



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

SISTEMAS DINAMICOS HOLOMORFOS: FLUJOS DE ANOSOV Y ACCIONES DEL GRUPO AFIN COMPLEJO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
MATEMATICA

PRESENTA:

ANA RECHTMAN BULAJICH

DIRECTOR DE TESIS:

DR. ALBERTO VERHOVSKY SOLA



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA**



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Rechtman Bulajich Ana.
FECHA: 22 junio 2009
FIRMA: [Signature]

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
Sistemas dinámicos holomorfos: flujos de Anosov
y acciones del grupo afín complejo

realizado por
Ana Rechtman Bulajich
con número de cuenta 400005904 , quien cubrió los créditos de la carrera de:
matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

- Director de Tesis Propietario Dr. Alberto Verjovsky Sola *[Signature]*
- Propietario Dr. Adolfo Guillot Santiago *[Signature]*
- Propietario Dr. Ernesto Rosales Gonzalez *[Signature]*
- Suplente Dr. Javier Elizondo Huerta *[Signature]*
- Suplente Dra. Laura Ortiz Bobadilla *[Signature]*

Consejo Departamental de Matemáticas



M. en C. Alejandro Bravo Méndez

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMÁTICAS

a Braulio,
a mis papás,
a Paula,
a Alberto,
a Laia, Nydia y Sofía,
a todos mis amigos y profesores.

Contenido

Introducción	v
1. Grupos de Lie	1
1.1. Flujos en \mathbb{C}^n	1
1.2. Corchete de Poisson	5
1.3. Grupos y álgebras de Lie	9
1.4. Grupos lineales y sus álgebras de Lie	12
2. $SL(2, \mathbb{C})$	17
2.1. $SL(2, \mathbb{C})$	17
2.2. $PSL(2, \mathbb{C})$	19
2.3. $\mathbb{C}P^1$	29
3. Flujos holomorfos	33
3.1. Difeomorfismos y flujos de Anosov	33
3.2. Flujos holomorfos de Anosov	40
3.3. Clasificación de los flujos de Anosov	43
3.4. Automorfismos de toros complejos de dimensión dos	52
3.5. Acciones localmente libres del grupo afín complejo	56
4. Superficies tipo Kähler y $K3$	59
4.1. Porisma de Poncelet	59
4.2. Variedades tipo Kähler	64
4.3. Lattès y superficies $K3$	66
Apéndice	73

Introducción

Los sistemas dinámicos de Anosov han jugado un papel importante en el estudio de los sistemas dinámicos diferenciables. Estos son globalmente hiperbólicos, estructuralmente estables y poseen una dinámica muy rica. Un ejemplo fundamental de estos sistemas consiste en los automorfismos del toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ considerado como grupo de Lie abeliano. El automorfismo está determinado por una matriz $A \in SL(n, \mathbb{Z})$,¹ hiperbólica, es decir que sus valores propios tienen módulo distinto de 1. Otro ejemplo básico, es el flujo geodésico de una variedad riemanniana compacta con una métrica de curvatura seccional estrictamente negativa. Veremos con más detalle estos ejemplos en la sección 3.1.

Lo que caracteriza a un flujo de Anosov en una variedad compacta M , es que el fibrado tangente se escinde como suma directa de tres subfibrados vectoriales

$$TM = E^s \oplus E^u \oplus E^1,$$

dónde E^s y E^u son invariantes bajo la diferencial del flujo, y E^1 es el fibrado de líneas tangentes al campo vectorial correspondiente a f . Además, los vectores de E^s y E^u son contraídos y expandidos exponencialmente por la diferencial del flujo.

En el caso complejo, la teoría de sistemas dinámicos holomorfos es similar a la real, como se muestra en la sección 1.1 con el teorema de existencia y unicidad para soluciones de ecuaciones diferenciales con tiempo complejo. Los flujos holomorfos de Anosov tienen las mismas características de escindir al espacio tangente como suma de Whitney, de contracción y expansión. Sin embargo, como se muestra en los ejemplos de la sección 3.1, las construcciones de flujos de Anosov reales no siempre se pueden generalizar al caso complejo.

¹El grupo de matrices de $n \times n$ con coeficientes enteros y determinante 1.

En el capítulo 3 se construyen ejemplos de flujos holomorfos de Anosov en superficies complejas y en variedades compactas complejas de dimensión 3. Además, se presentan dos teoremas que clasifican dichos flujos dados por el Étienne Ghys en el artículo [8]. Para completar los ejemplos y la clasificación, estudiamos los automorfismos de toros complejos de dimensión dos, sección 3.4, y las acciones localmente libres del grupo afín complejo en la sección 3.5.

En el capítulo 1 se presenta la teoría básica de los grupos de Lie, y en particular, en la sección 1.4, trabajamos con grupos de Lie lineales. En el capítulo 2, estudiamos principalmente el grupo $PSL(2, \mathbb{C})$ que es el grupo de isometrías de plano hiperbólico de dimensión 3, \mathbb{H}^3 . Además, construimos una fibración del plano proyectivo complejo, \mathbb{C}^1 con fibra $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, que es el grupo afín complejo.

Por último, en el capítulo 4, revisamos los artículos de Serge Cantat [4] y de Curtis T. McMullen [20] sobre la dinámica de los automorfismos de las superficies $K3$, presentado ejemplos de estas superficies. El artículo anterior contiene una clasificación de dichos automorfismos. También en este capítulo vemos una demostración que utiliza geometría proyectiva del Porisma de Poncelet, en la cual se genera un flujo holomorfo, sección 4.1.

Capítulo 1

Grupos de Lie

1.1. Flujos en \mathbb{C}^n

En esta sección daremos algunas definiciones y teoremas que utilizaremos más adelante. Consideremos el problema con valor inicial

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dT} &= v(T, z) \\ z(T_0) &= z_0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde z es una función analítica de $T \in \mathbb{C}$, y $v(T, z)$ es analítica en un dominio D con $(T_0, z_0) \in D$. Es decir, v es una función continua de T y z en D , y las parciales $\frac{\partial v}{\partial T}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$ existen en D .

Nos interesa saber cuándo el problema (1.1) tiene solución y bajo qué condiciones ésta es única. El teorema de existencia y unicidad establece estas condiciones.

Teorema 1.1.1 *Sea D un conjunto abierto contenido en \mathbb{C}^n con $(T_0, z_0) \in D$ y $v(T, z)$ una función analítica en D . Entonces, existe un abierto contenido en D tal que el problema con condición inicial (1.1) tiene una única solución $z(T)$ en dicho abierto.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos escribir $T - T_0$ y $z - z_0$ en el lugar de T y z , respectivamente. Es decir, podemos suponer $T_0 = z_0 =$

0 y resolver el problema

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dT} &= v(T, z) \\ z(0) &= 0,\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde $v(T, z)$ es analítica cuando T y z pertenecen a los círculos C y Γ , de radios a y b centrados en el origen. En este dominio v está acotada, es decir, existe M tal que

$$|v(T, z)| < M$$

cuanto $|T| < a$ y $|z| < b$. Si derivamos sucesivamente la ecuación (1.2), obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dT^2} &= \frac{\partial v}{\partial T} + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dT} \\ \frac{d^3z}{dT^3} &= \frac{\partial^2 v}{\partial T^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial T \partial z} \cdot \frac{dz}{dT} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \cdot \left(\frac{dz}{dT}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial z} \cdot \frac{d^2z}{dT^2} \\ &\vdots\end{aligned}$$

que cumplen con la condición

$$\left(\frac{dz}{dT}\right)_0 = v(0, 0).$$

Así, obtenemos la serie de Maclaurin para z

$$z = \left(\frac{dz}{dT}\right)_0 \cdot T + \left(\frac{d^2z}{dT^2}\right)_0 \cdot \frac{T^2}{2!} + \dots + \left(\frac{d^kz}{dT^k}\right)_0 \cdot \frac{T^k}{k!} + \dots\tag{1.3}$$

Esta z es solución del problema (1.2), lo que necesitamos es ver que la serie converge para valores pequeños de T .

Sea

$$v(T, z) = \sum A_{p,q} T^p z^q,$$

la serie de Maclaurin para $v(T, z)$ en una vecindad de $T = z = 0$, donde

$$A_{p,q} = \frac{1}{p!q!} \left(\frac{\partial^{p+q}v}{\partial T^p \partial z^q}\right)_0.$$

Sabemos que

$$\left|\frac{\partial^{p+q}v}{\partial T^p \partial z^q}\right|_0 < \frac{p!q!}{a^p b^q} \cdot M,$$

entonces

$$|A_{p,q}| < \frac{M}{a^p b^q}.$$

Tomemos la función

$$V(T, z) = \sum \frac{M}{a^p b^q} T^p z^q,$$

sabemos que

$$\left| \frac{\partial^{p+q} v}{\partial T^p \partial z^q} \right|_0 \leq \left(\frac{\partial^{p+q} V}{\partial T^p \partial z^q} \right)_0 \quad (1.4)$$

para toda $p, q \geq 0$. Por otra parte, tenemos que

$$V(T, z) = \frac{M}{\left(1 - \frac{T}{a}\right) \left(1 - \frac{z}{b}\right)}.$$

Consideremos ahora el problema

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dT} &= V(T, Z) \\ Z(0) &= 0. \end{aligned}$$

Sabemos que una solución es considerar la serie de Maclaurin para Z

$$Z = \left(\frac{dZ}{dT}\right)_0 \cdot T + \left(\frac{d^2 Z}{dT^2}\right)_0 \cdot \frac{T^2}{2!} + \dots + \left(\frac{d^k Z}{dT^k}\right)_0 \cdot \frac{T^k}{k!} + \dots \quad (1.5)$$

Por (1.4)

$$\left(\frac{d^r z}{dT^r}\right)_0 \leq \left(\frac{d^r Z}{dT^r}\right)_0,$$

es decir, la serie (1.5) para Z es una serie dominante para la serie (1.3) de z . Entonces (1.3) converge absoluta y uniformemente en cualquier círculo concéntrico y contenido en el círculo de convergencia de (1.5). Para encontrar el radio de convergencia de (1.5) utilizaremos la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dT} &= \frac{Z}{\left(1 - \frac{T}{a}\right) \left(1 - \frac{Z}{b}\right)} \\ \left(1 - \frac{Z}{b}\right) \frac{dZ}{dT} &= \frac{M}{\left(1 - \frac{T}{a}\right)} \end{aligned}$$

que es de variables separables. Resolviendo obtenemos que

$$Z = b - b \sqrt{1 + \frac{2Ma}{b} \ln \left(1 - \frac{T}{a}\right)},$$

que cumple con la condición inicial $Z(0) = 0$. Luego, el radio de convergencia ρ para (1.5) queda determinado por

$$1 + \frac{2Ma}{b} \ln \left(1 - \frac{\rho}{a} \right) = 0$$

es decir,

$$\rho = a \left(1 - e^{-\frac{b}{2Ma}} \right).$$

Entonces la serie (1.3) converge absoluta y uniformemente para $|T| \leq \rho - \epsilon$, con $0 < \epsilon < \rho$. Así, encontramos una solución al problema (1.2) y por lo tanto una solución al problema (1.1).

Como los coeficientes de la serie de Maclaurin para z están únicamente determinados y como dicha serie es única, el problema (1.1) acepta una única solución. □

El teorema anterior se puede demostrar utilizando el método de Picard, como en el caso de las ecuaciones diferenciales con tiempos reales. El dominio máximo donde la solución es analítica es

$$|T - T_0| < \alpha$$

con $\alpha = \min(a, \frac{b}{M})$.

Si denotamos por $\varphi(T, z_0)$ a la solución del problema (1.1) en $|T - T_0| < \alpha$. Entonces al conjunto de mapeos

$$\phi_v^T(z_0) = \varphi(T, z_0)$$

se llama el flujo de la ecuación

$$\frac{dz}{dT} = v(T, z)$$

o el flujo del campo vectorial $v(T, z)$. Una propiedad importante del flujo es

$$\phi_v^T \cdot \phi_v^S(z) = \phi_v^{T+S}(z)$$

para toda z y $\phi_v^{T_0}(z) = z$.

En el caso en que $v(t, z)$ es un campo vectorial lineal, es decir, $v(T, z) = A$ donde A es una matriz, tenemos que

$$\phi_A^T(z_0) = e^{AT} z_0.$$

1.2. Corchete de Poisson

Empecemos por describir un campo vectorial en una variedad M de dimensión m . Definimos T_zM , el espacio tangente a la variedad M en el punto z , como el espacio vectorial formado por todos los vectores tangentes a todas las curvas en M que pasan por z . Al conjunto de todos los espacios tangentes se le llama haz tangente de M y se le denota por TM . Es decir,

$$TM = \cup_{z \in M} T_zM.$$

Un campo vectorial v en M es una función que le asigna un vector $v_z \in T_zM$ a cada $z \in M$. En coordenadas locales, un campo vectorial es de la forma

$$v_z = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial z_i},$$

donde cada v_i es una función analítica. Si consideramos el problema con condición inicial

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dT} &= v(z) \\ z(0) &= z_0, \end{aligned} \tag{1.6}$$

con $z_0 \in M$, cuando M es una variedad compacta, tenemos un resultado equivalente al teorema de existencia y unicidad (1.1.1) de la sección 1.1. Es decir, la ecuación (1.6) tiene una única solución analítica en una vecindad de 0.

Análogamente a la sección de flujos en \mathbb{C}^n (1.1), se puede definir el flujo de la ecuación (1.6). Sea $\varphi(T, z_0)$ la solución del problema (1.6) en $|T| < \alpha$. Entonces, el conjunto de mapeos

$$\phi_v^T(z_0) = \varphi(T, z_0)$$

se le llama el flujo de la ecuación (1.6) o el flujo del campo vectorial v en M , variedad compacta. Observemos que el flujo tiene un dominio donde está definido. En este dominio, forman una familia de holomorfismos de M en M y cumplen que

$$\begin{aligned} \phi_v^T \cdot \phi_v^S(z) &= \phi_v^{T+S}(z) \\ \phi_v^{T_0}(z) &= z. \end{aligned}$$

Se puede decir que el teorema de existencia y unicidad (1.1.1) implica la existencia de una única curva integral maximal que pasa por $z_0 \in M$,

donde maximal se refiere a que no está contenida en alguna más grande. Otra vez, hay que observar que esto se cumple sólo en el dominio donde el flujo está bien definido.

Veamos ahora una construcción del corchete de Poisson [2]. Denotemos por L_v al operador que a cada función analítica $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ le asocia su derivada en la dirección del campo vectorial v . Es decir,

$$L_v f(z) = \left(\frac{d}{dT} \right)_0 f(\phi_v^T(z_0))$$

en coordenadas locales de M , (z_1, z_2, \dots, z_m) podemos escribir a

$$L_v f = v_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + v_2 \frac{\partial f}{\partial z_2} + \dots + v_m \frac{\partial f}{\partial z_m}.$$

Sean ahora v y w dos campos vectoriales en la variedad M .

Lema 1.2.1 *El operador $L_w L_v - L_v L_w$ es un operador lineal.*

Demostración. Denotemos por $\sum v_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ y $\sum w_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ a los campos vectoriales v y w con el sistema de coordenadas locales (z_1, z_2, \dots, z_n) , respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} L_w L_v f &= \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial f}{\partial z_j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n w_i \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \frac{\partial f}{\partial z_j} + \sum_{i,j=1}^n w_i v_j \frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} (L_w L_v - L_v L_w) f &= \sum_{i,j=1}^n w_i \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \frac{\partial f}{\partial z_j} - \sum_{i,j=1}^n v_i \frac{\partial w_j}{\partial z_i} \frac{\partial f}{\partial z_j} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(w_i \frac{\partial v_j}{\partial z_i} - v_i \frac{\partial w_j}{\partial z_i} \right) \frac{\partial f}{\partial z_j}. \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial}{\partial z_j}$ es lineal, $L_w L_v - L_v L_w$ es un operador lineal. □

Observemos que el operador $L_w L_v - L_v L_w$ aplicado a una función analítica f es la derivada de ésta en la dirección de un campo vectorial u en M . El campo u , en coordenadas locales $\sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial z_i}$, es de la forma

$$u_i = \left(w_i \frac{\partial v_j}{\partial z_i} - v_i \frac{\partial w_j}{\partial z_i} \right).$$

Entonces, se define el corchete de Poisson o conmutador de v y w como el campo vectorial u , y se escribe

$$[v, w] = u.$$

Proposición 1.2.2 Sean u, v, w campos vectoriales y c, d constantes. Entonces el corchete de Poisson tiene las siguientes propiedades:

I) *bilinealidad*

$$[cv + du, w] = c[v, w] + d[u, w]$$

$$[w, cv + du] = c[w, v] + d[w, u]$$

II) *antisimetría*

$$[v, w] = -[w, v]$$

III) *identidad de Jacobi*

$$[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0.$$

Demostración.

I) Tenemos que

$$[cv + du, w] = L_w L_{(cv+du)} - L_{(cv+du)} L_w,$$

pero

$$\begin{aligned} L_{(cv+du)} &= (cv_1 + du_1) \frac{\partial}{\partial z_1} + (cv_2 + du_2) \frac{\partial}{\partial z_2} + \dots + (cv_m + du_m) \frac{\partial}{\partial z_m} \\ &= c \left(v_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + v_m \frac{\partial}{\partial z_m} \right) + d \left(u_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \dots + u_m \frac{\partial}{\partial z_m} \right) \\ &= cL_v + dL_u. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$[cv + du, w] = c[v, w] + d[u, w].$$

Análogamente,

$$[v, du + cw] = d[v, u] + c[v, w].$$

II) Aplicando la definición tenemos

$$\begin{aligned} [v, w] &= L_w L_v - L_v L_w \\ &= -(L_v L_w - L_w L_v) \\ &= -[w, v]. \end{aligned}$$

III) Tenemos que

$$\begin{aligned} [u, [v, w]] &= L_{[v, w]} L_u - L_u L_{[v, w]} \\ &= L_w L_v L_u - L_v L_w L_u - L_u L_w L_v + L_u L_v L_w. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} [u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] &= \\ &= L_w L_v L_u - L_v L_w L_u - L_u L_w L_v + L_u L_v L_w + \\ &\quad + L_v L_u L_w - L_u L_v L_w - L_w L_v L_u + L_w L_u L_v + \\ &\quad + L_u L_w L_v - L_w L_u L_v - L_v L_u L_w + L_v L_w L_u = \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Veamos otra forma de construir el corchete de Poisson. Tenemos v y w campos vectoriales sobre la variedad M , definimos

$$w^T(z) = \left(\frac{\partial \phi_v^T}{\partial z} \right)_z w(z),$$

para $z \in M$, y vamos a calcular $\left(\frac{\partial w^T}{\partial T} \right)_0$. Sea $Z = \phi_v^T(z)$, entonces,

$$w^T(z) = \left(\frac{\partial \phi_v^T}{\partial z} \right)_z w(z) = \left(\frac{\partial \phi_v^T}{\partial z} \right)_{\phi_v^{-T}(Z)} w(\phi_v^{-T}(Z))$$

es decir,

$$w^T(z) = \frac{\partial \phi_v^T}{\partial z} \cdot w \cdot \phi_v^{-T}(Z).$$

Por el teorema de Taylor, tenemos que

$$\phi_v^T = id + Tv + o(T^2)$$

entonces, derivando con respecto a z , obtenemos

$$\frac{\partial \phi_v^T}{\partial z} = Id + T \frac{\partial v}{\partial z} + O(T^2).$$

Luego,

$$w^T(z) = w \cdot \phi_v^{-T}(Z) + T \frac{\partial v}{\partial z} \cdot w \cdot \phi_v^{-T}(Z) + o(T).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w^T}{\partial T} \right)_0 &= \left(-\frac{\partial w}{\partial z} v + \frac{\partial v}{\partial z} w \cdot \phi_v^{-T} \right)_0 \\ &= \frac{\partial v}{\partial z} w - \frac{\partial w}{\partial z} v, \end{aligned}$$

que es la definición que tenemos del corchete de Poisson.

1.3. Grupos y álgebras de Lie

Empecemos con la definición de grupo de Lie.

Definición 1.3.1 *Un grupo de Lie sobre un campo K (donde K es \mathbb{R} o \mathbb{C}), es un grupo G con estructura de variedad diferenciable sobre K , tal que el mapeo*

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\rightarrow G \\ (g, h) &\mapsto gh \end{aligned}$$

es diferenciable.

Utilizando el teorema de la función implícita, se puede ver que en un grupo de Lie el mapeo

$$\begin{aligned} \xi : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

es también diferenciable.

Un grupo de Lie sobre \mathbb{C}^n lo podemos ver como un grupo de Lie sobre \mathbb{R}^{2n} . Es claro que todo grupo de Lie complejo es analítico, es decir, la estructura de la variedad y el mapeo μ son analíticos. De ahora en adelante, trabajaremos con grupos de Lie analíticos.

Sea G un grupo de Lie, tomemos $g \in G$. Definimos el mapeo de traslación por la izquierda L_g como

$$\begin{aligned} L_g : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto gh. \end{aligned}$$

L_g es un isomorfismo analítico de G , con inversa

$$(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}.$$

A un campo vectorial v en G lo llamaremos invariante bajo traslaciones por la izquierda si

$$DL_g(v|_h) = v|_{L_g(h)} = v|_{gh},$$

para todas g, h en G . Notemos que si v y w son campos vectoriales en G invariantes bajo traslaciones por la izquierda, entonces $av + bw$, con a y b complejos, es un campo invariante bajo traslaciones por la izquierda. Es decir, estos campos forman un espacio vectorial. A este espacio vectorial lo llamaremos el álgebra de Lie de G y la denotaremos por \mathfrak{g} .

