterios para decir cuando dos triángulos son congruentes.

Cabe mencionar la diferencia entre los términos igual y congruente, aunque se usan indistintamente porque las dimensiones correspondientes de dos figuras son las mismas, el segundo término significa que ocupan distinto lugar en el plano.

1.1.1 Definición de congruencia. Dos triángulos ABC y A´B´C´ son congruentes si sus lados y sus ángulos correspondientes son iguales.

Representamos la congruencia con el símbolo $\cong$, y decimos que el triángulo ABC es congruente con el triángulo A´B´C´, cuando escribimos $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

En los siguientes 3 casos se verán las diferentes formas para construir un triángulo igual a otro.

1.1.2 Problema 1.

¿Dado un triángulo como podemos construir otro congruente a el, usando únicamente regla y compás?

Caso 1.
En este primer caso copiaremos el ΔABC, copiando sus tres lados.

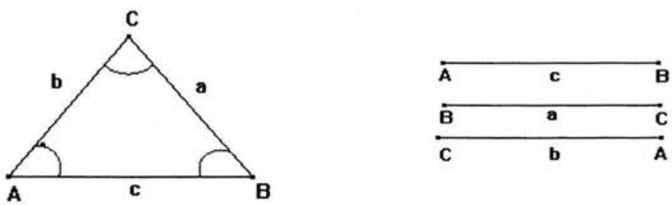


Fig. 1.1

Construcción geométrica:

1. Sea ABC un triángulo y a, b y c respectivamente a los segmentos BC, CA Y AB (Fig. 1.1)
2. Copiamos el segmento c de extremos A´ y B´ (Fig.1.2).
3. Con centro en el punto A´ tracemos un círculo de radio igual al segmento b.
4. En el punto B´ tracemos un círculo de radio el segmento a.
5. Llamémosle C´ y C´´ a los puntos de intersección de ambos círculos.
6. Tracemos los segmentos que unen los puntos A´ con C´ y A´ con C´´ y también B´ con C´ y B´ con C´´.

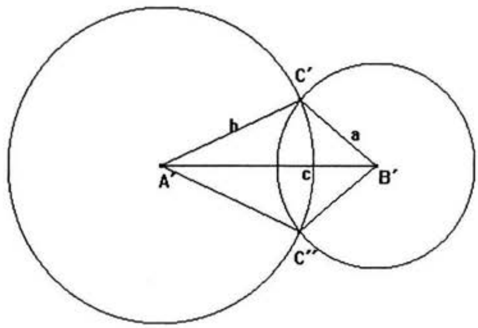


Fig.1.2

Puesto que C´ y C´´ son puntos únicos en donde se intersectan los segmentos a y b, entonces hemos construido dos triángulos A´B´C´ y A´B´C´´ iguales al triángulo dado ABC, pero sólo el triángulo A´B´C´ cumple con la orientación de los vértices A, B, y C del triángulo ABC (fig. 1.1) i.e. en el sentido contrario a las manecillas del reloj, y por lo tanto resuelve nuestro problema.

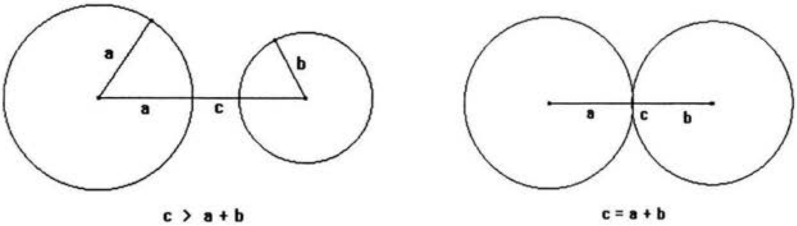


Fig.1.3

En la construcción anterior, notamos que para que los segmentos a y b se puedan intersectar y formar un triángulo, es necesario que la suma de los segmentos a y b sea mayor que el segmento c i.e. a+b > c; a esta condición se le conoce como la desigualdad del triángulo (Fig. 1.3)

Ahora, como el triángulo construido A´B´C´ tiene sus tres lados iguales al triángulo dado ABC; solo falta verificar que también tiene sus tres ángulos iguales, esto lo vemos de la siguiente manera:

No utilizaremos la superposición de triángulos para verificar que los ángulos son iguales, puesto que vamos a justificar la congruencia de los ángulos y no la igualdad.

Dado que los tres lados del triángulo ABC son iguales a los tres lados del triángulo A´B´C´, si suponemos que $\angle$ ACB $\neq\angle$ A´C´B´, entonces al menos uno de los lados del triángulo A´B´C´ sería distinto al lado correspondiente en el triángulo ABC; ver figura 1.4; lo cual por construcción es una contradicción, por lo tanto $\angle$ ACB = $\angle$ A´C´B´.Este procedimiento lo podemos aplicar para todos los ángulos y justificar que: como los lados que forman el ángulo son iguales, y cumplen con la misma orientación, no puede ocurrir que su ángulo comprendido sea distinto, entonces, hemos justificado que los ángulos del triángulo ABC son iguales correspondientemente a los ángulos del triángulo A´B´C´ y cumplen con la misma orientación.

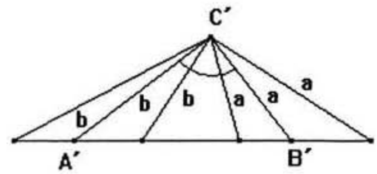


Fig. 1.4

Como los tres lados y los tres ángulos de los triángulos ABC y A´B´C´ son correspondientemente iguales, entonces ambos triángulos son congruentes.

Ahora bien, supongamos que se obtuvo un triángulo A´´ B´´C´´, a través de alguna otra construcción geométrica, congruente al triángulo dado y con la misma orientación; como el triángulo A´´ B´´C´´ es congruente al triángulo ABC y el triángulo A´B´C´ es congruente al triángulo ABC, entonces por transitividad el triángulo A´´B´´C´´ será congruente al triángulo A´B´C´.

Entonces hemos justificado que nuestra construcción produce la única solución al caso 1, independientemente de que se puedan realizar otras construcciones geométricas.

Entonces, si copiamos los tres lados de un triángulo, podemos construir otro triángulo congruente.

En el problema anterior nos ocupamos en justificar la igualdad de ángulos, exhibiremos otros dos métodos para construir con regla y compás dos ángulos iguales.

Problema 2.

¿Cómo podemos construir ángulos iguales únicamente con regla y compás?

Método 1.

Construcción geométrica:

1. Copiemos el triángulo ABC como lo hicimos anteriormente en 1.1.2 caso 1, es decir, copiando sus tres lados con regla y compás (Fig.1.5)
2. Sabemos que el triángulo A´B´C´ así construido es congruente con el triángulo ABC.

3. Entonces tiene sus tres lados y sus tres ángulos iguales.
4. En particular el ∠ BAC = ∠ B´A´C´.
5. Así hemos construido dos ángulos iguales con regla y compás.

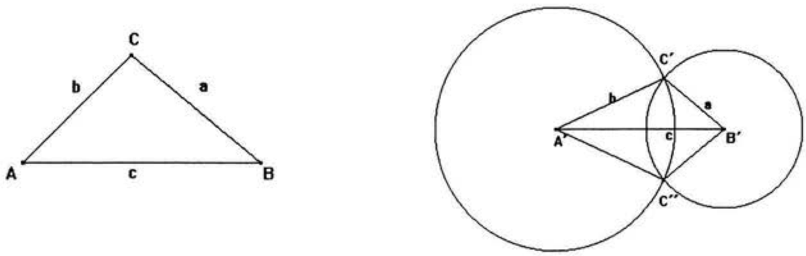


Fig.1.5.

Método 2.

Construcción geométrica:

1. Sea $\angle\alpha = \angle CAB$ un ángulo dado y sea DE un segmento de recta, (Fig. 1.6)
2. Tracemos un arco cualquiera con centro en A que corte en B´ y en C´ a las rectas que forman el ángulo $\angle\alpha$.
3. Tracemos un arco AB´ con centro en D que corte a la recta DE en el punto F.
4. Tracemos otro arco con centro en F y radio B´C´ y llamémosle H a la intersección entre los arcos.
5. Unamos el punto D con el punto H y llamémosle al $\angle$ EDH = $\angle\beta$.
6. Así el ángulo $\angle\alpha$ es igual al ángulo$\angle\beta$.

Fig.1.6

Así dado un ángulo hemos copiado otro ángulo igual a él.

Justificación:

Por construcción los ángulos $\angle\alpha$ y $\angle\beta$ son iguales porque la medida de sus ángulos es la medida de sus arcos i.e. AB´= DH y B´C´ = HF.

Esta construcción es muy similar a la anterior; puesto que anteriormente trazamos círculos de radio la medida de los lados con centro en los vértices y encontramos la intersección de ellos, aquí en esta nueva construcción, trazamos arcos con centro en los vértices y radio la medida de los lados de un triángulo simulado, y encontramos la intersección de estos, aquí nuevamente estamos construyendo otro triángulo, pero no lo completamos, puesto que con el método 1 anterior construimos triángulos congruentes, por este método similar, los ángulos también serán congruentes; esto es sólo una observación, puesto que dicho método ya está justificado.

Caso 2.

¿Si copiamos dos lados y un ángulo comprendido, cuántos triángulos podemos construir?

Sea ABC un triángulo dado y sean a, b y c los lados correspondientes a los segmentos BC, CA y AB; y sea $\angle\alpha$ el ángulo $\angle BAC$ (Fig.1.7)

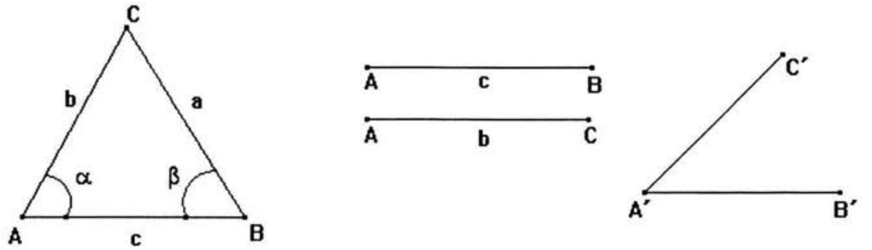


Fig.1.7

Construcción geométrica:

1. Copiemos el segmento c = A´B´ y aquí el ángulo α (Fig.1.8)
2. En el lado terminal del ángulo α copiemos el lado b = A´C´ .
3. Unamos el punto B´ con el punto C´.

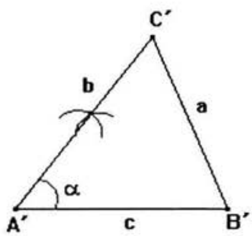


Fig. 1.8

Puesto que la recta que se forma al unir el punto B´ con C´ es única y como el triángulo A´B´C´ cumple con la orientación de los vértices del triángulo ABC, entonces aseguramos que hemos construido un triángulo A´B´C´ congruente al triángulo ABC por lo siguiente:

Dado que los triángulos ABC y A´B´C´ tienen 2 lados correspondientes iguales y su ángulo comprendido α; si suponemos que su tercer lado, es distinto i.e. BC $\neq$ B´C´, entonces al menos uno de los lados b ó c ó su ángulo comprendido α del triángulo ABC sería distinto a los lados y ángulo correspondiente en el triángulo A´B´C´ ver figura1.9; pero por la construcción realizada, esto es imposible entonces, BC = B´C´.

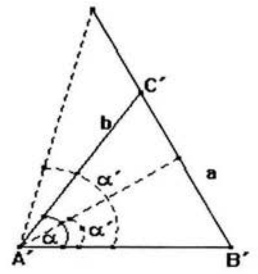


Fig.1.9 AC ≠A´C´ y ∠ α ≠∠ α´

Entonces los tres lados del triángulo ABC son iguales a los tres lados del triángulo A´B´C´, solo falta justificar que ∠ABC = ∠A´B´C´ y ∠ BCA = ∠ B´C´A´, pero esto también es cierto porque los tres lados de ambos triángulos son iguales y como ya justificamos en el caso 1, sus ángulos también serán iguales.

Entonces hemos justificado que como los tres lados y los tres ángulos de los triángulos ABC y A´B´C´ son iguales de manera correspondiente y tienen la misma orientación en sus vértices, ambos triángulos son congruentes.

Ahora, si suponemos que obtuvimos otro triángulo A´´ B´´ C´´, a través de otra construcción geométrica, congruente al triángulo dado ABC, por transitividad A´´ B´´C´´ será congruente con A´B´C´, esto quiere decir que nuestra construcción produce la única solución al caso 2.

Concluimos que si copiamos dos lados de un triángulo y su ángulo comprendido podremos construir otro triángulo congruente a el.

Caso 3

Si copiamos dos ángulos y el lado comprendido entre ellos (Fig. 1.10) ¿cuántos triángulos podemos construir?

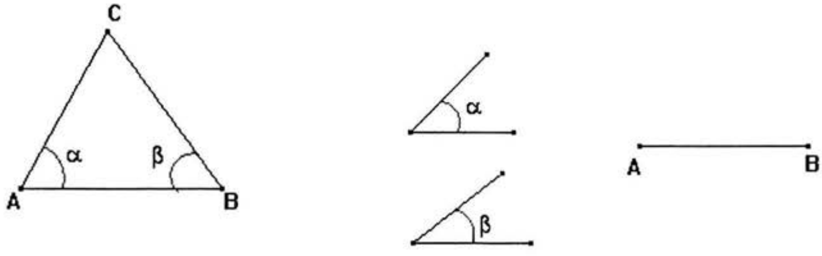


Fig.1.10

Construcción geométrica:

1. En el triángulo ABC sean a, b y c sus lados correspondientes
2. Sea $\angle\alpha$ el ángulo $\angle BAC$ y $\angle\beta$ el $\angle ABC$ (Fig.1.10)
3. Copiemos el segmento c y a sus extremos llamémosles A´ y B´ , (fig. 1.11).
4. En el punto A´ copiemos el ángulo $\angle\alpha$
5. En el punto B´ copiemos el ángulo $\angle\beta$
6. En el punto donde se cortan los lados no comunes será el punto C´.

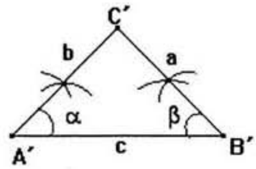


Fig.1.11

Sabemos por construcción que el segmento c y los ángulos α y β son iguales en ambos triángulos; si suponemos que $BC \neq B'C'$ o $AC \neq A'C'$ entonces al menos uno de sus ángulos α ó β del triángulos ABC sería distinto a los ángulos correspondientes en el triángulo A´B´C´, pero esto no ocurre, puesto que los construimos iguales, entonces $AC=A'C'$ y $BC = B'C'$; solo falta justificar que $\angle ACB = \angle A'C'B'$; pero esto es cierto puesto que tenemos dos triángulos con tres lados iguales y por el caso 1 , sus ángulos también serán iguales.

Entonces los tres lados y los tres ángulos de ambos triángulos son iguales y por tanto ambos triángulos son congruentes.

Ahora bien si obtuviéramos por medio de alguna otra construcción geométrica un triángulo A´´ B´´C´´ congruente al triángulo dado ABC, se tendría por transitividad que A´´B´´C´´ sería congruente al triángulo A´B´C´, y entonces hemos justificado que nuestra construcción produce la única solución al caso 3.

Entonces; si copiamos dos ángulos y el lado comprendido entre ellos, podemos construir otro triángulo congruente a él.

Conclusión:

Si intentáramos copiar o construir un triángulo con dos datos, sería imposible, el alumno puede rectificar esto; ahora bien si intentamos construir o copiar un triángulo con otros tres datos no mencionados en los casos anteriores, por ejemplo dos ángulos y un lado no comprendido entre ellos, regresaríamos a los casos 1, 2 y 3, o bien no se puede construir; entonces nos damos cuenta de que todas las opciones para construir un triángulo congruente a otro caen necesariamente en los casos 1, 2 y 3.

Sabemos ahora, que la única forma de copiar un triángulo congruente a otro es aplicando las construcciones de los casos 1, 2 y 3, es decir copiando los 3 lados o bien 2 lados y su ángulo comprendido o bien dos ángulos y su lado comprendido.

Entonces para asegurar que dos triángulos son congruentes, basta una de las siguientes condiciones:

1.1.3 Criterios de congruencia de triángulos.

Dos triángulos son congruentes:

1. Si tienen sus tres lados respectivamente iguales.
2. Si tienen sus dos lados y el ángulo comprendido entre ellos respectivamente iguales.
3. Si tienen dos ángulos y el lado comprendido entre ellos respectivamente iguales..

Denotamos a los criterios de congruencia 1, 2 y 3 respectivamente como:

1. **LLL**
2. **LAL**
3. **ALA**

1.1.4 Teorema de congruencia por Euclides y Axioma de congruencia por David Hilbert.

En los casos anteriores 1, 2 y 3, se intento justificar la construcción de triángulos congruentes y de deducir paso a paso los criterios de congruencia de triángulos: LLL, LAL y ALA, pero cabe mencionar un hecho que es de suma importancia; las justificaciones anteriores no son demostraciones matemáticas, sólo muestran de manera intuitiva que nuestras construcciones son verdaderas; suponemos que el alumno ha quedado convencido de ello; pero dichas justificaciones no son demostraciones, puesto que lo que se quiere demostrar no se puede demostrar porque no es un Teorema sino un axioma; exhibiremos el intento de demostración de Euclides (300 A.C) y la valiosa aportación realizada muchos años después (alrededor de 1900) de David Hilbert.

1er. Teorema de congruencia LAL de Euclides:

Euclides tomo a LAL como un Teorema e intento demostrarlo, su argumento fue esencialmente el siguiente:

Se tienen dos triángulos ABC y A´B´C´ con dos lados y su ángulo comprendido respectivamente iguales.

Demostración:

Mover el triángulo A´ B´C´, de tal forma que el punto A´ coincida con el punto A y el rayo A´B´ con el rayo AB. Como AB $\cong$ A´B´ por hipótesis, el punto B´ debe caer en el punto B. Como $\angle A \cong \angle A'$, el rayo A´C´ debe coincidir con el rayo AC, y como AC $\cong$ A´C´, el punto C´ debe coincidir con el punto C. Por lo tanto B´C´ coincide con BC y los ángulos restantes del triángulo ABC coincidirán con los ángulos restantes del triángulo A´B´C´, así los triángulos serán congruentes.

Este argumento es llamado de superposición. Se deriva de la experiencia del manejo de triángulos en papel, recortando uno y colocándolo encima del otro. Aunque es un buen camino para convencer a un novato en geometría a aceptar LAL, esta al igual que la que dimos en este capítulo, no es una demostración, puesto que el nunca indico en un axioma que se permitía que las figuras se movieran alrededor sin que cambiara su tamaño y su forma.

David Hilbert elaboro un sistema de axiomas divididos en 5 grupos: incidencia, cerradura, congruencia, continuidad y paralelismo,veremos a continuación el axioma III.6 de congruencia.

Axioma de Congruencia III.6 de David Hilbert:

Si dos lados y el ángulo comprendido de un triángulo son congruentes respectivamente a dos lados y su ángulo comprendido de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.

Si ABC y A´B´C´ dos triángulos tales que:

$$\left.\begin{array}{l} AB \cong A'B' \\ AC \cong A'C' \\ \angle BAC \cong \angle B'A'C' \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \angle ABC \cong \angle A'B'C' \\ \angle ACB \cong \angle A'C'B' \end{array}$$

Este criterio, lado ángulo lado de congruencia de triángulos es un axioma profundo, este proporciona la liga con la relación de congruencia de segmentos con la relación de congruencia de triángulos, dada en los axiomas de congruencia de Hilbert I, II, III, IV y V. Este nos permite deducir TODOS los resultados básicos acerca de la congruencia de triángulos, con los cuales estamos muy familiarizados.

Aun si el alumno no se convencido de que los criterios de congruencia, todos ellos se reducen a un axioma, puede revisar el libro, Euclidean and Non- Euclidean Geometries, ver bibliografía y consultar en el capítulo 3 el ejercicio 35, en el cual se exhibe un Teorema que prueba que es imposible demostrar LAL o cualquier criterio de congruencia de triángulos (LLL, ALA, LAA).

Las construcciones anteriores fueron intuitivas y claras de manera que el alumno se iniciara nuevamente con el uso de la regla y el compás, ahora bien; estamos preparados para demostrar, la validez de algunas construcciones geométricas vistas en cursos anteriores, aplicando los criterios de congruencia aprendidos, como son: la bisectriz de un ángulo, la construcción de un triángulo isósceles, la construcción de una recta perpendicular a una línea y algunas líneas importantes dentro del triángulo isósceles, como son: la altura, mediatriz, mediana etc..

1.2 Construcciones geométricas con regla y compás y su justificación por congruencia.

1.2.1 Bisección de un ángulo con regla y compás.

Definición: la bisectriz de un ángulo, es la recta que divide al ángulo en dos ángulos iguales.

Construcción geométrica:

1. Sea $\angle\alpha = \angle CAB$ el ángulo dado con vértice en A.
1. Tracemos un círculo de radio cualquiera que corte a los lados que forman el ángulo $\angle\alpha$ en B´ y C´ respectivamente.
2. Tracemos dos círculos con el mismo radio con centro en B´ y C´ que se corten.
4. A la intersección de estos círculos les llamamos D y E.
5. Unimos A con E, entonces la recta AE divide al ángulo $\angle\alpha$ en dos ángulos iguales.
6. De donde AE es una bisectriz del ángulo $\angle\alpha$. (Fig. 1.12).

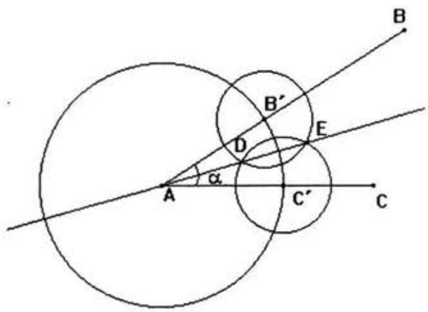


Fig.1.12.

