



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"EVOLUCION DE SOLITONES EN LA INTERCARA ENTRE  
PELICULAS DELGADAS"

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

**F I S I C O**

P R E S E N T A :

**LATORRE BIAGINI JUAN CRISTOBAL**

DIRECTOR DE TESIS: DR. ANTONMARIA MINZONI ALESSIO



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

2004



FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR.



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:  
"Evolución de Solitones en la Intercara entre Películas Delgadas"

realizado por Latorre Biagini Juan Cristóbal

con número de cuenta 9877002-1 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis  
Propietario

Dr. Antonmaria Minzoni Alessio

Propietario

Dr. Víctor Manuel Romero Rochín

Propietario

Dr. Marcos Rosenbaum Pitluck

Suplente

Dra. María del Carmen Jorge Y Jorge

Suplente

Dr. José Julio Emilio Herrera Velázquez

Consejo Departamental de Física

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE  
Coordinadora de Licenciatura

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

# **Evolución de Solitones en la Intercara entre Películas Delgadas.**

Juan Cristóbal Latorre Biagini

11 de junio de 2004





# Contenido

Dedicatoria.	v
Agradecimientos.	vii
Introducción.	ix
<b>1. Electromigración de Superficie.</b>	<b>1</b>
1.1. El Problema de Propagación de Ondas en un Fluido Estratificado. . . . .	4
1.1.1. Ecuaciones de la Mecánica de Fluidos. . . . .	5
1.1.2. Una Onda que se Propaga en la Intercara. . . . .	6
1.1.3. Relación de Dispersión para una Capa de Altura Infinita.	10
1.1.4. Término No Lineal. . . . .	13
1.2. Ondas que se Propagan en la Intercara entre Películas Conductoras. . . . .	21
1.2.1. La Ecuación de Movimiento. . . . .	21
1.2.2. El Problema de Dos Conductores. . . . .	24
1.2.3. La Ecuación Bi-Dimensional de Benjamin-Ono. . . . .	29
<b>2. Estudio de Solitones en la Ecuación Bi-Dimensional de Benjamin-Ono.</b>	<b>43</b>
2.1. El Problema de Ondas de Forma Permanente. . . . .	44
2.1.1. Función de Prueba. . . . .	49
2.1.2. Puntos de Equilibrio. . . . .	52
2.2. Leyes de Conservación. . . . .	54
2.3. Confinamiento de Radiación por la Cáustica. . . . .	59
<b>3. Evolución de la Estructura Coherente No Lineal.</b>	<b>67</b>
3.1. La Onda Coherente. . . . .	68
3.1.1. Conservación del Momento. . . . .	73

---

3.1.2. Momento en $x$ del Momento de la Estructura Coherente.	74
3.2. Análisis de Puntos de Equilibrio. . . . .	79
3.3. Velocidad Modificada. . . . .	90
3.4. Evolución de $\lambda$ . . . . .	94
3.5. Resultados Numéricos. . . . .	97
<b>Conclusiones.</b>	<b>105</b>
<b>Apéndice A</b>	<b>111</b>
<b>Apéndice B</b>	<b>119</b>
<b>Apéndice C. El Método de Fase Estacionaria en Dos Dimensiones.</b>	<b>123</b>

# Dedicatoria.

*A mis padres, Marcela y Raúl:*

*Todo lo que soy se lo debo a Ustedes, sin duda son lo más importante que tengo. Espero nunca defraudarlos.*

*A mi hermano:*

*Para que luche siempre por sus ideales.*

*A mi abuelo, Don Emilio Biagini:*

*Donde quiera que estés, espero te sientas orgulloso.*

*A mi familia:*

*A pesar de la distancia los lazos nunca se perderán.*

*Al Dr. Antonmaria Minzoni:*

*Por su sabiduría, dedicación, apoyo y paciencia a lo largo de este camino.*

*Al Dr. Jorge Ize:*

*Por todo el conocimiento que me brindó, así como su apoyo durante estos años.*

*A mi (otro) hermano, Marco Antonio Iglesias:*

*Gracias por tantos años de amistad, estoy seguro que seguiremos formando un equipo.*

*A Rocío, Víctor y Alejandro:*

*Sin duda, lo más valioso que obtuve del lugar menos esperado.*



# Agradecimientos.

Me faltan palabras para poder agradecer a todas aquellas personas que de alguna manera han hecho posible la realización de esta tesis, sin duda han sido muchas después de tantos años y tanto esfuerzo. La primera persona que debo mencionar es, sin lugar a dudas, a mi madre, Marcela Biagini. Más allá de agradecerle su amor, apoyo, paciencia y confianza durante toda mi vida, desearía reconocerle su coraje y fortaleza, logrando salir adelante a pesar de las adversidades. Agradezco estas virtudes que he aprendido de ella. A mi padre, Raúl Vargas, quien ha estado y sé que siempre estará para apoyarme, para brindarme su amor y confianza; por consiguiente, no puedo dejar de agradecerle lo que ha hecho por nosotros toda mi vida. Juntos, mis padres, conforman lo más valioso que tengo. Quiero agradecer por adelantado a mi hermano, Raúl, estoy seguro que cuidará de mis padres y me hará sentir orgulloso cuando supere, en contenido y forma, lo poco o mucho que he logrado hasta ahora.

De manera muy especial, esta tesis está dedicada a mi abuelo, Don Emilio Biagini, quien siempre fue un modelo de superación y coraje para mí. Desearía que hubiera podido estar entre nosotros para ver la culminación de este trabajo. Deseo agradecer a toda mi familia, estando tan lejos es difícil conservar los lazos que nos unen, es importante saber que cuento con ellos. A mi abuela, Doña Irma Alarcón y a mi tía, Doña Elsa Alarcón, por todo el amor que me han dado. A mis tíos, Leandro y Aldo Biagini, así como sus esposas, Ana María y Cecilia y a mi tía, Paulina Pizarro, gracias por el amor y la confianza. A mis primos, Claudio, Constanza, Carlo y Bruno Biagini, Francisca, Maripaz, Felipe y José Miguel Muñoz, a todos ustedes les tengo un especial afecto, espero conservar el lazo que nos une toda la vida.

No estaría en estos momentos escribiendo estas líneas si no fuera por la formación que he recibido de mi *alma mater*, la Universidad Nacional Autónoma de México, en particular la Facultad de Ciencias. Deseo agradecer a

los profesores que recuerdo con más afecto de estos años, los doctores Dario Moreno, Víctor Romero, Gustavo Cruz y la doctora María del Carmen Jorge y Jorge; me siento orgulloso de haber sido su alumno. De igual manera, quiero agradecer a todos los miembros del Departamento de Matemáticas y Mecánica del IIMAS el apoyo que he recibido a lo largo de estos años. La realización de esta tesis no hubiera sido posible sin el apoyo y la sabiduría del doctor Antonmaria Minzoni, quiero agradecer no solo el haberme ayudado a concretar mis estudios de licenciatura, sino toda la confianza que ha puesto en mi. Espero que conforme continúe mi vida académica y profesional tenga oportunidad de seguir aprendiendo de él. Mi vínculo con las matemáticas aplicadas nació de las enseñanzas que recibí del doctor Jorge Ize. Deseo pues, agradecer de manera muy especial su dedicación y apoyo, que en buena medida contribuyeron a la persona que soy. Por último, quisiera agradecer a mis sinodales, los doctores Víctor Romero, Marcos Rosenbaum, Julio Herrera y la doctora María del Carmen Jorge y Jorge la revisión de esta tesis así como sus comentarios y oportunas observaciones que sirvieron para mejorar este trabajo.

La conclusión de tanto tiempo de esfuerzo no hubiera sido posible sin la ayuda de amigos que han estado conmigo durante estos años. A Marco Antonio Iglesias, más que un amigo, lo considero un hermano. Nos conocemos desde hace mucho tiempo, pero sobre todo el apoyo, las tantas experiencias, la confianza, han forjado esta amistad tan grande. De igual forma, a Rocío Guerrero, José Víctor del Razo y Alejandro Méndez, deseo agradecerles todo este tiempo en el que hemos formado un grupo, sin duda son lo más valioso que obtuve de una época un tanto áspera en muchos sentidos; gracias a su amistad es que el camino fue menos difícil de recorrer.

Quiero agradecer por último al proyecto de Conacyt G25427-E, “Matemáticas no lineales en la física y la ingeniería” por la beca brindada durante la elaboración de mi tesis.

*“La vida no es un problema a resolver, sino una realidad a experimentar.”*  
Søren Kierkegaard.

J.C.L.B.  
Ciudad Universitaria  
11 de junio de 2004.

# Introducción.

En la actualidad las escalas de muchos fenómenos de gran interés científico son tales que las ecuaciones que los describen se convierten en ecuaciones no lineales. Entre ellas una amplia clase tiene soluciones coherentes que son fruto de un balance entre dispersión y no linealidad. A estas soluciones se les conoce como **solitones**. Muy recientemente ([1], [2]) se ha demostrado que estas ondas describen algunos aspectos de la **Electromigración de Superficie**.

Electromigración es el término que se le da al transporte neto de átomos en un conductor debido a un campo eléctrico intenso aplicado [3]. La primera observación de electromigración fue reportada en 1861, pero el estudio sistemático de este fenómeno no fue sino hasta mediados del siglo XX. Se mostró entonces que la fuerza que origina el transporte de masa no podía ser enteramente debido a la interacción electrostática de los iones con el campo aplicado, sino que debía existir una contribución significativa a la fuerza debido a la interacción de los portadores de carga con los iones. A esta fuerza se le ha denominado una “wind force” (llamada así por analogía con la formación de crestas en la arena a causa del viento) y se debe a la dispersión de los electrones y los iones por el intercambio de momento. El estudio de este fenómeno tuvo un auge en la década de 1960 cuando la electromigración se identificó como causa importante de falla en las interconexiones de Aluminio en los circuitos integrados, donde se transportan altas densidades de corriente y funcionan por periodos prolongados de tiempo (años) a elevadas temperaturas. Por lo anterior, dichos dispositivos son particularmente susceptibles al daño por electromigración debido a que los átomos del conductor son excitados térmicamente ocasionando una mayor susceptibilidad a la migración. El transporte neto de masa produce vacíos, ocasionando que se pierda la continuidad en la línea conductora. El estudio de este fenómeno ha determinado que un material menos susceptible a la electromigración como el Cobre, sea entonces una opción viable para reem-



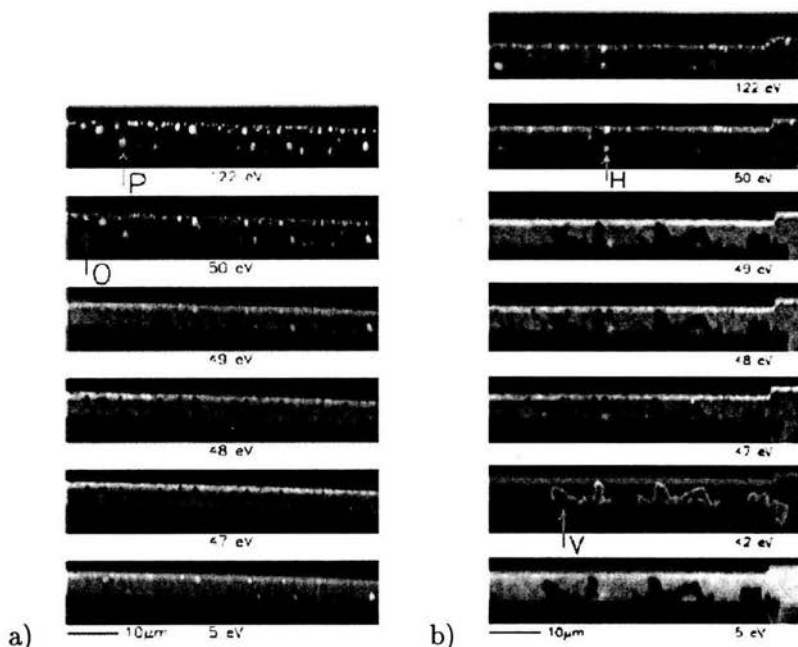


Figura 1: Imágenes de una línea de Aluminio de  $5\mu\text{m}$  de ancho a) *antes* y b) *después* de la electromigración de superficie provocada por fotoelectrones a las energías indicadas. Imagen obtenida de [4].

plazar al Aluminio en las interconexiones [4].

