UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

NOTAS PARA UNA CLASE DE GEOMETRÍA ANALÍTICA.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMATICO

PRESENTA:

ANTONIO GARCÍA FLORES

DIRECTOR DE TESIS:

DR. CARLOS TORRES ALCARAZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2004

VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNMA DE MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
" Notas para una clase de Geometría Analítica "

realizado por Antonio García Flores

con número de cuenta 8103140-7 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Carlos Torres Alcaraz
Propietario	Mat. Guillermo Eduardo Zambrana Castañeda
Propietario	Mat. Julio César Guevara Bravo
Suplente	Mat. Juan Jiménez Krassel
Suplente	Dr. Luis Antonio Rincón Solís

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

MATEMATICAS

Dedicatorias

A la memoria de mi abuela

A mi tía por su amor y cuidado

A Nidia por su gran amor

A mi familia por estar conmigo

A mis amigas de generación
por su amistad y apoyo

A mis exalumnos por que fueron el
motivo de mi trabajo

A la vida por darme la oportunidad
de que se cumpla un sueño más.

Agradecimientos

Agradezco a mi director de tesis Dr. Carlos Torres por su apoyo y compresión antes, durante y al término de mi tesis. Así como también agradezco a mis sinodales Guillermo Zambrana, Julio César Guevara Juan Jiménez y Luis Antonio Rincón por sus correcciones y comentarios.

INTRODUCCIÓN.

Este trabajo tiene una fuerte motivación: ayudar a los alumnos del bachillerato y del primer año de la Universidad a superar las dificultades que enfrentan en el estudio de la Geometría Analítica.

Además de introducir los diversos conceptos de uso corriente en la aplicación de esta materia, el trabajo incluye múltiples ejemplos y ejercicios que aclara los temas y desarrollan las habilidades de los alumnos. Todos estos ejemplos y ejercicios son el resultado de más de 12 años de experiencia en la enseñanza de esta materia.
Estos materiales están organizados de manera que se pueden utilizar, salvo casos especiales, con cierta independencia unos de otros, de modo que pueden servir como lecturas colaterales o de apoyo en un curso regular.
Obviamente, también se puede organizar un curso completo con base en ellos, aunque el espíritu con que fueron escritos no es éste. En otras palabras, esta obra no se debe interpretar como un libro de texto.
La exposición de cada tema parte del supuesto de que el alumno tiene un dominio adecuado de ciertos temas como son: el Álgebra Elemental y la Aritmética entre otras cosas, y que sabe resolver ecuaciones de primer grado, de segundo grado y sistemas de ecuaciones simultaneas.

El texto se integra de la siguiente manera.

Capitulo I Trigonometría Analítica

Partimos del estudio de las relaciones numéricas entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo, y de la resolución de triángulos arbitrarios haciendo uso de leyes de senos y cosenos.
Posteriormente, generalizamos el concepto de ángulo como un giro a lo largo de una circunferencia dando lugar a la medición de ángulos por medio de los de números reales. Esto lleva a definir las funciones circulares y con ello al desarrollo de las identidades trigonométricas. Al final se analizan las gráficas de las funciones trigonométricas así como sus inversas.

Justificación.

Conocer las funciones trigonométricas y sus aplicaciones en la resolución de problemas prácticos, usando conceptos como la ley de los senos y cosenos. Analizar y conocer las gráficas de las funciones trigonométricas a fin de que el alumno tenga los conocimientos básicos de trigonometría analítica que le ayudaran al desarrollo y comprensión de temas de geometría analítica como son: Coordenadas polares, cilíndricas, y esféricas, transformación de coordenadas etc. Así como algunas aplicaciones a la física y al calculo diferencial e integral. El orden seleccionado tiene como propósito que el alumno comprenda la generalización del concepto de ángulo.

Capitulo II Graficación.

Empezamos con la definición del producto cartesiano como preámbulo para introducir los conceptos de función y relación. Se introduce el concepto de gráfica de una relación, se ejemplifica éste con algunos casos y se definen algunas técnicas para trazar la gráfica de una ecuación. Conociendo la relación entre una ecuación y su gráfica, tocamos el problema de la intersección entre dos curvas, el análisis de ellas y la relación que hay entre sus ecuaciones, dependiendo de la posibilidad de resolver el sistema de ecuaciones. Posteriormente, se explica el concepto de lugar geométrico en términos de descripción de condiciones geométricas que satisfacen los puntos de ese lugar, y se ejemplifica la manera de determinar la ecuación del lugar geométrico a partir de la descripción. Por último, generalizamos el concepto de gráfica de una ecuación a tres dimensiones para obtener el concepto de superficie, introduciendo algunos ejemplos y algunas técnicas para hacer su gráfica.

Justificación.

En éste capitulo el alumno conocerá la diferencia entre los conceptos de relación y función y adquirirá la confianza para trazar una gráfica a partir de una ecuación empleando las técnicas vistas en el capitulo, no sólo en el plano sino también en el espacio como una manera de conocer las superficies.
Este conocimiento le servirá al alumno en cursos donde es necesario hacer la gráfica de una ecuación o simplemente un bosquejo de la misma.

Capitulo III Sistemas Coordenados.

En este capitulo se introducen las coordenadas polares que son otro sistema de coordenadas en el plano, y se investiga la relación que tienen con las coordenadas cartesianas. Se definen las técnicas de graficación que son útiles al graficar cualquier ecuación polar. Se ve la diferencia que hay en la intersección de las gráficas en ecuaciones polares y ecuaciones cartesianas dada la naturaleza de las coordenadas polares de un punto. Definimos los conceptos de línea recta, circunferencia y distancia entre dos puntos en coordenadas polares. Finalmente se muestra la rotación en coordenadas polares, la cual tiene como consecuencia las ecuaciones de rotación empleadas en el plano cartesiano.

En el espacio se definen las Coordenadas Cilíndricas y Esféricas con algunos ejemplos.

Justificación.

El objetivo de este capítulo es que el alumno conozca otros sistemas coordenados diferentes del cartesiano, como son: las coordenadas polares en el plano, las coordenadas cilíndricas y esféricas en el espacio.
Es conveniente que el alumno observe la ventaja de usar coordenadas polares en el plano, o cilíndricas y esféricas en el espacio, sobre todo cuando se tengan ecuaciones muy complicadas en coordenadas cartesianas.
Que el alumno vea algunos conceptos como el de línea recta, circunferencia, etc. desde otro sistema coordenado sin ningún cambio en su definición y desde otro enfoque.

Capítulo IV Álgebra Vectorial.

Se introduce el álgebra vectorial en el plano y en el espacio. Se definen los conceptos de flecha y vector; la relación que tiene el concepto de flecha con el de vector; las operaciones y propiedades de los vectores; ángulo director; ángulo entre dos vectores; producto punto; paralelismo y perpendicularidad entre vectores; proyección ortogonal; etc. Tanto en el plano como en el espacio. Además, se definen los ángulos directores de un vector; el producto cruz y el triple producto escalar en el espacio.

Justificación.

El objetivo de este capítulo es proporcionar al alumno el álgebra vectorial tanto en el plano como en el espacio, como una herramienta indispensable en la definición de conceptos geométricos, como son la línea recta y el plano. Además conocerá la importancia que tiene en algunas aplicaciones. Como por ejemplo, en la física, y más adelante en conceptos como desigualdad lineal.

Capítulo V Línea Recta y Plano.

En este capítulo estudiamos dos de los principales objetos de la geometría: la recta y el plano. Como aplicación del análisis vectorial introducimos la ecuación vectorial de una recta y las ecuaciones paramétricas de una recta; además, se estudian la ecuación de la recta en sus formas de los dos puntos, punto-pendiente, simétrica y general a partir del análisis de su ecuación vectorial. Además, se tocan los temas de ángulo entre dos rectas, paralelismo y perpendicularidad entre dos rectas, distancia de un punto a una recta, forma normal de la ecuación de una recta y familia de líneas rectas.

La segunda parte de este capítulo se refiere al estudio de la línea recta en el espacio, su ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y ecuaciones simétricas; los conceptos de ángulo entre dos rectas, paralelismo y perpendicularidad entre dos rectas; distancia de un punto a una recta.

Se define el concepto de plano, su ecuación vectorial, sus ecuaciones paramétricas y ecuación rectangular, ángulo entre dos planos, intersección de planos, paralelismo y perpendicularidad entre planos, trazas en los planos coordenados, ecuación normal del plano, familias de planos. Por último, se observa qué relación hay entre la recta y el plano en el espacio, y se define el ángulo entre una recta y el plano.

Justificación.

En este capítulo se analiza el concepto de la línea recta, primero en forma vectorial y después en forma cartesiana, dando así otro nuevo enfoque al concepto de recta.

En cursos pasados se definían los lugares geométricos con una ecuación cartesiana, y ahora se abre una nueva perspectiva, pues el alumno podrá representar el mismo lugar geométrico con ecuaciones vectoriales. Esto propicia en el alumno una visión diferente en las relaciones entre las ecuaciones cartesianas y vectoriales. Además, este capítulo ayudará al alumno a reafirmar los conceptos del álgebra vectorial al aplicarlos al estudio de la recta en el espacio y en el plano.

Capitulo VI Aplicaciones de la Recta.

En este capítulo se exponen algunas aplicaciones de la línea recta aprovechando algunos conceptos anteriormente estudiados. Los temas que se exponen son: Desigualdad lineal en el plano, sistema de desigualdades lineales usando el método gráfico, conjuntos convexos en el plano, programación lineal en el plano, ajuste a una recta, desigualdad lineal en el espacio, sistema de desigualdades lineales en el espacio usando el método gráfico, conjuntos convexos
en el espacio, programación lineal en tres variables y el método simplex.

Justificación.

Este capítulo tiene como propósito mostrar al alumno que con los conocimientos adquiridos acerca de la recta y el álgebra vectorial puede abordar la resolución de problemas relativos a desigualdades lineales desde un punto de vista geométrico, lo que se conoce como programación lineal en el plano; además, generalizar estas ideas a la programación lineal en el espacio, y aplicar los conocimientos adquiridos a una disciplina como es la Estadística al realizar un ajuste a una recta.

Capitulo VII Transformación de Coordenadas.

En este capítulo se aborda el tema del cambio de coordenadas. Primero, se define la traslación de coordenadas. Posteriormente, la rotación de ejes coordenados en el plano desde el punto de vista geométrico, y se introducen las matrices para representar este tipo de transformaciones.

Nuevamente, como en otros capítulos, generalizamos los conceptos al espacio, introduciendo la rotación a través de su representación matricial.

Justificación

Este capítulo tiene el propósito de proporcionar al alumno una importante herramienta de la geometría analítica, como lo es la transformación de coordenadas mediante la cual el alumno podrá analizar mejor una curva, simplificando su ecuación, además de adquirir otra visión de la misma gráfica al entender cómo la complejidad de la ecuación de una curva disminuye al cambiar de posición los ejes coordenados.

Capítulo VIII Secciones Cónicas. Superficies.

En este capítulo mostramos cómo se generan las cónicas a partir de un cono. Después, damos la definición general de las cónicas y la definición focal de la parábola, de la elipse y de la hipérbola. Se tocan temas propios de las cónicas como son: La propiedad universal de la parábola, elipse e hipérbola. Se define la circunferencia como un caso particular de la elipse, se estudian familias de circunferencias, etc. En cada caso, se realiza un análisis minucioso de cada uno de los elementos de la curva.
Finalmente, generalizamos las ideas al espacio y exponemos los conceptos de superficie cilíndrica, superficies cónicas, regladas, de revolución y cuádricas.

Justificación.

Este capítulo tiene como objetivo que el alumno reafirme sus conocimientos anteriores sobre cónicas de una manera sencilla y analítica, dado que se estudian algunas propiedades que muchas veces no se exponen en cursos comunes. Se pretende que el alumno termine el capítulo con una idea más estructurada de lo que son las cónicas. Asimismo, se introducen los diferentes conceptos de superficie para que el alumno vea cómo a partir de un punto, una recta y el movimiento que se da entre estos elementos geométricos se pueden obtener algunas superficies.

Capítulo IX Ecuación de Segundo grado.

En este capítulo realizamos un análisis de la ecuación de segundo grado en dos y tres variables desde un punto de vista geométrico. Primero, en el plano se analiza la ecuación general de segundo grado, que representa una cónica o un caso degenerado de ésta.
Se estudian algunas propiedades geométricas de las cónicas como son: ejes de simetría, centro de simetría, diámetro, cuerdas, todo ello para lograr un análisis geométrico más completo y conocer algunas propiedades geométricas de las cónica. Finalmente con ello se podrá simplificar la ecuación general de una cónica a su forma más simple.
En el espacio se analiza la ecuación general de una superficie de segundo grado. Siguiendo el mismo procedimiento que antes, generalizamos algunas propiedades geométricas de las curvas de segundo orden al espacio, como son: centro de simetría de una superficie, planos diametrales y planos principales.

Justificación.

El objetivo de este capítulo es que el alumno conozca las propiedades geométricas de las cónicas, y por medio de ellas pueda llevar la ecuación general de segundo grado en el plano a su forma ordinaria, ofreciendo al alumno una visión geométrica del problema de una manera simple. Lo mismo sucede en el caso de la ecuación general de una superficie de segundo orden, aunque en este caso la visualización es más difícil.

Comentario final.

Espero que este trabajo primero ayude a reafirmar los conocimientos de los alumnos y por otro lado sea motivante para que ellos continúen aplicando la geometría analítica en las diferentes disciplinas científicas de una manera fácil y práctica.

INDICE

I. Trigonometría Analítica....................1

1.1 Trigonometría en el triángulo rectángulo....................1
1.2 Funciones trigonométricas de los ángulos de 30°, 60° y 45°....................3
1.3 Ángulos. Medidas circulares. Grados y radianes....................6
1.4 Circunferencia unitaria. Funciones trigonométricas....................13
1.5 Identidades trigonométricas y gráfica de las funciones trigonométricas del seno y coseno....................16
1.6 Gráficas de otras funciones trigonométricas....................36
1.7 Funciones trigonométricas inversas y sus gráficas....................45
1.8 Resolución de triángulos rectángulos....................56
1.9 Resolución de triángulos arbitrarios....................58

II. Graficación....................73

2.1 Productos cartesianos....................73
2.2 Funciones y relaciones....................73
2.3 Técnicas de graficación....................78
2.4 Intersección de curvas....................89
2.5 Lugares geométricos....................90
2.6 Gráfica de una superficie....................93

III. Sistemas Coordenados

3.1 Sistema de coordenadas polares....................105
3.2 Relación entre las coordenadas polares y las coordenadas rectangulares....................108
3.3 Curvas en coordenadas polares. Técnicas de graficación....................111
3.4 Intersección de ecuaciones polares....................122
3.5 La línea recta en coordenadas polares....................124
3.6 La circunferencia en coordenadas polares....................129
3.7 Distancia entre dos puntos en coordenadas polares....................130
3.8 Rotación en coordenadas polares....................136
3.9 Coordenadas cilíndricas y esféricas....................138

IV. Álgebra Vectorial

4.1 Vectores en el plano....................152
4.2 Propiedades de los vectores....................157
4.3 Ángulo director de un vector....................160
4.4 Ángulo entre dos vectores. Producto punto....................164
4.5 Proyección ortogonal....................171
4.6 Aplicaciones a la física....................183

4.7 Vectores en el espacio....198
4.8 Flechas y vectores....201
4.9 Operaciones con vectores....203
4.10 Longitud; producto punto....208
4.11 Ángulo entre dos vectores; dirección de un vector....212
4.12 Proyección vectorial....214
4.13 Producto cruz....221
4.14 Triple producto escalar....226

V. Línea Recta. Plano.

5.1 Línea recta en el plano....229
5.2 Ángulo entre dos rectas....245
5.3 Distancia de un punto a una recta....252
5.4 Forma normal de la ecuación de una recta....259
5.5 Familia de líneas rectas....263
5.6 La línea recta en el espacio. El plano....275
5.7 Ecuaciones simétricas de la recta. Ángulo entre dos rectas....282
5.8 El plano....287
5.9 Ángulo entre dos planos. Intersección de planos....292
5.10 Trazas en los planos coordenados....297
5.11 Ecuación normal del plano....299
5.12 Relación entre la recta y el plano....304
5.13 Distancia de un punto a una recta....306
5.14 Ángulo entre una recta y un plano....309
5.15 Familia de planos....311

VI. Desigualdad de la recta.

6.1 Desigualdad lineal....319
6.2 Sistema de desigualdades lineales....328
6.3 Conjuntos Convexos....334
6.4 Programación lineal....338
6.5 Ajuste a una recta....351
6.6 Desigualdad lineal en R^3....367
6.7 Sistema de desigualdades lineales en el espacio....373
6.8 Conjuntos convexos....377
6.9 Programación lineal en tres variables....380
6.10 Método simplex....387

VII. Transformación de Coordenadas

7.1 Traslación de ejes coordenados....398
7.2 Rotación de ejes coordenados....405
7.3 Traslación y Rotación en su forma matricial....414
7.4 Rotación matricial....418
7.5 Rotación de ejes coordenados en el espacio....439
7.6 Rotación matricial en el espacio....454

VIII. Secciones Cónicas. Superficies

8.1 Cónicas....460
8.2 Definición general de las cónicas....463
8.3 Parábola....468
8.4 Propiedad universal de la parábola....481
8.5 Elipse....495
8.6 Circunferencia....506
8.7 Familia de circunferencias....513
8.8 Propiedad universal de la elipse....518
8.9 Hipérbola....521
8.10 Propiedad universal de la hipérbola....532
8.11 Superficies cilíndricas....533
8.12 Superficies cónicas....539
8.13 Superficies regladas....546
8.14 Superficies de revolución....547
8.15 Superficies cuádricas....552
8.16 Cuádricas no centrales....571

IX Ecuación General de Segundo Grado

9.1 Análisis de la ecuación de segundo grado en dos variables desde un punto de vista geométrico....578
9.2 Análisis de la ecuación de segundo grado en tres variables desde un punto de vista geométrico....609

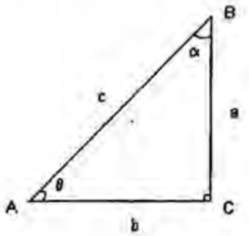
I. Trigonometría Analítica.

En este capítulo veremos la Trigonometría como el estudio de las relaciones numéricas entre los lados y ángulos de un triángulo, y generalizaremos el concepto de ángulo como un giro sobre el plano, lo cuál dará lugar a la medición de los ángulos por medio del conjunto de los números reales. De esta manera se definirán las funciones trigonométricas para cualquier ángulo. Así mismo deduciremos algunas identidades trigonométricas y expondremos gráficas de algunas funciones trigonométricas, incluyendo las funciones trigonométricas inversas y sus graficas. Finalmente aplicaremos la ley de los senos y cosenos en triángulos arbitrarios.

Este tema tiene como objetivo principal proporcionar al alumno las herramientas trigonométricas necesarias y desarrollar sus habilidades para aplicar estos conocimientos.

1.1 Trigonometría en el Triángulo Rectángulo.

Sea ACB un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene medida c y sus catetos tienen medidas a y b. Y de ángulos agudos θ, α. (Fig.1)



(Fig.1)

En trigonometría se usan básicamente seis funciones que relacionan los ángulos agudos con los lados del triángulo. Se trata de las funciones seno (sen), coseno (cos), tangente (tan) cotangente (cot), secante (sec), cosecante (csc).

Las funciones trigonométricas para el ángulo θ son:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{c} \qquad \cos\theta = \frac{b}{c} \qquad \tan\theta = \frac{a}{b}$$

$$\csc\theta = \frac{c}{a} \qquad \sec\theta = \frac{c}{b} \qquad \cot\theta = \frac{b}{a}$$

Las funciones trigonométricas para el ángulo α son:

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{b}{c}$ $\quad\quad$ $\cos\alpha = \dfrac{a}{c}$ $\quad\quad$ $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$

$\csc\alpha = \dfrac{c}{b}$ $\quad\quad$ $\sec\alpha = \dfrac{c}{a}$ $\quad\quad$ $\cot\alpha = \dfrac{a}{b}$

De lo anterior se deduce que:

$\operatorname{sen}\theta = \cos\alpha$ $\quad\quad$ $\csc\theta = \sec\alpha$

$\cos\theta = \operatorname{sen}\alpha$ $\quad\quad$ $\sec\theta = \csc\alpha$

$\tan\theta = \cot\alpha$ $\quad\quad$ $\cot\theta = \tan\alpha$

Lo anterior se debe a que θ y α son complementarios (*es decir*, $\theta + \alpha = 90°$).

Concluimos que, los valores del coseno , cotangente y la cosecante coinciden respectivamente con los del seno, tangente y la secante del ángulo complementario. De aquí que el prefijo "co" de las llamadas cofunciones (cotángente, cosecante, coseno) signifique simplemente "complemento".

Es decir:

$\operatorname{sen}\theta = \cos\ (90 - \theta)$ $\quad\quad$ $\csc\theta = \sec\ (90 - \theta)$

$\cos\theta = \operatorname{sen}\ (90 - \theta)$ $\quad\quad$ $\sec\theta = \csc\ (90 - \theta)$

$\tan\theta = \cot\ (90 - \theta)$ $\quad\quad$ $\cot\theta = \tan\ (90 - \theta)$

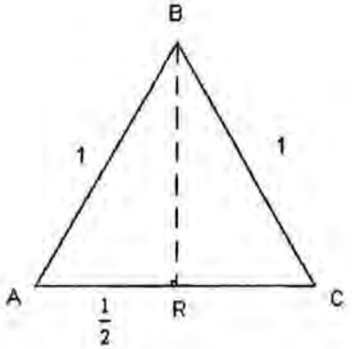
Esto, claro está, para ángulos agudos positivos.

1.2 Funciones trigonométricas de los ángulos de 30°, 60° y 45°.

Sea el triángulo equilátero ABC cuyos lados miden la unidad.

Trazamos de B la perpendicular al lado opuesto $\overline{AC}$ cortándolo en el punto R.

De esta manera $\overline{BR}$ es altura, mediana, mediatriz, y bisectriz del triángulo ABC por ser este un triángulo equilátero. Por lo cual la medida de $\overline{AR} = \frac{1}{2}$. (Fig.2)



(Fig.2)

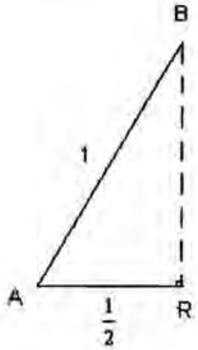
Consideremos ahora el triángulo rectángulo ARB. Por el teorema de Pitágoras tenemos:

$\overline{AB}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{BR}^2$ de donde

$\overline{BR}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AR}^2 = 1^2 - \left[\frac{1}{2}\right]^2$

$\overline{BR}^2 = \frac{3}{4}$

Por lo tanto $\overline{BR} = \frac{\sqrt{3}}{2}$



(Fig.3)

Sabemos que el ángulo BAR es de 60°, entonces sus funciones trigonométricas son:

$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\sec 60° = 2$

$\tan 60° = \sqrt{3}$ $\qquad$ $\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

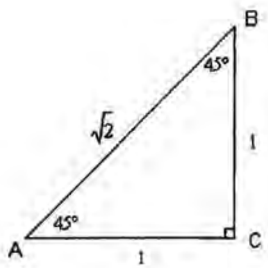
Por otra parte, el ángulo ABR mide 30°, por lo cual las funciones trigonométricas para este ángulo son:

$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\csc 60° = 2$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\cot 30° = \sqrt{3}$

Consideremos el triángulo rectángulo isósceles cuya medida de sus catetos es la unidad. (Fig.4)



(Fig.4)

Por el teorema de Pitágoras tenemos:

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2$

$\overline{AB}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

Por lo tanto $\overline{AB} = \sqrt{2}$

De donde las funciones trigonométricas del triángulo rectángulo ACB son:

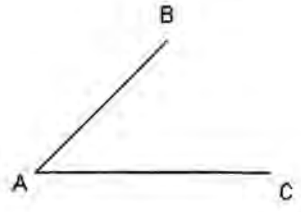
$\text{sen } 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\csc 45° = \sqrt{2}$

$\cos 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ $\sec 45° = \sqrt{2}$

$\tan 45° = 1$ $\qquad$ $\cot 45° = 1$

1.3 Ángulos. Medidas Circulares. Grados y Radianes.

Geométricamente, un ángulo es la figura formada por dos segmentos llamados lados que parten de un mismo punto llamado vértice.



(Fig.5)

En la figura 5, A es el vértice, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, son los lados del ángulo.

Los ángulos se expresan en sistema sexagesimal. La unida de medida del ángulo es el grado.

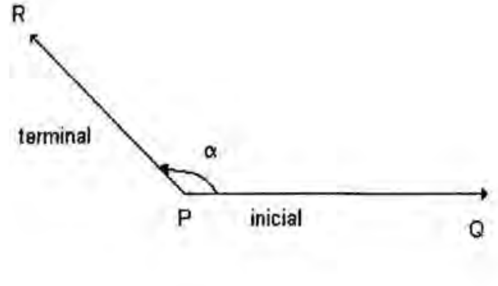
1° = 60'   1' = 60"

Los grados indican el "grado de separación"

Generalicemos esta idea pensando al ángulo como un giro en lugar de una figura geométrica.

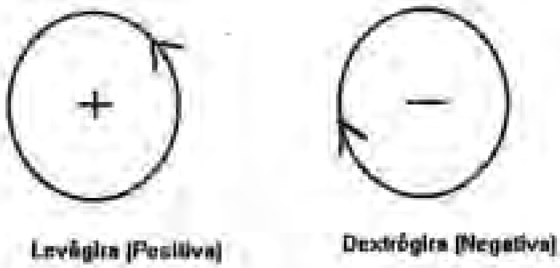
Sean P,Q y R tres puntos en el plano, distintos los dos últimos del primero.

Se define el ángulo con lado inicial PQ y lado terminal PR como el efecto de rotar el Segmento $\overline{PQ}$ hasta alcanzar la posición del segmento PR.
Al punto P se le llama vértice del ángulo.(Fig.6)



(Fig.6)

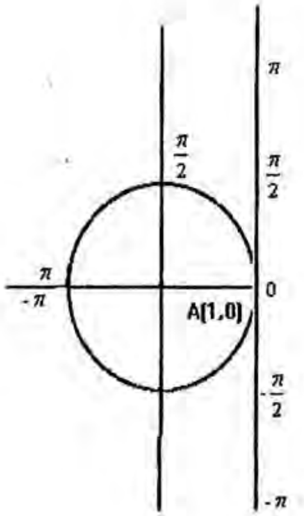
Debemos señalar que al efectuar un giro, al igual que al recorrer una recta, hay dos direcciones opuestas en que lo podemos hacer. En otras palabras, una circunferencia puede ser recorrida en dos direcciones opuestas:
Dextrógira (girando en el mismo sentido a las manecillas del reloj)
y Levógira (girando en el sentido contrario al de las manecillas del reloj).
(Fig.7)



(Fig.7)

En geometría se consideran como dirección positiva la levógira y como negativa la dextrógira. Es decir las distancias a lo largo de la circunferencia serán positivas o negativas según la dirección en que se le recorra.

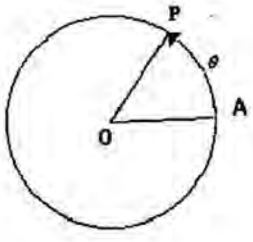
Para tener más claro este concepto imaginemos que la recta de los números reales puede ser enrollada alrededor de la circunferencia unitaria con centro el origen. La parte positiva se enrolla en sentido levógiro, y la parte negativa en sentido dextrógiro; medimos distancias sobre la circunferencia a partir del punto A (0,1) . (*Fig.8*)



(Fig.8)

Este mapeo de la recta **R** sobre la circunferencia unitaria define una función **W** de **R** en **C**($\overline{O}$,1) (Circunferencia con centro el origen y radio 1)

W : **R** ---------> **C** tal que W(θ) es el arco AP de longitud θ



(Fig.9)

La correspondencia entre los arcos de la circunferencia y el conjunto de parejas tales que $x^2 + y^2 = 1$ determina una función W cuyo dominio es el conjunto de números reales y cuyo rango es el conjunto de puntos de la circunferencia.

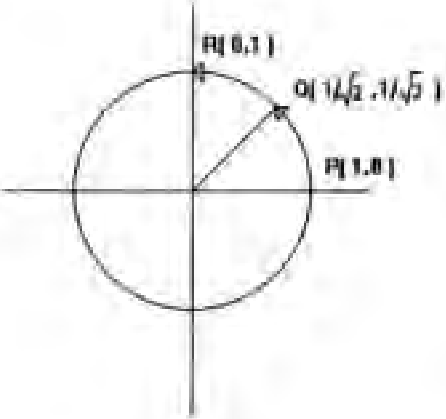
Así :

El número 0 determina el punto P (1, 0).

El número $\frac{\pi}{4}$ determina el punto Q ($\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$)

El número $\frac{\pi}{2}$ determina el punto P (0, 1). (Fig.10)

En general el arco θ determina el punto sobre la circunferencia unitaria.

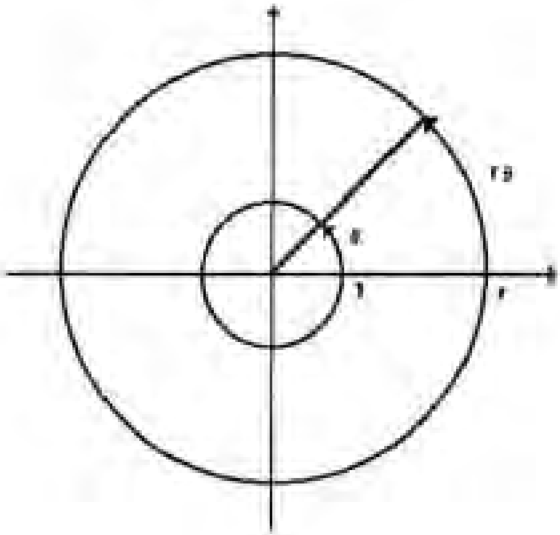


(Fig.10)

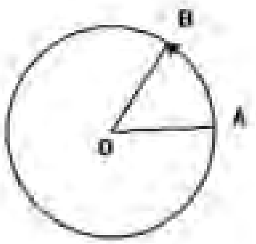
De esta manera los números reales sirven para medir ángulos al medir la longitud del arco que los subtiende.

De hecho, el sistema de medidas circulares tiene como base la identificación del ángulo con la longitud del arco que lo subtiende. (Fig. 11)

La unidad de medida angular es el radián, un arco cuya longitud es igual a la medida del radio trazado el arco en sentido positivo. (Fig.12)



(Fig.11)



(Fig.12)

La longitud de AB = longitud del radio $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$

La medida de una circunferencia es C = $2\pi \cdot r$

En el caso de ser unitaria su medida es 2π y $r = \frac{1}{2\pi}$

Así

1 radian = 57° 17' 44"

π radianes = 180°

De donde 1 radian = $\frac{180}{\pi}$ $1° = \frac{\pi}{180}$ $1' = \frac{\pi}{10800}$ $1" = \frac{\pi}{648000}$

Ejemplo

Convertir de grados a radianes y viceversa.

a) 38°25' b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{3\pi}{7}$

Solución:

a) $38° = 38\left[\frac{\pi}{180}\right] = 0.663$ dado que $1° = \frac{\pi}{180}$

$25' = 25\left[\frac{\pi}{10800}\right] = 0.0072$ dado que $1' = \frac{\pi}{10800}$

Sumo 0.663 + 0.0072 = 0.6702 Por tanto, 38°25' = 0.6702

b) $\frac{3}{5} = \frac{3}{5}\left[\frac{180}{\pi}\right] = 34.377$ grados = 34° 22' 38" dado que 1 rad = $\frac{180}{\pi}$

c) $\frac{3\pi}{7} = \frac{3\pi}{7}\left[\frac{180}{\pi}\right] = 77.143$ grados $= 77°\ 8'\ 34''$

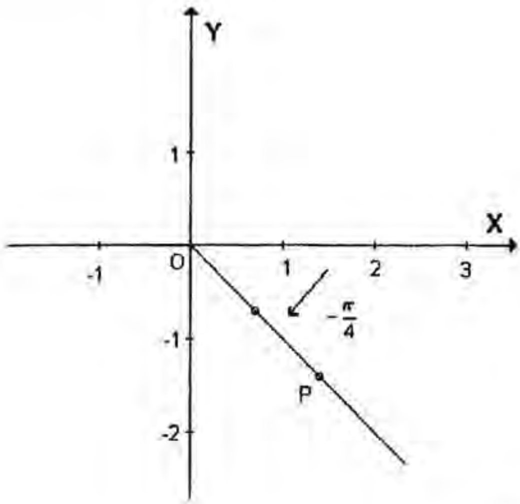
Ejemplo .

Localizar el punto P, si $\overline{OP} = 2$ y la medida del ángulo que forma $\overline{OP}$ con el eje X es $-\frac{\pi}{4}$ e indica en qué cuadrante se encuentra $\overline{OP}$.

Solución.

Se traza una semirecta L de tal manera que me forme con la parte positiva del eje X un ángulo cuya medida sea de $-\frac{\pi}{4}$. Sobre L se miden 2 unidades a partir de O y se obtiene el punto P.

Por tanto, $\overline{OP}$ se encuentra en el IV cuadrante. (Fig.13)

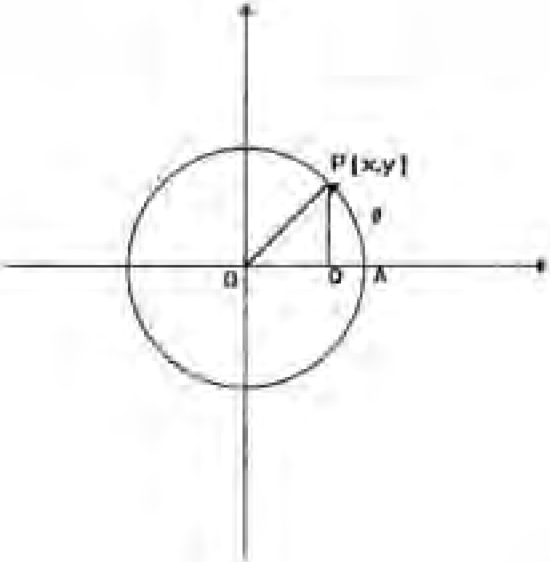


(Fig.13)

1.4 Circunferencia Unitaria. Funciones Trigonométricas.

Sea P(x,y) el punto final de un arco AP sobre la circunferencia unitaria C con centro el origen. (Fig.14)

Bajemos una perpendicular de P al eje X, obteniendo un punto Q.



(Fig.14)

Del triángulo rectángulo OQP obtenemos lo siguiente:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{QP}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{QP}}{1} = \overline{QP} \quad (1.1)$$ por ser $\overline{OP}$ un radio.

Por tanto, la longitud del segmento dirigido $\overline{QP}$ representa al seno de θ .

Análogamente para el cos θ

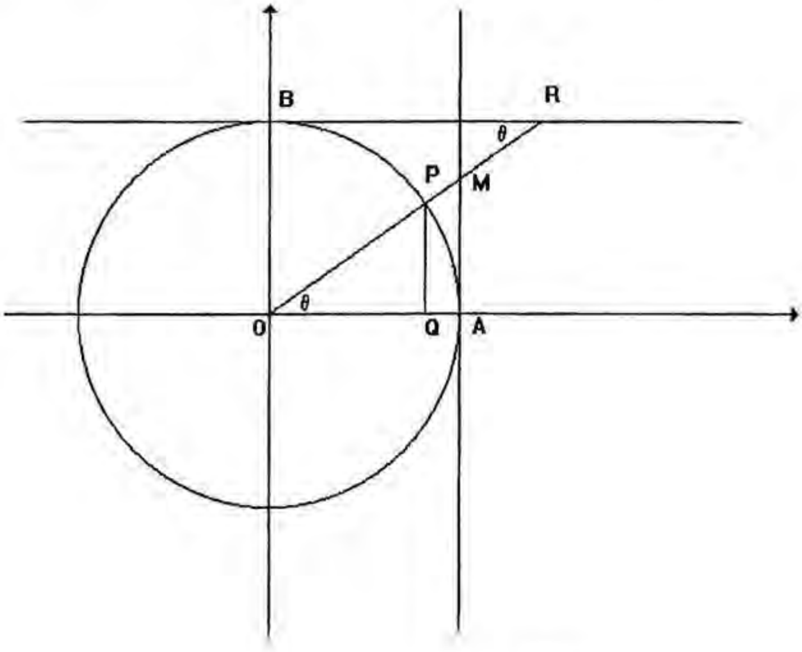
$$\cos\theta = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \overline{OQ} \qquad (1.2)$$

de donde $x = \cos\theta$; $y = \operatorname{sen}\theta$ y podemos escribir al punto P con las coordenadas $(\cos\theta\ ,\ \operatorname{sen}\theta)$

Por otra parte, de acuerdo con la fórmula de la distancia, un punto P pertenece a la circunferencia unitaria si y solo si $\sqrt{x^2+y^2}=1$ o bien $x^2+y^2=1$.

Por tanto se cumple $(\cos\theta)^2+(\operatorname{sen}\theta)^2=1$

En la misma circunferencia C prolonguemos $\overline{OP}$ y tracemos las tangentes a la circunferencia en A y B. (Fig.15)



(Fig.15)

Sean M y R las intersecciones de las tangentes en A y B con $\overline{OP}$ respectivamente.

Los triángulos OQP, OAM y RBO son semejantes de modo que

$$\tan\theta = \frac{\overline{QP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{OA}} = \overline{AM} \quad (1.3) \qquad \text{ya que } \overline{OA} = 1$$

Análogamente

$$\sec\theta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} = \overline{OM} \quad (1.4)$$

$$\csc\theta = \frac{\overline{OP}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OB}} = \overline{OR} \quad (1.5) \qquad \text{ya que } \overline{OB} \text{ es radio}$$

$$\cot\theta = \frac{\overline{OQ}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{BR}}{\overline{OB}} = \overline{BR} \quad (1.6)$$

Por lo tanto la tangente, secante, cosecante y cotangente de θ representan la longitud de los segmentos dirigidos $\overline{AM}$, $\overline{OM}$, $\overline{OR}$ y $\overline{BR}$ respectivamente.

De (1.1) y (1.2) tenemos

$$\tan\theta = \frac{\overline{QP}}{\overline{OQ}} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \quad (1.7) \qquad \therefore \tan\theta = \frac{y}{x}$$

De (4) tenemos

$$\sec\theta = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{\cos\theta} \quad (1.8) \qquad \therefore \sec\theta = \frac{1}{x}$$

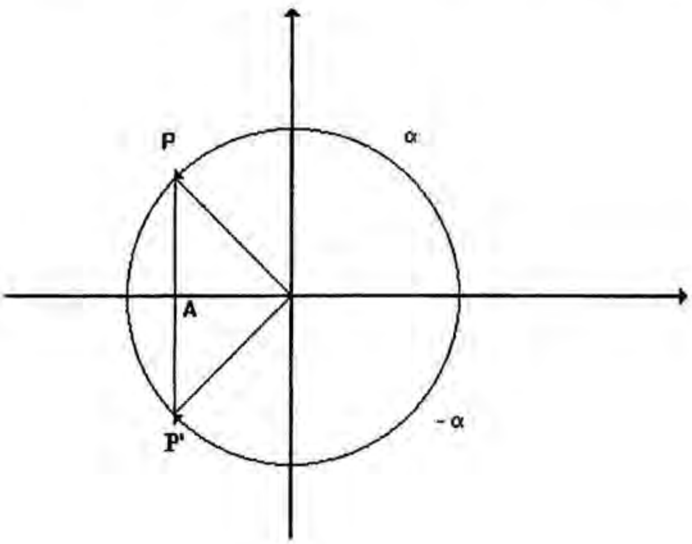
En forma similar

$$\csc\theta = \frac{\overline{OP}}{\overline{QP}} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad (1.9) \qquad \therefore \csc\theta = \frac{1}{y}$$

$$\cot\theta = \frac{\overline{OQ}}{\overline{QP}} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} \qquad (1.1.0) \qquad \therefore \cot\theta = \frac{x}{y}$$

1.5 Identidades Trigonométricas y gráfica de las Funciones Trigonométricas del Seno y Coseno.

En la circunferencia unitaria con centro el origen consideremos los puntos terminales P (x, y) de un arco de longitud α y P' (x' , y') de un arco de longitud −α. (Fig. 16)



(Fig.16)

Sabemos que $\overline{OA} = -\cos\alpha = -\cos(-\alpha)$ $\quad \therefore \ \cos\alpha = \cos(-\alpha)$ (2.1)

$\overline{AP} = \operatorname{sen}\alpha$ y $\overline{AP'} = -\operatorname{sen}(-\alpha)$

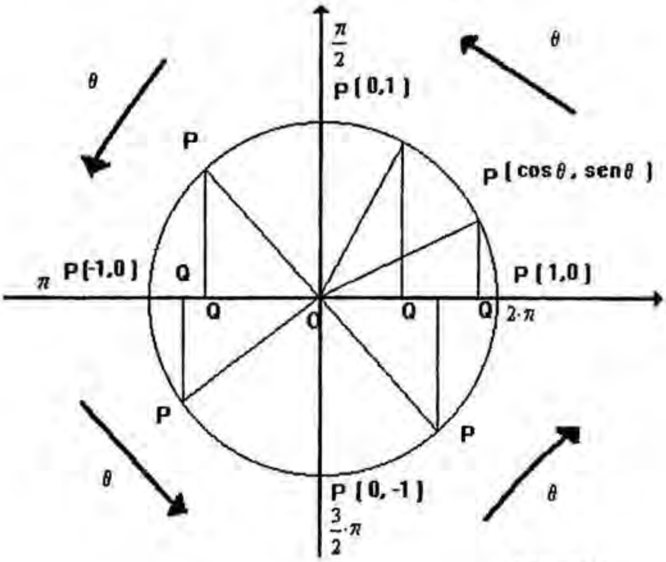
Como $\Delta OAP \approx \Delta OAP'$ $\quad \overline{AP} = \overline{AP'}$ $\quad \therefore \ \operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}(-\alpha)$ (2.2)

De (2.1) y (2.2) se deduce que $\tan\alpha = -\tan(-\alpha)$ o bien $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

De la misma manera se puede demostrar que $\sec(-\alpha) = \sec\alpha$

$\csc(-\alpha) = -\csc\alpha$

En la circunferencia unitaria **C** recorramos un arco de longitud 2π y observemos lo que sucede con las funciones seno y coseno durante el recorrido. (Fig.17)



(Fig.17)

De 0 a $\frac{\pi}{2}$

$\overline{QP}$ = sen θ crece de 0 a 1

$\overline{OQ}$ = cos θ decrece de 1 a 0

De $\frac{\pi}{2}$ a π

sen θ decrece de 1 a 0

cos θ decrece de 0 a −1

De π a $\frac{3\pi}{2}$

sen θ decrece de 0 a -1

cos θ crece de −1 a 0

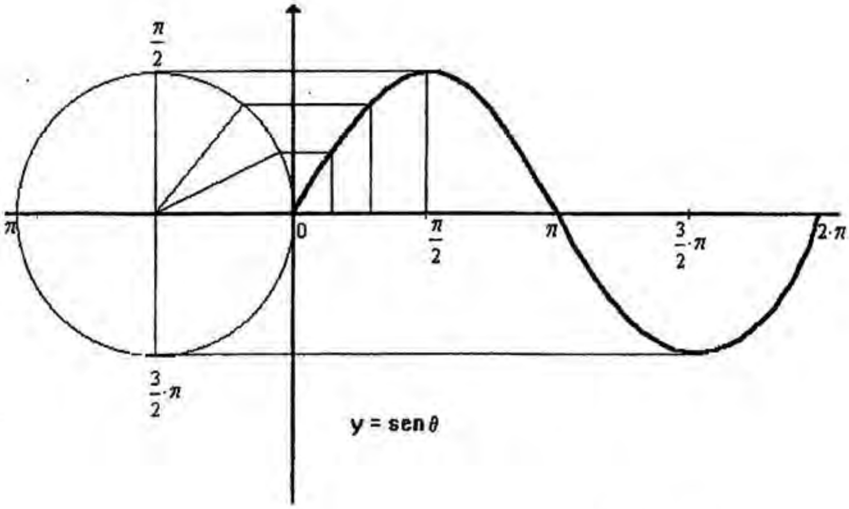
De $\frac{3\pi}{2}$ a 2π

sen θ crece de −1 a 0

cos θ crece de 0 a 1

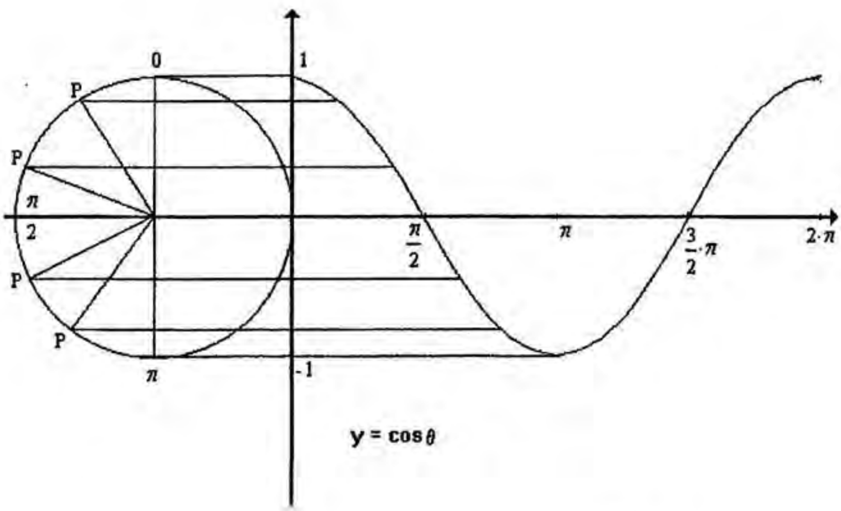
Por lo que el valor máximo y mínimo que tomen las funciones seno y coseno serán 1 y −1, respectivamente.

Graficando con el análisis anterior tenemos: (Fig.18) y (Fig.19)



$\frac{\pi}{2}$
π
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3}{2}\cdot\pi$
$2\cdot\pi$
$\frac{3}{2}\cdot\pi$
y = sen θ

(Fig.18)



0
1
P
P
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3}{2}\cdot\pi$
$2\cdot\pi$
P
P
π
-1
y = cos θ

(Fig.19)

De las gráficas notamos que el seno es como el coseno desfasado $\frac{\pi}{2}$

$\operatorname{sen}(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$ $\qquad\qquad$ $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen}\theta$

Si θ aumenta en intervalos de 2π se efectúa una revolución completa alrededor del origen y P regresa al punto de partida.

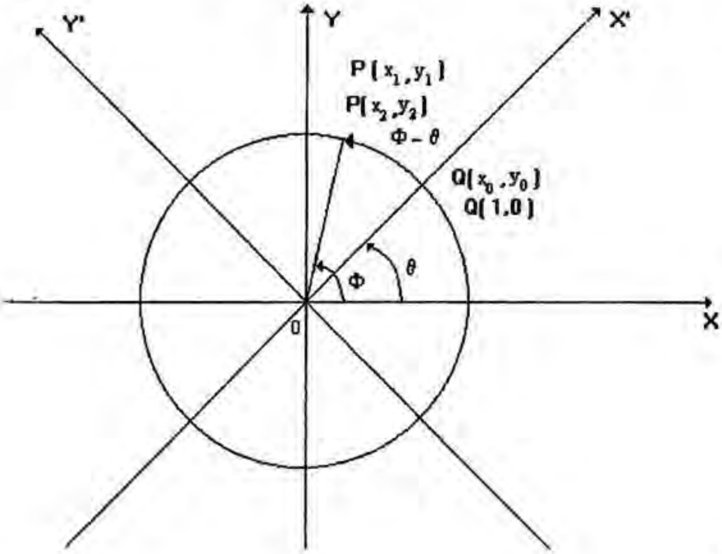
Por lo tanto las funciones seno y coseno son periódicas, con período 2π.

$\operatorname{sen}(\theta + 2\pi) = \operatorname{sen}\theta$ $\qquad\qquad$ $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$

Sea **C** la circunferencia unitaria con centro el origen, P el punto terminal del arco ϕ y Q el punto terminal del arco θ . (Fig.20)

Sea X' Y' el sistema de ejes coordenados que tiene como eje de las abscisas a la recta OQ.

Sean (x_0, y_0) y (x_1, y_1) las coordenadas de P y Q y sean (x_2, y_2) las coordenadas de P en X' Y. (Nótese que las coordenadas de Q en X'Y' son (1, 0))



(Fig.20)

De lo anterior se sigue que:

a) sen $\phi = y_1$ d) cos $\phi = x_1$

b) sen $\theta = y_0$ e) cos $\theta = x_0$

c) sen $(\phi - \theta) = y_2$ f) cos $(\phi - \theta) = x_2$

Midamos la distancia entre P y Q en ambos sistemas de ejes coordenados:

$$\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \sqrt{(x_2 - 1)^2 + (y_2)^2}$$

Elevando al cuadrado

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - x_0)^2 = (x_2 - 1)^2 + (y_2)^2$$

desarrollando

$$(x_1)^2 - 2x_1x_0 + (x_0)^2 + (y_1)^2 - 2y_1y_0 + (x_0)^2 = (x_2)^2 - 2x_2 + 1 + (y_2)^2$$

Pero $(x_1)^2 + (y_1)^2 = 1$

$$(x_0)^2 + (y_0)^2 = 1$$

$$(x_2)^2 + (y_2)^2 = 1$$

Pues P , Q pertenecen a C. De donde se sigue que:

$$-2x_1x_0 - 2y_1y_0 = -2x_2$$

$$-2(x_1x_0 + y_1y_0) = -2x_2$$

por lo tanto $\quad x_1x_6 + y_1y_6 = x_3$

sustituyendo en la última igualdad según a) b) y c)

$\cos(\phi - \theta) = \cos\phi \cos\theta + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$

En el caso del coseno de la suma de dos ángulos tenemos:

$$\begin{aligned}\cos(\phi + \theta) &= \cos(\phi - (-\theta)) \\ &= \cos\phi \cos(-\theta) + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}(-\theta) \\ &= \cos\phi \cos\theta - \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta\end{aligned}$$

Se puede demostrar también que

$\operatorname{sen}(\phi - \theta) = \operatorname{sen}\phi \cos\theta - \operatorname{sen}\theta \cos\phi$

y con base en esto último

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\phi + \theta) &= \operatorname{sen}(\phi - (-\theta)) \\ &= \operatorname{sen}\phi \cos(-\theta) - \operatorname{sen}(-\theta)\cos\phi \\ &= \operatorname{sen}\phi \cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cos\phi\end{aligned}$$

En resumen, hemos obtenido las siguientes identidades

1) $(\operatorname{sen}\phi)^2 + (\cos\phi)^2 = 1$

2) $\tan\phi = \dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi}$

3) $\sec\phi = \dfrac{1}{\cos\phi}$

6) $\cos(\phi - \theta) = \cos\phi\cos\theta + \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$

7) $\operatorname{sen}(\phi - \theta) = \operatorname{sen}\phi\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\phi$

8) $\cos(\phi + \theta) = \cos\phi\cos\theta - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta$

4) $\csc\phi = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\phi}$

9) $\operatorname{sen}(\phi+\theta) = \operatorname{sen}\phi\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\phi$

5) $\cot\phi = \dfrac{1}{\tan\phi}$

Utilizando las anteriores identidades podemos demostrar nuevas identidades.
Por ejemplo, para las funciones seno y coseno tenemos las siguientes identidades:

10) $\operatorname{sen}\left[\phi \pm \dfrac{\pi}{2}\right] = \pm\cos\phi$

11) $\operatorname{sen}\left[\phi \pm \pi\right] = -\operatorname{sen}\phi$

12) $\operatorname{sen}\left[\phi \pm 2\pi\right] = \operatorname{sen}\phi$

13) $\cos\left[\phi \pm \dfrac{\pi}{2}\right] = \mp\operatorname{sen}\phi$

14) $\cos\left[\phi \pm \pi\right] = -\cos\phi$

15) $\cos\left[\phi \pm 2\pi\right] = \cos\phi$

También podemos demostrar las siguientes identidades trigonométricas para los ángulos doble y medio.

$\cos 2\phi = \cos(\phi+\phi) = \cos\phi\cos\phi - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\phi$ de 8)

$\cos 2\phi = (\cos\phi)^2 - (1-(\cos\phi)^2)$ de 1)

$\cos 2\phi = (\cos\phi)^2 - 1 + (\cos\phi)^2$

16) $\cos 2\phi = 2(\cos\phi)^2 - 1$

Análogamente podemos deducir la formula 17) $\cos 2\phi = 1 - 2(\operatorname{sen}\phi)^2$

Veamos otros casos

$$\cos\phi = \cos\left[\frac{\phi}{2}+\frac{\phi}{2}\right] = \cos\left[\frac{\phi}{2}\right]\cos\left[\frac{\phi}{2}\right] - \operatorname{sen}\left[\frac{\phi}{2}\right]\operatorname{sen}\left[\frac{\phi}{2}\right]$$

$$\cos\phi = \left[\cos\frac{\phi}{2}\right]^2 - \left[\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\right]^2$$

$$\cos\phi = \left[\cos\frac{\phi}{2}\right]^2 - \left[1 - \left[\cos\frac{\phi}{2}\right]^2\right] \qquad \text{de 1)}$$

$$\cos\phi = 2\left[\cos\frac{\phi}{2}\right]^2 - 1 \qquad \text{despejando } \cos\frac{\phi}{2} \text{ tenemos:}$$

18) $\cos\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\phi}{2}}$

de la misma manera despejando $\cos\phi$ en 16) obtenemos :

19) $\cos\phi = \sqrt{\frac{1+\cos 2\phi}{2}}$

Con éstas identidades podemos demostrar lo siguiente

20) $\operatorname{sen} 2\phi = 2\operatorname{sen}\phi\cos\phi$

21) $\operatorname{sen}\phi = 2\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}$

22) $\operatorname{sen}\frac{\phi}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\phi}{2}}$

23) $\operatorname{sen}\phi = \sqrt{\frac{1-\cos 2\phi}{2}}$

24) $1+(\tan\phi)^2 = (\sec\phi)^2$

25) $tan(\phi+\theta)=\dfrac{tan\phi+tan\theta}{1-tan\phi tan\theta}$

26) $1+(\cot\phi)^2=(\csc\phi)^2$

27) $tan2\phi=\dfrac{2tan\phi}{1-(tan\phi)^2}$

28) $tan(\phi-\theta)=\dfrac{tan\phi-tan\theta}{1+tan\phi tan\theta}$

29) $tan\dfrac{\phi}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}}$

TABLAS TRIGONOMÉTRICAS.

Considerando las identidades trigonométricas ya vistas, los valores de las funciones trigonométricas comprendidos entre 0° y 90° y la relación entre grados y radianes, podemos encontrar los valores de las funciones trigonométricas en todos los cuadrantes habiendo si acaso una diferencia de signo. En este caso la circunferencia unitaria es de gran ayuda para ver gráficamente como van tomando sus respectivos valores las funciones a medida que el ángulo θ toma valores entre 0° y 360°.

Los valores de las funciones trigonométricas que se muestran en la siguiente tabla, nos será de gran utilidad más adelante. Se trata de valores aproximados para ciertos ángulos.

Grados	Radianes	Seno	Coseno	Tangente	Cosecante	Secante	Cotangente
0	0.00	0.00	1.00	0.00	∞	1.00	∞
30	0.52	0.50	0.87	0.58	2.00	1.15	1.73
45	0.79	0.71	0.71	1.00	1.41	1.41	1.00
60	1.05	0.87	0.50	1.73	1.15	2.00	0.58
90	1.57	1.00	0.00	∞	1.00	∞	0.00
120	2.09	0.87	-0.50	-1.73	1.15	-2.00	-0.58
135	2.36	0.71	-0.71	-1.00	1.41	-1.41	-1.00
150	2.62	0.50	-0.87	-0.58	2.00	-1.15	-1.73
180	3.14	0.00	-1.00	0	∞	-1.00	∞
210	3.67	-0.50	-0.87	0.58	-2.00	-1.15	1.73
225	3.93	-0.71	-0.71	1.00	-1.41	-1.41	1.00
240	4.19	-0.87	-0.50	1.73	-1.15	-2.00	0.58
270	4.71	-1.00	0.00	∞	-1.00	∞	0.00
300	5.24	-0.87	0.50	-1.73	-1.15	2.00	-0.58
315	5.50	-0.71	0.71	-1.00	-1.41	1.41	-1.00
330	5.76	-0.50	0.87	-0.58	-2.00	1.15	-1.73
360	6.28	0.00	1.00	0.00	∞	1.00	∞

En la siguiente tabla el valor exacto de algunas funciones trigonométricas

Grados	Radianes	Seno	Coseno	Tangente	Cosecante	Secante	Cotangente
0	0	0	1	0	∞	1	∞
30	$\pi / 6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	2	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45	$\pi / 4$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60	$\pi / 3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	2	$1/\sqrt{3}$
90	$\pi / 2$	1	0	∞	1	∞	0
120	$2 \cdot \pi / 3$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	-2	$-1/\sqrt{3}$
135	$3 \cdot \pi / 4$	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	-1
150	$5 \cdot \pi / 6$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$	2	$-2/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
180	π	0	-1	0	∞	-1	∞
210	$7 \cdot \pi / 6$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$	-2	$-2/\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
225	$5 \cdot \pi / 4$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	1
240	$4 \cdot \pi / 3$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}$	$-2/\sqrt{3}$	-2	$1/\sqrt{3}$
270	$3 \cdot \pi / 2$	-1	0	∞	-1	∞	0
300	$5 \cdot \pi / 3$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}$	$-2/\sqrt{3}$	2	$-1/\sqrt{3}$
315	$7 \cdot \pi / 4$	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1
330	$11 \cdot \pi / 6$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-1/\sqrt{3}$	-2	$2/\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
360	2π	0	1	0	∞	1	∞

Ejemplo 3.

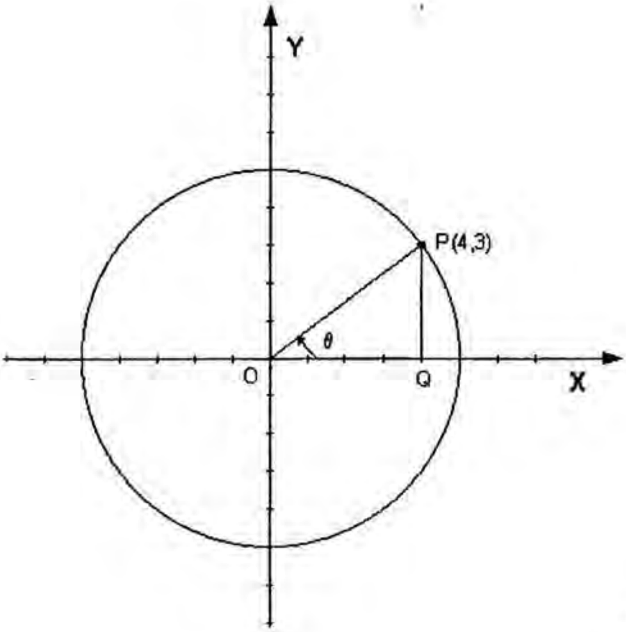
Sea P un punto distinto del origen en el plano cartesiano. Para determinar el seno y el coseno del ángulo que forma el segmento $\overline{OP}$ con la parte positiva del eje X basta con dividir cada una de sus coordenadas entre d (O, P) . Haz un diagrama que justifique esta última afirmación, y calcula el valor del seno y del coseno para el punto P (4, 3).

Solución.

Bajemos una perpendicular desde P a la parte positiva del eje X. Sea Q la intersección.

Como $\overline{QP} = 3$, $\overline{OQ} = 4$ y $d(O, P) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, tenemos que

$\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ y $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{5}$



(Fig.21)

Ejemplo .

Demostrar la identidad $\operatorname{sen}\phi = 2\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}$

Solución.

$$\operatorname{sen}\phi = \operatorname{sen}\left[\frac{\phi}{2}+\frac{\phi}{2}\right] = \operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}$$

Ejemplo .

Demostrar la identidad $1+(\cot\phi)^2 = (\csc\phi)^2$

$$1+(\cot\phi)^2 = 1+\left[\frac{\cos\phi}{\operatorname{sen}\phi}\right]^2 = \frac{(\operatorname{sen}\phi)^2+(\cos\phi)^2}{(\operatorname{sen}\phi)^2} = \frac{1}{(\operatorname{sen}\phi)^2} = (\csc\phi)^2$$

Ejemplo .

Determinar el valor exacto de $\cos\frac{\pi}{12}$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}$

Solución.

Usaremos las identidades $2\left[\operatorname{sen}\frac{\phi}{2}\right]^2 = 1-\cos\phi$ ..... (*) y $2\left[\cos\frac{\phi}{2}\right]^2 = 1+\cos\phi$

Sea $\phi = \frac{\pi}{6}$. Dado que $\frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{12}$ tenemos que

$$2\left[\cos\frac{\pi}{12}\right]^2 = 1+\cos\frac{\pi}{6}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} \qquad \text{despejando} \quad \cos\frac{\pi}{12}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} \qquad \text{dado que} \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

Análogamente, si $\phi = \frac{\pi}{4}$, entonces $\frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{8}$ y, sustituyendo en la identidad (*) tenemos

$$2\left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right]^2 = 1 - \cos\frac{\pi}{4}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} \qquad \text{despejando} \quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \qquad \text{dado que} \quad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

Ejemplo .

Calcular el valor exacto del sen75° y cos105°.

Solución.

Como $75° = 120° - 45°$ entonces $\operatorname{sen}75° = \operatorname{sen}(120° - 45°)$

$$\operatorname{sen}75° = \operatorname{sen}120°\cos45° - \operatorname{sen}45°\cos120°$$

$$\operatorname{sen}75° = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left[-\frac{1}{2}\right]$$

por lo tanto $\operatorname{sen}75° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Análogamente, como $105° = 60° + 45°$ entonces

$\cos105° = \cos(60° + 45°)$

$\cos105° = \cos60°\cos45° - \operatorname{sen}60°\operatorname{sen}45°$

$\cos105° = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

por lo tanto $\cos105° = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Ejemplo .

Verificar la identidad $\operatorname{sen}\left[\theta - \frac{\pi}{2}\right] = -\cos\theta$, para $\theta = \frac{\pi}{4}$

Solución.

$$\operatorname{sen}\left[\theta - \frac{\pi}{2}\right] = \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right] = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4}$$

Ejemplo .

Demostrar la identidad $\operatorname{sen}(\theta+\pi) = -\operatorname{sen}\theta$

$\operatorname{sen}(\theta+\pi) = \operatorname{sen}\theta\cos\pi + \operatorname{sen}\pi\cos\theta = -\operatorname{sen}\theta$

Ejemplo.

Encontrar los valores $\cos\theta$ y $\tan\theta$ si $\operatorname{sen}\theta = -\frac{5}{13}$ y $\tan\theta > 0$

Solución.

Como $\operatorname{sen}\theta = -\frac{5}{13}$ y $(\operatorname{sen}\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$, al sustituir el

valor del seno en la última identidad resulta que $(\cos\theta)^2 = 1 - \left[-\frac{5}{13}\right]^2 = \frac{144}{169}$

$\cos\theta = \pm\sqrt{\frac{144}{169}}$ despejando el $\cos\theta$

de donde $\cos\theta = \pm\frac{12}{13}$

Por hipótesis, dado que $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\tan\theta > 0$ entonces $\cos\theta < 0$ y sus valor es

$\cos\theta = -\frac{12}{13}$. Por otra parte $\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$. Por lo que al sustituir los valores del seno y

coseno en esta identidad tenemos que $\tan\theta = \frac{5}{12}$.

Ejemplo.

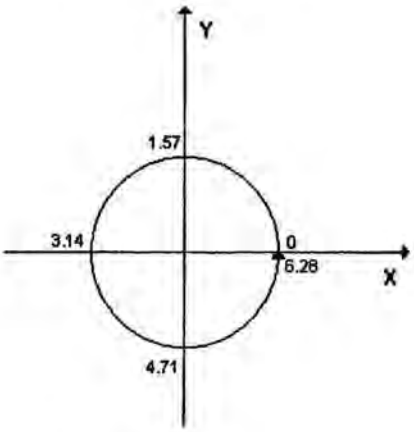
Determinar mediante el circulo unitario, cuales de las siguientes funciones son positivas y cuales son negativas.

a) $\cos\frac{2}{3}\pi$ b) $\tan(-2.2)$ c) $\sec(4)$

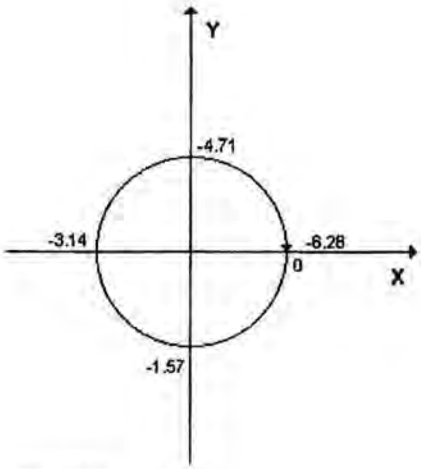
Solución.

Dado el circulo unitario **C**, éste lo podemos recorrer en sentido positivo θ en sentido negativo, y medir en radianes el recorrido como se muestra en las siguientes figuras:

(Nota: en las figuras utilizamos valores aproximadas para $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2},$)



(Fig.21a)



(Fig.21b)

Dado que el extremo del ángulo $\frac{2}{3}\pi$ se halla en el II cuadrante concluimos que $\cos\frac{2}{3}\pi < 0$. De la misma manera como, el extremo del -2.2 de la tan (-2.2) se localiza en el III cuadrante, tan $(-2.2) > 0$.

Finalmente , como sec $(4) = \dfrac{1}{\cos(4)}$ y, el problema se reduce a considerar que el extremo del ángulo de 4 radianes se halle en el III cuadrante, y cos $(4) < 0$.

Ejemplo.

Probar que $\cos\frac{7}{6}\pi = \cos\left[-\frac{5}{6}\pi\right]$ usando valores exactos.

Solución.

Como $\frac{7}{6}\pi = \frac{6}{6}\pi + \frac{1}{6}\pi$ entonces

$$\cos\frac{7}{6}\pi = \cos\left[\frac{6}{6}\pi + \frac{1}{6}\pi\right] = \cos\pi\cos\left[\frac{1}{6}\pi\right] - \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\left[\frac{1}{6}\pi\right]$$

$$= (-1)\cdot\cos\frac{\pi}{6} - (0)\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$= -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por otra parte

$$\cos\left[-\frac{5}{6}\pi\right] = \cos\left[\frac{5}{6}\pi\right] = \cos\left[\frac{6}{6}\pi - \frac{1}{6}\pi\right] = \cos\pi\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$= (-1)\cos\frac{\pi}{6} + (0)\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$$

$$= -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

De lo anterior concluimos que $\cos\frac{7}{6}\pi = \cos\left[-\frac{5}{6}\pi\right]$

Ejemplo.

Probar la siguiente identidad $\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \operatorname{sen}\theta = \cot\theta \cdot \cos\theta$

Solución.

Desarrollando el miembro izquierdo de la igualdad tenemos:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} - \operatorname{sen}\theta = \frac{1-(\operatorname{sen}\theta)^2}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{(\cos\theta)^2}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}\cdot\cos\theta = \cot\theta\cdot\cos\theta$$

Ejemplo.

Probar que $\tan\theta \cdot \operatorname{sen}\theta = \sec\theta - \cos\theta$

Solución.

Desarrollando el miembro izquierdo de la igualdad tenemos:

$$\tan\theta\cdot\operatorname{sen}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cdot\operatorname{sen}\theta = \frac{(\operatorname{sen}\theta)^2}{\cos\theta} = \frac{1-(\cos\theta)^2}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta = \sec\theta - \cos\theta$$

1.6 Gráficas de otras Funciones Trigonométricas.

Realicemos un análisis de la gráfica de la función tangente:

. $y = \tan(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$

En primer lugar, tenemos que la tangente esta indeterminada cuando $\cos(x) = 0$.
Esto último ocurre cuando $x = \dfrac{\pi}{2}$, dado que $\text{sen}\dfrac{\pi}{2} = 1$ y $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, el valor de la tangente sería $\dfrac{1}{0}$, una indeterminación. Como el periodo de la función tangente es π, esta situación se repite cada π unidades, es decir, toda vez que

$x = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ con n un entero arbitrario. En tales casos sucede que los signos combinados del seno y el coseno de x hacen que al aproximarse x a $n\pi + \dfrac{\pi}{2}$ por la izquierda, tan (x) sea positiva y crezca ilimitadamente mientras que el hacerlo por la derecha hace que tan (x) sea negativa y decrezca ilimitadamente.

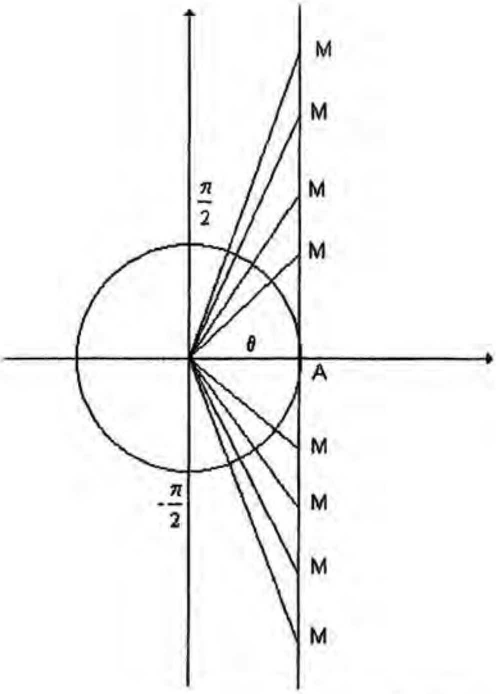
Esto lo podemos ver claramente en el circulo unitario.(Fig.22)

Cuando el ángulo x va de 0 a $\dfrac{\pi}{2}$, la longitud del segmento $\overline{AM}$ que representa el valor de la tangente crece ilimitadamente positivamente.

Esto es, cuando x va de 0 a $\dfrac{\pi}{2}$, $\tan x$ crece de 0 a $+\infty$
(dado que $\overline{AM} = \tan(x) = y$)

Y cuando el ángulo x va de 0 a $-\dfrac{\pi}{2}$, la longitud del segmento dirigido $\overline{AM}$ que representa el valor de la tangente decrece ilimitadamente.

Esto es, cuando x va de 0 a $-\dfrac{\pi}{2}$, $\tan x$ decrece de 0 a $-\infty$

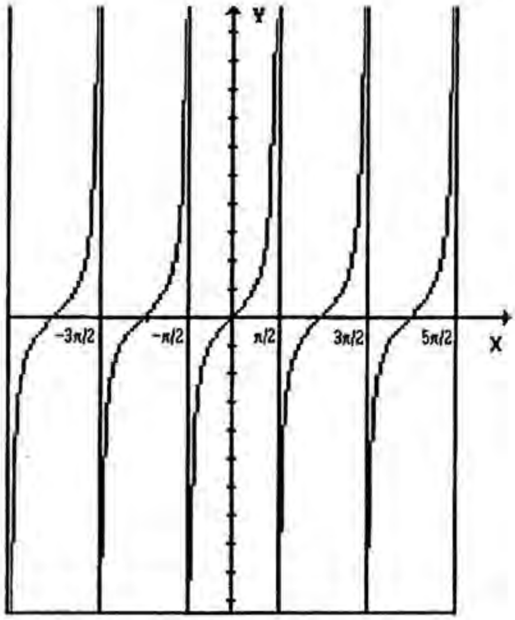


(Fig.22)

Si elaboramos una tabla con algunos valores comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ obtendremos:

x	$\frac{-\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
tan(x)	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
valor aprox.	$-\infty$	-1.7	-1	-0.6	0	0.6	1	1.7	$+\infty$

La gráfica de la función tangente es la siguiente:



(Fig.23)

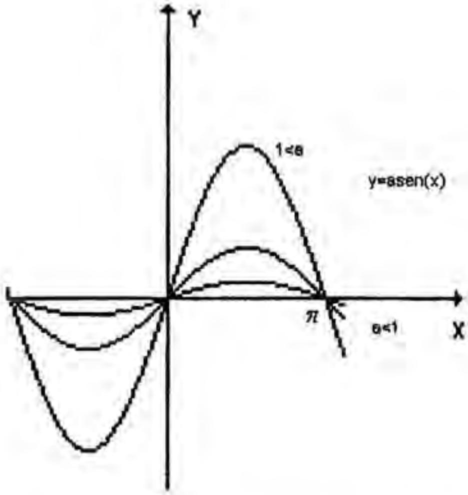
Consideremos las gráficas de algunas variantes de las funciones seno y coseno.

Analicemos la ecuación de la función $y = a \cdot \operatorname{sen} kx$ en donde a y k son constantes que modifican la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$, produciendo la primera una contracción o dilatación vertical y la segunda una contracción o dilatación horizontal.

La constante $|a|$ se denomina amplitud de la función $y = a \cdot \operatorname{sen} kx$.

Es la máxima desviación de la gráfica respecto al eje X.

Si a > 0, el efecto sobre la gráfica de y = sen x es una contracción (a < 1) o una dilatación (1 < a) vertical en la proporción a:1. (Fig.24)

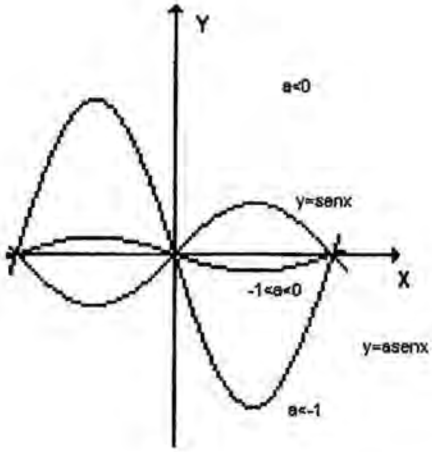


(Fig.24)

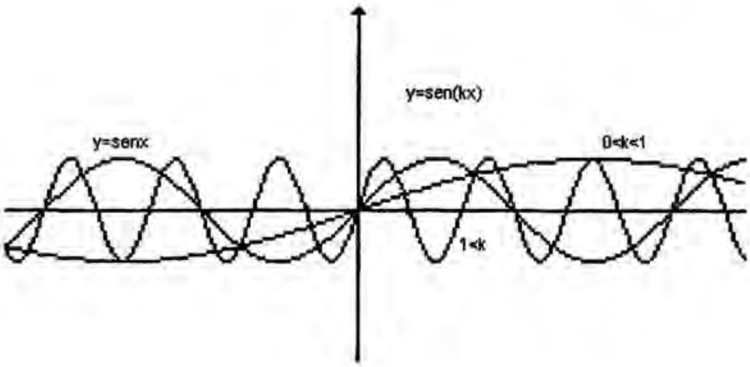
Además, si a < 0, la gráfica se invertirá respecto al eje X , es decir, será objeto de una reflexión. (Fig.25)

Por su parte, el efecto de la constante k es un cambio en el período de la función.

Si **p** es el periodo de $y = a \cdot \operatorname{sen} kx$, entonces $\mathbf{p} = \dfrac{2\pi}{k}$, puesto que cuando x varía de 0 a 2π, kx varía de 0 a $\dfrac{2\pi}{k}$. En este caso el efecto sobre la gráfica de y = sen x es una contracción (1 < k) o una dilatación (0 < k < 1) horizontal en la proporción $\dfrac{1}{k}$.
(Fig.26)

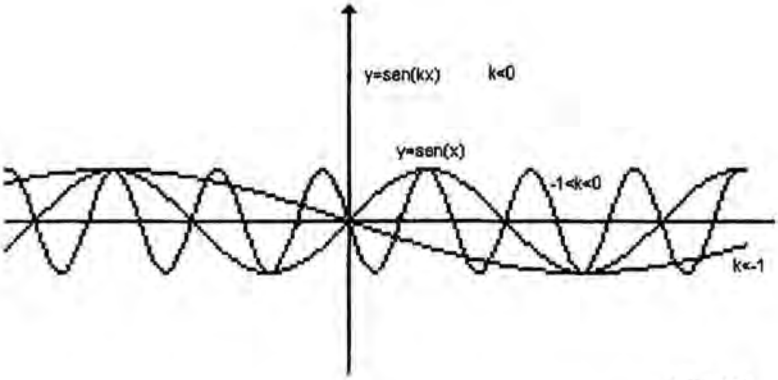


(Fig.25)



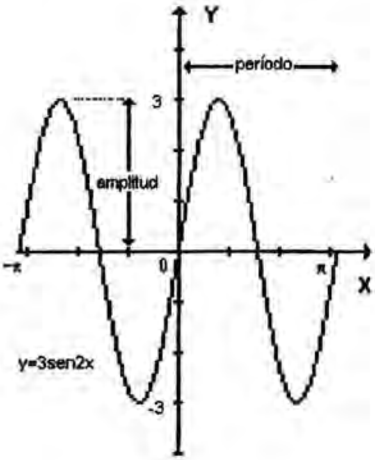
(Fig.26)

Además si k < 0, la gráfica se invertirá respecto al eje Y, es decir será objeto de una reflexión. (Fig.27)



(Fig.27)

En la figura 28 mostramos un ejemplo de la gráfica de $y = 3$ sen $2x$. El efecto combinado de las constantes 3 y 2 sobre la gráfica de $y =$ sen (x) es un cambio en su amplitud y período en las proporciones 3:1 y 1:2 respectivamente.



(Fig.28)

En resumen: para la función $y = a \operatorname{sen} kx$

1. La amplitud es $|a|$

2. El período es $\dfrac{2\pi}{k}$

3. Si $a < 0$, la curva se invierte respecto al eje X en relación a $y = \text{sen}(x)$

4. Si $k < 0$, la curva se invierte respecto al eje Y en relación a $y = \text{sen}(x)$

5. Para la función $y = a \cos kx$ se siguen los mismos lineamientos dado que seno y coseno son idénticas salvo por su desfasamiento.

En general al examinar una función nos interesa saber dos cuestiones :

1. ¿Para qué valores de la variable independiente está definida la función?
2. ¿Cuáles valores puede adoptar la variable dependiente?

De este planteamiento surge la siguiente definición.

Definición. Sea y = f(x) una función. Se llama *dominio de f* al conjunto de valores de la variable independiente x para los que la función está definida, y *rango de f* al conjunto de valores que adopta la variable dependiente y cuando x recorre todo su dominio.

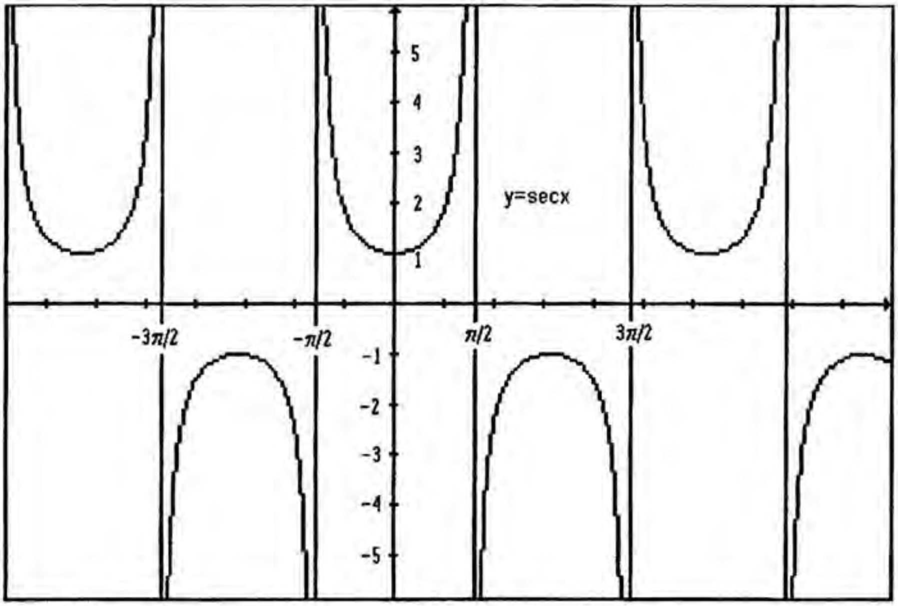
Por ejemplo, el dominio de la función seno es el conjunto de todos los números reales, mientras que su rango es el intervalo cerrado [-1,1].

Con estos conceptos podemos trazar las gráficas de las funciones cotangente, secante, y cosecante apoyándonos en el hecho de que estas funciones son recíprocas de la tangente, el coseno y el seno, respectivamente, y sus valores son inversos multiplicativos de los mencionados para cada ángulo x

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} \qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad \csc(x) = \frac{1}{\text{sen}(x)}$$

Sus gráficas las podemos trazar usando los valores recíprocos de las ordenadas de la tangente, el coseno y el seno. Además de apoyarnos en la tabla trigonométrica. (Fig.29)

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
sec(x)	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞
valor aprox	∞	2	1.4	1.2	1	1.2	1.4	2	∞



(Fig.29)

La tabla de valores para la función sec (x) la construimos con base en la función coseno considerando los recíprocos de sus valores y arcos comprendidos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$

En resumen, gráfica de y = sec (x)

Dominio: Todos los números reales salvo los de la forma $\frac{\pi}{2}+n\pi$

Rango: $(-\infty,-1]\cup[+1,\infty)$

Periodo: 2π

Paridad: Función par, sec (−x) = sec (x)

Asíntotas: $x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, n un número positivo.

1.7 Funciones Trigonométricas Inversas y sus Gráficas.

A ecuaciones tales como sec (x) = $\frac{1}{2}$ o 3 sen (x) – 4 cos (x) = 5 se les llama ecuaciones trigonométricas.

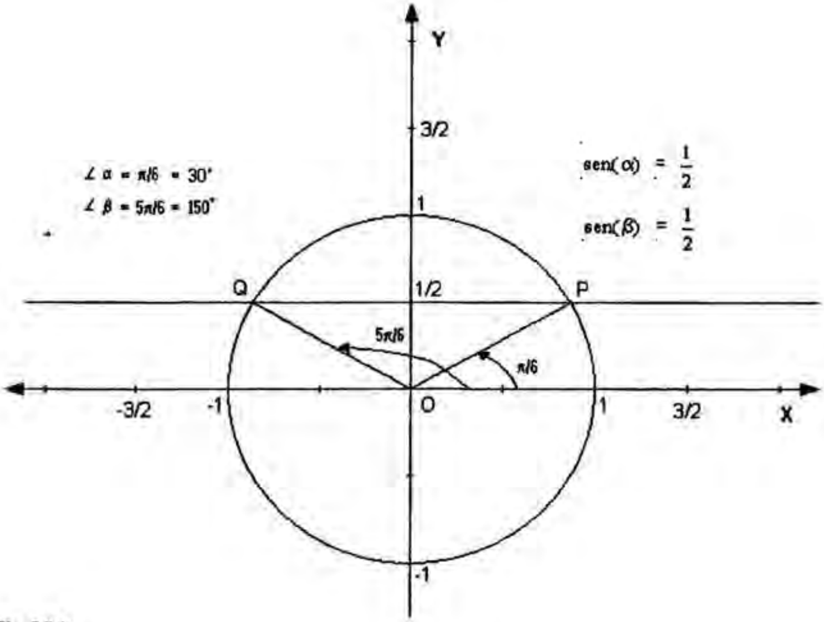
En ellas se pide encontrar la medida del ángulo **x** dado el valor de la función. Por lo general las ecuaciones trigonométricas tienen una infinidad de soluciones en caso de tener alguna, debido a la periodicidad.

Ejemplo.

Encontremos el conjunto solución de la ecuación trigonométrica sen (x) = $\frac{1}{2}$

Calculemos gráficamente todos los valores de **x** entre 0 y 2π que satisface la ecuación.

Tracemos en la circunferencia unitaria con centro en O una línea horizontal por $y = \frac{1}{2}$



(Fig.30)

Esta interceptará a la circunferencia en dos puntos P y Q con la propiedad de que los segmentos $\overline{OP}$ y $\overline{OQ}$ son los lados terminales de dos ángulos α y β tales que $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}$. Como sabemos, estos ángulos son $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$ y son los únicos entre 0 y 2π con esta propiedad. (Fig.30)

Como la función es periódica, el conjunto solución de sen (x) = $\frac{1}{2}$ es :

$$\{ x \ / \ x = \left[\frac{\pi}{6} + 2n\pi\right] \ ; \ n \in Z \ \} \ \cup \ \{ x \ / \ x = \left[\frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right] \ ; \ n \in Z \ \}$$

A este conjunto infinito se le da el nombre de $\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}$, que se lee " arco cuyo seno es $\frac{1}{2}$ "

En este caso $\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \{ \ldots\ldots\ldots \frac{-23\pi}{6}, \frac{-19\pi}{6}, \frac{-11\pi}{6}, \frac{-7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{25\pi}{6} \ldots\ldots\ldots \}$

En general, arcsen (k) denota al conjunto de números para los que el valor del seno es k es decir, al conjunto solución de la ecuación sen (x) = k . Los conjuntos arccos (k) , arctan (k), arccot (k), etc. se definen en forma análoga.

Como se puede ver en el ejemplo anterior, para determinar ángulos para los que una función trigonométrica toma un valor predeterminado podemos proceder mediante una construcción geométrica.

El procedimiento anterior tiene el defecto de proporcionar en general más de una solución al problema. Si lo que esperamos es un único ángulo, lo que debemos hacer es restringir el dominio de la función para que cada valor del rango corresponda un solo elemento del dominio.

Limitemos el dominio de la función coseno para cada ecuación de la forma cos (x) = k tenga a lo más una solución x . Nótese que cuando x varía de 0 a π la función coseno toma cada valor de su rango una sola vez. Por lo tanto, si sólo consideramos valores de x entre 0 y π , la ecuación cos (x) = k tendrá una única solución para cada k entre 1 y -1. Podemos entonces definir una función que llamaremos Arccos como sigue:

Arccos (y) = x si y solo si cos (x) = y y $0 \le x \le \pi$

En otras palabras, la función Arccos asocia a cada número k del intervalo $[-1, 1]$ el único número x del intervalo $[0, \pi]$ con la propiedad de que $\cos(x) = k$.

Nótese que para distinguir entre el conjunto arccos y la función Arccos, hemos escrito en minúscula la primera letra del conjunto y en mayúscula la primera letra de la función.

Sabemos que la relación entre dos cantidades se pueden pensar de dos formas distintas: a la primera como función de la segunda o viceversa.

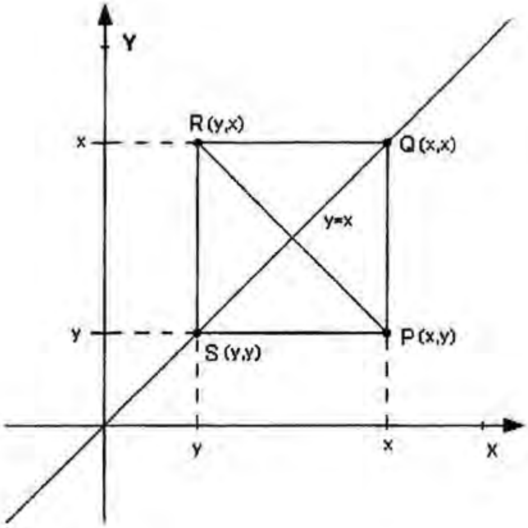
De esta manera, si tenemos la función $y = f(x)$ podemos preguntarnos si x se puede expresar como una función de y, y si es el caso la función $y = f(x)$ se puede remplazar por una función inversa $x = f^{-1}(y)$

Algebraicamente, esto equivale a permutar abscisa y ordenada de cada punto de la gráfica de $y = f(x)$, pues ahora $f(x)$ se encuentra en el dominio de la función inversa (representado en el eje horizontal) y x en el rango (representado en el eje vertical). En cambio geométricamente equivale a reflejar la gráfica de la función $y = f(x)$ respecto a la línea recta $y = x$.

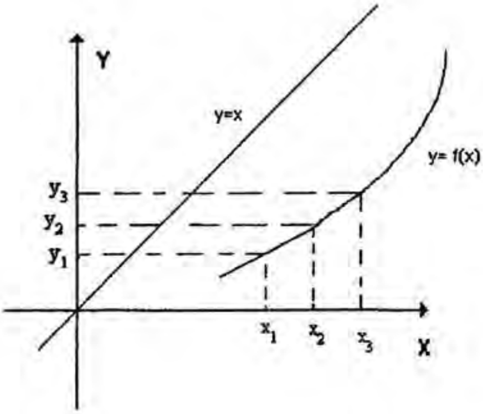
La figura 31 nos muestra que los puntos P(x, y) y R(x, y) que resultan de intercambiar las coordenadas de P son simétricos respecto a la línea $y = x$. Para ver esto, observemos que el paralelogramo PQRS es un cuadrado cuyas diagonales son la recta $y = x$ y el segmento $\overline{PR}$.

Como las diagonales de cualquier cuadrado se bisecan perpendicularmente, concluimos que P y Q se encuentran simétricamente distribuidos respecto a la recta $y = x$.

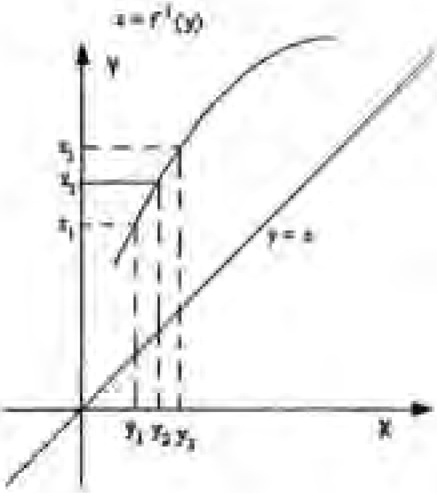
En la figura 32 mostramos la gráfica de una función $y = f(x)$, mientras que en la figura 33 exhibimos su reflexión respecto a la recta $y = x$ (incluidos los ejes), lo que nos da al mismo tiempo una representación de la función inversa $x = f^{-1}(y)$.



(Fig.31)



(Fig.32)



(Fig.33)

Para las funciones trigonométricas inversas hay dos notaciones : sen^{-1}, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$, etc., y Arcsen, Arccos, Arctan, etc.

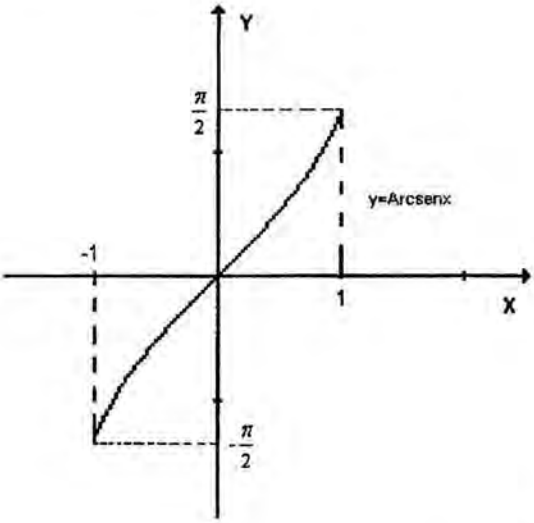
Como las funciones trigonométricas son periódicas, para definir las funciones inversas debemos seleccionar en cada caso un intervalo en el que las ecuaciónes $sen(x) = y$, $\cos(x) = y$, $\tan(x) = y$, etc. tenga no más de una solución.

Generalmente esto se hace de la siguiente manera:

Función	Dominio	Rango
Arcsen	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq \text{Arcsen}(x) \leq \frac{\pi}{2}$
Arccos	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq \text{Arccos}(x) \leq \pi$
Arctan	todos los reales	$-\frac{\pi}{2} \leq \text{Arctan}(x) \leq \frac{\pi}{2}$
Arccot	todos los reales	$0 \leq \text{Arccot}(x) \leq \pi$

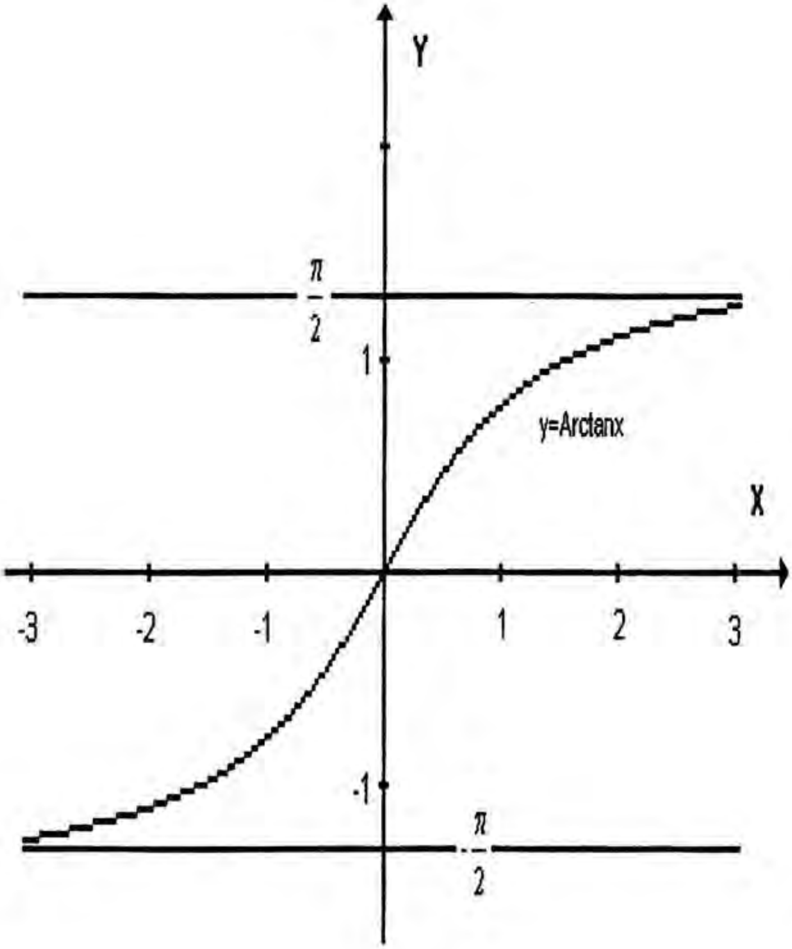
Su representación gráfica es como sigue:

Función inversa del seno.



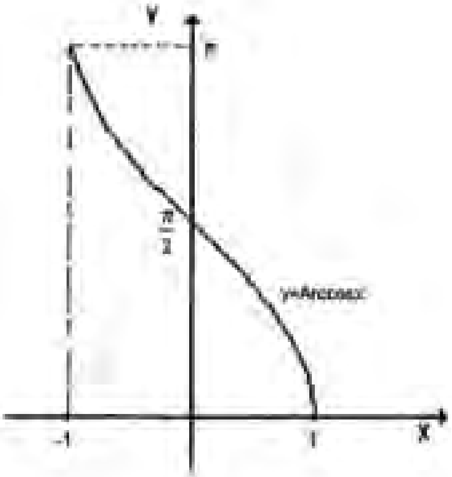
(Fig.34)

Función inversa de la tangente



(Fig.35)

Función inversa del coseno



(Fig.36)

Ejemplo.

sen(Arcsen (0.5)) = 0.5 tan(Arctan(1.2) = 1.2 cot(Arccot (2)) = 2

En general, cuando $-1 \le x \le 1$, sen(Arcsenx) = x y cos(Arccosx) = x para todos los números del intervalo.

Así mismo , tan(arctanx) = x y cot(Arccotx) = x para todos los números del intervalo.

Sin embargo , cuando cambiamos el orden de las funciones, el valor que devuelve la inversa no necesariamente es el que se tuvo en el punto de partida.

Por ejemplo, Arcsen(sen π) = Arcsen(0) = 0 $\neq$ π

Ejemplo.

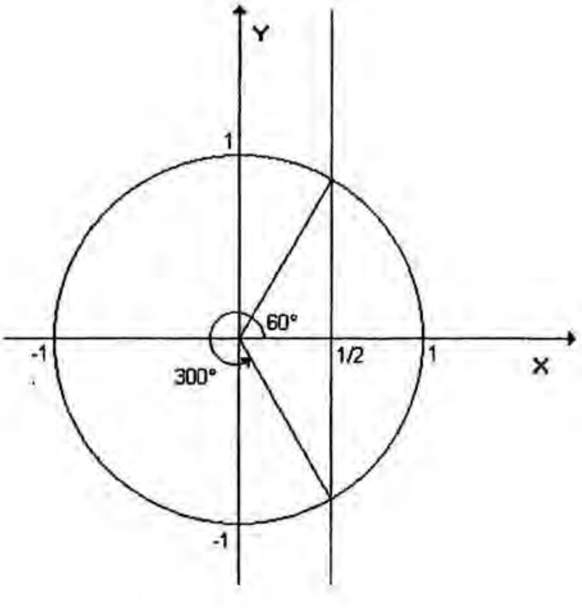
Encontrar todos los ángulos, expresados en grados, entre 0° y 360° que satisfacen $\sec\theta = 2$

Solución.

Sabemos que $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$, entonces $\dfrac{1}{\cos\theta} = 2$, de donde nuestro problema es equivalente a encontrar los ángulos que satisfacen la ecuación $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$.

Y los valores que satisfacen esta ecuación son $\theta = 60°$ y $300°$ donde $0 \le \theta < 360°$

Como lo muestra la figura 37 .



(Fig.37)

Ejemplo.

Calcula geométricamente los valores de la función inversa $\text{Arcsen}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

Solución.

Como sabemos por definición la función Arcseny tiene como dominio $-1 \le y \le 1$ y rango $-\frac{\pi}{2} \le Arcseny \le \frac{\pi}{2}$, esto es,

$\text{Arcsen}y = x \iff \text{sen}\, x = y$ y $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

Por lo tanto, lo que necesitamos es hallar el conjunto solución de la ecuación trigonométrica

$senx = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ o, lo que es lo mismo, calcular los valores exactos de $\text{Arcsen}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

donde los valores de x se encuentran entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$.

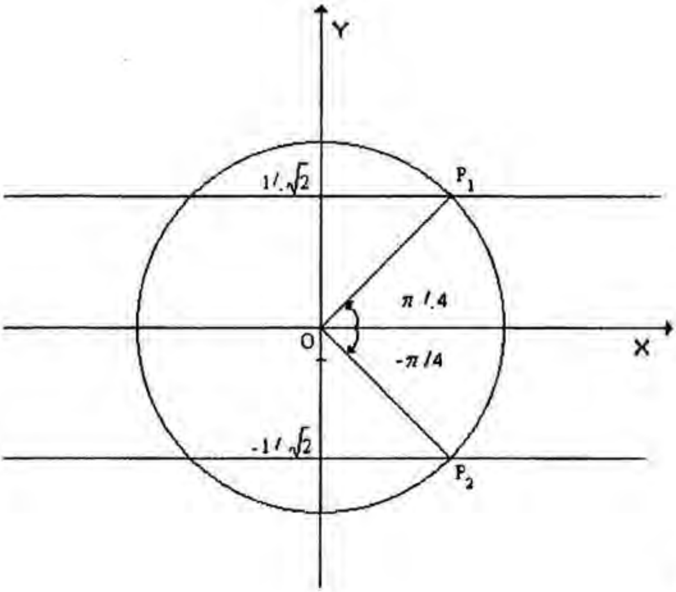
Tracemos en la circunferencia unitaria con centro en O dos líneas paralelas al eje X que pasen por $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ respectivamente.

Esta interceptará a la circunferencia en dos puntos P_1 y P_2 con la propiedad de que los segmentos $\overline{OP_1}$ y $\overline{OP_2}$ son los lados terminales de dos ángulos α y β tales que $sen\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $sen\beta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Como sabemos, estos ángulos son $\frac{\pi}{4}$ y $-\frac{\pi}{4}$ y son los únicos entre $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$ con tal propiedad

Por lo tanto, los valores del $\text{Arcsen}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ son $\frac{\pi}{4}$ y $-\frac{\pi}{4}$.

La figura 38 lo muestra geométricamente.



(Fig.38)

Ejemplo.

Resuelve la ecuación $2(\tan x)^2 = (\sec x)^2$ proporcionando el valor del ángulo que las satisface, donde $0 \leq x < \pi$

Solución.

Una manera en que se puede resolver es poner primero la ecuación en términos de senos y cósenos; así, la ecuación anterior se lleva a la forma

$$2\frac{(senx)^2}{(\cos x)^2} = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por $(\cos x)^2$ se tiene

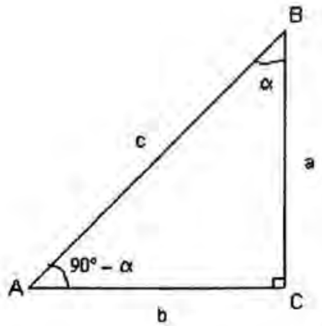
$2\ (senx)^2 = 1$ de donde $senx = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Aplicando el inverso del seno se tiene

$x = arcsen\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, donde x toma los valores de $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{5\pi}{4}$

1.8 Resolución de triángulos rectángulos.

En el triángulo rectángulo el cálculo de sus elementos se facilita por el hecho de que uno de los ángulos es recto.

Sea el triángulo rectángulo ACB con ángulos agudos α, β y lados cuyas longitudes miden a, b y c. (Fig.39)



(Fig.39)

Por ejemplo, es suficiente con conocer uno de sus ángulos agudos, digamos α, para conocer β, pues $\beta = 90° - \alpha$.

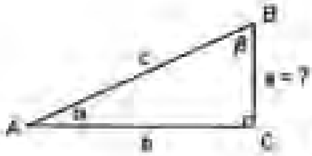
De la misma manera, si conocemos uno de sus lados y el valor de alguna función trigonométrica de alguno de sus ángulos agudos, conoceremos también las longitudes de sus otros dos lados y todos los valores de todas las funciones trigonométricas de sus ángulos.

Ejemplo:

Encontrar las longitudes de los lados y los valores de las funciones trigonométricas básicas de un triángulo rectángulo si uno de sus lados mide 7 unidades y la $\tan\alpha = 0.25$.

Solución.

Determinaremos primero la longitud del lado b. Sabiendo que la función tangente relaciona las longitudes de los catetos, tenemos que:



$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{7}{b}$$

(Fig.39a)

por consiguiente $b = \dfrac{7}{\tan\alpha} = \dfrac{7}{0.25} = 28$

Para determinar el valor de c aplicamos el teorema de Pitágoras y tenemos:

$c^2 = 7^2 + 28^2 = 833$ de donde $c = \sqrt{833} = 7\cdot\sqrt{17}$

y, ahora, con las longitudes de los tres lados del triángulo, podemos calcular los valores de las funciones trigonométricas básicas para cualquiera de sus ángulos, las cuales para α son:

$$sen\alpha = \frac{7}{7\cdot\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \qquad \cos\alpha = \frac{28}{7\cdot\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}} \qquad \tan\alpha = \frac{1}{4}$$

$\csc\alpha = \sqrt{17}$ $\qquad\qquad$ $\sec\alpha = \dfrac{\sqrt{17}}{4}$ $\qquad\qquad$ $\cot\alpha = 4$

Finalmente, para β estos valores son:

$sen\beta = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\tan\beta = 4$

$\csc\beta = \dfrac{\sqrt{17}}{4}$ $\qquad$ $\sec\beta = \sqrt{17}$ $\qquad$ $\cot\beta = \dfrac{1}{4}$

1.9 Resolución de triángulos arbitrarios.

Podemos resolver triángulos arbitrarios haciendo uso de las funciones trigonométricas.

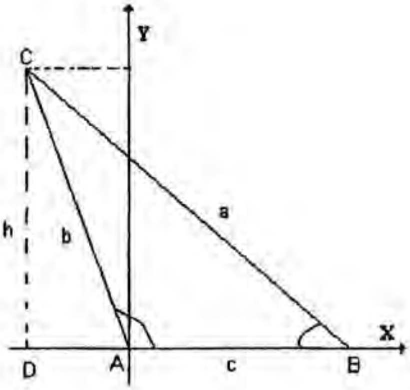
Para ello, es necesario establecer dos propiedades de los triángulos conocidas como Ley de los Senos y Ley de los Cósenos.

Ley de los Senos se basa en el hecho de que la altura de un triángulo se puede escribir como el producto del seno de cualquier ángulo de la base por uno de sus lados adyacentes.

En si, lo que esta ley dice es que los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

Consideremos un triángulo ABC y un sistema coordenado XY con origen en A. (Fig.40)

Denotemos con a, b, c los lados opuestos a los ángulos A, B y C, respectivamente.



(Fig.40)

La ordenada del vértice C es a la vez la altura h del triángulo ABC, y el segmento AC es el lado terminal del ángulo A, por lo que la altura h se puede escribir como $b \cdot senA$.
Por otro lado h es también la longitud del cateto CD del triángulo rectángulo CDB, de donde llegamos a la conclusión de que h también es igual a $a \cdot senB$.
Por consiguiente

$b \cdot senA = a \cdot senB$ o bien $\dfrac{a}{senA} = \dfrac{b}{senB}$

Si ahora consideramos la altura desde B, repitiendo el argumento llegaríamos a la conclusión de que $c \cdot senA = a \cdot senC$. Además, el argumento no variaría en nada si el ángulo considerado fuese agudo en vez de oblicuo.

Definición. **Ley de Senos.**

En cualquier triángulo ABC, $\dfrac{a}{senA} = \dfrac{b}{senB} = \dfrac{c}{senC}$ esto es, las longitudes de los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

Esta ley es muy útil en la resolución de triángulos cuando se conocen:

- dos lados de un triángulo y el ángulo opuesto a uno de ellos, o
- dos ángulos de un triángulo y el lado opuesto a uno de ellos.

Ejemplo 23.

De un triángulo sabemos que dos de sus lados miden a = 5 unidades y b = 10 unidades y A = 20°. ¿Cuales son sus otros elementos?

Solución.

Sea el triángulo ABC, como se muestra en la figura 41.

(Fig.41)

Aplicando la Ley de los Senos a los ángulos A y B , tenemos:

$$\frac{senB}{b} = \frac{senA}{a} \qquad \text{de donde} \qquad senB = \frac{b \cdot senA}{a} = \frac{10 \cdot (sen(20°))}{5}$$

$$senB = \frac{10 \cdot (0.342)}{5} = 0.684$$

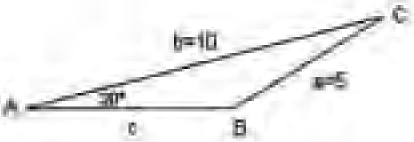
por lo tanto B= arcsen(0.684)

B= 43°10'

Hay otro valor para B si tomamos un ángulo cuyo valor se encuentra entre $\frac{\pi}{2}$ y π.

Dicho valor sería B = 136°50'

Por tanto, hay otro triángulo que satisface las condiciones del problema, como lo muestra la siguiente figura.



(Fig.42)

En resumen, si tratamos de construir con estos valores un triángulo, encontraremos que hay dos triángulos posibles, pues para B hay dos posibles valores.

En el ejemplo resolvamos el primer caso, dejando el segundo como ejercicio para el lector.

Para hallar el valor del ángulo C, tenemos que $C = 180° - (A + B)$, por ser A, B y C ángulos interiores de un triángulo.

De lo cual $C = 180° - (20° + 43°10') = 116° 50' 34''$

Entonces, aplicando la Ley de los Senos a los ángulos A y C, tenemos:

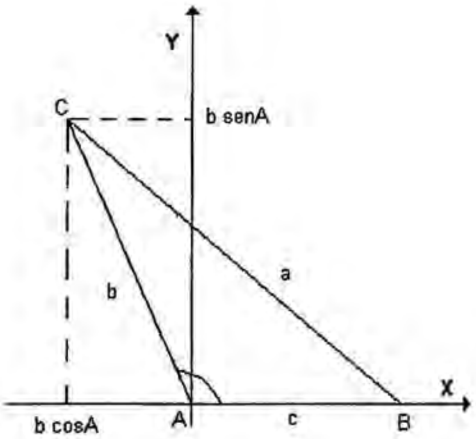
$$\frac{c}{senC} = \frac{a}{senA} \quad \text{de donde} \quad c = \frac{a \cdot senC}{senA} = \frac{5 \cdot (0.892)}{0.342} = 13.041$$

Por lo tanto $c = 13.041$

Ley de los Cósenos.

La Ley de los Cósenos es una generalización del teorema de Pitágoras, esta determina que en cualquier triángulo la longitud de uno de sus lados se puede calcular conociendo la longitud de los otros dos lados y el coseno del ángulo opuesto.

Consideremos un triángulo ABC y un sistema de coordenadas XY con origen en A, como lo muestra la figura 43 . De la misma manera denotemos con a, b, c los lados opuestos a los ángulos A, B, C, respectivamente.



(Fig.43)

Las coordenadas de C en términos de las funciones seno y coseno son: C(b cosA, b senA)
Por su parte, el punto B se puede escribir como B(c,0). Ahora aplicando la fórmula de distancia entre los puntos C y B, podemos determinar el valor de a^2 como sigue:

$$a^2 = d(B,C) = \sqrt{(c - b\cdot\cos A)^2 + (b\cdot senA)^2}$$

$a^2 = c^2 - 2bc\cdot\cos A + b^2\cdot\cos A^2 + b^2\cdot senA^2$ desarrollando el binomio

$a^2 = b^2\cdot(\cos A^2 + senA^2) + c^2 - 2bc\cdot\cos A$ factorizando b^2

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$ dado que $\cos A^2 + senA^2 = 1$

con lo que tenemos La ley de los Cosenos.

Ley de los Cósenos. Para todo triángulo ABC, con lados a, b, c y ángulos opuestos a estos A, B, C se cumple.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos B$$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$

es decir , en cualquier triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos dos veces el producto de estos lados por el coseno del ángulo opuesto.

La demostración para los otros dos lados b y c del triángulo no es distinta a la anterior : Basta con elegir como origen los vértices B y C y repetir el argumento.
Por otra parte, si en las fórmulas anteriores despejamos el valor del coseno del ángulo, obtenemos expresiones para el cálculo de los cósenos de los ángulos interiores de un triángulo en función de las longitudes de los lados:

Esta ley es muy útil en la resolución de triángulos cuando se conocen:

-dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido entre ellos, o
-los tres lados de un triángulo.

Ejemplo.

Resolver el triángulo en el que las medidas de los lados son, a = 16.47, b = 25.49, c = 33.47

Solución.

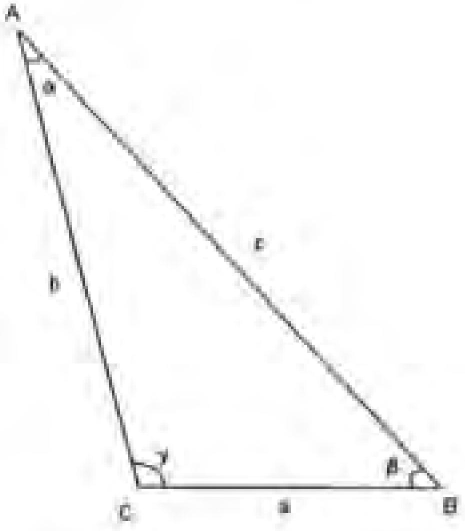
Este problema requiere de la ley de los cósenos, para lo cual encontramos primero

$$a^2 = 16.47^2 = 271.261$$
$$b^2 = 25.49^2 = 649.74$$
$$c^2 = 33.77^2 = 1.14 * 10^3$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(649.74) + (1140.4) - (271.261)}{2 \cdot (25.49)(33.47)} = 0.89 \quad \text{de donde } \alpha = 28°5'$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{(271.261) + (1140.4) - (649.74)}{2 \cdot (16.47)(33.47)} = 0.691 \quad \text{de donde } \beta = 46°46'$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(271.261) + (649.74) - (1140.4)}{2 \cdot (16.47)(25.49)} = -0.261 \quad \text{de donde } \gamma = 105°9'$$



(Fig.44)

EJERCICIOS.

1.- Transformar de grados a radianes y viceversa:

a) 28°15' b) 53° 45' c) 100° d) 71° 27' 56" e) 29° 32' 23" f) 1/7

g) $\sqrt{3}$ h) 23/4 i) 1.2 j) $\frac{\pi}{9}$ k) $\frac{15\pi}{7}$ l) $\frac{3\pi - 5}{6}$ m) $\frac{\pi - 1}{5}$

2.- Dibujar los siguientes ángulos, indicando el sentido y la amplitud de rotación de cada uno de ellos. Encuentre para cada ángulo, dos ángulos coterminales uno positivo y otro negativo.

a) $\angle AOB = 70°$ b) $\angle \alpha = 120°$ c) $\angle \alpha = \frac{\pi}{6}$ d) $\angle MNO = 225°$

3.- Dado el valor de cada una de las siguientes funciones trigonométricas. Calcular las demás funciones.

a) $\operatorname{sen}\alpha = 0{,}125$ b) $\cos\beta = \frac{2}{3}$ c) $\tan\gamma = 2$ d) $\cot\alpha = \frac{1}{2}$

4.- Encontrar el valor de las siguientes funciones de ángulos negativos.

a) $\operatorname{sen}(-124°)$ b) $\cos(-293°10')$ c) $\tan\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$ d) $\cot\left(\frac{-13\pi}{12}\right)$

5.- Deducir las siguientes identidades.

a) $\cos 3\theta = \cos\theta^3 - 3\cdot\operatorname{sen}\theta^2\cos\theta = 4\cdot\cos\theta^3 - 3\cdot\cos\theta$

b) $\operatorname{sen}3\theta = -\left(\operatorname{sen}\theta^3\right) + 3\cdot\cos\theta^2\operatorname{sen}\theta = -4\cdot\operatorname{sen}\theta^3 + 3\cdot\operatorname{sen}\theta$

c) $\cos 4\theta = \cos\theta^4 + \operatorname{sen}\theta^4 - 6\cdot\operatorname{sen}\theta^2\cdot\cos\theta^2 = 8\cdot\cos\theta^4 - 8\cdot\cos\theta^2 + 1$

d) $\operatorname{sen}5\theta = 16\cdot\operatorname{sen}\theta^5 - 20\cdot\operatorname{sen}\theta^3 + 5\cdot\operatorname{sen}\theta$

6.-Deducir las siguientes igualdades

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ b) $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\tan\left(\frac{13\pi}{12}\right) = 1$ d) $\csc\left(\frac{17\pi}{12}\right) = -\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$

7.- Proporcionar valores exactos para

a) $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ b) $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ c) $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

d) $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ e) $\operatorname{sen}\left(\frac{17\pi}{12}\right)$ f) $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

8.- Demostrar las siguientes igualdades.

a) $\operatorname{sen}\Phi = \operatorname{sen}\left(\Phi + \frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \Phi\right)$

b) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2}\right) = 2\tan\Phi + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right)$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \Phi\right) = \dfrac{\sqrt{3}\cdot\cos\Phi - \operatorname{sen}\Phi}{2}$

d) $(\tan\Phi + \cot\Phi)\cdot\operatorname{sen}\Phi\cdot\cos\Phi = 1$

f) $\tan\Phi^2 - \operatorname{sen}\Phi^2 = \dfrac{\operatorname{sen}\Phi^4}{\cos\Phi^2}$

g) $\operatorname{sen}\Phi^4 - \cos\Phi^4 = \operatorname{sen}\Phi^2 - \cos\Phi^2$

9.- Graficar las siguientes funciones trigonométricas.

a) $y = \cot\alpha$ $\quad 0 \le \alpha < 2\cdot\pi$

b) $y = 2\cdot\operatorname{sen}\alpha$ $\quad 0 \le \alpha < 2\cdot\pi$

c) $y = 4\cdot\cos 3\alpha$ $\quad 0 \le \alpha < \pi$

10.- Calcular:

a) $\arcsen\left(\frac{1}{2}\right) + \arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $\arcsen\left(\sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

c) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ d) $\sen\left(\arccos\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

11.- Graficar las funciones inversas.

a) $y = \cot x^{-1}$ b) $y = \sec x^{-1}$ c) $y = \csc x^{-1}$

12.- Resolver las siguientes ecuaciones proporcionando el valor del ángulo que las satisface en el intervalo $0 \le x < 2\pi$

a) $2 \cdot \sen x + \cos x^2 = \frac{7}{4}$ b) $3 \cdot \tan x + \frac{3}{\tan x} = 4\sqrt{3}$

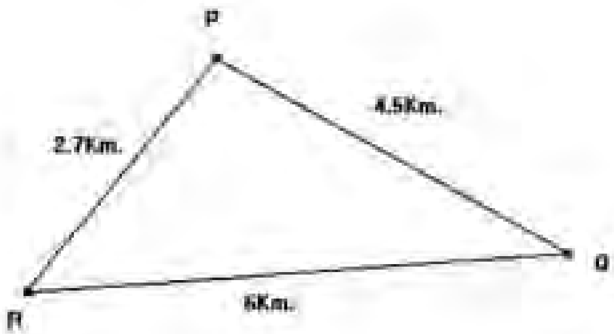
c) $\sen x^2 = 3 \cdot \cos x^2$ d) $4 \cdot \cos x - 3 \cdot \sec x = 0$

e) $2 \cdot \cos x^2 - 3\cos x + 2 = 0$ f) $\sen x = \frac{1}{2} \cdot \csc x$

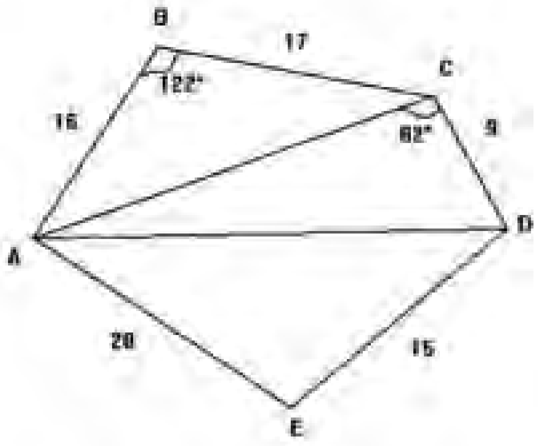
g) $4 \cdot \cos x = \sec x$ h) $\sec x = 2 \cdot \cos x$

13.- Resolver los siguientes problemas.