Justificación de la construcción:

Trazamos una recta que una al punto B´ con E y otra que una al punto C´ con E, observemos que en los triángulos AB´E y AC´E se cumple que AB´=AC´ y B´E=EC´, por ser radios y AE es un lado común.

Tenemos dos triángulos que cumplen con LLL y por los criterios de congruencia antes mencionados los triángulos AB´E y AC´E son congruentes, entonces tienen sus tres ángulos respectivamente iguales y en particular

$\angle C'AE = \angle EAB'$ y entonces la recta AE divide al ángulo $\angle\alpha$ en dos ángulos iguales.

$\therefore$ AE es la bisectriz del ángulo $\angle\alpha$.

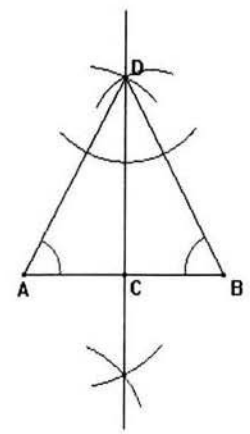
1.2.2 Construcción geométrica de un triángulo Isósceles.

Construiremos un triángulo isósceles y sus rectas principales.

Definición. Un triángulo es isósceles cuando tiene dos lados iguales.

Construcción geométrica.

1. Trazamos el segmento AB.
2. Trazamos arcos iguales con centro en A y en B de tal forma que el radio de este arco sea mayor que un medio del segmento AB; i.e. para que los radios se intersecten, (Fig.1.13)
3. Al punto de intersección entre los arcos le llamamos D.
4. Unimos D con A y D con B.
5. Aseguramos que el Δ ABD es isósceles



$\angle CAD = \angle CBD$ Fig.1.13

En los triángulos isósceles sus ángulos opuestos a sus lados iguales son iguales.

Justificación de la construcción:

Bisectamos el $\angle$ BDA y al punto de intersección de la bisectriz con el segmento AB le llamamos C, observemos los triángulos ΔACD y ΔBCD (Fig. 1.13) entonces,
AD = BD por construcción, DC es un lado común y $\angle ADC = \angle CDB$ porque DC es bisectriz.
Tenemos entonces dos triángulos que cumplen con LAL, y por los criterios de congruencia tenemos que $\Delta ACD \cong \Delta BCD$ y sus ángulos correspondientes son iguales y en particular
$\angle CAD = \angle CBD$ es decir que los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.

1.2.3 Construcción de las rectas más importantes dentro del triángulo isósceles.

Estudiaremos las propiedades del triángulo isósceles y algunas de sus rectas importantes.

Mediatriz en un triángulo: es la recta perpendicular a un lado que pasa por su punto medio.

Altura en un triángulo: es la recta perpendicular a un lado que pasa por su vértice opuesto.

Mediana en un triángulo: es la recta que une a un vértice con el punto medio del lado opuesto.

Propiedades del triángulo Isósceles:

En las siguientes demostraciones nos referiremos a la figura 1.13. Observemos el segmento DC que es una **bisectriz** del $\angle ADB$, es también una **mediana** puesto que $\Delta ACD \cong \Delta BCD$ y entonces tienen sus tres lados, respectivamente iguales y en particular AC = BC y C = Pm (punto medio de AB).

Ahora DC también es una **mediatriz**, puesto que pasa por el punto medio de su lado opuesto, solo falta ver que $\angle ACD = \angle BCD$ = 1 recto.

Demostramos que $\Delta ACD \cong \Delta BCD$ entonces sus ángulos correspondientes son iguales, y en particular el $\angle ACD = \angle BCD$, pero éstos son ángulos suplementarios es decir que suman dos ángulos rectos, entonces $\angle ACD = \angle BCD$ = 1 recto, de donde la recta DC es perpendicular a la recta AB.

Finalmente, como el segmento DC sale del vértice D y cae perpendicularmente en el lado opuesto, entonces DC es también es una **altura** del triángulo ΔABD.
Podemos concluir de lo anterior: que <u>en cualquier triángulo isósceles, la bisectriz formada por sus lados iguales es también una mediana, una mediatriz y una altura para dicho triángulo.</u>

1.2.4 Angulo recto y perpendicularidad.

Angulo recto: si dos rectas se cruzan y forman cuatro ángulos iguales, éstos medirán 90 grados cada uno y se les llamará ángulos rectos, y dichas rectas serán perpendiculares (Fig. 1.14)

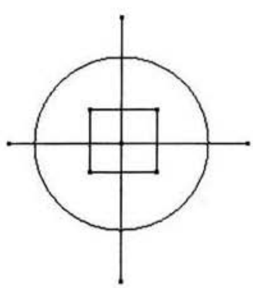


Fig.1.14

Un ángulo es complementario de otro ángulo si al sumarlo con este suman un recto, y así el $\angle\alpha$ es el complemento del $\angle\beta$ porque $\angle\alpha + \angle\beta = 90°$

Un ángulo es suplementario: si al medirlo con otro suma dos rectos y así el $\angle\alpha$ es el suplemento del $\angle\beta$ porque $\angle\alpha + \angle\beta = 180°$

1.2.5 Construcción de una recta perpendicular a una recta L dada que pasa por un punto O que está sobre la recta L.

En un punto dado de una recta, levantar una perpendicular a ésta.

Construcción geométrica:

1. Sea L una recta dada y O un punto cualquiera de la recta (fig. 1.15)

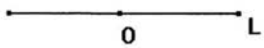


Fig.1.15

2. Tracemos un círculo de radio cualquiera con centro en O que corte a la recta L en los puntos A y B, (fig. 1.16)
3. Tracemos dos círculos de radio AB con centro en A y en B y sean C y D los puntos de intersección.
4. Unimos por una recta los puntos C y D.
5. Entonces CD es perpendicular a la recta AB.

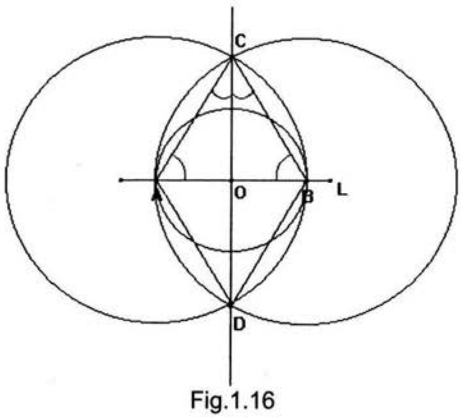


Fig.1.16

Justificación:

Unamos los puntos A con C y B con C, A con D y B con D por una recta.
Entonces CA = CB por ser radios iguales, entonces ΔABC es isósceles y por lo demostrado anteriormente sus ángulos opuestos a sus lados iguales son iguales y AO = OB porque O es el centro del círculo que corta a L en los puntos A y B, entonces $\Delta AOC \cong \Delta BOC$, por que cumplen con LAL y, consecuentemente tienen sus tres ángulos

iguales y en particular $\angle ACO = \angle OCB$ esto implica que CO es una bisectriz dentro del triángulo isósceles, entonces por lo demostrado anteriormente, CO es también una altura (y mediatriz) y por lo tanto es perpendicular a AB o bien a la recta L.

1.2.6 Construcción de una recta perpendicular a una recta L dada que pasa por un punto O fuera de ella.

Por un punto cualquiera fuera de una recta, trazar una perpendicular a esa recta.

Construcción:

1. Sea L una recta dada y O un punto fuera de ella (Fig.1.17)

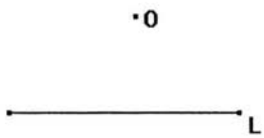


Fig.1.17

2. Tracemos un círculo con centro en O que corte a la recta L en dos puntos A y B (Fig.1.18)
3. Tracemos la altura por O del triángulo isósceles AOB.

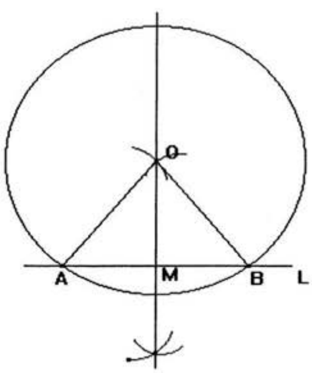


Fig.1.18

Justificación de la construcción:

Tracemos la recta que une al punto O con A y O con B, y sea M el pie de la altura que sale del vértice O y que corta a la recta L, entonces como el triángulo ABO es isósceles y OM es una altura, entonces es perpendicular al segmento AB o bien a la recta L.

Capitulo 2.

2.1 Semejanza

En este capítulo estudiaremos la semejanza de triángulos, es decir cuando podemos decir que dos triángulos tienen sus tres ángulos respectivamente iguales.
Nos basaremos en los conocimientos anteriores de congruencia, en el concepto de proporcionalidad y en su construcción geométrica; una vez definidos los criterios de semejanza, ampliaremos las implicaciones de dos triángulos con ángulos respectivamente iguales en la demostración del Teorema de Thales de Mileto.

Damos por hecho que el alumno conoce los conceptos de área de un triángulo, construcción de rectas paralelas y la relación entre sus ángulos alternos internos, alternos externos y correspondientes, así como también que, la suma de los ángulos interiores en un triángulo es igual a dos ángulos rectos.

2.1.1 Segmentos proporcionales.

Definiremos el concepto de proporcionalidad, el cual nos ayudará a demostrar posteriormente algunas propiedades de los triángulos semejantes.

Definición: Si los segmentos a y b, corresponden a los segmentos a´ y b´ de tal forma que

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

se dice que los segmentos son proporcionales.

2.1.2 Definición de triángulos semejantes.

Definición. Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos respectivamente iguales.
Se representa con el símbolo $\approx$, es decir decimos que los triángulos ABC y A´B´C´ son semejantes cuando escribimos $\Delta\, ABC \approx \Delta\, A'B'C'$.

2.1.3 Problema 1.

¿Cómo se relacionan los lados de dos triángulos de diferente tamaño, pero con ángulos respectivamente iguales?

Veamos:

Sean Δ A´DE y Δ ABC dos triángulos donde los tres ángulos de ambos triángulos son iguales y supongamos que el Δ A´DE es más chico que el Δ ABC. (Fig.2.1)

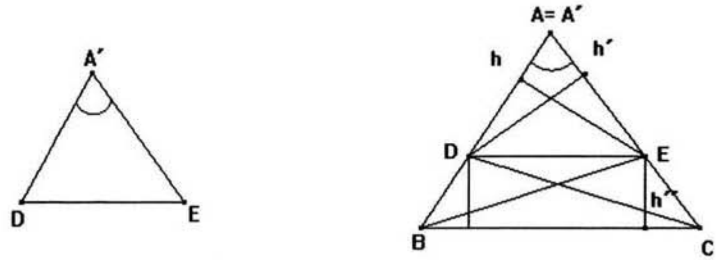


Fig.2.1

1. Copiemos los lados A´D y A´E sobre los lados AB y AC del Δ ABC.
2. El $\angle$DA´E = $\angle$BAC por hipótesis.
3. Sean AD y DB las bases de los triángulos Δ ADE y Δ DBE respectivamente.
4. Ambos triángulos tienen la misma altura h y $\blacktriangle$ DBE = DBh/2 y $\blacktriangle$ ADE = ADh/2
5. La razón de sus áreas es igual a la razón de sus bases.
6. Entonces tenemos que:

$$\frac{\blacktriangle\ DBE}{\blacktriangle\ ADE} = \frac{DB}{AD}$$

7. Análogamente en los triángulos Δ ADE y Δ DCE, sean AE y EC sus bases respectivamente.
8. Puesto que los triángulos tienen la misma altura h´ concluimos que:

$$\frac{\blacktriangle\ DCE}{\blacktriangle\ ADE} = \frac{EC}{AE}$$

9. Ahora los triángulos Δ DBE y Δ DCE tienen la misma base DE y la misma altura h´´.
10. Entonces $\blacktriangle$ DBE = $\blacktriangle$ DCE y de las ecuaciones anteriores tenemos que:

$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

11. Si sumamos 1 a ambos miembros de la ecuación, obtenemos:

$$\frac{AD}{AD} + \frac{DB}{AD} = \frac{AE}{AE} + \frac{EC}{AE}$$

$$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE} \quad ,$$

12. Pero AD + DB = AB y AE + EC = AC
13. Entonces:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \qquad (1)$$

Como A´D = AD y A´E = AE, entonces A =A´, y se cumple de (1) que:

$$\frac{AB}{A'D} = \frac{AC}{A'E} \qquad (2)$$

Quiere decir que los lados A´D y A´E del Δ A´DE son proporcionales a los lados AB y AC respectivamente del triángulo Δ ABC.

Ahora bien, si copiamos los lados A´D y DE del Δ A´DE en los lados AB y BC respectivamente del Δ ABC, y como $\angle$A´DE = $\angle$ABC por hipótesis, entonces B=D (Fig. 2.2)

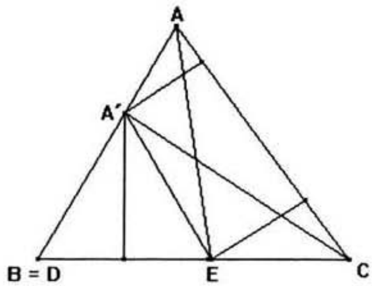


Fig.2.2

Entonces, se tendría que:

$$\frac{AB}{A'D} = \frac{BC}{DE} \qquad (2)$$

Es decir que los lados A´D y DE del Δ A´DE son proporcionales a los lados AB y BC respectivamente del triángulo Δ ABC.

Entonces de (1) y (2), obtenemos:

$$\frac{AB}{A'D} = \frac{AC}{A'E} = \frac{BC}{DE}$$

Finalmente podemos decir que, si dos triángulos tienen sus ángulos respectivamente iguales, entonces tienen sus lados proporcionales.

Concluimos de lo anterior que, dados dos triángulos con ángulos correspondientes iguales, sus lados son proporcionales; ahora bien si aceptamos el hecho de que la suma de los ángulos interiores en un triángulo es igual a 2R, entonces dados dos triángulos con dos ángulos iguales, el tercero, también sería igual, entonces sus ángulos serían iguales, los triángulos serían semejantes y sus lados proporcionales.

¿Cómo demostraríamos lo anterior sin considerar que la suma de los ángulos interiores en un triángulo es igual a 2R? o bien ¿cuándo ocurre que dos triángulos son semejantes entre sí ?

2.1.4 Problema 2

¿Cuándo podemos decir que dos triángulos son semejantes entre sí?

Estudiaremos algunos casos que responderán nuestra pregunta.

Caso 1.

Consideraremos dos triángulos con dos ángulos iguales.

Sean los triángulos ACB y DEF tales que $\angle BCA = \angle FED$ y $\angle CAB = \angle EDF$ (Fig.2.3)

Fig. 2.3

1. Copiemos el lado AC en el lado DE y AB en el lado DF del triángulo DEF, de tal forma que AC=DG y AB=DH.
2. Tracemos la recta que va del punto G al punto H.
3. Entonces los triángulos ACB y DGH son congruentes pues cumplen con LAL. entonces tiene sus tres ángulos iguales.
4. Ahora:
   $\angle BCA = \angle FED$ (por hipótesis)
   $\angle BCA = \angle HGD$ (por 3)
   Implica que:
   $\angle FED = \angle HGD$
5. Entonces GH y EF son paralelas, lo que implica que $\angle EFD = \angle GHD$
6. Pero $\angle CBA = \angle GHD$ (por 3)
7. Entonces $\angle EFD = \angle CBA$
8. Entonces los triángulos ACB y DEF, tienen sus tres ángulos iguales, y por lo tanto son semejantes.

Concluimos que: Dos triángulos con dos ángulos iguales son semejantes.

Caso 2.

¿Qué ocurre si tenemos dos triángulos con un ángulo igual formado por lados proporcionales?

Sean los triángulos ABC y DEF tales que $\angle BAC = \angle EDF$ y $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

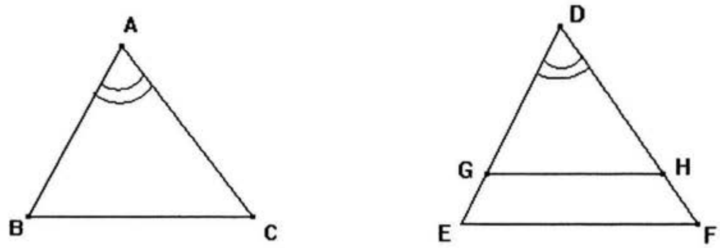


Fig.2.4

1. Tracemos AB del triángulo ABC en el lado DE del triángulo DEF. , de tal forma que AB = DG (Fig. 2.4).
2. Tracemos la recta GH paralela a la recta EF.
3. Entonces los triángulos DGH y DEF son semejantes, por tener tres ángulos iguales y por el problema 1, ambos triángulos tienen sus lados proporcionales, i.e. que:

$$\frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF} = \frac{GH}{EF}$$

4. Por la hipótesis, por 1 y 3, se tiene que AB = DG y AC = DH
5. Entonces los triángulos ABC y DGH son congruentes por que cumplen con LAL.
6. De 3 y 5 se tiene que los triángulos ABC y DEF son semejantes.

Concluimos que: si dos triángulos tienen un ángulo igual formado por lados proporcionales, los triángulos son semejantes.

Caso 3.

Qué ocurre si dos triángulos tienen sus tres lados proporcionales?

Observación.

En el problema 1 demostramos que si dos triángulos tienen sus ángulos correspondientes iguales entonces sus lados son proporcionales, ahora demostraremos lo inverso; i.e. **si dos triángulos tienen sus lados proporcionales, entonces son semejantes, y por lo tanto tienen sus tres ángulos respectivamente iguales.**

Sean Δ ABC y Δ DEF (Fig. 2.4) tales que, sus lados son proporcionales, es decir

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

1. Copiemos el lado AB del triángulo ABC en el lado DE del triángulo DEF de tal forma que AB = DG.
2. Tracemos la recta GH paralela a la recta EF.
3. Entonces los triángulos DGH y DEF son semejantes, por tener sus tres ángulos respectivamente iguales.
4. Por el caso 1 sus lados son proporcionales i.e.

$$\frac{DG}{DE} = \frac{DH}{DF} = \frac{GH}{EF}$$

5. Por la hipótesis y por 4, AB = DG y AC=DH y BC = GH
6. Entonces los triángulos ABC y DGH son congruentes, porque cumplen con el criterio de congruencia LLL, entonces tienen sus tres ángulos iguales.
7. Entonces los triángulos ABC y DEF son semejantes.

Concluimos que si dos triángulos tienen sus lados proporcionales, entonces son semejantes y por lo tanto tienen sus tres ángulos respectivamente iguales.

Si pensamos en todos los casos posibles de semejanza de triángulos veremos que todos ellos están contenidos en los casos 1, 2 y 3 vistos con anterioridad, o bien no es posible la construcción de triángulos semejantes; el lector puede pensar en todos los casos posibles.

Ahora podemos definir los criterios de semejanza de triángulos.

2.1.5 Criterios de semejanza de triángulos.

Dos triángulos son semejantes entre sí cuando:

Tienen dos ángulos respectivamente iguales.
Tienen un ángulo igual formado por lados proporcionales.
Tienen sus tres lados proporcionales.

Demostraremos ahora el Teorema de Thales de Mileto, el cual es una consecuencia y extensión del problema 2.1.3

2.1.6 Teorema de Thales de Mileto: Si en un triángulo dado, trazamos una recta paralela a uno de los lados, los segmentos delimitados, son proporcionales de cualquier forma.

Para esta demostración utilizaremos los conceptos de semejanza y daremos por hecho que el área de un triángulo es $\frac{b \times h}{2}$

Sea ACC´ un triángulo dado

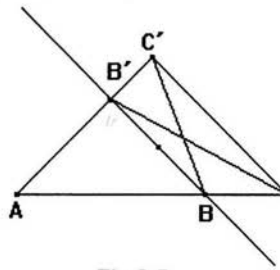


Fig.2.5

Tracemos una paralela BB´ al lado CC´ de modo que el punto B´ quede en el segmento AC´ y el punto B quede en el segmento AC (Fig.2.5)

Justificación de la construcción:

1. Trazamos los segmentos que unen los puntos B´ con C y C´ con B.
2. Las áreas de los triángulos BB´C y BB´C´ son iguales, puesto que la altura h del lado común BB´ es la misma, entonces $\blacktriangle(BB'C) = \blacktriangle(BB'C')$
3. Por lo anterior tenemos que: $\blacktriangle(AB'C) = \blacktriangle(ABC')$
4. Entonces dividiendo la igualdad del punto 2 entre $\blacktriangle(ABB')$ obtenemos:

$$\frac{\blacktriangle(BB'C)}{\blacktriangle(ABB')} = \frac{\blacktriangle(BB'C)}{\blacktriangle(ABB')}$$

5. Ahora si trazamos la altura del $\Delta BB'C$ en el lado BC, y le llamamos B´D y a la altura del $\Delta BB'C'$ en el lado B´C´ y le llamamos BE obtenemos que:

$$\blacktriangle(BB'C) = \frac{BC \cdot B'D}{2} \qquad \blacktriangle(BB'C') = \frac{B'C' \cdot BE}{2}$$

(tomando a AB como base) (tomando a AB´ como base)

$$\blacktriangle(ABB') = \frac{AB \cdot B'D}{2} \quad \text{y} \quad \blacktriangle(ABB') = \frac{AB' \cdot BE}{2}$$

6. Del punto 4 y 5 se obtiene que:

$$\frac{\frac{BC \cdot B'D}{2}}{\frac{AB \cdot B'D}{2}} = \frac{\frac{B'C' \cdot BE}{2}}{\frac{AB' \cdot BE}{2}}$$

7. Entonces

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} \qquad \text{ó} \qquad \frac{AB'}{B'C'} = \frac{AB}{BC}$$

8. Esto quiere decir que, el punto B´ divide al segmento AC´ en la misma proporción que el punto B, divide al segmento AC.