Recientemente se ha obtenido [4] evidencia experimental que demuestra que la electromigración ocurre en la superficie de las películas conductoras. Este fenómeno adquiere importancia en la medida en que el tamaño de las líneas conductoras en circuitos integrados se aproxima al tamaño del grano del material, así, resulta de importancia en el estudio de interconexiones en la nanotecnología, ya que mientras el fenómeno de migración se hace evidente en periodos de tiempo sumamente largos (años), la electromigración de superficie se hace evidente en periodos mucho más cortos de tiempo. De esta forma, la *electromigración de superficie* se refiere al movimiento neto de los átomos adsorbidos en la superficie de un conductor ocasionado por la interacción con un campo eléctrico intenso aplicado. Si se produce una perturbación en la superficie de un conductor, debido a la electromigración, esta superficie cambia su forma y bajo condiciones adecuadas ésta

---

se desplaza sobre si misma. Las no linealidades del problema hacen que este desplazamiento se propague como solitones [1]. En este trabajo estudiaremos la propagación de ondas tipo solitón en el problema de electromigración en la intercara entre dos películas conductoras.

En el **Capítulo 1** deduciremos la ecuación diferencial no lineal bajo la cual evoluciona una onda en el problema antes mencionado, esta ecuación será la *Ecuación Bi-Dimensional de Benjamin-Ono*, la cual es un análogo a la ecuación de Benjamin-Ono que surge de estudiar la propagación de ondas en la intercara entre dos fluidos en una dimensión. Se sabe que esta ecuación tiene una solución exacta del tipo solitón. Por otro lado, tenemos la ecuación de Zakharov-Kuznetsov (ecuación ZK), que es una generalización en dos dimensiones de la ecuación de Korteweg-de Vries (ecuación KDV) y surge del estudio de ondas que se propagan admitiendo una pequeña dispersión lateral comparada con la dispersión en la dirección de propagación. Esta ecuación no tiene soluciones analíticas conocidas pero se sabe que posee estructuras coherentes las cuales se propagan con perfil permanente. Además, se ha estudiado el problema de ondas que se propagan en la superficie de un conductor debido a la electromigración de superficie utilizando esta ecuación [2]. En este trabajo encontraremos la generalización de la ecuación de ZK para el caso cuando la intercara no es una superficie libre sino una intercara entre dos conductores. Veremos que el término dispersivo de la ecuación de ZK en la dirección de propagación de la onda se reemplaza con el término dispersivo de la ecuación de Benjamin-Ono. Esta situación es análoga a la de propagación de ondas de intercara quasi-unidimensionales, este problema será utilizado para motivar las aproximaciones de interés en nuestro caso de electromigración.

Una vez deducida la ecuación bi-dimensional de Benjamin-Ono estudiaremos la existencia de soluciones tipo solitón de esta ecuación. Dado que no conocemos solución exacta, debemos encontrar una aproximación conveniente. Para esto en el **Capítulo 2** buscaremos soluciones que se propaguen con forma permanente. Propondremos una función de prueba para la forma variacional de la ecuación, candidata a ser solución de tipo solitón (que será propuesta dados los resultados conocidos para la ecuación de Benjamin-Ono y la ecuación de ZK) y buscaremos los puntos críticos de la acción evaluada en esta función de prueba. Con esto conseguiremos encontrar la relación entre los parámetros de la función que extremizan el funcional, estas relaciones nos ayudarán posteriormente para estudiar la evolución de estructuras coherentes que se propagan como solitón. Una vez hecho es-

to, demostraremos que si una función localizada es solución a la ecuación bi-dimensional de Benjamin-Ono, entonces debe satisfacer ciertas leyes de conservación, a saber, la conservación de la masa de las ondas y su momento. Mediante el uso de estas leyes de conservación estudiaremos la estructura coherente, encontrando la evolución de los parámetros que la caracterizan. De igual forma, basados en la evidencia que resulta de resolver la ecuación numéricamente, veremos que si se deja evolucionar una condición inicial con el mismo perfil de la función de prueba utilizada, ésta se propaga conservando su forma pero modificando sus parámetros, los cuales son la amplitud, el ancho de la onda y su velocidad; al modificar estos parámetros la estructura coherente desprende masa en forma de ondas de amplitud muy pequeña comparada con aquella de la onda coherente. Esta masa desprendida se conoce como *radiación* y da estabilidad a la onda solitaria. Veremos además que esta radiación está confinada a un lugar geométrico del espacio determinado conocido como la *cáustica*. Mediante un argumento de fase estacionaria seremos entonces capaces de encontrar la cáustica de la radiación.

En el **Capítulo 3** estudiaremos cómo evoluciona una condición inicial con el perfil de la función de prueba. Para esto dejaremos que los parámetros de la estructura coherente (amplitud, ancho y velocidad) evolucionen con el tiempo, pero conservando el perfil de la estructura. Utilizando las leyes de conservación más una ecuación para el momento de la onda en la dirección  $x$  de ésta buscaremos que los parámetros evolucionen de forma tal que, en el equilibrio, se recupere la misma forma que aquella obtenida mediante el análisis variacional salvo, tal vez, una discrepancia entre los coeficientes de la forma polinomial. Veremos que esto es cierto para la velocidad pero no para la amplitud, lo cual es de esperarse dado que se utilizarán las leyes de conservación únicamente para la estructura coherente despreciando la radiación. Para recuperar entonces la forma variacional de la amplitud, modificaremos la velocidad de la onda agregando un flujo medio que establezca más rápidamente la amplitud de la estructura coherente. De esta forma obtendremos una ecuación diferencial para el ancho de la estructura coherente y se compararán los resultados de esta ecuación diferencial con los resultados numéricos de la ecuación original. Veremos en la comparación numérica que la ecuación diferencial encontrada describe apropiadamente, para tiempos suficientemente largos, el comportamiento del ancho del solitón así como sus puntos de equilibrio y por lo tanto el resto de los parámetros que caracterizan la estructura coherente. Se encontrará que el momento inicial del solitón (el cual está dado por la razón entre su amplitud y ancho iniciales) debe ser mayor a un cierto umbral para que se llegue a un punto de equilibrio finito

y se tenga una onda solitaria estable, por otro lado, si el momento inicial del solitón es menor al umbral, el punto de equilibrio para el ancho está en infinito y por lo tanto el solitón desaparece. Estos resultados predicen entonces, la formación y estabilidad de solitones en el modelo físico planteado y encontraremos una relación explícita de los puntos de equilibrio de las ondas solitarias con las condiciones iniciales. Obtendremos también la dependencia del valor umbral del momento inicial para el cual se propagan solitones en términos de las permitividades eléctricas de los conductores. Veremos que este valor umbral es proporcional a la razón entre la permitividad del conductor superior y el conductor inferior. Este resultado puede ser de gran importancia en la industria de la electrónica, ya que si se lograra recubrir las interconexiones metálicas con algún material con propiedades eléctricas adecuadas se podría evitar la propagación de solitones en la superficie de la interconexión evitando así que el dispositivo falle debido a este fenómeno.



# Capítulo 1

## Electromigración de Superficie.

Electromigración es el término que se le da al transporte neto de átomos en un metal o semiconductor producido por un campo eléctrico intenso aplicado. Se ha observado que esta migración de átomos no es únicamente debido a su interacción con el campo eléctrico, sino que debe existir también una contribución por parte de la interacción entre los portadores de carga de la corriente eléctrica y los iones que conforman el conductor. A esta fuerza se le ha denominado “wind force” y resulta del intercambio de momento entre los portadores de carga y los átomos migrando. El transporte neto de masa en una línea conductora se ha identificado como responsable de la falla en circuitos integrados, dadas las altas densidades de corriente que circulan en las interconexiones entre transistores y las altas temperaturas de funcionamiento. En la medida en que el uso del dispositivo es prolongado se crean vacíos y finalmente se pierde la continuidad de la línea conductora provocando la falla del dispositivo. En la medida que el tamaño de las líneas conductoras en un circuito integrado se ha vuelto comparable con el tamaño de grano del conductor, un nuevo fenómeno se ha observado, a saber, la *Electromigración de Superficie*, donde la migración de átomos es precisamente sobre la superficie del material conductor, la investigación de este fenómeno ha adquirido significativa importancia en últimas fechas dados los avances en técnicas de medición para fenómenos de escala muy pequeña; de este modo, el estudio de la electromigración de superficie se ha vuelto también de interés académico. En la Figura 1.1 observamos distintos tipos de fenómenos que se pueden presentar debido a la electromigración de superficie. En la Figura 1.1a observamos la formación de cúspides, este tipo de perturbaciones localizadas

serán el objeto de estudio en el presente trabajo ya que pueden dar origen a estructuras coherentes que se propaguen en la superficie del conductor. Otro tipo de fenómenos asociados con la electromigración de superficie, como el mostrado en la Figura 1.1b está fuera del alcance de este trabajo.

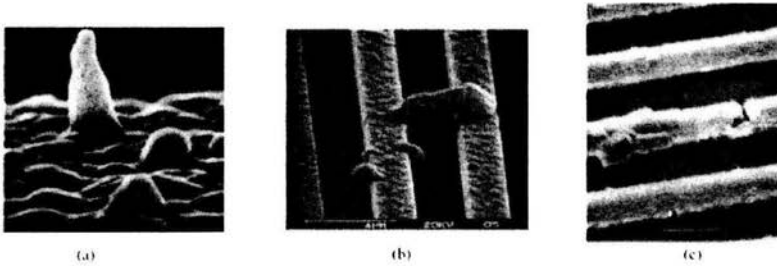


Figura 1.1: Daño de películas de Aluminio debido al efecto de electromigración de superficie. a) Formación de cúspides, b) Formación de filamento entre dos líneas y c) Acumulación de masa ocasionando pérdida de continuidad de la línea conductora. Imagen obtenida de [5].

La descripción del fenómeno de electromigración de superficie es relativamente sencilla; supóngase que se tiene una película de un material conductor y se aplica un campo eléctrico de gran intensidad paralelo a esta (véase Figura 1.2), en estas circunstancias una corriente eléctrica fluirá a través de la película. Si ahora se perturba la superficie del material, tanto el campo eléctrico como las propiedades químicas del conductor cambiarán en la superficie, haciendo que exista un transporte neto de átomos sobre la superficie de la película. Esto origina que la perturbación se destabilice y bajo ciertas condiciones, se desplace.