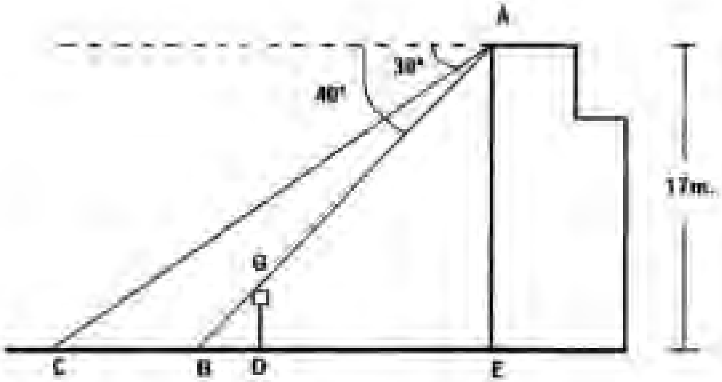
A) En un mapa se aprecian los puntos P, Q y R unidos por sendas carreteras rectas. Con los datos que se dan en la siguiente figura. ¿Cuál es la medida del ángulo que forman las carreteras de los pueblos PQ y PR ?



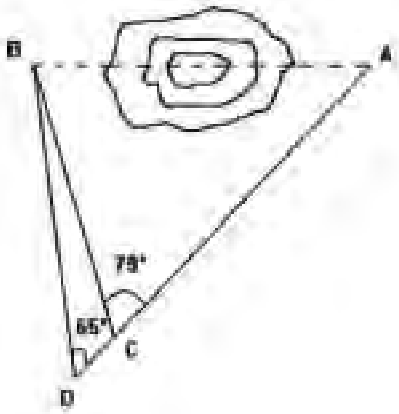
2.- Calcular las medidas de las diagonales AC y AD de un pentágono irregular ABCDE de acuerdo con los datos que se presentan en la figura siguiente.



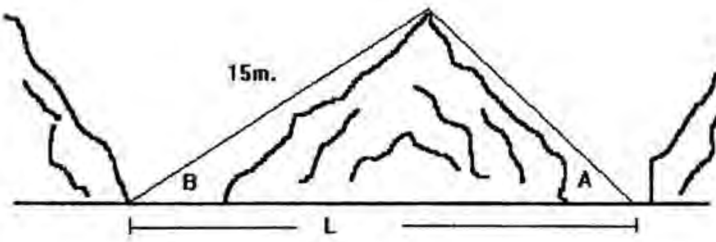
3.- El ángulo de depresión, visto desde un punto A de la azotea de un edificio por la que se aprecia la parte alta de un semáforo es de 40° y el ángulo de depresión desde A a un punto C de la calle es de 30°.
¿ Cuál es la altura del semáforo si se sabe que CB=2BD y que la altura del edificio es de 17m.?



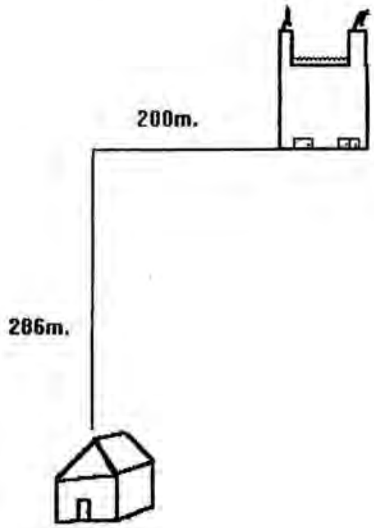
4.- Se desea calcular la distancia AB existente entre dos puntos inaccesibles A y B. Para ello se localizan dos puntos alineados C y D, en relación al punto A y que sean visibles desde el punto B. Se sabe que < ADB = 65° < ACB = 79° , CA = 124m. y DA = 156m.



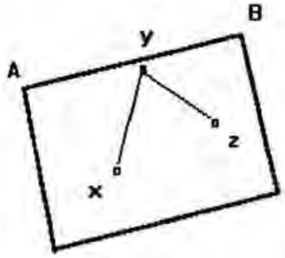
5.- Un islote en medio de un río determina desde su punto más alto visuales a las orillas opuestas B= 29° 18' y A= 32° 06'. Si la distancia de una de las visuales a la orilla izquierda mide 156m.
¿ Cuál es la anchura del río en esa zona ?



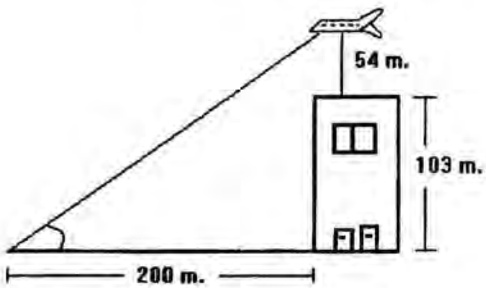
6.- Debido a un accidente en una factoría se tuvieron que desalojar a las personas que estuvieran dentro de un radio de 402 metros de la factoría. Una familia vivía a 200 metros al este y a 286 metros al sur de la fábrica. Se desea saber si se tuvo que desalojar o no la casa.



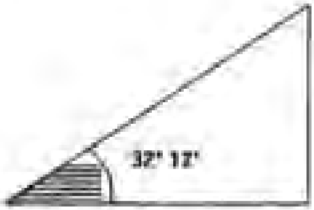
7.- En una mesa de billar la bola x pegará en el punto y de la banda AB, para rebotar y pegar a la bola z que dista 0.65m de la bola x.
¿Con qué ángulo debe rebotar la bola x en la banda AB, si se conoce que que xy = 0.43 m. y yz = 0.82 m.?



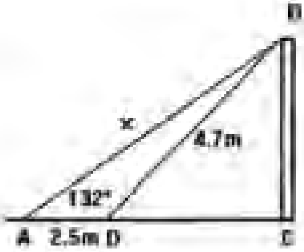
8.- Durante un aterrizaje el piloto de un avión desea pasar 54 metros arriba de un edificio de 103 metros de altura y tocar tierra a 200 metros de distancia del edificio. Encontrar el ángulo de descenso.



9.- Un estadio de futbol se planea construir con un ángulo ascendente en las gradas de 32° 12' con la horizontal ; si cada 0.79 metros (horizontalmente) puede haber una fila de asientos y se desean construir 27 filas, ¿Qué altura deberá tener el estadio?



10.- Un poste BC está sujeto por dos cables de tensión AB y DB. ¿Cuál es la longitud del cable AB?



II.- Graficación

2.1 Productos Cartesianos

El producto cartesiano $A \times B$, de los conjuntos A y B se define como el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) en los cuales la primera componente x, es elemento de A y la segunda componente, y , es elemento de B.

Por ejemplo, si A = { 1, 2, 3 } y B = { a, b, c } entonces

$A \times B$ = { (1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c) }

En geometría analítica, un caso importante es el producto cartesiano $R \times R$ que denotaremos con R^2 , y que por definición es el conjunto

$R^2 = \{(x, y) \ / \ x \in R \quad y \quad y \in R\}$ donde R es el conjunto de números reales

De hecho cada par ordenado en R^2 se corresponde en forma unívoca con un punto P del plano, a saber, aquel punto del que x e y son sus coordenadas. La importancia de este concepto radica en que los objetos geométricos con los que trata la geometría analítica plana se pueden considerar como subconjuntos de R^2 . A tales subconjuntos se les conoce comúnmente como "funciones y relaciones en R".

2.2 Funciones y Relaciones

Consideramos una relación entre dos variables x y y asociando a ciertos valores de x uno o más valores de y.

Por ejemplo. $y = \pm\sqrt{x}$, si $x = 4$, entonces $y = 2$ o $y = -2$

Esta correspondencia define un conjunto de pares ordenados (x, y) la cual llamamos una *relación*.

El anterior es un ejemplo de una *relación* de acuerdo a la siguiente definición.

<u>Definición</u>.- Una *relación* R de A en B, es un conjunto de pares ordenados (a, b) con la propiedad de que $a \in A$ y $b \in B$ (se sobrentiende que para cada $a \in A$ hay al menos un $b \in B$ tal que $(a,b) \in R$)
Al conjunto A se le llama Dominio de R y se denota con D_R, al conjunto B se le llama rango de R.

En la matemática es frecuente tratar con la interdependencia de dos variables.
Por ejemplo, si "x" es la variable que denota la longitud del lado de un cuadrado y "A" su área, entonces $A = x^2$

La fórmula anterior expresa la relación existente entre una longitud x del lado de un cuadrado, y el área A del mismo. Se dice, que A es una función de x. Nótese que la ecuación $A = x^2$ determina un conjunto de parejas ordenadas (x, x^2), donde $x > 0$, y el segundo elemento y es el cuadrado del primero.

Denotemos este conjunto de pares ordenados con f :

$$f = \{(x, y) / x > 0 \text{ y } y = x^2\}$$

Como toda función es una relación, f tiene un dominio y un rango. En este caso, D_f es el conjunto de todos los números reales positivos y el rango es el conjunto de números reales positivos.

Este es un ejemplo de una *función* de acuerdo a la siguiente definición

<u>Definición</u>.- Una relación A en B es una función si para cada elemento $a \in D_R$, hay un único elemento $b \in B$ relacionado con él.

De la definición anterior vemos que para que un conjunto de parejas ordenadas sea una función, no debe haber en él dos parejas distintas que tengan el mismo primer elemento.

Para cada $x \in D_f$ hay un único elemento y en el rango de f tal que la pareja (x, y) esta en f.
A tal "y" se le llama f evaluada en x y se escribe $y = f(x)$.

En general , a x se le llama variable independiente y a y variable dependiente.

Toda función se puede ver como un *mapeo* y cualquier conjunto B que contenga al rango es llamado un codominio de f.

En estos términos , decimos que "f mapea a D_f dentro de B"

Si B es igual al rango de f, decimos que " f mapea D_f en todo B "

De lo anterior se sigue que toda *función* es una *relación,* pero no a la inversa.
La diferencia entre una *función* y una *relación* consiste en que una *relación* R no es una función cuando hay al menos una x en el dominio a la cual le corresponde más de una y en el rango.

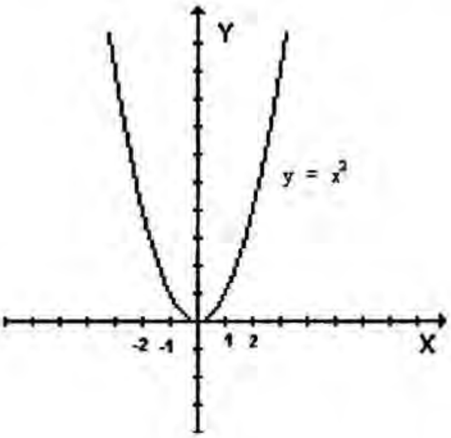
En Geometría Analítica , los dominios y codominios de relaciones son subconjuntos de R, es decir las relaciones consideradas son siempre subconjuntos de $R \times R$.

Si M es una relación de R en R, al conjunto de puntos $\{P(x,y) \mid (x,y) \in M\}$ le llamamos *gráfica de* M. El término "*gráfica*" también se refiere a la representación ilustrada o dibujo del conjunto de pares ordenados.

A continuación se presentan algunos ejemplos de funciones, relaciones y sus gráficas.

Ejemplo.

Sea $f = \{(x,y) / y = x^2\}$ La gráfica de f se muestra en la figura 47.



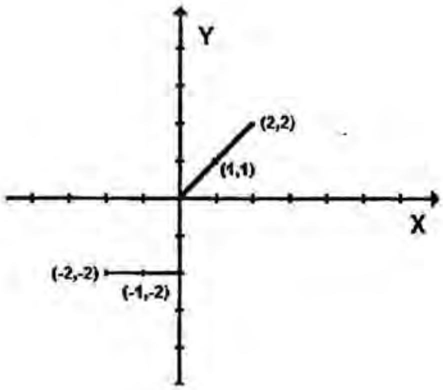
(Fig.47)

Ejemplo.

Sea $D_f = \{x / -2 \leq x \leq 2\}$, y $y = f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 2 \end{cases}$

En seguida se muestra una tabla de parejas ordenadas y el dibujo de la gráfica.
Obviamente, f es una función.

x	y
-2	-2
-1	-2
0	-2
1	1
2	2



Toda relación puede ser escrita en la forma $\{(x,y) \mid \phi(x,y)=0\}$ para alguna función ϕ de dos variables. Entonces, la ecuación $y^2 = x$ puede ser escrita como $y^2 - x = 0$, así que $\phi(x,y) = y^2 - x$.

La gráfica de una relación F debe cumplir las siguientes propiedades.

(1) Toda línea vertical que pase por el punto (x,0) , $x \in D_f$, debe interceptar a la gráfica de F en al menos un punto.
(2) Toda línea horizontal que pase por el punto (0,y) , $y \in R_f$, debe interceptar a la gráfica de F en al menos un punto.

Ejemplo.

Tracemos la gráfica de $\phi(x,y) = |x| + |y| - 1 = 0$. Primero encontremos el dominio y el rango de la relación.

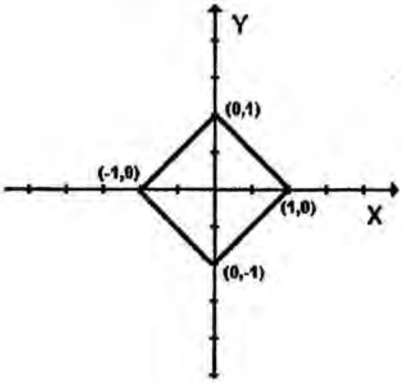
Dado que $|x| + |y| = 1$, tenemos que $|x| \leq 1$. . Para cualquier x , le corresponde y la cual debe satisfacer $|y| = 1 - |x|$ esto es, $y = \pm\ (1 - |x|)$

Dado que y existe para cada x con $|x| \leq 1$, tenemos que $D_f = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$

Similarmente, $R_f = \{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$

La tabla y la gráfica de la relación se muestran en seguida.

x	y
0	± 1
$\pm \frac{1}{4}$	$\pm \frac{3}{4}$
$\pm \frac{1}{2}$	$\pm \frac{1}{2}$
± 1	0



2.3 Técnicas de Graficación.

En el estudio de la Geometría Analítica se presentan dos problemas fundamentales.

a) Dada una ecuación representarla geométricamente, es decir, construir la gráfica correpondiente.

b) Dado un lugar geométrico, o la condición que deben cumplir los puntos del mismo, determinar su ecuación.

Ambos constituyen el problema fundamental de la Geometría Analítica.

Como veremos, después de obtener la ecuación de un lugar geométrico, es posible determinar a través del análisis de la ecuación algunas de sus características geométricas.

Primer Problema Fundamental. Gráfica de una Ecuación.

Sea $f(x, y) = 0$ la ecuación de dos variables *x* y *y*.

Hemos visto que al conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación anterior se le da el nombre de *gráfica* de la ecuación.

Podemos entonces afirmar lo siguiente:

- Si las coordenadas de un punto satisfacen una ecuación, ese punto pertenece a la gráfica de esa ecuación y, recíprocamente, si un punto está sobre la gráfica de una ecuación sus coordenadas satisfacen la ecuación.

Al trazar una gráfica, hay que tomar en cuenta que, no todas ellas forman una curva continua. Parar evitar este tipo de errores, conviene investigar la ecuación antes de proceder al trazado de la curva.

A continuación introducimos algunos conceptos que nos serán de gran utilidad al trazar una gráfica.

Simetrías.

Trataremos dos tipos de simetría.

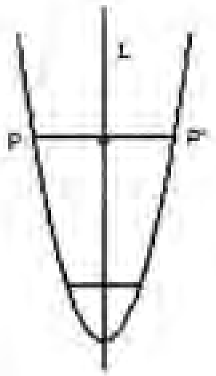
Simetría Axial (respecto a una recta)

Simetría Central (respecto a un punto)

Simetría Axial

Un punto P' es simétrico respecto a una recta L si hay un punto P en torno de L de modo que el segmento PP' es perpendicular a L y L pasa por su punto medio.

Decimos que una curva C es *simétrica* respecto a una recta L cuando para cada punto P de la curva, el simétrico respecto a L, también pertenece a la curva. (Fig.48)



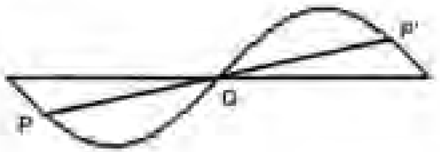
(Fig.48)

En tal caso se dice que **C** posee simetría axial y que L es un eje de simetría de **C**.

Un punto P' es simétrico respecto a un punto Q si hay un punto P en torno de Q de modo que Q sea el punto medio del segmento PP'.

Decimos que una curva C es simétrica respecto de un punto Q, cuando para cada punto P de la curva el simétrico P', también pertenece a la curva. (Fig.49)

En tal caso decimos que C posee simetría central y que Q es un centro de simetría.



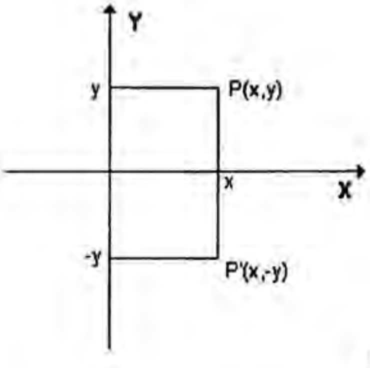
(Fig.49)

Simetría respecto al eje X.

Sea P(x,y) un punto cualquiera de la curva con ecuación $f(x,y) = 0$. Si la curva es simétrica respecto al eje X, entonces por definición el simétrico de P respecto a X también pertenece a la curva. En este caso el simétrico de P es el punto P'(x,-y) . (Fig.50)

Por lo tanto la curva $f(x, y) = 0$ es simétrica con respecto al eje X cuando para todas las parejas (x, y), $f(x, y) = 0$ si y solo si $f(x, -y) = 0$.

Esta condición se cumple obviamente cuando $f(x, y) = f(x,-y)$ es decir, cuando la expresión $f(x, y)$ no se altera al cambiar el signo de la variable y



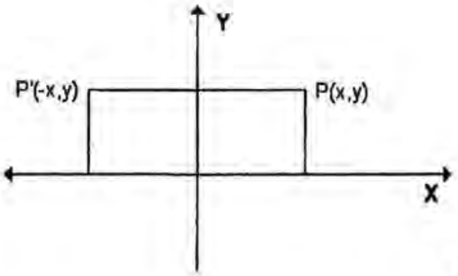
(Fig.50)

Simetría respecto al eje Y.

Sea P(x, y) un punto cualquiera de la curva con ecuación $f(x, y) = 0$. Si la curva es simétrica respecto al eje Y, entonces por definición el simétrico de P respecto a Y también pertenece a la curva. En este caso el simétrico de P es el punto P'(-x, y) . (Fig.50)

Por lo tanto la curva $f(x, y) = 0$ es simétrica con respecto al eje Y cuando para todas las parejas (x, y), $f(x, y) = 0$ si y solo si $f(-x, y) = 0$.

Esta condición se cumple obviamente cuando $f(x, y) = f(-x, y)$ es decir, cuando la expresión $f(x, y)$ no se altera al cambiar el signo de la variable x

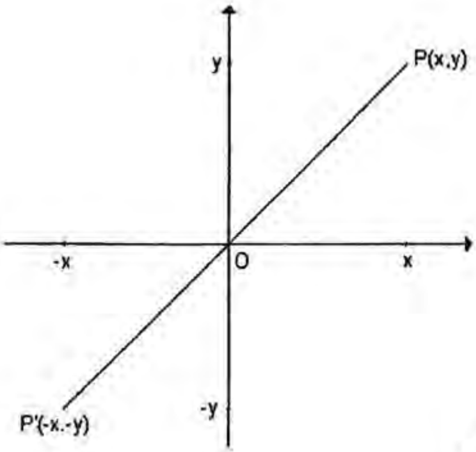


(Fig.51)

Simetría respecto al Origen.

Sea P(x, y) un punto arbitrario del plano. Si observamos la siguiente figura, veremos que su simétrico respecto a $\bar{O}$ es el punto P' (-x,-y). Conforme a lo anterior, decimos que una curva $f(x, y) = 0$ implica que $f(-x, -y) = 0$.

Como en el caso anterior, un criterio de simetría respecto a $\overline{O}$ es que la ecuación no se altere al cambiar en este caso los signos de las dos variables, es decir cuando $f(x, y) = f(-x,-y)$ (Fig.52)



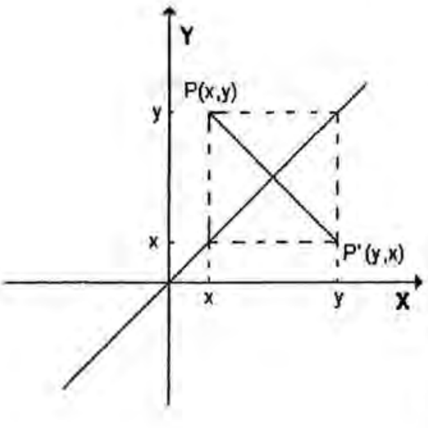
(Fig.52)

Simetría respecto a la recta $y = x$.

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la curva $f(x, y) = 0$. Si la curva es simétrica respecto a la recta con ecuación $y = x$, entonces por definición el simétrico de P respecto a la recta $y = x$ también pertenece a la curva. En este caso el simétrico de P es el punto $P'(y, x)$. (Fig.53)

Por lo tanto la curva $f(x, y) = 0$ es simétrica con respecto a la recta con ecuación $y = x$ cuando para todas las parejas (x, y), $f(x, y) = 0$ si y solo si $f(y, x) = 0$

Esta condición se cumple obviamente cuando $f(x, y) = f(y, x)$ es decir, cuando la expresión $f(x, y)$ no se altera al cambiar la variable x por la variable y, y recíprocamente al cambiar la variable y por la variable x.



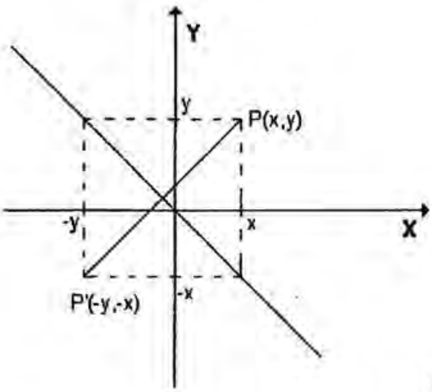
(Fig.53)

Simetría respecto a la recta $y = - x$.

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la curva con ecuación $f(x, y) = 0$. Si la curva es simétrica respecto a la recta $y = - x$, entonces por definición el simétrico de P respecto a la recta $y = - x$ también pertenece a la curva. En este caso el simétrico de P es el punto $P'(-y, -x)$. (Fig.54)

Por lo tanto la curva $f(x, y) = 0$ es simétrica con respecto a la recta con ecuación $y = -x$ cuando para todas las parejas (x, y), $f(x, y) = 0$ si y solo si $f(-y, -x) = 0$

Esta condición se cumple obviamente cuando $f(x, y) = f(-y, -x)$ es decir, cuando la expresión $f(x, y)$ no se altera al cambiar la variable x por la variable $-y$, y recíprocamente al cambiar la variable y por la variable $-x$.



(Fig.54)

En resumen. Consideremos la curva con ecuación f(x, y) = 0.

De lo anterior resumimos lo siguiente.

a) Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable y es remplazada por $-y$, la curva es simétrica con respecto al eje X.

b) Si la ecuación de una curva no se altera cuando la variable x es remplazada por $-x$, la curva es simétrica con respecto al eje Y.

c) Si la ecuación de una curva no se altera al remplazar las variables x y y por $-x$ y $-y$, respectivamente, la curva es simétrica con respecto al origen.

d) Si la ecuación de una curva no se altera al remplazar las variables x y y por y y x respectivamente, la curva es simétrica con respecto a la recta $y = x$.

e) Si la ecuación de una curva no se altera al remplazar las variables x y y por $-y$ y $-x$ respectivamente, la curva es simétrica con respecto a la recta $y = -x$.

Intersecciones con los ejes.

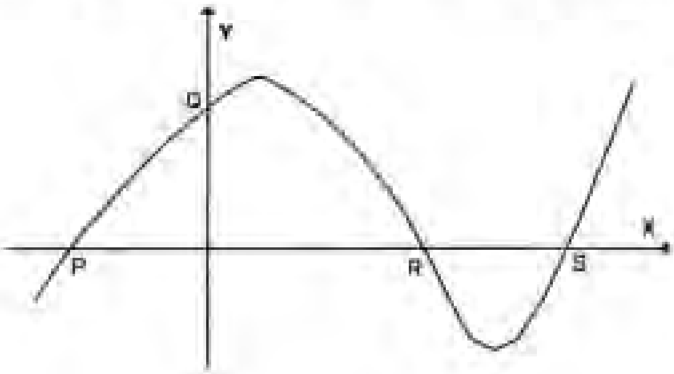
Intersección con el eje X.

Haciendo $y = 0$ en la ecuación de la curva $f(x, y) = 0$, obtenemos las soluciones de la ecuación resultante en x, que nos darán las *intersecciones* con el eje de las X.

Intersección con el eje Y.

Análogamente, haciendo en la ecuación $f(x, y) = 0$, $x = 0$, las soluciones de la ecuación resultante en y, nos darán las *intersecciones* con el eje Y.

En la figura 55 se muestran intersecciones con los ejes de una ecuación $f(x, y) = 0$



(Fig.55)

Donde P , R y S son las intersecciones con el eje X y Q es la intersección con el eje Y.

Extensión.

La extensión de una curva consiste en los intervalos de variación de la variable x e y para los que hay puntos de la curva. Por ejemplo, la extensión en X consiste en los números $\{ x \in X \mid$ hay un $y \in Y$ con la propiedad de que $f(x, y) = 0 \}$
Además de ser útil esta técnica por dos razones:

1) Da la localización general de la curva en el plano coordenado.
2) Indica, si la curva es cerrada o si es de extensión indefinida.

Asíntotas.

Definición. Si para una curva dada, hay una recta L tal que a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a la recta L decrece continuamente y tiende a cero, dicha recta L es llamada *asíntota* de la curva.

De esta definición se derivan dos situaciones :

1) una curva que tiene una asíntota no es cerrada, es decir, no tiene una extensión finita, sino que se extiende indefinidamente.

2) una curva se aproxima a la asíntota *más* y más a medida que la recorremos en una de sus ramas.

Como la asíntota es una línea recta puede tener tres posiciones particulares. Si es paralela o coincide con el eje X se llama asíntota horizontal; si es paralela o coincide con el eje Y se llama asíntota vertical ; y si no es paralela a ninguno de los ejes coordenados, se llama asíntota oblicua (la cuál estudiaremos más adelante).

Hay que hacer notar que una curva no tiene necesariamente asíntotas.
Cuando una curva tiene asíntotas, su determinación es, de gran ayuda para construir su gráfica.

Tabulación.

Una técnica simple para representar gráficamente una relación, consiste en tabular algunos puntos de la curva para tener una mejor idea de su distribución en el plano.

Ejemplo 1.

Construir la curva cuya ecuación es $x^2y-4y-8=0$ utilizando las técnicas de graficación, recién expuestas.

Solución.

Intersecciones.

Las intersecciones con el eje X las obtenemos al tomar $y=0$ en la ecuación dada. En este caso se obtiene la igualdad $-8=0$ lo cual no es posible por ningún valor de x.
Por lo tanto no hay intersecciones con el eje X.

El eje Y , si tomamos $x=0$ en la ecuación resulta la igualdad $-4y-8=0$, de dónde se sigue que $y=-2$.
Por lo tanto, el único punto de intersección con el eje Y es (0,-2).

Simetrías.

La curva será simétrica respecto del eje X, **Con el eje X**, si se cumple la condición $f(x,-y) = f(x,y)$

$f(x,-y) = x^2(-y) - 4(-y) - 8 = -x^2y + 4y - 8 \neq f(x,y)$ $\therefore$ no hay simetría con el eje X.

Con el eje Y. En este caso la condición es $f(-x,y) = f(x,y)$

$f(-x,y) = (-x)^2 y - 4y - 8 = x^2 y - 4y - 8 = f(x,y)$ $\therefore$ hay simetría con el eje Y.

Con el origen. Ahora la condición es $f(-x,-y) = f(x,y)$

$f(-x,-y) = (-x)^2(-y) - 4(-y) - 8 = -x^2y + 4y - 8 \neq f(x,y)$ $\therefore$ no hay simetría con el origen.

Con la recta y = x. El criterio es $f(y,x) = f(x,y)$

$f(y,x) = y^2x - 4x - 8 \neq f(x,y)$ $\therefore$ no hay simetría con la recta y = x.

Con la recta y = -x . En este caso la condición a cumplir es $f(-y,-x) = f(x,y)$

$f(-y,-x) = (-y)^2(-x) - 4(-x) - 8 \neq f(x,y)$ $\therefore$ no hay simetría con la recta y = -x.

Extensión.

Determinemos los intervalos de variación para los cuales x y y son reales, es decir, la extensión de la curva (si esta es cerrada, o de extensión infinita o si hay algunos intervalos para los cuales no hay gráfica).
Para ello resolvamos la ecuación para y en términos de x, y para x en términos de y.

Resolviendo para y :

$$y = \frac{8}{x^2 - 4}$$

De donde y no está definida para $x = \pm 2$

Analicemos ahora los casos en que $y > 0$ y $y < 0$ para saber en que intervalos del eje X, f(x) se encuentra arriba o abajo del eje Y. De esta manera podremos bosquejar la gráfica.

Si $y > 0$, entonces $\dfrac{8}{x^2-4} > 0$ y $x^2 - 4 > 0$

$$x^2 > 4$$
$$x > \pm\sqrt{4}$$

Por tanto, si $x > 2$ o $x < -2$, y será positiva (i.e., $y > 0$)

De manera análoga, si $y < 0$, entonces $\dfrac{8}{x^2-4} < 0$ y $x^2 - 4 < 0$

$$x^2 < 4$$
$$x < \pm\sqrt{4}$$

Por lo tanto, si $-2 < x < 2$, y es negativa (es decir, $y < 0$)

De lo anterior se sigue que la gráfica de la relación se encuentra arriba del eje X cuando x se halla en los intervalos $x > 2$ o $x < -2$ y abajo del eje X cuando x se halla en el intervalo $-2 < x < 2$.

Resolviendo para x en términos de y tenemos

$$x = \pm\sqrt{\frac{4y+8}{y}}$$

$$x = \pm 2\sqrt{\frac{y+2}{y}}$$

Esto significa que x esta definida siempre y cuando la expresión bajo el radical sea mayor o igual que cero, es decir, cuando $y \in [-\infty,-2] \cup [0,\infty]$

Asintotas

Como podemos observar y no esta definida si $x = \pm 2$, es decir, hay dos asintotas verticales cuyas ecuaciones son $x = 2$ y $x = -2$.

Por otra parte x no esta definida si $y = 0$, de donde se sigue que hay un asintota horizontal con ecuación $y = 0$.

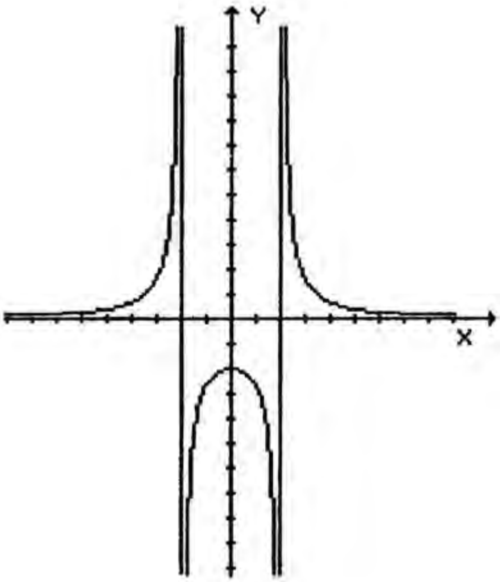
Tabulación.

Calculemos ahora algunos puntos de la gráfica, como lo muestra la siguiente tabla.

x	0	1	1.5 1.9	1.99	1.999
y	-2	-2.7	-4.6 -20.5	-200	-.2000

Trazo de la Curva.

Finalmente, y con base en el análisis anterior, trazamos la gráfica. (Fig.56)



(Fig.56)

2.4 Intersección de Curvas.

Consideremos dos ecuaciones de la forma $f(x,y)=0$ y $g(x,y)=0$

Si sus gráficas se interceptan en uno o más puntos, cada uno de estos puntos comunes se llaman *puntos de intersección*. Como un punto de intersección de dos curvas está sobre cada una de ellas, sus coordenadas deben satisfacer, simultáneamente, ambas ecuaciones.

Analíticamente, un punto de intersección es un punto cuyas coordenadas representan una solución común de las ecuaciones $f(x,y)=0$ y $g(x,y)=0$.
Además, si las ecuaciones son incompatibles, es decir, no tienen solución común, entonces sus gráficas no se intersectan.

Ejemplo.

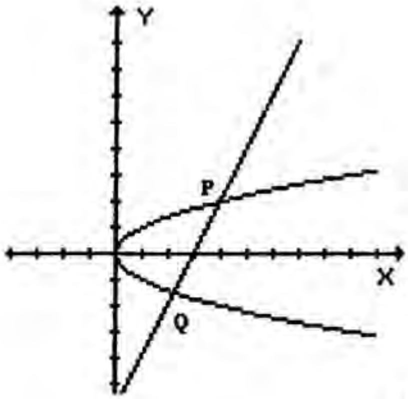
Hallar analítica y gráficamente los puntos de intersección de las curvas cuyas ecuaciones son:

$y^2-x=0$ (1) $\qquad$ $2x-y-6=0$ (2)

Despejando y en (2) tenemos $y=2x-6$; sustituyendo en (1) se obtiene la ecuación cuadrática $4x^2-25x+36=0$ cuyas raíces son $x=4$ y $x=\dfrac{9}{4}$

Por lo tanto, hay dos puntos de intersección son $P(4,2)$ y $Q\left(\dfrac{9}{4},-\dfrac{3}{2}\right)$

Gráficamente, los puntos de intersección se obtienen trazando las gráficas (1) y (2), como se muestra en la figura 57.



(Fig.57)

2.5 Lugares Geométricos.

Segundo Problema Fundamental.

Dada una figura geométrica, o la condición que deben cumplir los puntos de la misma, determinar su ecuación.

Un lugar geométrico se da, generalmente, por su definición. Por esto último entendemos una descripción de las condiciones geométricas que satisfacen sus puntos de ese lugar. Por ejemplo, para definir una curva plana podemos enunciar una propiedad P que sólo es satisfecha por los puntos de la curva.

Esta propiedad se suele enunciar mediante una ley o regla la cual cumplen los puntos de la curva.

Por ejemplo, algunas curvas se suelen definir como el lugar geométrico descrito por un punto que se mueve siguiendo una ley especificada. Así, la circunferencia se describe como el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a un punto fijo de ese plano es constante.
Hay que resaltar que un lugar geométrico no debe satisfacer necesariamente una sola condición; puede satisfacer dos o más condiciones.

Definición. Una curva es el lugar geométrico de todos aquellos puntos, y solamente de aquellos puntos, que satisfacen una o más condiciones geométricas dadas.

Ahora veamos como se determina la ecuación de un lugar geométrico en el caso de que la interpretación analítica de la condición o condiciones geométricas definen el lugar geométrico.

Para ello definamos lo que se llama *ecuación de un lugar geométrico.*

Definición: Se llama *ecuación de un lugar geométrico* plano a una ecuación de la forma f(x, y)=0 cuyas soluciones reales son todas las coordenadas x, y de aquellos puntos , y solamente de aquellos puntos que satisfacen la condición o condiciones geométricas dadas que definen el lugar geométrico.

De acuerdo con esto, el procedimiento para obtener la ecuación de un lugar geométrico es básicamente el siguiente:

1. Se supone dado un punto P, de coordenadas (x, y) que satisface la condición condiciones dadas, es decir, un punto del lugar geométrico.

2.- Se expresa, analíticamente, la condición o condiciones geométricas dadas, por medio de una ecuación ó ecuaciones en las coordenadas x y y.

3.- Se simplifica, si hace falta, la ecuación obtenida, la cual es la ecuación del lugar geométrico.

Ejemplo 1.

Un punto P(x, y) se mueve de modo que su distancia al eje de las X es igual a su distancia al punto Q(1,1).
Encuéntrese la ecuación dela curva.

Solución.

Sea $P(x, y)$ un punto de la curva .

Por hipótesis $d(P,L) = d(P,Q)$ donde L es el eje X, cuya ecuación es $y = 0$
Analíticamente esto lo expresamos como

$$\frac{|y|}{1} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

simplificando

$$y^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$$

$x^2 - 2x - 2y + 2 = 0$ que es la ecuación del lugar geométrico.

Ejemplo 2.

Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que siempre equidista de dos puntos dados A (-1,2) y B (4,-1).

Solución.

Sea $P(x,y)$ un punto de la curva. Por hipótesis $|\overline{AP}| = |\overline{BP}|$

Analíticamente esto lo podemos expresar así: d(AP)=d(BP)

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2}$$

Elevando al cuadrado

$$(x+1)^2+(y-2)^2 = (x-4)^2+(y+1)^2$$

Desarrollando y simplificando obtenemos

$$5x-3y-6=0$$

que es la ecuación del lugar geométrico.

2.6 Gráfica de una Superficie

Una *superficie* es un conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de la forma f(x, y, z) = 0.

En el capítulo anterior vimos que todo plano se representa por la siguiente ecuación.

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

la cuál tiene tres variables, que consideraremos como el caso más simple de una superficie.

Por otra parte, de la definición se concluye que si la ecuación f(x, y, z) = 0 representa un lugar geométrico, ese lugar geométrico es una superficie.
Y recíprocamente, si una superficie puede representarse analíticamente, esa representación es por medio de la ecuación f(x, y, z) = 0.

Notemos que aunque una ecuación *f(x, y, z)* contiene tres variables, la ecuación de una superficie puede contener solamente una o dos variables.

Por ejemplo, una ecuación de la forma $x = k$, en que k es una constante cualquiera, representa un plano paralelo al plano *YZ*.

Otro ejemplo es la ecuación $x^2 + y^2 = 4$ donde la variable z recorre todos los reales. Como más adelante veremos, en este caso la ecuación representa un cilindro circular recto. Por tal motivo nos referiremos a la ecuación anterior como " la superficie $x^2 + y^2 = 4$ "en relación al espacio.

Además no toda ecuación de la forma $f(x, y, z) = 0$ representa una superficie.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 + 4z^2 + 7 = 0$ no tiene soluciones en los números reales, es decir, no hay una terna (x, y, z) de números que la satisfaga.

Por otra parte la ecuación *f(x, y, z)=0* puede tener una sola solución real como por ejemplo la ecuación

$x^2 + y^2 + z^2 = 0$ que sólo es satisfecha por el origen.

Antes de construir una superficie es conveniente hacer un análisis de la misma. Conviene seguir los siguientes pasos.

1.- Intersección con los ejes coordenados.

Las intersecciones de una superficie con el eje X son los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación para $y = z = 0$. coordenada correspondiente del punto de intersección de la superficie y el eje coordenado.

De esta manera si queremos encontrar la intersección con el eje X, hacemos $y = z = 0$ en la ecuación y resolvemos para x la ecuación resultante.

Siguiendo el mismo procedimiento con el eje Y, hacemos $x = z = 0$ y resolvemos para y.
Y para el eje Z, hacemos $y = x = 0$ y resolvemos para z.

2.- Trazas sobre los planos coordenados.

Definición: La traza de una superficie sobre un plano coordenado es la curva de intersección de la superficie y el plano coordenado.
Por ejemplo, la traza sobre el plano XY es la intersección de la superficie y el plano XY. La coordenada z de cualquier punto del plano XY es igual a cero. Por lo tanto, si hacemos $z = 0$ en la ecuación de la superficie, obtenemos la ecuación de la curva de intersección.

Analíticamente, esta curva está representada por dos ecuaciones

$$f(x,y) = 0 \quad , \quad z = 0$$

Este es un ejemplo de cómo una curva en el espacio se representa analíticamente por dos ecuaciones independientes.

Análogamente, haciendo $y = 0$, en la ecuación de la superficie, hallamos las ecuaciones de la traza de la superficie sobre el plano XZ.

$$g(x,z) = 0 \quad , \quad y = 0$$

Finalmente, haciendo $x = 0$ en la ecuación de la superficie hallamos las ecuaciones de la traza sobre el plano YZ :

$$h(y,z) = 0 \quad , \quad x = 0$$

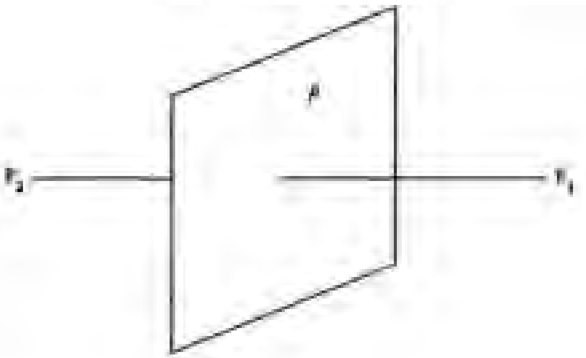
3.- Simetría con respecto a los planos coordenados, los ejes coordenados y el origen.

Las definiciones de simetría axial y puntual ya vistas en relación al plano no cambian cuando se emplean para una superficie. Lo único que nos falta es la simetría con respecto a un plano.

Definición. Se dice que dos puntos P_1 y P_2 son *simétricos* con respecto a un plano si y solamente si, el plano es perpendicular al segmento que los une en su punto medio.

Es decir, los puntos P_1 y P_2 son simétricos con respecto al plano ρ siempre que el plano sea perpendicular al segmento $\overline{P_1P_2}$ en su punto medio.

El plano ρ se llama *plano de simetría*.(Fig.58)



(Fig.58)

Con base en lo anterior llegamos a la definición de *simetría* respecto a un plano.

Definición. Se dice que una superficie es *simétrica* con respecto a un plano ρ si el simétrico de cada punto de la superficie respecto al plano ρ , es también un punto de la superficie.

Los métodos para determinar la simetría de una superficie a partir de su ecuación son los mismos que se emplearon para las curvas planas; la siguiente tabla resume los criterios de simetría.

Si la ecuación de la superficie no se altera cuando las variables x,y,z son remplazadas por	La superficie es simétrica con respecto al
-x , y , z	Plano YZ
x , -y , z	Plano XZ
x , y , -z	Plano XY
-x , -y , z	Eje Z
-x , y , -z	Eje Y
x , -y , -z	Eje X
-x , -y , -z	Origen

4.- Secciones por planos paralelos a los planos coordenados.

Supongamos que la ecuación de una superficie es $f(x, y, z) = 0$.
Si queremos estudiar la naturaleza de las secciones planas de una superficie, debemos "cortar" la superficie con una serie de planos paralelos a los planos coordenados.

Por ejemplo, los planos paralelos al plano XY pertenecen a la familia cuya ecuación es $z = k$, en donde k es una constante arbitraria o *parámetro*. En tal caso de la ecuación de la superficie tenemos que

$$f(x, y, z) = 0 \quad , \quad z = k$$

son las ecuaciones de la curva de intersección del plano con la superficie, correspondiendo a cada valor asignado a k una curva determinada. Y como la curva está en el plano z = k, puede determinarse su naturaleza por los métodos de la Geometría Analítica Plana.

Análogamente los planos paralelos al plano XZ pertenecen a la familia cuya ecuación es y = k. Entonces las ecuaciones

$$f(x, y, z) = 0 \quad , \quad y = k$$

son las ecuaciones de la curva de intersección del plano con la superficie.

Finalmente los planos paralelos al plano YZ pertenecen a la familia cuya ecuación es $x = k$. Y las ecuaciones de la curva de intersección del plano con la superficie son:

$$f(k, y, z) = 0 \quad , \quad x = k$$

5.- Extensión de la superficie.

El concepto de extensión de una superficie es análogo al de extensión de una curva plana.

Si la ecuación de una superficie es de la forma $f(x, y, z)=0$, en ocasiones es posible despejar una de las variables en función de las otras dos.
Por ejemplo, despejamos z en función de x y y, y podemos escribir la ecuación en la forma $z = f(x, y)$

Esta ecuación nos permite obtener los intervalos de variación de los valores reales que las variables pueden tomar.
Esta información es útil para determinar la localización general de la superficie en el espacio coordenado, y para indagar si la superficie es cerrada o de extensión ilimitada.

Ejemplo .

Analicemos la gráfica cuya ecuación es: $x^2 + y^2 - 4z = 0$ y construyamos la superficie.

Solución.

Apliquemos los métodos de graficación recién expuestos.

Intersecciones con los ejes.

Con el eje X. Haciendo $y = z = 0$ en la ecuación de la superficie y tenemos

$x^2 = 0$ y $z = 0$

Por tanto, la intersección con el eje X es el punto (0,0,0)

De la misma forma podemos ver que con el eje Y y Z la intersección es en el origen.

Simetrías.

La superficie es simétrica con respecto al plano YZ, al plano XZ y al eje Z, pues

Dado que, $f(-x,y,z)=(-x)^2+y^2-4z=x^2+y^2-4z=f(x,y,z)$

$$f(x,-y,z)=x^2+(-y)^2-4z=x^2+y^2-4z=f(x,y,z)$$

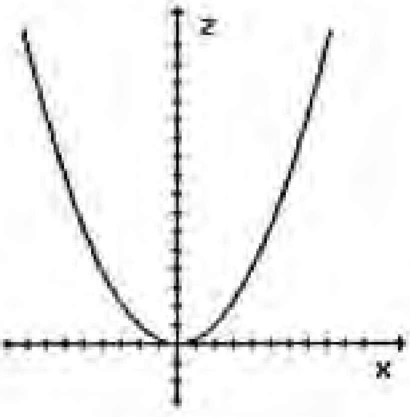
$$f(-x,-y,z)=(-x)^2+(-y)^2-4z=x^2+y^2-4z=f(x,y,z)$$

Trazas.

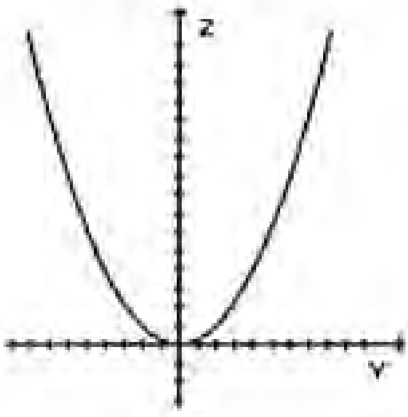
Traza sobre el plano XY, haciendo $z=0$ obtenemos la ecuación $x^2+y^2=0$, la cual representa un solo punto, el origen.

Traza sobre el plano XZ, haciendo $y=0$ obtenemos la ecuación $x^2-4z=0$ la cual representa la parábola $z=\frac{1}{4}x^2$, $y=0$ cuyo eje focal es el eje Z y vértice el origen. (Fig.59)

Traza sobre el plano YZ, haciendo $x=0$ tenemos la ecuación $y^2-4z=0$ la cual representa la parábola $z=\frac{1}{4}y^2$, $x=0$ cuyo eje focal es el Z y vértice en el origen. (Fig.60). Observemos, las figuras 59 y 60. En ambos casos tenemos un mismo lugar geométrico, sólo que en distintos planos.



(Fig.59)



(Fig.60)

Secciones.

Planos paralelos al plano XY. En este caso las ecuaciones son de la forma $z = k$, y los planos cortan a la superficie en curvas con ecuaciones $x^2 + y^2 = 4k$, $z = k$ que constituye una familia de circunferencias para todos los valores de $k > 0$.

Análogamente los planos paralelos al plano XZ, cuyas ecuaciones son de la forma $y = k$ cortan a la superficie en las curvas con ecuaciones

$$x^2 = 4\left(z - \frac{k^2}{4}\right) \quad , \quad y = k$$

que constituyen una familia de parábolas.

De la misma manera los planos paralelos al plano YZ, cuyas ecuaciones son de la forma $x = k$ cortan a la superficie
en las parábolas

$$y^2 = 4\left(z - \frac{k^2}{4}\right) \quad , \quad x = k$$

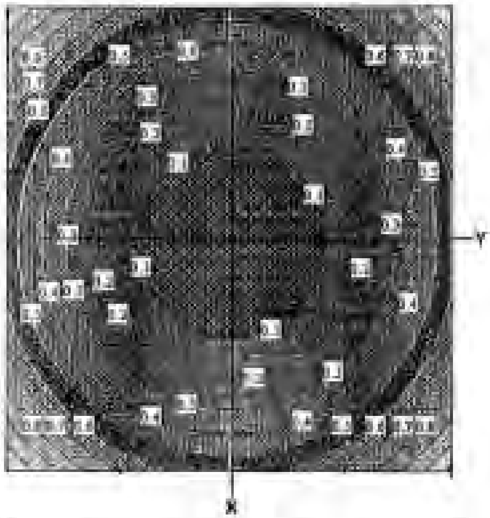
Extensión.

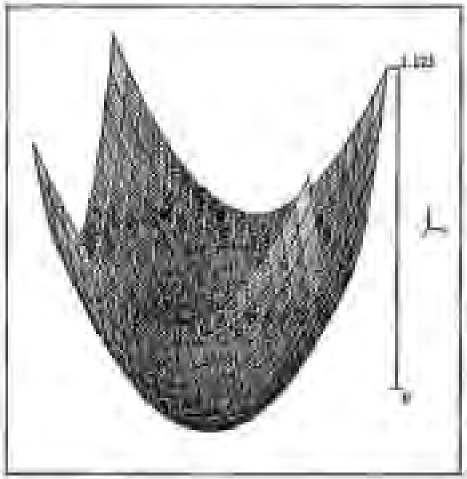
La ecuación $x^2 + y^2 - 4z = 0$ muestra que las variables x y y pueden tomar todos los valores reales, pero la variable z está restringida a valores positivos.

Por tanto, ninguna parte de la superficie aparece abajo del plano XY, sino que se extiende indefinidamente hacia arriba del plano XY.

En la figura 61 se ha trazado una parte de la superficie.

Nótese que todas las secciones paralelas al plano XY son circunferencias cuyo radio crece a medida que se alejan del plano XY. Como lo muestra la figura 61.





(Fig.61)

Ejemplo 2.

Discutir la gráfica de la superficie $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}-1=0$ utilizando las técnicas de graficación.

Intersecciones.

Con el eje X, haciendo $y = z = 0$ en la ecuación obtenemos $\frac{x^2}{4} = 1$, de donde $x = \pm 2$.
Por tanto los puntos de intersección son $(2,0,0)$ y $(-2,0,0)$

Con el eje Y, haciendo $x = z = 0$ en la ecuación obtenemos $y^2 = 4$ de donde $y = \pm 2$. Por tanto los puntos de intersección son $(0,2,0)$ y $(0,-2,0)$

Con el eje Z, haciendo $x = y = 0$ en la ecuación obtenemos $z^2 = 16$ de donde $z = \pm 4$.
Por lo tanto los puntos de intersección son $(0,0,4)$ y $(0,0,-4)$

Simetrías.

La curva es simétrica con respecto a los planos XY, YZ y XZ, con respecto a los ejes X, Y, Z y respecto al origen, pues cumple con todos los criterios.

Trazas.

Traza sobre el plano XY, haciendo $z = 0$ obtenemos la ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$ la cual representa a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ con centro en el origen y radio 2.

Traza sobre el plano XZ, haciendo $y = 0$ obtenemos la ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$ la cual representa a una elipse con vértice el origen eje menor el eje X y eje mayor el eje Z.

Traza sobre el plano YZ, haciendo $x = 0$ obtenemos la ecuación $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$ la cual representa a una elipse con vértice el origen eje menor el eje Y y eje mayor el eje Z.

Secciones.

Planos paralelos al plano XY. Haciendo $z = k$ vemos que estos planos cortan a la superficie en las curvas con ecuación

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1-\frac{k^2}{16} \quad , \quad z=k$$

que constituye una familia de circunferencias $x^2+y^2=4\left(1-\frac{k^2}{16}\right)$ con centro en el origen siempre que $1-\frac{k^2}{16}>0$. De lo anterior se sigue que k puede tomar valores en el intervalo $-4<k<4$

Planos paralelos al plano XZ. En este caso las ecuaciones son $y=k$, y los planos cortan a la superficie en las curvas con ecuaciones

$$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1-\frac{k^2}{4} \quad , \quad y=k$$

que constituye una familia de elipses con centro en el origen siempre que $1-\frac{k^2}{4}>0$. Tenemos entonces que los valores permitidos para k se hallan en el intervalo $-2<k<2$

Planos paralelos al plano YZ. Ahora las ecuaciones son de la forma $x=k$, y los planos cortan a la superficie en las curvas con ecuaciones

$$\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1-\frac{k^2}{4} \quad , \quad x=k$$

que representan una familia de elipses donde $1-\frac{k^2}{4}>0$. De lo anterior se sigue que k toma sólo valores en $-2<k<2$.

Extensión.

De lo visto en el apartado anterior tenemos que z sólo esta definida en el intervalo $-4<z<4$, mientras que y se restringe al intervalo $-2<y<2$, y x al intervalo $-2<x<2$.

Ejercicios.

1.-Discutir cada una de las siguientes gráficas usando los métodos de graficación. Trazar sus respectivas gráficas.

a) $xy - x + 3 = 0$

b) $x^2 \cdot y + 4y - 3x = 0$

c) $y = \dfrac{3x+2}{(x-1)^2}$

d) $y = \dfrac{x^2-9}{x^2-4}$

e) $y = \sqrt{9-x^2}$

f) $y = \sqrt{x\cdot\left(x^2 - 16\right)}$

g) $y^2 = \dfrac{6}{x+3}$

h) $y = \dfrac{(x+3)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-2)}$

j) $y^2 = \dfrac{x^2-9}{x^2-25}$

k) $y = \sqrt{\dfrac{6}{x^2+1}}$

2.- En cada uno de los siguientes ejercicios obtener la ecuación del lugar geométrico, y construir la curva del lugar geométrico.

a) Un punto se mueve se mueve de tal manera que su distancia del eje Y es siempre igual a su distancia del punto del punto A (4,0) .

b) Un punto se mueve de tal manera que su distancia al origen es siempre igual a 2.

c) Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto A(2,3) es siempre igual a 5.

d) Un punto se mueve de tal manera que se conserva siempre equidistante de los puntos A(1,-2) y B(5,4).

e) Un punto se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a los dos puntos A(3,5) y B(-4,2) es siempre igual a 30.

f) Un punto se mueve de tal manera que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los dos puntos A(2,-2) y B (4,1) es siempre igual a 12.

3.- En cada uno de los siguientes ejercicios hallar, analíticamente y gráficamente, los puntos de intersección, cuando los haya, para las curvas dadas.

a) $2x - y - 1 = 0 \; ; \; 3x + y - 9 = 0$

b) $y^2 - x = 0 \; ; \; 2x - y - 6 = 0$

c) $x^2 - y = 0 \; ; \; y^2 - x = 0$

d) $x^2 + y^2 = 4 \; ; \; x + y = 2$

e) $x^2 + y^2 = 8 \; ; \; y^2 = 2x$

f) $x^2 + y^2 = 1 \; ; \; x^2 - y^2 = 4$

g) $x^2 + y^2 = 13 \; ; \; xy = 6$

4.- En cada uno de los siguientes ejercicios analizar y trazar la superficie cuya ecuación se da por medio de los métodos de graficación.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

b) $x^2 + y^2 = 25$

c) $9x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 36$

d) $x^2 + z^2 - 9y = 0$

e) $y^2 - 4x = 0$

f) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4z + 1 = 0$

g) $3x^2 - 6y^2 + 2z^2 = 6$

h) $y^2 - 4z + 4 = 0$

i) $3x^2 + z^2 - 12x - 6y + 12 = 0$

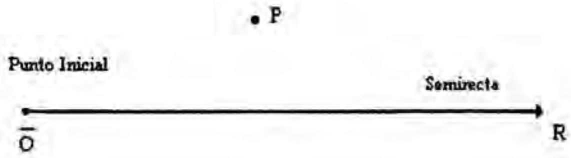
j) $x^2 - z^3 = 0$

III. Sistemas Coordenados.

3.1 Sistema de Coordenadas Polares.

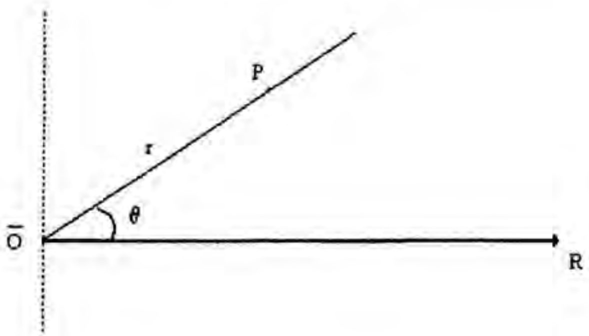
En el estudio de las propiedades geométricas de ciertas curvas, el uso de coordenadas polares presenta algunas ventajas sobre el sistema rectangular.

En el sistema polar un punto P se localiza de acuerdo a su posición respecto a una semirecta y el punto inicial de la misma. (Fig.17)



(Fig.17)

A la semirecta se le llama *eje polar* y a su punto inicial *polo*. En general el eje polar se toma horizontal y dirigido hacia la derecha. En la figura anterior OR es el eje polar y $\overline{O}$ es el polo.
Para localizar el punto P giramos el eje polar en torno al polo, hasta hacerlo incidir en el punto. Como lo muestra la figura 18.



(Fig.18)

A la distancia entre P y el polo se le llama *radio polar* y se le designa con la letra r

$$r = d(\overline{O}P)$$

Al ángulo de giro para que el eje polar incida con P se le llama ángulo polar y se denota con θ. Así las coordenadas polares de P son (r,θ)

La línea recta que pasa por el polo y es perpendicular al eje polar se le llama eje a 90.

En principio podemos concluir lo siguiente:

1) $r \geq 0$

2) θ no es único ya que $(r,\theta+2\pi)$, $(r,\theta-2\pi)$ son coordenadas también de P.
En general $(r,\theta+2n\pi)$ con $n \in Z$ son coordenadas de P

Concluimos que las coordenadas polares no son únicas; es decir, un punto puede estar representado por un número infinito de pares de coordenadas polares.
Sin embargo es evidente que un par de coordenadas polares determina un solo punto en el plano.

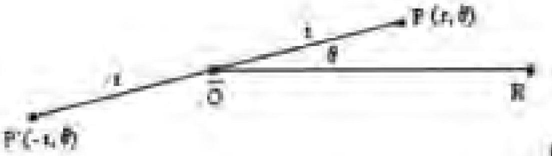
Para que cada pareja (r,θ) determine un punto en el plano (y no solo aquellas en que $r > 0$) se conviene en lo siguiente:

i) Si $r = 0$ entonces el punto P (r,θ) es el polo $\overline{O}$

ii) Si $r < 0$ entonces el punto P (r,θ) se localiza con las coordenadas $(|r|,\theta+\pi)$

De este modo $(r,\theta+2n\pi)$ y $(-r,\theta+(2n+1)\pi)$ con $n \in Z$ son coordenadas de un mismo punto.

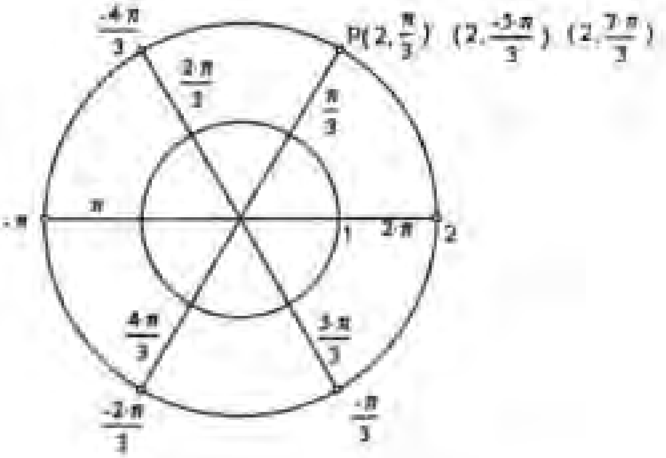
Según esto, si un punto tiene un radio polar negativo, se mide primero el ángulo polar de la manera ordinaria, y después se toma el radio polar en sentido opuesto al del lado final. (Fig.19)



(Fig.19)

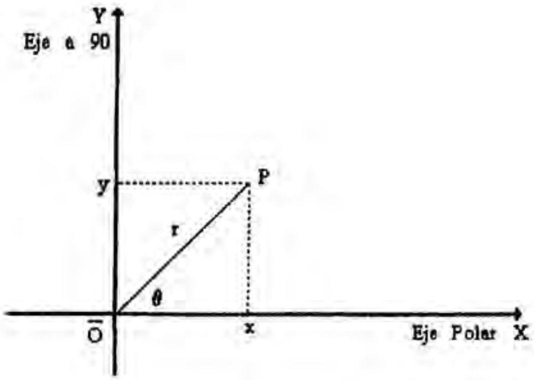
Ejemplo .

El punto $P\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$ tiene también como coordenadas $\left(2,\frac{7\pi}{3}\right),\left(2,\frac{-5\pi}{3}\right)$



3.2 Relación entre las coordenadas polares y las coordenadas rectangulares.

Seleccionemos el origen como polo, la parte positiva del eje X como el eje polar y al eje Y como eje a 90. (Fig.20)



(Fig.20)

P tiene coordenadas rectangulares (x,y) y coordenadas polares (r,θ)

Se deducen inmediatamente las relaciones:

$$r = \pm\sqrt{x^2+y^2} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$x = r\cdot\cos\theta \qquad \cos\theta = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$y = r\cdot\operatorname{sen}\theta$$

Estas relaciones nos sirven para pasar de un sistema a otro.

Ejemplo.

a) Encontrar dos pares de coordenadas polares del punto P con coordenadas cartesianas $\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$.

b) Hallar las coordenadas cartesianas del punto Q cuyas coordenadas polares son (3,120°)

a) Solución.

$x = \sqrt{2}$ de donde $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}\right)$

$y = -\sqrt{2}$ $r = \pm\sqrt{4}$

$r = \pm 2$ $\theta = \arctan(-1)$

$\theta = 135°, 315°$

b) Solución.

$r = 3$ sustituyendo en $x = r\cdot\cos\theta$; $y = r\cdot\text{sen}\,\theta$

$\theta = 120°$ $x = 3\cdot\cos 120°$, $y = 3\cdot\text{sen}\,120°$

Así las coordenadas cartesianas $x = 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$; $y = 3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

de Q son $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$

Ejemplo.

Hallar la ecuación polar del lugar geométrico cuya ecuación rectangular es

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$

Solución.

De las relaciones $r^2 = x^2 + y^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$
al remplazar por su forma polar en la ecuación dada, obtenemos

$$r^2 - 8\cdot(r\cdot\cos(\theta)) - 6\cdot(r\cdot\text{sen}(\theta)) + 20 = 0$$

Por lo tanto, la ecuación buscada es

$$r^2 - 8\cdot r\cdot\cos(\theta) - 6\cdot r\cdot\text{sen}(\theta) + 20 = 0$$

Ejemplo

Hallar la ecuación rectangular del lugar geométrico cuya ecuación polar es

$$r = \frac{1}{2 - \cos(\theta)}$$

Solución.

Será conveniente primero quitar denominadores. Despejando tenemos

$$2 \cdot r - r \cdot \cos(\theta) = 1$$

utilizando las relaciones $\quad x = r \cdot \cos(\theta) \;$ y $\; r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} - x = 1$$

Si transponemos $-x$, elevamos al cuadrado y simplificamos tenemos

$$4 \cdot \left(x^2 + y^2\right) = (x + 1)^2$$

$$4 x^2 + 4 y^2 = x^2 + 2 \cdot x + 1$$

$$3 \cdot x^2 + 4 y^2 - 2 \cdot x - 1 = 0$$

Es la ecuación rectangular buscada

Esta gráfica nos será de mucha ayuda, ya que nos representa el comportamiento de la gráfica cuando r y θ varían.

3.3 Curvas en coordenadas polares. Técnicas de Graficación.

La gráfica de una ecuación polar de la forma $f(r,\theta)=0$ la podemos ver como un conjunto de puntos en el plano **XY** en el cual al menos un par de coordenadas (r,θ) satisfacen la ecuación.
Esto se debe a que un punto (x,y) está asociado con un número infinito de pares de coordenadas polares, y puede suceder que algunas de ellas no satisfagan la ecuación.

Este hecho hace que una gráfica en el plano **XY** pueda tener más de una ecuación polar.

Ejemplo.

La ecuación de la circunferencia con centro en el origen y radio a :

$x^2+y^2=a^2$ tiene como ecuaciones polares $r=a$ o $r=-a$
Por otro lado el punto de coordenadas polares $Q(-2,\pi)$ no satisface la ecuación polar $r=2$. Sin embargo el punto esta sobre la gráfica de la ecuación ya que Q tiene también las coordenadas (2,0) que sí satisfacen la ecuación.

Trazo de curvas en polares.

Para determinar la gráfica de una curva primero es conveniente resolver la ecuación para r (es decir, expresarla en la forma $r=g(\theta)$ en caso de que sea posible) y utilizar los siguientes métodos de graficación.

Intersecciones:

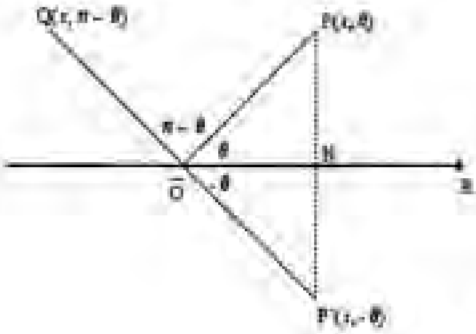
Las intersecciones con el eje polar se obtienen, resolviendo la ecuación para r cuando θ toma los valores de $0,\pm\pi,\pm2\pi,\ldots,n\pi$ para toda $n\in Z$

Análogamente las intersecciones con el eje a 90 pueden obtenerse dando a θ los valores $\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},\pm\frac{5\pi}{2},\ldots\frac{n\pi}{2}$ con n en los enteros impares.

Para verificar si la gráfica intercepta el polo nos preguntamos si existe un valor de θ para el cual sea $r=0$. Si existe entonces la gráfica pasa por el polo.

Simetría.

Supongamos que la curva polar C es simétrica con respecto al eje polar. Para cada punto $P \in C$ existe un punto $P' \in C$ tal que $\overline{PP'}$ es bisecado perpendicularmente por el eje polar. (Fig.21)



(Fig.21)

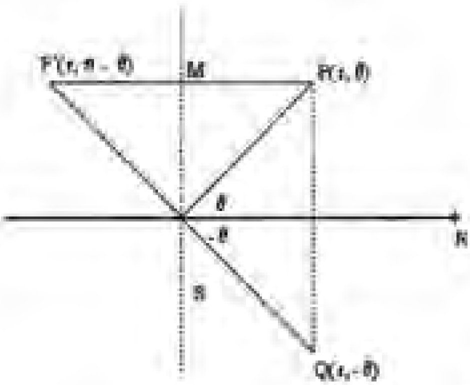
Como $\overline{PN} = \overline{NP'}$ y $\overline{PP'} \perp \overline{OR}$ entonces P' tiene como coordenadas polares $(r, -\theta)$ y $(-r, \pi - \theta)$.

Por lo tanto la curva es simétrica con respecto al eje polar si la ecuación original no cambia al aplicar los siguientes criterios:

1) r fija y θ se cambia por $-\theta$

2) r se cambia por $-r$ y θ por $\pi - \theta$

Análogamente la curva C es simétrica respecto al eje de 90 si para cada punto $P \in C$ existe un punto $P' \in C$ tal que $\overline{PP'}$ es bisecado perpendicularmente por el eje a 90. (Fig.22)



(Fig.22)

De donde $\overline{PM} = \overline{P'M}$ y $P'P \perp S$. Por lo tanto las coordenadas de P' son $(r, \pi - \theta)$ y $(-r, -\theta)$
De lo anterior afirmamos que una curva es simétrica respecto al eje de 90 si la ecuación original no cambia al aplicar los siguientes criterios.

1') r fija y θ se cambia por $\pi - \theta$

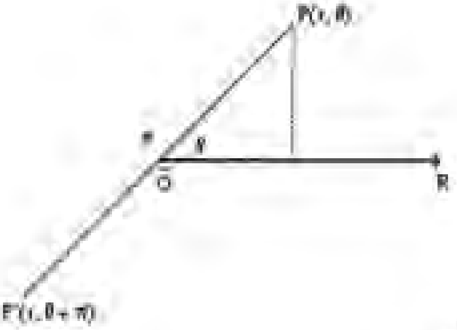
2') r se camina por $-r$ y θ por $-\theta$

Una curva C es simétrica con respecto al polo O si para cada punto $P \in C$ existe un punto P' del otro lado de $\overline{OP}$ tal que O es punto medio del segmento $\overline{PP'}$; es decir $\overline{OP} = \overline{OP'}$.
(Fig.23)

De lo anterior deducimos que la curva es simétrica respecto al polo cuando la ecuación original no cambia al aplicar los siguientes criterios:

1°) r fija y θ se cambia por $\pi + \theta$

2°) r se cambia por $-r$ y θ se mantiene fija



(Fig.23)

Nota: Se debe verificar al menos una prueba para afirmar que la curva es simétrica respecto a algún criterio.

Extensión.

Para determinar la extensión de una curva polar conviene resolver para r la ecuación.
Si r toma valores acotados. Si el valor de r está acotado (i.e. Para toda θ, $|f(\theta)| < k$ para alguna constante k) entonces la curva es cerrada; en este caso es útil determinar los valores máximo y mínimo de r.

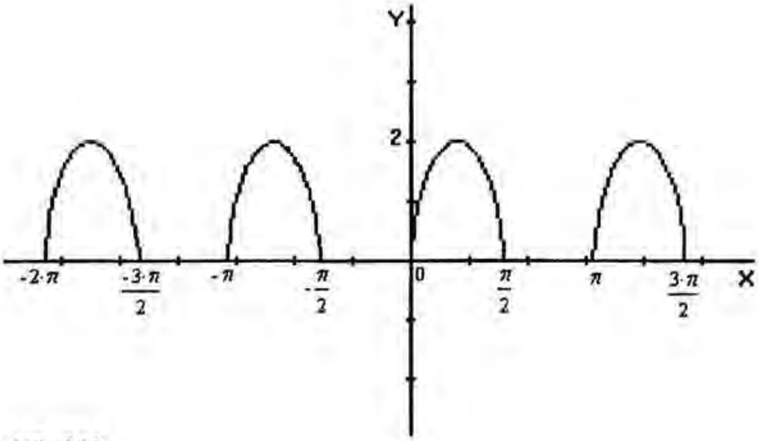
Si r es infinito para ciertos valores de θ, la gráfica no es cerrada. En caso de que r sea un número complejo para algunos valores de θ, no hay puntos en la curva para esos valores. (Se trata de valores son valores excluidos del lugar geométrico).

Gráfica r , θ en el plano cartesiano

Si $r = f(\theta)$ asignando valores a θ obtenemos valores reales correspondientes de r.
Con estos valores podemos graficar en un sistema cartesiano tomando en el eje **X** los valores de θ y en el eje **Y** los valores de r. (Fig.24)

Esta clase de gráficas son de gran ayuda pues en ellas está representad el comportamiento de r cuando θ varía

Gráfica cartesiana de $r^2 = 4\operatorname{sen}(2\theta)$



(Fig.24)

Construcción de la gráfica.

Los puntos del lugar geométrico se pueden trazar a partir del análisis anterior y de la gráfica cartesiana r,θ.

Ejemplo.

Graficar la curva cuya ecuación es

$$r^2 = 4\cdot\text{sen}(2\cdot\theta)$$

Solución.

Intersecciones.

Con el eje polar.

Si $\theta = 0$

$$r^2 = 4\cdot\text{sen}(2\cdot 0) = 4\cdot(0) = 0 \quad \therefore \quad P_1(0,0)$$

Si $\theta = \pi$

$$r^2 = 4\cdot\text{sen}(2\cdot\pi) = 4\cdot(0) = 0 \quad \therefore \quad P_2(0,\pi)$$

P_1 y P_2 representan el mismo punto, el polo, por lo que concluimos que la gráfica intercepta al eje polar en el polo.

Con el eje a 90.

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$

$r^2 = 4sen\left(2\frac{\pi}{2}\right) = 4sen(\pi) = 4(0) = 0 \quad \therefore \quad Q_1\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Si $\theta = -\frac{\pi}{2}$

$r^2 = 4sen\left[2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 4sen(-\pi) = 4(0) = 0 \quad \therefore \quad Q_2\left(0, -\frac{\pi}{2}\right)$

Dado que Q_1 y Q_2 representan el polo, la intersección de la curva con el eje a 90 también es en el polo.

Con el polo.

Ahora nos preguntamos para qué valores de θ, $r = 0$

Hagamos $r = 0$ en la ecuación dada. El resultado es $4sen(2\theta) = 0$

Es decir $sen(2\theta) = 0$, lo cual sucede cuando $2\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots, n\pi$
de donde $\theta = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots, \frac{n\pi}{2}$, con $n \in Z$

Simetrías.

Con el eje polar

a) Primer criterio: r fija, θ se cambia por $-\theta$

$r^2 = 4sen(2(-\theta)) = -4sen(2\theta)$

b) Segundo criterio: r se cambia por $-r$ y θ por $\pi - \theta$

$(-r)^2 = 4sen(2(\pi - \theta))$

$r^2 = 4sen(2\pi - 2\theta) = 4((sen2\pi \cdot \cos 2\theta - sen2\theta \cdot \cos 2\pi))$

$r^2 = 4(-sen2\theta) = -4sen2\theta$

de a) y b) deducimos que no hay simetría con el eje polar, pues la ecuación cambia.

Con el eje a 90.

a) Primer criterio: r fija , θ se cambia por $\pi - \theta$

$$\begin{aligned} r^2 &= 4\cdot sen(2\cdot(\pi - \theta)) \\ &= 4\cdot sen(2\cdot\pi - 2\cdot\theta) \\ &= 4\cdot sen(2\cdot\theta) \end{aligned}$$

b) Segundo criterio: r se cambia por $-r$ y θ por $-\theta$

$$\begin{aligned} (-r)^2 &= 4\cdot sen(2\cdot(-\theta)) \\ r^2 &= -4\cdot sen(2\cdot\theta) \end{aligned}$$

En vista de que la ecuación se altera, concluimos que la curva no es simétrica respecto al eje a 90.

Con el polo.

a) Primer criterio: r fija , y θ se cambia por $\pi + \theta$

$$\begin{aligned} r^2 &= 4\cdot sen(2\cdot(\theta + \pi)) \\ &= 4\cdot sen(2\cdot\theta + 2\cdot\pi) = sen(2\cdot\theta)\cdot cos(2\cdot\pi) + sen(2\cdot\pi)\cdot cos(2\cdot\theta) \\ &= 4\cdot sen(2\cdot\theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto, como la ecuación no cambia al aplicar el criterio, la curva es simétrica respecto al polo.

Extensión.

Despejando r en función de θ tenemos

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{4\cdot sen(2\cdot\theta)} \\ &= 2\cdot\sqrt{sen(2\cdot\theta)} \end{aligned}$$

Dado que en la expresión aparece un radical, debemos averiguar qué valores de θ hacen a r compleja, pues para esos valores no habrá puntos en la curva.

Esto es, ¿para qué valores de θ $sen(2 \cdot \theta) < 0$?

$$sen(2\theta) < 0 \quad si \quad \pi < 2\theta < 2\pi \quad o \quad -\pi < 2\theta < 0$$

de donde si θ toma los valores

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \quad o \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < 0$$

o lo que es lo mismo

$$-\frac{3\pi}{2} < \theta < \pi \quad o \quad \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$$

entonces $\quad sen(2\theta) < 0$;

Por lo tanto no hay puntos en la curva para valores de $\theta \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2},0\right)$

Como $0 \leq sen(2\theta) \leq 1$ entonces el valor máximo que toma r es 2

Esto ocurre cuando $\quad 2\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots\ldots$

o bien cuando $\quad \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \ldots\ldots$

Por tanto, el valor mínimo lo alcanza r cuando $sen(2\theta) = 0$

y esto sucede si $\quad 2\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots\ldots$

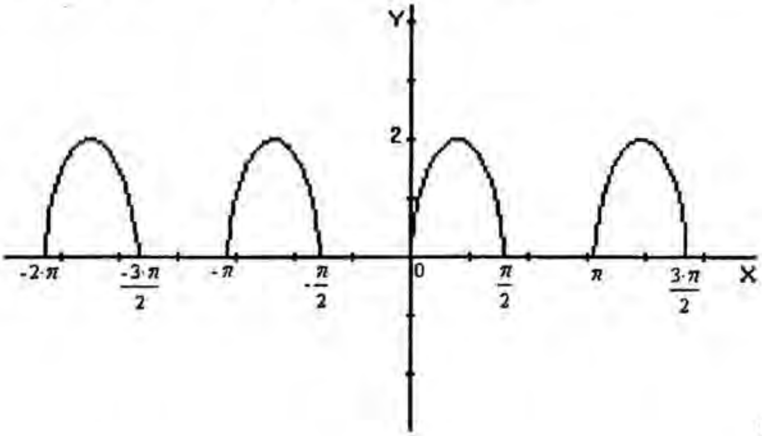
$$\theta = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \ldots\ldots, \frac{n\pi}{2} \quad con \quad n \in Z^{+} \cup \{0\}$$

es decir, cuando

Nota: El valor máximo y mínimo de r se escogió en este caso tomando en cuenta solo el valor positivo del radical.

Gráfica r , θ en el plano cartesiano de la función $r^2 = 4sen2\theta$

Grafiquemos en un sistema cartesiano tomando en el eje X los valores de θ y en el eje Y los valores de r como lo muestra la figura 25.



(Fig.25)

Hacemos notar lo siguiente:

1) Para hacer la gráfica r,θ sólo se está tomando la raíz positiva de r

Si, por el contrario, tomamos las dos raíces, el resultado será que el valor numérico de r es –2.

2) Del análisis anterior se sigue que si θ toma los valores en los intervalos

$\left(\frac{-3\cdot\pi}{2}, \pi\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2},0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \cup \left(\frac{3\cdot\pi}{2},2\cdot\pi\right)$, no hay puntos en la gráfica.

3) $r = 0$, si $\theta = 0, \pm \dfrac{\pi}{2}, \pm \pi, \pm \dfrac{3\cdot\pi}{2}, \pm 2\cdot\pi$.

Tomando en cuenta lo anterior, construyamos una tabla para obtener algunos puntos asignando valores a θ.

θ	r
-2π	0.00
$-11/6\,\pi$	1.86
$-7/4\,\pi$	2.00
$-5/3\,\pi$	1.86
$-3/2\,\pi$	0.00
$-\pi$	0.00
$-5/6\,\pi$	1.86
$-3/4\,\pi$	2.00
$-2/3\,\pi$	1.86
$-\pi/2$	0.00
0	0.00
$\pi/6$	1.86
$\pi/4$	2.00
$\pi/3$	1.86
$\pi/2$	0.00
π	0.00
$7/6\,\pi$	1.86
$5/4\,\pi$	2.00
$4/3\,\pi$	1.86
$3/2\,\pi$	0.00

Tracemos la gráfica a partir del análisis anterior. (Fig.26)

a) Las intersecciones con el eje polar y el eje a 90 es en el polo por lo tanto no habrá otra intersección en estos ejes.

b) Solo hay simetría con respecto al polo.

c) El valor máximo lo alcanza en $r = 2$ para valores de $\theta = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\cdot\pi}{4}, \dfrac{-3\cdot\pi}{4}$ .....

(Fig.26)

Como lo muestran los valores $M_1\left(2,\frac{\pi}{4}\right)$ y $M_2\left(2,\frac{5\pi}{4}\right)$

Considerando la gráfica $r-\theta$ observamos lo siguiente :

1) Cuando θ va de 0 a $\frac{\pi}{4}$, r crece de 0 a 2

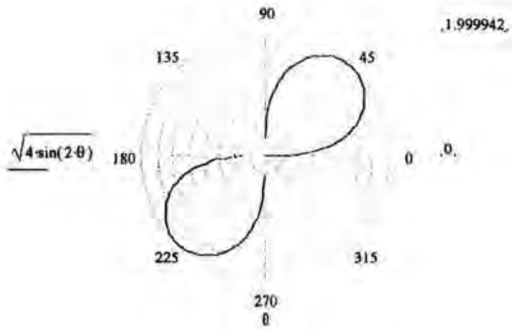
2) Cuando θ va de $\frac{\pi}{4}$ a $\frac{\pi}{2}$, r crece de 2 a 0

Dado que la curva es simétrica respecto al polo, cada punto se refleja y obtenemos la gráfica completa.

Nota: Si no hubiéramos utilizado el criterio de simetría obtendríamos la otra parte de la gráfica analizando el intervalo $\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ o $\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$

A continuación presentamos la gráfica de la curva cuya ecuación polar es:

$r = 4 \cdot \operatorname{sen}(2\cdot\theta)$ $\qquad\qquad$ $\theta := 0, .02 .. 2\cdot\pi$



3.4 Intersección de Ecuaciones Polares.

Puesto que las coordenadas polares de un punto no son únicas, las gráficas de un sistema de ecuaciones polares se pueden interceptar en uno o varios puntos cuyas coordenadas no son solución del sistema, pero satisfacen algún otra ecuación del lugar geométrico. Por esto, es preferible en general dibujar ambos lugares geométricos con referencia al mismo sistema polar y considerar entonces cada punto de intersección individualmente.

Ejemplo .

Hallar, analítica y gráficamente los puntos de intersección de las curvas cuyas ecuaciones son:

$r\cdot\cos(\theta) = 2 \ (1)$ $\qquad$ y $\qquad$ $r = 2 + 4\cdot\cos(\theta)$

Solución Analítica

Sustituimos la ecuación (2) en (1) , y obtenemos

$$(2+4\cos(\theta))\cdot\cos(\theta) = 2$$

$$2\cdot\cos(\theta)+4\cdot\cos(\theta)^2 = 2$$

$$2\cdot\cos(\theta)^2+\cos(\theta)-1 = 0$$

$$(2\cdot\cos(\theta)-1)\cdot(\cos(\theta)+1) = 0$$

de donde

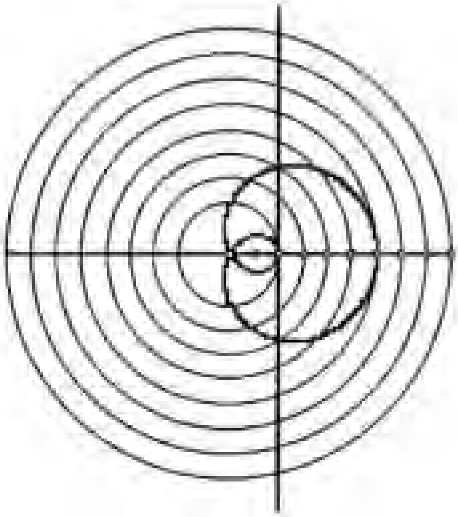
$$2\cdot\cos(\theta)-1 = 0 \quad o \quad \cos(\theta)+1 = 0$$

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} \quad o \quad \cos(\theta) = -1$$

Vemos que $\theta=\dfrac{\pi}{3}$, $\theta=\dfrac{5\pi}{3}$, y $\theta=\pi$ son solución del sistema.

Por lo tanto $\left(4,\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\left(4,\dfrac{5\pi}{3}\right)$, y $(-2,\pi)$ satisfacen ambas ecuaciones

En este caso la gráfica muestra tales intersecciones.



Ejemplo.

Hallar analítica y gráficamente los puntos de intersección de las curvas cuyas ecuaciones son:

$r = 6\cdot\operatorname{sen}(\theta)$ (1) y $r = 6\cdot\cos(\theta)$ (2)

Solución Analítica.

Igualando los miembros derechos de las ecuaciones, obtenemos

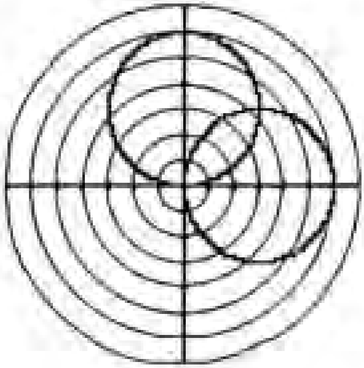
$$6\cdot\operatorname{sen}(\theta) = 6\cdot\cos(\theta)$$
$$\tan(\theta) = 1$$

de donde $\theta = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$

Por lo tanto los puntos $\left(3\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ y $\left(-3\sqrt{2}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$, en realidad son uno solo, representan la solución del sistema de ecuaciones.

Solución gráfica.

Trazando las gráficas de ambas ecuaciones en el mismo sistema de coordenadas polares, tenemos



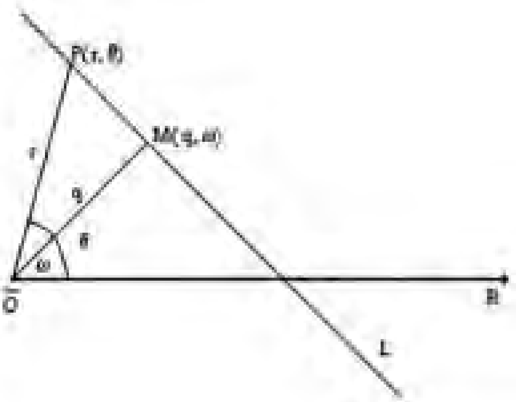
Por inspección se ve que el punto $\left(3\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$ es el punto de intersección, como se obtuvo analíticamente. Pero también hay un segundo punto de intersección y éste es el polo.

Un par de coordenadas del polo es $(0,0)$, que satisface la ecuación (1) pero no así la ecuación (2). Otro par de coordenadas es $(6,0)$ que satisface la ecuación (2) pero no la ecuación (1).

Por consiguiente, los puntos de intersección son: $\left(3\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$, $\overline{O}$ el polo.

3.5 La Línea Recta en Coordenadas Polares.

Consideremos la recta L que pasa por el punto $M(q,w)$ con $q>0$, $0\le w<2\pi$ y perpendicular al segmento $\overline{OM}$. (Fig.27)



(Fig.27)

Sea $P(r,\theta)$ un punto arbitrario sobre L . Del triángulo rectángulo OMP tenemos que

$r \cdot \cos(\theta - \omega) = q$ que resulta ser la ecuación polar de la recta L

Desarrollando la ecuación anterior tenemos:

$$r(\cos(\theta)\cdot\cos(\omega) + \operatorname{sen}(\theta)\cdot\operatorname{sen}(\omega)) = q$$

$$r\cdot\cos(\theta)\cdot\cos(\omega) + r\cdot\operatorname{sen}(\theta)\cdot\operatorname{sen}(\omega) = q$$

utilizando las relaciones $x = r\cdot\cos(\theta)$ y $y = r\cdot\operatorname{sen}(\theta)$

$$x\cdot\cos(\omega) + y\cdot\operatorname{sen}(\omega) = q$$

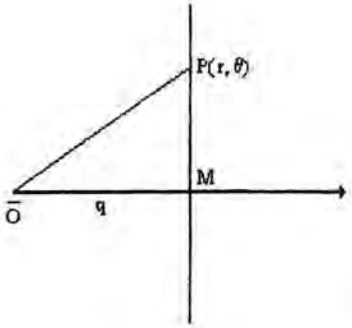
Llegamos a la forma normal de la recta $\cos(\omega)\cdot x + \operatorname{sen}(\omega)\cdot y - q = 0$

donde q representa la distancia de L a O.

Si la recta es perpendicular al eje polar y esta a q unidades del polo entonces

$\omega = 0$ o $\omega = \pi$

Como lo muestra la figura 28.

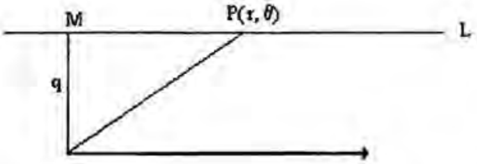


(Fig.28)

obtenemos asi la ecuación de la recta $r \cdot \cos\theta = \pm q$

Si la recta es paralela al eje polar y esta a q unidades de él, entonces

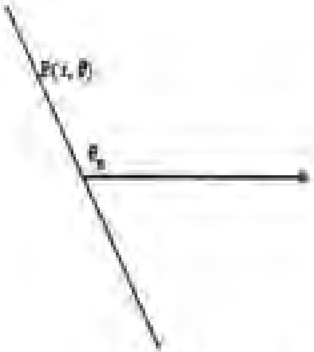
$\omega = \dfrac{\pi}{2}$ o $\omega = \dfrac{3\pi}{2}$. (Fig.29)



(Fig.29)

Y la ecuación se reduce a $r \cdot sen\theta = \pm q$

Si la recta pasa por el polo, todos los puntos de la recta L tendrán como ángulo polar a θ_0. (Fig.30)



(Fig.30)

Por tanto, su ecuación polar es $\theta = \theta_0$. Para una recta particular corresponde un valor de θ_0 , por lo cual es conveniente restringir a θ_0

$0 \le \theta_0 < \pi$

Abarcando así a toda la familia de rectas que pasan por el polo.

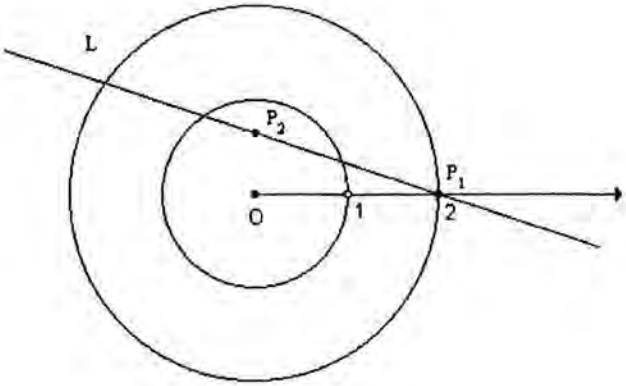
Ejemplo.

Asignar valores convenientes a θ y encontrar las coordenadas de dos puntos sobre la línea recta cuya ecuación es $r = \dfrac{2}{\cos\theta + 3\operatorname{sen}\theta}$. Trazar los puntos y dibujar la línea recta.

Solución.

Si $\theta = 0$, $r = 2$ $\therefore$ $P_1(2,0)$. Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, $r = \dfrac{2}{3}$ $\therefore$ $P_2\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

de donde P_1 y P_2 están en la recta L.



Encontremos la ecuación polar de la ecuación general cartesiana de una recta L.

Sea A x + B y + C = 0 la ecuación general cartesiana de una recta donde A, B y C son diferentes de cero.

Sustituyendo $x = r\cdot\cos\theta$ y $y = r\cdot\operatorname{sen}\theta$ en la ecuación general, tenemos

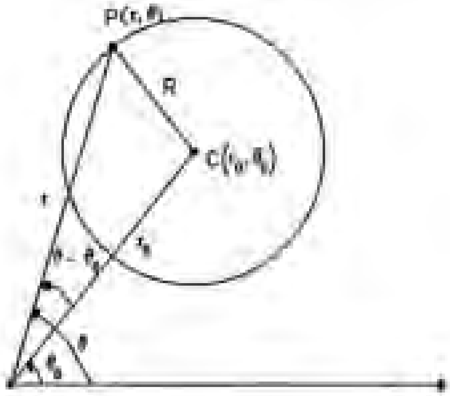
$$A\cdot(r\cdot\cos\theta) + B\cdot(r\cdot\operatorname{sen}\theta) + C = 0$$

despejando a r se tiene $r = -\dfrac{C}{A\cdot\cos\theta + B\cdot\operatorname{sen}\theta}$

que es la ecuación buscada.

3.6 La Circunferencia en Coordenadas Polares.

Sea S la circunferencia con centro en $C(r_0,\theta_0)$ y radio R. . (Fig.31)



(Fig.31)

Consideremos a $P(r,\theta)$ *un punto cualquiera de la circunferencia* **S**.

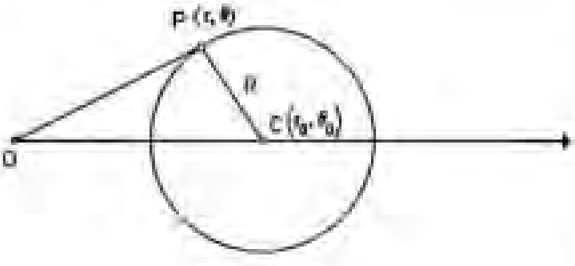
Por la ley de los cosenos tenemos

$$\cos(\theta - \theta_0) = \frac{r^2 + (r_0)^2 - R^2}{2rr_0}$$

de donde $\quad R^2 = r^2 + (r_0)^2 - 2rr_0\cos(\theta - \theta_0)$

que es la ecuación polar de la circunferencia **S**.

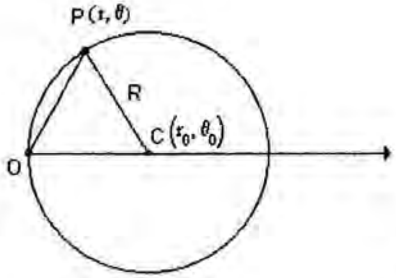
Si el centro C de la circunferencia esta en el eje polar entonces $\theta_0 = 0$ o $\theta_0 = \pi$ (Fig.32)



(Fig.32)

Y la ecuación de **S** es $\qquad \pm \cos\theta = \dfrac{r^2 + (r_0)^2 - R^2}{2rr_0}$

Si además la circunferencia incide con el polo entonces $r_0 = R$ y $(r_0)^2 - R^2 = 0$
(Fig.33)



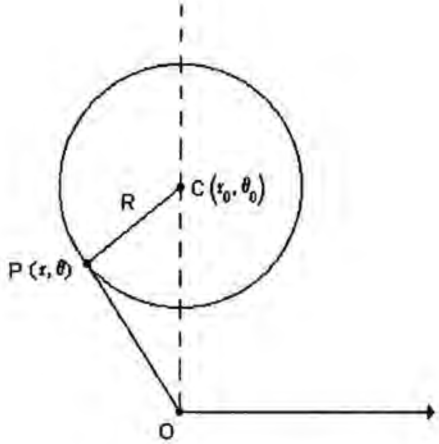
(Fig.33)

En tal caso la ecuación es $\qquad \pm \cos\theta = \dfrac{r^2}{2rr_0}$ $\qquad$ o bien $\qquad r(\pm\ 2\cdot r_0\cdot\cos\theta - r) = 0$

Por tanto, la ecuación de la circunferencia con centro en el eje polar y que pasa por el polo es

$$r = \pm\ 2\cdot r_0\cdot\cos\theta$$

Supongamos ahora que el centro C se encuentra en el eje a 90. En tal caso $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$ o $\theta_0 = \dfrac{3\cdot\pi}{2}$
(Fig.34)

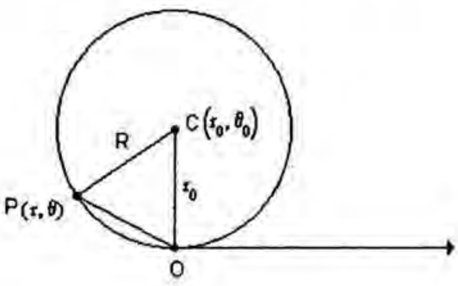


(Fig.34)

La ecuación de la circunferencia que resulta es $\pm\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{r^2 + (r_0)^2 - R^2}{2 \cdot r \cdot r_0}$

Si además la circunferencia pasa por el polo entonces

$R = r_0$ y $(r_0)^2\ \ R^2 = 0$ (Fig.35)



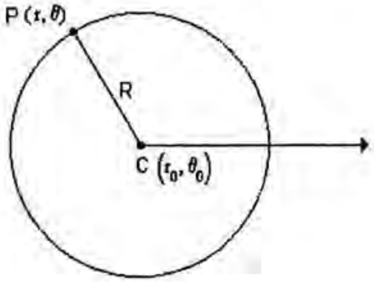
(Fig.35)

y obtenemos la ecuación $\pm\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{r^2 + (r_0)^2 - R^2}{2 \cdot r \cdot r_0}$ o bien $r(\pm\ 2 \cdot r_0 \cdot \text{sen}\,\theta\ \ r) = 0$

Y la ecuación de la circunferencia con centro en el eje a 90 y que pasa por el polo es

$$r = \pm\ 2 \cdot r_0 \cdot \operatorname{sen}\theta$$

Finalmente analicemos el caso en que el centro de la circunferencia es el polo. (Fig.36)



(Fig.36)

Cuando $r_0 = 0$ y la ecuación de la circunferencia con centro el polo es $r^2 = R^2$, expresión que se reduce a las ecuaciones $r = R$ o $r = -R$

Ejemplo .

Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en $C\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ y cuyo radio es 5.

Solución.

Utilizando la ecuación de la circunferencia con centro $C(r_0, \theta_0)$ y radio R , donde $r_0 = 2$ $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ y R = 5, tenemos

$$5^2 = r^2 + 2^2 - 2 \cdot r \cdot 2 \cdot \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

desarrollando y simplificando la ecuación anterior se obtiene

$$r^2 - 2 \cdot r \cdot \left(\cos\theta + \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen}\theta\right) - 21 = 0$$

la cual es la ecuación de la circunferencia buscada.

Ejemplo.

Empleando solamente coordenadas polares, hallar el centro y el radio de la circunferencia

$$r = 3\cdot\operatorname{sen}\theta - 3\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\theta$$

Solución.

Escribimos la ecuación dada en la forma general de la ecuación de una circunferencia con

Centro (r_0,θ_0) y radio R, $\quad R^2 = r^2 + (r_0)^2 - 2rr_0\cdot\cos(\theta - \theta_0)$

Para ello, multipliquemos ambos miembros de la ecuación por r y transpongamos términos:

$$r^2 - r\left(-3\cdot\sqrt{3}\cdot\cos\theta + 3\cdot\operatorname{sen}\theta\right) = 0$$

Tomando en cuenta la ecuación general, está última igualdad la podemos escribir como

$$r^2 - 2r_0\cdot r\left(\frac{-3\cdot\sqrt{3}}{2r_0}\cdot\cos\theta + \frac{3}{2r_0}\cdot\operatorname{sen}\theta\right) = 0 \qquad \text{———}(1)$$

Hagamos ahora $\quad \dfrac{-3\cdot\sqrt{3}}{2r_0} = \cos\theta_0 \quad$ y $\quad \dfrac{3}{2r_0} = \operatorname{sen}\theta_0 \qquad$ ———(2)

La expresión dentro del paréntesis de la ecuación (1) se convierte en

$$\cos\theta\cdot\cos\theta_0 + \operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen}\theta_0 = \cos(\theta - \theta_0)$$

y la ecuación en $\quad r^2 - 2\,r_0\cdot r\cdot\cos(\theta - \theta_0) = 0 \quad$, que es de la forma general.

Evidentemente la circunferencia pasa por el polo, ya que $\quad (r_0)^2 = R^2$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de cada una de las ecuaciones (2) , y sumamos, obtenemos

$$\boxed{\frac{27}{4\cdot(r_0)^2}+\frac{9}{4\cdot(r_0)^2}} = 1$$

de donde $r_0 = \pm 3$, para el par principal de coordenadas polares del centro tomamos $r_0 = 3$, valor para el cual las ecuaciones (2) dan $\theta_0 = \frac{5\cdot\pi}{6}$.

Por tanto, las coordenadas del centro de la circunferencia dada son $\left(3, \frac{5\cdot\pi}{6}\right)$

Por otra parte, como $r_0 = R$, el radio es 3.

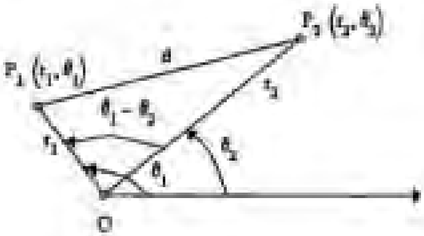
3.7 Distancia entre dos puntos en Coordenadas Polares.

Sean $P_1\left(r_1,\theta_1\right)$ y $P_2\left(r_2,\theta_2\right)$ dos puntos dados cualesquiera.

Denotemos con $d = \left|P_1P_2\right|$ como la distancia d entre P_1 y P_2

Tracemos los radios vectores de P_1 y P_2 , formando así el triángulo OP_1P_2 en donde

$\left|\overline{OP_1}\right| = r_1$, $\left|\overline{OP_2}\right| = r_2$ y el ángulo P_1OP_2 es igual a $\theta_1 - \theta_2$ (Fig.37).



(Fig.37)

Por la ley de los cosenos se tiene

$$d^2 = (r_1)^2 + (r_2)^2 - 2\,r_1\,r_2\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right)$$

de donde $\quad d = \sqrt{(r_1)^2 + (r_2)^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)}$

fórmula que representa la distancia entre los puntos P_1 y P_2.

Ejemplo 12.

Demostrar que los puntos $P_1\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$, $P_2\left(7, \frac{\pi}{3}\right)$ y $P_3\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$ son vértices de un triángulo isósceles.

Solución.

Por la distancia entre dos puntos tenemos

$$\left\| \overline{P_1 \cdot P_2} \right\| = \sqrt{3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{58 - 21 \cdot \sqrt{3}}$$

y $$\left| \overline{P_3 \cdot P_2} \right| = \sqrt{3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{58 - 21 \cdot \sqrt{3}}$$

Por tanto $|P_1P_2| = |P_3P_2|$ y el triángulo es isósceles.

3.8 Rotación en Coordenadas Polares.

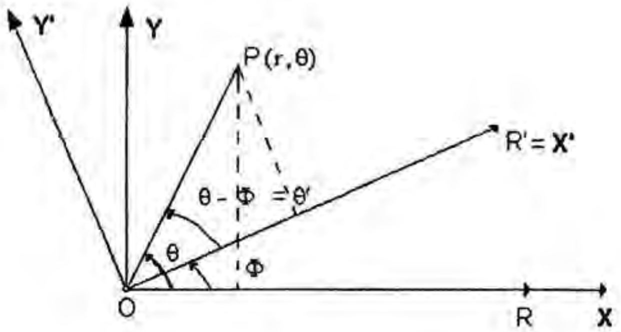
Hagamos coincidir el polo con el origen y el eje polar con la parte positiva del eje X. Sea $P(r,\theta)$ un punto cualquiera en el plano. Dejando fijo el polo giremos el eje polar un ángulo ϕ. (Fig.38)

Las nuevas coordenadas polares de P se relacionan con (r,θ) como sigue

$$r' = r$$

$$\theta' = \theta - \Phi$$

La rotación del eje polar induce una rotación con ángulo ϕ de los ejes coordenados XY.



(Fig.38)

Las coordenadas (x',y') de un punto P(x, y) después de la rotación están dadas por

$x' = r\cdot\cos(\theta - \Phi)$ $\qquad$ $y' = r\cdot\text{sen}(\theta - \Phi)$

de donde, por las fórmulas para el seno y coseno de una diferencia de ángulo

$$x' = r\cdot\cos\theta\cdot\cos\Phi + r\cdot\text{sen}\theta\cdot\text{sen}\Phi \qquad y' = r\cdot\text{sen}\theta\cdot\cos\Phi - r\cdot\cos\theta\cdot\text{sen}\Phi$$

Ahora bien ,como $x = r\cdot\cos\theta$, $y = r\cdot\text{sen}\,\theta$ tenemos que

$$x' = x\cdot\cos\Phi + y\cdot\text{sen}\Phi$$
$$y' = -x\cdot\text{sen}\Phi + y\cdot\cos\Phi$$

Estas formulas expresan las nuevas coordenadas de x', y' P en función de las viejas coordenadas.
Si las consideramos como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas x e y, (cuyo determinante es $\cos^2\theta + sen^2\theta = 1$), resulta que el sistema tiene solución única para cada pareja (x',y') que se considere.

Calculando la solución (x, y) resulta que

$$x = x'\cos\Phi - y'\text{sen}\Phi$$
$$y = x'\text{sen}\Phi + y'\cos\Phi$$

Estas fórmulas expresan las viejas coordenadas x, y en función de las nuevas coordenadas x',y'. Tenemos ahora fórmulas que expresan la transformación del nuevo sistema al sistema original después de rotar los ejes un ángulo de ϕ radianes.

3.9 Coordenadas Cilíndricas y Esféricas

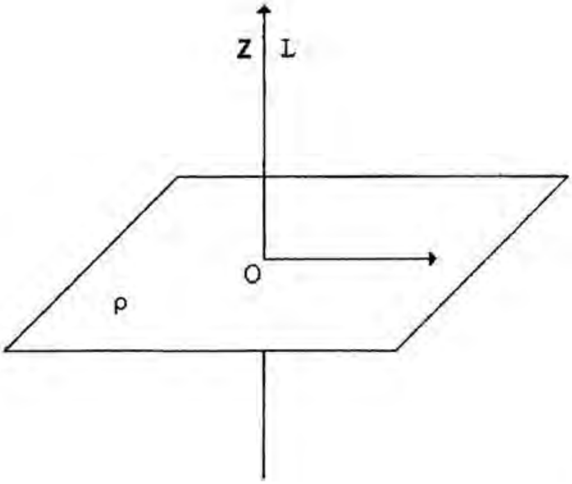
En el plano a veces es más útil considerar coordenadas polares en vez de coordenadas cartesianas. En el espacio sucede algo semejante; hay otros sistemas de coordenadas, como las cilíndricas y las esféricas, que son de gran utilidad en muchos casos en que el uso de coordenadas cartesianas dificulta el trabajo.

Por ejemplo, cuando una superficie es simétrica respecto a una recta, entonces las coordenadas cilíndricas nos pueden simplificar el trabajo. Asimismo, cuando una superficie es simétrica con respecto a un punto, el uso de coordenadas esféricas puede ayudarnos en obtener una soluciones más simples.

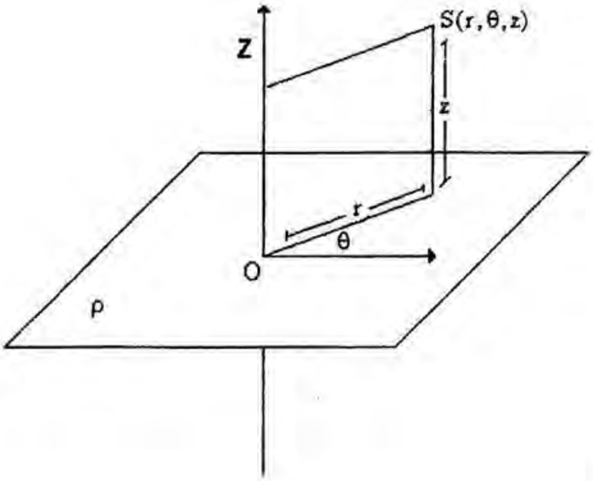
Estos dos tipos de sistemas de coordenadas serán objeto de nuestro estudio en este capítulo

Coordenadas Cilíndricas.

Consideremos un plano ρ y una recta L perpendicular a ρ en el punto O de ρ. (Fig.39) Tomando a O como polo establecemos un sistema de coordenadas polares en ρ y al mismo tiempo dividimos a L en segmentos numerados con O como origen. (este segmento es el eje Z). (Fig.40)



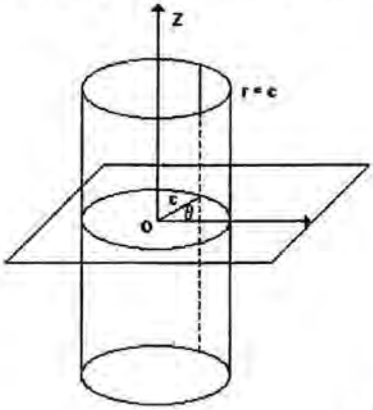
(Fig.39)



(Fig.40)

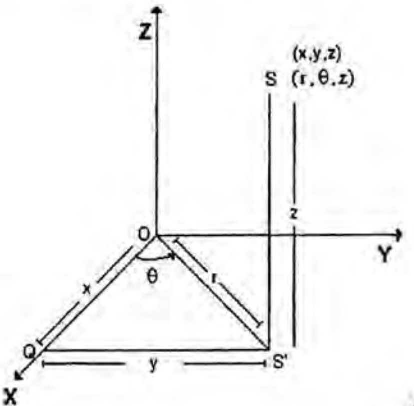
De este modo, como lo muestra la figura 40 , a cualquier punto S del espacio le podemos asignar una terna ordenada (r,θ,z) de números, donde z es la distancia dirigida perpendicular al plano de coordenadas polares que separa al punto S de este plano.

Las coordenadas (r,θ,z) son las coordenadas cilíndricas de S. El término "cilíndricas" se debe a que para cada constante positiva c la gráfica de $r = c$ es un cilindro recto de radio c y cuyo eje es el eje Z. (Fig.41)



(Fig.41)

Para pasar de un sistema de coordenadas cartesianas a otro de coordenadas cilíndricas este último se orienta en forma tal que el eje polar corresponda a la parte positiva del eje X, el eje Z sea el mismo para ambos sistemas y el ángulo θ se mide con la parte positiva del eje X como lado inicial. (Fig.42)



(Fig.42)

Para que las coordenadas cilíndricas (r,θ,z) representen un único punto en el espacio restringimos los valores de r y θ a los intervalos:

$\boxed{r \geq 0}$, $0 \leq \theta < 2 \cdot \pi$

La coordenada z no está sujeta a ninguna restricción, sino que puede tomar cualquier valor real. Todo esto lo tomaremos en cuenta, al hallar una relación entre las coordenadas cartesianas y cilíndricas de cada punto en el espacio.

Consideremos un punto S con coordenadas cartesianas (x, y, z) y coordenadas cilíndricas (r,θ,z) .

Del triángulo rectángulo OQS' tenemos

$x = r \cdot \cos\theta$ $y = r \cdot \operatorname{sen}\theta$ y $z = z$

Estas fórmulas relacionan las coordenadas cartesianas con las cilíndricas, expresándolas en función de estas últimas.

Para expresar las coordenadas cilíndricas en función de las cartesianas, se parte de las fórmulas anteriores y se llega a las expresiones

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Nótese que el sistema de coordenadas cilíndricas es, evidentemente, una extensión al espacio del sistema de coordenadas polares del plano.

Ejemplo .

Obtener las coordenadas cilíndricas del punto P dado por las coordenadas cartesianas $(\sqrt{3}, -1, 3)$

Solución.

$x = \sqrt{3}$, $y = -1$ y $z = 3$

Empleando las relaciones que expresan a las coordenadas cilíndricas en función de las cartesianas se tiene

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2 \qquad \theta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

y como $z = 3$ las coordenadas cilíndricas del punto P son $\left(2, \frac{5\pi}{6}, 3\right)$

Ejemplo .

Transformar la siguiente ecuación rectangular de una superficie a una ecuación en coordenadas cilíndricas.

$$x^2 + y^2 - 4z^2 = 0$$

Solución.

Con base en la relación $r^2 = x^2 + y^2$ sustituyamos en la ecuación anterior

$$r^2 - 4z^2 = 0$$

que es la ecuación en coordenadas cilíndricas que estábamos buscando.

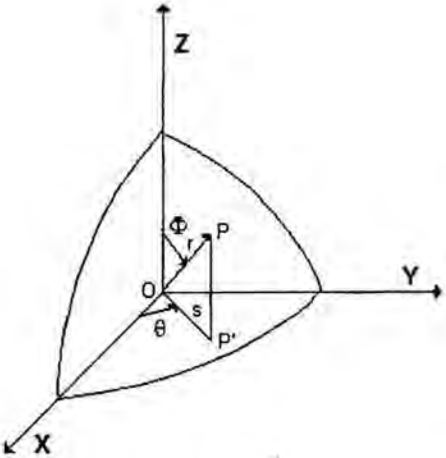
Coordenadas Esféricas.

Como sabemos un radio vector en el espacio (ver def. en cap. 4) esta determinado por su longitud y sus ángulos directores. Por lo tanto se puede localizar un punto en el espacio especificando la longitud y los ángulos de dirección del vector que va del origen O, al punto P.

Sin embargo, como los ángulos directores no son independientes; para localizar a P son suficientes dos de sus tres ángulos directores.

Considérese la proyección del vector $\overrightarrow{OP}$ sobre el plano XY, y sea P' el extremo de la proyección.

P' es el punto de intersección del plano XY con la recta que pasa por P y es perpendicular al plano XY. (Fig.43)



(Fig.43)

Las coordenadas polares de P' son (r,θ)

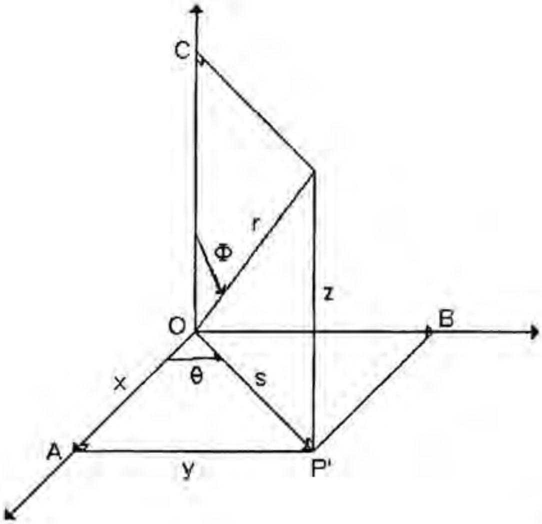
Si r es la longitud del vector $\overline{OP}$ y ϕ es el ángulo que forma la parte positiva del eje Z

con el vector $\overrightarrow{OP'}$, entonces las coordenadas (s,θ,Φ) son llamadas *coordenadas esféricas* de P.

Se emplea el término de "esféricas" porque en un sistema de coordenadas esféricas la gráfica de la ecuación $r = c$, $c > 0$, es una esfera con centro en el origen y radio c.

Designemos por $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$, respectivamente , las proyecciones del vector $\overrightarrow{OP}$ sobre

los ejes X e Y , y $\overrightarrow{OC}$ la proyección del vector $\overrightarrow{OP}$ sobre el eje Z. (Fig.44)



(Fig.44)

Observemos los rectángulos OP'PC y OAP'B. De la figura resulta que

$$\left|\overrightarrow{OP'}\right| = \left|\overrightarrow{CP}\right| = s$$

A su vez, en el triángulo rectángulo OPC tenemos $s = r \cdot \operatorname{sen}\Phi$

Y de los triángulos rectángulos OAP' , OBP' y OP'P tenemos, respectivamente,

$$x = s \cdot \cos\theta = r \cdot \operatorname{sen}\Phi \cdot \cos\theta$$

$$y = s \cdot \operatorname{sen}\theta = r \cdot \operatorname{sen}\Phi \cdot \operatorname{sen}\theta$$

$$z = \overline{PP'} = r \cdot \operatorname{sen}(90° - \Phi) = r \cdot \cos\Phi$$

Por lo tanto, con base en las relaciones

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \operatorname{sen}\Phi \cdot \cos\theta \\ y &= r \cdot \operatorname{sen}\Phi \cdot \operatorname{sen}\theta \\ z &= r \cdot \cos\Phi \end{aligned} \qquad (1)$$

es posible localizar cualquier punto P sobre la superficie esférica cuando se conocen los valores de r, θ, Φ

Considerando como un punto de la superficie de la tierra, P se localiza por su latitud, el complemento del ángulo Φ , y su latitud θ medida a partir del eje X como una recta en el plano del meridiano principal.