9. Por el punto 3, también es cierto que:

$$\frac{\blacktriangle(AB'C)}{\blacktriangle(ABB')} = \frac{\blacktriangle(ABC')}{\blacktriangle(ABB')}$$

10. Ahora, si tomamos a B´D y a BE como altura de los triángulos, tenemos que:

$$\blacktriangle(AB'C) = \frac{AC \cdot B'D}{2} \qquad \blacktriangle(ABC') = \frac{AC' \cdot BE}{2}$$

$$\blacktriangle(ABB') = \frac{AB \cdot B'D}{2} \qquad \blacktriangle(ABB') = \frac{AB' \cdot BE}{2}$$

11. De donde de 9 y 10 obtenemos que:

$$\frac{\frac{AC \cdot B'D}{2}}{\frac{AB \cdot B'D}{2}} = \frac{\frac{AC' \cdot BE}{2}}{\frac{AB' \cdot BE}{2}}$$

12. Entonces: $\frac{AC}{AB} = \frac{AC'}{AB'}$

13. Ahora bien

$$\blacktriangle(ABC') = \frac{AC' \cdot BE}{2} \qquad \blacktriangle(AB'C) = \frac{AC \cdot B'D}{2}$$

$$\blacktriangle(BB'C') = \frac{B'C' \cdot BE}{2} \qquad \blacktriangle(BB'C) = \frac{BC \cdot B'D}{2}$$

14. De 3, dividiendo entre $\blacktriangle BB'C$

$$\frac{\blacktriangle(ABC')}{\blacktriangle(BB'C)} = \frac{\blacktriangle(AB'C)}{\blacktriangle(BB'C)} \qquad \text{entonces} \qquad \frac{\frac{AC' \cdot BE}{2}}{\frac{B'C' \cdot BE}{2}} = \frac{\frac{AC \cdot B'D}{2}}{\frac{BC \cdot B'D}{2}}$$

de donde

$$\frac{AC'}{B'C'} = \frac{AC}{BC}$$

15. Entonces dado un triángulo ACC′ si trazamos una paralela B′B a uno de los lados obtenemos que:

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{AB}{BC} \quad , \qquad \frac{AC'}{AB'} = \frac{AC}{AB} \qquad \text{y} \qquad \frac{AC'}{B'C'} = \frac{AC}{BC}$$

i.e. que sus lados son proporcionales.

Capitulo 3

3.1 Construcción de las rectas más importantes dentro de un triángulo y justificación por semejanza y congruencia

En este capítulo aplicaremos los criterios de semejanza y congruencia para justificar la construcción de las rectas más importantes dentro del triángulo vistas en el capítulo 1, como son: la bisectriz, la altura, la mediana y la mediatriz, pero a diferencia del capítulo 1 en el cuál, lo justificamos para el triángulo isósceles, ahora lo justificaremos de manera general para cualquier triángulo. Aplicaremos posteriormente los criterios de semejanza y congruencia para justificar que al trazar estas rectas en los tres lados de un triángulo cualquiera, estas concurren en un punto.

3.1.1 Rectas importantes dentro del triángulo.

Demostraremos la construcción de, algunas rectas dentro del triángulo a partir de su definición formal, para demostrar posteriormente la concurrencia de sus tres rectas en cualquier triángulo.

Mediatriz

Definición 1. Es la recta perpendicular a un segmento que pasa por su punto medio.

Definición. 2 Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos extremos de un segmento.

De la definición 1 y 2 obtenemos el siguiente Teorema.

3.1.2 Teorema. Si una recta es perpendicular a un segmento, y pasa por su punto medio, si y solo si es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos extremos de un segmento.

Sea ABC un triángulo dado, OD una recta perpendicular al lado BC que pasa por su punto medio D, (Fig. 3.1)

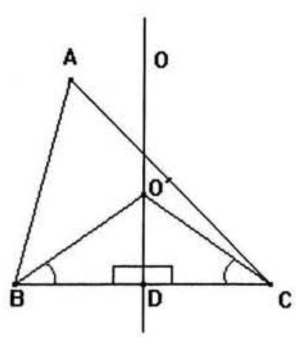


Fig. 3.1 Mediatríz del lado BC.

Demostración:

1. Sea O´ un punto cualquiera sobre la recta OD.
2. Tracemos las rectas que unen al punto O´ con el punto B y O´ con el punto C.
3. Fijémonos en los triángulos BDO´ y CDO´.
4. Entonces O´D es un lado común.
5. El $\angle$ BDO´ = $\angle$ CDO´= 1R ángulo recto.
6. BD = DC porque D es el punto medio del lado BC.
7. Entonces ΔBDO´ y el ΔCDO´ son congruentes, y por lo tanto tienen sus tres lados respectivamente iguales.
8. En particular O´B=O´C
9. De donde la distancia del punto O´ a los puntos extremos del segmento BC es la misma.
10. Como se cumple para cualquier punto O´ sobre la recta.
11. Entonces: la recta OD, es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos extremos de un segmento.

Demostraremos el recíproco del Teorema 3.1.2

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los puntos extremos de un segmento, es precisamente la recta perpendicular que pasa por su punto medio.

Demostración

1. Sea ABC un triángulo dado, (Fig. 3.1)
2. O´ un punto cualquiera que equidista de los puntos extremos del lado BC.
3. Tracemos la recta que une el punto O´ con B y O´ con C, entonces por hipótesis, O´B = O´C
4. Llamémosle D al punto medio del segmento BC, entonces BD=DC.
5. Unamos el punto O´ con el punto D.
6. El $\angle$ DBO´ =$\angle$ DCO´, puesto que ΔO´BC es isósceles por sección 1.2.2,
7. Los triángulos O´BD y O´CD son congruentes, porque cumplen con LAL, y por lo tanto, tienen sus tres ángulos respectivamente iguales.
8. En particular $\angle$BDO´ = $\angle$CDO´.
9. Entonces $\angle$BDO´ + $\angle$CDO´ = 2R
10. De donde $\angle$BDO´ = $\angle$CDO´ = 1R
11. Como O´ es cualquier punto que equidista de los extremos B y C.
12. Entonces: O´D es la recta perpendicular al lado BC, que pasa por su punto medio D

Demostraremos con el siguiente teorema, que las tres mediatrices de un triángulo se intersectan en un punto.

Teorema 3.1.3 Las tres mediatrices de un triángulo concurren en un punto.

Consideremos el ΔABC y DD′ y EE′ las mediatrices de los lados AB, BC respectivamente (Fig. 3.2)

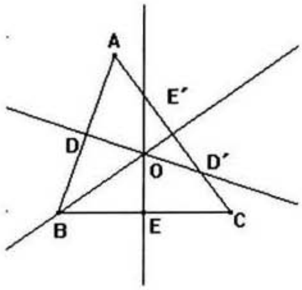


Fig.3.2

Demostración:

1. Sea O la intersección de las mediatrices EE′ y DD′, (esto es porque AB no es paralela a BC y sus mediatrices tampoco lo son, entonces, se intersectan en un punto único)
2. Unimos el punto O, con los vértices A,B y C .
3. Entonces OB = OC porque O está en la mediatriz EE′.
4. OB =OA porque O está en la mediatriz DD′.
5. Por transitividad OC=OA, esto quiere decir que O está a la misma distancia de los vértices A y C y por lo tanto está en la mediatriz del lado AC.
6. Entonces: las tres mediatrices, concurren en el punto O llamado **circuncentro**.

En el caso anterior demostramos que las tres mediatrices de un triángulo cualquiera se intersectan en un mismo punto, pero **¿que pasa con las mediatrices si el triángulo contiene un ángulo interior obtuso?**

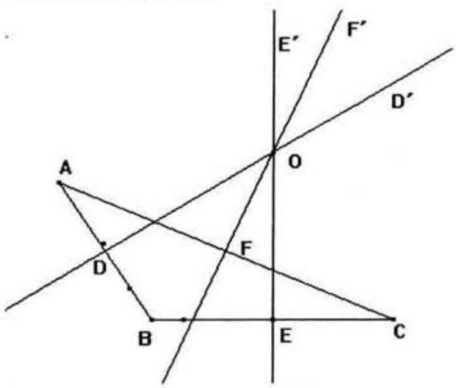


Fig.3.3

Se intersectan exteriormente (Fig.3.3); el lector puede realizar la construcción geométrica para verificarlo.

¿Qué ocurre si el triángulo tiene un ángulo recto?, (Fig.3.4).

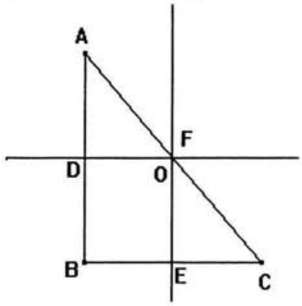


Fig.3.4 O = ½(AB)

Puesto que se demostró en el Teorema 3.1.3 que las tres mediatrices de un triángulo concurren **solo falta justificar que concurren en el punto medio de la hipotenusa.**

Justificación:

1. Sea O el punto de intersección de las tres mediatrices.
2. El ΔADO es semejante al ΔABC por ser rectángulos y tener un ángulo común, el $\angle BAC$.
3. Entonces: $$\frac{AD}{AB} = \frac{AO}{AC}$$
4. Como D es el punto medio del segmento AB, entonces $$\frac{AD}{AB} = \frac{AO}{AC} = \frac{1}{2}$$
5. De donde O es el punto medio de la hipotenusa.

Concluimos que las mediatrices de un triángulo concurre:

1. **Internamente**: si, el triángulo tiene un ángulo interior agudo.
2. **Exteriormente**: si, el triángulo tiene un ángulo interior obtuso
3. **En el punto medio de la hipotenusa**: si, el triángulo tiene un ángulo interior recto.

Ahora bien, fijémonos en la figura 3.2; puesto que O es la intersección de las mediatrices, del ΔABC y se cumple que OA = OB = OC; podemos trazar un círculo con centro en O y radio OA, entonces, hemos circunscrito una circunferencia en un triángulo (Fig.3.5)

3.1.4 Corolario. Por tres puntos cualesquiera no alineados, pasa una circunferencia.

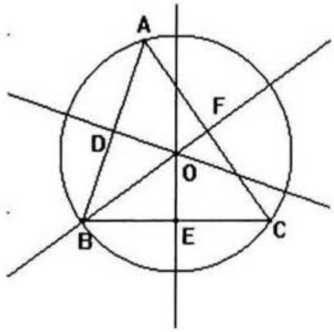


Fig.3.5 Circunscripción de una circunferencia en un triángulo dado.

Bisectriz:

Definición.1 Es la recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales.

Definición. 2 Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan a dos rectas que forman un ángulo.

De la definición 1 y 2 obtenemos el siguiente Teorema.

3.1.5 Teorema. Una recta divide a un ángulo en dos ángulos iguales, si y solo si es el lugar geométrico de los puntos que equidistan a las rectas que forman el ángulo.

Sea ABC un triángulo dado, y BF una recta que divide al $\angle ABC$ en dos ángulos iguales, (Fig.3.6)

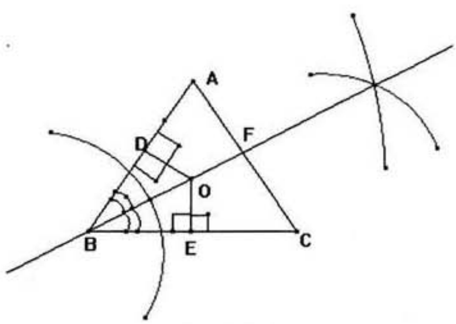


Fig. 3.6

Demostración:

1. Sea O un punto sobre la recta BF.
2. Tracemos la recta perpendicular del punto O, a las rectas AB y BC.
3. Sean D y E los puntos terminales de las rectas OD y OE que están sobre los lados AB y BC respectivamente.
4. Observemos los triángulos ODB y OEB (Fig.3.6)

5. El $\angle$ OBE = $\angle$ DBO (por hipótesis).
6. El lado OB es un lado común.
7. También $\angle$ BEO = $\angle$ODB = 1R.
8. Como la suma de los ángulos interiores en un triángulo es igual a dos ángulos rectos, tenemos que:

$$\angle EOB + \angle OBE + \angle BEO = \angle ODB + \angle DBO + \angle BOD$$

9. Por la igualdad de los triángulos anteriores

$$\angle EOB = \angle BOD$$

10. Por lo tanto ΔOEB es congruente con ΔODB, entonces, tienen sus tres lados respectivamente iguales.
11. En particular OE = OD, entonces O equidista de las rectas que forman el ángulo.
12. Como tomamos O, un punto cualquiera sobre la recta, entonces: la recta que divide al ángulo en dos iguales es el lugar geométrico de los puntos que equidistan a las rectas que forman un ángulo.

Demostraremos ahora el inverso del Teorema 3.1.5

El lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados que forman un ángulo, es precisamente la recta que divide al ángulo en dos ángulos iguales.

Demostración:

1. Sea ABC un triángulo como el de la figura 3.6
2. Suponemos que O es un punto que está a la misma distancia de los lados AB y BC
3. Tracemos rectas perpendiculares a los lados AB y BC, de tal forma que los puntos terminales sean D y E respectivamente.
4. Trazamos también la distancia del punto O al vértice B.
5. Fijémonos en los triángulos OEB y ODB.
6. OD = OE (por hipótesis) y OB es un lado común
7. El $\angle$ OEB = $\angle$ ODB = 1 $\angle$ R
8. Los triángulos OBE y ODB son rectángulos y tienen dos lados iguales, entonces el tercer lado es igual (por el Teorema de Pitágoras); entonces cumplen con LLL; entonces: los triángulos OBE y ODB son congruentes.
9. En particular el $\angle$DBO = $\angle$ OBE
10. Como O es un punto cualquiera entonces:
11. BO es la recta que divide al ángulo $\angle$CBA en dos ángulos iguales.

3.1.6 Teorema Las tres bisectrices de un triángulo, concurren en un punto.

Sea ABC un triángulo dado (Fig.3.7)

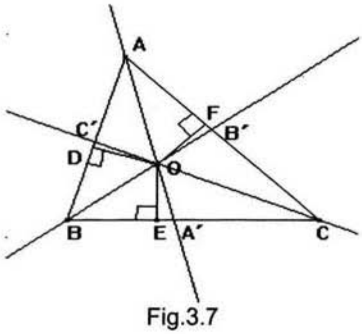


Fig.3.7

Demostración:

1. Sea O el punto de intersección de las bisectrices AA´ y BB´, (esto es porque BC y AC no son paralelas y sus bisectrices tampoco lo son y se intersectan en un punto)
2. Tracemos la distancia perpendicular del punto O, a las rectas AB,BC y AC y llamémosles OD,OE y OF respectivamente.
3. OD= OF porque O está en la bisectriz AA´
4. OD=OE porque O está en la bisectriz BB´
5. Por transitividad OF = OE, quiere decir que O está a la misma distancia de los lados BC y AC.
6. Entonces O está en la bisectriz CC´ (Fig.3.7)
7. De donde las tres bisectrices del triángulo ABC concurren en el punto O, llamado **incentro**.

Nos damos cuenta que podemos inscribir una circunferencia en nuestro triángulo, tomando como centro el punto de intersección de dos bisectrices y como radio la distancia (perpendicular) a cualquiera de los lados. Obtenemos la figura 3.8

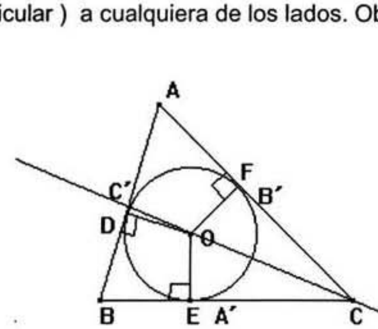


Fig.3.8

3.1.7 Corolario. Para inscribir una circunferencia en un triángulo debemos encontrar un centro y radio; el centro lo encontramos intersectando dos bisectrices y el radio lo encontramos trazando la perpendicular desde el centro a cualquiera de los lados.

Altura

Definición. Es la recta perpendicular que sale del vértice al lado opuesto.

3.1.8 Teorema. Las tres alturas en un triángulo concurren.

Sea ABC un triángulo dado y AD y BE las alturas correspondientes a los vértices A y B respectivamente. (Fig.3.9)

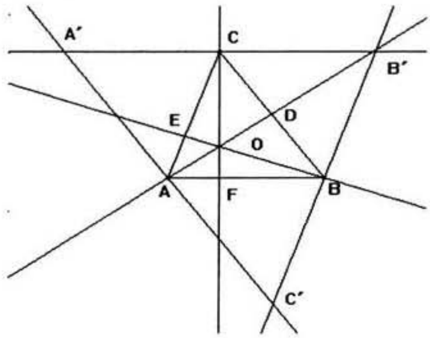


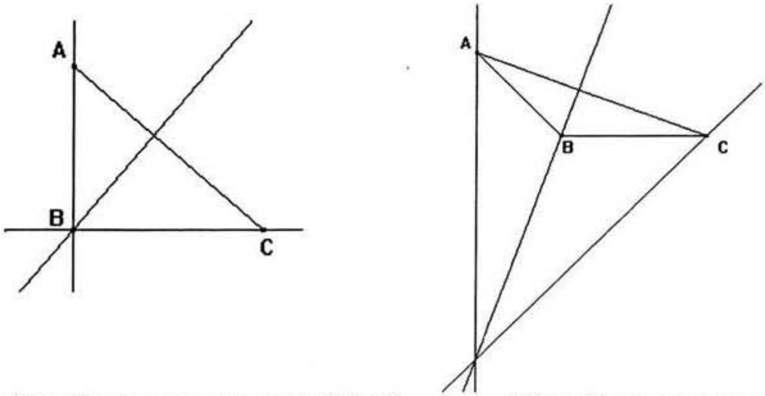
Fig.3.9

Demostración:

1. Tracemos rectas paralelas a los lados AC, BC y AB y llamémosles C´B´, A´C´ y A´B´ respectivamente.
2. Hemos generado un nuevo triángulo A´C´B´.
   Entonces
   a) $\angle BAC = \angle ACA'$ (porque AB ∥ A´B´ y los ángulos son alternos internos).
   b) $\angle BCA = \angle CAA'$ (porque BC ∥ A´C´ y los ángulos son alternos internos)
   c) AC es un lado común.
3. De donde los triángulos A´AC y ABC son congruentes, por cumplir con ALA entonces, tienen sus tres lados iguales en particular el lado AB=A´C y BC=AA´.
4. De la misma manera los triángulos ABC y BB´C son congruentes por lo siguiente:
   a) $\angle ACB = \angle CBB'$ (porque AC ∥ C´B´ y los ángulos son alternos internos)
   b) $\angle ABC = \angle BCB'$ (porque AB ∥ A´B´ y los ángulos son alternos internos)
   c) BC es un lado común.
5. Entonces tienen sus tres lados respectivamente iguales y en particular el lado
   AB=CB´ y AC=BB´
6. Lo mismo ocurre con los triángulos ABC y ABC´, son congruentes por cumplir con ALA , entonces C´B = AC y AC´ = BC.
7. De 3, 5 y 6 tenemos que:
   A´C = CB´ y AA´ = AC´
8. Entonces C es el punto medio del segmento A' B' y A es el punto medio del segmento A´C´ y como C´B = BB´ de 6 y 5 y por transitividad, entonces B, es el punto medio del segmento C´B´.
9. Ahora bien la recta BE es perpendicular a C´B´, (porque BE ⊥ AC y AC ∥ C´B´)
10. AD es una recta perpendicular a la recta A´C´, (porque AD ⊥CB y CB ∥ A´C´)
11. CF es una recta perpendicular a la recta A´B´ (porque CF ⊥ AB y AB ∥ A´B´)

12. Concluimos que las rectas EB, CF y AD son las mediatrices del triángulo exterior A´B´C´, y las alturas del triángulo interior, pero como sabemos que las mediatricez concurren en un punto, por el Teorema 3.1.3, entonces las alturas también. Al punto de intersección de las alturas le llamamos **ortocentro**.

En el Teorema 3.1.8 demostramos la concurrencia de las alturas para cualquier triángulo, aunque el triángulo dibujado, (Fig.3.9) contiene un ángulo interior agudo. **¿Qué pasa si el triángulo contiene un ángulo interior recto o un ángulo interior obtuso? (Fig.3.10)**



a) las alturas concurren en el vértice B. b)Las alturas concurren exteriormente.

.Fig.3.10

Para el caso en el que el triángulo, contiene un ángulo interior recto, es muy sencillo justificar que concurren en el vértice B; puesto que: las alturas que parten de los vértices A y C , son iguales a los lados AB y BC , los cuales son perpendiculares y forman un ángulo recto en el punto B, y la altura al lado AC, parte del vértice B por construcción; de modo que las alturas en un triángulo rectángulo, siempre concurren en uno de sus vértices.

Para el caso de un triángulo obtusángulo, la altura al lado BC, que parte del vértice A, es exterior, al igual que la altura al lado AB, que parte del vértice C, de modo que si las tres rectas concurren, debe ser exteriormente.

