



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

# Teoremas Equicordales

T E S I S  
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:  
M A T E M A T I C A  
P R E S E N T A :

**Aisha Nájera Hernández**

Director de Tesis: Dr. Luis Montejano Peimbert



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

2004



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Teoremas equicordales

realizado por Aisha Nájera Hernández

con número de cuenta 40004226-6 , quien cubrió los créditos de la carrera de:

Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
 Propietario

Dr. Luis Montejano Peimbert

Propietario

Dr. Javier Bracho Carpizo

Propietario

M. en C. Margarita Boege Von Mentz

Margarita Boege

Suplente

Dra. Martha Gabriela Araujo Pardo

Suplente

Dr. Francisco Marmolejo Rivas

Consejo Departamental de Matemáticas



M. en C. Alejandro Bravo Mójica

FACULTAD DE CIENCIAS  
 CONSEJO DEPARTAMENTAL  
 DE  
 MATEMÁTICAS

# Índice general

1. Introducción	1
2. Conjuntos convexos y algunas definiciones	4
3. Cuerdas quirales	10
4. Teorema Equicordal de Rogers	14
5. Teorema Equicordal Tangencial	19
6. Teorema Equicordal Sangoloteado	25
A. Es fácil ver que ...	30
Bibliografía	32

*A mi mamá, a mi papá y a Hesel*

Wenn ein Tier oder Mensch  
seine ganze Aufmerksamkeit  
und seinen ganzen Willen  
auf eine bestimmte Sache richtet,  
dann erreicht er sie auch

# Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a Luis por el apoyo, la paciencia y el tiempo que me dedicó, pero sobre todo por sus cautivadoras ideas y su manera apasionada de transmitir las. A Roli por sus clases y consejos a lo largo de mi carrera y también por el apoyo. A Margareta y a Marmolejo por leer con tanta paciencia mi tesis y por todas las correcciones y comentarios. A Gaby por quererme como su ayudante durante un año y porque juntas aprendimos más sobre convexidad.

A mi queridísimo maestro de toda la vida, Óscar Chávez, por haberme enseñado un poco de lo sagrado, sus ánimos, consejos y apoyo, pues de no ser por él, probablemente no habría estudiado matemáticas. A mis maestros de la facultad, Luis, Roli, Luis Briseño, Alejandro y Víctor.

A mi amigo con el que empecé partiendo donas afuera del Dairy Mart, con el que comparto pasiones, lágrimas y la vida y que pacientemente me explicó matemáticas. Alfredo, ¿qué va a pasar ahora que, después de tantos años, nos separamos?

A mi mamá que tanto me cuida y me procura, a mi papá y a Hesus por el amor incondicional.

A Doug por el amor y la pasión que me da, por los días que vivimos juntos y por los que vienen.

A mis amigas, Adriana, Eugenia, Jimena y Jina por las largas noches de pláticas, consejos, apapachos, viajes, aventuras, lágrimas y mucha risa... por estar ahí. A mis amigos, Rüdiger, Mariano, Maurico y Luis, también por las pláticas y consejos, por escucharme y ayudarme.

A los Sanginés, porque todos han sido muy lindos conmigo y sobre todo a David por crecer conmigo. A los Chávez-López por adoptarme un otoño, gracias Marce. A los

Hubard y a mis tias Paty y Lupe.

A mis compañeros de carrera y estudio, a Ana, Abraham, Ramón, Natalia, Julián, Luis Pedro, Vlasis, Daniel; a mis compañeros de cubículo y especialmente a los que me ayudaron con los problemas técnicos, Checo y Eduardo.

Muchas gracias,

Aisha



# Capítulo 1

## Introducción

*"The mathematicians' patterns,  
like the painters or the poets, must be beautiful;  
the ideas like the colours or the words,  
must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test:  
there is no permanent place for ugly mathematics."*

El estudio de los conjuntos convexos es relativamente reciente en la historia de la matemática. Algunos resultados importantes fueron hechos a finales de 1800, con Brunn y Minkowski, al tratar de caracterizar la convexidad exclusivamente en términos de una propiedad de la Geometría de Conjuntos; alejándose de las leyes de las funciones analíticas y buscando formas geométricas a través de las funciones generales obtuvieron como resultado una teoría completamente nueva, que culminó en la Teoría Fundamental de Brunn-Minkowski. El primer estudio sistemático fue hecho por Bonnesen y Fenchel en 1934 con el libro, *Teorie der konvexen Körper*, Teoría de los cuerpos convexos, una adaptación e interpretación de toda esta rama de la matemática con una lista completa de referencias. En 1916, Blaschke, en su libro, *Kreis und Kugel*, Círculo y Esfera, interpreta de una manera fascinante y cautivadora el sentido y el espíritu de los tres clásicos; Steiner, Brunn y Minkowski.

En las décadas de los 40's y 50's muchas aplicaciones fueron descubiertas, especialmente en el área de la optimización lo que generó un interés en el estudio de la teoría de los conjuntos convexos.

Años más tarde, aparece el no famoso problema equicordal. Se dice que un punto  $E$ , en el interior de un convexo  $K$  en el plano, es un punto equicordal, si cada cuerda de  $K$  por  $E$  tiene la misma longitud.

El problema se pregunta si un dominio convexo puede tener dos puntos distintos equicordales. A pesar de los esfuerzos de muchos matemáticos, entre los cuales destaca el gran trabajo de E. Wirsing (1958) y G.J. Butler (1969) que prueba la existencia de dominios convexos con un par de puntos  $C, C'$  que son equicordales para todas las cuerdas que hacen un ángulo suficientemente pequeño con la línea  $C, C'$ , este problema parece ser insoluble.

En los 70's P. Mc Mullen le planteó a C.A. Rogers un problema equicordal distinto. Él empieza con la observación de que si  $C, C'$  son dos puntos interiores de un dominio convexo  $K$  que es centralmente simétrico con respecto al punto medio del segmento  $C, C'$ , entonces cada cuerda de  $K$  por  $C$  tiene la misma longitud que la cuerda paralela de  $K$  por  $C'$ . Aquí, por supuesto, las longitudes de las cuerdas dependerán del ángulo que hacen con la línea  $C, C'$ . Mc Mullen pregunta por el converso.

*Sean  $C, C'$  dos puntos interiores distintos de un dominio convexo  $K$ . Si cada cuerda de  $K$  por  $C$  tiene la misma longitud que la cuerda paralela de  $K$  por  $C'$ , entonces  $K$  es centralmente simétrico con respecto al punto medio del segmento de línea  $C, C'$ .*

Este problema equicordal, resuelto por C.A. Rogers y publicado en 1981 fue lo que dio lugar de la tesis. En el Capítulo 2 daremos unas definiciones y propiedades básicas que se utilizan a lo largo del trabajo. En el capítulo 4 daremos una demostración alterna que servirá como esqueleto para las generalizaciones de los capítulos 5 y 6.

El lector interesado en ver aplicaciones de teoremas de tipo equicordal consúltese [5].

## Capítulo 2

# Conjuntos convexos y algunas definiciones

*“Du sagst, man hat keinen freien Willen.  
Aber dann sagst du wieder,  
man brauche nur seinen Willen fest  
auf etwas zu richten.”*

Para un acercamiento al estudio de la Convexidad solamente son necesarias nociones básicas de Álgebra Lineal y Topología. Empezaremos con unas definiciones y ejemplos.

La colección de todas las  $n$ -adas ordenadas de números reales, para  $n \in \mathbb{N}$  forman el espacio real lineal  $\mathbb{R}^n$  al definir  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) + (\beta_1, \dots, \beta_n) \equiv (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$  y  $\lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \equiv (\lambda\alpha_1, \dots, \lambda\alpha_n)$  para cualquier  $n$ -ada  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  y  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  y cualquier número real  $\lambda$ .

**Definición 2.1** Definimos el *producto interior*  $\langle p, q \rangle$  donde  $p = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $q = (\beta_1, \dots, \beta_n)$  como  $\langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$ .

Así  $\mathbb{R}^n$  junto con el producto interior que acabamos de definir es llamado el Espacio Euclidiano  $n$ -dimensional y se denota  $E^n$ . Los puntos  $P, Q$ , denotarán a los vectores

$p, q$  que salen del origen.