En otros términos, electromigración de superficie se refiere al movimiento dirigido de átomos adsorbidos (*adatoms*, del término en inglés *adsorbed atoms*) en una superficie sólida debido a una corriente eléctrica en una protuberancia de la misma [6]. Como hemos mencionado, dos mecanismos diferentes se han identificado como responsables de la interacción entre los *adatoms* y el campo eléctrico. Uno de ellos es la interacción electrostática, lo cual requiere que el *adatom* esté ionizado y transporte una carga efectiva. El otro, llamado *wind force* (fuerza de viento), se debe a la dispersión provocada por los electrones en los átomos que están migrando, esta fuerza parece ser la

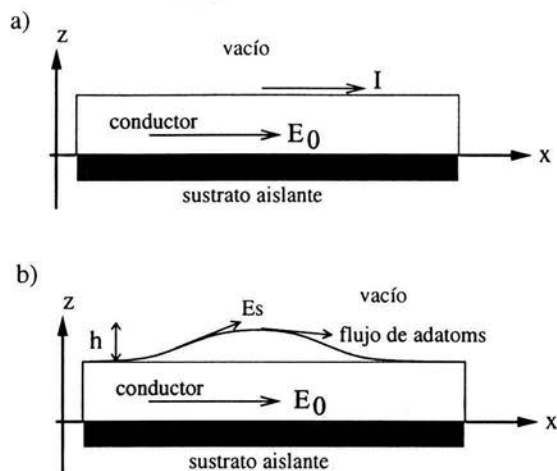


Figura 1.2: Un campo eléctrico intenso  $E_0$  es aplicado a un conductor. a) En la superficie sin perturbar y en todo el conductor circula una corriente  $I$ . b) Cuando la superficie es perturbada una altura  $h$  se crea un flujo neto de materia debido al campo eléctrico  $E_S$  sobre la superficie del conductor, ocasionando que la perturbación cambie su perfil.

dominante en ciertos metales y es proporcional al campo eléctrico sobre la superficie de la película conductora. El movimiento de los adatoms bajo el campo eléctrico aplicado induce una carga eléctrica sobre la superficie del material, cambiando el campo eléctrico en la misma. Este proceso de *retroalimentación* entre la superficie en evolución y el campo eléctrico origina el movimiento de la superficie misma.

En este capítulo estudiaremos el problema de electromigración de superficie en la intercara entre dos películas conductoras cuando se excita una de ellas por un campo eléctrico intenso. Veremos que si se produce una perturbación de la superficie media de la intercara, debido a los efectos de electromigración, ésta se propagará en la dirección del campo eléctrico. Deduciremos entonces la ecuación diferencial no lineal que determina el comportamiento de la altura media de la superficie sobre el nivel medio de la intercara. Esta ecuación diferencial será un análogo en dos dimensiones a la ecuación de Benjamin-Ono, que surge del estudio de ondas que se propagan en la intercara de un fluido estratificado. Dicha ecuación está por:



$$u_t + \alpha uu_x + \frac{\beta}{\pi} \left( \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, t)}{\xi - x} d\xi \right)_{xx} = 0,$$

donde  $u$  denota la altura de la intercara sobre su nivel en equilibrio y PV denota el valor principal de Cauchy de la integral en cuestión. Esta ecuación tiene una solución exacta en forma de onda permanente tipo solitón. Por otra parte, la ecuación que encontraremos para el problema considerado será

$$u_t + \beta uu_x + \alpha \left( \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right)_{xx} + u_{xyy} = 0,$$

donde el término  $u_{xyy}$  toma en cuenta la dispersión lateral de la onda. En los capítulos siguientes estudiaremos las posibles soluciones a esta ecuación que den como resultado la formación de ondas coherentes tipo solitón.

Para mostrar cómo surge esta ecuación de manera análoga a la ecuación de Benjamin-Ono en el problema de propagación de ondas en un fluido estratificado, comenzaremos estudiando un problema físico de mejor comprensión que la electromigración de superficie, que es precisamente el problema de propagación de ondas en un fluido estratificado en dos dimensiones. Posteriormente se estudiará el problema de electromigración de superficie en la intercara entre dos películas conductoras y veremos que la deducción de la ecuación es análoga a aquella de las ecuaciones para los fluidos.

## 1.1. El Problema de Propagación de Ondas en un Fluido Estratificado.

En esta sección estudiaremos el problema de un fluido estratificado y las ecuaciones de movimiento de una onda en la intercara que se propaga en una dirección. Este problema ya ha sido estudiado con anterioridad para el caso de una dimensión. Para el caso en el que el fluido superior tiene altura infinita se encuentra que la ecuación de movimiento para la altura de la onda es la ecuación de Benjamin-Ono

$$u_t + \alpha uu_x + \frac{\beta}{\pi} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)}{\xi - x} d\xi \right)_{xx} = 0, \quad (1.1)$$

donde P.V. denota el *valor principal de Cauchy* de la integral en cuestión. Es conocido que esta ecuación tiene una solución exacta con perfil permanente, a saber,

$$u(x, t) = \frac{ab^2}{(x - ct)^2 + b^2},$$

con  $b = \frac{4\beta}{\alpha a}$  y  $c = \frac{\alpha a}{4}$ . Este resultado puede ser verificado por sustitución directa en la ecuación (1.1) utilizando el resultado del Apéndice B. En la Figura 1.3 se muestran gráficas del solitón de Benjamin-Ono para diferentes tiempos.

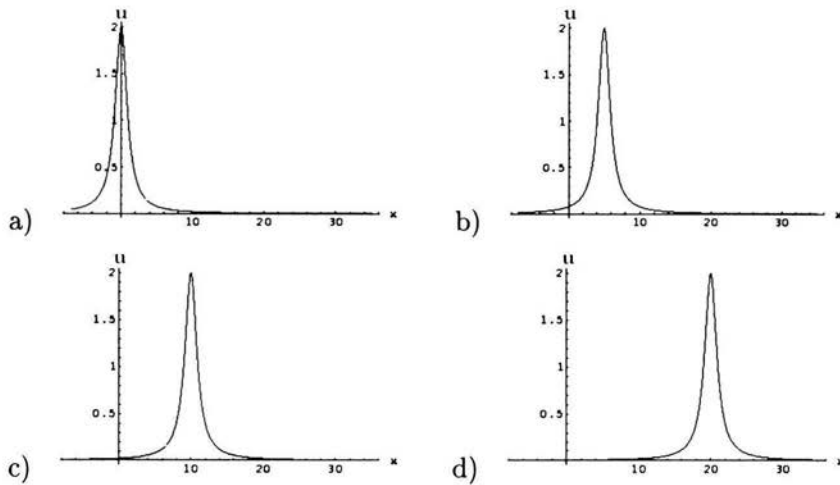


Figura 1.3: Solitón de Benjamin-Ono con  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$  y  $a = 4$  para tiempos a)  $t = 0$ ; b)  $t = 5$ ; c)  $t = 10$ ; d)  $t = 20$ .

A continuación estudiaremos el problema de un fluido estratificado en dos dimensiones.

### 1.1.1. Ecuaciones de la Mecánica de Fluidos.

Para estudiar el problema de un fluido estratificado necesitamos de las ecuaciones constitutivas que rigen la dinámica de fluidos [7]; estas son la *ecuación de continuidad* para un fluido compresible

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0; \tag{1.2}$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido y  $\mathbf{v}$  el campo de velocidades del mismo. Tenemos además la *ecuación de Bernoulli para un fluido irrotacional*

$$-\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\rho}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + p + \rho g z = 0, \quad (1.3)$$

con  $g$  la constante gravitacional y  $\Phi$  es el potencial de velocidades del fluido, para el cual se satisface que

$$\mathbf{v} = -\nabla \Phi.$$

Si retomamos ahora la ecuación de continuidad (ec. (1.2)) e imponemos la hipótesis adicional, que el fluido es incompresible, por lo tanto su densidad es constante y

$$\rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

dado que  $\mathbf{v} = -\nabla \Phi$ , es claro que el potencial de velocidades  $\Phi$  satisface entonces la ecuación de Laplace

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0,$$

con  $\Phi_x$  denotando la derivada parcial de  $\Phi$  respecto a  $x$  y análogamente para las demás direcciones.

### 1.1.2. Una Onda que se Propaga en la Intercara.

En la Figura 1.4 se presenta un bosquejo del problema de un fluido estratificado. Es de hacer notar que en  $z = -h_1$  y  $z = h_2$  hay "paredes" que confinan los fluidos a estas regiones del espacio.

Dado que estas paredes son rígidas, la componente en la dirección  $z$  de la velocidad del fluido debe anularse en la frontera, por lo cual imponemos la siguiente condición de frontera

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{en } z = -h_1, z = h_2.$$

Escribimos el potencial de velocidades como

$$\Phi(x, y, z, t) = \begin{cases} \Phi_1(x, y, z, t), & -h_1 < z < \eta \\ \Phi_2(x, y, z, t), & \eta < z < h_2, \end{cases}$$

con  $\eta$  es la altura de la intercara sobre su nivel de equilibrio. Tomamos ahora sólo los términos lineales de la ecuación de Bernoulli

$$-\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p + \rho g z = 0,$$

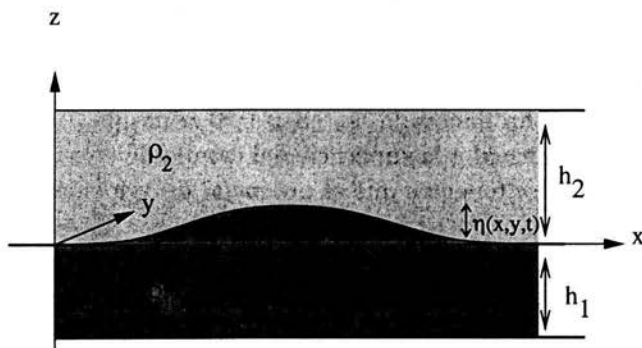


Figura 1.4: Perfil de la intercara en un fluido estratificado. La altura de la intercara se denota por  $h(x, y, t)$ , y los fluidos están delimitados por  $z = -h_1$  el inferior y  $z = h_2$  el superior.

que la reescribimos en términos de ambos potenciales para las regiones correspondientes,

$$\begin{aligned} -\rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + p + \rho_1 g z &= 0 \\ -\rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + p + \rho_2 g z &= 0. \end{aligned}$$

Definimos ahora la condición de superficie libre para la intercara de los fluidos. Consideramos la siguiente función

$$\xi(x, y, z, t) = \eta(x, y, t) - z.$$

La hipótesis de superficie libre nos dice que en la intercara una partícula en la misma nunca la deja, por lo tanto  $\xi = 0$  y así

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi_t + \xi_x \dot{x} + \xi_y \dot{y} + \xi_z \dot{z},$$

de donde obtenemos al evaluar las derivadas de  $\xi$ ,

$$\eta_t - \eta_x \Phi_x - \eta_y \Phi_y + \Phi_z = 0, \tag{1.4}$$

donde los potenciales están evaluados en  $z = \eta$ , que a primera aproximación pueden ser tomados en  $z = 0$ . Tomando los términos lineales de la relación anterior encontramos

$$\eta_t = -\Phi_z \Big|_{z=0},$$

en esta expresión se ha denotado  $\Phi_z$  en  $z = 0$  como  $\Phi_{1z} = \Phi_{2z} = \Phi_z$  ya que la componente normal a la superficie del campo de velocidades debe ser continua. Resumiendo, tenemos que el potencial de velocidades satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

con condiciones de frontera

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \text{en } z = -h_1, z = h_2.$$

Además, tenemos la condición de frontera libre

$$\eta_t = -\Phi_z \Big|_{z=0}$$

y la ecuación de Bernoulli para ambos fluidos

$$\begin{aligned} -\rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + p + \rho_1 g z &= 0 \\ -\rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + p + \rho_2 g z &= 0. \end{aligned}$$