3.1.9 Teorema. Las medianas de un triángulo concurren.

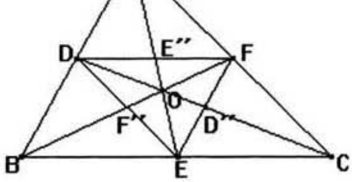


Fig.3.11

Sea ABC un triángulo dado y D,E y F los puntos medios de los lados AB ,BC y AC respectivamente, (Fig.3.11)

Demostración:

1. Sea O la intersección de las medianas AE y BF, (esto se puede suponer, puesto que dos rectas no paralelas, siempre se intersectan en un punto)
2. Trazamos el segmento que une a los puntos D con E, E con F y F con D.
3. Entonces: D, E, y F son los puntos medios del triángulo mayor, entonces $\frac{AD}{AB} = \frac{1}{2} = \frac{AF}{AC}$ y $\angle A$ es común, entonces, los triángulos ADF y ABC son semejantes y la recta DF es paralela a la recta BC, de la misma forma la recta DE es paralela a la recta AC y EF es paralela a la recta BA, entonces los triángulos ADF,DBE, DEF y FEC son congruentes.
4. Como EF es paralela a BA, entonces los triángulos AOB y OEF tienen tres ángulos correspondientemente iguales y por lo tanto son semejantes.
5. Por la congruencia, se tiene que EF= BD = DA, entonces EF= ½ AB, EO = ½ OA y FO = ½ OB.
6. De la misma manera como DF es paralela a BC, los triángulos DOF y OBC son semejantes y como DF = ½ BC, entonces, DO = ½ OC.
7. De 5 y 6, se tiene que:
   $\frac{AO}{OE} = \frac{BO}{OF} = \frac{CO}{OD} = \frac{2}{1}$ entonces las tres medianas, concurren en un punto y se cortan a razón 2 a 1.
8. Al punto de concurrencia entre las medianas, le llamamos **baricentro.**

3.1.10 Corolario: Las medianas de un triángulo exterior son también medianas del triángulo interior.

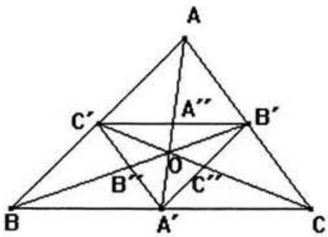


Fig.3.12

Demostración:

1. Sabemos que los triángulos AC´B´,C´BA´, C´A´ B´ y B´ A´C son congruentes, porque A´,B´ y C´ son los puntos medios del triángulo mayor (Fig.3.12)
2. Entonces AC´ = ½ AB pero como C´A´´ es paralela BA´, entonces ΔAC´A´´ es semejante al ΔABA´ , entonces C´A´´ = ½ BA´ o bien BA´=2C´A´´
3. El ΔAA´´ B´ es semejante al ΔAA´C y AB´=½ AC, entonces y A´´B´=½ A´C o bien A´C =2A´´B´
4. Como A´ es el punto medio de BC y BA´ = A´C y por 2 y 3 C´A´´ = A´´B´ de donde A´´ es el punto medio del segmento C´B ´.
5. De la misma manera podemos demostrar que: B´´ y C´´ son los puntos medios de los segmentos A´C´ y A´B´ respectivamente.
6. Entonces las medianas del triángulo mayor, son también las medianas del triángulo menor.

En los casos en que el triángulo es recto u obtusángulo, las medianas también concurren interiormente, el lector, puede verificarlo.

Capítulo 4

4.1 Demostraciones por semejanza y congruencia de algunos teoremas importantes.

En este capítulo aplicaremos los criterios de congruencia y semejanza para demostrar algunos teoremas, los cuáles son básicos para el estudio de la geometría moderna, y son una consecuencia de lo estudiado anteriormente.

Se pretende que el alumno vaya adquiriendo la habilidad para demostrar Teoremas sencillos y útiles, hasta llegar a demostrar Teoremas con un grado de dificultad mayor.

4.1.1 Teoremas básicos para la geometría moderna.

Como una aplicación importante de los criterios de congruencia, demostraremos el Teorema de Pitágoras como lo demostró Euclides. En esta demostración se considera que el área de un rectángulo es el doble del área de un triángulo, puesto que tiene la misma base y la misma altura que el rectángulo.

Teorema 4.1.2: El cuadrado trazado en la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados trazados en los catetos.

Sea ABC un triángulo rectángulo, con ángulo recto en ACB (Fig. 4.1)

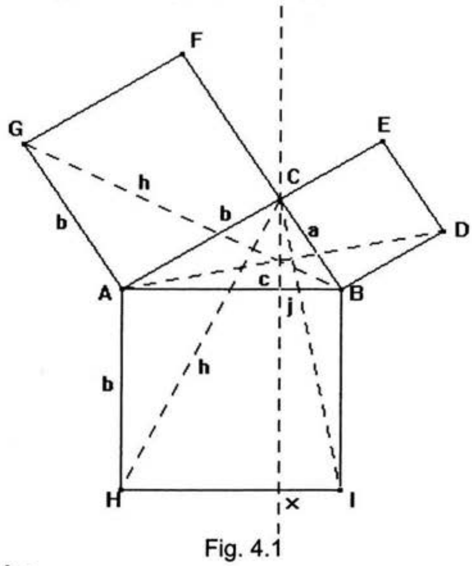


Fig. 4.1

Demostración:

1. Trazamos los cuadrados BCED, AGFC y AHIB en los lados a, b y c, del triángulo ABC respectivamente.
2. Demostraremos que el área Cuadrado AI = área cuadrado AF + área cuadrado BE o bien si dividimos el cuadrado AI en dos rectángulos, AX y BX, trazando el segmento CX paralelo al segmento AH, que corte a los segmentos AB y HI en j y en x, demostraríamos que el área rectángulo AX es igual al área del cuadrado AF y el área del rectángulo BX es igual al área cuadrado BE.

3. Tracemos los segmentos BG y CH. Observemos los triángulos HAC y BAG, (Fig.4.1) el $\angle HAC = \angle BAG$ puesto que son el resultado de agregar la medida de $\angle BAC$ a las medidas de los ángulos rectos $\angle HAB$ y $\angle CAG$.
4. También AB =AH y AC =AG, por cumplir con LAL, los triángulos HAC y BAG son congruentes.
5. El área del cuadrado AF =2 ▲BAG, puesto que el segmento AG es una base común
6. Para ambos y el segmento AC es la altura común.
7. De la misma manera el área del rectángulo AX = 2▲HAC puesto que el segmento AH es una base común para ambos y el segmento Aj es la altura común.
8. Puesto que los triángulos HAC y BAG son congruentes, sus áreas son iguales. por lo tanto , el área del cuadrado AF = área del rectángulo AX.
9. De la misma manera, si trazamos los segmentos AD y CI se forman los triángulos congruentes ABD y CIB, y demostraríamos que el área del cuadrado BE, es igual al área del rectángulo BX.
10. Entonces el área del cuadrado AI = área del rectángulo AX + área del rectángulo BX.
11. Por lo tanto el área del cuadrado AI =área del cuadrado AF + área del cuadrado BE.

Daremos ahora otra demostración del Teorema de Pitágoras, pero ahora lo justificaremos por semejanza, vale la pena por su sencillez.

4.1.3 Teorema de Pitágoras por semejanza.

Teorema de Pitágoras: El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Sea ABC un triángulo rectángulo.

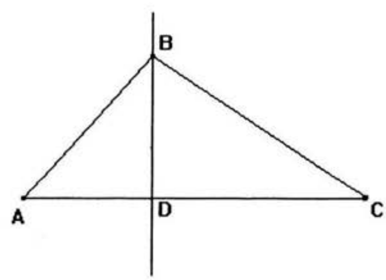


Fig.4.2

Demostración:

1. Trazamos la altura BD a partir del vértice B al lado AC, (Fig.4.2)
2. Entonces $\angle ABC = \angle ADB = \angle BDC = 1R$.
3. Los triángulos ADB y ABC son semejantes, por tener dos ángulos iguales, uno recto y uno común.
4. De manera similar los triángulos BDC y ABC son semejantes.
5. Ahora, de la semejanza de los triángulos ADB y ABC se tiene que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AB} \qquad ó \qquad (AB)^2 = (AC)(AD)$$

6. Como los triángulos BDC y ABC son semejantes se obtiene que:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{DC}{BC} \qquad \text{ó} \qquad (BC)^2 = (AC)(DC)$$

7. Entonces de 5 y 6:

$$\begin{aligned} & (AB)^2 + (BC)^2 = (AC)\ (AD) + (AC)\ (DC) \\ = \ & AC\ (AD + DC), \text{ pero } AD + DC = AC, \text{ entonces} \\ = \ & AC\ AC \\ = \ & (AC)^2 \end{aligned}$$

Como una aplicación de los Teoremas sobre la concurrencia de las bisectrices, alturas, medianas y mediatrices, demostraremos los Teoremas 4.1.4 y 4.1.5

Teorema 4.1.4 (Circunferencia de lo nueve puntos)Los puntos medios de los lados, M, N y L los pies de las alturas D, E, y F, y los puntos medios P, Q y R de los segmentos que unen los vértices al ortocentro H de cualquier triángulo, están en una circunferencia C´, (Fig. 4.3)

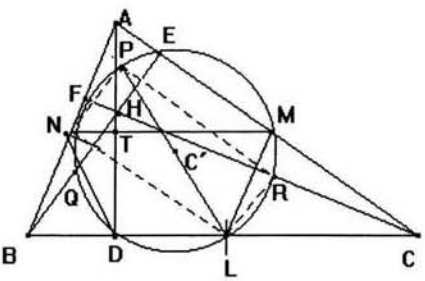


Fig.4.3 Circunferencia de los nueve puntos del triángulo ABC

Demostración.

1. Sabemos que por tres puntos M,N y L pasa una circunferencia C´.
2. Como N y M son los puntos medios de AB y AC respectivamente, la recta NM es paralela a BC.
3. Entonces, los triángulos ANT y ABD son semejantes y

$$\frac{AN}{AB} = \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{AT}{TD} = \frac{1}{2} \qquad \text{ó} \quad AT = TD$$

4. De la conclusión de 3, implica que: los triángulos ANT y NDT son congruentes, pues cumplen con el criterio de congruencia LAL.
5. De la misma manera los triángulos ATM y TDM, son congruentes porque cumplen con el criterio de congruencia LAL.

6. De 4 y 5 se tiene que el triángulo ANM es congruente con el triángulo NDM.
7. Como los triángulos MLC y ABC son semejantes por ser ML paralela a AB entonces: AN= ML y $\angle$ ANM = $\angle$ NML y los triángulos ANM y NLM son congruentes; por cumplir con el criterio de congruencia LAL.
8. De 6 y 7 se tiene por transitividad que los triángulos NDM y NLM son congruentes y tienen sus tres ángulos respectivamente iguales y en particular, $\angle$ NDM = $\angle$ NLM, por lo tanto la circunferencia C´ que inscribe al triángulo NLM pasa por D y análogamente por E y F, que son los otros dos pies de las alturas.
9. Ahora:

En el ΔHBC, L = Pm de BC y R = Pm de HC $\Rightarrow$ LR $\parallel$ BH (1)
En el ΔABH, N = Pm de AB y P = Pm de AH $\Rightarrow$ NP $\parallel$ BH (2)

De (1) y (2) $\Rightarrow$ LR $\parallel$ NP

En el ΔAHC, P = Pm de AH y R = Pm de HC $\Rightarrow$ PR $\parallel$ AC (3)
En el ΔABC, N = Pm de AB y L = Pm de BC. $\Rightarrow$ NL $\parallel$ AC (4)

De (3) y (4) $\Rightarrow$ PR $\parallel$ NL

entonces PNLR es un rectángulo y $\angle$ PNL = $\angle$ PDL = 1R

10. Implica que el punto P está en C y PL es diámetro.
11. De forma análoga, se tiene que los puntos Q y R están en C.

Como consecuencia del Teorema 4.1.4, demostraremos el siguiente Teorema 4.1.5 llamado línea de Euler en el que los puntos: ortocentro, circuncentro y baricentro del triángulo ABC, están todos en una misma línea recta.

Teorema 4.1.5 (Línea de Euler).El centro de la circunferencia de los nueve puntos, el ortocentro, el circuncentro y el baricentro de un triángulo que forma esta circunferencia, son colineales.

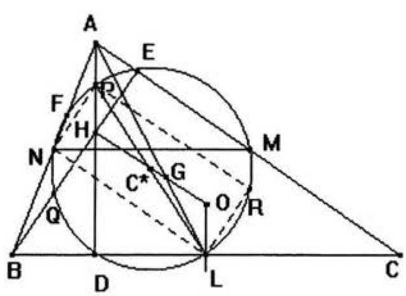


Fig. 4.4 La línea de Euler

Demostración:

1. Sabiendo del Teorema 4.1.4 que PL es diámetro; trazamos el punto medio C*, el cual será el centro de nuestra circunferencia, (Fig.4.4).
2. Sean H el ortocentro, O el circuncentro y G el baricentro del triángulo ABC; L, M y N los puntos medios de los lados BC, CA y AB respectivamente; D, E y F los pies de las alturas y P, Q y R los puntos medios de los segmentos que unen los vértices al ortocentro H .
3. Suponemos que por 2 puntos pasa H y C* pasa una recta, falta demostrar que también pasa por G y por O.
4. Trazamos una recta del punto H al punto C*, que corte a la mediatríz en el punto O*.
5. Cómo AD es paralela a LO* y PC* = C*L por (1) entonces los triángulos PHC* y C*LO* son congruentes, entonces PH =LO*.
6. O es el centro de las mediatrices y AD es paralela a LO, entonces también se cumple que los triángulos PHC* y C*LO son congruentes y PH = LO
7. De 5 y 6 se tiene que LO = LO*, entonces O = O*.
8. Entonces O está en la recta que pasa por H y C*.
9. Supongamos ahora que existe un punto G* que se encuentra en la intersección de las rectas AL y HC* .
10. Los triángulos AHG* y G*LO son semejantes porque AH está en AD y esta es paralela a LO , y sus tres ángulos son iguales y AH =2PH porque P es el punto medio de AH , entonces AG* = 2G*L
11. Ahora, las medianas, se cortan en razón 2 a 1 es decir que $\frac{AG}{GL} = \frac{2}{1}$ o bien AG=2GL
12. De 10 y 11 tenemos que G = G*.
13. Por lo tanto, H, C*, G y O son colineales.

Demostraremos ahora dos Teoremas muy importantes, el Teorema de Ceva y el Teorema de Menelao que se demuestran con semejanza de triángulos, y en los cuales utilizaremos el quinto postulado de Euclides (postulado de las paralelas capítulo 5); daremos una breve explicación de segmentos dirigidos, la cual nos será de mucha utilidad para nuestras demostraciones.

4.2 Segmentos dirigidos

Dados dos puntos distintos A y B, estos, determinan un segmento de recta AB. Ahora introduciremos el concepto de dirección de un segmento, es decir, si tomamos el segmento AB recorrido de A a B diremos que es el segmento dirigido AB, mientras que si lo vemos dirigido de B a A diremos que es el segmento dirigido BA en donde estos segmentos se relacionan asi:.

$$AB = - BA$$

Fig. 4.5 Los segmentos AB, BC y AC tienen el mismo signo.

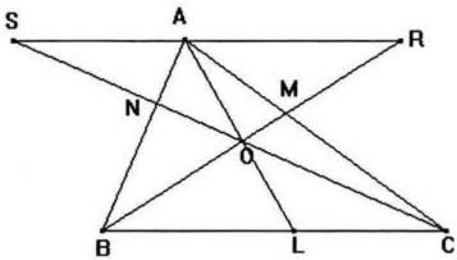
La magnitud de los segmentos AB y BA son iguales, pero lo que estamos considerando, es la dirección que tiene cada uno de ellos. Además, para cualesquiera, tres puntos colineales A, B y C, (Fig.4.5) se tiene que AB= AC + CB.

De los siguientes dos teoremas, uno fue probado por Menelao de Alejandría, aproximadamente en el año 100 a. c. y el otro fue publicado, junto con el teorema de Menelao, por Giovanni Ceva en 1678.

Teoremas de Ceva y Menelao.

Teorema de Ceva 4.2.1 Si tres líneas AO, BO y CO, trazadas por los vértices de un triángulo ABC y un punto O de su plano, cortan a los lados opuestos en L, M y N, respectivamente, donde ninguno de los puntos L, M y N, son vértices del triángulo ABC, entonces:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1 \qquad (A)$$



.Fig 4.6 Teorema de Ceva.

Demostración.

1. Supongamos que las líneas AL, BM y CN concurren en el punto O (Fig.4.6).
2. Sean R y S las prolongaciones de las rectas BM y CN
3. Tracemos la recta SR paralela a la recta BC que pase por el punto A
4. Entonces, se tienen las siguientes parejas de triángulos semejantes:

$\Delta ASN \approx \Delta BCN$ que implica $$\frac{AN}{NB} = \frac{SA}{BC} \qquad (1)$$

$\Delta BLO \approx \Delta RAO$ que implica $$\frac{BL}{RA} = \frac{LO}{AO} \qquad (2)$$

$\Delta ASO \approx \Delta LCO$ que implica $$\frac{LC}{AS} = \frac{LO}{AO} \qquad (3)$$

$\Delta MRA \approx \Delta MBC$ que implica $$\frac{CM}{MA} = \frac{BC}{AR} \qquad (4)$$

5. Pero las ecuaciones 2 y 3 implican que $\frac{BL}{LC} = \frac{AR}{SA}$ (5)

6. Multiplicando las ecuaciones (1),(5) y (4) obtenemos:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

Demostraremos ahora el recíproco del Teorema 4.2.1 i.e. que, si L, M, y N, son puntos en los lados BC, CA y AB del triángulo ABC, para los cuales se cumple la relación anterior, entonces AL, BM y CN son concurrentes.

Demostración:

1. Sea O el punto de intersección de las líneas BM y CN.
2. Supongamos que AO corta a BC en el punto L*, entonces, por la primera parte del teorema tenemos que:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL^*}{L^*C} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

3. Pero también

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

4. Lo que implica que

$$\frac{BL}{LC} = \frac{BL^*}{L^*C}$$

5. Por lo tanto L coincide con L*, es decir, AL pasa por O, y entonces, las líneas AL, BM y CN son concurrentes.

Una aplicación directa del teorema de Ceva es demostrar la concurrencia de las medianas:

Teorema 4.2.2. Las medianas concurren en un punto (por el Teorema de Ceva).

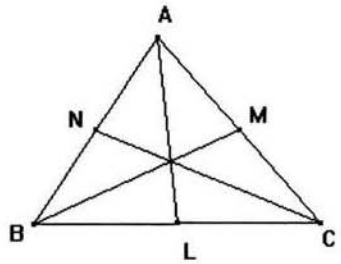


Fig.4.7

Demostración:

1. Sean AL, BM y CN medianas del triángulo ABC,(Fig.4.7).
2. Entonces AN = NB, BL = LC y CM = MA.
3. Se tiene que: $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$
4. Por el recíproco del Teorema de Ceva entonces: AL, BM y CN, son concurrentes.

También se pueden probar la concurrencia de las bisectrices, y alturas por medio de este Teorema.

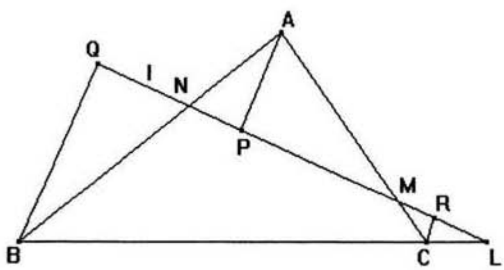
Veamos ahora lo que dice el Teorema de Menelao.

Teorema de Menelao.4.2.3 Si una línea recta intersecta a los lados BC, CA y AB de un triángulo ABC en los puntos L, M y N respectivamente, entonces:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

El teorema anterior, también se puede enunciar así: El producto de las proporciones de los lados del triángulo ABC con sus intersecciones es igual a - 1.

Sean AP, BQ y CR las perpendiculares de A, B y C respectivamente a la línea LMNQ, (Fig.4.8)



.Fig.4.8 Teorema de Menelao.

Demostración:

1. Entonces, tenemos las siguientes parejas de triángulos semejantes:

$\Delta ANP \approx \Delta BNQ$ que implica $\frac{AN}{NB} = \frac{AP}{QB}$ (6)

$\Delta BLQ \approx \Delta CLR$ que implica $\frac{BL}{LC} = \frac{QB}{CR}$ (7)

$\Delta CMR \approx \Delta AMP$ que implica $\frac{CM}{MA} = \frac{CR}{PA}$ (8)

2. Multiplicando las ecuaciones (6), (7) y (8) obtenemos

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

Demostraremos ahora el recíproco del Teorema 4.2.3 i.e. que si L, M y N son puntos de los lados BC, CA y AB del triángulo ABC para los cuáles vale la relación anterior, entonces L, M y N son colineales.

Demostración:

1. Sea L* la intersección de MN con BC, entonces, por la primera parte del Teorema tenemos que:

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL^*}{L^*C} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

2. Pero también

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = -1 \qquad \text{por hipótesis.}$$

3. Lo que implica que

$$\frac{BL}{LC} = \frac{BL^*}{L^*C}$$

4. Por lo tanto L coincide con L *, es decir L, M y N, son colineales.

El siguiente Teorema 4.2.4 es una aplicación del Teorema de Ceva y del Teorema de Menelao.

4.2.4 Teorema de la división interna y externa.

Teorema. Si L, M y N son puntos cualesquiera en los lados BC, CA, y AB del triángulo ABC tales que AL, BM y CN son concurrentes, y si la línea MN intersecta a BC en L´, entonces los puntos L y L´ dividen el segmento BC interna y externamente en la misma razón.

Sea ABC un triángulo dado, L,M y N puntos cualesquiera en los lados BC, CA y AB, tales que AL, BM y CN son concurrentes (Fig.4.9)

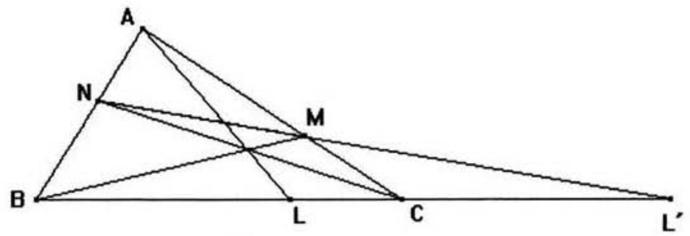


Fig. 4.9

1. Puesto que AL, BM y CN son concurrentes, tenemos que por el Teorema de Ceva

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$$

2. Puesto que L´ , M y N son colineales, por el Teorema de Menelao

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CM}{MA} = -1$$

3. De lo que obtenemos que:

$$\frac{BL}{LC} = -\frac{BL'}{L'C}$$

4. Es decir que L y L´ dividen a BC interna y externamente en la misma razón.

En la figura 4.9 los tres puntos B, L y C están dados; el punto L´ está determinado de manera única, puesto que sólo hay un punto que divide el segmento externamente en la misma razón numérica, en la que el punto dado divide el segmento internamente. Así concluimos lo siguiente.