**Definición 2.2** Sean  $P, Q$  puntos en  $E^2$ , el **intervalo**  $\overline{PQ}$  que une  $P$  y  $Q$  es el conjunto de todos los puntos dados por los vectores  $\lambda p + (1 - \lambda)q$  donde  $0 \leq \lambda \leq 1$

**Definición 2.3** Un conjunto  $S$  es **convexo** si para cada par de puntos  $P, Q$  en  $S$  tenemos que  $\overline{PQ} \subset S$ , es decir el intervalo que los une se encuentra completamente contenido en  $S$ .

Es fácil ver que algunos ejemplos de conjuntos convexos son los círculos, semiplanos, triángulos, cuadrados, etc., de hecho, cualquier polígono convexo es un conjunto convexo.

Definamos el **círculo**  $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq r\}$  con  $r \in \mathbb{R}^+$ .

Sean  $x, y \in S$ , Para toda  $z \in \overline{xy}$ ,  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$  con  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Esto implica que  $\|z\| = \|\lambda x + (1 - \lambda)y\| \leq \lambda \|x\| + (1 - \lambda) \|y\| \leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r(\lambda + 1 - \lambda) = r$  y por lo tanto  $z \in S$ ,  $\forall z \in \overline{xy}$

Definamos el **semiplano**  $\ell_r = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > r\}$

Tomemos  $x, y \in \ell_r$ . Para toda  $z \in \overline{xy}$ ,  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$  con  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

$$z = (z_1, z_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2) + ((1 - \lambda)y_1, (1 - \lambda)y_2) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1, \lambda x_2 + (1 - \lambda)y_2).$$

Esto implica que  $z_1 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)y_1 > \lambda r + (1 - \lambda)r = r$  y por lo tanto  $z \in \ell_r$ ,  $\forall z \in \overline{xy}$

Observemos que el semiplano es un conjunto convexo no acotado y que los polígonos se pueden ver como la intersección de semiplanos.

**Proposición 2.4** La intersección de conjuntos convexos es convexa

Sea  $\{K_\alpha\}$ ,  $\alpha \in A$ , una familia de conjuntos convexos y sean  $x, y \in \bigcap K_\alpha \implies x, y \in K_\alpha$  para toda  $\alpha \in A$ , por ser  $K_\alpha$  convexo sabemos que  $\overline{xy} \subset K_\alpha$  para toda  $\alpha \in A$  por lo tanto  $\overline{xy} \subset \bigcap K_\alpha$ . □

En el siguiente dibujo podemos ver algunas figuras no convexas.

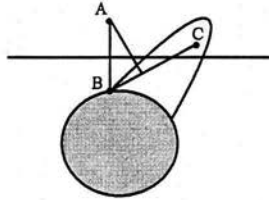


**Proposición 2.5** *Una figura cerrada  $S$  es convexa si y sólo si para cualquier punto  $A$  que no esté en ella, existe una línea que separa al punto  $A$  de la figura  $S$ .*

Tomemos una figura convexa  $S$  y un punto cualquiera que no esté en ella. Llamémosle  $A$ . De entre todos los puntos de  $S$  pongamos atención en aquel que se encuentre más cerca de  $A$  y llamémosle  $B$  (véase figura). Mostraremos que la línea  $L$ , que pasa por el punto medio del segmento  $AB$  y que es perpendicular a éste, separa a  $S$  del punto  $A$ . Es decir, mostraremos que “arriba de  $L$ ”, del mismo lado de  $A$ , no hay ningún punto de  $S$ . Si existiera un punto  $C$  de la figura  $S$  del mismo lado que  $A$ , entonces por ser  $S$  convexa, el segmento  $BC$  estaría dentro de  $S$  y por lo tanto habría en éste segmento un punto de  $S$  cuya distancia a  $A$  es más pequeña que la distancia de  $B$  a  $A$ . Esto es imposible, pues habíamos escogido de antemano a  $B$  con la propiedad de ser el punto de  $S$  más cercano al punto  $A$ . Esto nos convence de que no existen puntos de  $S$  “arriba de  $L$ ” y que por lo tanto la línea  $L$  separa a la figura  $S$  del punto  $A$ .

Supongamos ahora que tenemos una figura  $S$  con la propiedad de que para cualquier punto  $A$  exterior a ella, hay una línea recta que separa a la figura  $S$  del punto  $A$ . Queremos ver que  $S$  es una figura convexa. Supongamos que existen dos puntos  $P, Q$  con la propiedad de que hay un punto  $A \in \overline{PQ}$  tal que  $A \notin S$ . Entonces podríamos trazar

una línea que deja a  $P$  y a  $Q$  de una lado y a  $A$  del otro. Como es obvio que ésto no es posible,  $S$  es una figura convexa.  $\square$

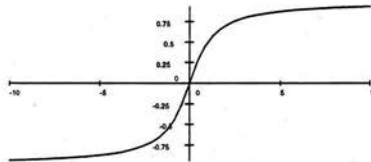


**Definición 2.6** Decimos que una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es *continua en el punto*  $x_0$ , si dada cualquier  $\varepsilon > 0$  existe una  $\delta > 0$  tal que  $d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$  siempre que  $d(x, x_0) < \delta$

**Definición 2.7** Se dice que  $f$  es *continua en  $\mathbb{R}^n$* , si es continua en todo punto  $x \in \mathbb{R}^n$

**Definición 2.8** Si  $f$  es una función biyectiva con la propiedad de que  $f$  y  $f^{-1}$  son continuas, entonces se dice que  $f$  es un *homeomorfismo*.

**Ejemplo 2.9** La función  $f(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x$  es un homeomorfismo de la recta real  $(-\infty, \infty)$  y el intervalo abierto  $(-1, 1)$



$$f(x) = \frac{2}{\pi} \arctan x$$

**Proposición 2.10** *Si  $g$  es continua en  $x_0$ , y  $f$  es continua en  $g(x_0)$ , entonces  $f \circ g$  es continua en  $x_0$*

Sea  $\varepsilon > 0$ . Puesto que  $f$  es continua en  $g(x_0)$ , existe un  $\delta' > 0$  tal que para todo  $y$  si  $d(y, g(x_0)) < \delta'$  entonces  $d(f(y), f(g(x_0))) < \varepsilon$ , lo que significa que si  $d(g(x), g(x_0)) < \delta'$ , entonces  $d(f(g(x)), f(g(x_0))) < \varepsilon$

Aplicando la continuidad de  $g$  sabemos que existe un  $\delta > 0$  tal que  $\forall x$  si  $d(x, x_0) < \delta$  entonces  $d(g(x), g(x_0)) < \delta'$  y por lo tanto tenemos que  $\forall x$  si  $d(x, x_0) < \delta$  entonces  $d(f(g(x)), f(g(x_0))) < \varepsilon$

De aquí que, si  $f, g$  son continuas, entonces  $f \circ g$  es continua.

**Proposición 2.11** *Si  $f$  y  $g$  son homeomorfismos, entonces  $f \circ g$  es un homeomorfismo*

La composición de funciones biyectivas es biyectiva, por lo tanto  $f \circ g$ , es biyectiva. De la proposición anterior sabemos que  $f \circ g$  es continua y  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$  que también es continua por ser  $g^{-1}$  y  $f^{-1}$  continuas.  $\square$

**Definición 2.12** *Decimos que un conjunto  $K$  es centralmente simétrico con respecto al origen si para toda  $x \in K$  tenemos que  $-x \in K$ .*

**Proposición 2.13**  *$K$  es centralmente simétrico con respecto al origen si y sólo si  $K = -K$*

Por definición  $-K = \{-x \mid x \in K\}$ , esto implica que si  $w \in -K$  entonces  $-w \in K$ . Sea  $x \in K$ , por ser  $K = -K$  sabemos que  $x \in -K$  y por lo tanto  $-x \in K$ .

Sea  $x \in K$  esto implica que  $-x \in -K$ , además como  $K$  es centralmente simétrico con respecto al origen, tenemos que  $-x \in K$  y por lo tanto  $x \in -K$ , es decir  $K \subset -K$ , análogamente  $-K \subset K$ .  $\square$

**Proposición 2.14** *Para  $K$  convexo, cerrado y acotado,  $K$  es centralmente simétrico con respecto al origen si y sólo si la  $frK$  es centralmente simétrica respecto al origen.*



Es fácil ver que la  $fr - K = -frK$ , y como  $-frK = frK$  tenemos que  $fr - K = frK$ , como el casco convexo de la frontera de  $K$  es igual a  $K$ , para todo  $K$  convexo, entonces tenemos que  $-K = K$ .