Cualquier campo vectorial invariante bajo traslaciones por la izquierda, está únicamente determinado por su valor en la identidad $e \in G$, ya que

$$v|_g = DL_g(v|_e), \tag{1.7}$$

luego $L_g(e) = g$. Inversamente, todo vector $V \in T_e G$ determina un campo vectorial v sobre G , que consiste en las traslaciones

$$DL_g(V) = v|_g \tag{1.8}$$

y que es invariante bajo traslaciones por la izquierda. Entonces, tenemos que

$$\mathfrak{g} \simeq T_e G.$$

Definimos formalmente el álgebra de Lie para un grupo de Lie.

Definición 1.3.2 *El álgebra de Lie \mathfrak{g} de un grupo de Lie G , es el espacio vectorial formado por los campos vectoriales invariantes bajo traslaciones por la izquierda, junto con la operación*

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

llamada el corchete de Lie para \mathfrak{g} , que satisface

I) *bilinealidad*

$$\begin{aligned} [cv + du, w] &= c[v, w] + d[u, w] \\ [w, cv + du] &= c[w, v] + d[w, u] \end{aligned}$$

II) *antisimetría*

$$[v, w] = -[w, v]$$

III) *identidad de Jacobi*

$$[u, [v, w]] + [w, [u, v]] + [v, [w, u]] = 0.$$

Para grupos de Lie dimensionalmente finitos, el corchete de Lie entre dos vectores tangentes en la identidad, se define construyendo los campos vectoriales como en (1.8) y utilizando el corchete de Poisson (1.2). Por lo tanto, por el lema (1.2.2), la operación del corchete de Lie cumple con las condiciones de la definición. Además, como sabemos que

$$\mathfrak{g} \simeq \mathbf{T}_e G$$

la dimensión de \mathfrak{g} es la misma que la de G .

Ejemplo 1.3.3 Calculemos el álgebra $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ del grupo general lineal $GL(n, \mathbb{C})$ que está formado por las matrices de $n \times n$ invertibles, es decir, que tienen determinante distinto de cero. Démosle a $GL(n, \mathbb{C})$ un sistema de coordenadas dado por las entradas de la matriz z_{ij} , con $i, j = 1, 2, \dots, n$, entonces el espacio tangente a $GL(n, \mathbb{C})$ en la identidad, que denotaremos con I por ser matrices, es el conjunto de todos los campos vectoriales

$$v_A|_I = \sum_{i,j} a_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial z_{ij}} \right)_I,$$

donde $A = (a_{ij})$ es una matriz de $n \times n$. Dada $Y \in GL(n, \mathbb{C})$, la ij entrada de la matriz $L_Y(Z) = YZ$ está dada por

$$\sum_{k=1}^n y_{ik} z_{kj}.$$

Entonces, de (1.7) tenemos que

$$\begin{aligned} v_A|_Y &= DL_Y(v_A|_I) \\ &= \sum_{l,m} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} \left(\sum_k y_{lk} z_{km} \right) \frac{\partial}{\partial z_{lm}}, \end{aligned}$$

o bien,

$$v_A|_z = \sum_{i,j} i, j \left(\sum_k a_{ij} z_{kj} \right) \frac{\partial}{\partial z_{ij}}.$$

Para calcular el corchete de Lie

$$\begin{aligned} [v_A, v_B] &= \sum_{i,j,k} \left(\sum_l (b_{il} a_{lk} - a_{il} b_{lk}) \right) z_{kj} \frac{\partial}{\partial z_{ij}} \\ &= v_{[A,B]}, \end{aligned}$$

donde $[A, B] = AB - BA$ es el conmutador en el espacio de matrices.

Entonces, el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ de $GL(n, \mathbb{C})$ es el espacio de matrices de $n \times n$ con corchete de Lie el conmutador de matrices.

1.4. Grupos lineales y sus álgebras de Lie

Un grupo lineal es cualquier subgrupo del grupo $GL(n, K)$, que es grupo de matrices de $n \times n$ con entradas del campo K (sólo nos interesa $K = \mathbb{R}$ o $K = \mathbb{C}$), y determinante distinto de uno. Para construir el álgebra de Lie \mathfrak{g} de un grupo lineal G , tomamos el espacio tangente a G en la identidad. Este espacio consiste de las matrices A , para las cuales existe una curva $x(t)$ de clase C^1 en G que cumple que $x(0) = I$ y $x'(0) = A$ (recordemos que I denota a la matriz identidad). Asumimos que $x(t)$ está definida en un intervalo abierto que contenga al 0 de \mathbb{R} . La condición de que sea diferenciable nos garantiza que $x'(t)$ existe y es continua en el intervalo. El parámetro t es real aún cuando el espacio de matrices M_n , que contiene a G , sea complejo. Una propiedad básica de \mathfrak{g} es que es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} y es cerrado bajo la operación del corchete de Lie. Esta \mathfrak{g} es el álgebra de Lie de G . Denotemos por \exp a la función exponencial. Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 1.4.1 *Sea G un grupo lineal y \mathfrak{g} su álgebra de Lie. Entonces \exp mapea \mathfrak{g} en G .*

La idea de la prueba es fijarse en el espacio tangente a G . El espacio tangente a G en I es \mathfrak{g} , y en cualquier punto $z \in G$ es la traslación al izquierda de \mathfrak{g} por z . Para $A \in \mathfrak{g}$, definamos el campo vectorial $z \mapsto zA$ en el espacio de matrices, este campo vectorial es tangente a G . Si tomamos la curva $z(t) = \exp(tA)$, ésta empieza en G ya que $z(0) = I$ y hay que demostrar que esta contenida en G .

Demostración. Tomemos una base A_1, A_2, \dots, A_n de \mathfrak{g} y el mapeo

$$g(\tau_1 A_1 + \tau_2 A_2 + \dots + \tau_n A_n) = a_1(\tau_1) a_2(\tau_2) \dots a_m(\tau_m).$$

Entonces, $g : \mathfrak{g} \rightarrow G$ y $Dg_0 A = A$, para toda $A \in \mathfrak{g}$. Tomemos un subespacio s del espacio M_n de matrices de $n \times n$ complementario a \mathfrak{g} , tal que $M_n = \mathfrak{g} \oplus s$, y un mapeo $h : s \rightarrow M_n$ definido en una vecindad del 0 en s , tal que $h(0) = 1$ y $Dh_0 Y = Y$, para toda $Y \in s$ (un ejemplo es $h(Y) = 1 + Y$). Definamos

$$\begin{aligned} f : \mathfrak{g} \times s &\rightarrow M_n \\ (A, Y) &\mapsto g(A)h(Y). \end{aligned}$$

f esta definida en una vecindad de $(0, 0)$ en $\mathfrak{g} \times s$ y satisface que

$$Df_{(0,0)}(A, Y) = AY,$$

de hecho, esta diferencial es invertible. Por el teorema de la función inversa, f tiene localmente inversa $W : M_n \rightarrow \mathfrak{g} \times s$, tal que $a \mapsto (U(a), V(a))$ definida para a en una vecindad de I en M_n . Esto implica que cualquier a en una vecindad de I en M_n es de la forma $a = g(A)h(Y)$, con (A, Y) única en una vecindad de $(0, 0)$ en $\mathfrak{g} \times s$, con $A = U(a)$ y $Y = V(a)$. Si $V(a) = 0$, entonces $a = g(A)h(0) = g(A)$, es decir,

$$V(a) = 0 \Rightarrow a \in G. \quad (1.9)$$

Tomemos $(A, Y) \in G$ fijos, lo suficientemente cercanos a $(0, 0)$ para que W esté definida en una vecindad de $a = f(A, Y)$ en M_n , tenemos que, dada $B \in \mathfrak{g}$,

$$V(g(A + \tau B)h(Y)) = Y,$$

con τ real y cercano a 0. Derivando con respecto a τ y evaluando en $\tau = 0$, obtenemos que

$$(DV)_a[(dg_A B)h(Y)] = 0.$$

Sustituyendo $h(Y) = g(A)^{-1}a$, obtenemos que

$$(DV)_a[(Dg_A B)g(A)^{-1}a] = 0. \quad (1.10)$$

La matriz $(Dg_A B)g(A)^{-1}$ está en \mathfrak{g} , ya que es un vector tangente en I a una curva diferenciable en G y

$$(Dg_A B)g(A)^{-1} = \frac{\partial}{\partial \tau} g(A + \tau B)g(A)^{-1} \Big|_{\tau=0}.$$

Entonces, podemos definir un mapeo $L_A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, como

$$L_A(B) = (Dg_A B)G(A)^{-1}.$$

$L = L_A$ es una transformación lineal de \mathfrak{g} que depende continuamente de A . La ecuación (1.10) se ve como

$$(DV)_a[L(B)a] = 0, \quad (1.11)$$

donde

$$a = g(A)h(Y) \quad \text{y} \quad L = L_A.$$

Para $A = 0$, L es la identidad en \mathfrak{g} , ya que $g(0) = I$ y $(Dg)_0 B = B$. En particular, $\det(L) \neq 0$ para $A = 0$. Por continuidad, $\det(L) \neq 0$, para A en una vecindad del 0 en \mathfrak{g} . Entonces, si A está cerca del 0 en \mathfrak{g} , L es invertible y todo elemento de \mathfrak{g} es de la forma $L(B)$, para alguna $B \in \mathfrak{g}$. Podemos reemplazar $L(B)$ por B en (1.11) y obtener

$$(DV)_a(Ba) = 0, \quad (1.12)$$

para toda a en una vecindad de I en M_n y para toda $B \in \mathfrak{g}$. Regresemos a la afirmación de que \exp mapea \mathfrak{g} en G . Tomemos $A \in \mathfrak{g}$ y $a(\tau) = \exp(\tau A)$, por (1.12),

$$DV_{a(\tau)}(Aa(\tau)) = 0.$$

Esto implica que,

$$\frac{d}{d\tau} V(a(\tau)) = 0$$

es válido para toda τ en un intervalo J que contenga al 0 en \mathbb{R} . Luego, $V(a(\tau))$ es constante en J . Para $\tau = 0$ tenemos que $V(a(0)) = 0$, por lo tanto $V(a(\tau)) = 0$, para τ en el intervalo J . Si nos fijamos en (1.9), implica que $a(\tau) = \exp(\tau A)$ está contenida en G , para τ en J . Utilizando la identidad $\exp A = \exp(A/k)^k$, tenemos que $\exp A$ está en G , para toda A en \mathfrak{g} . □

Corolario 1.4.2 *El álgebra de Lie \mathfrak{g} de un grupo lineal G , consiste en todas las matrices A tales que $\exp(tA) \in G$, para toda $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Una inclusión se deriva del teorema. Para la otra, basta observar que $x(t) = \exp(tA)$ es un camino de clase C^1 que cumple con la definición de \mathfrak{g} .



Podemos construir el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ del ejemplo de la sección anterior utilizando el corolario (1.4.2),

$$\begin{aligned}\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) &= \{X \in M_n \mid \exp(tX) \in G, t \in \mathbb{R}\} \\ &= M_n(\mathbb{C}).\end{aligned}$$

Por último, veremos un resultado que utilizaremos en el capítulo 3, observemos que aquí no necesitamos que el grupo sea lineal¹.

Lema 1.4.3 *Sea G un grupo de Lie complejo, compacto y conexo. Entonces,*

(i) G es abeliano;

(ii) $G \simeq \mathbb{C}^n / \Lambda$, con n igual a la dimensión compleja de G y Λ una retícula².

Observemos que G fuera un grupo lineal, $G \simeq \mathbb{C}^n$.

Demostración. Para (i) tomemos el mapeo

$$\begin{aligned}F_h : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto hgh^{-1},\end{aligned}$$

para que G sea abeliano basta demostrar que $hgh^{-1} = g$, para toda pareja (h, g) . Sabemos que

$$\mathrm{Te}G \simeq \mathfrak{g} \simeq \mathbb{C}^n,$$

como espacios vectoriales, ya que G es compacto y conexo. La diferencial del mapeo $(DF_h)_e$, en la identidad, es un automorfismo de \mathfrak{g} , y $h \mapsto (DF_h)_e$ es un mapeo holomorfo de G en el espacio $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. Como $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ es un espacio vectorial complejo de dimensión finita, por el teorema de Liouville, tenemos que $(DF_h)_e$ es independiente de h , es decir $(DF_h)_e = (DF_e)_e = e_{\mathfrak{g}}$. Para cualquier homomorfismo $H : G_1 \rightarrow G_2$ de grupos de Lie complejos, tenemos

$$H(\exp_{G_1} g) = \exp_{G_2}((DH)_e g).$$

Entonces,

$$F_h(\exp g) = \exp((DF_h)_e g).$$

¹Este resultado se puede consultar en [22].

²Una retícula es un grupo abeliano libre y finitamente generado.

Como $(DF_h)_e = e_{\mathfrak{g}}$, tenemos que $F_h(\exp \mathfrak{g}) = \exp \mathfrak{g}$, luego $\exp(\mathfrak{g})$ es el centro³ de G . Como la derivada de la función exponencial es ella misma, utilizando el teorema de la función implícita, tenemos que \exp define un homeomorfismo de una vecindad del $0 \in \mathfrak{g}$ en una vecindad de $e \in G$. Como G es conexo, $\exp(\mathfrak{g})$ genera a G como grupo, es decir, G es abeliano.

Para probar (ii) observemos que el mapeo

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G,$$

es un homomorfismo de grupos abelianos. Es sobre ya que por un lado G es conexo, y por el otro $\exp(\mathfrak{g})$ contiene una vecindad de $e \in G$, y por lo tanto un subgrupo abierto y cerrado de G . El kernel Λ es un subgrupo discreto de \mathfrak{g} , ya que hay una vecindad V del $0 \in \mathfrak{g}$ tal que el mapeo $\exp : V \rightarrow G$ es inyectivo. El homomorfismo inducido $\mathfrak{g}/\Lambda \rightarrow G$ es un holomorfismo y es un isomorfismo de grupos. Por el teorema de la función inversa, tenemos que la inversa es holomorfa. Como las retículas son los únicos subgrupos discretos de un espacio vectorial con cociente compacto, Λ es un retícula.

Utilizando el teorema de la función implícita, obtenemos un recubrimiento de G que es \mathbb{C}^n y cuyo kernel es una retícula Λ , de rango $2n$. Por lo tanto, $G \simeq \mathbb{C}^n/\Lambda$.

□

³El centro de G está formado por los elementos $a \in G$ que conmutan con cualquier elemento del grupo.

Capítulo 2

$SL(2, \mathbb{C})$

2.1. $SL(2, \mathbb{C})$

El grupo lineal $SL(2, \mathbb{C})$ está formado por las matrices de 2×2 sobre el campo de los números complejos con determinante 1. Su álgebra de Lie es el conjunto

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \text{tr} A = 0\},$$

donde tr denota la traza de la matriz. Es fácil de comprobar ya que,

$$\det(e^A) = e^{\text{tr} A}.$$

Una base para $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ es,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$[H, Y] = 2X, \quad [H, X] = -2Y \quad \text{y} \quad [X, Y] = H.$$

Las clases de conjugación de $SL(2, \mathbb{C})$ están representadas por las matrices

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \alpha \neq 0, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Veamos que el mapeo $\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ no es sobre. Si los eigenvalores α y α^{-1} de una matriz $T \in SL(2, \mathbb{C})$ son distintos, entonces T es diagonalizable y es la exponencial de una matriz A de traza cero. Si $\alpha = 1$, entonces $(T - I)^2 = 0$ y la matriz $A = T - I$ funciona. Si $\alpha = -1$, entonces T es conjugada a la tercera matriz de la lista anterior y no es la imagen bajo el mapeo exponencial de ninguna matriz (si $\exp A$ tiene eigenvalores $1, -1$ entonces los eigenvalores $\lambda, -\lambda$ de A son distintos, luego A es diagonalizable y T también). Es decir, el mapeo exponencial $\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$ no es sobre.

La clase de conjugación de los elementos del primer tipo, es la imagen bajo la exponencial de la superficie cuadrática $\det(A) = -\lambda^2$, con $e^\lambda = \alpha$, y la imagen es biyectiva para $\alpha \neq \pm 1$. La segunda clase es la imagen del cono $\det(A) = 0$ y $A \neq 0$.

Proposición 2.1.1 *Todo elemento $T \in SL(2, \mathbb{C})$ admite una única descomposición $T = KB$, donde $K \in SU(2)$ y B es de la forma*

$$\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & r^{-1} \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}^+.$$

El grupo $SU(2)$ es el grupo de matrices de 2×2 sobre \mathbb{C} de la forma

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1,$$

que como variedad es isomorfo a \mathbb{S}^3 .

Demostración. Sea

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

en $SL(2, \mathbb{C})$. Tomemos $r \in \mathbb{R}^+$, entonces la matriz

$$K^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ -c & a \end{pmatrix}$$

está en el grupo $SU(2)$. Multiplicando T por esta matriz obtenemos

$$\frac{1}{r} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} a\bar{a} + c\bar{c} & \bar{a}b + \bar{c}d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Haciendo $a\bar{a} + c\bar{c} = r^2$ obtenemos la matriz B . Entonces $X = KB$. □

Así, podemos ver a $SL(2, \mathbb{C})$ como $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, no como grupo, solamente como variedad¹.

2.2. $PSL(2, \mathbb{C})$

Llamemos Σ a la esfera de Riemann, que bajo la proyección estereográfica es $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Los automorfismos de Σ son de la forma

$$\tau(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde a, b, c y d son números complejos con $ad - bc \neq 0$. Estas transformaciones son conformes y preservan la orientación. Es fácil ver, que forman un grupo bajo composición, al que se le conoce como grupo de transformaciones de Möbius.

A la transformación τ le podemos asociar la matriz

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

en el grupo $GL(2, \mathbb{C})$, ya que $\det(T) = ad - bc \neq 0$. Observemos que si a cada matriz $T \in GL(2, \mathbb{C})$ le asociamos la transformación de Möbius τ , T y λT definen la misma transformación, pero si le pedimos a T que esté en $SL(2, \mathbb{C})$ podemos construir el homomorfismo de grupos

$$\Theta : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Aut}(\Sigma)$$

donde $\text{Aut}(\Sigma)$ denota al grupo de transformaciones de Möbius. El kernel de Θ está formado por $\pm I$, luego, aplicando el primer teorema de isomorfismos obtenemos que

$$\text{Aut}(\Sigma) \cong SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm I\} \cong PSL(2, \mathbb{C}).$$

Un resultado interesante para estas transformaciones es que si tomamos tres puntos distintos en Σ , z_1, z_2 y z_3 , distintos de ∞ , existe una única

¹El grupo $SL(2, \mathbb{R})$ tiene características muy similares, ver [25] y [23].

transformación de Möbius τ tal que $\tau(z_1) = 0$, $\tau(z_2) = 1$ y $\tau(z_3) = \infty$, dada por

$$\tau(z) = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z)}.$$

Es decir, si tomamos dos tercias ordenadas de puntos distintos en Σ , (z_1, z_2, z_3) y (w_1, w_2, w_3) , existe una única transformación de Möbius tal que $\tau(z_j) = w_j$, para $j = 1, 2, 3$ ². Esto implica que una transformación de Möbius distinta de la identidad deja fijos a lo más dos puntos. Es decir, a cada tercia ordenada de puntos distintos en Σ le podemos asignar una única transformación de Möbius, o bien un único elemento de $PSL(2, \mathbb{C})$. Cada tercia de puntos define también un círculo en Σ , que es un plano intersectando a la esfera.

Definición 2.2.1 *La razón cruzada entre cuatro puntos distintos en Σ , z_0, z_1, z_2 y z_3 está definida como*

$$(z_0, z_1; z_2, z_3) = \frac{(z_0 - z_1)(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_0)}.$$

Observemos que esta definición es equivalente a decir que la razón cruzada de cuatro puntos distintos en Σ , z_0, z_1, z_2 y z_3 , es la imagen de z_0 bajo la transformación de Möbius que manda z_1, z_2 y z_3 en $0, 1, \infty$, respectivamente. Tenemos los siguientes resultados.

Lema 2.2.2 *Dados los conjuntos de puntos (z_0, z_1, z_2, z_3) y (w_0, w_1, w_2, w_3) en Σ existe una transformación de Möbius τ , tal que $\tau(z_i) = w_i$ si y sólo si*

$$(z_0, z_1; z_2, z_3) = (w_0, w_1; w_2, w_3).$$

Demostración. Supongamos que existe una transformación de Möbius τ , tal que $\tau(z_j) = w_j$. Sea $\xi(z) = (z, z_1; z_2, z_3)$, entonces $\xi\tau^{-1}$ manda a w_1, w_2 y w_3 en $0, 1$ y ∞ , respectivamente. Entonces,

$$(w_0, w_1; w_2, w_3) = \xi\tau^{-1}(w_0) = \xi(z_0) = (z_0, z_1; z_2, z_3).$$

Ahora, supongamos que

$$(z_0, z_1; z_2, z_3) = (w_0, w_1; w_2, w_3),$$

y sean $\xi(z) = (z, z_1; z_2, z_3)$, $\tau(w) = (w, w_1; w_2, w_3)$ dos transformaciones lineales, entonces $\xi\tau^{-1}$ manda a z_i en w_i , para $i = 0, 1, 2, 3$.