Para resolver el problema proponemos que el potencial de velocidades tenga la forma de una onda viajera en  $x$  y  $y$

$$\Phi(x, y, z, t) = Q(z)e^{i(kx+ly-\omega t)}$$

con  $k$  y  $l$  los números de onda en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente, y  $\omega$  es la frecuencia de la onda. Supondremos que la onda se desplaza en la dirección  $x$  y por lo tanto  $l \ll k$ . Dado que el potencial satisface la ecuación de Laplace, es claro que tenemos

$$Q'' - (k^2 + l^2)Q = 0,$$

donde se ha eliminado el término exponencial. Denotando por  $\kappa^2 = k^2 + l^2$  en la ecuación anterior, es claro entonces que la solución de  $Q$  tiene la forma

$$Q(z) = A \cosh \kappa z + B \sinh \kappa z$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes a determinar. Utilizando ahora las condiciones de frontera encontramos que

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \Big|_{z=-h_1} = \kappa(-A \operatorname{senh} \kappa h_1 + B \operatorname{cosh} \kappa h_1) = 0$$

de donde

$$Q_1(z) = A_1 \operatorname{cosh} \kappa(z + h_1).$$

La otra condición de frontera es

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \Big|_{z=h_2} = \kappa(A \operatorname{senh} \kappa h_2 + B \operatorname{cosh} \kappa h_2) = 0$$

y por lo tanto

$$Q_2(z) = A_2 \operatorname{cosh} \kappa(z - h_2).$$

De esta forma tenemos que

$$\Phi(x, y, z, t) = \begin{cases} A_1 \operatorname{cosh} \kappa(z + h_1) e^{i(kx + ly - \omega t)}, & -h_1 < z < \eta \\ A_2 \operatorname{cosh} \kappa(z - h_2) e^{i(kx + ly - \omega t)}, & \eta < z < h_2. \end{cases}$$

Ahora proponemos que la altura de la intercara  $\eta$  sea también una onda viajera de la forma

$$\eta(x, y, t) = A e^{i(kx + ly - \omega t)}$$

y utilizamos la ecuación

$$\eta_t = -\Phi_z \Big|_{z=0}$$

para obtener

$$-i\omega A = - \begin{cases} \Phi_{1z} \Big|_{z=0} = A_1 \kappa \operatorname{senh} \kappa h_1 \\ \Phi_{2z} \Big|_{z=0} = -A_2 \kappa \operatorname{senh} \kappa h_2. \end{cases} \quad (1.5)$$

Dado que el valor de  $A$  debe ser el mismo si se evalúa en ambos potenciales, obtenemos la relación

$$A_1 \operatorname{senh} \kappa h_1 = -A_2 \operatorname{senh} \kappa h_2. \quad (1.6)$$

Ahora utilizamos las ecuaciones de Bernoulli

$$\begin{aligned} -\rho_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + p + \rho_1 g z &= 0, \\ -\rho_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + p + \rho_2 g z &= 0, \end{aligned}$$

y suponemos que la presión hidrostática es continua a través de la intercara dado que no hay tensión superficial, por lo que restando la segunda ecuación a la primera evaluadas en la intercara obtenemos

$$-(\rho_1 \Phi_{1t} - \rho_2 \Phi_{2t})|_{z=\eta} + g\eta(\rho_1 - \rho_2) = 0.$$

Como calculamos los potenciales a primera aproximación, evaluamos cada una de ellos en  $z = 0$ . Sustituyendo los valores encontrados para los potenciales y para  $\eta$  encontramos que

$$i\omega(\rho_1 A_1 \cosh \kappa h_1 - \rho_2 A_2 \cosh \kappa h_2) + g(\rho_1 - \rho_2)A = 0.$$

En la ecuación anterior se ha eliminado el factor exponencial. Utilizando las ecuaciones (1.5) y (1.6) obtenemos

$$A_1 i\omega(\rho_1 \cosh \kappa h_1 + \rho_2 \frac{\sinh \kappa h_1}{\sinh \kappa h_2} \cosh \kappa h_2) + g(\rho_1 - \rho_2) \frac{1}{i\omega} A_1 \kappa \sinh \kappa h_1 = 0.$$

Finalmente, multiplicando por  $i\omega$  la relación anterior, dividiendo por  $\sinh \kappa h_1$  y eliminando  $A_1$  resulta que

$$-\omega^2(\rho_1 \coth \kappa h_1 + \rho_2 \coth \kappa h_2) + g(\rho_1 - \rho_2)\kappa = 0$$

y

$$\omega = \sqrt{g(\rho_1 - \rho_2)} \sqrt{\frac{\kappa}{\rho_1 \coth \kappa h_1 + \rho_2 \coth \kappa h_2}},$$

que es la relación de dispersión buscada para el problema de un fluido estratificado. De esta expresión notamos que para que la onda sea estable es necesario que  $\rho_1 > \rho_2$ , lo cual era de esperarse. Para que el análisis posterior se simplifique, trabajaremos con la velocidad de onda  $c = \omega/\kappa$ ,

$$c = \sqrt{g(\rho_1 - \rho_2)} \sqrt{\frac{1}{\rho_1 \kappa \coth \kappa h_1 + \rho_2 \kappa \coth \kappa h_2}}. \quad (1.7)$$

### 1.1.3. Relación de Dispersión para una Capa de Altura Infinita.

Supondremos ahora que tenemos una onda en la intercara entre los fluidos y que se propaga en la dirección  $x$ , es por esto que consideraremos el número de onda en la dirección  $x$  es mucho mayor al número de onda en la dirección  $y$ , en otras palabras, supondremos que  $l \ll k$ . Para el caso en que la relación

de dispersión  $\omega$  contiene el término de Benjamin-Ono, tomaremos el límite en el que la altura de la capa superior tiende a infinito, pero guardando proporción con el número de onda  $k$ , es decir, tomaremos el límite  $kh_2 \rightarrow \infty$ . En este caso, el término  $\kappa \coth \kappa h_2$  tiene el siguiente comportamiento

$$\begin{aligned}\kappa \coth \kappa h_2 &= k \sqrt{1 + l^2/k^2} \coth \kappa h_2 \sqrt{1 + l^2/k^2} \\ &\approx k \sqrt{1 + l^2/k^2} \coth \kappa h_2.\end{aligned}$$

Tomando el límite cuando  $kh_2 \rightarrow \infty$ , notamos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \coth x = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y por lo tanto

$$c = \sqrt{g(\rho_1 - \rho_2)} \sqrt{\frac{1}{\rho_1 \kappa \coth \kappa h_1 + \rho_2 |k| \sqrt{1 + \frac{l^2}{k^2}}}}.$$

Si además tomamos la aproximación de onda larga para la capa inferior, es decir, cuando  $\kappa \sim 0$ , esta vez tenemos

$$\coth \kappa h_1 \approx \frac{1}{h_1 \kappa},$$

de donde obtenemos

$$c = \sqrt{g(\rho_1 - \rho_2)} \sqrt{\frac{1}{\frac{\rho_1}{h_1} + \rho_2 |k| \sqrt{1 + \frac{l^2}{k^2}}}}$$

Realizando una aproximación a primer orden

$$\sqrt{1 + \frac{l^2}{k^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{k^2},$$

resulta que

$$c = \sqrt{\frac{gh_1(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\rho_2 h_1}{\rho_1} |k| \left(1 + \frac{l^2}{2k^2}\right)}}.$$

Desarrollando  $c$  en serie de Taylor obtenemos



$$c \approx \sqrt{\frac{gh_1(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1}} \left( 1 - \frac{\rho_2 h_1}{2\rho_1} \left( |k| + \frac{l^2}{2|k|} \right) \right).$$

Dado que  $l^2/2|k|$  es un número positivo, podemos reescalar el número de onda en la dirección  $y$  de la siguiente manera,

$$m^2 = \frac{l^2}{2|k|},$$

para obtener finalmente

$$c = \sqrt{\frac{gh_1(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1}} \left( 1 - \frac{\rho_2 h_1}{2\rho_1} (|k| + m^2) \right).$$

Si la onda se propaga únicamente en la dirección  $x$ , entonces recuperamos la relación de dispersión  $\omega = ck$

$$\omega = \sqrt{\frac{gh_1(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1}} k \left( 1 - \frac{\rho_2 h_1}{\rho_1} (|k| + m^2) \right). \quad (1.8)$$

Por simplicidad, denotaremos en lo futuro

$$c_0 = \sqrt{\frac{gh_1(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1}},$$

$$c_1 = \frac{h_1 \rho_2}{2\rho_1}.$$

Recordando ahora la forma de nuestra solución para  $\eta$ :

$$\begin{aligned} \eta &= Ae^{i(kx+ly-\omega t)} \\ &= Ae^{i(kx+ly-c_0k(1-c_1(|k|+m^2))t)} \\ &= Ae^{i(k(x-c_0t)+ly+c_0k(c_1(|k|+m^2))t)}, \end{aligned}$$

podemos hacer el cambio de variable  $\xi = x - c_0 t$  (correspondiente a un cambio de coordenadas a un sistema que se mueve en la dirección  $x$  con velocidad  $c_0$ ) para obtener

$$\eta = Ae^{i(k\xi+ly+c_0c_1k(|k|+m^2)t)}. \quad (1.9)$$

Sabemos de las propiedades de la transformada de Fourier que a partir de la relación de dispersión  $\omega$  podemos reconstruir la ecuación diferencial que describe el comportamiento de la onda, si tenemos una ecuación del tipo

$$u_t + \mathcal{L}u = 0$$

donde  $\mathcal{L}$  es un operador pseudo diferencial lineal. Entonces, si  $u$  es la suma de modos normales de la forma  $Ae^{i(kx+ly-\omega t)}$ , es claro que

$$\omega = -i\mathcal{F}(\mathcal{L}u),$$

donde  $\mathcal{F}(\mathcal{L}u)$  representa la transformada de Fourier del operador  $\mathcal{L}$ , es decir, si se tiene, por ejemplo, un término  $u_t + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  entonces es claro que  $\mathcal{F}(u_{xx}) = -k^2$  y por lo tanto  $\omega = ik^2$ . Entonces retomamos la ecuación (1.9) para escribir

$$\omega = -c_0 c_1 (k|k| + km^2)$$

y utilizamos el resultado del Apéndice A, el hecho que

$$\mathcal{F}(u_{xyy}) = -ikm^2,$$

para obtener entonces la ecuación diferencial lineal que describe el comportamiento de la intercara

$$u_t + \frac{c_0 c_1}{\pi} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t) d\xi}{\xi - x} \right)_{xx} + c_0 c_1 u_{xyy} = 0. \quad (1.10)$$

En la sección próxima deduciremos, a partir de la ecuación (1.4) correspondiente a la superficie libre, el término no lineal de la ecuación diferencial que describe la evolución de la altura de la intercara.

#### 1.1.4. Término No Lineal.

En esta sección deduciremos el término no lineal para la ecuación (1.10) y que, combinado con los términos dispersivos, dará origen a ondas de perfil permanente, como veremos en los capítulos siguientes. Básicamente lo que haremos será retomar la ecuación de la superficie libre (ecuación (1.4)) y desarrollar en serie de Taylor a primer orden el potencial de velocidades cercano a  $\eta \sim 0$  para después tomar la transformada de Fourier de toda la expresión. Utilizando las condiciones de frontera aproximadas a primer orden encontradas en la sección anterior para la transformada de Fourier

del potencial de velocidades y la altura de la intercara, así como una aproximación a primer orden de la relación de dispersión  $\omega$  podremos encontrar expresiones para las integrales de convolución que involucrarán los términos no lineales de la ecuación. Luego supondremos que el potencial de velocidades tiene soporte sólo para el número de onda  $\kappa$  pequeño, por lo que encontraremos que las integrales son de orden más pequeño que el término no lineal  $\eta\eta_x$  que estamos buscando. Clásicamente la deducción de términos no lineales se realiza utilizando el método de perturbaciones, mostraremos aquí cómo es posible deducir todos los términos de la ecuación diferencial utilizando las propiedades de la transformada de Fourier.