Si  $K = -K$  entonces  $fr(K) = fr(-K)$  y por lo tanto  $frK = -frK$ , ya que  $fr - K = -frK$ , así, por la proposición 2.13, la  $frK$  es centralmente simétrica respecto al origen.  $\square$

**Definición 2.15** Decimos que un conjunto  $K$  es *centralmente simétrico con respecto a  $p$*  si  $K - p$  es centralmente simétrico con respecto al origen.

**Proposición 2.16**  $K$  y  $-K$  son trasladados si sólo si  $K$  es centralmente simétrico.

$K$  y  $-K$  son trasladados si sólo si  $-K = p + K$  si y sólo si  $\frac{-p}{2} - K = \frac{p}{2} + K$  si y sólo si  $(\frac{p}{2} + K)$  es centralmente simétrico.  $\square$

## Capítulo 3

### Cuerdas quirales

*“To know someone here or there,  
with whom you can feel there is an understanding  
inspite of distances or thoughts unexpressed,  
that can make of this earth a garden.”*

En esta sección trabajaremos con cuerdas quirales y algunas de las propiedades más importantes de ciertos sistemas de líneas muy usados en la geometría convexa, como son, el sistema de líneas que dividen el área o el perímetro de una figura convexa a la mitad.

Sea  $K \subset \mathbb{R}^2$  una figura convexa y sea  $L$  una línea que intersecta a  $K$ . Entonces la cuerda  $I = L \cap K$  es *quiral* si la longitud de  $I$  es igual a la longitud de la cuerda  $I^*$ , donde  $I^* = -L \cap K$ .

**Lema 3.1** *Sea  $K$  una figura convexa y sea  $I$  una cuerda quirale, entonces  $\Omega(I)$  es una cuerda quirale de  $\Omega(K)$ , donde  $\Omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un isomorfismo lineal.*

La demostración se basa en probar que dos intervalos paralelos y de la misma longitud van, bajo una transformación lineal, a dos intervalos paralelos de la misma longitud.

Dada  $v \in \mathbb{S}^1$  tomemos la línea  $L_v = \{tv + \delta \mid t \in \mathbb{R}\}$  y supongamos que  $I_v = L_v \cap K$  es quiral. Entonces si  $I_v = [r_1v + \delta, r_2v + \delta]$  e  $I_v^* = [s_1v - \delta, s_2v - \delta]$ , tenemos que la longitud de  $I_v$  es igual a  $|r_2 - r_1|$  que es igual a  $|s_2 - s_1|$ , la longitud de  $I_v^*$ . Por ser  $\Omega$  un isomorfismo lineal sabemos que  $\Omega(I_v) = [r_1\Omega(v) + \Omega(\delta), r_2\Omega(v) + \Omega(\delta)]$  y también que  $\Omega(I_v^*) = [s_1\Omega(v) - \Omega(\delta), s_2\Omega(v) - \Omega(\delta)]$ , lo cual implica que la longitud de  $\Omega(I_v)$  es igual a la longitud de  $\Omega(I_v^*)$ . Es decir, para toda cuerda  $I_v$  quiral,  $\Omega(I_v)$  es quiral.  $\square$

**Definición 3.2** Sea  $K$  una figura convexa, decimos que una línea  $L$  es una *línea soporte* de  $K$  si interseca a  $K$  en al menos un punto y deja a  $K$  completamente contenida en la cerradura de alguno de los dos semiplanos definidos por  $L$ .

**Corolario 3.3** Sea  $K$  una figura convexa y sea  $\delta$  un punto en el interior de  $K$ . Sea  $\Omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un isomorfismo lineal. Si todas las cuerdas por  $\delta$  son quirales, entonces todas las cuerdas de  $\Omega(K)$  por  $\Omega(\delta)$  son quirales.

**Corolario 3.4** Sea  $K$  una figura convexa y sea  $\delta$  otra figura convexa en el interior de  $K$ . Sea  $\Omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un isomorfismo lineal. Si todas las cuerdas soporte a  $\delta$  son quirales, entonces todas las cuerdas de  $\Omega(K)$  soporte a  $\Omega(\delta)$  son quirales.

**Definición 3.5** Definimos una colección de líneas  $\{L_v\}_{v \in \mathbb{S}^1} = F$  como un *sistema de líneas* si para cada dirección  $\pm v \in \mathbb{S}^1$  existe una única línea  $L_v \in F$  paralela a  $\pm v$ .

**Definición 3.6** La función  $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  es una *función impar*, si para toda  $v \in \mathbb{S}^1$   $f(-v) = -f(v)$ .

Sea  $F$  un sistema de líneas, para cada  $v \in \mathbb{S}^1$  definimos  $\delta(v)$  como la distancia dirigida del origen a la recta  $L_v \in F$ . De esta forma  $L_v$  se puede escribir como  $\{\delta(v)v^\perp + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Por ser  $F$  un sistema de líneas, sabemos que  $L_v = L_{-v}$  es decir,  $\delta(v)v^\perp + tv = \delta(-v)(-v)^\perp + tv$ , lo que implica que  $\delta(-v) = -\delta(v)$ , y por lo tanto  $\delta(v)$  es una función impar.

**Definición 3.7** Decimos que un sistema de líneas exteriormente simple, es aquel sistema de líneas para el cual, su función  $\delta(v)$  es una función continua y lo denotaremos como  $[\delta]$ .

**Proposición 3.8** Si  $F$  es un sistema de líneas exteriormente simple, entonces para todo  $P \in \mathbb{R}^2$  existe  $L \in F$  tal que  $L$  pasa por  $P$ .

Sea  $P \in \mathbb{R}^2$  y tomemos  $v \in \mathbb{S}^1$ , sabemos que  $L_v \in F$  y que divide a  $\mathbb{R}^2$  en dos semiplanos,  $L_v^+$  y  $L_v^-$ , supongamos, sin pérdida de generalidad que  $P \in L_v^+$ . Al variar continuamente  $L_w \in F$ , con  $w$  desde  $v$  hasta  $-v$ , tenemos que existe  $L \in F$  tal que  $P \in L$ .  $\square$

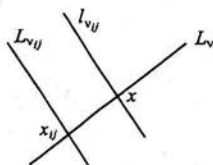
**Lema 3.9** Sea  $F$  un sistema de líneas tal que:

El centro de  $F$ ,  $C(F) = \{L_v \cap L_u \mid v \neq u \in \mathbb{S}^1\}$  es acotado.

Entonces  $F$  es un sistema de líneas exteriormente simple.

Para probar la continuidad será suficiente probar que para toda subsucesión  $v_{ij}$  de  $v_i$  existe una subsucesión  $v_{ij}$  tal que  $L_{v_{ij}} \rightarrow L_v$ . Intuitivamente, decimos que  $L_{v_i}$  converge a  $L_v$ , si el ángulo de intersección entre las rectas tiende a cero, cuando las rectas se intersectan, o si la distancia entre las rectas tiende a cero cuando son paralelas.

Sea  $x_i = L_{v_i} \cap L_v$ , entonces como el centro es acotado, sabemos que existe una subsucesión  $x_{ij}$  convergente a  $x$ . Tomemos  $\ell_{v_{ij}}$  como la recta en dirección  $v_{ij}$  que pasa por  $x$ . Es claro que  $\ell_{v_{ij}} \rightarrow L_v$ , por otro lado como  $L_{v_{ij}}$  es paralela a  $\ell_{v_{ij}}$  y  $x_{ij} \rightarrow x$  entonces  $L_{v_{ij}}$  converge a  $\ell_{v_{ij}}$  y por lo tanto  $L_{v_{ij}} \rightarrow L_v$ .  $\square$



**Definición 3.10** Decimos que un sistema de líneas exteriormente simple de  $K$ , es aquel sistema de líneas exteriormente simple para el cual, su centro está contenido propiamente en  $K$ .