□

²La demostración formal de esto se puede encontrar en el libro [17].

Lema 2.2.3 *La razón cruzada $(z_0, z_1; z_2, z_3)$ es real si y sólo si los cuatro puntos son concíclicos o están alineados.*

Demostración. Basta probar que la imagen del eje real bajo cualquier transformación lineal es una circunferencia o una recta. De hecho, si tomamos $\tau(z) = (z, z_1; z_2, z_3)$ es real cuando está en el eje real. Los valores $w = \tau^{-1}(z)$, con z real, satisfacen que $\tau(w) = \bar{\tau}(w)$. Es decir,

$$\frac{aw + b}{cw + d} = \frac{\bar{a}w + \bar{b}}{\bar{c}w + \bar{d}}.$$

Multiplicando obtenemos que

$$(a\bar{c} - c\bar{a})|w|^2 + (a\bar{d} - c\bar{b})w + (b\bar{c} - d\bar{a})w + b\bar{d} - d\bar{b} = 0.$$

Si $a\bar{c} - c\bar{a} = 0$, tenemos la ecuación de una recta. Si $a\bar{c} - c\bar{a} \neq 0$, podemos dividir por esto y acompletar cuadrados para obtener

$$\left| w - \frac{\bar{a}d - \bar{c}b}{\bar{a}c - \bar{c}a} \right| = \left| \frac{ad - bc}{\bar{a}c - \bar{c}a} \right|,$$

que es la ecuación de una circunferencia. □

Es claro ahora que una transformación lineal transforma rectas y circunferencias, en rectas y circunferencias.

Veamos ahora quiénes son los generadores del grupo $PSL(2, \mathbb{C})$.

Proposición 2.2.4 *El grupo de las transformaciones de Möbius, $PSL(2, \mathbb{C})$, está generado por elementos de las siguientes formas*

- (i) *rotaciones $z \mapsto e^{i\eta}z$, con $\eta \in \mathbb{R}$*
- (ii) *inversiones $z \mapsto \frac{1}{z}$.*
- (iii) *dilataciones $z \mapsto rz$, con $r \in \mathbb{R}$ y $r > 0$.*
- (iv) *traslaciones $z \mapsto z + w$, con $w \in \mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ una transformación de Möbius con $ad - bc = 1$. Consideremos el primer caso donde $c = 0$, entonces

$$T(z) = \frac{a}{d} \cdot z + \frac{b}{d},$$

es decir, está generado por elementos de las formas anteriores. En el caso donde $c \neq 0$, podemos ver la transformación como

$$T(z) = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + \frac{1}{w},$$

donde $w = -(c^2z + cd)$, que es una transformación de Möbius del caso anterior.

□

Definamos, ahora, el plano hiperbólico de dimensión n

$$\mathbb{H}^n = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid t > 0\}$$

donde estamos denotando a un punto en \mathbb{R}^n por (x, t) para diferenciar la última coordenada. Luego, equipamos a \mathbb{H}^n con la métrica de Poincaré dada por

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dt^2}{t^2}. \quad (2.1)$$

Entonces, tenemos que

$$\hat{\mathbb{R}}^{n-1} = \partial\mathbb{H}^n.$$

Denotemos por G^n al grupo generado por los siguientes elementos:

- (I) rotaciones $(x, t) \mapsto (A(x), t)$, con $A \in O(n-1)$.³
- (II) inversiones $(x, t) \mapsto \frac{(x, t)}{|(x, t)|^2}$ donde la norma que estamos tomando es la de \mathbb{R}^{n+1} .
- (III) dilataciones $(x, t) \mapsto (rx, rt)$, con $r \in \mathbb{R}$ y $r > 0$.
- (IV) traslaciones $(x, t) \mapsto (x + a, t)$, con $a \in \mathbb{R}^n$.

Los elementos de G^n actúan como transformaciones conformes en \mathbb{R}^{n+1} y $\hat{\mathbb{R}}^n$. Si observamos el caso de G^3 actuando en $\hat{\mathbb{R}}^2 = \hat{\mathbb{C}} \cong \Sigma$, tenemos que los elementos de tipo (II) son las inversiones en la esfera unitaria, luego, los generadores de G^3 son los mismos que los de $PSL(2, \mathbb{C})$.

Proposición 2.2.5 G^n es un grupo de isometrías de \mathbb{H}^n .

³El grupo $O(n-1)$ es el grupo ortogonal, $O(n-1) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid AA^t = I\}$.

Demostración. Las traslaciones y las rotaciones son isometrías ya que preservan a t y a $dx^2 + dt^2$. Tomemos $x_{n+1} = t$ para facilitar la notación. Para la dilatación llamemos g al mapeo, $g(x, t) = (rx, rt)$, lo podemos escribir en coordenadas como $g = (g_1, g_2, \dots, g_{n+1})$. Entonces

$$\sum_{m=1}^{n+1} dg_m^2 = \lambda^2 \sum_{m=1}^n dx_m^2,$$

luego,

$$g_{n+1}^{-2} \sum_{m=1}^{n+1} dg_m^2 = t^{-2} \sum_{m=1}^{n+1} dx_m^2.$$

Ahora, detonemos por f a las inversiones y tomemos $f = (f_1, f_2, \dots, f_{n+1})$. Tenemos que

$$\frac{\partial f_m}{\partial x_m} = |x|^{-2} \delta_{km} - 2x_k x_m |x|^{-4},$$

con $\delta_{km} = 1$ si $k = m$ y $\delta_{km} = 0$ si $k \neq m$. Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n+1} \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \frac{\partial f_m}{\partial x_k} &= |x|^{-8} \sum_m (|x|^2 \delta_{mj} - 2x_m x_j) (|x|^2 \delta_{km} - 2x_k x_m) \\ &= |x|^{-8} \sum_m (|x|^4 \delta_{mj} \delta_{km} - 2\delta_{jm} x_k x_m |x|^2 - 2\delta_{km} x_m x_j |x|^2 + 4x_m^2 x_j x_k) \\ &= |x|^{-8} (|x|^4 \delta_{jk} - 4x_j x_k |x|^2 + 4x_j x_k \sum_m x_m^2) \\ &= |x|^{-4} \delta_{jk}. \end{aligned}$$

Es fácil ver ahora que

$$\sum (df_m)^2 = |x|^{-4} \sum (dx_m)^2.$$

Con lo que queda demostrado que G^n es un grupo de isometrías de \mathbb{H}^n . \square

Ahora queremos demostrar que, de hecho, G^n es el grupo de isometrías de \mathbb{H}^n . Para esto necesitamos el siguiente teorema de Liouville.

Teorema 2.2.6 Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, una transformación conforme de un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, f es la restricción a U de una composición de isometrías (traslaciones, rotaciones), dilataciones e inversiones de \mathbb{R}^n . Es decir, $f \in G^n$.

Demostración. Observemos primero que $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una transformación conforme si $\forall p \in U$ y todo par de vectores v_1, v_2 en p se cumple que

$$\langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle = \lambda^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle, \quad (2.2)$$

con $\lambda \neq 0$, y donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno usual de \mathbb{R}^n . En este caso, $|df_p(v)|^2 = \lambda^2|v|^2$ para todo vector v anclado en p . Llamamos a λ el coeficiente de conformidad de f en p .

Sean e_1, e_2, \dots, e_n la base canónica de \mathbb{R}^n . Sean a_1, a_2, \dots, a_n campos vectoriales diferenciables en U , tales que en cada punto de U , $\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij}$. Si λ es el coeficiente de conformidad de f , tenemos que

$$\langle df(a_i), df(a_j) \rangle = \lambda^2 \delta_{ij}. \quad (2.3)$$

Tomemos d^2f , la segunda derivada de f , $d^2f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una forma bilineal simétrica y en la base canónica se cumple que, $d^2f(e_i, e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Si tomamos $i \neq j \neq k$, diferenciando 2.3 obtenemos

$$\begin{aligned} \langle d^2f(a_i, a_k), df(a_j) \rangle + \langle df(a_i), d^2f(a_j, a_k) \rangle &= 0 \\ \langle d^2f(a_k, a_j), df(a_i) \rangle + \langle df(a_k), d^2f(a_j, a_j) \rangle &= 0 \\ \langle d^2f(a_i, a_j), df(a_k) \rangle + \langle df(a_j), d^2f(a_i, a_k) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Sumando las primeras dos ecuaciones y restando la tercera, tenemos

$$\langle d^2f(a_k, a_j), df(a_i) \rangle = 0.$$

Si fijamos j, k y dejamos que i varíe en los $n - 2$ términos restantes, concluimos que $d^2f(a_k, a_j)$ está en el plano generado por $df(a_k)$ y $df(a_j)$. Luego,

$$d^2f(a_k, a_j) = \mu df(a_k) + \nu df(a_j),$$

y como $|df(a_k)|^2 = |df(a_j)|^2 = \lambda^2$,

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\langle d^2f(a_k, a_j), df(a_k) \rangle}{\lambda^2} = \frac{\lambda d\lambda(a_j)}{\lambda^2} = \frac{d\lambda(a_j)}{\lambda} \\ \nu &= \frac{d\lambda(a_k)}{\lambda}, \end{aligned}$$

donde $d\lambda$ es la derivada de la función definida por la ecuación 2.2, ver [5] en la sección 5 del capítulo 8. Luego,

$$d^2f(a_k, a_j) = \frac{1}{\lambda} (df(a_k)d\lambda(a_j) + df(a_j)d\lambda(a_k)). \quad (2.4)$$

Llamemos $\rho = \frac{1}{\lambda}$. Ahora, vamos a calcular la segunda derivada $d^2(\rho f)$. Como $d(\rho f) = d(\rho)f + \rho df$, utilizando 2.4, tenemos que

$$\begin{aligned} d^2(\rho f)(a_k, a_j) &= d^2\rho(a_k, a_j)f + \rho d^2 f(a_k, a_j) + d\rho(a_k)df(a_j) + d\rho(a_j)df(a_k) \\ &= d^2\rho(a_k, a_j)f + \frac{1}{\lambda}d^2 f(a_k, a_j) \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^2}(d\lambda(a_k)df(a_j) + d\lambda(a_j)df(a_k)) \\ &= d^2\rho(a_k, a_j)f. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Veamos que $d^2\rho(a_k, a_j) = 0$, para $k \neq j$. Para esto, calculemos $d^3(\rho f)$, el mapeo trilineal simétrico de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Utilizando 2.5, tenemos que

$$d^3(\rho f)(a_k, a_j, a_i) = d^3\rho(a_k, a_j, a_i)f + d^2\rho(a_k, a_j)df(a_i).$$

El primer miembro de la expresión y la primera parte del segundo son simétricos en los índices. Luego,

$$d^2\rho(a_k, a_j)df(a_i) = d^2\rho(a_k, a_i)df(a_j).$$

Como $df(a_i)$ y $df(a_j)$ son linealmente independientes cuando $i \neq j \neq k$, tenemos que $d^2\rho(a_k, a_j) = 0$ para toda $k \neq j$.

Observemos que si fijamos $p \in U$, podemos escoger los campos vectoriales a_1, a_2, \dots, a_n de tal forma que formen una base ortonormal en p . Entonces, la relación $d^2\rho(a_k, a_j) = 0$ es válida en p para cualquier base ortonormal en p , y podemos extender esto a todo U . Como $d^2\rho$ es una forma bilineal simétrica y

$$0 = d^2\rho\left(\frac{a_j + a_k}{\sqrt{2}}, \frac{a_j - a_k}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}(d^2\rho(a_j, a_j) - d^2\rho(a_k, a_k)),$$

tenemos que $d^2 f(a_j, a_j) = d^2\rho(a_k, a_k)$ para toda j, k .

Luego, tenemos que

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} = \sigma \delta_{ij}. \tag{2.6}$$

Derivando, con $i \neq j$,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} = \frac{\partial^3 \rho}{\partial x_i \partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^3 \rho}{\partial x_j \partial x_i \partial x_j} = 0,$$

es decir, σ es constante.

Primero, vamos a ver el caso $\sigma \neq 0$. Tenemos que $\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} = \sigma$, luego

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \sigma x_i + \sigma b_i,$$

donde b_i es una constante. Luego,

$$\rho = \frac{1}{2} \sigma x_i^2 + \sigma b_i x_i + \phi_i,$$

donde ϕ_i no depende de x_i , ya que $\frac{\partial \rho}{\partial x_j} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}$ para toda $i \neq j$. Es decir,

$$\phi_i = \frac{1}{2} \sigma x_j^2 + \sigma b_j x_j + \phi_{ij},$$

donde ϕ_{ij} no depende de x_i ni de x_j .

Inductivamente obtenemos que

$$\rho = \frac{\sigma}{2} \sum x_i^2 + \sigma \sum b_i x_i + c, \quad (2.7)$$

donde b_i y c son constantes. Como $\sigma \neq 0$, podemos escribir a 2.7 como

$$\rho = \frac{\sigma}{2} |p - p_0|^2 + k_1,$$

con k_1 constante y $p_0 \in \mathbb{R}^n$.

Falta ver que $k_1 = 0$. Para esto, consideremos la inversión $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$g(p) = \frac{p - p_0}{|p - p_0|^2} + p_0.$$

Tomemos $h = g \cdot f^{-1}$, es conforme y su coeficiente de conformidad es

$$\frac{\sigma |p - p_0|^2}{2 |p - p_0|^2} = \frac{\sigma}{2}.$$

Luego, h es una isometría seguida de una dilatación. Es decir, $f = h^{-1} \cdot g$ es una inversión seguida de una dilatación, seguida de una isometría.

Aplicando el argumento anterior a f^{-1} , obtenemos que

$$\lambda = a |f(p) - q_0|^2 + k_2,$$

con a y k_2 constantes, entonces

$$\left(\frac{\sigma}{2} |p - p_0|^2 + k_1 \right) (a |f(p) - q_0|^2 + k_2) = 1. \quad (2.8)$$

La ecuación 2.8, muestra que una esfera con centro en p_0 se transforma en una esfera con centro en q_0 . Sea $p(s)$, $0 \leq s \leq s_0$, un segmento de un radio de la primera esfera contenido en U , con s la longitud de arco. Sea $f \cdot p(s)$ su imagen, la longitud de este segmento está dada por

$$\int_0^{s_0} \left| df \left(\frac{dp}{ds} \right) \right| ds = \int_0^{s_0} \frac{ds}{\frac{\sigma}{2}|p-p_0|^2 + k_1} = |f(p(s_0)) - f(p(0))|.$$

Si $k_1 \neq 0$, $|f(p(s_0)) - f(p(0))|$ es una función trascendental de $|p(s_0) - p_0|$, pero por 2.8, debe de ser algebraica. Es decir, $k_1 = 0$. Con esto terminamos el primer caso.

Falta considerar, el caso $\sigma = 0$. En este caso tenemos que

$$\rho = \sum b_i x_i + c_1 = A(x) + c_1,$$

con c_1 constante. Aplicando esto a f^{-1} , obtenemos que

$$(A_1(x) + c_1)(A_2(x) + c_2) = 1. \quad (2.9)$$

Esto implica que un hiperplano paralelo a $A_1(x) = 0$ es transformado bajo f en un hiperplano paralelo a $A_2(f(x)) = 0$. Luego, una perpendicular al hiperplano $A_1(x) = 0$ se transforma en una perpendicular al hiperplano $A_2(f(x)) = 0$. Considerando un segmento $p(s)$, $0 \leq s \leq s_0$ de dicha perpendicular, tenemos, análogamente al caso anterior, que

$$|f(p(s_0)) - f(p(0))| = \int_0^{s_0} \frac{ds}{A_1(p(s)) + c_1}.$$

Esto contradice a la ecuación 2.9, a menos que, $A_1(p(s)) = 0$. Luego, si $\sigma = 0$, λ es constante y f es una isometría seguida de una dilatación.

Para $n = 2$, los mapeos conformes son las transformaciones holomorfas y anti-holomorfas (aquellas que la función conjugada en los complejos es holomorfa).

□

Con esto tenemos que todas las transformaciones conformes de \mathbb{R}^n , para $n \geq 3$, son las de G^n . Con el siguiente teorema concluimos que G^n es el grupo de isometrías de \mathbb{H}^n .

Teorema 2.2.7 *Las isometrías de \mathbb{H}^n son las restricciones a $\mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^n$ de las transformaciones conformes (elementos de G^n) de \mathbb{R}^n que dejan a \mathbb{H}^n invariante.*

Demostración. Tomemos primero $n \geq 3$. Sea $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ una isometría con la métrica de Poincaré, 2.1. Entonces, por el teorema 2.2.6, f es un mapeo conforme de \mathbb{R}^n .

Ahora, $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ es una transformación conforme y sobre. Sea e_1, e_2, \dots, e_n una base ortonormal en un punto $p \in \mathbb{H}^n$. Como f es conforme, existe $\lambda^2 > 0$ tal que

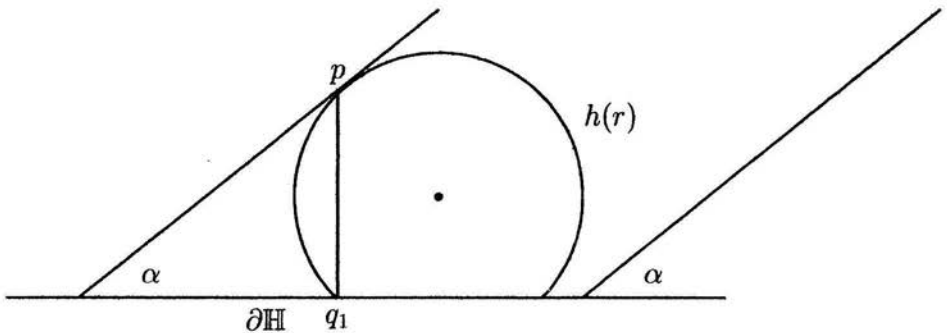
$$\langle df_p(e_i), df_p(e_j) \rangle = \lambda^2 \delta_{ij},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno de la métrica de Poincaré. Entonces, la base $\left\{ \frac{df_p(e_i)}{\lambda} \right\}_i$ es ortonormal en $f(p)$. Utilizando el teorema de Cartan, ver [5] capítulo 8 sección 2, hay una isometría g de \mathbb{H}^n tal que $g(p) = f(p)$ y $dg_p(e_i) = \frac{df_p(e_i)}{\lambda}$. Entonces, $h = g^{-1} \cdot f$ es la restricción a \mathbb{H}^n de un mapeo conforme de \mathbb{R}^n que deja invariante a \mathbb{H}^n , con $h(p) = p$ y $dh_p = \lambda I$.

Basta mostrar que h es la identidad. Para esto, tomemos P , un hiperplano que pasa por p . Por el teorema 2.2.6, $h(P)$ es un hiperplano o una esfera. Como $dh_p = \lambda I$, P y $h(P)$ son tangentes en p . Además, como h es conforme y deja invariante a $\partial\mathbb{H}^n$, el ángulo de P con $\partial\mathbb{H}^n$ es el mismo que el de $h(P)$ con $\partial\mathbb{H}^n$.

Consideremos una línea recta r_1 por p perpendicular a $\partial\mathbb{H}^n$, y sea $q_1 = r_1 \cap \partial\mathbb{H}^n$. Como $h(r_1)$ es un círculo o una línea, y es perpendicular a $\partial\mathbb{H}^n$, tenemos que $h(r_1) = r_1$. Luego, $h(q_1) = q_1$, o bien, si P es perpendicular a $\partial\mathbb{H}^n$ entonces $h(P) = P$.

Si P no es perpendicular, sea r una línea contenida en P , entonces $h(r)$ es una línea o un círculo. Para que $h(r)$ sea un círculo, es necesario que $q_1 \in h(r)$, ver la figura, lo que contradice que $h(q_1) = q_1$.



Entonces, $h(r)$ es una línea y como r es arbitraria, $h(P) = P$. Luego, h no puede ser una inversión o una isometría distinta a la iden-

tividad. Podría ser una dilatación, pero como es sobre y deja invariante a \mathbb{H}^n , h es la identidad.

Para $n = 2$, es fácil ver que las transformaciones conformes son las de la forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc \neq 0$, que son las isometrías de \mathbb{H}^2 .

□

Como ya se dijo, $G^3 = PSL(2, \mathbb{C})$. Para $n \geq 3$ tenemos que G^n es el grupo de Lorentz que está definido como

$$G^n = SO(n, 1) = \{A \in SL(n+1, \mathbb{R}) \mid A^t L A = L L = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, -1)\}.$$

Hay un morfismo natural de $SO(n) \hookrightarrow SO(n, 1)$, donde $SO(n) = \{A \in SL(n, \mathbb{R}) \mid A^t A = I\}$. El grupo G^n actúa de manera transitiva en \mathbb{H}^n , y de forma transitiva y simple en el espacio de marcos ortonormales en el espacio tangente a \mathbb{H}^n . Dado un punto en \mathbb{H}^n su estabilizador es el grupo $SO(n)$, luego hay una identificación natural $\mathbb{H}^n \cong SO(n, 1)/SO(n)$. Entonces el fibrado tangente unitario de \mathbb{H}^n se identifica con $SO(n, 1)/SO(n-1)$.