Sean B, L y C tres puntos fijos en una línea. Si A es un punto cualquiera fuera de estas rectas, y M y N son puntos cualesquiera en los lados CA y AB del triángulo ABC de tal forma que AL,BM y CN sean concurrentes, entonces la línea MN intersectará la línea BC en un punto fijo.

Capitulo 5

5.1 Paralelismo y 5to.postulado.

En este capítulo estudiaremos las propiedades básicas de los ángulos entre rectas que se cruzan y rectas que no se cruzan i.e. paralelas, veremos los postulados de Euclides y particularmente, el quinto postulado y los intentos que realizaron muchos matemáticos desde su época hasta nuestro siglo por demostrarlo, el cuál llevó a los matemáticos griegos al descubrimiento de una nueva geometría.

Demostraremos primero, algunos ángulos básicos entre dos líneas y posteriormente haremos la construcción de rectas paralelas para demostrar, cómo surgieron las relaciones entre sus ángulos.

5.1.1 Angulos entre rectas que se cruzan

Daremos algunas definiciones básicas:

Definición: **Dos ángulos son adyacentes**, si tienen un lado en común.

Definición: **Dos ángulos son opuestos por el vértice**, si se encuentran entre dos rectas y son opuestos entre sí.

Definición: **Dos ángulos son complementarios**, si suman un ángulo recto.

Definición: **Dos ángulos son suplementarios**, si suman dos ángulos rectos.

Teorema.5.1.2 Un segmento cortado por una secante suma dos ángulos rectos.

Sea AB un segmento de recta, cortado por una recta transversal C en el punto O, (Fig.5.1).

La suma de los ángulos BOC y COA, suman dos ángulos rectos.

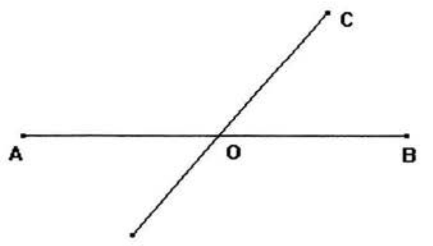


Fig.5.1 ∡ BOC + ∡COA = 2 rectos

Demostración.

1. El ángulo ∡BOA es igual a 2 rectos.
2. Ahora ∡BOC + ∡COA = ∡BOA.
3. Entonces ∡BOC + ∡COA = 2 rectos.
4. Decimos que ∡BOC es el suplemento del ∡COA.

Teorema.5.1.3 Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Sean AC y BD dos rectas que se cortan en O, decimos que el ángulo COB es igual al ángulo AOD, (Fig.5.2).

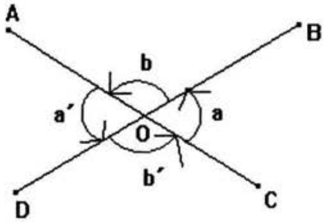


Fig.5.2

Demostración:

1. El $\measuredangle$COB + $\measuredangle$ BOA = 2 rectos (por ser adyacentes).
2 El $\measuredangle$BOA + $\measuredangle$ AOD = 2 rectos (por ser adyacentes).
3. Entonces $\measuredangle$COB + $\measuredangle$ BOA = $\measuredangle$BOA + $\measuredangle$ AOD.
4. De donde $\measuredangle$COB = $\measuredangle$ AOD y son opuestos por el vértice.

5.2 Angulos entre rectas que no se cruzan.

Ahora conoceremos diferentes métodos de construcciónes con regla y compás, de rectas que no se cruzan i.e. rectas paralelas; para estudiar posteriormente, las relaciones entre sus ángulos.

Definición: **Dos rectas son paralelas**, si sus ángulos correspondientes, son iguales.

5.2.1 Construcciones de rectas paralelas con regla y compás.

El siguiente método, se propone por la sencillez de su construcción, vamos a trazar una recta perpendicular como lo hicimos en el capítulo 1 en 1.2.6,y posteriormente trazaremos la perpendicular de la perpendicular y es así como encontraremos la paralela, veamos como:

Método 1.

Construcción de una recta paralela por el método de las perpendiculares.

Sea L una recta dada y P un punto fuera de ella, (Fig.5.3).

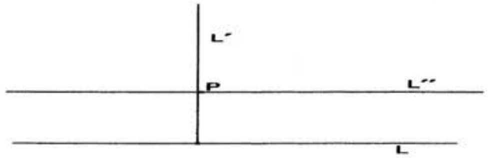


Fig.5.3

Construcción:

1. Trazamos una recta perpendicular a la recta L que pase por P, y le llamamos L´.
2. Trazamos una recta perpendicular a L´ que pase por P y le llamamos L´´.
3. Entonces L y L´´ son paralelas.

Método 2.

Construcción de rectas paralelas, copiando un triángulo.

Construcción de una recta paralela por un punto P fuera de ella.

Sea L una recta dada y P un punto fuera de la recta. (Fig. 5.4)

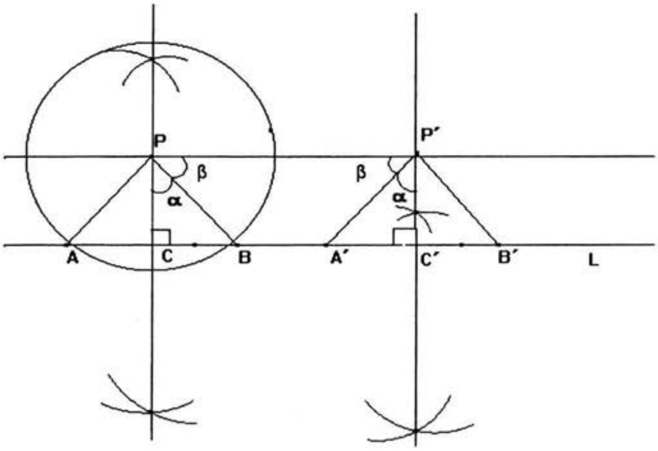


Fig. 5.4 rectas paralelas en un triángulo isósceles.

1. Construlmos un triángulo PAB Isósceles, como en (1.2.2) que pase por el punto P sobre la recta L (Fig.5.4)
2. Entonces AP= PB= r y trazamos la altura del punto P al lado AB y le llamamos PC.
3. Entonces C = Pm de AB puesto que está en la mediatriz del ΔPAB.
4. Construcción del ΔP´A´B´ congruente al ΔPAB:
    a) Copiamos la distancia AB en la recta L y le llamamos A´B´
    b) Bisectamos el segmento A´B´ , y a su punto medio le llamamos C´.
    c) Trazamos una perpendicular a A´ B´ que pase por C´.
    d) Copiamos la distancia PC en el punto C´, y a este segmento le llamamos P´C´
    e) Unimos por un segmento los puntos A´ con P´, y B´ con P´.
    f) Hemos construido un ΔP´A´B´, congruente con el ΔPAB
5. Unimos el punto P con el punto P´.
6. Así la recta L es paralela a la recta PP´.

A partir de la siguiente demostración del método 3, se pueden demostrar las construcciones de los métodos 1 y 2, además de aquí surgen todos los ángulos que hay entre dos rectas paralelas y las relaciones entre estos.

Método 3.

Construcción de rectas paralelas, copiando un ángulo.

Sea la recta B´B y P un punto dado (Fig.5.5)

Deseamos construir una recta paralela a la recta B´B que pase por el punto P.

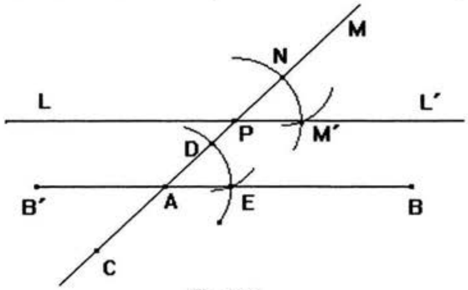


Fig.5.5

Construcción:

1. Sea A un punto de la recta, trazamos la recta que une al punto A con el punto P y le llamamos MC.
2. Copiamos el ángulo ∡BAP en el punto P, como lo hicimos en el capítulo 1, en el método 2, como sigue:

   a) Trazamos un arco con centro en A que corte a la recta PA en D y a B´B en E.
   b) Trazamos un arco con centro en P de radio AE, y le llamamos N al punto de intersección de la recta AP con el arco.
   c) Trazamos otro arco con centro en N de radio DE.
   d) Al punto de intersección de los arcos le llamamos M´.
   e) Unimos el punto P con M´.
   f) Prolonguemos la recta PM´ y llamémosle LL´.
3. La recta LL´ que pasa por el punto P es paralela a la recta B´B.

De la figura 5.5, sea el ∡MPL´ = ∡α, ∡MPL = ∡ β, ∡LPA = ∡ γ , ∡ L´PA = ∡ δ y ∡ BAP = ∡ α' , ∡MAB´ = ∡ β', ∡ B´AC = ∡ γ' , ∡ CAB = ∡ δ' como se muestra en la figura 5.6

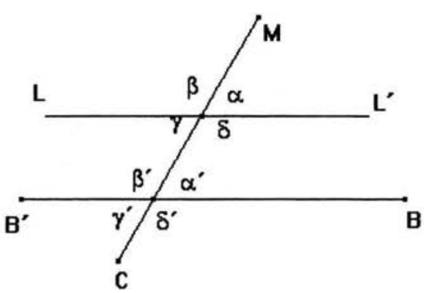


Fig.5.6

Demostración:

1. El $\measuredangle\alpha + \measuredangle\delta = 2R$ (suplementarios).
2. El $\measuredangle\alpha' + \measuredangle\delta' = 2R$ (suplementarios). y $\measuredangle\alpha = \measuredangle\alpha'$(por construcción).
3. Entonces $\measuredangle\delta = \measuredangle\delta'$
4. Del mismo modo tenemos que $\measuredangle\gamma' + \measuredangle\delta' = 2R$ (suplementarios).
5. Pero $\measuredangle\gamma + \measuredangle\delta = 2R$ (suplementarios).
6. Entonces $\measuredangle\gamma = \measuredangle\gamma'$
7. Ahora $\measuredangle\beta' + \measuredangle\alpha' = 2R$ y $\measuredangle\beta + \measuredangle\alpha = 2R$.
8. Entonces $\measuredangle\beta' = \measuredangle\beta$
9. Los ángulos $\measuredangle\alpha'$, $\measuredangle\beta'$, $\measuredangle\gamma$, $\measuredangle\delta$ se les llama ángulos internos.
10. Los ángulos $\measuredangle\alpha$, $\measuredangle\beta$, $\measuredangle\gamma'$, $\measuredangle\delta'$ se les llama ángulos externos.
11. Ahora a los ángulos $\measuredangle\gamma$ y $\measuredangle\alpha'$ y $\measuredangle\delta$ y $\measuredangle\beta'$ se les llaman ángulos alternos internos.
12. A los ángulos $\measuredangle\gamma'$ y $\measuredangle\alpha$ y $\measuredangle\delta'$ y $\measuredangle\beta$ se les llama ángulos alternos externos.
13. A los ángulos $\measuredangle\alpha$ y $\measuredangle\alpha'$, $\measuredangle\beta$ y $\measuredangle\beta'$, $\measuredangle\gamma$ y $\measuredangle\gamma'$, $\measuredangle\delta$ y $\measuredangle\delta'$ se les llama ángulos correspondientes.
14. De lo anterior se concluye que: $\measuredangle\alpha = \measuredangle\alpha'$, $\measuredangle\beta = \measuredangle\beta'$, $\measuredangle\gamma = \measuredangle\gamma'$ y $\measuredangle\delta = \measuredangle\delta'$
15. Con esta información surge la siguiente propiedad de las rectas paralelas.

Propiedad 1.

" Si dos rectas forman con una transversal ángulos correspondientes iguales , estas dos rectas son paralelas"

16. Ahora $\measuredangle\beta' = \measuredangle\delta'$ (por ser opuestos por el vértice) y $\measuredangle\delta' = \measuredangle\delta$
17. Entonces $\measuredangle\beta' = \measuredangle\delta$
18. Ahora $\measuredangle\alpha = \measuredangle\gamma$ (por ser opuestos por el vértice) y $\measuredangle\alpha = \measuredangle\alpha'$
19. Entonces $\measuredangle\gamma = \measuredangle\alpha'$
20. Con esta información surge otra propiedad de las rectas paralelas.

Propiedad 2.

" Si dos paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son iguales "

21. Ahora bien $\measuredangle\gamma' = \measuredangle\alpha'$ (por ser opuestos por el vértice) y $\measuredangle\alpha' = \measuredangle\alpha$ (por construcción).
22. Entonces $\measuredangle\gamma' = \measuredangle\alpha$

22. También $\measuredangle\delta' = \measuredangle\beta'$ (por ser opuestos por el vértice) y $\measuredangle\beta' = \measuredangle\beta$ (por ser correspondientes)
23. Entonces $\measuredangle\delta' = \measuredangle\beta$
24. Surge otra propiedad de las rectas paralelas.

Propiedad 3.

" Si dos paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos externos son iguales "

Estas tres propiedades son básicas en la teoría de las paralelas, sin embargo para poder demostrarlas hizo falta construir las rectas paralelas y dar por hecho el quinto postulado de Euclides; el cual estudiaremos a continuación.

5.3 Quinto postulado de Euclides.

Euclides nació en Grecia alrededor del año 300 antes de Cristo y se dio a la tarea de reunir el conocimiento matemático que había desarrollado hasta ese momento y es así como aparecen los "Elementos de Geometría " la cual es una obra que consta de 13 libros con un total de 465 proposiciones. Para dar forma a los elementos, Euclides introduce 23 definiciones, nueve nociones comunes y cinco postulados, enunciados de la siguiente manera:

1. Es posible trazar una línea recta desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.
2. Es posible prolongar una línea recta finita, continuamente en una línea recta.
3. Para cada centro y radio, es posible describir su círculo.
4. Todos los ángulos rectos, son iguales entre sí.
5. El Quinto Postulado de Euclides fue enunciado así en su libro "Los Elementos de Euclides" :

"Si una recta que cae sobre dos rectas forma con ellas ángulos interiores del mismo lado cuya suma sea menor que dos rectos, las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se cortarán del lado en que la suma de los ángulos sea menor que dos rectos "

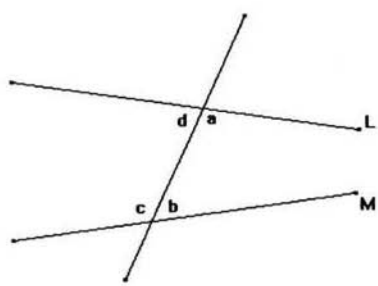


Fig.5.7 como a + b < 2R, las rectas L y M se cortan a la derecha.

Durante casi dos mil años, la teoría de las paralelas, causó un transtorno considerable a los antiguos griegos, quienes intentaron demostrar el quinto postulado a partir de los otros cuatro; de hecho Euclides, trató de evitarlo lo más que pudo, pues no lo utilizó en sus demostraciones sino hasta que llegó a la proposición 29 (libro I) (5.4.1), pero un examen más detallado nos revela que realmente es el recíproco de la proposición 17 del libro I, titulado "Elementos de Geometría" veamos:

Para comprender la proposición 17 de Euclides, necesitamos la proposición 16, que dice:

Proposición 16, de Euclides:

En un triángulo, si uno de los lados es prolongado, el ángulo exterior es más grande que el ángulo interior y el ángulo puesto, (Fig. 5.8)

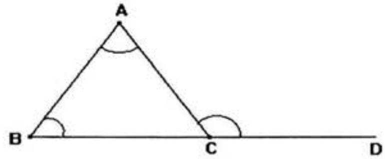


Fig.5.8 ∡ACD > ∡ABC y ∡ACD > ∡BAC

Proposición 17, de Euclides:

En un triángulo al sumar cualesquiera dos ángulos interiores, son menores a dos ángulos rectos.

Sea el ΔABC como en la figura 5.9

Decimos que cualesquiera 2 ángulos de un triángulo ABC son menores que 2R.

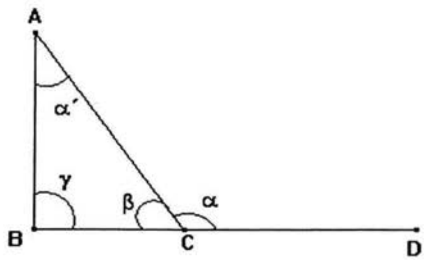


Fig. 5.9

Demostración:

1. Sea BC prolongado hasta D.
2. Entonces, el ángulo ∡ α es el ángulo exterior en el ΔABC, y es mayor que el ángulo interior ∡ γ ó su ángulo opuesto ∡ α' (proposición 16).
3. Es decir que ∡ α > ∡ γ ó ∡ α > ∡ α'
4. Si agregamos el ∡ β, entonces : ∡ α + ∡ β > ∡ γ + ∡ β
5. Pero ∡ α + ∡ β = 2R (proposición 13).
6. De donde, los ángulos ∡ γ + ∡ β < 2R.
7. Similarmente podemos demostrar que ∡ α' + ∡ β < 2R y también que ∡ α' + ∡ γ < 2R

Ahora bien, cuál sería el recíproco de la proposición 17?

Quinto postulado visto como el recíproco de la proposición 17.

Si en una figura, los ángulos sumados dos a dos de cualquier forma, son menores a dos ángulos rectos, entonces las rectas se cortan, formando un triángulo; el lector puede analizarlo y verá que sí se parece al quinto postulado de Euclides 5.3.

Muchos matemáticos hicieron intentos por demostrarlo puesto que creyeron que era una proposición y no un postulado; y no fue sino hasta finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX que gracias a la incapacidad demostrable de dicha hipótesis, por fin los postulados de la geometría, se convirtieron para el matemático, en simples hipótesis cuya verdad o falsedad no era necesario ocuparse; se acepta entonces la posibilidad de crear geometrías artificiales en las que se pueden elegir postulados a conveniencia, con la condición de que fueran compatibles con los demás; entonces la geometría se libera de su molde tradicional y se inventa una nueva geometría que difiere radicalmente de la geometría tradicional de Euclides, i.e. geometrías no euclideanas o como actualmente se les conoce como: geometrías elíptica e hiperbólica.

Desde el punto de vista griego, era natural preguntarse si el quinto postulado se necesitaba realmente, y pensar que tal vez podría deducirse como un teorema a partir de los otros cuatro, o cuando menos, que podría sustituirse por un equivalente más aceptable

5.3.1 Equivalencias del quinto postulado.

De los muchos sustitutos que se han ideado para el quinto postulado de Euclides, quizá el más popular es el que hizo en los tiempos modernos el físico y matemático escocés John Playfair (1748-1819): Por un punto exterior a una recta es posible trazar una y sólo una recta paralela a la recta dada. (Fig.5.10)

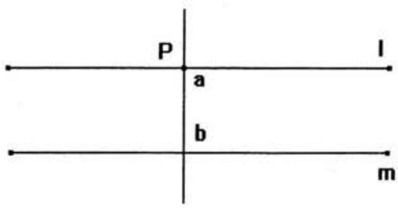


Fig.5.10 l es la única paralela a m por P.

Algunas otras equivalencias para el postulado de las paralelas que han sido propuestas o supuestas durante años, son las siguientes:

1. Existe un par de rectas en un mismo plano en que todos los puntos de una se encuentran a la misma distancia de la otra.
2. Existe un par de triángulos no congruentes semejantes.
3. Si en un cuadrilátero un par de lados opuestos son iguales y si los ángulos adyacentes al tercer lado son rectos, entonces dos ángulos también son rectos.

4. Si en un cuadrilátero tres ángulos son rectos, el cuarto también es recto.
5. Por un punto situado dentro de un ángulo menor que 90° puede siempre trazarse una recta que corte a ambos lados del ángulo.
6. Una circunferencia puede hacerse pasar por tres puntos no colineales cualesquiera.
7. No hay límite superior del área de un triángulo.
8. Existe al menos un triángulo en el que la suma de sus tres ángulos es igual a dos rectos.

Exhibiremos una demostración muy parecida a esta proposición de gran utilidad para el alumno:

La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo, es igual a dos rectos.
Sea ABC un triángulo dado y $\alpha = \measuredangle BAC$, $\beta = \measuredangle ACB$, $\gamma = \measuredangle CBA$ (Fig. 5.11)

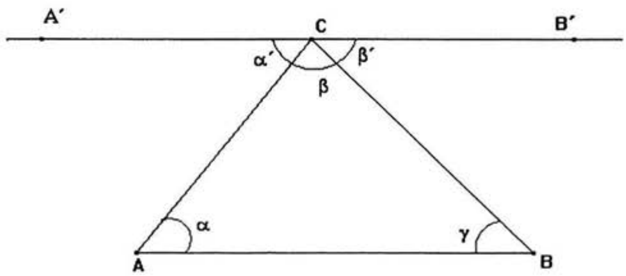


Fig.5.11

1. Tracemos una recta paralela, a la recta AB que pase por el vértice C, llamémosle la recta A´B´.
2. Sea $\measuredangle \alpha' = \measuredangle A'CA$ y $\measuredangle \beta' = \measuredangle BCB'$.
3. Deseamos demostrar que: $\measuredangle \alpha + \measuredangle \beta + \measuredangle \gamma = 2R$
4. Entonces como las recta AB y la recta A´B´ son paralelas, y la recta AC es una secante que las corta $\measuredangle \alpha = \measuredangle \alpha'$ (por ser ángulos alternos internos).
5. Tenemos que $\measuredangle \alpha' + \measuredangle \beta + \measuredangle \beta' = 2R$ (por ser suplementarios)
6. También CB es una secante, que corta a las rectas paralelas AB y A´B´, entonces $\measuredangle \gamma = \measuredangle \beta'$ (por ser ángulos alternos internos).
7. De la ecuación $\measuredangle \alpha' + \measuredangle \beta + \measuredangle \beta' = 2R$, sustituimos α por α', y β' por γ, obtenemos que $\measuredangle \alpha + \measuredangle \beta + \measuredangle \gamma = 2R$, lo cual era lo que queríamos demostrar.