**Lema 3.11** Sea  $[\delta]$  un sistema de líneas exteriormente simple, entonces  $\Omega([\delta])$  es un sistema de líneas exteriormente simple, donde  $\Omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un isomorfismo lineal.

Sea  $v \in \mathbb{S}^1$ , por ser  $\Omega$  un isomorfismo lineal, sabemos que existe  $w \in \mathbb{S}^1$  tal que  $\Omega(w) = av$ , lo cual implica que hay una línea,  $\Omega(L_w) = \{a\delta(w)\Omega(w^\perp) + t\Omega(w) \mid t \in \mathbb{R}\}$  en dirección de  $v$ . Para ver que es única, supongamos que dada  $v$ , existen dos vectores  $u$  y  $w$  tales que  $\Omega(L_u) = \Omega(L_w)$ , es decir  $\Omega(u) = a\Omega(w)$ , por ser líneas paralelas, pero entonces  $u = aw$ . Por lo tanto existe exactamente una línea en cada dirección del plano.

Por ser  $\Omega$  un isomorfismo lineal, sabemos que la imagen de un conjunto acotado es acotada, más aún,  $\Omega(C(F)) = \{\Omega(L_v \cap L_u) \mid v \neq u \in \mathbb{S}^1\} = \{\Omega(L_v) \cap \Omega(L_u) \mid v \neq u \in \mathbb{S}^1\} = C(\Omega(F))$ , lo que implica que el centro de  $\Omega(F)$  es acotado y por lo tanto  $\Omega([\delta])$  es un sistema de líneas exteriormente simple.  $\square$

**Corolario 3.12** Sea  $K$  una figura convexa y sea  $[\delta]$  un sistema de líneas exteriormente simple. Sea  $\Omega : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un isomorfismo lineal. Si todas las cuerdas de  $[\delta]$  son quirales en  $K$ , entonces todas las cuerdas  $\Omega([\delta])$  son quirales en  $\Omega(K)$ .

# Capítulo 4

## Teorema Equicordal de Rogers

*“The great path has no gates,  
thousands of roads enter it.”*

**Teorema 4.1 (Teorema Equicordal de Rogers)** *Sea  $K$  una figura convexa que tiene al origen como punto interior y sea  $\delta$  otro punto en el interior de  $K$  tal que  $\delta \neq 0$ . Si todas las cuerdas por  $\delta$  son quirales, entonces  $K$  es centralmente simétrico con respecto al origen.*

### Demostración

Para cada  $v \in \mathbb{S}^1$  tomamos la línea

$$L_v = \{tv + \delta \mid t \in \mathbb{R}\}$$

y denotaremos por  $I_v$  la cuerda  $L_v \cap K$ . Escribimos

$$[\delta_{-v}, \delta_v] = I_v$$

donde  $v = \frac{\delta_v - \delta_{-v}}{|\delta_v - \delta_{-v}|}$ . Notemos que  $\delta_v \xrightarrow{f} \delta_{-v}$  es un homeomorfismo de la frontera de  $K$

en la frontera de  $K$ .

Sea ahora  $\delta^* = -\delta$ , el inverso de  $\delta$ . Usando la afirmación A.3 es fácil ver que,  $\delta^*$  está también en el interior de  $K$ . Sea  $I_v^* = -L_v \cap K$ . De nuevo escribimos

$$[\delta_{-v}^*, \delta_v^*] = I_v^*$$

donde  $v = \frac{\delta_v^* - \delta_{-v}^*}{|\delta_v^* - \delta_{-v}^*|}$  (ver figura). Notemos también que para cada  $P \in frK$  existe un único  $v \in \mathbb{S}^1$  tal que  $\delta_v = P$  y de tal forma que  $\delta_{-v}^* - \delta_v^* = \delta_{-v} - \delta_v$ , pues por hipótesis la longitud de  $I_v$  es igual a la longitud de  $I_v^*$ .

Definamos las siguientes funciones continuas

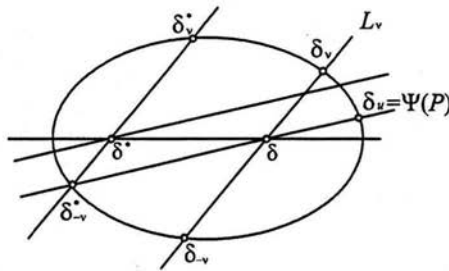
$$\varepsilon : frK \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

donde  $\varepsilon(P) = \delta_v + \delta_{-v}^*$ , y sea

$$\Psi : frK \longrightarrow frK$$

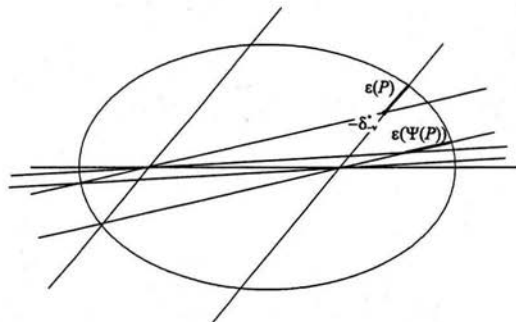
como sigue:

Si  $P \in frK$  es tal que  $\delta_v = P$ , entonces tomemos  $u \in \mathbb{S}^1$  tal que  $\delta_{-u} = \delta_{-v}^*$ . Sea  $\Psi(P) = \delta_u$ .



Probaremos primero que:

$$\begin{aligned} -\delta_{-v}^* + \varepsilon(P) &\in frK \text{ y} \\ -\delta_{-v}^* + \varepsilon(\Psi(P)) &\in frK \end{aligned}$$



La primera afirmación se sigue de la definición. Además, como  $I_u$  es quiral, entonces  $\delta_u^* - \delta_{-u}^* = \delta_u - \delta_{-u}$  lo que implica que  $\delta_u^* + \delta_{-u}^* = \delta_u + \delta_{-u}$  y por lo tanto que  $\delta_u^* + \delta_{-v}^* = \varepsilon(\Psi(P))$

A continuación probaremos las siguientes propiedades para  $\Psi$  y  $\varepsilon$ .

a)  $\Psi : frK \longrightarrow frK$  es un homeomorfismo.

Como las funciones continuas  $f : \delta_v \longrightarrow \delta_{-v}$  y  $g : \delta_v \longrightarrow \delta_v^*$  son homeomorfismos y  $\Psi$  es composición de éstas pues  $\Psi = f^{-1}gf$ , entonces  $\Psi$  es un homeomorfismo.

b) Sea  $\Sigma = \{P \in frK \mid -P \in frK\}$ . Entonces  $\varepsilon(P) = 0$  si y sólo si  $P \in \Sigma$

Sea como siempre  $P = \delta_v$ . Entonces  $\varepsilon(P) = 0 \iff \delta_v + \delta_{-v}^* = 0 \iff \delta_{-v}^* = -\delta_v = -P \iff -P \in frK$

c)  $P \in \Sigma \iff \Psi(P) \in \Sigma$ , es decir  $\Psi(\Sigma) = \Sigma$ .

Sabemos que  $-\delta_{-v}^* + \varepsilon(P) \in frK$  y que  $-\delta_{-v}^* + \varepsilon(\Psi(P)) \in frK$ . Entonces  $P \in \Sigma \iff \varepsilon(P) = 0 \iff -\delta_{-v}^* \in frK \iff \varepsilon(\Psi(P)) = 0 \iff \Psi(P) \in \Sigma$ .



- d) El homeomorfismo  $\Psi$  tiene como puntos fijos  $L \cap frK = \{b, b^*\}$ , donde  $L$  es la línea que pasa por  $\delta$  y  $\delta^*$

Sea  $b \in L \cap frK$  tal que  $b$  y  $\delta$  estén del mismo lado del origen en  $L$ . Denotemos por  $\alpha[\delta_v, \delta_u]$  el subarco cerrado de  $frK$  que no contiene a  $\{\delta_{-v}, \delta_{-u}\}$  y por  $\alpha(\delta_v, \delta_u)$  el correspondiente subarco abierto de  $frK$ .