2.3. $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$

Tenemos de la sección anterior que

$$PSL(2, \mathbb{C}) \cong SL(2, \mathbb{C}) / \pm I \cong \text{Aut}(\Sigma),$$

y $GL(n, \mathbb{C})/SL(n, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Si tomamos $n \geq 2$, $GL(n, \mathbb{C})$ permuta los subespacios de dimensión 1 en \mathbb{C}^n , es decir, permuta las rectas que pasan por el origen. El conjunto de rectas por el origen es el espacio proyectivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$. Entonces, el grupo de transformaciones lineales de $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ está dado por el grupo $GL(n, \mathbb{C})/\{\lambda I\} = PGL(n, \mathbb{C})$, donde $\lambda \in \mathbb{C}^*$. En el caso de los complejos $PGL(n, \mathbb{C}) = PSL(n, \mathbb{C})$, ya que todo elemento de \mathbb{C} tiene raíz n -ésima (en el caso real la igualdad no se cumple, es decir, $PSL(n, \mathbb{R}) \subsetneq PGL(n, \mathbb{R})$).

Si $n = 2$ cada subespacio V de dimensión 1 en \mathbb{C}^2 está generado por un vector no cero, $v = (\alpha, \beta)$. La razón $z = \frac{\alpha}{\beta} \in \hat{\mathbb{C}}$, es independiente de la dirección de v , entonces podemos identificar a $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ con $\hat{\mathbb{C}}$. Tomemos ahora

un elemento $T \in SL(2, \mathbb{C})$,

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

entonces $T(v) = (a\alpha + b\beta, c\alpha + d\beta)$ y su razón es

$$\frac{a\alpha + b\beta}{c\alpha + d\beta} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Esta razón se conserva en todo el subespacio $T(V)$, es decir, las acciones de $SL(2, \mathbb{C})$ en \mathbb{CP}^1 son las mismas que las de las transformaciones de Möbius en $\hat{\mathbb{C}}$. Entonces, podemos identificar la esfera de Riemann con \mathbb{CP}^1 .

A una terna de puntos $(z_1, z_2, z_3) \in \Sigma$, en la esfera de Riemann, le podemos asociar un único elemento $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ tal que

$$T(0) = z_1, \quad T(1) = z_2, \quad T(\infty) = z_3.$$

Tenemos entonces un holomorfismo de $PSL(2, \mathbb{C}) \rightarrow M$, dado por $T \mapsto (T(0), T(1), T(\infty))$, donde

$$\begin{aligned} M &= \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 / \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3 \\ &= \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1 \mid z_1 \neq z_2 \neq z_3, z_1 \neq z_3\}. \end{aligned}$$

Fijémonos sólo en la primera coordenada, es decir, en el holomorfismo

$$\begin{aligned} \phi : PSL(2, \mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{CP}^1 \\ T &\mapsto T(0). \end{aligned}$$

Si tomamos $z \in \mathbb{CP}^1$

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(z) &= \{T \in PSL(2, \mathbb{C}) \mid T(0) = z\} \\ &= \{(z_1, z_2) \mid (z, z_1, z_2) \in M\} \\ &= \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*, \end{aligned}$$

donde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es decir, la fibra de este holomorfismo en cada punto de \mathbb{CP}^1 es $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

Tomemos dos casquetes en la esfera de Riemann $U = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \|z\| \leq 2\}$ y $V = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| \geq 2\}$, estos son espacios de Stein. Entonces, el fibrado vectorial es trivial en los casquetes, es decir, el fibrado en U , respectivamente en V , es de la forma $U \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, así mismo $V \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

La definición más sencilla de un espacio de Stein, que es la que nos interesa, es que toda subvariedad de \mathbb{C}^n es un espacio de Stein. La definición formal es:

Definición 2.3.1 *Un subconjunto cerrado U de un espacio complejo X es un conjunto de Stein si para toda f sheaf analítica coherente, $H^q(X, f) = 0$ para $q \geq 1$. Un espacio complejo que es un conjunto de Stein, es un espacio de Stein.*

Recordemos que al escribir f por una gavilla (sheaf) analítica nos referimos a la tripleta (f, π, X) , donde π es la proyección de $f \rightarrow X$. Denotemos por \mathcal{O}_X a la gavilla de estructura de X . Decimos que una gavilla f de \mathcal{O}_X -módulos es coherente si localmente existe una secuencia exacta

$$\mathcal{O}_X^p \rightarrow \mathcal{O}_X^q \rightarrow f \rightarrow 0,$$

ver [11] o [3].

La transformación de Σ , $z \mapsto \frac{1}{z}$, es un mapeo holomorfo que manda a U en V y pega las dos fibraciones. Es decir, tenemos así una fibración holomorfa de Σ con fibra $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

Capítulo 3

Flujos holomorfos

3.1. Difeomorfismos y flujos de Anosov

Sea M una variedad compacta, sin frontera y diferenciable (de clase C^∞). Tomemos $[\cdot, \cdot]$ una métrica riemanniana de M y denotemos por $|\cdot|_x$ la norma inducida en el espacio tangente $T_x M$, para cada $x \in M$. Sean $D^r(M)$ el grupo de difeomorfismos de M con la topología C^r , $1 \leq r < \infty$, y $f \in D^r(M)$.

Definición 3.1.1 Decimos que f es un difeomorfismo de Anosov si satisface:

- (1) el fibrado vectorial TM se escinde como suma directa de Whitney de dos sub-fibrados vectoriales continuos, E^s y E^u

$$TM = E^s \oplus E^u$$

tales que son invariantes bajo la diferencial df de f .

- (2) Existen constantes C_1, C_2 positivas y $0 < \lambda < 1$ tales que

$$\begin{aligned} |(df^n)_x v| &\leq C_1 \lambda^n |v| \\ |(df^{-n})_x w| &\leq C_2 \lambda^n |w| \end{aligned}$$

para toda $x \in M$, $v \in E_x^s$, $w \in E_x^u$ y toda $n > 0$.

Notemos que como M es compacta, la definición no depende de la métrica riemanniana escogida. Además, los subfibrados E^s y E^u están únicamente determinados por la condiciones en (2).

Ahora pidámosle a M que sea una variedad lisa, compacta, sin frontera y conexa, denotamos por $\chi^r(M)$ al espacio de Banach formado por los campos vectoriales de M con la norma C^r . Sea $X \in \chi^r(M)$ un campo vectorial de clase C^r sin singularidades y $f_t : M \rightarrow M$, $t \in \mathbb{R}$, el flujo inducido al integrar X .

Definición 3.1.2 Decimos que f_t (o el campo vectorial X) es un flujo de Anosov (o un campo vectorial de Anosov) si se cumplen las siguientes propiedades:

- (1) el fibrado vectorial TM se escinde como suma directa de Whitney de tres subfibrados vectoriales continuos, E^s , E^u y E^1

$$TM = E^s \oplus E^u \oplus E^1,$$

tales que E^s y E^u son invariantes bajo la diferencial df_t para toda $t \in \mathbb{R}$ y E^1 es el fibrado en líneas tangentes a X .

- (2) Existen constantes C_1, C_2 y λ positivas, tales que

$$\begin{aligned} |(df_t)_x v| &\leq C_1 e^{-t\lambda} |v| \\ |(df_{-t})_x w| &\leq C_2 e^{-t\lambda} |w|, \end{aligned}$$

para toda $x \in M$, $v \in E_x^s$, $w \in E_x^u$ y toda $t > 0$.

Observemos que como una variedad compacta no admite un difeomorfismo que sea una contracción, las dimensiones de E^u y E^s son positivas. Veamos algunos ejemplos de difeomorfismos de Anosov.

Ejemplo 3.1.3 Primero veamos el ejemplo de los **isomorfismos toroidales**. Decimos que una matriz $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ es hiperbólica si el módulo de sus valores propios es distinto de 1. Por ejemplo, en el caso $n = 2$, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

es hiperbólica.

Si pensamos a A como una transformación lineal de \mathbb{R}^n , también la estamos pensando como un automorfismo del grupo de Lie \mathbb{R}^n con estructura aditiva. Dotemos a \mathbb{R}^n con su métrica usual y denotemos por $|\cdot|$ a

la norma inducida en el fibrado tangente a \mathbb{R}^n . Se tiene que \mathbb{R}^n se escinde como suma directa de dos subespacios

$$\mathbb{R}^n = V^s \oplus V^u,$$

donde V^s y V^u son invariantes bajo A y son los subespacios que corresponden a los valores propios de módulo menor que uno y mayor que uno, respectivamente. Entonces, A preserva a todos los trasladados afines de V^s y V^u .

Denotemos por A_s a la restricción de A al subespacio V^s , existen constantes $C_1 > 0$ y λ_1 tales que

$$|(A_s)^n v| \leq C_1 \lambda_1^n |v|,$$

para todo $v \in V^s$ y para toda $n > 0$. Observemos que $0 < \lambda_1 < 1$ es el máximo de los módulos de los valores propios de A_s . Análogamente, para A_u la restricción de A a V^u , tenemos constantes $C_2 > 0$ y λ_2 tales que

$$|(A_u)^{-n} w| \leq C_2 \lambda_2^n |w|,$$

para toda $w \in V^u$ y $n > 0$. Observemos que $0 < \lambda_2 < 1$ es el máximo de los módulos de los inversos de los valores propios de A_u . Esto implica que el fibrado tangente a \mathbb{R}^n se escinde como suma directa de dos subfibrados \tilde{E}^s y \tilde{E}^u invariantes bajo la diferencial de A .

Como A preserva a la retícula de \mathbb{R}^n con coordenadas enteras, \mathbb{Z}^n , que es un grupo abeliano de rango n , y la restricción de A a \mathbb{Z}^n es un isomorfismo, tenemos que A induce un isomorfismo f_A diferenciable del toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, éste considerado como grupo de Lie abeliano. Tal isomorfismo f_A , inducido por la matriz $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ hiperbólica, se llama un isomorfismo toroidal hiperbólico.

Si $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ denota al homomorfismo canónico, tenemos el siguiente diagrama conmutativo de homomorfismos de grupos de Lie abelianos:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{T}^n & \xrightarrow{f_A} & \mathbb{T}^n \end{array}$$

Bajo π descienden la métrica riemanniana de \mathbb{R}^n y la descomposición $T\mathbb{R}^n = \tilde{E}^s \oplus \tilde{E}^u$, a una métrica riemanniana plana del toro \mathbb{T}^n y la descomposición

$$T\mathbb{T}^n = E^s \oplus E^u$$

del fibrado tangente de \mathbb{T}^n que es invariante bajo df_A . Los vectores del fibrado tangente al toro que pertenecen a E^s se contraen exponencialmente bajo la diferencial de los iterados de f_A , mientras que aquellos que pertenecen a E^u se expanden. Es decir, el difeomorfismo f_A satisface las condiciones de la definición 3.1.1, tomando $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Definición 3.1.4 *Un difeomorfismo $f_A : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ inducido por una matriz hiperbólica $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ se llama un difeomorfismo hiperbólico toroidal de Anosov.*

Ejemplo 3.1.5 Veamos ahora los **difeomorfismos hiperbólicos en nilvariedades**, para esto vamos a generalizar la construcción anterior a algunos grupos de Lie.

Sea G un grupo de Lie simplemente conexo provisto de una métrica invariante bajo traslaciones a la izquierda, y sea \mathfrak{g} su álgebra de Lie. Supongamos que existe un subgrupo Γ de G discreto y cocompacto, es decir, discreto y uniforme (que el elemento neutro de Γ sea aislado y el cociente $M = G/\Gamma$ sea una variedad compacta). Supongamos también, que existe un automorfismo del álgebra de Lie $A : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ que como transformación lineal es hiperbólica y que el isomorfismo $F_A : G \rightarrow G$ de grupos de Lie, inducido por A , deje invariante a Γ . En este caso, F_A induce un difeomorfismo $f_A : M \rightarrow M$ cuya derivada en el elemento neutro es A (recordemos que se puede identificar a \mathfrak{g} con T_eG). Se tiene que f_A es de Anosov.

El álgebra de Lie \mathfrak{g} se escinde como una suma directa de dos subálgebras \mathfrak{g}^s y \mathfrak{g}^u , $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^s \oplus \mathfrak{g}^u$, que son los subespacios correspondientes a los valores propios de A de módulo menor y mayor que uno, respectivamente. Para descomponer el fibrado tangente a G , trasladamos \mathfrak{g}^s y \mathfrak{g}^u al espacio T_gG bajo la diferencial de la traslación a la izquierda por el elemento $g \in G$.

Veamos ahora la condición necesaria para que exista un grupo de Lie que posea un automorfismo cuya derivada en e sea hiperbólica.

Proposición 3.1.6 *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita que posee un automorfismo de álgebra de Lie $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$. Entonces, \mathfrak{g} es un álgebra de Lie nilpotente, por lo tanto, el grupo de Lie simplemente conexo, G que tiene a \mathfrak{g} como álgebra de Lie, es también nilpotente.*

Necesitamos ahora saber cuáles grupos de Lie simplemente conexos poseen subgrupos discretos uniformes. Tenemos el siguiente teorema de Malcev, la demostración está en [19]:

Teorema 3.1.7

- (i) Una condición necesaria y suficiente para que un grupo discreto Γ sea un subgrupo uniforme de un grupo de Lie nilpotente es que Γ sea nilpotente, finitamente generado y libre de torsión.
- (ii) Una condición necesaria y suficiente para que un grupo de Lie nilpotente G posea un subgrupo discreto y cocompacto Γ es que las constantes de estructura del álgebra de Lie sean números racionales con respecto a una base apropiada de \mathfrak{g} , es decir, que exista una base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tal que

$$[e_i, e_j] = \sum_k C_{ij}^k e_k, \quad \text{con } C_{ij}^k \in \mathbb{Q}.$$

- (iii) Sean Γ_1 y Γ_2 subgrupos discretos y uniformes de grupos de Lie nilpotentes G_1 y G_2 , respectivamente. Entonces, cualquier isomorfismo $\phi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ se extiende a un isomorfismo $\Phi : G_1 \rightarrow G_2$.

Una variedad compacta $M = G/\Gamma$, donde G es un grupo de Lie nilpotente y Γ un subgrupo discreto y uniforme de G se llama nilvariedad.

Un ejemplo concreto de un difeomorfismo de Anosov de una nilvariedad fue sugerido por A. Borel y consiste en lo siguiente. Sea H el único grupo de Lie simplemente conexo y no abeliano de dimensión 3, el grupo de Heisenberg

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Tomemos el subgrupo

$$\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}(\sqrt{3}) \right\},$$

donde $\mathbb{Z}(\sqrt{3}) = \{m + n\sqrt{3} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ son los enteros algebraicos de $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Este grupo no es discreto, de hecho es denso en H . Sin embargo, Γ se puede meter como subgrupo discreto del grupo $G = H \times H$ como describimos a continuación. Por comodidad, denotemos a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

como $A = [a, b, c]$. Sea $\Psi : \Gamma \rightarrow H \times H$ el monomorfismo tal que:

$$\Psi([\alpha, \beta, \gamma]) = ([\alpha, \beta, \gamma], [\sigma(\alpha), \sigma(\beta), \sigma(\gamma)]),$$

donde $\sigma(m + n\sqrt{3}) = m - n\sqrt{3}$, que es el isomorfismo trivial de Galois del campo $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Denotemos por $\tilde{\Gamma} = \Psi(\Gamma)$, este subgrupo es discreto en $H \times H$.

Lema 3.1.8 *El grupo $\tilde{\Gamma}$ es uniforme.*

Demostración. El grupo Γ es nilpotente y pertenece a la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}^2 \rightarrow \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}^4 \rightarrow 0,$$

que proviene del epimorfismo de Γ en \mathbb{Z}^4 dado por:

$$[\alpha, \beta, \gamma] = [m_1 + n_1\sqrt{3}, m_2 + n_2\sqrt{3}, m_3 + n_3\sqrt{3}] \mapsto (m_1, n_1, m_3, n_3).$$

Entonces, Γ es el grupo fundamental de una 6-variedad compacta y orientable, que fibra sobre el toro $\mathbb{T}^4 = \mathbb{R}^4/\mathbb{Z}^4$ con fibra \mathbb{T}^2 . Por lo que el grupo de homología $H_6(\Gamma, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, entonces $H_6(G/\tilde{\Gamma}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, ya que son espacios de Eilenberg-MacLane $K(\Gamma, 1)$.

Por lo tanto, la variedad $G/\tilde{\Gamma}$ es compacta. □

Sean $\lambda = 2 + \sqrt{3}$ y $\Phi : G \rightarrow G$, $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, el isomorfismo dado por

$$\Phi([a, b, c], [d, e, f]) = ([\lambda a, \lambda^3 b, \lambda^2 c], [\lambda^{-1} \sigma(d), \lambda^{-3} \sigma(e), \lambda^{-2} \sigma(f)]).$$

Como $\lambda \sigma(\lambda) = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$, tenemos que Φ es un isomorfismo que preserva a $\tilde{\Gamma}$. La diferencial de Φ en el elemento neutro es la matriz

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix}$$

que es una matriz hiperbólica. Por lo tanto, Φ es un difeomorfismo de Anosov en $G/\tilde{\Gamma}$.

Ejemplo 3.1.9 Ahora vamos a hacer el ejemplo anterior pero utilizando el grupo de Heissenberg complejo formado por la matrices

$$H_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{C} \right\}.$$

Tomemos el subgrupo

$$\Gamma_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}(\sqrt{-1}) \right\},$$

donde $\mathbb{Z}\{\sqrt{-1}\}$ es el anillo de los enteros gaussianos. Este subgrupo es isomorfo a \mathbb{Z}^6 y por lo tanto discreto en $H_{\mathbb{C}}$. Observemos que $H_{\mathbb{C}}$ es nilpotente, $\Gamma_{\mathbb{C}}$ también. Además $\Gamma_{\mathbb{C}}$ es finitamente generado y libre de torsión. Luego, utilizando el teorema 3.1.7 tenemos que $\Gamma_{\mathbb{C}}$ es un subgrupo uniforme de $H_{\mathbb{C}}$. Entonces, $H_{\mathbb{C}}/\Gamma_{\mathbb{C}}$ es compacto.

Sea $\Phi : H_{\mathbb{C}} \rightarrow H_{\mathbb{C}}$ un isomorfismo tal que

$$\Phi([a, b, c]) = [\lambda a, \lambda^3 b, \lambda^2 c].$$

Observemos que para que $\Phi(\Gamma_{\mathbb{C}}) \subset \Gamma_{\mathbb{C}}$ basta pedir que $\lambda \in \mathbb{Z}\{i\}$ ($i = \sqrt{-1}$). La diferencial de Φ en el elemento neutro es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

Para que sea un isomorfismo de Anosov basta con que la matriz sea hiperbólica, es decir que el módulo de λ , λ^2 y λ^3 sea distinto de 1. Podemos tomar $\lambda = 2 - 2i$ y tenemos así un isomorfismo de Anosov en $H_{\mathbb{C}}/\Gamma_{\mathbb{C}}$.

Observemos que si repetimos la construcción del ejemplo anterior tenemos que el subgrupo

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{\mathbb{C}} &= \Psi(\Gamma_{\mathbb{C}}) \\ &= ([\alpha, \beta, \gamma], [\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}]), \end{aligned}$$

es discreto en $H_{\mathbb{C}} \times H_{\mathbb{C}}$. Para ver que $\tilde{\Gamma}_{\mathbb{C}}$ es un subgrupo uniforme solo hay que repetir la demostración del ejemplo anterior.

Para generar un isomorfismo de Anosov en $(H_{\mathbb{C}} \times H_{\mathbb{C}})/\tilde{\Gamma}_{\mathbb{C}}$ necesitamos un elemento $\lambda \in \mathbb{Z}\{i\}$ que preserve a $\tilde{\Gamma}_{\mathbb{C}}$. Luego, necesitamos al menos que $\lambda\bar{\lambda} = 1$, es decir $\lambda = 1, i$. La primera posibilidad no genera ninguna dinámica, y con la segunda el isomorfismo generado será a lo más de orden 4, y la dinámica será pobre.

3.2. Flujos holomorfos de Anosov

En esta sección vamos a estudiar los flujos de Anosov en 3-variedades compactas complejas. Consideremos una acción holomorfa ϕ de \mathbb{C}^* en una variedad compacta sobre los complejos M , denotada por

$$(T, x) \in \mathbb{C}^* \times M \mapsto \phi(T)x \in M.$$

Equipando a M con una métrica hermitiana, $\|\cdot\|$, tenemos la siguiente definición equivalente a la definición 3.1.2 de la sección 3.1.

Definición 3.2.1 *El flujo holomorfo ϕ es de Anosov si se cumplen las siguientes propiedades:*

(i) *el fibrado vectorial $T_{\mathbb{R}}M$ se escinde como suma directa de los subfibrados vectoriales E^s , E^u y E^1 , donde E^1 es el subfibrado, de dimensión 2, tangente a las órbitas de ϕ .*

(ii) *existen constantes C y α positivas tales que*

$$\begin{aligned} \|d\phi(T)(v)\| &\leq C|T|^{-\alpha}\|v\| \\ \|d\phi(T)(w)\| &\leq C|T|^{\alpha}\|w\|, \end{aligned}$$

para toda $T \in \mathbb{C}^$, $v \in E^s$ y $w \in E^u$.*

Observemos que si ϕ es una acción de \mathbb{C}^* y tomamos una $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, podemos definir otra acción ϕ_k dada por $\phi_k(T) = \phi(T^k)$. Si ϕ es un flujo de Anosov, entonces ϕ_k es de Anosov tomando los mismos subfibrados E^s y E^u cuando $k > 0$. Si $k < 0$, tomamos los subfibrados E^s y E^u al revés. Como todas las k -ésimas raíces de la unidad actúan trivialmente bajo ϕ_k , ϕ_k no es una acción efectiva. Por otro lado, cualquier flujo holomorfo de Anosov es de la forma ϕ_k para alguna k y una acción efectiva ϕ . Es decir, podemos considerar que los flujos holomorfos de Anosov son efectivos.