De acuerdo con esto, las coordenadas Φ y θ se llaman respectivamente, colatitud y longitud del punto P.

La longitud θ se mide a partir de la parte positiva del eje X como lado inicial.

Para que las coordenadas esféricas (r, Φ, θ) representen un punto único en el espacio restringimos sus valores.

Eliminando Φ y θ de las relaciones (1), obtenemos la ecuación

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2} = r^2$$

que representa la ecuación de una superficie esférica de centro el origen y radio r

Las relaciones (1) pueden emplearse como ecuaciones de transformación entre los sistemas coordenados rectangular y esférico, cuando se conocen los valores x, y, z de un punto P dado.

Si despejamos r, Φ y θ , obtenemos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad \Phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Los resultados anteriores se resumen en el siguiente teorema.

Teorema.

Las coordenadas rectangulares (x, y, z) y las coordenadas esféricas (r,Φ,θ) de un punto en el espacio están ligadas por las relaciones.

$$x = r\cdot\text{sen}\,\Phi\cdot\cos\theta \qquad y = r\cdot\text{sen}\,\Phi\cdot\text{sen}\,\theta \qquad z = r\cdot\cos\Phi$$

Las transformaciones entre los dos sistemas coordenados pueden efectuarse por medio de estas ecuaciones y de las siguientes relaciones obtenidas de ellas:

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \qquad \Phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Las variaciones para r,Φ y θ están dadas por los intervalos

$$r \geq 0 \qquad 0 \leq \Phi \leq \pi \qquad 0 \leq \theta < 2\cdot\pi$$

Ejemplo .

Hallar las coordenadas esféricas del punto P cuyas coordenadas cartesianas son $(\sqrt{5},2,4)$

Solución.

Tenemos como datos los siguientes $x=\sqrt{5}$, $y=2$, $z=4$. Haciendo uso de las relaciones empleando las relaciones que expresan a las coordenadas esféricas en función de las cartesianas se tiene

$$r = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2+2^2+4^2} = \sqrt{5+4+16} = 5$$

$$\Phi = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) = 36°\ 52'\ 11'' \qquad \theta = \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 41°\ 48'\ 37''$$

Por lo tanto las coordenadas esféricas del punto P son (5, 36° 52' 11", 41° 48' 37")

Ejemplo .

Hallar la ecuación rectangular de la ecuación esférica siguiente

$r = 2sen\phi\cos\theta$

Solución.

Sustituyendo en la ecuación anterior con base en las relaciones (1) y (2) se tiene

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

simplificando $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$ o bien $x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$

que es la ecuación cartesiana de la superficie dada.

Ejercicios.

1.- En un sistema polar trazar los siguientes puntos:

$$P_1\ (4, 135°), P_2\left(2, \frac{\pi}{3}\right), P_3\ (3, 75°), P_4\left(3, \frac{2\cdot\pi}{3}\right), P_5\left(3, \frac{5\cdot\pi}{4}\right), P_6\left(-2, \frac{5\cdot\pi}{6}\right)$$

2.- En cada ejercicio pasar la ecuación rectangular dada a su forma polar y viceversa.

a) $2\cdot x + 3\cdot y + 4 = 0$

b) $x^2 + y^2 + x - 3\cdot y + 1 = 0$

c) $2\cdot x^2 - 2\cdot y^2 = 0$

d) $r = 4\cdot \cos(\theta)$

e) $r = \dfrac{1}{1 - \cos(\theta)}$

f) $x\cdot y = 1$

g) $2\cdot x^2 - y - 1 = 0$

h) $r = 2\cdot \operatorname{sen}(\theta)$

i) $\operatorname{sen}(\theta)^2 - 2\cdot r\cdot \cos(\theta) = 0$

j) $r^2 = 4\cdot \operatorname{sen}(\theta)$

3.- Trazar la curva polar cuya ecuación se da utilizando los criterios de graficación.

a) $r = 3\cdot \cos(\theta)$

b) $r = 4\cdot \operatorname{sen}(\theta) + 3\cdot \cos(\theta)$

c) $r = \dfrac{2}{2 - \cos(\theta)}$

d) $r = \sec\left(\dfrac{\theta}{2}\right)^2$

e) $r\cdot \operatorname{sen}(\theta)\cdot \tan(\theta) = 2$

f) $r^2\cdot\left(4 + 5\cdot \operatorname{sen}(\theta)^2\right) = 4$

g) $r^2 = \operatorname{sen}(2\cdot\theta)$

h) $r^2\cdot \cos(\theta)^3 = 4\cdot \operatorname{sen}(\theta)$

i) $r = 4\cdot \operatorname{sen}(2\cdot\theta)$

j) $r = 3\cdot \operatorname{sen}(4\cdot\theta)$

k) $r\cdot\theta = 4$

l) $\log(r) = 2\cdot\theta$

m) $r^2 = 4\cdot\theta$

n) $r^2\cdot\theta = 9$

ñ) $2\cdot \csc(\theta) = 3$

o) $r = 2 - \cos(\theta)$

p) $r = 2\cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta}{3}\right)^3$

q) $r = (1 + \operatorname{sen}(\theta))$

4.- Probar que los puntos $P_1\left(1,\frac{\pi}{3}\right), P_2\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right)$ y $P_3(1,0)$ son vértices de un triángulo equilátero.

5.- En cada ejercicio transformar la ecuación rectangular de la recta dada a su forma polar.

a) $2x + y + 1 = 0$ c) $2x + 3y - 5 = 0$

b) $5x + 12y + 13 = 0$ d) $x + y = 0$

6.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $\left(6,\frac{2\pi}{3}\right)$ y es perpendicular al eje polar.

7.- Hallar la ecuación polar de la circunferencia de centro el punto $\left(6,\frac{3\pi}{4}\right)$ y radio igual a 9.

8.- En cada ejercicio, hallar el radio y las coordenadas polares del centro de la circunferencia a partir de su ecuación polar dada.

a) $r = 4\cos\theta$ b) $r^2 - 2\sqrt{2}\,r\cos\theta - 2\sqrt{2}\,r\,\mathrm{sen}\,\theta - 3 = 0$

9.- Hallar analítica y gráficamente, los puntos de intersección de las curvas polares siguientes.

a) $r = \sin(2\theta)$; $r = \cos\theta$

b) $r = 1 - \cos\theta$; $r = 1 - \mathrm{sen}\,\theta$

c) $r = \mathrm{sen}\,\theta$; $r = 1 - \mathrm{sen}\,\theta$

d) $r = 2\,\mathrm{sen}\,\theta$; $r = 2$

e) $r^2 = \mathrm{sen}\,2\theta$; $r^2 = \cos 2\theta$

10.- En cada uno de los siguientes ejercicios, identificar la cónica cuya ecuación polar se da. Para una parábola, hállense las coordenadas polares del vértice y la longitud del lado recto.

Para una cónica central, hállense las coordenadas del centro y los vértices, y las longitudes de los ejes y cada lado recto.
Hallar también la ecuación rectangular de cada cónica.

a) $r = \dfrac{5}{2 - 2\cos\theta}$ b) $r = \dfrac{-6}{3 + \operatorname{sen}\theta}$ c) $r = \dfrac{3}{2 + 4\cos\theta}$

11.- Obtener las coordenadas cilíndricas y esféricas de los puntos cuyas coordenadas se dan.

a) $(1, 1, 1)$ b) $\left(\sqrt{3}, -2, -1\right)$ c) $\left(-\sqrt{6}, \sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right)$ d) $(3, 3, -4)$

12.- Obtener las coordenadas cartesianas del punto dado en coordenadas cilíndricas.

a) $\left(4, \dfrac{\pi}{2}, 1\right)$ b) $\left(-3, \dfrac{\pi}{6}, -2\right)$ c) $\left(-2, \dfrac{\pi}{4}, 4\right)$ d) $\left(2, -\dfrac{\pi}{2}, 3\right)$

13.- Obtener las coordenadas cartesianas del punto cuyas coordenadas esféricas se dan

a) $\left(2, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ b) $\left(5, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right)$ c) $\left(2, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ d) $\left(3, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{3}\right)$

14.- Hallar la ecuación cartesiana de la superficie cuya ecuación en coordenadas cilíndricas se da.

a) $r^2 = 4 - z^2$ b) $r = 9\operatorname{sen}\theta$ c) $r^2 - z^2 = 4$

15.- Hallar la ecuación cartesiana de la superficie cuya ecuación en coordenadas esféricas se da.

a) $\rho = 2$ b) $\rho\cos\phi = 4$ c) $\rho = 2\operatorname{sen}\phi\cos\theta$

16.- Encontrar una ecuación en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas, de la superficie dada.

$\boxed{a)}$ $\boxed{x^2+y^2+z^2} = 9$ b) $x^2+y^2 = 9z$ c) $x^2+y^2+z^2-2x = 0$

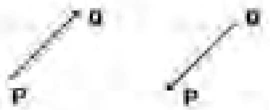
d) $y = 3$ e) $x = -4z^2$ f) $y = 3x^2+z$

IV Álgebra Vectorial.

4.1 Vectores en el plano.

Si en un segmento PQ distinguimos un sentido (Por ejemplo "de P a Q") estaremos hablando de un *segmento dirigido*. Así, en el segmento $\overline{PQ}$ podemos considerar como punto inicial a P y como punto final a Q, con lo cual estaremos hablando del segmento dirigido $\overrightarrow{PQ}$. (con una "flecha" en la parte superior).

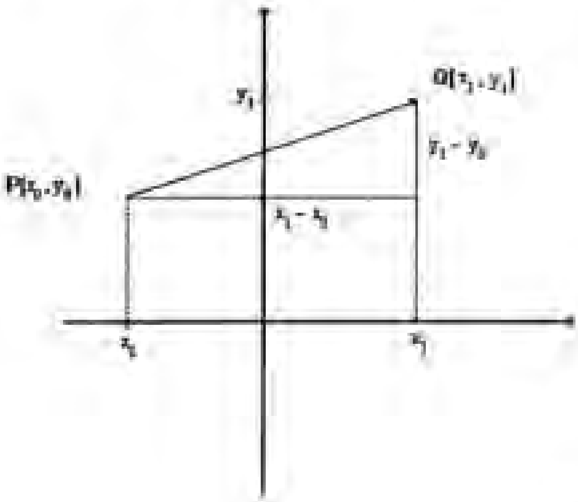
Designamos a este segmento dirigido de un punto a otro con el nombre de *flecha*. (Fig.45)



(Fig.45)

$\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ se dice que son flechas con sentidos opuestos.

En el plano coordenado podemos relacionar las flechas con las coordenadas de los puntos de sus extremos como sigue: (Fig.46)



(Fig.46)

De esta manera los componentes de la flecha $\overrightarrow{PQ}$ son los números $x_1 - x_0$ y $y_1 - y_0$

Por lo cual cada flecha tendrá dos números asociados que se obtienen restando la abscisa y ordenada del punto inicial a la abscisa y ordenada del punto final.

Ejemplo

Sean P(2, 1) y Q(3, 2) dos puntos en el plano.

Por lo tanto, los componentes de la flecha $\overrightarrow{PQ}$ son los números $3 - 2 = 1$, y $2 - 1 = 1$
Mientras tanto los componentes de la flecha $\overrightarrow{QP}$ son los números $2 - 3 = -1$, y $1 - 2 = -1$

A los números $a = x_1 - x_0$ y $b = y_1 - y_0$ se le llama componentes de $\overrightarrow{PQ}$

Se sigue que ; si una flecha $\overrightarrow{PQ}$ tiene componentes *a, b*, entonces la flecha $\overrightarrow{QP}$ tendrá componentes *-a* , *-b* .

En resumen:

Una flecha esta determinada si:

1) Se conocen sus extremos P y Q.

2) Se conoce su punto inicial y sus componentes *a, b* .

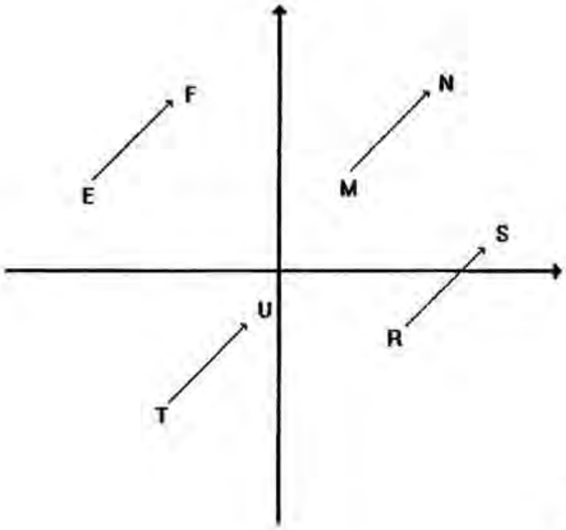
$x_1 = x_0 + a$
$y_1 = y_0 + b$

3) Se conoce su punto final y sus componentes.

$x_0 = x_1 - a$
$y_0 = y_1 - b$

Las componentes de la flecha son dos números ordenados, es decir una pareja ordenada *(a , b)* donde *a* es la componente en X y *b* es la componente en Y.

Observemos que a esto hay muchas flechas que tienen las mismas componentes. (Fig.47)



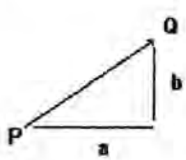
(Fig.47)

$\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{TU}$, $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{MN}$ tienen componentes iguales.

Decimos que dichas flechas son *equivalentes*. En otras palabras: dos o mas flechas son *equivalentes* si y solo si sus componentes en X y en Y son iguales.

A este par ordenado *(a, b)* de números con el que, como veremos, se pueden hacer operaciones y que se representa geométricamente por medio de flechas equivalentes se le llama *vector*.

Todo vector *(a, b)* está asociado con una familia de flechas (equivalentes) con las mismas componentes *a* y *b*.(Fig.48)



(Fig.48)

Una flecha tiene punto inicial, punto final , componentes y guarda una posición fija.

El vector en contraste tiene dos componentes y no tiene posición fija en el plano.

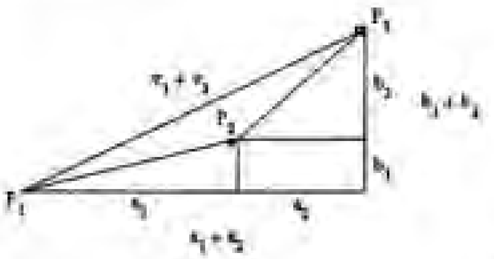
Las flechas, en este sentido, son la representación geométrica de los vectores. Hay dos operaciones fundamentales con flechas:

a) Suma de dos flechas.
b) Producto de un escalar por una flecha.

Sean $\overrightarrow{P_1 P_2}$ y $\overrightarrow{P_2 P_3}$ dos flechas tales que el punto inicial de la segunda es el punto final de la primera.

La suma $\overrightarrow{P_1 P_2}$ y $\overrightarrow{P_2 P_3}$ es la flecha:

$$\overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_2 P_3} = \overrightarrow{P_1 P_3} \quad \text{(Fig.49)}$$



(Fig.49)

Como se puede ver en la figura, las componentes de la flecha $\overrightarrow{P_1 P_3}$ se obtienen sumando las componentes respectivas de los sumandos; si a y b son las componentes de $\overrightarrow{P_1 P_3}$ entonces :

$a = a_1 + a_2$; $b = b_1 + b_2$

En relación a las componentes, hemos visto que al sumar flechas, lo que realmente hacemos es sumar sus componentes, y al multiplicar una flecha por un escalar lo que hacemos es multiplicar cada componente por ese escalar.
Por tanto, tiene sentido definir la suma de vectores y el producto de un vector por un escalar como sigue:

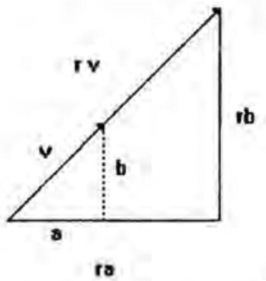
El vector suma tiene como componentes, la suma de los componentes correspondientes de los vectores.

$v_1 + v_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

Si r es un escalar y $v = (a, b)$ un vector.
Definimos el producto de un escalar por un vector como el vector:

$$r\,v = (ra, rb)$$

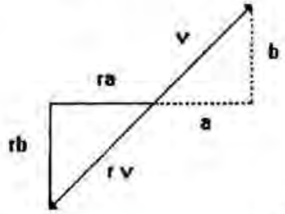
Si $r > 0$, $r\,v$ tiene el mismo sentido que v. (Fig.50)



(Fig.50)

donde r es un factor de magnificación.

Si $r < 0$, $r\,v$ tendrá sentido contrario a v. (Fig.51)



(Fig.51)

Si $r = 0$ por definición tenemos:

$$r\,v = (\,0a, 0b\,) = (\,0, 0\,)$$

Obteniendo un vector cuyas coordenadas son ambas cero, a este vector le llamamos vector cero y lo denotamos: $\overline{O} = (0,0)$

Estas operaciones tienen la ventaja de que se pueden llevar a cabo con todos los vectores.

4.2 Propiedades de los vectores.

Para todo vector v, v_1, v_2, v_3 y escalares r, r_1, r_2, r_3 se cumplen las siguientes propiedades:

a) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$ asociativa

b) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ conmutativa

c) $v + \overline{O} = v$ neutro aditivo

d) $v + (-v) = \overline{O}$ inverso aditivo ; donde $-v = -1v$

e) $r_1 \cdot (r_2 \cdot v) = (r_1 \cdot r_2) \cdot v$

f) $r \cdot (v_1 + v_2) = rv_1 + rv_2$

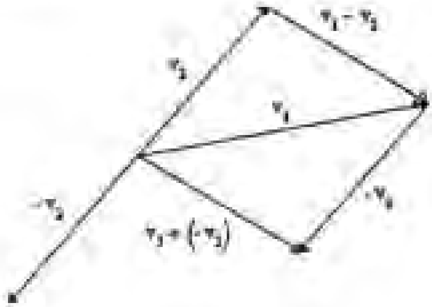
g) $(r_1 + r_2) \cdot v = r_1 \cdot v + r_2 \cdot v$

h) $1 \cdot v = v$

La diferencia de dos vectores v_1 y v_2 es el vector $v_1 - v_2$. (Fig.52)

(Fig.52)

Geométricamente $v_1 - v_2$ es la flecha que va del punto inicial de v_2 al punto final de v_1
$v_1 - v_2$ lo podemos ver como la suma de v_1 con el negativo de v_2 es decir $v_1 + (-v_2)$
(Fig.53)

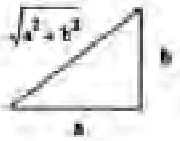


(Fig.53)

Como hemos visto un vector esta determinado por dos componentes.

Si queremos saber cual es su longitud o magnitud del vector v , y si $\overrightarrow{PQ}$

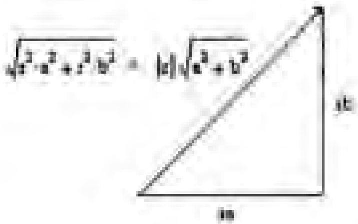
es una flecha que representa a *v*. Las componentes de $\overrightarrow{PQ}$ forman un triángulo rectángulo y por lo tanto la longitud de vector v será conforme al teorema de Pitágoras el número $\sqrt{a^2 + b^2}$



(Fig.54)

La longitud de v se denota con $|v| = \sqrt{a^2 + b^2}$

La longitud de $r\,v$ es el numero $|rv|$ donde r es un numero real y v un vector. (Fig.55)



(Fig.55)

A la longitud o magnitud de un vector se le da el nombre de *norma* del vector.

Sean P_1, P_2, P_3 puntos en el plano consideremos las flechas

$\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_2P_1}$, $\overrightarrow{P_2P_3}$, $\overrightarrow{P_1P_3}$ y un escalar k tenemos las siguientes propiedades:

1) $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| \geq 0$; $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = 0 \iff P_1 = P_2$

2) $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \left|\overrightarrow{P_2P_1}\right|$

3) $\left|k\left(\overrightarrow{P_1P_2}\right)\right| = |k|\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|$

4) $\left|\overrightarrow{P_1P_3}\right| \leq \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| + \left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|$

5) $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\ \left(\overrightarrow{P_1P_3}\right)\right| \geq \left|\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| - \left(\left|\overrightarrow{P_1P_3}\right|\right)\right|$

Sean v, v_1, v_2 vectores en el plano y k un escalar tenemos las siguientes propiedades:

6) $|v| \geq 0$; $|v| = 0 \Leftrightarrow v = \overline{O}$

7) $|-v| = |v|$

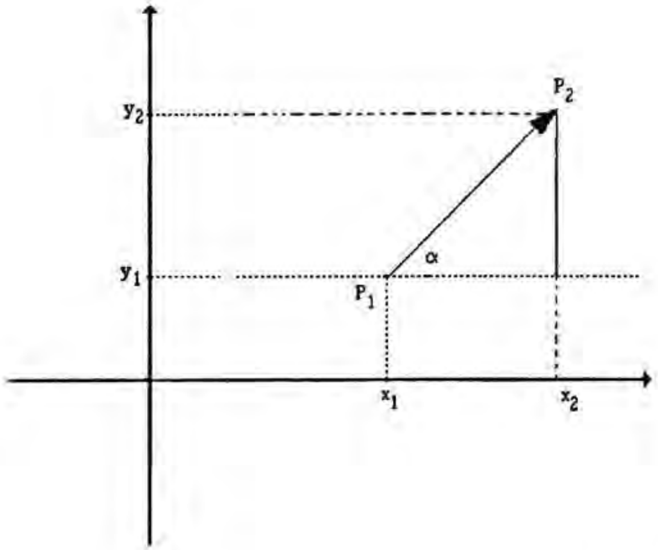
8) $|k \cdot v| = |k| \cdot |v|$

9) $|v_1 + v_2| \leq |v_1| + |v_2|$

10) $|v_1 - v_2| \geq ||v_1| - |v_2||$

4.3 Ángulo Director de un Vector.

Sean P_1 y P_2 dos puntos distintos y consideremos que $\left| P_1 \cdot P_2 \right| \neq 0$ (Fig.56)



(Fig.56)

Tracemos una recta paralela al eje X que pase por el punto P_1.

Dicha recta con la flecha $\overrightarrow{P_1 \cdot P_2}$ forman un ángulo al que llamaremos ángulo director de la flecha (el vector); medido en forma levógira (sentido positivo) .

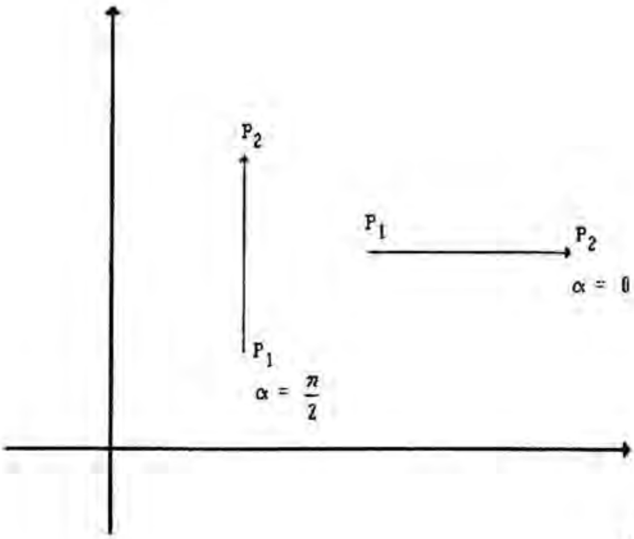
De la figura se sigue que $\cos\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{\left|\overrightarrow{P_1 \cdot P_2}\right|}$ y $sen\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{\left|\overrightarrow{P_1 \cdot P_2}\right|}$ (1)

α es el ángulo director de la flecha $\overrightarrow{P_1 \cdot P_2}$ y esta definido en $0 \leq \alpha < 2 \cdot \pi$

El ángulo director nos determina la dirección que tendrá la flecha.

Si $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$ (Es decir, $y_1 = y_2$) entonces $\overrightarrow{P_1 \cdot P_2}$ es horizontal.

Si $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ o $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$ (Es decir, $x_1 = x_2$) entonces $\overrightarrow{P_1 \cdot P_2}$ es vertical. (Fig.57)



(Fig.57)

Si $\overrightarrow{P_1 \cdot P_2}$ no es vertical, podemos definir como pendiente de la flecha $\overrightarrow{P_1 \cdot P_2}$ al numero:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\alpha \qquad (2)$$

Es decir la pendiente de una flecha es la tangente de su ángulo director.

Si $\overrightarrow{P_1 \cdot P_2}$ es vertical, decimos que la pendiente de $\overrightarrow{P_1 \cdot P_2}$ esta definida (o que tiene una "pendiente infinita".)

Sea $v = (a, b)$ el vector asociado a la flecha $\overrightarrow{P_1 \cdot P_2}$

Decimos que el ángulo director es el ángulo director α de $\overrightarrow{P_1 \cdot P_2}$. De (1) se sigue que

(3) $\cos\alpha = \dfrac{a}{|v|}$ (4) $sen\alpha = \dfrac{b}{|v|}$

De (2) definimos la pendiente de v como el numero

$m = \dfrac{b}{a} = \tan\alpha$ suponiendo que $a \neq 0$ es decir, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2} \ldots$

De (3) y (4) tenemos:

$a = |v| \cdot \cos\alpha$; $b = |v| \cdot sen\alpha$

De lo anterior se sigue que podemos hallar las componentes de un vector si conocemos su ángulo director y su magnitud (norma).

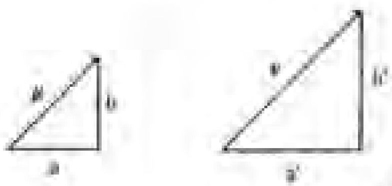
Dos vectores u y v son paralelos si, $v \neq \vec{O}$ y hay una constante t tal que $v = t \cdot u$ (Fig.58)

(Fig.58)

Es decir dos vectores $u = (a, b)$ y $v = (a', b')$ distintos de $\vec{O}$ son paralelos entre si cuando hay un numero t tal que $v = t \cdot u$.

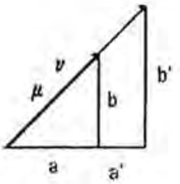
Esto es $a = t\,a'$ y $b = t\,b'$.

Si $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a' \neq 0$ y $b' \neq 0$, entonces $t = \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$, es decir las componentes de u y v son proporcionales.



(Fig.59)

Los triángulos son semejantes. (Fig.59)
Sobreponiéndolos. (Fig.60)



$a = ta'$

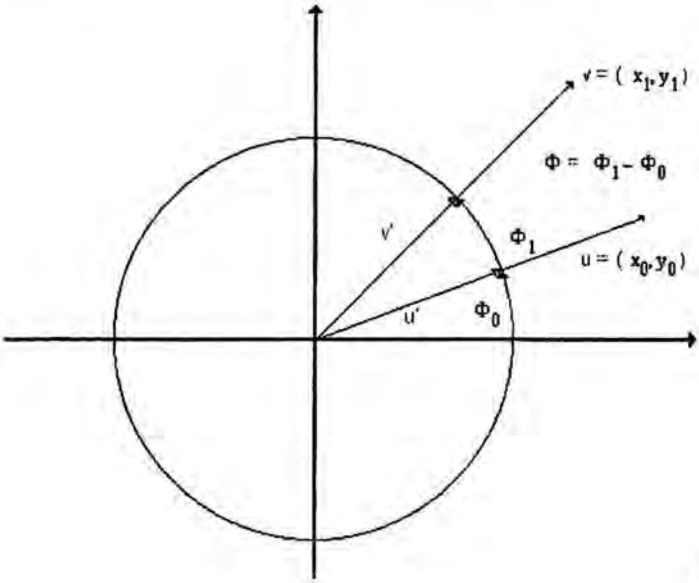
$b = tb'$

(Fig.60)

$u \parallel v$ y tienen el mismo sentido, pues $t > 0$.

4.4 Ángulo entre dos Vectores. Producto Punto.

Sean $v = (x_1, y_1)$ y $u = (x_0, y_0)$ dos vectores cuyo punto inicial es el origen. Tracemos una circunferencia unitaria **C** con centro el origen. (Fig.61)



(Fig.61)

El ángulo ϕ entre v y u lo podemos expresar:

$$(1)\qquad \cos\phi = \cos(\phi_1 - \phi_2) = \cos\phi_1 \cos\phi_0 + \operatorname{sen}\phi_1 \operatorname{sen}\phi_0$$

Este ángulo es el mismo que hay entre v' y u', que son paralelos a v y u y de longitud 1. Por lo tanto, el problema de hallar el ángulo entre los vectores v y u se resuelve si logramos determinar los vectores v' y u' de longitud 1 y en el mismo sentido que v y u.

Por ejemplo, consideremos en exclusión al vector u

Se busca t tal que $t\,u = u'$ con $|u'| = 1$.

Como $1 = |u'| = |tu| = t|u|$, $\therefore t = \dfrac{1}{|u|}$

Es decir

$$u' = \frac{1}{|u|}u = \frac{1}{\sqrt{x_0^{\,2} + y_0^{\,2}}}\,(x_0, y_0) = \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^{\,2} + y_0^{\,2}}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^{\,2} + y_0^{\,2}}}\right)$$

Por trigonometría

$$u' = (\cos\phi_0, \operatorname{sen}\phi_0) = \left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^{\,2} + y_0^{\,2}}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^{\,2} + y_0^{\,2}}}\right)$$

Por lo tanto, $\cos\phi_0 = \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^{\,2} + y_0^{\,2}}}$, $\operatorname{sen}\phi_0 = \dfrac{y_0}{\sqrt{x_0^{\,2} + y_0^{\,2}}}$

De la misma manera podemos hallar un vector v' paralelo a v de longitud 1.

Es decir $v' = t\,v$ tal que $t = \dfrac{1}{|v|}$

Ahora, con base (1) podemos expresar el ángulo ϕ entre v y u como sigue:

$$\cos\phi = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \cdot \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} + \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \cdot \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \text{, es decir}$$

$$\cos\phi = \frac{x_1 \cdot x_0 + y_1 y_0}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \qquad (\#)$$

De lo anterior se sigue que el vector unitario en la dirección y sentido de u es el vector $\frac{u}{|u|}$, para $u \neq O$

De esta manera u' y v' son *vectores unitarios* en la dirección y sentido de u y v.
En la expresión (#), el número $x_0 x_1 + y_0 y_1$ que figura en el numerador es tan importante en geometría analítica que se le denota de manera especial.

Se le llama *producto punto ó producto escalar* de los vectores u y v. Y se le denota con $u \bullet v$.

Por definición $u \bullet v = (x_0, y_0) \bullet (x_1, y_1) = x_0 \cdot x_1 + y_0 \cdot y_1$

Con esta notación la expresión (#) se escribe

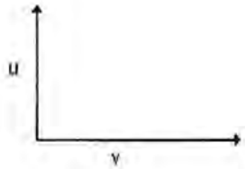
$$\cos\phi = \frac{u \bullet v}{|u||v|} \quad \text{de donde } 0 \leq \phi \leq \pi$$

Nótese que:

Si $u \bullet v > 0$ entonces $\cos\phi > 0$ y $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$

Si $u \bullet v < 0$ entonces $\cos\phi < 0$ y $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$

Si $u \bullet v = 0$, $\cos\phi = 0$ y $\phi = \frac{\pi}{2}$ y los vectores u y v son perpendiculares entre sí, lo cual se indica con la notación $u \perp v$. (Fig.62)



(Fig.62)

De lo anterior se sigue que $u \perp v \Leftrightarrow u \bullet v = 0$

En cambio, cuando $\phi = 0$, tenemos que $\cos\phi = 1$

y $\dfrac{u \bullet v}{|u||v|} = 1$

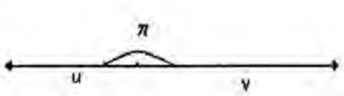
y $u \bullet v = |u||v|$

Es decir, $u \parallel v$ y tienen el mismo sentido. (Fig.63)

(Fig.63)

Si $\phi = \pi$, entonces $\cos\phi = -1$ y en consecuencia $\dfrac{u \bullet v}{|u||v|} = -1$, $u \bullet v = -|u||v|$

y en este caso $u \parallel v$, pero tienen sentidos opuestos. (Fig.64)



(Fig.64)

Ahora bien, como $-1 \leq \cos\phi \leq 1$

tenemos que $-1 \leq \frac{u \bullet v}{|u||v|} \leq 1$

o bien, $-|u||v| \leq u \bullet v \leq |u||v|$

Por lo tanto $|u \bullet v| \leq |u||v|$ obteniendo así la desigualdad de Cauchy:

$|x_0 x_1 + y_0 y_1| \leq \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \cdot \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

Nótese la igualdad sólo se tiene cuando *u* y *v* son paralelos.

<u>Vectores Perpendiculares</u>.

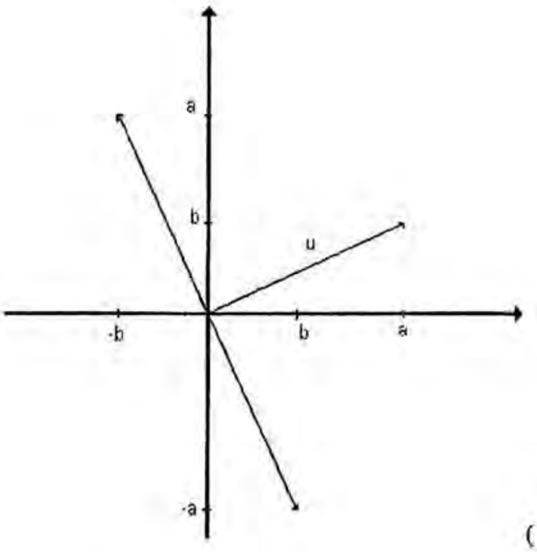
Ahora pasemos a otro problema.

Dado un vector $u = (a, b)$ queremos determinar, es decir, un vector (x, y) que sea perpendicular a *u*.

$(a,b) \bullet (x,y) = 0$

Dos valores para los cuales se satisface la ecuación anterior son $x = -b$ e $y = a$.

Por definición diremos que $(-b, a)$ es el vector perpendicular a $u = (a, b)$, y lo denotaremos con $u^{\perp}$. (Fig.65)



(Fig.65)

Para todo vector u se cumplen las siguientes propiedades :

a) $u \bullet u^{\perp} = 0$

b) $\left(u^{\perp}\right)^{\perp} = -u$

c) $\left|u^{\perp}\right| = |u|$

Propiedades del producto punto.

Para todo vector v, v_1, v_2, v_3 y escalar c se cumple lo siguiente:

a) $v_1 \bullet v_2 = v_2 \bullet v_1$ conmutativa

b) $v_1 \bullet (v_2 \pm v_3) = v_1 \bullet v_2 \pm v_1 \bullet v_3$ distributiva

c) $v \bullet v = |v|^2$

d) $c \cdot (v_1 \bullet v_2) = (cv_1) \bullet v_2 = v_1 \bullet (cv_2)$

e) $\overline{O} \bullet v = 0$

f) $v \bullet v = 0$ si y solo si $v = O$

Todo vector $v = (a, b)$, $v \neq \overline{O}$ se puede expresar en términos de dos vectores.

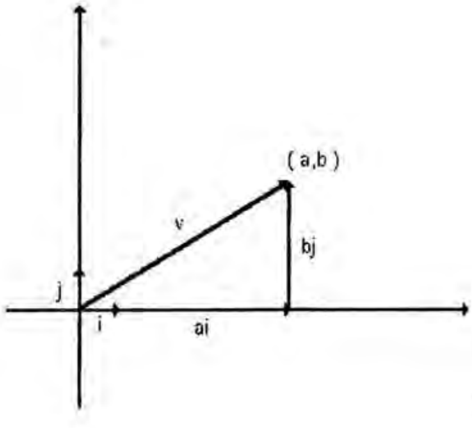
$v = (a, b) = (a, 0) + (0, b)$

$v = a\,(1, 0) + b\,(0, 1)$

Denotemos al vector (1,0) = i y al vector (0,1) = j

De donde el vector v puede ser escrito como combinación lineal de los vectores i, j . (Fig.66)

$v = ai + bj$.



(Fig.66)

Geométricamente el vector v es el vector suma de ai y bj.
Notemos que i, j son vectores unitarios ortogonales es decir :

$|i| = |j| = 1$ y $i \bullet j = 0$ $\therefore i \perp j$

4.5 Proyección Ortogonal.

Consideremos dos vectores v_1, v_2 distintos de cero.

La proyección de v_2 sobre v_1 es el vector que se obtiene al bajar la perpendicular del punto final de v_2 a v_1. Y se denota como $(\text{Proy}\,v_2)_{(v_1)}$

(Fig.67)

De la figura 67 resulta que $u' = (\text{Proy}\,v_2)_{(v_1)}$

$u' = s \cdot v_1$

El problema se resuelve si determinamos un escalar s tal que $u' = s \cdot v_1$.

Como $u' = s \cdot v_1$ entonces $|s||v_1| = |u'|$ y $|s| = \dfrac{|u'|}{|v_1|}$

Por otra parte $|u'| = |v_2||\cos\theta|$ $\therefore$ $|s| = \dfrac{|v_2||\cos\theta|}{|v_1|}$

Si consideramos que s y $\cos\theta$ tienen el mismo signo, entonces $s = \dfrac{|v_2|\cos\theta}{|v_1|}$

Entonces la proyección de v_2 sobre v_1 es el vector

$$(Proy\,v_2)_{v_1} = (|v_2|\cdot\cos\theta)\cdot u$$

$$(Proy\,v_2)_{v_1} = \left(|v_2|\cdot\frac{v_1 * v_2}{|v_1||v_2|}\right)\cdot u$$

$$(Proy\,v_2)_{v_1} = \left(\frac{v_1 * v_2}{|v_1|}\right)\cdot\frac{v_1}{|v_1|}$$

Al número $\dfrac{v_1 * v_2}{|v_1|}$ se le llama componente de v_2 en el sentido de v_1 y se denota como :

$(comp\,v_2)_{v_1}$. Por lo tanto $(Proy\,v_2)_{v_1} = \left(\dfrac{v_1 * v_2}{|v_1|^2}\right)\cdot v_1$

Ejemplo 1.

Dados $v_1 + v_2 = (4,-6)$ y $\dfrac{v_1 - v_2}{6} = (-2,8)$. Encontrar v_1 y v_2.

Solución.

$$v_1 + v_2 = (4,-6)$$
$$v_1 - v_2 = 6(-2,8) = (-12,48)$$

Sumando las ecuaciones obtenemos:

$$2v_1 = (-8,42)$$
$$v_1 = (-4,21)$$

sustituyendo v_1 en la primera ecuación

$$(-4,21) + v_2 = (4,-6)$$
$$v_2 = (4,-6) - (-4,21)$$
$$v_2 = (8,-27)$$

Ejemplo 2.

Dados $P_1(3,7)$, $P_2(2,3)$, $Q_1(2,1)$, $Q_2(-1,2)$.

a) Encontrar los vectores *u* y *v* que tienen como representación las flechas

$\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{Q_1Q_2}$

b) Hallar $u+v$, $u-v$, $2u$.

c) Encontrar la dirección y pendiente de *u* y *v*.

Solución.

a) $u=\overrightarrow{P_1P_2}$ de donde $u=(2-3,\ 3-7)=(-1,-4)$

de donde $v=(-1-2,\ 2-1)=(-3,1)$

b) $u+v=(-1,-4)+(-3,1)=(-4,-3)$
$u-v=(-1,-4)-(-3,1)=(2,-5)$
$2u=2(-1,-4)=(-2,-8)$

c) En el caso de *u* su dirección esta determinada por :

$\cos\alpha=\dfrac{1}{|u|}=\dfrac{-1}{\sqrt{17}}$ por lo tanto $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$

$\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{-4}{|u|}=\dfrac{-4}{\sqrt{17}}$ $\alpha=255^\circ\,57'\,49''$

y su pendiente $m=\dfrac{-4}{-1}=4$

Para *v* su dirección esta dada por :

$\cos\beta=\dfrac{-3}{|v|}=\dfrac{-3}{\sqrt{10}}$ por lo tanto $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$

$\operatorname{sen}\beta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ de donde $\beta=161^\circ\,33'\,54''$

y su pendiente $m = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$

Ejemplo 3.

Dados $v_1 = (2,1)$ y $v_2 = (-1,-3)$. Encontrar el ángulo entre v_1 y v_2.

Solución.

$$\cos\theta = \frac{v_1 * v_2}{|v_1||v_2|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

de donde $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

por lo tanto $\theta = 135°$

Ejemplo 4.

Dado $v_1 = (-2,1)$. Encontrar un vector $v = (a,b)$ tal que $v \perp v_1$ y $|v| = 4$.

Solución.

$v \perp v_1$ implica $v * v_1 = 0$ esto es $(a,b) * (-2,1) = 0$

$$-2a + b = 0$$

$$b = 2a \quad (1)$$

Por otra parte $\sqrt{a^2 + b^2} = 4$

$$a^2 + b^2 = 16 \quad (2)$$

sustituimos (1) en (2) $\quad a^2 + (2a)^2 = 16 \quad$ por lo tanto $a = \pm \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

$$a^2 + 4a^2 = 16$$

$$a^2 = \frac{16}{5}$$

y $b = 2(\pm \dfrac{4}{\sqrt{5}}) = \pm \dfrac{8}{\sqrt{5}}$

por lo tanto los vectores solución son :

$$v = \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{8}{\sqrt{5}} \right) \quad y \quad v = \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{8}{\sqrt{5}} \right)$$

Ejemplo 5.

Decir si los siguientes vectores son paralelos , si no son encontrar el ángulo entre ellos.

a) $u = (1,4)$ $\quad v = (3,8)$

b) $w = (2,1)$ $\quad z = (-6,-3)$

Solución.

a) Si $u \parallel v$ entonces existe un número real c tal que

$$(1,4) = c\,(3,8)$$
$$(1,4) = (3c, 8c)$$

Esto implica que $1 = 3c$ y $4 = 8c$, no existe ningun número real que satisfaga ambas ecuaciones.
Por lo tanto u y v son vectores no paralelos.

Su ángulo lo obtenemos :

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{3 + 32}{\sqrt{17}\,\sqrt{73}} = \frac{35}{\sqrt{1241}} \approx 0.994$$

de donde $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ $\quad$ por lo tanto $\quad \theta = 6° \, 31' \, 11''$.

b) Si w ∥ z entonces existe un número real c tal que $(2,1) = c(-6,-3)$
de donde $2 = -6c$ y $1 = -3c$.

$$\therefore \; c = -\frac{1}{3}$$

Como c satisface las dos igualdades, por lo tanto existe un número real c tal que $w = c\,z$ y por lo cual $w \parallel z$, $c < 0$, w y z son paralelos y de sentido contrario.

Ejemplo 6.

Probar que los siguientes vectores son ortogonales por dos métodos.

a) $v_1 = (a,0)$, $v_2 = (0,b)$
b) $w_1 = (1,3)$, $w_2 = (3,-1)$

Solución.

a) Como $(a,0) \bullet (0,b) = 0$, entonces $v_1 \perp v_2$

$v_1 \perp v_2$ si $|v_1 + v_2| = |v_1 - v_2|$

$$|v_1 + v_2| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|v_1 - v_2| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

por lo tanto $|v_1 + v_2| = |v_1 - v_2|$ y $v_1 \perp v_2$

b) Como $(1,3) \bullet (3,-1) = 3 - 3 = 0$, entonces $w_1 \perp w_2$

$|w_1 + w_2| = |w_1 - w_2|$
$\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{2^2 + 4^2}$ por lo tanto $w_1 \perp w_2$.

Ejemplo 7.

Demostrar que $\left(a^{\perp}\right)^{\perp} = -a$

Solución.

Sea $a = (a_1, a_2)$ $\quad -a = (-a_1, -a_2)$

$a^{\perp} = (-a_2, a_1)$ $\quad (a^{\perp})^{\perp} = (-a_1, -a_2)$

por lo tanto $\quad (a^{\perp})^{\perp} = -a$.

Ejemplo 8.

Verificar la desigualdad de Cauchy's Schwarz y la desigualdad del triángulo para los vectores $v_1 = (2,-1)$ y $v_2 = (2,3)$.

Solución.

Probaremos que $\quad |v_1 \circ v_2| \leq |v_1|\,|v_2|$

$|v_1 \circ v_2| = |2(2) + (-1)3| = 1$

$|v_1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \qquad |v_2| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

se cumple $\quad 1 \leq \sqrt{5}\sqrt{13}$

Ahora veremos que se cumple $|v_1 + v_2| \leq |v_1| + |v_2|$

$|v_1 + v_2| = \sqrt{(2+2)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

$|v_1| = \sqrt{5} \qquad |v_2| = \sqrt{13}$

por lo tanto $\quad \sqrt{20} \leq \sqrt{5} + \sqrt{13}$

Ejemplo 9.

Determinar si los siguientes pares de vectores son paralelos o perpendiculares. Si no lo son encontrar el ángulo entre ellos. Si son paralelos averiguar si tienen el mismo sentido o sentidos opuestos.

a) $v_1 = 5i - 2j$; $v_2 = 4i + 10j$

b) $u_1 = -i + 4j$; $u_2 = 6i + 2j$

c) $w_1 = 2i - j$; $w_2 = -4i + 2j$

Solución.

$v_1 \parallel v_2 \Leftrightarrow$ existe un número t tal que $v_1 = t\, v_2$.

a) Es decir $(5,-2) = t\,(4,10)$ esto implica
$5 = 4t$ y $-2 = 10t$
no hay un número real que satisfaga ambas ecuaciones.
Por lo tanto no son paralelos.

$v_1 \circ v_2 = (5,-2) \circ (4,10) = 5(4) + (-2)(10) = 20 - 20 =$

Por lo tanto $v_1 \perp v_2$

$u_1 \parallel u_2 \Leftrightarrow$ existe un número t tal que $u_1 = t\, u_2$.

b) $(-1,4) = t\,(6,-2)$ esto implica $-1 = 6t$; $4 = -2t$
Como no hay un número real que satisfaga ambas ecuaciones los vectores no son paralelos.

$$u_1 \perp u_2 \iff u_1 \circ u_2 = 0$$

$$u_1 \circ u_2 = (-1,4) \circ (6,-2) = (-1)(6) + (4)(-2) = -14 \neq 0$$

Por lo tanto los vectores no son perpendiculares.

Encontraremos el ángulo entre ellos.

$$\cos\theta = \frac{u_1 \circ u_2}{|u_1|\,|u_2|} = \frac{(-1)(6)+(4)(-2)}{\sqrt{1+16}\,\sqrt{36+4}} = -0.537$$

Como $\cos\theta < 0$ entonces $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

θ es un ángulo obtuso $\qquad \theta = 122°\,28'\,16''$

$$w_1 \,||\, w_2 \iff \text{existe un número } t \text{ tal que } w_1 = t\, w_2$$

c) $(2,-1) = t\,(-4,2)$ de donde $2 = -4t$; $-1 = 2t$
y el número real que satisface ambas ecuaciones es $t = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow w_1 \,||\, w_2$

Ejemplo 10.

Expresar $v = (1,3)$ como combinación lineal de $w = (1,1)$ y $w^{\perp}$. Hacer el dibujo.

Solución.

Expresando a v como combinación lineal de $w^{\perp}$ tenemos:

$v = sw + tw^{\perp}$

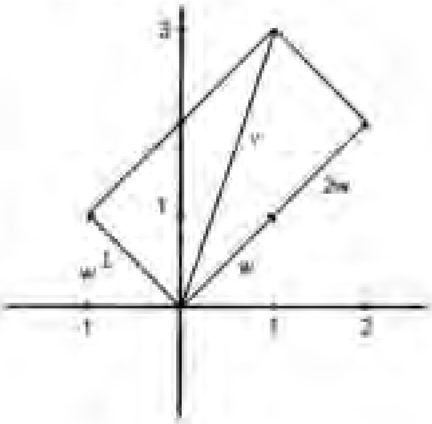
$(1,3) = s\,(1,1) + t\,(-1,-1)$

Por otro lado:

$$s = \frac{v \bullet w}{|w|^2} = \frac{(1,3) \bullet (1,1)}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$t = \frac{v \bullet w^{\perp}}{|w^{\perp}|^2} = 1$$

$\therefore \quad (1,3) = 2(1,1) + 1(-1,1)$



Ejemplo 11.

Determinar la proyección ortogonal de w = (2, 5) sobre v = (-1,2) y el componente de w en el sentido de v. Además probar que

$$w_v = \frac{w \bullet v}{|v|} = |w|\cos\theta \quad \text{donde } \theta \text{ es el ángulo entre } w \text{ y } v$$

Solución.

Como $w_v = \dfrac{w \bullet v}{|v|} = \dfrac{2(-1)+5(2)}{\sqrt{1+4}} = \dfrac{8}{\sqrt{5}}$

$$\cos\theta = \frac{w \bullet v}{|w||v|} = \frac{8}{\sqrt{29}\sqrt{5}}$$

$$|w|\cos\theta = \sqrt{29} \cdot \frac{8}{\sqrt{29}\sqrt{5}}$$

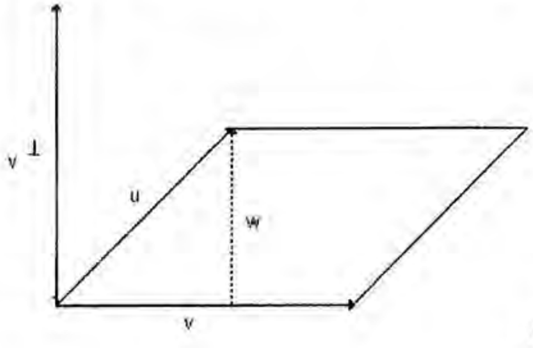
$$Comw_v = |w| \cdot \cos\theta$$

$$\Pr oyw_v = Comw_v \cdot \frac{v}{|v|}$$

$$\Pr oyw_v = \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$$

$$\Pr oyw_v = \frac{8}{5}(-1,2)$$

Por medio de la proyección ortogonal tenemos un procedimiento para el cálculo de las áreas de paralelogramos y triángulos.
Consideremos el paralelogramo de lados u y v. (Fig.68)



(Fig.68)

La altura se obtiene de la $\Pr oyu_{v^\perp}$

Por lo que la altura del paralelogramo es $|w| = |\Pr oyu_{v^\perp}|$

El área (base por altura) del paralelogramo es

$$|w||v| = |\Pr oyu_{v^\perp}||v| = \frac{|u \bullet v^\perp|}{|v^\perp|^2} \cdot |v^\perp||v|$$

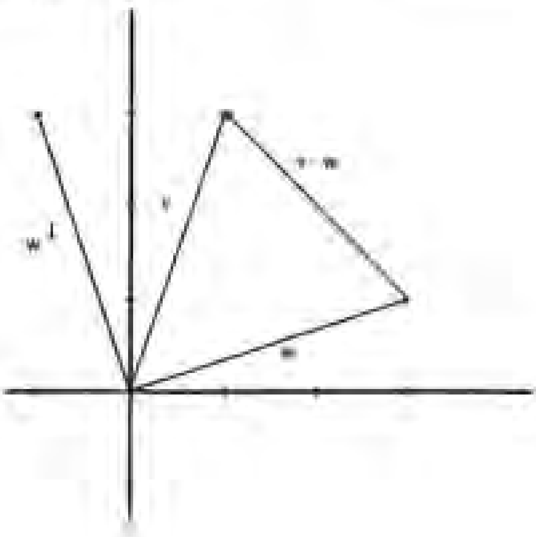
$$|w||v| = \frac{|u \bullet v^\perp|}{|v^\perp|} \cdot |v|$$

$|w||v| = |u \bullet v^\perp|$ porque $|v| = |v^\perp|$

Ejemplo 12.

Calcular el área del triángulo de vértices (1,3) , (3,1) , (0,0).

Solución.



v, w, $v-w$ son los vectores que me forman los lados del triángulo.

La altura del triángulo es la $\left|\Pr oyv_{w^\perp}\right|$

El área del triángulo es $\frac{1}{2}\cdot\frac{\left|v\bullet w^\perp\right|}{\left|w^\perp\right|}\cdot|w| = \frac{1}{2}\cdot\left|v\bullet w^\perp\right|$

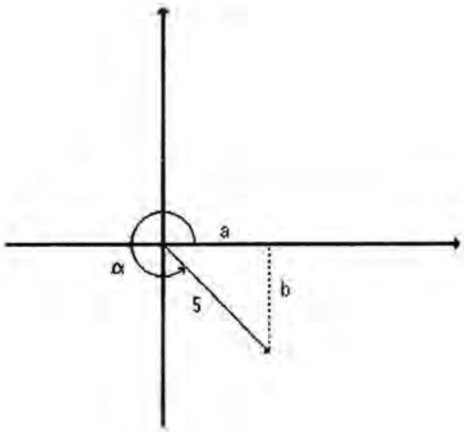
Por lo tanto $\frac{1}{2}\cdot|-1+9| = \frac{1}{2}\cdot|8| = 4$

4.6 Aplicaciones a la Física.

En física una cantidad vectorial se especifica completamente por su magnitud y su dirección. Ejemplos de cantidades vectoriales son tales como el desplazamiento velocidad y fuerza en las cuales la dirección es tan importante como la magnitud.

Ejemplo 1.

Supongamos que una motocicleta se desplaza a 5 millas al sureste.
Representemos al desplazamiento por v. La magnitud del desplazamiento es igual a 5 es decir $|v| = 5$. Como va en dirección al sureste su dirección es $\alpha = 315°$.



De donde las componentes del vector desplazamiento están determinadas por :

$a = |v| \cdot \cos\alpha \quad ; \quad b = |v| \cdot \operatorname{sen}\alpha$

de donde

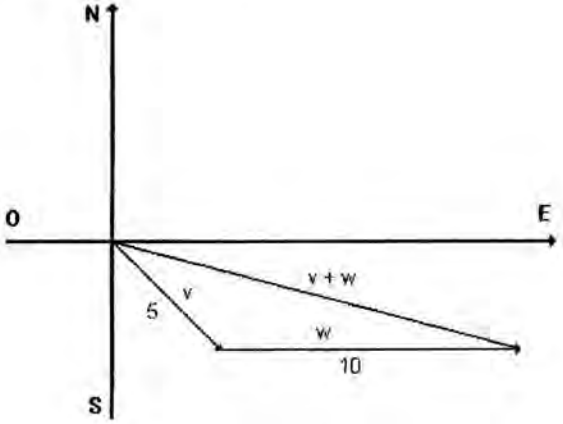
$a = 5 \cdot \cos(315°) \quad ; \quad b = 5 \cdot \operatorname{sen}(315°)$

$a = 5 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \qquad b = 5 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

Por lo tanto el vector *v* tiene como componentes $v = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}} \right)$

En física se le llama resultante de dos vectores a lo que nosotros le llamamos suma de vectores.

Si *v* es el desplazamiento 5 millas al sureste y *w* el desplazamiento 10 millas al este, la resultante de los dos desplazamientos se obtiene con la suma *v* + *w*



Del ejemplo anterior $v = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$, para encontrar las componentes de $w = (c, d)$ tenemos :

$c = |w|\cos\alpha$

$d = |w| sen\alpha$

La dirección de $\alpha = 0°$ ya que su dirección es la este, y la magnitud $|w| = 10$.

c = 10 cos0° $\quad d$ = 10 sen0°

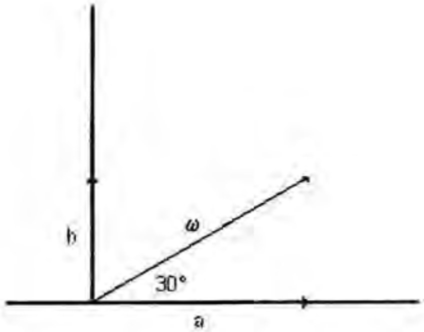
$\therefore$ w tiene como componentes $w = (10, 0)$

De esta manera encontramos la resultante

$$v + w = \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + 10, -\frac{5}{\sqrt{2}}\right)$$

Ejemplo 2.

Una fuerza de 10 N (newtons) actúa en una dirección a 30° sobre la horizontal. Encontrar las componentes de dicha fuerza.



Sea w el vector representante de la fuerza. $|w| = 10N$ su magnitud.

$\therefore$ Las componentes de $w = (a, b)$ son:

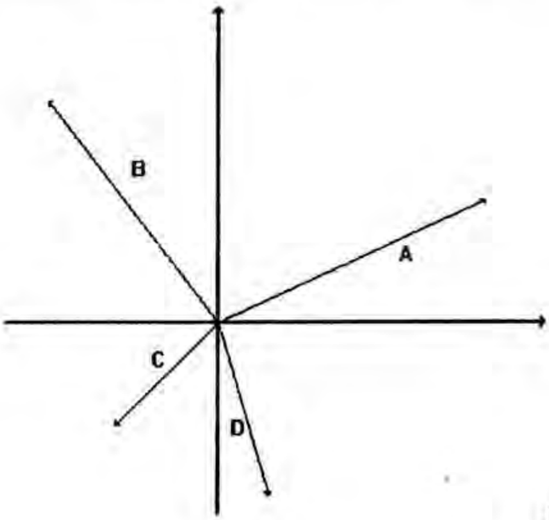
$$a = |\omega| \cdot \cos(30^\circ) \qquad b = |\omega| \cdot \operatorname{sen}(30^\circ)$$

$$a = 10 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 5 \cdot \sqrt{3} \qquad b = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 5$$

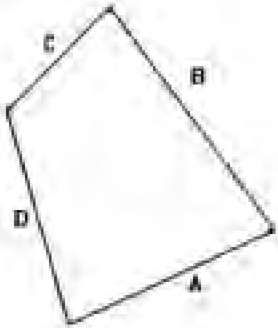
$$\omega = \left(5 \cdot \sqrt{3}, 5\right)$$

En física se dice que un sistema de fuerzas está en equilibrio si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es cero. Es decir, independientemente de la secuencia en que los vectores se sumen, su resultante es siempre cero. Geométricamente el extremo del último vector siempre termina en el origen del primer vector.

Sean A, B, C y D un sistema de fuerzas que se encuentran en equilibrio (Fig.69).



(Fig.69)

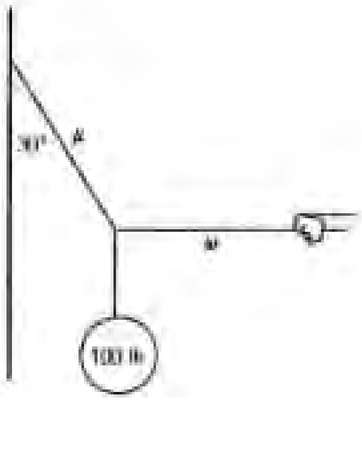


Algebraicamente lo representamos como la suma de vectores igual al vector cero.

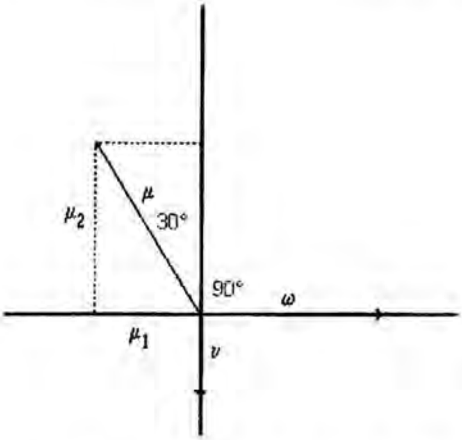
A + B + C + D = 0

Ejemplo 3.

Una pelota de 100 lb (libras) suspendida del cordel μ es tirada hacia un lado por otro cordel ω y mantenida de tal forma que el cordel μ forme un ángulo de 30° con la pared vertical. Encontrar las tensiones de los cordeles μ y ω si se sabe que las fuerzas están en equilibrio.



Llevemos el problema al sistema coordenado XY.



Sea v el peso de la pelota por lo cuál $v = (0, -10)$ y $\mu = (\mu_1, \mu_2)$

$$\mu_1 = |\mu|\cos 120° = -\frac{1}{2}|\mu|$$

$$\mu_2 = |\mu| sen 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}|\mu|$$

Para $\omega = (\omega_1, \omega_2)$

$$\omega_1 = |\omega|\cos 0° = |\omega|$$

$$\omega_2 = |\omega| sen 0° = 0$$

Como el sistema de fuerzas están en equilibrio $\mu + \omega + \upsilon = \overline{O}$

$$\left(-\frac{1}{2}|\mu|, \frac{\sqrt{3}}{2}|\mu|\right) + (|\omega|, 0) + (0, -100) = (0,0)$$

$$\left(-\frac{1}{2}|\mu| + |\omega|, \frac{\sqrt{3}}{2}|\mu| - 100\right) = (0,0)$$

Por igualdad de vectores

$$\boxed{-\frac{1}{2}|\mu| + |\omega|} = 0 \quad \text{(a)} \qquad\qquad \frac{\sqrt{3}}{2}|\mu| - 100 = 0 \quad \text{(b)}$$

De (b)

$$|\mu| = \frac{100 \cdot (2)}{\sqrt{3}} = 115.47 \quad \text{lb.}$$

Sustituyendo en (a)

$$-\frac{1}{2} \cdot \frac{200 \cdot \sqrt{3}}{3} + |\omega| = 0$$

$$|\omega| = \frac{200}{6} \cdot \sqrt{3} = 57.735 \quad \text{lb.}$$

De esta manera las tensiones de μ y ω son :

$|\mu| = 115.47$ lb. $\qquad |\omega| = 57.735$ lb. $\quad$ y $\quad |v| = 100$ lb.

Problemas.

1) Un barco viaja a 100 millas hacia el norte en el primer día de su viaje, 60 millas hacia el noreste en el segundo día y 120 millas al este en el tercer día. Encontrar el desplazamiento resultante.

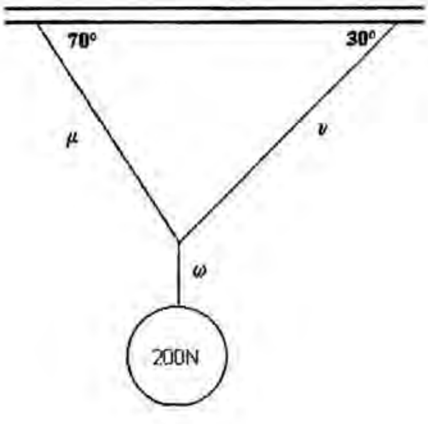
2) Una cuerda se enreda alrededor de un poste telefónico, en un ángulo de 120°. Si de uno de los extremos se tira con una fuerza de 60 N y del otro con una fuerza de 20N, ¿ Cuál es la fuerza resultante sobre el poste telefónico?

3) ¿Cuál es la resultante de una fuerza de 5N dirigida horizontalmente a la derecha y una fuerza de 12N dirigida verticalmente hacia abajo ?

4) Una fuerza de 610N y otra de 220N, perpendiculares entre si, actúa simultáneamente sobre el mismo objeto.

a) ¿Cuál es la fuerza resultante?
b) ¿Qué ángulo forma la fuerza resultante con la fuerza de 610N ?

5) Una pelota de 200N cuelga de un cordel anudado a otros dos cordeles como se muestra en la siguiente figura. Encontrar las tensiones en los cordeles A, B y C sabiendo que las fuerzas están en equilibrio.



6) Un empuje de 200lb hacia el norte y otro empuje de 500 lb hacia el oeste actúan sobre un objeto. Determine la magnitud y dirección de la fuerza resultante.

7) Una fuerza $\mu = 316N$ al este y otra de $\upsilon = 160N$ se aplican sobre el mismo objeto. Si el ángulo entre las dos fuerzas es de 63°.

a) ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza resultante?
b) Encontrar la $Proy\upsilon_{\mu}$ y probar que $Proy\upsilon_{\mu} \parallel \mu$
c) Encontrar el ángulo entre la resultante ω y la fuerza υ

8) Las siguientes dos fuerzas actúan sobre un objeto pequeño; $\mu = 100N$ horizontalmente hacia la izquierda y $\omega = 200N$ hacia la derecha a un ángulo de 37° sobre la horizontal.

a) Encontrar la magnitud de la fuerza resultante τ
b) Hallar el ángulo entre la resultante τ y la fuerza ω
c) Encontrar la $Proy\tau_{\omega}$ y $Proy\tau_{\mu}$
d) Encontrar el ángulo θ entre las fuerzas μ y ω y demostrar que dicho ángulo es igual al ángulo entre la $Proy\tau_{\omega}$ y $Proy\tau_{\mu}$

9) Una lancha viaja primero 26km. al noreste luego 22km. al sur y finalmente 18km. en una dirección 30° noroeste. ¿Cuál es la magnitud y la dirección del desplazamiento resultante?

10)Dos fuerzas perpendiculares tienen una resultante $\gamma = 20N$. Si una de las fuerzas es $\tau = 16N$.

a) Calcular la otra fuerza ω.
b) Hallar el ángulo entre ω y τ
c) Encontrar la $Proy\omega_{\tau}$

Ejercicios.

1) Encontrar la longitud, dirección y pendiente de la flecha $\overrightarrow{P_1P_2}$

a) $P_1(3, 1)$ $P_2(3-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$
b) $P_1(-1,2)$ $P_2(-1+3\sqrt{3}, -1)$
c) $P_1(-5, 3)$ $P_2(-1, -2)$
d) $P_1(-2,5)$ $P_2(4,5)$

2) Encontrar el punto final de la flecha que tiene como punto inicial P_1 dirección α y magnitud $\left|\overrightarrow{P_1 P_2}\right|$.

a) $P_1(0,0)$; $\alpha = 120°$, $\left|\overrightarrow{P_1 P_2}\right| = 10$

b) $P_1(4,5)$; $\alpha = 300°$, $\left|\overrightarrow{P_1 P_2}\right| = 8$

c) $P_1(-1,-4)$, $\alpha = 225°$, $\left|\overrightarrow{P_1 P_2}\right| = 5$

3) Calcular las coordenadas del punto final P_2 de la representación geométrica del vector dado v si su punto inicial es P_1.

a) $v = (1,6)$ $P_1(0,0)$ c) $v = (-3,5)$ $P_1(4,-1)$

b) $v = (2,4)$ $P_1(3,2)$ d) $v = (-4,1)$ $P_1(-3,7)$

4) Probar los incisos a, c, d, f, g, h del teorema 1.

5) Demostrar el teorema 2.

6) Sea $P_1(2,-3)$, $P_2(4,2)$ y $Q_1(-1,2)$

a) Encontrar $Q_2\ (x,y)$ tal que $\overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{Q_1 Q_2}$

b) Encontrar $Q_2\ (x,y)$ tal que $\overrightarrow{P_1 P_2} = \overrightarrow{Q_2 Q_1}$

7) Determinar si las siguientes flechas $\overrightarrow{P_1 P_2}$ y $\overrightarrow{Q_1 Q_2}$ son equivalentes.

a) $P_1(1,4)$ $P_2(6,-1)$; $Q_1(0,3)$ $Q_2(5,-2)$

b) $P_1(0,10)$ $P_2(-1,4)$; $Q_1(2,3)$ $Q_2(1,6)$

c) $P_1(-3,4)$ $P_2(-1,3)$; $Q_1(0,5)$ $Q_2(2,12)$

8) Dados $v_1 = (2,-3)$ y $v_2 = (6,1)$

a) Dibujar v_1, v_2 con punto inicial en el origen.

b) Encontrar y dibujar $v_1 + v_2, v_1 - v_2$ y $v_2 - v_1$

c) Encontrar $\|v_1\|, \|v_2\|, \|v_1 + v_2\|, \|v_1 - v_2\|$

9) Resuelve los siguientes incisos

a) Dados $v_1 - v_2 = (4,-6)$ y $v_1 = (-2,1)$
Encontrar v_2

b) Dados $v_1 + v_2 = (3,2)$ y $v_2 = (-4,3)$
Encontrar v_1

c) Dados $\frac{v_1 - v_2}{3} = (2,4)$ y $\frac{v_2}{2} = (-1,3)$

Encontrar $\frac{2v_1}{3}$

d) Dados $v_1 + v_2 = (-3,5)$ y $v_1 - v_2 = (2,4)$
Encontrar v_1 y v_2.

10) Probar que $\|v_1 + v_2\|^2 + \|v_1 - v_2\|^2 = 2\|v_1\|^2 + 2\|v_2\|^2$ con v_1, v_2 vectores.

11) Determinar en cada caso, si existe o no un número real r que satisface:

a) $r(3,2) = (1,0)$ c) $r(6,8) = (-3,4)$

b) $r(6,8) = (-3,-4)$ d) $(1,7) + r(3,2) = (-5,3)$

12) Ilustrar geométricamente la suma $v_1 + v_2 + v_3 + v_4$ con v_1, v_2, v_3, v_4 vectores diferentes de cero.

13) Probar los a, b, d, e, f, g del teorema 3.

14) Encontrar la dirección de los siguientes vectores.

a) $i - j$ d) $3i - j$

b) $3i$ e) $-2i + 3j$

c) $-2i$ f) $i + j$

15) Encontrar el ángulo entre los siguientes pares de vectores:

a) $2i - j \ ; \ i + 2j$ c) $2i - 4j \ ; \ -i - 3j$
b) $2i + j \ ; \ i + 3j$ d) $-2i + j \ ; \ -i - j$

16) Probar

$$(v_1 + v_2)\cdot(v_1 - v_2) = (|v_1| + |v_2|)(|v_1| - |v_2|)$$

con v_1, v_2 vectores.

17) Demostrar lo siguiente:

a) Probar que si v es perpendicular a v_1 y v_2 entonces es perpendiculares a $c_1 v_1 + c_2 v_2$, c_1, c_2 escalares.

b) Probar que si v es perpendicular con cada uno de los vectores $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ entonces $v \perp c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \ldots + c_m v_m$ con $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m$ escalares.

c) Probar que

$$|v_1 - v_2| \geq |v_1| - |v_2|$$

18) Calcular las coordenadas de cada vector v dado su magnitud y dirección.

a) $|v| = 5 \quad \alpha = 30°$ c) $|v| = 4 \quad \alpha = 285°$
b) $|v| = 6 \quad \alpha = 90°$ d) $|v| = 8 \quad \alpha = 180°$

19) En los siguientes ejercicios calcular el valor de x o de y sabemos:

a) $u = (x, 4) \quad v = (6, 8)$ c) $(3, y)$, $(-2, 3)$
b) $u = (x, 5) \quad v = (2, 9)$ d) $(6, y)$, $(7, -1)$

20) Calcular las coordenadas del vector $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ que satisface las condiciones siguientes.

a) μ cuya magnitud es 5 y tiene la misma dirección que $(3,7)$.

b) μ cuya magnitud es 3 y es perpendicular a $(5,2)$

c) μ cuya magnitud es igual a la de $(4,3)$ y cuya dirección es la misma que la de $\left(1,\sqrt{3}\right)$

21) En cada uno de los siguientes incisos $\gamma = 3$, $t = -2$, $\mu = (1,3)$, $\nu = (-2,5)$, $\omega = (-1,-3)$, y $\beta = (0,-1)$. Expresar cada una de las siguientes cantidades en forma de un par ordenado o de un escalar según sea el caso.

a) $\gamma\mu + t\nu$ c) $(\gamma + t)(\mu + \nu)$

b) $\gamma(\mu - \nu)$ d) $|\gamma\omega - t\beta|$

22) Demostrar :Si $\omega \neq \overline{O}$, μ y ν son paralelos a ω entonces μ y ν son paralelos.

23) Demostrar :Si $u \parallel u'$, $v \parallel v'$ y $u \parallel v$ entonces $u' \parallel v'$.

24) Demostrar: Si $\omega = \mu + \nu$ y $\mu \parallel \beta$ entonces $\omega \parallel \beta$ si y solo si $\nu \parallel \beta$

25) Demostrar: $\mu \perp \nu$ si y solo si $(|\mu + \nu|)^2 = (|\mu|)^2 + (|\nu|)^2$

26) Demostrar: Sea $\omega \neq \overline{O}$. Si $\omega \parallel \nu$ y $\omega \perp \mu$ entonces $\nu \perp \mu$

27) Demostrar: Los vectores $\mu \parallel \nu$ si y solo si $\mu^{\perp} \circ \nu = 0$

28) Demostrar ; Dados μ, ν vectores y t escalar.

a) $(|\mu + \nu|)^2 = (|\mu|)^2 + 2\mu \circ \nu + (|\nu|)^2$

b) $(|\mu + t\nu|)^2 = (|\mu|)^2 + 2t\mu \circ \nu + t^2(|\nu|)^2$

29) Demostrar que:

a) $\mu^{\perp} \circ \nu = -\mu \circ \nu^{\perp}$

b) $(\mu + \nu)^{\perp} = \mu^{\perp} + \nu^{\perp}$

c) Si $\mu \neq \overline{O}$, $s\mu + t\nu = \overline{O}$ implica $s = 0$ y $t = 0$

d) $\mu^{\perp} \circ \nu^{\perp} = \mu \circ \nu$

e) $|\mu^{\perp}| = |\mu|$

30) Determine si los siguientes pares de vectores son paralelos perpendiculares o bien oblicuos. Si son oblicuos, calcule cuál es el ángulo entre ellos.

a) $(-1,2),(2,1)$ e) $(-4,3),(1,0)$
b) $(2,3),(6,-4)$ f) $(0,1),(12,5)$
c) $(-3,7),(6,-14)$ g) $\left(\sqrt{3},1\right),\left(1,\sqrt{3}\right)$
d) $(1,5),(-2,-10)$ h) $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right),(0,5)$

31) Demostrar:

a) $\left|\text{Proy}\cdot(v_1)_{(v_2)}\right|\left|v_2\right| = \left|\text{Proy}\cdot(v_2)_{(v_1)}\right|\left|v_1\right|$

b) $\left(\text{Proy}\cdot v_1 + v_2\right)_{(v_3)} = \text{Proy}\cdot(v_1)_{(v_3)} + \text{Proy}\cdot(v_2)_{(v_3)}$

c) $\text{Proy}\cdot(v_1)_{(v_2)} = 0 \Leftrightarrow v_1 \perp v_2$

d) $\text{Proy}\cdot(v_1)_{(v_2)} = v_1 \Leftrightarrow v_1 \parallel v_2$

32) Encontrar $\text{Proy}\cdot(v_1)_{(v_2)}$ en cada inciso.

a) $v_1 = ai + bj$, $v_2 = i$
b) $v_1 = 3i - 2j$, $v_2 = 2i + 3j$
c) $v_1 = 3i - j$, $v_2 = 2i + j$
d) $v_1 = 4i + 2j$, $v_2 = 2i + j$

33) Expresar a cada uno de los siguientes vectores como combinación lineal de $\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\mu^{\perp}$

a) v = (1,2) b) v = (-1,0)
c) v = (-3,-4) d) v = (5,-6)

34) Encontrar el vector unitario μ que satisfaga las siguientes ecuaciones.

a) $(-5, 10) = 5\mu + 10\mu^{\perp}$

b) $\left(\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\right) = 4\mu + 6\mu^{\perp}$

c) $\left(0, 2\sqrt{5}\right) = 4\mu + 2\mu^{\perp}$

d) $(-31, 27) = 13\mu + 39\mu^{\perp}$

35) Demostrar que para cualesquiera dos vectores μ y v

a) $(\|\mu\|)^2 v = (\mu \cdot v)\mu + (\mu^{\perp} \cdot v)\mu^{\perp}$

36) Calcular el área de los paralelogramos con lados

a) $\mu = (4,0)$ $\quad v = (0,8)$

b) $\mu = (4,-1)$ $\quad v = (-2,6)$

c) $\mu = (2,1)$ $\quad v = (1,2)$

37) Calcular el area de los triangulos con vertices :

a) (0,0) , (1,0) , (1,2)
b) (1,1) , (3,3) , (5,7)
c) (-5,0) , (1,3) , (-3,-2)
d) (0,0) , (1,1) , (4,3)
e) (1,0) , (0,1) , (4,2)

4.7 Vectores en el Espacio.

Como veremos más adelante el conocimiento adquirido en geometría analítica plana nos sirve como base para el modelo de la geometría analítica del espacio.
Es claro, que muchas de las formulas que se desarrolla en el espacio coordenado son una extensión de las correspondientes formulas en dos dimensiones.
En nuestro estudio, tratamos con ecuaciones en dos variables y dibujamos las gráficas de dichas ecuaciones. Al introducir una tercera variable, el plano ya no es suficiente para hacer la gráfica de la nueva ecuación. Por este motivo el sistema coordenado es extendido a tres dimensiones.

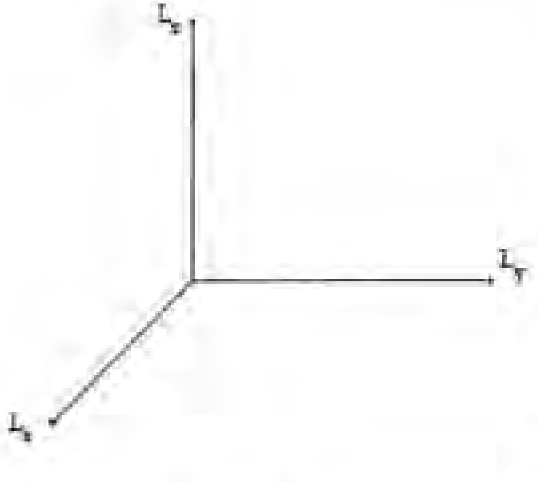
El espacio tridimensional R^3 es el conjunto

$R^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in R\}$

La terna ordenada (x, y, z) es llamado punto de R^3, el cual se denota con P (x, y, z).
Los números x, y, z son llamados coordenadas de P.
Sean L_x, L_y, L_z tres líneas mutuamente perpendiculares. (Fig. 70)
Estos subconjuntos de R^3 son llamados ejes coordenados.

$L_x = \{(x, y, z) \mid y = z = 0\}$ (Eje X) $L_y = \{(x, y, z) \mid x = z = 0\}$ (Eje Y)

$L_z = \{(x, y, z) \mid x = y = 0\}$ (Eje Z)



(Fig.70)

El único punto común de los tres ejes es el punto O (0, 0,0) llamado origen.

Observemos que en cada eje coordenado dos de las coordenadas están fijas en cero y la tercera varía sobre los reales. Representamos así a cada eje como una línea.

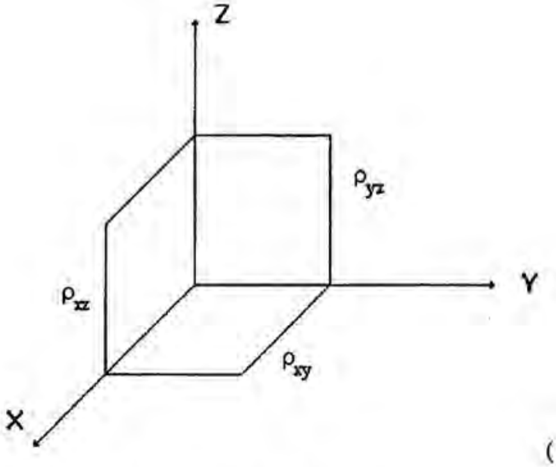
En este dibujo y en otros que realicemos, convendremos que el eje Y y el eje Z estén en el plano del papel. El eje Z puede ser visto como vertical y los otros como horizontales. Los ejes en pares determinan tres planos mutuamente perpendiculares llamados planos coordenados. (Fig.70)

Los planos coordenados en R^3 son los conjuntos

$\rho_{xy} = \{ (x, y, z) \mid z = 0 \}$ (Plano xy)

$\rho_{yz} = \{ (x, y, z) \mid x = 0 \}$ (Plano yz)

$\rho_{xz} = \{ (x, y, z) \mid y = 0 \}$ (Plano xz) (Fig. 71)



(Fig.71)

Los planos coordenados dividen al espacio en ocho regiones llamados octantes, definidos como sigue

I : $\{ (x, y, z) \mid x > 0 , y > 0 , z > 0\}$

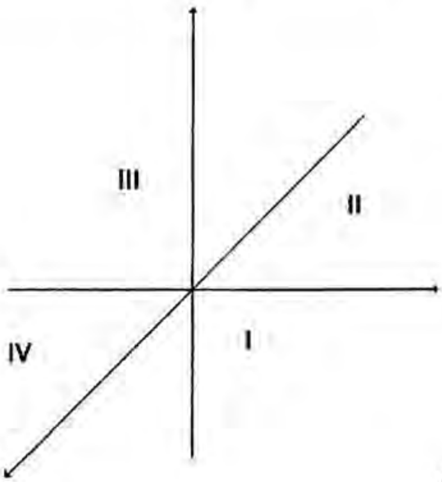
II : $\{ (x, y, z) \mid x < 0 , y > 0 , z > 0\}$

III : $\{ (x, y, z) \mid x < 0 , y < 0 , z > 0\}$

IV : $\{ (x, y, z) \mid x > 0 , y < 0 , z > 0\}$

Los octantes V, VI , VII , VIII son similares a I , II , III y IV , respectivamente excepto que $z < 0$.
Los primeros cuatro octantes se dice que están arriba del plano XY y los otros por abajo del

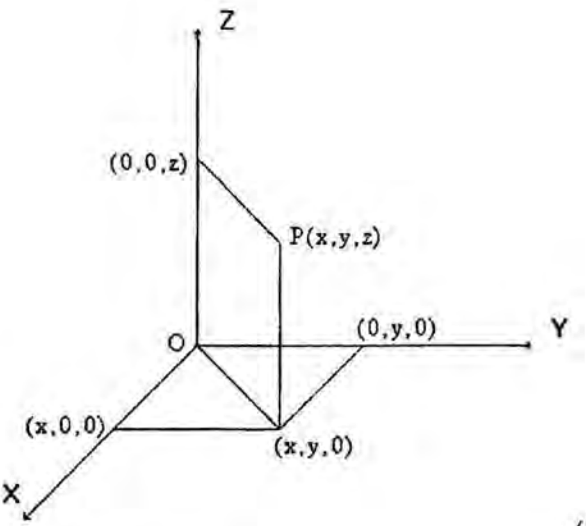
plano. (Fig.72)
Por lo tanto todo punto en R^3 pertenece a un plano coordenado o a uno de los octantes.



(Fig. 72)

La posición de un punto P (x, y, z) en este sistema coordenado esta determinado por sus distancias a los planos coordenados. La distancia de P al plano YZ es llamada coordenada x , la distancia al plano XZ es llamada coordenada y , finalmente la distancia al plano XY es llamada coordenada z .

El punto P (x, y, z) está representado en la Fig. 73. El punto se localiza en el primer cuadrante.

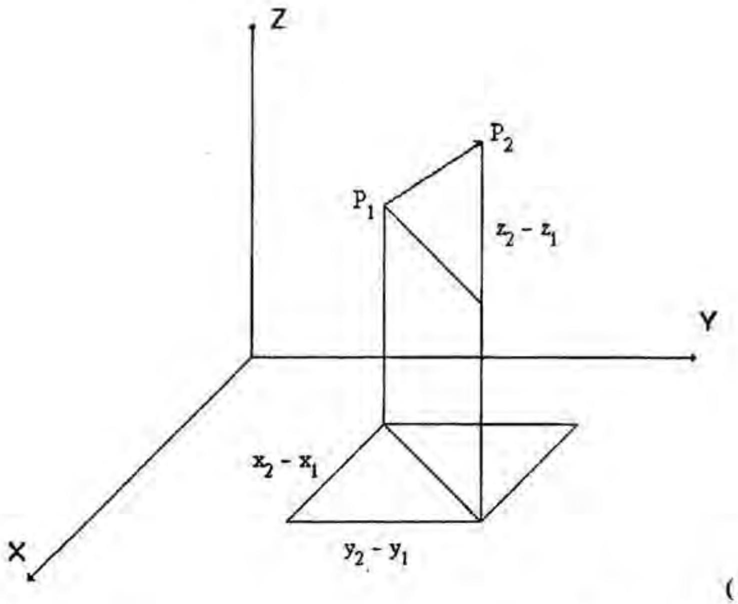


(Fig.73)

4.8 Flechas y Vectores.

Sea $P_1(x_1,y_1,z_1)$ y $P_2(x_2,y_2,z_2)$ dos puntos distintos en R^3. La *flecha* $\overline{P_1 P_2}$ con punto inicial P_1 y punto terminal P_2 tiene como componentes los números x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1.

Notemos que si P_1 es el origen, entonces las componentes de $\overrightarrow{P_1 P_2}$ son precisamente las coordenadas de P_2. (Fig.74)



(Fig.74)

Sea puntos diferentes en el espacio.

$\overrightarrow{P_1 P_2}$ es equivalente a $\overrightarrow{Q_1 Q_2}$ si y solo si sus componentes correspondientes son iguales.

Esto es : $x_2 - x_1 = u_2 \;\; u_1$, $y_2 - y_1 = v_2 - v_1$, $z_2 \;\; z_1 = w_2 - w_1$.

Lo cual lo denotamos con $\overrightarrow{P_1 P_2} \approx \overrightarrow{Q_1 Q_2}$

En R^3, al igual que en R^2, las flechas equivalentes tienen la misma longitud y la misma dirección.

La definición de vector en R^3 es la misma que en R^2.

Un vector v en R^3 con componentes *a, b, c* (en este orden) representa a todas las flechas $\overrightarrow{P_1 P_2}$ equivalentes cuyas componentes $x_2 - x_1, y_2 \;\; y_1, z_2 - z_1$ son *a, b, c* respectivamente.

El vector se denota con $v = (a, b, c)$. Le llamamos a P_1 el punto inicial y P_2 el punto terminal de la flecha.

Una flecha $\overrightarrow{P_1 P_2}$ con componentes *a, b, c*, se dice que es el resultado de aplicar el vector (a, b, c) al punto P_1.

4.9 Operaciones con Vectores.

Las dos operaciones básicas con vectores son la suma de vectores y la multiplicación escalar.

Sean $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$ dos vectores en el espacio.
La suma de v_1 y v_2 (en este orden) es el vector

$v_1 + v_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$

Si $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_2P_3}$ son representantes de v_1 y v_2, respectivamente, entonces $v_1 + v_2$ está representado por la flecha $\overrightarrow{P_1P_3}$

Sea $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ puntos y k un número real (llamado escalar).

El producto escalar de $\overrightarrow{P_1P_2}$ con k denotado por $k\ \overrightarrow{P_1P_2}$ es la flecha, con punto inicial P_1 y componentes $[k\cdot(x_2 - x_1), k\cdot(y_2 - y_1), k\cdot(z_2 - z_1)]$

Si $k = 0$; $k\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1P_1}$, "flecha" que coincide con el punto P_1.

Extendemos la definición de producto escalar para vectores como sigue.

Sea $v = (a, b, c)$ y k un escalar. El producto escalar de v por k es el vector $kv = (ka, kb, kc)$. A kv lo llamamos múltiplo escalar de v.

Si $v \neq (0,0,0)$ y $k > 0$, decimos que kv tiene el mismo sentido que v.
Si $k < 0$, decimos que kv tiene sentido opuesto a v.

Las propiedades básicas de adición y producto escalar de vectores se enuncian en los siguientes teoremas. Las pruebas son meramente una extensión de las ya vistas en el caso del plano y se deja como ejercicio al lector.

Teorema 1.

Para todos los vectores v, v_1, v_2, v_3 y escalares a, b se cumple lo siguiente:

(1) $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$ (Ley asociativa)

(2) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$ (Ley conmutativa)

(3) $v + \overline{O} = v$ donde $\overline{O} = (0,0,0)$ (Ley neutro aditivo)

(4) $v + (-v) = \overline{O}$ donde $-v = (-1)\, v$ (inverso aditivo)

(5) $a(b\, v) = (ab)\, v$

(6) $a\,(v_1 + v_2) = a\, v_1 + a\, v_2$

(7) $(a + b)\, v = a\, v + b\, v$

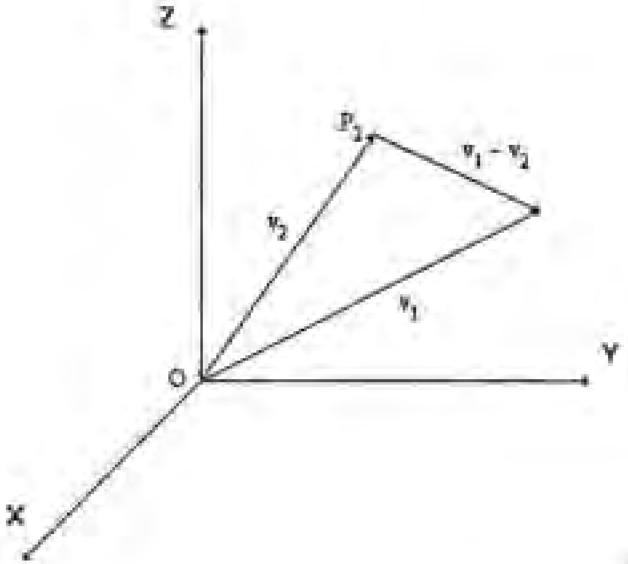
(8) $1\, v = v$

Sean $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$. La diferencia $v_1 - v_2$ es el vector $v_1 + (-v_2)$.

De esto se sigue :

$v_1 - v_2 = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$ y $v_1 - v_2 = v_3$ si y solo si $v_1 = v_2 + v_3$

Si $v_1 = \overrightarrow{O\text{-}P_1}$ y $v_2 = \overrightarrow{O\text{-}P_2}$, entonces $v_1 - v_2 = \overrightarrow{P_2\text{-}P_1}$
(Fig. 75).



(Fig. 75)

Teorema 2

Para todos los vectores v, v_1, v_2, v_3 y todos los escalares c, c_1, c_2 se cumple:

(1) $0\, v = \overline{O}$

(2) $c\, \overline{O} = \overline{O}$

(3) $c\, v = \overline{O}$ si y solo si $c = 0$ o $v = \overline{O}$

(4) $c\, v_1 = c\, v_2$ y $c \neq 0 \Rightarrow v_1 = v_2$

(5) $c_1\, v = c_2\, v$ y $v \neq \overline{O} \Rightarrow c_1 = c_2$

(6) $v_1 + v_2 = v_1 + v_3 \Rightarrow v_2 = v_3$

(7) $-(v_1 + v_2) = -v_1 - v_2$

Sean v_1 y v_2 vectores distintos de cero.
v_1 es *paralelo* a v_2, si y solo si existe $t \in R$ tal que $v_1 = t \cdot v_2$
(esto es, v_1 es múltiplo de v_2) . Si v_1 es paralelo a v_2, esto lo denotamos con $v_1 \parallel v_2$.

Si $\overline{P_1 P_2}$ representa al vector v_1 y $\overline{Q_1 Q_2}$ representa al vector v_2, entonces

$\overline{P_1 P_2} \parallel \overline{Q_1 Q_2}$ si y solo si $v_1 \parallel v_2$.

Nótese que $t \neq 0$ en esta definición. Esto último significa que los términos *paralelismo* y *no paralelismo* solo se aplican a vectores distintos de cero.

El siguiente criterio nos muestra cuando dos vectores diferentes de cero son paralelos.

Sean $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$ vectores distintos de cero. v_1 y v_2 son paralelos entre sí,

si y solo si $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

Demostración.

Probaremos que si los determinantes son cero , entonces $v_1 \parallel v_2$.
Supongamos que los tres determinantes son cero.
Sin perdida de generalización podemos asumir que $c_2 \neq 0$.

Por hipótesis tenemos $a_1 \cdot b_2 = a_2 \cdot b_1$, $b_1 \cdot c_2 = b_2 \cdot c_1$ y $a_1 \cdot c_2 = a_2 \cdot c_1$

Dado que $c_2 \neq 0$, podemos hacer $t = \dfrac{c_1}{c_2}$. Entonces $a_1 = \dfrac{c_1}{c_2} \cdot a_2 = t \cdot a_2$,

$b_1 = \dfrac{c_1}{c_2} \cdot b_2 = t \cdot b_2$ y $c_1 = tc_2$. Entonces, $v_1 = t\ v_2$. Además $t \neq 0$ dado que $v_1 \neq \overline{O}$

por lo tanto $v_1 \parallel v_2$

Ahora probaremos que si $v_1 \parallel v_2$, entonces

Como $v_1 \parallel v_2$, entonces $v_1 = t\, v_2$ es decir $(a_1, b_1, c_1) = t(a_2, b_2, c_2)$ esto es

$a_1 = ta_2$, $b_1 = tb_2$, $c_1 = tc_2$ despejando t en las tres ecuaciones e igualando tenemos

$t = \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ de donde $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ implica $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 = 0$ es decir $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

Análogamente para

$\dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ y $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ obtenemos $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$

Por lo tanto

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$ con lo que queda demostrado.

Corolario. Si v_2 tiene todas sus componentes distintas de cero, entonces $v_1 \parallel v_2$ si y solo si

$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$ (en tal caso v_1 también tiene todas sus componentes distintas de cero).

4.10 Longitud; Producto Punto.

La *longitud* o *norma* de un vector $v = (a, b, c)$ es el número real no negativo

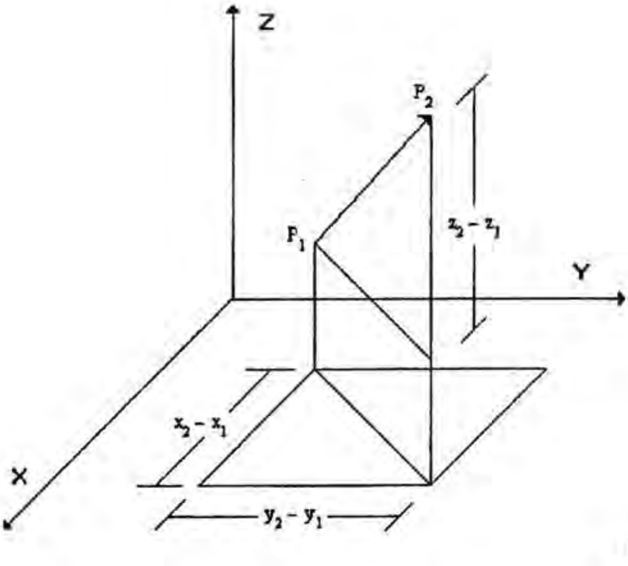
$$|v| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Si $\overrightarrow{P_1 P_2}$ es un representante de v, la longitud de $\overrightarrow{P_1 P_2}$ está definido por $\left|\overrightarrow{P_1 P_2}\right| = |v|$

Entonces, si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, son dos puntos distintos en el plano

$$\left|\overrightarrow{P_1 P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

esto es llamado también *distancia* entre P_1 y P_2. Como a continuación se muestra la definición anterior está motivada por el teorema de Pitágoras. (Fig. 76).



(Fig.76)

Las propiedades importantes de longitud las enunciamos en el siguiente teorema para vectores y flechas.

Teorema 3. Para todo vector v, v_1, v_2 y escalares k se cumple

(1) $|v| \geq 0$; $|v| = 0 \Leftrightarrow v = O$

(2) $|-v| = |v|$

(3) $|kv| = |k||v|$

(4) $|v_1 + v_2| \leq |v_1| + |v_2|$

(5) $|v_1 - v_2| \geq \big||v_1| - |v_2|\big|$

Sean P_1, P_2, P_3 tres puntos y k un escalar entonces se cumple

(6) $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| \geq 0$; $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = 0 \Leftrightarrow P_1 = P_2$

(7) $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \left|\overrightarrow{P_2P_1}\right|$

(8) $\left|k\overrightarrow{P_1P_2}\right| = |k|\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|$

(9) $\left|\overrightarrow{P_1P_3}\right| \leq \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| + \left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|$

(10) $\left|\overrightarrow{P_1P_2} - \overrightarrow{P_1P_3}\right| \geq \left|\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| - \left|\overrightarrow{P_1P_3}\right|\right|$

A (4) se le conoce como *desigualdad del triángulo*. La igualdad solo se da cuando uno de los vectores es múltiplo escalar no negativo del otro.

El *producto punto* de $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$ (en este orden) se denota como $v_1 \bullet v_2$ y es el número

$$v_1 \bullet v_2 = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2$$

Las propiedades básicas del producto punto se dan a continuación.

Teorema 4. Para todos los vectores v, v_1, v_2, v_3 y todos los escalares c se cumple lo siguiente:

(1) $v_1 \bullet v_2 = v_2 \bullet v_1$ (ley conmutativa)

(2) $v_1 \bullet (v_2 + v_3) = (v_1 \bullet v_2) + (v_1 \bullet v_3)$ (ley distributiva)

(3) $v_1 \bullet (v_2 - v_3) = (v_1 \bullet v_2) - (v_1 \bullet v_3)$

(4) $v \bullet v = |v|^2$

(5) $(v_1 + v_2) \bullet (v_1 - v_2) = |v_1|^2 - |v_2|^2$

$$= (|v_1| + |v_2|)\cdot(|v_1| - |v_2|)$$

(6) $c \cdot (v_1 \bullet v_2) = (c \cdot v_1) \bullet v_2 = v_1 \bullet (c \cdot v_2)$

(7) $\overline{O} \bullet v = 0$

(8) $v \bullet v = 0 \Leftrightarrow v = \overline{O}$

(9) $|v_1 \bullet v_2| \leq |v_1| \cdot |v_2|$ (desigualdad de Cauchy´s)

(10) $|v_1 + v_2|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 \Leftrightarrow v_1 \bullet v_2 = 0$

Probaremos la desigualdad de Cauchy's y las demás partes se dejan como ejercicio al lector.

Sea $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Entonces

$$| a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 | \leq \sqrt{(a_1)^2 + (b_1)^2 + (c_1)^2}\,\sqrt{(a_2)^2 + (b_2)^2 + (c_2)^2} \Leftrightarrow \text{(elevando al cuadrado)}$$

$$(| a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 |)^2 \leq \left[(a_1)^2 + (b_1)^2 + (c_1)^2\right]\left[(a_2)^2 + (b_2)^2 + (c_2)^2\right]$$

desarrollando las multiplicaciones, simplificando y transponiendo todos los términos a un lado obtenemos la desigualdad equivalente

$$\left[(a_1)^2(b_2)^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + (b_1)^2(a_2)^2\right] + \left[(a_1)^2(c_2)^2 - 2a_1 a_2 c_1 c_2 + (c_1)^2(a_2)^2\right]$$

$$+ \left[(b_1)^2(c_2)^2 - 2b_1 b_2 c_1 c_2 + (c_1)^2(b_2)^2\right] \geq 0$$

Esto es $(a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 + (a_1 c_2 - c_1 a_2)^2 + (b_1 c_2 - c_1 b_2)^2 \geq 0$

Dado que la suma de cuadrados nunca es negativo, la última desigualdad se cumple para todos los números reales, y la desigualdad de Cauchy también.

Además $(a_1 b_2 - b_1 a_2)^2 + (a_1 c_2 - c_1 a_2)^2 + (b_1 c_2 - c_1 b_2)^2 = 0$ si y solo si

$$a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0 \ , \ a_1 c_2 - c_1 a_2 = 0 \ \text{y} \ b_1 c_2 - c_1 b_2 = 0$$

Por lo tanto $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$

Esto, como ya lo hemos visto, se cumple siempre y cuando $v_1 \parallel v_2$, de modo que $v_1 = t\, v_2 \ (t \neq 0)$.
Si $v_1 = \overline{O}$ y $v_2 = \overline{O}$, entonces ambos miembros de la desigualdad son cero y se cumple la igualdad.

Si $v_1 = t\, v_2$ para algún $(t \neq 0)$, entonces ambos miembros se reducen a

$$|t|\left[(a_2)^2 + (b_2)^2 + (c_2)^2\right]$$

De lo anterior llegamos al siguiente colorario

Colorario. Para todo vector $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$

$$|a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2| \leq \sqrt{(a_1)^2 + (b_1)^2 + (c_1)^2}\sqrt{(a_2)^2 + (b_2)^2 + (c_2)^2}$$

Además, la igualdad se cumple si y solo si uno de los vectores es $\overline{O}$, o uno es múltiplo escalar positivo al otro.

4.11 Angulo entre dos vectores; Dirección de un vector.

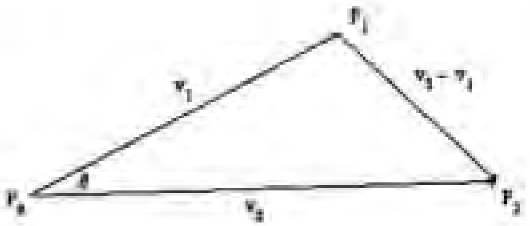
Sea $\overrightarrow{P_0P_1} = v_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $\overrightarrow{P_0P_2} = v_2 = (a_2, b_2, c_2)$

Asumimos que la ley de los cosenos se cumple en R^3

Entonces

$$\left\|\overrightarrow{P_1P_2}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{P_0P_1}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{P_0P_2}\right\|^2 - 2\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right|\left|\overrightarrow{P_0P_2}\right|\cos\theta$$

(Fig.77)



(Fig.77)

Equivalentemente

$$\left\| v_2 - v_1 \right\|^2 = \left\| v_1 \right\|^2 + \left\| v_2 \right\|^2 - 2\left| v_1 \right|\left| v_2 \right|\cos\theta \quad (1)$$

Por otra parte,

$$\left\| v_2 - v_1 \right\|^2 = (v_2 - v_1) \bullet (v_2 - v_1)$$

$$\left\| v_2 - v_1 \right\|^2 = v_2 \bullet v_2 - 2\, v_1 \bullet v_2 + v_1 \bullet v_1$$

$$\left\| v_2 - v_1 \right\|^2 = \left\| v_2 \right\|^2 - 2\, v_1 \bullet v_2 + \left\| v_1 \right\|^2 \quad (2)$$

De (1) y (2) tenemos

$|v_1||v_2|\cos\theta = v_1 \bullet v_2$

Dado que v_1 y v_2 son distintos de cero, $\cos\theta = \dfrac{v_1 \bullet v_2}{|v_1|\,|v_2|}$

Por tanto, $\cos\theta$ se puede expresar en términos de las componentes de los vectores v_1 y v_2 .

Esto sugiere la siguiente definición

Sean v_1 y v_2 dos vectores distintos de cero. El ángulo entre v_1 y v_2 es el ángulo definido por

$$\cos\theta = \frac{v_1 \bullet v_2}{|v_1|\,|v_2|} \quad , \quad 0 \le \theta \le \pi$$

Nótese lo siguiente.

De la desigualdad de Cauchy, se sigue que $\theta = 0$ si y solo si $v_1 = t\, v_2$, $t > 0$; esto es, v_1 y v_2 son paralelos y tienen el mismo sentido.
Similarmente $\theta = \pi$ si y solo si $v_1 = t\, v_2$, $t < 0$; esto es v_1 y v_2 son paralelos y de sentidos opuestos.

Observemos que para vectores distintos de cero, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ si y solo si $v_1 \bullet v_2 = 0$.
Esto motiva la siguiente definición.

v_1 y v_2 son ortogonales (perpendiculares) entre si, si y solo si $v_1 \bullet v_2 = 0$.
Si v_1 y v_2 son ortogonales entre si, este hecho lo denotamos como $v_1 \perp v_2$.
Nótese que $\vec{O}$ es ortogonal a todos los vectores .
Además, θ es un ángulo agudo $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ si y solo si $v_1 \bullet v_2 > 0$ y θ es obtuso $\left(\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$ si y solo si $v_1 \bullet v_2 < 0$.

4.12 Proyección Vectorial.

El concepto de proyección de un vector sobre otro también se generaliza para R^3.

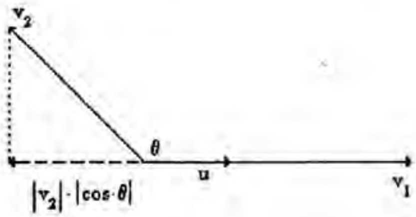
Sean v_1 y v_2 vectores distintos de cero y sea $u = \frac{v_1}{|v_1|}$. Entonces u es un vector unitario en el mismo sentido que v_1.

La proyección de v_2 sobre v_1 se define como sigue: (Fig.78)

$$(\text{Proyv}_2)_{(v_1)} = (|v_2| \cdot \cos\theta) \cdot u$$

$$(\text{Proyv}_2)_{(v_1)} = \left(\frac{v_1 \bullet v_2}{(|v_1|)^2} \right) v_1 \quad (\#)$$

donde θ es el ángulo entre v_1 y v_2



(Fig. 78)

De (#) tenemos $(\text{Proyv}_2)_{(v_1)} = \frac{v_1 \bullet v_2}{|v_1|} \frac{v_1}{|v_1|}$

Como $u = \frac{v_1}{|v_1|}$ y es unitario en el mismo sentido de v_1, al número $\frac{v_1 \bullet v_2}{|v_1|}$ se le llama *componente* de v_2 sobre v_1.

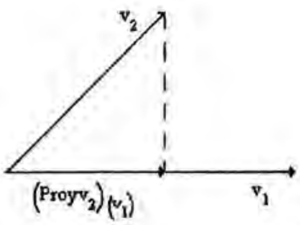
La componente de v_2 en v_1 se denota con $\left(Compv_2\right)_{(v_1)} = \dfrac{v_1 \bullet v_2}{|v_1|}$

Nótese lo siguiente:

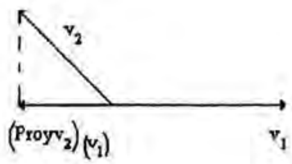
Si $\left(Compv_2\right)_{(v_1)} > 0$ entonces $\left(Proyv_2\right)_{(v_1)}$ tiene el mismo sentido que v_1. (Fig. 79)

Si $\left(Compv_2\right)_{(v_1)} < 0$ entonces $\left(Proyv_2\right)_{(v_1)}$ y v_1 tienen sentidos contrarios. (Fig.80)

Si $\left(Compv_2\right)_{(v_1)} = 0$ entonces los vectores v_1 y v_2 son ortogonales



(Fig.79)



(Fig.80)

Como la componente de un vector sobre otro vector tiene un significado geométrico definido, la relación entre componente y producto punto introduce una interpretación geométrica del producto punto.

Según la definición de componente $\left(\mathrm{Comp}\,v_2\right)_{(v_1)} = \dfrac{v_2 \bullet v_1}{|v_1|}$

esto es

$$v_2 \bullet v_1 = |v_1| \cdot \left(\mathrm{Comp}\,v_2\right)_{(v_1)}$$

Lo que quiere decir que el producto punto $v_2 \bullet v_1$ es la longitud de v_1 multiplicada por la componente de v_2 sobre v_1. La componente de v_2 en el sentido de v_1 también puede escribirse en la forma

$$\left(\mathrm{Comp}\,v_2\right)_{(v_1)} = |v_2| \cdot \cos\theta$$ donde θ es el ángulo entre v_1 y v_2,

dado que $\cos\theta = \dfrac{v_1 \bullet v_2}{|v_1| \cdot |v_2|}$

De lo anterior se concluye que $\left(\mathrm{Proy}\,v_2\right)_{(v_1)} = \left(\mathrm{Comp}\,v_2\right)_{(v_1)} \cdot u$ donde u es un vector unitario en el sentido de v_1.

Sea $v = (a, b, c)$ un vector arbitrario en R^3

Podemos escribirlo como
$$v = (a,0,0) + (0,b,0) + (0,0,c)$$
$$v = a(1,0,0) + b(0,1.0) + c(0,0,1)$$

Si escribimos $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ y $k = (0, 0, 1)$ tenemos $v = ai + bj + ck$

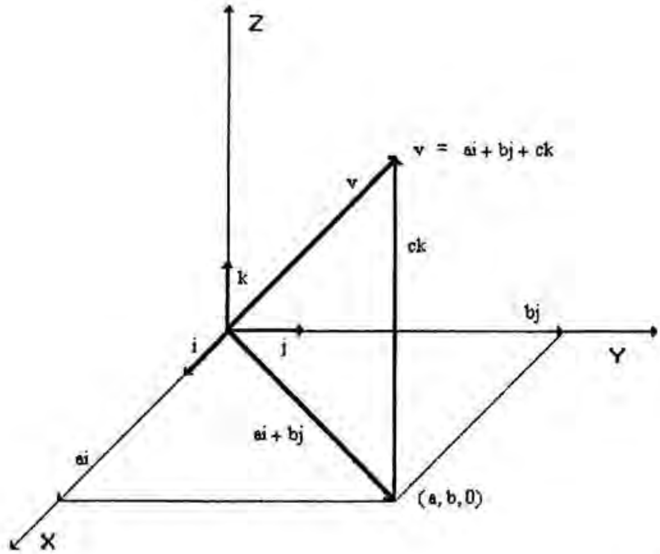
Esta suma es llamada *combinación lineal* de i, j , k y es única.

Nótese que $|i| = |j| = |k| = 1$ y que $i \bullet j = j \bullet k = k \bullet i = 0$

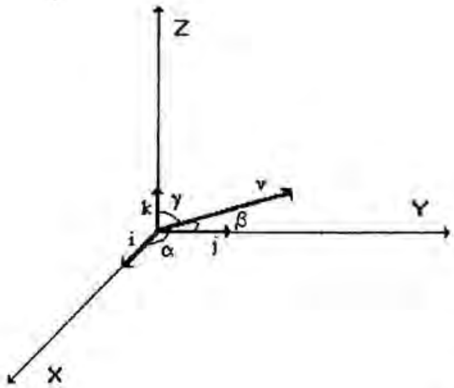
Por esta razón i, j y k son llamados *vectores unitarios mutuamente ortogonales*. Se dice además que ellos forman un conjunto *ortonormal* de vectores. (Fig.81)

Sea $v = ai + bj + ck$ un vector diferente de cero. Los ángulos directores α, β y γ de v son los ángulos entre los vectores básicos i, j y k y el vector v, respectivamente.

La terna ordenada (α, β, γ) es llamada dirección de v. (Fig.82)



(Fig. 81)



(Fig.82)

tenemos $\quad \cos\alpha = \dfrac{v \bullet i}{|v|\,|i|} \quad \cos\beta = \dfrac{v \bullet j}{|v|\cdot|j|} \quad \cos\gamma = \dfrac{v \bullet k}{|v|\cdot|k|}$ donde $\quad 0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$

Dado que $\; v \bullet i = a \;,\; v \bullet j = b \;,\; v \bullet k = c$, y que i, j , k son vectores unitarios, los cósenos de los ángulos α, β, γ están dados por:

$$\boxed{\cos\alpha} = \left|\frac{a}{|v|}\right| \quad ; \quad \cos\beta = \frac{b}{|v|} \quad ; \quad \cos\gamma = \frac{c}{|v|}$$

Estos son llamados *cósenos directores* de v.

Nótese que $\qquad \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$

La suma de los cuadrados de los cósenos directores es 1. Además, la dirección (α, β, γ) esta completamente determinada por la terna $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

Dado que

$$a = |v|\cdot\cos\alpha \quad ; \quad b = |v|\cdot\cos\beta \quad ; \quad c = |v|\cdot\cos\gamma$$

El vector v se puede escribir como

$$v = |v|\cos\alpha\cdot i + |v|\cos\beta\cdot j + |v|\cos\gamma\cdot k$$

Así que el vector v está completamente determinado por su longitud y su dirección.

Por lo tanto, dos vectores son iguales si tienen la misma dirección y longitud.

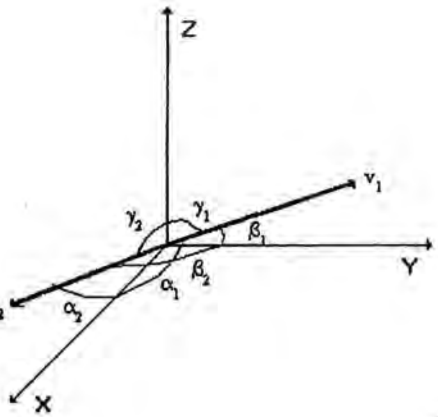
Teorema

Sean v_1 con dirección $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, y v_2 con dirección $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ entonces,

(1) v_1 y v_2 son paralelos y tienen el mismo sentido si y solo si $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

(2) v_1 y v_2 son paralelos y tienen sentidos opuestos si y solo si

$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = (\pi - \alpha_2, \pi - \beta_2, \pi - \gamma_2)$ (Fig.83)



(Fig.83)

Nótese lo siguiente:

(1) Si $v = a\cdot i + b\cdot j + c\cdot k$ tiene dirección (α, β, γ) entonces el vector unitario

$$u = \frac{v}{|v|} = \cos\alpha\cdot i + \cos\beta\cdot j + \cos\gamma\cdot k$$

(2) Dos flechas son equivalentes si y solo si tienen la misma dirección y magnitud.

(3) Si u_1 y u_2 son vectores unitarios en la dirección de v_1 y v_2 entonces

$$u_1 = \cos\alpha_1\cdot i + \cos\beta_1\cdot j + \cos\gamma_1\cdot k$$
$$u_2 = \cos\alpha_2\cdot i + \cos\beta_2\cdot j + \cos\gamma_2\cdot k$$

entonces el ángulo entre v_1 y v_2 esta dado por

$$\cos\theta = u_1 \bullet u_2 = \cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cdot\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2$$

4.13 Producto Cruz.

Otra importante operación con vectores es el *producto cruz* de dos vectores. Esta operación sólo se define parta vectores en el espacio tridimensional.

Sean v, u los vectores $v = a_1 \cdot i + a_2 \cdot j + a_3 \cdot k$, $u = b_1 \cdot i + b_2 \cdot j + b_3 \cdot k$

El producto cruz de v y u es el vector

$$v \times u = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$v \times u = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2) \cdot i - (a_1 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1) \cdot j + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) \cdot k$$

Nótese que $v \times u$ se obtiene al expandir el determinante

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Por menores a lo largo del primer renglón. Tenemos

$$v \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

De lo anterior se sigue que $u \times v = -(v \times u)$

Esto se debe a que el segundo determinante se obtiene del primero al intercambiar dos renglones. El producto cruz sirve para determinar el paralelismo de vectores.

Dados dos vectores diferentes de cero v y u son paralelos entre si, si y solo si

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $v \parallel u$ si y solo si $v \times u = \overline{O}$

Las propiedades básicas del producto cruz se enuncian en el siguiente teorema.

(1) $\overline{O} \times v = v \times \overline{O} = \overline{O}$

(2) $u \times v = -(v \times u)$ (ley anticonmutativa)

(3) $v \times u = \overline{O}$ si y solo si v y u son paralelos (v, u $\neq \overline{O}$)

(4) $(cv) \times u = v \times (cu) = c(v \times u)$ para todo escalar c.

(5) $v \perp v \times u$ y $u \perp v \times u$

(6) $v \times (u + w) = v \times u + v \times w$

(7) $|v \times u| = |v||u| sen\theta$, donde θ es el ángulo entre v y u.

Nótese lo siguiente:

a) La propiedad (2) nos indica que $v \times u$ y $u \times v$ tienen la misma magnitud y sentido contrario.

b) La propiedad (3) implica que $v \times u = \overline{O}$ para todo vector v.

c) La propiedad (5) enuncia que $v \times u$ es ortogonal a v y u.

Observemos además que

$$i \times j = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0i + 0j + 1k = k$$

Similarmente

$j \times k = i$
$k \times i = j$

Probaremos (5) y (7), quedando los demás incisos como ejercicio para el lector.

Sean $u, v \in R^3$ vectores distintos de cero. Probaremos que $v \perp v \times u$ y $u \perp v \times u$.

Prueba.

Sean $u = (a_1, a_2, a_3)$ y $v = (b_1, b_2, b_3)$ entonces

$$v \bullet (v \times u) = (b_1, b_2, b_3) \bullet (b_2 \cdot a_3 - b_3 \cdot a_2, b_3 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_3, b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1)$$

$$v \bullet (v \times u) = b_1 \cdot (b_2 \cdot a_3 - b_3 \cdot a_2) + b_2 \cdot (b_3 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_3) + b_3 \cdot (b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1)$$

$$v \bullet (v \times u) = a_3 \cdot b_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \cdot b_3 + a_1 \cdot b_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 \cdot b_3 - a_1 \cdot b_2 \cdot b_3$$

$$v \bullet (v \times u) = 0.$$

Por lo tanto $v \perp v \times u$

Análogamente

$$u \bullet (v \times u) = (a_1, a_2, a_3) \bullet (b_2 \cdot a_3 - b_3 \cdot a_2, b_3 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_3, b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1)$$

$$u \bullet (v \times u) = a_1 \cdot (b_2 \cdot a_3 - b_3 \cdot a_2) + a_2 \cdot (b_3 \cdot a_1 - b_1 \cdot a_3) + a_3 \cdot (b_1 \cdot a_2 - b_2 \cdot a_1)$$

$$u \bullet (v \times u) = a_1 \cdot a_3 \cdot b_2 - a_1 \cdot a_2 \cdot b_3 + a_1 \cdot a_2 \cdot b_3 - a_2 \cdot a_3 \cdot b_1 + a_2 \cdot a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot a_3 \cdot b_2$$

$$u \bullet (v \times u) = 0$$

Por lo tanto $u \perp v \times u$

Ejemplo

Demostrar $|v \times u| = |v||u| sen\theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores v y u.