Por definición, es fácil ver que  $\Psi(b) = b$  y  $\Psi(b^*) = b^*$ . Tomemos  $P = \delta_v \in frK$ . Es claro que si  $\delta_v$  está en uno de los semiplanos determinados por  $L$  entonces  $\delta_{-v}^*$  está en el otro, y por lo tanto  $\Psi(\delta_v)$  está en el mismo semiplano que  $\delta_v$ , más aún  $\Psi(\delta_v) \in \alpha[\delta_v, b]$  puesto que  $\delta_{-v}^*$  está del mismo lado que  $\delta^*$  cuando  $L_v$  parte al convexo en la sección que contiene a  $\delta^*$  y la que no.

- e) Si  $P \neq b^*$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^n(P) = b$

Supongamos que  $\Psi^n(P)$  converge a un punto  $Q$ , es decir  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^n(P) = Q$ . Por la demostración de d) sabemos que  $Q \in \alpha[P, b]$  Aplicando  $\Psi$  tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^{n+1}(P) = \Psi(Q)$  y como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^n(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^{n+1}(P)$ , esto implica que  $\Psi(Q) = Q$  y por lo tanto  $Q$  es un punto fijo en  $\alpha[P, b]$ , es decir  $Q = b$

A continuación vamos a probar que  $\{b, b^*\} \subset \Sigma$

Como  $frK \cap -frK \neq \emptyset$  de la afirmación A.2  $\implies \exists P \in frK$  tal que  $P \in frK \cap -frK \subset \Sigma$ , lo que implica que  $\Psi^n(P) \in \Sigma \forall n \geq 1$  y dado que  $\Psi^n(P)$  converge a  $b$ , entonces  $b \in \Sigma$  y por lo tanto  $\{b, b^*\} \subset \Sigma$

Estamos ahora listos para probar nuestro teorema. Dado que la situación es invariante bajo transformaciones afines y haciendo uso del corolario 3.3 podemos escoger coordenadas  $(x, y)$  donde  $\delta^* = (-1, 0)$  y  $\delta = (1, 0)$  de tal forma que  $L$  es el eje de las  $x$ 's y la línea soporte a la  $frK$  por  $b$  sea perpendicular a  $L$ .

Sea  $\delta_w \in frK$  tal que para todo punto  $P \in \alpha[\delta_w, b]$  la pendiente de la línea soporte a la  $frK$  en  $P$  es negativa.

Tomemos  $P \in \alpha[\delta_w, b]$  tal que  $\delta_u^* \in \alpha[\delta_w, b]$ , donde  $P = \delta_v$  y  $\delta_u = \Psi(P)$  y sea  $\Pi : frK \rightarrow \mathbb{R}$  la proyección de  $\mathbb{R}^2$  sobre el eje de las  $x$ 's.

Dado que la pendiente de la frontera es negativa, entonces la proyección de la curva  $\alpha[\delta_w, b]$  sobre  $\mathbb{R}$  es decreciente, además como  $-\delta_{-v}^* + \varepsilon(P) \in \alpha[\delta_w, b]$  y  $-\delta_{-v}^* + \varepsilon(\Psi(P)) \in \alpha[\delta_w, b]$  esto implica que  $\Pi(\varepsilon(P)) \leq \Pi(\varepsilon(\Psi(P)))$

Esto quiere decir que el error aumenta. En otras palabras  $\Pi(\varepsilon(\Psi^{n+1}(P))) \geq \Pi(\varepsilon(\Psi^n(P)))$ , pero  $\Pi(\varepsilon(\Psi^n(P))) = 0$  ya que  $\Psi^n(P) \rightarrow b$  y  $b \in \Sigma$ , lo cual implica que para cualquier  $P \in \alpha[\delta_w, b]$ ,  $\varepsilon(P) = 0$  y entonces por c),  $P \in \Sigma$  y por lo tanto  $\alpha[\delta_w, b] \subset \Sigma$ . En general, para toda  $P \in \alpha(b^*, b)$ ,  $\exists n$  tal que  $\Psi^n(P) \in \alpha[\delta_w, b]$  y por lo tanto  $P \in \Sigma \implies K$  es centralmete simétrico. ■

## Capítulo 5

### Teorema Equicordal Tangencial

*“No encontré respuestas. Las respuestas no llegan siempre cuando uno las necesita, muchas veces ocurre que quedarse esperando es la única respuesta posible.”*

**Teorema 5.1 (Teorema Equicordal Tangencial)** *Sea  $K$  una figura convexa que tiene al origen como punto interior y sea  $\delta$  otra figura convexa en el interior de  $K$  tal que  $0 \notin \delta$ . Si todas las cuerdas soporte a  $\delta$  son quirales, entonces  $K$  es centralmente simétrico con respecto al origen.*

#### Demostración

Comenzaremos dándole una orientación a la frontera de  $\delta$ . Sea  $v \in \mathbb{S}^1$  y sea  $L_v$  una línea orientada en la dirección de  $v$ . Supongamos que  $L_v$  es una línea soporte de  $\delta$  y, en donde se tocan, la orientación de  $\delta$  y  $L_v$  coinciden. Denotaremos por  $I_v$  la cuerda  $L_v \cap K$ . Escribimos

$$[\delta_{\bar{v}}, \delta_v] = I_v$$

donde  $v = \frac{\delta_v - \delta_{\bar{v}}}{|\delta_v - \delta_{\bar{v}}|}$

Sea ahora  $\delta^* = -\delta$  la figura convexa orientada que es el inverso de  $\delta$ . Es fácil ver

que  $\delta^*$  está en el interior de  $K$ . Sea  $I_v^* = -L_v \cap K$ . De nuevo escribimos

$$[\delta_v^*, \delta_v^*] = I_v^*$$

donde  $v = \frac{\delta_v^* - \delta_v^*}{|\delta_v^* - \delta_v^*|}$

Para cada  $P \in frK$  existe un único  $v \in \mathbb{S}^1$  tal que  $\delta_v = P$  de tal forma que  $\delta_v^* - \delta_v^* = \delta_v - \delta_v$  pues por hipótesis la longitud de  $I_v$  es igual a la longitud de  $I_v^*$ .

Definamos las siguientes funciones continuas.

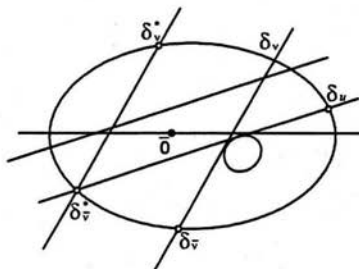
$$\varepsilon : frK \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

donde  $\varepsilon(P) = \delta_v + \delta_{-v}^*$  y sea

$$\Psi : frK \longrightarrow frK$$

como sigue:

Si  $P \in frK$  es tal que  $\delta_v = P$ , entonces tomemos  $u \in \mathbb{S}^1$  tal que  $\delta_u = \delta_v^*$  y sea  $\Psi(P) = \delta_u$ .



Probaremos primero que:

$$\begin{aligned} -\delta_v^* + \varepsilon(P) &\in frK \text{ y} \\ -\delta_v^* + \varepsilon(\Psi(P)) &\in frK \end{aligned}$$

La primera afirmación se sigue de la definición. Además como  $I_u$  es quiral, entonces  $\delta_u^* - \delta_{\bar{u}}^* = \delta_u - \delta_{\bar{u}}$  lo que implica que  $\delta_u^* + \delta_{\bar{u}}^* = \delta_u + \delta_{\bar{u}}$  y por lo tanto que  $\delta_u^* + \delta_{\bar{u}}^* = \varepsilon(\Psi(P))$ .