Muchas " demostraciones" del postulado de las paralelas fueron ofrecidas, pero fue demostrado tarde o temprano, que cada una se basaba en una suposición tácita equivalente al propio postulado.

Sería interesante que el estudiante trate de demostrar la equivalencia de las alternativas anteriores, algunas de ellas las encontrará en: "The Foundations of Geomtry and Non-Euclidean" , ver bibliografía.

Los intentos por deducir el postulado de las paralelas como un teorema a partir de los otros cuatro culminó, en algunos de los desarrollos de más largo alcance en las matemáticas modernas.

5.4 Intentos de demostración del Quinto postulado.

5.4.1 Intento de demostración del quinto postulado de Euclides por Claudio Ptolomeo.

Esta demostración fue uno de los primeros intentos conocidos por probar el quinto postulado realizado por el astrónomo y geógrafo griego Claudio Ptolomeo, se sabe que fue la primera (85 –165), pero fue publicada mucho tiempo después de haber sido elaborada.

En esta prueba, Ptolomeo utiliza la proposición 13 de Euclides y la proposición 29,que el mismo hace y a partir de ella, intenta demostrar el quinto Postulado, pero es en ésta última prueba, en la cual utiliza el axioma de Playfair (5.3.1)

Proposición 13: Si en una línea recta un conjunto de rectas, forman ángulos, serán iguales a dos ángulos rectos. (Fig. 5.12)

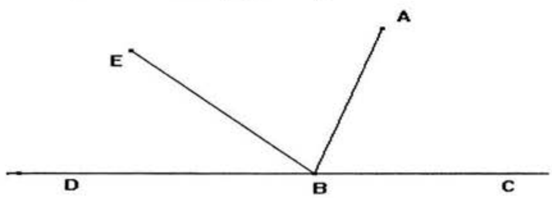


Fig.5.12 $\measuredangle$ CBA + $\measuredangle$ ABD = 2R y $\measuredangle$CBA + $\measuredangle$ ABE + $\measuredangle$ EBD = 2R

Proposición 29 dice:

Una línea que corta a dos líneas rectas paralelas hace que la suma de los ángulos interiores de un mismo lado sea igual a 180°.

Demostración:

1. Sean AD y BC paralelas y FG una transversal que las intersecta.
2. Si $\measuredangle$CFG + $\measuredangle$DGF > 2R, entonces $\measuredangle$BFG + $\measuredangle$AGF < 2R, esto es porque $\measuredangle$CFG+$\measuredangle$BFG = 2R y $\measuredangle$DGF+$\measuredangle$AGF = 2R (proposición 13).
3. Entonces: $\measuredangle$CFG+$\measuredangle$BFG+ $\measuredangle$DGF+$\measuredangle$AGF = 4R.
4. Pero, por el contrario $\measuredangle$BFG + $\measuredangle$AGF > 2R, porque CF y DG no son más paralelas que FB y GA.
5. Es decir que, si $\measuredangle$CFG + $\measuredangle$DGF > 2R entonces $\measuredangle$BFG + $\measuredangle$AGF > 2R
6. Explicación:El punto 5 no puede ser, porque se tendría que: $\measuredangle$CFG+$\measuredangle$BFG+ $\measuredangle$DGF+$\measuredangle$AGF > 4R y contradice la proposición 13.
7. Lo mismo ocurre si $\measuredangle$CFG + $\measuredangle$DGF < 2R.
8. Entonces $\measuredangle$CFG + $\measuredangle$DGF = 2R, que era lo que se quería demostrar, pero la demostración de Ptolomeo termina en el punto 5.

Demostración del quinto postulado por Claudio Ptolomeo.

Sean g y h líneas paralelas cortadas por una transversal FG y sean a, b, c y d ángulos como en la (Fig.5.13)

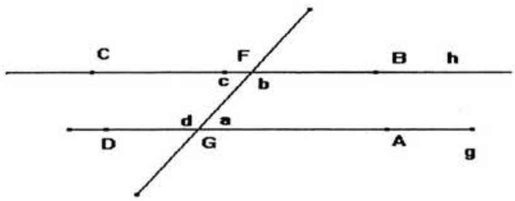


Fig.5.13

Demostración:

1. Supongamos que a + b < 2 ángulos rectos
2. Pero como g y h son paralelas tanto en un lado transversal como en el otro.
3. Entonces, la suma de los ángulos interiores en un lado es igual a la suma de los ángulos interiores del otro lado.
4. Por lo tanto c + d < 2 ángulos rectos, por la proposición 29.
5. Por lo tanto a + b + c + d < 4 ángulos rectos (es imposible por la proposición 13).
6. Análogamente si suponemos que a + b > 2 ángulos rectos. Llegamos a una contradicción.
7. Entonces a+ b = 2R.

El error de Ptolomeo, fue el no terminar de demostrar la proposición 29 de Euclides y en su intento de demostración del Quinto Postulado, demuestra la proposición 29 completa de Euclides.

5.4.2 Intento de demostración del quinto postulado de Euclides por Girolamo Saccheri

De hecho no fue sino hasta 1733 cuando fue publicada la primera demostración del postulado de las paralelas. En dicho año, el padre jesuita italiano Girolamo Saccheri (1667-1733), publicó una obra sobre lógica, estaba fascinado por el poderoso método de reducción al absurdo y concibió la idea de aplicarlo a una investigación del postulado de las paralelas, en el cuál utilizó un cuadrilátero ABCD (Fig.5.14) en el que AD = BC y además, con ángulos ∡DAB y ∡ CBA rectos.

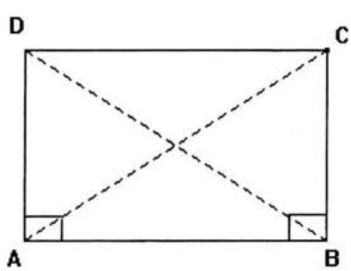


Fig. 5.14 Cuadrilátero de Saccheri.

Para comprender la siguiente demostración, necesitamos recordar las proposiciónes 16, 17 y 18 de Euclides, de su libro "Los Elementos de Euclides" ; las proposiciónes 16 y 17 se encuentran en la pag.53, y la proposición 18, dice:

Proposición 18.

En un triángulo, el lado más grande subtiende el ángulo más grande, (Fig.5.15).

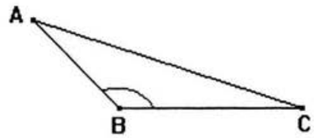


Fig.5.15 El lado AC subtiende el ángulo más grande $\measuredangle$ ABC

Demostración:
Saccheri prueba primeramente que los ángulos $\measuredangle$ADC y $\measuredangle$BCD son iguales y lo hace sin utilizar el quinto postulado, para esto prueba la congruencia de los triángulos ABC y ABD, (los cuales cumplen con LAL), puesto que AD = BC; y esta congruencia implica la congruencia de los triángulos ACD y BCD (los cuales cumplen con LLL), por lo que $\measuredangle$ADC = $\measuredangle$BCD.

Saccheri tenía tres posibles hipótesis para los ángulos $\measuredangle$ADC y $\measuredangle$BCD

a) La hipótesis del ángulo recto ($\measuredangle$ADC = 90º y $\measuredangle$BCD = 90 º)
b) La hipótesis del ángulo obtuso ($\measuredangle$ADC > 90 º y $\measuredangle$BCD >90º)
c) La hipótesis del ángulo agudo ($\measuredangle$ADC < 90º y $\measuredangle$BCD < 90º)

Hipótesis del ángulo obtuso:

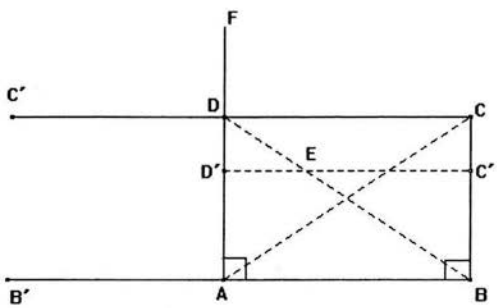


Fig.5.16 $\measuredangle$ADC > 90 º y $\measuredangle$BCD >90º

Si $\measuredangle$ADC > 90º , supongamos que al trazar una recta DE, como se muestra en la figura 5.16 el $\measuredangle$ADE = 90º, entonces $\measuredangle$BAD + $\measuredangle$ ADE = 2R, **contradice la proposición 17**, la cuál dice que 2 ángulos en un triángulo, sumados dos a dos de cualquier forma son menores a 2R; ahora bien, el ángulo $\measuredangle$DAB es opuesto al lado más grande, entonces subtiende el ángulo más grande, pero esto no ocurre puesto que $\measuredangle$ ADE = $\measuredangle$ BAD = 90º, **contradice la proposición 18**;ahora, si prolongamos la recta AD hasta F, en el triángulo ACD, y $\measuredangle$ADC > 90º entonces, el ángulo $\measuredangle$ CDF exterior será menor a 90º , porque $\measuredangle$ ADC + $\measuredangle$ CDF = 2R y $\measuredangle$ CDF < $\measuredangle$ ADC, **contradice la proposición 16**; ahora, prolonguemos las rectas AB y CD a la izquierda a las rectas BB´ y CC´, entonces como $\measuredangle$ADC > 90º, entonces $\measuredangle$ADC´ < 90º, porque $\measuredangle$ADC´+$\measuredangle$ADC = 2R, pero $\measuredangle$BAD + $\measuredangle$DAB´ = 2R, como $\measuredangle$ ADC´ + $\measuredangle$ DAB´ < 2R, entonces las rectas, se cortan y por otro lado como $\measuredangle$BAD = 90 y $\measuredangle$ADC > 90, entonces $\measuredangle$ BAD + $\measuredangle$ ADC > 2R y las rectas no se cortan, i.e. que C´D y B´Á, se cortan y AB y DC no se cortan, es imposible puesto que se esta considerando la infinidad de la recta, y no puede ocurrir que AB y DC, sean más paralelas que C´D y B´A, lo cual contradice el **postulado 2 de Euclides**.

Entonces, si suponía (b) ó (c) se encontraba en una contradicción, y esto implicaba que la hipótesis que valía era la (a) y así quedaría probado el quinto postulado. Ahora con la hipótesis del ángulo obtuso como ya demostramos, llegó a una contradicción del postulado 2 y las proposiciones 16, 17 y 18 de Euclides, y con la hipótesis del ángulo agudo, esto era mucho más difícil, después de obtener concienzudamente muchos de los teoremas ahora clásicos, de la llamada geometría no euclideana, nunca pudo llegar a una contradicción. Si el hubiera admitido que había una contradicción en esta última hipótesis o admitido su incapacidad por hallar una, indudablemente se le hubiera acreditado el descubrimiento de la geometría no euclidiana.

Parece que poco después de la publicación de la pequeña obra de Saccheri se retiró repentinamente del mercado, con el resultado de que sus esfuerzos tuvieron poco efecto en sus contemporáneos.

5.4.3 Intento de demostración del quinto postulado de Euclides por Jhoan Heinrich Lambert.

Treinta y tres años después de la publicación de Saccheri, Jhoan Heinrich Lambert (1728- 1777), de Alemania escribe una investigación semejante titulada "La teoría de las paralelas", que sin embargo no se publicó sino hasta once años después de su muerte, en la cual propone un cuadrilátero que contenía tres ángulos rectos que equivale a la mitad de un cuadrilátero de Saccheri como su figura fundamental.(Fig.5.17)

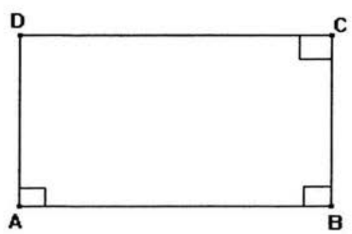


Fig. 5.17 Cuadrilátero de Lambert

Lambert propone, al igual que Saccheri, tres hipótesis para el ángulo D, que son equivalentes a las hipótesis de Saccheri; es decir, el ángulo D podía ser recto, agudo u obtuso y encuentra resultados equivalentes a los que encontró Saccheri.

Tanto Saccheri como Lambert encontraron resultados muy importantes que enunciaremos a continuación:

La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es menor, igual o mayor que 2 ángulos rectos, en la hipótesis del ángulo agudo, recto u obtuso respectivamente; y luego, además, que la deficiencia por debajo de los dos ángulos rectos, en la hipótesis del ángulo agudo o el exceso por encima de dos ángulos rectos, en la hipótesis del ángulo obtuso, es proporcional al área del triángulo.

La primera parte la demostraremos, en el siguiente teorema:

Teorema 5.4.4 (Saccheri- Lambert). La suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es menor que 2 ángulos rectos, en la hipótesis del ángulo obtuso.

Demostración:

Lambert prueba que la hipótesis del ángulo agudo implica que el área de un triángulo es proporcional al defecto del mismo, es decir, el área de un triángulo esta dada por $A = k\,(180° - (\alpha + \beta + \gamma))$.

Definiendo el defecto de un triángulo como la diferencia entre 180° y la suma de los ángulos interiores del triángulo, es decir, $\delta = 180° - (\alpha + \beta + \gamma)$, de donde α, β y γ son los ángulos del triángulo y δ el defecto.

He aquí su demostración:

Sea ABC un triángulo y D un punto en la extensión de BC por C (Fig.5.18).

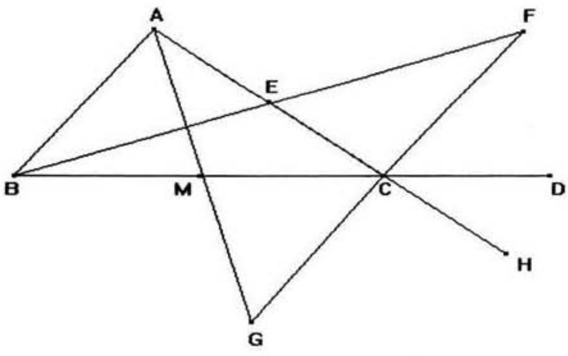


Fig.5.18 $\measuredangle ACD > \measuredangle BAC$ y $\measuredangle ACD > \measuredangle ABC$.

Demostración:

1. Se quiere demostrar que $\measuredangle ACD > \measuredangle BAC$ y que $\measuredangle ACD > \measuredangle ABC$.
2. Sea E el punto medio de AC, trazamos BE y la prolongamos hasta encontrar F tal que BE = EF.
3. Como AE = EC, BE = EF y $\measuredangle AEB = \measuredangle CEF$, entonces los triángulos AEB y CEF son congruentes (por que cumplen con LAL).
4. Por lo que $\measuredangle BAE = \measuredangle FCE$
5. Ahora, como los ángulos $\measuredangle ACD > \measuredangle FCE$ entonces por 4, $\measuredangle ACD > \measuredangle BAC$.
6. Como los ángulos $\measuredangle ACD$ y $\measuredangle BCH$ son iguales, podemos realizar la misma construcción, obteniendo que $\measuredangle ACD > \measuredangle ABC$

Explicación de la demostración anterior:

Como $\measuredangle ACD > \measuredangle BAC$ y $\measuredangle BCH > \measuredangle ABC$, pero $\measuredangle ACD + \measuredangle BCH + \measuredangle ACB + \measuredangle DCH = 2R$ y $\measuredangle ACB = \measuredangle DCH$, entonces: $\measuredangle ABC + \measuredangle ACB + \measuredangle BAC < 2R$.

Lambert, observó la semejanza de la geometría que sigue la hipótesis del ángulo obtuso a la geometría esférica, donde el área del triángulo es proporcional a su exceso esférico y conjeturo que la geometría de la hipótesis del ángulo agudo, podía tal vez verificarse sobre una geometría esférica; sus conclusiones fueron indefinidas y no satisfactorias, lo que fue el motivo de que su trabajo nunca fuera publicado durante su vida.

5.4.5 Intento de demostración del quinto postulado de Euclides por Adrien-Marie Legendre

Un tercer esfuerzo distinguido, quizás, el más notable de los últimos intentos para demostrar el postulado de las paralelas de Euclides por el método de reducción al absurdo fue ensayado, durante un largo período de años, por el eminente analista ítalo-frances Adrien-Marie Legendre (1752-1833).Sus investigaciones al respecto, se dieron a conocer en una publicación en 1833.

Legendre intentó probar el quinto postulado, utilizando reducción al absurdo, analizó la suma de los ángulos interiores de un triángulo, y tenía tres posibles hipótesis:

a) Igual a dos ángulos rectos.
b) Mayor a dos ángulos rectos.
c) Menor a dos ángulos rectos.

Al suponer que la suma de los ángulos interiores de un triángulo, era mayor a dos rectos, encontró una contradicción, pero al suponer que la suma era menor que dos ángulos rectos, procedió de la siguiente manera:
Supongamos que en el Δ ABC la suma de los ángulos interiores es menor que dos rectos, entonces podemos decir que la suma de los ángulos del triángulo es:
$180^{o} - \alpha$, donde α es el defecto del triángulo. Construímos el triángulo ABC y CBD (Fig.5.19) de forma tal que los ángulos $\measuredangle$ BCD y $\measuredangle ABC$ sean iguales, además, los segmentos CD y AB también sean iguales, y unimos B con D. Así los triángulos ABC y CBD son congruentes y para ambos, la suma de los ángulos interiores es $180^{o} - \alpha$.

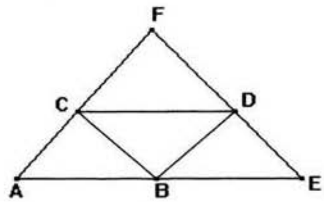


Fig.5.19

Trazamos una línea por D que intersecte las líneas AB y AC en E y F respectivamente formando los triángulos BDE y CDF (Fig.5.19). Ahora, como la suma de los ángulos interiores de un triángulo no es mayor que 180, se tiene que la suma de los ángulos de los cuatro triángulos, sería 720 - 4α, pero no es mayor que 720 -2α, pero como la suma de los ángulos en B es 180, lo mismo pasa con los ángulos en C y en D, se tiene que la suma de los ángulos interiores en el triángulo AEF, no es mayor que 180º - 2α es decir , la diferencia para 720 -2α, entonces el defecto del triángulo AEF es por lo menos 2α, mientras que el defecto del triángulo original ABC es α y así tenemos una construcción que nos permite, por lo menos, duplicar el defecto de un triángulo.

Aplicando esta construcción al triángulo AEF, podemos encontrar un triángulo cuyo defecto sea, por lo menos 4α, y repitiendo esta construcción un número suficiente de veces, podemos encontrar un triángulo cuyo defecto sea arbitrariamente grande, pero por la propia naturaleza del defecto, éste debe ser menor que 180, por lo que se había encontrado una contradicción en suponer que la suma de los ángulos interiores en un triángulo es menor que dos ángulos rectos.

Todos los argumentos de, ésta demostración son correctos, pero Legendre supuso que siempre es posible trazar la línea por D que intersecta a las líneas AB y AC pero ésta es, nuevamente, una equivalencia del quinto postulado.

5.5 El descubrimiento de las Geometrías no Euclidianas.

Una de las consecuencias más interesantes del quinto postulado se dio en el siglo XIX, sus principales creadores, fueron el matemático alemán Johann Carl Friedrich Gauss, el matemático rumano János Bolyai y el matemático ruso Nikolai Ivanovich Lobachevsky; después de los muchos intentos por probar el quinto postulado, se propuso que podría existir otra geometría, en la cual el quinto postulado no se cumpliera, o bien que el postulado de las paralelas era independiente del resto de los postulados y no podía deducirse de ellos. Estos matemáticos plantearon el tema en la forma de Playfarir del postulado de las paralelas, considerando tres posibilidades:

Por un punto dado que no esté en una recta pueden trazarse más de una, o únicamente una, o ninguna paralela a otra dada, estas situaciones son equivalentes, respectivamente, a la hipótesis del ángulo agudo, recto u obtuso, estos tres matemáticos realizaron independientemente extensos desarrollos geométricos y trigonométricos de la hipótesis del ángulo agudo.

En una famosa conferencia el gran matemático, Bernhard Riemann (1826-1866) quien en su tesis de graduación demostró contrariamente a lo que se había supuesto en todas las demostraciones anteriores en las cuales suponían la infinidad de la recta y admitiendo simplemente que era indefinida, entonces, con algunos ajustes a los postulados restantes, se podría desarrollar otra geometría no euclideana. A este trabajo debemos una considerable generalización del concepto del espacio que ha conducido, en épocas más recientes, a la teoría extensa e importante de los espacios abstractos; parte de esta teoría se ha encontrado aplicación a la teoría física de la relatividad.

Algunos de los nombres que se le dieron a esta nueva geometría, fueron geometría anti, euclidiana, geometría astral, geometría imaginaria y geometría no euclidiana, siendo éste el último nombre que se utiliza hasta nuestros días.

Una aplicación de los teoremas anteriores, que consideramos importante es la del Teorema de las paralelas escrito por Euclides, esta a diferencia que la demostrada en 3.1.1 utilizamos paralelismo y es la proposición 18 del libro de Euclides titulado La nueva Geometría y dice así:

5.6 Teorema de las rectas paralelas.

Si tres o más paralelas son cortadas por una transversal, de tal manera que sus intersecciones en ésta sean iguales, las intersecciones de cualquier otra transversal también son iguales.

Sea AB, CD, EF, tres rectas paralelas cortadas por una transversal en los puntos P,Q y R respectivamente ,tal que PQ= QR , XYZ es la segunda línea que corta a la recta AB en el punto X,CD en Y y EF en Z, (Fig.5.20).