Una forma de construir ejemplos es escoger subgrupos discretos cocompactos Γ de $SL(2, \mathbb{C})$, es decir, que sean discretos y que las variedades cocientes $M = SL(2, \mathbb{C})/\Gamma$ sean compactas. La variedad compleja $M = SL(2, \mathbb{C})/\Gamma$ tiene dimensión 3. La acción de \mathbb{C}^* en $SL(2, \mathbb{C})$ dada por la traslación a la derecha por la matriz

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix},$$

conmuta con las traslaciones a la izquierda e induce una acción de \mathbb{C}^* en M , la cual es un flujo holomorfo de Anosov. La prueba de este hecho es igual a la correspondiente para el dominio real (ver [7]).

Estos ejemplos se pueden modificar de la siguiente forma. Sea Γ un subgrupo discreto y cocompacto de $SL(2, \mathbb{C})$. Como $PSL(2, \mathbb{C})$ es el grupo de isometrías del espacio hiperbólico \mathbb{H}^3 , ver la sección 2.2, Γ es el grupo fundamental de un orbifold hiperbólico.

Hay ejemplos con primer número de Betti distinto de cero¹, es decir, en los que existe un homomorfismo $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ no trivial. Tomemos uno de estos homomorfismos y la acción derecha de Γ en $SL(2, \mathbb{C})$ dada por

$$(x, \gamma) \in SL(2, \mathbb{C}) \times \Gamma \mapsto x \cdot \gamma = \begin{pmatrix} u(\gamma) & 0 \\ 0 & u(\gamma)^{-1} \end{pmatrix} x \gamma \in SL(2, \mathbb{C}). \quad (3.1)$$

Si esta acción es libre, propia y totalmente discontinua, tomamos el cociente $SL(2, \mathbb{C})/{}_u\Gamma$, y decimos que u es admisible. En este cociente, tenemos una acción de \mathbb{C}^* dada por la multiplicación por la izquierda de la matriz

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Tomemos a H^+ y H^- los campos vectoriales holomorfos en $SL(2, \mathbb{C})$ que corresponden a los elementos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

que son elementos del álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Notemos que H^+ y H^- son invariantes cuando multiplicamos por la derecha con la matriz (3.2). Entonces, podemos tomar las foliaciones, de dimensión 1, \mathcal{H}^+ y \mathcal{H}^- generadas por H^+ y H^- , respectivamente.

La diferencial de la acción (3.1) en $SL(2, \mathbb{C})$ mapea a H^+ en $u(\gamma)^2 H^+$ y a H^- en $u(\gamma)^{-2} H^-$. Entonces, H^+ y H^- no son invariantes bajo la diferencial a menos que u^2 sea trivial. Sin embargo, las foliaciones \mathcal{H}^+ y \mathcal{H}^- son invariantes. Es decir, en la variedad compacta $SL(2, \mathbb{C})/{}_u\Gamma$ tenemos dos foliaciones que son invariantes bajo la acción. Cuando u^2 es trivial, las foliaciones están parametrizadas por los campos vectoriales H^+ y H^- los

¹Ver definición en la sección 4.3.

cuales se expanden y contraen bajo la acción (3.1). Luego, al menos en este caso, tenemos un flujo holomorfo de Anosov.

Para simplificar los ejemplos, podemos asumir que Γ es libre de torsión. De hecho, si consideramos el homomorfismo $\epsilon : \Gamma \rightarrow \{\pm 1\}$, el mapeo

$$\tau : \gamma \in \Gamma \mapsto \epsilon(\gamma)\gamma \in SL(2, \mathbb{C})$$

es un homomorfismo inyectivo cuya imagen es otro subgrupo discreto Γ' (escribimos $\Gamma = \pm\Gamma'$). Esto pasa cuando Γ y Γ' tienen la misma proyección en $PSL(2, \mathbb{C})$. Entonces, $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ es admisible si y sólo si $u \cdot \tau^{-1} : \Gamma' \rightarrow \mathbb{C}^*$ es admisible y las acciones correspondientes son conjugadas.

Proposición 3.2.2 *Sea Γ un subgrupo discreto cocompacto de $SL(2, \mathbb{C})$ libre de torsión. Entonces, si $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$ es admisible, la acción de \mathbb{C}^* correspondiente en $SL(2, \mathbb{C})/{}_u\Gamma$ genera un flujo holomorfo de Anosov.*

Además, sean Γ_1 y Γ_2 dos subgrupos discretos cocompactos de $SL(2, \mathbb{C})$ libres de torsión. Entonces, $SL(2, \mathbb{C})/_{u_1}\Gamma_1$ y $SL(2, \mathbb{C})/_{u_2}\Gamma_2$ son homeomorfos si y sólo si hay un automorfismo Θ continuo de $SL(2, \mathbb{C})$, tal que $\Theta(\Gamma_1) = \pm\Gamma_2$.

La segunda forma de construir ejemplos es por **suspensión holomorfa**. Sea Λ una retícula en \mathbb{C}^2 , es decir, un subgrupo discreto y cocompacto de \mathbb{C}^2 como grupo aditivo, es decir, Λ debe ser isomorfa a \mathbb{Z}^4 . Tomemos Φ un automorfismo complejo lineal de \mathbb{C}^2 que preserva a Λ , es decir, que induce un automorfismo de Λ . Supongamos que Φ tiene un valor propio ω de módulo distinto de uno. Claramente, para Λ arbitraria tal automorfismo podría no existir, pero más adelante, en la sección 3.4 veremos ejemplos en los que si existe.

Consideremos $T_\Lambda = \mathbb{C}^2/\Lambda$, el toro complejo correspondiente y $\bar{\Phi} : T_\Lambda \rightarrow T_\Lambda$ el holomorfo inducido por Φ . Sea Y un vector propio tal que $\Phi(Y) = \omega Y$. En $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*$ tenemos una acción por la derecha de Aff_k dada por

$$((x, z), (a, b)) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^* \times Aff_k \mapsto (x + bz^k Y, za) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*.$$

Esta acción conmuta con la acción de Λ en $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*$ obtenida por las traslaciones en el primer factor. Por lo tanto, induce una acción de Aff_k en $T_\Lambda \times \mathbb{C}^*$ que conmuta con el siguiente difeomorfismo F

$$F([x], z) = (\bar{\Phi}([x]), \omega^k z),$$

donde $[x]$ denota la clase de x . Como $|\omega| \neq 1$, el grupo generado por F actúa libre y propiamente en $T_\Lambda \times \mathbb{C}^*$, y el cociente M es una variedad

compleja equipada con una acción holomorfa y localmente libre de Aff_k . La variedad M fibra sobre el toro complejo T_Λ . A este ejemplo lo llamaremos suspensión holomorfa.

Por último, tomemos una acción de \mathbb{C}^* en una variedad compacta compleja M . Escojamos $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ y formemos el grupo $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ de las k -ésimas raíces de la unidad. Este grupo actúa libremente en M . Denotemos por π_k a la proyección de M en el cociente M_k de M entre $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. En M_k tenemos la acción de \mathbb{C}^* dada por:

$$(T, \pi_k(x)) \in \mathbb{C}^* \times M_k \mapsto {}_k\phi(T)(\pi_k(x) = \pi_k(\phi(T^k)(x)).$$

La acción ${}_k\phi$ está bien definida y además si ϕ es de Anosov, entonces ${}_k\phi$ lo es también.

Tenemos dos teoremas de Étienne Ghys que clasifican los flujos y difeomorfismos holomorfos de Anosov en superficies complejas y en 3-variedades complejas compactas. Para el primero presentaremos la demostración en la siguiente sección, el segundo no lo probaremos aquí pero nos parece que es importante citarlo, la demostración se encuentra en el artículo [8].

Teorema 3.2.3 *Sea ϕ un difeomorfismo holomorfo de Anosov de una superficie compleja S . Entonces, S es un toro complejo \mathbb{C}^2/Λ y ϕ es conjugado holomorfo de un automorfismo lineal de \mathbb{C}^2/Λ .*

Teorema 3.2.4 *Sea ϕ un flujo holomorfo de Anosov en una variedad compacta compleja de dimensión 3. Entonces, módulo cubiertas finitas, ϕ es conjugado holomorfo de alguno de los ejemplos descritos en esta sección.*

3.3. Clasificación de los flujos de Anosov

Para demostrar el teorema 3.2.3, necesitamos estudiar las foliaciones estable \mathcal{F}^s e inestable \mathcal{F}^u , tangentes a E^s y E^u , respectivamente. Recordemos que ϕ es un flujo holomorfo complejo en la variedad compleja M y denotemos por $\|\cdot\|$ a una métrica hermitiana en $T_{\mathbb{C}}M$.

Lema 3.3.1 *Los subfibrados E^s y E^u son subfibrados complejos de $T_{\mathbb{C}}M$, es decir, son invariantes bajo la multiplicación por i .*

Demostración. Tomemos $v \in E^s$, entonces

$$\|d\phi^k(iv)\| = \|id\phi^k(v)\| = \|d\phi^k(v)\| \leq C\lambda^{-k}\|iv\|,$$

es decir, $iv \in E^s$. La prueba para E^u es la misma. □

Las hojas de las foliaciones \mathcal{F}^s y \mathcal{F}^u son subvariedades de M , por el lema anterior tenemos que de hecho cada hoja está metida en M holomorfa. Necesitamos probar lo siguiente:

Proposición 3.3.2 *Si E^u tiene dimensión compleja 1, \mathcal{F}^s es una foliación holomorfa.*

Demostración. Sean x y y dos puntos de M que estén en la misma hoja L de \mathcal{F}^s . Sean \mathcal{F}_x^u y \mathcal{F}_y^u las hojas de \mathcal{F}^u que contienen a x y a y , respectivamente. Tomemos V_x y V_y , vecindades pequeñas de x y y en \mathcal{F}_x^u y \mathcal{F}_y^u , respectivamente; éstas pueden ser consideradas como curvas holomorfas transversales a \mathcal{F}^s . Sea h la homología de algún camino de x a y en L . Este es un homeomorfismo, definido al menos en una vecindad compacta W_x de x en V_x , cuya imagen $W_y = h(W_x)$ es una vecindad compacta de y en V_y . Claramente $y = h(x)$ y h no dependen del camino elegido, ya que las hojas de la foliación \mathcal{F}^s son simplemente conexas. Para probar la proposición, debemos demostrar que h es holomorfo.

Sean $W_x^k = \phi^k(W_x)$ y $W_y^k = \phi^k(W_y)$, para $k \geq 0$. De la definición de difeomorfismo de Anosov tenemos que si $z \in W_x$, entonces $\phi^k(z)$ y $\phi^k(h(z))$ se aproximan cuando k tiende a $+\infty$. Además, en la topología C^∞ las hojas de \mathcal{F}^u varían continuamente². En particular, esto implica que existe una secuencia de difeomorfismos π_k , de clase C^1 , que van de W_x^k a un compacto $\pi_k(W_x^k)$ en la hoja $\mathcal{F}_{y_k}^u$ de \mathcal{F}^u , donde $y_k = \phi^k(y)$, tales que:

- (i) la distancia entre $\pi_k(z)$ y $\phi^k h \phi^{-k}(z)$ en la hoja $\mathcal{F}_{y_k}^u$, tiende uniformemente a cero cuando $z \in W_x^k$ y k tiende a $+\infty$;
- (ii) π_k tiende uniformemente a la identidad, en la topología C^1 . Es decir, existe una secuencia $\epsilon_k > 0$ que converge a cero cuando k tiende a $+\infty$, tal que para todos los vectores v tangentes a W_x^k tenemos que:

$$(1 - \epsilon_k)\|v\| \leq \|d\pi_k(v)\| \leq (1 + \epsilon_k)\|v\|.$$

Consideremos ahora la secuencia de difeomorfismos $h_k = \phi^{-k} \pi_k \phi^k$ que va de W_x a \mathcal{F}_y^u . Como ϕ es holomorfo y actúa conformemente en cada hoja de \mathcal{F}^u , las siguientes propiedades se cumplen:

²Ver [15].

- (i) h_k es un difeomorfismo $(1 - \epsilon_k)$ -casiconforme de W_x a $h_k(W_x) \subset \mathcal{F}_y^u$ ³;
 (ii) h_k converge uniformemente a h cuando k tiende a $+\infty$.

Entonces, h es 1-casiconforme, es decir, conforme. Luego, h es holomorfo. □

En el caso en que M tenga dimensión compleja 2, la proposición se puede aplicar también a la foliación inestable; es decir, son foliaciones holomorfas.

Ahora, generalizaremos una propiedad de los difeomorfismos de Anosov con codimensión real 1: las hojas de la foliación inestable están equipadas con estructuras afines, ver [7].

Primero recordemos que una estructura afín compleja en una curva holomorfa L es un atlas que consiste de difeomorfismos holomorfos f_i que van de conjuntos abiertos U_i de L a conjuntos abiertos de \mathbb{C} , de tal forma que, los abiertos U_i cubren a L y $f_i \cdot f_i^{-1}$ son restricciones de difeomorfismos afines de \mathbb{C} a sus respectivos dominios. Si x, y y z son tres puntos distintos en L , suficientemente cercanos, la razón

$$\frac{f_i(x) - f_i(y)}{f_i(x) - f_i(z)},$$

está bien definida y no depende de la elección de f_i , cuyo dominio debe contener a x, y y z . Denotaremos a esta razón por $\frac{x-y}{x-z}$, es una función holomorfa de x, y y z . Decimos que una estructura afín de una superficie riemanniana simplemente conexa es completa, si esta es isomorfa a \mathbb{C} con su estructura afín canónica.

Proposición 3.3.3 *Sea ϕ un difeomorfismo holomorfo de Anosov de una variedad compacta compleja. Supongamos que la foliación inestable \mathcal{F}^u tiene dimensión compleja 1. Entonces, existe una única forma de equipar cada hoja de \mathcal{F}^u con una estructura afín compleja de tal forma que:*

- (i) ϕ actúa como transformación afín en la hojas de \mathcal{F}^u
 (ii) si γ es un camino en una hoja de la foliación estable, parametrizado por $t \in [0, 1]$, y si $h(t)$ es la holonomía correspondiente entre los abiertos de $\mathcal{F}_{\gamma(0)}^u$ y $\mathcal{F}_{\gamma(1)}^u$. Si x, y y z son tres puntos de $\mathcal{F}_{\gamma(0)}^u$ suficientemente cercanos a $\gamma(0)$, la razón

$$\frac{h(t)(x) - h(t)(y)}{h(t)(x) - h(t)(z)}$$

³Ver [1].

es una función continua de t .

De hecho, con esta estructura, cada hoja de \mathcal{F}^u es completa.

Antes de hacer la demostración de la proposición, veamos una construcción. Sea L una curva holomorfa. Para cada $p \geq 0$ denotamos por L_p a la fibración sobre L que consiste de los p -jets⁴ en $0 \in \mathbb{C}$ de difeomorfismos locales holomorfos f , que mapean una vecindad de $0 \in \mathbb{C}$ a algún conjunto abierto de L . Claramente, L_0 está identificada con L y L_1 con el conjunto de vectores tangentes (distintos de cero) a L . Además, tenemos la sucesión de fibrados dada por

$$\cdots \xrightarrow{\rho_3} L_2 \xrightarrow{\rho_2} L_1 \xrightarrow{\rho_1} L_0 = L.$$

Para $f \in L$ y $a \in \mathbb{C}$, denotamos por $a \cdot f$ el 1-jet del mapeo $z \mapsto f(az)$. Esto describe a ρ_1 como una \mathbb{C}^* -fibración principal⁵. De la misma forma, para $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ y $f \in L_2$, denotamos por $(a, b) \cdot f$ al 2-jet del mapeo

$$z \mapsto f\left(\frac{az}{1+bz}\right),$$

que describe una estructura de *Aff*-fibración principal para $\rho_1 \cdot \rho_2 : L_2 \rightarrow L_1$, donde $Aff \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ denota al grupo afín complejo. La fibración $\rho_2 : L_2 \rightarrow L_1$ es también principal si tomamos como grupo a \mathbb{C} y la acción $(1, b) \cdot f$.

Lema 3.3.4 *Existe una identificación natural entre las estructuras afines de una curva holomorfa L y las secciones holomorfas $\sigma : L_1 \rightarrow L_2$, que son homogéneas en el sentido de que para toda $a \in \mathbb{C}^*$ y $f \in L_1$ tenemos que $\sigma(a \cdot f) = (a, 0) \cdot \sigma(f)$.*

Demostración. Si L tiene estructura afín y si para $f \in L_1$ existe un único germen de un mapeo afín \bar{f} definido en una vecindad del $0 \in \mathbb{C}$, con valores en L y con f como su 1-jet en 0 , definimos $\sigma(f)$ como el 2-jet de f en 0 . Luego, la condición de homogeneidad se satisface.

Ahora supongamos que tenemos la sección σ homogénea. Consideremos un difeomorfismo local g , que manda abiertos de \mathbb{C} en abiertos de L , tal que para toda z_0 en el dominio de g los 1 y 2-jets en 0 del mapeo $z \mapsto g(z - z_0)$ satisfacen que $j_2(g)(z_0) = \sigma(j_1(g)(z_0))$. Esta es una ecuación diferencial que tiene soluciones locales. Gracias a la condición de homogeneidad, tenemos que dos soluciones locales difieren una de la otra por una

⁴Ver definición en [10].

⁵Ver apéndice 4.3.

transformación afín. Es decir, las soluciones definen una estructura afín en L .

□

Retomemos el difeomorfismo holomorfo de Anosov ϕ de una variedad compacta compleja M . Para $p \geq 0$ denotemos por M_p al espacio de p -jets en $0 \in \mathbb{C}$, de difeomorfismos holomorfos de una vecindad del 0 en un conjunto abierto en una hoja de la foliación \mathcal{F}^u . Tenemos la siguiente sucesión de fibraciones:

$$\cdots \rightarrow M_2 \xrightarrow{\rho_2} M_1 \xrightarrow{\rho_1} M_0 = M.$$

Además, ϕ induce homeomorfismo ϕ_p en M_p .

Para probar la proposición 3.3.3 necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.3.5 *Existe una única sección $\sigma : M_1 \rightarrow M_2$ de ρ_2 tal que:*

- (i) σ es continua y para cada hoja L de \mathcal{F}^u es un mapeo holomorfo $\sigma : L_1 \subset M_1 \rightarrow L_2 \subset M_2$,
- (ii) σ es homogénea⁶,
- (iii) $\sigma \cdot \phi_1 = \phi_2 \cdot \sigma$.

En la prueba de este lema demostraremos también la proposición 3.3.3.

Demostración. Consideremos el espacio \mathcal{X} formado por las secciones continuas $\sigma : M_1 \rightarrow M_2$ que son homogéneas. Este espacio es no vacío. Si σ y σ' están en \mathcal{X} , podemos utilizar la estructura de \mathbb{C} -fibración principal, ρ_2 , para definir $\sigma - \sigma'$ como una función continua de M_1 en \mathbb{C} .

Dada una métrica hermitiana en M , podemos definir la norma de un elemento de M_1 identificándolo con un vector tangente a M . Tomemos

$$d(\sigma, \sigma') = \sup_{x \in M_1} \left\{ \frac{|(\sigma - \sigma')(x)|}{\|x\|} \right\},$$

esta distancia está bien definida ya que el cociente $\frac{|(\sigma - \sigma')(x)|}{\|x\|}$ solo depende de la proyección, $\rho_1(x)$, cuya imagen está en la variedad compacta M . Entonces, (\mathcal{X}, d) es un espacio métrico completo.

⁶En el sentido del lema 3.3.4.

Veamos que la biyección $\bar{\phi}^k$, inducida por ϕ^k , en \mathcal{X} es una dilatación para valores grandes de k . De hecho,

$$\begin{aligned} d(\bar{\phi}^k(\sigma), \bar{\phi}^k(\sigma')) &= \sup_{x \in M_1} \left\{ \frac{|(\bar{\phi}^k(\sigma) - \bar{\phi}^k(\sigma'))(x)|}{\|x\|} \right\} \\ &= \sup_{x \in M_1} \left\{ \frac{|(\sigma - \sigma')(\bar{\phi}_1^k(x))|}{\|x\|} \right\} \\ &\geq C^{-1} \lambda^k d(\sigma, \sigma'), \end{aligned}$$

donde $\phi_1 : M_1 \rightarrow M_1$ está definido por la acción de la diferencial de ϕ en los vectores distintos de cero tangentes a \mathcal{F}^u . Las constantes C y λ son las de la definición de Anosov. Luego, hay un único elemento $\sigma \in \mathcal{X}$ que es invariante bajo $\bar{\phi}$.