A continuación probaremos las siguientes propiedades para  $\Psi$  y  $\varepsilon$

a)  $\Psi : frK \longrightarrow frK$  es un homeomorfismo

Como las funciones continuas  $f : \delta_v \longrightarrow \delta_{\bar{v}}$  y  $g : \delta_v \longrightarrow \delta_v^*$  son homeomorfismos y  $\Psi$  es composición de éstas, pues  $\Psi = f^{-1}gf$ , entonces  $\Psi$  es un homeomorfismo.

b) Si  $\Sigma = \{P \in frK \mid -P \in frK\}$  entonces  $\varepsilon(P) = 0$  si y sólo si  $P \in \Sigma$

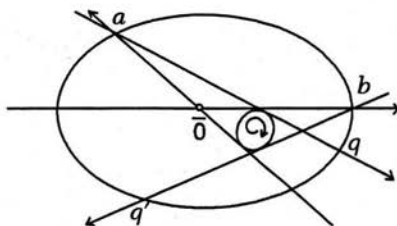
Sea como siempre  $P = \delta_v$ . Entonces  $\varepsilon(P) = 0 \iff \delta_v + \delta_{\bar{v}}^* = 0 \iff \delta_{\bar{v}}^* = -\delta_v = -P \iff -P \in frK$

c)  $P \in \Sigma \iff \Psi(P) \in \Sigma$ , es decir  $\Psi(\Sigma) = \Sigma$

Sabemos que  $-\delta_{\bar{v}}^* + \varepsilon(P) \in frK$  y que  $-\delta_{\bar{v}}^* + \varepsilon(\Psi(P)) \in frK$ , entonces  $P \in \Sigma \iff \varepsilon(P) = 0 \iff -\delta_{\bar{v}}^* \in frK \iff \varepsilon(\Psi(P)) = 0 \iff \Psi(P) \in \Sigma$  y por lo tanto también tenemos que  $\Psi(\Sigma) = \Sigma$

d) El homeomorfismo  $\Psi$  tiene como puntos fijos a  $\{b, a\}$ , donde los puntos  $a$  y  $b$  se van a describir a continuación. Sean  $L$  y  $L'$  las líneas soporte a  $\delta$  que pasan por el origen. Orientemos a  $L$  y  $L'$  de acuerdo a la orientación de  $\delta$ . Sean  $b$  y  $\bar{b}$  en  $L \cap frK$  de tal forma que la dirección de  $L$  va de  $\bar{b}$  a  $b$  y sean  $a$  y  $\bar{a}$  en  $L' \cap frK$

de tal forma que la dirección de  $L'$  va de  $\bar{a}$  a  $a$ . (ver figura)



Por definición es claro que  $\Psi(b) = b$  y  $\Psi(a) = a$ .

e) Si  $P \neq a$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^n(P) = b$

Orientemos la frontera de  $K$  como  $\delta$  y denotemos por  $\alpha[\delta_v, \delta_u]$  el subarco cerrado de  $frK$  de  $\delta_v$  a  $\delta_u$  y por  $\alpha(\delta_v, \delta_u)$  el correspondiente subarco abierto. Comenzaremos la prueba con dos lemas auxiliares

**Lema 5.2** Para toda  $P$  en  $\alpha(a, b)$ ,  $\Psi(P)$  está en  $\alpha(P, b)$ .

Sea  $P = \delta_v \in \alpha(a, b)$  esto implica que  $\delta_{\bar{v}} \in \alpha(\bar{a}, \bar{b})$  y por lo tanto  $\delta_{\bar{v}}^* \in \alpha(\delta_{\bar{v}}, \bar{b})$ . Es fácil ver que  $f^{-1}(\alpha(\bar{a}, \bar{b})) = \alpha(a, b)$ , donde el homeomorfismo  $f : frK \rightarrow frK$  está dado por  $f(\delta_v) = \delta_{\bar{v}}$ . De la misma forma tenemos que  $f(\alpha(a, \delta_v)) = \alpha(\bar{a}, \delta_{\bar{v}}) \implies \delta_u = \Psi(P) \in \alpha(\delta_v, b)$ .  $\square$

**Lema 5.3** Para toda  $P$  en  $\alpha(b, a)$ ,  $\Psi(P)$  está en  $\alpha(b, P)$ .

Primero veamos que  $f^{-1}(\bar{b}) = b$  y que  $f^{-1}(\bar{a}) = a$  y sean  $q = \delta_s$  donde  $\delta_{\bar{s}} = a$  y  $q' = \delta_r$  tal que  $\delta_{\bar{r}} = b$ . Además notemos que  $f^{-1}(\alpha[\bar{b}, a]) = \alpha[b, q]$ ,  $f^{-1}(\alpha[a, \bar{b}]) = \alpha[q, q']$ ,  $f^{-1}(\alpha[\bar{b}, \bar{a}]) = \alpha[q', a]$  y por lo tanto  $f^{-1}(\alpha[\bar{b}, \bar{a}]) = \alpha[b, a]$ .

Sea  $P = \delta_v \in \alpha(b, a)$  esto implica que  $\delta_{\bar{v}} \in \alpha(\bar{b}, \bar{a})$  y por lo tanto  $\delta_{\bar{v}}^* \in \alpha(\bar{b}, \delta_{\bar{v}})$ . Entonces por las observaciones anteriores sabemos que  $\delta_u = \Psi(P) \in (b, \delta_v)$ .  $\square$

Ahora, es fácil ver que  $\forall P \in frK - \{a\} \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^n(P) = b$

Supongamos que  $\Psi^n(P)$  converge a un punto  $Q$ , es decir  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^n(P) = Q$ . Aplicando  $\Psi$  tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^{n+1}(P) = \Psi(Q)$  y como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^n(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^{n+1}(P)$ , esto implica que  $\Psi(Q) = Q$ , por lo tanto  $Q$  es un punto fijo de  $\Psi$  y por los lemas tenemos entonces que  $Q = b$ .

A continuación vamos a probar que  $\{b, \bar{b}\} \subset \Sigma$

Como  $frK \cap -frK \neq \emptyset$  de la afirmación A.2  $\implies \exists P \in frK$  tal que  $P \in frK \cap -frK \subset \Sigma$ , lo que implica que  $\Psi^n(P) \in \Sigma \forall n \geq 1$  y dado que  $\Psi^n(P)$  converge a  $b$ , entonces entonces  $b \in \Sigma$  y por lo tanto  $\{b, \bar{b}\} \subset \Sigma$

Estamos ahora listos para probar nuestro teorema. Primero demostraremos que  $\alpha(a, b)$  es centralmente simétrico y después que  $\alpha(b, a)$  también lo es.

Dado que la situación es invariante bajo transformaciones afines y haciendo uso del corolario 3.4, podemos escoger coordenadas  $(x, y)$  de tal forma que  $L$  sea el eje de las  $x$ 's y la línea soporte a la  $frK$  por  $b$  sea perpendicular a  $L$ .

Sea  $\alpha[\delta_w, b]$  tal que para todo punto  $P \in \alpha[\delta_w, b]$  la pendiente de la línea soporte a la  $frK$  en  $P$  es negativa.

Tomemos  $P \in \alpha[\delta_w, b]$  tal que  $\delta_u^* \in \alpha[\delta_w, b]$ , donde  $P = \delta_v$  y  $\delta_u = \Psi(P)$  y sea  $\Pi : frK \rightarrow \mathbb{R}$  la proyección de  $\mathbb{R}^2$  sobre el eje de las  $x$ 's.

Dado que la pendiente de la frontera es negativa, entonces la proyección de la curva sobre  $L$  es decreciente, además como  $-\delta_{-v}^* + \varepsilon(P) \in \alpha[\delta_w, b]$  y  $-\delta_{-v}^* + \varepsilon(\Psi(P)) \in \alpha[\delta_w, b]$  esto implica que  $\Pi(\varepsilon(P)) \leq \Pi(\varepsilon(\Psi(P)))$

Esto quiere decir que el error aumenta, en otras palabras  $\Pi(\varepsilon(\Psi^{n+1}(P))) \geq \Pi(\varepsilon(\Psi^n(P)))$ , pero  $\Pi(\varepsilon(\Psi^n(P))) = 0$  ya que  $\Psi^n(P) \rightarrow b$  y  $b \in \Sigma$ , lo cual implica que para cualquier

---

$P \in \alpha[\delta_w, b]$   $\varepsilon(P) = 0$  y entonces por c)  $P \in \Sigma$  y por lo tanto  $\alpha[\delta_w, b] \subset \Sigma$  de donde sabemos que  $\alpha[\delta_w, b]$  es centralmente simétrico con respecto al origen.

En general para toda  $P \in \alpha(a, b)$   $\exists n$  tal que  $\Psi^n(P) \in \alpha[\delta_w, b]$  y por lo tanto  $P \in \Sigma$ .