Solución.

Sean $v = (a_1, a_2, a_3)$ y $u = (b_1, b_2, b_3)$

Calculando el cuadrado de la norma de $u \times v$ obtenemos

$$|v \times u|^2 = (a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2)^2 + (a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3)^2 + (a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)^2$$

desarrollando y factorizando

$$|v \times u|^2 = \left((a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2\right)\left((b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2\right) - (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3)^2$$

$$|v \times u|^2 = |v|^2 \cdot |u|^2 - (v \bullet u)^2 \qquad (\#)$$

Por otro lado sabemos que

$v \bullet u = |v||u|\cos\theta$ donde θ es el ángulo entre v y u. Sustituyendo en (#) tenemos

$$|v\times u|^2 = |v|^2\cdot|u|^2 - (|v|\cdot|u|\cos\theta)^2$$

$$|v\times u|^2 = |v|^2\cdot|u|^2 - |v|^2\cdot|u|^2\cdot\cos\theta^2$$

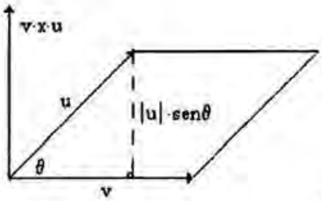
$$|v\times u|^2 = |v|^2\cdot|u|^2\cdot(1-\cos\theta^2)$$

$$|v\times u|^2 = |v|^2\cdot|u|^2\cdot sen\theta^2$$

de donde $|v\times u| = |v|\cdot|u|\cdot sen\theta$

Hacemos notar que $sen\theta \geq 0$, pues $0\leq\theta\leq\pi$.

Esta propiedad tiene la siguiente representación geométrica. (Fig.84)



(Fig.84)

Como $|u|sen\theta$ es al altura del paralelogramo de lados v y u, $|v|$ es la base del mismo.

Entonces $|v|\cdot(|u|\cdot sen\theta)$ representa el área del paralelogramo y es la norma de $v\times u$.

Es decir $|v\times u|$ es el área del paralelogramo, con lados u y v.

4.13 Triple Producto Escalar.

Dados tres vectores u, v y w en R^3, entonces como $v \times u$ es un vector, podemos formar el producto punto de u con $v \times u$. A este producto le llamamos triple producto escalar.

Definición. Dados tres vectores $u = (a_1, a_2, a_3)$, $v = (b_1, b_2, b_3)$ y $w = (c_1, c_2, c_3)$ el triple producto escalar de u, v y w, denotado por $[\, u\, v\, w\,]$, se define como el número real.

$$[\, u\, v\, w\,] = u \bullet (v \times w)$$

$$[\, u\, v\, w\,] = (a_1, a_2, a_3) \bullet (b_2 \cdot c_3 - b_3 \cdot c_2, b_3 \cdot c_1 - b_1 \cdot c_3, b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1)$$

$$[\, u\, v\, w\,] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Mediante el cálculo directo puede demostrarse que

$$[\, u\, v\, w\,] = u \bullet (v \times w) = v \bullet (w \times u) = w \bullet (u \times v) \qquad (\#\#)$$

es decir

$$[\, u\, v\, w\,] = [\, v\, w\, u\,] = [\, w\, u\, v\,]$$

Lo que se deja como ejercicio al lector.

Esto muestra que el triple producto escalar no cambia por permutaciones cíclicas de los vectores.

Por otra parte como el producto es conmutativo, la ecuación (##) puede escribirse como

$$[\ u\ v\ w\ ] = (v \times w) \bullet u = (w \times u) \bullet v = (u \times v) \bullet w$$

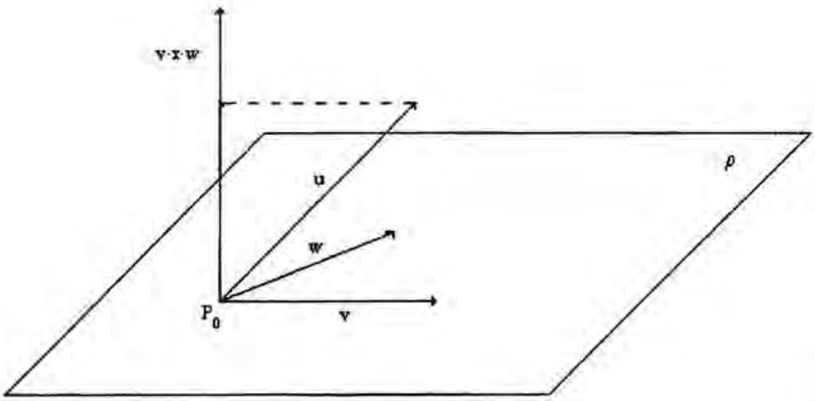
de donde se deduce que

$$[\ u\ v\ w\ ] = u \bullet (v \times w) = (u \times v) \bullet w$$

Esto último significa que podemos colocar el punto y la cruz en cualquiera de las dos posiciones posibles.

El triple producto escalar tiene una interpretación geométrica.

Sean *u, v, w* vectores con el mismo punto inicial P_0 y ρ el plano que pasa por P_0 y con vectores directores *v* y *w* . Como se muestra la figura 85.



(Fig.85)

Tenemos:

$[\, u\ v\ w \,] = u \bullet (v \times w)$

$[\, u\ v\ w \,] = |u| \cdot |v \times w| \cdot \cos\theta$ donde θ es el ángulo entre u y $(v \times w)$

$[\, u\ v\ w \,] = |v \times w| \cdot |u| \cdot \cos\theta$

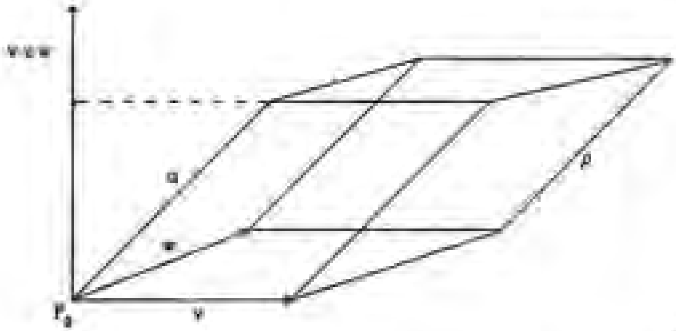
$[\, u\ v\ w \,] = |v \times w|\ \mathrm{Comp}\, u_{(v\ x\ w)}$

Como $\mathrm{Proy}\, u_{(v\ x\ w)}$ y $v \times w$ tienen el mismo sentido entonces $\mathrm{Comp}\, u_{(v\ x\ w)}$ es positivo.

En este caso se dice que la terna u, v, w están orientados positivamente.

Y por lo tanto u y $v \times w$ se encuentran a un mismo lado del plano.

El triple producto escalar $[\, u\ v\ w \,]$ representa geométricamente el volumen del paralelepípedo formado por los vectores u, v, y w. (Fig.86)



(Fig.86)

Como sabemos el volumen del paralelepipedo es el área de la base por la altura.
La base es un paralelogramo de lados v y w , cuya área es $|v \times w|$.
Así mismo, la altura es $|u| \cdot \cos\theta$ donde θ es el ángulo entre u y $v \times w$

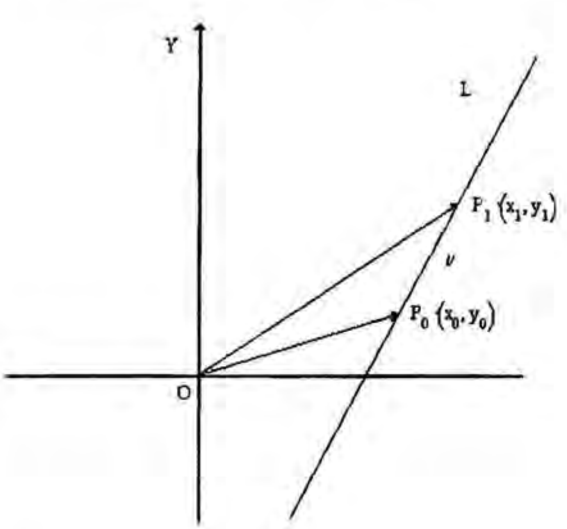
Por tanto $|u| \cdot \cos\theta = |u|$ y Volumen $= |v \times w|\ \mathrm{Comp}\, u_{(v\ x\ w)} = u \bullet (v \times w) = [\, u\ v\ w \,]$
Si $[\, u\ v\ w \,] < 0$ entonces $-[\, u\ v\ w \,]$ es el volumen del paralelepipedo de lados u, v, w.

V LINEA RECTA. PLANO.

5.1 Línea Recta en el Plano.

Una aplicación del análisis vectorial consiste en derivar una ecuación vectorial para la recta.

Consideremos la recta L por los puntos, $P_0 (x_0 , y_0)$ y $P_1 (x_1 , y_1)$ (Fig.87).



(Fig.87)

Los radiovectores $\overrightarrow{OP_0}$ y $\overrightarrow{OP_1}$ determinan los puntos P_0 y P_1 respectivamente.

La flecha $\overline{P_0P_1}$ esta sobre la recta L .

Sea $\overline{P_0P_1} = v$ con $v = (a, b)$ (es decir, $a = x_1 - x_0$; $b = y_1 - y_0$)

al vector v se le llama *vector director* de la recta L.

Supongamos que P(x, y) es un punto arbitrario de la recta.

El radio vector $\overrightarrow{OP}$ determina el punto P.

Como las flechas $\overline{P_0P}$ y $\overline{P_0P_1}$ son paralelas, hay un escalar t tal que:

$\overrightarrow{P_0P} = t\,\overrightarrow{P_0P_1}$ o bien

$\overrightarrow{P_0P} = t\,v$

Para localizar cualquier punto P en la recta L, tenemos:

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P}$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\cdot v$

como $\overrightarrow{OP} = P$ y $\overrightarrow{OP_0} = P_0$, tenemos lo siguiente:

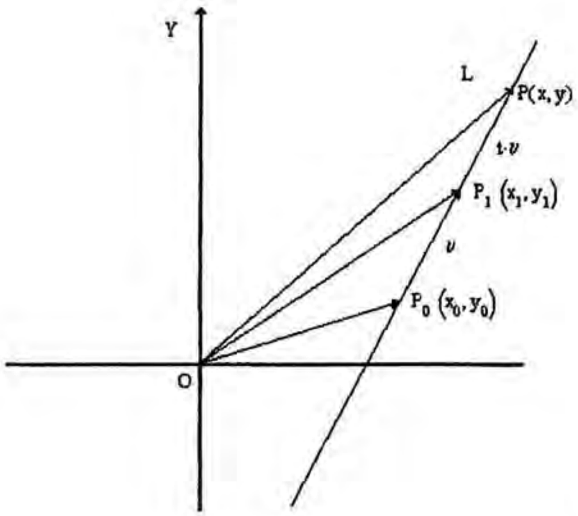
P es un punto de la recta si y solo si

$P = P_0 + t\,v$, con $t \in R$ (Fig.88)

En general el conjunto de puntos de la recta L por P_0 y paralela a v se puede especificar como sigue:

$L = \{P \mid P = P_0 + tv, t \in R\}$

A la ecuación $P = P_0 + tv$ se le llama *ecuación vectorial de la recta.*



(Fig.88)

Como $v = \overrightarrow{P_0 \cdot P_1}$ la expresión anterior toma la forma:

$$P = P_0 + t \cdot \left(\overrightarrow{P_0 \cdot P_1}\right) \quad \text{de donde}$$

$$P = P_0 + t \cdot \left(\overrightarrow{P_0 \cdot P_1}\right) \quad \text{de donde}$$

$$\boxed{(x, y)} = \boxed{(x_0, y_0) + t \cdot (x_1 - x_0, y_1 - y_0)}$$

$$(x, y) = \left[x_0 + t \cdot (x_1 - x_0), y_0 + t \cdot (y_1 - y_0)\right]$$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t \cdot (x_1 - x_0) \\ y &= y_0 + t \cdot (y_1 - y_0) \end{aligned} \qquad (1)$$

O bien , si escribimos $a = x_1 - x_0$ y $b = y_1 - y_0$

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t \cdot a \\ y &= y_0 + t \cdot b \end{aligned} \qquad (2)$$

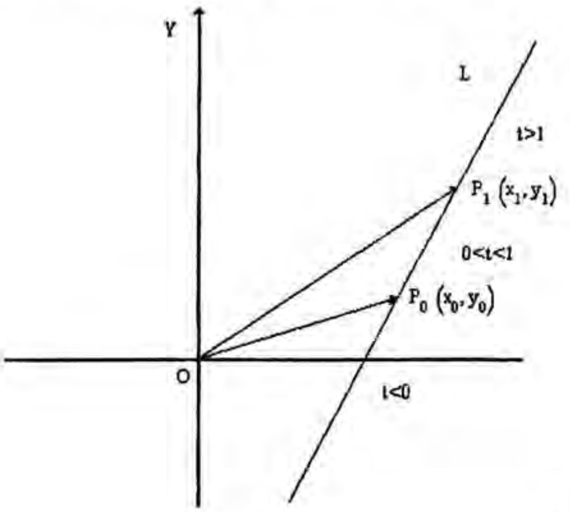
(1) y (2) son llamadas *ecuaciones parametricas* de la recta.

En (1) se dice que la recta pasa por los puntos P_0 y P_1 .

Y en (2) la recta pasa por P_0 y con vector director *v*.

En resumen podemos afirmar que una recta L está determinada cuando se conocen las coordenadas de dos puntos de L o si se conocen las coordenadas de un punto en L y un vector director de L.

El conjunto de valores del parámetro t se puede restringir a un intervalo cualquiera.



(Fig.89)

1) Si $t = 0$, $P = P_0$ se trata del punto P_0 .

2) Si $0 \leq t \leq 1$, P recorre el segmento de recta $\overline{P_0 \cdot P_1}$.

Por lo tanto podemos definir vectorialmente al segmento $\overline{P_0 \cdot P_1}$ como

$$\overline{P_0 \cdot P_1} = \{ \ P \mid P = P_0 + t \cdot v \ , \ \ 0 \leq t \leq 1 \ \}$$

3) Si $t \geq 0$, P recorre la semirrecta con punto inicial P_0 y que pasa por P_1. (Fig. 89)

Definimos a este conjunto:

$$\overrightarrow{P_0P} = \{ P \mid P = P_0 + t v , \ 0 \leq t \}$$

Las definiciones de segmento, semirrecta y recta que pasan por P_0 y P_1 se diferencian únicamente por el rango de valores que tome el parámetro.

Ejemplo 1.

Encontrar la ecuación parametrica cartesiana de la recta L que pasa por los puntos P_1 (-1, 2) y P_2 (1, 4) , y hallar algunos puntos sobre la línea.

Solución.

Las ecuaciones parametricas de la recta que pasa por P_1 y P_2 son:

$$x = -1 + t(1 - (-1)) = -1 + 2t$$
$$y = 2 + t(4 - 2) = 2 + 2t$$

Encontremos algunos puntos sobre la recta.

Para $t = 0$; $P = (-1, 2)$

$t = 1$; $Q = (1, 4)$

$t = \dfrac{1}{2}$; $S = (0, 3)$

Ejemplo 2.

Calcular las coordenadas de los puntos que trisecan al segmento de recta cuyos extremos son P_0 (6, 3) y P_1 (9, 6).

Solución:

El vector v que va de P_0 a P_1 es

$v = \overrightarrow{P_0P_1} = (3, 3)$

Por lo cual la ecuación vectorial del segmento está dada por

$$P = P_0 + t\,\overline{P_0 P_1} \quad ; \quad 0 \le t \le 1$$

Las coordenadas del punto que está en relación a P_0 a una tercera parte de la distancia que separa a P_0 de P_1 corresponden a $t = \dfrac{1}{3}$.

$$(x, y) = (6,3) + \frac{1}{3}(3,3)$$

$$(x, y) = (6,3) + (1,1)$$

$$(x, y) = (7,4)$$

Y las coordenadas del punto que está en relación a P_0 a dos terceras partes de la distancia que separa a P_0 de P_1 corresponden a $t = \dfrac{2}{3}$.

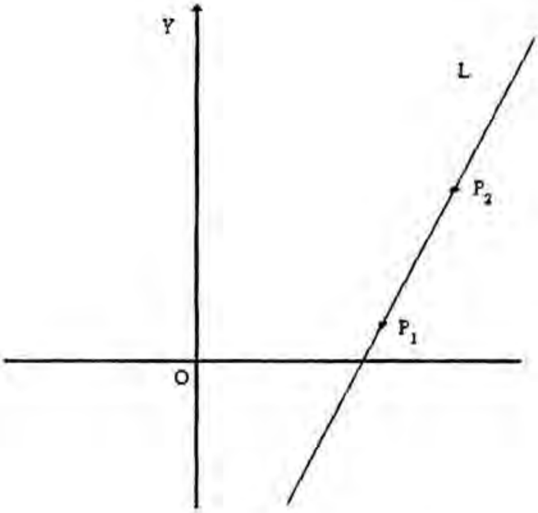
$$(x, y) = (6,3) + \frac{2}{3}(3,3)$$

$$(x, y) = (6,3) + (2,2)$$

$$(x, y) = (8,5)$$

Así los puntos que trisecan al segmento $\overline{P_0 P_1}$ son (7, 4) y (8, 5).
Hay que hacer notar que una recta L tiene un número infinito de vectores de dirección, pues hay un número infinito de vectores paralelos a la recta, y cada uno de ellos es un vector de dirección de la recta.

En particular si tomamos cualquier par de puntos sobre L, P_1 y P_2; entonces $\overrightarrow{P_1 P_2} = v_1$ y $\overrightarrow{P_2 P_1} = v_2$ son vectores directores de la recta L. (Fig.90)



(Fig.90)

La pendiente de una recta L, esta determinada por la pendiente del vector.
No hay que olvidar que los vectores directores son paralelos, por lo que todos ellos tienen la misma pendiente.

Sea $v = (a, b)$ el vector director de la recta L cuya ecuación vectorial es

$$P = P_0 + t \cdot v$$

La pendiente de L es $m = \dfrac{b}{a}$ con $a \neq 0$.

i) Si m = 0, la recta es horizontal.

ii) Si m es indefinida L es vertical.

De (1)

$$x = x_0 + t \cdot (x_1 - x_0)$$

$$y = y_0 + t \cdot (y_1 - y_0) \qquad t \in \mathbf{R}$$

despejando a t de la primera ecuación

$$\boxed{t} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

sustituyendo en la segunda ecuación

$$y - y_0 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\cdot(y_1 - y_0)$$

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\cdot(x - x_0)$$

obtenemos la ecuación de la recta en su *forma de los dos puntos.*

Nótese que $b = y_1 - y_0$; $a = x_1 - x_0$

y $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

Ahora podemos escribir la ecuación (4) como

$$y - y_0 = m\cdot(x - x_0) \quad (5)$$

Esta es llamada ecuación de la recta en su *forma punto -pendiente.*

Agrupando términos en (5) tenemos

$$y = mx - mx_0 + y_0$$

$$y = mx + b \qquad \text{de donde } b = y_0 - mx_0$$

y la ecuación de la recta toma la *forma pendiente - ordenada al origen.*

Sean (a, 0) y (0, b) son los puntos de intersección de la recta L con los ejes X y Y respectivamente, con a, b $\neq 0$

De la ecuación (4) tenemos

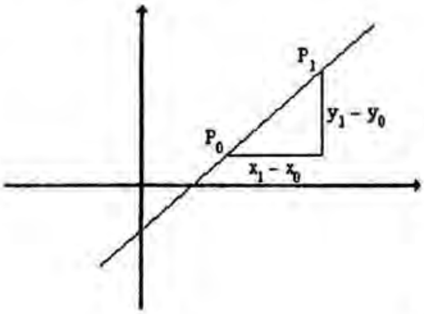
$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}\cdot(x - a)$$

$$y = -\frac{b}{a}\cdot(x - a)$$

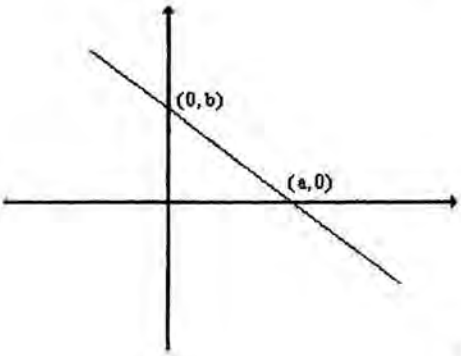
la cual se puede escribir

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Esta es llamada *ecuación de la recta en su forma simétrica.*



(Fig.91)



(Fig.92)

Dado que $v \neq \bar{O}$ cuando $a \neq 0$ o $b \neq 0$; despejando a t de (2) tenemos

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ta \\ y &= y_0 + tb \end{aligned} \qquad (2) \qquad\qquad t = \frac{x - x_0}{a} \qquad t = \frac{y - y_0}{b}$$

igualando

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

desarrollando

$$bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0 \qquad (*)$$

Si hacemos

$$A = b \ ; \quad B = -a \quad y \quad C = -bx_0 + ay_0$$

entonces la ecuación (*) adquiere la forma

$$Ax + By + C = 0 \qquad (3)$$

donde $A \neq 0$ o $B \neq 0$

Esta ecuación es llamada *ecuación general cartesiana de la recta*. Toda recta tiene una ecuación de esta forma. De esta manera podemos llevar
la ecuación vectorial de una recta a su forma cartesiana y viceversa.

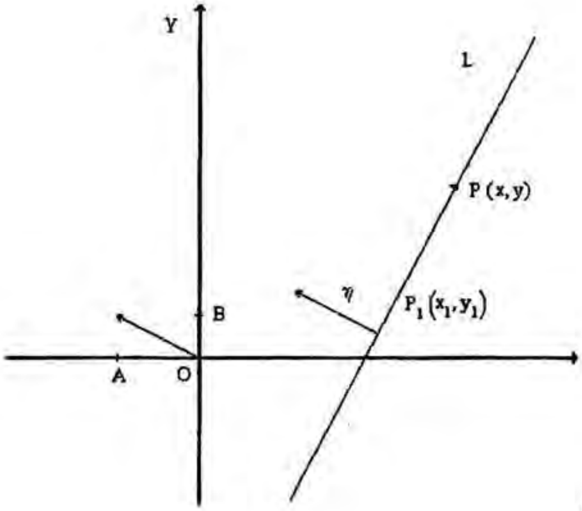
Hacemos notar lo siguiente:

1) La recta con ecuación $Ax + By + C = 0$ es paralela al vector
$v = (a, b) = (-B, A)$
deducimos entonces que $\eta = (A, B)$ es perpendicular a v, pues que
$v \bullet \eta = -AB + AB = 0$.
El vector η es llamado el *vector normal* de L.

De lo anterior podemos afirmar lo siguiente:

Si $P_1(x_1, y_1) \in L$ entonces $P(x, y) \in L$ si y solo si $\overrightarrow{P_1 \cdot P} \perp \eta$ esto es,

$\overrightarrow{P_1 \cdot P} \bullet \eta = 0$. (Fig.93)



(Fig.93)

De donde

$(x - x_1, y - y_1) \bullet (A, B) = 0$

$A \cdot (x - x_1) + B \cdot (y - y_1) = 0$

$Ax + By + (-Ax_1 - By_1) = 0$

Obtenemos la ecuación general cartesiana de L que pasa por el punto P_1 y con vector director (A, B).

$Ax + By + C = 0$ con $C = (-Ax - By)$

Donde A o B son diferentes de cero y C puede o no ser diferente de cero según el caso.

Caso I

$A \neq 0$, $B = 0$

La ecuación se reduce a la forma : $x = -\frac{C}{A}$

la cuál representa a una recta paralela al eje Y.

Caso II

$A = 0$, $B \neq 0$

La ecuación toma la forma : $y = -\frac{C}{B}$ que representa a una recta paralela al eje X.

Caso III

$A \neq 0$, $B \neq 0$

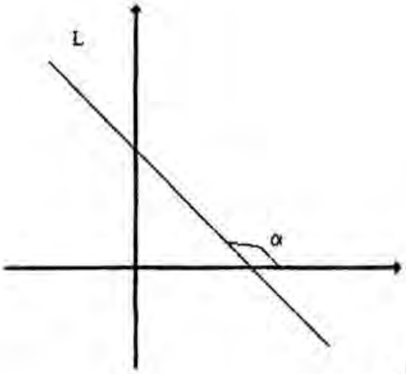
Despejando a y obtenemos la ecuación

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

con pendiente $-\frac{A}{B}$ y ordenada en el origen $-\frac{C}{B}$.

Dicha recta forma con el eje **X** un ángulo α medido en sentido positivo llamado ángulo de inclinación de L. (Fig.94) Este ángulo está definido por la relación

$$\tan\alpha = m = -\frac{A}{B} \qquad 0 \leq \alpha \leq \pi$$



(Fig.94)

De lo anterior notemos lo siguiente:

i) L es vertical si $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$

ii) L es horizontal si $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$

Ejemplo 3 .

Escribir la ecuación de la recta L que pasa por los puntos $P_1\,(1, -2)$ y $P_2\,(2, 5)$

a) En su forma de los dos puntos
b) En su forma punto - pendiente.
c) En su forma simétrica.
d) En su forma pendiente - ordenada en el origen.

a) Solución:

$$y + 2 = \frac{5-(-2)}{2-1}\cdot(x-1) \qquad \text{o} \qquad y - 5 = \frac{5-(-2)}{2-1}\cdot(x-2)$$

b) Solución:

$$y + 2 = 7(x - 2) \quad \text{o} \quad y - 5 = 7(x - 2)$$

c) De (b) las intersecciones con los ejes son:

$$a = \frac{9}{7} \quad \text{y} \quad b = -9 .$$

La forma simetrica de la recta es:

$$\frac{x}{\left(\frac{9}{7}\right)} + \frac{y}{-9} = 1$$

la cual se reduce a $x - 2y + 8 = 0$

d) $y = 7x - 9$

Notemos que cada una de las formas se reducen a la forma general

$$7x - y - 9 = 0$$

Ejemplo 4.

Escribir la ecuación de lá recta L en su forma general .

a) Cuya intersección con el eje X es 4 y pasa por el punto (3, -1)
b) Cuya ordenada en el origen es – 2 y pendiente 5.
c) Pendiente 3 e intersección con el eje X en 8.

Solución:

a) $a = 4$. Utilizando la forma simétrica $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. Sustituyendo el punto (3, -1) en la ecuación tenemos $\frac{3}{4}+\frac{-1}{b}=1$ cuya solución es $b = -4$. La ecuación de L es por lo tanto $\frac{x}{4}+\frac{y}{-4}=1$, la cual se reduce a $x - y - 4 = 0$.

b) $b = -2$ y $m = 5$. La forma de la recta punto - pendiente es $y = 5x - 2$, reduciéndola a su forma general $5x - y - 2 = 0$.

c) $m = 3$ y $a = 8$. Usando la forma punto - pendiente tenemos $y - 0 = 3(x - 8)$, la cual se reduce a $3x - y - 24 = 0$.

Ejemplo 5.

Encontrar la ecuación de la recta L que pasa por el punto $P_1(2, -3)$ y tiene como vector normal $\eta = 3i - 4j$.

Solución.

$P(x, y) \in L$ si y solo si $\eta \bullet \overrightarrow{P_1P} = 0$.

Por lo tanto

$$3(x-2)+(-4)(y+3) = 0 \quad \text{se reduce a} \quad 3x - 4y - 18 = 0.$$

Dado que L es paralela al vector $v = 4i + 3j$ las ecuaciones parametricas de L son:

$$L:\ \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -3 + 3t \end{cases} \quad , t \in R$$

Ejemplo 6.

Dada L : x -2y + 8 = 0.

a) Encontrar un vector perpendicular a L.
b) Encontrar un vector paralelo a L.
c) Escribir un conjunto de ecuaciones paramétricas para L.
d) Encontrar la pendiente y las intersecciones de L con los ejes.
e) Dibujar la gráfica de L.

Solución.

De la ecuación x -2y + 8 = 0

A = 1, B = -2, C = 8

a) Un vector perpendicular a L es $v_1 = i - 2j$

b) Un vector paralelo a L es $v_2 = 2i + j$

c) Para encontrar un punto sobre L, sustituimos cualquier número para x, digamos x = 1 ; entonces $y = \frac{9}{2}$; así $\left(1, \frac{9}{2}\right) \in L$. Utilizando a $v_2 = 2i + j$ como vector director, obtenemos las ecuaciones

$$L : \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot t \\ y = \frac{9}{2} + t \end{cases} \quad t \in R$$

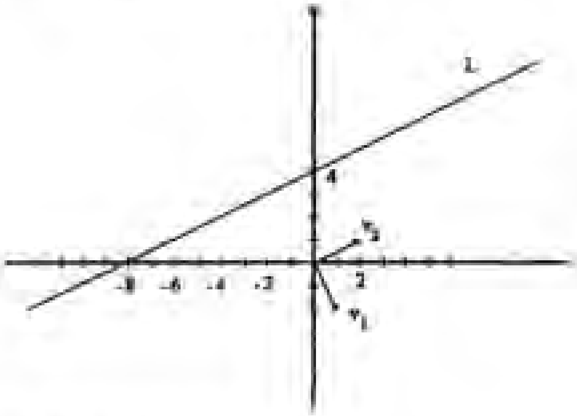
Despejando el parámetro t, de ambas ecuaciones e igualando tenemos:

$\frac{x-1}{2} = y - \frac{9}{2}$ lo cual se reduce a x -2y + 8 = 0.

d) Del inciso c) obtenemos $y = \frac{1}{2}x + 4$, la ecuación en su forma pendiente - ordenada en el origen, con pendiente $\frac{1}{2}$ y ordenada en el origen 4.

Por lo tanto las intersecciones de la recta con los ejes X y Y son los puntos (-8, 0) y (0, 4) respectivamente.

c) Gráfica de L.



5.2 Ángulo entre dos rectas.

Sean L_1 y L_2 dos rectas con ecuaciones

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \qquad y \qquad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

respectivamente. Entonces $v_1 = (-B_1, A_1)$ y $v_2 = (-B_2, A_2)$ son vectores directores de L_1 y L_2; y vectores normales $n_1 = (A_1, B_1)$ y $n_2 = (A_2, B_2)$.

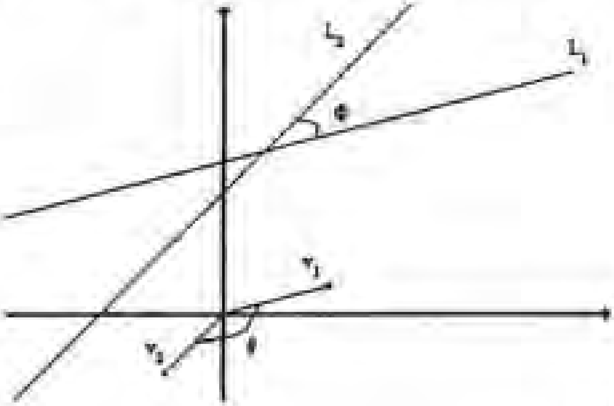
Por otra parte recordemos que el ángulo θ entre v_1 y v_2 esta dado por

$$\cos\theta = \frac{v_1 \bullet v_2}{|v_1||v_2|} \quad , \quad 0 \le \theta \le \pi$$

Definimos el ángulo entre L_1 y L_2 como el ángulo ϕ dado por

$$\cos\phi = |\cos\theta| = \frac{|v_1 \bullet v_2|}{|v_1||v_2|} \qquad (6) \qquad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$$

Nótese que al interceptarse dos rectas L_1 y L_2 se forman dos ángulos suplementarios de los cuales, por definición tomaremos como ángulo entre las rectas al comprendido entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Entonces, $\phi = \theta$, si $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ y $\phi = \pi - \theta$, si $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$, en este caso decimos que θ es el ángulo suplemento entre dos rectas. (Fig.95)



(Fig.95)

Nótese que:

$$\cos\theta = \frac{v_1 \bullet v_2}{|v_1||v_2|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}} = \frac{n_1 \bullet n_2}{|n_1||n_2|}$$

Es decir θ es el ángulo entre los vectores normales a L_1 y L_2.

Por lo tanto ϕ lo podemos definir en términos de los vectores normales de L_1 y L_2.

$$\cos\phi = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}} = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1||n_2|} \qquad (7)$$

Como consecuencia el ángulo entre dos rectas está dado en términos de sus vectores directores o de sus vectores normales.

De (7) y usando la identidad $(\cos\phi)^2 + (sen\phi)^2 = 1$, obtenemos :

$$sen(\Phi) = \frac{|A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}} \qquad (8)$$

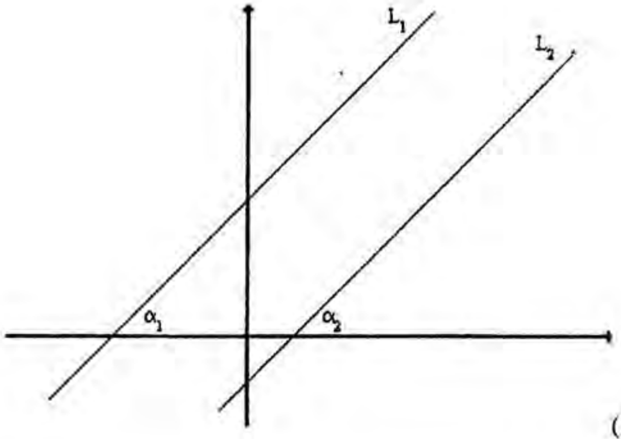
Si $\phi = 0$ en (8) tenemos $A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$

De donde deducimos que $L_1 \parallel L_2$ si y solo si $A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1 = 0$

La expresión anterior la podemos escribir como el determinante

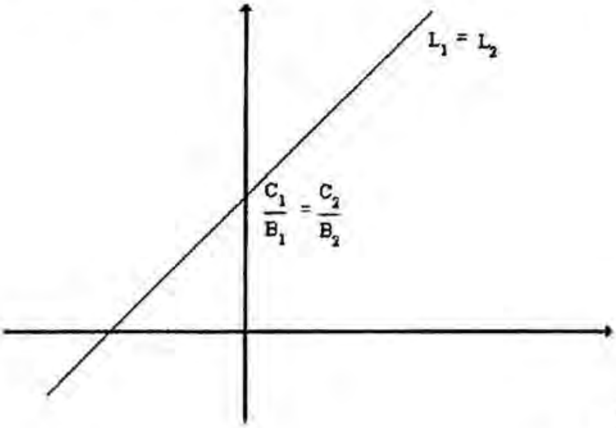
$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ o como la razón $\dfrac{A_1}{B_1} = \dfrac{A_2}{B_2}$ suponiendo $B_1, B_2 \neq 0$

Podemos decir entonces que dos rectas son paralelas si y solo si ambas tienen la misma pendiente o son verticales, o bien, si tienen el mismo ángulo de inclinación. (Fig.96)



(Fig.96)

Si L_1 y L_2 son paralelas y tienen la misma ordenada al origen, entonces coinciden.(Fig.97)



(Fig.97)

Por lo tanto L_1 y L_2 tienen la misma intersección con el eje Y si y solo si $\frac{C_1}{B_1} = \frac{C_2}{B_2}$

O, en forma de determinante $\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} = 0$.

Por tanto, la condición para que dos rectas no verticales L_1 y L_2 sean iguales es:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

o en forma de determinante, suponiendo que A_2, B_2, C_2 son diferentes de cero.

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0$$

En caso de que L_1 y L_2 sean rectas verticales, éstas son coincidentes si y solo si

$$\frac{C_1}{A_1} = \frac{C_2}{A_2}.$$

Si $\phi = \frac{\pi}{2}$, decimos que L_1 y L_2 son perpendiculares entre si. De (6) vemos que $L_1 \perp L_2$

si y solo si $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$. Cuando las rectas son no verticales, la expresión

anterior se puede escribir como

$$\left(\frac{A_1}{B_1}\right) \cdot \left(\frac{A_2}{B_2}\right) = -1$$

Si denotamos a la pendiente de L_1 y L_2 por m_1 y m_2 respectivamente, tenemos que $L_1 \perp L_2$ si y solo si $(m_1)(m_2) = -1$.

Entonces dos rectas no verticales son perpendiculares entre si, si y solo si el producto de sus pendientes es igual a -1 o, equivalentemente, si la pendiente de una es igual a la recíproca negativa de la pendiente de la otra.

Ejemplo 7.

Encontrar el ángulo entre las rectas:

$L_1 :\ 2\cdot x - 3\cdot y + 1 = 0 \qquad\qquad L_2 : 6\cdot x + 4\cdot y + 2 = 0$

Solución.

$$\cos(\Phi) = \frac{|2\cdot 6 + (-3)\cdot 4|}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{36+16}} = 0$$

Por lo tanto, $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ y concluimos que $L_1 \perp L_2$

Nótese que $\quad m_1 = \dfrac{2}{3}\ $ y $\ m_2 = -\dfrac{3}{2}$ esto es, $\quad m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$

Ejemplo 8.

Enconirar el ángulo entre las rectas

$L_1 : 2\cdot x + 5\cdot y + 1 = 0 \quad$ y $\quad L_2 :\ 2\cdot x + 2y - 1 = 0$

Solución.

$$\cos(\Phi) = \frac{|2\cdot(2) + 5\cdot(2)|}{\sqrt{4+25}\cdot\sqrt{4+4}} = \frac{14}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{8}} = 0.919$$

Por lo tanto, $\phi = 23°11'54''$

La mediatriz de un segmento rectilíneo $\overline{P_1 \cdot P_2}$ es la recta L que pasa por el punto medio M de $\overline{P_1 \cdot P_2}$ y es perpendicular a dicho segmento.

Ejemplo 9.

Encontrar la ecuación de la mediatriz del segmento $\overline{P_1 \cdot P_2}$ cuyos extremos son $P_1(2, 2)$ y $P_2(-2, 6)$.

Solución.

El punto medio del segmento $\overline{P_1 . P_2}$ es M(0, 4)

La pendiente del segmento rectilíneo es $-\frac{4}{4} = -1$

Por lo tanto dado que la pendiente de la perpendicular es el recíproco negativo de (-1), la ecuación de la mediatriz es

$y - 4 = 1(x - 0)$

esto es $-x + y - 4 = 0$

Es conveniente tener una formula para el ángulo ϕ en términos de las pendientes de L_1 y L_2.

Suponiendo $\phi \neq \frac{\pi}{2}$ de (7) y (8) tenemos

$$\tan(\Phi) = \frac{\operatorname{sen}(\Phi)}{\cos(\Phi)} = \left| \frac{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1}{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2} \right|$$

Si L_1 o L_2 son rectas no verticales, podemos dividir el numerador y denominador por $B_1 \cdot B_2$ y obtener

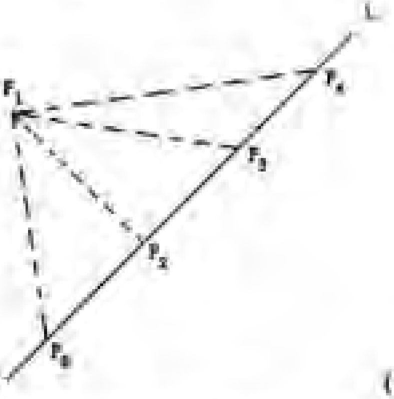
$$\tan(\Phi) = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$$

5.3 Distancia de un punto a una recta.

Supongamos que queremos encontrar la distancia de un punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta L con ecuación cartesiana $Ax + By + C = 0$ y cuyo vector normal es $n = Ai + Bj$

Recordemos que por convención tomamos como distancia de un punto a una recta, a la distancia más corta que hay entre el punto y la recta; ésta, se mide a lo largo de la perpendicular del punto a la recta.

En la figura 98 la longitud del segmento $\overline{P_1 P_2}$ nos representa la distancia del punto P_1 a la recta L.



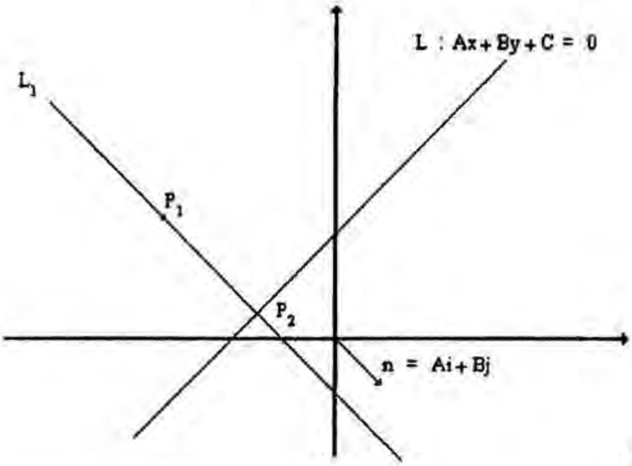
(Fig.98)

Para hallar dicha distancia consideremos la línea L_1 que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y es perpendicular a L. Las ecuaciones paramétricas de dicha recta son

$$L_1: \begin{cases} x = x_1 + At \\ y = y_1 + Bt \end{cases}, \; t \in R$$

Sea P_2 (x_2, y_2) es el punto de intersección de L y L_1 ; éste se obtiene sustituyendo x e y de las ecuaciones parametricas de L_1 en la ecuación de L, de donde se tiene (Fig.99)

$$\boxed{A \cdot (x_1 + At) + B \cdot (y_1 + Bt) + C} = 0$$



(Fig.99)

Resolviendo para t

$$t = -\frac{A \cdot x_1 + B \cdot y_1 + C}{A^2 + B^2}$$

Denotemos este valor de t por t_1 sustituyendo el valor de t_1 en la ecuación parametrica de L_1 obtenemos las coordenadas de P_2.

$$x_2 = x_1 + At_1$$

$$y_2 = y_1 + Bt_1$$

Ahora que conocemos las coordenadas de P_2 basta con encontrar la longitud del segmento $\overline{P_1 \cdot P_2}$ para definir la distancia de P_1 a L.

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$d^2 = (x_1 + At_1 - x_1)^2 + (y_1 + Bt_1 - y_1)^2$$

$$d^2 = (A^2 + B^2) \cdot (t_1)^2$$

$$d^2 = \left(A^2 + B^2\right)\left(\frac{Ax_1 + By_1 + C}{A^2 + B^2}\right)^2 \qquad \text{(sustituyendo el valor de } t_1 \text{)}$$

$$d^2 = \frac{\left(A \cdot x_1 + By_1 + C\right)^2}{A^2 + B^2}$$

$$d = \frac{\left| A \cdot x_1 + By_1 + C \right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Nótese que $d = 0$ si $Ax_1 + By_1 + C = 0$, es decir si $P_1 \in L$.

Ejemplo 10.

Encontrar la distancia del punto $P_1(4, 6)$ a la recta $L : x + y - 3 = 0$.

Solución.

De la ecuación general cartesiana de L tenemos

$A = 1$, $B = 1$, $C = -3$

Entonces

$$d = \frac{\left| 1(4) + 1(6) - 3 \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

por lo tanto

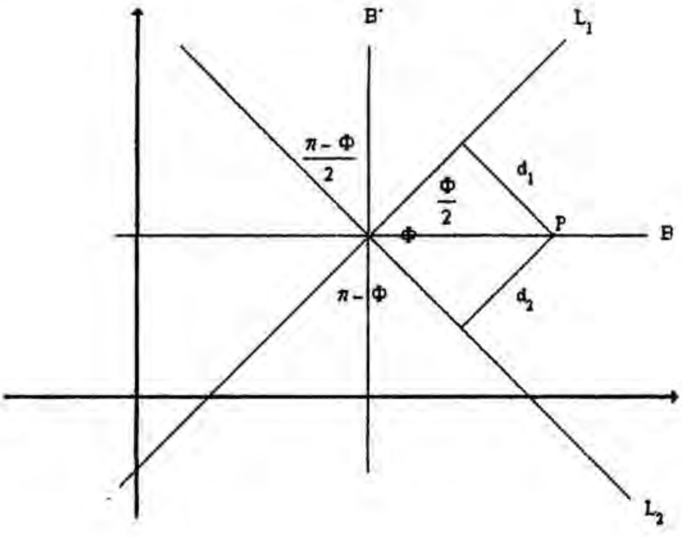
$$d = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

Sean L_1 y L_2 dos rectas no paralelas cuya intersección forman dos ángulos suplementarios ϕ y $\pi - \phi$. Llamamos bisectriz de ángulo a cualquiera de las dos rectas equidistantes de L_1 y L_2. Cada una de ellas divide a alguno de los ángulos ϕ y $\pi - \phi$ por la mitad.

Sean

$$L_1 : A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0 \qquad L_2 : A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0$$

Las ecuaciones cartesianas de L_1 y L_2 con vectores normales $n_1 = (A_1, B_1)$ y $n_2 = (A_2, B_2)$ respectivamente. (Fig.100)



(Fig.100)

Supongamos que P(x, y) es un punto cualquiera de una bisectriz B.

De la definición tenemos:

$$\boxed{d_1}\boxed{(P, L_1)} = d_2\,(P, L_2)$$

es decir $$\frac{|A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2}} = \frac{|A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2|}{\sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}}$$

Elevando al cuadrado
ambos miembros
obtenemos

$$\frac{(A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1)^2}{\left[\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2}\right]^2} = \frac{(A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2)^2}{\left[\sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}\right]^2}$$

Sean h y k tales que

$$h = |n_1| = \sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2}$$

$$k = |n_2| = \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2}$$

La ecuación anterior toma la forma

$$\frac{(A_1x+B_1y+C_1)^2}{h^2}=\frac{(A_2x+B_2y+C_2)^2}{k^2}$$

de donde

$$(A_1x+B_1y+C_1)^2\cdot k^2-(A_2x+B_2y+C_2)^2\cdot h^2=0$$

$$[(A_1x+B_1y+C_1)\cdot k]^2-[(A_2x+B_2y+C_2)\cdot h]^2=0$$

$$(A_1x\cdot k+B_1y\cdot k+C_1k)^2-(A_2x\cdot h+B_2y\cdot h+C_2\cdot h)^2=0$$

factorizando

$$[(A_1x\cdot k+B_1y\cdot k+C_1k)+(A_2x\cdot h+B_2y\cdot h+C_2h)]\cdot[(A_1x\cdot k+B_1y\cdot k+C_1k)-(A_2x\cdot h+B_2y\cdot h+C_2h)]=0$$

igualando cada factor a cero obtenemos las ecuaciones de las bisectrices:

$$B:(A_1k+A_2h)\cdot x+(B_1k+B_2h)\cdot y+C_1k+C_2h=0$$

$$B':(A_1k-A_2h)\cdot x+(B_1k-B_2h)\cdot y+C_1k-C_2h=0$$

Ambas bisectrices son perpendiculares entre sí, dado que:

$$\left(\frac{A_1k+A_2h}{B_1k+B_2h}\right)\cdot\left(\frac{A_1k-A_2h}{B_1k-B_2h}\right)=-1$$

En resumen podemos concluir lo siguiente:

Para todo par de rectas no paralelas L_1 y L_2 :

1) Hay dos bisectrices B y B' las cuales son perpendiculares entre sí.

2) Una de las bisectrices divide al ángulo ϕ (ángulo entre las rectas) en dos ángulos de medida $\frac{\phi}{2}$ y la otra bisectriz divide al suplemento de este $\pi - \phi$ en dos ángulos $\frac{\pi - \phi}{2}$.

Ejemplo 11.

Hallar las ecuaciones de las bisectrices para las rectas

$$L_1 : x + y - 1 = 0 \quad \text{y} \quad L_2 : 2 \cdot x - y + 1 = 0$$

Solución:

$$n_1 = (1, 1) \quad \text{y} \quad n_2 = (2, -1)$$

por lo tanto

$$|n_1| = \sqrt{2} \;,\quad |n_2| = \sqrt{5}$$

de donde las ecuaciones de las bisectrices están dadas por

$$B : \left(1\left(\sqrt{5}\right) + 2\left(\sqrt{2}\right)\right) \cdot x + \left[1\left(\sqrt{5}\right) + (-1) \cdot \left(\sqrt{2}\right)\right] \cdot y + (-1) \cdot \sqrt{5} + (1) \cdot \sqrt{2} = 0$$

$$B : \left(\sqrt{5} + 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot x + \left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right) \cdot y - \sqrt{5} + \sqrt{2} = 0$$

y

$$B' : \left[1\left(\sqrt{5}\right) - (2) \cdot \sqrt{2}\right] \cdot x + \left[1\left(\sqrt{5}\right) - (-1) \cdot \sqrt{2}\right] \cdot y + (-1) \cdot \sqrt{5} - (1) \cdot \sqrt{2} = 0$$

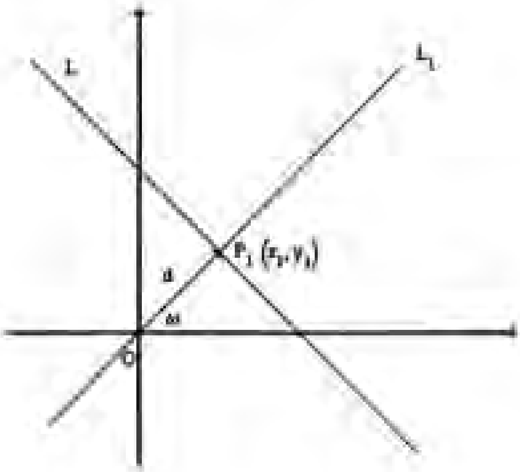
$$B' : \left(\sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot x + \left(\sqrt{5} + \sqrt{2}\right) \cdot y - \sqrt{5} - \sqrt{2} = 0$$

5.4 Forma normal de la ecuación de una recta.

Sea L una recta con ecuación cartesiana $Ax + By + C = 0$, con vector normal $n = Ai + Bj$.
Consideremos la recta L_1 que pasa por el origen y es perpendicular a L.
L_1 tiene como ecuaciones parametricas

$x = A \cdot t \qquad y = B \cdot t$

(Fig.101)



Para hallar las coordenadas del punto de intersección P_1 de L y L_1 sustituimos las ecuaciones parametricas de L_1 en la ecuación cartesiana de L y obtenemos

$$A(A \cdot t) + B(B \cdot t) + C = 0$$

de donde el valor de t es

$$t_1 = \frac{C}{A^2 + B^2}$$

con dicho valor obtenemos las coordenadas de P_1 al sustituir en las ecuaciones parametricas de L_1

$$x_1 = \frac{-A \cdot C}{A^2 + B^2} \quad , \quad y_1 = \frac{-B \cdot C}{A^2 + B^2}$$

El vector $\overrightarrow{OP_1}$ es normal a la recta L y esta dado por

$$\overrightarrow{OP_1} = \left(\frac{-A \cdot C}{A^2 + B^2}\right) \cdot i + \left(\frac{-B \cdot C}{A^2 + B^2}\right) \cdot j$$

y su longitud es

$$\left|\overrightarrow{OP_1}\right| = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Como $C \neq 0$ (ya que la recta L no pasa por el origen), la dirección de

$\overrightarrow{OP_1}$ es el ángulo ω , y esta dada por (véase la figura 101)

$$\cos(\omega) = \frac{x_1}{\left|\overrightarrow{OP_1}\right|} = -\frac{C}{|C|} \cdot \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\operatorname{sen}(\omega) = \frac{y_1}{\left|\overrightarrow{OP_1}\right|} = -\frac{C}{|C|} \cdot \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ω es llamado *ángulo normal* de L.

La ecuación de L puede escribirse como

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

$$\left(-\frac{|C|}{C}\cos(\alpha)\right)\cdot x+\left(-\frac{|C|}{C}\operatorname{sen}(\alpha)\right)\cdot y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

al multiplicar esta última ecuación por $-\frac{C}{|C|}$ y dado que

$\frac{C^2}{|C|} = |C|$ obtenemos

$$x\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\operatorname{sen}(\alpha)-\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

Como la distancia del origen a L es

$$d = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}} > 0$$

La ecuación de L puede ser escrita en la *forma normal*

$$x\cdot\cos(\alpha)+y\cdot\operatorname{sen}(\alpha)-d = 0$$

En resumen para reducir la ecuación cartesiana de L a su forma normal, basta con dividir por

$-\sqrt{A^2+B^2}$ si $C > 0$.

El resultado es el siguiente:

$$\frac{A}{-\sqrt{A^2+B^2}}\cdot x+\frac{B}{-\sqrt{A^2+B^2}}\cdot y+\frac{C}{-\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

en cambio cuando C < 0, hay que dividir por $\sqrt{A^2+B^2}$

El resultado es

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

Si $C=0$, adoptamos la convención de que $0 \leq \omega \leq \pi$, así que $\text{sen}\,\omega \geq 0$.
En este caso, hallamos la forma normal dividiendo la ecuación por $\sqrt{A^2+B^2}$ si $B > 0$.

La forma normal muestra la dirección ω del vector normal $\overrightarrow{OP_1}$

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cdot y=0$$

o, dividiendo por $-\sqrt{A^2+B^2}$ cuando $B<0$

$$\frac{A}{-\sqrt{A^2+B^2}}\cdot x+\frac{B}{-\sqrt{A^2+B^2}}\cdot y=0$$

Ejemplo 12.

Reducir la ecuación a la forma normal y encontrar la distancia del origen a L y el valor de ω . L : $3x + 4y + 15 = 0$

Solución.

Como $C > 0$, dividimos la ecuación entre $-\sqrt{3^2+4^2} = -\sqrt{25} = -5$

$$\frac{3}{-5}x+\frac{4}{-5}+\frac{15}{-5}=0$$

$$-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-3=0$$

de donde, $\cos\omega = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{sen}\omega = -\frac{4}{5}$, la distancia $d(O, L) = 3$ y $\omega = 233°7'28''$

5.5 Familias de Líneas Rectas.

Como sabemos una recta y su ecuación quedan determinadas por dos condiciones independientes (Por ejemplo su pendiente y ordenada al origen). Por lo tanto, una recta que satisface solamente una condición no es única; más bien, hay infinidad de rectas que la cumplen, cada una de las cuales tienen la propiedad común asociada con esa única condición.

Por ejemplo, consideraremos las rectas que tienen pendiente -5.
La totalidad de estas rectas forman una familia de rectas paralelas las cuales tienen pendiente -5.

Analíticamente, esta familia de rectas se representa por la ecuación

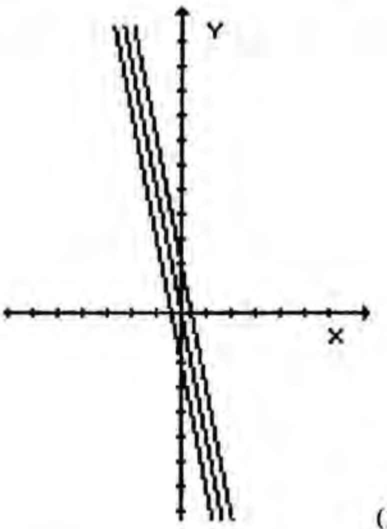
$$y = -5x + k$$

en donde k es una constante arbitraria que puede tomar todos los valores reales.

A esta constante se le llama parámetro.

De esta manera podemos obtener la ecuación de cualquier recta de la familia asignando simplemente un valor particular a k en la ecuación anterior.

Las rectas de la familia para $k = 2$, $k = 0$, $k = -2$ están representadas en la figura 102 .



(Fig.102)

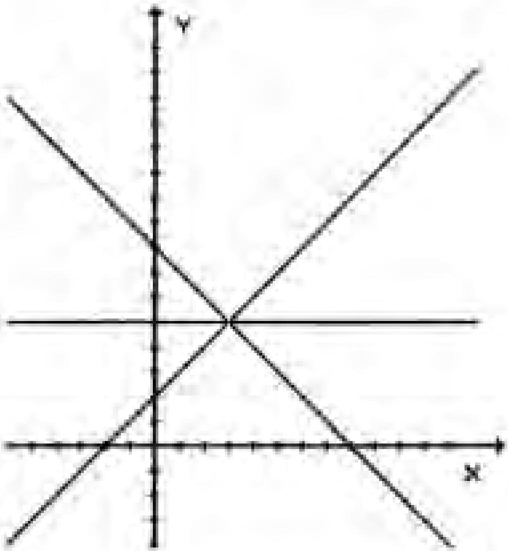
Ahora consideremos todas las rectas que pasan por el punto (3, 5).

Estas rectas forman una familia que pueden representarse analíticamente por la ecuación

$$y - 5 = k \cdot (x - 3)$$

en donde k , la pendiente, es el parámetro al que puede asignarse distintos valores, obteniéndose de esa manera distintos miembros de la familia.

De esta manera, asignando los valores correspondientes a k = 0, k = 1, k = -1 obtenemos las rectas de la familia que se muestran en la figura 103.



(Fig.103)

Nótese que como k no está definida para una recta paralela al eje Y, la ecuación de la familia de rectas no incluye a la recta x = 3 que también pasa por el punto (3,5).

A esta familia de rectas se le llama *haz de rectas* con vértice (3,5).

De acuerdo a lo anterior podemos formular la siguiente definición.
Definición. La totalidad de las rectas que satisfacen una única condición geométrica se llama familia o haz de rectas.

El concepto de familia de rectas es útil en la determinación de la ecuación de una recta particular.

Para ello primero se debe escribir la ecuación de la familia de rectas de tal manera que satisfaga una condición dada y posteriormente se determina el valor del parámetro de la familia aplicando la otra condición dada.

Ejemplo 1.

Determinar la ecuación de la familia de rectas que pasan por el punto (4,2) y graficar las rectas de la familia cuya pendiente es -2, 0, 2, 4 y 6 .

Solución.

Esta familia de rectas esta representada analíticamente por la ecuación

$$y - 2 = m(x - 4)$$

sustituyendo los valores de m = -2, 0, 2, 4 y 6 obtenemos las ecuaciones de las rectas de la familia, las cuales son respectivamente

$$2x + y - 10 = 0$$

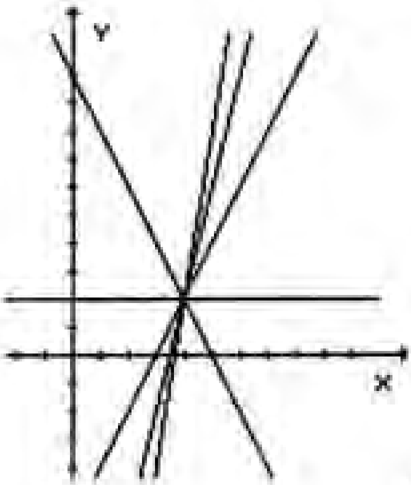
$$y = 2$$

$$2x - y - 6 = 0$$

$$4x - y - 14 = 0$$

$$6x - y - 22 = 0$$

Sus gráficas se muestran en la figura 104.



(Fig.104)

Ejemplo 2.

Escribir la ecuación de la familia de rectas perpendiculares a la recta $3x - 2y = 5$.

Solución.

La pendiente de la recta dada es $\frac{3}{2}$. Por tanto lo que buscamos es la familia de rectas con pendiente $-\frac{2}{3}$.

Una ecuación que me representa a esta familia es $2x + 3y = k$ donde k es el parámetro de la familia de rectas.

Ejemplo 3.

Hallar la ecuación de la familia de rectas cuyo producto de las intersecciones con los ejes coordenados es igual a 4.

Solución.

Consideremos la ecuación de una recta en su forma simétrica: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, donde a y b representan las intersecciones con los ejes X, Y.

En este caso la condición buscada es $a \cdot b = 4$ de donde $b = \frac{4}{a}$.

Por lo tanto, la ecuación que representa esta familia de rectas es $\frac{x}{a} + \frac{y}{\frac{4}{a}} = 1$ la cuál es equivalente a $4x + a^2 y = 4a$, con $a \neq 0$.

Veamos ahora el caso de una familia de rectas que pasan por la intersección de dos rectas dadas.

Supongamos que las ecuaciones de dos rectas que se interceptan son:

$$A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0 \quad .....(1)$$

$$A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0 \quad ......(2)$$

y sea $P_1 (x_1, y_1)$ su punto de intersección.

Multipliquemos la ecuación (1) y (2) por las constantes arbitrarias k_1 y k_2 respectivamente, y sumemos (1) y (2) de donde obtenemos la ecuación

$$k_1 \cdot \left(A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1\right) + k_2 \cdot \left(A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2\right) = 0 \quad ......(3)$$

donde los parámetros k_1 y k_2 pueden tomar todos los valores reales, salvo que ambos no pueden ser cero simultáneamente.

Probaremos que la ecuación (3) es la ecuación de la familia de rectas que pasan por P_1.

En primer lugar la ecuación (3) representa una recta. Por otra parte como $P_1 (x_1, y_1)$ es punto de intersección de ambas rectas entonces se cumple

$$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 = 0$$

$$A_2x_1 + B_2y_1 + C_2 = 0$$

de donde se sigue que

$$k_1 \cdot (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + k_2 \cdot (A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0$$

Esto último significa que, para cualquier pareja de valores k_1 y k_2, la ecuación (3) representa una recta que pasa por $P_1 (x_1, y_1)$.

Por lo tanto (3) representa una familia de rectas que pasan por P_1 , punto de intersección de

las rectas (1) y (2) . En particular, para $k_1 \neq 0$ y $k_2 = 0$ obtenemos la recta (1) y si

$k_1 = 0$ y $k_2 \neq 0$ obtenemos la recta (2) .

En general, si no nos interesará encontrar la recta (2) , podemos eliminarla de la familia especificando que k_1 puede tomar todos los valores reales excepto cero.
En tal caso podemos dividir la ecuación (3) por k_1, de donde resulta

$$\boxed{A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 + \frac{k_2}{k_1} \cdot \left(A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2\right)} = 0$$

Si escribimos $k = \dfrac{k_1}{k_2}$ la ecuación (3) toma la forma

$$A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 + k \cdot \left(A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2\right) = 0 \quad ......(4)$$

en donde el parámetro k puede tomar todos los valores.

La ecuación (4) representa entonces la familia de todas las rectas que pasan por la intersección de las rectas (1) y (2) , con la única excepción de la recta (2).

Ejemplo 4.

Hallar la ecuación de la recta de pendiente – 1 que pasa por la intersección de las rectas

$$L_1 \ : \ 2x + y + 2 = 0 \quad y \quad L_2 \ : \ x + 2y + 4 = 0$$

Solución.

La familia de rectas que pasan por el punto de intersección de las rectas dadas está representada por la ecuación.

$$2x + y + 2 + k \cdot (x + 2y + 4) = 0$$

la cual se puede expresar como

$$(2 + k)\, x + (1 + 2k)\, y + 2 + 4k = 0$$

cuya pendiente es $m = -\dfrac{2 + k}{1 + 2k}$

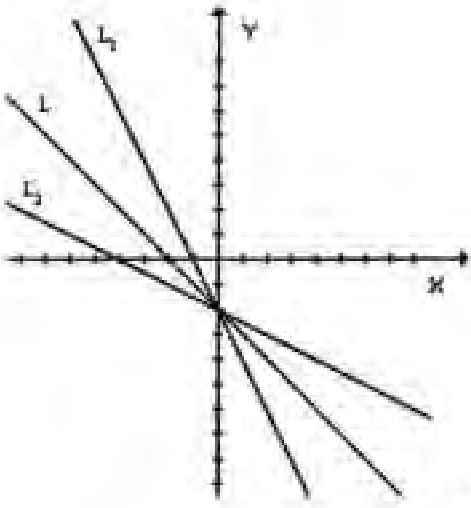
Como la pendiente de la recta buscada es -1, tenemos que $-\dfrac{2 + k}{1 + 2k} = -1$

de donde $2 + k = 1 + 2k$ y $k = 1$

Sustituyendo este valor de k en la ecuación de la familia de rectas, tenemos:

$3x + 3y + 6 = 0$ o bien $x + y + 2 = 0$ que es la ecuación de la recta buscada.

(véase la figura 105)



(Fig.105)

EJERCICIOS.

1.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (1, 5) y tiene de pendiente 2.

2.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A (-6 ,-3) y tiene ángulo de inclinación de 45°.

3.- Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -3 y cuya intersección con el eje Y es -2.

4.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos A (4,2) y B (-5,7)

5.- Los vértices de un cuadrilátero son A (0,0), B (2,4), C (6, 7), D (8,0).

Hallar las ecuaciones de sus lados.

6.- Una recta pasa por los puntos A (-3,-1) y B (2,-6) . Hallar la ecuación en la forma simétrica.

7.- Obtener la ecuación vectorial y el sistema de ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a los puntos A (4,-2) y B (-3,1).

8.- Calcular las coordenadas del punto medio y las coordenadas de los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son los puntos A (4,7) y B(-5,3)

9.- Escribir la ecuación de la línea recta que satisface las siguientes condiciones en cada caso :

a) La suma de las intersecciones con los ejes es 5, y la pendiente es 3.

b) El producto de las intersecciones con los ejes es -6 y pasa la recta por el punto (3,4) (Dos soluciones).

10.- Escribir las ecuaciones paramétricas y la ecuación general de las rectas que satisfacen las siguientes condiciones

a) Pasa por el punto (5,0) y es paralela al vector v = 2i+6j

b) Pasa por el punto (-3,-4) y es perpendicular al vector v = 2i

11.- Encontrar vectores v_1 y v_2, los cuales sean perpendiculares y paralelos respectivamente a las siguientes lineas.

a) $x + y - 3 = 0$ b) $4x + 3y = 6$ c) $x = 6y - 3$

12.- Encontrar los puntos de intersección (si existen) de las siguientes pares de lineas

a) $2x - y + 1 = 0$
$4x - y - 1 = 0$

b) $3x - 4y + 1 = 0$
$2x + 3y - 5 = 0$

Para la siguiente recta, eliminando los parametros y reduciendola a su forma general.

c) $L_1 : \begin{array}{l} x = 1 + 3t \\ y = 4 + t \end{array}$ $L_2 : \begin{array}{l} x = 3 + 6t \\ y = -2 + 3t \end{array}$

13.- Encontrar el ángulo de inclinación de las siguientes rectas. Y hacer la gráfica.

a) $x - \sqrt{3} \cdot y + 2 = 0$ b) $2x = y$

14.- Encontrar el ángulo Φ entre las lineas L_1 y L_2 cuyas pendientes m_1 y m_2 son :

$m_1 = -\frac{2}{3}$ $m_2 = \frac{3}{5}$

15.- Determinar si el siguiente par de rectas son paralelas o perpendiculares si no lo son entonces encontrar el ángulo entre ellas. Hacer la gráfica.

$$\frac{2}{3} \cdot x + 4y = 2$$

$$\frac{x}{2} + 3y = -6$$

16.- Encontrar la ecuación de la línea recta en cada caso

a) paralela a la recta $2x - 5y = 10$, y pasa por el punto (1,-4)

b) perpendicular a la línea recta $x = 2y - 4$, y pasa por el punto (-4,2)

c) la cual es mediatriz del segmento $\overline{P_1 P_2}$, donde $P_1(-5,6)$ y $P_2(3,2)$

d) pasa por el punto de intersección de las líneas $2x - y = 7$ y $3x + y = 7$, y perpendicular a la línea recta $4x - 3y = 12$

e) forma un ángulo de 45° con la línea $2x - y + 1 = 0$ y la intersección con el eje Y es en -3.

17.- Encontrar la distancia del punto $P_1(6, 1)$ a la recta $L: 2x - 4y = 7$

18.- Encontrar la bisectriz del ángulo formado por las rectas $x + y = 6$ y $x - y = 4$

19.- Reducir las siguientes ecuaciones a su forma normal. Encontrar ω y p y hacer la gráfica.

a) $\sqrt{3}x + y = 8$ b) $x + y + 2 = 0$ c) $x - \sqrt{3}y + 6 = 0$

20.- Sea el triángulo ABC con vértices A (-2,7), B (6,-1) y C (-4,-3)

Sea **R** la recta que pasa por los puntos A y B, **S** la recta que pasa por los puntos A y C y **T** la que pasa por los puntos C y B.

Con los datos anteriores contestar las siguientes preguntas.

a) Hallar los ángulos interiores del triángulo ABC

b) Encontrar la ecuación simetrica de la mediana que parte del vértice B.

c) Hallar la ecuación vectorial de la mediatriz del segmento AB

d) Encontrar el sistema de ecuaciones parametricas de la altura que parte del vértice A.

e) Hallar la ecuación general de la bisectriz que parte del vértice C.

f) Encontrar el área del triángulo ABC.

21.- Escribir la ecuación de la familia de rectas que son paralelas a la recta $2x - 7y + 2 = 0$

Dibujar tres elementos de la familia, especificando en cada caso el valor del parámetro.

22.- Determinar el valor del parámetro k de manera que la recta de la familia $kx - y - 7 = 0$ que le corresponda pase por el punto $(-2, 4)$. Hallar la ecuación de la recta.

23.- Determinar el valor del parámetro k correspondiente a la recta de la familia $5x - 12y + k = 0$ cuya distancia del origen es igual a 5. Teniendo el parámetro, hállese la ecuación de la recta.

24.- Una recta pasa por el origen y por la intersección de las rectas $3x + 2y - 14 = 0$ y $x - 3y - 1 = 0$. Hallar su ecuación, sin determinar el punto de intersección.

25.- Una recta pasa por la intersección de las rectas de ecuaciones $3x + 2y + 8 = 0$ y $2x - 9y - 5 = 0$. Hallar su ecuación sabiendo que es paralela a la recta $6x - 2y + 11 = 0$.

5.6 La línea recta en el espacio. El plano.

En está sección haremos uso del álgebra de vectores para el estudio de las rectas y los planos en el espacio tridimensional.

Las definiciones de segmento, semirrecta y recta en R^3 son las mismas que para R^2.

Recordemos :

El segmento con puntos extremos P_1 y P_2 es el conjunto

$$\overline{P_1P_2} = \{ P \mid \overrightarrow{P_1P} = t\overrightarrow{P_1P_2} , 0 \le t \le 1 \}$$

La semirrecta con punto inicial P_1 que pasa por $P_2 \neq P_1$ es el conjunto

$$P_1P_2 = \{ P \mid \overrightarrow{P_1P} = t\overrightarrow{P_1P_2} , t \ge 0 \}$$

Finalmente, si $P_2 \neq P_1$, la recta que pasa por P_1 y P_2 es el conjunto

$$L = \{ P \mid \overrightarrow{P_1P} = t\overrightarrow{P_1P_2} , t \in \mathbf{R} \}$$

Nótese que las definiciones anteriores difieren solo en el rango de los valores del parámetro t.

Las tres caracterizan el mismo sistema de ecuaciones parametricas.

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

Estas son equivalentes a la condición

$\overrightarrow{P_1 P} = t \cdot \overrightarrow{P_1 P_2}$, donde $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son puntos dados y $P(x, y, z)$ es cualquier punto sobre el segmento, semirrecta o recta.

Si P corresponde a un valor de t con $0 < t < 1$ decimos que P está entre P_1 y P_2.

El punto medio de $\overline{P_1 P_2}$ (correspondiendo a $t = \frac{1}{2}$) es el punto

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

La longitud del segmento $\overline{P_1 P_2}$ (también llamada distancia entre P_1 y P_2) está definida

$$\left|\overline{P_1 P_2}\right| = \left|\overrightarrow{P_1 P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Si $P_1 \neq P_2$ y P es un punto sobre $\overline{P_1 P_2}$, entonces $\left|\overrightarrow{P_1 P}\right| = \left|t \cdot \overrightarrow{P_1 P_2}\right|$

$0 \leq t \leq 1$, así que $t = \dfrac{\left|\overrightarrow{P_1 P}\right|}{\left|\overrightarrow{P_1 P_2}\right|}$

Por tanto, t es la razón de la distancia entre P_1 y P y la longitud del segmento.

$\overline{P_1 P_2}$ decimos que es paralelo a $\overline{P_3 P_4}$ si y solo si $\overrightarrow{P_1 P_2} \parallel \overrightarrow{P_3 P_4}$.

Ejemplo 1.

Sea $P_1(2, 4, 5)$ y $P_2(3, -6, 7)$.

a) Escribir las ecuaciones parametricas de la recta L que pasa por los puntos P_1 y P_2.

b) Encontrar los puntos correspondientes a $t = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$.

Solución.

a) Las ecuaciones parametricas de L son:

$$\begin{aligned} x &= 2+t \\ y &= 4-10\cdot t \\ z &= 5+2\cdot t \qquad t \in R \end{aligned}$$

b)

t	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
p	(2,4,5)	(3,-6,7)	$\left(\frac{5}{2},-1,6\right)$	$\left(\frac{7}{2},-11,8\right)$

Ejemplo 2.

Sean $P_1(4, 3, 2)$ y $P_2(1, 4, -1)$.

a) Escribir las ecuaciones parametricas del segmento $\overline{P_1 \cdot P_2}$

b) Encontrar $\left|\overline{P_1 \cdot P_2}\right|$

c) Encontrar el punto medio del segmento $\overline{P_1 \cdot P_2}$

d) Encontrar el punto P el cual es $\frac{1}{3}$ de la distancia de P_1 a lo largo de $\overline{P_1 \cdot P_2}$

Solución.

a) $x = 4 - 3t$

$y = 3 + t$

$z = 2 - 4t \quad , \quad 0 \le t \le 1$

b) $\left|\overline{P_1P_2}\right| = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + (-4)^2} = \sqrt{26}$

c) Haciendo $t = \dfrac{1}{2}$, obtenemos el punto medio $M\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{7}{2}, 0\right)$.

d) El punto buscado corresponde a $t = \dfrac{1}{3}$. Éste se obtiene asignando el valor de $\dfrac{1}{3}$ a t en las ecuaciones (a) , de donde resulta que $P\left(3, \dfrac{10}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$.

Definición: Tres puntos distintos P_1, P_2, P_3 son *colineales* si y solo si pertenecen a la misma recta.

Como consecuencia inmediata de la definición anterior deducimos que P_1, P_2 y P_3 son colineales si y solo si $\overrightarrow{P_1P_2} \parallel \overrightarrow{P_1P_3}$

Los términos colineal y no colineal se aplica solo a conjuntos de tres o más puntos.

Generalizando:

Si $P_1, P_2, \ldots, P_n$ son puntos distintos, decimos que son *colineales* si y solo si todos pertenecen a una misma recta.

Ejemplo 3.

Determinar si los puntos $P_1(1, 2, -3)$, $P_2(2, 0, -4)$, $P_3(4, -4, -6)$ son colineales.

Solución.

$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, -2, -1)$ y $\overrightarrow{P_1P_3} = (3, -6, -3)$ de donde vemos que

$\overrightarrow{P_1P_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{P_1P_3}$, es decir $\overrightarrow{P_1P_2} \parallel \overrightarrow{P_1P_3}$

por lo tanto P_1, P_2, P_3 pertenecen a la recta por P_1 y P_2, y son colineales.

Dados los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ con $P_1 \neq P_2$ y el vector $v = \overrightarrow{P_1P_2}$

con $v \neq \overrightarrow{O}$, podemos definir una recta L con estos elementos. Se trata de la recta que pasa por P_1 y es paralela al vector v ,

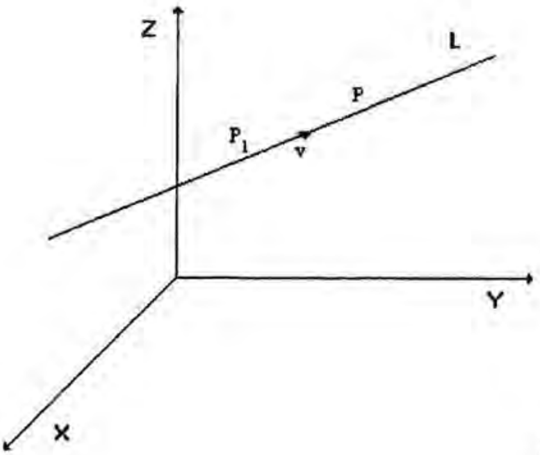
$L = \{P \mid P = P_1 + tv, t \in R\}$

Decimos que L es la línea que pasa por P_1 y paralela a v . (Fig. 106)

Las ecuaciones parametricas de L pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + a\cdot t \\ y &= y_1 + b\cdot t \qquad t \in R \quad \text{donde} \quad v = ai + bj + ck \\ z &= z_1 + c\cdot t \end{aligned}$$

Cuando $t = 0$, $P = P_1$



(Fig.106)

Ejemplo 4.

Hallar la ecuación de la recta L, que pasa por el punto (0, -2, 1) y paralela al vector $v=(3,-1,2)$.

Solución.

Las ecuaciones parametricas de L son

$$\begin{aligned} x &= 3\cdot t \\ y &= -2-t \qquad t\in R \quad \text{donde } v = 3\cdot i - j + 2\cdot k \\ z &= 1+2\cdot t \end{aligned}$$

Ejemplo 5.

Encontrar el punto de intersección (si existe) del siguiente par de líneas.

$$L_1:\ \begin{aligned} x &= 2+4\cdot t \\ y &= -1+3\cdot t \\ z &= -2\cdot t \end{aligned}$$

$$L_2:\ \begin{aligned} x &= -1+s \\ y &= 3+7\cdot s \\ z &= 5+3\cdot s \end{aligned}$$

Solución.

Las condiciones para que un punto pertenezca a las rectas son:

$$\begin{aligned} 2+4\cdot t &= -1+s \\ -1+3\cdot t &= 3+7\cdot s \\ -2\cdot t &= 5+3\cdot s \end{aligned}$$

Resolviendo las ultimas dos ecuaciones obtenemos los valores para $s = -1$ y $t = -1$. .

Dado que ambos valores satisfacen la primera ecuación, L_1 y L_2 se interceptan.

Sustituyendo el valor de $s = -1$ en la ecuación para la recta L_2, se obtiene el punto de coordenadas (-2, -4, 2), de la misma forma que si sustituimos el valor de $t = -1$ en la ecuación de la recta L_1, siendo este por lo tanto el punto de intersección de las rectas L_1 y L_2 .

(si las ecuaciones de L_1 y L_2 , no tienen solución simultanea para algunos valores de s y t, las líneas rectas no se interceptan)

5.7 Ecuaciones simétricas de la recta. Ángulo entre dos rectas.

Si las componentes de un vector v son diferentes de cero, las ecuaciones parametricas de una recta paralela a v pueden ser resueltas para t. Dado que t es el mismo en las tres ecuaciones tenemos

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

Estas son llamadas las *ecuaciones simétricas* de la recta L que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ paralela al vector $v = ai + bj + ck$.

Si cualquiera de las componentes de v es igual a cero, digamos $a = 0$, y $b \neq 0$, $c \neq 0$, entonces $x = x_1$ para todos los puntos $P(x, y, z)$ en L, y las ecuaciones simétricas de L son

$$\frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \quad , \quad x = x_1$$

Hay tres ecuaciones lineales simultaneas involucradas en las ecuaciones simétricas.

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} \quad , \quad \frac{x-x_1}{a} = \frac{z-z_1}{c} \quad , \quad \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \qquad (a,b,c \neq 0)$$

Sin embargo, cualquiera dos de estas implica a la tercera, así que sólo dos son necesarias para caracterizar a L.

Ejemplo 5.

Sea L una linea dos cuyas ecuaciones simétricas son equivalentes a $2x - y + 4 = 0$ y $x + 3z - 1 = 0$.
Encontrar un conjunto de ecuaciones simétricas para L, un punto sobre L y un vector paralelo a L.

Solución.

Arreglando la primera ecuación como en la forma simétrica:

$$\boxed{2\cdot x - y + 4} = 0$$

$$2(x+2) = y$$

$$x+2 = \frac{y}{2}$$

Ahora la segunda ecuación de L se debe arreglar de tal manera que el término x + 2 aparezca en ella.

$$x + 3\cdot z - 1 = 0$$

$$x+2 = -3\cdot z + 3 = -3(z-1)$$

$$x+2 = \frac{z-1}{-\frac{1}{3}}$$

Por lo tanto, un conjunto de ecuaciones simétricas para L es:

$$L : \frac{x+2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-\frac{1}{3}}$$

Un punto sobre L es P_1 (-2, 0, 1) y un vector paralelo a L es $v = i + 2\cdot j - \frac{1}{3}\cdot k$

Claramente, las ecuaciones simétricas para una línea recta no son únicas, dado que las ecuaciones parametricas no lo son.

Ejemplo 6.

Escribir las ecuaciones simétricas para la línea recta L que pasa por los puntos $P_1(-2, 1, 3)$ y P_2 (1, -2, 4).

Solución.

$$v = \overrightarrow{P_1 P_2} = (3, -3, 1)$$

Las ecuaciones simétricas de L (usando P_1) son

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{3}$$

Sea v ∥ L. Los ángulos y cosenos directores de v son también llamados *ángulos y cosenos directores de L*, de donde las componentes de v son llamados *números directores de L*.

Cada recta tiene un conjunto de ángulos directores y un conjunto de cosenos directores. Cualquier múltiplo diferente de cero de un conjunto de números directores es también un conjunto de números directores.

Si $v_1 \parallel L_1$ y $v_2 \parallel L_2$. Definimos el ángulo ϕ entre L_1 y L_2 en términos del ángulo θ entre v_1 y v_2 como sigue:

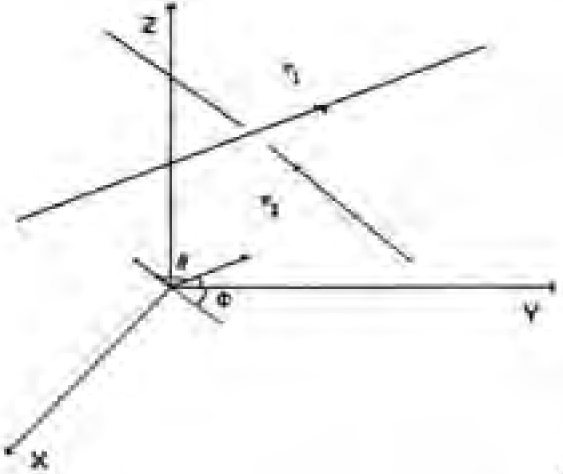
$$\cos\phi = |\cos\theta| = \frac{|v_1 \bullet v_2|}{|v_1| \cdot |v_2|}, \qquad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$$

Nótese que el ángulo entre dos rectas está definido independientemente de si se interceptan o no las rectas.

L_1 y L_2 son paralelas o perpendiculares de acuerdo a si v_1 y v_2 son paralelos o perpendiculares entre sí, respectivamente.

Si $L_1 \perp L_2$, también lo podemos escribir $v_1 \perp L_2$.

Dos líneas rectas no paralelas que no se interceptan son llamadas *rectas oblicuas*.



(Fig.107)

Ejemplo 7.

Demostrar que las siguientes rectas son paralelas y encontrar la distancia entre ellas; esto es, encontrar la longitud de un vector perpendicular a ambas que tenga un punto final en cada una de ellas.

$$L_1: \begin{cases} x = 4 - 2s \\ y = -2 + s \\ z = 1 + 3s \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 0 + \frac{3}{2}t \\ z = 7 + \frac{9}{2}t \end{cases}$$

Solución.

Sea $v_1 = -2i + j + 3k$ y $v_2 = -3i + \frac{3}{2}j + \frac{9}{2}k$. Como $v_2 = \frac{3}{2}v_1$, $L_1 \parallel L_2$

Elegimos a $Q(2, 0, 7)$ sobre L_2.

Buscamos un punto $P(x, y, z)$ sobre L_1 tal que $\overrightarrow{QP} \perp L_1$ donde

$$\overrightarrow{QP} = (x - 2)\cdot i + (y - 0)\cdot j + (z - 7)\cdot k$$

$$\overrightarrow{QP} = (4 - 2s - 2)\cdot i + (-2 + s - 0)\cdot j + (1 + 3s - 7)\cdot k$$

usando las ecuaciones de L_1, y dado que $\overrightarrow{QP} \cdot v_1 = 0$, tenemos:

$$((2 - 2s)\cdot i + (-2 + s)\cdot j + (-6 + 3s)\cdot k) \cdot (-2i + j + 3k) = 0$$

Por lo tanto

$$-2(2 - 2s) + (-2 + s) + 3(-6 + 3s) = 0$$

resolviendo esta ecuación obtenemos el valor de s:

$$s = \frac{12}{7}$$

El punto correspondiente P sobre L_1 es $P\left(\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{43}{7}\right)$

Entonces la distancia entre L_1 y L_2 estará dada por

$$d = \left|\overrightarrow{QP}\right| = \sqrt{\left(\frac{4}{7} - 2\right)^2 + \left(-\frac{2}{7} - 0\right)^2 + \left(\frac{43}{7} - 7\right)^2}$$

Por lo tanto la distancia es

$$d = \frac{2}{7}\sqrt{35}$$

5.8 El plano.

Definición. Sea v_1 y v_2 dos vectores no paralelos. El plano ρ determinado por el punto P_0 y los vectores v_1 y v_2 es el conjunto de puntos

$$\rho = \{ P \mid \overrightarrow{P_0 \cdot P} = s \cdot v_1 + t \cdot v_2 \text{ , } s, t \in \mathbf{R} \}$$

A una suma del tipo $s \cdot v_1 + t \cdot v_2$ se le llama *combinación lineal* de v_1 y v_2

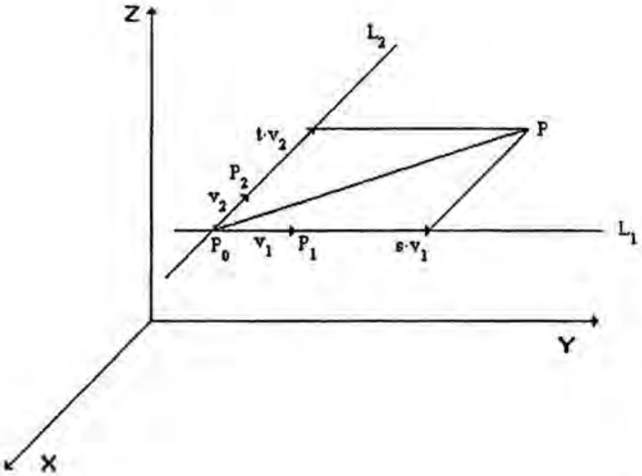
Con esta nomenclatura, el plano ρ consiste de todos los puntos tales que la flecha $\overrightarrow{P_0 \cdot P}$ representa una combinación lineal de v_1 y v_2 .

Cuando $s = t = 0$ $\quad \overrightarrow{P_0 \cdot P} = \overline{O}$ $\quad$ y $\quad P_0 = P$

Si $t = 0$, y se varía sobre todos los reales, tenemos la línea L_1 que pasa por P_0 y es paralela a v_1.

Similarmente, si $s = 0$, tenemos la línea L_2 que pasa por P_0 y paralela a v_2.

Entonces ρ contiene a las rectas L_1 y L_2. (Fig. 108)



(Fig.108)

Obtengamos un conjunto de ecuaciones parametricas para el plano en cuestión.

Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $v_1 = a_1 i + b_1 j + c_1 k$ y $v_2 = a_2 i + b_2 j + c_2 k$.

Un punto P(x, y, z) pertenece a ρ si y solo si para algunos $s, t \in R$

$$\overrightarrow{P_0 P} = s v_1 + t v_2$$

Esta condición es equivalente al conjunto de ecuaciones.

$$\rho : \begin{aligned} x &= x_0 + s a_1 + t a_2 \\ y &= y_0 + s b_1 + t b_2 \\ z &= z_0 + s c_1 + t c_2 \end{aligned}$$

Estas son llamadas *ecuaciones parametricas* de ρ con parámetros s y t.
Nótese que el plano requiere de dos parámetros para caracterizarlo.
Mostraremos ahora que el plano ρ, puede ser representado por una ecuación en x, y, z.

Dado que $v_1 \neq v_2$, el vector $n = v_1 \times v_2$ es diferente de cero y es perpendicular a v_1 y v_2

En consecuencia, para todo punto P(x, y, z) en ρ.

$$\overrightarrow{P_0 P} \bullet n = (s v_1 + t v_2) \bullet n = s v_1 \bullet n + s v_2 \bullet n = 0 \quad \therefore \overrightarrow{P_0 P} \perp n$$

De lo anterior, se sigue que, si P es un punto tal que $\overrightarrow{P_0 P} \perp n$, entonces $\overrightarrow{P_0 P} = (s v_1 + t v_2)$

para algunos $s, t \in R$, y concluimos que P pertenece al plano ρ.

De lo anterior resulta que ρ es el conjunto de puntos P(x, y, z) tales que

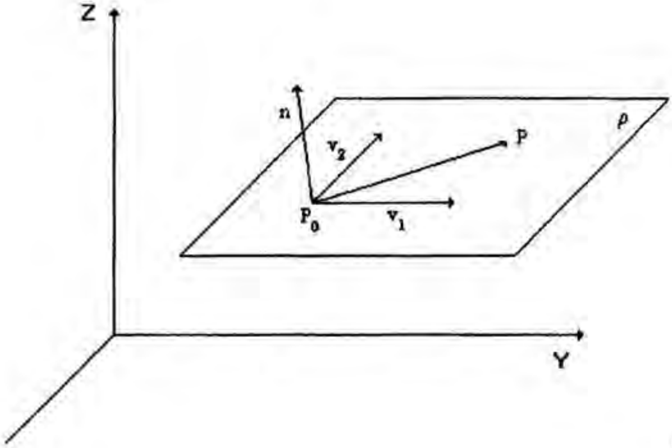
$\overrightarrow{P_0 P} \bullet n = 0$, donde n es llamado *vector normal* al plano ρ.

Si $n = Ai + Bj + Ck$,, entonces ρ tiene como ecuación

$$\rho : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Esta es llamada *ecuación rectangular* de ρ , y se escribe como:

$Ax + By + Cz + D = 0$ donde $D = -\left(Ax_0 + By_0 + Cz_0\right)$



(Fig.109)

La ecuación rectangular de un plano es lineal en x, y, z y los coeficientes de x, y, z son las componentes de un vector normal al plano. Por tanto un plano está completamente determinado por un punto P_0 y un vector n.

Teorema.

Toda ecuación lineal, $Ax + By + Cz + D = 0$ con al menos uno de los coeficientes A, B, C, distintos de cero, representa un plano.

Demostración.

Sea $P_0 (x_0 , y_0 , z_0)$ y $P(x, y, z)$ dos puntos cualesquiera que satisfacen esta ecuación. Entonces

$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ ......(1)

$Ax + By + Cz + D = 0$ ....(2)

Restando (1) de (2) tenemos

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

La cual es la ecuación de un plano que pasa por P_0 y tiene como vector normal al vector

$$n = Ai + Bj + Ck .$$

Ejemplo 8.

Sea $P_0 = (2,-1,2)$, $v_1 = 4i - 3j + k$ y $v_2 = j - 2k$

Encontrar:

a) Las ecuaciones parametricas del plano determinado por P_0 , v_1 , v_2.

b) La ecuación rectangular del plano ρ .

Solución.

a)

$$x = 2 + 4t$$
$$y = -1 - 3t + s$$
$$z = 2 + t - 2s$$

b)

$$n = v_1 \times v_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (6-1)\cdot i - (-8)\cdot j + (4)\cdot k$$

Por lo tanto la ecuación rectangular de ρ es

$$\rho : 5(x - 2) + 8(y + 1) + 4(z - 2) = 0$$

$$\rho : 5x + 8y + 4z - 10 = 0$$

Nótese lo siguiente.

Si n es normal a ρ, también lo será el vector cn $(c \neq 0)$. Así, cualquier vector paralelo a n junto con cualquier punto en ρ pueden ser usados para determinar la ecuación de ρ. Cualquier vector v o línea recta L paralela a n es perpendicular a ρ y lo denotamos $v \perp \rho$ o $L \perp \rho$.. Cualquier vector o línea perpendicular a n es paralela a ρ, y lo denotamos escribiendo $v \parallel \rho$ o $L \parallel \rho$.

Ejemplo 9.

Escribir la ecuación del plano que pasa por los puntos $P_1(1, -3, 2)$, $P_2(-4, 0, 1)$ y $P_3(2, -4, 3)$.

Solución.

Sea $v_1 = \overrightarrow{P_1P_2} = -5i + 3j - k$ y $v_2 = \overrightarrow{P_1P_3} = i - 2j + k$ entonces

$n = v_1 \times v_2 = i + 4j + 8k$.

Utilizando el punto $P_1(1, -3, 2)$, hallamos la ecuación $(x - 1) + 4(y + 3) + 8(z - 2) = 0$

Así que la ecuación buscada es $x + 4y + 8z - 5 = 0$

Ejemplo 10.

Escribir las ecuaciones parametricas para el plano $\rho : x - 2y + 3z - 5 = 0$.

Solución.

La ecuación de ρ es $x = 2y - 3z + 5$. Sea $P(x, y, z)$ cualquier punto en ρ.

Entonces las ecuaciones parametricas son

$$\rho : \begin{cases} x = 5 + 2y - 3z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

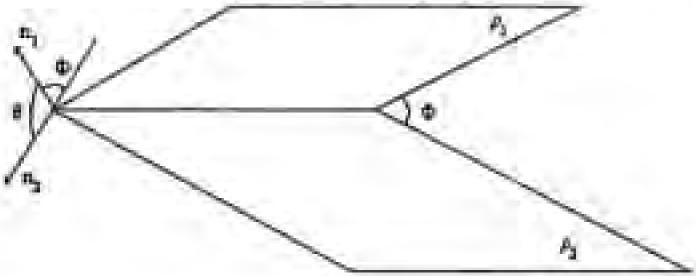
5.9 Ángulo entre dos Planos; Intersección de Planos.

Sean ρ_1 y ρ_2 dos planos con normales

$$n_1 = A_1 i + B_1 j + C_1 k \quad y \quad n_2 = A_2 i + B_2 j + C_2 k \qquad \text{respectivamente.}$$

El *ángulo* Φ entre ρ_1 y ρ_2 se define como el ángulo θ entre n_1 y n_2.
Dado que:

$$|\cos\theta| = \frac{|n_1 \bullet n_2|}{|n_1|\cdot|n_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad \text{con} \quad 0 \le \Phi \le \frac{\pi}{2}$$



(Fig.110)

resulta que $\rho_1 \perp \rho_2$ si y solo si $n_1 \perp n_2$, y $\rho_1 \parallel \rho_2$ si y solo si $n_1 \parallel n_2$.

Concluimos que $\rho_1 \parallel \rho_2$ si y solo si A_1, B_1, C_1 son proporcionales a A_2, B_2, C_2.

Ejemplo 11.

Determinar si los siguientes pares de planos son iguales, paralelos o ninguna de las dos cosas.

a) $\rho_1 : 4x - 6y + 12 = 0$

$\rho_2 : 8x - 12y + 6z - 10 = 0$

Solución.

Dado que $C_1 = 0$ y $C_2 = 6$ ρ_1 y ρ_2 son no paralelos y por lo tanto diferentes.

b) $\rho_1 : 6x - 8y + 16z - 10 = 0$

$\rho_2 : 3x - 4y + 8z - 12 = 0$

Solución.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{6}{3} = 2 = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Sin embargo $\dfrac{D_1}{D_2} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$

Por lo tanto ρ_1 y ρ_2 son paralelos pero no iguales.

c) $\rho_1 : 2x - 4y + 8z - 12 = 0$

$\rho_2 : -6x + 12y - 24z + 36 = 0$

Solución.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} = -\frac{1}{3}$$

Por lo tanto $\rho_1 = \rho_2$.

Ejemplo 12.

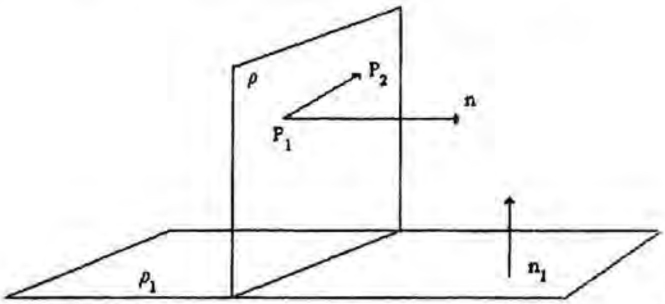
Encontrar la ecuación del plano ρ que pasa por los puntos $P_1(2, -1, 3)$, $P_2(-1, -2, 1)$ y perpendicular al plano $\rho_1 : x - 3y + 4z - 2 = 0$.

Solución.

Sea n un vector normal a ρ.

$n_1 = i - 3j + 4k$ es normal a ρ_1

Dado que P_1 y P_2 están en ρ, $\overrightarrow{P_1 P_2} = 3i - j - 2k \perp n$.



(Fig.111)

$n \perp n_1$ y $n \perp \overrightarrow{P_1 P_2}$.

Por lo tanto, $n \parallel n_1 \times \overrightarrow{P_1 P_2}$

De donde $n_1 \times \overrightarrow{P_1 P_2}$ es un normal a ρ.

$$n_1 \times \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 4 \\ -3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 10i - 10j - 10k$$

Entonces, un normal a ρ es $n = i - j - k$. Utilizando a P_1 escribimos la ecuación de ρ

$$1 \cdot (x-2) - 1 \cdot (y+1) - 1 \cdot (z-3) = 0$$

la cual es $x - y - z = 0$.

Mostraremos en el siguiente ejemplo que dos planos no paralelos ρ_1 y ρ_2 con normales n_1 y n_2 se interceptan en una línea paralela a $n_1 \times n_2$.

Ejemplo 13.

Encontrar la línea recta de intersección de los planos.

$$\rho_1 : x - 3y + z - 4 = 0 \quad y \quad \rho_2 : 2x + y - 3z + 1 = 0$$

Solución:

Notemos que ρ_1 y ρ_2 son planos no paralelos. Un punto P(x, y, z) pertenece a L si y solo si satisface a ambas ecuaciones. Dado que el determinante de los coeficientes de x e y es distinto de cero, podemos resolver el sistema para x e y en términos de z.

$$x - 3y = -z + 4$$
$$2x + y = 3z - 1$$

Las soluciones son

$$x = \frac{1}{7} + \frac{8}{7} \cdot z$$

$$y = -\frac{9}{7} + \frac{5}{7} \cdot z$$

Así, P(x, y, z) pertenece a la intersección de ρ_1 y ρ_2 si y solo si

$$x = \frac{1}{7} + \frac{8}{7} \cdot z$$

$$y = -\frac{9}{7} + \frac{5}{7} \cdot z$$

$$z = 0 + z$$

Las cuales son las ecuaciones parametricas (con parámetro z) de la línea L por el punto P_0 $\left(\frac{1}{7}, -\frac{9}{7}, 0\right)$ paralela al vector $v = \frac{8}{7}i + \frac{5}{7}j + k$.

Obsérvese que

$$n_1 \times n_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 8i + 5j + 7k$$

Así que $v \parallel n_1 \times n_2$. Notemos que una línea en R^3 es caracterizada como la intersección de dos planos no paralelos. Esto es, como el conjunto de soluciones de dos ecuaciones lineales en x, y, z.

5.10 Trazas en los Planos Coordenados.

Recordemos que las ecuaciones de los planos coordenados son $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.
Así, las líneas de intersección del plano

$\rho : Ax + By + Cz + D = 0$ con los planos coordenados (si existen) son

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (z = 0)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (y = 0)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (x = 0)$$

Estas líneas son llamadas *trazas* de ρ con los planos coordenados.

Para $z = 0$ (traza xy)

Obtenemos $Ax + By + D = 0$ (que es la traza xy)

Es decir la recta de intersección del plano ρ con el plano xy.

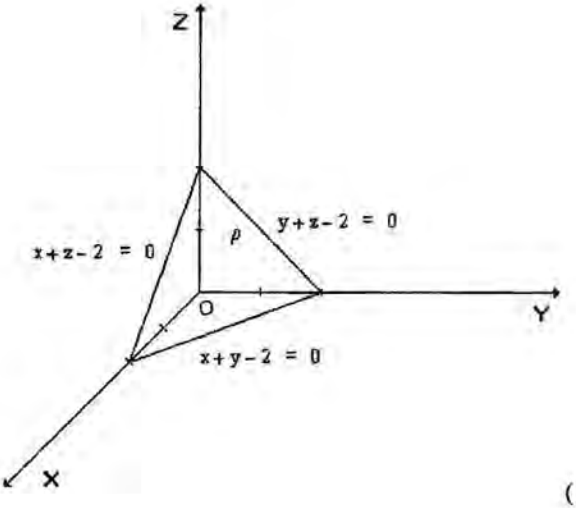
Con el mismo procedimiento hallamos las trazas yz, xz.

Ejemplo 14.

Encontrar las trazas del plano $\rho : x + y + z - 2 = 0$ con los planos coornenados.

Solución.

Traza XY, si $z = 0$	Traza XZ , si $y = 0$	Traza YZ , si $x = 0$
$x + y - 2 = 0$	$x + z - 2 = 0$	$y + z - 2 = 0$



(Fig.112)

Si los puntos (a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c) pertenecen al plano (dado que son las intersecciones del plano con los ejes coordenados) entonces, a, b, y c son llamados respectivamente las intersecciones x-y-z con el plano. En el ejemplo anterior, la intersección con cada eje es siempre la misma, e igual a 2. Se deja como ejercicio al lector demostrar que si a,b y c son distintos de cero, la ecuación del plano ρ puede ser escrita en la forma

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}} = 1$$

5.11 Ecuación Normal del Plano.

Consideremos un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un plano $\rho: Ax + By + Cz + D = 0$. La línea L que pasa por P_0 y perpendicular a ρ tiene como ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= x_0 + At \\ y &= y_0 + Bt \qquad (1) \\ z &= z_0 + Ct \end{aligned}$$

Supongamos que L intercepta al plano ρ en el punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$. Denotemos el valor correspondiente del parámetro t por t_1 :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + At_1 \\ y_1 &= y_0 + Bt_1 \qquad (2) \\ z_1 &= z_0 + Ct_1 \end{aligned}$$

Como $P_1 \in \rho$, se cumple $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$

Sustituyendo (2) en la ecuación del plano tenemos:

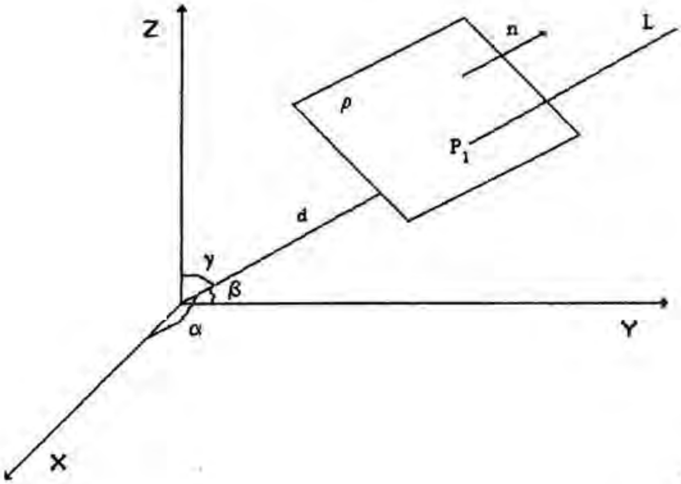
$$A(x_0 + At_1) + B(y_0 + Bt_1) + C(z_0 + Ct_1) + D = 0$$

$$Ax_0 + A^2 t_1 + By_0 + B^2 t_1 + Cz_0 + C^2 t_1 + D = 0$$

Por lo tanto el valor de t_1 será

$$t_1 = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

El problema de hallar la distancia d del punto P_0 al plano ρ se reduce a encontrar la distancia entre P_0 y P_1.



(Fig.113)

$$d(P_0P_1) = \left[(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$d(P_0P_1) = \left[(At_1)^2 + (Bt_1)^2 + (Ct_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$d(P_0P_1) = |t_1| \cdot \left(A^2 + B^2 + C^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sustituyendo el valor de t_1 en la ecuación anterior tenemos

$$d(P_0P_1)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{A^2+B^2+C^2}\cdot\left(A^2+B^2+C^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$d(P_0P_1)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Por lo tanto, la distancia de P_0 a ρ está dada por

$$d\left(P_0{\cdot}\rho\right)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Nótese que si $d = 0$ entonces $P_0 \in \rho$

La distancia d del origen al plano esta dada por

$$d=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

La línea L que pasa por el origen y es perpendicular a ρ intercepta a ρ en el punto

$$P_1\left(-\frac{AD}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},-\frac{BD}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},-\frac{CD}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

Dado que $\dfrac{D}{|D|}\dfrac{D}{|D|} = \dfrac{D^2}{D^2} = 1$ tenemos finalmente

$$\rho : \cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - d = 0$$

esta es la ecuación llamada forma normal de la ecuación de ρ.

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ son los cosenos directores de un vector normal con punto inicial el punto O y punto final sobre ρ, y d es la distancia del origen al plano.

Notemos también que la ecuación rectangular $Ax + By + Cz + D = 0$ puede ser reducida a su forma normal dividiéndola por $-\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ si $D > 0$ y por $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ si $D < 0$.

Observemos que si $D = 0$, hay dos formas normales posibles, dividiendo por $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ o $-\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$.

Ejemplo 15.

Dado el plano $\rho : x + 2y - z + 2 = 0$.

a) Encontrar la distancia del punto $A(1, -1, 0)$ al plano ρ.

b) Reducir a su forma normal y encontrar la distancia del origen a ρ.

Solución.

a) $$d = \frac{|(1) + 2(-1) - (0)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

b) Dado que $D = 2 > 0$, dividimos por $-\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = -\sqrt{6}$

Entonces, la forma normal es

$$-\frac{x}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot y + \frac{z}{\sqrt{6}} - \frac{2}{\sqrt{6}} = 0$$

La distancia del origen a ρ es $d = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

Por lo tanto

$$\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

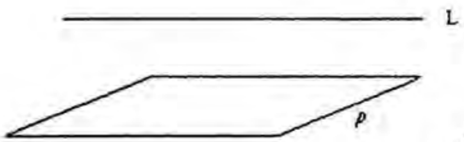
5.12 Relación entre la recta y el plano.

Sean L una recta, ρ un plano en el espacio. Hay tres posibles configuraciones.

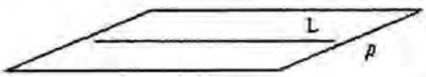
i) $L \parallel \rho$ (Fig. 114 a)

ii) L esta contenida en ρ. (Fig. 114 b)

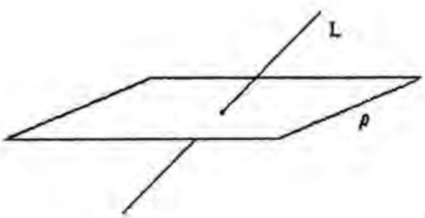
iii) L intercepta a ρ en un solo punto. (Fig. 114 c)



(Fig.114 a)



(Fig.114 b)



(Fig.114 c)

Ejemplo 16.

Obtener el punto de intersección del plano ρ : $2x + 3y - z = 1$ con la recta L cuyas ecuaciones simétricas son:

$$L: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{2}$$

Solución.

Para ver si L $\perp$ ρ vemos si el vector director de L, v = (3, 1, 2), es perpendicular al vector normal del plano, n = (2, 3, -1).

$v \bullet n = 6 + 3 - 2 = 7 \neq 0$

Por lo tanto v no es perpendicular a n y L y ρ no son paralelos.

De lo anterior se sigue que L intercepta a ρ en un solo punto.

Despejando a x de la ecuación parametrica de L, $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1}$ tenemos $x = 3y + 7$

Análogamente despejando a z de la ecuación parametrica $\frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{2}$

se tiene $z = 2y + 6$.

Sustituyendo estos valores de x y z en la ecuación del plano ρ tenemos

$2(3y + 7) + 3y - (2y + 6) = 1$

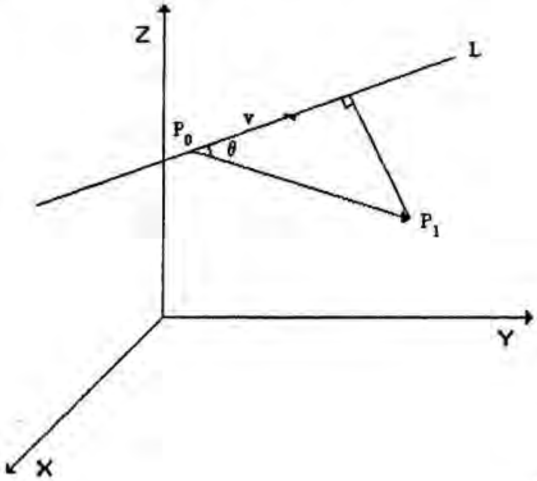
de donde $y = -1$

Finalmente sustituyendo este valor de y en las ecuaciones parametricas de la recta L obtenemos $x = 4$ y $z = 4$.

Por lo tanto el punto de intersección de la recta L y el plano ρ es el punto Q(4, -1, 4).

5.13 Distancia de un punto a una recta.

Sean L una recta en el espacio con ecuación parametrica L : { P = $P_0 + t\,v$, $t \in R$ } y $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto cualquiera que no pertenece a la recta, $P_0\,(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre L. La distancia del punto P_1 a L se define como la longitud del segmento perpendicular a la recta que pasa por P_1. (Fig.115)



(Fig.115)

Haciendo uso de la trigonometría tenemos que

$$\boxed{d(P_1, L)} = \left|\overrightarrow{P_0 P_1}\right| \cdot \operatorname{sen}\theta$$

donde θ es el ángulo entre v y $\overrightarrow{P_0 P_1}$.

Dado que $(u \times v) \bullet (u \times v) = (u \bullet u) \cdot (v \bullet v) - (u \bullet v)^2$, y que θ es el ángulo entre u y v, tenemos lo siguiente:

$(u \bullet v)^2 = |u|^2 \cdot |v|^2 \cdot \cos\theta^2$

$(u \bullet v)^2 = (u \bullet u) \cdot (v \bullet v) \cdot \cos\theta^2$

sustituyendo según estas igualdades en la ecuación anterior tenemos que

$(u \times v) \bullet (u \times v) = (u \bullet u) \cdot (v \bullet v) - (u \bullet u) \cdot (v \bullet v) \cos\theta^2$

$(u \times v) \bullet (u \times v) = (u \bullet u) \cdot (v \bullet v) \cdot (1 - \cos\theta^2)$

$|u \times v|^2 = |u|^2 \cdot |v|^2 \cdot sen\theta^2$

entonces si $|v| \neq 0$ se tiene

$$\frac{|u \times v|^2}{|v|^2} = |u|^2 \cdot sen\theta^2$$

de donde

$$|u| \cdot sen\theta = \frac{|u \times v|}{|v|}$$

Hacemos $u = \overline{P_0P_1}$ y tenemos $d(P_1, L) = \dfrac{\left|\overline{P_0P_1} \times v\right|}{|v|}$

Ejemplo 17.

Calcular la distancia entre el punto $P_1(3, -1, 2)$ y la recta L con ecuaciones simétricas

$$L : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-1}$$

Solución.

Un punto sobre L es P_0 (2, 1, 0) y un vector director de L es v = (1, 2, -1).

Escribimos $\overrightarrow{P_0 P_1} = (1, 2, 2)$

$$\overline{P_0P_1} \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2i + 3j + 4k$$

Por lo tanto $\left|\overline{P_0P_1} \times v\right| = \sqrt{29}$ y $|v| = \sqrt{6}$

$$d(P_1, L) = \frac{\left|\overline{P_0P_1} \times v\right|}{|v|} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{6}}$$

5.14 Ángulo entre una recta y un plano.

Consideremos ahora el caso en el que la recta L no es paralela ni perpendicular al plano ρ. Sean ρ un plano con ecuación rectangular $Ax + By + Cz + D = 0$, $v = (a, b, c)$ un vector director de L, n el normal a ρ en P(donde P es el punto de intersección de L y ρ) y θ el ángulo agudo formado por n y v.

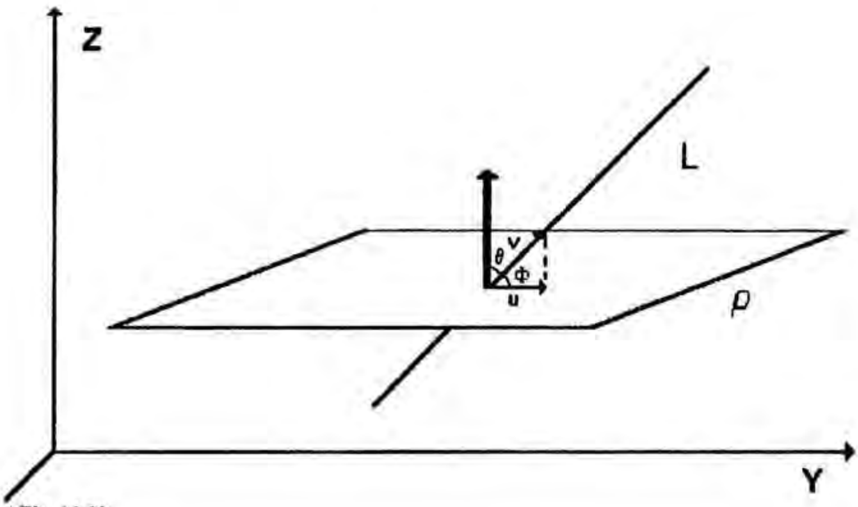
Sea **u** la proyección de v sobre ρ. El ángulo formado por la recta L y el plano ρ se define como el ángulo agudo Φ formado por la recta L y **u**. (Fig.116)

De lo anterior se sigue que n, v y **u** están en un mismo plano (son coplanares).

Por otra parte el ángulo θ esta determinado por

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{n} \bullet \mathbf{v}|}{|\mathbf{n}|\,|\mathbf{v}|} = \frac{|A\cdot a + B\cdot b + C\cdot c|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

donde $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ y $\Phi = \dfrac{\pi}{2} - \theta$



(Fig.116)

Pero como $\cos\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \operatorname{sen}\Phi$ entonces, el ángulo Φ formado por la recta L y el

plano ρ está dado por $$\operatorname{sen}\Phi = \frac{|A\cdot a + B\cdot b + C\cdot c|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Obsérvese lo siguiente:

i) Para que L y ρ sean perpendiculares es necesario que $\Phi = \frac{\pi}{2}$ en cuyo caso $\operatorname{sen}\Phi = 1$. Así,

$$|A\cdot a + B\cdot b + C\cdot c| = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

es decir, $|n \bullet v| = |n|\cdot|v|$ (condición que equivale a la igualdad en desigualdad de Schawrz)

esto sólo sucede cuando $n \parallel v$.

ii) Para que L y ρ sean paralelos $\Phi = 0$.

en otras palabras $\operatorname{sen}\Phi = 0$.

es decir

$$|A\cdot a + B\cdot b + C\cdot c| = 0 \quad \text{y} \quad |n \bullet v| = 0$$

Por lo tanto n y v son perpendiculares.

5.15 Familia de Planos.

Un plano y su ecuación están determinados por tres condiciones independientes. Según esto, un plano que satisface menos de tres condiciones no está determinado en forma única. La ecuación de un plano que satisface solamente dos condiciones contiene una sola constante arbitraria o parámetro y, por lo tanto, representa una familia de planos.

Un ejemplo de familia de planos con un solo parámetro es la ecuación.

$$Ax + By + Cz + k = 0$$

en donde A, B y C son constantes fijas y el parámetro k puede tomar todos los valores reales.

Esta ecuación representa a la familia de planos que son paralelos al plano dado.

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

consideremos la familia de planos que pasan por la intersección de dos planos dados cuyas ecuaciones son:

$$A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 = 0 \qquad (1)$$

$$A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2 = 0 \qquad (2)$$

Cualquier punto cuyas coordenadas satisfaga a ambas ecuaciones (1) y (2) está sobre su recta de intersección.

Evidentemente, las coordenadas de tal punto satisfacen también la ecuación.

$$k_1 \cdot \left(A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1\right) + k_2 \cdot \left(A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2\right) = 0 \qquad (3)$$

en donde k_1 y k_2 son constantes arbitrarias que pueden tomar cualquier valor real, con la excepción de que ambas no pueden ser cero simultáneamente.

Además, como la ecuación (3) es lineal, representa a todos los planos que pasan por la intersección de los planos (1) y (2).