Procedemos entonces a escribir la ecuación (1.4) escribiendo explícitamente la dependencia del potencial de velocidades evaluado en la intercara, tenemos así

$$\eta_t - \eta_x \Phi_x(x, y, \eta, t) - \eta_y \Phi_y(x, y, \eta, t) + \Phi_z(x, y, \eta, t) = 0.$$

Desarrollamos en serie de Taylor el potencial de velocidades para  $\eta \sim 0$ , obteniendo para  $\Phi_x$  la siguiente expresión (por comodidad omitiremos la dependencia explícita en el tiempo del potencial de velocidades)

$$\Phi_x(x, y, \eta) \approx \Phi_x(x, y, 0) + \Phi_{xz}(x, y, 0)\eta$$

y de la misma forma tendremos expresiones semejantes para  $\Phi_y$  y  $\Phi_z$ , escribamos entonces la expresión completa

$$\eta_t - \eta_x \Phi_x - h_x \Phi_{xz} \eta - \eta_y \Phi_y - h_y \Phi_{yz} \eta + \Phi_z + \Phi_{zz} \eta = 0,$$

donde dejamos de escribir la dependencia de las variables para el potencial de velocidades por comodidad, pero recordamos que está evaluado en  $z = 0$ . Dado que  $\Phi$  debe satisfacer la ecuación de Laplace

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0$$

podemos escribir

$$\eta_t - \eta_x \Phi_x - h_x \Phi_{xz} \eta - \eta_y \Phi_y - h_y \Phi_{yz} \eta + \Phi_z - \Phi_{xx} \eta - \Phi_{yy} \eta = 0. \quad (1.11)$$

Ahora tomamos la transformada de Fourier de la expresión anterior, y utilizamos la propiedad siguiente

$$\mathcal{F}(f(x)g(x)) = \widehat{f(k)} * \widehat{g(k)},$$

con  $f * g$  denotando la *convolución* de las funciones  $f$  y  $g$ , que es una nueva función la cual se escribe como

$$h(x) = f(x) * g(x) = g(x) * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)du.$$

Cuando se trata de más dimensiones, la propiedad de convolución es la misma pero involucrando la convolución de las funciones en todas sus variables, es decir, en el caso de dos dimensiones tenemos

$$f(x, y) * g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u, y-w)g(u, w)dudw.$$

Tomamos entonces la transformada de Fourier de la expresión (1.11) para obtener

$$\widehat{\eta}_t + \widehat{\Phi}_z - \widehat{\eta}_x * \widehat{\Phi}_x - \widehat{\eta}_x * \widehat{\Phi}_{xz} * \widehat{\eta} - \widehat{\eta}_y * \widehat{\Phi}_y - \widehat{\eta}_y * \widehat{\Phi}_{yz} * \widehat{\eta} - \widehat{\Phi}_{xx} * \widehat{\eta} - \widehat{\Phi}_{yy} * \widehat{\eta} = 0. \quad (1.12)$$

Esta expresión es exacta en principio si se mantienen todos los órdenes de magnitud. Escribimos a continuación las ecuaciones linealizadas que describen la propagación de ondas en la intercara entre los fluidos, tenemos que los potenciales de velocidades deben satisfacer la ecuación de Laplace en cada fluido

$$\nabla^2 \Phi = 0$$

con

$$\Phi(x, y, z, t) = \begin{cases} \Phi_1(x, y, z, t), & -h_1 < z < \eta \\ \Phi_2(x, y, z, t), & \eta < z < h_2 \end{cases}$$

con condiciones de frontera

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad \text{en } z = -h_1, z = h_2.$$

La ecuación de frontera libre lineal

$$\eta_t = -\Phi_z \Big|_{z=0}$$

con  $\Phi_{1z} = \Phi_{2z} = \Phi_z$  dada la continuidad de la componente normal del campo de velocidades en la intercara. Por último tenemos la ecuación de Bernoulli linealizada en la intercara

$$-(\rho_1 \Phi_{1t} - \rho_2 \Phi_{2t})|_{z=0} + g\eta(\rho_1 - \rho_2) = 0.$$

Notamos que dadas estas ecuaciones  $\Phi$  y  $\eta$  son únicos y podemos escribir a  $\Phi$  como función de  $\eta$ , este argumento lo utilizaremos para encontrar relaciones aproximadas a primer orden y de esta forma encontrar los órdenes de magnitud de los términos de la ecuación (1.12). Comenzamos con la ecuación de superficie libre linealizada

$$\eta_t = -\Phi_z,$$

tomando la transformada de Fourier y suponiendo que  $\eta$  y  $\Phi$  son la superposición de modos normales de la forma  $Ae^{i(kx+ly-\omega t)}$  obtenemos

$$-i\omega\hat{\eta} = -\hat{\Phi}_z. \quad (1.13)$$

Retomamos la ecuación de Bernoulli aproximada linealmente

$$\Phi_t = g\eta$$

y tomando la transformada de Fourier de esta expresión resulta que

$$-i\omega\hat{\Phi} = g\hat{\eta}. \quad (1.14)$$

De la relación de dispersión encontrada en la sección anterior,

$$\omega = \sqrt{\frac{gh_1(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1}} k \left( 1 - \frac{\rho_2 h_1}{\rho_1} (|k| + m^2) \right),$$

tomamos el límite de onda larga  $\kappa \sim 0$  (después supondremos que  $\Phi$  tiene soporte sólo para este límite) para obtener

$$\omega \approx \sqrt{\frac{gh_1(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1}} k,$$

por lo que

$$-i\omega\hat{\Phi} \approx -i(c_0 k)\hat{\Phi} = -c_0\hat{\Phi}_x,$$

donde  $c_0$  está definida como en la sección anterior. Tenemos entonces

$$\hat{\eta} \approx -\frac{c_0}{g}\hat{\Phi}_x,$$

utilizando esta expresión obtenemos para las expresiones (1.13) y (1.14) respectivamente

$$\widehat{\Phi}_z \sim i\omega\widehat{\eta} \quad (1.15)$$

$$\widehat{\eta} \sim -\frac{c_0}{g}\widehat{\Phi}_x. \quad (1.16)$$

Estas expresiones las utilizaremos para simplificar la ecuación de superficie libre, la cual escribimos nuevamente a continuación

$$\widehat{\eta}_t + \widehat{\Phi}_z - \widehat{\eta}_x * \widehat{\Phi}_x - \widehat{\eta}_x * \widehat{\Phi}_{xz} * \widehat{\eta} - \widehat{\eta}_y * \widehat{\Phi}_y - \widehat{\eta}_y * \widehat{\Phi}_{yz} * \widehat{\eta} - \widehat{\Phi}_{xx} * \widehat{\eta} - \widehat{\Phi}_{yy} * \widehat{\eta} = 0.$$

Notamos de esta expresión, utilizando las aproximaciones a primer orden antes obtenidas, que el término  $\widehat{\Phi}_z$  lo podemos escribir como

$$\widehat{\Phi}_z \sim i\omega\widehat{\eta},$$

por lo que podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\widehat{\eta}_t + i\omega\widehat{\eta} - \widehat{\eta}_x * \widehat{\Phi}_x - \widehat{\eta}_x * \widehat{\Phi}_{xz} * \widehat{\eta} - \widehat{\eta}_y * \widehat{\Phi}_y - \widehat{\eta}_y * \widehat{\Phi}_{yz} * \widehat{\eta} - \widehat{\Phi}_{xx} * \widehat{\eta} - \widehat{\Phi}_{yy} * \widehat{\eta} = 0. \quad (1.17)$$

Procedemos entonces a examinar los términos no lineales de la ecuación (1.17). Comenzamos por  $\widehat{\eta}_x * \widehat{\Phi}_x$ , que se escribe como

$$\widehat{\eta}_x * \widehat{\Phi}_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i(k-u)\widehat{\eta}(k-u, l-w)iu\widehat{\phi}(u, w)dudw,$$

donde se ha utilizado la propiedad de la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}(f_x) = ik\widehat{f}$$

para la transformada de Fourier de la derivada de una función. Ahora tomamos la relación (1.16) para poder escribir

$$\widehat{\eta}_x * \widehat{\Phi}_x = -D_1 \iint_{\mathbb{R}^2} i(k-u)\widehat{\eta}(k-u, l-w)\widehat{\eta}(u, w)dudw, \quad (1.18)$$

donde

$$D_1 = \frac{g}{c_0}.$$

la expresión (1.18) la podemos resumir como

$$-D_1 \iint_{\mathbb{R}^2} i(k-u)\eta(k-u, l-w)\eta(u, w)du dw = -D_1 \mathcal{F}(\eta * \eta_x), \quad (1.19)$$

que es la expresión no lineal que estamos buscando. Ahora suponemos que tanto  $\hat{\eta}(k, l)$  como  $\hat{\Phi}(k, l)$  tienen soporte para un número de onda muy pequeño, un bosquejo de la forma que suponemos para  $\hat{\eta}$  como  $\hat{\Phi}$  se muestra en la Figura 1.5. Entonces si  $\eta$  y  $\Phi$  tienen valores distintos de cero para valores de  $(k, l)$  dentro de círculos de radio  $\delta_1$  y  $\delta_2$  respectivamente, tomamos  $\epsilon = \max(\delta_1, \delta_2)$ , la expresión anterior la podemos aproximar para  $(k, l) \sim (0, 0)$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} i(k-u)\eta(k-u, l-w)\eta(u, w)du dw &\approx \iint_{-\epsilon}^{\epsilon} i(k-u)\eta(k, l)\eta(0, 0)du dw \\ &= i\eta(k, l)\eta(0, 0) \iint_{-\epsilon}^{\epsilon} (k-u)du dw \\ &\sim O(\epsilon^2). \end{aligned}$$

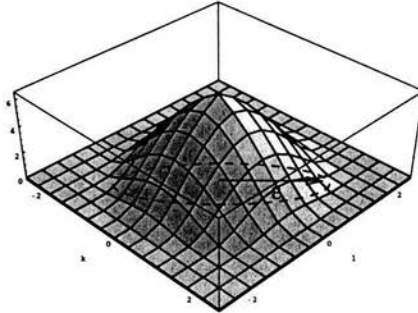


Figura 1.5: Tanto  $\hat{\eta}(k, l)$  como  $\hat{\Phi}(k, l)$  tienen soporte (valores distintos de cero) para valores de  $|(k, l)| < \epsilon$ .