Haciendo una reflexión  $\sigma$ , de  $K$  sobre  $L$ , es claro que podemos escoger  $\alpha[b, \delta_w]$  tal que para todo punto  $P \in \alpha[b, \delta_w]$  la pendiente de la línea soporte a la  $frK$  en  $\sigma(P)$  es negativa. De esta forma, situados en el caso anterior, con un razonamiento análogo, tenemos que para toda  $P \in \alpha(b, a)$   $P \in \Sigma$ . ■



## Capítulo 6

# Teorema Equicordal Sangoloteado

*“Me quité los zapatos para andar sobre brasas,  
me quité la piel para estrecharte,  
me quité el cuerpo para amarte,  
me quité el alma para ser tú.”*

**Teorema 6.1 (Teorema Equicordal Sangoloteado)** *Sea  $K$  una figura convexa que tiene al origen como punto interior y sea  $[\delta]$  un sistema de líneas exteriormente simple de  $K$ . Supongase que  $\delta^{-1}(0)$  es finito y que para cada  $v \in \mathbb{S}^1$ ,  $I_v$  es quiral, entonces  $K$  es centralmente simétrico con respecto al origen.*

### Demostración

Para toda  $v \in \mathbb{S}^1$  escogemos la línea

$$L_v = \{\delta(v)v^\perp + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$$

paralela a  $v$ . Nótese que  $L_v = L_{-v}$ .

Denotaremos por  $I_v$  la cuerda  $L_v \cap K$ . Escribimos

$$[\delta_{-v}, \delta_v] = I_v$$

donde  $v = \frac{\delta_v - \delta_{-v}}{|\delta_v - \delta_{-v}|}$

Sea ahora  $\delta^* : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  la función continua impar dada por  $\delta^*(v) = -\delta(v)$ . Sea  $I_v^* = -L_v \cap K$ . De nuevo escribimos

$$[\delta_{-v}^*, \delta_v^*] = I_v^*$$

donde  $v = \frac{\delta_v^* - \delta_{-v}^*}{|\delta_v^* - \delta_{-v}^*|}$

Para cada  $P \in frK$  existe un único  $v \in \mathbb{S}^1$  tal que  $\delta_v = P$  de tal forma que  $\delta_{-v}^* - \delta_v^* = \delta_{-v} - \delta_v$  pues por hipótesis la longitud de  $I_v$  es igual a la longitud de  $I_v^*$ .

Definamos las siguientes funciones continuas.

$$\varepsilon : frK \rightarrow \mathbb{R}^2$$

donde  $\varepsilon(P) = \delta_v + \delta_{-v}^*$ , y sea

$$\Psi : frK \rightarrow frK$$

como sigue:

Si  $P \in frK$  es tal que  $\delta_v = P$ , entonces tomemos  $u \in \mathbb{S}^1$  tal que  $\delta_{-u} = \delta_{-v}^*$ . Sea  $\Psi(P) = \delta_u$

Probaremos primero que:

$$\begin{aligned} -\delta_{-v}^* + \varepsilon(P) &\in frK \text{ y} \\ -\delta_{-v}^* + \varepsilon(\Psi(P)) &\in frK \end{aligned}$$

La primera afirmación se sigue de la definición. Además como  $I_u$  es quiral, entonces

$$\delta_u^* - \delta_{-u}^* = \delta_u - \delta_{-u} \implies \delta_u^* + \delta_{-u} = \delta_u + \delta_{-u}^* \text{ y por lo tanto } \delta_u^* + \delta_{-v}^* = \varepsilon(\Psi(P))$$

A continuación probaremos las siguientes propiedades para  $\Psi$  y  $\varepsilon$ :

a)  $\Psi : frK \longrightarrow frK$  es un homeomorfismo

Como las funciones continuas  $f : \delta_v \longrightarrow \delta_{-v}$  y  $g : \delta_v \longrightarrow \delta_v^*$  son homeomorfismos porque  $[\delta]$  es un sistema de líneas exteriormente simple de  $K$  y por lo tanto  $C([\delta]) \subseteq intK$ . Puesto que  $\Psi = f^{-1}gf$ , entonces  $\Psi$  es un homeomorfismo.

b) Sea  $\Sigma = \{P \in frK \mid -P \in frK\}$ . Entonces  $\varepsilon(P) = 0$  si y sólo si  $P \in \Sigma$

$$\text{Sea como siempre } P = \delta_v. \text{ Entonces } \varepsilon(P) = 0 \iff \delta_v + \delta_{-v}^* = 0 \iff \delta_{-v}^* = -\delta_v = -P \iff -P \in frK$$

c)  $P \in \Sigma \iff \Psi(P) \in \Sigma$ , es decir  $\Psi(\Sigma) = \Sigma$ .

$$\text{Sabemos que } -\delta_{-v}^* + \varepsilon(P) \in frK \text{ y que } -\delta_{-v}^* + \varepsilon(\Psi(P)) \in frK. \text{ Entonces } P \in \Sigma \iff \varepsilon(P) = 0 \iff -\delta_{-v}^* \in frK \iff \varepsilon(\Psi(P)) = 0 \iff \Psi(P) \in \Sigma.$$

d)  $\Psi(P) = P$  si y sólo si  $v \in \delta^{-1}(0)$ , donde  $\delta_v = P$ .

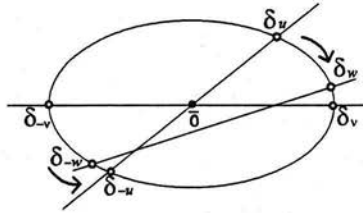
$$\text{Recordemos que } \delta_{-u} = \delta_{-v}^* \text{ de la definición de } \Psi, \text{ y entonces tenemos que } \Psi(P) = P \iff \delta_u = \delta_v \iff \delta_{-v} = \delta_{-u}^* \iff v \in \delta^{-1}(0)$$

Para toda  $v, u \in \mathbb{S}^1$ , tal que  $v \neq \pm u$ , denotamos por  $\alpha[v, u]$  el arco cerrado de  $\mathbb{S}^1$  que no contiene a  $\{-v, -u\}$ . De igual forma denotemos por  $\alpha[\delta_v, \delta_u]$  el subarco cerrado de  $frK$  que no contiene a  $\{\delta_{-v}, \delta_{-u}\}$  y por  $\alpha(v, u)$  y  $\alpha(\delta_v, \delta_u)$  los correspondiente subarcos abiertos.

Supongamos que  $v \neq \pm u \in \mathbb{S}^1$  y que  $\alpha[v, u] \cap \delta^{-1}(0) = \{v, u\}$ .

**Lema 6.2** Si para algún  $w_0 \in \alpha(v, u)$ ,  $I_{w_0} \cap [0, \delta_v] \neq \emptyset$ , entonces para toda  $w \in \alpha(v, u)$ ,  $I_w \cap [0, \delta_v] \neq \emptyset$  y el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^n(\delta_w) = \delta_v$

Sea  $w_0 \in \alpha(v, u)$ , entonces  $I_{w_0} \cap [0, \delta_v] \neq \emptyset$  o  $I_{w_0} \cap [0, \delta_u] \neq \emptyset$  ya que de no ser así tendríamos que  $L_{w_0} \cap L_v$  está afuera de  $K$ , o que  $L_{w_0} \cap L_u$  está afuera de  $K$ . Supongamos, sin pérdida de generalidad que el primer caso sucede. Esto implica que para toda  $w \in \alpha(v, u)$ ,  $I_w \cap [0, \delta_v] \neq \emptyset$  y que  $I_w \cap [0, \delta_{-u}] \neq \emptyset$ , de no ser así, existiría un  $z$ , tal que  $I_z \cap [0, \delta_u] \neq \emptyset$  y de la continuidad de  $[\delta]$  tendríamos que existe un  $z_0 \in \alpha(w_0, z)$  que cumple que  $L_{z_0} \in \delta^{-1}(0)$ , lo cual es una contradicción, pues supusimos que  $\alpha[v, u] \cap \delta^{-1}(0) = \{v, u\}$ . Como  $f(\alpha[\delta_v, \delta_u]) = \alpha[\delta_{-v}, \delta_{-u}]$  es un homeomorfismo, lo anterior implica que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^n(\delta_w) = \delta_v$ . Análogamente, si  $I_{w_0} \cap [0, \delta_u] \neq \emptyset$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Psi^n(\delta_w) = \delta_u$ .  $\square$



Probaremos a continuación que si  $\delta_v \in \Sigma$ , entonces  $\alpha[\delta_v, \delta_u] \subset \Sigma$

Dado que la situación es invariante bajo transformaciones afines y haciendo uso del corolario 3.12, podemos escoger coordenadas  $(x, y)$  de tal forma que  $L_v$  sea el eje de las  $x$ 's y la línea soporte a la  $frK$  por  $v$  sea perpendicular a  $L_v$ .