Al igual que en el caso de la familia de rectas, podemos eliminar el plano (2) de la familia (3) con el fin de obtener la ecuación más simple.

$$\boxed{A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 \cdot z + D_1 + k \cdot \left(A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 \cdot z + D_2\right)} = 0$$

en donde el parámetro k puede tomar todos los valores reales.

Decimos entonces que la ecuación (4) representa un haz de planos; la recta común de intersección se le llama *eje o arista del haz*.

Ejemplo .

Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(1, 2, 1) y por la recta de intersección de los planos $2x + y - 2z - 4 = 0$ y $3x - y + z = 0$.

Solución.

La ecuación de la familia de planos que pasan por la intersección de los planos dados es de la forma

$$2x + y - 2z - 4 + k \cdot (3x - y + z + 2) = 0$$

Como el plano buscado pasa por el punto P, las coordenadas (1, 2, 1) de P deben satisfacer la ecuación de la familia de planos y tenemos

$$2 + 2 - 2 - 4 + k \cdot (3 - 2 + 1 + 2) = 0$$

de donde

$$-2 + k \cdot (4) = 0 \quad y \quad k = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo este valor de k en la ecuación de la familia de planos y simplificando tenemos:

$7x + y - 3z - 6 = 0$ que es la ecuación del plano buscado.

EJERCICIOS.

1.- Escribir las ecuaciones parametricas de la recta que pasa por los siguientes pares de puntos

a) $P_1\ (2,-1,3), P_2\ (0,6,-2)$ b) $P_1\ (3,4,7), P_2\ (3,4,-2)$

2.- Para cada uno de los siguientes pares de puntos.

a) Encontrar el punto medio de $\overline{P_1 P_2}$

b) Hallar el punto que esta a $\frac{1}{3}$ de P_1 a lo largo de $\overline{P_1 P_2}$

(1) $P_1\ (2,-1,0), P_2\ (1,3,-4)$ (2) $P_1\ (1,1,1), P_2\ (1,-1,2)$ (3) $P_1\left(\frac{1}{2},2,-\frac{2}{3}\right), P_2(0,-1,3)$

3.- Determinar si los siguientes puntos son colineales.

$P_1\ (1,-1,1), P_2\ (3,0,2), P_3\ (0,-2,-3)$

4.- Determinar si las siguientes pares de rectas se intersectan.
Encontrar el punto de intersección si existe.

a) L_1 pasa por los puntos $P_1\ (2,1,3), P_2\ (-1,2,-4)$

L_2 pasa por los puntos $Q_1\ (5,1,-2), Q_2\ (0,4,3)$

b)

$$L_1 : \begin{aligned} x &= 6+4t \\ y &= 2-t \\ z &= 3+2t \end{aligned} \qquad L_2 : \begin{aligned} x &= 2t \\ y &= 8+t \\ z &= -1+2t \end{aligned}$$

5.- Encontrar las ecuaciones simetricas para las siguientes rectas.

(a) Pasa por $P_1(0,-2,4)$ y $P_2\left(\frac{2}{3},-1,3\right)$

(b) Pasa por $P_1(-5,6,2)$, paralelo a $v = i - 2j + 4k$

(c) $L: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 5t \end{cases}$

6.- Encontrar los cosenos directores para las siguientes lineas rectas.

(a) Pasa por $P_1(1,2,-3)$ y $P_2(2,0,-6)$

(b) $L: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -6 + 3t \\ z = -t \end{cases}$

7.- Encontrar el coseno del ángulo entre las siguientes lineas. Y determinar si las lineas rectas son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

(a) L_1 : pasa por $P_1(2,-1,2)$ y $P_2(-1,4,7)$

L_2 : pasa por $Q_1(0,-2,1)$ y $Q_2(-10,-12,5)$

(b) $L_1: \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 - 3t \\ z = 4 - t \end{cases}$ $\qquad L_2: \begin{cases} x = 6 - s \\ y = 2 + 2s \\ z = -1 + s \end{cases}$

8.- Dado el punto P_0 y la linea recta L_1

(1) Encontrar las ecuaciones de la linea recta que pasa por P_0

i) paralela a L_1

ii) intersecta a L_1 ortogonalmente

(2) Encontrar la distancia de P_0 a L_1

a) $P_0(-2,-2,4)$; L_1 : $\dfrac{x+3}{-2} = \dfrac{y-4}{7} = \dfrac{z+1}{1}$

9.- Demostrar que el par de rectas son paralelas y encontrar la distancia entre ellas.

$$L_1 : \frac{x+1}{-4} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+7}{-3} \qquad L_2 : \frac{x-7}{-12} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{9}$$

10.- Encontrar las ecuaciones parametricas y la rectangular del plano

a) Determinado por el punto $P_0(2,-1,3)$, $v_1(2,1,1)$ y $v_2(-1,2,3)$

b) Pasa por los puntos $P_1(2,4,-1)$, $P_2(-2,-1,3)$, y $P_3(0,1,4)$

11.- Escribir el conjunto de ecuaciones parametricas para los siguientes planos.

(a) $2x-3y+4z+2 = 0$

(b) $x+y-z = 0$

12.- Escribir la ecuación del plano (si existe) determinado por los siguientes conjuntos de puntos.

(a) $P_1(2,-1,3)$, $P_2(1,0,4)$, $P_3(-1,4,3)$

(b) $P_1(1,2,-3)$, $P_2(-1,2,6)$, $P_3\left(0,3,\dfrac{3}{2}\right)$

13.- Dado el plano p : $2x - y + z = 4$ y los puntos $P_1(1,-1,1)$ y $P_2(-2,4,12)$ en p

a) Escribir las ecuaciones de la línea recta L_1 que pasa por P_1 y P_2 y demostrar que todo punto sobre L_1 pertenece a p

b) Escribir las ecuaciones de la línea recta que pasa por $A(5,-2,3)$ paralela a L_1

14.- Determinar si los siguientes pares de planos son paralelos, iguales u oblicuos. Si son oblicuos, encontrar las ecuaciones parametricas de la línea de intersección, y encontrar el $\cos\Phi$ donde Φ es el ángulo entre los planos.

a) p_1 : $y - 4z - 3 = 0$

p_2 : $2y + z - 6 = 0$

b) p_1 : $2x - 4y + 3z = 6$

p_2 : $7x - 14y + \frac{21}{2}z = 3$

15.- Encontrar la ecuación del plano en cada caso, que satisface la condición dada.

a) Pasa por el punto $A(4,0,-2)$ y es perpendicular a la línea que pasa por los puntos $B(2,1,4)$ y $C(0,-2,3)$

b) Pasa por el punto $A(1,-2,3)$ y es paralelo al plano $4x - 2y + 3z = 2$

c) Pasa por los puntos $A(2,1,3), B(4,1,-1)$, y perpendicular al plano $x - 2y + 3z = 1$

d) Perpendicular al segmento cuyos extremos son los p

16.- Encontrar la distancia del punto P_0 al plano dado.

a) $P_0(2,-3,0)$; $p : 3x - y + 4z = 1$

b) $P_0(1,1,1)$; $p : 3x - 2y + z - 4 = 0$

17.- Reducir a la forma normal. Encontrar la distancia del origen al plano. Hallar los cosenos directores de un vector normal con punto inicial en el origen y punto terminal sobre el plano. Para los siguientes planos. Hacer la gráfica.

a) $6x - 3y + 5z - 30 = 0$ b) $3x + 2y - z = 0$ c) $2x + 4y - 3z = 12$

18.- Encontrar la distancia entre los planos paralelos $2x - y + 2z - 4 = 0$ y $6x - 3y + 6z + 2 = 0$

19.- Encontrar las coordenadas del punto de intersección de la recta y el plano cuyas ecuaciones se dan.

a) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+6}{-1}$; $3x - 2y + 3z = 16$

b) $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{4}$; $4x + 3y + 3z + 5 = 0$

20.- Calcular la distancia que separa al punto dado A del plano p cuya ecuación se da.

a) $A(2,3,1)$; $4x + 4y - 7z + 14 = 0$

b) $A(1,-2,1)$; $14x - 5y - 2z + 4 = 0$

21.- Calcular la distancia que separa al punto dado P_0 de la recta cuya ecuación se da.

a) $P_0(3,1,-2)$; $x - 1 = y - 1 = z$

a) $P_0(0,0,0)$; $\frac{x+3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$

22.- Escribir la ecuación de la familia de planos paralelos a el plano $5x - 2y + 3z = 1$. Encontrar el miembro de la familia cuya distancia a el origen sea $\sqrt{19}$

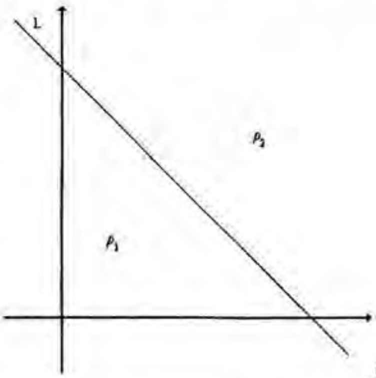
23.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (3,-1,4) y también por la recta de intersección de los planos $x + 2y - z = 4$ y $2x - 3y + z = 6$

24.- Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $2x - y + 3z = 2$ y $4x + 3y - z = 1$ y es perpendicular al plano $3x - 4y - 2z = 9$

VI Aplicaciones de la Recta

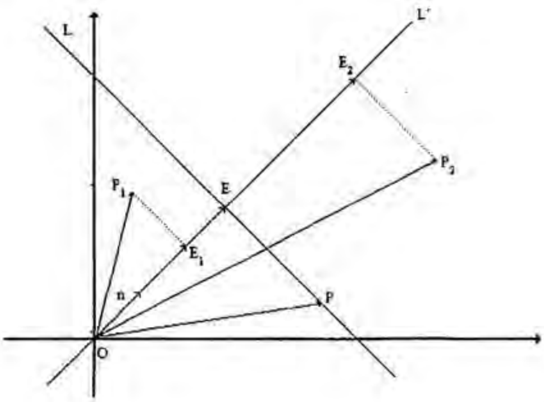
6.1 Desigualdad Lineal.

Sea L una recta con ecuación cartesiana Ax + By + C = 0 y cuyo vector normal es
n = Ai + Bj . L divide al plano en dos partes, cada una de las cuales recibe el nombre de semiplano. Sean ρ_1 y ρ_2 los semiplanos en que L divide al plano cartesiano.



(Fig.117)

Consideremos la recta L' que pasa por el origen y es perpendicular a L.
L' tiene como uno de sus vectores directores a *n*. (Fig.118)



(Fig.118)

Sabemos que $\left|\overrightarrow{OE}\right| = \dfrac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ (distancia de L al origen)

Sea $h = \left|\overrightarrow{OE}\right|$

La proyección de un vector $\overrightarrow{OP_1}$ cuyo extremo se encuentra en el semiplano ρ_1 sobre el vector n es el vector $\overrightarrow{OE_1}$, cuya longitud es menor que h.

Y la proyección de un vector $\overrightarrow{OP_2}$ cuyo extremo se encuentra en el semiplano ρ_2 sobre el vector n es un vector $\overrightarrow{OE_2}$, cuya longitud es mayor que h.

Esto es

$$\left|\overrightarrow{OE_1}\right| < h < \left|\overrightarrow{OE_2}\right|$$

Donde $\operatorname{Proy}\left(\overrightarrow{OP_1}\right)_n = \overrightarrow{OE_1}$ y $\operatorname{Proy}\left(\overrightarrow{OP_2}\right)_n = \overrightarrow{OE_2}$

Así, todo punto Q en el plano cartesiano, estará en el semiplano ρ_1 o ρ_2 según sea la longitud de su proyección $\overrightarrow{OQ}$ sobre n, menor o mayor que h

Por otra parte, sabemos que la distancia del origen a L es

$$d = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} > 0$$

Por lo tanto basta con que en la ecuación $Ax + By + C = 0$, A y B sean tales que $A^2 + B^2 = 1$ para que $d(L,O) = |C|$

Al respecto, recordemos que al reducir la ecuación cartesiana de L a su forma normal lo que resulta es

$$-\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x - \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y - \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0 \quad , \text{si} \quad C > 0$$

de donde

$$-\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x - \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

utilizando notación de producto punto tenemos

$$\left(-\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, -\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right) \bullet (x, y) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Esta igualdad la podemos escribir como sigue : $\eta \bullet \chi = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ $\quad (ii)$

Donde $\eta = \left(-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \right)$ y $\chi = (x, y)$

o

$$-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x - \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \text{si } C < 0$$

la cual puede también ser escrita como

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \right) \bullet (x, y) = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\eta \bullet \chi = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad (\#\#)$$

De (#) y (##) concluimos que L se puede escribir como

L: $\eta \bullet \chi = h$

donde η es un vector tal que la suma de los cuadrados de sus componentes es igual a 1 y h es la distancia de L al origen.

$\overrightarrow{OQ}$

De lo anterior concluimos que un punto Q pertenece al semiplano ρ_1, si el vector satisface $\eta \bullet \overrightarrow{OQ} < h$, o pertenece al semiplano ρ_2, si el vector $\overrightarrow{OQ}$ satisface $\eta \bullet \overrightarrow{OQ} > h$. Finalmente, Q pertenece a la recta L si el vector $\overrightarrow{OQ}$ satisface $\eta \bullet \overrightarrow{OQ} = h$

En general, puede decirse que el semiplano ρ_1 es el conjunto de vectores χ para los cuales $\eta \bullet \chi < h$. Y el semiplano ρ_2 es el conjunto de vectores χ para los cuales $\eta \bullet \chi > h$.

Nótese lo siguiente:

1) ρ_1 se puede considerar como el conjunto de vectores χ que satisfacen

$\eta \bullet \chi < h$

O lo que es lo mismo

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y < \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

es decir,

$Ax + By + C < 0 \qquad (C<0)$

y ρ_2 como el conjunto de vectores χ que satisfacen

$\eta \bullet x > h$

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,y > \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

o lo que es lo mismo

$Ax + By + C > 0 \qquad (C < 0)$

Ejemplo 1.

Determinar para cada uno de los siguientes puntos, si pertenecen al semiplano ρ con desigualdad $5x + 2y \leq 17$. Los puntos son $P_1(1, -1)$, $P_2(4, 1)$, $P_3(3, 1)$.

Solución.

Para resolver este problema, basta sustituir las coordenadas de cada punto en la desigualdad dada.

$5(1) + 2(-1) \leq 17$

$3 \leq 17 \quad \therefore \quad P_1$ pertenece a ρ

$5(4) + 2(1) = 22$

Dado que $22 > 17$, P_2 no pertenece a ρ

$5(3) + 2(1) = 17 \leq 17$

$\therefore$ P_3 pertenece a ρ

Dado que la desigualdad es satisfecha por las coordenadas de los puntos

P_1 y P_2, se dice que P_1 y P_2 son puntos solución de la desigualdad lineal.

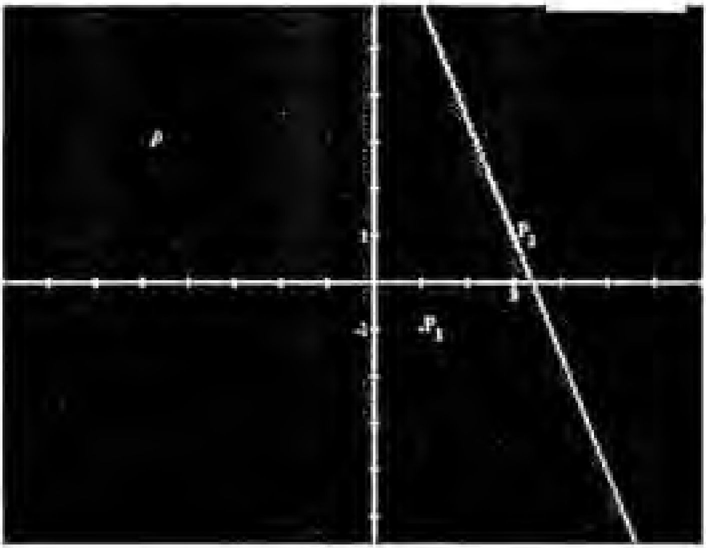
La figura 119 muestra los puntos P_1 y P_2 en el semiplano ρ .

Notemos lo siguiente

El semiplano ρ comprende tanto los puntos que se encuentran de lado izquierdo de la recta como a la recta misma. A está se le da el nombre de recta frontera.

Es decir

$\rho = \{ (x, y) \mid 5x + 2y \leq 17 \}$



(Fig.119)

Teorema 1.

Sea $P(x_0, y_0)$ un punto en el plano y L.- $Ax + By + C = 0$ una línea recta con $B > 0$.

i) P está en la región superior del plano si $Ax_0 + By_0 + C > 0$

ii) P está en L (la frontera) si $Ax_0 + By_0 + C = 0$

iii) P está en la región inferior del plano si $Ax_0 + By_0 + C < 0$

Demostración.

(i) Sea $P(x_0, y_0)$ un punto cualquiera en el plano y $Q(x_0, y)$ el punto sobre la recta $Ax + By + C = 0$ que tiene abscisa igual que P. Como Q pertenece a la recta,

$$Ax_0 + By + C = 0 \qquad (1)$$

Ahora bien,

si $\quad Ax_0 + By_0 + C > 0 \qquad (2)$

entonces, restando (1) a (2), se tiene que

$$B(y_0 - y) > 0$$

Como $B > 0$ esto implica que $y_0 > y$ y $P(x_0, y_0)$ está arriba de la recta $Ax + By + C = 0$

Inversamente, si $P(x_0, y_0)$ está arriba de la recta $Ax + By + C = 0$, $y_0 > y$ y como $B > 0$

$By_0 > By$; así

$Ax_0 + By_0 + C > Ax_0 + By + C = 0$

y la gráfica de $Ax_0 + By_0 + C > 0$ consiste en todos los puntos que quedan arriba de la recta L.

(ii) se cumple por definición, ya que P está en L $\Leftrightarrow$ $Ax_0 + By_0 + C = 0$.

La demostración para (iii) en que P está en la región inferior del plano si

$Ax_0 + By_0 + C < 0$

es semejante a la realizada en (i) por lo que se deja como ejercicio al lector.

6.2 Sistema de Desigualdades Lineales.

Un conjunto de dos o más desigualdades de las formas $Ax + By + C > 0$, $Ax + By + C < 0$, $Ax + By + C \geq 0$ o $Ax + By + C \leq 0$, donde las últimas incluyen a la recta frontera, se llama *sistema de desigualdades lineales de dos variables*.

Su solución se encuentra usando el método gráfico que a continuación se expone.

Supongamos que queremos representar gráficamente la solución de la desigualdad
$Ax + By \leq C$,

i) Tracemos la recta $Ax + By = C$

ii) Consideremos el punto O (0,0) . Si (0,0) satisface la desigualdad, sombréese la región semiplano en que se encuentra.

iii) Si (0,0) no satisface la desigualdad, sombréese la otra región (el otro semiplano)

Si O está en la recta $Ax + By = C$, utilícese cualquier otro punto del plano que no esté en la recta; si éste satisface la desigualdad, sombréese la región en que se encuentra; si no, sombréese la otra región.

El conjunto de soluciones o gráfica de un sistema de desigualdades es el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen todas las desigualdades del sistema.

Supongamos que se tiene el sistema de desigualdades

$$A_0 \cdot x + B_0 \cdot y \leq C_0 \quad , \quad A_1 \cdot x + B_1 \cdot y \geq C_1 \quad y \quad A_2 \cdot x + B_2 \cdot y \leq C_2$$

El conjunto solución lo podemos representarlo algebraicamente

$$S = \{ (x,y) \mid A_0 \cdot x + B_0 \cdot y \leq C_0 \ , \ A_1 \cdot x + B_1 \cdot y \geq C_1 \ , \ A_2 \cdot x + B_2 \cdot y \leq C_2 \}$$

dicho conjunto se le llama *región factible*.

La región factible es la intersección de las regiones sombreadas asociadas al sistema de desigualdades, es decir, el conjunto de puntos que aparecen sombreados en relación a todas las desigualdades del sistema.

Ejemplo 2.

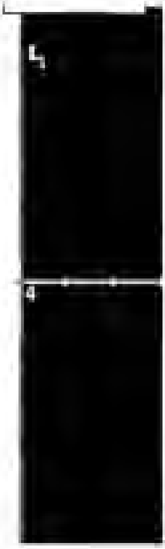
Determinar del siguiente sistema de desigualdades la solución del sistema.

i) $x \leq 4$ iii) $3x + 2y \leq 18$ v) $y \geq 0$

ii) $y \leq 6$ iv) $x \geq 0$

Solución.

Se traza la recta $x = 4$ y se dibuja mentalmente la región en que $x < 4$.
La solución de esta desigualdad es el semiplano ρ_1 incluyendo la recta frontera L_1.



(Fig.120)

Solución gráfica de la desigualdad (i)

Análogamente se traza la recta $y = 6$ y se dibuja mentalmente la región en que $y < 6$.

La solución de esta desigualdad es el semiplano ρ_2 incluyendo la recta frontera L_2
(Fig.121)

(Fig.121)

Solución gráfica de la desigualdad (ii)

Posteriormente para la desigualdad $3x + 2y \leq 18$ se procede como lo antes mencionado. Tracemos la recta $3x + 2y = 18$. Como O (0,0) satisface la desigualdad $3(0) + 2(0) \leq 18$, sombreamos la región en que se encuentra. (Fig.122)

Así dado que $B > 0$, la solución del sistema es la región inferior del plano y la recta $3x + 2y = 18$.

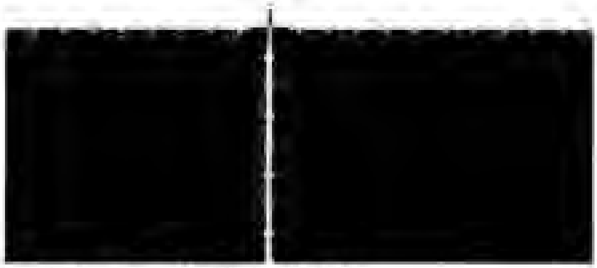
Finalmente la solución de las desigualdades $x \geq 0$, y $y \geq 0$ comprenden los planos ρ_4 y ρ_5 y las rectas $x = 0$, $y = 0$ donde ρ_4 es la región en que $x > 0$ y ρ_5 en el que $y > 0$.
(Figuras 123 y 124)

(Fig.122)

Solución gráfica de la desigualdad (ii)

(Fig.123)

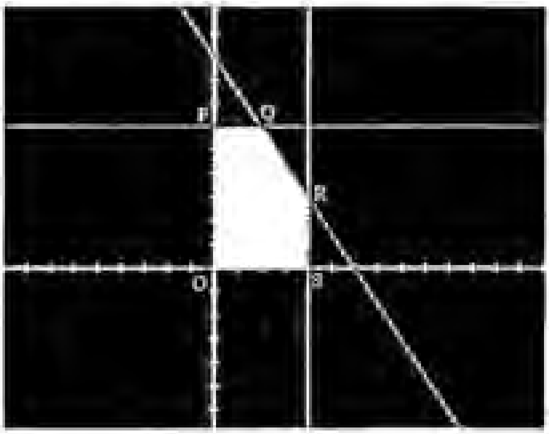
Solución gráfica de la desigualdad (iv)



(Fig.124)

Solución gráfica de la desigualdad (v)

La solución gráfica del sistema se determina al trazar las gráficas de las desigualdades sobre un mismo sistema coordenado. La gráfica de este sistema es, consecuentemente, el área pintada de amarillo en la figura 125 , la cual es la intersección de las cinco regiones pintadas de amarillo en las figuras 120-124. Se trata de un pentágono OPQRS formado por las soluciones del sistema.



(Fig.125)

Ejemplo 3.

Usar una gráfica para mostrar el conjunto solución o región factible del sistema siguiente:

i) $x > y$ ii) $3x + y > 6$ iii) $y < 5$ iv) $x > 2$

Solución.

Se pueden trazar primero las rectas

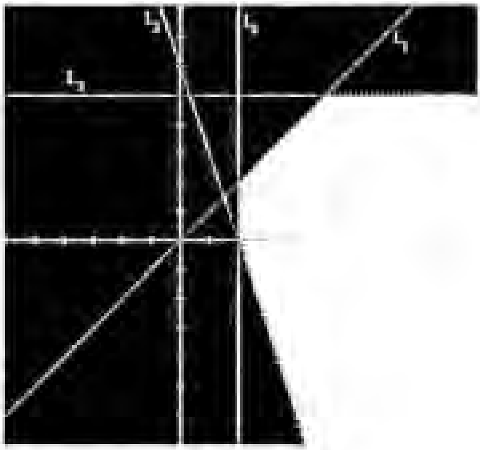
$L_1 : y = x$; $L_2 : 3x + y = 6$; $L_3 : y = 5$; $L_4 : x = 2$

Como se trata de desigualdades estrictas, los puntos que pertenecen al conjunto solución del sistema deben quedar al interior de los semiplanos que determinan las rectas L_1, L_2, L_3, L_4 no incluyendo a éstas.

Utilizando el mismo método que en el ejemplo anterior, tenemos que el conjunto solución o región factible es

$$S = \{ (x, y) \mid x > y \ , 3x + y > 6 \ , y < 5 \ , x > 2 \}$$

Entonces, la región factible que representa la solución del sistema es: la región debajo de L_1 y L_3, arriba de L_2, y a la derecha de L_4, la cual está sombreada. No incluyendo a las rectas L_1, L_2, L_3, L_4, ni a las intersecciones de estas.



(Fig.126)

La gráfica de este sistema es un polígono no acotado, esto es, el conjunto contiene puntos cuya distancia al origen es mayor que r, para toda $r \in R$. Como lo muestra la figura 126.

En resumen:

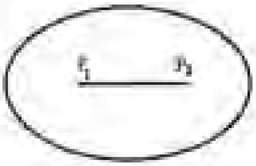
La gráfica de un sistema de desigualdades puede ser acotada como en el ejemplo 2, o puede ser no acotada como en el ejemplo 3. En ambos casos la gráfica del sistema de desigualdades es un conjunto convexo.

6.3 Conjuntos Convexos.

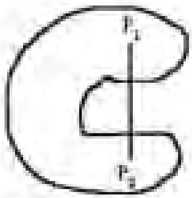
Un conjunto S en el plano es convexo si y solo si para todo $P_1, P_2 \in S$, $\overline{P_1P_2} \in S$.

Es decir cuando P_1 y P_2 pertenecen a S, todo punto del segmento $\overline{P_1P_2}$ también pertenece a S.

De lo anterior se sigue que el conjunto vació y el formado por un punto, se consideran conjuntos convexos.



Conjunto Convexo



Conjunto No Convexo

Probaremos que la gráfica de un sistema de desigualdades es un conjunto convexo. Primero veremos que una recta y un semiplano son conjuntos convexos, para después mostrar que la intersección de dos semiplanos también es un conjunto convexo.

Consideremos la recta L con ecuación

L : $Ax + By + C = 0$

Si definimos $f(x,y) = Ax + By + C$, entonces podemos escribir

L: $\{ (x, y) \mid f(x, y) = 0 \}$

Sean S_1 y S_2 los conjuntos

$S_1 : \{ (x, y) \mid f(x, y) > 0 \}$

$S_2 : \{ (x, y) \mid f(x, y) < 0 \}$

S_1 y S_2 son los semiplanos determinados por L.

Probaremos que L, S_1 y S_2 son conjuntos convexos; para ello, verifiquemos la siguiente afirmación que nos será de utilidad en nuestra demostración.

Lema 1.

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos en el plano cartesiano, $P(x, y)$ un punto del segmento $\overline{P_1P_2}$ y sea $f(x, y) = Ax + By + C$. Hay un número t con $0 \le t \le 1$, tal que

$$f(x,y) = (1-t) \cdot f(x_1, y_1) + t \cdot f(x_2, y_2)$$

Prueba.

Como $P(x,y) \in \overline{P_1P_2}$, hay un t, con $0 \le t \le 1$, tal que

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$

Por lo tanto

$$f(x, y) = A\,(\,x_1 + t\,(x_2 - x_1)\,) + B\,(\,y_1 + t\,(y_2 - y_1)\,) + C$$

$$A\,x_1 + By_1 + t\,(\,Ax_2 + By_2\,) - t\,(Ax_1 + By_1\,) + C$$

$$= f\,(x_1, y_1) + t\,[\,(\,Ax_2 + By_2 + C) - (Ax_1 + By_1 + C)\,] \quad (\text{sumando Ct, -Ct y factorizando})$$

$$= f\,(x_1, y_1) + t\,(\,f\,(x_2, y_2) - f\,(x_1, y_1)\,)$$

$$f\,(x, y) = (1 - t)\,f\,(x_1, y_1) + t\,f\,(x_2, y_2)$$

Teorema 2.

Los conjuntos L, S_1, S_2 son conjuntos convexos.

Probaremos primero que S_1 es un conjunto convexo.

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ puntos en S_1 y sea $P(x, y) \in \overline{P_1P_2}$

Demostraremos que $P \in S_1$.

Por el Lema 1 existe t con $0 \le t \le 1$ tal que

$$f(x,y) = (1-t)\cdot f(x_1,y_1) + t\cdot f(x_2,y_2)$$

Por hipótesis

$$f(x_1,y_1) > 0 \;\; y \;\; f(x_2,y_2) > 0$$

Como t y $1 - t$ son positivos, de lo anterior se sigue que

$$(1-t)\cdot f(x_1,y_1) + t\cdot f(x_2,y_2) > 0$$

así que $f(x, y) > 0$

Por lo tanto, $P(x, y) \in S_1$. De lo anterior se concluye que $\overline{P_1P_2} \subseteq S_1$

y S_1 es un conjunto convexo.

L es un conjunto convexo por definición. Ya que dados P_1 y P_2 en L ;

$\overline{P_1 P_2} \subseteq L$

De hecho un segmento de recta y una semirecta son conjuntos convexos.

Para probar que S_2 es conjunto convexo se procede de la misma manera que para S_1, cosa que se deja como ejercicio para el lector.

Teorema 3.

La intersección de dos o más conjuntos convexos es un conjunto convexo.

Sean S_1 ; S_2 ; S_3 ; .... S_n conjuntos convexos.

Y sea $S = S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap ... \cap S_n$.

Sean P_1 y P_2 puntos en S . Como P_1, P_2 están en S_1 y S_1 es convexo, $\overline{P_1P_2} \subseteq S_1$.

Similarmente $\overline{P_1 P_2} \subseteq S_2$, $\overline{P_1 P_2} \subseteq S_3$, ... $\overline{P_1 P_2} \subseteq S_n$

Entonces $\overline{P_1 P_2} \subseteq S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap ... \cap S_n = S$, es decir,

$\overline{P_1 P_2} \subseteq S$. Por lo tanto, S es un conjunto convexo.

6.4 Programación Lineal

Como se puede observar en las aplicaciones de las desigualdades la solución rara vez es única. Sin embargo, en una situación práctica, algunas de las soluciones factibles pueden ser mejores que otras. Una meta importante es encontrar la mejor solución para una situación en particular.

Este es el problema que afronta una rama de las matemáticas aplicadas llamada *programación lineal*, cuya esencia es la siguiente:

Dada una región o solución factible representada por un polígono convexo S , definido por un sistema de desigualdades lineales, hallar los puntos factibles en los cuales una expresión lineal de la forma $Ax + By$ toma los valores extremos (máximos o mínimos) llamados *soluciones optimas.*

Consideremos una función lineal de dos variables

$f = Ax + By$

Supongamos que se quiere hallar el conjunto de puntos (x_1, y_1) de la región factible S , en los que la función f toma sus valores máximo y mínimo. Para ello, consideremos la recta

$L : Ax + By = 0$ que pasa por el origen y es perpendicular al vector (A, B).

Al desplazar la recta paralelamente a sí misma, en realidad lo que se hace es desplazarla en la dirección del vector (A, B).

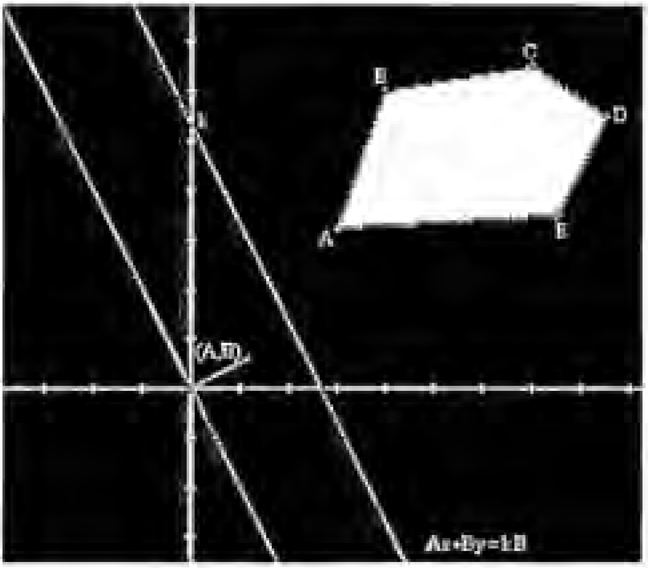
A medida que nos alejamos del origen. La distancia entre L y el origen aumenta, al igual que el valor de la constante C (término independiente), pues de

$Ax + By + C = 0$ se sigue que $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$

Sea $k = -\dfrac{C}{B}$ (ordenada al origen). Como $C = -kB$, tenemos que

$Ax + By - kB = 0$, o bien, $Ax + By = kB$

obviamente, el valor de Ax + By es constante para cada una de estas rectas. (Fig.127)



(Fig.127)

Supongamos que al mover la recta (es decir, al variar k) ésta encuentra primero al polígono en el vértice $A(a_1, a_2)$ En esta posición L se convierte en una recta de apoyo (entenderemos como recta de apoyo cuando L intercepte algún vértice del polígono solución).

$$L: \quad A(a_1) + B(a_2) = Bk_1$$

donde L toma el valor de Bk_1, es decir $f(a_1, a_2) = Bk_1$.

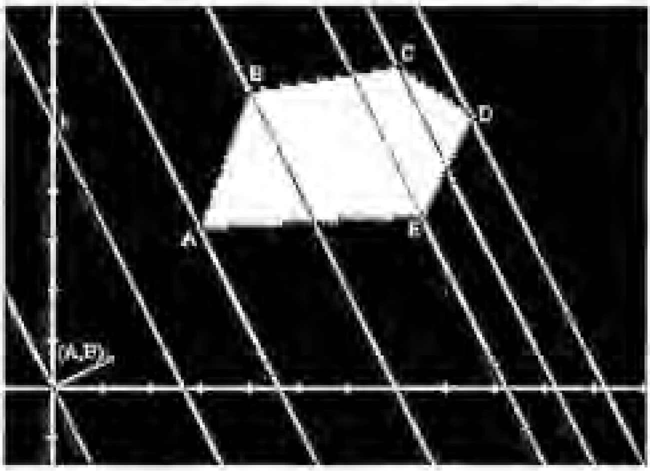
Conforme se mueve en la misma dirección pasando por los vértices B, E, C y D finalmente, la recta L se convierte en cada caso en una recta de apoyo.

Dado que cada vez que desplazamos a la recta paralelamente en la dirección del vector (A, B) aumenta el valor de C, el valor de la función lineal es creciente. (Fig.128) Es decir,

$$f(a_1,a_2) = Bk_1 < f(b_1,b_2) = Bk_2 < f(e_1,e_2) = Bk_3 < f(c_1,c_2) = Bk_4 < \ldots$$

$$\ldots f(d_1,d_2) = Bk_5$$

Donde $B(b_1, b_2), C(c_1, c_2), E(e_1, e_2), D(d_1, d_2)$ son los vértices del polígono, ordenados conforme los va encontrando. (ver figura 128)



(Fig.128)

Por tanto, la función lineal f toma su valor mínimo en el vértice A, y su máximo en el vértice D, y, los valores mínimo y máximo de la función lineal $f = Ax + By$ sobre el polígono solución se adquieren cuando un último vértice de la región factible, pues si el último contacto de la recta de apoyo $Ax + By = Bk$ es un segmento de recta, éste pasa por un vértice en el que la función toma el mismo valor (en los puntos del interior, basta con mover la recta hacia arriba y hacia abajo para obtener valores más grandes o más pequeños, por lo que concluimos que los puntos óptimos se ubican sobre la frontera de la región factible).

Hacemos notar lo siguiente:

La intersección de la recta L con el polígono de soluciones puede consistir en:

i) Un solo punto (posiblemente al infinito)

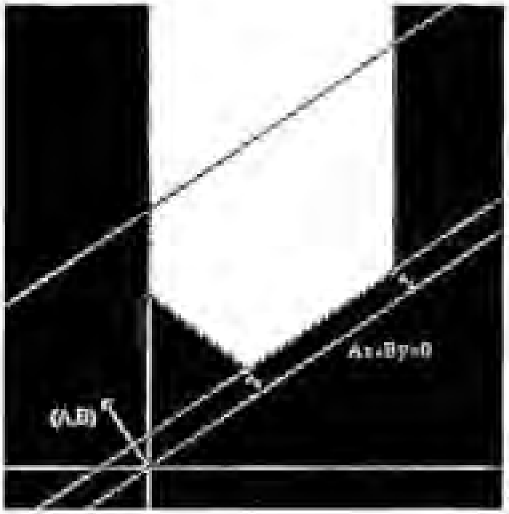
ii) Un vértice del polígono.

iii) Un conjunto infinito de puntos (un lado del polígono).

En la figura 129 se ilustra un caso en el cual la función lineal f

alcanza su mínimo para el polígono en cada punto del segmento $\overline{A_1 A_2}$

mientras que su máximo se supone en los puntos del polígono infinitamente distantes.



(Fig.129)

De lo anterior, podemos enunciar el teorema fundamental de la programación lineal.

Teorema fundamental de la programación lineal

El mínimo o el máximo entre las soluciones de un sistema de desigualdades lineales se encuentra en un vértice de la región factible. Para demostrar el teorema de la programación lineal probaremos el siguiente lema.

Lema 2.

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos en el plano cartesiano, $Q(x', y')$ un punto en el segmento de recta $\overline{P_1P_2}$ y $f = Ax + By$ una función lineal.

Si $m_1 = Ax_1 + By_1$, $m_2 = Ax_2 + By_2$ y $m_1 \leq m_2$ entonces

$m_1 \leq Ax' + By' \leq m_2$.

En otras palabras, el valor de la expresión $Ax + By$ en Q, está comprendido entre los valores de la expresión en P_1 y P_2 .

Demostración.

Como $Q \in \overline{P_1 P_2}$

$$x' = x_1 + t(x_2 - x_1)$$

$$y' = y_1 + t(y_2 - y_1) \qquad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 1$$

entonces

$$\begin{aligned} Ax' + By' &= A(x_1 + t(x_2 - x_1)) + B(y_1 + t(y_2 - y_1)) \\ &= Ax_1 + By_1 + t(Ax_2 + By_2) - t(Ax_1 + By_1) \end{aligned}$$

$$Ax' + By' = m_1 + t(m_2 - m_1) \qquad (1)$$

Por otra parte Q también puede expresarse como

$$x' = x_2 + t(x_1 - x_2)$$

$$y' = y_2 + t(y_1 - y_2) \qquad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 1$$

De modo que

$$Ax' + By' = A\left(x_2 + t\left(x_1 - x_2\right)\right) + B\left(y_2 + t\left(y_1 - y_2\right)\right)$$

$$= Ax_2 + By_2 + t\left(Ax_1 + By_1\right) - t\left(Ax_2 + By_2\right)$$

$$= Ax_2 + By_2 - t\left[\left(Ax_2 + By_2\right) - \left(Ax_1 + By_1\right)\right]$$

$$Ax' + By' = m_2 - t\left(m_2 - m_1\right) \quad (2)$$

con $0 \leq t \leq 1$ y $m_2 - m_1 \geq 0$

de (1) y (2) tenemos

$$Ax' + By' = m_2 - t\left(m_2 - m_1\right) \leq m_2$$

y

$$m_1 \leq m_1 + t\left(m_2 - m_1\right) = Ax' + By'$$

Por lo tanto

$$m_1 \leq Ax' + By' \leq m_2$$

Demostración de Teorema fundamental de la programación lineal.

Supongamos que el polígono convexo S tiene n vértices $A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$

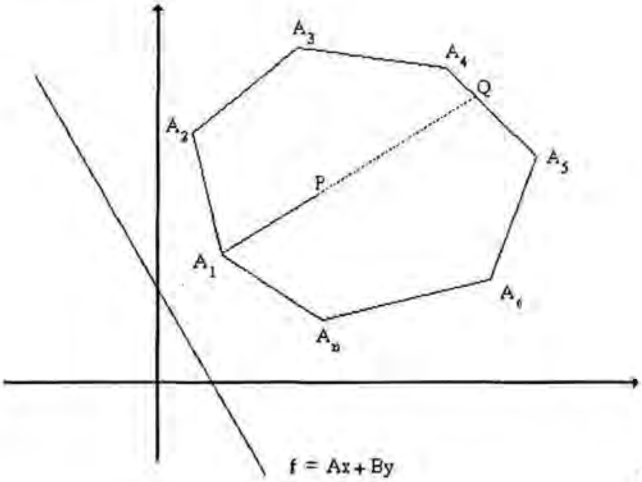
y que $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ son los valores que toma en ellos la expresión lineal

$Ax + By$. Sea m el mínimo y M el máximo de esos n valores y suponga que el valor m

ocurre en A_1.

Sea P otro punto solución cualquiera de S, diferente de A_1, trácese $\overline{A_1P}$

La convexidad de S asegura que si $\overline{A_1P}$ se prolonga, va a cruzar nuevamente la frontera de S en un solo punto Q. (Fig.130)



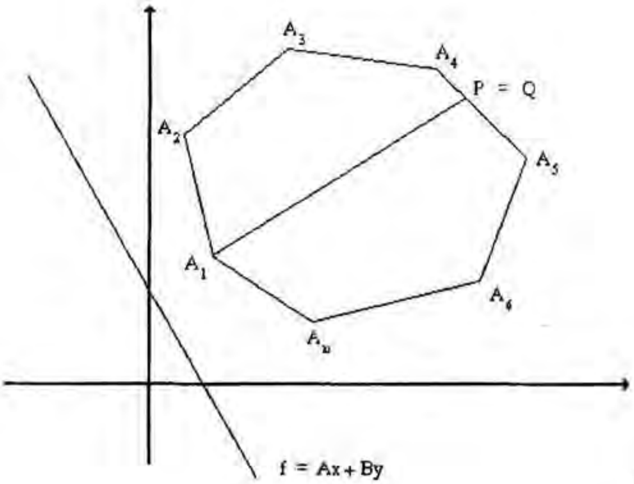
(Fig.130)

Si P no esta en la frontera, por el lema 2 el valor de Ax + By en P está comprendido entre los valores que toma en A_1 y en Q, y por consiguiente entre m y M.

Si P está en la frontera, entonces P = Q y como Q pertenece al segmento de recta que une dos vértices, se deduce por el lema 2 que el valor de Ax + By en Q está comprendido entre los valores que toma en dichos vértices o, consecuentemente entre m y M.

Por lo tanto los valores máximo y mínimo que Ax + By puede tomar son en los vértices de S. (Fig.131)

Así para encontrar el valor máximo y mínimo entre las soluciones de un sistema de desigualdades sujeto a una condición lineal, basta con encontrar los vértices del polígono solución.



(Fig.131)

Problemas.

Un agente está planeando un viaje a un centro vacacional. Puede llevar un máximo de 10 personas y se le informa que irán por lo menos 4 hombres y 3 mujeres.
Su ganancia será de \$10 por cada mujer y \$15 por cada hombre.
¿Cuántos hombres y cuántas mujeres le producirían la mayor ganancia?

Solución.

Sean x = número de mujeres

y = número de hombres

Entonces, x e y deben ser tales que

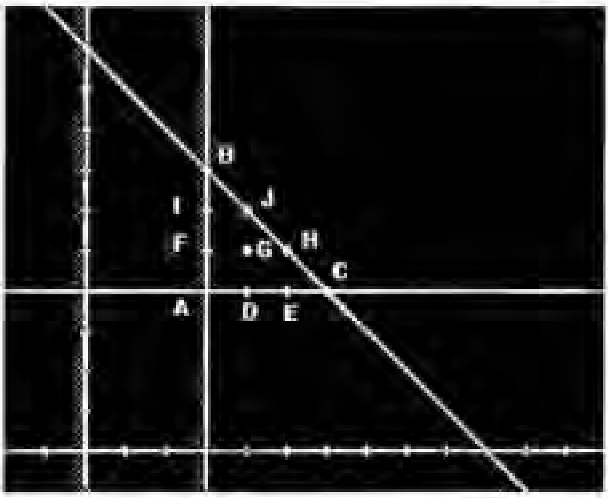
$x + y \leq 10$

$x \geq 3$

$y \geq 4$

Al graficar este sistema notamos que los puntos P(x, y) factibles deben estar dentro o en la frontera del triángulo ABC.

Dado que x, y representan número de personas $x, y \in \mathbf{N}$ por lo cual hay exactamente 10 pares ordenados de números naturales que satisfacen las tres desigualdades. Cada punto de la gráfica representa a uno de ellos.



La ganancia Q se puede expresar como

$Q = 10x + 15y$

Sea Q_A la ganancia que produce A(3, 4), Q_D la ganancia que produce D(4,4), etc.

De todo ello vemos que

$Q_A = 10\cdot(3) + 15\cdot(4) = 90$	$Q_G = 10\cdot(4) + 15\cdot(5) = 115$
$Q_D = 10\cdot(4) + 15\cdot(4) = 100$	$Q_H = 10\cdot(5) + 15\cdot(5) = 125$
$Q_E = 10\cdot(5) + 15\cdot(4) = 110$	$Q_I = 10\cdot(3) + 15\cdot(6) = 120$
$Q_C = 10\cdot(6) + 15\cdot(4) = 120$	$Q_J = 10\cdot(4) + 15\cdot(6) = 130$
$Q_F = 10\cdot(3) + 15\cdot(5) = 105$	$Q_B = 10\cdot(3) + 15\cdot(7) = 135$

Vemos que la ganancia máxima es $135 en Q_B (3 mujeres y 7 hombres).
Nótese también que la ganancia mínima es Q_A (3 mujeres y 4 hombres), de manera que el máximo se presenta en un vértice del triángulo y el mínimo en otro vértice.

El problema ha sido resuelto de una manera intuitiva.
Si resolvemos el problema utilizando la teoría ya vista.
En primer lugar graficaríamos la región factible o polígono solución:

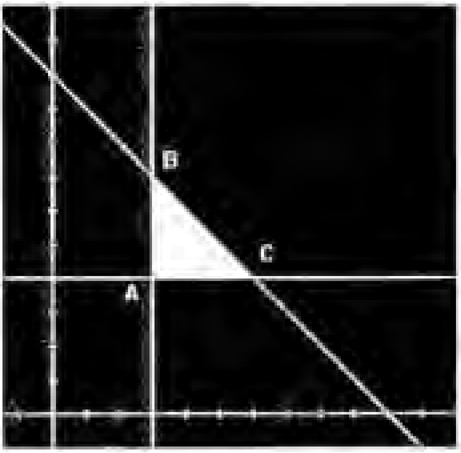
Posteriormente encontraríamos los vértices del polígono resolviendo el sistema de ecuaciones L_1, L_2, L_3 .

$L_1 : x = 3$, $L_2 : y = 4$ y $L_3 : x + y = 10$

de donde

$L_1 \cap L_2 = A(3,4)$, $L_2 \cap L_3 = C(6,4)$ y $L_1 \cap L_3 = B(3,7)$

A, B y C son vértices del triángulo solución.



Bajo la condición lineal

$f = 10x + 15y$

y utilizando el teorema de la programación lineal tenemos:

$f_A = 10\cdot(3) + 15\cdot(4) = 90$ (f evaluada en el vértice A)

$f_B = 10\cdot(6) + 15\cdot(4) = 120$ (f evaluada en el vértice B)

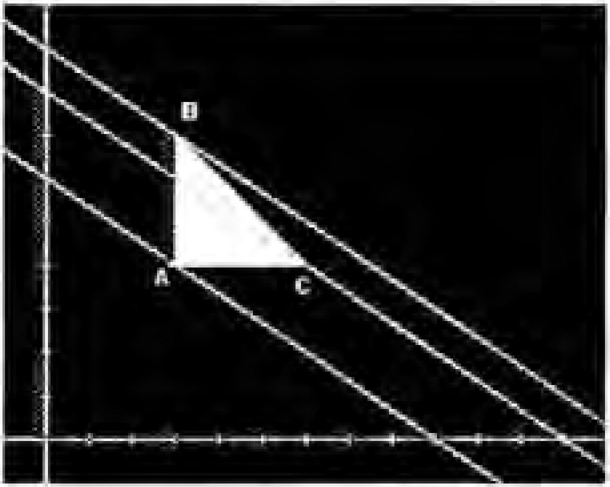
$f_C = 10\cdot(3) + 15\cdot(7) = 135$ (f evaluada en el vértice C)

Por lo tanto la ganancia máxima se da en el vértice B (3 mujeres, 7 hombres) mientras la ganancia mínima se da en el vértice A (3 mujeres, 4 hombres).

Ganancia Máxima: $135

Ganancia Mínima: $ 90

La figura siguiente ilustra cuando la función lineal alcanza el máximo en B y el mínimo en A.



2.- Se cuenta con dos alimentos: pan y queso. Cada uno de ellos contiene calorías y proteínas en distintas proporciones. Un kilogramo de pan tiene 2000 calorías y 50 gramos de proteínas. Un kilogramo de queso tiene 4000 calorías y 200 gramos de proteínas. Una dieta para un deportista requiere al menos de 6000 calorías y 200 gramos de proteínas por día. Si un kilogramo de pan cuesta 6 pesos y un kilogramo de queso cuesta 21 pesos. ¿Qué cantidad de queso y pan son necesarios para satisfacer los requerimientos de la dieta a un costo mínimo ?

Solución.

Sea x = kilogramos de pan , y = kilogramos de queso

Se tiene que

	Calorías	Proteínas
1 kg. de pan	2,000	50 gr.
1 kg. de queso	4,000	200 gr.

La dieta requiere :

(1) $2000 \cdot x + 4000 \cdot y \geq 6000$ calorías

(2) $50 \cdot x + 200 \cdot y \geq 200$ proteínas

$6x + 21y$ = costo

El objetivo es minimizar el costo satisfaciendo (1) y (2).

Simplificando (1) y (2) se tiene

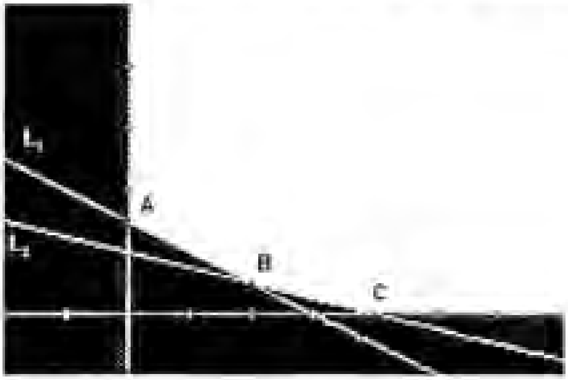
(1') $2x + 4y \geq 6$

(2') $5x + 20y \geq 20$

Claro está que $x \geq 0$ y $y \geq 0$ dado que nos representan kilogramos.

Sean $L_1 : 2x + 4y = 6$ y $L_2 : 5x + 20y = 20$

Los puntos que pertenecen a la región factible o polígono solución del sistema deben de quedar arriba de o en L_1 y arriba de o en L_2. Tomando en cuenta que $x \geq 0$ y $y \geq 0$.



En nuestro caso la función lineal costo $C = 6x + 21y$ alcanzará su mínimo en alguno de los vértices A, B o C del polígono convexo no acotado.

Donde $A = L_1 \cap \text{eje } Y$, $B = L_1 \cap L_2$ y $C = L_2 \cap \text{eje } X$

entonces las coordenadas del polígono convexo son:

$$A\left(0, \frac{3}{2}\right), B\left(2, \frac{1}{2}\right) \text{ y } C(4, 0)$$

Utilizando el teorema de la programación lineal tenemos

$$C_A = 6(0) + 21\left(\frac{3}{2}\right) = 31.5$$

$$C_B = 6(2) + 21\left(\frac{1}{2}\right) = 22.5$$

$$C_C = 6(4) + 21(0) = 24$$

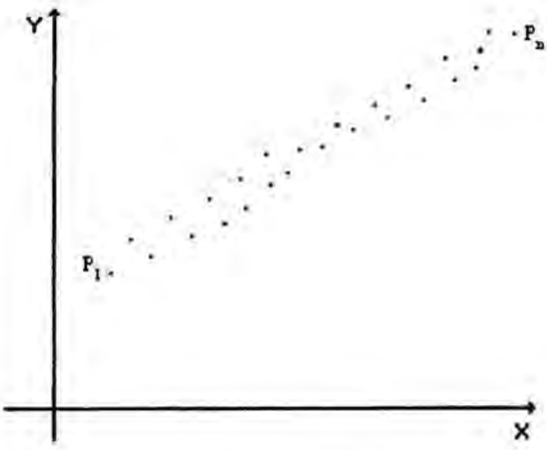
Por lo tanto la solución del costo mínimo es 2 kg de pan y $\frac{1}{2}$ kg de queso a un costo mínimo de \$22.5 .

6.5 Ajuste a una Recta.

En muchas situaciones prácticas se presenta el siguiente problema.
Dados un conjunto de datos experimentales o estadísticos, se busca determinar una relación numérica que describa o aproxime su comportamiento.
Nuestro objetivo, en otras palabras, es "dadas las coordenadas de un conjunto de puntos, encontrar la ecuación de una curva que represente las características del conjunto".
Para ello, ajustaremos una curva a través de los datos disponibles.
En nuestro caso consideraremos el ajuste a una curva lineal, por lo que el procedimiento es llamado ajuste a una recta.

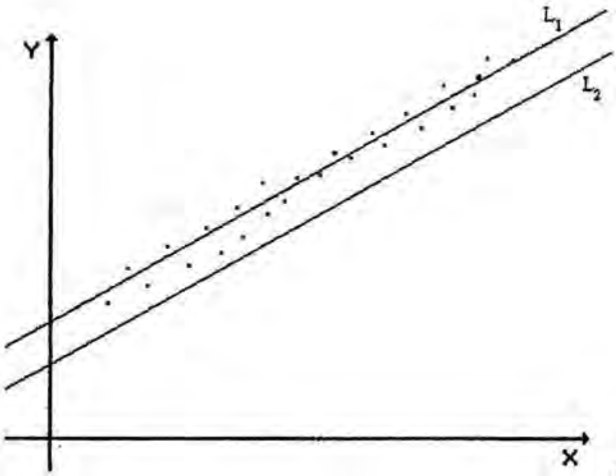
Supongamos que tenemos un conjunto de n puntos $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), \ldots P_n(x_n, y_n)$

Que representan un conjunto de datos experimentales donde x_i $i = 1, 2, \ldots, n$ son valores independientes y y_i $i = 1, 2, \ldots, n$ son las valores dependientes de las x_i.
(Fig.132)



(Fig.132)

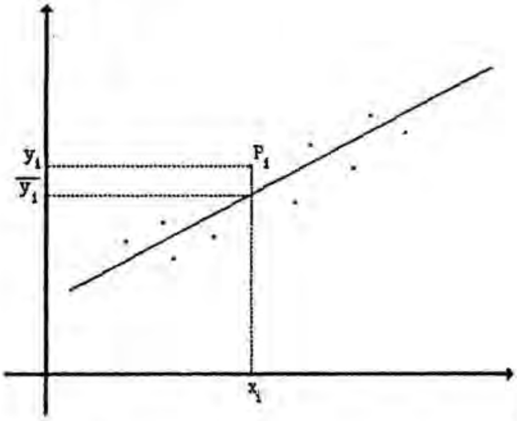
Queremos ajustar una línea recta L al conjunto de puntos que representan los datos.



(Fig.133)

Entre las distintas posibilidades la figura 118 sugiere que L_1 es una recta que se ajusta mejor a nuestros puntos que la recta L_2 . De hecho éste método, llamado *intuitivo* es el que emplearemos primero. Pero antes debemos hacer notar lo siguiente.

Ajustar una recta a un conjunto de puntos nos lleva a encontrar la ecuación de una recta que mejor se aproxime más a ellos. En otras palabras, lo que se pretende es que la distancia entré las ordenadas dadas y_i y las ordenadas calculadas $\overline{y_i}$, sea lo más pequeña posible en cada punto. (Fig.134)



(Fig.134)

Esto es, si $e_i = y_i - \bar{y}_i$ para todo $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. , lo que queremos es que e_i se aproxime a cero.

En otras palabras, se busca que la suma de las e_i sea lo más cercana que se pueda.

Claro esta que si $y_i > \bar{y}_i$ entonces $e_i > 0$, y el punto P_i estará encima de la

recta. Así mismo, si $y_i < \bar{y}_i$ entonces $e_i > 0$ y en este caso P_i estará abajo de la recta.

Ajustar una recta L a ciertos puntos es buscar dos números m' y b' (donde m' es la pendiente y b' la ordenada al origen) , tales que la recta L : y = m'x + b' sea la recta que mejor se ajustá a los puntos de los datos experimentales.

Para hacer esto disponemos de tres métodos , cada uno de los cuales tiene ventajas y desventajas. La elección del método dependerá de la *manera* que queramos medir la precisión y rapidez del ajuste.

Método Intuitivo.

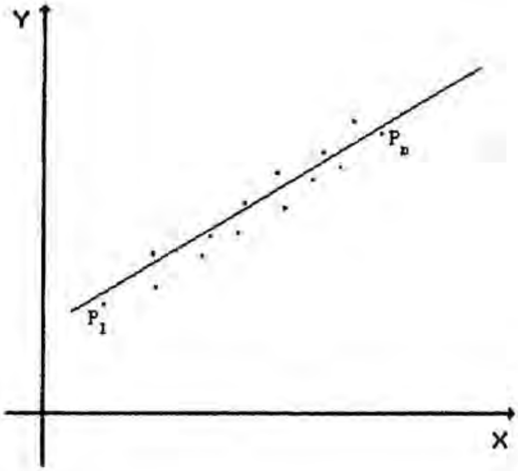
En esté *método* el ajuste se realiza a simple vista. Esto es, trazamos una rectá a simple vista,

tomando como referencia dos puntos cualesquiera de los datos, digamos los extremos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_n(x_n, y_n)$ del conjunto de puntos.

Sustituyendo estos valores en la ecuación y = mx + b tenemos

$$y_1 = m \cdot x_1 + b \quad (1)$$

$$y_n = m \cdot x_n + b \quad (2)$$



(Fig.135)

de donde resulta un sistema de ecuaciones simultaneas. Resolviendo este sistema de ecuaciones se tiene

$$\boxed{m} \boxed{=} \left|\frac{y_1 - y_n}{x_1 - x_n}\right| \qquad b = \frac{x_1 \cdot y_n - y_1 \cdot x_n}{x_1 - x_n}$$

Estos valores son los parámetros m′ y b′ que buscabamos.

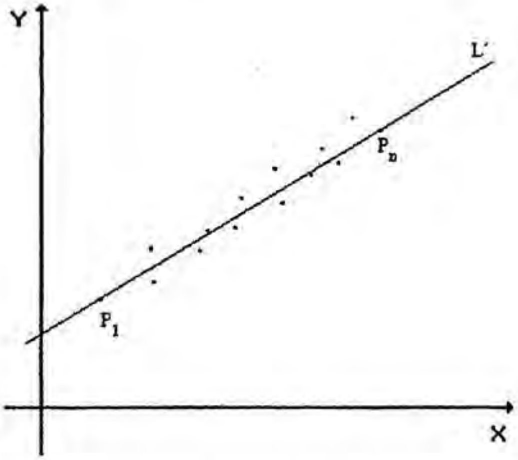
La ecuación de la recta que pasa por estos puntos es

$$y - y_1 = \left(\frac{y_1 - y_n}{x_1 - x_n}\right) \cdot (x - x_1)$$

de donde

$$y = \left(\frac{y_1 - y_n}{x_1 - x_n}\right) \cdot x + \frac{x_1 \cdot y_n - y_1 \cdot x_n}{x_1 - x_n} + y_1$$

que es la ecuación buscada con $m' = \dfrac{y_1 - y_n}{x_1 - x_n}$ y $b' = \dfrac{x_1 \cdot y_n - y_1 \cdot x_n}{x_1 - x_n} + y_1$



(Fig.136)

En la gráfica anterior se muestra la recta ajustada L'.

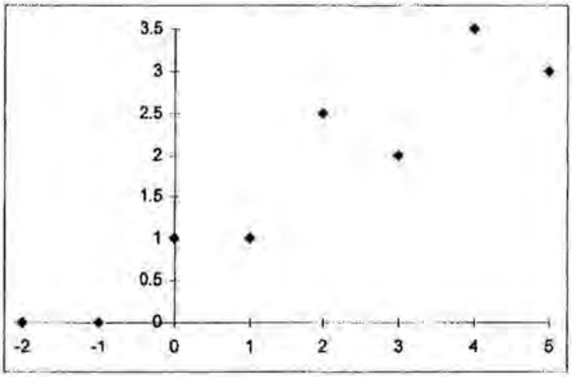
Ejemplo 1.

Se tienen los datos que muestra la tabla. Apliquemos el método intuitivo para ajustar una línea recta.

x	y
-2	0
-1	0
0	1
1	1
2	2.5
3	2
4	3.5
5	3

Solución.

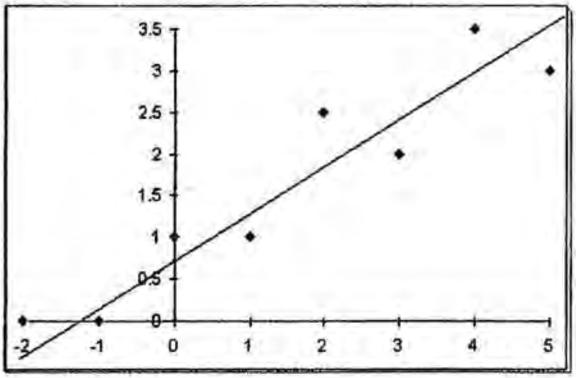
Empecemos por trazar los ejes coordenados y graficar los puntos dados



en este caso los puntos son

$P_1(-2,0), P_2(-1,0), P_3(0,1), P_4(1,1), P_5(2,2.5)\ \ P_6(3,2), P_7(4,3.5), P_8\ (5,3)$

Tracemos una recta a simple vista, aquella que más se "aproxime" a los puntos dados.



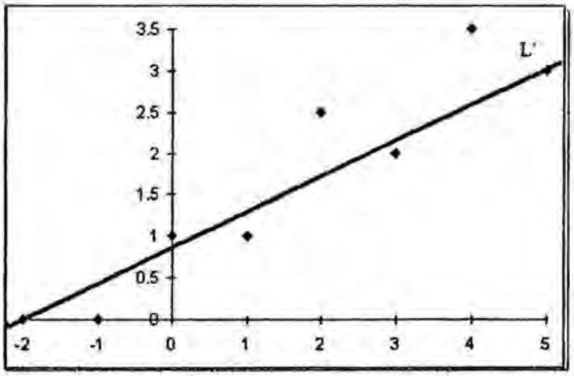
Ahora tomemos los puntos $P_1(-2, 0)$ y $P_8(5, 3)$ que están a los extremos de los datos. De la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, tenemos que

$$\boxed{y - 0} = \frac{3-0}{5-(-2)}\cdot(x-(-2))$$

$$y = \frac{3}{7}\cdot(x+2)$$

$$y = \frac{3}{7}\cdot x + \frac{6}{7}$$ donde $m' = \frac{3}{7}$ y $b' = \frac{6}{7}$

y $L' : \frac{3}{7}\cdot x + \frac{6}{7}$ es la ecuación de la recta ajustada.



Para determinar la precisión del ajuste, veremos que tan pequeños fueron los errores en cada punto.

Primero tabularemos, para cada x, la diferencia entre el valor observado de y (dado en la tabla) y el valor calculado $\bar{y}$ de y que se obtiene de la ecuación de la recta L'. Después tabularemos los cuadrados de los errores y calcularemos las sumas de estas cantidades. Estas sumas nos proporcionan una medida de la precisión con que la recta representa a nuestro conjunto de datos.

Es obvio que si la suma de los cuadrados de los errores es pequeña, la precisión de la recta ajustada será mayor.

Notemos que $\overline{y_1}$ la obtenemos al sustituir $x_1 = -2$ en la ecuación de la recta ajustada L'

$$y = \frac{3}{7}\cdot(-2) + \frac{6}{7} = 0 \qquad \therefore \ \overline{y_1} = 0$$

De igual manera obtenemos $\overline{y_2}, \overline{y_3} \ldots \overline{y_8}$. Los valores obtenidos e_i se muestran en la siguiente tabla:

x	y	$\overline{y}$ (valor calculado)	e (error)	e^2 (cuadrado del error)
-2	0	0.00	0.00	0
-1	0	0.429	-0.429	0.184
0	1	0.857	0.143	0.020
1	1	1.286	-0.286	0.082
2	2.5	1.714	0.786	0.617
3	2	2.143	-0.143	0.020
4	3.5	2.571	0.929	0.862
5	3	3.000	0	0
			1	1.786

La suma de los errores es

$$\sum e_i = 1.01$$

En cambio, la suma de los cuadrados de los errores es

$$\sum e^2 = 1.78$$

Nótese que la suma de los errores no es muy significativa, pues los que tienen signo negativo se contrarestan con los que tienen signo positivo, y esta información se pierde en el resultado final.

Podemos decir entonces que la precisión con que la recta representa los datos es 1.78 y la suma de los cuadrados de los errores está muy lejos de ser cero.

Método de los promedio por grupo.

Este método consiste en separar los datos en dos partes aproximadamente iguales y calcular el valor promedio de x y de y en cada uno de ellos.
Estos valores promedio son las coordenadas de lo que llamaremos "punto promedio" de cada grupo de puntos.

Del ejemplo anterior obtendríamos las siguientes tablas

TABLA A	
x	y
-2	0
-1	0
0	1
1	1
-0.5	0.5

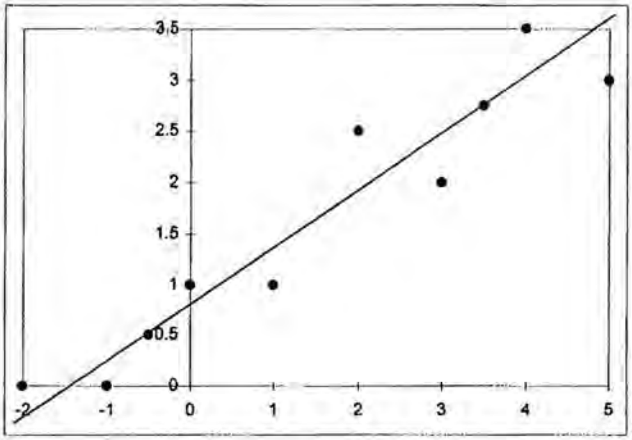
TABLA B	
x	y
2	2.5
3	2
4	3.5
5	3
3.5	2.75

Denotemos al punto promedio de la tabla A como P_a y al de la tabla B como P_b.
Entonces los puntos P_a y P_b tienen como coordenadas

$$P_a\left(\frac{\Sigma x_i}{4},\frac{\Sigma y_i}{4}\right) = (-0.5, 0.5) \quad \text{y} \quad P_b\left(\frac{\Sigma x_i}{4},\frac{\Sigma y_i}{4}\right) = (3.5, 2.75)$$

La ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos será la ecuación de la recta ajustada que represente los datos.

Como lo muestra la figura 137. Gráficamente obtendríamos la recta ajustada uniendo los puntos P_a y P_b.



(Fig.137)

Entonces la ecuación de la recta que pasa por los puntos P_a (-0.5, 0.5) y P_b (3.5, 2.75) es

$$y - 0.5 = \frac{2.75 - 0.5}{3.5 - (-0.5)} \cdot (x - (-0.5))$$

$$y = 0.56x + 0.78$$

En este caso $m' = 0.56$ y $b' = 0.78$ son los parámetros buscados y la ecuación de la recta L'' ajustada es:

$$L'' : \ y = 0.56 x + 0.78$$

Determinemos ahora la precisión del ajuste tabulando para cada valor de x_i el error o la desviación del valor dado y_i y del valor calculado $\overline{y_i}$ con base en la ecuación de la recta ajustada L''.

Para lo cuál construimos una tabla como la siguiente.

x	y	$\bar{y}$	e	e^2
-2	0	-0.34	0.34	0.1156
-1	0	0.22	-0.22	0.0484
0	1	0.78	0.22	0.0484
1	1	1.34	-0.34	0.1156
2	2.5	1.9	0.6	0.36
3	2	2.46	-0.46	0.2116
4	3.5	3.02	0.48	0.2304
5	3	3.58	-0.58	0.3364
			0.04	1.4664

En este caso la suma de los errores y la suma de los cuadrados de los errores son:

$$\sum e_i = 0.04 \quad , \quad \sum (e_i)^2 = 1.46$$

Como podemos ver la precisión del ajuste de la recta a los datos dados es 1.46.
Además, este método asegura que la suma total de los errores se acerca a cero. (0.04)

Método de los mínimos cuadrados.

Este método es el que tiene la mejor precisión en el ajuste de una curva. Pues su objetivo es obtener una línea recta para la cuál la suma de los cuadrados de los errores es mínima.

En otras palabras, lo que este método hace es minimizar la suma de los cuadrados de los errores o desviaciones verticales de la recta ajustada. Esto asegura una optima precisión en el ajuste de la recta. Para calcular los valores de los parámetros m y b haremos uso del cálculo diferencial.

Sea $e_i = y_i - \overline{y_i}$ con $i = 1, 2, 3,\ldots,n$.

Si denotamos con M la suma de los cuadrados de los errores, tenemos

$$M = \sum\left(y_i - \overline{y_i}\right)^2 = \sum\left[y_i - (m' x_i + b')\right]^2$$

donde $\overline{y_i} = m' x_i + b'$ para algunos m' y b'.

Lo que se busca es minimizar M.

Si M tiene un mínimo, éste se obtendrá para valores de m' y b' que satisfacen las ecuaciones

$$\frac{d}{dm'}M = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d}{db'}M = 0$$

Al obtener las derivadas parciales de M con respecto a m' y b' respectivamente, e igualarlas a cero, obtenemos

$$(1)\ \frac{d}{dm'}M = \frac{d}{dm'}\left[y_i - \left(m' x_i + b'\right)\right]^2 = -\left[\Sigma 2\left[y_i - \left(m' x_i + b'\right)\right] x_i\right]$$

$$\frac{d}{dm'}M = -2\left[\Sigma x_i y_i - m' \Sigma \left(x_i\right)^2 - b' \Sigma x_i\right] = 0$$

$$(2)\ \frac{d}{dm'}M = \frac{d}{db'}\left[\Sigma\left[y_i - \left(m' x_i + b'\right)\right]\right]^2 = -\left[\Sigma 2\left[y_i - \left(m' x_i + b'\right)\right]\right]$$

$$\frac{d}{dm'}M = 2\left(\Sigma y_i - m' \Sigma x_i - b' n\right) = 0$$

Las ecuaciones (1) y (2) se denominan ecuaciones de los mínimos cuadrados.

Hagamos notar lo siguiente:

Las ecuaciones de los mínimos cuadrados son lineales en m' y b', por lo tanto se pueden resolver simultáneamente. Para ello, escribamos (1) y (2) en la forma

$$\boxed{m'\cdot\Sigma\left(x_i\right)^2+b'\cdot\Sigma x_i} = \Sigma x_i\cdot y_i$$

$$m'\cdot\Sigma x_i + b'\cdot n = \Sigma y_i$$

Como se ve, lo que resulta es un sistema de ecuaciones lineales en m´ y b´.

Resolviendo este sistema de ecuaciones simultaneas, tenemos :

$$m' = \frac{n\cdot\Sigma x_i\cdot y_i - \left(\Sigma x_i\right)\cdot\left(\Sigma y_i\right)}{n\cdot\Sigma\left(x_i\right)^2-\left(\Sigma x_i\right)^2}$$

$$b' = \frac{\left[\Sigma\left(x_i\right)^2\right]\cdot\left(\Sigma y_i\right)-\left(\Sigma x_i\right)\cdot\left(\Sigma x_i\cdot y_i\right)}{n\cdot\Sigma\left(x_i\right)^2-\left(\Sigma x_i\right)^2} \quad (3)$$

Donde m´ y b´son los parámetros buscados de la ecuación de la recta ajustada y = m´x + b´

Nótese que si en (3) multiplicamos ambas ecuaciones por $\frac{1}{n}$ obtenemos

$$m'\cdot\left[\frac{1}{n}\cdot\Sigma\left(x_i\right)^2\right]+b'\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot\Sigma x_i\right) = \frac{1}{n}\cdot\Sigma x_i\cdot y_i$$

$$m'\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot\Sigma x_i\right)+b' = \frac{1}{n}\cdot\Sigma y_i \quad (4)$$

Donde $\frac{1}{n}\cdot\sum x_i$ es el valor promedio de x

$\frac{1}{n}\cdot\sum y_i$ es el valor promedio de y

$\frac{1}{n}\cdot\sum x_i\cdot y_i$ es el valor promedio de $x\cdot y$

y $\frac{1}{n}\cdot\sum (x_i)^2$ es el valor promedio de x^2.

Por tanto, el método exige determinar el valor promedio de x, y, xy, y x^2 para todos los datos del conjunto.

Apliquemos el método en nuestro ejemplo. Construyamos una tabla como la que a continuación se muestra. Con base en ella, obtendremos los coeficientes de las ecuaciones de los mínimos cuadrados.

x	y	x^2	xy
-2	0	4	0
-1	0	1	0
0	1	0	0
1	1	1	1
2	2.5	4	5
3	2	9	6
4	3.5	16	14
5	3	25	15

En este caso los valores promedio de x, y, xy, x^2 son, respectivamente,

$\frac{1}{8}\sum x_i = \frac{1}{8}\cdot(12) = 1.5$ $\qquad \frac{1}{8}\sum (x_i)^2 = 7.5$

$\frac{1}{8}\sum y_i = \frac{1}{8}\cdot(13) = 1.625$ $\qquad \frac{1}{8}\sum x_i\cdot y_i = 5.12$

Sustituyendo estos valores en (4), obtenemos el sistema de ecuaciones

$$7.5 \cdot m' + 1.5 \cdot b' = 5.12$$

$$1.5 \cdot m' + b' = 1.62$$

Resolviendo estas ecuaciones simultáneas, tenemos

$$m' = 0.51 \qquad b' = 0.85$$

Y por consiguiente, la ecuación de la recta ajustada es:

$$y = 0.51 \cdot x + 0.85.$$

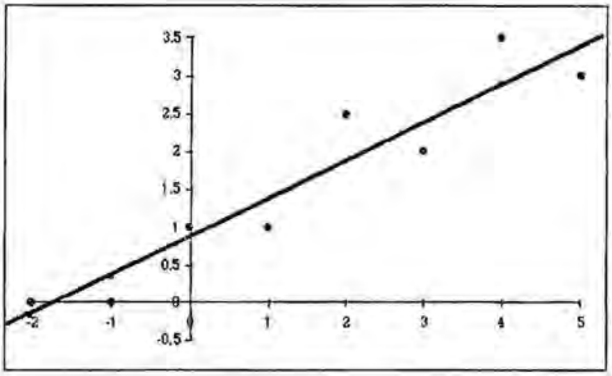
Para comprobar la precisión del ajuste elaboraremos la tabla de errores o desviaciones de la recta ajustada y los datos dados.

x	y	$\bar{y}$	e	e^2
-2	0	-0.17	0.17	0.029
-1	0	0.34	-0.34	0.116
0	1	0.85	0.15	0.023
1	1	1.36	-0.36	0.130
2	2.5	1.87	0.63	0.397
3	2	2.38	-0.38	0.144
4	3.5	2.89	0.61	0.372
5	3	3.4	-0.4	0.160
			0.08	1.370

De aquí se tiene

$$\Sigma e_i = 0.08 \qquad y \qquad \Sigma (e_i)^2 = 1.37$$

Como podemos ver esté método da una mejor precisión de ajuste a los datos, ya que la suma de los cuadrados de los errores es mínima en comparación con los otros dos métodos.



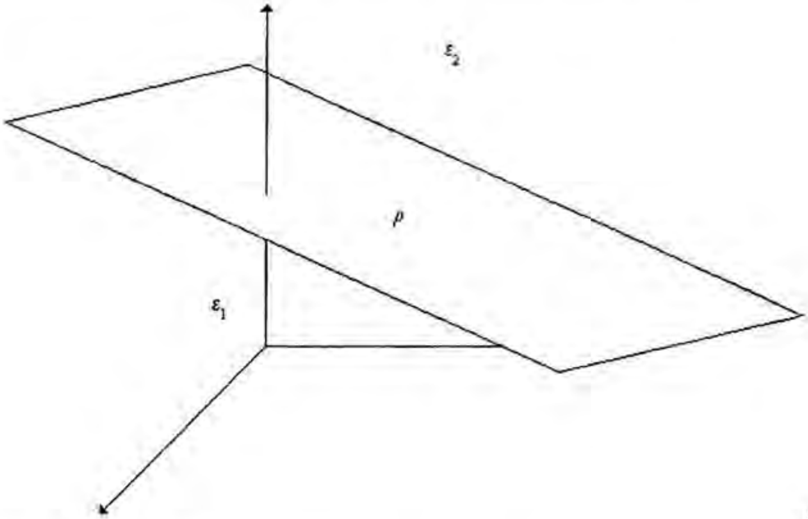
En resumen.

El método de los mínimos cuadrados, aunque más laborioso, garantiza que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima.
En la práctica es el más empleado e importante cuando deben obtenerse medidas estadísticas.
El método de los promedios de grupo garantiza en cambio que la suma de los errores sea cercana a cero, aunque no garantiza una mayor precisión.

6.6 Desigualdad lineal en R^3

Sea ρ un plano con ecuación cartesiana $Ax + By + Cz + D = 0$ con vector normal $n = Ai + Bj + Ck$. El plano ρ divide al espacio en dos partes , cada una de las cuales recibe el nombre de semiespacio.

Sean ε_1 y ε_2 los semiespacios que forma ρ en el espacio R^3 (Fig.138)

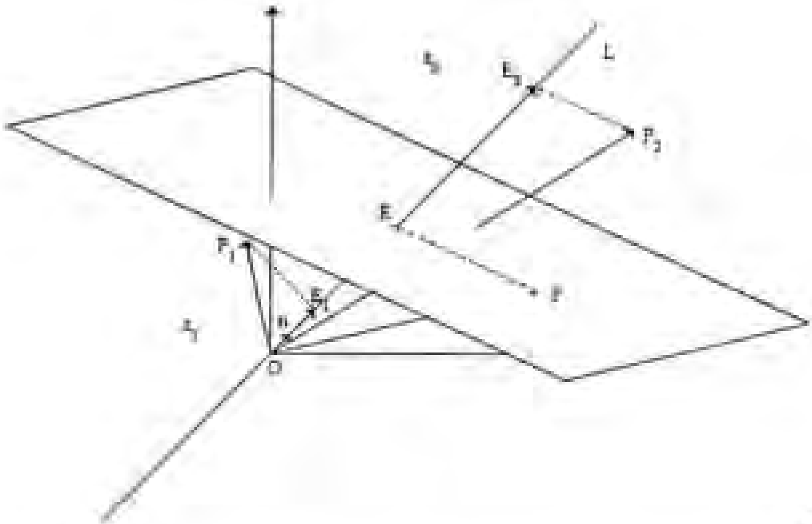


(Fig.138)

Consideremos la recta L que pasa por el origen y es perpendicular a ρ. L tiene como vector director a n. (Fig.139)

Sabemos que $\left|\overrightarrow{O \cdot E}\right| = \dfrac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ (distancia del plano ρ al origen)

Sea $h = \left|\overrightarrow{O \cdot E}\right|$



(Fig.139)

Tomemos P_1 un punto en el semiespacio ε_1, P_2 un punto en el semiespacio ε_2 y P un punto en el plano ρ.

La proyección de $\overrightarrow{O\text{-}P_1}$ un vector cuyo extremo se encuentra en el semiespacio ε_1 sobre el vector n es el vector $\overrightarrow{O\text{-}E_1}$, cuya longitud es menor que h.

Y la proyección de $\overrightarrow{O\text{-}P_2}$ cuyo extremo se encuentra en el semiespacio ε_2 sobre el vector n es el vector $\overrightarrow{O\text{-}E_2}$, cuya longitud es mayor que h.

Esto es $\left|\overrightarrow{O\text{-}E_1}\right| < h < \left|\overrightarrow{O\text{-}E_2}\right|$ donde

$$\mathrm{Proy}\left(\overrightarrow{O\text{-}P_1}\right)_n = \overrightarrow{O\text{-}E_1} \quad \text{y} \quad \mathrm{Proy}\left(\overrightarrow{O\text{-}P_2}\right)_n = \overrightarrow{O\text{-}E_1}$$

Entonces, para todo punto Q en el espacio, le asignamos el semiespacio ε_1 o ε_2 según si la longitud de la proyección del vector correspondiente $\overrightarrow{O \cdot Q}$ sobre n sea menor o mayor que h.

Por otra parte, sabemos que la distancia del origen a ρ es

$$d = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} > 0$$

Por lo tanto basta con que en la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$

A, B, C, sean tales que $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, para que $d(\rho, O) = |D|$

Para lo cual, recordemos que al reducir la ecuación cartesiana del plano ρ , a su forma normal obteníamos:

$$\frac{A}{-\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot x + \frac{B}{-\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot y + \frac{C}{-\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot z + \frac{D}{-\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

De donde

$$\frac{A}{-\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot x + \frac{B}{-\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot y + \frac{C}{-\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot z = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Usando notación de producto punto tenemos

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right) \bullet (x, y, z) = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Por lo tanto, la ecuación del plano quedaría escrita como:

$$\mu \bullet \chi = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (\#)$$

donde $\mu = \left(-\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, -\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right)$ y $\chi = (x, y, z)$

O en el otro caso la ecuación toma la forma normal :

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot y + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \cdot z = \frac{D}{-\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Si $D < 0$. La ecuación anterior puede ser escrita como

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right) \bullet (x, y, z) = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Entonces la ecuación quedaría escrita como

$$\mu \bullet \chi = -\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \qquad (\#\#)$$

De (#) y (# #) concluimos que la ecuación del plano ρ puede ser escrita como

$$\rho : \mu \bullet \chi = h$$

donde μ es el vector unitario, normal al plano, χ es un vector que une el origen a un punto variable del plano ρ, y h es la distancia de ρ al origen.

De lo anterior concluimos que un punto Q pertenece al semiespacio ε_1, si el vector $\overrightarrow{O \cdot Q}$ satisface $\mu \bullet \overrightarrow{O \cdot Q} < h$, o pertenece al semiespacio ε_2, si el vector $\overrightarrow{O \cdot Q}$ satisface $\mu \bullet \overrightarrow{O \cdot Q} > h$, o en su caso pertenece al plano ρ si el vector $\overrightarrow{O \cdot Q}$ satisface $\mu \bullet \overrightarrow{O \cdot Q} = h$

En general, puede decirse que el semiespacio ε_1 es el conjunto de vectores χ para los cuales $\mu \bullet \chi < h$. Y el semiespacio ε_2 es el conjunto de vectores χ para los cuales

$\mu \bullet \chi > h$

Hagamos notar lo siguiente:

ε_1 se puede ver como el conjunto de vectores χ que satisfacen $\mu \bullet \chi < h$ o lo que es lo mismo

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \cdot x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \cdot y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \cdot z < \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

o bien $Ax + By + Cz + D < 0$.

Y ε_2 como el conjunto de vectores χ que satisfacen $\mu \bullet \chi > h$ o lo que es lo mismo

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \cdot x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \cdot y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \cdot z > \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

o bien $Ax + By + Cz + D > 0$

Ejemplo 1.

Dado el semiespacio $3x + 5y + 4z \leq 5$ determinar si el punto (0,0,0) pertenece a él.

Solución.

Para resolver este problema, basta sustituir el punto (0,0,0) en la desigualdad dada.

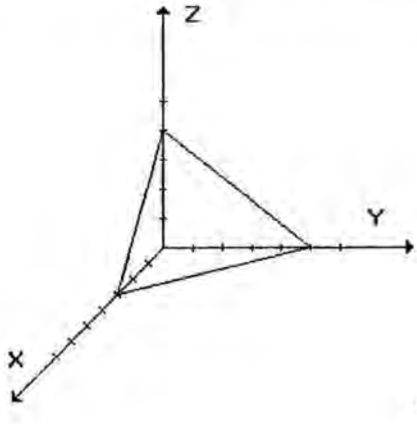
Se tiene que

$$\boxed{3\cdot(0) + 5\cdot(0) + 4\cdot(0) \leq 5}$$

$$0 < 5$$

por lo tanto, el origen sí pertenece al semiespacio dado.

El plano $3x + 5y + 4z = 5$ es perpendicular al vector $v = (3, 4, 5)$. (Fig.140)



(Fig.140)

6.7 Sistema de Desigualdades Lineales en el Espacio.

Un sistema de dos o más desigualdades de las formas $Ax + By + Cz + D > 0$, $Ax + By + Cz + D < 0$, $Ax + By + Cz + D \geq 0$ o $Ax + By + Cz + D \leq 0$, donde las últimas incluyen al plano frontera, se llama sistema de desigualdades lineales con tres variables.

Un sistema de n desigualdades en el espacio R^3 se puede escribir en la forma

$$A_i \cdot x + B_i \cdot y + C_i \cdot z \leq D_i \qquad (i = 1,2,3,4,\ldots,n)$$

Si alguna de las desigualdades fuera de la forma $A_i \cdot x + B_i \cdot y + C_i \cdot z \geq D_i$ por ejemplo, podría reducirse a la forma anterior multiplicando ambos lados por -1.

Tal y como se ha visto, cada una de las desigualdades determina un semiespacio.

Obviamente el sistema de desigualdades puede tener solución. En este caso el conjunto solución lo podemos representar algebraicamente por

$$S = \{ (x,y,z) \mid A_i \cdot x + B_i \cdot y + C_i \cdot z \leq D_i \text{ con } i = 1,2,3,4,\ldots\ldots n \}$$

Dicho conjunto se llama *región factible*, la cual está dada por la intersección de los semiespacios determinados por el sistema de desigualdades.

Como veremos, este conjunto es una figura convexa y puede ser un semiespacio, un poliedro (acotado o no acotado) , un plano, un polígono (acotado o no acotado), una recta, un segmento rectilíneo o, finalmente, un solo punto.

Esta figura recibe el nombre de *poliedro de soluciones*.

Puede suceder que no exista punto en el espacio que satisfaga todas y cada una de las desigualdades. En este caso el sistema no tiene solución.

El método gráfico para hallar la solución no es práctico en problemas con más de dos variables; pues es difícil visualizar la región factible correspondiente a más de dos desigualdades lineales.

Más bien, lo que se emplea es un método algebraico aplicable a cualquier número de variables y desigualdades. Esta técnica que veremos más adelante se llama *método simplex*.

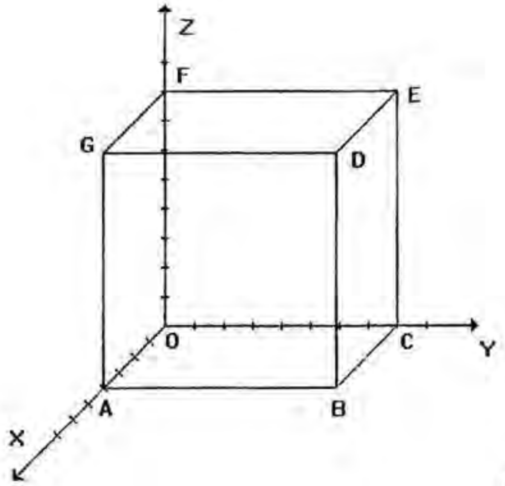
Antes de exponer dicho método, veamos algunos ejemplos sencillos en los que si es posible ver la solución de un sistema de desigualdades en forma gráfica.

Ejemplo 2.

Determinemos la solución del siguiente sistema de desigualdades:

i) $x \geq 0$ ii) $y \geq 0$ iii) $z \geq 0$ iv) $x \leq 4$ v) $y \leq 8$ vi) $z \leq 8$

En este caso, la región factible está representada por la figura. (Fig.141)



(Fig.141)

La solución del sistema lo comprende el paralelepípedo OABCDEFG que incluye las seis caras del mismo. En este caso la solución es un poliedro acotado.

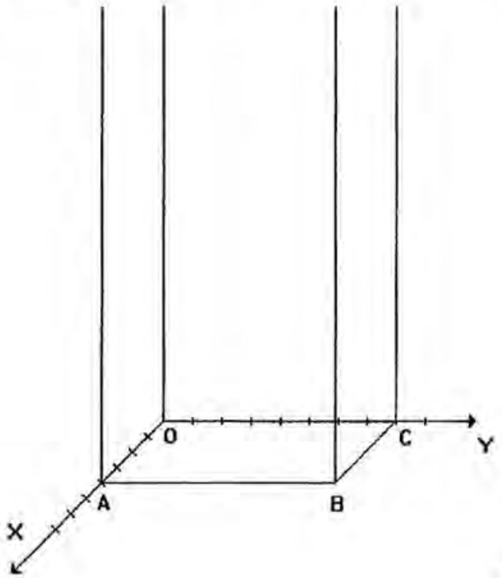
Ejemplo 3.

Supongamos que en el ejemplo del sistema anterior se eliminara la desigualdad vi, entonces el nuevo sistema es:

i) $x \geq 0$ ii) $y \geq 0$ iii) $z \geq 0$ iv) $x \leq 4$ v) $y \leq 8$

En este caso su gráfica está representada en la figura 142.

Obviamente la solución del sistema lo comprende el poliedro no acotado OABC.

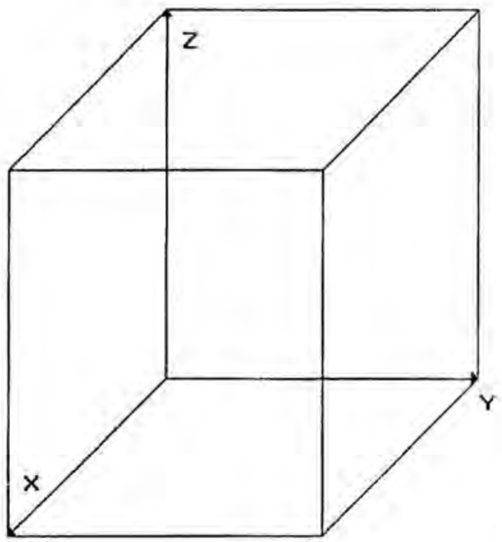


(Fig.142)

Ejemplo 4.

Consideremos ahora el sistema formado por i), ii), iii) es decir:

i) $x \geq 0$ ii) $y \geq 0$ iii) $z \geq 0$ (Fig.143)



(Fig.143)

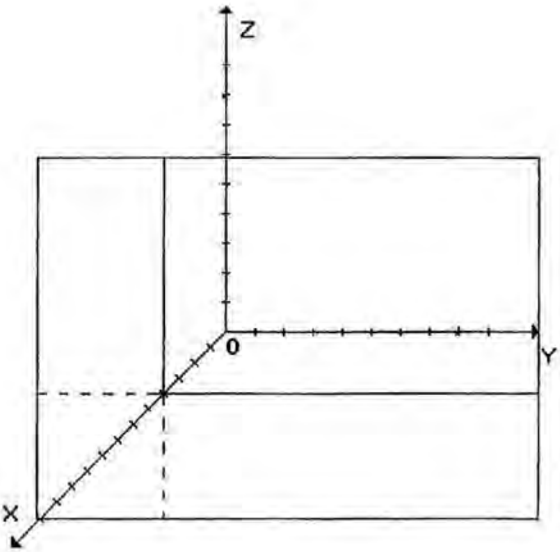
La solución del sistema es el primer octante (semiespacio formado por los planos coordenados).

Ejemplo 5.

La solución del sistema formado por

i) $x>4$ y ii) $x<4$

es obviamente el plano x = 4. (Fig.144).



(Fig.144)

6.8 Conjuntos Convexos.

Definición.

Un conjunto $S \subseteq R^3$ es convexo si y solo si para todo punto $P_1, P_2 \in S$, $\overline{P_1 \cdot P_2} \subseteq S$.
Esto es, un conjunto es convexo si y solo si contiene al segmento entre dos puntos cualquiera del conjunto.

Consideremos el plano ρ con ecuación cartesiana.

$$\rho \ : Ax + By + Cz + D = 0$$

Entonces ρ determina una partición de R^3 formada por dos semiespacios R_1 y R_2

$$R_1 = \{ \ P(x, y, z) \mid Ax + By + Cz + D > 0 \ \}$$

$$R_2 = \{ \ P(x, y, z) \mid Ax + By + Cz + D < 0 \ \}$$

Probaremos que ρ, R_1 y R_2 son conjuntos convexos. Para ello, antes demostraremos el siguiente lema.

Lema.

Sean $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ puntos en el espacio, $P(x, y, z)$ un punto en el intervalo $\overline{P_1P_2}$ y $f(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$. Hay un t, con $0 \le t \le 1$, tal que

$$f(x, y, z) = (1 - t)\cdot f(x_1, y_1, z_1) + t\cdot f(x_2, y_2, z_2)$$

Demostración.

Como $P(x, y, z) \in \overline{P_1 P_2}$, entonces existe t con $0 \le t \le 1$ tal que

$$x = x_1 + t\cdot(x_2 - x_1)$$

$$y = y_1 + t\cdot(y_2 - y_1)$$

$$z = z_1 + t\cdot(z_2 - z_1)$$

y $0 \le t \le 1$. Por lo tanto

$$f(x, y, z) = A\cdot[x_1 + t\cdot(x_2 - x_1)] + B[y_1 + t\cdot(y_2 - y_1)] + C[z_1 + t\cdot(z_2 - z_1)] + D$$

$$f(x, y, z) = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + t(Ax_2 + By_2 + Cz_2) - t(Ax_1 + By_1 + Cz_1) + D$$

(Sumando Dt, -Dt y factorizando)

$$f(x, y, z) = f(x_1, y_1, z_1) + t[(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) - (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)]$$

$$f(x, y, z) = f(x_1, y_1, z_1) + t\cdot(f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1))$$

$$f(x, y, z) = (1 - t)\cdot f(x_1, y_1, z_1) + t\cdot f(x_2, y_2, z_2)$$

Teorema.

Los conjuntos $\wp$, R_1 y R_2 son conjuntos convexos.

Demostración.

Probaremos primero que el semiespacio R_1 es un conjunto convexo.

Sean $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ puntos de R_1 y sea $P(x, y, z) \in \overline{P_1P_2}$.

Por el Lema anterior, existe t (con $0 \le t \le 1$) tal que

$$f(x, y, z) = (1-t)\cdot f(x_1, y_1, z_1) + t\cdot f(x_2, y_2, z_2)$$

Por hipótesis

$$f(x_1, y_1, z_1) > 0 \quad y \quad f(x_2, y_2, z_2) > 0.$$

Ademas t y $t-1$ son positivos, de donde se sigue que

$(1-t)\cdot f(x_1, y_1, z_1) + t\cdot f(x_2, y_2, z_2) > 0$, así que $f(x, y, z) > 0$

Por tanto $P(x, y, z) \in R_1$ y $\overline{P_1P_2} \subseteq R_1$. Conclusión : R_1 es un conjunto convexo.

Asi mismo, $\wp$ es un conjunto convexo, por definición, ya que dados P_1 y P_2 en $\wp$, sabemos que $\overline{P_1P_2} \subseteq \wp$

(De hecho ya habíamos probado que un semiplano era convexo.)

Para probar que R_2 es un conjunto convexo se procede de la misma manera que para R_1.

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

6.9 Programación Lineal en tres Variables.

Como ya se mencionó, el problema central de la programación lineal es el siguiente dada una región o solución factible (representada en este caso por un poliedro convexo R definido por un sistema de desigualdades lineales), hallar los puntos factibles en los cuales una expresión lineal toma valores extremos (máximos y mínimos) llamados *soluciones optimas*.

Consideremos el caso de una función lineal en tres variables.

$F(x, y, z) = Ax + By + Cz$

Para la cual se quiere encontrar el conjunto de puntos (x_1, y_1, z_1) de la región factible R, en los que la función toma sus valores máximo y mínimo.

Sea $\rho : Ax + By + Cz = 0$ el plano que pasa por el origen y es perpendicular al vector (A, B, C).

Al desplazar el plano paralelamente a sí mismo, en realidad lo que se hace es desplazarlo en la dirección del vector (A, B, C).

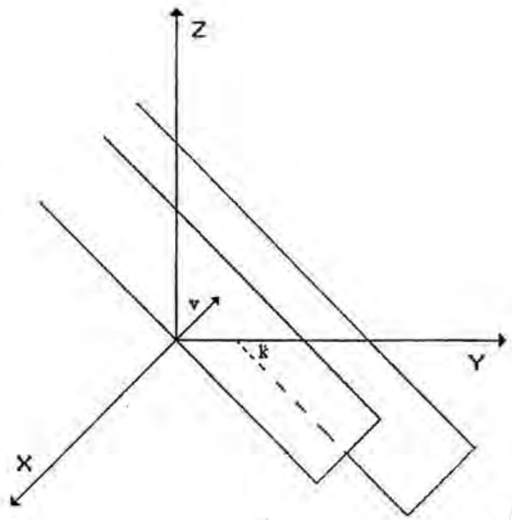
A medida que nos alejamos del origen. La distancia entre ρ y el origen aumenta, al igual que el valor de la constante D (término independiente).
Dado que por lo menos uno de los coeficientes es distinto de cero, (digamos B)
Podemos escribir la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ en la forma:

$$y = \frac{A}{B}x - \frac{C}{B}z - \frac{D}{B} \qquad \text{donde} \quad k = \frac{D}{B}$$

Como $D = -kB$, la ecuación puede ser escrita como:

$Ax + By + Cz - kB = 0$ o bien, $Ax + By + Cz = kB$

Obviamente, el valor de $Ax + By + Cz$ es una constante en cada uno de estos planos.(Fig.145)



(Fig.145)

Supongamos que al mover el plano este encuentra primero al poliedro en el vértice $A(a_1, a_2, a_3)$. En esta posición ρ se convierte en un plano de apoyo (se dice que un plano de apoyo cuando intercepta algún vértice del poliedro solución).

$$\rho : A(a_1) + B(a_2) + C(a_3) = B \cdot k_1$$

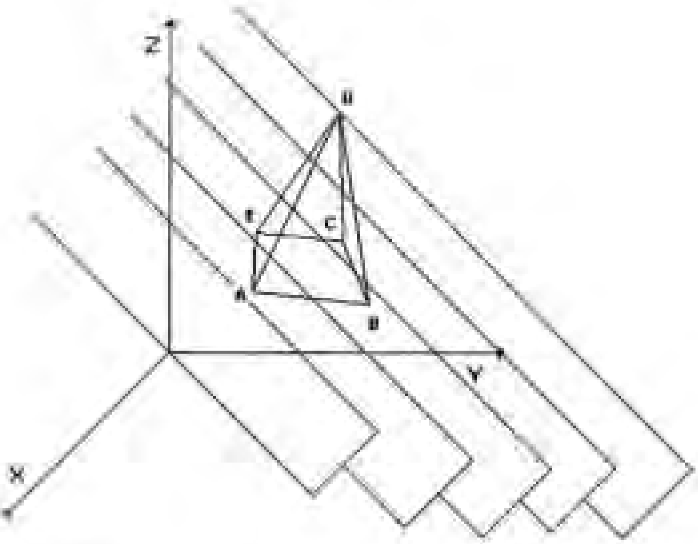
donde ρ toma el valor de Bk_1, es decir $f(a_1, a_2, a_3) = B \cdot k_1$

Conforme se mueve en la misma dirección pasando por los vértices B, E, C y D, el plano ρ se convierte sucesivamente en un plano de apoyo.

No obstante, que cada vez que desplazamos el plano paralelamente en la dirección del vector $v = (A, B, C)$, el valor de D aumenta, es decir, el valor de la función lineal crece.

En otras palabras, si $B(b_1,b_2,b_3), C(c_1,c_2,c_3), D(d_1,d_2,d_3), E(e_1,e_2,e_3)$ son vértices del poliedro solución.

$f(a_1,a_2,a_3) = B \cdot k_1 < f(b_1,b_2,b_3) = B \cdot k_2 < f(e_1,e_2,e_3) = B \cdot k_3 < f(c_1,c_2,c_3) = B \cdot k_4$
$< f(d_1,d_2,d_3) = B \cdot k_5$



(Fig.146)

Por tanto la función lineal f toma su valor mínimo en A, y su máximo en D.

Se sigue que, los valores mínimo y máximo de una función lineal f : Ax + By + Cz sobre un poliedro solución se adquieren cuando se toca un último vértice de la región factible, pues si el último contacto del plano de apoyo Ax + By + Cz = Bk es un polígono (es decir una de sus caras) este pasa por un vértice en el que la función toma el mismo valor , (en los puntos del interior, basta con mover el plano hacia arriba y hacia abajo para obtener valores más grandes o más pequeños, por lo que concluimos que los puntos óptimos se ubican sobre los vértices de la región factible.

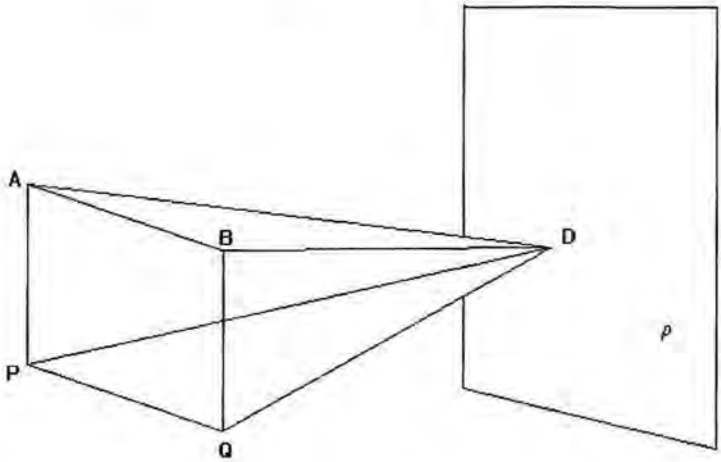
Nótese lo siguiente :

La intersección del plano μ con el poliedro de soluciones puede consistir en

i) Un solo punto (un vértice del poliedro, posiblemente en el infinito)

ii) Un conjunto infinito de puntos (en cuyo caso la intersección es una arista o bien una cara del poliedro)

En la siguiente figura se ilustra un caso donde f toma su mínimo para el poliedro en cada punto de la cara A B Q P , y su máximo en el punto D. (Fig.147).



(Fig.147)

Teorema fundamental de la programación lineal en tres variables.

El mínimo o el máximo entre las soluciones de un sistema de desigualdades lineales se encuentra en un vértice de la región factible.

Para demostrar el teorema de la programación lineal probaremos antes el siguiente lema.

Lema

Sean P_1 (x_1, y_1, z_1) y P_2 (x_2, y_2, z_2) dos puntos en el espacio.

Q (x', y', z') un punto en el segmento de recta $\overline{P_1 P_2}$, y f : Ax + By + Cz una función lineal.

Si $m_1 = Ax_1 + By_1 + Cz_1$, $m_2 = Ax_2 + By_2 + Cz_2$ y $m_1 \leq m_2$, entonces

$m_1 \leq Ax' + By' + Cz' \leq m_2$

En otras palabras, el valor de la expresión $Ax + By + Cz$ en Q está comprendido entre sus valores en P_1 y P_2.

Demostración

Como $Q \in \overline{P_1P_2}$ tenemos

$$\begin{aligned} x' &= x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y' &= y_1 + t(y_2 - y_1) \qquad \text{con} \quad 0 \le t \le 1 \\ z' &= z_1 + t(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

Entonces

$$Ax' + By' + Cz' = A\,(x_1 + t(x_2 - x_1)) + B\,(y_1 + t(y_2 - y_1)) + C\,(z_1 + t(z_2 - z_1))$$

$$Ax' + By' + Cz' = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + t(\,Ax_2 + By_2 + Cz_2\,) - t\,(Ax_1 + By_1 + Cz_1)$$

$$Ax' + By' + Cz' = m_1 + t\,(m_2 - m_1) \qquad (1)$$

Por otra parte Q también puede expresarse como

$$\begin{aligned} x' &= x_2 + t(x_1 - x_2) \\ y' &= y_2 + t(y_1 - y_2) \qquad \text{con} \quad 0 \le t \le 1 \\ z' &= z_2 + t(z_1 - z_2) \end{aligned}$$

entonces

$$Ax' + By' + Cz' = A\,(x_2 + t(x_1 - x_2)) + B\,(y_2 + t(y_1 - y_2)) + C\,(z_2 + t(z_1 - z_2))$$

$$Ax' + By' + Cz' = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + t(\,Ax_1 + By_1 + Cz_1\,) - t\,(Ax_2 + By_2 + Cz_2)$$

$$Ax' + By' + Cz' = m_2 - t\,(m_2 - m_1) \qquad (2)$$

Como $0 \le t \le 1$ y $m_2 - m_1 \ge 0$ de (1) y (2) tenemos

$$Ax' + By' + Cz' = m_2 - t\,(m_2 - m_1) \le m_2 \quad \text{y} \quad m_1 \le m_1 + t\,(m_2 - m_1) = Ax' + By' + Cz'$$

Por lo tanto $m_1 \le Ax' + By' + Cz' \le m_2$

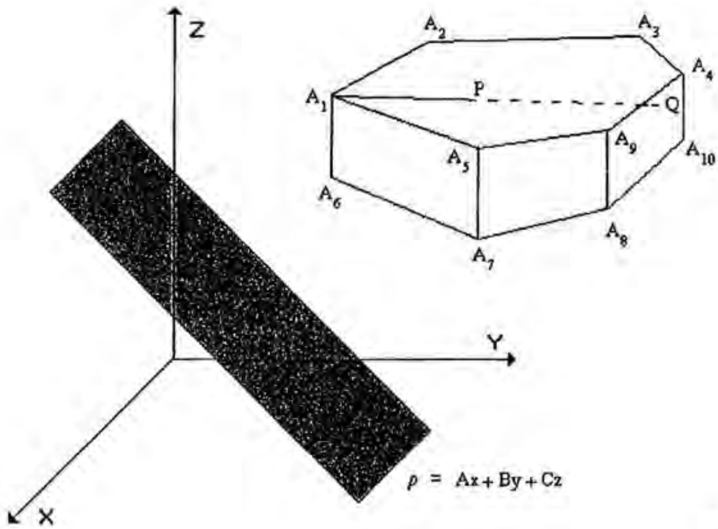
Teorema fundamental de la programación lineal en tres variables.

Demostración.

Supongamos que el poliedro convexo R tiene n vértices, $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ y que $m_1, m_2, m_3, ..., m_n$ son los valores que toma en ellos la expresión lineal Ax + By + Cz.

Sea m el mínimo y M el máximo de esos n valores y supongamos que el valor m ocurre en A_1.

Sea P otro punto cualquiera de R, diferente de A_1. Trácese $\overline{A_1P}$. La convexidad de R asegura que si $\overline{A_1P}$ se prolonga, va a cruzar nuevamente la frontera de R en un solo punto Q.

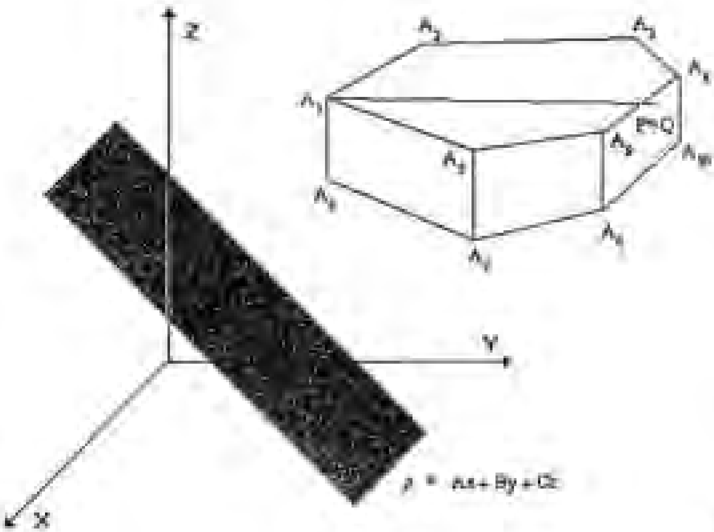


(Fig.148)

Si P no está en la frontera, por el lema anterior sabemos que el valor de Ax + By + Cz en P está comprendido entre los valores que toma en A_1 y en Q, y por lo consiguiente entre m y M.

Si P está en la frontera, entonces P = Q y como Q pertenece a la cara del poliedro que une dos o más vértices, se deduce del lema que el valor de Ax + By + Cz en Q está comprendido entre los valores que toma en dicho vértices, o consecuentemente entre m y M.

Por lo tanto, los valores máximo y mínimo que Ax + By + Cz puede tomar se hallan en los vértices de R, y para determinarlos, basta con encontrar los vértices del poliedro solución.
(Fig.149).



(Fig.149)

6.10 Método Simplex.

El método gráfico no es practico en problemas con más de dos variables. Existe una técnica algebraica que aplicada a cualquier número de variables y ecuaciones y que se utiliza para resolver problemas de programación lineal. Esta técnica es llamada *método simplex*.

En nuestro estudio sólo emplearemos ecuaciones de tres variables, dado que estamos trabajando en el espacio. Básicamente esta técnica consiste en modificar las restricciones que tiene un sistema de ecuaciones lineales y encontrar soluciones selectas del sistema lineal.

Recordemos que podemos resolver un sistema lineal de ecuaciones usando una matriz aumentada y reduciéndola con operaciones de renglón. (Ver apéndice A).

El método simplex sigue un procedimiento similar. Introduciremos el método simplex con un ejemplo en R^2 y al mismo tiempo nos referiremos al método gráfico para ilustrar los pasos involucrados.

Ejemplo 1.

Maximizar la *función objetivo* $z = 4x + 12y$

sujeta a las restricciones

$$\begin{aligned} 3x + y &\le 180 \\ x + 2y &\le 100 \\ -2x + 2y &\le 40 \\ x \ge 0,\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

En este caso podemos escribir un sistema de ecuaciones como una ecuación matricial de la forma $AX = B$. Así mismo, la función objetivo se puede expresar usando matrices.

Esto es, $z = 4x + 12y$ se puede escribir como:

$$z = (4, 12)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Y las restricciones

$$3x + y \leq 180$$

$$x + 2y \leq 100$$

$$-2x + 2y \leq 40$$

se pueden escribir como

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 180 \\ 100 \\ 40 \end{bmatrix}$$

De la misma manera, las condiciones no negativas se pueden escribir como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La notación $A \leq B$, donde A y B son matrices, significa que todo elemento de A es menor o igual al correspondiente elemento de B.

Sean X es la matriz columna de variables $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$,

A la matriz de los coeficientes de las restricciones, $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ y

B la matriz columna de los términos constantes de las restricciones, $B = \begin{bmatrix} 180 \\ 100 \\ 40 \end{bmatrix}$

Por último, sea $C = (4, 2)$ la matriz renglón de los coeficientes de la función objetivo. Ahora podemos escribir el problema de maximizar como sigue:

Maximizar CX sujeta a $AX \le B$, donde $X \ge 0$

Resolvamos el problema por el método gráfico

El problema es maximizar $z = 4x + 12y$ sujeta a

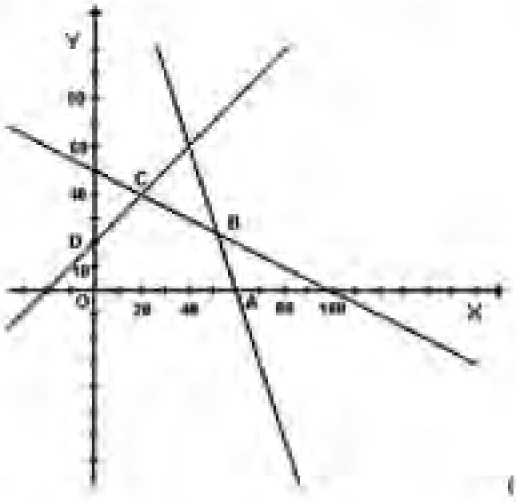
$$\begin{aligned} 3x + y &\le 180 \\ x + 2y &\le 100 \qquad x \ge 0,\ y \ge 0 \\ -2x + 2y &\le 40 \end{aligned}$$

Nótese que la región factible esta formada por las rectas

$L_1 : 3x + y = 180$; $L_2 : x + 2y = 100$; $L_3 : -2x + 2y = 40$

$L_4 : x = 0$ y $L_5 : y = 0$

La región factible se muestra en la figura 150



(Fig 150)

En la gráfica, buscamos los vértices del polígono convexo o región factible, ya que sabemos que en ellos hallaremos los valores óptimos.
En este caso, los vértices son los puntos O(0,0), A (60,0), B (52,24), C (20,40), D (0,20)
De donde

$$O = L_4 \cap L_5\ ,\ A = L_1 \cap L_5\ ,\ B = L_1 \cap L_2\ ,\ C = L_2 \cap L_3 \ \text{y}\ D = L_3 \cap L_4$$

Para representar puntos del interior de la región factible, introducimos nuevas variables llamadas variables auxiliares.

Nótese lo siguiente:

La primera restricción $3x + y \leq 180$, es verdadera para la pareja de números $x = 10$, $y = 20$.

En general, si para cualquier par de valores x, y, se cumple $3x + y \leq 180$, entonces hay un número s_1 tal que $3x + y + s_1 = 180$. Llamamos a s_1 una variable auxiliar porque toma un valor entre $3x + y$ y 180. El valor de s_1 no es negativo.

Así, en cada restricción podemos sumar variables no negativas obteniendo de este modo un conjunto de ecuaciones lineales.
Adicionando variables auxiliares en las restricciones de nuestro problema tenemos:

$$\begin{aligned} 3x + y + s_1 &= 180 \\ x + y + s_2 &= 100 \qquad \text{\_\_\_(\#)} \\ -2x + 2y + s_3 &= 40 \end{aligned}$$

$x \geq 0, y \geq 0, s_1 \geq 0, s_2 \geq 0, s_3 \geq 0$

Obsérvese que, cuando valores no negativos de x, y, s_1 son dados para satisfacer $3x + y + s_1 = 180$, entonces el punto obtenido con los valores de x e y satisface la restricción $3x + y \leq 180$.
Sin embargo, x e y forman un punto interior. Por ejemplo, el punto interior (20, 30), con losparámetros

$s_1 = 90$ $s_2 = 20$ y $s_3 = 20$ satisfacen el sistema de ecuaciones...(#)

Obviamente, sólo aquellas soluciones en las cuales todas las variables (x, y, s_1, s_2, s_3) sean no negativas, satisfacen el sistema de ecuaciones.

La función objetivo debe ser incluida en el sistema de ecuaciones dado que el interés es encontrar el valor z con la solución del sistema.

Por tanto, la función objetivo $z = 4x + 12y$ se modifica a $-4x - 12y + z = 0$ y se le incluye

en el sistema ...(#) quedando el sistema como sigue:

$$\begin{array}{rcl}
3x + y + s_1 & = & 180 \\
x + y \quad + s_2 & = & 100 \quad \text{.......(##)} \\
-2x + 2y \qquad + s_3 & = & 40 \\
-4x - 12y \qquad\quad + z & = & 0
\end{array}$$

En resumen:

1.- Se introduce una variable auxiliar en cada restricción.
2.- El número total de variables en el sistema es el número original de variables, más las variables auxiliares y la variable z, (En este caso es 2+3+1= 6).
3.- Al introducir variables auxiliares el resultado es que hay más variables que ecuaciones. Esta situación generalmente lleva a un número infinito de soluciones. Por lo cual es un hecho que cada variable de cada ecuación puede escribirse en términos de las otras.

Una forma general de solución ocurre cuando resolvemos para s_1, s_2, s_3, y z en términos de x e y .

Esto es,

$$\begin{aligned}
s_1 &= 180 - 3x - y \\
s_2 &= 100 - x - 2y \\
s_3 &= 40 + 2x - 2y \\
z &= \quad 4x + 12y
\end{aligned}$$

Una solución particular cada vez que se sustituyen valores para x e y.