Ahora veamos que para cada hoja L de \mathcal{F}^u , la restricción de σ a $L_1 \subset M_1$ es holomorfa. Sea U^i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$, una cubierta abierta de M , tal que U^i es homeomorfo a un conjunto abierto de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^{n-1}$ bajo el homeomorfismo que manda a las hojas de \mathcal{F}^u en $\mathbb{C} \times \{*\}$. Podemos asumir que este homeomorfismo es holomorfo, restringido a U^i , en cada hoja de \mathcal{F}^u . Es decir, tenemos una estructura afín compleja restringida a los abiertos U^i en las hojas de \mathcal{F}^u .

Sean U_1^i y U_2^i los conjuntos abiertos de M_1 y M_2 que corresponden a U^i , y sea $s_i : U_1^i \rightarrow U_2^i$ la sección homogénea asociada con la estructura afín que construimos. Tomemos $x \in M_1$, y sea $i(k)$ la sucesión de enteros tales que $\phi_1^k \in U_1^{i(k)}$. Tenemos que

$$\sigma(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi_1^k \cdot s_{i(k)} \cdot \phi_1^{-k}(x), \quad (3.3)$$

donde $\sigma \in \mathcal{X}$ es la sección invariante bajo $\bar{\phi}$. Sea V un abierto suficientemente pequeño en una hoja L de \mathcal{F}^u , y sea V_1 el conjunto abierto correspondiente en $L_1 \subset M_1$. Como ϕ^{-k} es una contracción, existe una secuencia $i(k)$, tal que para toda $x \in V_1$, $\phi_1^{-k}(x) \in U_1^{i(k)}$. La fórmula 3.3 implica que la restricción de σ a V_1 es el límite uniforme de funciones holomorfas. Es decir, que para cada hoja L de \mathcal{F}^u la restricción de σ a $L_1 \subset M_1$ es holomorfa.

Por último, tenemos que demostrar que las estructuras afines complejas construidas en las hojas de \mathcal{F}^u son completas. Vamos a citar un resultado que se encuentra en [24]. Para toda estructura afín de un espacio L simplemente conexo tenemos el desarrollante, que es el mapeo

$$D : L \rightarrow \mathbb{C},$$

es un difeomorfismo local y es tal que, la estructura afín es la imagen inversa bajo D de la estructura afín canónica de \mathbb{C} . Además, este mapeo D es el único módulo composición por un mapeo afín, y la estructura es completa si y sólo si D es un difeomorfismo.

Como M es compacta, sabemos que existe $\epsilon > 0$ tal que si dos puntos están en una hoja $L \in \mathcal{F}^u$ y están a una distancia menor que ϵ , las imágenes de estos puntos bajo el mapeo D son distintos (por ser difeomorfismo local). Como ϕ es afín en las hojas de \mathcal{F}^u y de hecho es una dilatación, tenemos que el mapeo D es inyectivo en cualquier hoja de \mathcal{F}^u . Análogamente, tenemos una $\epsilon > 0$ con la siguiente propiedad. Sea $p \in M$, tomemos un mapeo D de la hoja L que pasa por p a \mathbb{C} , tal que la norma de la diferencial de D en p sea 1. Esto fija a D excepto si lo componemos en la imagen por una rotación. Luego, la imagen de D contiene al menos un disco de radio ϵ y centro en 0. Como ϕ es afín en las hojas de \mathcal{F}^u y es una dilatación en éstas, obtenemos que las imágenes bajo D cubren cualquier disco (sin importar el tamaño del radio), es decir D es sobre. Entonces, las estructuras afines de las hojas de \mathcal{F}^u son completas. □

Para probar el teorema 3.2.3 nos hace falta una proposición que no probaremos aquí, pero se encuentra en la cuarta sección del artículo [8].

Proposición 3.3.6 *Sea ϕ un difeomorfismo holomorfo de Anosov de una variedad compacta compleja M . Supongamos que la foliación inestable \mathcal{F}^u tiene dimensión compleja 1. Entonces, el pseudogrupo de holonomía de la foliación estable \mathcal{F}^s actúa proyectivamente con respecto a las estructuras afines que introdujimos en las hojas de \mathcal{F}^u .*

Esta proposición implica que la foliación $\tilde{\mathcal{F}}^s$ de la cubierta universal \tilde{M} de M está definida por el desarrollante

$$D : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1.$$

Además, existe un homomorfismo

$$H : \pi_1(M) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$$

tal que para toda $\tilde{x} \in \tilde{M}$ and $\gamma \in \pi_1(M)$ se cumple la propiedad

$$D(\gamma \cdot \tilde{x}) = H(\gamma)(D(\tilde{x}))^7.$$

⁷Ver [24].

Sea $\tilde{\mathcal{F}}^u$ el levantamiento de \mathcal{F}^u a \tilde{M} , y sea $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}}^u$ la hoja que contiene a \tilde{x} . Entonces, $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}}^u$ está equipada con una estructura afín completa. Es decir, la restricción de D a $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}}^u$ es un difeomorfismo de $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{x}}^u$ a $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{\omega(\tilde{x})\}$, donde $\omega(\tilde{x})$ es un punto de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

Veamos ahora la prueba del teorema 3.2.3. Como estamos en una superficie compleja M , las foliaciones \mathcal{F}^u y \mathcal{F}^s tienen dimensión 1, entonces podemos aplicar el resultado 3.3.6 a las dos foliaciones. Luego, M admite coordenadas locales en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, tales que los cambios de coordenadas están en $PSL(2, \mathbb{C}) \times PSL(2, \mathbb{C})$. Sean

$$D : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$$

y

$$H : \pi_1(M) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C}) \times PSL(2, \mathbb{C})$$

el desrollante y holomorfismo que vimos antes.

Lema 3.3.7 *D es inyectivo.*

Demostración. Sea \tilde{L} una hoja de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ y sea $U(\tilde{L})$ la unión de todas las hojas de $\tilde{\mathcal{F}}^u$ que intersectan a \tilde{L} . Tomemos una secuencia de hojas $\{\tilde{L}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que los conjuntos abiertos conexos $U_i = U(\tilde{L}_i)$ satisfagan que:

- (i) los U_i cubren a \tilde{M} ,
- (ii) para cada $k \geq 1$, la unión $\Omega_k = \cup_{i=1}^k U_i$ sea conexa.

Necesitamos probar el siguiente lema.

Lema 3.3.8 *La restricción de D a Ω_k es inyectiva, y la imagen $D(\Omega_k)$ es el complemento en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ de la gráfica de un mapeo continuo de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ o, la unión de $\{*\} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ y la gráfica de un mapeo continuo de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{*\}$ en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$.*

Probemos este lema por inducción sobre k . Para $k = 1$, sabemos que la restricción de D a una hoja \tilde{L}_1 de $\tilde{\mathcal{F}}^s$ es un difeomorfismo sobre un conjunto de la forma $(\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{a\}) \times \{b\}$. Cada punto $x \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{a\}$ corresponde a un punto de \tilde{L}_1 , que denotaremos también por x , y la hoja que contiene a x de $\tilde{\mathcal{F}}^u$, $\tilde{\mathcal{F}}_x^u$, tiene como imagen bajo D un conjunto de la forma $\{x\} \times (\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{\omega(x)\})$. El mapeo

$$\omega : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1,$$

es continuo ya que el complemento de su gráfica es el abierto $D(U_1)$. Entonces D restringida a U_1 es inyectiva y se cumple el lema.

Ahora, supongamos que ya fue probado hasta k . Es decir, sabemos que D es inyectiva en Ω_k y que $D(\Omega_k)$ es el complemento en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ de la gráfica de un mapeo continuo $u_k : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, o la unión de $\{a_k\} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ y la gráfica de un mapeo continuo $u_k : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

Además, sabemos que D es inyectiva en U_{k+1} y que $D(U_{k+1})$ es el complemento de la unión de $\{b_{k+1}\} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ y la gráfica de

$$v_{j+1} : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{b_{k+1}\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1,$$

que es el caso donde $k = 1$. Se sigue que $D(\Omega_k) \cap D(U_{k+1})$ es conexo ya que es el complemento en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ de la unión finita de subvariedades topológicas con codimensión real 2.

Sean x y y dos puntos en $\Omega_{k+1} = \Omega_k \cup U_{k+1}$, tales que $D(x) = D(y)$. Como D es inyectiva en Ω_k y en U_{k+1} , podemos suponer $x \in \Omega_k$ y $y \in U_{k+1}$. Sea z un punto en la intersección $\Omega_k \cap U_{k+1}$ y sea γ el camino en $D(\Omega_k) \cap D(U_{k+1})$ que va de $D(z)$ a $D(x) = D(y)$. La imagen inversa de γ es única en Ω_k y va de z a x . Análogamente, la imagen inversa de γ es única en U_{k+1} y va de z a y . Como D es un difeomorfismo local, dos imágenes inversas de γ en \tilde{M} con el mismo punto de partida son iguales. En particular, los puntos finales de estas imágenes son los mismos, es decir, $x = y$. Luego, la restricción de D a Ω_{k+1} es inyectiva.

Ahora tenemos que describir la imagen de $D(\Omega_{k+1})$. Sea p un punto de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ distinto de b_{k+1} y a_k (cuando a_k está definido). Queremos ver que $u_k(p) = v_{k+1}(p)$. Observemos que si esto no se cumple, $D(\Omega_{k+1}) = D(\Omega_k) \cup D(U_{k+1})$ contenería a $\{p\} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Esto no es posible, ya que si lo fuera tendríamos un encaje de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ en $D^{-1}(\Omega_{k+1}) \subset \tilde{M}$, cuya imagen estaría en una hoja de $\tilde{\mathcal{F}}^u$, pero estas son copias de \mathbb{C} . Esto implica que los abiertos $D(\Omega_{k+1})$ son de la forma que queremos. □

Como $\tilde{\mathcal{F}}^u$ y $\tilde{\mathcal{F}}^s$ tienen dimensión compleja 1, podemos intercambiarlos. Entonces, las únicas dos posibilidades para $D(M)$ son:

- (i) $D(\tilde{M})$ es el complemento de la gráfica de un homomorfismo $u : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$,
- (ii) $D(\tilde{M})$ tiene la forma $(\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{a\}) \times (\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \{b\})$.

Primero veamos que el caso (i) no se cumple. Como las hojas de $\tilde{\mathcal{F}}^u$ y $\tilde{\mathcal{F}}^s$ son simplemente conexas, un elemento no trivial $\gamma \in \pi_1(M)$, cumple que $H(\gamma)$ no fija ninguna hoja de $\tilde{\mathcal{F}}^u$ o de $\tilde{\mathcal{F}}^s$. Esto excluye al caso (i) ya

que como vimos, un elemento no trivial en $PSL(2, \mathbb{C})$, tiene al menos un punto fijo en \mathbb{CP}^1 , lo que implicaría que $H(\gamma)$ fijaría una hoja.

En el caso (ii), podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a = b = \infty$. Análogamente al caso anterior, tenemos que $H(\pi_1(\mathbf{M}))$ consiste de transformaciones afines que no fijan ninguna hoja de $\tilde{\mathcal{F}}^u$ o de $\tilde{\mathcal{F}}^s$, es decir, consiste de traslaciones. Entonces, \mathbf{M} es el cociente de \mathbb{C}^2 entre una retícula, es decir, es un toro complejo. Un levantamiento de ϕ a $\tilde{\mathbf{M}}$ tiene que ser una transformación afín de \mathbb{C}^2 que preserva la retícula. Con esto queda demostrado el teorema 3.2.3.

3.4. Automorfismos de toros complejos de dimensión dos

Para finalizar la clasificación de los difeomorfismos de Anosov de superficies complejas, veremos ahora para qué toros complejos el grupo de automorfismos es infinito. Es decir, en qué toros se cumplen las condiciones del teorema 3.2.3⁸.

Sabemos que un toro complejo es el cociente $\mathbb{T}^n = \mathbb{C}^n / \Lambda$, donde Λ es una retícula de rango $2n$. Empecemos con la siguiente definición, sin olvidar que $M_{n \times n}$ denota al grupo de matrices de $n \times n$ con entradas complejas.

Definición 3.4.1 Sea Λ una retícula de \mathbb{C}^n , con $n \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} \text{End}(\Lambda) &= \{f \in M_{n \times n} \mid f(\Lambda) \subset \Lambda\} \\ \text{Aut}(\Lambda) &= \{f \in M_{n \times n} \mid f(\Lambda) = \Lambda\} \\ \text{End}(\Lambda \otimes \mathbb{Q}) &= \{f \in M_{n \times n} \mid f(\Lambda \otimes \mathbb{Q}) \subset \Lambda \otimes \mathbb{Q}\}. \end{aligned}$$

Si Λ_1 y Λ_2 son dos retículas, decimos que son isomorfas cuando existe $f \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que $f(\Lambda_1) = \Lambda_2$ y decimos que son isógenas si $f(\Lambda_1)$ es una subretícula, por lo tanto, de índice finito de Λ_2 . Si Λ_1 y Λ_2 son isógenas, $\text{Aut}(\Lambda_1)$ y $\text{Aut}(\Lambda_2)$ son conmensurables, es decir, contienen subgrupos de índice finito que son conjugados.

Analícemos primero el caso $n = 1$, es decir, las curvas elípticas. Para una retícula genérica $\Lambda \subset \mathbb{C}$, se tiene que $\text{Aut}(\Lambda) = \{\pm I\}$ y $\text{End}(\Lambda) \simeq \mathbb{Z}$. $\text{Aut}(\Lambda)$ siempre es finito, es no trivial si y solamente si Λ es isógena a la retícula $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ de los enteros Gaussianos o a la retícula $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{-1}]$ de los

⁸Los automorfismos de toros complejos de más dimensiones son estudiados en libros como [22] y [18].

enteros de Eisenstein. $\text{End}(\Lambda)$ no es isomorfo a \mathbb{Z} si y sólo si Λ es isógena con los enteros de un campo.

Ahora vamos a describir todas las retículas de \mathbb{C}^2 , cuyo grupo de automorfismos es infinito. Toda la discusión será módulo isogenia y conmensurabilidad.

Ejemplo 3.4.2 Sean p y q dos enteros positivos. Vamos a tomar el álgebra de los cuaternios $H_{p,q}$ sobre los racionales \mathbb{Q} , que esta generada por $1, i, j, k$ y las relaciones

$$\begin{aligned} i^2 &= p & j^2 &= -q & k^2 &= -pq \\ ij &= k = -ji & jk &= i = -kj & ki &= j = -ik. \end{aligned}$$

Utilizando el monomorfismo que manda

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & i &\mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{p} & 0 \\ 0 & -\sqrt{p} \end{pmatrix}, \\ j &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & 0 \end{pmatrix}, & k &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ -q\sqrt{p} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

tenemos que $H_{p,q} \otimes \mathbb{R}$ es isomorfo al álgebra de las matrices de 2×2 con coeficientes reales. La norma de un elemento $x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3 \in H_{p,q} \otimes \mathbb{R}$ es $x_0^2 - px_1^2 + qx_2^2 - pqx_3^2$. El grupo de cuaternios unitarios de $H_{p,q} \otimes \mathbb{R}$ es isomorfo a $SL(2, \mathbb{C})$.

La multiplicación a la derecha por $j\sqrt{q}$ le da al espacio de las matrices de 2×2 con entradas reales, una estructura compleja que la identifica con \mathbb{C}^2 . Las multiplicaciones a la izquierda por elementos de $H_{p,q} \otimes \mathbb{R}$, actúan como funcionales lineales complejas en \mathbb{C}^2 . Tomemos como retícula Λ a la retícula formada por los cuaternios de $H_{p,q}$ con coordenadas enteras. Sea $G_{p,q}$ el grupo de cuaternios con coordenadas enteras y norma 1, este grupo actúa en \mathbb{C}^2 como un grupo de automorfismos lineales complejos, que preservan a Λ .

Los grupos $G_{p,q}$ son subgrupos discretos de co-volumen finito de $SL(2, \mathbb{R})$, y son cocompactos si la ecuación $x_0^2 - px_1^2 + qx_2^2 - pqx_3^2 = 0$ tiene una solución entera (x_0, x_1, x_2, x_3) . Estos grupos son *grandes* en el sentido de que poseen subgrupos libres abelianos.

Ejemplo 3.4.3 Sea Λ_0 una retícula en \mathbb{C} , consideremos la retícula $\Lambda = \Lambda_0 \times \Lambda_0$ en \mathbb{C}^2 . El grupo de automorfismos de Λ es $GL(2, \text{End}(\Lambda_0))$, que contiene al subgrupo $GL(2, \mathbb{Z})$ y por lo tanto contiene a un subgrupo libre no abeliano.

Ejemplo 3.4.4 Sea K un campo numérico de grado 4 que sea totalmente imaginario, es decir, que admita dos encajes de i_1, i_2 en \mathbb{C} distintos y no conjugados. Sea $i = (i_1, i_2) : K \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Tomemos $\mathcal{O} \subset K$ el anillo de enteros de K , entonces, $\Lambda = i(\mathcal{O})$ es una retícula en \mathbb{C}^2 . Por el teorema de Dirichlet, el grupo de unidades de \mathcal{O} es de la forma $\mathbb{Z} \times F$, donde F es el grupo finito de raíces de la unidad contenido en K . Cualquier unidad u , actúa en \mathbb{C}^2 con la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} i_1(u) & 0 \\ 0 & i_2(u) \end{pmatrix},$$

que preserva a Λ . Es decir, esta construcción produce retículas cuyo grupo de automorfismos contiene un subgrupo infinito de índice finito. Notemos que los cuatro conjugados de $i_1(u)$ son $i_1(u), \overline{i_1(u)}, i_2(u)$ y $\overline{i_2(u)}$. Como la retícula Λ es invariante tenemos que $|i_1(u)i_2(u)| = 1$. Si $|i_1(u)|$ y $|i_2(u)|$ fueran iguales a 1, los cuatro conjugados tendrían módulo 1 y u sería de orden finito por el teorema de Kronecker. Luego, si u es una unidad de orden infinito, los automorfismos correspondientes de Λ no tiene valores propios de módulo 1 y se pueden usar como ejemplos de suspensiones holomorfas.

Ejemplo 3.4.5 Sea K un campo cuadrático real, \mathcal{O} su anillo de enteros y u una unidad de \mathcal{O} de orden infinito. La acción de u en \mathcal{O} , genera una matriz U en $GL(2, \mathbb{Z})$ que es diagonalizable sobre los reales. La matriz de 4×4

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix},$$

preserva a \mathbb{Z}^4 y tiene dos subespacios de dimensión 2 invariantes en \mathbb{R}^4 , en los cuales se comporta como una homotecia. Tomemos una estructura compleja en cada uno de los planos, entonces \mathbb{R}^4 se identifica con \mathbb{C}^2 de tal forma que U actúa como transformación lineal compleja y preserva la retícula $\Lambda = \mathbb{Z}^4 \subset \mathbb{R}^4 \simeq \mathbb{C}^2$. De esta forma se obtienen retículas que tienen un grupo infinito de automorfismos.

Ejemplo 3.4.6 Sea $\Lambda_0 \subset \mathbb{C}$ una retícula y sea $\Lambda \subset \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ la imagen de $\Lambda_0 \times \Lambda_0$ bajo la transformación lineal dada por una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

donde A es una matriz de 2×2 . Con una elección genérica de A , la línea compleja $\mathbb{C} \times \{0\}$ es la única de \mathbb{C}^2 que interseca a Λ en una retícula, que es isomorfa a \mathbb{Z}^2 . Los automorfismos de Λ tienen la forma

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & b \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix},$$

donde ω_1 y ω_2 pertenecen al grupo finito $\text{Aut}(\Lambda_0)$ y b está en el anillo $\text{End}(\Lambda_0)$. En particular, $\text{Aut}(\Lambda)$ contiene un subgrupo abeliano de índice finito que consta enteramente de elementos unipotentes.

Proposición 3.4.7 *Módulo isogenia, todas las latices en \mathbb{C}^2 cuyo grupo de automorfismos es infinito son de las formas descritas en los ejemplos 3.4.2 a 3.4.6.*

Demostración. Sea Λ en \mathbb{C}^2 una retícula tal que $\text{Aut}(\Lambda)$ es infinito. Tenemos los siguiente casos:

(I) Existen al menos dos rectas complejas, de la forma $\mathbb{C} \times \{z\}$, en \mathbb{C}^2 que intersecan a Λ en una retícula cada una. En este caso, Λ es isógena a $\Lambda_0 \times \Lambda_1$, donde Λ_0 y Λ_1 son las retículas en las que intersecan las rectas complejas a Λ .

Entonces, existe $f \in GL(2, \mathbb{C})$ tal que

$$f(\Lambda) \subset \Lambda_0 \times \Lambda_1;$$

además, $\text{Aut}(\Lambda)$ y $\text{Aut}(\Lambda_0 \times \Lambda_1)$ son conmensurables. Pero $\text{Aut}(\Lambda_0 \times \Lambda_1) = \text{Aut}(\Lambda_0) \times \text{Aut}(\Lambda_1)$ que es infinito. Por lo tanto, $\text{Aut}(\Lambda_0)$ y $\text{Aut}(\Lambda_1)$ son conmensurables, es decir, Λ_0 y Λ_1 son isógenas. Luego, Λ es isógena a $\Lambda_0 \times \Lambda_0$, es decir, este caso es isógeno al ejemplo 3.4.3.