Veremos entonces que los demás términos de la ecuación (1.17) tienen órdenes de magnitud en  $\epsilon$  menor que la expresión anterior y por lo tanto son despreciables respecto al término (1.19). Tomamos entonces el segundo término no lineal de la expresión (1.17), el cual es

$$\begin{aligned}\widehat{\eta}_x * \widehat{\Phi}_{xz} * \widehat{\eta} &= \widehat{\eta}_x * \iint_{\mathbb{R}^2} \widehat{\eta}(k-u, l-w) i u \widehat{\Phi}_z(u, w) du dw \\ &\approx -D \widehat{\eta}_x * \iint_{\mathbb{R}^2} \widehat{\eta}(k-u, l-w) u^2 \widehat{\eta}(u, w) du dw,\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la relación (1.15) para  $\widehat{\Phi}_z$  y el valor de las constantes se ha resumido en  $D$ . Ahora hacemos la aproximación para números de onda pequeños, con la cual obtenemos

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{R}^2} i(k-\tau) \widehat{\eta}(k-\tau, l-\theta) \iint_{\mathbb{R}^2} \widehat{\eta}(\tau-u, \theta-w) u^2 \widehat{\eta}(u, w) du dw \, d\tau d\theta \approx \\ &\iint_{\mathbb{R}^2} i(k-\tau) \widehat{\eta}(k-\tau, l-\theta) \widehat{\eta}(\tau, \theta) \widehat{\eta}(0, 0) \iint_{-\epsilon}^{\epsilon} u^2 du dw \, d\tau d\theta = \\ &\frac{4\epsilon^4}{3} \iint_{\mathbb{R}^2} i(k-\tau) \widehat{\eta}(k-\tau, l-\theta) \widehat{\eta}(\tau, \theta) \widehat{\eta}(0, 0) d\tau d\theta = \\ &i \frac{4\epsilon^4}{3} \widehat{\eta}(0, 0)^2 \widehat{\eta}(k, l) \iint_{-\epsilon}^{\epsilon} (k-\tau) d\tau d\theta \sim O(\epsilon^6).\end{aligned}$$

Lo cual es de un orden mucho menor en  $\epsilon$  que el término (1.19). Ahora tomamos el tercer término no lineal de la expresión (1.17),

$$\begin{aligned}\widehat{\eta}_y * \widehat{\Phi}_y &= \iint_{\mathbb{R}^2} i(l-w) \widehat{\eta}(k-u, l-w) i w \widehat{\Phi}(u, w) du dw \\ &\approx -\widehat{\eta}(k, l) \widehat{\Phi}(0, 0) \iint_{-\epsilon}^{\epsilon} (l-w) w du dw \\ &\sim O(\epsilon^4).\end{aligned}$$

El cuarto término de la ecuación (1.17) es

$$\begin{aligned}\widehat{\eta}_y * \widehat{\Phi}_{yz} * \widehat{\eta} &= \widehat{\eta}_y * \iint_{\mathbb{R}^2} \widehat{\eta}(k-u, l-w) i w \widehat{\Phi}_z(u, w) du dw \\ &= -D \widehat{\eta}_y * \iint_{\mathbb{R}^2} \widehat{\eta}(k-u, l-w) u w \widehat{\eta}(u, w) du dw.\end{aligned}$$

Utilizando el hecho que  $\widehat{\eta}$  tiene soporte sólo para  $(k, l) \sim (0, 0)$  y escribiendo



la segunda integral de convolución resulta que

$$\begin{aligned}
& -D \iint_{\mathbb{R}^2} i(l-\theta)\hat{\eta}(k-\tau, l-\theta) \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{\eta}(\tau-u, \theta-w)wu\hat{\eta}(u, w)dudw \, d\tau d\theta \approx \\
& \iint_{\mathbb{R}^2} i(l-\theta)\hat{\eta}(k-\tau, l-\theta)\hat{\eta}(\tau, \theta)\hat{\eta}(0, 0) \iint_{-\epsilon}^{\epsilon} uwdudw \, d\tau d\theta \sim \\
& O(\epsilon^4) \iint_{\mathbb{R}^2} i(l-\theta)\hat{\eta}(k-\tau, l-\theta)\hat{\eta}(\tau, \theta)\hat{\eta}(0, 0)d\tau d\theta \sim \\
& O(\epsilon^4)\hat{\eta}(0, 0)^2\hat{\eta}(k, l) \iint_{-\epsilon}^{\epsilon} (l-\theta)d\tau d\theta \sim O(\epsilon^6).
\end{aligned}$$

Para el siguiente término de la ecuación (1.17) tenemos

$$\begin{aligned}
\widehat{\Phi}_{xx} * \hat{\eta} &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\eta}(k-u, l-w)u^2\hat{\Phi}(u, w)dudw \\
&\approx -\hat{\eta}(k, l)\hat{\Phi}(0, 0) \iint_{-\epsilon}^{\epsilon} u^2dudw \\
&\sim O(\epsilon^4).
\end{aligned}$$

Es claro que para el siguiente término,  $\widehat{\Phi}_{yy} * \hat{\eta}$  el análisis es muy similar al realizado anteriormente, y por lo tanto este término también tendrá un orden de  $\epsilon^4$ . Hemos obtenido entonces que el término de mayor contribución a primer orden es el término  $\eta\eta_x$ , por lo que podemos escribir la ecuación diferencial como

$$\hat{\eta}_t + i\omega\hat{\eta} + D_1\hat{\eta} * \hat{\eta}_x = 0,$$

por lo que tomando la transformada inversa de Fourier obtenemos el término no lineal que estábamos buscando más los términos lineales que habíamos encontrado

$$\eta_t + D_1\eta\eta_x + \frac{c_0c_1}{\pi} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\xi, y, t)d\xi}{\xi-x} \right)_{xx} + c_0c_1\eta_{xyy} = 0. \quad (1.20)$$

Hacemos el cambio de variable

$$\Psi = \sqrt{c_0c_1}y$$

y utilizando la regla de la cadena obtenemos que

$$\frac{\partial}{\partial \Psi^2} = c_0 c_1 \frac{\partial}{\partial y^2},$$

de forma tal que podemos escribir la ecuación diferencial (1.20) como

$$\eta_t + D_1 \eta \eta_x + \frac{c_0 c_1}{\pi} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\xi, y, t) d\xi}{\xi - x} \right)_x + \eta_{x\psi\psi} = 0,$$

que es la ecuación diferencial que estamos buscando, la cual la escribiremos por simplicidad en términos de las variables originales, recordando que estas variables son variables reescaladas, además denotamos  $\beta = D_1$  y  $\alpha = c_0 c_1 / \pi$  para obtener finalmente

$$\eta_t + \beta \eta \eta_x + \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta(\xi, y, t) d\xi}{\xi - x} \right)_{xx} + \eta_{xyy} = 0 \quad (1.21)$$

que es la **Ecuación Bi-dimensional de Benjamin-Ono**.

## 1.2. Ondas que se Propagan en la Intercara entre Películas Conductoras.

En esta sección estudiaremos el problema de ondas que se propagan en la intercara entre dos conductores debido al fenómeno de electromigración de superficie. Deduciremos las ecuaciones que describen la dinámica de una perturbación en la intercara sobre el nivel medio de la misma en equilibrio, para después resolver el sistema de ecuaciones resultantes de manera muy semejante a como se hizo en el problema de ondas en un fluido estratificado. Deduciremos de esta manera la ecuación diferencial no lineal que determina el comportamiento de la onda propagándose.

### 1.2.1. La Ecuación de Movimiento.

Para la construcción de nuestro modelo seguiremos a [2] en donde el acercamiento que se le da al problema se basa en la conservación de volumen, relacionando el cambio de la altura de la intercara sobre su nivel de equilibrio y el flujo neto de adatoms sobre la superficie misma. La expresión para este flujo neto de partículas está basada en un hecho experimental y consiste en proponer que el flujo de adatoms es proporcional al Laplaciano de superficie del potencial eléctrico en la misma. Supongamos que tenemos una película delgada metálica y un campo eléctrico aplicado paralela a ésta. Supondremos por simplicidad que el campo eléctrico aplicado es lo suficientemente grande

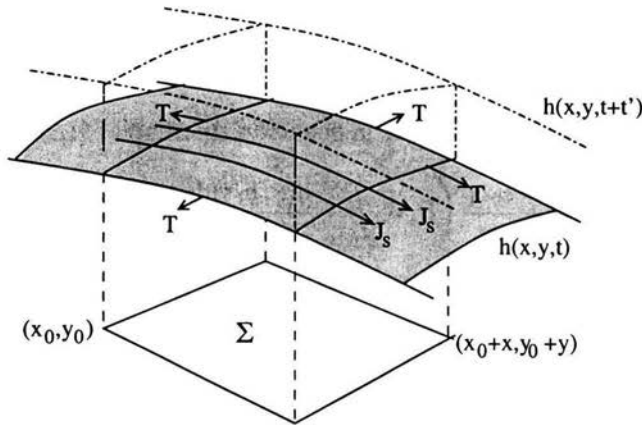


Figura 1.6: El cambio en el volumen de la superficie sobre una región  $\Sigma$  es igual al volumen ocupado por los átomos que migran hacia el elemento de superficie.  $J_s$  es el flujo de átomos (sobre la superficie) y  $T$  es el vector normal a la frontera de la región  $(\Sigma, h(\Sigma))$ .

para que los efectos de electromigración en la superficie sean mucho mayores que los efectos de capilaridad. Entonces, todo el movimiento de adatoms será sobre la superficie del conductor. Deduciremos así la ecuación de continuidad para este problema. Tomemos el volumen del conductor sobre su altura sin perturbar sobre una región  $\Sigma$  rectangular comprendida entre los punto  $(x_0, y_0)$  y  $(x_0 + x, y_0 + y)$  (se verá luego que el argumento puede ser extendido para una región  $\Sigma$  arbitraria), dicho volumen es entonces (ver Figura 1.6)

$$\iint_{\Sigma} h(\xi, \psi, t) d\xi d\psi,$$

donde  $h(x, y, t)$  es la altura de la superficie sobre su nivel de equilibrio. Ahora consideremos que la altura de la superficie cambia a una nueva altura  $h(x, y, t + t')$ , por conservación de volumen, el cambio en la altura de la superficie debe ser igual al volumen ocupado por la cantidad de partículas que entre (o salgan) del elemento de superficie. Denotamos por  $J_s(x, y, t)$  el flujo de partículas sobre la superficie y consideramos  $t'$  lo suficientemente pequeño para que el flujo  $J_s$  no cambie a lo largo de este tiempo. La cantidad de partículas que migran hacia la superficie está dada por

$$\int_{x_0}^{x_0+x} \left( J_s(\xi, y_0, t) \cdot \hat{T} - J_s(\xi, y_0 + y, t) \cdot \hat{T} \right) d\xi + \int_{y_0}^{y_0+y} \left( J_s(x_0, \psi, t) \cdot \hat{T} - J_s(x_0 + x, \psi, t) \cdot \hat{T} \right) d\psi,$$

con  $\hat{T}$  es el vector tangente a la superficie y normal a la frontera de la región  $(\Sigma, h(\Sigma))$ . Notamos que las integrales anteriores son el flujo neto de partículas que atraviesan la frontera (recordar que todo el flujo de partículas es sobre la superficie) de la región  $(\Sigma, h)$ . Utilizando el teorema de la divergencia podemos escribir dicho flujo como

$$\iint_{\Sigma} \nabla \cdot (J_s) dx dy$$

donde la divergencia debe ser tomada en un sistema de coordenadas sobre la superficie descrita por  $h(x, y, t)$ . Escribimos entonces la conservación de volumen de la siguiente manera

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} h(\xi, \psi, t) d\xi d\psi = -\Omega \iint_{\Sigma} \nabla \cdot (J_s) d\xi d\psi,$$

donde  $\Omega$  es el volumen medio de los átomos adsorbidos. Es un hecho experimental que este flujo de adatoms sobre la superficie es proporcional al campo eléctrico sobre la misma (lo cual proviene del hecho que se trata de una material óhmico) involucrando tanto la interacción de los adatoms con el campo eléctrico como la denominada “wind force”. Dado que el se trata del campo eléctrico sobre la superficie, la expresión para el flujo de partículas se escribe en términos del laplaciano de superficie (ver [2]). Escribimos entonces [8]

$$\begin{aligned} J_s &= -\nu q M \left( \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{g} [(1 + h_y^2) \partial_x - h_x h_y \partial_y] \Phi \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{g} [(1 + h_x^2) \partial_y - h_x h_y \partial_x] \Phi \right\} \right) \\ &= -\nu q M \sqrt{g} \nabla_S^2 \Phi(x, y, h(x, y, t)), \end{aligned}$$

donde  $\nu$  es la densidad por unidad de área de los átomos móviles en la superficie,  $q$  su carga eléctrica efectiva y  $M$  la movilidad de los adatoms; además  $\sqrt{g} = \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}$  y  $\Phi$  es el potencial eléctrico evaluado sobre

la superficie. Escribimos entonces la ecuación de conservación de volumen como

$$\iint_{\Sigma} (h_t - \Omega \nu q M \sqrt{g} \nabla_{\Sigma}^2 \Phi) = 0 \quad (1.22)$$

y dado que la superficie  $\Sigma$  fue arbitraria, la expresión anterior se expresa en forma diferencial como

$$h_t - \alpha \sqrt{g} \nabla_{\Sigma}^2 \Phi = 0, \quad (1.23)$$

donde

$$\alpha = q M \nu \Omega.$$

### 1.2.2. El Problema de Dos Conductores.

En esta sección consideraremos el problema de electromigración de superficie en la intercara de dos películas conductoras (ver Figura 1.7). Estas dos películas conductoras se hayan depositadas entre dos sustratos aislantes a alturas  $z = -h_1$  y  $z = h_2$ , siendo  $z = 0$  la altura de la intercara sin perturbar. Un campo eléctrico  $E_0$  se encuentra localizado en la región que comprende el conductor inferior, y será el responsable de la electromigración en la intercara.