Por ejemplo si $x = 0$ y $y = 0$ obtenemos

$$s_1 = 180,\ s_2 = 100,\ s_3 = 40 \text{ y } z = 0$$

Nótese que z toma un valor mínimo cuando $x = 0$ y $y = 0$ dado que $z \geq 0$.

Usando matrices y operaciones de renglón para determinar la solución optima, tenemos que la matriz aumentada del sistema ......(##) es:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 180 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 40 \\ \hline -4 & -12 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Esta es la tabla inicial simplex. La línea dibujada entre el tercer renglón y el cuarto renglón enfatiza que el último renglón es la función objetivo.

Nótese que en la tabla inicial simplex las columnas unitarias ocurren en las columnas de s_1, s_2, s_3.

Modificaremos la tabla inicial de tal modo que la nueva tabla tenga una solución básica factible que incremente el valor de z.

Este paso requiere la selección de un elemento de la matriz llamado pivote y se localiza como sigue:

a) Para seleccionar la columna que tiene el elemento pivote, hacemos lo siguiente:

Seleccionamos el entero más negativo del último renglón (función objetivo)

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x & y & s_1 & s_2 & s_3 & z \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccc|c}
3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 180 \\
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
-2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 40 \\
\hline
-4 & -12 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right) \\
\begin{array}{cccccc} & \uparrow & & & & \end{array}
\end{array}$$

En este caso se trata del número -12 a continuación, hacemos de la segunda columna la columna pivote, pues ésta contiene al elemento pivote.

Ahora determinamos cual renglón contiene al elemento pivote.
Para seleccionar el renglón llamado renglón pivote procedemos como sigue:

Se divide cada constante de la última columna, por el correspondiente entero de la columna pivote.
Operaciones.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 180 \\
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\
-2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 40 \\
\hline
-4 & -12 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right) \qquad \boxed{\frac{180}{1} = 180} \qquad \frac{40}{2} = 20 \qquad \frac{100}{2} = 50$$

En este ejemplo todas las razones son positivas. Sin embargo, las razones negativas o cero pueden ocurrir, en cuyo caso se desprende lo que sigue:

i) Si la razón es negativa, no se usa el renglón como renglón pivote.

ii) Si todas las razones son positivas, se selecciona la razón menor (en este caso 20).
Y el renglón que contiene esta razón es el renglón pivote.

iii) Si una razón es cero, vemos si fue obtenida de la división entre un entero positivo.
Si tal es el caso, ese renglón es un renglón pivote. Si el cero se obtiene de la división entre un número negativo, ese renglón no es un renglón pivote.

En nuestro ejemplo todas las razones son positivas, y la menor es 20, por lo que el renglón pivote es en este caso el tercer renglón.

Entonces el entero 2 que está en el tercer renglón (renglón pivote) y segunda columna (columna pivote) es el elemento pivote.

b) El siguiente paso consiste en convertir el elemento pivote en el número 1 y el resto de los elementos de la columna pivote en ceros. A este procedimiento se le llama *pivotear*.

Así, en el ejemplo, para pivotear al 2 usaremos operaciones de renglón para modificar la tabla.

Esto es, multiplicando el tercer renglón por $\frac{1}{2}$ se tiene

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 180 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 20 \\ \hline -4 & -12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\frac{1}{2}\cdot R_3\right) \rightarrow \quad R_3$$

Ahora introducimos ceros en los otros lugares de la columna pivote (en este caso 1 y 2). Para esto usamos las operaciones de renglón como sigue:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 160 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 100 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 20 \\ \hline -4 & -12 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(-1\cdot R_3\right) + R_1 \rightarrow R_1$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 160 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 60 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 20 \\ \hline -4 & -12 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(-2\cdot R_3\right) + R_2 \rightarrow R_2$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 160 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 60 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 20 \\ \hline -16 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 240 \end{array}\right)$$

c) El último paso consiste en verificar si el último renglón contiene algún coeficiente negativo , ya que si este es el caso, z no puede ser máximo.

Dado que en el ejemplo -16 es un coeficiente negativo del último renglón, entonces 240 no es un valor máximo de z. Emplearemos nuevamente el mismo procedimiento a, b, c para hallar el valor máximo de z.

a) La columna pivote es la primera, dado que -16 es el entero más negativo del último renglón.

Dividiendo los elementos de la última columna entre los elementos de la columna pivote se tiene:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 160 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 60 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 20 \\ \hline -16 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 240 \end{array}\right) \qquad \frac{160}{4} = 40 \qquad \frac{20}{1} = -20 \qquad \frac{60}{3} = 20$$

La menor razón positiva es 20. Por lo tanto, el renglón pivote es el segundo renglón. De esta forma el 3 que se encuentra en el segundo renglón, y la primera columna es el elemento pivote.

b) Usamos nuevamente las operaciones renglón para obtener un 1 en la posición del elemento pivote y hacer ceros en el resto de los elementos de la columna pivote esto es:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 4 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 160 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & 20 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 20 \\ \hline -16 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 240 \end{array}\right) \qquad \left(\frac{1}{3}\cdot R_2\right) \rightarrow R_2$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & -4/3 & 5/6 & 0 & 80 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & 20 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 20 \\ \hline -16 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 240 \end{array}\right) \qquad \left(-4\cdot R_2\right) + R_1 \rightarrow R_1$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & -4/3 & 5/6 & 0 & 80 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/6 & 0 & 40 \\ \hline -16 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 240 \end{array}\right) \qquad R_2 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & 1 & -4/3 & 5/6 & 0 & 80 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/6 & 0 & 40 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 16/3 & 2/3 & 1 & 560 \end{array}\right) \qquad \left(16 \cdot R_2\right) + R_4 \rightarrow R_4$$

La tabla final nos representa el sistema:

$$\begin{array}{lcl} s_1 - \frac{4}{3} \cdot s_2 + \frac{5}{6} \cdot s_3 & = & 80 \\ x + \frac{1}{3} \cdot s_2 - \frac{1}{3} \cdot s_3 & = & 20 \\ y + \frac{1}{3} \cdot s_2 + \frac{1}{6} \cdot s_3 & = & 40 \\ \frac{16}{3} \cdot s_2 + \frac{2}{3} \cdot s_3 + z & = & 560 \end{array}$$

Donde las columnas de las variables x, y, s_1, y z son unitarias.

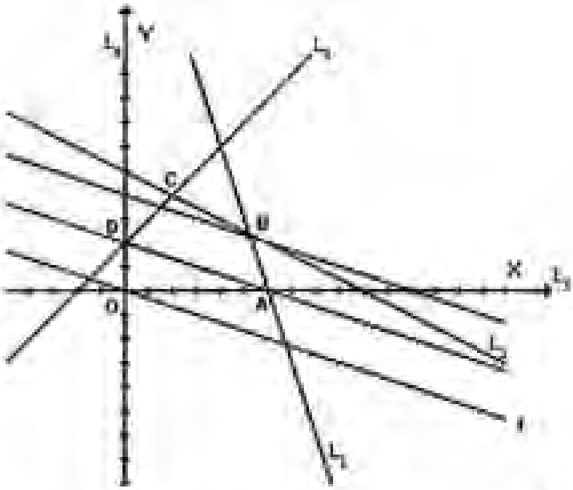
Por lo tanto una solución se obtiene si sustituimos $s_2 = s_3 = 0$ y resolvemos para las otras variables

$x = 20$, $y = 40$, $s_1 = 80$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$, $z = 560$

Como el valor de z puede incrementarse sólo cuando hay un valor negativo en el último renglón, y en la tabla final, no hay ningún número negativo en el último renglón, entonces

$z = 560$ es el máximo valor de z.

Veamos la gráfica del ejemplo en la figura 151.



(Fig.151)

Gráficamente la función objetivo z alcanza su máximo en el punto C cuando $x = 20$ y $y = 40$. Dado que, $z = 4\,(20) + 12\,(40) = 560$.

VII Transformación de Coordenadas.

La ecuación de una figura geométrica en cada caso depende de su posición en relación al sistema de ejes coordenados considerado. Es así que en varios problemas se puede aclarar el planteamiento de los mismos, o se pueden simplificar las ecuaciones de las curvas, si se cambian los ejes coordenados con respecto a los cuáles se dan los datos del problema considerando a otro sistema que, por ciertas razones, resulta ser más conveniente.

A este cambio se le da el nombre de *transformación de coordenadas*.

En el cambio de ejes coordenados se distinguen dos casos fundamentales:

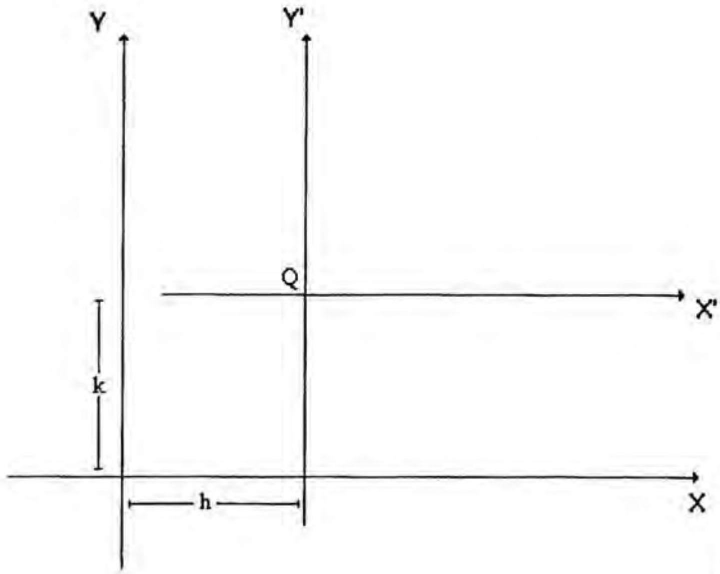
a) Traslación de ejes coordenados.

b) Rotación de ejes coordenados.

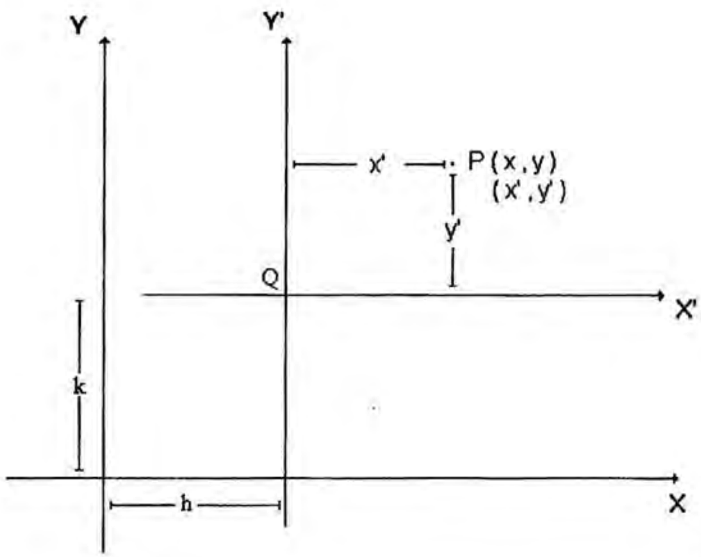
7.1 Traslación de Ejes Coordenados.

Sean X , Y los ejes originales. Traslademos estos ejes paralelamente de tal manera que el origen coincida con el punto Q (h, k) al cual designaremos con O'. De esta manera obtenemos los nuevos ejes X' , Y' (Fig. 152).

Al resultado de deslizar los ejes X , Y paralelamente, h unidades horizontalmente y k unidades verticalmente, de tal manera que el origen coincida con el punto Q se le llama *traslación de ejes*.
Esta traslación de ejes asigna a cada punto P (x, y) del plano un nuevo par de coordenadas (x', y'). Esto es, el punto P con coordenadas (x, y) respecto a los ejes X , Y , tendrá coordenadas (x' , y') respecto a los nuevos ejes X' , Y'. (Fig.153)



(Fig.152)



(Fig.153)

De las figuras anteriores tenemos que $x = x' + h$, $y = y' + k$

Por lo tanto las coordenadas de un punto cualquiera P respecto a los ejes X , Y y respecto a los ejes X' , Y' están ligadas por las relaciones:

$$\begin{aligned} x &= x' + h \\ y &= y' + k \end{aligned} \qquad (1) \qquad \text{o bien} \qquad \begin{aligned} x' &= x - h \\ y' &= y - k \end{aligned}$$

Las fórmulas (1) permiten obtener la ecuación de una curva en relación al nuevo sistema de ejes X' , Y' . Mientras que (2) proporciona las nuevas coordenadas, conocidas las antiguas y las coordenadas del nuevo origen.

Las fórmulas de traslación se emplean por ejemplo, en el estudio de circunferencias cuyos centros no están en el origen, o en el de parábolas, elipses e hipérbolas cuyos ejes sean paralelos a los ejes coordenados pero que estén colocadas en posición diferente a la ordinaria. Además, como ya lo mencionamos antes, también se utilizan en la simplificación de algunas curvas.

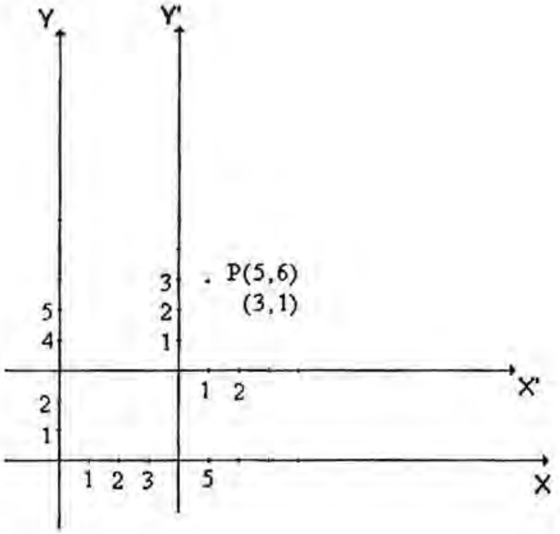
Ejemplo 1.

¿ Cuáles son las coordenadas de un punto P (5,6) respecto de un nuevo sistema de ejes paralelos a los ejes dados y con el origen en el punto Q (4, 3) ?

Empleando las ecuaciones (2) tenemos:

$x' = 5 - 4 = 1$; $y' = 6 - 3 = 3$

Por lo tanto las coordenadas de P respecto a los nuevos ejes X' , Y' son (1 , 3)



(Fig.154)

Ejemplo 2.

Transformemos la ecuación $x^2 + y^2 -2x + 6y -5 = 0$ mediante una traslación de ejes coordenados de modo que la nueva ecuación carezca de términos de primer grado. Trácese su lugar geométrico y ambos sistemas de ejes coordenados.

Solución:

Primer método:

Sustituyendo los valores de x e y con base en las fórmulas (1) en la ecuación dada tenemos :

$$(x'+h)^2 + (y'+k)^2 - 2(x'+h) + 6(y'+k) - 5 = 0$$

desarrollando y agrupando términos semejantes obtenemos

$$(x')^2 + (y')^2 + (2h-2)\cdot x' + (2k+6)\cdot y' + h^2 + k^2 - 2h + 6k - 5 = 0$$

Como la ecuación transformada debe carecer de términos de primer grado, igualemos a cero los coeficientes de x′ y y′ en la ecuación anterior:

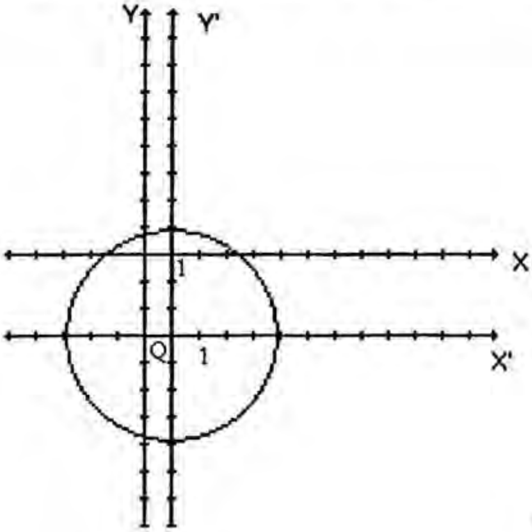
$2h - 2 = 0$ y $2k + 6 = 0$ de donde $h = 1$ y $k = -3$

Por lo tanto el nuevo origen es el punto Q(1, -3)

Si sustituimos estos valores h y k en la ecuación dada obtenemos la ecuación transformada:

$(x')^2 + (y')^2 = 15$

La gráfica de la curva, que en este caso es una circunferencia, es la que aparece en la fig. 155.



(Fig.155)

Segundo Método.

En el caso de ecuaciones de segundo grado que carezcan del término en xy , es posible efectuar la transformación completando los cuadrados.

Completando cuadrados en la ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 5 = 0$ obtenemos:

$$\left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(y^2 + 6y + 9\right) = 5 + 1 + 9$$

de donde

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 15$$

Si en la ecuación anterior hacemos las sustituciones $x' = x - 1$, $y' = y + 3$ (#)

obtenemos la ecuación transformada

$$(x')^2 + (y')^2 = 15$$

Es claro que de las ecuaciones (#) se deducen las ecuaciones de traslación.

$x = x' + 1$, $y = y' - 3$

Ejemplo 3.

Mediante una traslación de ejes, transfórmese la ecuación $2xy + 3x - 4y - 12 = 0$ en otra que carezca de términos de primer grado.

Solución.

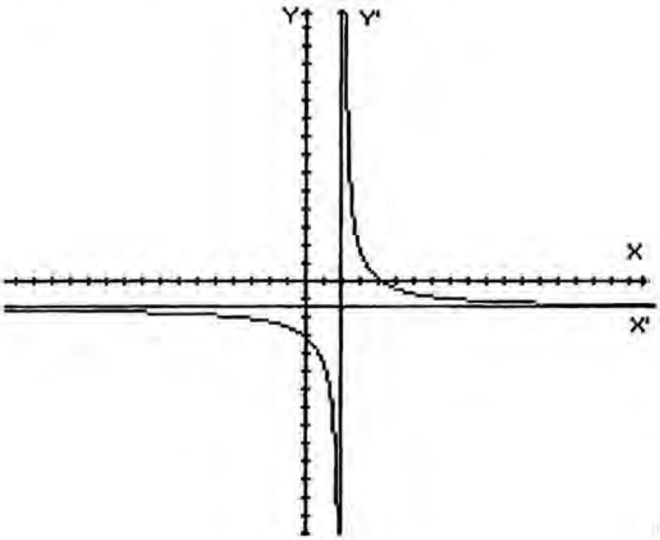
Sustituyendo las ecuaciones de traslación en la ecuación dada tenemos

$$2(x'+h)\cdot(y'+k) + 3(x'+h) - 4(y'+k) = 12$$

multiplicando y factorizando obtenemos

$$2\cdot x'\cdot y' + (2k+3)\cdot x' + (2h-4)\cdot y' + 2hk + 3h - 4k = 0$$

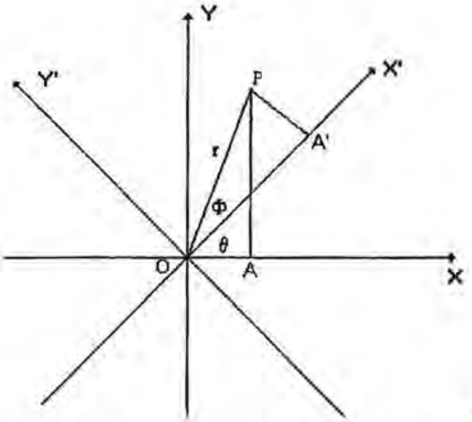
Para eliminar el término en x′ y el término en y′ , iguálense sus coeficientes con cero, de donde resulta que $h = 2$ y $k = -\frac{3}{2}$. Evaluando los coeficientes de la ecuación con estos valores de h y k tenemos que $x'y'=3$, la ecuación transformada, misma que representa a una hipérbola. (Fig.156)



(Fig. 156)

7.2 Rotación de Ejes Coordenados.

Sean X , Y los ejes originales y X' , Y' los nuevos ejes después de haber girado los ejes X , Y un ángulo θ tomando al origen como centro de rotación. (Fig. 157)



(Fig.157)

Sea P un punto en el plano con coordenadas (x, y) respecto al sistema X , Y , y con coordenadas (x',y') respecto al nuevo sistema X' , Y'.

Desde P tracemos la ordenada AP correspondiente al sistema X, Y , la ordenada A'P correspondiente al sistema X, Y , la ordenada correspondiente al sistema X' ,Y' y unamos P con el origen formando el segmento OP.
Con ello se forman los triángulos rectángulos OPA' y OPA.

Sea Φ =ángulo POA' y sea r la longitud del segmento $\overline{OP}$

Del triángulo OPA tenemos

$$\cos(\Phi + \theta) = \frac{x}{r} \quad \text{de donde} \quad x = r\cdot\cos(\Phi + \theta) \quad (1)$$

$$\operatorname{sen}(\Phi + \theta) = \frac{y}{r} \quad \text{de donde} \quad y = r\cdot\operatorname{sen}(\Phi + \theta) \quad (2)$$

Del triángulo OPA' se tiene

$\cos\phi = \frac{x'}{r}$ de donde $x' = r \cdot \cos\phi$ (3)

$\text{sen}\phi = \frac{y'}{r}$ de donde $y' = r \cdot \text{sen}\phi$ (4)

el término $\cos(\phi + \theta)$ conforme a la identidad trigonométrica para el coseno de una suma de ángulos obtenemos:

$x = r \cdot \cos(\phi + \theta) = r \cdot (\cos\phi \cdot \cos\theta - \text{sen}\phi \cdot \text{sen}\theta)$

Análogamente de (2) se tiene

$y = r \cdot \text{sen}(\Phi + \theta) = r \cdot (\text{sen}\Phi \cdot \cos\theta + \cos\Phi \cdot \text{sen}\theta)$

$= r \cdot \text{sen}\Phi \cdot \cos\theta + r \cdot \cos\Phi \cdot \text{sen}\theta$ sustituyendo (3) y (4) tenemos

$x = y^1 \cdot \cos\theta - x^1 \cdot \text{sen}\theta$

o bien $x = x^1 \cdot \text{sen}\theta + y^1 \cdot \cos\theta$

Por lo tanto las ecuaciones

$x = x^1 \cdot \cos\theta - y^1 \cdot \text{sen}\theta$ (#)

$y = x^1 \cdot \text{sen}\theta + y^1 \cdot \cos\theta$

son las ecuaciones de una transformación por rotación de un sistema de ejes coordenados, con un giro de θ en torno de su origen como centro de rotación.

Estas ecuaciones nos permiten calcular las coordenadas originales conociendo las nuevas y el ángulo de giro. Además se utilizan para obtener la ecuación de una curva en el nuevo sistema de ejes X' , Y' .
A partir de estas ecuaciones (#) se pueden encontrar las ecuaciones

$x^1 = x \cdot \cos\theta + y \cdot \text{sen}\theta$ (##)

$y^1 = -x \cdot \text{sen}\theta + y \cdot \cos\theta$

llamadas ecuaciones recíprocas. Las cuales nos permiten obtener las nuevas coordenadas, conocidas las antiguas y el ángulo de giro.

Las ecuaciones recíprocas se hallan considerándose las ecuaciones (#) como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas x' y y' . Y resolviendo este sistema respecto a x' , y'. Su desarrollo se deja como ejercicio al lector.

Nota :
Las ecuaciones recíprocas se pueden obtener también usando el siguiente razonamiento.

Si el sistema nuevo se obtiene girando el sistema primitivo en un ángulo θ , el sistema primitivo se obtendrá girando el sistema nuevo en un ángulo - θ ; por lo tanto, en las ecuaciones (#) se pueden permutar las coordenadas primitivas y nuevas, cambiando a la vez θ por - θ.

Efectuando esta transformación obtenemos las ecuaciones recíprocas.

Ejemplo 1

Simplificar la ecuación $x^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}xy - 2\sqrt{3}x - 2y = 0$ mediante una transformación por giro de los ejes, con centro en el origen, de un ángulo $\theta = 30^\circ$

Trazar el lugar geométrico y ambos sistemas de ejes coordenados.

Solución.

Las ecuaciones de rotación son:

$$x = x'\cos(30^\circ) - y'\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'$$

$$y = x'\operatorname{sen}(30^\circ) + y'\cos(30^\circ) = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'$$

Sustituyendo estos valores de x y y en la ecuación (4) obtenemos

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) - 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) - 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'\right)$$

$$-2\left(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y'\right) = 0$$

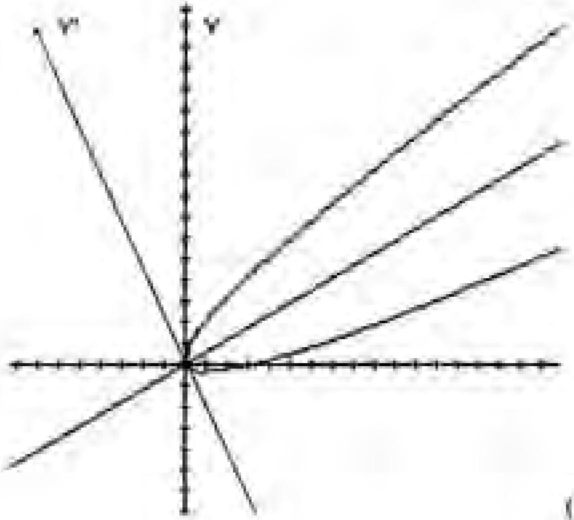
Desarrollando y simplificando esta última ecuación, obtenemos la ecuación transformada

$$(y')^2 = x'$$

El lugar geométrico es una parábola. (Fig. 158)

En este ejemplo se da el ángulo de rotación . Sin embargo, generalmente, el ángulo de rotación debe determinarse de modo que se cumpla alguna condición establecida.

La aplicación principal de la rotación de ejes es la eliminación del término en xy de las ecuaciones de segundo grado.



(Fig. 158)

Ejemplo 2.

Por una rotación de ejes coordenados, transformar la ecuación $2x^2 + \sqrt{3}\cdot x\cdot y + y^2 = 8$ en otra que carezca del término en $x'y'$. Trazar su lugar geométrico y ambos sistemas de ejes coordenados.

Solución

Lo primero que debemos hacer es encontrar el ángulo de rotación adecuado. Para ello, sustituimos los valores de x y y en la ecuación conforme a las fórmulas (#):

$$2\cdot(x'\cdot\cos\theta - y'\,\text{sen}\theta)^2 + \sqrt{3}\cdot\left(x'\cdot\cos\theta - y'\,\text{sen}\theta\right)\cdot\left(x'\,\text{sen}\theta + y'\cdot\cos\theta\right) + (x'\,\text{sen}\theta + y'\cdot\cos\theta)^2 = 8$$

Después de desarrollar las expresiones algebraicas y agrupar los términos correspondientes, la ecuación toma la forma

$$\left(2\cdot\cos^2\theta + \sqrt{3}\cdot\text{sen}\theta\cdot\cos\theta + \text{sen}^2\theta\right)\cdot(x')^2 + (-2\cdot\text{sen}\theta\cdot\cos\theta + \sqrt{3}\cdot\cos^2\theta - \sqrt{3}\cdot\text{sen}^2\theta)\cdot x'y'$$

$$+ \left(2\cdot\text{sen}^2\theta - \sqrt{3}\cdot\text{sen}\theta\cdot\cos\theta + \cos^2\theta\right)\cdot(y')^2 = 8$$

Como la ecuación transformada debe carecer del término en x'y', igualemos el coeficiente de x'y' a cero:

$$\boxed{-2\cdot \text{sen}\theta\cdot\cos\theta + \sqrt{3}\cdot\cos(\theta)^2 - \sqrt{3}\cdot\text{sen}(\theta)^2} = 0$$

es decir

$$-2\cdot\text{sen}\theta\cdot\cos\theta + \sqrt{3}\cdot\left(\cos(\theta)^2 - \text{sen}(\theta)^2\right) = 0$$

Usando las identidades

$$\text{Ssen}(2\cdot\theta) = 2\cdot\text{sen}\theta\cdot\cos\theta \qquad \text{y} \qquad \cos(2\cdot\theta) = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$$

obtenemos la igualdad

$$\text{sen}(2\cdot\theta) + \sqrt{3}\cdot\cos(2\cdot\theta) = 0$$

o bien $\tan(2\cdot\theta) = \sqrt{3}$

de donde obtenemos el valor $\cos(2\cdot\theta) = \frac{1}{2}$

Para realizar la simplificación de la ecuación necesitamos los valores de sen θ y cos θ los cuales se pueden obtener empleando las siguientes formulas trigonométricas.

$$\text{sen}\theta = \sqrt{\frac{1-\cos(2\cdot\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos(2\cdot\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

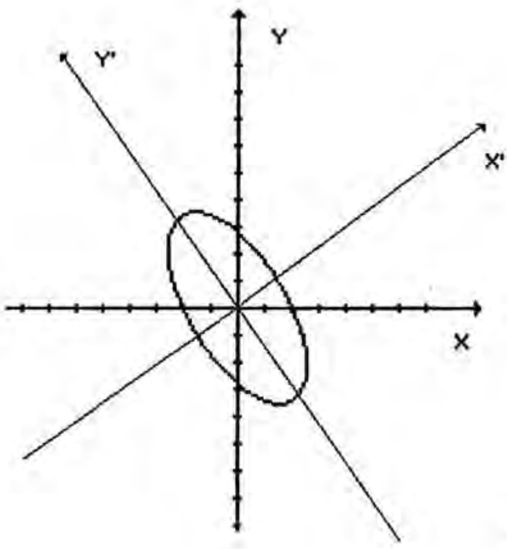
Si sustituimos estos valores de sen θ y cos θ en la ecuación dada, tenemos

$$\left[2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\cdot(x')^2+\left(-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\cdot x'\cdot y'$$

$$+\left[2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]\cdot(y')^2=8$$

la cual se reduce a la ecuación transformada buscada $5\cdot(x')^2+(y')^2=16$

El lugar geométrico es una elipse y está representada en la fig.159.



(Fig.159)

Ejercicios

1.- Transformar la ecuación dada trasladando los ejes coordenados al nuevo origen indicad

a) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$; $(-1,3)$ b) $y^3 - x^2 + 3y^2 - 4x + 3y - 3 = 0$; $(2, 1)$

2.- Simplificar la ecuación dada por una traslación de ejes.

a) $xy - x + 2y - 10 = 0$ b) $8x^3 - 24x^2 - 4y^2 + 24x - 12y - 1 = 0$

c) $2x^2 + 5y^2 - 28x + 20y + 108 = 0$ d) $30xy + 24x - 25y - 80 = 0$

3.- Encontrar las ecuaciones de la curva $r = a\cos\theta$, tomando como polo el punto $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}\right)$, y como eje polar la paralela al anterior.

4.- Hallar las nuevas coordenadas del punto (3,-4) cuando los ejes coordenados giran un ángulo de 30°.

5.- Encontrar la transformada de la ecuación dada, al girar los ejes coordenados un ángulo igual al indicado.

a) $5x^2 + 3xy + y^2 - 4 = 0$; $\text{arc sen } \frac{\sqrt{10}}{10}$

b) $x^4 + y^4 + 6x^2y^2 - 32 = 0$; $45°$

c) $11x^2 + 24xy + 4y^2 - 20 = 0$; $\text{arc tg } 0.75$

d) $2x + 5y - 3 = 0$; $\text{arc tg } 2.5$

6.- Por una rotación de 45° de los ejes coordenados, una cierta ecuación se transformó en

$4\cdot(x')^2 - 9\cdot(y')^2 = 36$ Hallar la ecuación original.

7.- Por una rotación de los ejes coordenados, transfórmese la ecuación dada en otra que carezca del término en $x'y'$.

a) $9x^2 + 3xy + 9y^2 = 5$ b) $16x^2 + 24xy + 9y^2 + 25x = 0$

c) $4x^2 + 4xy + y^2 + \sqrt{5}\,x = 1$ d) $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$

8.- Demostrar que la ecuación de una circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ no se altera cuando se refiere a los ejes coordenados que han girado cualquier ángulo θ.

Se dice que esta ecuación es invariante por rotación.

9.- Escribir las ecuaciones de transformación de coordenadas que corresponden a un traslado de origen al punto Q (3,-4) y a una rotación de los ejes en un ángulo de 30°.

10-. Simplificar la ecuación dada por traslación y rotación de ejes.

a) $52x^2 - 72xy + 73y^2 - 104x + 72y - 48 = 0$

b) $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 10y + 11 = 0$

c) $3x^2 - 6xy + 5y^2 - x + y = 0$

d) $17x^2 - 12xy + 8y^2 - 46x - 28y + 17 = 0$

7.3 Traslación y Rotación en su forma Matricial.

En esta sección haremos uso de las ecuaciones de traslación y rotación de ejes en forma matricial. (Sería conveniente, si así lo desea el lector, leer el Apéndice para una discusión más amplia acerca del tema).

Si escribimos las coordenadas de P(x, y) como una matriz columna $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, las ecuaciones

para la traslación de ejes al punto (h, k) pueden escribirse como una ecuación matricial.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

La forma matricial de las ecuaciones para una rotación de ejes es :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Si escribimos

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad , \quad X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad H = \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones de traslación y rotación se pueden escribir

$$X = X' + H \qquad \text{o bien} \qquad X' = X - H \qquad (1)$$

$$X = P \cdot X' \qquad \text{o bien} \qquad X' = P^t \cdot X \qquad (2)$$

A P (al igual que a P^t) se le llama *matriz de rotación*.

Observemos lo siguiente : P tiene determinante igual a 1, pues

$| P | = \cos\theta^2 + \operatorname{sen}\theta^2 = 1$ para todo θ

Además $P \cdot P^t = P^t \cdot P = I_2$ donde $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz identidad de tamaño 2x2

Esto es, $P^t = P^{-1}$, donde P^{-1} es la inversa de P.

Se dice también que P es una matriz ortogonal (sus filas son vectores ortogonales entre sí).

Por lo tanto la matriz de rotación P es ortogonal y $|P| = 1$

Dada la ecuación de rotación $X = P \cdot X'$ podemos resolver para x', y' multiplicando por P^t ; dado que $P^t \cdot P = I_2$ obtenemos

$P^t \cdot X = P^t \cdot P \cdot X'$

En el siguiente ejemplo, ilustraremos la composición de una rotación de ejes seguida por una traslación de ejes.

Ejemplo 1.

Escribir la ecuación matricial de la composición de una rotación de ejes a través de 30°, seguida de una traslación al punto (3,-4)

Solución:

Usando (x', y') para denotar las coordenadas del punto (x, y) después de una rotación tenemos.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \operatorname{sen} 30^\circ \\ -\operatorname{sen} 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Sea (x'', y'') denotan las coordenadas de (x', y') después de la traslación, tenemos

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

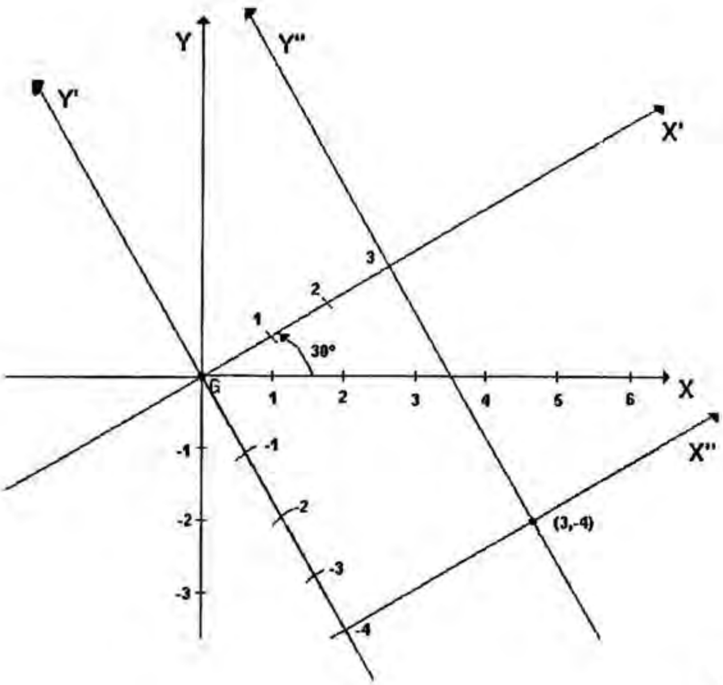
Entonces sustituyendo (1) en (2) se tiene:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \operatorname{sen} 30^\circ \\ -\operatorname{sen} 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot \cos 30^\circ + y \cdot \operatorname{sen} 30^\circ - 3 \\ -x \cdot \operatorname{sen} 30^\circ + y \cdot \cos 30^\circ + 4 \end{bmatrix}$$

Esta es la ecuación de la composición de transformaciones.

Los tres sistemas coordenados se muestran en la fig. 162.



(Fig.162)

7.4 Rotación Matricial.

En este capitulo escribiremos las ecuaciones de transformación en su forma matricial asi como la forma cuadrática y por medio de propiedades de matrices haremos la transformación de una ecuación en forma cuadrática a su forma más simple.

Toda forma cuadrática de la forma $ax^2 + bxy + cy^2$ se puede escribir en forma matricial como sigue:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = ax^2 + \frac{b}{2}\cdot xy + \frac{b}{2}\cdot xy + cy^2$$

$$= x\cdot\left(ax + \frac{b}{2}\cdot y\right) + y\cdot\left(\frac{b}{2}\cdot x + cy\right)$$

$$= \quad (x \;\; y)\cdot\begin{bmatrix} ax + \frac{b}{2}\cdot y \\ \frac{b}{2}\cdot x + cy \end{bmatrix}$$

$$= \quad (x \;\; y)\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Sea $Q = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$. La matriz Q es simétrica, es decir, $Q = Q^t$

Podemos ahora escribir la forma cuadrática como sigue: $X^t \cdot Q \cdot X = ax^2 + bxy + cy^2$.

donde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Para hallar la ecuación después de haber realizado la rotación, sustituimos $P \cdot X'$ en vez de X, en la ecuación anterior:

$$(P \cdot X')^t \, Q \cdot (P \cdot X') = a'(x')^2 + b'x'y' + c'(y')^2$$

$$(X')^t \, (P^t \, Q \cdot P) \cdot X' = a'(x')^2 + b'x'y' + c'(y')^2$$

como $P^t \, Q \cdot P$ es una matriz simétrica, se sigue que es la matriz simétrica Q' para la forma cuadrática

$a'(x')^2 + b'x'y' + c'(y')^2$ donde $Q' = \begin{bmatrix} a' & \frac{b'}{2} \\ \frac{b'}{2} & c' \end{bmatrix}$ es decir $Q' = P^t \, Q \cdot P$

Observemos lo siguiente $|Q'| = |P^t \, Q \cdot P| = |P^t| \, |Q| \, |P| = |Q|$

dado que $|P^t| = |P| = 1$, tenemos que $|Q'| = |Q|$

Entonces

$a'c' - \frac{(b')^2}{2} = a \cdot c - \frac{b^2}{2}$ esto es $(b')^2 - 4 \cdot a'c' = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$

Para determinar el ángulo de rotación Φ tal que $b' = 0$, es necesario y suficiente con que:

$$Q' = P^{t} \cdot Q \cdot P = \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{bmatrix}$$

La matriz de la derecha se dice que esta en forma diagonal.

El problema se reduce a lo siguiente:

Dada una matriz simétrica Q , encontrar una matriz ortogonal P (con $|P| = 1$)

tal que $P^{t} \cdot Q \cdot P = D$ (4) donde D es una matriz diagonal .

Si escribimos $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ la transformación de la forma cuadrática bajo la rotación

P es $\lambda_1 \cdot (x')^2 + \lambda_2 \cdot (y')^2$.

Por otra parte la matriz P se puede escribir como

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y sea} \quad X_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

X_1 y X_2 son las columnas de P $\therefore$ $P = (X_1, X_2)$

Dado que P es ortogonal ($P^{t} = P^{-1}$)

La ecuación (4) toma la forma

$$P^{-1} \cdot Q \cdot P = D$$

Esto es

$$P \cdot P^{-1} \cdot Q \cdot P = P \cdot D$$

$$Q \cdot P = P \cdot D$$

es decir

$$Q\ (X_1\ X_2) = (X_1\ X_2)\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

De donde la matriz P satisface (4) si existen números λ_1 y λ_2 tales que

$$Q \cdot X_1 = \lambda_1 \cdot X_1 \quad y \quad Q \cdot X_2 = \lambda_2 \cdot X_2$$

Nuestro problema es encontrar números λ y vectores X no nulos , para los cuales

$Q \cdot X = \lambda \cdot X$ es decir $Q \cdot X - \lambda \cdot X = (0)$ donde $(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

La ecuación anterior toma la forma

$$(Q - \lambda \cdot I) \cdot X = (0)$$

Definición.

Sea Q cualquier matriz cuadrada.

Si λ es un número y X es un vector columna no nulo para el cual

$$\boxed{Q\cdot X} \boxed{=} \boxed{\lambda\cdot X} \boxed{o} \boxed{(Q \quad \lambda\cdot I)\cdot X} = (0)$$

entonces λ es llamado un *eigenvalor* o *valor característico* de Q y X es llamado *eigenvector* o *vector característico* de Q correspondiente a λ.

Llamamos a $Q - \lambda I$ la matriz característica de Q

Por otra parte

$$P^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (X_1)^t \\ (X_2)^t \end{bmatrix}$$

esto es, los renglones de P^t los llamaremos $(X_1)^t$ y $(X_2)^t$. De lo anterior se sigue que

$$P^t\cdot P = \begin{bmatrix} (X_1)^t \\ (X_2)^t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} (X_1)^t\cdot X_1 & (X_1)^t\cdot X_2 \\ (X_2)^t\cdot X_1 & (X_2)^t\cdot X_2 \end{bmatrix}$$

Si identificamos una matriz columna

$$X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{con el vector} \quad ai + bj$$

Podemos escribir el producto interno de dos vectores XY como sigue:

$$X \bullet Y = X^t \cdot Y$$

Nótese lo siguiente:

Si $Y = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, entonces $X \bullet Y = ac + bd = X^t \cdot Y$

Así,

$$P^t \cdot P = \begin{bmatrix} X_1 \bullet X_1 & X_1 \bullet X_2 \\ X_2 \bullet X_1 & X_2 \bullet X_2 \end{bmatrix}$$

Nótese que $X_1 \bullet X_2 = X_2 \bullet X_1$

dado que

$$P^t.P = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se debe de tener

$$X_1 \bullet X_1 = X_2 \bullet X_2 = 1$$

y $X_1 \bullet X_2 = X_2 \bullet X_1 = 0$

Como $X_i \bullet X_i = |X_i|^2 = 1$

resulta que X_1 y X_2 tienen longitud 1.

En otras palabras las columnas de P son vectores ortogonales unitarios.
En resumen: nuestro problema quedará resuelto, si encontramos dos eigenvectores ortogonales unitarios de Q.

Sea $Q = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$.

La matriz simétrica de la forma cuadrática $ax^2 + bxy + cy^2$

Si escribimos el vector columna desconocido X como

$$X = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

La ecuación matricial (5) se puede escribir

$$\left[\begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right] \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

esto es

$$\begin{bmatrix} a - \lambda & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La cual es equivalente al sistema lineal

$$\begin{aligned} (a - \lambda)\cdot q_1 + \frac{b}{2}\cdot q_2 &= 0 \\ \frac{b}{2}\cdot q_1 + (c - \lambda)\cdot q_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (\#)$$

Sabemos que el sistema tiene solución diferente de cero q_1 y q_2 si y solo si el determinante de los coeficientes de la matriz es cero.

Es decir

$$\begin{vmatrix} (a-\lambda) & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & (c-\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto la ecuación (#) tiene una solución diferente de cero $X \Leftrightarrow \left| Q - \lambda I_2 \right| = 0$

Desarrollando el determinante tenemos

$$(a-\lambda)\cdot(c-\lambda) - \frac{b^2}{4} = 0$$

$$ac - a\lambda - \lambda c + \lambda^2 - \frac{b^2}{4} = 0$$

$$\lambda^2 - (a+c)\cdot\lambda + ac - \frac{b^2}{4} = 0$$

Observe que la ecuación característica es una ecuación cuadrática en términos de λ.
El discriminante de la ecuación anterior es

$$(a+c)^2 - 4\cdot\left(ac - \frac{b^2}{4}\right) = (a-c)^2 + b^2$$

Si $b \neq 0$, el discriminante es positivo, y la ecuación característica tiene dos raíces distintas λ_1 y λ_2. Por lo tanto, para encontrar a P debemos encontrar los eigenvectores correspondientes a λ_1 y λ_2 respectivamente.

Sean $(X_1)^0$ y $(X_2)^0$ eigenvectores correspondientes a λ_1 y λ_2 respectivamente.

Entonces, de la definición de eigenvector, los vectores

$$X_1 = \frac{(X_1)^0}{\left\| (X_1)^0 \right\|} \quad , \quad X_2 = \frac{(X_2)^0}{\left| (X_2)^0 \right|}$$

son también eigenvectores correspondientes a λ_1 y λ_2.

Dado que $|X_1| = |X_2| = 1$, X_1 y X_2 son vectores unitarios.
(Recordemos que un vector dividido por su longitud nos da un vector unitario).

Ahora el problema se reduce a probar que X_1 y X_2 son ortogonales entre si o equivalentemente

$(X_1)^0 \perp (X_2)^0$

Teorema.

Si Q es una matriz simétrica de tamaño 2x2 con eigenvalores distintos λ_1 y λ_2 y correspondientes X_1 y X_2 eigenvectores, entonces $X_1 \bullet X_2 = 0$; esto es X_1 y X_2 son ortogonales.

Demostración.

Tenemos

$$Q \cdot X_1 = \lambda_1 \cdot X_1 \quad (1) \qquad y \qquad Q \cdot X_2 = \lambda \cdot X_2 \quad (2)$$

Multiplicando la ecuación (2) por $(X_1)^t$ en ambos lados obtenemos

$$(X_1)^t \cdot Q \cdot X_2 = \lambda_2 \cdot (X_1)^t \cdot X_2 \quad (\&)$$

Transponiendo ambos miembros de la ecuación (1) obtenemos

$$(X_1)^t Q^t = \lambda_1 (X_1)^t$$

Multiplicando esta ecuación por X_2 , tenemos

$$(X_1)^t Q^t X_2 = \lambda_1 (X_1)^t X_2$$

Comparando la ecuación (& &) con la ecuación (&) y usando la hipótesis de que

$Q = Q^t$, concluimos que

$$\lambda_1 (X_1)^t X_2 = \lambda_2 (X_1)^t X_2$$

Esto es

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(X_1 \bullet X_2) = 0$$

Dado que , por hipótesis $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, se sigue que X_1 y X_2 son ortogonales.

Ejemplo 1.

Rotar en forma matricial los ejes de la ecuación $2x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 = 1$ de manera que la nueva ecuación no tenga término cruzado. Dibujar la gráfica.

Solución.

Primero observemos que $b^2 - 4ac = -5 < 0$

Por lo tanto se trata de una elipse.

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

La ecuación en su forma matricial es $X^t Q X = 1$.

Para encontrar los eigenvalores de Q, resolvemos la ecuación característica.

$$|Q - \lambda I_2| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + \frac{5}{4} = 0$$

Esto es $4\lambda^2 - 12\lambda + 5 = (2\lambda - 5)(2\lambda - 1) = 0$

Por lo tanto $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{5}{2}$

Para encontrar un eigenvector para $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, resolvemos

$\left(Q - \frac{1}{2} I_2\right) \cdot (X_1)^0 = (0)$ para $(X_1)^0$

$$\begin{bmatrix} 2-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1-\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto es equivalente, al sistema lineal

$$\frac{3}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_1 = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 = 0$$

Dado que ambas ecuaciones son equivalentes a $y_1 = \sqrt{3}x_1$, hay una infinidad de soluciones.
Entonces podemos tomar un $x_0 \neq 0$ arbitrario y resolver para y_0
Por ejemplo, tomemos $x_0 = 1$. El valor correspondiente es $y_0 = \sqrt{3}$

y $(X_1)' = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ es un eigenvector correspondiente a $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

Un eigenvector unitario es

$$X_1 = \frac{(X_1)'}{|(X_1)'|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Repitiendo el proceso para $\lambda_2 = \frac{5}{2}$ se tiene que

$$\left(Q - \frac{5}{2}I_2\right)(X_2)' = \begin{bmatrix} 2-\frac{5}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1-\frac{5}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y obtenemos el sistema lineal

$$-\frac{1}{2}x_2-\frac{\sqrt{3}}{2}y_2=0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x_2-\frac{3}{2}y_2=0$$

de donde $y_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}x_2$ o bien $y_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}x_2$

Si tomamos $x_2=3$ tenemos $(X_1)^T=\begin{bmatrix}3\\-\sqrt{3}\end{bmatrix}$

Al normalizar obtenemos

$$X_1=\frac{(X_1)^T}{\left|(X_1)^T\right|}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix}3\\-\sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

De donde obtenemos la matriz ortogonal P_1

$$P_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Nótese que no es una matriz de rotación debido a que $|P_1| = -1$.
Sin embargo, la podemos llevar a esa forma si multiplicamos una columna por -1, obteniendo de esta manera la matriz de rotación P.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Resolviendo directamente tenemos

$$Q' = P^t Q P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la transformación de la ecuación está dada por

$$\frac{1}{2}(x')^2 + \frac{5}{2}(y')^2 = 1$$

Nótese lo siguiente:

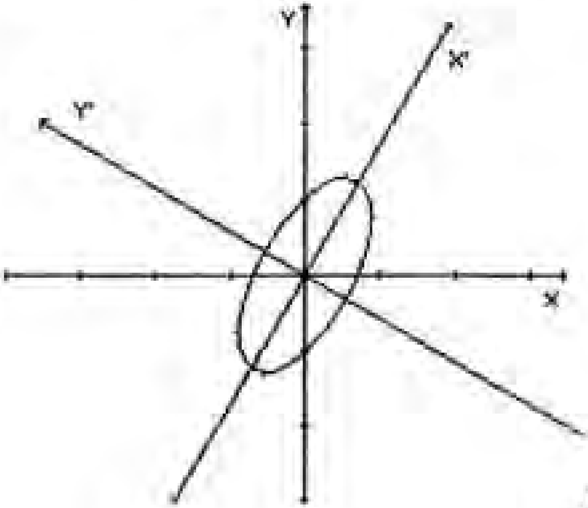
Si λ_1 y λ_2 son los eigenvalores de Q, la transformación cuadrática está dada por las ecuaciones:

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 = 0 \quad \text{y} \quad \lambda_2(x')^2 + \lambda_1(y')^2 = 0$$

dependiendo de la matriz de rotación usada para eliminar el término cruzado.

(P no es única) .

En la figura 163 se muestra la elipse y los dos sistemas de ejes.



(Fig.163)

Ejemplo 2

Mediante una rotación matricial transformar la ecuación $2x^2+3xy-2y^2=25$ a su forma canónica y hacer su gráfica.

$b^2-4ac=25>0$

por lo tanto la cónica es una elipse.

$$Q=\begin{bmatrix}2 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & -2\end{bmatrix} \quad y \quad X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$$

La ecuación en su forma matricial es

$$X^tQX=25$$

Para encontrar los eigenvalores de Q, resolvemos la ecuación característica

$$|Q-\lambda I_2|=\begin{vmatrix}2-\lambda & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & -2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\cdot(-2-\lambda)-\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)=0$$

$$=\lambda^2-\frac{25}{4}=0$$

Por lo tanto $\lambda_1=\frac{5}{2}$ $\quad \lambda_2=-\frac{5}{2}$

Para encontrar un eigenvector para $\lambda_1 = \frac{5}{2}$ resolvemos

$$\left(Q - \frac{5}{2} I_2\right) \cdot (X_1)^T = (0) \qquad \text{para } (X_1)^T$$

$$\begin{bmatrix} 2-\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2-\frac{5}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto es equivalente, al sistema lineal homogéneo

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}y_1 &= 0 \\ +\frac{3}{2}x_1 - \frac{9}{2}y_1 &= 0 \end{aligned}$$

Dado que ambas ecuaciones son equivalentes a $y_1 = \frac{1}{3}x_1$ hay una infinidad de soluciones. Podemos tomar un $x_1 \neq 0$ arbitrario y resolver para y_1.

Por ejemplo, si $x_1 = 3$, entonces $y_1 = 1$ y $(X_1)^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un eigenvector correspondiente a $\lambda_1 = \frac{5}{2}$.

Un eigenvector unitario es

$$X_1 = \frac{(X_1)^p}{|(X_1)^p|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

Repitiendo el proceso para $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$ tenemos

$$\left[Q - \left(-\frac{5}{2}\right) I_2\right] \cdot (X_2)^p = (0)$$

$$\begin{bmatrix} 2+\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2+\frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto es equivalente al sistema lineal homogéneo

$$\frac{9}{2}x_2 + \frac{3}{2}y_2 = 0$$

$$\frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_2 = 0$$

Dado que $y_2 = -3x_2$ se da en las dos ecuaciones, hay una infinidad de soluciones.

Si tomamos $x_2 = 1$ tenemos que $y_2 = -3$ y por lo tanto $(X_2)^p = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

Normalizando obtenemos

$$X_1 = \frac{(X_1)'}{|(X_1)'|} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz P_1 es una matriz ortogonal, para que sea una matriz de rotación se requiere que $|P_1| = 1$

$$P_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

El determinante de P_1 es $|P_1| = -1$. Por lo tanto, para llevarla a esa forma debemos multiplicar una columna por -1.

De esta manera obtenemos la matriz

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$ cuyo determinante es $|P| = 1$

Por lo tanto P es la matriz de rotación.

Resolviendo directamente tenemos:

$$Q' = P^t QP = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 \\ 0 & -2.5 \end{bmatrix}$$

Es decir $Q' = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ de donde $\lambda_1 = \frac{5}{2}$ y $\lambda_2 = -\frac{5}{2}$

Y la transformación de la ecuación estaría dada por

$$\frac{5}{2}(x')^2 - \frac{5}{2}(y')^2 = 25$$

llevándola a su forma canónica

$$\frac{(x')^2}{10} - \frac{(y')^2}{10} = 1$$

Para hacer su gráfica encontramos el ángulo de rotación por medio de la matriz de rotación.

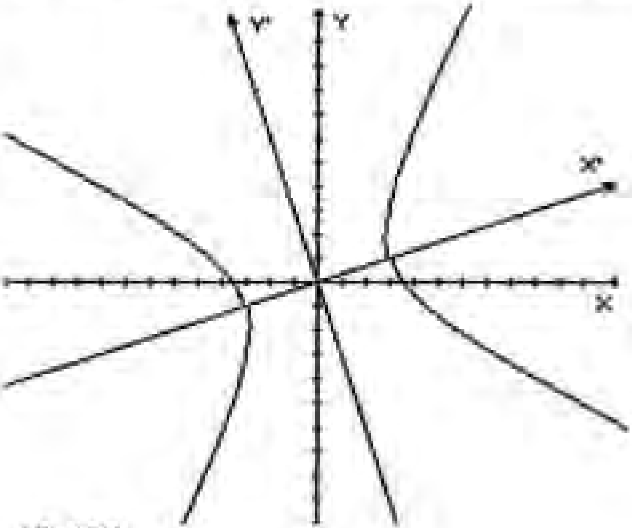
Esto es

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$$

Deducimos que $sen\theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ y $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ de donde $\tan\theta = \frac{1}{3}$

$\theta = ang\tan\left(\frac{1}{3}\right) = 18°26'$

La figura 164 nos muestra la hipérbola y los dos sistemas de ejes.



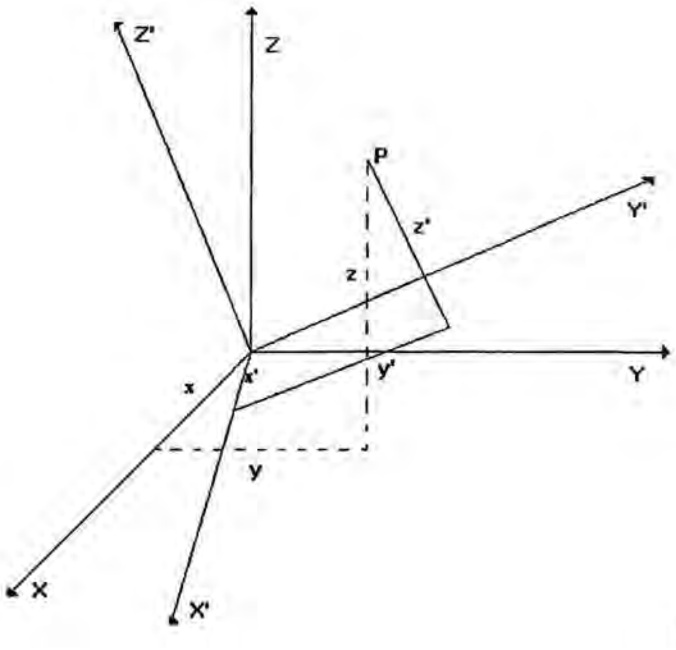
(Fig.164)

7.5 Rotación de Ejes Coordenados en el Espacio.

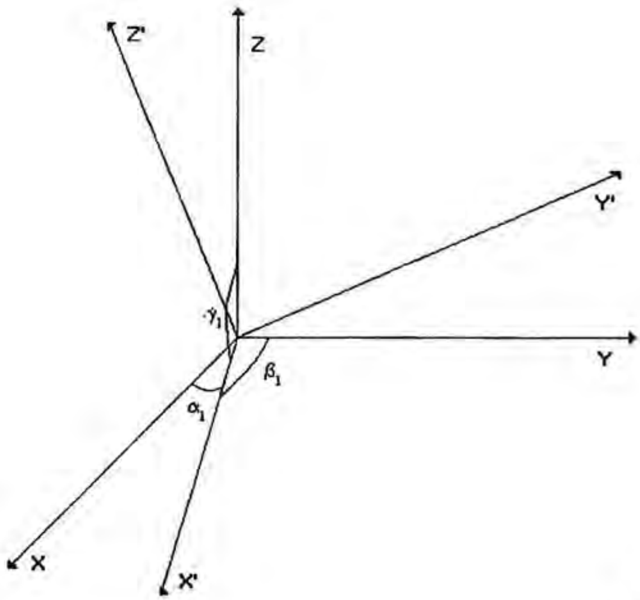
Una rotación de los ejes coordenados rectangulares en el espacio, consiste en mover los ejes coordenados a una nueva posición haciéndolos girar en torno del origen como punto fijo de tal manera que los nuevos ejes permanezcan mutuamente perpendiculares entre si y análogamente dirigidos uno respecto al otro.

Consideremos una rotación de los ejes coordenados rectangulares tal que el origen O permanezca fijo, pero los ejes originales X, Y, Z tomen las nuevas posiciones especificadas por los ejes X', Y', Z' respectivamente. Designemos por (x, y, z) y (x', y', z') las coordenadas de un punto cualquiera P del espacio referido a los ejes originales y a los nuevos ejes, respectivamente. (Fig.166)

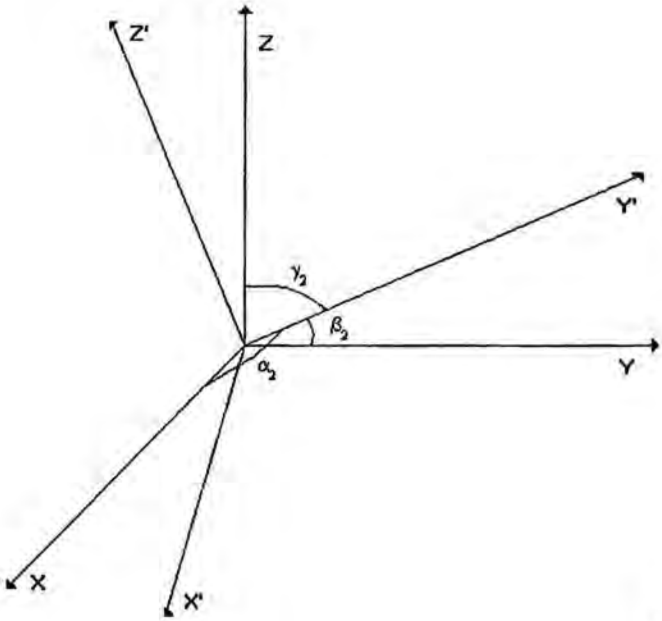
Denotemos por $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ y $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, respectivamente los ángulos directores de los ejes X', Y', Z' respecto a los ejes originales.



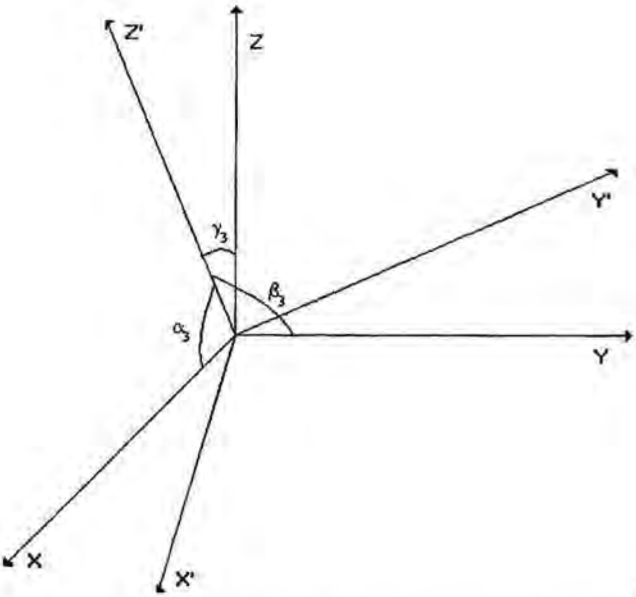
(Fig.166)



(Fig.167)



(Fig.168)



(Fig.169)

Estos ángulos directores aparecen ordenados en la siguiente tabla

EJE	X	Y	Z
X'	α_1	β_1	γ_1
Y'	α_2	β_2	γ_2
Z'	α_3	β_3	γ_3

Leyendo esta tabla en sentido horizontal, obtenemos los ángulos directores de los nuevos ejes con respecto a los ejes originales, y leyendo en sentido vertical, obtenemos los ángulos directores de los ejes originales con respecto a los nuevos ejes.

Como vemos en la tabla anterior, los ángulos directores del eje X, con respecto a los nuevos ejes son α_1 , α_2 , α_3. Entonces como el eje X es normal al plano YZ, se deduce que la ecuación normal del plano YZ, con referencia a los nuevos ejes, esta dada por

$$x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 = 0$$

La cual se puede expresar como

$$x'\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)+y'\left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)+z'\left(\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)=0 \text{ ; es decir}$$

$$\frac{|Ax'+By'+Cz'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$$

Donde el primer miembro de esta ecuación representa la distancia del punto P al plano YZ.

$$d(P,YZ)=\frac{|Ax'+By'+Cz'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3$$

Pero esta distancia también esta dada por la coordenada x.

Por lo tanto, tenemos que

$$x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3$$

Análogamente, podemos obtener expresiones similares para cada una de las coordenadas y y z en función de las nuevas coordenadas.

Estas relaciones se expresan como sigue:

$$x=x'\cos\alpha_1+y'\cos\alpha_2+z'\cos\alpha_3$$

$$y=x'\cos\beta_1+y'\cos\beta_2+z'\cos\beta_3 \qquad (1)$$

$$z=x'\cos\gamma_1+y'\cos\gamma_2+z'\cos\gamma_3$$

donde figuran los nueve cosenos directores como coeficientes. Estos cosenos no son independientes entre si, pues satisfacen el siguiente sistema.

$$(\cos\alpha_1)^2 + (\cos\beta_1)^2 + (\cos\gamma_1)^2 = 1$$

$$(\cos\alpha_2)^2 + (\cos\beta_2)^2 + (\cos\gamma_2)^2 = 1 \qquad (2)$$

$$(\cos\alpha_3)^2 + (\cos\beta_3)^2 + (\cos\gamma_3)^2 = 1$$

esto debido a que la suma de los cuadrados de los cosenos directores es 1

Como los nuevos ejes X', Y', Z' son mutuamente perpendiculares, tenemos que:

$$\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cdot \cos\gamma_2 = 0$$

$$\cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_3 + \cos\beta_1 \cdot \cos\beta_3 + \cos\gamma_1 \cdot \cos\gamma_3 = 0 \qquad (3)$$

$$\cos\alpha_2 \cdot \cos\alpha_3 + \cos\beta_2 \cdot \cos\beta_3 + \cos\gamma_2 \cdot \cos\gamma_3 = 0$$

El sistema (1) representa cada una de las coordenadas originales de P en función de sus nuevas coordenadas.

Podemos, análogamente, obtener expresiones semejantes para las nuevas coordenadas en función de las coordenadas originales.

Así, empleando la ecuación del plano Y'Z' con respecto a los ejes originales, podemos por el mismo método empleado deducir la relación

$$x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\beta_1 + z'\cos\gamma_1$$

Análogamente, obtenemos relaciones similares para y' y z' las cuales están agrupadas en el sistema:

$$x' = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1$$

$$y' = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2 \qquad (4)$$

$$z' = x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3$$

El sistema (4) es el recíproco del sistema (1) y puede obtenerse como una solución del sistema (1) para x', y' y z'

Los resultados se resumen en el siguiente teorema.

Teorema

Si se hacen girar los ejes coordenados rectangulares en torno del origen O como punto fijo de manera que los ángulos directores de los nuevos ejes X', Y' Z' con respecto a los originales X, Y, Z, sean $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$, respectivamente, y las coordenadas de un punto cualquiera P del espacio antes y después de la rotación son (x, y, z) y (x', y', z'), respectivamente entonces las ecuaciones de transformación de las coordenados originales a las nuevas son

$$x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3$$

$$y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3$$

$$z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3$$

y las ecuaciones de la transformación inversa de las coordenadas nuevas a las originales son

$$x' = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1$$

$$y' = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2$$

$$z' = x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3$$

Nótese que los ejes coordenadas en el espacio pueden sujetarse a una traslación y una rotación tomadas en cualquier orden. Dado que las ecuaciones de transformación para la traslación y para la rotación de ejes son relaciones lineales, como en la transformación de coordenadas en el plano, se puede demostrar que el grado de una ecuación no se altera por transformación de coordenadas en el espacio.

Ejemplo.

Hallar las nuevas coordenadas de un punto $P_1(6, -3, 3)$ cuando los ejes coordenados son girados de tal manera que los cosenos directores de los nuevos ejes con respecto a los ejes originales son:

$$\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3} \quad ; \quad \frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}$$

Solución.

Para hallar las nuevas coordenadas del punto P_1 utilizamos las ecuaciones de transformación de las coordenadas nuevas con respecto a las originales.

Esto es

$$x' = x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1$$

$$y' = x\cos\alpha_2 + y\cos\beta_2 + z\cos\gamma_2$$

$$z' = x\cos\alpha_3 + y\cos\beta_3 + z\cos\gamma_3$$

Donde

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{3} \quad , \quad \cos\beta_1 = \frac{2}{3} \quad , \quad \cos\gamma_1 = \frac{2}{3}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{2}{3} \quad , \quad \cos\beta_2 = -\frac{2}{3} \quad , \quad \cos\gamma_2 = \frac{1}{3}$$

$$\cos\alpha_3 = \frac{2}{3} \quad , \quad \cos\beta_3 = \frac{1}{3} \quad , \quad \cos\gamma_3 = -\frac{2}{3}$$

sustituyendo estos valores y las coordenadas originales del punto P_1 tenemos

$$x' = 6\left(\frac{1}{3}\right) + (-3)\left(\frac{2}{3}\right) + 3\left(\frac{2}{3}\right) = 2$$

$$y' = 6\left(\frac{2}{3}\right) + (-3)\left(-\frac{2}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right) = 7$$

$$z' = 6\left(\frac{2}{3}\right) + (-3)\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(-\frac{2}{3}\right) = 1$$

Por lo tanto las nuevas coordenadas de P_1 son $(2, 7, 1)$

Ejemplo

Hallar la transformada de la ecuación $23x^2 - 41y^2 - 31z^2 + 48xy - 72xz - 24yz = 0$ al hacer girar los ejes coordenados de tal manera que los cosenos directores de los nuevos ejes con respecto a los originales son.

$$\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\ ; \quad -\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}\ ; \quad \frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{2}{7}$$

Solución.

Los cosenos directores son

$$\cos\alpha_1 = \frac{2}{7}, \qquad \cos\beta_1 = \frac{3}{7}, \qquad \cos\gamma_1 = \frac{6}{7}$$

$$\cos\alpha_2 = -\frac{6}{7}, \qquad \cos\beta_2 = -\frac{2}{7}, \qquad \cos\gamma_2 = \frac{3}{7}$$

$$\cos\alpha_3 = \frac{3}{7}, \qquad \cos\beta_3 = -\frac{6}{7}, \qquad \cos\gamma_3 = \frac{2}{7}$$

Usando las ecuaciones de transformación de las coordenadas originales a las nuevas tenemos

$$x = x'\left(\frac{2}{7}\right) + y'\left(-\frac{6}{7}\right) + z'\left(\frac{3}{7}\right)$$

$$y = x'\left(\frac{3}{7}\right) + y'\left(-\frac{2}{7}\right) + z'\left(-\frac{6}{7}\right)$$

$$z = x'\left(\frac{6}{7}\right) + y'\left(\frac{3}{7}\right) + z'\left(\frac{2}{7}\right)$$

sustituyendo los valores de x, y y z dados por las ecuaciones de transformación en la ecuación de la superficie, obtenemos

$$23\cdot\left(\frac{2}{7}x' - \frac{6}{7}y' + \frac{3}{7}z'\right)^2 - 41\cdot\left(\frac{3}{7}x' - \frac{2}{7}y' - \frac{6}{7}z'\right)^2 + 31\cdot\left(\frac{6}{7}x' + \frac{3}{7}y' + \frac{2}{7}z'\right)^2$$

$$+ 48\cdot\left(\frac{2}{7}x' - \frac{6}{7}y' + \frac{3}{7}z'\right)\cdot\left(\frac{3}{7}x' - \frac{2}{7}y' - \frac{6}{7}z'\right) - 72\cdot\left(\frac{2}{7}x' - \frac{6}{7}y' + \frac{3}{7}z'\right)\cdot\left(\frac{6}{7}x' + \frac{3}{7}y' + \frac{2}{7}z'\right)$$

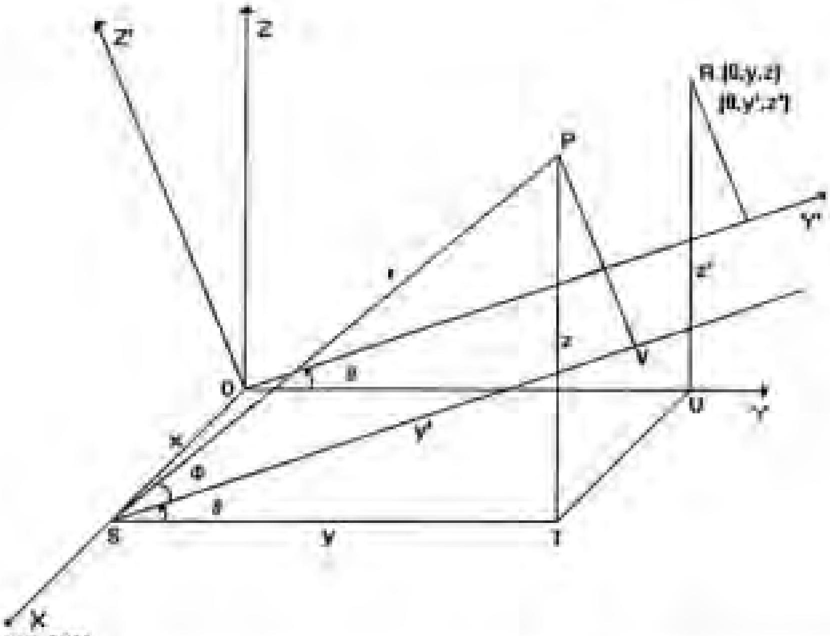
$$24\cdot\left(\frac{3}{7}x' - \frac{2}{7}y' - \frac{6}{7}z'\right)\cdot\left(\frac{6}{7}x' + \frac{3}{7}y' + \frac{2}{7}z'\right) = 0$$

La cual después de efectuar el desarrollo y agrupar los términos, toma la forma

$$-2401x^2 + 2401y^2 - 2401z^2 = 0$$

o bien $-x^2 + y^2 - z^2 = 0$

Ahora supongamos que los ejes Z y Y se giran un ángulo θ alrededor del eje X como recta fija: (Fig.171)



(Fig.171)

Designemos por (x, y, z) y (x', y', z') las coordenadas de un punto cualquiera P del espacio referido a los ejes originales XYZ y a los nuevos ejes X', Y', Z', respectivamente.

Unamos P con S formando el ángulo ϕ. Sea $\overline{SP} = r$

Del triángulo rectángulo STP que se forma tenemos

$y = r \cdot \cos(\theta + \phi)$ (1)

$z = r \cdot sen(\theta + \phi)$ (2)

Del triángulo rectángulo SVP que se forma tenemos

$y' = r \cdot \cos\phi$, $z' = r \cdot sen\phi$ (3)

Desarrollando (1) y (2), por trigonometría tenemos

$y = r \cdot \cos\phi\cos\theta - r \cdot sen\phi sen\theta$

$z = r \cdot \cos\phi sen\theta + r \cdot sen\phi\cos\theta$

Sustituyendo los valores dados por (3) en estas últimas ecuaciones tenemos

$y = y' \cos\theta - z' sen\theta$

$z = y' sen\theta + z' \cos\theta$

Por lo tanto las ecuaciones de transformación de las coordenadas originales a las nuevas son:

$x = x'$

$y = y' \cdot \cos\theta - z' \cdot sen\theta$

$z = y' \cdot sen\theta + z' \cos\theta$

Análogamente, podemos obtener expresiones semejantes par las nuevas coordenadas en función de las coordenadas originales.

Usando el mismo procedimiento que en el plano llegamos a que las ecuaciones de transformación inversa de las coordenadas nuevas a las originales son:

$x' = x$

$y' = y \cdot \cos\theta + z \cdot sen\theta$

$z' = -y \cdot sen\theta + z \cdot \cos\theta$

De la misma manera, podemos suponer ahora que haciendo girar a los ejes XY, XZ un ángulo θ alrededor de los ejes Z y Y respectivamente, manteniéndolos fijos.

Y obtener las relaciones similares

$x = x'\cdot\cos\theta - y'\cdot sen\theta$

$y = x'sen\theta + y'\cdot\cos\theta$

$z = z'$

y

$x = x'\cos\theta - z'sen\theta$

$y = y'$

$z = x'sen\theta + z'\cos\theta$

Hagamos un resumen de los anteriores resultados en el siguiente teorema.

Teorema

Si se hace girar a los ejes XY un ángulo agudo θ alrededor del eje Z como recta fija entonces las ecuaciones de rotación de las coordenadas originales a las nuevas son:

$x = x'\cos\theta - y'sen\theta$

$y = x'sen\theta + y'\cdot\cos\theta$

$z = z'$

Siendo las ecuaciones de rotación inversas de las coordenadas nuevas a las originales

$x' = x\cdot\cos\theta + y\cdot sen\theta$

$y' = -x\cdot sen\theta + y\cdot\cos\theta$

$z' = z$

Si se hace girar a los ejes YZ un ángulo agudo θ alrededor del eje X como recta fija, entonces las ecuaciones de rotación de las coordenadas originales a las nuevas son:

$x = x'$

$y = y'\cdot\cos\theta - z'\cdot sen\theta$

$z = y'\cdot sen\theta + z'\cos\theta$

Siendo las ecuaciones de rotación inversas de las coordenadas nuevas a las originales

$x' = x$

$y' = y\cdot\cos\theta + z\cdot sen\theta$

$z' = -y\cdot sen\theta + z\cdot\cos\theta$

Si se hace girar a los ejes XZ un ángulo agudo θ alrededor del eje Y como recta fija entonces las ecuaciones de rotación de las coordenadas originales a las nuevas son:

Ejemplo

Transformar la ecuación, $x^2 - yz - y + 1 = 0$, por una rotación de los ejes YZ en otra que carezca del término en $y'z'$.

Solución.

Para eliminar el término yz empleamos las ecuaciones de rotación de las coordenadas originales a las nuevas

$x = x'$

$y = y'\cdot\cos\theta - z'\cdot sen\theta$

$z = y'\cdot sen\theta + z'\cos\theta$

sustituyéndolas en la ecuación dada tenemos

$$x^2 - (y'\cos\theta - z'sen\theta)\cdot(y'sen\theta + z'\cos\theta) - (y'\cos\theta - z'sen\theta) + 1 = 0$$

la cual, después de efectuar el desarrollo y agrupar los términos, toma la forma

$$x^2 - \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta \cdot y'^2 - \left(\cos\theta^2 - \operatorname{sen}\theta^2\right) \cdot y' \cdot z' + \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta \cdot z'^2 - \cos\theta \cdot y' + \operatorname{sen}\theta \cdot z' + 1 = 0$$

como la ecuación transformada debe carecer del término $y'z'$, igualamos el coeficiente de $y'z'$ a cero y obtenemos

$$-\left(\cos^2\theta - sen^2\theta\right) = 0$$

$$\cos^2\theta - sen^2\theta = 0$$

$$\cos^2\theta = sen^2\theta$$

Por lo tanto $\cos\theta = sen\theta$ de donde $\theta = 45°$, y esto se cumple cuando

$$\cos\theta = sen\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

sustituyendo estos valores del $sen\theta$ y $\cos\theta$ en la ecuación dada se tiene

$$x'^2 - \left(\frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{z'}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{y'}{\sqrt{2}} - \frac{z'}{\sqrt{2}}\right) + 1 = 0$$

$$x'^2 - \frac{y'^2}{2} + \frac{z'^2}{2} - \frac{y'}{\sqrt{2}} + \frac{z'}{\sqrt{2}} + 1 = 0$$

Agrupando términos, factorizando y completando cuadrados se llega

$$x^2 - \frac{1}{2}\left(y'^2 + \sqrt{2}\,y' + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(z'^2 + \sqrt{2}\,z' + \frac{1}{2}\right) + 1 = 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$x^2 - \frac{1}{2}\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(z' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 = 0$$

Ahora mediante una traslación de ejes, podemos simplificar aún más la ecuación

Entonces empleando las ecuaciones

$x'' = x'$

$y'' = y' + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$z'' = z' + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$x''^2 - \frac{1}{2}y''^2 + \frac{1}{2}z''^2 + 1 = 0$$

Escribiendo esta ecuación en forma ordinaria, se obtiene

$$\frac{y''^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} - \frac{z''^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} - \frac{x''^2}{1^2} = 1$$

La cual representa un hiperboloide de dos ramas

7.7 Rotación Matricial en el Espacio

Examinemos la ecuación general de segundo orden en tres variables.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \qquad (1)$$

Esta puede ser escrita en forma matricial como:

$$(x \quad y \quad z)\cdot\begin{bmatrix} A & \frac{D}{2} & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & B & \frac{F}{2} \\ \frac{E}{2} & \frac{F}{2} & C \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + (G \quad H \quad I)\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + J = 0 \qquad (2)$$

Sean

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad , \quad Q = \begin{bmatrix} A & \frac{D}{2} & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & B & \frac{F}{2} \\ \frac{E}{2} & \frac{F}{2} & C \end{bmatrix} \quad , \quad S = [G \quad H \quad I]$$

Podemos expresar la ecuación (2) en la forma

$$X^T \cdot Q \cdot X + S \cdot X + J = 0 \qquad (3)$$

Nótese que el primer término de la ecuación (3) contiene todos los términos de segundo grado de la ecuación (1).

La matriz simétrica $Q \neq \overline{O}$ es llamada matriz simétrica asociada a la ecuación cuádrica.

Ahora, sea P una matriz de rotación y consideremos la rotación de ejes

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = P^{t} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad (4)$$

o equivalentemente $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \qquad (5)$

(Recordemos que $P^{-1} = P^{T}$ es decir P debe ser ortogonal como en el caso de dos variables.)

La ecuación (5) se puede escribir como

$X = P \cdot X' \quad (6) \qquad$ donde $\quad X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$

Para transformar la ecuación (3), sustituimos la ecuación (6) en ella y obtenemos

$$\begin{aligned} (P \cdot X')^{T} \cdot Q \cdot (P \cdot X') + S \cdot (P \cdot X') + J &= 0 \\ X'^{T} \cdot \left(P^{T} \cdot Q \cdot P\right) \cdot X' + (S \cdot P) \cdot X' + J &= 0 \qquad (7) \end{aligned}$$

la cual es llamada la transformada de la ecuación (3) o de (1), bajo una rotación de ejes.

Sea $Q' = P^{T}QP$, entonces podemos expresar la transformada de la ecuación (1) como

$$X'^{T} \cdot Q' \cdot X' + (S \cdot P) \cdot X' + J = 0 \qquad (8)$$

La ecuación (8) es una ecuación cuadrática en x´, y´, z´, comprendiendo X'^TQX' la parte cuadrática, $(S\cdot P)\cdot X'$ la parte lineal y J el término constante.

Nótese que $Q'^T = P^T\cdot Q^T\cdot(P^T)^T = P^T\cdot Q\cdot P$, dado que Q es simétrica y $\left(P^T\right)^T = P$

Por tanto, $Q'^T = Q'$, y Q' es al matriz simétrica asociada a la ecuación (8).

Además

$$|Q'| = \left|P^T\cdot Q\cdot P\right| = \left|P^T\right|\cdot|Q|\cdot|P| = |Q|$$

De modo que, el determinante de la matriz simétrica es invariante bajo una rotación de ejes.

Para eliminar los términos producto x´y´, y´z´, x´z´, examinemos la parte cuadrática $X'^T Q' X'$ (Notemos que $Q' \neq \overline{O}$, dado que $Q \neq \overline{O}$)

Nuestro problema es, entonces, encontrar una matriz de rotación P tal que

$$X'^T\left(P^TQ\cdot P\right)\cdot X' = \lambda_1\cdot x'^2 + \lambda_2\cdot y'^2 + \lambda_3\cdot z'^2$$

$$= \begin{bmatrix} x' & y' & z' \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Así, P debe ser tal que

$$P^T\cdot Q\cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

Para algunos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

Escribamos la matriz (desconocida) P como

$$P=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

y sean X_1, X_2, X_3 las columnas de P, llamadas *matrices columna* o *vectores columna*. P puede ser escrita P= $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix}$ y como $P^{-1}=P^T$, la ecuación (9) toma la forma

$$Q\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

de modo que, las columnas de P deben satisfacer $Q\cdot X_1=\lambda_1\cdot X_1$; $Q\cdot X_2=\lambda_2\cdot X_2$; $Q\cdot X_3=\lambda_3\cdot X_3$.

Vemos entonces que $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ son eigenvalores de Q y X_1, X_2, X_3 son sus correspondientes eigenvectores de acuerdo a la siguiente definición.

Definición

Sea Q una matriz de 3x3. Un escalar λ para el cual exista un vector $X\neq\overline{O}$ tal que $Q\cdot X=\lambda\cdot X$ es llamado un *eigenvalor o valor característico* de Q correspondiente a λ.

Sea $X=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ un vector columna arbitrario y λ un escalar arbitrario.

Nuestro problema es determinar un λ tal que para algún $X\neq\overline{O}$ se tenga $Q\cdot X-\lambda\cdot X=\overline{O}$; esto es,

$$(Q-\lambda\cdot I_3)\cdot X=\overline{O} \qquad (10)$$

$Q - \lambda \cdot I_3$ es llamado la *matriz característica* de Q.

La ecuación (10) es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$(A - \lambda)\cdot a_1 + \frac{D}{2}\cdot a_2 + \frac{E}{2}\cdot a_3 = 0$$

$$\frac{D}{2}\cdot a_1 + (B - \lambda)\cdot a_2 + \frac{F}{2}\cdot a_3 = 0 \qquad (11)$$

$$\frac{E}{2}\cdot a_1 + \frac{F}{2}\cdot a_2 + (C - \lambda)\cdot a_3 = 0$$

Sabemos que la ecuación (11) tiene una solución $X \neq \overline{O}$ *si y solo si* el determinante de la matriz de los coeficientes es cero; esto es,

$$|Q - \lambda \cdot I_3| = 0 \qquad (12)$$

La ecuación (12) es llamada ecuación característica de Q.

La ecuación es cúbica en términos de λ y tiene tres raíces, (una de las cuales al menos es real) no necesariamente distintas, los cuales son los eigenvalores de Q.

Si las tres raíces son distintas, los correspondientes eigenvectores son mutuamente ortogonales.

Si la ecuación (12) tiene una raíz repetida debemos encontrar eigenvectores ortogonales perteneciendo a aquel eigenvalor.

Después de haber encontrado eigenvectores mutuamente ortogonales, los normalizamos.

Estos vectores normalizados son entonces las columnas de la matriz de rotación P buscada.

Las columnas de P deben ser tales que $|P| = 1$

Tal matriz P siempre existe y lo garantiza el siguiente teorema.

Teorema

Si Q es una matriz simétrica de 3x3 existe una matriz de rotación P tal que:

$$P^T \cdot Q \cdot P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

para algunos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Además, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son eigenvalores de Q y las columnas de P son eigenvectores unitarios mutuamente ortogonales de Q correspondientes a $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, respectivamente.

Si $Q \neq \overline{O}$ al menos uno de los eigenvalores es diferente de cero.

VIII Secciones Cónicas. Superficies.

8.1 Cónicas.

La ecuación general de segundo grado en x e y se puede expresar en la forma
$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

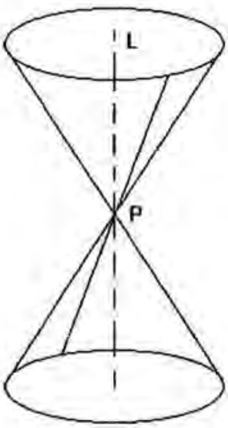
La gráfica de la ecuación de segundo grado es llamada *sección cónica o cónica*, debido a que L la curva correspondiente se puede obtener como la intersección de un cono circular recto y un plano.

El cono puede generarse de la siguiente manera:

Sea P un punto fijo sobre una recta L. Una superficie cónica se genera mediante las rectas que pasan por P y forman un ángulo constante con L.

A la línea L se le denomina *eje* del cono, al punto P, *vértice* del cono y a cada línea que forma parte de la superficie del cono se le llama *generatriz*.

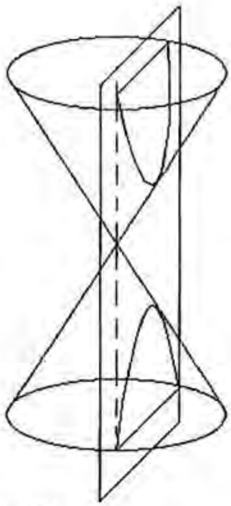
El vértice separa al cono en dos partes llamados *mantos*. (Fig.174)



(Fig.174)

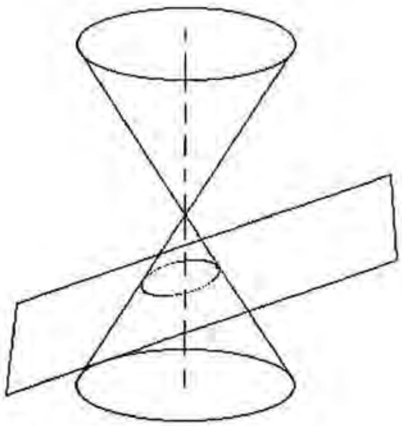
Si un plano que no contiene al vértice y no es paralelo a ninguna generatriz, corta los dos mantos del cono, se obtiene una curva que consiste en dos ramas separadas llamada *hipérbola* (Fig.174a). Si un plano corta solamente uno de los mantos, la intersección es una curva cerrada llamada *elipse* (Fig.174b). La circunferencia es un caso particular de la elipse, y se obtiene cuando el plano es perpendicular al eje del cono (Fig.175).

Si el plano es paralelo a una generatriz, la intersección es una curva que se extiende infinitamente a lo largo de un manto sin cortar al otro manto, llamada *parábola*.(Fig.174c).



(Fig.174a)

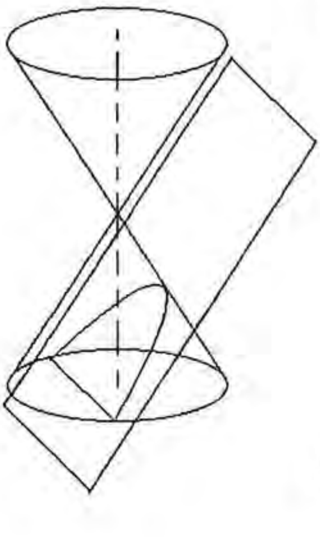
Hipérbola.
Plano que corta a ambas ramas.



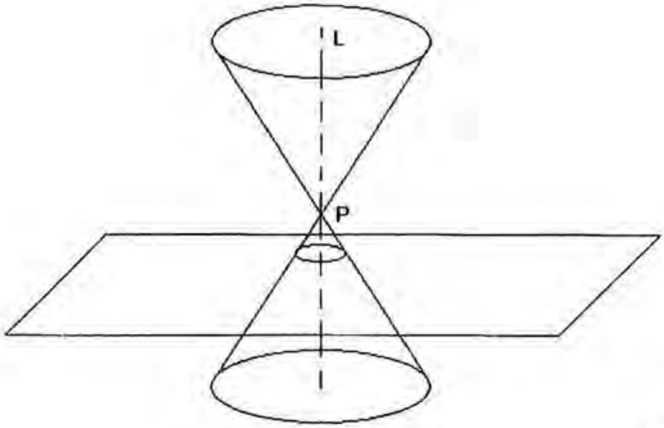
(Fig.174b)

Elipse.
Plano oblicuo al eje corta a una rama.

Parábola.
Plano paralelo a un elemento.

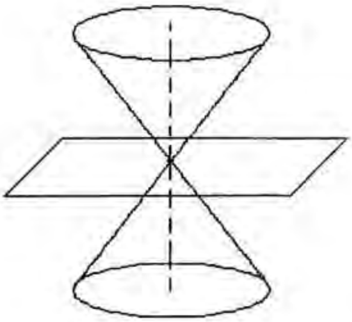


(Fig.174c)

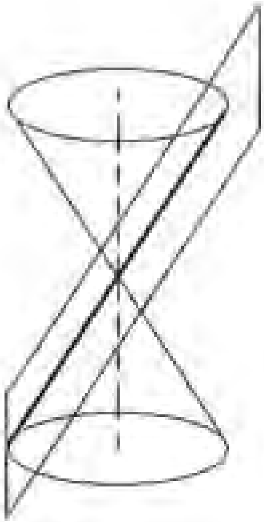


(Fig.175)

Los casos excepcionales no vacíos se obtienen cuando el plano pasa por el vértice del cono sin interceptar a ningún manto. (Fig.176) Cuando el plano es tangente a una directriz. (Fig.176a) Cuando el plano contiene al eje. (Fig.176b) Para el caso de dos rectas paralelas hay que sustituir al cono por un cilindro circular recto que, se puede pensar, es un cono cuyo vértice está a una distancia infinita. (Fig.176c)
Estos lugares geométricos excepcionales reciben el nombre de secciones cónicas *degeneradas*.



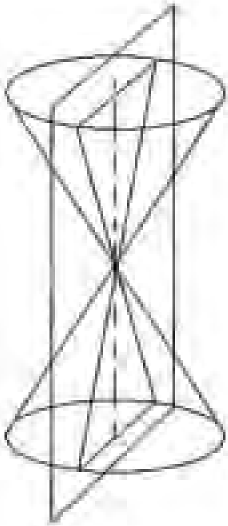
Punto
Plano que corta sólo en el vértice (Fig.176)



Una recta

Plano tangente a un elemento.

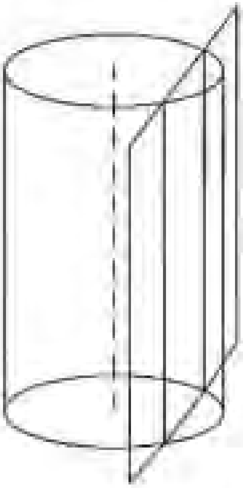
(Fig.176a)



Par de rectas que se cortan

Plano que contienen al eje.

(Fig.176b)



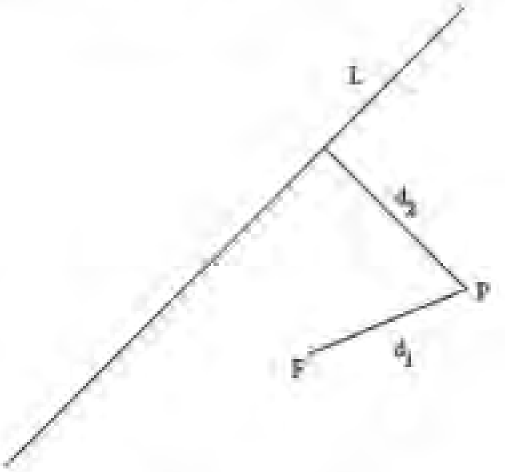
Par de rectas paralelas

Plano perpendicular a la base del cilindro

(Fig.176c)

8.2 Definición General de las cónicas.

Dada una recta fija L y un punto fijo F no contenido en L, una *cónica* es el lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano de tal manera que la razón de la distancia de P a F respecto a la distancia de P a L es igual a una constante positiva denotada por *e*. (Fig.177)



(Fig.177)

Es decir, si $d_1 = |\overline{FP}|$ y d_2 es la distancia de P a L, entonces $e = \dfrac{d_1}{d_2}$

Si $e < 1$, la cónica se llama una *elipse*.

Si $e = 1$, la cónica se llama una *parábola*.

Si $e > 1$, la cónica se llama una *hipérbola*.

La recta L se llama *directriz*, el punto F *foco* y la constante positiva *e* recibe el nombre de *excentricidad*.

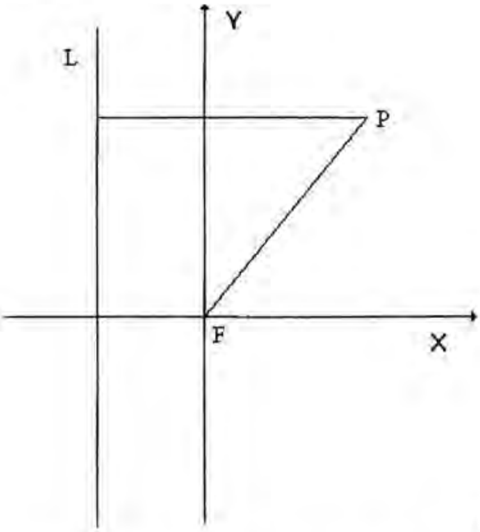
Sin ninguna perdida de generalidad consideremos una cónica con excentricidad *e*, foco en el origen y directriz la recta $x = -p$, con $p > 0$. (Fig.178)

Sea P(x,y) un punto cualquiera del lugar geométrico. Por definición de la cónica, el punto P debe satisfacer la condición geométrica

$$e = \frac{d(P,F)}{d(P,L)} \quad ; \text{ donde } \; d(P,F) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad d(P,L) = |x + p|$$

esto es

$$e = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x + p|}$$



(Fig.178)

Elevando al cuadrado y transponiendo términos tenemos

$$x^2 + y^2 = e^2 \cdot x^2 + 2 \cdot p \cdot e^2 \cdot x + e^2 \cdot p$$

$$\left(1 - e^2\right) \cdot x^2 + y^2 - 2 \cdot p \cdot e^2 \cdot x = e^2 \cdot p \quad (\#)$$

Consideremos por separado los casos $e = 1$ y $e \neq 1$

Caso I.

Supongamos que $e = 1$. (Parábola) $\dfrac{d(PF)}{d(PL)} = 1$

En tal caso la ecuación (#) se reduce a

$$y^2 = 2px + p^2$$

$$y^2 = 2p\cdot\left(x + \frac{p}{2}\right)$$

que es la ecuación de una parábola con vértice en $\left(-\dfrac{p}{2}, 0\right)$

Mediante la traslación $x' = x + \dfrac{p}{2}$, $y' = y$ obtenemos la ecuación $y'^2 = 2px'$.

Caso II.

Supongamos que $e \neq 1$ (Elipse e Hipérbola)

Completando cuadrados para x en la ecuación (#) tenemos

$$\left(1 - e^2\right)\cdot\left[x^2 - \frac{2\cdot p\cdot e^2}{1 - e^2}\cdot x + \frac{p^2\cdot e^4}{\left(1 - e^2\right)^2}\right] + y^2 = e^2\cdot p^2 + \frac{e^4\cdot p^2}{1 - e^2}$$

$$\left(1 - e^2\right)\cdot\left(x - \frac{p\cdot e^2}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 = \frac{e^2\cdot p^2}{1 - e^2}$$

dividiendo ambos miembros de la igualdad por el número de la derecha obtenemos

$$\left(\frac{1 - e^2}{e\cdot p}\right)^2\cdot\left(x - \frac{p\cdot e^2}{1 - e^2}\right)^2 + \left(\frac{1 - e^2}{e^2\cdot p^2}\right)\cdot y^2 = 1$$

la cual puede escribirse como

$$\frac{\left(x - \frac{p \cdot e^2}{1 - e^2}\right)^2}{\left(\frac{e \cdot p}{1 - e^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(1 - e^2\right) \cdot \left(\frac{e \cdot p}{1 - e^2}\right)^2} = 1 \quad (\#\,\#)$$

La ecuación (# #) representa una elipse o una hipérbola según sea $e < 1$ o $e > 1$.

Supongamos que $e < 1$. En este caso $1 - e^2 > 0$. Si

$$a = \frac{e \cdot p}{1 - e^2}$$

dado que $ep > 0$, y $1 - e^2 > 0$, tenemos que $a > 0$.

Ahora la ecuación (# #) se reduce a

$$\frac{(x - e \cdot a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{\left(1 - e^2\right) \cdot a^2} = 1$$

Si hacemos $b = \sqrt{1 - e^2} \cdot a$, resulta que $b^2 = (1 - e^2)\, a^2$ y la ecuación anterior toma la forma

$$\frac{(x - e \cdot a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Que corresponde a una elipse con centro en el punto ($e\,a$, 0).

Trasladando los ejes al punto ($e\,a$, 0) por medio de la traslación

$x' = x - ea$, $y' = y$.

Obtenemos la ecuación rectangular de la elipse en la forma

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

Ahora supongamos que $e > 1$, de modo que $e^2 - 1 > 0$.

En este caso podemos escribir la ecuación (# #) en la forma

$$\frac{\left(x+\dfrac{e^2 p}{e^2-1}\right)^2}{\left(\dfrac{e\cdot p}{e^2-1}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(e^2-1\right)\left(\dfrac{e\cdot p}{e^2-1}\right)^2}=1$$

Si $a=\dfrac{e\cdot p}{e^2-1}$, resulta que $a > 0$. Asimismo, si $b=\sqrt{e^2-1}\cdot a$, tenemos

que $b^2=\left(e^2-1\right)a^2$. Con esta notación la ecuación anterior se reduce a

$$\frac{(x+e\cdot a)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Que representa una hipérbola con centro en el punto (- e a, 0).

Trasladado los ejes al centro por medio de la traslación

$x' = x + ea \quad$ y $\quad y' = y$

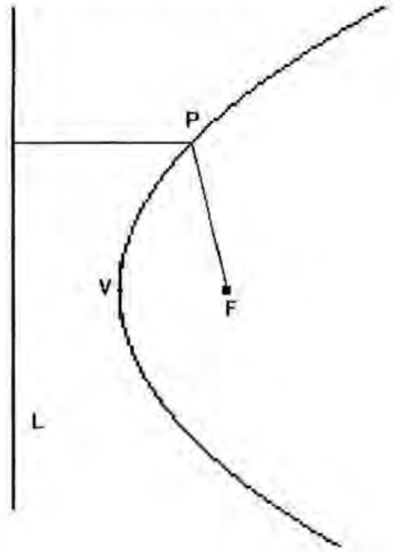
Obtenemos la ecuación rectangular de la hipérbola en la forma

$$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1$$

8.3 Parábola

Definición Focal de la Parábola

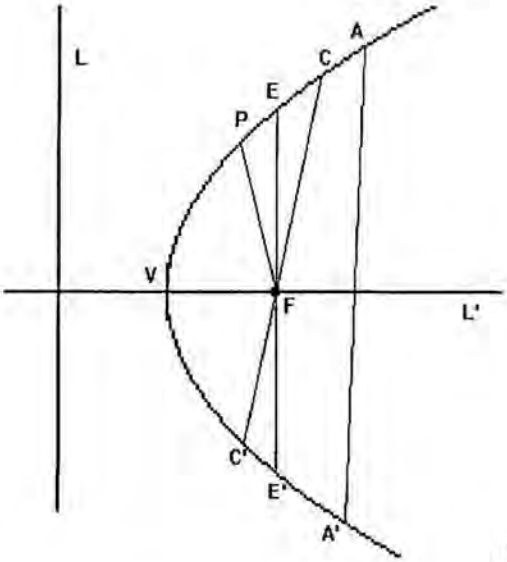
Se llama parábola al lugar geométrico de puntos equidistantes a una recta fija llamada *directriz* y a un punto fijo llamado *foco*, que no pertenece a la directriz. (Fig.179)



(Fig.179)

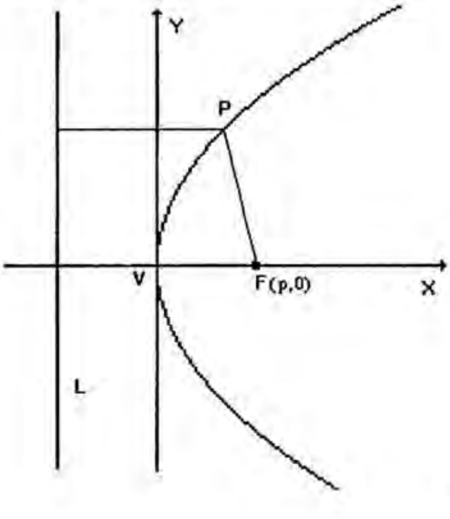
Designemos con F al foco y con L a la directriz. La recta L' que pasa por F y es perpendicular a la directriz se llama *eje focal* (o eje de simetría) El punto V de intersección de la parábola con el eje focal se llama *vértice*. Consideremos la figura 180. Sea $\overline{AA'}$ una cuerda. Si esta como lo hace $\overline{CC'}$, pasa por el foco se llama *cuerda focal*

La cuerda focal $\overline{EE'}$ perpendicular al eje focal se llama *lado recto*. Por último el segmento que une el foco con cualquier punto de la parábola como $\overline{FP}$ se llama *radio focal*. (Fig.180)



(Fig.180)

La ecuación más simple de una parábola la obtenemos al tomar el vértice en el origen y hacer coincidir el eje focal con alguno de los ejes cartesianos (en este caso el eje X). En la figura, hemos colocado al foco sobre la parte positiva del eje X, es decir, con coordenadas F(p, 0), $p > 0$. (Fig.181)



(Fig.181)

Sean $d_1 = d(F,P) = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$

$d_2 = d(P,L) = |x+p|$

de donde $d_1^2 = (x-p)^2 + y^2$

$d_2^2 = (x+p)^2$ como $d_1 = d_2$ por definición de parábola

entonces $d_1^2 = d_2^2$

$$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$$

la cual desarrollando y agrupando términos tenemos

$$y^2 = 4px \quad (\#)$$

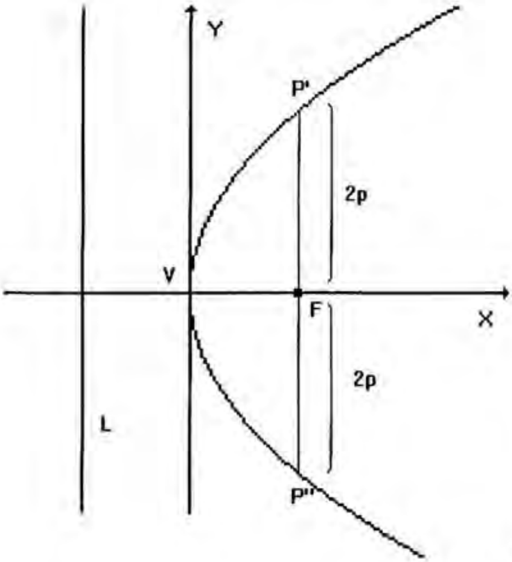
La ecuación (#) se llama ecuación canónica de la parábola. De (#) se deduce que $x \geq 0$ ya que $p > 0$.

Despejando a y, tenemos $y = \pm 2 \cdot \sqrt{px}$

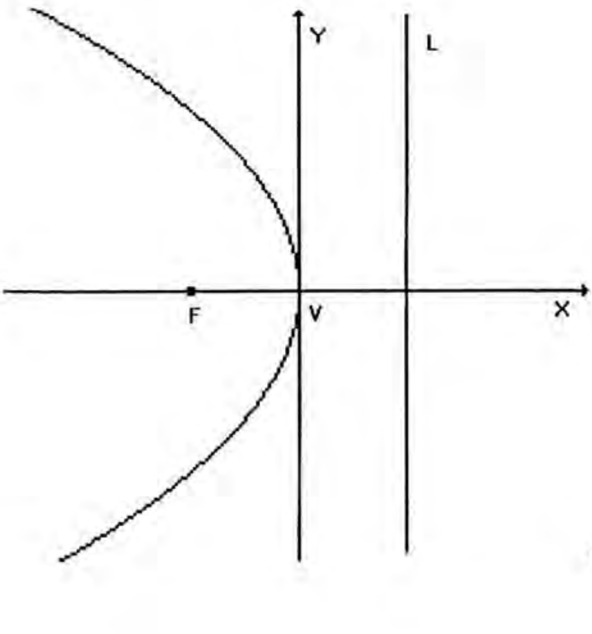
Entonces y puede tomar todos los valores reales y como consecuencia la parábola es una curva abierta que se extiende indefinidamente hacia la derecha del eje Y, hacia arriba y abajo del eje X. (Fig.182)

Los extremos del lado recto tienen abscisa a p; uno de ellos tiene ordenada $2p$ y el otro $-2p$, así los puntos extremos del lado recto son los puntos $P'(p, 2p)$ y $P''(p, -2p)$, por lo tanto la longitud del lado recto la obtenemos como el valor absoluto de $4p$.
Se denota como $|4p|$

La directriz L tendrá como ecuación $x = -p$
Si $p < 0$, el foco se encuentra en el lado negativo del eje X, de la ecuación (#) se deduce que $x \leq 0$ y por lo cual deben excluirse todos los valores positivos de x y la parábola aparece a la izquierda del eje Y. La ecuación de la directriz será $x = p$. (Fig.183)



(Fig.182)



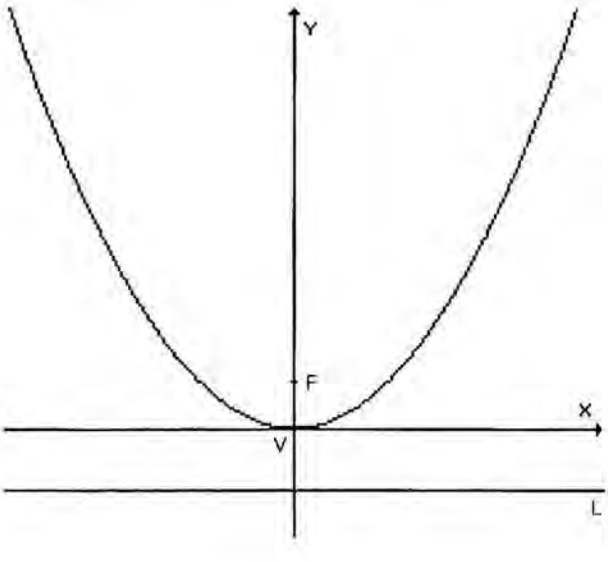
(Fig.183)

En el caso de que el vértice sea el origen y su eje focal coincida con el eje Y, la ecuación de la parábola será:

$x^2 = 4py$ (##)

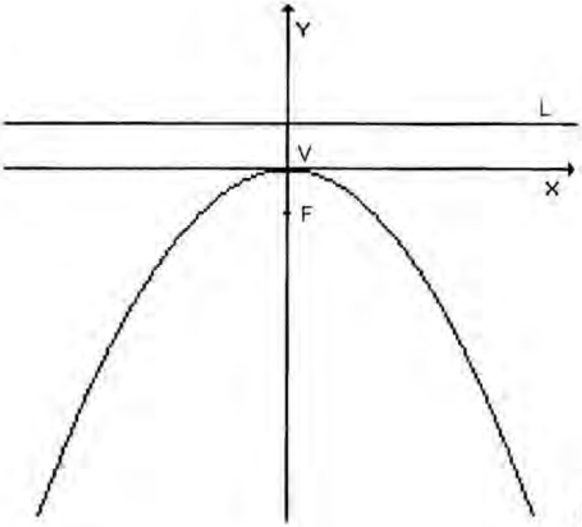
Nuevamente vemos que si $p > 0$, $y \geq 0$. Esto es, el foco se encuentra en la parte positiva del eje Y y la parábola se extiende hacia arriba del eje X. Su directriz tendrá como ecuación $y = -p$.

En el caso en que $p < 0$ e $y \leq 0$, el foco está en la parte negativa del eje Y y la parábola se extiende hacia abajo del eje X . Por consiguiente la ecuación de su directriz es $y = p$. (Figuras 184 y 185)



(Fig.184)

Las ecuaciones (#) y (##) se dice que son *ecuaciones canónicas* de la parábola con vértice en el origen y eje focal alguno de los ejes cartesianos.



(Fig.185)

Ejemplo

Escribir la ecuación de la parábola con vértice en el origen y el foco en el punto (0, 4).

Solución.

El foco se encuentra sobre el eje Y y como el vértice esta en el origen, la ecuación de la parábola es de la forma

$x^2 = 4py$

La distancia del vértice al foco es 4, y en consecuencia $p = 4$.
Sustituyendo el valor de p en la ecuación, obtenemos

$x^2 = 16y$

Ejemplo

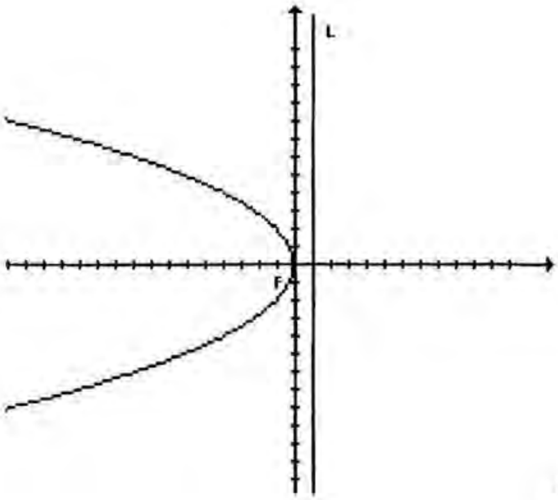
Una parábola tiene su vértice en el origen, su eje focal esta sobre el eje X, y pasa por el punto (-1, 2). Encontrar su ecuación.

Solución.

La ecuación de la parábola es de la forma $y^2 = 4px$,. Para determinar el valor de $4p$ sustituimos las coordenadas del punto dado en esta ecuación entonces obtenemos

4 = 4 p (-1)   y   4 p = -4

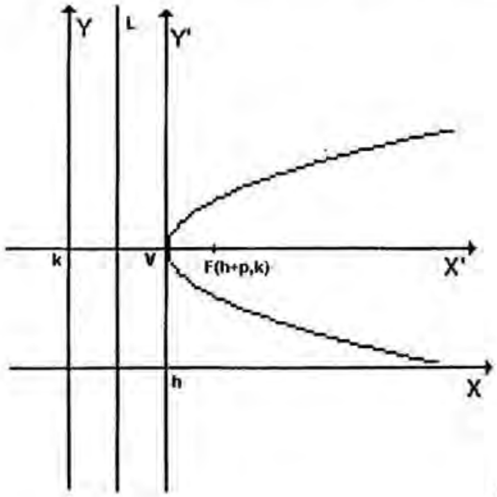
La ecuación buscada es $y^2 = -4x$. Su gráfica esta representada en la figura 186.



(Fig.186)

Parábola con vértice en (h, k) y eje focal paralelo a alguno de los ejes coordenados.

La ecuación de la parábola con vértice en un punto cualquiera (h, k) distinto del origen y eje focal paralelo a un eje coordenado, la obtenemos si los ejes coordenados son trasladados de tal manera que el nuevo origen O' coincida con el vértice (h, k). (Fig.187)



(Fig.187)

La ecuación de la parábola con referencia a los nuevos ejes X'Y'esta dada por

$y'^2=4px'$ (&)

Usando las ecuaciones de traslación

$x = x'+ h$ despejando x' y y' tenemos $x'= x - h$

$y = y'+ k$ $y'= y - k$

sustituyendo estos valores en (&); obtenemos

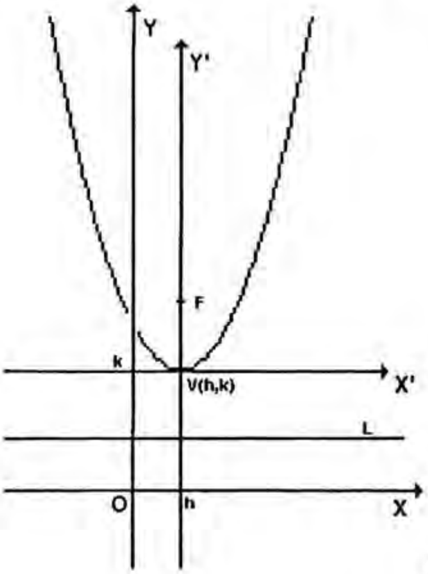
$(y-k)^2 = 4p(x-h)$ (*)

Representa la ecuación de la parábola con vértice (h, k) y eje paralelo al eje X.

Análogamente, la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (h, k) y eje focal paralelo al eje Y es

$(x-h)^2 = 4p(y-k)$ (**)

Las ecuaciones (*) y (**) se llaman ecuaciones ordinaria de la parábola.



(Fig.188)

Si las ecuaciones ordinarias las desarrollamos y transponemos términos obtenemos

$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Donde $C = 1$, $D = -4p$, $E = -2k$, y $F = k^2 + 4ph$

o

$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$

Donde $A = 1$, $D = -2h$, $E = -4p$ y $F = h^2 + 4pk$

De esta manera las ecuaciones de segundo (1) y (2) representan cada una, la ecuación de una parábola con vértice (h, k) y eje focal paralelo a un eje coordenado.

Analicemos la ecuación de la forma (1)

Supongamos que D = 0.

La ecuación se transforma en $y^2 + Ey + F = 0$, que es una ecuación cuadrática con variable y

i) Si las raíces son reales y diferentes, digamos r_1 y r_2 , entonces la ecuación cuadrática toma la forma $(y-r_1)\cdot(y-r_2)=0$ y esto representa geométricamente dos rectas con ecuaciones $y = r_1$, $y = r_2$, paralelas ambas al eje X.

ii) Si las raíces son reales e iguales, el lugar geométrico consta de dos rectas coincidentes representadas geométricamente por una sola recta paralela al eje X.

$(y-r_1)^2 = 0$

$y = r_1$

iii) Si las raíces son complejas, no existe ningún lugar geométrico.

Los casos i), ii), iii), son llamados casos degenerados de la parábola (dos líneas rectas paralelas, una línea paralela a un eje, o ningún lugar geométrico)

Análogamente, si analizamos ahora la ecuación de la forma (2), veremos que los casos degenerados son dos rectas paralelas al eje Y, una recta paralela al eje Y o ningún lugar geométrico.

Si suponemos que E = 0.

Analicemos que esta sucediendo geométricamente cuando en la ecuación (1)

$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

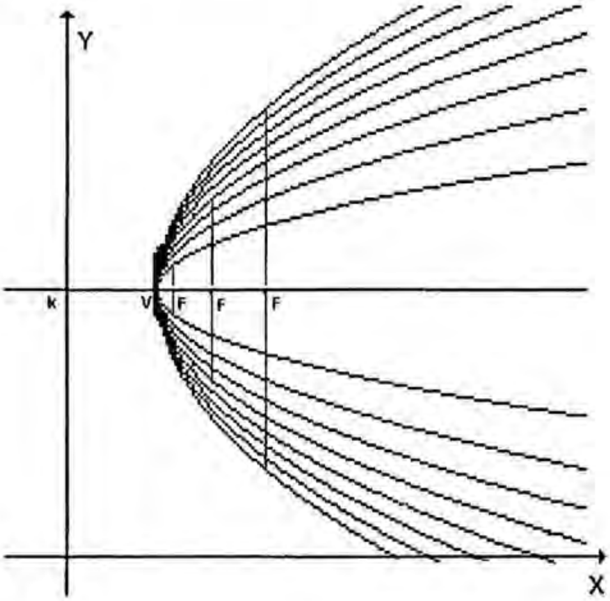
Suponemos que D = 0. Esto equivale a que $-4p = 0$ o bien $p = 0$.