(II) Hay una única recta compleja en \mathbb{C}^2 que interseca a Λ en una retícula Λ_0 . Entonces, Λ/Λ_0 debe ser isógena a Λ_0 . Este el caso 3.4.6

(III) No hay ninguna recta compleja que intersece a Λ en una retícula. En este caso, $D = \text{End}(\Lambda \otimes \mathbb{Q})$ es un álgebra divisional ya que la imagen de cualquier elemento de D es un subespacio de \mathbb{C}^2 que es racional con respecto a la retícula Λ , es decir, el kernel y la imagen son triviales o \mathbb{C}^2 . Además, tenemos que $\Lambda \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}^4$ es un espacio vectorial sobre D ; luego,

$$4 = (\dim_D \Lambda \otimes \mathbb{Q}) \dim_{\mathbb{Q}} D.$$

Sea K el centro de D , entonces, K es un campo numérico y

$$\dim_{\mathbb{Q}} D = (\dim_{\mathbb{Q}} K) \dim_K D.$$

Como $\dim_K D$ es un cuadrado perfecto, tenemos las siguientes posibilidades:

- (III-a) $D = K$, $\dim_{\mathbb{Q}} D = 4$ y $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ es de dimensión 1 sobre D . Por el teorema de Frobenius, D es el álgebra de los cuaterniones sobre \mathbb{Q} , es decir, estamos en el ejemplo 3.4.2
- (III-b) $K = \mathbb{Q}$, $\dim_{\mathbb{Q}} K = 4$ y $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ es de dimensión 1 sobre K . En este caso, Λ es conmensurable con el anillo de enteros de K y $\text{Aut}(\Lambda)$ con el grupo de unidades. Como K actúa como mapeos lineales complejos, K es puramente imaginario. Entonces, este es el caso 3.4.4.
- (III-c) $D = K$, K es un campo cuadrático y $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ es un campo vectorial sobre K de dimensión 2. Éste es el ejemplo 3.4.5.

□

3.5. Acciones localmente libres del grupo afín complejo

Veamos ahora las acciones del grupo afín complejo como están presentadas en [9] y [26]. Para esto, denotemos por Aff al grupo de las transformaciones afines de \mathbb{C} , es decir, las transformaciones $z \mapsto az + b$ con $a \in \mathbb{C}^*$ y $b \in \mathbb{C}$. Si k es un entero positivo, vamos a definir por Aff_k al grupo de parejas (a, b) en $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ con la regla de multiplicación

$$(a, b)(a', b') = (aa', a^k b' + b).$$

Claramente $\text{Aff}_1 = \text{Aff}$. La función que mapea a $(a, b) \mapsto (a^k, b)$ muestra que Aff_k es el recubrimiento de orden k de Aff . Denotemos, ahora, por Aff_{∞} al recubrimiento universal de Aff , este grupo está formado por las parejas (α, b) en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ con multiplicación $(\alpha, b)(\alpha', b') = (\alpha + \alpha', \exp(\alpha)b' + b)$. Recordemos que:

Definición 3.5.1 Una acción de un grupo de Lie es localmente libre si el estabilizador de cada punto es un grupo discreto.

El centro de los grupos Aff_k es cíclico de orden k y está formado por los elementos de la forma $(a, 0)$ con $a^k = 1$. El centro de Aff_{∞} es cíclico de orden infinito y está generado por el elemento $(2\pi i, 0)$. Los centros de

estos grupos se llaman a -subgrupo (α -subgrupo en el caso de Aff_∞) o flujo geodésico complejo.

De igual forma definimos el b -subgrupo de Aff_k como el subgrupo formado por los elementos $(1, b)$, y $(0, b)$ en el caso de Aff_∞ . Estos son los subgrupos conmutadores de Aff_k y Aff_∞ , respectivamente.

Construyamos el monomorfismo de Aff_2 en $SL(2, \mathbb{C})$ dado por

$$(a, b) \in Aff_2 \mapsto \begin{pmatrix} a & \frac{b}{a} \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}).$$

Sea Γ un subgrupo discreto y cocompacto de $SL(2, \mathbb{C})$. Obtenemos entonces una acción localmente libre de Aff_2 en $M = \Gamma \backslash SL(2, \mathbb{C})$, dada por la traslación a la derecha de las clases laterales izquierdas. $SL(2, \mathbb{C})$ tiene una medida biinvariante (como la medida de Haar⁹), esta genera una medida en M que es invariante.

Análogamente, construimos el monomorfismo de Aff en $PSL(2, \mathbb{C})$ dado por

$$(a, b) \in Aff \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \frac{b}{\sqrt{a}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{C}).$$

Haciendo la construcción anterior obtenemos ejemplos de acciones localmente libres de Aff en $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{C})$.

Antes de describir la dinámica de estas acciones, veamos que no existen construcciones similares para $k \neq 1, 2$. Primero notemos que $SL(2, \mathbb{C})$ es simplemente conexo y su centro es $\{\pm I\}$; luego, $PSL(2, \mathbb{C})$ es el único grupo de Lie conexo localmente isomorfo, pero no isomorfo, a $SL(2, \mathbb{C})$. El centralizador de un elemento no trivial de $PSL(2, \mathbb{C})$ es un subgrupo abeliano. Esto nos permite analizar los homomorfismos de Aff_k en $PSL(2, \mathbb{C})$ a través de su centro. Obtenemos que:

- (i) cualquier monomorfismo de Aff en $PSL(2, \mathbb{C})$ es conjugado a los antes descritos;
- (ii) cualquier monomorfismo de Aff_k , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, a $PSL(2, \mathbb{C})$ se factoriza a través del cociente de Aff ;
- (iii) existe un monomorfismo de Aff_k en $SL(2, \mathbb{C})$ si y sólo si k es par o ∞ . Tal monomorfismo se factoriza a través de Aff_2 y es conjugado al descrito anteriormente.

⁹Ver [14].

Describamos ahora la dinámica de las acciones generadas en $\Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{C})$. Recordemos que $PSL(2, \mathbb{C})$ es el grupo de isometrías de \mathbb{H}^3 , como vimos en la sección 2.2. Este grupo actúa libre y transitivamente en el fibrado de marcos ortonormales orientados positivamente del fibrado tangente de \mathbb{H}^3 , esto se puede ver en las notas [24]. Si Γ es un subgrupo discreto cocompacto de $PSL(2, \mathbb{C})$, podemos considerar el cociente $V = \Gamma \backslash \mathbb{H}^3$.

Como Γ puede tener elementos de orden finito, V puede no ser una variedad si no un orbifold hiperbólico. En todos los casos, Γ contiene un subgrupo libre de torsión con índice finito. Luego, módulo cubiertas finitas, podemos suponer que V es una variedad. El cociente $M = \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{C})$, es entonces el fibrado de marcos ortonormales de una variedad Riemanniana V . Este fibrado, tiene la estructura de fibrado $SO(3)$ -principal, cuya proyección $M \rightarrow V$ está dada por las traslaciones a la derecha de $SO(3) \simeq PU(2, \mathbb{C})$ (ver apéndice 4.3). Recordemos que

$$SO(3) = \{A \in SL(3, \mathbb{R}) \mid A^t A = I\}.$$

Además, el fibrado tangente unitario, T_1V , de V pertenece a la sucesión de fibrados $M \rightarrow T_1V \rightarrow V$.

Las órbitas del a -subgrupo en M se proyectan a geodésicas en V . El flujo geodésico de V , actuando en T_1V es un cociente de la dinámica del a -subgrupo que actúa en M . Esta acción es ergódica, mezclante y con entropía positiva. Observemos que hay exactamente una órbita geodésica cerrada en V para cada clase de conjugación de Γ de orden infinito. Cualquier elemento $\gamma \in \Gamma$, considerado como un elemento de $PSL(2, \mathbb{C})$, tiene dos eigenvalores ω_1 y ω_2 cuyo producto es 1. Si γ es de orden infinito, los módulos de ω_1 y ω_2 son distintos de 1. Estas normas están relacionadas con la longitud de la geodésica cerrada. En M obtenemos una órbita compacta del a -subgrupo, que es una curva elíptica (cociente de \mathbb{C}^* entre el grupo multiplicativo generado por $(\pm\omega_1)$). La unión de estas órbitas compactas es densa en M .

Las órbitas del b -subgrupo se proyectan en V como órbitas horosféricas, que son densas en V . Todas las órbitas del b -subgrupo son densas en M , y la acción es ergódica con entropía cero.

Por último, observemos que el caso de $\Gamma \backslash SL(2, \mathbb{C})$ es muy parecido a éste, sólo hay que reemplazar el fibrado de marcos ortonormales por el fibrado spin.

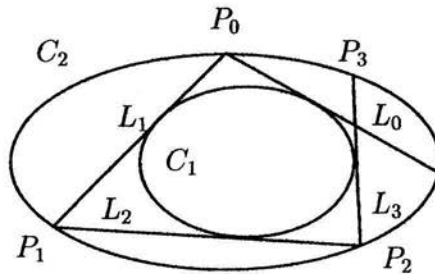
Capítulo 4

Superficies tipo Kähler y $K3$

4.1. Porisma de Poncelet

Uno de los problemas más interesantes de la geometría proyectiva es el de Poncelet acerca de polígonos inscritos en una cónica y circunscritos en otra. La pregunta es la siguiente: dadas dos cónicas C_1 y C_2 suaves en \mathbb{R}^2 , con C_1 dentro de C_2 , ¿cuándo existe un polígono cerrado inscrito en C_2 y circunscrito en C_1 ? En este caso vamos a permitir que los lados del polígono se intersecten.

Vamos a formular la pregunta de otra forma. Tomemos un punto $P_0 \in C_2$, hay dos tangentes a C_1 desde P_0 , L_0 y L_1 . Sea P_1 el otro punto de intersección de L_1 con C_2 , y L_2 la otra tangente a C_1 desde P_1 . Análogamente, podemos seguir construyendo la sucesión P_2, L_3, P_3, \dots . La pregunta es, ¿existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $L_n = L_0$?



La respuesta explícita al problema es complicada y se puede encontrar en el artículo [13]. Sin embargo, Poncelet demostró un interesante teorema, la demostración que daremos aquí es de Jacobi.

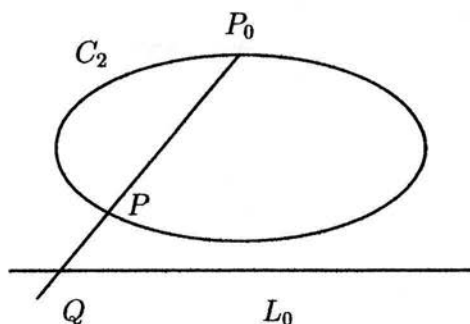
Teorema 4.1.1 *Para cualquier par de elipses con las condiciones anteriores, existe un polígono cerrado inscrito en C_2 y circunscrito en C_1 , si y sólo si hay una infinidad de polígonos. Además, no depende del punto inicial P_0 .*

Demostración. Para hacer la demostración vamos a considerar el problema en $\mathbb{C}P^2$. Sean $x = (x_1 : x_2 : x_3)$ coordenadas homogéneas y tomemos la cónica de \mathbb{R}^2 dada por la ecuación

$$x^T A x = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0,$$

donde x^T denota la transpuesta del vector y los coeficientes de la matriz $A = (a_{ij})$ son simétricos. Para que la cónica C_2 sea suave A tiene que ser no singular, es decir, C es una subvariedad compleja de $\mathbb{C}P^2$ o bien define una superficie de Riemann.

Como C_2 tiene grado 2, cualquier línea en $\mathbb{C}P^2$ intersecta a la cónica en 2 puntos, contando multiplicidades. Si tomamos un punto $P_0 \in C_2$ y una recta L_0 que no pase por P_0 , podemos definir una proyección estereográfica, desde P_0 , $P \mapsto Q$ como se muestra en la figura.



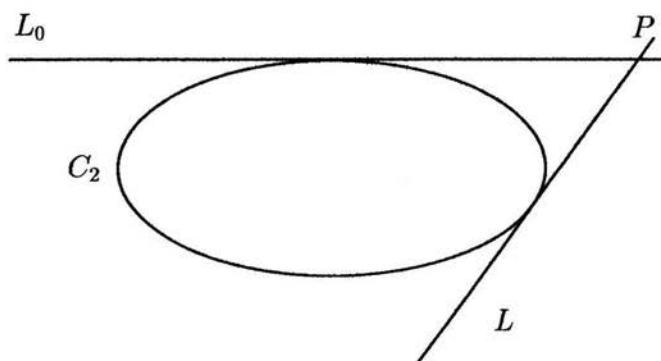
Tenemos así un biholomorfismo entre $C_2 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ o bien entre C_2 y L_0 . Dado un punto $P \in C_2$ con coordenadas $x = (x_1 : x_2 : x_3)$, la línea tangente $T_P C_2$ a C_2 en P está dada por la ecuación

$$0 = \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (x^T A x) y_j = \sum_j \left(\sum_i x_i a_{ij} \right) y_j = y^T A x.$$

En términos de coordenadas duales $\xi = (\xi_1 : \xi_2 : \xi_3)$, del espacio dual proyectivo \mathbb{CP}^{2*} , el mapeo $P \rightarrow T_P C_2$ está dado por $\xi = A x$. Entonces, la curva dual de C_2 , $C_2^* \subset \mathbb{CP}^{2*}$ de líneas tangentes a C_2 es también una cónica suave, definida por la ecuación

$$\xi^T A^{-1} \xi = 0,$$

donde $A A^{-1} = I$. Haciendo el dual de la figura anterior, tenemos que para cada punto $P \in \mathbb{CP}^2$ pasan dos rectas tangentes a C_2 , contando multiplicidades.

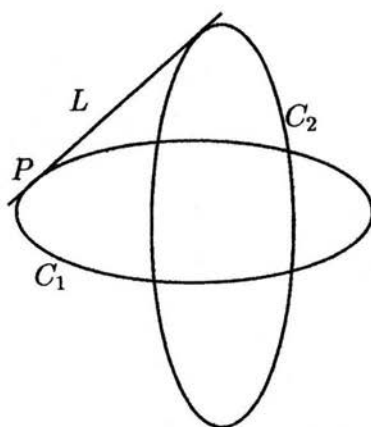


Para cada punto P en L_0 , podemos tomar el mapeo $P \mapsto L$, donde L es la otra tangente a C_2 , como en la figura anterior. Así obtenemos una parametrización de C_2 .

Sea C_1 otra cónica en \mathbb{CP}^2 , tal que C_1 y C_2 no son tangentes en ningún punto, entonces C_1 y C_2 se intersectan transversalmente en 4 puntos. Lo mismo sucede para las cónicas duales C_1^* y C_2^* en \mathbb{CP}^{2*} . En el producto $C_2 \times C_1^* \simeq \mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, consideramos

$$E = \{(P, L) | P \in L\}$$

donde $P \in C_2$ es un punto y L es una tangente a C_1 que pasa por P . Ésta es la variedad generada por la construcción de Poncelet. De hecho, E es una curva algebraica en $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, y como C_1 y C_2 son transversales para todo punto $(P, L) \in E$, al menos uno de los haces de coordenadas que pasan por (P, L) , $\{P\} \times C_1^*$ y $C_2 \times \{L\}$ intersectan a E en dos puntos distintos. Es decir, E es no singular. Veamos esto de otra forma.



La construcción inicial sugiere que consideremos las siguientes dos involuciones

$$i_1 : E \rightarrow E \quad \text{y} \quad i_2 : E \rightarrow E \\ (P, L) \mapsto (P, L') \quad \text{y} \quad (P, L) \mapsto (P', L),$$

donde P' es la otra intersección de L con C_2 y L' es la otra tangente a C_1 que pasa por P . Utilizando la notación de la primera figura podemos reescribir la involuciones como

$$i_1(P_i, L_i) = (P_{i+1}, L_i) \quad \text{y} \quad i_2(P_{i+1}, L_i) = (P_{i+1}, L_{i+1}).$$

Entonces, $j = i_2 \cdot i_1$ cumple que $j(P_i, L_i) = (P_{i+1}, L_{i+1})$. Es decir, el polígono se cierra cuando $j^n(P_0, L_0) = (P_0, L_0)$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. El problema se reduce a encontrar los puntos fijos del automorfismo j^n de E .

Tomar el cociente E/i_1 es lo mismo que considerar el mapeo $E \rightarrow C_1^*$ dado por $(P, L) \mapsto L$. Entonces, E es una cubierta doble de la esfera de Riemann $\Sigma \simeq \mathbb{CP}^1$. Los puntos de ramificación corresponden a los puntos fijos de i_1 , que son donde L es también tangente a C_2 , es decir, en los cuatro puntos que pertenecen al conjunto $C_1^* \cap C_2^*$. Con lo que queda claro que E es una superficie de Riemann no singular y $\chi(E) = 2\chi(\mathbb{CP}^1) - 4 = 0$ (donde $\chi(E)$ es la característica de Euler de E), luego, el género de E es 1.

Lo importante ahora es que existe una forma diferencial holomorfa ω en E que no se anula y cumple que

$$u(p) = \int_{p_0}^p \omega,$$

es un isomorfismo analítico de $E \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ con Λ una retícula inducida por el periodo de ω .

Entonces, las involuciones i_1 e i_2 de E están inducidas por los automorfismos I_1 e I_2 de \mathbb{C} , que es la cubierta universal de E . Podemos considerar que

$$I_1(u) = \alpha u + \tau \quad \text{y} \quad I_2(u) = \alpha' u + \tau'.$$

Como i_1^2 es la identidad, tenemos que $I_1^2(u) = \alpha^2 u + (\tau + 1)\alpha = u + \lambda \pmod{\Lambda}$ para alguna $\lambda \in \Lambda$. Entonces, $\alpha = \pm 1$ y como sabemos que i_1 tiene puntos fijos, $\alpha = -1$. Análogamente, $\alpha' = -1$. Si J es el levantamiento de j a \mathbb{C} , tenemos que $J^n(u) = u + n(\tau + \tau')$. Luego, $j^n(P, L) = (P, L)$ si y sólo si $n(\tau + \tau') \in \Lambda$. Como esta condición es independiente de (P, L) , el teorema está probado. □

Phillip Griffiths y Joshep Harris presentan una interesante generalización de este teorema a \mathbb{R}^3 en su artículo [12]. En la demostración anterior, la dinámica generada por las involuciones i_1 e i_2 , es relativamente sencilla, en el sentido de que las órbitas periódicas o son densas, o no existen.

Veamos rápidamente, otro ejemplo de la dinámica generada por dos involuciones. Tomemos la superficie compleja $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{C}$, y las involuciones

$$\begin{aligned} T_1(x, T) &= (-x, -T) \\ T_2(x, T) &= (-x, -T + 1). \end{aligned}$$

Estas dos involuciones conmutan; de hecho, generan el grupo diedrico infinito D_∞ ,

$$D_\infty = \{a, b \mid a^2 = b^2 = Id\},$$

donde ninguna palabra se anula. La dinámica en este caso es muy rica.

4.2. Variedades tipo Kähler

Como las superficies $K3$ son superficies tipo Kähler, veremos primero la definición de estas y unos ejemplos.

Definición 4.2.1 Si K es un campo con un automorfismo σ de orden 2, denotado por $\sigma : \alpha \mapsto \alpha^\sigma$, entonces, una forma hermitiana en un espacio vectorial V sobre K es una función $h : V \times V \rightarrow K$ tal que, para toda u, v, w en V

$$(i) \quad h(u, v) = h(u, v)^\sigma$$

$$(ii) \quad h(\alpha u, v) = \alpha h(u, v) \text{ para toda } \alpha \in K$$

$$(iii) \quad h(u + v, w) = h(u, w) + h(v, w).$$

En el caso en que el campo es el plano complejo \mathbb{C} la conjugación, $z \mapsto \bar{z}$, es un automorfismo de orden dos. Además, si $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ es la base de un espacio vectorial o variedad compleja M , y si tomamos $u = \sum_j \alpha_j z_j$ y $v = \sum_j \beta_j z_j$ tenemos que la forma

$$h(u, v) = \sum_j \alpha_j \bar{\beta}_j,$$

es una forma hermitiana en M .

Vamos a denotar por $\{dz_1, dz_2, \dots, dz_n\}$ a la base correspondiente del espacio TM . Una métrica hermitiana es una forma hermitiana definida positiva de clase C^∞ en TM . Es decir, una forma del tipo

$$h(z) = \sum_{1 \leq j, k \leq n} h_{jk} dz_j \otimes dz_k, \quad (4.1)$$

donde h_{jk} es una matriz hermitiana positiva con coeficientes de clase C^∞ .

La $(1, 1)$ -forma asociada a 4.1 es la forma

$$\omega = -\text{Im}h = \frac{i}{2} \sum_{1 \leq j, k \leq n} h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k.$$

Definición 4.2.2

(i) Una variedad hermitiana es una pareja (M, ω) , donde ω es una $(1, 1)$ -forma hermitiana definida positiva y de clase C^∞ en M .

(ii) La métrica ω es Kähler si $d\omega = 0$.

(iii) M es una variedad de tipo Kähler si tiene al menos una métrica Kähler.

Observemos que como ω es real, las condiciones $d\omega = 0$, $d'\omega = 0$, $d''\omega = 0$ son equivalentes. En coordenadas locales vemos que la condición $d'\omega = 0$ se cumple si y sólo si

$$\frac{\partial h_{jk}}{\partial z_l} = \frac{\partial h_{lk}}{\partial z_j},$$

para $1 \leq j, k, l \leq n$.