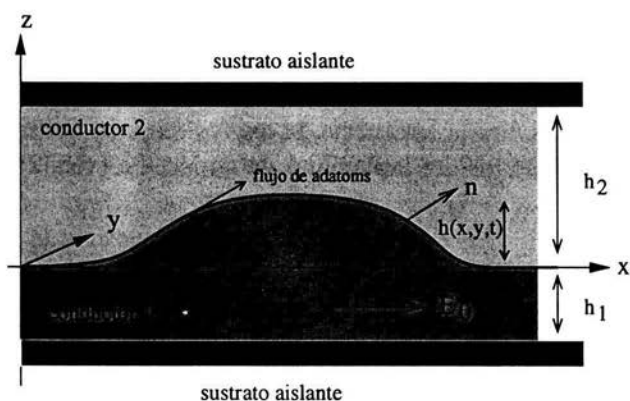


Figura 1.7: Perfil de dos películas conductoras formando una intercara. La altura de la intercara perturbada se denota por  $h(x, y, t)$ , y el vector normal unitario exterior a ésta  $n$ . Las películas están delimitadas por sustratos aislantes en  $z = -h_1$  la película inferior y  $z = h_2$  la película superior.

Pedimos entonces que el potencial eléctrico satisfaga la ecuación de Laplace en ambos conductores

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi_1 &= 0, & -h_1 < z < h \\ \nabla^2\Phi_2 &= 0, & h < z < h_2\end{aligned}$$

y que el potencial eléctrico sea continuo a través de la intercara. Imponemos como condiciones de frontera que no haya carga eléctrica depositada en la intercara entre conductor-aislante, así como tampoco en la intercara entre los materiales conductores, ya que en principio, toda la carga eléctrica en la intercara se encuentra migrando en los conductores. Formalmente esto se expresa como

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} &= 0, & \text{en } z = -h_1 \\ \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} &= 0, & \text{en } z = h_2\end{aligned}$$

para la intercara conductor-aislante. Para la intercara conductor-conductor el hecho que no haya carga eléctrica en la intercara se traduce en la continuidad del *desplazamiento eléctrico* a través de la intercara, es decir

$$\epsilon_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0, \quad \text{en } z = h, \quad (1.24)$$

donde  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$  representan las permitividades eléctricas del material inferior y superior respectivamente; el vector  $n$  es el vector normal exterior (del conductor inferior al superior) a la superficie, si ésta se escribe como  $(x, y, h(x, y, t))$ , entonces

$$n = \frac{1}{\sqrt{a + h_x^2 + h_y^2}}(-h_x, -h_y, 1). \quad (1.25)$$

Pediremos además que  $\epsilon_2 \ll \epsilon_1$ , esto para que los efectos del campo eléctrico aplicado sean prácticamente nulos en el conductor superior cuando la intercara se deforma y conocemos el comportamiento de una superficie libre al vacío ([1], [2]). Una condición de frontera más es que los potenciales eléctricos se anulen en infinito, esto es

$$\begin{aligned}\Phi_1 &\rightarrow -E_0x, & x &\rightarrow \pm\infty \\ \Phi_2 &\rightarrow 0 & x, &\rightarrow \pm\infty.\end{aligned}$$

Hacemos un escalamiento en el potencial eléctrico  $\Phi_1$  por comodidad. Sea entonces

$$\phi_1 = \Phi_1 + E_0 x.$$

Es claro que ahora  $\phi_1 \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , y para ser consistentes con la notación, hacemos  $\phi_2 = \Phi_2$ . Retomamos la ecuación (1.24) la cual se escribe como

$$\epsilon_1 (-h_x \Phi_{1x} - h_y \Phi_{1y} + \Phi_{1z}) - \epsilon_2 (-h_x \Phi_{2x} - h_y \Phi_{2y} + \Phi_{2z}) = 0.$$

Escribiendo la relación anterior en términos del potencial reescalado  $\phi$ , tenemos

$$\begin{aligned}\Phi_{1x} &= \phi_{1x} - E_0, \\ \Phi_{1y} &= \phi_{1y}, \\ \Phi_{1z} &= \phi_{1z}.\end{aligned}$$

Entonces la condición de frontera en la intercara es

$$\epsilon_1 (-h_x \phi_{1x} + h_x E_0 - h_y \phi_{1y} + \phi_{1z}) - \epsilon_2 (-h_x \phi_{2x} - h_y \phi_{2y} + \phi_{2z}) = 0.$$

Tomando únicamente los términos lineales de la relación anterior se obtiene

$$(\epsilon_1 \phi_{1z} - \epsilon_2 \phi_{2z}) \Big|_{z=0} = -\epsilon_1 E_0 h_x. \quad (1.26)$$

Sabemos de la teoría del electromagnetismo que en la intercara entre dos medios se deben satisfacer ciertas condiciones de frontera entre los campos eléctricos de ambos materiales. Una de ellas ha sido ya utilizada, y es que existe una discontinuidad en la componente normal del desplazamiento eléctrico de ambos materiales, la diferencia entre estas componentes normales es igual a la densidad de corriente eléctrica en la intercara. Esta propiedad fue utilizada suponiendo que la densidad de corriente eléctrica en la intercara es cero dado que todos los portadores de carga están migrando en ella. Existe otra relación que nos describe el comportamiento de los campos eléctricos en la intercara entre dos materiales, y es que la componente tangencial del campo eléctrico debe ser **continua** en la intercara, una representación esquemática de esto se muestra en la Figura 1.8.

La propiedad de continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico en la intercara se refiere a que cualquier dirección del campo eléctrico en el plano tangente a la intercara debe ser continua. Si tomamos una aproximación de primer orden para la intercara, esto es  $h \sim 0$ , tenemos que las direcciones tangenciales del campo eléctrico son

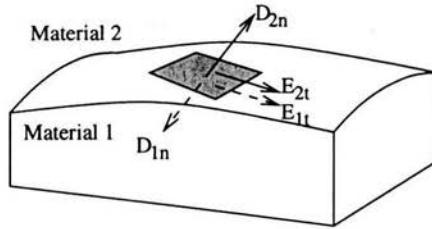


Figura 1.8: En la intercara entre dos materiales, el salto entre las componentes normales del desplazamiento eléctrico  $D_n$  es la densidad de carga en la superficie, mientras que las componentes tangenciales a la superficie  $E_t$  son continuas.

$$E_{ix} = \phi_{ix}, \quad E_{iy} = \phi_{iy}.$$

Estas componentes deben ser continuas a través de la intercara, por lo cual

$$\begin{aligned} \phi_{1x} &= \phi_{2x} = \phi_x, \\ \phi_{1y} &= \phi_{2y} = \phi_y. \end{aligned}$$

Ahora proponemos el modelo para la evolución de la intercara. En la sección anterior vimos que la evolución de la intercara está dada por el flujo neto de materia hacia el conductor, lo cual se expresaba mediante la ecuación (1.23), para la interacción entre dos conductores, proponemos el mismo modelo salvo que ahora la evolución de la intercara estará dada por el flujo neto de átomos en ambos conductores. Esto será la diferencia entre el arrastre de átomos en el conductor inferior y el arrastre de átomos en el conductor superior. Se presenta ahora un problema, dado que se trata de una intercara sólido-sólido, la acumulación o vaciamiento de materia debido al flujo de átomos ocasionado por la electromigración puede dar origen a fuerzas de tensión en la intercara que crean fuerzas de arrastre en dirección contraria al flujo atómico original. En este modelo relajamos este tipo de problemas pidiendo que cualquier acumulación o vaciamiento de materia en un lado de la intercara estará acompañado del efecto contrario en el lado opuesto. Además, para evitar que aparezcan lugares en la intercara en donde ya no se tenga un contacto directo de metal-metal sino que se forme un vacío así como cualquier fuerza en forma de tensión mecánica, proponemos que cualquier fuerza elástica en los materiales será compensada por el flujo de materia hacia los conductores. Por otro lado, suponemos que la única fuerza sobre los adatoms es aquella ocasionada por el campo eléctrico aplicado y no por



la fuerza de gravedad o efectos de capilaridad. De esta forma proponemos la ecuación de movimiento para la altura de la intercara como

$$h_t = \alpha_1 \sqrt{g} \nabla_S^2 \Phi_1 - \alpha_2 \sqrt{g} \nabla_S^2 \Phi_2, \quad (1.27)$$

donde las constantes  $\alpha_i$  están definidas como antes, es decir

$$\alpha_i = q_i M_i \nu_i \Omega_i$$

para ambos materiales, y

$$\begin{aligned} \nabla_S^2 \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \left( \partial_x \left\{ \frac{1}{\sqrt{g}} [(1 + h_y^2) \partial_x - h_x h_y \partial_y] \Phi \right\} \right. \\ \left. + \partial_y \left\{ \frac{1}{\sqrt{g}} [(1 + h_x^2) \partial_y - h_x h_y \partial_x] \Phi \right\} \right), \end{aligned} \quad (1.28)$$

con  $\sqrt{g} = \sqrt{1 + h_x^2 + h_y^2}$ . Resumiendo, tenemos que los potenciales en ambos conductores deben satisfacer la ecuación de Laplace con condición de Neuman en  $-h_1$  y  $h_2$  nula,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_1 &= 0, & -h_1 < z < h \\ \nabla^2 \phi_2 &= 0, & h < z < h_2 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= 0, & \text{en } z = -h_1 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial z} &= 0, & \text{en } z = h_2 \end{aligned}$$

y  $\phi_1(x, y, h) = \phi_2(x, y, h)$ . La continuidad del desplazamiento eléctrico en la intercara

$$\epsilon_1 (-h_x \phi_{1x} + h_x E_0 - h_y \phi_{1y} + \phi_{1z}) - \epsilon_2 (-h_x \phi_{2x} - h_y \phi_{2y} + \phi_{2z}) = 0.$$

y la ecuación de movimiento

$$h_t = \alpha_1 \sqrt{g} \nabla_S^2 \phi_1 - \alpha_2 \sqrt{g} \nabla_S^2 \phi_2.$$

Notamos que el problema a resolver es semejante al del fluido estratificado. Debemos resolver un problema de  $\nabla^2 f = 0$  en cierta región del espacio con condiciones de Neuman nulas en la frontera, pero las ecuaciones de intercara

son totalmente diferentes, hemos obtenido una relación  $h_t = \nabla^2 \phi$  en el caso de la electromigración mientras que para el problema de fluidos teníamos  $h_t = -\phi_z$ . La ecuación de Bernoulli se ve reemplazada por la condición de continuidad del desplazamiento eléctrico en la intercara. Veremos entonces cómo esta nueva situación cambia la relación de dispersión.