Esto significa que la distancia entre el vértice y el foco es cero.

Es decir, si en la ecuación

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

hacemos que el parámetro p tienda a cero, obtendremos un caso degenerado de la parábola. (Fig.189)



(Fig.189)

Análogamente, si analizamos la ecuación (2), la ecuación que representa a una parábola cuyo eje es paralelo al eje Y; y suponiendo que E = 0, entonces la ecuación representará dos rectas paralelas al eje Y, o dos rectas coincidentes paralelas al eje X, o ningún lugar geométrico, según las raíces de $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ sean reales diferentes, reales iguales o complejos.

Ejemplo.

Empleando la definición de parábola obtener la ecuación dela parábola cuyo foco es el punto F(5, 2) y la ecuación de la directriz L es $x = 1$.

Solución

Por definición un punto P(x, y) está sobre la parábola si y solo si

d(F, P) = d(P, L) de donde se tiene $\sqrt{(x-5)^2 + (y-2)^2} = |x-1|$

elevando al cuadrado y simplificando se tiene

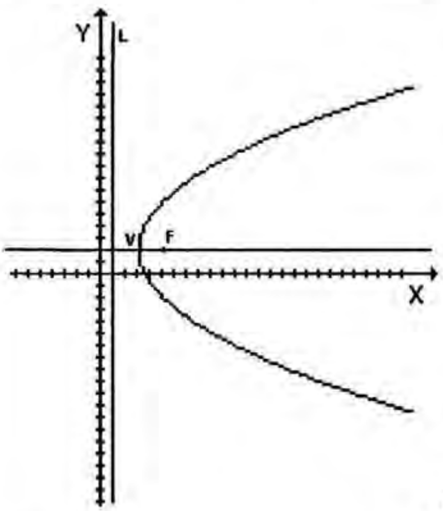
$$y^2 - 8x - 4y + 28 = 0$$

La ecuación de la parábola en su forma de polinomio de segundo grado.
Llevemos la ecuación a su forma ordinaria, completando cuadrados en y ; y factorizando obtenemos

$$(y-2)^2 = 8(x-3)$$

de aquí vemos inmediatamente que el vértice es (3, 2), la parábola abre hacia la derecha del eje Y. Por lo tanto el eje focal es paralelo al eje X; se sigue que las coordenadas del foco son (3+2, 2) o sea (5, 2). La ecuación de la directriz es $x = 1$.

Y la longitud del lado recto es $|4p| = 8$. (Fig.190)



(Fig.190)

Lo anterior supone que si nos dan una ecuación de segundo grado de la forma (1) o (2) que nos represente una parábola, si la reducimos a su forma ordinaria, obtendremos todos sus elementos (vértice, foco, ec directriz, long del lado recto) necesarios para su graficación.

Ejemplo.

Demostrar que la ecuación $4x^2 -20x -24y + 97 = 0$ representa una parábola, y hallar las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de su directriz y al longitud de su lado recto. (Fig. 191)

Solución.

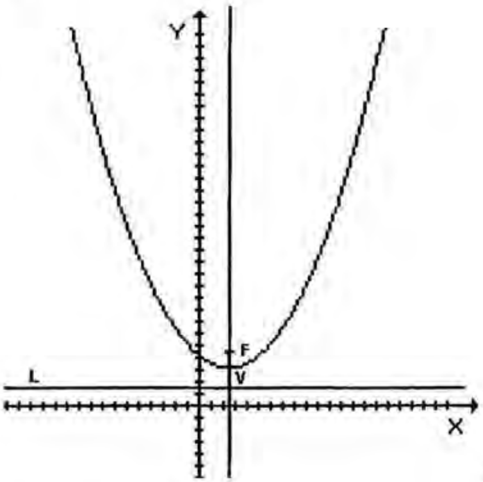
Si reducimos la ecuación, completando el cuadrado en x, obtenemos $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = 6(y-3)$

De esta ecuación vemos que las coordenadas del vértice son $\left(\frac{5}{2},3\right)$.

Como $4p = 6$, $p = \frac{3}{2}$, y la parábola se abre hacia arriba.

Entonces, como el foco esta sobre el eje Y, el eje es paralelo al eje Y, se sigue que las coordenadas del foco son $\left(\frac{5}{2},3+\frac{3}{2}\right)$ o sea $\left(\frac{5}{2},\frac{9}{2}\right)$.

La ecuación de la directriz es $y = 3-\frac{3}{2}$, o sea , $y = \frac{3}{2}$, y la longitud del lado recto es $|4p| = 6$.



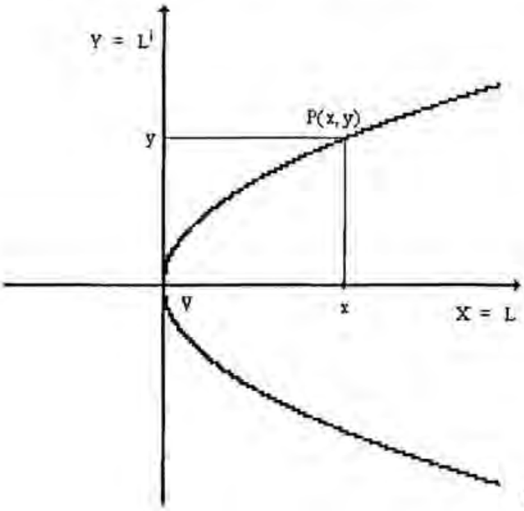
(Fig.191)

8.4 Propiedad Universal de la Parábola

La ecuación canónica $y^2 = 4px$ enuncia la siguiente propiedad universal de la parábola.

$d(P,L)^2 = 4p \cdot d'(P,L')$

donde L se el eje de simetría de la parábola y L' la tangente a la curva por el vértice. (Fig.192)



(Fig.192)

Paráfrasis:

(distancia de P al eje de simetría)^2 = 4p (distancia de P a la tangente por el vértice)

En otras palabras el cuadrado de la distancia al eje es proporcional a la distancia a la tangente por el vértice.

Nota: d' = (P, L') representa la distancia dirigida de P a L' y puede ser una cantidad negativa dependiendo de la expresión algebraica en cuestión.

Esta propiedad permite obtener la ecuación de una parábola en cualquier posición conociendo su eje, el vértice y su lado recto. Además permite reconocer si una ecuación cuadrática en *x* e *y* representa una parábola y cuales son sus elementos.

Para esto, mediante un análisis detallado vamos a demostrar que la ecuación de segundo grado $u(x, y)^2 = v(x, y)$ representa una parábola en el plano cartesiano.

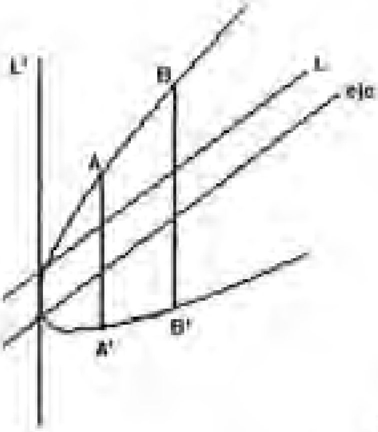
Teorema.

Sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ dos funciones lineales $u(x, y) = u_1x + u_2y + u_3$

$v(x, y) = v_1x + v_2y + v_3$ en x, y (es decir u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 son constantes)

con la propiedad de que las líneas rectas L: $u(x, y) = 0$ y L' : $v(x, y) = 0$ no son paralelas entonces la ecuación $u(x, y)^2 = v(x, y)$ representa una parábola con las siguientes propiedades:

a) La recta L bisecta todas las cuerdas de la curva paralelas a L'.
b) La recta L' es tangente a la curva en el punto donde se intersecta con L.
c) El eje de simetría de al parábola es paralelo a L. (Fig.193)



(Fig.193)

$\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ son cuerdas paralelas a L'

Sea $(L')_k$ la recta $v(x, y) = k$ paralela a L'

Sus intersecciones con al curva representada por (&) se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones

$u(x, y)^2 = v(x, y)$

$v(x, y) = k$

Ahora bien

$$u(x,y)^2 = v(x,y) \;\; y \;\; v(x,y) = k \iff u(x,y)^2 = k \;\; y \;\; v(x,y) = k$$

$$\iff u(x,y) = \sqrt{k} \;\; y \;\; v(x,y) = k$$

$$o$$

$$u(x,y) = -\sqrt{k} \;\; y \;\; v(x,y) = k$$

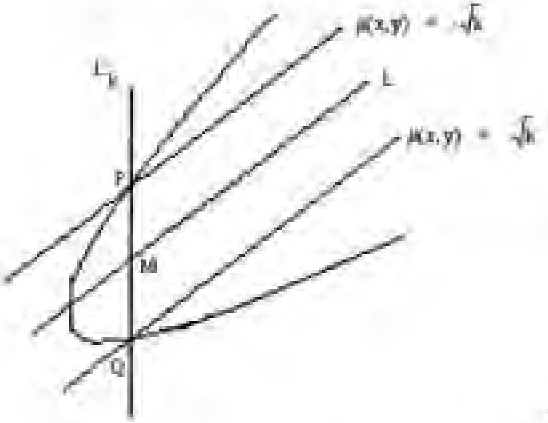
y resulta que los puntos de intersección de $(L')_k$ con la curva se encuentran al resolver dos sistemas de ecuaciones lineales , a saber

$$\begin{matrix} u(x,y) = \sqrt{k} \\ v(x,y) = k \end{matrix} \qquad y \qquad \begin{matrix} u(x,y) = -\sqrt{k} \\ v(x,y) = k \end{matrix}$$

de modo que tales puntos de intersección son los mismos que los puntos de intersección de $(L')_k$ con las rectas

$$u(x,y) = \sqrt{k} \;\; y \;\; u(x,y) = -\sqrt{k}$$

que son paralelas y equidistantes de L tal como se muestra en la figura 194.



(Fig.194)

Un argumento geométrico nos hace ver que la cuerda $\overline{PQ}$, cuyos extremos son los puntos de intersección, es bisecada por L.

Además las rectas $u(x, y) = \sqrt{k}$ y $u(x, y) = -\sqrt{k}$ son paralelas a L y equidistan de ella.

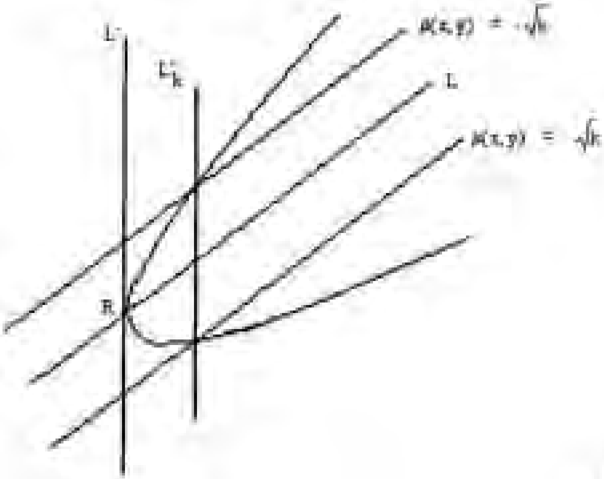
Por el teorema de Tales, cualquier transversal (en este caso $(L^*)_k$) las corta formando segmentos cuyas longitudes son proporcionales a las distancias que las separan.

Como en este caso dichas distancias son iguales, los segmentos también son iguales en la figura anterior se trata de los segmentos $\overline{PM}$ y $\overline{MQ}$, por lo que $|\overline{MP}| = |\overline{MQ}|$ y $\overline{PQ}$ es bisecado por L. Con esto se demuestra (a).

Por lo anterior, los puntos de intersección de $(L^*)_k$ con la curva son:

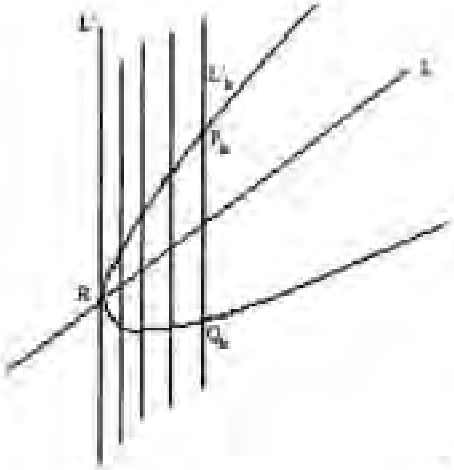
i) reales y distintos si $k > 0$.
ii) reales y coincidentes (solo un punto) si $k = 0$.
iii) imaginarios si $k < 0$. (en este caso $\sqrt{k}$ es un número imaginario)

En particular la recta L^* (a la que corresponde el valor de $k = 0$) tiene un solo punto de intersección con la curva representada por (&).
Dicho punto R es aquel donde se intercepta con L como lo muestra la figura 195.



(Fig.195)

L' es por definición una tangenie a la curva representada por (&) dado que L' se la línea recta con la que una familia de secantes L_k^{+} (con $k \in R$) tiende a coincidir a medida que los extremos P_k y Q_k de las rectas secantes se aproximan a R . (Fig.196)
Con lo que queda demostrado b).



(Fig.196)

Sean $u_{xy} = u_1x + u_2y$ y $v(x, y) = v_1x + v_2y + v_3$

La ecuación (&) se escribe

$(u_1x + u_2y)^2 = v_1x + v_2y + v_3$

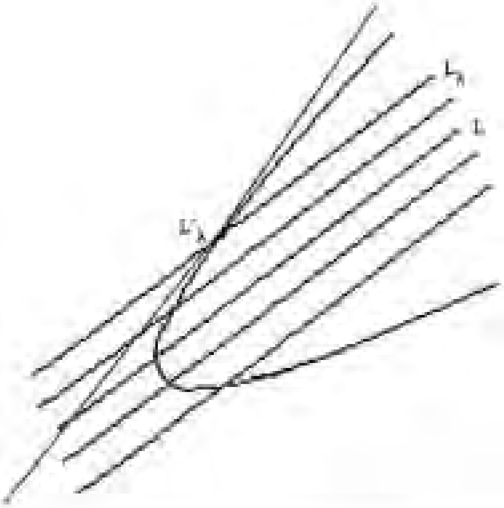
Ecuación que también puede escribirse

$$(u_1x + u_2y + \lambda)^2 = (v_1 + 2\lambda \cdot u_1)x + (v_2 + 2\lambda \cdot u_2)y + (v_3 + \lambda^2) \qquad (\&\&)$$

Dado que

$[(u_1x + u_2y) + \lambda]^2 = (u_1x + u_2y)^2 + 2\lambda(u_1x + u_2y) + \lambda^2$ con ayuda del parámetro λ.

Es claro que para cada valor $\lambda \in R$ tendremos la ecuación $ax + by + \lambda = 0$ de una paralela L_λ de L. sin alterar por ello la ecuación (&). (Fig.197)



(Fig.197)

En cada caso la tangente L'_λ con ecuación $(v_1 + 2\lambda \cdot u_1)x + (v_2 + 2\lambda \cdot u_2)y + (v_3 + \lambda^2) = 0$ tendrá una pendiente que dependerá de λ pudiendo escoger λ de tal forma que L_λ y L'_λ Sean perpendiculares entre si. Ello se logra encontrando un valor de λ para el cual, el producto punto de sus vectores normales sea cero.

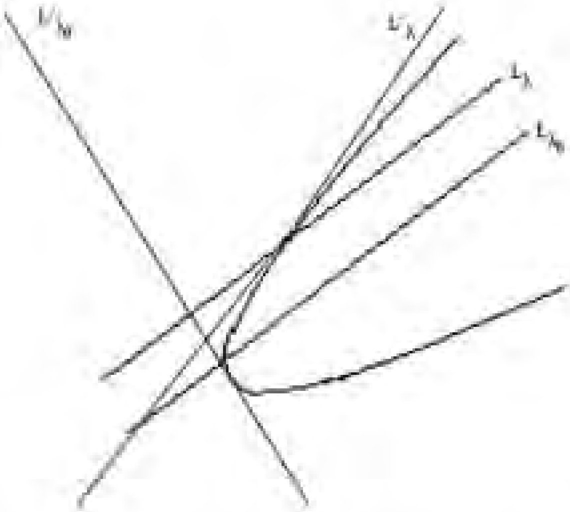
$$(u_1, u_2) \bullet (v_1 + 2\cdot\lambda\cdot u_1, v_2 + 2\cdot\lambda\cdot u_2) = 0$$

Dicho valor es $\lambda_0 = \dfrac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{2 \cdot (u_1^2 + u_2^2)}$ y es único.

Sustituyendo este valor λ_0 en la ecuación (&&) se obtienen dos rectas

$$L_{(\lambda_0)} : u_1 \cdot x + u_2 \cdot y + \lambda_0 \quad y \quad (L')_{(\lambda_0)} : (v_1 + 2\cdot\lambda_0\cdot u_1)\cdot x + (v_2 + 2\cdot\lambda_0\cdot u_2)\cdot y + \left[v_3 + (\lambda_0)^2\right]$$

que son respectivamente un eje de simetría y la tangente por el vértice de la curva con ecuación (&). (Fig.198)



(Fig.198)

Vemos entonces, por la propiedad universal de la parábola, que la curva con ecuación

$$\left(u_1 x + u_2 y + \lambda_0\right)^2 = \left(v_1 + 2\lambda_0 u_1\right)x + \left(v_2 + 2\lambda_0 u_2\right)y + \left[v_3 + \left(\lambda_0\right)^2\right]$$

es una curva de esta especie.

Con esto queda demostrado que la curva representada por la ecuación (&) es una parábola y su eje de simetría es paralelo a L. Esto es debido a que la recta $u(x, y) = 0$ (es decir L) es de la forma $u_1x + u_2 y + \lambda$ para alguna ($\lambda = u_3$) y por ello es paralela a $u_1x + u_2 y = 0$ y a L_{λ_0} que es el eje de simetría.

Hagamos notar lo siguiente:

Hemos visto que toda parábola tiene una ecuación de la forma $u(x, y)^2 = v(x,y)$.
Si ahora escribimos $u(x, y) = u_1x + u_2y + u_3$, la ecuación (&) se convierte en
$(u_1x + u_2y+u_3)^2 = v_1x + v_2y + v_3$

Desarrollando y agrupando términos similares:

$$\left(u_1\right)^2 \cdot x^2 + 2 \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot x \cdot y + \left(u_2\right)^2 \cdot y^2 = \left(v_1 - 2 \cdot u_1 \cdot u_3\right) \cdot x + \left(v_2 - 2 \cdot u_2 \cdot u_3\right) \cdot y + \left[v_3 - \left(u_3\right)^2\right]$$

factorizando el primer miembro de la igualdad obtenemos

$$\left(u_1 \cdot x + u_2 \cdot y\right)^2 = \left(v_1\right)' \cdot x + \left(v_2\right)' \cdot y + \left(v_3\right)'$$

donde

$$\left(v_1\right)' = v_1 - 2 \cdot u_1 \cdot u_3$$

$$\left(v_2\right)' = v_2 - 2 \cdot u_2 \cdot u_3$$

$$\left(v_3\right)' = v_3 - \left(u_3\right)^2$$

y vemos que en la ecuación de la parábola los términos de segundo grado forman un cuadrado completo. Esto constituye un criterio para saber *si* una ecuación de segundo grado en x e y representa una parábola. En otras palabras, si la parte de segundo grado de una ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = Dx + Ey + F$ forma un cuadrado completo, entonces esta ecuación representa una parábola o dos rectas paralelas.

En efecto, dado que $Ax^2 \pm Bxy + Cy^2 = \left(\sqrt{A}x \pm \sqrt{C}y\right)^2$, la ecuación se escribe

$$(\sqrt{A}x \pm \sqrt{C}y)^2 = Dx + Ey + F$$

que representa

i) Una parábola si $\sqrt{A}x \pm \sqrt{C}y = 0$ y $Dx + Ey + F = 0$ no son paralelas.

ii) Dos rectas paralelas si $\sqrt{A}x \pm \sqrt{C}y = 0$ y $Dx + Ey + F = 0$ son paralelas.

Analicemos lo siguiente:

Para que $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ forme un cuadrado completo es necesario y suficiente que

B^2-4AC = 0

En efecto, $B^2-4AC = 0 \iff B^2 = 4AC$

$$\iff B = \pm 2 \cdot \sqrt{A} \cdot \sqrt{C}$$

Por tanto, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = Ax^2 \pm 2 \cdot \sqrt{A} \cdot \sqrt{C}\, xy + Cy^2 \iff$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = (\sqrt{A}x \pm \sqrt{C}y)^2$$

Cabe señalar que tanto A como C se pueden tomar siempre positivos.
Dado que $B^2-4AC = 0$ es obvio que A y C no pueden tener signos diferentes (si no, la suma B^2-4AC sería positiva) y cuando su signo es negativo, basta con multiplicar por -1 la ecuación.

Ejemplo

Sean $u(x, y) = 2x - y$ y $v(x, y) = 5x - 1$

Sustituyendo en (&) tenemos la ecuación

$(2x - y)^2 = 5x - 1 \quad (\#)$

por la forma en que fue construida, la parte de segundo grado es un cuadrado completo. Desarrollando y agrupando, está se transforma en

$4x^2 - 4xy + y^2 - 5x + 1 = 0.$

Obsérvese que en este caso $B^2 - 4\,AC = 0$

Este hecho, como se verá más adelante, es lo que asegura que la parte de segundo grado sea un cuadrado completo.

Introduciendo el parámetro λ en la ecuación (#) tenemos que

$$(2x - y + \lambda)^2 = (5 + 4\lambda)x - 2\lambda \cdot y + (\lambda^2 - 1) \quad \text{.....................} (\#\#)$$

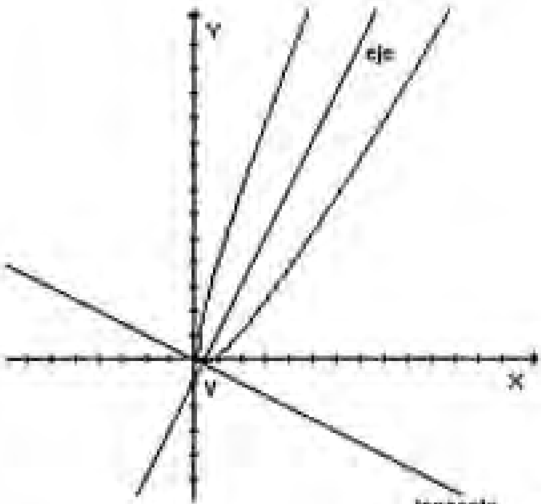
Para que las rectas $L_\lambda : 2x - y + \lambda = 0$ y $L'_\lambda : (5+4\lambda)x - 2\lambda \cdot y + (\lambda^2 - 1) = 0$

sean perpendiculares entre si se debe cumplir $(2,-1) \bullet (5+4\lambda, -2\lambda) = 0$

Resolviendo para λ, $\lambda = -1$, al sustituir en (##) está se convierte en

$(2x - y - 1)^2 = x + 2y$

Se trata de una parábola con eje de simetría $2x - y - 1 = 0$ y la tangente por el vértice $x + 2y = 0$ (el vértice es el punto $v\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ (Fig.199)



(Fig.199)

Para encontrar el lado recto hay que escribir la ecuación en su forma ordinaria, multiplicando a las rectas L_{λ} y L_{λ}' por 1 de tal manera que normalice a las rectas.

Esto es

$$(2x - y - 1)^2 = x + 2y \iff \left[\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\cdot(2x - y - 1)\right]^2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\cdot(x + 2y)$$

$$\iff 5\cdot\left(\frac{2x - y - 1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \sqrt{5}\cdot\left(\frac{x + 2y}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\iff \left(\frac{2x - y - 1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{x + 2y}{\sqrt{5}}\right)$$

y el lado recto es $\frac{1}{\sqrt{5}}$

Dados los puntos P_1 (1, 0) y P_2 (1, 4) que pertenecen a la parábola.
¿Cuáles son las ecuaciones de las tangentes por dichos puntos?

Consideremos solo el punto P_1. Para que la recta $2x - y + \lambda = 0$ (un diámetro, recta paralela al eje de simetría) incida con este punto es necesario que $2(1) - (0) + \lambda = 0$, es decir, $\lambda = -2$. sustituyendo este valor en la ecuación (##) ésta se transforma en

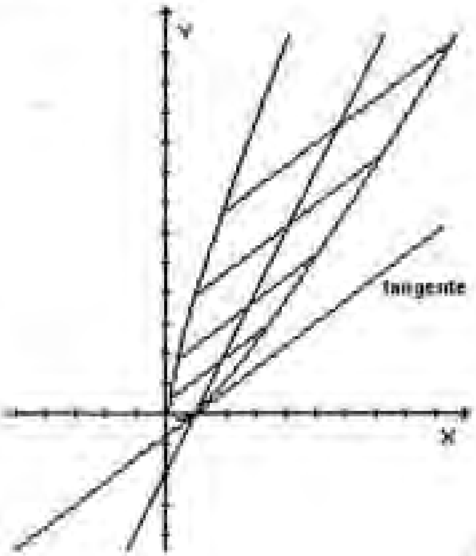
$(2x - y - 2)^2 = -3x + 4y + 3$

La recta $-3x + 4y + 3 = 0$ es la tangente a la curva en el punto P_1 (1, 0) .
La recta $2x - y - 2 = 0$ biseca las cuerdas de la parábola paralelas a la tangente antes mencionada, y se intercepta con ella en P_1 (1, 0). (Fig. 200)

Análogamente, para el punto P_2 (1, 4) , hallamos $\lambda = 2$ y sustituyendo este valor en (##) tenemos

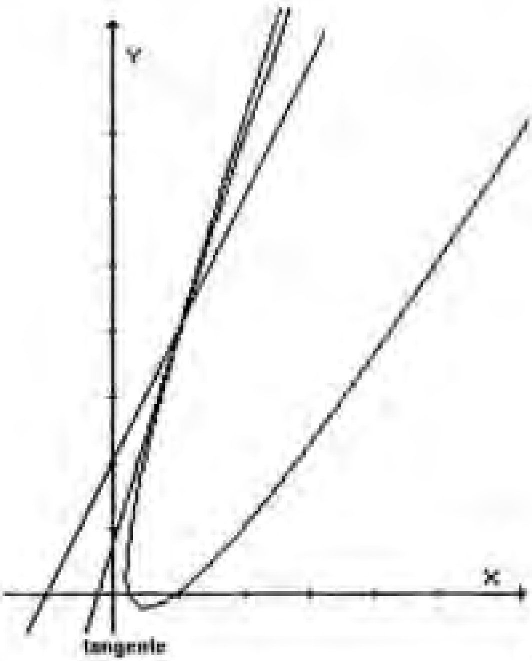
$(2x - y + 2)^2 = 13x - 4y + 3$

Donde la recta $13x - 4y + 3 = 0$ es la tangente a la curva en el punto P_2 (1, 4) y la recta $2x - y + 2 = 0$ se el diámetro que biseca las cuerdas de la parábola paralelas a la tangente.



(Fig.200)

Es así que el análisis que hemos llevado a cabo nos provee de un método para encontrar la ecuación de la línea tangente a una parábola en cualquiera de sus puntos.

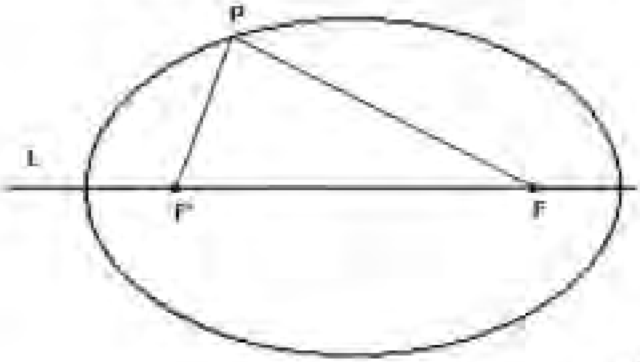


(Fig.201)

8.5 Elipse

Definición Focal de la Elipse

Se llama elipse al lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es una constante. Esta constante tiene que ser mayor que la distancia entre los focos para no contravenir la desigualdad del triángulo. (Fig 202)

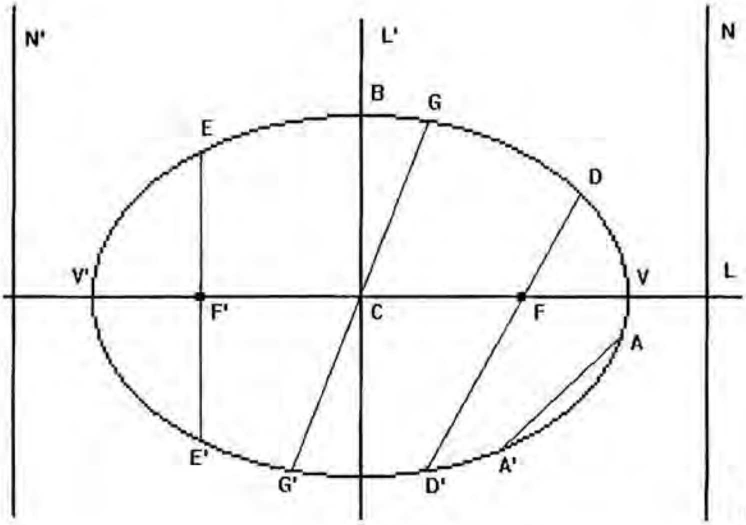


(Fig.202)

$d(P,F') + d(P,F) = 2a$ y $2a > d(F,F') = 2c$

La recta L que pasa por los focos se llama eje focal. El eje focal corta a la elipse en dos puntos llamados vértices V y V'. El punto medio del segmento que une los focos se llama centro y se denota por C.
El segmento $\overline{VV'}$, se llama eje mayor. La recta L' que pasa por C y es perpendicular al eje focal se llama eje normal. El eje normal corta a la Elipse en dos puntos B, B' y el segmento $\overline{BB'}$ es llamado eje menor. El segmento $\overline{AA'}$ que une dos puntos cualesquiera de la elipse se llama cuerda. La cuerda que pasa por el foco como $\overline{DD'}$ se llama cuerda focal.
La cuerda focal que es perpendicular al eje focal como $\overline{EE'}$ se llama lado recto en este caso por tener la elipse dos focos tendrá dos lados rectos. Una cuerda que pasa por el centro se llama diámetro como $\overline{GG'}$, en particular el eje mayor y el eje menor son diámetros.

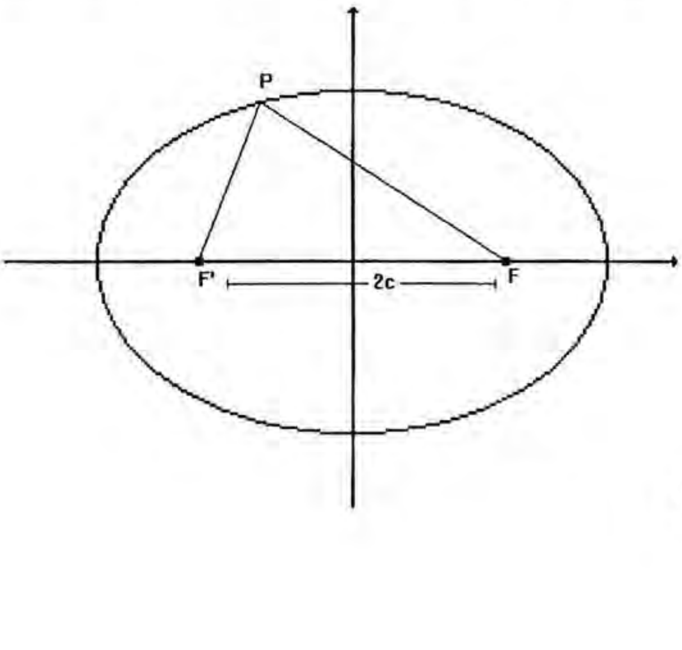
Las rectas N y N' son llamadas directrices de la elipse
En la figura 203 vemos la elipse y sus elementos.



(Fig.203)

La ecuación canónica de la elipse la obtenemos seleccionando como focos dos puntos dispuestos simétricamente en torno al origen sobre alguno de los ejes coordenados, que en este caso será el eje X.

Se denotará como 2c la distancia entre los focos y 2a a la suma de distancias a los focos.



(Fig.204)

Focos : $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$ $\qquad\qquad 0 < c < a$

$$d_1 = d(P, F') = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad d_2 = d(P, F) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

de donde

$d_1 + d_2 = 2a$......(1) Por definición.

$$(d_1)^2 = (x + c)^2 + y^2 \text{ ......(2)}$$

$$(d_2)^2 = (x - c)^2 + y^2$$

$$(d_1)^2 - (d_2)^2 = 4 \cdot c \cdot x$$

$$(d_1 - d_2) \cdot (d_1 + d_2) = (d_1)^2 - (d_2)^2 = 4 \cdot c \cdot x$$

Sustituyendo (1) en la ecuación anterior tenemos

$$(d_1 - d_2)\, 2a = 4 \cdot c \cdot x$$

$$d_1 - d_2 = \frac{4 \cdot c \cdot x}{2a} \text{ ....(3)}$$

Resolviendo el sistema (1) y (3) para d_1 y d_2

$$d_1 = a + \frac{c}{a} \cdot x \quad ; \quad d_2 = a - \frac{c}{a} \cdot x \text{ ....(4)}$$

expresiones racionales par la distancia los focos.

De (2) y (4) tenemos

$$\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2 = (x+c)^2 + y^2 \quad ; \quad \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2 = (x-c)^2 + y^2$$

Partiendo de cualquiera de las expresiones anteriores se llega a la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

Como $0 < c < a$

$c^2 < a^2$

$0 < a^2 - c^2$ haciendo la sustitución $b^2 = a^2 - c^2$ resulta de ello que

$0 < b < a$

La ecuación (5) se llama ecuación canónica de la elipse. Representa una curva cerrada y acotada, es simétrica respecto a los ejes coordenados y por ende del origen.

Intersecciones con los ejes en los puntos V' (-a, 0), V(a, 0), B'(0, -b), y B(0, b).

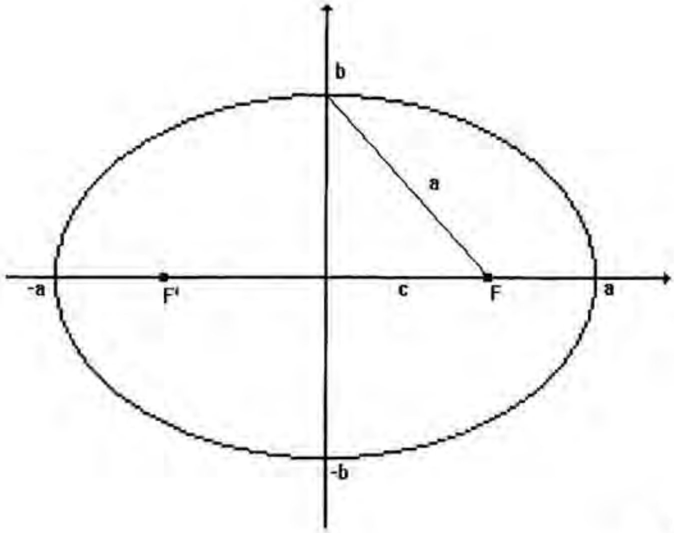
Veamos el significado geométrico de las cantidades a, b, c. (Fig.205)

$a^2 = b^2 + c^2$

Como $a > b$, la elipse es más ancha que alta. En general el eje mayor es el que contiene a los focos.

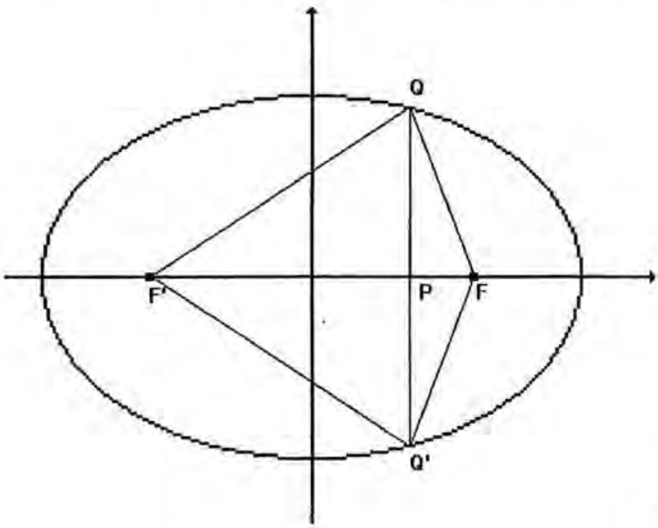
Por ejemplo, la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ tiene sus focos en el eje Y: $F_1(0, \sqrt{5})$, $F_2(0, -\sqrt{5})$

A las cantidades a y b se les llama semiejes por representar estas la mitad de la longitud de los ejes de simetría comprendidos entre los vértices de la curva.



(Fig.205)

Dado x entre –a y a , al trazar una perpendicular al eje X por el punto P(x, 0) se determinan dos puntos Q y Q' sobre la elipse, tal como se indica en la figura 206.



(Fig.206)

Como la curva es simétrica respecto al eje X, los triángulos FPQ y F'PQ son iguales respectivamente a los triángulos FPQ' y F'P Q'. Por lo anterior las distancias de Q y Q' a los focos son las mismas y solo dependen de la abscisa x. Esto explica porque las expresiones racionales para las distancias a los focos solo dependen de x .

Al comparar la ecuación canónica de la elipse con la ecuación de la definición general de cónica en el caso de una elipse (excentricidad menor que 1, véase sección 8.2 definición general de las cónicas) tenemos

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \frac{(x')^2}{\left(\frac{e\cdot p}{1-e^2}\right)^2}+\frac{(y')^2}{\left(1-e^2\right)\cdot\left(\frac{e\cdot p}{1-e^2}\right)^2}=1$$

Se tiene

$$a=\frac{e\cdot p}{1-e^2} \quad \text{y} \quad b=\frac{p\cdot e}{\sqrt{1-e^2}}$$

despejando

$$a\cdot\left(1-e^2\right)=p\cdot e=b\cdot\sqrt{1-e^2} \quad \text{y} \quad \frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}$$

de modo que

$$\frac{b^2}{a^2}=1-e^2 \quad \text{y} \quad e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

por lo tanto

$$e^2=\frac{c^2}{a^2} \quad \text{y} \quad e=\frac{c}{a}$$

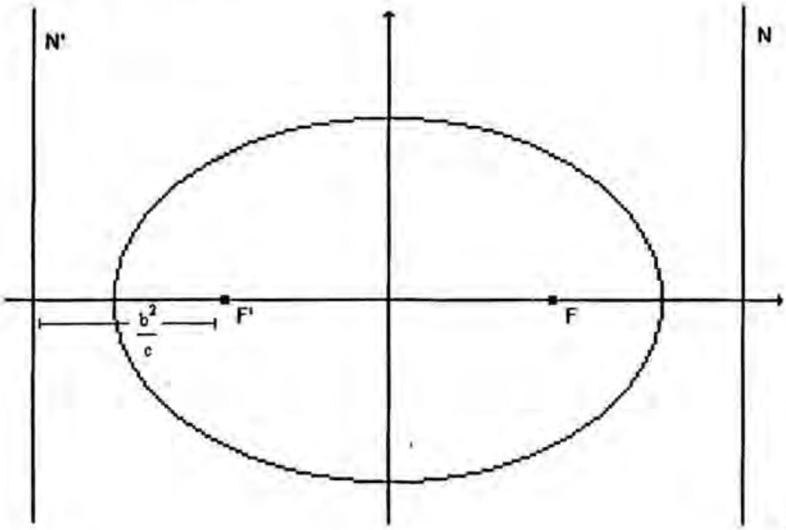
(la excentricidad en términos de c y a)

Por otro lado como

$$p \cdot e = a \cdot \left(1 - e^2\right)$$

$$p = \frac{b^2}{c}$$

La distancia entre el foco F'(-c, 0) y la directriz es $\frac{b^2}{c}$, por lo que la distancia de la directriz al origen es $\frac{b^2}{c}$. (Fig.207)



(Fig.207)

$$\frac{b^2}{c} + c = \frac{b^2 + c^2}{c^2} = \frac{a^2}{c}$$

Por lo tanto la ecuación de la directriz N' es $x = -\frac{a^2}{c}$

Dado que la curva es simétrica respecto al eje Y, hay en correspondencia con el foco $F(c, 0)$ una directriz con ecuación $x = \frac{a^2}{c}$ ubicada a su derecha.

Las ecuaciones (4) se pueden escribir como

$d_1 = ex + a \quad ; \quad d_2 = -ex + a \qquad (6)$

De la misma forma las ecuaciones de las directrices se pueden escribir como

$$x = -\frac{a}{e} \quad ; \quad x = \frac{a}{e}$$

La distancia de un punto $P(x, y)$ de la elipse a cada una de las directrices es

$$D_1 = \frac{a}{e} + x \quad ; \quad D_2 = \frac{a}{e} - x \qquad (7)$$

de (6) y (7) se infiere que

$$\frac{d_1}{D_1} = \frac{d_2}{D_2} = e$$

Esta relación muestra que las dos definiciones que hemos dado de la elipse determinan una sola clase de curvas en el plano cartesiano.

Si en (6) hacemos $x = -c$ para d_1 o $x = c$ para d_2 se obtiene la mitad del lado recto.

$$e(-c) + a = -\frac{c^2}{a} + a = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

Por lo tanto la longitud del lado recto esta dada por $\frac{2 \cdot b^2}{a}$

La excentricidad de la elipse caracteriza su forma. Cuando es próxima a cero la elipse es casi una circunferencia de radio a, mientras que cuando es próxima a 1 la curva tiende a colapsarse en un intervalo de longitud $2a$.

En efecto:

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad \ldots\ldots(8)$$

de modo que

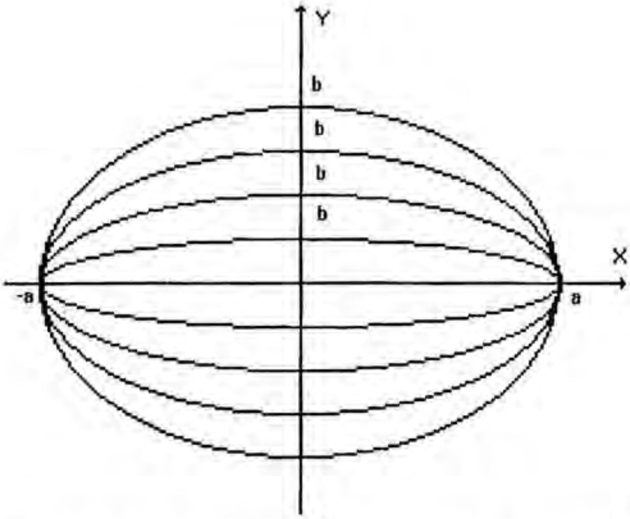
$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \qquad y \qquad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} \quad \ldots\ldots\ldots(9)$$

y la razón de los ejes se determina por la excentricidad. Mientras más cercana sea la excentricidad a la unidad, tanto será $1 - e^2$ y con ello la razón del eje menor al mayor.

A mayor excentricidad, más alargada será la elipse.

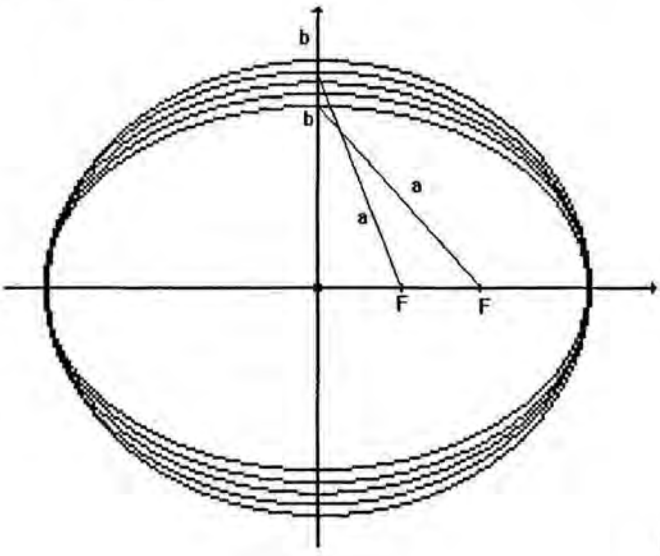
Si $e \to 1$ entonces de (9)

$\frac{b}{a} \to 0$ y esto ocurre cada vez que b se acerca a 0, (Fig.208)



(Fig.208)

Si e se aproxima a cero, de (9), $\frac{b}{a}$ se aproxima a 1, de modo que a y b tienden a ser iguales. (Fig.209)

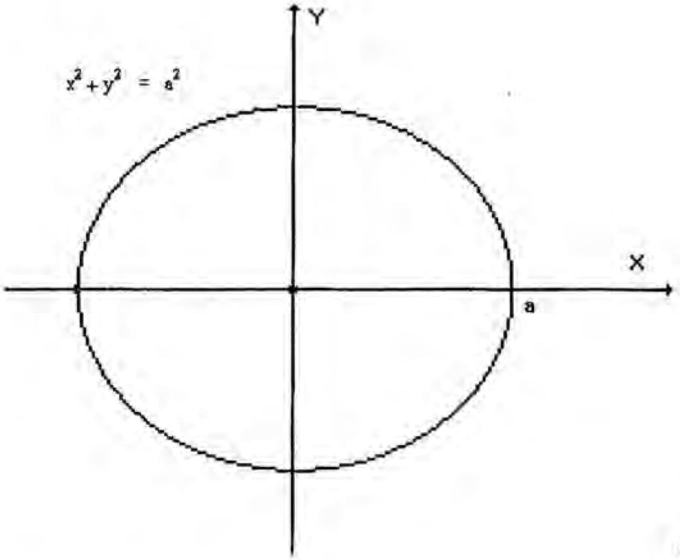


(Fig.209)

Esto es, si c tiende a cero. La distancia entre los focos tiende a cero. Así mismo cuando c toma el valor de cero, $a = b$, pues $c^2 = a^2 + b^2$ y $\frac{a}{b} = 1$, de modo que $e = 0$, ya que $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

8.6 Circunferencia

En este caso la elipse se transforma en una circunferencia con centro el origen y radio a. (Fig.210)



(Fig.210)

Dado que a = b,

la ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, se transforma en

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad \text{o bien} \qquad x^2+y^2=a^2 \qquad (10)$$

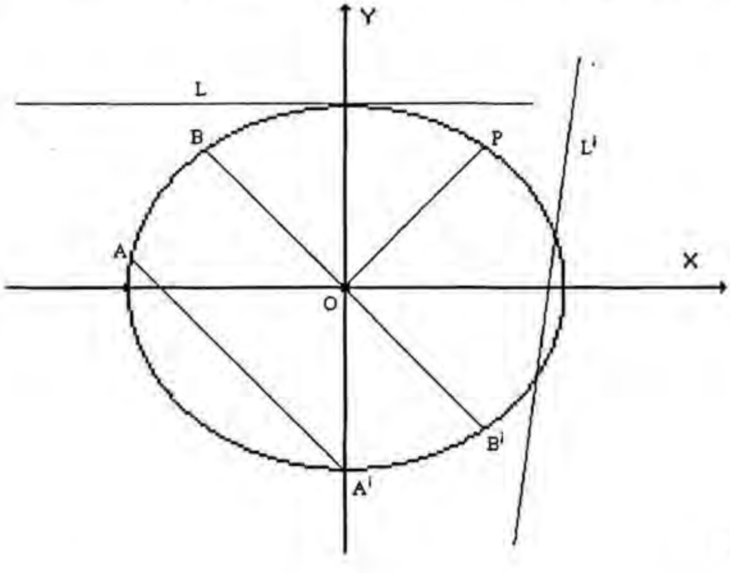
La ecuación (10) representa una circunferencia de centro en el origen y radio a.

Esta definición de la circunferencia nos deja ver que la circunferencia es un caso particular de cónica, a saber, aquel en que $e=a$.

Estudio de la Circunferencia.

Una circunferencia es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal modo que se conserva siempre a una distancia constante de un punto fijo de ese plano. El punto fijo se llama *centro* de la circunferencia, y la distancia constante se llama *radio.*

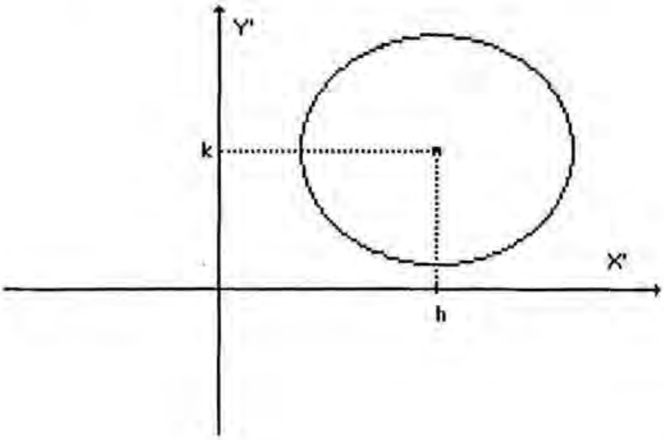
Todo segmento que une el centro con cualquier punto de la circunferencia se le llama radio. $\overline{OP}$ es un radio. Al segmento que une dos puntos de la circunferencia como $\overline{AA'}$ se le llama cuerda. A la cuerda $\overline{BB'}$ que pasa por centro de la circunferencia se le llama diámetro. A la recta L' que corta a la circunferencia en dos puntos se le llama secante. La recta L que toca a la circunferencia en un solo punto se le llama tangente. (Fig.211)



(Fig.211)

Circunferencia con centro en (h, k) y radio a.

La ecuación de la circunferencia con centro en un punto (h, k) diferente del origen, la hallamos si los ejes coordenados son trasladados de tal manera que él nuevo origen O'coincida con el centro (h, k). (Fig.212)



(Fig.212)

La ecuación de la circunferencia con relación a los nuevos ejes X' Y' esta dada por

$x'^2 + y'^2 = a^2$ (11)

Usando las ecuaciones de traslación $x = x' + h$, $y = y' + k$ de donde

$x' = x - h$ y $y' = y - k$ sustituyendo estas ecuaciones en (11) tenemos

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = a^2$ (12)

que nos representa la ecuación de la circunferencia con centro en (h, k) y radio a.

Si desarrollamos la ecuación (12) obtenemos $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - a^2 = 0$

La cual puede escribirse en la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ (13)
llamada forma general de la ecuación de una circunferencia, en donde
$D = -2h$, $E = -2k$, y $F = h^2 + k^2 - a^2$

Investiguemos ahora bajo que condiciones la ecuación (13) representa una circunferencia.
Ordenando los términos y acompletando cuadrados en la ecuación (13), resulta

$$\left(x^2+Dx+\frac{D^2}{4}\right)+\left(y^2+Ey+\frac{E^2}{4}\right)=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$

de donde

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4} \qquad (14)$$

En la ecuación anterior, vemos que depende del valor del segundo miembro el que represente o no una circunferencia.

Caso I.

Si $D^2+E^2-4F>0$, la ecuación (14) representa una circunferencia con centro en el punto $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ y radio igual $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$

Caso II

Si $D^2+E^2-4F=0$, la ecuación (14) representa un punto, el punto de coordenadas $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$

Caso III

Si $D^2+E^2-4F<0$, la ecuación (14) representa una circunferencia imaginaria.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son $F_1(3, 0)$ y $F_2(-3, 0)$ y cuyos vértices son $V_1(5, 0)$ y $V_2(-5, 0)$. Encontrar todos sus elementos y trazar su grafica.

Solución.

De los datos se tiene que $a = 5$ y $c = 3$. Por lo tanto $b^2 = a^2 - c^2$

$$b = \sqrt{25 - 9} = 4$$

Por consiguiente la ecuación de la elipse es

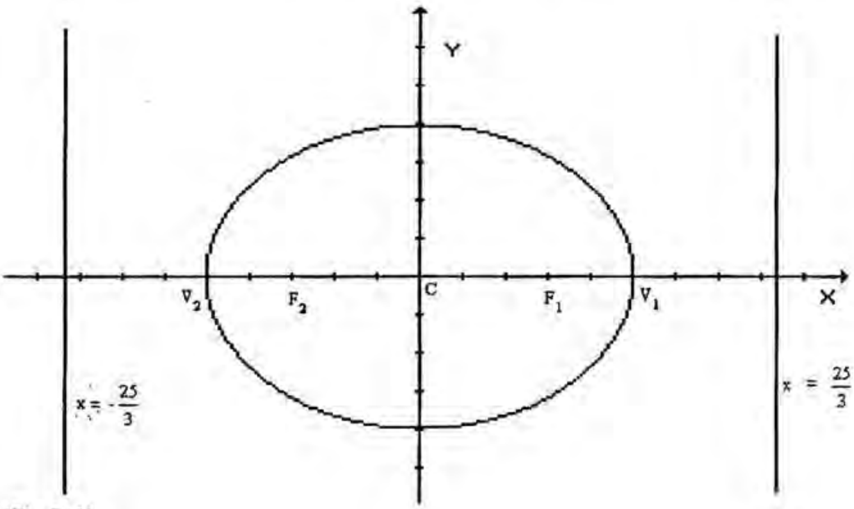
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

El centro es el origen . La longitud de su lado recto es $\frac{2 \cdot b^2}{a} = \frac{2 \cdot 16}{5} = 6.4$

La longitud del eje mayor es 2 a = (2) (5) = 10

La longitud del eje menor es 2 b = (2) (4) = 8

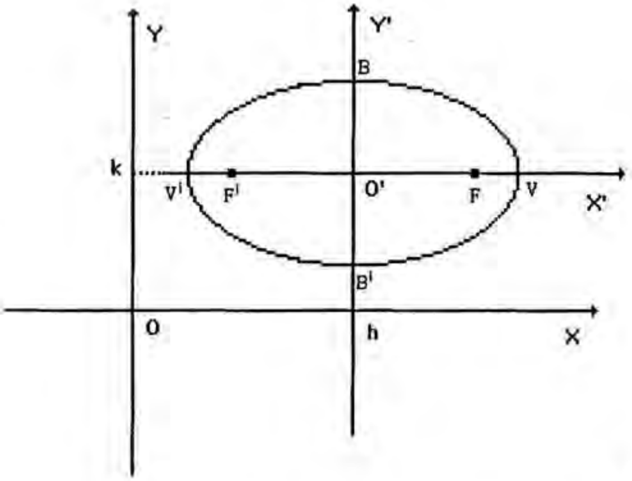
Las ecuaciones de las directrices son: $x = \frac{25}{3}$ y $x = -\frac{25}{3}$



(Fig.213)

Elipse con centro en (h, k) y ejes paralelos a los coordenados

La ecuación de la elipse con centro en un punto cualquiera (h, k) distinto del origen y ejes paralelos a los ejes coordenados, la obtenemos si los ejes coordenados son trasladados de tal manera que el nuevo origen O' coincida con el centro (h, k). (Fig.214)



(Fig.214)

De esta manera las coordenadas de los focos, vértices y de los puntos de intersección de la elipse con el eje normal después de la traslación son

F(h + c, k), F'(h – c , k), V (h + c, k), V'(h – c, k), B(h, k + b), B'(h, k – b)

La ecuación de la elipse con referencia a los nuevos ejes X'Y' está dada por

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \qquad (12)$$

Usando las ecuaciones de traslación $x = x' + h$ y $y = y' + k$
de donde $x' = x - h$ y $y' = y - k$ sustituyendo estas ecuaciones en (12) tenemos

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

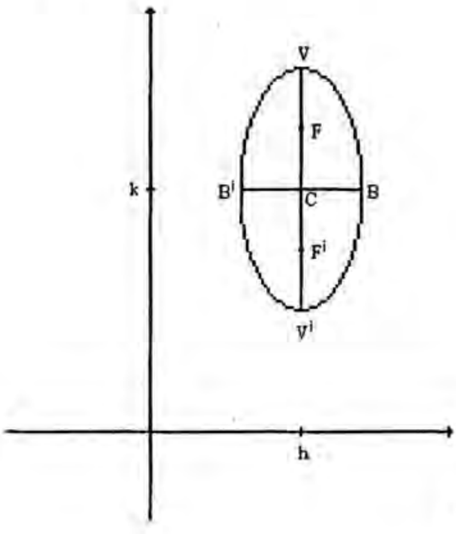
La cual nos representa la ecuación de la elipse con centro en (h, k) y eje focal paralelo al eje X.

Análogamente se deduce que la ecuación de la elipse con centro en (h, k) y eje focal paralelo al eje Y es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \qquad \text{(Fig.215)}$$

Para cada elipse, a es la longitud del semieje mayor , b es la longitud del semieje menor, c la distancia del centro a cada foco y se relacionan por la igualdad.

$a^2 = b^2 + c^2$



(Fig.215)

8.7 Familia de Circunferencias

Como sabemos una circunferencia y su ecuación se determinan por tres condiciones independientes. Entonces una circunferencia que satisface menos de tres condiciones independientes no es única.

La ecuación de una circunferencia que satisface solo dos condiciones contiene una constante arbitraria llamada parámetro, entonces tal ecuación representa una familia de circunferencias de un parámetro.

Por ejemplo, la familia de todas las circunferencias concéntricas cuyo centro común es el punto (2, 3) tiene por ecuación $(x-2)^2+(y-3)^2=k^2$ en donde el parámetro *k* es cualquier número positivo.

Consideremos ahora el caso de la familia de circunferencias que pasan por las intersecciones de dos circunferencias dadas.

Sean C_1 y C_2 dos circunferencias dadas cualquiera, cuyas ecuaciones son:

$$C_1 : x^2+y^2+D_1 \cdot x+E_1 \cdot y+F_1 = 0 \quad \text{.......(1)}$$

$$C_2 : x^2+y^2+D_2 \cdot x+E_2 \cdot y+F_2 = 0 \quad \text{.......(2)}$$

Multiplicando (2) por la constante arbitraria *k* y sumando (1) y (2) se deduce la ecuación

$$x^2+y^2+D_1 \cdot x+E_1 \cdot y+F_1+k\left(x^2+y^2+D_2 \cdot x+E_2 \cdot y+F_2\right) = 0 \quad \text{.......(3)}$$

donde el parámetro *k* puede tomar todos los valores.

Supongamos que los círculos C_1 y C_2 se cortan en dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$. Como P_1 es punto de intersección de los círculos C_1 y C_2 satisfacen ambas ecuaciones (1) y (2) y como consecuencia también a (3) la cual se reduce a $0 + k\,(0) = 0$, que es verdadera para todos los valores de *k*.

Por lo tanto la ecuación (3) representa la familia de circunferencias que pasan por las dos intersecciones de las circunferencias C_1 y C_2.

La ecuación (3) se puede llevar a la forma

$$(k+1) \cdot x^2+(k+1) \cdot y^2+\left(D_1+k \cdot D_2\right) \cdot x+\left(E_1+k \cdot E_2\right) \cdot y+F_1+k \cdot F_2 = 0 \quad \text{.........(4)}$$

Si $k = -1$, la ecuación (4) se reduce a una de primer grado que representa a una recta. Pero para cualquier otro valor de k , representa una circunferencia.

En particular para $k = 0$ la ecuación (4) se reduce a la ecuación de la circunferencia C_1.
Consideremos el caso en que las circunferencias C_1 y C_2 son tangentes entre sí, en el punto $P_3(x_3, y_3)$.

Por un razonamiento análogo tenemos que P_3 satisface ambas ecuaciones (1) y (2) y como consecuencia también a (3) dado que $0 + k(0) = 0$ es verdadera para todos los valores de k.

Por lo tanto, la ecuación (3) representa la familia de circunferencias que pasan por el punto de tangencia de las circunferencias C_1 y C_2 .
Y llevándola posteriormente a su forma (4) vemos que para cada valor de k diferente de -1, la ecuación representa una circunferencia tangente a C_1 y C_2 en el punto P_3.

Finalmente consideremos el caso en que C_1 y C_2 no tengan ningún punto en común.

Entonces las coordenadas de un punto P que satisfacen la ecuación (2) no pueden satisfacer la ecuación (1) y, por lo tanto, tampoco (3), para ningún valor de k.

Análogamente las coordenadas de un punto Q que satisfacen (1) no pueden satisfacer (2), y por lo tanto tampoco (3), para ningún valor de k excepto $k = 0$, en cuyo caso, (3) se reduce a (1).

En resumen podemos concluir lo siguiente:

Si las ecuaciones de dos circunferencias dadas cualquiera C_1 y C_2 son:

$$C_1 : x^2 + y^2 + D_1 \cdot x + E_1 \cdot y + F_1 = 0$$

$$C_2 : x^2 + y^2 + D_2 \cdot x + E_2 \cdot y + F_2 = 0$$

la ecuación

$$x^2 + y^2 + D_1 \cdot x + E_1 \cdot y + F_1 + k \cdot \left(x^2 + y^2 + D_2 \cdot x + E_2 \cdot y + F_2\right) = 0$$

representa una familia de circunferencias.

Si C_1 y C_2 se cortan en dos puntos diferentes la ecuación representa, para todos los valores de k diferentes de -1, todas las circunferencias, que pasan por los dos puntos de intersección C_1 y C_2, con la única excepción de C_2 misma.

Si C_1 y C_2 son tangentes entre sí, la ecuación representa, para todos los valores de *k* diferentes de -1, todas las circunferencias que son tangentes a C_1 y C_2 en su punto común, con la única excepción de C_2 misma.

Ejemplo 1

Escribir la ecuación de la familia de circunferencias que pasan por la intersección de las circunferencias C_1 y C_2 representadas por las ecuaciones

$$C_1: \quad x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$$

$$C_2: \quad x^2 + y^2 - 12x - 2y + 29 = 0$$

Y encontrar el elemento de la familia que pasa por el punto (7, 0).

Solución.

La ecuación que representa a la familia de circunferencias es:

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 + k\left(x^2 + y^2 - 12x - 2y + 29\right) = 0$$

donde *k* es un parámetro.

Como el elemento de la familia de circunferencias pasa por el punto (7, 0), sustituimos este punto en la ecuación dela familia de circunferencias y tenemos.

$(49 - 42 + 5) + k\,(49 - 84 + 29) = 0$

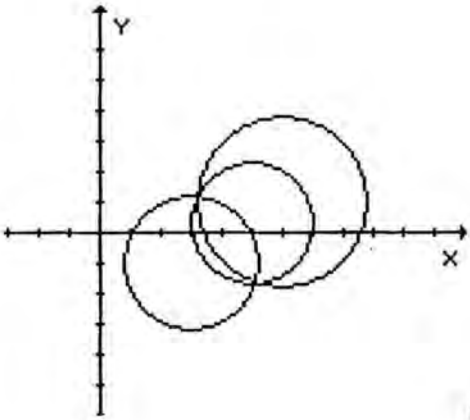
de donde $k = 2$

finalmente sustituyendo este valor en la ecuación de la familia de circunferencias se tiene

$$3x^2 + 3y^2 - 30x - 2y + 63 = 0$$

que es la ecuación de la circunferencia buscada o en su forma ordinaria.

$$(x-5)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{37}{9}$$



(Fig.216)

Ejemplo

Hallar la ecuación de la familia de circunferencias que pasan por la intersección de las circunferencias.

$C_1 \ : \ x^2+y^2-12x \quad 9y+50 = 0$

$C_2 \ : \ x^2+y^2-25 = 0$

Y el elemento de la familia de circunferencias cuando el parámetro k = 1.

Solución.

La ecuación de la familia de circunferencias que pasan por la intersección de C_1 y C_2 está dada por

$$x^2 + y^2 - 12x - 9y + 50 + k\left(x^2 + y^2 - 25\right) = 0$$

entonces la circunferencia de la familia cuando $k = 1$ tiene por ecuación.

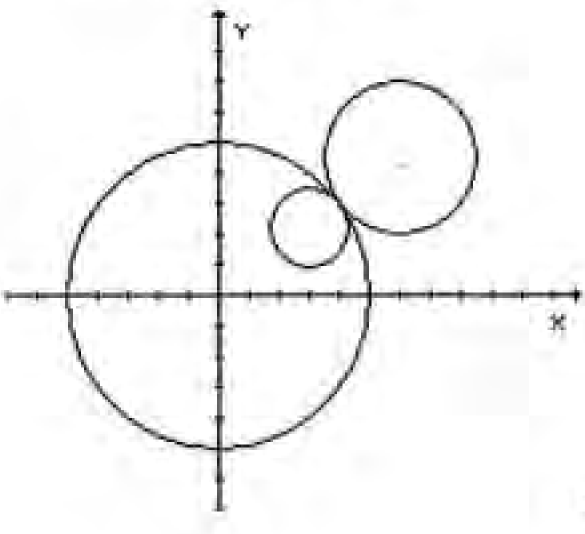
$$x^2 + y^2 - 12x - 9y + 50 + x^2 + y^2 - 25 = 0$$

la cuál al reducir términos toma la forma $2x^2 + 2y^2 - 12x - 9y + 25 = 0$ o bien en su forma ordinaria

$$(x-3)^2 + \left(y - \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

El centro de la circunferencia es el punto $\left(3, \frac{9}{4}\right)$ y su radio es $\frac{5}{4}$

Como vemos las circunferencias dadas solo se interceptan en un punto y la circunferencia buscada pasa por el punto de tangencia. (Fig.217)



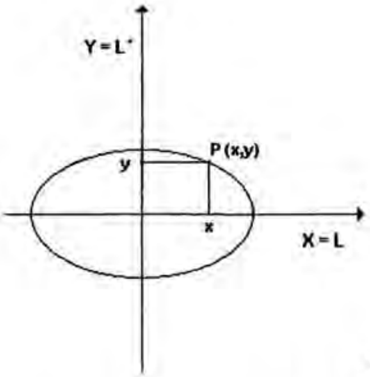
(Fig.217)

8.8 Propiedad Universal de la Elipse.

La ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ enuncia la siguiente propiedad universal de los puntos de la elipse.

$\frac{d(P,L')}{a^2}+\frac{d(P,L)}{b^2}=1$ donde L es el eje mayor (el eje que contiene a los focos) y L' es el eje menor. (Fig.216)

Paráfrasis: $\frac{(dis\tan cia\cdot de\cdot P\cdot al\cdot eje\cdot menor)^2}{(semieje\cdot mayor)^2}+\frac{(dis\tan cia\cdot de\cdot P\cdot al\cdot eje\cdot mayor)^2}{(semieje\cdot menor)^2}=1$



(Fig.216)

Valiéndose de esta propiedad se puede obtener la ecuación de una elipse con centro fuera del origen y ejes paralelos o no a los ejes coordenados. Así mismo se puede reconocer si una ecuación cuadrática en x e y representa una elipse y determinar sus elementos.

Ejemplo

Calcular la ecuación de la elipse con focos F_1 (-2, -1) y F_2 (2, 3) y $a = 3$

Solución.

Como el eje mayor es al recta que pasa por F_1 y F_2 tenemos que

$$y - 3 = \frac{-1-3}{-2-2} \cdot (x - 2)$$

de donde desarrollando $x - y + 1 = 0$ es la ecuación del eje mayor.

El centro es el punto medio de $\overline{F_1F_2}$ por lo cual tiene coordenadas $C(0, 1)$

El eje menor es perpendicular al eje mayor por C, entonces usando la formula punto pendiente de la recta tenemos

$y - 1 = -1\,(x - 0)$

$x + y - 1 = 0$ que es la ecuación del eje menor.

c es la mitad de la distancia entre F_1 y F_2 por lo tanto

$$c = \frac{1}{2} d(F_1, F_2) = \frac{1}{2}\sqrt{(2+2)^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{2} \quad ;\; c = 2\sqrt{2}$$

de donde $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{16 - 8} = 2 \cdot \sqrt{2}$

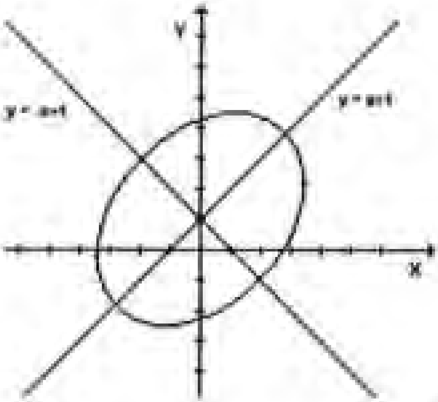
Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la elipse, L': $x + y - 1 = 0$ la ecuación del eje menor, L: $x - y + 1 = 0$ la ecuación del eje mayor. Entonces por la propiedad universal de la elipse tenemos

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x + y - 1)\right)^2}{4^2} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x - y + 1)\right)^2}{\left(2 \cdot \sqrt{2}\right)^2} = 1$$

desarrollando la ecuación anterior tenemos

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 6y - 29 = 0$$

que es la ecuación de la elipse buscada.

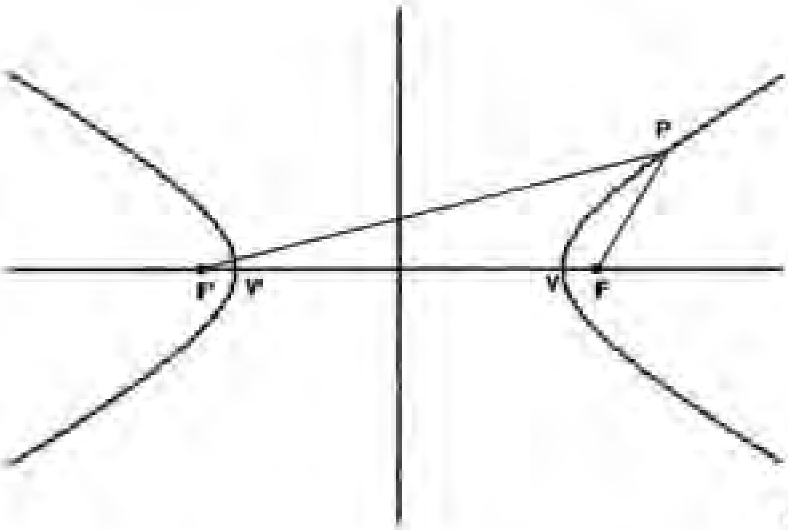


(Fig.217)

8.9 Hipérbola.

Definición Focal de la Hipérbola

Se llama hipérbola al lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos. (Fig.218)

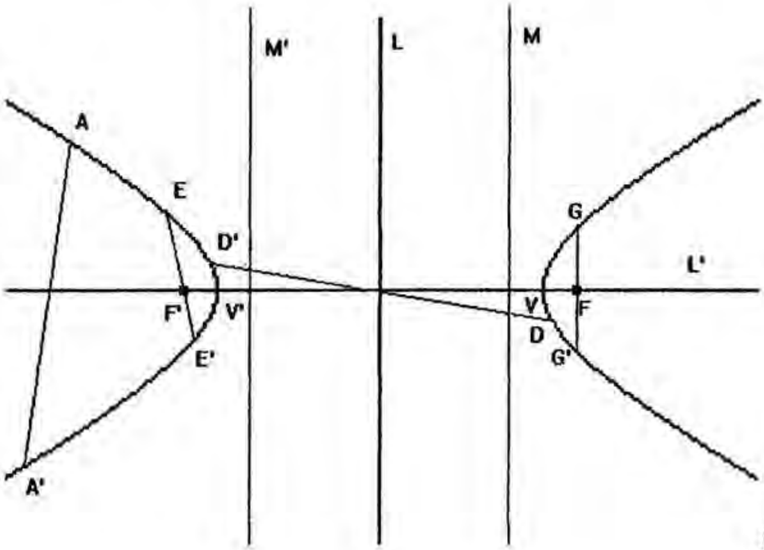


(Fig.218)

$|d(P,F')-d(P,F)|=2a$ y $2a<d(F,F')=2c$

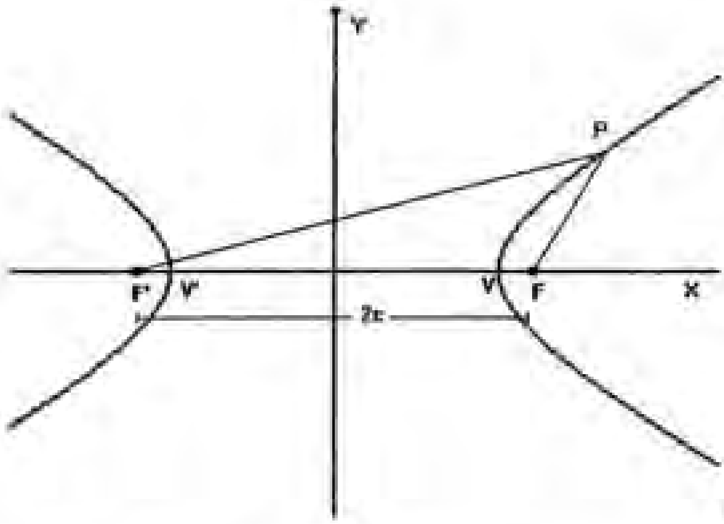
Los focos están designados por F y F'. La recta L que pasa por los focos se llamada *eje focal* (o eje de simetría). El segmento $\overline{VV'}$ se llama *eje transverso*. El punto medio C del eje transverso se llama *centro*. La recta L' que pasa por C y es perpendicular al eje focal se llama *eje normal*. Una porción definida en el eje normal, el segmento $\overline{BB'}$ que tiene a c como punto medio, se llama *eje conjugado*.

El segmento que une dos puntos diferentes cualesquiera de la hipérbola se llama cuerda; estos puntos pueden ser ambos de la misma rama, como la cuerda $\overline{AA'}$, o uno de una rama y el otro de la otra, como el eje transverso $\overline{VV'}$. La cuerda que pasa por un foco, tal como $\overline{EE'}$ se llama cuerda focal. Una cuerda focal tal como $\overline{GG'}$, perpendicular al eje focal L se llama lado recto; evidentemente, por tener dos focos, tiene dos lados rectos.
Una cuerda que pasa por C, tal como $\overline{DD'}$, se llama diámetro. Las rectas M y M' son llamadas directrices de la hipérbola. (Fig.219)



(Fig.219)

La ecuación canónica de la hipérbola la obtenemos seleccionando como focos dos puntos dispuestos simétricamente en torno al origen sobre alguno de los ejes coordenados, en este caso tomamos el eje X.
Se denotará como 2c la distancia entre los focos y 2a al valor absoluto de la diferencia de sus distancias a los focos. (Fig.220)



(Fig.220)

Focos: F'(-c, 0) , F (c, 0) $\qquad 0 < a < c$

$d_1 = d(P,F') = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$; $d_2 = d(P,F) = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$|d_1 - d_2| = 2a$

$(d_1)^2 = (x+c)^2 + y^2$........(1)

$(d_2)^2 = (x-c)^2 + y^2$

de donde

$(d_1)^2 - (d_2)^2 = 4 \cdot c \cdot x$

$(d_1 - d_2) \cdot (d_1 + d_2) = 4 \cdot c \cdot x$........(2)

De (2) se sigue que $d_1 - d_2 < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Veamos este caso

Si $x < 0$

$d_1 - d_2 = -2a$ ....(k1)

de (2) se tiene $d_1 + d_2 = -\dfrac{2 \cdot c \cdot x}{a}$ ....(k2)

Resolviendo el sistema de ecuaciones (k1) y (k2) se tiene

$$d_1 = -\left(a + \frac{c \cdot x}{a}\right) \quad ; \quad d_2 = \left(\frac{c \cdot x}{a} - a\right) \text{..........(3)}$$

en ambos casos se trata de expresiones racionales par la distancia de los puntos de la curva a los focos.

Al sustituir en (1) en ambos casos se llega al mismo resultado

$$\left(a + \frac{c \cdot x}{a}\right)^2 = (x + c)^2 + y^2 \quad ; \quad \left(\frac{c \cdot x}{a} - a\right)^2 = (x - c)^2 + y^2$$

De cualquiera de estas expresiones se llega a la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{..........(4)}$$

tomando nuevamente el hecho de que $0 < a < c$

$a^2 < c^2$ entonces $0 < c^2 - a^2 = b^2$

y haciendo la sustitución correspondiente.

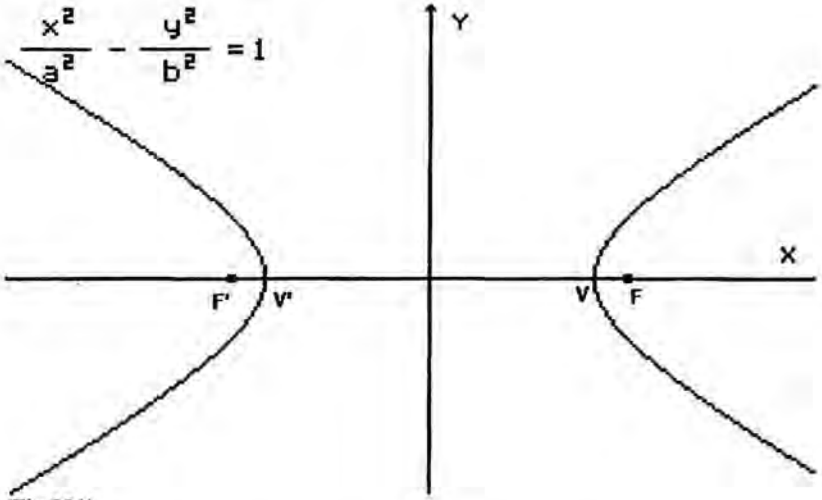
La ecuación (4) se llama *ecuación canónica de la hipérbola*. Representa una curva abierta no acotada en el plano cartesiano que tiene dos ramas, una a la derecha y otra a la izquierda del eje Y. Al igual que en el caso de la elipse, la curva es simétrica respecto de los ejes coordenados y el origen.

Sus intersecciones con los ejes coordenados son los vértices V' (-a, 0) y V(a, 0).

Al resolver la ecuación (4) para y se tiene

$$y = \pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{x^2 - a^2} \quad ....(5)$$

Dadas las simetrías de la curva es suficiente considerar la porción de la curva situada en el primer cuadrante. (Fig.221)



(Fig.221)

Es decir considerar el signo + en (5) y valores positivos de x
Es claro que la cantidad

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

es imaginaria para valores de x comprendidos entre 0 y a , y su valor crece ilimitadamente junto con el de x (es una función creciente de x).

Todo esto significa que un punto movil $M(x, y)$ situado sobre esta rama de la curva se mueve siempre hacia arriba a medida que el valor dela abscisa x crece, teniendo como punto de partida el vértice V (a, 0).

La forma en que el punto $M(x, y)$ se aleja hacia el infinito se puede determinar de un modo más preciso. En efecto, la ecuación (5) se puede reescribir como sigue:

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} + \left(\frac{b}{a} \cdot x - \frac{b}{a} \cdot x \right)$$

$$y = \frac{b}{a} \cdot x + \frac{b}{a} \cdot \left(\sqrt{x^2 - a^2} - x \right)$$

$$y = \left[\frac{b}{a} \cdot x + \frac{b}{a} \cdot \left(\sqrt{x^2 - a^2} - x \right) \right] \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - a^2} + x}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \right)$$

$$y = \frac{b}{a} \cdot x + \frac{b}{a} \cdot \left(- \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \right)$$

$$y = \frac{b}{a} \cdot x - \frac{b \cdot a}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \quad \text{..................} (6)$$

En (6) el denominador del sumando $\dfrac{b \cdot a}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}$ aumenta junto con x, mientras que el numerador es constante. Esto significa que esta cantidad se poeda hacer tan pequeña como se quiera con solo dar a x valores suficientemente grandes. En consecuencia, al crecer indefinidamente x , la ordenada y se acerca cada vez más al valor $\dfrac{b}{a} \cdot x$.

Esto significa que la diferencia de ordenadas entre la rama $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ de la hipérbola y la recta $y = \frac{b}{a}x$ se acerca cada vez más a 0 al aumentar x.

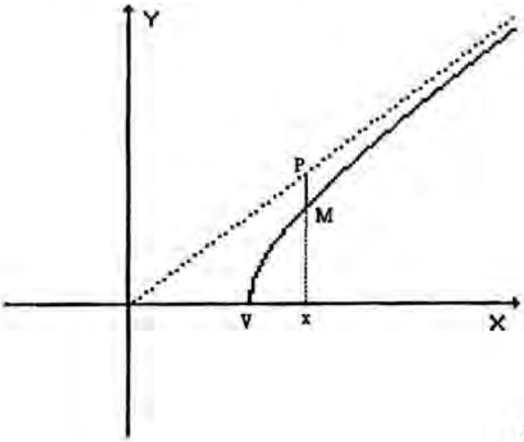
En efecto

$$\frac{b}{a}\cdot x - \frac{b}{a}\cdot\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}\cdot x - \left(\frac{b}{a}\cdot x - \frac{b\cdot a}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}\right) = \frac{b\cdot a}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}$$

De modo que la distancia vertical entre los puntos de la recta y los puntos de la hipérbola decrece ilimitadamente al aumentar x. La recta $y = \frac{b}{a}x$ resulta ser asintota de la hipérbola. El punto móvil $M(x, y)$ sobre esta rama de la curva se encuentra siempre por debajo del punto $P\left(x, \frac{b}{a}\cdot x\right)$ de la recta, como se muestra en la figura 222.

Donde

$$P\left(x, \frac{b}{a}\cdot x\right), M\left(x, \frac{b}{a}\cdot x - \frac{b\cdot a}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}\right), V(a, 0)$$

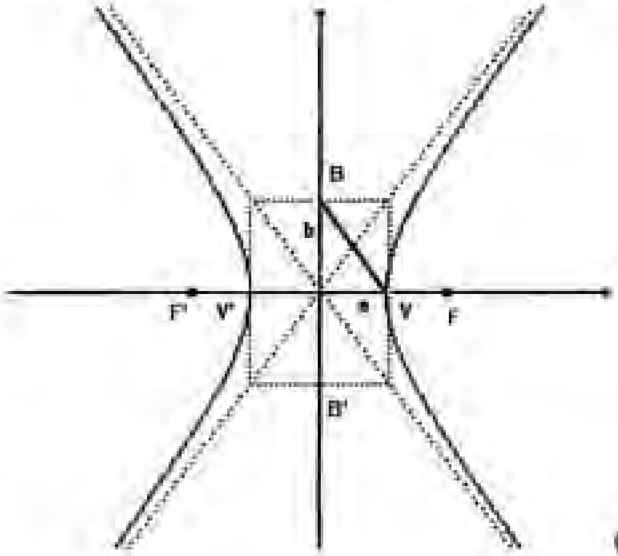


(Fig.222)

Por simetría respecto del eje X, la recta $y=-\frac{b}{a}x$ es una asíntota de la rama de la curva en el cuarto cuadrante, y por simetría respecto del eje Y, las rectas $y=\frac{b}{a}x$ y $y=-\frac{b}{a}x$ también resultan asíntotas de las ramas de la hipérbola que se ubican en el tercer y segundo cuadrantes respectivamente.

Para dibujar la gráfica de la hipérbola conviene trazar un rectángulo con vértices P(a, b), Q(a, -b), R(-a, b) y S(-a, -b) llamado rectángulo principal de la hipérbola. Este tiene lados de longitud 2a y 2b situados simétricamente en torno al eje Y y al eje X.

Las diagonales del rectángulo principal son las asíntotas de la hipérbola.(Fig.223)



(Fig.223)

En la ecuación de la hipérbola a puede ser mayor, igual o menor que b.

Dado que $b=\sqrt{c^2-a^2}$, las asíntotas tendrán una pendiente más pronunciada

a medida que c crezca, si se deja fijo el valor de a.

Al comparar la ecuación canónica de la hipérbola con la que resulta de la definición general de cónica cuando la excentricidad es mayor que 1 tenemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad ; \qquad \frac{x^2}{\left(\frac{e\cdot p}{e^2-1}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{e\cdot p}{\sqrt{e^2-1}}\right)^2} = 1$$

Como $e > 1$, $1 - e^2 < 0$ y como consecuencia $e^2 - 1 > 0$ de modo que

$$a = \frac{e\cdot p}{e^2-1} \quad \text{y} \quad b = \frac{e\cdot p}{\sqrt{e^2-1}}$$

De donde tenemos

$$a\cdot\left(e^2-1\right) = e\cdot p = b\cdot\sqrt{e^2-1} \quad \text{y} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{e^2-1}$$

de modo que

$$\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1$$

por lo tanto

$$e^2 = \frac{b^2}{a^2} + 1 = \frac{b^2 + a^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

es decir $e = \frac{c}{a}$ (la excentricidad en términos de a y c)

Ahora como

$$p \cdot e = a \cdot \left(e^2 - 1\right)$$

$$p \cdot \frac{c}{a} = a \cdot \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)$$

$$p \cdot \frac{c}{a} = a \cdot \left(\frac{c^2 - a^2}{a^2}\right)$$

$$p \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a} \quad \text{(dado que } b^2 = c^2 - a^2 \text{)}$$

por lo tanto

$$p = \frac{b^2}{c}$$

Entonces la distancia entre el foco F(c, 0) y la directriz es $\frac{b^2}{c}$ por lo que la distancia de la directriz al origen es $c - \frac{b^2}{c}$. (Fig.224)

$$c - \frac{b^2}{c} = \frac{c^2 - b^2}{c} = \frac{a^2}{c}$$

por lo tanto la ecuación de la mediatriz M es $x = \frac{a^2}{c}$

Dado que la curva es simétrica respecto al eje Y, hay una correspondencia con el foco F'(-c, 0) y la directriz ubicada a su derecha tiene como ecuación $x = -\frac{a^2}{c}$.

Las ecuaciones (3) se pueden escribir

$d_1 = a + e\,x$; $d_2 = e\,x - a$ .... (7) y $d_1 = -(a + e\,x)$; $d_2 = -(e\,x - a)$ ....(8)

De la misma forma las ecuaciones de las directrices se pueden escribir

$$x = -\frac{a}{e} \quad \text{y} \quad x = \frac{a}{e}$$

La distancia de un punto P(x, y) de la hipérbola a cada una de las directrices es

$$D_1 = \frac{a}{e} + x \quad ; \quad D_2 = \frac{a}{e} - x \quad \text{.........} (9)$$

Si $x > 0$, de (7) y (9) se infiere que

$$\frac{d_1}{D_1} = \frac{d_2}{D_2} = e$$

Análogamente si $x < 0$, de (8) y (9) se deduce que

$$\frac{d_1}{D_1} = \frac{d_2}{D_2} = e$$

8.10 Propiedad Universal de la Hipérbola.

La ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ enuncia la siguiente propiedad universal de los puntos de la hipérbola

$\dfrac{d(P,L')^2}{a^2}-\dfrac{d(P,L)^2}{b^2}=1$ donde L es el eje focal (el eje de simetría que contiene a los focos) y L' es el eje imaginario.

Paráfrasis: $\dfrac{(\text{distancia de P al eje imaginario})^2}{(\text{semieje focal})^2}-\dfrac{(\text{distancia de P al eje focal})^2}{(\text{semieje imaginario})^2}=1$

Esta propiedad sirve para obtener la ecuación de una hipérbola en cualquier posición. Permite además reconocer si una ecuación cuadrática en *x* e *y* representa una hipérbola y determina sus elementos.

Ejemplo 3

Calcular la ecuación de la hipérbola con focos $F_1(-3, 6)$ y $F_2(5, 0)$ y $a=\sqrt{3}$
Procedamos como en el ejemplo anterior
El eje focal pasa por F_1 y F_2 por lo cual su ecuación es

$y-6=\dfrac{6-0}{-3-5}(x+3)$ la cual se reduce a $3x+4y-15=0$.

El centro C es el punto medio de $\overline{F_1F_2}$ por lo cual $C=\left(\dfrac{-3+5}{2},\dfrac{6+0}{2}\right)=(1,3)$

El eje imaginario pasa por C y es perpendicular al eje focal, por lo que su ecuación está dada por $y-3=\dfrac{4}{3}\cdot(x-1)$. De aquí que $4x-3y+5=0$ es la ecuación del eje focal.
c lo obtenemos de la distancia entre el centro y un foco, tomemos por ejemplo

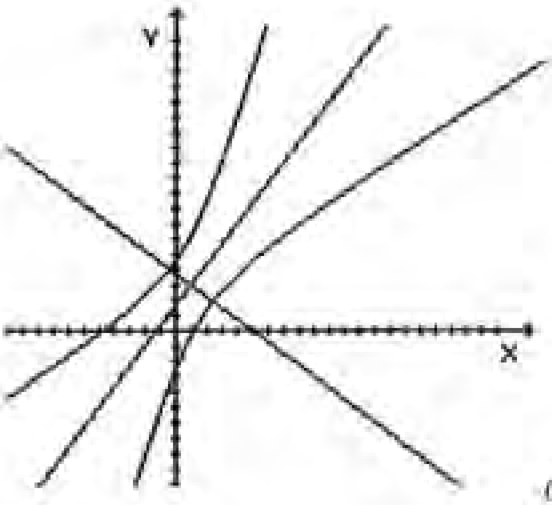
$c=\sqrt{(1+3)^2+(3-6)^2}=5$

Por último como $b=\sqrt{c^2-a^2}$ entonces $b=\sqrt{5^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{22}$

Ahora por la propiedad universal de la hipérbola tenemos:

$$\frac{\left(\frac{4x-3y+5}{5}\right)^2}{3}-\frac{\left(\frac{3x+4y-15}{5}\right)^2}{22}=1$$

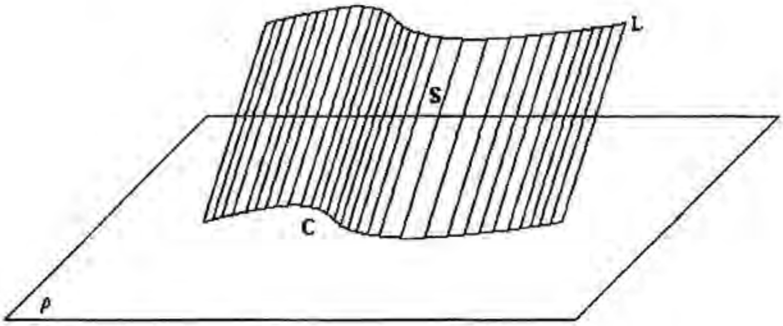
que desarrollando nos da $13x^2-24xy+6y^2+46x-12y-71=0$. (Fig.224)



(Fig.224)

8.11 Superficies Cilíndricas.

Consideremos un plano ρ y una recta L, que no sea paralela a ρ.
Si la recta L se mueve en tal forma que un punto P de L recorra una trayectoria C en el plano ρ, permaneciendo constante la dirección de L entonces la superficie S generada se llama cilindro o superficie cilíndrica. (Fig.225)



(Fig.225)

En otras palabras, la superficie cilíndrica es la generada por una recta que se mueve de tal manera que se mantiene siempre paralela y pasa por una curva fija llamada directriz.

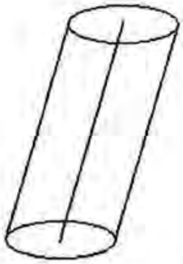
Se dice entonces que la curva C es la directriz del cilindro; la recta L recibe el nombre de generatriz y todas las demás rectas que están en la superficie y que son paralelas a L reciben el nombre de elementos o generadores de la superficie.

Nótese que en la Geometría Analítica se considera que un cilindro se extiende indefinidamente en ambos sentidos de un elemento, aunque en la figura solo se muestre una parte de un cilindro.

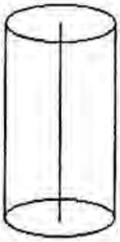
Se clasifica a los cilindros según la naturaleza de sus directores. Por ejemplo si la directriz es una circunferencia, entonces el cilindro es un cilindro circular. (Fig.226)

La recta que es paralela a un elemento y contiene al centro de la circunferencia se le llama eje del cilindro.

Si los elementos de un cilindro circular son perpendiculares al plano de la circunferencia se dice que el cilindro es un cilindro circular recto. (Fig.227)



(Fig.226)



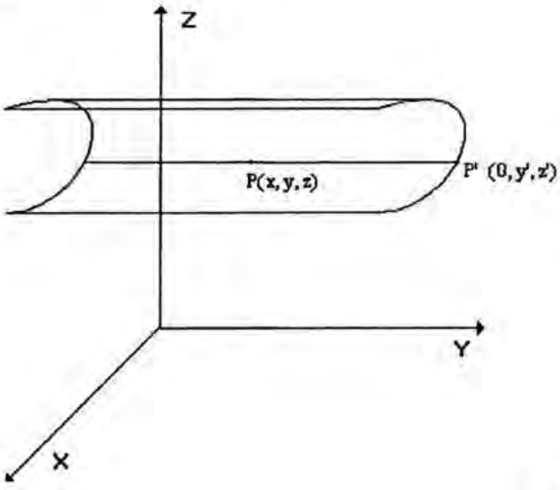
(Fig.227)

En nuestro estudio de superficie cilíndrica consideraremos que nuestra directriz es una curva contenida en uno de los planos coordenados.

Por ejemplo, sea C una porción de la directriz contenida en el plano YZ, y sea v = (a, b, c) Un vector director de la generatriz L de la superficie cilíndrica.

Podemos escribir entonces las ecuaciones de la curva C en la forma

$f(y, z) = 0, \quad x = 0$



(Fig.228)

Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera de la superficie y supongamos que la generatriz que pasa por P corta a C en el punto $P'(0, y', z')$

Entonces las ecuaciones simétricas de la generatriz L son:

$$\frac{x}{a}=\frac{y-y'}{b}=\frac{z-z'}{c} \quad \text{.........} (1)$$

Además como P' está sobre C, sus coordenadas satisfacen a las ecuaciones

$$f(y', z')=0 \quad , \quad x'=0 \quad \text{.........} (2)$$

Por definición el punto P esta sobre la superficie cilíndrica si y solo si sus coordenadas (x, y, z) satisfacen las ecuaciones (1) y (2) las cuales constituyen un sistema de cuatro ecuaciones independientes. De estas cuatro ecuaciones podemos eliminar las tres cantidades x', y', z' considerándolas como parámetros, de la siguiente manera.

De (1) se tiene

$$y'=\frac{ay-bx}{a} \quad , \quad z'=\frac{az-cx}{a}$$

sustituyendo estos valores de y', z' en (2) obtenemos

$$f\left(\frac{ay-bx}{a},\frac{az-cx}{a}\right)=0$$

La cual representa la ecuación de una superficie cilíndrica, en las tres variables x, y, z.

Nótese que las secciones hechas por los planos paralelos al plano de la directriz son curvas congruentes con la directriz.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la superficie cilíndrica cuya directriz es la parábola $x^2 = z$ contenida en el plano XZ, y cuyas generatrices tienen como vector director a $v = (1, 2, 3)$.

Solución.

Supongamos que la generatriz que pasa por un punto cualquiera P(x, y, z) de la superficie corta a la directriz en el punto P'(x', 0, z'). (Fig.229)

Entonces las ecuaciones simétricas de la generatriz L son:

$$\frac{x-x'}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-z'}{3} \quad \text{.........} (1')$$

También como P' está sobre la parábola entonces satisface su ecuación y tenemos

$$x'^2 = z' \quad , \quad y' = 0 \quad \text{.........} (2')$$

Eliminando x', y', z' de las ecuaciones (1) y (2) se tiene

De (1) despejamos los valores de x' y z'

$$x' = \frac{2x-y}{2} \qquad z' = \frac{2z-3y}{2}$$

sustituyendo estos valores en (2), obtenemos

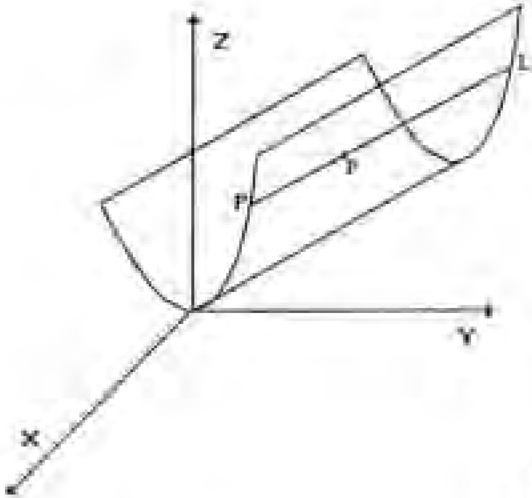
$$\left(\frac{2x-y}{2}\right)^2 = \frac{2z-3y}{2}$$

la cual desarrollando se lleva a la forma

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 6y - 4z = 0 \quad \text{............} (3)$$

que es la ecuación buscada de la superficie cilíndrica.

Nótese que la traza de la superficie (3) sobre el plano XZ es la directriz.



(Fig.229)

Ejemplo

Demostrar que la ecuación $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz - 2yz = 1$ representa una superficie cilíndrica, y hallar las ecuaciones de su directriz y el vector director de sus generatrices.

Solución.

Como las secciones hechas por los planos paralelos al plano de la directriz son curvas congruentes con la directriz. Así, las secciones de la superficie hechas por los planos.

$z = k$ son las curvas

$$x^2 + y^2 + 2k^2 + 2xk - 2yk = 1 \quad , \quad z = k$$

las cuales pueden escribirse en la forma

$$(x + k)^2 + (y - k)^2 = 1 \quad , \quad z = k \quad \text{——— (1)}$$

Las ecuaciones (1) son todas circunferencias de radio 1, cualquiera que sea el valor de k

En particular para k = 0, tenemos la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ .... (2)

Por lo tanto, la superficie dada es una superficie cilíndrica circular cuya directriz es la circunferencia .... (2)

Evidentemente, la recta que une el centro (-k, k, k) de cualquiera de las circunferencias (1) y el centro (0,0,0) de la directriz (2) es paralela a las generatrices.

Como un vector director de esta recta es (-1, 1, 1) , este es también un vector director de las generatrices.

Si las generatrices de una superficie son perpendiculares al plano, se llama recta y en caso contrario oblicua.

Se puede demostrar que la ecuación de una superficie cilíndrica recta, cuyas generatrices son perpendiculares al plano coordenado de su directriz, carece de la variable no medida en ese plano coordenado. Además, el lugar geométrico de esta ecuación es la directriz.

Por ejemplo, la superficie cilíndrica recta cuya directriz es la circunferencia $y^2 + z^2 = 9$, $x = 0$ se representa por la ecuación $y^2 + z^2 = 9$.

Y recíprocamente, podemos demostrar con lo ya visto que una ecuación que carezca de una variable representa una superficie cilíndrica recta cuyas generatrices son perpendiculares al plano coordenado en el cual no se mide la variable ausente, y cuya directriz es el lugar geométrico plano de esta ecuación.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 - y^2 = 4$ representa una superficie cilíndrica recta cuyas generatrices son perpendiculares al plano XY y cuya directriz es la hipérbola

$x^2 - y^2 = 4$, $z = 0$

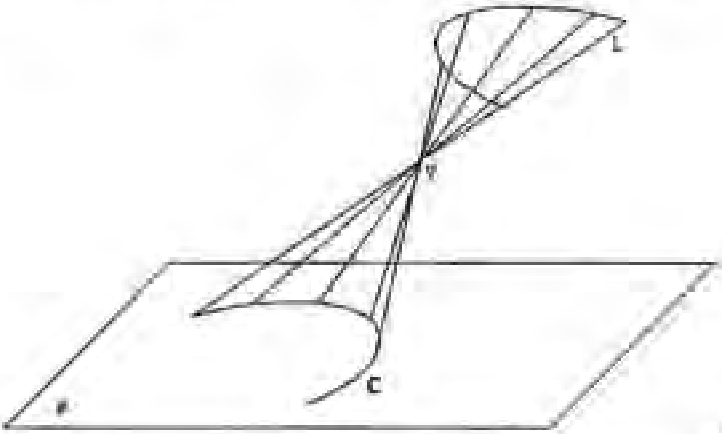
Podemos resumir estos resultados en el siguiente teorema.

Teorema.

Una ecuación representa una superficie cilíndrica recta, cuyas generatrices son perpendiculares al plano coordenado que contiene a la directriz, si y solamente si carece de la variable no medida en ese plano.
El lugar geométrico plano de esta ecuación es la directriz.

8.12 Superficies Cónicas

Consideremos un plano ρ, un punto V no contenido en el plano ρ y una recta L que pasa por el punto V y que se mueve en tal forma que recorre una trayectoria C en el plano ρ. Entonces la superficie S generada por la recta L se llama superficie cónica. (Fig.230)



(Fig.230)

Es decir, la superficie cónica se al generada por una línea recta que se mueve de tal manera que pasa por una recta fija y por un punto fijo, no contenido en el plano de esa curva.

La recta móvil L se llama generatriz, la curva fija C directriz y el punto fijo V vértice de la superficie cónica.

Las diversas posiciones de la generatriz forman las generatrices de la superficie cónica. Evidentemente, el vértice divide a la superficie en dos porciones distintas; cada una de las cuales es una hoja o rama dela superficie cónica.

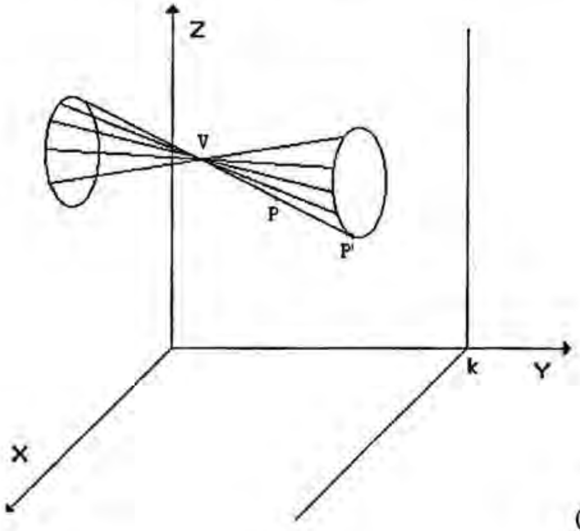
Al estudiar la superficie cónica consideraremos que la directriz es una curva contenida en planos paralelos a los coordenados e inclusive en los planos coordenados.

Por ejemplo, sea C la directriz contenida en un plano paralelo al plano XZ, y sea $V = (a, b, c)$ el vértice de la superficie cónica. (Fig.231)

Podemos escribir entonces las ecuaciones de la curva C en la forma

$f(x, z) = 0 \quad , \quad y = k$

Sea P(x, y, z) un punto cualquiera de la superficie cónica y supongamos que la generatriz que pasa por P corta a C en el punto P'(x', y', z').



(Fig.231)

Entonces, las ecuaciones simétricas de la generatriz L son:

$$\frac{x-a}{x'-a}=\frac{y-b}{y'-b}=\frac{z-c}{z'-c} \quad \text{..........} \ (1)$$

Como P' esta sobre la curva C, tenemos que sus coordenadas satisfacen la ecuación de la directriz $f(x', z') = 0$, $y' = 0$ .... (2)

De las cuatro relaciones dadas por las ecuaciones (1) y (2) , podemos eliminar las tres cantidades x', y', z' , considerándolas como parámetros.

Para ello primero sustituimos el valor de $y' = k$ en las ecuaciones (1), teniendo

$$\frac{x-a}{x'-a}=\frac{y-b}{k-b}=\frac{z-c}{z'-c}$$

Despejamos a x' en función de x e y. Y z' en función de y y z, esto es

$$x' = \frac{(x-a)\cdot(k-b)}{y-b} + a$$

$$z' = \frac{(z-c)\cdot(k-b)}{y-b} + c$$

sustituyendo estos valores de x' y z' en la ecuación (2) tenemos

$$f\left(\frac{(x-a)\cdot(k-b)}{y-b} + a, \frac{(z-c)\cdot(k-b)}{y-b} + c\right) = 0$$

que es la ecuación de la superficie cónica, en las tres variables x, y, z.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la superficie cónica cuya directriz es la elipse

$4x^2 + z^2 = 1 \quad , \quad y = 4$

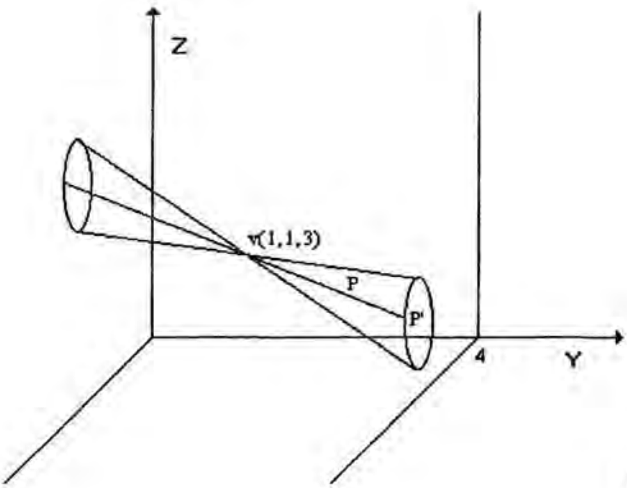
y cuyo vértice es el punto v(1, 1, 3).

Solución.

Supongamos que la generatriz que pasa por un punto cualquiera P(x, y, z) de la superficie corta a la directriz en el punto P'(x', y', z') . (Fig.232)

La ecuación simétrica de la generatriz es:

$$\frac{x-1}{x'-1} = \frac{y-1}{y'-1} = \frac{z-3}{z'-3} \quad \text{.........} (1)$$



(Fig.232)

Además como P' esta sobre la elipse, tenemos $4x'^2 + z'^2 = 1$, $y' = 4$ .... (2)

De las cuatro relaciones dadas por las ecuaciones (1) y (2), podemos eliminar las tres cantidades x', y', z', considerándolas como parámetros.

Esta eliminación puede efectuarse sustituyendo el valor de $y' = 4$ de (2) en (1)

Después de estas últimas ecuaciones se despeja x' en función de x e y , y z' en función de y y z.

$$x' = \frac{3x + y - 4}{y - 1} \qquad z' = \frac{3z + 3y - 12}{y - 1}$$

sustituyendo estos valores de x' y z' en (2) tenemos

$$4 \cdot \left(\frac{3x + y - 4}{y - 1} \right)^2 + \left(\frac{3z + 3y - 12}{y - 1} \right)^2 = 1$$

la cual después de desarrollar los binomios y ordenar los términos resulta

$$36x^2 + 12y^2 + 9z^2 + 24xy + 18yz - 96x - 102y - 72z + 207 = 0$$

que es la ecuación buscada de la superficie.

En el estudio de una superficie cónica, no se pierde generalidad tomando el vértice en el origen.

Demostraremos que la ecuación de una superficie tal es homogénea en las tres variables x, y, z.

Se dice que un polinomio algebraico, en dos o más variables, es homogéneo, si todos sus términos son del mismo grado.

Así la función $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2$ es homogénea y de segundo grado.

Probaremos la homogeneidad de una función de la siguiente manera:

Si la función es $f(x, y, z)$, sustituimos las variables kx, ky, kz respectivamente, en donde k es una constante diferente de cero y así obtenemos la identidad.

$$f(kx, ky, kz) = k^m f(x, y, z)$$

Entonces $f(x, y, z)$ es una función homogénea de grado m.

A una función homogénea igualada a cero se le llama ecuación homogénea.

Sea $f(x, y, z) = 0$ una ecuación homogénea. Entonces por lo anterior, si esta ecuación tiene la solución diferente de cero $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, también tiene las soluciones $x = kx_1$, $y = ky_1$, $z = kz_1$ en donde k es una constante cualquiera diferente de cero.

Consideremos ahora una superficie cónica de vértice en el origen y cuya directriz sea la curva.

$$f(x, y) = 0 \quad , \quad z = c$$

donde c es una constante diferente de cero.

Supongamos que la generatriz que pasa por un punto cualquiera $P(x, y, z)$ de l asuperficie corta a la directriz en el punto $P'(x', y', z')$.

Como esta generatriz pasa por el origen, sus ecuaciones son:

$x' = kx \quad ; \quad y' = ky \quad ; \quad z' = kz$ .... (3)

en donde k es una constante diferente de cero.

También como P' esta sobre la directriz, tenemos $f(x', y') = 0 \quad ; \quad z' = c$ .... (4)

De las ecuaciones (3) y (4) se deduce que $k = \dfrac{c}{z}$, valor que sustituido en las dos primeras ecuaciones de (3) da $x' = \dfrac{cx}{z} \quad , \quad y' = \dfrac{cy}{z}$.

Si sustituimos estos valores de x' e y' en la primera de las ecuaciones en (4) obtenemos

$$f\left(\frac{cx}{z}, \frac{cy}{z}\right) = 0 \quad ....(5)$$

que es la ecuación de la superficie cónica con vértice en el origen.

Si reemplazamos en la ecuación (5) x, y, z por $k'x, k'y, k'z$, respectivamente, en que k' es una constante diferente de cero, la ecuación permanece invariable y, por lo tanto, es homogénea.

Recíprocamente, consideremos a la superficie representada por la ecuación

$$f(x, y, z) = 0 \quad .... (6)$$

que es homogénea en las tres variables x, y, z.

En consecuencia de esto, el origen O está sobre esta superficie.

Sea $P(x_1, y_1, z_1)$ otro punto cualquiera sobre la superficie; sus coordenadas satisfacen por tanto, a la ecuación (6).

Como esta ecuación es homogénea, tiene también la solución kx_1, ky_1, kz_1, en donde k es una constante cualquiera, de manera que el punto $P'(kx_1, ky_1, kz_1)$ está también sobre la superficie. Pero evidentemente el punto P' esta sobre la recta $\overline{OP}$ y sobre la superficie para todos los valores de k y, en consecuencia $\overline{OP}$ esta sobre la superficie.

De acuerdo con esto se sigue que la ecuación (6) representa una superficie cónica con vértice en el origen y una de cuyas generatrices es la recta $\overline{OP}$.

Nota: Una ecuación homogénea debe en realidad representar una superficie, antes de que pueda ser clasificada como una superficie cónica con vértice en el origen.

Por ejemplo, la ecuación $x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 0$ es homogénea en x, y, z, pero no representa una superficie cónica sino que representa solamente un punto, el origen.

Ejemplo.

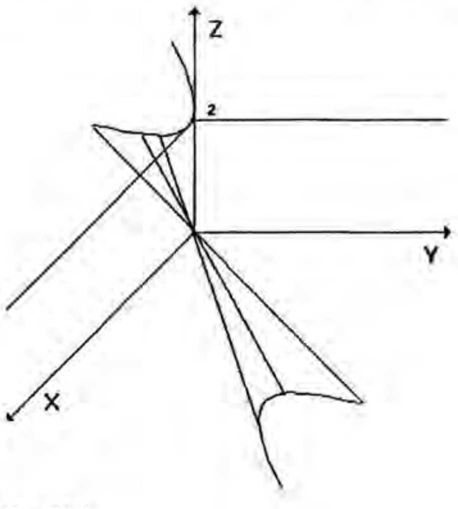
Identificar y construir la superficie cuya ecuación es $x^2 + yz = 0$.

Solución.

Además de la solución $x = y = z = 0$, la ecuación tiene un número infinito de soluciones. En efecto, dado que $x^2 = -yz$, entonces para cualquiera valores reales diferentes de cero que sean de signos contrarios asignados a y y z, la solución correspondiente para x constará de dos valores reales.

Por tanto, la ecuación dada representa una superficie cónica cuyo vértice esta en el origen. Para construir la superficie es necesario solo obtener una directriz. Por lo cual si $z = 2$ obtenemos la ecuación dada la directriz $x^2 = -2y$, $z = 2$, que es una parábola que está en el plano $z = 2$.

Trazando varias generatrices (rectas que pasan por el origen y por puntos de esta curva) podemos obtener una figura adecuada.
Un aparte de la superficie se ha trazado en la siguiente figura



(Fig.233)

8.13 Superficies Regladas

Consideremos ahora un tipo más general de superficies del cual son ejemplo el plano, la superficie cilíndrica y la cónica.

Si para cada punto de una superficie existe una recta que pasa por dicho punto y que está contenida completamente en la superficie, entonces se dice que la superficie es reglada, y se dice que las rectas son las rectas de la superficie.

En otras palabras una superficie reglada es aquella que puede ser engendrada por el movimiento de una línea recta.
La línea recta en movimiento, en cualquiera de sus posiciones, se llama generatriz de la superficie.
Se sigue de esta definición que una superficie cilíndrica es una superficie reglada cuyas generatrices son todas paralelas, mientras que la superficie cónica es una superficie reglada cuyas generatrices son todas concurrentes.
Como en el caso de la superficie cilíndrica y cónica, las ecuaciones de las superficies regladas pueden obtenerse por el método del parámetro.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la superficie reglada generada por la familia de rectas

$2x - y + kz = 0 \quad , \quad 2kx + ky - 4z = 0$ .... (1)

Solución:

Para cada valor del parámetro k la recta correspondiente de la familia (1) debe estar en su totalidad sobre la superficie.

Es decir, todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen las ecuaciones (1) deben estar sobre la superficie, cualquiera que sea el valor de k . Por lo tanto, las ecuaciones de la superficie deben ser independientes de k y pueden obtenerse a partir de las ecuaciones (1) simplemente eliminando el parámetro k. Así, despejando k de cada una de estas ecuaciones, obtenemos

$$k = \frac{y-2x}{z} \quad , \quad k = \frac{4z}{2x+y} \quad \text{de donde} \quad \frac{y-2x}{z} = \frac{4z}{2x+y}$$

o sea , $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$ que es la ecuación buscada de la superficie.

Consideremos ahora el problema de dada la ecuación de una superficie, determinar si representa o no una superficie reglada.

Ejemplo

Demostrar que la ecuación $xz + 2yz - 1 = 0$ representa una superficie cilíndrica demostrando que su lugar geométrico es una superficie reglada cuyas generatrices son todas paralelas.

Solución.

La intersección de la superficie dada y el plano $z = k$ es la recta

$xk + 2yk - 1 = 0 \quad , \quad z = k$ .... (1)

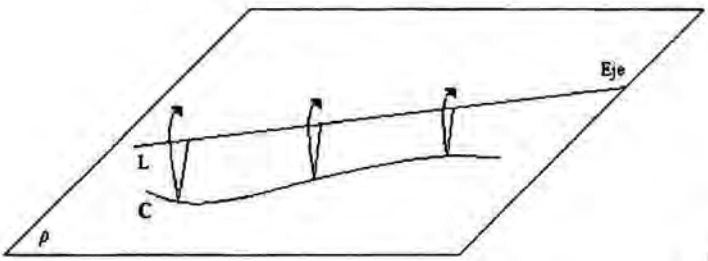
Por tanto, la superficie es una superficie reglada que tiene a la familia de rectas (1) por generatrices.

El vector director de las generatrices es (2, -1, 0). Como el vector director es independiente del parámetro k, todas las generatrices (1) son paralelas y por lo tanto, la superficie dada es cilíndrica.

8.14 Superficies de Revolución.

Si se hace girar a una curva plana C alrededor de una recta L que esta en el mismo plano de modo que cada punto de la curva describa una circunferencia, entonces la superficie resultante recibe el nombre de superficie de revolución. (Fig. 234)

Esto es, una superficie de revolución es la engendrada por la rotación de una curva plana en torno de una recta fija contenida en el plano de esa curva.



(Fig.234)

La curva plana se llama *generatriz* y la recta fija *eje de revolución*, o simplemente *eje de la superficie*.

Cualquier posición de la generatriz se llama sección meridiana o meridiano, y cada circunferencia descrita por un punto de la generatriz se llama paralelo de la superficie.

De estas definiciones se deduce lo siguiente:

a) Toda sección meridiana es congruente con la generatriz y es la intersección de la superficie con un plano que pasa por el eje.
b) Todo paralelo tiene su centro sobre el eje y está contenido en un plano perpendicular al eje.

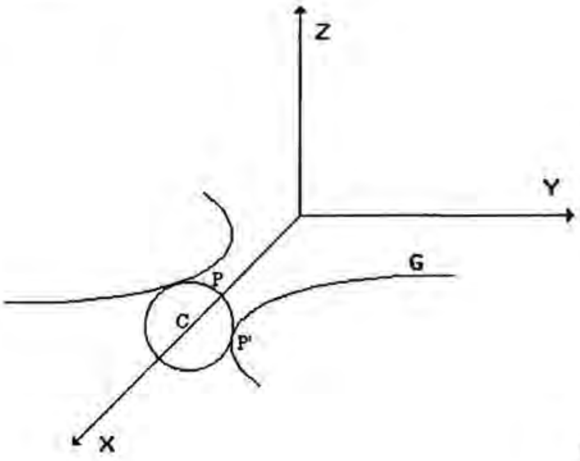
Nótese que la esfera, el cilindro circular recto y el cono circular recto; son superficies de revolución.

En la determinación de la ecuación de una superficie de revolución, no se pierde generalidad si se toma la generatriz G contenida en el plano XY que tiene por ecuaciones

Ff (x, y) = 0 , z = 0

Y supongamos que el eje de revolución es el eje X (Fig.235)

Determinaremos la ecuación de esta superficie de revolución por el método de los parámetros.