Un simple cálculo nos lleva a que

$$\begin{aligned}\frac{\omega^n}{n!} &= \det(h_{jk}) \bigwedge_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{i}{2} dz_j \wedge d\bar{z}_j \right) \\ &= \det(h_{jk}) dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n,\end{aligned}$$

donde $z_j = x_j + iy_j$ para $1 \leq j \leq n$. Entonces la (n, n) -forma

$$dV = \frac{1}{n!} \omega^n \tag{4.2}$$

es positiva, de hecho, es el elemento de volumen hermitiano de M . Si M es compacta, $\int_M \omega^n = n! \text{Vol}_\omega(M) > 0$. Esto implica que variedades compactas de tipo Kähler deben satisfacer las siguiente condiciones.

Propiedades 4.2.3

- (a) Si (M, ω) es una variedad compacta Kähler y si $\{\omega\}$ denota la clase de cohomología de ω en $H^2(M, \mathbb{R})$, entonces $\{\omega\}^n \neq 0$.
- (b) Si M es una variedad compacta Kähler, entonces $H^{2k}(M, \mathbb{R}) \neq 0$ para $0 \leq k \leq n$. De hecho, $\{\omega\}^k$ es distinta de la clase cero en $H^{2k}(M, \mathbb{R})$.

Ejemplo 4.2.4 Como ya vimos en secciones anteriores, un toro complejo es el cociente $\mathbb{T}_\Lambda = \mathbb{C}^n / \Lambda$, donde Λ es una latiz de rango $2n$. Entonces \mathbb{T}_Λ es compacto y cualquier forma hermitiana definida positiva

$$\omega = i \sum h_{jk} dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

con h_{jk} constantes define una métrica Kähler.

El plano proyectivo $\mathbb{C}P^n$ es también una variedad tipo Kähler con la métrica Fubini-Study¹.

4.3. Lattès y superficies $K3$

En esta sección presentaremos una pequeña introducción a los estudios de la dinámica de los automorfismos de las superficies $K3$, basados especialmente en el artículo de Serge Cantat [4] y en el de Curtis T. McMullen [20]. Empecemos con la definición de una superficie $K3$.

¹Ver ejemplo en [6].

Definición 4.3.1 Una superficie K3 es una superficie compacta compleja X donde el primer número de Betti es cero y donde el haz canónico es trivial.

Que el haz canónico sea trivial significa que existe en X una 2-forma holomorfa no nula. Si Ω es una de estas formas, normalizada por la condición

$$\int_X \Omega \wedge \bar{\Omega} = 1 \quad (4.3)$$

la forma de volumen $\omega_X = \Omega \wedge \bar{\Omega}$ esta únicamente determinada por la estructura compleja de X . De hecho, supongamos que Ω' es una 2-forma holomorfa que cumple con la condición 4.3. Como Ω no se anula, Ω' es el producto de Ω por una función f holomorfa, luego f es constante. La condición 4.3 implica que $f\bar{f} = 1$, luego, $\Omega' \wedge \bar{\Omega}' = \omega_X$. Como la forma de volumen ω_X está únicamente asociada a la estructura compleja de X , es invariante bajo los automorfismos de X .

Cuando Y es una variedad compacta compleja, $H^i(Y, \mathbb{Z})$ es finitamente generado. Si A es un grupo abeliano finitamente generado, los elementos de orden finito de A forman el subgrupo de torsión T , y el cociente A/T es un grupo libre y abeliano. El mínimo número de generadores de A/T es el rango de A . El rango de $H^i(Y, \mathbb{Z})$ es i -ésimo número de Betti, $b_i(Y)$, de la variedad Y . Si denotamos por $T^i(Y)$ al subgrupo de torsión de $H^i(y, \mathbb{Z})$, tenemos que

$$\text{rango}(H^i(Y, \mathbb{Z})/T^i(Y)) = \dim_{\mathbb{R}} H^i(Y, \mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{C}} H^i(Y, \mathbb{C}) = b_i(Y).$$

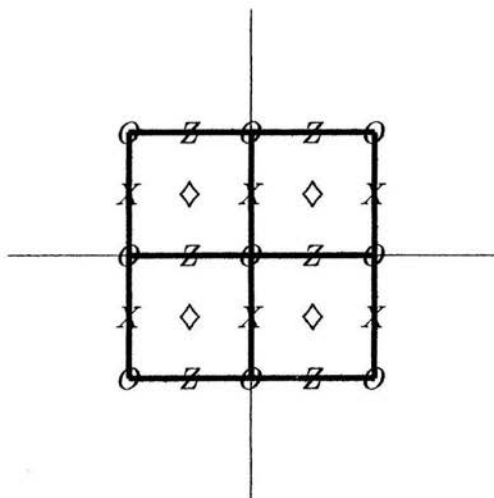
Otra forma de caracterizar a las superficies tipo Kähler es utilizando el siguiente teorema.

Teorema 4.3.2 Una superficie compacta compleja es Kähler si y sólo si su primer número de Betti es par.

Esto implica, que las superficies K3 son de tipo Kähler. No probaremos este teorema aquí, una demostración de este teorema se puede ver en el capítulo 4 sección 3 de [3]. Antes de ver el ejemplo más sencillo de una superficie K3, estudiaremos un ejemplo que fue construido por S. Lattès poco antes de su muerte en 1918.

Ejemplo 4.3.3 Tomemos una retícula Λ y el cociente $\mathbb{C}/\Lambda = \mathbb{E}$ que es una curva elíptica. Notemos que \mathbb{E} es una superficie de Riemann compacta que tiene también estructura de grupo de Lie aditivo. Sea i la involución

$i(z) = -z$. En \mathbb{E} hay 4 puntos fijos que son los marcados en la figura por O, X, Z y \diamond .



Por ejemplo si $\Lambda = \mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z}$, con τ complejo, entonces los cuatro puntos fijos son $0, 1/2, \tau/2$ y $(1 + \tau)/2$. La proyección natural de $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}/i$ es dos a uno excepto en los cuatro puntos de ramificación. Para calcular el género de \mathbb{E}/i utilizaremos la fórmula de Riemann-Hurwitz.

Proposición 4.3.4 Sea $T \rightarrow S$ una cubierta con puntos de ramificación, con T y S superficies de Riemann compactas. Entonces el número de puntos de ramificación, contados con multiplicidad, es $d\chi(S) - \chi(T)$, donde χ denota la característica de Euler y d el grado.

La idea de la prueba es escoger una triangulación de S que contenga a todos los puntos de ramificación como vértices. Sea $a_n(S)$ el número de n -simplejos, de tal forma que $\chi(S) = a_2(S) + a_1(S) + a_0(S)$. En general cada simplejo de S tiene como levantamiento en T , d distintos simplejos. Sin embargo, si v es un punto crítico (de ramificación) hay al menos dos preimágenes de v . Concluimos observando que el número de preimágenes no contadas es precisamente el número de puntos de ramificación en v .

Regresando a nuestro ejemplo, como $\chi(\mathbb{E}) = 0$ y como hay cuatro puntos de ramificación simples, tenemos que $\chi(\mathbb{E}/i) = 2 = 2 - 2g$ donde g denota el género, entonces $g = 0$.

Veamos que \mathbb{E}/i es isomorfa a la esfera de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$, construyamos dicho isomorfismo. Los cuatro puntos de ramificación en \mathbb{E}/i van a jugar

un papel importante, ecojamos un morfismo conforme de \mathbb{E} a $\hat{\mathbb{C}}$ tal que mande a los primeros tres de estos puntos al $\infty, 0, 1$, respectivamente. El cuarto punto de ramificación va a ser mapeado a alguna $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. De esta forma tenemos una proyección $p: \mathbb{E} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$, de grado dos que satisface que $p(-z) = p(z)$, y cuyos valores críticos son

$$p(0) = \infty, \quad p\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad p\left(\frac{\tau}{2}\right) = 1, \quad p\left(\frac{\tau+1}{2}\right) = a.$$

Dada $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ hay una única cubierta $\mathbb{E}' \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de grado dos tal que sus puntos de ramificación sean $\{\infty, 0, 1, a\}$. Utilizando la fórmula de Riemann-Hurwitz, 4.3.4, tenemos que \mathbb{E}' es una curva elíptica isomorfa a $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$ para alguna τ no real. La transformación que intercambia dos preimágenes de un punto² tiene que preservar la estructura lineal, es decir tiene que ser la multiplicación por -1 .

Sea \tilde{f} la función en \mathbb{E} que manda a z en $2z$, \tilde{f} claramente conmuta con la retícula³, $f(\Lambda) \subset \Lambda$ y es de índice 2. Además, como $\tilde{f} \cdot i = i \cdot \tilde{f}$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{E}/i & \xrightarrow{f} & \mathbb{E}/i \end{array}$$

Como \tilde{f} tiene grado 4, tenemos que f es un mapeo racional de grado 4. De hecho, \tilde{f} corresponde bajo p a un mapeo racional $f_a: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ que cumple

$$f_a(p(z)) = p(2z).$$

Los polos de f_a son $\infty, 0, 1, a$, de hecho ∞ es un punto fijo con multiplicador 4. Además, f_a tiene dos ceros dobles en $\pm\sqrt{2}$, se puede entonces concluir que

$$f_a(w) = \frac{(w^2 - a)^2}{4w(w-1)(w-a)}.$$

Tenemos el siguiente teorema de Lattès.

Teorema 4.3.5 *El conjunto de Julia del mapeo racional f es la esfera $\hat{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{E}/i$.*

²Una deck transformation.

³Observemos que en lugar de \tilde{f} podemos utilizar cualquier función lineal que preserve a Λ .

Primero, definamos el conjunto de Julia y de Fatou. Recordemos que una colección de funciones holomorfas \mathcal{F} de una superficie de Riemann S a una superficie compacta de Riemann T es una familia normal si su cerradura $\mathcal{F} \subset \text{Hol}(S, T)$ es un subconjunto compacto. La definición se puede generalizar para cuando T es una superficie de Riemann no compacta⁴.

Definición 4.3.6 Sea S un superficie de Riemann compacta. Tomemos $f : S \rightarrow S$ un mapeo holomorfo no constante, y sea $f^n : S \rightarrow S$ su n -ésima iterada. Para un punto cualquiera $p \in S$ tenemos que, si existe un vecindad U de p tal que la sucesión de iteradas $\{f^n\}$, restringidas a U forma una familia de mapeos normal, decimos que p pertenece al conjunto de Fatou de f . Si tal vecindad no existe, decimos que p pertenece al conjunto de Julia de f .

Demostración. El mapeo \tilde{f} en \mathbb{E} tiene la propiedad de que sus puntos periódicos son densos en todos lados. Por ejemplo, si r y s son dos números racionales cualesquiera, con denominador impar, entonces $r + sT$ es periódico. Estas órbitas periódicas repelan a los puntos cercanas a ellas, ya que el multiplicador es una potencia de dos.

El mapeo f hereda la misma propiedad. Como toda órbita periódica que repele esta contenida en el conjunto de Julia,⁵ concluimos que el conjunto de Julia es \mathbb{E}/i .

□

El ejemplo más sencillo de una superficie $K3$ se obtiene con una construcción similar a la anterior en \mathbb{C}^2 , de la siguiente forma.

Ejemplo 4.3.7 Sea $\mathbb{T}_\Lambda = \mathbb{C}^2/\Lambda$ un toro de dimensión 2, y i la involución $(x, y) \mapsto (-x, -y)$. Los puntos fijos de i son 16, los 16 puntos de orden 2 del grupo \mathbb{T}_Λ . La superficie $A = \mathbb{T}_\Lambda/i$ tiene entonces 16 singularidades. Al explotar estas singularidades se obtiene una variedad compacta y lisa que por definición es la superficie de Kummer asociada a \mathbb{T}_Λ .

La forma $\xi = dz_1 \wedge dz_2$ de \mathbb{T}_Λ induce una 2-forma holomorfa en \mathbb{T}_Λ/i no nula. Es decir, es una superficie $K3$ (las superficies de Kummer son superficies $K3$ especiales, claramente son también kählerianas). Observemos que como todo F automorfismo de \mathbb{T}_Λ conmuta con la involución i , induce una automorfismo de \mathbb{T}_Λ/i .

⁴Ver [21].

⁵Ver el lema 4.3 de [21].

Supongamos que \mathbb{T}_Λ es el producto de dos curvas elípticas idénticas

$$\mathbb{T}_\Lambda = \mathbb{C}/\Lambda \times \mathbb{C}/\Lambda.$$

Como el grupo $SL(2, \mathbb{Z})$ actúa linealmente en \mathbb{C}^2 , preserva al producto $\Lambda \times \Lambda$. Es decir, $SL(2, \mathbb{Z})$ forma parte del grupo $Aut(\mathbb{T}_\Lambda)$. Cualquiera de estos automorfismos conmuta con i y determina entonces un automorfismo de la superficie K_Λ . Por ejemplo, tomemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz determina un automorfismo Φ de K_Λ que tiene entropía estrictamente positiva que genera una dinámica de tipo "pseudo-Anosov"⁶: las dos foliaciones holomorfas de \mathbb{T}_Λ que son invariantes bajo el automorfismo lineal, determinan en K_Λ foliaciones que son dilatadas y contraídas por Φ .

Es sencillo ver que todo automorfismo de una superficie $K3$ (estamos considerando holomorfismos de una superficie $K3$ en si misma) es un biholomorfismo. Como final de esta sección, veamos el siguiente lema.

Lema 4.3.8 Sean M una superficie $K3$ y $f : M \rightarrow M$ una función holomorfa. Consideremos $f^* : \Lambda^2(M) \rightarrow \Lambda^2(M)$, donde $\Lambda^2(M)$ denota al haz canónico, entonces, f^* es una homotecia.

Demostración. Como M es una superficie $K3$, el haz canónico es trivial, es decir, $\Lambda^2(M) = M \times \mathbb{C}$. Denotemos por S_c a una sección constante del haz canónico, $S_c = M \times \{c\}$. Entonces, $f^*(S_c)$ es una sección transversal del haz canónico, ya que al proyectar en \mathbb{C} se genera un automorfismo de \mathbb{C} . Por último, observemos que f^* restringido a la sección 0, es un automorfismo de esta. Luego, f^* es una homotecia. □

⁶Ver la definición en la tesis de Serge Cantat, [4].

Apéndice

Fibrados definidos por un grupo

En este apéndice veremos qué significa que un fibrado de marcos ortonormales de una variedad riemanniana V tenga estructura de fibrado $SO(3)$ -principal, cuya traslación está dada por traslaciones a la derecha de $SO(3)$. Tenemos las siguientes definiciones.

Definición A.1 Para un grupo de Lie G , una acción izquierda de G en un espacio X , es un mapeo

$$\begin{aligned} G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto gx, \end{aligned}$$

tal que

- (i) para toda $x \in X$, $g, l \in G$ se cumple que $(gl)x = g(lx)$,
- (ii) para toda $x \in X$ tenemos que $Ix = x$, donde I es la identidad en G .

La definición de acción derecha de G , es igual tomando el mapeo de $X \times G \rightarrow X$ tal que a $(x, g) \mapsto xg$. Si X tiene una acción izquierda de G donde $xg = g^{-1}x$, decimos que es una acción de G (ya que también es acción derecha). La multiplicación por escalares define una $\{\mathbb{R} \setminus 0\}$ -espacio estructura en \mathbb{R}^n . Necesitamos el siguiente lema.

Lema A.2 Sea X un espacio con una acción de G , el mapeo tal que $x \mapsto xg$ es un homeomorfismo, y la proyección $\phi : X \rightarrow X \text{ (mod } G)$ es un mapeo abierto.

Demostración. La inversa del mapeo $x \mapsto xg$ es $x \mapsto xg^{-1}$, luego es un homeomorfismo. Tomemos U un subconjunto abierto de X , entonces

$\phi^{-1}\phi(U) = \cup_{g \in G} U_g$, donde U_g son subconjuntos abiertos. Entonces, $\phi(U)$ es abierto en $X \pmod{G}$ para todo abierto U de X .

□

Esto quiere decir que toda acción de G en X determina un fibrado $\alpha(X) = (X, \phi, X \pmod{G})$, donde X es el espacio, $X \pmod{G}$ es el espacio base y $\phi : X \rightarrow X \pmod{G}$ es la proyección. En general, utilizaremos la notación (X, p, B) para un fibrado de X con espacio base B y $p : X \rightarrow B$. Para cada $b \in B$ la fibra es $p^{-1}(b)$.

Definición A.3 Un fibrado (X, p, B) es un G -fibrado si (X, p, B) y $\alpha(X)$ son isomorfos, para alguna acción de G en X , bajo un isomorfismo $(1, f) : \alpha(X) \rightarrow (X, p, B)$, donde $f : X \pmod{G} \rightarrow B$ es un homeomorfismo.

Definición A.4 Una acción de G en X es efectiva si tiene la propiedad de que $xg = x$ implica que $g = I$.

Sea X^* el subespacio de todas las parejas $(x, xg) \in X \times X$, donde $x \in X$, $g \in G$ y X tiene una acción de G efectiva. Hay una función $\tau : X^* \rightarrow G$ tal que $x\tau(x, x') = x'$ para toda $(x, x') \in X^*$, esta función es la función de traslación. Tiene las siguientes propiedades:

- (i) $\tau(x, x) = I$,
- (ii) $\tau(x, x')\tau(x', x'') = \tau(x, x'')$,
- (iii) $\tau(x', x) = \tau(x, x')^{-1}$.

Una acción de G en X es principal si es una acción de G en X efectiva con una función de traslación continua $\tau : X^* \rightarrow G$. Un fibrado G -principal es un G -fibrado (X, p, B) donde X tiene una acción de G principal. Para fijar ideas, veamos un ejemplo, más ejemplos se pueden encontrar en [16].

Ejemplo A.5 Sean G el grupo $\{1, -1\}$ y \mathbb{S}^n el espacio con la acción dada por $x(\pm 1) = \pm x$. Entonces, $(\mathbb{S}^n)^*$ es el subespacio formado por las parejas $(x, \pm x) \in \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$ y la función de traslación $\tau(x, \pm x) = \pm 1$ es continua. Esta acción de \mathbb{Z}_2 principal define una fibración \mathbb{Z}_2 -principal donde el espacio base es $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$.

Bibliografía

- [1] L.V. Ahlfors. *Quasiconformal mappings*. Van Nostrand, Princeton, 1966.
- [2] V.I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer-Verlag, 2 edition, 1989.
- [3] W. P. Barth et al. *Compact complex surfaces*. Springer-Verlag, 1980.
- [4] S. Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces $K3$. *Acta Mathematica*, 2000. 1-57.
- [5] M.P. Do Carmo. *Riemannian geometry*. Mathematics: theory and applications. Birkhäuser, 1992.
- [6] J.P. Demailly. *Complex analytic and differential geometry*. Springer-Verlag, 1999.
- [7] E. Ghys. Flots d'Anosov dont les feuilletages stables sont différentiables. *Ann. Scient. Ecole Normale Supérieure*, 20, 1987. 251-270.
- [8] E. Ghys. Holomorphic Anosov systems. *Inventiones mathematicae*, 119, 1995. 585-614.
- [9] E. Ghys y A. Verjovsky. Locally free holomorphic actions of the complex affine group. *World Science Publishing*, 1994.
- [10] M. Golubitsky y V. Guillemin. *Stable mappings and their singularities*. Springer-Verlag, 1973.
- [11] H. Grauert y R. Remmert. *Theory of Stein spaces*. Springer-Verlag, 1979.
- [12] P. Griffiths y J. Harris. A Poncelet theorem in space. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 52(2), 1977. 145-160.
- [13] P. Griffiths y J. Harris. On Cayley's explicit solution to Poncelet porism. *Enseign. Math.*, 1-2, 1978. 31-40.

- [14] P. R. Halmos. *Measure theory*. Springer-Verlag, 1974.
- [15] M. Hirsch et al. *Invariant manifolds*. Lectures Notes 583. Springer-Verlag, 1977.
- [16] D. Husemoller. *Fibre bundles*. Springer-Verlag, 2 edition, 1975.
- [17] G. Jones y D. Singerman. *Complex functions, an algebraic and geometric viewpoint*. Cambridge University Press, 1987.
- [18] S. Lang. *Complex multiplication*. Springer-Verlag, 1983.
- [19] A. Malcev. On a class of homogeneous spaces. *American Mathematical Society, Translations*(39), 1951.
- [20] C. T. McMullen. Dynamics on $K3$ surfaces: Salem numbers and Siegel disks. *J. Reine Angew. Math.*, 545, 2002. 201-233.
- [21] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable*. Introductory Lectures. Vieweg, 2 edition, 2000.
- [22] D. Mumford. *Abelian varieties*. Oxford University Press, 1970.
- [23] W. Rossman. *Lie groups, an introduction through linear groups*. Oxford Science Publications. Oxford University Press, 2002.
- [24] W. Thurston. *The geometry and topology of 3-manifolds*. Princeton Lectures Notes, 1977.
- [25] V.S. Varadajan. *Lie Groups, Lie Algebras and their representations*. Prentice-Hall, 1974.
- [26] A. Verjovsky. Sistemas de Anosov. *Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines, IMCA, XII Escuela Latinoamericana de Matemáticas y Ciencias Afines*(9), 1999.