Sea  $\delta_w \in frK$  tal que para todo punto  $P \in \alpha[\delta_w, \delta_v]$  la pendiente de la línea soporte a la  $frK$  en  $P$  es negativa. Tomemos  $P \in \alpha[\delta_w, \delta_v]$  tal que  $\delta_\vartheta^* \in \alpha[\delta_w, \delta_v]$ , donde  $\delta_\vartheta = \Psi(P)$  y sea  $\Pi : frK \rightarrow \mathbb{R}$  la proyección de  $\mathbb{R}^2$  sobre el eje de las  $x$ 's.

Como la pendiente de la frontera es negativa, entonces la proyección de la curva sobre  $L_v$  es decreciente, además como  $-\delta_{-v}^* + \varepsilon(P) \in \alpha[\delta_w, \delta_v]$  y  $-\delta_{-v}^* + \varepsilon(\Psi(P)) \in \alpha[\delta_w, \delta_v]$  esto implica que  $\Pi(\varepsilon(P)) \leq \Pi(\varepsilon(\Psi(P)))$ . Esto quiere decir que el error aumenta. En otras palabras  $\Pi(\varepsilon(\Psi^{n+1}(P))) \geq \Pi(\varepsilon(\Psi^n(P)))$ , pero  $\Pi(\varepsilon(\Psi^n(P))) = 0$  ya que  $\Psi^n(P) \rightarrow \delta_v$

y  $\delta_v \in \Sigma$ , lo cual implica que para cualquier  $P \in \alpha(\delta_v, \delta_u)$  suficientemente cerca de  $\delta_v$ ,  $\varepsilon(P) = 0$  y entonces por c),  $P \in \Sigma$ . Finalmente, para toda  $P \in \alpha(\delta_v, \delta_u)$ ,  $\exists n$  tal que  $\Psi^n(P) \in \Sigma$ , entonces por d)  $P \in \Sigma$  y por lo tanto  $\alpha[\delta_v, \delta_u] \subset \Sigma$ . Nótese que esto implica que  $\alpha[\delta_{-v}, \delta_{-u}]$ , pero si  $\Psi^n(P) \rightarrow \delta_v$  entonces  $\Psi^n(-P) \rightarrow \delta_{-u}$ . Así, tenemos que  $\delta_{-u} \in \Sigma$  y por consiguiente  $\alpha[\delta_v, \delta_u] \subset \Sigma$

Ahora probaremos que  $frK \subset \Sigma$ . Sea  $\{\pm v_1, \dots, \pm v_\lambda\} = \delta^{-1}(0)$  y supóngase que  $\alpha(\pm v_i, \pm v_{i+1}) \cap \delta^{-1}(0) = \emptyset$ .

Sea  $P \in frK \cap -frK \subset \Sigma$ , que sabemos que existe por la afirmación A.2

1. Si  $P = \delta_{v_i}$  y  $\Psi^n(\delta_w) \rightarrow \delta_{v_i}$ , donde  $\delta_w \in \alpha(\delta_{v_i}, \delta_{v_{i+1}})$  por el párrafo anterior  $\alpha[\delta_{\pm v_i}, \delta_{\pm v_{i+1}}] \subset \Sigma$ .
2. Si  $P = \delta_{v_i}$  y  $\Psi^n(\delta_w) \rightarrow \delta_{v_{i+1}}$  entonces  $\Psi^n(\delta_{-w}) \rightarrow \delta_{-v_i}$  y como  $\delta_{-v_i} \in \Sigma$  nos encontramos en la situación anterior, así, por inducción usando 1 o 2 tenemos que  $frK \subset \Sigma$ .
3. Si  $P \in \alpha(\delta_{\pm v_i}, \delta_{\pm v_{i+1}})$ , entonces por el lema 6.2  $\Psi^n(P) \rightarrow \delta_{\pm v_i}$  o  $\Psi^n(P) \rightarrow \delta_{\pm v_{i+1}}$ , pero en este caso,  $\delta_{\pm v_i}$  o  $\delta_{\pm v_{i+1}}$  pertenecen a  $\Sigma$ , por lo tanto  $frK \subset \Sigma$ , lo que completa la prueba. ■

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

# Apéndice A

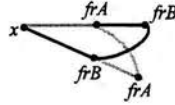
## Es fácil ver que ...

*“Warst du schon einmal,  
gezwungen um es zu laufen?  
Wenn ja  
bist du rundherum gelaufen  
im Kreis oder hast du  
Einbuchtungen mitgelaufen?  
Was dachtest du dir dabei?”*

**Proposición A.1** Sean  $A$  y  $B$  convexos, si  $\text{int}A \cap \text{int}B \neq \emptyset$  y  $\text{fr}A \cap \text{fr}B = \emptyset$  entonces  $A \subset B$  o  $B \subset A$ .

Sea  $x \in \text{int}A \cap \text{int}B$  y tomemos un punto  $y_0$  en la frontera de  $A$ , como  $\text{fr}A \cap \text{fr}B = \emptyset$  entonces  $y_0 \in \text{int}B$  o  $y_0 \in \text{ext}B$ . Si  $y_0 \in \text{int}B$  entonces  $\overline{xy_0} \subset \text{int}B$ . Si  $y_0 \in \text{ext}B$  entonces  $\overline{xy_0} \cap \text{fr}B \neq \emptyset$ .

Nótese que si existe un punto  $y_0$  tal que  $y_0 \in frA$  y  $y_0 \in intB$  entonces, para toda  $y \in frA$ ,  $y \in intB$  de lo contrario  $frA \cap frB \neq \emptyset$ . Por lo tanto  $A \subset B$ .



Análogamente, si existe un punto  $y_0$  tal que  $y_0 \in frA$  y  $y_0 \in extB$  entonces, para toda  $y \in frA$ ,  $y \in extB$  y por lo tanto  $B \subset A$ .  $\square$

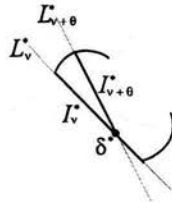
**Afirmación A.2** Sea  $K$  un convexo que contiene al origen, entonces  $frK \cap -frK \neq \emptyset$ .

De la proposición y el hecho de que el área de  $K$  es igual al área de  $-K$ , concluimos que  $K \cap -K \neq \emptyset$ .

**Afirmación A.3** Sean  $K$  y  $\delta$  como en el teorema 4.1, entonces  $\delta^* = -\delta \in intK$ .

Supongamos que  $\delta^* \in extK$ , entonces por la proposición 2.5 sabemos que existe una línea  $\ell$  que separa a  $\delta^*$  de  $K$ . Así, la línea paralela a  $\ell$  por  $\delta^*$  no interseca a  $K$  y por lo tanto la cuerda en esa dirección no es quiral.

Si  $\delta^*$  está en la  $frK$ , entonces existe una dirección  $v_0$  en la que  $I_{v_0}^* = L_{v_0}^* \cap K \subset frK$ . Esto implica que la longitud de  $I_{v_0}^*$  es considerablemente mayor que la de  $I_{v_0+\theta}^*$  donde  $\theta$  es un ángulo que tiende a cero, pero la longitud de  $I_{v_0}$  es casi igual que la longitud de  $I_{v_0+\theta}$  ya que para puntos interiores, la longitud de las cuerdas por esos puntos es continua.



# Bibliografía

- [1] Luis Montejano Peimbert, *Cuerpos de Ancho Constante*, F.C.E, Ediciones científicas, 1998.
- [2] C.A. Rogers, *An Equichordal Problem*, Geometriae Dedicata 10 73-78, 1981.
- [3] L. Montejano y E. Morales, *A Shaked False Centre Theorem*, Preprint.
- [4] Luis Montejano Peimbert, *Elipsoides*, Publicación preliminar.
- [5] L. Montejano y E. Morales, *Variations of Classic Characterization of Ellipsoids and a Short Proof of the False Centre Theorem*, enviado a *Matematika*.