(Fig.235)

Sea $P(x, y, z)$, un punto cualquiera de la superficie. El paralelo que pasa por P corta a G en un punto del plano XY, digamos $P'(x', y', z')$, y su centro C está sobre el eje X.

Por ser radios del mismo paralelo, $|CP| = |CP'|$
Pero como $|CP| = \sqrt{y^2 + z^2}$ y $\overline{CP'} = y'$

tenemos la relación $y' = \pm\sqrt{y^2 + z^2}$ .... (1)

También como P y P' están en el mismo plano $x' = x$ .... (2)

Además como el punto P' está sobre G, tenemos $f(x', y') = 0$, $z' = 0$ ....(3)

Eliminando los tres parámetros x', y', z' entre las cuatro ecuaciones (1), (2), (3) obtenemos

$$f\left(x, \sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$$

que es la ecuación buscada de la superficie de revolución.

Análogamente, haciendo girar la curva entorno del eje Y, hallamos que la ecuación de la superficie de revolución correspondiente es $f(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$.

Se obtienen resultados análogos cuando la generatriz esta en cada uno de los otros planos coordenados y se le hace girar en torno de un eje coordenado contenido en dicho plano.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la superficie engendrada por la rotación de la hipérbola

$y^2 - 4x^2 = 4$, $z = 0$ en torno del eje Y.

Solución.

Sea $P(x, y, z)$, un punto cualquiera de la superficie. El paralelo que pasa por P corta a la generatriz G en un punto del plano XY , digamos $P'(x', y', z')$ y su centro C esta sobre el eje Y.

Por ser radios del mismo paralelo $|CP| = |CP'|$
Pero como $|CP| = \pm\sqrt{x^2 + z^2}$ y $\overline{CP'} = x'$ tenemos la relación $x' = \pm\sqrt{x^2 + z^2}$

También como P y P' están en el mismo plano $y = y'$

Además como el punto P' esta sobre la generatriz $f(x', y') = 0$, $z' = 0$

Eliminando los parámetros x', y', z' entre las cuatro ecuaciones anteriores, obtenemos

$f\left(\sqrt{x^2+z^2}, y\right) = 0$ es decir, $y^2 - 4\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)^2 = 4$ de donde $y^2 - 4x^2 - 4z^2 = 4$

que es la ecuación buscada de la superficie de revolución.

Recíprocamente, dada la ecuación de una superficie, determinar si representa una superficie de revolución.
Si uno de los ejes coordenados es el eje de revolución, la solución es comparativamente sencilla, porque entonces las secciones de la superficie por planos perpendiculares al eje son todas circunferencias cuyos centros están sobre dicho eje.
Se dice entonces que la superficie se extiende a lo largo del eje.

Ejemplo.

Demostrar que la ecuación $9x^2 + 9y^2 - z^2 = 9$ representa una superficie de revolución. Hallar su eje de revolución y las ecuaciones de su generatriz en uno de los planos coordenados que contenga al eje.

Solución.

Los planos $z = k$ cortan a la superficie dada en las circunferencias

$9x^2 + 9y^2 = 9 + k^2$, $z = k$

cuyo centros, para todos los valores de k, están sobre el eje Z.

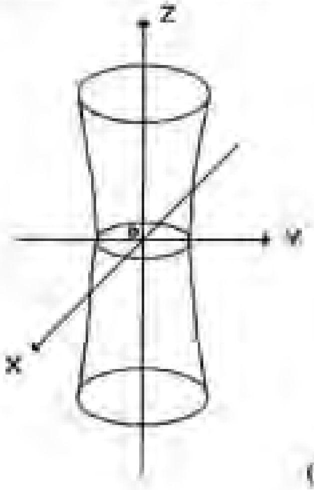
Por lo tanto la ecuación anterior representa una superficie de revolución cuyo eje de revolución es el eje Z.

El eje Z está contenido en el plano YZ, y la traza de la superficie sobre el plano es la generatriz

$9y^2 - z^2 = 9$, $x = 0$

Evidentemente, la superficie dada puede engendrarse haciendo girar la hipérbola anterior en torno del eje Z. (Fig.236)

A esta superficie se le da el nombre de hiperboloide de revolución de una hoja.



(Fig.236)

8.15 Superficies Cuádricas

Consideremos la ecuación general de segundo grado en tres variables

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$

en donde uno, por lo menos, de los seis coeficientes A, B, C, D, E y F es diferente de cero.

Una superficie cuya ecuación es de segundo grado en tres variables se llama superficie cuádrica.

Por ejemplo, la superficie esférica; y las superficies cilíndricas y cónicas cuyas ecuaciones sean de segundo grado, son cuádricas, tenemos así el cilindro cuádrico y el cono cuádrico.

De manera semejante, cualquier superficie reglada representada por una ecuación de segundo grado se llama cuádrica reglada.

Veamos cuales son las gráficas en el espacio que me representa una ecuación general de segundo grado en tres variables.

Para esto, supongamos que cortamos la cuádrica por un plano cualquiera paralelo al plano XY es decir, el plano $z = k$, en donde k es una constante real cualquiera.

Las ecuaciones de la curva de intersección se obtienen sustituyendo z por k en la ecuación de la superficie cuádrica, éstas son:

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + (Ek + G)x + (Fk + H)y + Ck^2 + Ik + J = 0 \qquad z = k$.

Esta ecuación nos representa como ya sabemos una sección cónica, contenida en el plano

$z = k$

Esto es, si una superficie cuádrica es cortada por un plano paralelo a uno de los planos cartesianos cualquiera, la curva de intersección es una sección cónica.

Analizaremos la ecuación cuádrica y haremos una clasificación de sus lugares geométricos como cuádricas centrales y no centrales.

Mediante una transformación de coordenadas adecuada la ecuación general de la superficie cuádrica se puede transformar de tal manera que tome una de las formas siguientes:

$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = J \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$Ax^2 + By^2 = Iz$ .... (2)

Las superficies del tipo (1) , tienen un centro de simetría, el origen, y por lo cual se llaman cuádricas centrales.

Las superficies del tipo (2), no tienen centro de simetría y se llaman por lo tanto cuádricas no centrales.

En la siguiente tabla, se da una clasificación de las superficies cuádricas centrales y no centrales.

Tipo (1) $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = J$

J	Coeficientes	Lugar geométrico
Positivo	Todos positivos	Elipsoide
	Todos negativos	Ningun lugar geométrico
	Dos positivos, uno negativo	Hiperboloide de una rama
	Uno positivo, dos negativos	Hiperboloide de dos ramas
	Dos positivos, uno cero	Cilindro Elíptico (o circular) recto
	Dos negativos, uno cero	Ningun lugar geométrico
	Uno positivo, uno negativo y uno cero	Cilindro hipérbolico recto
	Uno positivo, dos cero	Dos planos paralelos diferentes
	Uno negativo, dos cero	Ningún lugar geométrico
Cero	Todos del mismo signo	Un solo punto, el origen
	Dos positivos, uno negativo	Cono recto
	Uno cero, dos del mismo signo	Todos los puntos sobre un eje coordenado
	Uno cero, dos de signo contrario	Dos planos que se cortan
	Dos cero	Un plano coordenado

Cuando $J < 0$, se invierten los signos de los coeficientes A, B, C; los lugares geométricos correspondientes estarán dados entonces como para $J > 0$.

Tipo (2) $Ax^2 + By^2 = Iz$

	Coeficientes	Lugar geométrico
I	A, B	
Positivo	Del mismo signo	Paraboloide elíptico
	Signos opuestos	Paraboloide hipérbolico
	Uno cero	Cilindro parabólico recto
Cero	Del mismo signo	Todos los puntos sobre un eje coordenado
	Signos opuestos	Dos planos que se cortan
	Uno cero	Un plano coordenado

Cuando $I < 0$, se invierten los signos de los coeficientes A y B; los lugares geométricos correspondientes estarán dados entonces como para $I > 0$.

Si observamos las tablas anteriores vemos que, si uno o más coeficientes son cero el lugar geométrico, si existe, está entre las superficies que hemos estudiado.

Estos lugares geométricos incluyen las superficies del cilindro y conos rectos y a ciertas formas degeneradas que constan de dos planos diferentes, dos planos coincidentes (o un solo plano), dos planos que se cortan, una sola recta, y un punto.

Discutiremos enseguida las superficies cuádricas centrales y no centrales.

Cuádricas Centrales.

Consideraremos las cuádricas con centro, representadas por la ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = J$$

en donde todos los coeficientes son diferentes de cero.

Podemos escribir esta ecuación en la forma

$$\pm\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{..........} (1)$$

llamada forma canónica de una cuádrica central.

Estudiaremos ahora las cuádricas a partir de sus formas canónicas de sus ecuaciones.

De la ecuación (1) deducimos lo siguiente :

- Cada cuádrica central tiene tres planos de simetría (los planos coordenados) llamados planos principales, tres ejes de simetría (los ejes coordenados) llamados ejes principales y un centro de simetría (el origen).

Si todos los coeficientes en la ecuación (1) son *negativos*, no hay lugar geométrico. Por lo tanto, solamente consideraremos los siguientes casos; en que $J > 0$.

a) Elipsoide - Todos los coeficientes positivos.
b) Hiperboloide de una rama - Dos coeficientes positivos, uno negativo.
c) Hiperboloide de dos ramas - Un coeficiente positivo, dos negativos.
d) Cilindro elíptico (no circular) recto - Dos coeficientes positivos, uno cero.
e) Cilindro hiperbólico recto - Un coeficiente positivo, uno negativo y uno cero.

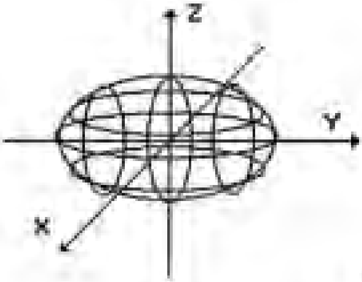
a) Elipsoide

La forma canónica de la ecuación del elipsoide es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{..........(2)} \quad \textit{donde } a \neq b \neq c$$

Analizaremos esta ecuación.

Las intersecciones con los ejes X,Y,Z son $\pm a, \pm b, \pm c$, respectivamente.
La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.
Todas las trazas sobre los planos coordenados son elipses.
Todas las secciones del elipsoide hechas por los planos paralelos a los coordenados son elipses dentro de los límites de la superficie, que es cerrada y está contenida en su totalidad dentro del paralelepípedo que tiene por caras los planos $x = \pm a$, $y = \pm b$, $z = \pm c$.
(Fig.237)



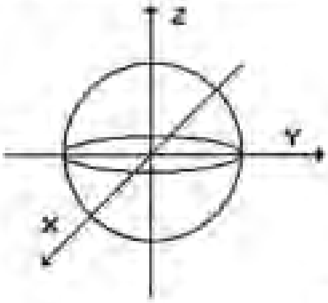
(Fig.237)

Si dos de los números a,b o c son iguales, entonces la superficie es llamada elipsoide de revolución.

En particular, si $a = c$ y $b > a$, tenemos el elipsoide alargado, una superficie de revolución que se obtiene haciendo girar la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$ en torno de su eje menor.

Si los tres números son iguales entonces la superficie es una esfera.

Es decir, si $a = b = c$, la superficie (2) es una esfera de radio a ; luego, la superficie esférica es un caso especial del elipsoide. (Fig.238)



(Fig.238)

b) Hiperboloide de una rama

Una forma canónica de la ecuación del hiperboloide de una hoja es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{..............} \quad (3)$$

Las otras dos formas canónicas son $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ y $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Nuestra discusión para la ecuación (3) sirve para las últimas dos ecuaciones, ya que las tres superficies solo difieren en sus posiciones con relación a los ejes coordenados.

Las intersecciones con los ejes X y Y son $\pm a$ y $\pm b$, respectivamente.

No hay intersección con el eje Z.

La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.
Las trazas sobre los planos XY, XZ y YZ son respectivamente,

la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$

la hipérbola $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $y=0$

y la hipérbola $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $x=0$

Las secciones de la superficie por planos paralelos al XY son las elipses

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{c^2} \quad , \quad z=k$$

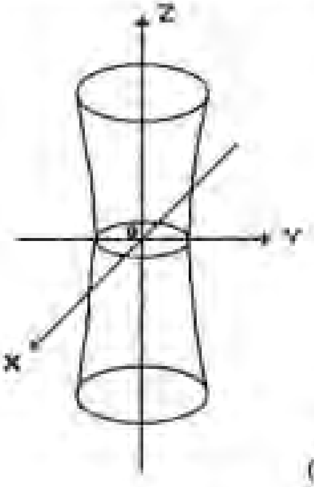
o si $a=b$ son circunferencias.

Las secciones transversales en planos paralelos a los otros planos cartesianos XZ y YZ, son respectivamente las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{k^2}{b^2} \quad , \quad y=k$$

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1+\frac{k^2}{a^2} \quad , \; x=k$$

En la figura 239 aparece una parte de la superficie y se dice que se extiende a lo largo del eje Z.
Cualquier hiperboloide de una rama se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la variable cuyo coeficiente es negativo en la forma canónica de su ecuación.



(Fig.239)

Si en la ecuación (3) a = b, la superficie es un hiperboloide de revolución de una rama que puede engendrarse haciendo girar la hipérbola

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad , \quad x=0$$

en torno del eje Z.

La expresión " de una rama" se refiere a que la superficie es conexa, o que es de un solo pedazo.

c) Hiperboloide de dos ramas.

Una forma canónica de la ecuación del hiperboloide de dos ramas es

$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Como para la hiperboloide de una rama, hay otras dos formas canónicas las cuales son

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{y} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Siendo la ecuación (4) representativa de las otras dos formas.

Las intersecciones con el eje Z son $\pm c$. No hay intersecciones con los ejes X y Y.
La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.
Las trazas sobre los planos XZ y YZ son, respectivamente, las hipérbolas

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \quad , \quad y=0 \qquad \text{y} \qquad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \quad x=0$$

No hay traza sobre el plano XY.

Las secciones de esta superficie por planos paralelos al XY son las elipses

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2}-1 \quad , \quad z=k$$

siempre que $|k|>c$. Para $k=\pm c$ tenemos solamente dos puntos de intersección $(0,0,\pm c)$.

Para valores de k comprendidos en el intervalo $-c<k<c$ no hay lugar geométrico.

De esto se sigue que la superficie no es cerrada sino que esta compuesta de dos ramas diferentes que se extienden indefinidamente.

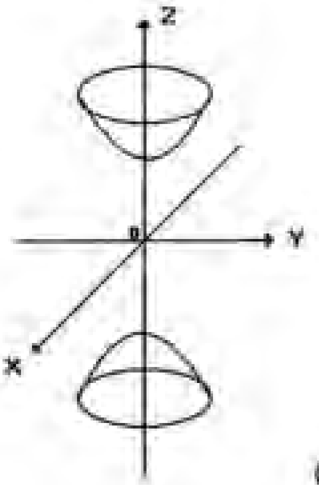
Las secciones transversales en planos paralelos a los planos cartesianos XZ, YZ son respectivamente las hipérbolas

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{k^2}{b^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{k^2}{a^2}$$

Una porción de la superficie aparece en la figura 240 . Se dice que la superficie se extiende a lo largo del eje Z.
Cualquier hiperboloide de dos ramas se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la variable cuyo coeficiente es positivo en la forma canónica de su ecuación.

Si en la ecuación a = b , la superficie es un hiperboloide de revolución de dos ramas que puede generarse haciendo girar la hipérbola

$\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$, $y=0$, en torno del eje Z.



(Fig.240)

d) Cilindro elíptico

La forma canónica de la ecuación del cilindro elíptico es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

en este caso el coeficiente de z es cero. Por tanto, z está definido para todos los números reales.

Las otras dos formas canónicas son:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad y \qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

donde y y z están definidos respectivamente en cada ecuación para todos los números reales.

El análisis para la ecuación (5) sirve para las últimas dos ecuaciones.
Las intersecciones con el eje X y Y son $\pm a$ y $\pm b$ respectivamente.
No hay intersección con el eje Y.
La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.
La traza sobre el plano XY es la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Las trazas sobre los planos XZ y YZ son respectivamente las rectas paralelas

$x=\pm a$ y $y=\pm b$

Las secciones de la superficie por planos paralelos al XY son las elipses

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Es decir, es la misma curva para todo k en los números reales.

Las secciones transversales en planos paralelos a los planos cartesianos XZ y YZ son respectivamente las rectas

$$x = \sqrt{a^2 \cdot \left(1 - \frac{k^2}{b^2}\right)} \quad ; \quad y = k$$

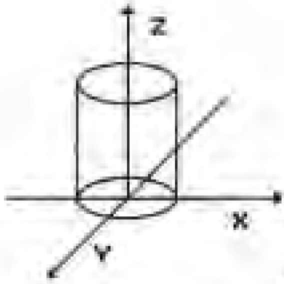
para valores de k comprendidos en el intervalo $-b < k < b$ y

$$x = \sqrt{b^2 \cdot \left(1 - \frac{k^2}{a^2}\right)} \quad , \quad x = k$$

para valores de k comprendidos en el intervalo $-a < k < a$

Una parte de la superficie aparece en la figura 241.

Decimos que la superficie se extiende a lo largo del eje Z.



(Fig.241)

Cualquier cilindro elíptico recto se extiende a lo largo del eje correspondiente a la variable cuyo coeficiente es cero en la forma canónica de su ecuación.

Si en la ecuación (5) a = b, la superficie es un cilindro circular recto.
Que es como ya vimos una superficie cilíndrica.

c) Cilindro Hiperbólico recto

La forma canónica de la ecuación del cilindro hipérbolico es

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (6)$$

En este caso el coeficiente de x es cero.

Las otras formas canónicas son

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{y} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

donde los coeficientes de z y y son ceros respectivamente en cada ecuación.

El análisis para la ecuación (6) sirve para las últimas dos ecuaciones.

Las intersecciones con el eje Y son en $\pm b$. No hay intersecciones con el eje Z y X.

La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.

La traza sobre el plano YZ es la hipérbola $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

La traza sobre el plano XY son las rectas paralelas $y = \pm b$.

No hay traza sobre el plano XZ.

Las secciones de la superficie por planos paralelos al YZ es la hipérbola

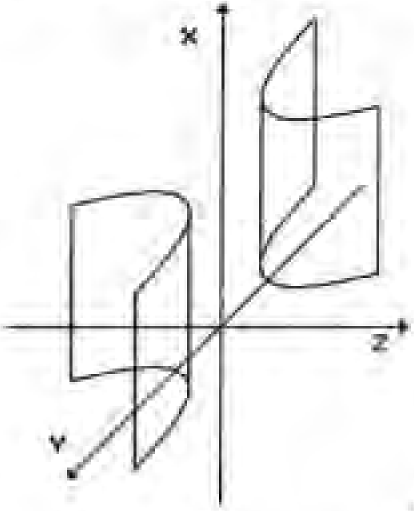
$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Es decir, es la misma curva, para todo $x = k$, con k variando en los números reales. Las secciones transversales en planos paralelos al plano cartesiano XY y al XZ son las rectas.

$$y = \pm\sqrt{b^2 \cdot \left(1 + \frac{k^2}{c^2}\right)} \quad , \quad x = k \qquad y \qquad z = \pm\sqrt{c^2 \cdot \left(\frac{k^2}{b^2}\right)} \quad , \quad y = k$$

Una parte de la superficie aparece en la figura 242.

Decimos que la superficie se extiende a lo largo del eje X.



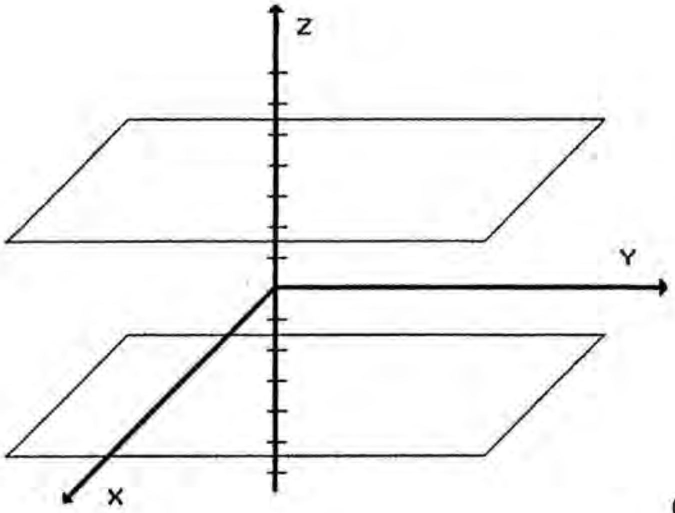
(Fig.242)

Hay un caso degenerado en esta sección y es cuando uno de los coeficientes es positivo y los otros dos cero.

En este caso tenemos, suponiendo que $c \neq 0$ y como $1 > 0$ por hipótesis entonces la ecuación de este lugar geométrico es en su forma canónica.

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \text{o bien,} \qquad z = \pm c$$

Que nos representan un par de planos paralelos a los cartesianos, en este caso paralelos al XY. Como lo muestra la figura 243 .



(Fig.243)

Las otras formas de planos paralelos son $\frac{x^2}{a^2} = 1$; $\frac{y^2}{b^2} = 1$

Consideraremos ahora el caso en el que J = 0 en la ecuación $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = J$.

Es decir la forma $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$ la cual escribiéndola en su forma canónica sería

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Analizaremos los siguientes casos:

f) Cono Elíptico - Dos coeficientes positivos y uno negativo.

Y los casos degenerados.

g) Un punto, el origen - Todos los coeficientes del mismo signo.
h) Un eje coordenado - Dos coeficientes del mismo signo y uno cero.
i) Dos planos que se cortan - Dos coeficientes de signo contrario y uno cero
j) Un plano coordenado - Dos coeficientes cero.

f) Cono elíptico

La forma canónica de la ecuación del cono elíptico es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Las otras formas canónicas son:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad y \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

Nuestra discusión para la ecuación (7) servirá para las últimas dos ecuaciones.
Las intersecciones con los ejes X, Y y Z es en el origen. La superficie es simétrica con respecto a todos los planos coordenados, ejes coordenados y al origen.

La traza sobre el plano XY es la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad , \quad z=0$

La traza sobre los planos XZ y YZ son respectivamente las rectas

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=0 \quad , \quad \frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0 \quad , \quad y=0 \qquad y$$

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=0 \quad , \quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0 \quad , \quad x=0$$

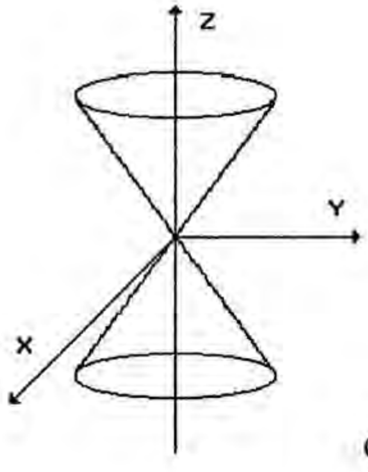
Las secciones de la superficie por planos paralelos al XY son las elipses

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{c^2} \quad , \quad z=k \qquad \text{donde } k\neq 0$$

Las secciones transversales en planos paralelos a los planos cartesianos XZ y YZ son

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{k^2}{a^2} \qquad \text{y} \qquad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{k^2}{b^2} \qquad \text{para valores } k \neq 0$$

Entonces las hipérbolas están sobre el cono elíptico y las rectas halladas en las trazas están sobre la superficie.
Las cuales me generan la superficie cónica cuando se mueven a través de la directriz que en este caso es la elipse contenida en un plano paralelo al plano coordenado XY.
Por tanto, la superficie es una superficie reglada.
Nótese que la superficie guarda una relación con el hiperboloide de una rama análoga a la que guardan las asintotas con una hipérbola.
Esto es, el hiperboloide de una rama se aproxima más y más a la superficie cónica a medida que ambas superficies se alejan más y más del origen.
Por lo que, al cono elíptico se le da el nombre de cono asintótico de la hiperboloide de una rama. (Fig.244)



(Fig.244)

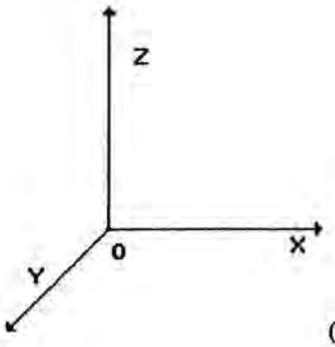
Casos degenerados.

g) Un punto, el origen.

Este caso se presenta cuando la ecuación es de la forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \text{o bien,} \quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

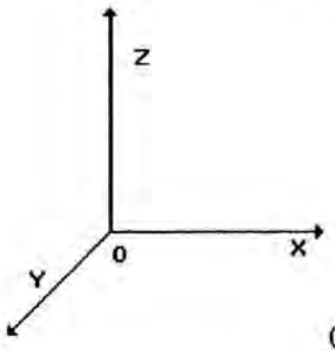
La cual nos representa un punto, el origen. Y esto ocurre cuando los coeficientes tienen el mismo signo. (Fig.245)



(Fig.245)

h) Una recta, un eje coordenado.

Este hecho se presenta cuando dos coeficientes tienen el mismo signo y uno es cero.
Por ejemplo la ecuación : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$, que representa el eje Z. (Fig.246)



(Fig246)

Hay dos ecuaciones más que me representan los ejes X y Y respectivamente, las cuales son :

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad y \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$$

i) Dos planos que se cortan.

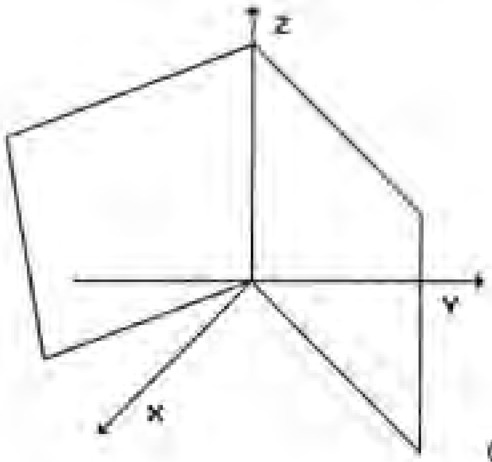
Este caso se presenta cuando dos coeficientes son de signo contrario y uno es cero.

Como en la ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ que me representa un par de planos que se interceptan en un eje coordenado.

Los planos son en este caso

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \qquad y \qquad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$$

y la recta de intersección de estos planos es el eje Z. (Fig.247)



(Fig.247)

Las otras formas de planos que se interceptan con el eje X y Y respectivamente son

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad y \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

j) Un plano coordenado.

Este es el caso en que el lugar geométrico me representa un plano, uno de los planos coordenados si dos de los coeficientes es cero. Así

$$\frac{x^2}{a^2}=0 \quad \text{o bien} \quad x=0$$

me representa el plano coordenado YZ.

Los otros dos planos coordenados XY y XZ son representados por las ecuaciones

$\frac{z^2}{c^2}=0$ o $\frac{y^2}{b^2}=0$ respectivamente.

Cuádricas no-centrales.

En esta sección consideraremos las cuádricas sin centro de simetría, representadas por la ecuación

$Ax^2 + By^2 = Iz$

En donde todos los coeficientes son diferentes de cero.

Podemos escribir la ecuación anterior en la forma

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = cz \quad \text{.........} (8)$$

llamada forma canónica de una superficie cuadrática no central.

De la ecuación (8) deducimos que las cuádricas no centrales tienen dos planos de simetría (los planos YZ y XZ) llamados planos principales, un eje de simetría (el eje *Z*) y ningún centro de simetría.

Siguiendo las combinaciones posibles de signos en la ecuación (8) , se deduce que existen tres tipos de superficies a saber.

a) Paraboloide elíptico (En el que los coeficientes de los términos de segundo grado son del mismo signo.)

b) Paraboloide hiperbólico (En el que los coeficientes de los términos de segundo grado son de signos contrarios.)

c) Cilindro parabólico recto (Uno de los coeficientes de los términos de segundo grado es cero)

n) Paraboloide elíptico.

Una forma canónica de la ecuación del paraboloide elíptico es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz \quad \text{..........} (9)$$

Las otras dos formas canónicas son

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=cy \qquad \text{y} \qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=cx$$

Para cada forma podemos tener dos variantes según que c sea positivo o negativo.
Para nuestro análisis la ecuación (9) será representativa de todas las formas.

Las intersecciones con los ejes X,Y y Z respectivamente es en el origen.
La superficie es simétrica con respecto a los planos YZ y XZ y con respecto al eje Z.

Las trazas sobre los planos XY, XZ y YZ son respectivamente, el origen , la parábola

$$\frac{x^2}{a^2}=cz \quad , y=0 \qquad \text{y la parábola } \frac{y^2}{b^2}=cz \quad , \quad x=0$$

Las secciones de las superficies por planos paralelos al XY son las elipses

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=ck \quad , \quad z=k$$

siempre que $ck>0$, esto es; si c y k tienen el mismo signo.

Nótese que a medida que k aumenta de valor las elipses crecen en tamaño a medida que los planos de corte se alejen más y más del plano XY.

Esto es, la superficie se extiende indefinidamente, alejandose del plano XY.

Si $c>0$ forzosamente $k>0$ y la superficie estará en su totalidad arriba del plano XY.

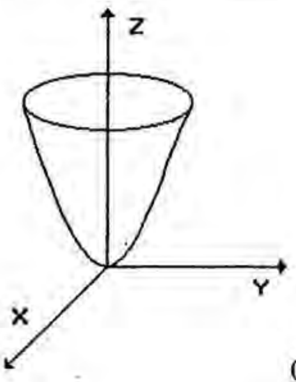
Si $c<0$ entonces $k<0$ y la superficie esta en su totalidad abajo del plano XY.

Las secciones transversales en planos paralelos a los planos coordenados XZ y YZ son respectivamente las parábolas.

$$x^2 = a^2 \cdot \left(cz - \frac{k^2}{b^2}\right) \quad , \quad y = k \qquad ; \qquad y^2 = b^2 \cdot \left(cz - \frac{k^2}{a^2}\right) \quad , \quad x = k$$

Cualquier paraboloide elíptico se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la variable de primer grado en la forma canónica de su ecuación. Por tanto, la superficie en cuestión se extiende a lo largo del eje Z. (Fig.248)

Si en la ecuación (8) , a = b , la superficie es una paraboloide de revolución que puede generarse haciendo girar la parábola $\frac{y^2}{b^2} = cz$, $x = 0$ entorno del eje Z.



(Fig.248)

b) Paraboloide hiperbólico.

Una forma canónica de la ecuación del paraboloide hiperbólico es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = cz \quad \text{............} (10)$$

El análisis de la ecuación (10) será representativa de las otras dos formas canónicas

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=cy \quad y \quad \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=cx$$

Hay dos variaciones para cada forma, según que c sea positivo o negativo.
Las intersecciones con los ejes X,Y y Z es en el origen.
La superficie es simétrica con respecto a los planos YZ y XZ y al eje Z.

Las trazas sobre los planos XY, XZ y YZ son respectivamente, las rectas que se cortan;

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \;,\; z=0 \quad y \quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \;,\; z=0 \;;$$

la parábola $\frac{x^2}{a^2}=cz$, $y=0$ y la parábola $\frac{y^2}{b^2}=-cz$, $x=0$

Las secciones de la superficie por planos paralelos al XY son las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=ck \quad , \quad z=k\neq 0$$

Nótese que a medida que k crece numéricamente las ramas de estas hipérbolas se alejan más y más del eje Z. Por tanto, la superficie se extiende indefinidamente.

Las secciones de la superficie por planos paralelos al XZ son las parábolas

$$\frac{x^2}{a^2}=cz+\frac{k^2}{b^2} \quad , \quad y=k$$

las cuales se abren hacia arriba o hacia abajo según que c sea positivo o negativo.

Las secciones de la superficie por planos paralelos al YZ son las parábolas

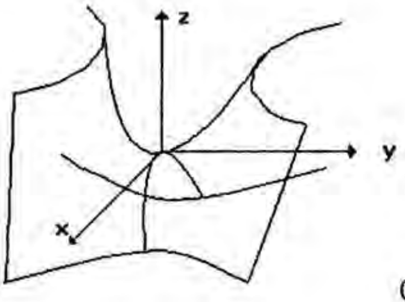
$$\frac{y^2}{b^2}=-cz+\frac{k^2}{a^2} \quad , \quad x=k$$

las cuales se abren abajo o hacia arriba según que c sea positivo o negativo.

Una parte de la superficie aparece en la figura 249 para el caso en que c sea negativo.

La superficie tiene la forma de una silla de montar y se dice que se extiende a lo largo del eje Z.

Todo paraboloide hiperbólico se extiende a lo largo del eje coordenado correspondiente a la variable de primer grado en la forma canónica de su ecuación.



(Fig.249)

c) Cilindro parabólico recto.

Una forma canónica de la ecuación del cilindro parabólico recto es

$$\frac{y^2}{b^2} = cz \quad \text{..............} (11)$$

en este caso el coeficiente de x es cero.

La otra forma canónica es $\frac{x^2}{b^2} = cz$, donde el coeficiente de y es cero.

Nuestro análisis para la ecuación (11) sirve para la anterior ecuación.
Las intersecciones con el eje X, Y y Z es el origen.
La superficie es simétrica respecto al plano XZ y al eje Z.

La traza sobre el plano YZ es la parábola con ecuación.

$$\frac{y^2}{b^2} = cz$$

La traza sobre el plano XZ y XY son respectivamente las rectas

$$cz = 0 \quad y \quad \frac{y^2}{b^2} = 0$$

Las secciones de la superficie por planos paralelos al plano YZ es la parábola

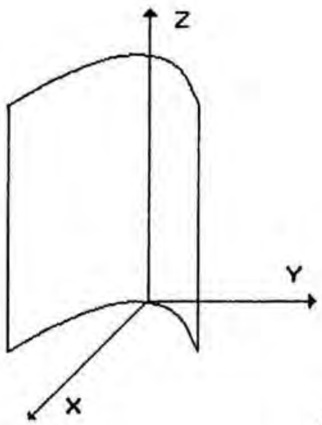
$$\frac{y^2}{b^2} = cz$$

Las secciones de la superficie por planos paralelos a los planos XZ y XY son respectivamente las rectas

$$cz = \frac{k^2}{b^2} \quad y \quad \frac{y^2}{b^2} = ck$$

Una parte de la superficie aparece en la figura 230.

Decimos que la superficie se extiende a lo largo del eje X.



(Fig.250)

IX Ecuación general de segundo grado.

9.1 Análisis de la ecuación de segundo grado en dos variables desde un punto de vista geométrico.

En esta sección veremos que el lugar geométrico representado por la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es una sección cónica o un caso degenerado de ésta. Al mismo tiempo llevaremos a cabo el análisis de la ecuación de segundo grado, determinando un procedimiento para reducir la ecuación a alguna de las siguientes formas:

$A'x'^2 + Cy'^2 + F = 0$ (elipse)

$A'x'^2 - Cy'^2 + F = 0$ (hipérbola)

$Cy'^2 + D'x' = 0$ (parábola)

Con base en algunas propiedades geométricas de las curvas que pertenecen a la familia. De esta manera exploraremos la relación entre álgebra y geometría y contribuyendo así a su enriquecimiento.

Simetrías

En geometría plana, por lo general se consideran dos tipos de simetría:

1) Simetría Central (respecto a un punto)

2) Simetría Axial (respecto a una recta)

Con base en lo antes visto podemos afirmar que las simetrías de una curva se reflejan en su ecuación.
En lo que sigue obtendremos un criterio de simetría respecto al origen para curvas de segundo orden. La curva con ecuación $f(x, y) =$

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es simétrica respecto al origen O $\Leftrightarrow$ $D = E = 0$

Es decir, la curva es simétrica respecto a O, si todos sus términos son de grado par.

El criterio anterior da lugar a un procedimiento para encontrar los centros de simetría de la curva $f(x, y) = 0$. Dicho procedimiento consiste en suponer que hemos trasladado el origen O a un punto $Q(h, k)$ con la propiedad de que tras el desplazamiento los coeficientes D' y E' de la nueva ecuación son nulos..

La traslación que lleva el origen a Q es

$x = x' + h \qquad ; \qquad y = y' + k$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación f(x, y) tenemos

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

$$A\cdot(x'+h)^2 + B\cdot(x'+h)\cdot(y'+k) + C\cdot(y'+k)^2 + D\cdot(x'+h) + E\cdot(y'+k) + F = 0$$

Agrupando términos tenemos

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + (2Ah + Bk + D)\cdot x' + (Bh + 2Ck + E)\cdot y' + Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F = 0$$

Si la nueva ecuación la denotamos con $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$, entonces

$A' = A$

$B' = B$

$C' = C$

$D' = 2Ah + Bk + D$

$E' = Bh + 2Ck + E$

$F' = Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F = 0$

Haciendo uso de la notación para las derivadas parciales del cálculo diferencial, la expresión anterior puede ser escrita como sigue:

$D' = D_x f(x, y) \qquad E' = D_y f(x, y) \qquad F' = f(h, k)$

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + D_x f(h,k)\cdot x' + D_y f(h,k)\cdot y' + F' = 0 \qquad (1)$$

Haciendo uso de la notación para las derivadas parciales del cálculo diferencial, la expresión anterior puede ser escrita como sigue:

Notemos que:

$A' = A$

$B' = B$

$C' = C$

$D' = 2Ah + Bk + D$

$E' = Bh + 2Ck + E$

$F' = Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F = 0$

En resumen:

1) Los coeficientes de los términos de segundo grado no se alteran bajo la traslación.

2) Los coeficientes de los términos de primer grado son las derivadas parciales de f(x, y) evaluadas en las coordenadas de Q.

3) El término independiente es el valor de la función f(x, y) en las coordenadas de Q.

Para que Q sea un centro de simetría, los coeficientes de los términos lineales deben desaparecer , i.e. la pareja h, k debe ser la solución del sistema lineal.

$Bx + 2Cy + E = 0 \quad ; \quad 2Ax + By + D = 0 \qquad (2)$

cuyo determinante es:

$$\begin{vmatrix} B & 2C \\ 2A & B \end{vmatrix} = B^2 - 4AC$$

Por lo tanto el número de centros de simetría de la curva con ecuación

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es igual al número de soluciones del sistema de ecuaciones (2), el cuál depende de que $B^2 - 4AC$ sea o no igual con 0.

A $B^2 - 4AC$ se le llama *indicador* de la curva y nos sirve como base para su clasificación en tres géneros:

Elipse ($B^2 - 4AC < 0$)

Parábola ($B^2 - 4AC = 0$)

Hipérbola ($B^2 - 4AC > 0$)

Por otro lado, si $B^2 - 4AC \neq 0$, entonces hay una única solución del sistema (2) y la curva tiene un único centro de simetría.

Si $B^2 - 4AC = 0$ y $2CD - BE = 0$, entonces hay una infinidad de soluciones (2) y la curva tiene una infinidad de centros de simetría.

Si $B^2 - 4AC = 0$ y $2CD - BE \neq 0$, entonces no hay solución del sistema (2) y como consecuencia la curva no tiene centro de simetría.

Conclusión: el número de centros de simetría de la curva depende en primer lugar de $B^2 - 4AC$ y en segundo lugar de $2CD - BE$.

A las curvas de segundo grado con un único centro se les llama cónicas centrales.

En otras palabras una cónica es central $\Leftrightarrow B^2 - 4AC \neq 0$.

Ejemplo

Considérese la curva con ecuación $6x^2 - 4xy + 9y^2 + 28x - 26y + 21 = 0$.

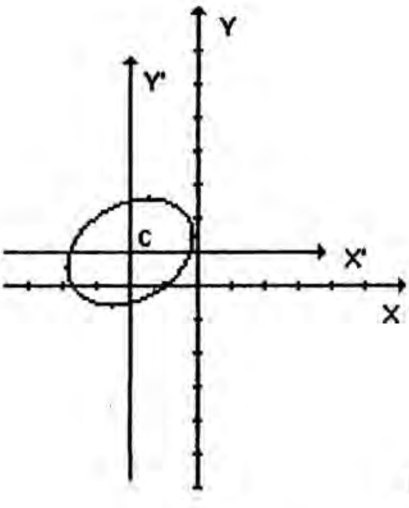
En este caso $B^2 - 4AC = -200 < 0$ y la curva es una elipse.

Dado que $B^2 - 4AC \neq 0$, hay un único centro de simetría que podemos hallar resolviendo el sistema de ecuaciones

$-4x + 18y - 26 = 0$; $12x - 4y + 28 = 0$

cuya solución es $x = -2$; $y = 1$. Por lo tanto, el único centro de simetría es C(-2, 1).

Trasladando el origen a C con el cambio de variables $x = x' - 2$; $y = y' + 1$ obtenemos la ecuación $6x'^2 - 4x'y' + 9y'^2 - 20 = 0$ la cuál carece de términos de primer grado. (Fig.251)



(Fig.251)

Ejemplo 2.

Sea la curva con ecuación $x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 3y + 2 = 0$. En este caso $B^2 - 4AC = 0$ y la curva es una parábola. En este caso es una cónica no central. Como veremos, la curva tiene una infinidad de centros de simetría.
Todo depende si $2CD - BE = 0$ o $2CD - BE \neq 0$. Veamos:

$2(1)(-3) - (-2)(+3) = 0$

En consecuencia el sistema $-2x + 2y + 3 = 0$; $2x - 2y - 3 = 0$ tiene una infinidad de soluciones. Dado que ambas ecuaciones representan una misma recta L, cada punto de L es un centro de simetría de la parábola.

La curva es una parábola degenerada y consiste en dos rectas paralelas y distintas entre si.

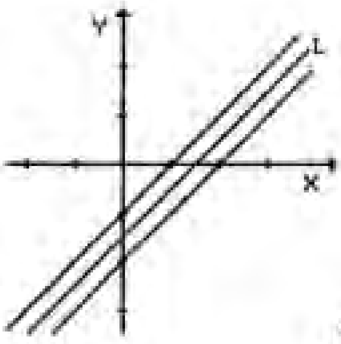
$$x^2 - 2xy + y^2 - 3x + 3y + 2 = (x - y)^2 - 2x - x + 2y + y + (-1)\cdot(-2)$$

$$= (x - y)^2 - 2(x - y) - 1\,(x - y) + (-1)\cdot(-2)$$

$$= (x - y - 2)(x - y - 1) = 0$$

y la curva esta formada por las rectas $x - y - 2 = 0$ y $x - y - 1 = 0$.

La línea L de los centros es: $-2x + 2y + 3 = 0$, que es paralela y equidistante de las rectas.(Fig.215)



(Fig.215)

En resumen:

Los centros de la curva $f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones

$D_x f(x, y) = 0 \quad ; \quad D_y f(x, y) = 0$

Diámetros.

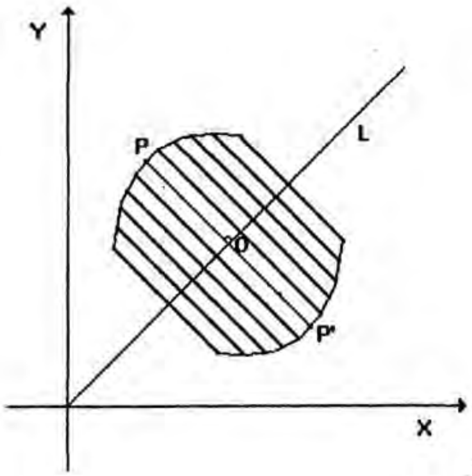
El concepto de diámetro se obtiene como una generalización de eje de simetría.
Para que una línea L sea eje de simetría de una curva **C** han de suceder dos cosas.

1') Para cada punto $P \in C$ hay un punto $P' \in C$ tal que el punto medio de $\overline{PP'}$ esta en L.

2') El segmento $\overline{PP'}$ es perpendicular a L. Estas condiciones son independientes entre si.

Si consideramos solo la primera de ellas se tiene básicamente la noción de diámetro.

En otras palabras, un diámetro de una curva **C** es el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas paralelas a una dirección dada.



(Fig.216)

L es eje de simetría si:

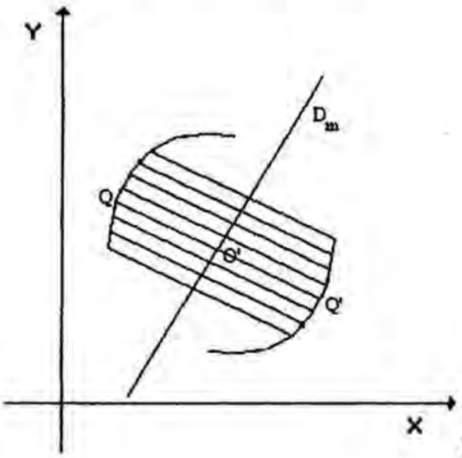
1) O es punto medio de $\overline{PP'}$ y $O \in L$

2) $\overline{PP'} \perp L$ (Fig. 216)

D_m es el diámetro correspondiente a las cuerdas con pendiente m.

1) O' es el punto medio de $\overline{QQ'}$ y $O' \in D_m$

$\overline{QQ'}$ es una cuerda con pendiente m. (Fig.217)



(Fig.217)

Si la dirección de las cuerdas está dada por su pendiente m, entonces el diámetro correspondiente se denota con D_m.

La noción de diámetro aparece de modo natural en el análisis de la ecuación general cuadrática.

Sea $C \neq 0$. Resolvamos la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ para y

$$Cy^2 + (Bx + E)\cdot y + Ax^2 + Dx + F = 0$$

$$y = \frac{-(Bx+E) \pm \sqrt{(Bx+E)^2 - 4\cdot(c)\cdot\left(Ax^2+Dx+F\right)}}{2C}$$

Si $R(x) = \dfrac{\sqrt{(Bx+E)^2 - 4\cdot(c)\cdot\left(Ax^2+Dx+F\right)}}{2C}$

y $L(x) = \dfrac{-(Bx+E)}{2C}$

la ecuación puede escribirse como $y = L(x) \pm R(x)$.

Nótese que L(x) corresponde a la línea recta $Bx + 2C + E = 0$, que es $D_y f(x, y) = 0$.

Por lo tanto, esta recta es el diámetro D_∞ de las cuerdas verticales.

En forma análoga se puede mostrar que $2Ax + By + D = 0$ es el diámetro D_0 de las cuerdas horizontales cuando $A \neq 0$.

Ejemplo.

Considérese la hipérbola $3x^2 - 8xy + 4y^2 - x + 4y + 5 = 0$

Reagrupando términos obtenemos $4y^2 + (-8x+4)\,y + 3x^2 - x + 5 = 0$

Despejando y de la ecuación

$$y = \frac{(8x-4) \pm \sqrt{(-8x+4)^2 - 4\cdot(4)\cdot\left(3x^2 - x + 5\right)}}{2\cdot(4)}$$

$$y = \frac{8x - 4 \pm 4\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{8}$$

O bien $y = x - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x+1)\cdot(x-4)}$

donde $L(x) = x - \frac{1}{2}$ y $R(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(x+1)\cdot(x-4)}$

Para que el radical sea mayor o igual a cero es necesario que

i) $(x + 1) \geq 0$ y $(x - 4) \geq 0$ o ii) $(x + 1) \leq 0$ y $(x - 4) \leq 0$

Para el caso i) se cumple si $x \geq -1$ y $x \geq 4$ es decir $x \in [4, \infty)$

Para poder graficar la curva utilizando algunos puntos se procede como sigue:

1) Se dibuja el diámetro D_∞ de las cuerdas verticales.

Este diámetro es la recta $y = x - \frac{1}{2}$ o bien $-x + y + \frac{1}{2} = 0$

que es también la recta $D_y f(x, y) = 0$

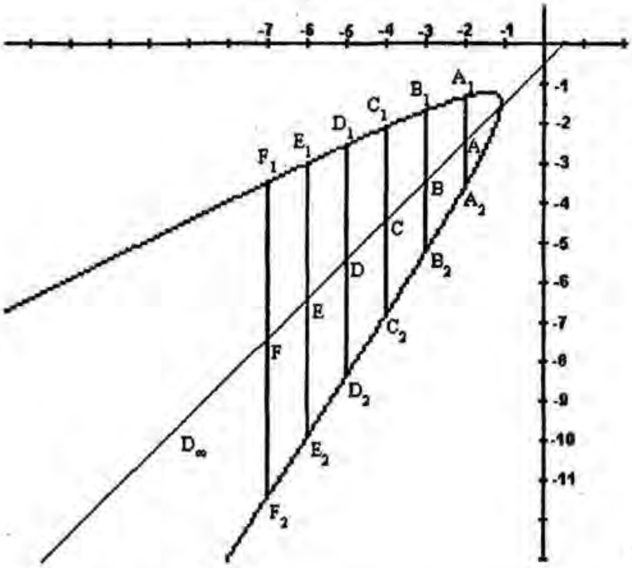
2) Se consideran algunos valores de x en el intervalo $(-\infty, -1]$

(por ejemplo –1, -2, -3, -4 etc.)

Para cada uno de los puntos se evalúa R(x) como en la siguiente tabla.

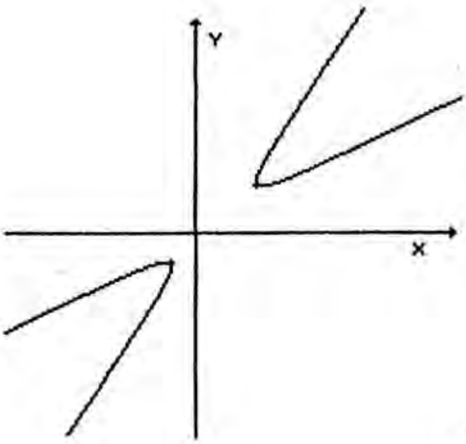
x	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
L(x)	-1.5	-2.5	-3.5	-4.5	-5.5	-6.5	-7.5
R(x)	0	1.2	1.9	2.4	3	3.5	4
L(x) + R(x)	-1.5	-1.3	-1.6	-2	-2.5	-3	-3.4
L(x) – R(x)	-1.5	-3.7	-5.3	-6.9	-8.5	-10	-11.5

3) A partir de los puntos A, B, C .... sobre el diámetro se llevan hacia arriba y hacia abajo los valores correspondientes de R(x) tomados de la tabla.
Así se obtienen las parejas de puntos (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2),...... de la curva.
Por construcción, las cuerdas $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$,...... etc, son bisecadas por el diámetro D_∞ en los puntos A, B, C, ...etc.



(Figura 218)

La gráfica de la hipérbola se muestra en la figura 219.

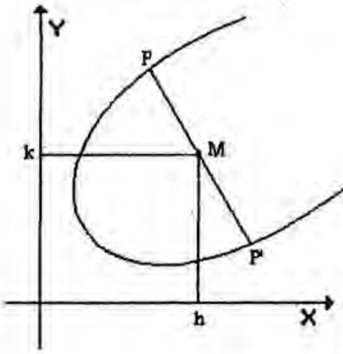


(Fig.218)

Ecuación del diámetro D_m

La ecuación del diametro de una curva de segundo orden se puede deducir de la ecuación de la curva cuando se conoce la pendiente m de las cuerdas que biseca.
El método que presentamos se basa en el hecho de que las coordenadas de los puntos que son simétricos respecto del origen son iguales en valor absoluto pero de signo contrario.

Sea $\overline{PP'}$ una cuerda con pendiente m y sea M(h, k) su punto medio. (Fig.220)



(Fig.220)

Al trasladar el origen a M la ecuación se transforma en

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + D_{x'}\, f(h,k)\cdot x' + D_{y'}\, f(h,k)\cdot y' + f(h,k) = 0 \qquad (1)$$

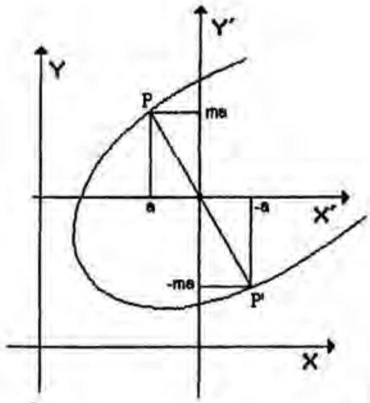
En relación con el nuevo sistema de ejes coordenados podemos resaltar dos hechos:

1') Los puntos P y P' están en la recta $y' = mx'$

2') El nuevo origen O' es el punto medio de la cuerda $\overline{PP'}$.

Se sigue de lo anterior que P y P' son simétricos respecto del nuevo origen y que sus coordenadas sólo difieren por el signo ; son digamos, (a, ma) y (-a, -ma) respectivamente.

Puesto que P y P' son puntos de la curva, sus coordenadas (a, ma) y (-a, -ma) satisfacen la ecuación (1). (Figura 221)



(Fig.221)

En consecuencia

$$Aa^2 + Bma^2 + Cm^2 a^2 + D_x \ f(h,k)\cdot a + mD_y \ f(h,k)\cdot a + f(h,k) = 0 \quad ....(2)$$

y

$$Aa^2 + Bma^2 + Cm^2 a^2 - D_x \ f(h,k)\cdot a - mD_y \ f(h,k)\cdot a + f(h,k) = 0 \quad ....(3)$$

Multiplicando la ecuación (3) por -1 y sumando miembro a miembro los términos de ambas igualdades se deduce que

$$D_x \ f(h,k) + mD_y \ f(h,k) = 0$$

y los puntos sobre el diámetro D_m satisfacen la ecuación

$$D_x \ f(x,y) + mD_y \ f(x,y) = 0 \quad ....(4)$$

La ecuación (4) es la ecuación del diámetro D_m correspondientes a las cuerdas con pendiente m, y representa una línea recta.

Teorema 1

Para todo $m \in R$, si C es un centro de simetría de $f(x, y) = 0$ entonces $C \in D_m$.
(Todos los diámetros pasan por el centro)

Teorema 2

Si dos diámetros de $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ se intersectan, entonces el punto de intersección es un centro de la curva.

De lo anterior se deducen los siguientes corolarios.

Corolario1. Si $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es una cónica central (es decir tal que $B^2 - 4AC \neq 0$) , entonces todos sus diámetros se intersectan en un solo punto que es, a su vez, el único centro de la curva.

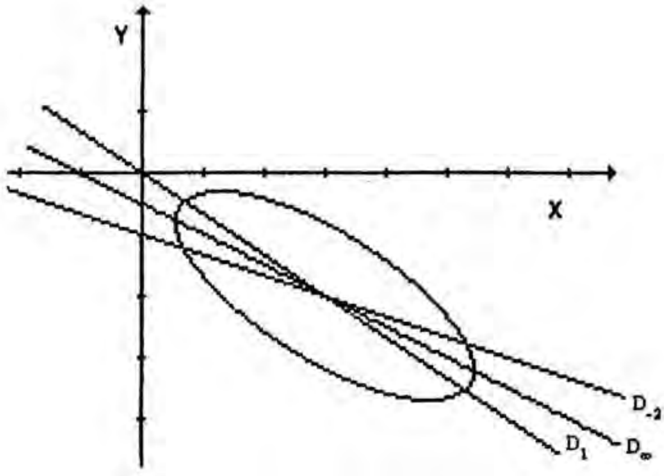
Corolario 2. Si $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es una cónica central y $m \neq n$ entonces D_m no es paralelo a D_n y por ende son distintos.

Corolario 3. Si $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es una parábola sin centro, entonces todos sus diámetros son paralelos y distintos entre sí.

Corolario 4. Si $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ es una parábola y tiene un centro, entonces todos los puntos de la línea $Bx + 2Cy + E = 0$ son centros de la curva y todos sus diámetros son iguales entre sí y coincidentes con dicha línea recta.
(es decir, $Bx + 2Cy + E = 0$ es D_m para toda $m \in R$.

Ejemplos.

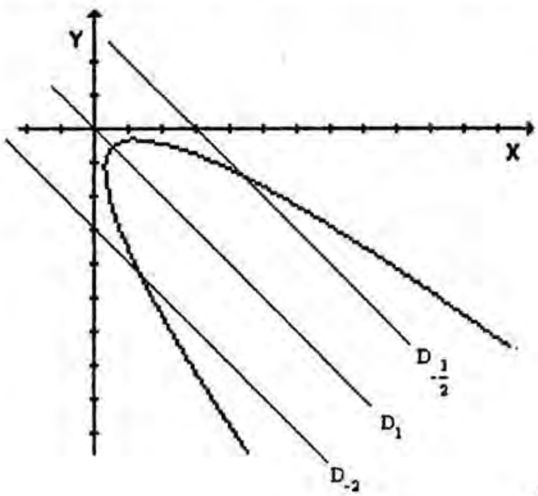
En la figura 222 se muestra la elipse cuya ecuación es $x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$ y tres de sus diámetros: D_∞ , D_1 , D_{-2}. Las tres diámetros son distintos entre sí y se intersectan en el centro de la curva.



(Fig.222)

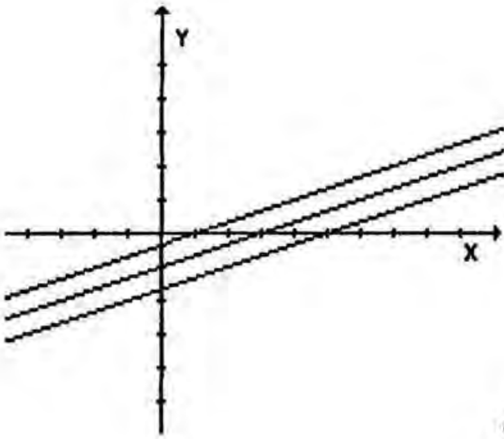
En la figura 223. Se muestra la parábola $x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$ y tres de sus diámetros : D_{-2}, D_1 y $D_{-\frac{1}{2}}$

Todos sus diámetros son paralelos y distintos entre si.



(Fig.223)

En la figura 224 , la parábola $x^2-6xy+9y^2-6x+18y+5=0$ está formada por las rectas $x-3y-1=0$ y $x-3y-5=0$. La línea de enmedio representa a la línea de los centros y a todos los diámetros de la curva. Sea $m \in R$. La ecuación del diámetro D_m es $2x-6y-6+m(-6x+18y+18)=0$ cuya ecuación es la línea $x-3y-3=0$.



(Fig.224)

Ejes de simetría.

Desarrollando la ecuación D_m tenemos

$$D_m : D_x f(x, y) + D_y f(x, y) = 2Ax + By + D + m (Bx + 2Cy + E)$$

$$= (2A + Bm) x + (B + 2Cm) y + D + Em = 0$$

Si $B + 2Cm \neq 0$ podemos despejar y obtener

$$y = -\frac{2A + Bm}{B + 2Cm}x - \frac{D + Em}{B + 2Cm}$$

y la pendiente de D_m es $m' = -\dfrac{2A + Bm}{B + 2Cm}$ de donde

$$B(m + m') + 2Cmm' + 2A = 0 \quad \text{.......(1)}$$

La ecuación anterior relaciona la pendiente m de las cuerdas con la pendiente m' de su diámetro y es simétrica para m y m' (es decir si se intercambian m y m' la ecuación es la misma). Se dice en este caso que m y m' son *direcciones conjugadas*.

Lo anterior significa lo siguiente, si las cuerdas con dirección m tienen diámetro con pendiente m', entonces las cuerdas con pendiente m' tienen diámetro con pendiente m.

Supongamos que el diámetro es el eje de simetría.

En tal caso

$$m' = -\frac{1}{m}$$

para determinar el valor de m sustituimos en la ecuación (1) m' por $-\dfrac{1}{m}$

$$B\left(m - \frac{1}{m}\right) + 2Cm\left(\frac{1}{m}\right) + 2A = 0$$

$$Bm - \frac{B}{m} - 2C + 2A = 0 \quad ....(2)$$

Si $B = 0$ la ecuación (2) se convierte en $A - C = 0$ que sólo se cumple cuando la curva es una circunferencia ($A = C$ y $B = 0$).

En este caso todo diámetro es un eje de simetría.

Si $B \neq 0$ entonces multiplicamos (2) por m y obtenemos

$$Bm^2 + 2(A - C)\,m - B = 0 \quad ....(3)$$

y resulta que la pendiente del eje y la pendiente de las cuerdas que éste bisecta son raíces de la ecuación (3).

Resolviendo (3) tenemos

$$m_{1,2} = \frac{C - A \pm \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{B}$$

Como $(A - C)^2 + B^2 > 0$ las raíces m_1 y m_2 son reales y distintas entre sí.

Observación:

Si $f(x, y) = 0$ es una cónica central, entonces tiene dos ejes perpendiculares entre sí.

Ejemplos.

La figura 225 representa a la elipse $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 4x + 8y - 80 = 0$ con centro en $C(-3, -2)$. La gráfica incluye algunas cuerdas con pendiente $m = 4$ y el diámetro correspondiente (la recta $-x + 3y + 3 = 0$).

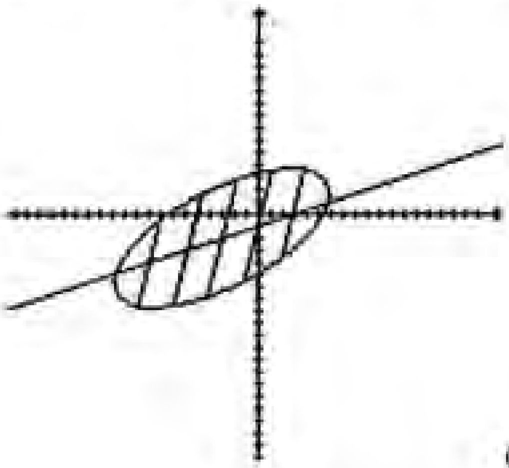
En la figura 226 se grafican algunas cuerdas con pendiente $n = \frac{1}{3}$ y el diámetro correspondiente (la recta $4x - y + 10 = 0$).

En la figura 227 se superponen las figuras 225 y 226 poniéndose de manifiesto que las direcciones m y n son conjugadas.

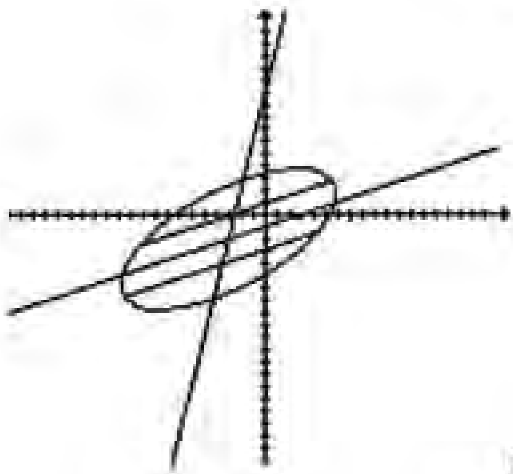
En la figura 228 se grafican los ejes de simetría de la curva; formados por las rectas

$L_1 : 2x + y + 8 = 0$ y $L_2 : x - 2y - 1 = 0$

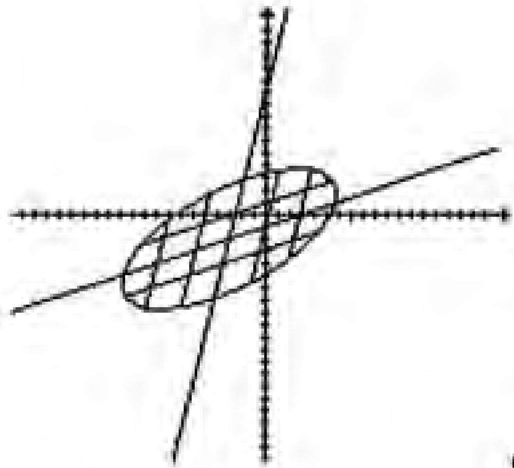
Como diámetros que son, los ejes se intersectan en el centro de la elipse.



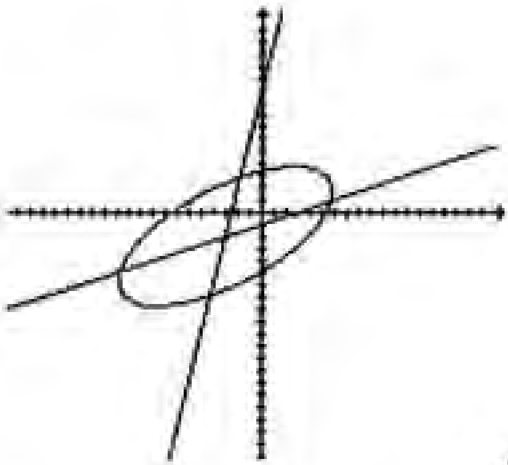
(Fig.225)



(Fig.226)



(Fig.227)



(Fig.228)

En el caso de la parábola sabemos que todos los diámetros son paralelos entre sí, por lo cual una de las raíces de la ecuación (3) será la pendiente de las cuerdas y la otra la del eje.

Como $B^2 - 4AC = 0$, tenemos que $B^2 = 4AC$

Desarrollando $(A-C)^2+B^2$ de (#)

$$\begin{aligned}(A-C)^2+B^2 &= A^2-2AC+C^2+B^2\\ &= A^2-2AC+C^2+4AC\\ &= A^2+2AC+C^2 = (A+C)^2\end{aligned}$$

por lo tanto (#) se transforma en

$$m_{1,2} = \frac{(C-A) \pm A+C}{B}$$

de modo que las raíces de la ecuación (3) son

$$m_1 = -\frac{2A}{B} \qquad y \qquad m_2 = \frac{2C}{B}$$

¿ Cual será la pendiente del eje y cuál la pendiente de las cuerdas?

Recordemos que en el caso de cualquier parábola, $B \neq 0 \Rightarrow C \neq 0$
(Ya que $B^2 = 4AC$)

Por otro lado la pendiente del diámetro D_∞ de las cuerdas verticales es $\left(-\frac{B}{2C}\right)$
(debido a que $D_\infty = D_y f : Bx + 2Cy + E = 0$)

Dado que todos los diámetros son paralelos entre sí y el eje de simetría es uno de ellos, concluimos que su pendiente es igual a $-\frac{B}{2C}$. Por lo tanto, m_2 será la pendiente de las cuerdas y m_1 la pendiente del eje de simetría de la curva.

Además, sabemos que $-\frac{2A}{B} = -\frac{B}{2C}$, pues

$$\begin{aligned}-\frac{2A}{B} = -\frac{B}{2C} &\Leftrightarrow -4AC = B^2\\ &\Leftrightarrow B^2 = 4AC\end{aligned}$$

y esto se cumple en el caso de la parábola.

En resumen:

1) Las raíces m_1 y m_2 de la ecuación (#) son reales y distintas entre sí.

2) En cualquier ecuación de segundo grado hay al menos un eje de simetría, y dos a lo más.

Esto depende del genero de la curva:
Para la parábola hay un único eje de simetría (debido a que todos sus diámetros son paralelos).

Para la elipse y la hipérbola hay dos ejes de simetría (dado que sus diámetros están en cualquier dirección) que son perpendiculares entre sí.

De la ecuación (#) se deriva un criterio para que el eje o los ejes sean verticales u horizontales.

De (#) se tiene

$$\boxed{m}\boxed{=}\boxed{0} \quad \boxed{\Leftrightarrow} \quad \boxed{C - A + \sqrt{(A - C)^2 + B^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (C - A)^2 = \quad (A - C)^2 + B^2$$

$$\Leftrightarrow \quad B = 0$$

De lo anterior tenemos las siguientes conclusiones

1) $B \neq 0 \Rightarrow$ ningún eje de simetría es vertical u horizontal.

2) Si f (x, y) = 0 es una cónica central, entonces sus ejes son paralelos a los ejes coordenados $\Leftrightarrow B = 0$

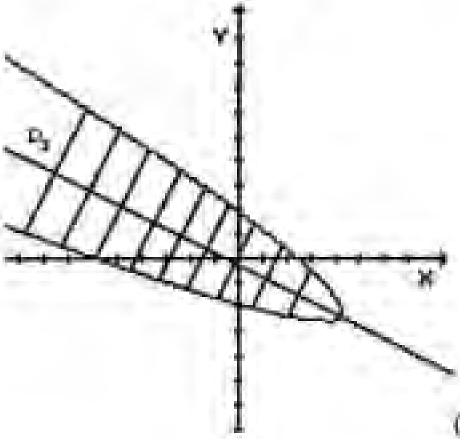
3) Si f (x, y) = 0 es una parábola, entonces su eje de simetría es paralelo a alguno de los ejes coordenados $\Leftrightarrow B = 0$

Concluimos que para eliminar el término mixto Bxy de la ecuación de una cónica es suficiente con efectuar una rotación que haga paralelos los ejes coordenados a los ejes de simetría de la curva.

Ejemplos

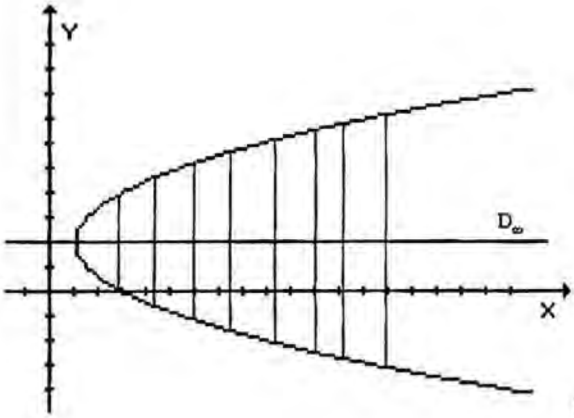
En la figura 229 se presenta la parábola con ecuación $x^2+4xy+4y^2+4x+y-15=0$
Como $B\neq 0$, el eje de la curva no es ni vertical ni horizontal.
En este caso el eje tiene pendiente $-\dfrac{B}{2C}=-\dfrac{1}{2}$ y biseca a las cuerdas con pendiente $m=2$.

La ecuación del eje es $x+2y+\dfrac{3}{5}=0$



(Fig.229)

Figura 230. Parábola con ecuación $y^2-2x-4y+6=0$
Como $B=0$, el eje de simetría de la curva es paralelo a alguno de los ejes coordenados.
Como $A=0$, en este caso el eje es paralelo al eje X y es la recta $y=2$.
(nótese que el eje de simetría de una parábola horizontal es la línea $2Cy+E=0$)



(Fig.230)

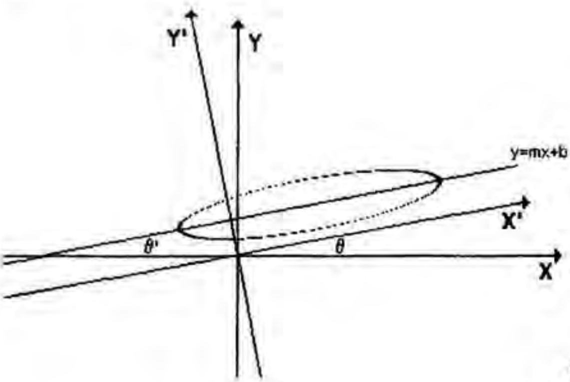
Rotación.

Veremos enseguida un procedimiento que permite rotar los ejes coordenados de modo que se hagan paralelos a los ejes de simetría de una curva **C**.

Sea y = mx + b la ecuación del eje de simetría de C. Sean X'Y' los nuevos ejes coordenados, y sea θ el ángulo de la rotación.

Las formulas que expresan a x, y en términos de x', y' son

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$$
$$y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$$



(Fig.231)

Las fórmulas de rotación están determinadas cuando conocemos los valores de $sen\theta$ y $\cos\theta$.

Para el caso que nos ocupa la pendiente m del eje de simetría es la tangente del ángulo de rotación, ya que $\theta = \theta'$ donde θ' es el ángulo de inclinación del eje de simetría.

Por lo tanto $m = \tan\theta$

es decir $m = \dfrac{sen\theta}{\cos\theta}$ ...... (1)

Por otra parte $\cos^2\theta + sen^2\theta = 1$ ...... (2)

De (1) tenemos

$sen\theta = m \cdot \cos\theta$ sustituyendo en (2) $\cos^2\theta + m^2 \cdot \cos^2\theta = 1$ de lo cual

$\cos\theta = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{m^2+1}}$ .... (3)

Análogamente para $sen\theta$ tenemos

De (1)

$\cos\theta = \dfrac{sen\theta}{m}$

y sustituyendo en (2) obtenemos

$sen\theta = \dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}$ .... (4)

(3) y (4) expresan a $sen\theta$ y $\cos\theta$ en términos de la pendiente del eje de simetría.

Podemos entonces conocer el valor de $sen\theta$ y $\cos\theta$ sin necesidad de saber cuál es el valor del ángulo θ.

Nota: El signo positivo en (3) corresponde a una rotación con ángulo $\theta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Invariantes

La magnitud $B^2 - 4AC$ es muy importante en la clasificación de las curvas de segundo orden, pues indica el género al que cada una de ellas pertenece.
Es de esperarse que al rotar los ejes coordenados, dicha magnitud no varíe o cambie de signo. Esta afirmación tiene como base la idea de que el género de una curva no depende del sistema de referencia.
Para comprobar lo anterior, examinemos cómo cambia la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ cuando se efectúa una rotación.

Sustituyendo las ecuaciones de rotación

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \qquad y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$$

en $f(x, y) = 0$ tenemos

$$A\cdot(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)^2 + B\cdot(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)\cdot(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) + C\cdot(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta)^2 + D\cdot(x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta)$$
$$+ E\cdot(x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta) + F = 0$$

$$\left(A\cos\theta^2 + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}\theta^2\right)\cdot x'^2 + \left[2\cdot(C - A)\cdot\operatorname{sen}\theta\cos\theta + B\cdot\left(\cos\theta^2 - \operatorname{sen}\theta^2\right)\right]\cdot x'y'$$
$$+ \left(A\operatorname{sen}\theta^2 - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos\theta^2\right)\cdot y'^2 + (D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta)\cdot x' + (-D\operatorname{sen}\theta + E\cos\theta)\cdot y' + F = 0$$

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

En consecuencia

$$A' = A\cos\theta^2 + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}\theta^2$$
$$B' = B\cos 2\theta + (C - A)\cdot\operatorname{sen}2\theta$$
$$C' = A\operatorname{sen}\theta^2 - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos\theta^2$$
$$D' = D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta$$
$$E' = -D\operatorname{sen}\theta + E\cos\theta$$
$$F' = F$$

Como sabemos hay una rotación R con ángulo θ con la propiedad de que $B' = 0$.
Su rotación inversa R^{-1} tiene ángulo $\alpha = -\theta$.

Cónicas Centrales.

Si $f(x, y) = 0$ es una cónica central, entonces su ecuación se transforma sucesivamente en

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = F'$ .... (traslación de O al centro de la curva)

$A'x'^2 + C'y'^2 = F'$ (rotación que hace $B' = 0$)

Como $B^2 - 4AC \neq 0$ y el indicador es invariante bajo rotaciones, $A', C' \neq 0$.
Se sigue de lo anterior que los coeficientes A' , C' son distintos de cero.

Se tiene con ello cinco casos fundamentales

1) $A' > 0$, $C' > 0$ y $F' > 0$

2) $A' > 0$, $C' > 0$ y $F' = 0$

3) $A' > 0$, $C' > 0$ y $F' < 0$

4) $A' > 0$, $C' < 0$ y $F' > 0$

5) $A' > 0$, $C' < 0$ y $F' = 0$

Nota: Cada una de las combinaciones que faltan se reduce a alguno de estos casos cambiando los signos de la ecuación.

Estos resultados se pueden reunir en una tabla como sigue:

Caso	Genero	Especie	Ec. Canónica
$A' > 0$, $C' > 0$ y $F' > 0$	ELIPSE	Elipse real	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
$A' > 0$, $C' > 0$ y $F' = 0$		Elipse evanescente (un punto)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
$A' > 0$, $C' > 0$ y $F' < 0$		Elipse imaginaria	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
$A' > 0$, $C' < 0$ y $F' > 0$	HIPÉRBOLA	Hipérbola real	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$A' > 0$, $C' < 0$ y $F' = 0$		Hipérbola degenerada	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

La parábola : cónicas no centrales.

En el caso de la parábola no siempre se pueden eliminar los términos de primer grado de la ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ mediante una traslación.

Esto sólo es posible cuando la curva tiene una infinidad de centros. No obstante, sabemos que hay una rotación R que hace paralelo al eje de las abscisas con el eje de simetría de la curva. En tal caso se tiene que $B' = 0$ y, por invarianza del indicador, que $A' = 0$.
La ecuación se reduce (omitiendo las primas de los coeficientes y de las variables por comodidad) a

$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ .... (a)

Se tienen ahora dos casos fundamentales

1) $D = 0$

2) $D \neq 0$ (como ya lo hemos analizado en el capitulo VIII)

1) $D = 0$ la ecuación (a) se reduce a $Cy^2 + Ey + F = 0$.

Resolviendo la ecuación se tiene que

$$y_1 = \frac{-E + \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C} \qquad y_2 = \frac{-E - \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C}$$

La ecuación $Cy^2 + Ey + F = 0$ representa a las rectas $y = y_1$ y $y = y_2$

que son distintas ($E^2 - 4CF > 0$) coincidentes ($E^2 - 4CF = 0$) o imaginarias

($E^2 - 4CF < 0$).

Si $D \neq 0$, del análisis de la ecuación (a) se concluyen dos cosas:

1') Si $E = 0$, entonces la curva es simétrica respecto del eje X.

2') Si $F = 0$, entonces la curva incide con el origen.

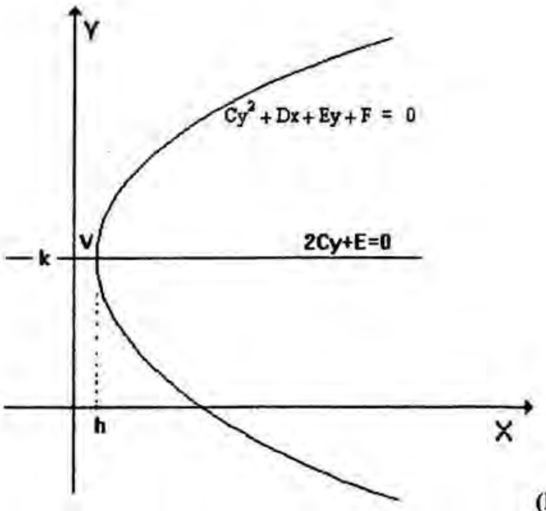
De lo anterior se sigue que la ecuación (a) se reduce a $Cy^2 + Dx = 0$ cuando el origen es el punto de intersección de la curva con su eje de simetría. (es decir, el vértice de la parábola).

Para determinar dicho punto se resuelve el sistema de ecuaciones

$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$; $2Cy + E = 0$ (ecuación del eje)

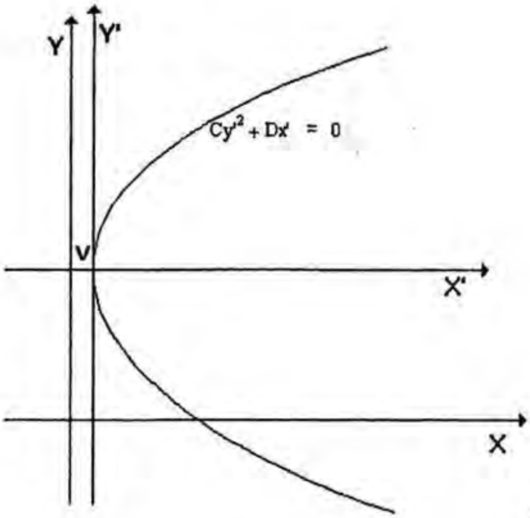
Que tiene como ecuación única a la pareja.

$$h = \frac{E^2 - 4 \cdot C \cdot F}{4CD} \quad ; \quad k = -\frac{E}{2C}$$



(Fig.232)

Con la traslación $x = x' + h$; $y = y' + k$ la ecuación (a) se transforma en
$Cy'^2 + Dx' = 0$ .... (b)
que es la ecuación de la parábola (es decir, la ecuación canónica se encuentra eliminando el término $Ey + F$ en la ecuación (a)).



(Fig.233)

Estos resultados se pueden reunir en una tabla como sigue:

Cónicas no Centrales.

Caso	Género	Especie	Ec. canónica
$D = 0$ y $E^2 - 4 \cdot C \cdot F > 0$	P A	Parábola degenerada (dos rectas paralelas)	$y^2 = a^2$
$D = 0$ y $E^2 - 4 \cdot C \cdot F = 0$	R Á	Parábola degenerada (dos rectas coincidentes)	$y^2 = 0$
$D = 0$ y $E^2 - 4 \cdot C \cdot F < 0$	B O	Parábola imaginaria (ningun lugar geométrico)	$y^2 = -a^2$
$D \neq 0$	L A	Parábola real	$y^2 = 4px$

Todos estos coeficientes se refieren a la ecuación reducida que se obtiene al eliminar el término mixto mediante una rotación de los ejes coordenados.

9.2 Análisis de la ecuación de segundo grado en tres variables desde un punto de vista geométrico.

Como hemos visto, las simetrías de una superficie dependen de su ecuación.
En particular se tiene el siguiente criterio de simetría respecto del origen para las superficies de segundo orden.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

es simétrica respecto al origen $O \Leftrightarrow G = H = I = 0$

Centros de simetría.

Sea $f(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$ una superficie de segundo orden. El criterio anterior da lugar a un procedimiento para determinar los centros de simetría de la superficie $f(x, y, z) = 0$.

Dicho procedimiento consiste en determinar los puntos $Q(h, k, l)$ con la propiedad de que al trasladar el origen a Q se obtiene una nueva ecuación

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 + D'xy + E'xz + F'yz + G'x + H'y + I'z + J' = 0$$

en la que $G' = H' = I' = 0$

Veamos cómo cambia la ecuación de una superficie bajo una traslación.

Sean X',Y',Z' los nuevos ejes coordenados después de la traslación. La traslación que lleva el origen a Q es

$$x = x' + h \qquad y = y' + k \qquad z = z' + l$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación $f(x, y, z) = 0$ tenemos

$$A\cdot(x' + h)^2 + B\cdot(y' + k)^2 + C\cdot(z' + l)^2 + D(x' + h)\cdot(y' + k) + E(x' + h)\cdot(z' + l) + F(y' + k)\cdot(z' + l) +$$
$$+ G(x' + h) + H(y' + k) + I(z' + l) + J = 0$$

Desarrollando los binomios y factorizando obtenemos

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + Dx'y' + Ex'z' + Fy'z' + (2Ah + Dk + El + G)\cdot x' + (2Bk + Dh + Fl + H)\cdot y' + (2Cl + Eh + Fk + I)\cdot z' + Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + Dhk + Ehl + Fkl + Gh + Hk + Il + J = 0$$

La cual la podemos expresar como

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + D'x'y' + E'x'z' + F'y'z' + G'x' + H'y' + I'z' + J' = 0$$

donde

$$\begin{array}{lll} A = A' & D = D' & G' = 2Ah + Dk + El + G \\ B = B' & E = E' & H' = 2Bk + Dh + Fl + H \\ C = C' & F = F' & I' = 2Cl + Eh + Fk + I \end{array}$$

$$J' = Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + Dhk + Ehl + Fkl + Gh + Hk + Il + J$$

Haciendo uso de la notación para las derivadas parciales del calculo diferencial podemos escribir.

$$\begin{array}{llll} A = A' & D = D' & G' = D_x f(h,k,l) & \\ B = B' & E = E' & H' = D_y f(h,k,l) & J' = f(h,k,l) \\ C = C' & F = F' & I' = D_z f(h,k,l) & \end{array}$$

De lo anterior podemos deducir lo siguiente

i) Los coeficientes de los términos de segundo grado no se alteran bajo una traslación.

ii) Los coeficientes de los términos de primer grado son las derivadas parciales de f(x, y, z) evaluadas en las coordenadas de Q

iii) El término independiente es el valor de la función f(x, y, z) en las coordenadas de Q

Teorema.

Q (h, k, l) es un centro de simetría de la superficie con ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2Ah + Dk + El + G &= 0 \\ 2Bk + Dh + Fl + H &= 0 \\ 2Cl + Eh + Fk + I &= 0 \end{aligned}$$

Demostración.

$\Rightarrow$ Supongamos que Q es un centro de simetría de la superficie.

Al trasladar el origen a Q se tiene un nuevo sistema de ejes coordenados X',Y', Z', en el que el origen O' es centro de simetría de

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + D'x'y' + E'x'z' + F'y'z' + G'x' + H'y' + I'z' + J' = 0$$

Esto significa que $G' = H' = I' = 0$

Como sabemos

$$G' = 2Ah + Dk + El + G \;,\; H' = 2Bk + Dh + Fl + H \;,\; I' = 2Cl + Eh + Fk + I$$

con lo cual se demuestra lo que se quería.

$\Leftarrow$ Supongamos que

$$G' = 2Ah + Dk + El + G = 0 \;,\; H' = 2Bk + Dh + Fl + H = 0 \quad y \quad I' = 2Cl + Eh + Fk + I = 0$$

Dado que la ecuación de la superficie referida al sistema X',Y', Z' es

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + D'x'y' + E'x'z' + F'y'z' + G'x' + H'y' + I'z' + J' = 0$$

de lo anterior se sigue que en este caso la ecuación se reduce a

$$A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 + D'x'y' + E'x'z' + F'y'z' + J' = 0$$

y el punto Q = O' es un centro de simetría de la curva con ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

Colorario 1.

Los centros de simetría de la superficie
$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$
se determinan resolviendo el sistema

$$\begin{aligned} 2Ah + Dk + El + G &= 0 \\ 2Bk + Dh + Fl + H &= 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 2Cl + Eh + Fk + I &= 0 \end{aligned}$$

cuyo determinante es $\begin{vmatrix} 2A & D & E \\ D & 2B & F \\ E & F & 2C \end{vmatrix}$

Corolario 2

La superficie con ecuación $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$
tiene un único centro de simetría si

el determinante $\begin{vmatrix} 2A & D & E \\ D & 2B & F \\ E & F & 2C \end{vmatrix} = 8ABC + 2DEF - 2\cdot\left(AF^2 + BE^2 + CD^2\right)$

es distinto de cero

Nótese que el determinante anterior se obtiene del sistema de ecuaciones que resulta al derivar el primer miembro de la ecuación de la superficie en relación a cada una de sus variables e igualando a cero :

$$D_x f = 0 \quad ; \quad D_y f = 0 \quad ; \quad D_z f = 0$$

A las superficies con un único centro de simetría se les llama superficies centrales. De acuerdo al corolario 2 una superficie es central si
$8ABC + 2DEF - 2\cdot\left(AF^2 + BE^2 + CD^2\right) \neq 0$

Como ya hemos visto, un cono es una superficie formada por todas las rectas que inciden en un punto fijo (vértice) y una curva dada (directriz). En los llamados conos circulares, la directriz es una circunferencia.

La ecuación de una superficie central (e.d. con un único centro de simetría) puede ser llevada a la forma.

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 + D'xy + E'xz + F'yz + J' = 0$$

Si $J' = 0$; la superficie es un cono con vértice en O' y tiene como ecuación

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 + D'xy + E'xz + F'yz = 0$$

Demostraremos en seguida que la superficie contiene a todas las rectas que inciden con el origen O' y una curva dada.

A excepción de las rectas horizontales, las ecuaciones parametricas de cualquier recta que pase por O se puede escribir en la forma $x = at$; $y = bt$; $z = t$ con $t \in R$.*

Sustituyendo en (2) se tiene:

$$\boxed{A'(at)^2 + B'(bt)^2 + C't^2 + D'(at)\cdot(bt) + E'(at)\cdot(t) + F(bt)\cdot t} = 0$$

factorizando

$$t^2\cdot\left(A'a^2 + B'b^2 + C' + D'ab + E'a + F'b\right) = 0 \quad ....(3)$$

Esta igualdad se cumple para todos los valores de $t \neq 0$

Por lo tanto

$$A'a^2 + B'b^2 + C' + D'ab + E'a + F'b = 0 \quad ....(4)$$

De donde P(a, b) está en la curva

$$A'x^2 + By^2 + Dxy + Ex + Fy + C' = 0$$

---

* es preferible escribir la ecuación de la recta en la forma $x = at$, $y = bt$, $z = t$ que en la forma $x = at$; $y = bt$; $z = ct$ donde habría que enfrentar dos casos : $c = 0$ y $c \neq 0$

Si $c \neq 0$ siembre se puede cambiar a, b, c por $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1$

El caso $c = 0$ no se aplica a lo que estamos haciendo, pues se trata de una recta que no es horizontal.

Esta curva es una directriz del cono ubicada en el plano $z = 1$

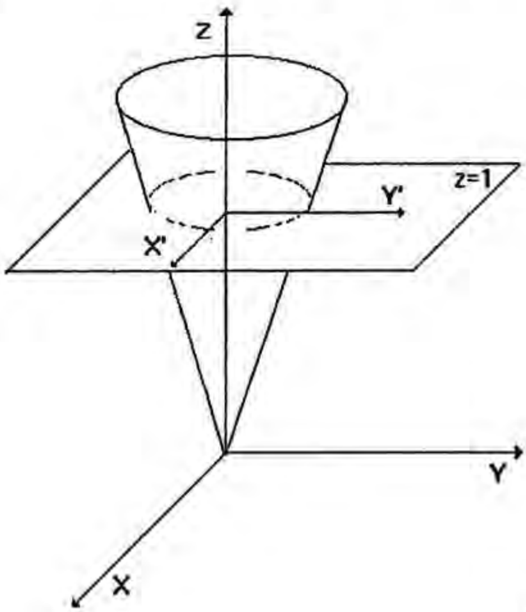
En efecto si P(a, b) está en la curva , entonces (a, b, 1) satisface la ecuación (4) y la recta $x = at$, $y = bt$, $z = t$ esta contenida en la superficie con ecuación (2).

Concluimos entonces que la ecuación (2) es el cono formado por aquellas rectas que pasan por O y cuyos coeficientes angulares satisfacen las ecuaciones

$$c = 1 \; ; \quad A'a^2 + B'b^2 + D'ab + E'a + F'b + C' = 0$$

(Fig.234)

Cuando $F \neq 0$, el cono es asintótico a la superficie y cada uno de sus generatrices la intersecta en dos puntos al infinito.



(Fig.234)

Ejemplo.

Sea la superficie con ecuación

$$\boxed{x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 6xy + 4xz + 2yz - 26x - 24y - 32z + 85} = 0$$

Su centro de simetría es $Q(1, 2, 3)$. Dado que

$$F' = 1^2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 3^2 + 6\cdot(1)\cdot(2) + 4\cdot(1)\cdot(3) + 2\cdot(2)\cdot(3) - 26\cdot(1) - 24\cdot(2) - 32\cdot(3) + 85 = 0$$

la nueva ecuación es

$$x'^2 + 3y'^2 + 4z'^2 + 6x'y' + 4x'z' + 2y'z' = 0$$

Haciendo $z' = 1$ y sustituyendo resulta la ecuación

$$x'^2 + 6x'y' + 3y'^2 + 4x' + 2y' + 4 = 0$$

la cual representa una hipérbola. Esta curva es una directriz.

Dada una superficie S y una dirección $u = (a, b, c)$ llamaremos diámetro o superficie diametral en la dirección $\bar{u}$ a la superficie formada por los puntos medios de las cuerdas de S paralelas a $\bar{u}$.

Si S es de orden m, sus diámetros serán de orden $\dfrac{m\cdot(m-1)}{2}$

Ecuación general de los diámetros de las superficies de segundo orden.

Sea Q (h, k, l) el punto medio de una cuerda en la dirección (a, b, c).
Trasladando el origen a Q la ecuación se transforma en

$$(5)\quad Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 + Dx'y' + Ex'z' + Fy'z' + D_x f(h,k,l)\cdot x' + D_y f(h,k,l)\cdot y' + D_z f(h,k,l)\cdot z' + J' = 0$$

Dado que la cuerda esta bisectada por O' , hay un número real t tal que los extremos de la cuerda son los puntos P (at, bt, ct) y R (-at, -bt, -ct).

Sustituyendo las coordenadas de P y Q en (5) tenemos , para P

$$(6)\quad t^2 (Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dab + Eac + Fbc) + t (a D_x f(h, k, l) + b D_y f(h, k, l) + c D_z f(h, k, l)$$

$$+ f(h, k, l) = 0$$

y para R

$$(7)\quad t^2 (Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dab + Eac + Fbc) - t (a D_x f(h, k, l) + b D_y f(h, k, l) + c D_z f(h, k, l)$$

$$+ f(h, k, l) = 0$$

Restando (6) y (7) , y dividiendo por 2 se tiene

$$(8)\ a D_x f(h, k, l) + b D_y f(h, k, l) + c D_z f(h, k, l) = 0$$

$\therefore$ las coordenadas (h, k, l) de Q satisfacen la ecuación
$a D_x f(x, y, z) + b D_y f(x, y, z) + c D_z f(x, y, z) = 0$ ....(9) y todos los puntos medios de las cuerdas están en el diámetro,

Se dice entonces que la superficie (9) es el plano diametral conjugado a $\bar{u}$.

Planos diametrales conjugados a los ejes.

De (8) se sigue que el diámetro correspondiente a la dirección (1,0, 0) (Eje X) es:
$D_x f(x, y, z) = 0$

Análogamente los diámetros correspondientes a las direcciones (0, 1, 0) y (0, 0, 1) son respectivamente,

$D_y f(x, y, z) = 0$ y $D_z f(x, y, z) = 0$

los planos diametrales conjugados a los ejes aparecen de un modo natural al resolver la ecuación (1) para x, y, z cuando $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ respectivamente.

Por ejemplo, cuando $A \neq 0$ se tiene, resolviendo para x, lo siguiente:

$$x = \frac{Dy + Ez + G}{2A} \pm \frac{\sqrt{V(y, z)}}{2A}$$

donde

$$V(y, z) = (Dy + Ez + G)^2 - 4(A)\left(By^2 + Cz^2 + Fyz + Hy + Iz + J\right)$$

y de $x = \frac{Dy + Ez + G}{2A} \pm \frac{\sqrt{V(y, z)}}{2A}$ se sigue que

$$x = -\frac{Dy + Ez + G}{2A}$$

despejando tenemos el plano $2Ax + Dy + Ez + G = 0$

nótese que $2Ax + Dy + Ez + G = D_x f(x, y, z)$.

Por lo tanto, el plano biseca las cuerdas paralelas a X.

En símbolos: D_u y D_v son diámetros conjugados $\Leftrightarrow u \parallel D_v$ y $v \parallel D_u$

Centros y planos diametrales.

Teorema.
Si Q es un centro de simetría de f(x, y, z) y D es un diámetro, P incide en D.

Demostración.

Los centros de simetría de la superficie se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones $D_x f = 0$, $D_y f = 0$, $D_z f = 0$. Estas ecuaciones representan tres planos de simetría cuya intersección pasa o consiste en el punto Q. Dado que Q (h, k, l) es un centro de simetría, entonces $D_x f(h, k, l) = D_y f(h, k, l) = D_z f(h, k, l) = 0$ y las coordenadas de Q satisfacen la ecuación (8) para todos los vectores (a, b, c). ∴ Si D es un diámetro, entonces D incide con Q.

Sean $u = (a_1, b_1, c_1)$, $v = (a_2, b_2, c_2)$, y $w = (a_3, b_3, c_3)$ tres vectores.

Los puntos de intersección de D_u, D_v, D_w se determinan resolviendo el sistema de ecuaciones

$$a_1 \cdot D_x f(x,y,z) + b_1 \cdot D_y f(x,y,z) + c_1 \cdot D_z f(x,y,z) = 0$$

$$a_2 \cdot D_x f(x,y,z) + b_2 \cdot D_y f(x,y,z) + c_2 \cdot D_z f(x,y,z) = 0$$

$$a_3 \cdot D_x f(x,y,z) + b_3 \cdot D_y f(x,y,z) + c_3 \cdot D_z f(x,y,z) = 0$$

Para x, y, z.

Escribimos el sistema anterior como sigue:

$$a_1 f_x + b_1 f_y + c_1 f_z = 0$$

$$a_2 f_x + b_2 f_y + c_2 f_z = 0$$

$$a_3 f_x + b_3 f_y + c_3 f_z = 0$$

Sea h, k, l una solución. Los números $f_x(h, k, l)$, $f_y(h, k, l)$, $f_z(h, k, l)$ a su vez son solución del sistema homogéneo de ecuaciones.

$$a_1 r + b_1 s + c_1 t = 0$$
$$a_2 r + b_2 s + c_2 t = 0 \qquad ...(9)$$
$$a_3 r + b_3 s + c_3 t = 0$$

Como sabemos, $(0,0,0)$ es una solución de (9). Además, sabemos que (9) tiene una única solución $\Leftrightarrow$ su determinante Δ es distinto de cero.

En consecuencia, $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ la única solución de (9) es la solución trivial.

Por lo tanto, si $\Delta \neq 0$, lo únicos puntos de intersección de D_u, D_v, D_w son aquellos cuyas coordenadas anulan las derivadas parciales de f, es decir, aquellos puntos $Q(h, k, l)$ tales que $f_x(h, k, l) = 0$, $f_y(h, k, l) = 0$, $f_z(h, k, l) = 0$.

Como sabemos, $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow O, P(a_1, b_1, c_1), R(a_2, b_2, c_2), S(a_3, b_3, c_3)$ no son coplanares $\Leftrightarrow$ el paralelepípedo con aristas u, v, w tiene un volumen distinto de cero
$\Leftrightarrow [u, v, w] = u \cdot (v \times w) = (u \times v) \cdot w \neq 0$

Si tres diámetros se intersectan en un solo punto, su intersección es un centro de simetría.

Es erróneo suponer que la intersección de dos diámetros cualesquiera es un centro de simetría cosa que si sucede.

Ahora nos preguntamos si todos los puntos en la intersección de tres diámetros (planos) cualesquiera son centros de simetrías.

Veamos el caso en que la tercera dirección es una combinación lineal de las otras dos.

Contraejemplo:

$$x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6xy + 4xz + 2yz = 0$$

Consideremos las direcciones $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ y $u = (1, 1, 0)$ que son linealmente dependientes.

f_x : $2x + 6y + 4z$ $\qquad$ D_i : $x + 3y + 2z = 0$

f_y : $6x + 6y + 2z$ $\qquad$ D_j : $3x + 3y + z = 0$

f_z : $4x + 2y + 8z$ $\qquad$ D_u : $4x + 6y + 3z = 0$

$D_1 \cap D_2 \cap D_3$ es la recta

$$x + 3y + 2z = 0$$
$$3x + 3y + z = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones para x, y :

$$x = \frac{1}{2}z \quad ; \quad y = \frac{5}{6}z \quad ; \quad z = a$$

Obviamente, no todos los puntos de esta línea recta son centros de simetría del cono. Por tanto, la intersección de dos diámetros no necesariamente consiste de centros de simetría.

Teorema.
Sean u, v, w tres direcciones independientes entre sí. Un punto P pertenece a la intersección de diámetros $D_u \cap D_v \cap D_w \Leftrightarrow$ P es centro de simetría de la superficie.

Si f(x, y, z) = 0 tiene una infinidad de centros de simetría , sus diámetros forman un haz de planos cuya intersección es la línea de los centros o coinciden entre sí formando un plano de centros.

Si f(x, y, z) = 0 no tiene centro de simetría, sus diámetros son paralelos a una recta fija o incluso paralelos entre sí.

Planos Principales.

Tres planos diametrales son conjugados cuando son conjugados entre si tomados de dos en dos.

Un plano es principal cuando es perpendicular a su dirección a su dirección conjugada. En otras palabras, D_u es principal $\Leftrightarrow$ $u \perp D_u$

Si los tres planos coordenados son principales, la ecuación no tiene términos impares ni en x ni en y , ni en z (en ninguna variable)

Un plano principal es similar a un eje de simetría en el plano, pudiéndosele llamar plano de simetría.

El diámetro correspondiente a la dirección u = (a, b, c) tiene por ecuación

$$a\cdot f_x + b\cdot f_y + c\cdot f_z = a\cdot(2Ax + Dy + Ez + G) + b\cdot(Dx + 2By + Fz + H) + c\cdot(Ex + Fy + 2Cz + I) = 0$$

$$= (2Aa + Db + Ec)\cdot x + (Da + 2Bb + Fc)\cdot y + (Ea + Fb + 2Cc)\cdot z + Ga + Hb + Ic = 0 \quad ...(\#)$$

Una condición necesaria y suficiente para que el plano sea principal es la siguiente

$$(2Aa + Db + Ec, Da + 2Bb + Fc, Ea + Fb + 2Cc) \parallel (a, b, c)$$

(pues el primero de estos vectores es, por definición, perpendicular al plano (#))

para lo cual debe existir una $\lambda \neq 0$ tal que

$$(2Aa + Db + Ec, Da + 2Bb + Fc, Ea + Fb + 2Cc) = \lambda\cdot(a, b, c)$$

Lo anterior conduce al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2Aa + Db + Ec &= \lambda a \\ Da + 2Bb + Fc &= \lambda b \\ Ea + Fb + 2Cc &= \lambda c \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} (2A - \lambda)\cdot a + Db + Ec &= 0 \\ Da + (2B - \lambda)\cdot b + Fc &= 0 \qquad ...(10) \\ Ea + Fb + (2C - \lambda)\cdot c &= 0 \end{aligned}$$

Estamos frente a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas de la forma

$$\begin{aligned}
&\boxed{\left(a_{11}-\lambda\right)\cdot x_1+a_{12}\cdot x_2+a_{13}\cdot x_3} = 0\\
&a_{21}\cdot x_1+\left(a_{22}-\lambda\right)\cdot x_2+a_{23}\cdot x_3 = 0 \qquad \text{.........(10')}\\
&a_{31}\cdot x_1+a_{32}\cdot x_2+\left(a_{33}-\lambda\right)\cdot x_3 = 0
\end{aligned}$$

Con la propiedad de que $a_{ij} = a_{ji}$ para todos los $i, j \leq 3$ (es decir, la matriz de sus coeficientes es una matriz simétrica).

Como se pide que $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$ sea una solución no trivial, su determinante Δ es igual a cero. Esto es,

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

A esta igualdad se le conoce bajo el nombre de *ecuación característica de la matriz* de coeficientes del sistema (10')

Desarrollando se tiene

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)\begin{vmatrix} a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}-\lambda \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

La ecuación $\Delta = 0$ es equivalente a $\lambda^3 - q_2\lambda^2 + q_1\lambda - q_0 = 0$, donde

$q_2 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$; $q_1 = a_{11} \cdot a_{22} + a_{11} \cdot a_{33} + a_{22} \cdot a_{33} - (a_{12})^2 - (a_{13})^2 - (a_{23})^2$

(recuerdese que $a_{12} = a_{21}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$)

$$y \quad q_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Respecto del sistema (10') y de su ecuación característica sabemos lo siguiente:

1) Si (a, b, c) y (a', b', c') son dos soluciones no triviales correspondientes a dos raíces λ y λ' de la ecuación característica, entonces aa' + bb'+ cc' = 0.

(las soluciones son vectores perpendiculares entre si)

(2) Las raíces de la ecuación característica son números reales.

(3) No todas las raíces de la ecuación característica son iguales con cero.

Demostración de (I)

Sean λ, a, b, c y λ', a', b', c' soluciones no triviales de (7)

con $\lambda \neq \lambda'$

$$\boxed{a_{11} \cdot a + a_{12} \cdot b + a_{13} \cdot c} = \lambda a$$

$$a_{21} \cdot a + a_{22} \cdot b + a_{23} \cdot c = \lambda b$$

$$a_{31} \cdot a + a_{32} \cdot b + a_{33} \cdot c = \lambda c$$

$$a_{11} \cdot a' + a_{12} \cdot b' + a_{13} \cdot c' = \lambda' a'$$

$$a_{21} \cdot a' + a_{22} \cdot b' + a_{23} \cdot c' = \lambda' b'$$

$$a_{31} \cdot a' + a_{32} \cdot b' + a_{33} \cdot c' = \lambda' c'$$

Multiplicando por a',b', c'
Respectivamente cada una
de las ecuaciones

$$a_{11} \cdot a \cdot a' + a_{12} \cdot b \cdot a' + a_{13} \cdot c \cdot a' = \lambda aa'$$

$$a_{21} \cdot a \cdot b' + a_{22} \cdot b \cdot b' + a_{23} \cdot c \cdot b' = \lambda bb'$$

$$a_{31} \cdot a \cdot c' + a_{32} \cdot b \cdot c' + a_{33} \cdot c \cdot c' = \lambda cc'$$

Sumando las tres ecuaciones

$$a_{11} \cdot a \cdot a' + a_{12} \cdot b \cdot a' + a_{13} \cdot c \cdot a' +$$

$$a_{21} \cdot a \cdot b' + a_{22} \cdot b \cdot b' + a_{23} \cdot c \cdot b' +$$

$$a_{31} \cdot a \cdot c' + a_{32} \cdot b \cdot c' + a_{33} \cdot c \cdot c' =$$

$$\lambda \cdot (aa' + bb' + cc')$$

Multiplicando por a, b, c
respectivamente cada una
de las ecuaciones

$$a_{11} \cdot a \cdot a' + a_{12} \cdot a \cdot b' + a_{13} \cdot a \cdot c' = \lambda' aa'$$

$$a_{21} \cdot b \cdot a' + a_{22} \cdot b \cdot b' + a_{23} \cdot b \cdot c' = \lambda' bb'$$

$$a_{31} \cdot c \cdot a' + a_{32} \cdot c \cdot b' + a_{33} \cdot c \cdot c' = \lambda' cc'$$

Sumando las tres ecuaciones

$$a_{11} \cdot a \cdot a' + a_{12} \cdot a \cdot b' + a_{13} \cdot a \cdot c' +$$

$$a_{21} \cdot b \cdot a' + a_{22} \cdot b \cdot b' + a_{23} \cdot b \cdot c' +$$

$$a_{31} \cdot c \cdot a' + a_{32} \cdot c \cdot b' + a_{33} \cdot c \cdot c' =$$

$$\lambda' \cdot (aa' + bb' + cc')$$

como

$$a_{12} = a_{21} \quad , \quad a_{31} = a_{13} \quad , \quad a_{32} = a_{23}$$

los términos de la izquierda de ambas igualdades son iguales, de donde se sigue que:

$$\lambda \cdot (aa' + bb' + cc') = \lambda' \cdot (aa' + bb' + cc')$$

o bien, $(\lambda - \lambda')\cdot(aa' + bb' + cc') = 0$

Como $\lambda - \lambda' \neq 0$, se infiere que aa' + bb' + cc' = 0 con lo cual queda demostrado (1).

Demostración de (2)

Supóngase que el polinomio característico tiene una raíz compleja $\lambda = x + iy$ con $y \neq 0$

De la teoría de ecuaciones sabemos que su conjugado complejo $\lambda' = x - iy$ también es raíz de la ecuación característica.

En este caso hay números complejos a, b, c no todos cero que satisfacen la ecuación (10')

Como

$$a_{11}\cdot a + a_{12}\cdot b + a_{13}\cdot c = \lambda a$$

$$a_{21}\cdot a + a_{22}\cdot b + a_{23}\cdot c = \lambda b$$

$$a_{31}\cdot a + a_{32}\cdot b + a_{33}\cdot c = \lambda c$$

esto implica que

$$\overline{a_{11}\cdot a + a_{12}\cdot b + a_{13}\cdot c} = \overline{\lambda a}$$

$$\overline{a_{21}\cdot a + a_{22}\cdot b + a_{23}\cdot c} = \overline{\lambda b}$$

$$\overline{a_{31}\cdot a + a_{32}\cdot b + a_{33}\cdot c} = \overline{\lambda c}$$

y como

$$\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta} \quad \text{y} \quad \overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$$

para todos los números complejos α y β

$$a_{11}\cdot \overline{a} + a_{12}\cdot \overline{b} + a_{13}\cdot \overline{c} = \lambda'\cdot \overline{a}$$

$$a_{21}\cdot \overline{a} + a_{22}\cdot \overline{b} + a_{23}\cdot \overline{c} = \lambda'\cdot \overline{b}$$

$$a_{31}\cdot \overline{a} + a_{32}\cdot \overline{b} + a_{33}\cdot \overline{c} = \lambda'\cdot \overline{c}$$

de modo que $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$ es una solución no trivial correspondiente a λ'

Como $\lambda-\lambda'\neq 0$, se sigue por (1) que

$$a\cdot\bar{a}+b\cdot\bar{b}+c\cdot\bar{c} = 0$$

Pero $\alpha\cdot\bar{\alpha}=|\alpha|^2$ para todo número complejo α , de modo que la igualdad anterior se transforma en $|a|^2+|b|^2+|c|^2=0$.

La conclusión a la que se llega, entonces, es que $a=b=c=0$, lo cual contradice la hipótesis de que (a, b, c) es una solución no trivial de (10') correspondiente a la raíz λ del polinomio característico.

En consecuencia λ es real, lo cual queda demostrado.

Demostración de (3)

Supóngase que todas las raíces de la ecuación característica son iguales con cero.

En tal caso $q_0 = q_1 = q_2 = 0$ y la ecuación se reduce a $\lambda^3 = 0$

Se tiene

$$\left(q_2\right)^2-2\cdot q_1 = 0$$

$$\left(q_2\right)^2-2\cdot q_1 = \left(a_{11}+a_{22}+a_{33}\right)^2-2\cdot\left[a_{11}\cdot a_{22}+a_{11}\cdot a_{33}+a_{22}\cdot a_{33}-\left(a_{12}\right)^2-\left(a_{13}\right)^2-\left(a_{23}\right)^2\right]$$

$$= \left(a_{11}\right)^2+\left(a_{22}\right)^2+\left(a_{33}\right)^2+2\cdot\left(a_{12}\right)^2+2\cdot\left(a_{13}\right)^2+2\cdot\left(a_{23}\right)^2 = 0$$

$$\therefore\ a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0$$

(Todos los coeficientes del sistema son cero.)

En resumen: El plano diametral $a\,f_x + b\,f_y + c\,f_z = 0$ es principal $\Leftrightarrow$
$(2Aa + Db + Ec, Da + 2Bb + Fc, Ea + Fb + 2Cc) = \lambda \cdot (a,b,c)$ para alguna $\lambda \neq 0 \Leftrightarrow$
(λ, a, b, c) es solución no trivial del sistema de ecuaciones (10') $\Leftrightarrow$
λ es raíz de la ecuación característica de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 2A & D & E \\ D & 2B & F \\ E & F & 2C \end{bmatrix}$$

Ahora bien, todas las raíces de la ecuación característica mencionada son reales, y a raíces distintas corresponden soluciones del sistema ortogonales entre si.
La interpretación geométrica de estos hechos es la siguiente
1) La superficie de segundo orden $f(x, y, z) = 0$ tiene al menos un plano de simetría
2) A raíces distintas de la ecuación característica corresponden planos de simetría perpendiculares entre si. (Si la ecuación característica tiene tres raíces distintas, hay tres planos de simetría perpendiculares entre si) .

Ejemplo.

$$2x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 4xy - 3x + 4y - 6z - 3 = 0$$

$$a \cdot f_x + b \cdot f_y + c \cdot f_z = a\cdot(4x + 4y - 3) + b\cdot(10y + 4x + 4) + c\cdot(6z - 6)$$

$$= (4a + 4b)\cdot x + (4a + 10b)\cdot y + (6c)\cdot z + (-3a + 4b - 6c) = 0$$

Factorizando la ecuación :

$$2\left[(2a + 2b)\cdot x + (2a + 5b)\cdot y + (3c)\cdot z + \left(-\frac{3}{2}\cdot a + 2b - 3c\right)\right] = 0$$

Por lo tanto el sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} 2a + 2b &= \lambda a & \qquad & (2 - \lambda)\cdot a + 2b = 0 \\ 2a + 5b &= \lambda b & \text{o bien} \qquad & 2a + (5 - \lambda)\cdot b = 0 \\ 3c &= \lambda c & \qquad & (3 - \lambda)\cdot c = 0 \end{aligned}$$

La ecuación característica es

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \boxed{=} (2-\lambda)\cdot((5-\lambda)\cdot(3-\lambda)) - 2\cdot(2\cdot(3-\lambda))$$

$$= (3-\lambda)\cdot((2-\lambda)\cdot(5-\lambda)-4)$$

$$= (3-\lambda)\cdot\left(10-7\cdot\lambda+\lambda^2-4\right)$$

$$= (3-\lambda)\cdot\left(\lambda^2-7\cdot\lambda+6\right)$$

$$= (3-\lambda)\cdot(\lambda-1)\cdot(\lambda-6)$$

Las raíces de la ecuación característica son $\lambda = 3, 1, 6$

Para $\lambda = 1$ tenemos

$$\begin{aligned} a + 2b &= 0 \\ 2a + 4b &= 0 \\ 2c &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$

por lo tanto

$$i' = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

Para $\lambda = 3$ tenemos

$$
\begin{aligned}
-a + 2b &= 0 \\
2a + 2b &= 0 \\
0 \cdot c &= 0
\end{aligned}
$$

Solución $a = b = 0$, $c \neq 0$

$k' = k = (0,0,1)$

Para $\lambda = 6$

$$
\begin{aligned}
-4a + 2b &= 0 \\
2a - b &= 0 \\
-3c &= 0
\end{aligned}
$$

Solución $a = -1$, $b = 2$, $c = 0$

$$j' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0 \right)$$

Esta sección da lugar a un sistema de ejes coordenados.

Los planos de simetria son, en este caso:

$$D_{i'} : \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \xi_x - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \xi_y = 0 \qquad \text{o bien} \qquad 2 \cdot \xi_x - \xi_y = 0$$

$$D_{j'} : \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \xi_x + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \xi_y = 0 \qquad \text{o bien} \qquad \xi_x + 2 \cdot \xi_y = 0$$

D_{α} : $\qquad f_z = 0$

D_{β} : $2(4x+4y-3)-(10y+4x+4) = 0 \qquad$ o bien $\qquad 2x-y-5 = 0$

D_{γ} : $(4x+4y-3)+2(10y+4x+4) = 0 \qquad$ o bien $\qquad 12x+24y+5 = 0$

$D_{k''}$: $6z-6 = 0 \qquad$ o bien $\qquad z-1 = 0$

Nótese que la ecuación del ejemplo carece de términos en xz y yz y que un plano de simetría es paralelo al plano XY (perpendicular al eje Z).

Con una simple traslación, que no afecta a los coeficientes de los términos de segundo grado, se puede hacer que el plano XY sea un plano de simetría. Ello explica la ausencia de términos de primer grado en z de la ecuación.

En general, sabemos que siempre hay una dirección principal. Podemos rotar los ejes X, Y, Z de tal modo que alguno de ellos sea paralelo a la dirección principal, y el plano de simetría paralelo a alguno de los planos coordenados. Se tiene con ello la siguiente tabla:

Dirección Principal	Plano Principal	Paralelismo	Resultado
$(1,0,0)$	$f_x = 0$: $2Ax+Dy+Ez+G = 0$	$(1,0,0) \parallel (2A,DE)$	$D = E = 0$
$(0,1,0)$	$f_y = 0$: $Dx+2By+Fz+H = 0$	$(0,1,0) \parallel (D,2B,F)$	$D = F = 0$
$(0,0,1)$	$f_z = 0$: $Ex+Fy+2Cz+I = 0$	$(0,0,1) \parallel (E,F,2C)$	$E = F = 0$

Si la dirección principal es paralela a un eje, no hay términos mixtos en la ecuación en esa variable.
Si el plano principal es paralelo a un plano coordenado, sólo puede haber término mixto en la variables correspondientes.
Con esto queda marcado el camino para reducir toda ecuación de segundo orden en tres variables a su forma canónica.

BIBLIOGRAFÍA

BRASOV A. S. "¿Qué es la programación lineal?". México, Temas Matemáticos, Editorial Limusa, 1992.

GERALD C. Preston , and Anthony R. Lovaglia. "Modern Analytic Geometry". United States of America. Harper & Row Publishers, 1971.

KLETENIK D. "Problemas de Geometría Analítica". U R S S, Editorial Mir, 1979.

LEHMANN H. Lehmann. "Geometría Analítica". México, U. T. E. H. A. 1978.

MURDOCH D. C. "Geometría Analítica con Vectores y Matrices". México, Editorial Limusa, 1981.

WOOTON William, Beckenbach F. Edwin. "Geometría Analítica Moderna". México, Publicaciones Cultural, 1976.

VANCE ELBRIDGE P. "Modern Algebra and Trigonometry". United States of America, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1971.

Dedicatorias

A la memoria de mi abuela

A mi tía por su amor y cuidado

A Nidia por su gran amor

A mi familia por estar conmigo

A mis amigas de generación
por su amistad y apoyo

A mis exalumnos por que fueron el
motivo de mi trabajo

A la vida por darme la oportunidad
de que se cumpla un sueño más.