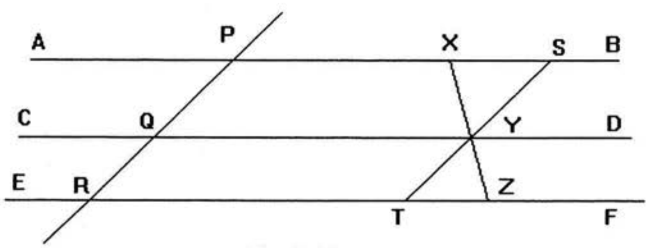


Fig. 5.20

Demostración:

1. Debemos probar que: XY = YZ.
2. Tracemos por el punto Y, una recta paralela a PR, que corte a AB en el punto S y a EF
   en el punto T.
3. Entonces PQYS y QRTY, son cuadriláteros con lados paralelos.
4. Por lo tanto PQ = SY, y QR = YT por propiedades de paralelismo
5. Pero PQ = QR (por hipótesis)
6. Por lo tanto: SY = YT
7. Ahora, en los triángulos XYS y ZYT, SY = YT

8. $\measuredangle XYS = \measuredangle ZYT$, (por ser opuestos por el vértice)
9. $\measuredangle YSX = \measuredangle ZTY$, (por ser ángulos alternos internos formados entre líneas paralelas AB y EF, cortados por XZ)
10. Por lo tanto: $\Delta XYS \cong \Delta ZYT$, (cumplen con ALA)
11. Por lo tanto: XY = YZ.

Capítulo 6.

6.1 Cuadriláteros inscritos en la circunferencia.

En este capítulo iniciaremos con un repaso de los diferentes sistemas de medida de la circunferencia y sus rectas interiores principales; también veremos algunos teoremas sobre los ángulos inscritos en la misma.

La medida de los ángulos dentro de la circunferencia nos conducirá al estudio de los cuadriláteros dentro de la circunferencia i.e. a los cuadriláteros cíclicos, y como aplicación demostraremos el Teorema de Ptolomeo y lo utilizaremos para la demostración del Teorema de Pitágoras.

6.1.1 Sistema sexagesimal.

La circunferencia se divide en 360 medidas iguales (llamadas grados), y cada parte se divide en 60 partes iguales (llamados minutos), y éstas a su vez se dividen en 60 partes iguales (llamadas segundos), así:

Medida de la circunferencia = 360^{o} , $1^{o} = 60'$ y 1min.= $60''$

6.1.2 Sistema Circular.

Otro sistema de medida es aquel en el que a los ángulos les llamamos radianes, puesto que la medida de su arco r, es igual al radio de la circunferencia. (Fig.6.1)

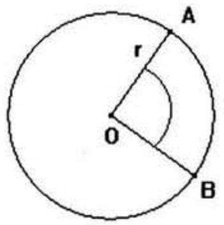


Fig.6 .1 la longitud de arco $\cap AB$ es igual a r y $\measuredangle AOB$ = 1 radian

La equivalencia con el sistema anterior, es que la medida de la circunferencia es de 6.283185307 radios es decir 2Π radianes en donde Π = 3.141592654 diámetros

Por otro lado la medida de un radian es:

$$1R = \frac{360^{o}}{6.283185307} = 57^{o}\,17'\,44''$$

y la medida de un grado es:

$$1^{o} = \frac{6.283185307}{360^{o}} = 0.017453292 \text{ radianes.}$$

6.1.3 Rectas y ángulos dentro de la circunferencia.

Daremos algunas definiciones de las líneas, ángulos y medida de los ángulos principales dentro de la circunferencia, las cuales nos ayudaran a comprender las relaciones entre sus ángulos.

Secante: es la recta que corta a la circunferencia en dos puntos, y no pasa por el centro.(**s**) (Fig.6.2)

Diámetro: es la recta que corta a la circunferencia en dos puntos y pasa por el centro, (**D**).

Radio: es la recta que parte del centro a cualquier punto de la circunferencia, (**r**).

Angulo central: el que tiene su vértice en el centro y sus lados son radios, (**ac**).

Angulo inscrito: el que tiene su vértice en la circunferencia, y sus lados son secantes, (ai).

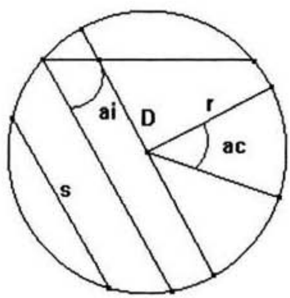


Fig.6.2

6.1.4 Medida de los ángulos dentro de la circunferencia.

Medida de un ángulo central: es igual a la medida de su arco correspondiente.

En el siguiente teorema demostraremos que la medida de un ángulo inscrito, no cambia para las diferentes posiciones de éste ángulo con respecto al centro del círculo.

Teorema 6.1.5 Todo ángulo inscrito en un círculo tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.

Sea B un ángulo inscrito en un círculo cuyo centro es O, y sea AC el arco comprendido entre los lados del ángulo.

Caso 1.

El centro O se encuentra sobre uno de los lados del ángulo ∢B, (Fig.6.3).

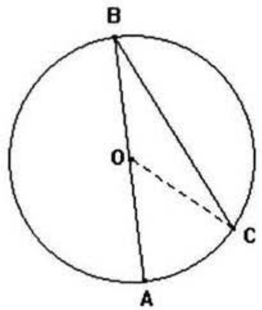


Fig.6.3

Demostración:

1. Tracemos la recta OC.
2. Ahora, el ∢B = ∢ C (puesto que el ΔBOC es isósceles).
   ∢B + ∢ C = ∢AOC (puesto que un ángulo exterior en un triángulo, es igual a la suma de los ángulos interiores opuestos)
3. Entonces, ∢B = ∢AOC
4. De otra manera ∢B = ½∢AOC
5. Pero el ∢AOC es igual a la medida de su ∩ AC (por definición)
6. Entonces, el ángulo ∢B mide la mitad del ∩ AC.

Caso 2.

El centro O se encuentra dentro del ángulo ∢B, (Fig. 6.4)

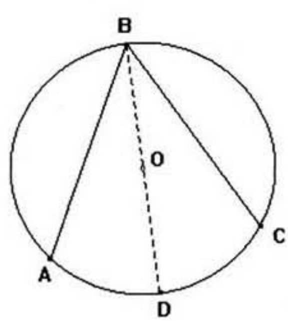


Fig.6.4

Demostración:

1. Trazamos el diámetro BD.
2. El ∢ABD = ½ ∩AD (por el caso 1)
3. El ∢DBC = ½ ∩DC (por el caso 1)
4. Por lo tanto ∢ABD + ∢DBC = ½ (∩ AD + ∩ DC)
5. Pero ∢ABC = ∢ABD + ∢DBC y ∩AC = ∩ AD + ∩ DC.
6. Entonces ∢ABC = ½ ∩AC

Caso 3

El centro O se encuentra fuera del ángulo ∢B,(Fig.6.5)

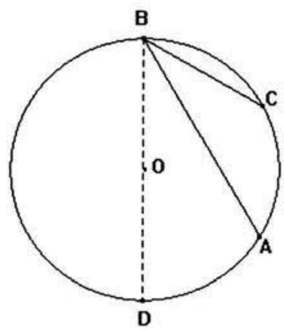


Fig.6.5

Demostración:

1. Tracemos el diámetro BD.
2. El ∢DBC = ½ ∩DC (por el caso 1)
3. El ∢DBA = ½ ∩DA (por el caso 1)
4. Por lo tanto ∢DBC - ∢DBA = ½ (∩ DC - ∩ DA).
5. Pero ∢ABC = ∢DBC - ∢DBA y ∩AC = ∩ DC - ∩ DA.
6. Entonces ∢ABC = ½ ∩AC.

Entonces hemos demostrado que: Todo ángulo inscrito en un círculo mide la mitad del arco comprendido entre sus lados.

Los siguientes Teoremas 6.1.6 y 6.1.7 se demuestran fácilmente con el Teorema 6.1.5 para ángulos inscritos en una circunferencia.

Teorema.6.1.6 En un círculo, los ángulos colocados en un mismo arco son iguales entre sí.

Sea ABDE un círculo y BAD y BED dos ángulos colocados en el mismo arco BD, (Fig.6.6)

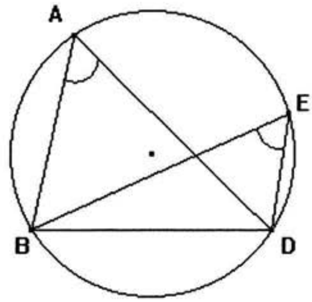


Fig.6.6 Los ∢BAD y ∢BED son iguales.

Demostración:

1. El ∢BAD = ½ ∩BD (por Teorema 6.1.5)
2. El ∢BED = ½ ∩BD (por Teorema 6.1.5)
3. Entonces ∢BAD = ∢BED

Teorema 6.1.7 Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia, es igual a un recto.

Sea ACDBE, un círculo en el cual, se subtienden ángulos inscritos ∢C, ∢D y ∢E, (Fig.6.7) sobre la recta más grande que pasa por el centro.

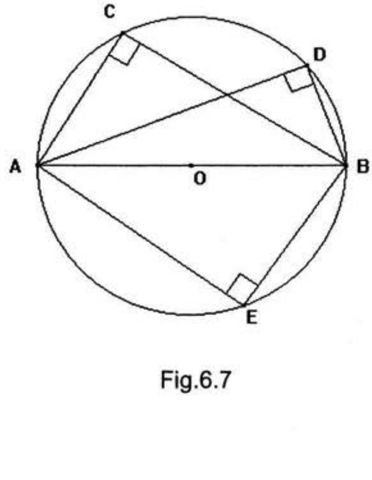


Fig.6.7

Demostración:

1. Sabemos que $\sphericalangle C = \sphericalangle D = \sphericalangle E$ (por el Teorema 6.1.6).
2. Entonces, veamos al segmento AB como un ángulo central $\sphericalangle AOB$ de lados colineales.
3. El ángulo $\sphericalangle AOB = \cap\, AB = 180^o$.
4. Los ángulos $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$ y $\sphericalangle E$ miden la mitad del arco AB (por Teorema 6.1.5)
5. Entonces $\sphericalangle C = \sphericalangle D = \sphericalangle E = 90^o$

6.2 Cuadriláteros cíclicos.

A un conjunto de puntos, que estén todos en una misma circunferencia, se les llama puntos concíclicos. Un cuadrilátero cuyos vértices son concíclicos le llamamos cuadrilátero cíclico.

El siguiente Teorema 6.2.1 es una consecuencia del Teorema anterior 6.1.7

Teorema. 6.2.1 Los ángulos opuestos de todo cuadrilátero cíclico son suplementarios; y recíprocamente, si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son suplementarios, el cuadrilátero es cíclico.

Demostración:

Sea ABGD un círculo y en el mismo el cuadrilátero ABGD, (Fig.6.8)

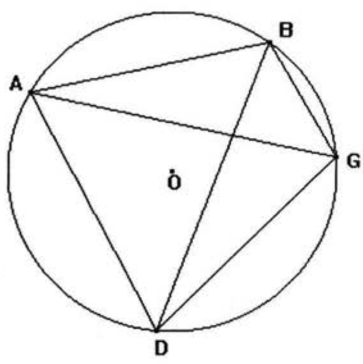


Fig.6.8

1. Tracemos las rectas que van del punto A al punto G, y la que va del punto B al punto D.
2. En el triángulo AGB, $\sphericalangle AGB + \sphericalangle GBA + \sphericalangle BAG = 2$rectos.
3. Pero $\sphericalangle BAG = \sphericalangle BDG$ porque están en el mismo segmento BG.

4. El $\measuredangle$ AGB = $\measuredangle$ ADB por estar en el mismo segmento AB.
5. El $\measuredangle$ ADG = $\measuredangle$BAG + $\measuredangle$AGB
6. Entonces: $\measuredangle$GBA + $\measuredangle$ BAG + $\measuredangle$AGB = $\measuredangle$ GBA + $\measuredangle$ADG (sumamos a la igualdad anterior el $\measuredangle$GBA).
7. Pero, $\measuredangle$GBA + $\measuredangle$AGB + $\measuredangle$BAG = 2rectos.
8. Entonces: $\measuredangle$GBA + $\measuredangle$ADG = 2rectos.
9. De la misma manera se demuestra que $\measuredangle$BAD + $\measuredangle$BGD = 2rectos.
10. Entonces, los ángulos opuestos de cualquier cuadrilátero inscrito en un círculo son suplementarios.

Demostraremos ahora, el recíproco del Teorema 6.2.1 i.e. que si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son suplementarios, el cuadrilátero es cíclico.

Sea ABCD un cuadrilátero tal que, $\measuredangle$A + $\measuredangle$ C = 180, $\measuredangle$ B + $\measuredangle$ D = 180, (Fig.6.9).

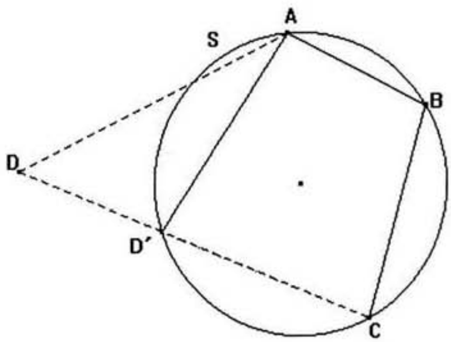


Fig. 6.9

Queremos demostrar que existe un círculo, que pasa por los vértices A,B,C,D.

Demostración:

1. Sabemos que, dados tres puntos no colineales, existe un círculo que pasa por esos tres puntos (por 3.1.4)
2. Supongamos que el círculo S, que pasa por A,B y C no pasa por el punto D.
3. Demostraremos que éste círculo, también contiene al punto D.
4. Sea D´ la intersección de la recta CD, con el círculo S.
5. El cuadrilátero ABCD´, es cíclico y $\measuredangle$B + $\measuredangle$ D´ = 180,
6. Pero $\measuredangle$B+ $\measuredangle$ D = 180 (por hipótesis)
7. De 5 y 6, se tiene que: $\measuredangle$D = $\measuredangle$D´
8. Implica que AD es paralela AD´
9. Como A es un punto en común, entonces, D= D´.
10. Por lo tanto S pasa también por D.

La demostración de éste teorema y su inverso caracterizan a los cuadriláteros cíclicos por sus ángulos.

Finalmente como consecuencia del teorema anterior demostraremos el teorema de Ptolomeo.

6.2.2 Teorema de Ptolomeo: El producto de las diagonales de un cuadrilátero cíclico, es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.

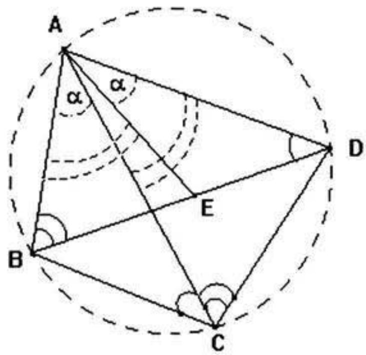


Fig.6.10

Demostración:

1. Trazamos AE tal que el < BAC = < EAD. (Fig.6.10)
2. Se tiene que $\Delta ABC \approx \Delta AED$ y $\Delta ABE \approx \Delta ACD$.
3. Entonces $BC \cdot DA = CA \cdot ED$ y $AB \cdot CD = AC \cdot BE$
4. De donde $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$

Recíproco del Teorema 6.22

Sea ABCD un cuadrilátero en el que: AB CD + BC DA = BD AC (Fig. 6.11)

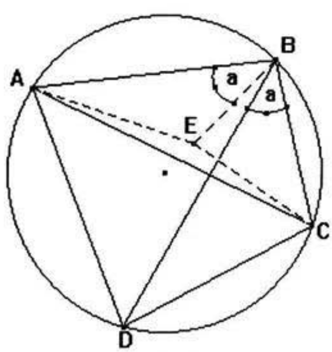


Fig.6.11

Demostración:

1. Tracemos BE tal que:

$$\text{i) } \measuredangle ABE = \measuredangle DBC = a$$

$$\text{ii) } \frac{AB}{BE} = \frac{DB}{BC}$$

2. Entonces: $\Delta ABE \approx \Delta DBC$ de i) y ii)
3. Implica que:

$$\frac{AB}{DB} = \frac{EB}{BC} = \frac{EA}{CD}$$

4. De 3 y $\measuredangle ABD = \measuredangle EBC$ implica que: $\Delta ABD \approx \Delta CBE$ entonces:

$$\frac{AB}{EB} = \frac{DB}{BC} = \frac{DA}{CE}$$

5. Entonces de 3 y de 4, se tiene que:

$$AB\ CD = DB\ EA$$
$$BC\ DA = DB\ CE$$

6. Entonces $AB\ CD + BC\ DA = DB\ (CE + EA)$

7. Por la hipótesis y por 6 $(CE + EA)DB = BD\ AC$

8. Por lo tanto $AC = AE + EC$

9. Entonces, E es un punto de AC.

10. Entonces ABCD queda de este modo,(fig. 6.12) y trazando la circunferencia por A, B, y C, ésta pasará por D; en caso contrario, el $\measuredangle BDC \neq \measuredangle CAB$! contradicción.

11. Por lo tanto: ABCD es cíclico.

Vimos que el teorema de Ptolomeo funciona para cuadriláteros cíclicos.¿Pero que pasa si el cuadrilátero es cíclico cruzado?

6.2.3 Teorema de Ptolomeo para cuadriláteros cíclicos cruzados.

El cuadrilátero es cruzado o convexo, (Fig.6.12)

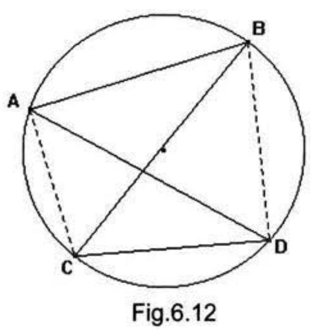


Fig.6.12

Demostración:

1. Aplicando el Teorema de Ptolomeo en este caso tenemos que:

   AB DC + BD AC = AD BC

2. De donde llegamos a:

   AB CD + AD BC = AC BD

3. Por lo tanto un cuadrilátero es cíclico convexo, si " El producto de las diagonales, es igual a la suma de los productos de los lados opuestos "

Entonces, el teorema de Ptolomeo, funciona para cuadriláteros cíclicos, convencionales o convexos.

Aplicaremos ahora el teorema de Ptolomeo para demostrar el Teorema de Pitágoras.

6.2.4 Teorema de Pitágoras (por Ptolomeo)

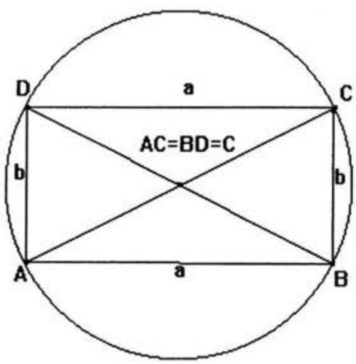


Fig.6.13

Demostración:

1. Inscribimos el rectángulo ABCD en una circunferencia con diámetro AC = BD (Fig.6.13)
2. Entonces AB CD + BC AD = AC BD
3. Significa que: $a^2 + b^2 = c^2$

Capítulo 7

Estudiaremos en este capítulo las relaciones numéricas que existen entre los lados y los ángulos de un triángulo; lo haremos estudiando al triángulo rectángulo, utilizaremos algunos conceptos estudiados en el capítulo 6 sobre la medida de los diferentes ángulos inscritos en la circunferencia, para definir el seno, coseno y tangente en el circulo trigonométrico de radio 1 y deduciremos fácilmente las leyes de los senos y cosenos y los valores de algunos ángulos utilizados comunmente en trigonometría; finalizaremos con la ley de los senos generalizada.

7.1 Funciones trigonométricas

La trigonometría estudia las relaciones numéricas que existen entre los lados y los ángulos del triángulo.

Sabemos que todo triángulo se puede descomponer en dos triángulos rectángulos; el análisis de las relaciones que existen entre las medidas de los ángulos y lados de cualquier triángulo, lo haremos estudiando las relaciones en triángulos rectángulos. Definiremos a continuación, las funciones seno, coseno y tangente de un ángulo.

7.1.1 Definición del seno de un ángulo.

Sea ABC un triángulo rectángulo (Fig.7.1). Sea α uno de los ángulos no rectos del triángulo.

Definimos seno del $\measuredangle$ α como:

$$\text{Sen}\,\alpha = \frac{BC}{AC}$$

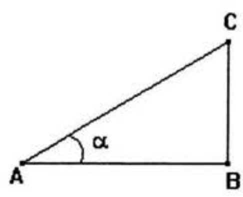


Fig.7.1

Esto es, a cada ángulo $\measuredangle$ α, entre 0° y 90° le asociamos un número

$$\text{Sen}\,\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Al asociarle a cada $\measuredangle\alpha$ un número que depende de dos de los lados del triángulo (hipotenusa y cateto opuesto), debemos asegurarnos de que si cualquier otro triángulo rectángulo tiene uno de sus ángulos igual al $\measuredangle\alpha$, le asociemos el mismo número (sen α).

7.1.2 Problema 1.

¿Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo igual, el seno de ese ángulo será también igual?

Supongamos por ejemplo, que tenemos dos triángulos rectángulos, ABC y A´B´C´ tales que $\measuredangle$ A = $\measuredangle$A´ = $\measuredangle$ α, (Fig.7.2) y tales que las longitudes de sus lados respectivos sean diferentes.

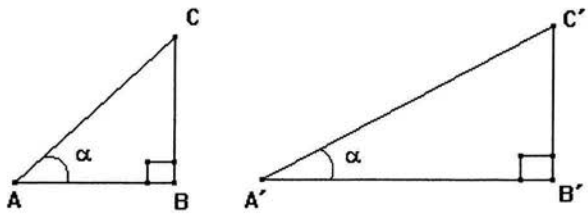


Fig.7.2

Ya que $\measuredangle$ α, es igual en los dos triángulos, es de esperarse que el sen $\measuredangle$α sea igual en los dos triángulos, ¿será cierto?, veamos:

Demostración:

1. Los triángulos, ABC y A´B´C´ tienen:
   $\measuredangle$ A = $\measuredangle$ A´ = $\measuredangle$ α y $\measuredangle$ ABC = $\measuredangle$ A´B´C´ = 1 recto

2. Por lo tanto $\measuredangle$ BCA = $\measuredangle$ B´C´A´ y los dos triángulos son semejantes.
3. Entonces :
$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$
4. Es lo mismo que: $$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$
5. De donde $$\text{sen}\ \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{C'A'}$$
6. Con lo cual queda demostrado que a cada ángulo $\measuredangle$ α, le estamos asociando un único número sen α.

Veamos ahora si el inverso del problema 1, es cierto en 7.1.3.

7.1.3 Problema 2

¿Será cierto que a cada número sen α le asociamos un único ángulo ∡ α?:

Supongamos que $0° < \alpha < 90°$ y $0° < \beta < 90°$, y $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\beta$. Vamos a demostrar que entonces $∡\,\alpha = ∡\,\beta$.

Construyamos los triángulos rectángulos ABC y A´B´C´, tales que tengan al ∡ α y ∡ β respectivamente como uno de sus ángulos no rectos (Fig.7.3)

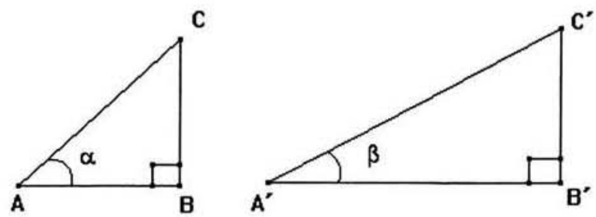


Fig.7.3

Demostración:

1. En el ΔABC, tenemos que: $\text{sen}\,∡\alpha = \dfrac{BC}{AC}$

2. En el ΔA´B´C´, tenemos $\text{sen}\,∡\beta = \dfrac{B'C'}{A'C'}$

3. Por hipótesis $\text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\beta$, esto implica que:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$$

4. Por lo tanto $\dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{AC}{A'C'} = R$ (en este caso R= razón)

5. Ahora como ΔABC y ΔA´B´C´ son rectángulos, por el teorema de Pitágoras:

   en Δ ABC, se tiene que : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

   en Δ A´B´C´, se tiene que: $(A'C')^2 = (A'B')^2 + (B'C')^2$

6. De 5 tenemos que:

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 \quad \text{y} \quad (A'B')^2 = (A'C')^2 - (B'C')^2$$

7. Pero $BC = R\,(B'C')$, $AC = R\,(A'C')$

8. De 6 y 7 $AB^2 = R^2 (A'C')^2 - R^2 (B'C')^2 = R^2 [(A'C')^2 - (B'C')^2]$

y $$\frac{AB^2}{(A'B')^2} = \frac{R^2 [(A'C')^2 - (B'C')^2]}{(A'C')^2 - (B'C')^2} = R^2$$

9. Por lo tanto $$\frac{AB}{A'B'} = R$$

10. Entonces los tres lados de los dos triángulos son proporcionales y en consecuencia son semejantes; por lo tanto $\measuredangle \alpha = \measuredangle \beta$

Del problema 1 y 2 concluimos que si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo igual entonces, el seno de ese ángulo será también igual y visceversa si en dos triángulos rectángulos el seno de un ángulo es igual al seno de un ángulo del otro triángulo, entonces los ángulos son iguales, resumiendo :

$$\measuredangle \alpha = \measuredangle \beta \text{ entonces } \operatorname{sen} \measuredangle \alpha = \operatorname{sen} \measuredangle \beta$$

y también : $\operatorname{sen} \measuredangle \alpha = \operatorname{sen} \measuredangle \beta$, entonces $\measuredangle \alpha = \measuredangle \beta$

7.1.4 Definición de la función coseno y tangente de un ángulo.

Hemos visto que el valor de la razón $\dfrac{\text{Cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$ en un triángulo rectángulo

depende sólo de los ángulos, y para cada ángulo diferente, este valor es diferente.

Entonces, para ángulos entre 0° y 90°, hemos establecido una función seno que a cada ángulo $\measuredangle\alpha$ le asociamos el valor

$$\operatorname{sen}\measuredangle\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

De forma análoga podemos definir otras funciones trigonométricas:

Cos $\measuredangle \alpha$ (coseno del ángulo α) tal que:

$$\operatorname{Cos}\measuredangle\alpha = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

En la figura 7.1, el coseno de un ángulo sería: $\cos \alpha = \dfrac{AB}{AC}$ y

definimos a la tan α (tangente del ángulo α) como:

$$\tan \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{BC}{AB}$$

Las razones seno y coseno respectivamente son:

$$\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \quad \text{y} \quad \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

En un triángulo rectángulo, el valor de las funciones trigonométricas depende solamente del valor de los ángulos. Para ángulos diferentes entre 0° y 90° los valores correspondientes son diferentes(la demostración es análoga a la que dimos para seno).

Por lo tanto, las razones de los lados de un triángulo rectángulo son funciones de los ángulos agudos del mismo.

Es fácil ver que:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

y que $\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$ y $\operatorname{sen} \beta = \cos \alpha$ (Fig. 7.4)

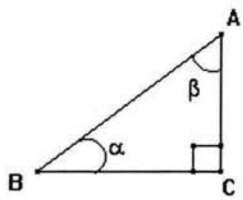


Fig.7.4

Veamos ahora cómo el análisis que hemos hecho del triángulo rectángulo, nos ayuda a encontrar las relaciones que existen entre los lados y ángulos de cualquier triángulo.

7.1.5 Aplicaciones de las funciones trigonométricas.

Supongamos que tenemos un triángulo equilátero ABC de lado 1.Cada ángulo del triángulo es de 60° (Fig.7.5), encontraremos los valores de sen 60°, cos60 ° y tan 60°

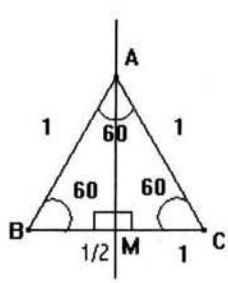


Fig.7.5

1. Por cualquiera de los vértices, A por ejemplo, tenemos la altura AM.
2. Entonces, los triángulos ΔABM y ΔAMC son rectángulos, por lo tanto:

$$\text{Sen } 60^\circ = \frac{AM}{AB} \qquad \text{Cos } 60^\circ = \frac{MB}{AB} \qquad \text{Tan } 60^\circ = \frac{AM}{MB}$$

3. Además, ya que ΔAMB ≅ ΔAMC:

$$BM = MC = \frac{1}{2}$$

4. Por el teorema de Pitágoras:

$$AM^2 = 1^2 - (\quad) = \quad \text{ y } AM = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

5. Por lo tanto sen 60º $= \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cos 60º = $\dfrac{1}{2}$

y tan 60º $= \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

Para encontrar el seno, coseno y tangente de un ángulo de 30º, usamos un triángulo equilátero de lado 1, el ∡BAM = 30º, (Fig.7.5)

Las funciones trigonométricas le asocian a cada ángulo un número, estos números pueden representarse como la longitud de un segmento de la siguiente manera:

7.1.6 Representación geométrica de las funciones seno, coseno y tangente.

Sea O´ un círculo con centro en O y radio OA = 1, (Fig.7.6)

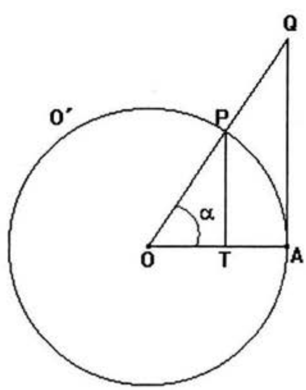


Fig.7.6

Construcción:

1. Tracemos OP tal que $\measuredangle$ AOP $= \measuredangle\ \alpha$.
2. Tracemos por P una perpendicular a OA.
3. Sea T el punto de intersección de ésta recta con OA.
4. Entonces:

$$\text{sen } \measuredangle\alpha = \frac{PT}{OP} = \frac{PT}{1} = PT$$

Quiere decir, que el seno de un ángulo es la longitud vertical de un triángulo inscrito en una circunferencia de radio 1.

$$\text{Cos } \measuredangle\alpha = \frac{OT}{OP} = \frac{OT}{1} = OT$$

Quiere decir, que el coseno de un ángulo es la longitud horizontal de un triángulo inscrito en una circunferencia de radio 1.

5. Ahora, tracemos una paralela a PT por A y sea Q el punto de intersección de OP con ésta recta.

6. Entonces como:

$$\Delta OPT \approx \Delta OQA$$

7. Se tiene que:

$$\frac{PT}{OT} = \frac{QA}{1}$$

8. Entonces:

$$QA = \frac{PT}{OT} = \frac{\text{sen } \measuredangle\alpha}{\cos \measuredangle\alpha} = \tan \measuredangle\alpha$$

Quiere decir, que la tangente de un ángulo es la longitud vertical de un triángulo inscrito en una circunferencia de radio 1, en el que uno de los catetos es igual al radio.

Demostraremos la ley de los senos para triángulos que no contienen un ángulo recto i.e. que son triángulos oblicuángulos.

7.1.7 Ley de los senos para triángulos oblicuángulos.

Sea ABC un triángulo cualquiera y $\measuredangle\alpha$, $\measuredangle\beta$, $\measuredangle\gamma$ los ángulos opuestos de los lados BC, CA, AB respectivamente (Fig.7.7)

Entonces:

$$\frac{BC}{\text{sen } \measuredangle\alpha} = \frac{AC}{\text{sen } \measuredangle\beta} = \frac{AB}{\text{sen } \measuredangle\gamma}$$

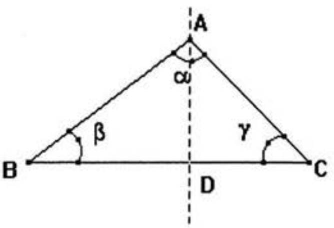


Fig.7.7

Demostración:

1. Tracémos la altura por A y sea D el pie de esta altura.

2. Los triángulos ΔADB y ΔADC son rectángulos y

$$\text{Sen} \measuredangle\beta = \frac{AD}{AB} \qquad \text{sen} \measuredangle\gamma = \frac{AD}{AC}$$

3. Entonces de 2:

$$AD = AB \ \text{sen} \measuredangle\beta, \quad AD = AC \ \text{sen} \measuredangle\gamma$$

4. Por lo tanto

$$AB \ \text{sen} \measuredangle\beta = AC \ \text{sen} \measuredangle\gamma$$

5. Es lo mismo que: $$\frac{AB}{\text{sen} \measuredangle\gamma} = \frac{AC}{\text{sen} \measuredangle\beta}$$

6. Ahora bien, trazando la altura por C, de forma análoga se obtiene que:

$$\frac{AC}{\text{sen} \measuredangle\beta} = \frac{BC}{\text{sen} \measuredangle\alpha}$$

7. Por lo tanto

$$\frac{AB}{\text{sen} \measuredangle\gamma} = \frac{AC}{\text{sen} \measuredangle\beta} = \frac{BC}{\text{sen} \measuredangle\alpha}$$

Con lo cual, queda demostrada la ley de los senos para el caso en que ΔABC, no es triángulo rectángulo.

En el caso de triángulos rectángulos, para la demostración de la ley de los senos, no es necesario trazar las alturas de los lados, la demostración es muy sencilla sabiendo que sen 90º = 1.

7.1.8 Ley de los senos para triángulos rectángulos.

Si el triángulo ABC es rectángulo; $\measuredangle \Upsilon = 90^{\circ}$ (Fig.7.8)

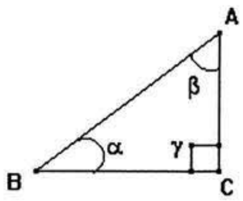


Fig.7.8

Demostración:

1. $\text{Sen } \measuredangle \alpha = \dfrac{CB}{AB} \Rightarrow AB = \dfrac{CB}{\text{sen } \measuredangle \alpha}$

2. $\text{Sen } \measuredangle \beta = \dfrac{AC}{AB} \Rightarrow AB = \dfrac{AC}{\text{sen } \measuredangle \beta}$

3. Entonces $\dfrac{CB}{\text{sen } \measuredangle \alpha} = \dfrac{AC}{\text{sen } \measuredangle \beta} = AB$

   pero $\measuredangle \alpha = 90^{\circ} \Rightarrow \text{sen } \measuredangle \gamma = \text{sen } 90^{\circ} = 1$

4. Por lo tanto $\dfrac{CB}{\text{sen } \measuredangle \alpha} = \dfrac{AC}{\text{sen } \measuredangle \beta} = \dfrac{AB}{\text{sen } \measuredangle \gamma}$

Por lo tanto la relación también se cumple cuando Δ ABC es rectángulo.

Concluimos entonces que: la ley de los senos se cumple para cualquier triángulo,

Demostraremos ahora la ley de los cosenos para triángulos oblicuángulos y posteriormente para triángulos rectángulos.

7.1. 9 Ley de los cosenos para triángulos oblicuángulos.

En un triángulo Δ ABC, que no contiene un ángulo recto (Fig.7.9) donde $\measuredangle\alpha$, $\measuredangle\beta$, $\measuredangle\gamma$ son los ángulos opuestos a los lados BC,CA y AB respectivamente , se cumple la siguiente relación:

$$(AC)^2 = (AB)^2+(BC)^2 - 2\, AB\text{-} BC \cos \measuredangle\beta$$
$$(BC)^2 = (AB)^2 +(AC)^2 - 2\, AB\text{-} AC \cos\measuredangle\alpha$$
$$(AB)^2 = (AC)^2+(BC)^2 - 2\, AC \text{-}BC \cos\measuredangle\gamma$$

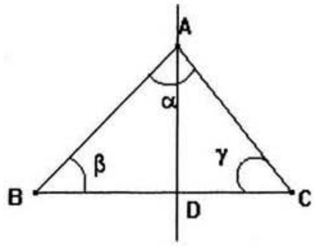


Fig.7.9

Demostración:

1. Tracemos la altura por A y sea D el pie de ésta altura.
2. Consideremos el triángulo rectángulo Δ ACD; por el teorema de Pitágoras:

$$(AC)^2 = (AD)^2 + (DC)^2$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{AD}{AB} \quad \Rightarrow \quad AD = AB \operatorname{sen} \beta$$

$$\cos \beta = \frac{BD}{AB} \quad \Rightarrow \quad BD = AB \cos \beta$$

3. Ahora DC = BC - BD = BC - AB cos β

4. Entonces:

$$(AC)^2 = (AB)^2 \operatorname{sen}^2 \beta + (BC - AB \cos \beta)^2$$
$$(AC)^2 = (AB)^2 \operatorname{sen}^2 \beta + (BC)^2 - 2AB\ BC \cos \beta + (AB)^2 \cos^2 \beta$$
$$(AC)^2 = (AB)^2 (\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta) + (BC)^2 - 2AB\ B \cos\beta$$
$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 - 2AB\ BC \cos \beta \qquad (1)$$

porque $\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1.$

5. Si trazamos la altura por C y por B, análogamente se demuestra que:

$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2AB\ AC \cos \alpha \qquad (2)$$

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2AC\ BC \cos \gamma \qquad (3)$$

7.1.10 Ley de los cosenos para triángulos rectángulos.

Demostración:

1. Si ABC es un triángulo rectángulo, con un ángulo $\measuredangle \gamma = 90^o$
2. Las igualdades (1) y (2) de 7.1.9 quedan igual, y la igualdad (3) quedaría así:

$$(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$$

3. Porque $\cos \measuredangle\gamma = \cos 90^o = 0 \Rightarrow 2AC\ BC \cos \measuredangle \gamma = 0$

La ley de los cosenos nos da una relación entre ángulos y lados de un triángulo.

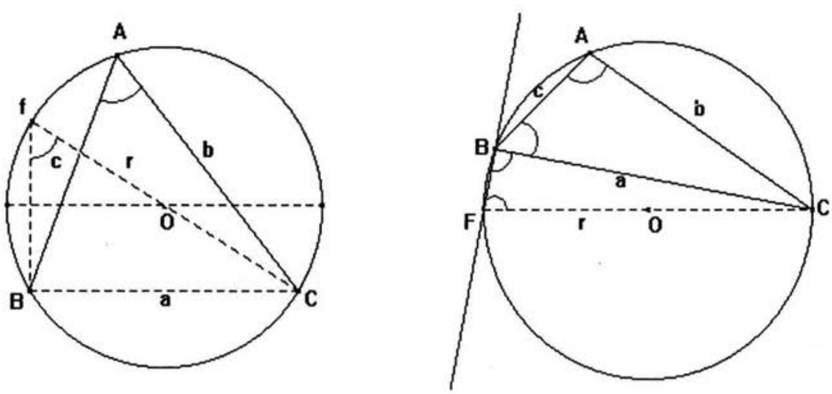
La siguiente demostración que expondremos, es la ley de los senos generalizada, es una extensión de la ley de los senos 7.1.7

7.1.11 Teorema de los senos generalizado

Para un triángulo dado ABC la circunferencia circunscrita r, se tiene que:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2r$$

Dado un triángulo ΔABC, cicunscribamos alrededor de él una circunferencia con centro en O y radio R unidades, (Fig.7.10).



a) b)

Fig. 7.10 triángulo con circunferencia circunscrita con centro en O y radio r.

Demostración:

1. Tracemos el diámetro CF con centro en O y una cuerda BF, y la recta que une al punto B con C, llamémosle a.
2. Entonces en ambos casos de la figura 7.10 el ∡ CBF, es un ángulo recto (por estar inscrito en la semi-circunferencia)
3. Por lo tanto en ambas figuras

$$\text{sen } F = \frac{a}{CF} = \frac{a}{2r}$$

4. Tracemos el ∡A en el arco BC.
5. Entonces el ∡F = ∡A (Fig. 7.10 a), (por estar inscritos en el mismo arco de la circunferencia)
6. Ahora, el ∡F = 180º - ∡ A (Fig. 7.10 b) (porque los ángulos opuestos en un cuadrilátero son suplementarios).
7. Como sen Θ = (sen (180º - Θ))
8. Entonces sen ∡ F = sen ∡A en ambas figuras.(aunque ya habíamos demostrado que si los ángulos son iguales de 4, entonces el seno de esos ángulos, también es igual)
9. Por lo tanto, en ambos casos $\text{sen } \measuredangle A = \frac{a}{2r}$
10. Es lo mismo que $\frac{a}{\text{sen } \measuredangle A} = 2r$
11. Aplicando el mismo procedimiento para los otros ángulos del ΔABC, tenemos que:

$$\frac{b}{\text{sen } \measuredangle B} = 2r \qquad \frac{C}{\text{sen } \measuredangle C} = 2r$$

12. Igualando las tres ecuaciones obtenemos que:

$$\frac{a}{\text{sen } \measuredangle A} = \frac{b}{\text{sen } \measuredangle B} = \frac{C}{\text{sen } \measuredangle C} = 2r$$

Conclusiones

Para obtener una conclusión acerca de este trabajo que sea verdadera y suficiente por sí sola, debo agradecer a todos los matemáticos antiguos y modernos que me permitieron transcribir sus conocimientos e ideas.

En el presente trabajo de origen formativo, el estudiante debió familiarizarse con el uso de la regla y el compás, recordando inicialmente conocimientos tal vez olvidados, y posteriormente desarrollando la habilidad para pensar y dibujar; incrementando su capacidad deductiva a través del razonamiento deductivo, de la demostración en geometría, adquiriendo destreza y el arte de crear ideas, los cuales son uno de los principales valores para la formación del geómetra.

Para tener éxito en geometría, se tiene que estar dispuesto a experimentar, dibujar y ensayar innumerables figuras, para probar lo que suponemos cierto o averiguar lo que es falso.

Así como los geómetras antiguos dieron un gran paso hacia la nueva geometría, nosotros también podemos hacer aportaciones en dicha materia.

Los temas expuestos se pensaron detalladamente para que el alumno que ingresa a la facultad vaya gradualmente descubriendo por si solo, lo que es la geometría y las matemáticas en general i.e. son un conocimiento natural, imaginativo y abstracto basado en un conjunto de proposiciones que se relacionan entre si o bien de manera similar a la geometría de Euclides, que no se relacionan con la geometría moderna pero si con otras geometrías; en matemáticas desde tiempos antiguos uno podía crear sus propios postulados que fueran compatibles entre si; ahora uno fabrica su propia geometría, el requisito es que se comporte de manera aceptablemente en algún espacio conocido o por conocer.

Una ultima observación y siguiendo el ejemplo de nuestros maestros matemáticos; debemos romper reglas, mitos y creencias matemáticas para que se creen los grandes cambios, los cuales puedan revolucionar toda la ciencia en general, y satisfacer a la mente y al espíritu.

Bibliografía

De la "Colección Euclides obras completas" volumen "Elementos de Geometría" libros III, IV y V
Texto griego y traducción española publicado en la Bibliotheca Scriptorim Graecorum et Romanorum Teubneriana
Euclidis Opera Omnia, Lipsae, Vol I 1883; libros I – V; vol II, 1884, llibros V – IX; vol.III, 1886, libro X; vol. IV, 1885,libro XI – XIII.

The thirteen books of Euclid´s Elements and The Works of Archimedes, including The Method, Conics by Apollonius of Perga and introduction to Arithmetic by Nicomachus of Gerasa 300 B.C. translated by Sir, Thomas L. Heath, are reprinted por Cambridge University Press 1980;

H.S.M. Coxeter y S.L. Greitzer
Retorno a la Geometría
Mathematical Assotation of America
Colección: " La tortuga de Aquiles "
DLS-Euler, Editores, 1993
Diseño: Pedro Gómez Puig.

Levi S. Shively, PH.D.
At Introduccion to modern Geometry
1961

Howard Eves
Estudio de las Geometrías vol. I y 2
Union tipográfica editorial hispano americana
1981

George E. Martin
The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane,Intext Educational Publishers,Nueva York.
1975.

Marvin Jay Greeberg
Euclidean and Non-Euclidean Geometries
1920