### 1.2.3. La Ecuación Bi-Dimensional de Benjamin-Ono.

Para encontrar la ecuación diferencial que ha de describir la evolución de la intercara y que dé, en principio, origen a solitones, realizaremos un procedimiento muy semejante al que se hizo para el caso del fluido estratificado. Resolveremos la ecuación de Laplace con condiciones de frontera aproximadas linealmente para el problema planteado, luego tomaremos la condición de frontera en la intercara y haremos un desarrollo en serie de Taylor para encontrar los términos no lineales de primer orden. Con un argumento muy semejante al realizado en el problema anterior, veremos que el orden de los términos no lineales es menor al término no lineal de la forma

$$\widehat{h} * \widehat{h}_x,$$

que es el término no lineal que estamos buscando. Tomamos entonces la transformada de Fourier de la ecuación de Laplace para obtener

$$\widehat{\phi}_{izz} - (k^2 + l^2)\widehat{\phi}_i = 0$$

donde

$$\widehat{\phi}(k, l, z, t) = \iint_{\mathbb{R}^2} \phi(x, y, z, t) e^{-i(kx+ly)} dx dy.$$

Separando variables

$$\widehat{\phi} = Q_i(z) f(k, l, t)$$

donde  $f$  es una función únicamente de  $(k, l)$  y el tiempo, obtenemos

$$Q_i''(z) - (k^2 + l^2)Q_i(z) = 0,$$

donde se ha eliminado la función  $f$ . Denotamos a  $\kappa^2 = k^2 + l^2$  y de la expresión anterior obtenemos que  $Q(z)$  tiene una solución de la forma

$$Q_i(z) = A \sinh \kappa z + B \cosh \kappa z,$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes a determinar. Para satisfacer las condiciones de frontera en la intercara como los aislantes tenemos que

$$Q_1'(z)|_{z=-h_1} = 0,$$

de donde

$$Q_1(z) = A_1 \cosh \kappa(z + h_1)$$

y

$$Q_2'(z)|_{z=h_2} = 0$$

luego entonces

$$Q_2(z) = A_2 \cosh \kappa(z - h_2).$$

Hemos obtenido que

$$\phi(x, y, z, t) = \begin{cases} A_1 \cosh \kappa(z + h_1) f(k, l), & -h_1 < z < h \\ A_2 \cosh \kappa(z - h_2) f(k, l), & h < z < h_2. \end{cases}$$

Si el potencial eléctrico es continuo en la intercara, obtenemos que a primera aproximación

$$A_1 \cosh \kappa h_1 = A_2 \cosh \kappa h_2,$$

donde se ha evaluado en  $z = 0$  (que es la aproximación a primer orden de  $h$ ). Ahora evaluamos la transformada de Fourier de la condición de frontera dada por la ecuación (1.26) y suponiendo que la transformada de Fourier de la altura de la intercara tiene la forma

$$\hat{h} = \hat{A} f(k, l, t)$$

encontramos

$$\begin{aligned} \epsilon_1 \widehat{\phi}_{1z} - \epsilon_2 \widehat{\phi}_{2z} &= \kappa (\epsilon_1 A_1 \sinh \kappa h_1 + \epsilon_2 A_2 \sinh \kappa h_2) f(k, l, t) \\ &= \kappa A_1 \left( \epsilon_1 \sinh \kappa h_1 + \epsilon_2 \frac{\cosh \kappa h_1}{\cosh \kappa h_2} \sinh \kappa h_2 \right) f(k, l, t) \\ &= \kappa A_1 (\epsilon_1 \sinh \kappa h_1 + \epsilon_2 \cosh \kappa h_1 \tanh \kappa h_2) f(k, l, t) \\ &= -\epsilon_1 E_0 (ik) \hat{h} \\ &= -ik \epsilon_1 E_0 \hat{A} f(k, l, t), \end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$A_1 = -\frac{ik\epsilon_1 E_0}{\kappa(\epsilon_1 \sinh\kappa h_1 + \epsilon_2 \cosh\kappa h_1 \tanh\kappa h_2)} \hat{A},$$

utilizando la condición de continuidad del potencial eléctrico encontramos

$$A_2 = -\frac{ik\epsilon_1 E_0}{\kappa(\epsilon_1 \cosh\kappa h_2 \tanh\kappa h_1 + \epsilon_2 \sinh\kappa h_2)} \hat{A}.$$

Los potenciales eléctricos tienen entonces la forma

$$\hat{\phi}_1 = -\frac{ik\epsilon_1 E_0}{\kappa(\epsilon_1 \sinh\kappa h_1 + \epsilon_2 \cosh\kappa h_1 \tanh\kappa h_2)} \hat{h} \cosh\kappa(z + h_1) \quad (1.29)$$

y

$$\hat{\phi}_2 = -\frac{ik\epsilon_1 E_0}{\kappa(\epsilon_1 \cosh\kappa h_2 \tanh\kappa h_1 + \epsilon_2 \sinh\kappa h_2)} \hat{h} \cosh\kappa(z - h_2). \quad (1.30)$$

### Término No Lineal.

En esta sección encontraremos el término no lineal que describe, a primer orden, el comportamiento de la altura de la intercara entre dos conductores. Para esto tomaremos la ecuación de continuidad del desplazamiento eléctrico en la intercara y desarrollaremos los términos involucrados a primer orden. Posteriormente supondremos que la transformada de Fourier de la altura de la intercara  $\hat{h}$  tiene soporte para números de onda pequeños, tal y como lo hicimos para el fluido estratificado, lo cual nos dará los órdenes de magnitud en los modos normales para los términos no lineales restantes. Tomando sólo aquellos que sean de primer orden encontraremos el término no lineal para la ecuación diferencial de la altura en la intercara.

Tenemos entonces la ecuación de continuidad en la intercara, y escribimos la dependencia explícita de las funciones respecto a sus variables, recordando que en la intercara  $z = h(x, y)$ ,

$$\epsilon_1 \frac{\partial \Phi_1(x, y, h)}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial \Phi_2(x, y, h)}{\partial n} = 0,$$

donde  $n$  es el vector normal unitario exterior a la intercara escrito como en (1.25). Escribimos las derivadas normales explícitamente como

$$\epsilon_1 (-\Phi_{1x} h_x - \Phi_{1y} h_y + \Phi_{1z}) - \epsilon_2 (-\Phi_{2x} h_x - \Phi_{2y} h_y + \Phi_{2z}) = 0.$$

Ahora hacemos el mismo reescalamiento que realizamos en las secciones anteriores del campo eléctrico  $\Phi_1$  como

$$\phi_1 = \Phi_1 + E_0 x$$

y también denotamos por comodidad  $\Phi_2 = \phi_2$ , de esta forma

$$\epsilon_1 (-\phi_{1x} h_x + E_0 h_x - \phi_{1y} h_y + \phi_{1z}) - \epsilon_2 (-\phi_{2x} h_x - \phi_{2y} h_y + \phi_{2z}) = 0. \quad (1.31)$$

Recordamos que el potencial eléctrico  $\phi$  está evaluado en  $z = h$ , por lo que desarrollaremos en serie de Taylor el potencial eléctrico cercano a  $h \sim 0$ , de forma tal que

$$\begin{aligned} \phi_{ix}(x, y, h) &\approx \phi_{ix}(x, y, 0) + \phi_{ixz}(x, y, 0)h, \\ \phi_{iy}(x, y, h) &\approx \phi_{iy}(x, y, 0) + \phi_{iyz}(x, y, 0)h, \\ \phi_{iz}(x, y, h) &\approx \phi_{iz}(x, y, 0) + \phi_{izz}(x, y, 0)h. \end{aligned}$$

Utilizamos estas expresiones en la relación (1.31) y después de acomodar términos obtenemos

$$\begin{aligned} \epsilon_1 E_0 h_x + (\epsilon_1 \phi_{1z} - \epsilon_2 \phi_{2z}) + h(\epsilon_1 \phi_{1zz} - \epsilon_2 \phi_{2zz}) - h_x(\epsilon_1 \phi_{1x} - \epsilon_2 \phi_{2x}) \\ - h h_x(\epsilon_1 \phi_{1xz} - \epsilon_2 \phi_{2xz}) - h_y(\epsilon_1 \phi_{1y} - \epsilon_2 \phi_{2y}) - h h_y(\epsilon_1 \phi_{1yz} - \epsilon_2 \phi_{2yz}) = 0, \end{aligned}$$

donde todos los términos están evaluados en  $z = 0$ . Tomamos la transformada de Fourier de la expresión anterior. Recordemos primero la propiedad de convolución de la transformada de Fourier, la cual nos dice que la transformada de Fourier de la multiplicación de dos funciones es la convolución de la transformada de Fourier de estas funciones, es decir

$$\mathcal{F}(h(x, y)g(x, y)) = \hat{h}(k, l) * \hat{g}(k, l) = \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{h}(k - u, l - w) \hat{g}(u, w) du dw.$$

De esta forma

$$\begin{aligned} \epsilon_1 E_0 \widehat{h}_x + (\epsilon_1 \widehat{\phi}_{1z} - \epsilon_2 \widehat{\phi}_{2z}) + \hat{h} * (\epsilon_1 \widehat{\phi}_{1zz} - \epsilon_2 \widehat{\phi}_{2zz}) \\ - \widehat{h}_x * (\epsilon_1 \widehat{\phi}_{1x} - \epsilon_2 \widehat{\phi}_{2x}) - \hat{h} * \widehat{h}_x * (\epsilon_1 \widehat{\phi}_{1xz} - \epsilon_2 \widehat{\phi}_{2xz}) \\ - \widehat{h}_y * (\epsilon_1 \widehat{\phi}_{1y} - \epsilon_2 \widehat{\phi}_{2y}) - \hat{h} * \widehat{h}_y * (\epsilon_1 \widehat{\phi}_{1yz} - \epsilon_2 \widehat{\phi}_{2yz}) = 0. \end{aligned}$$

Utilizando el hecho que el potencial eléctrico y sus derivadas en  $x$  y  $y$  son continuos a través de la intercara, podemos reescribir la expresión anterior como

$$\begin{aligned} & \epsilon_1 E_0 \widehat{h}_x + (\epsilon_1 \widehat{\phi}_{1z} - \epsilon_2 \widehat{\phi}_{2z}) + \hat{h} * (\epsilon_1 \widehat{\phi}_{1zz} - \epsilon_2 \widehat{\phi}_{2zz}) \\ & - (\epsilon_1 - \epsilon_2) \widehat{h}_x * (\widehat{\phi}_x) - \hat{h} * \widehat{h}_x * (\epsilon_1 \widehat{\phi}_{1xz} - \epsilon_2 \widehat{\phi}_{2xz}) \\ & - (\epsilon_1 - \epsilon_2) \widehat{h}_y * (\widehat{\phi}_y) - \hat{h} * \widehat{h}_y * (\epsilon_1 \widehat{\phi}_{1yz} - \epsilon_2 \widehat{\phi}_{2yz}) = 0, \end{aligned} \quad (1.32)$$

donde se ha denotado  $\phi_{1x} = \phi_{2x} = \phi_x$  y análogamente para  $\phi_y$ . Haremos ahora una aproximación de onda larga para  $\phi$ . De la expresión (1.29) evaluamos en  $z = 0$  y tenemos

$$\hat{\phi}(k, l, 0) = \frac{ik\epsilon_1 E_0}{\kappa(\epsilon_1 \tanh\kappa h_1 + \epsilon_2 \tanh\kappa h_2)} \hat{h}.$$

Analizamos el término

$$\frac{1}{\kappa(\epsilon_1 \tanh\kappa h_1 + \epsilon_2 \tanh\kappa h_2)},$$

el cual podemos escribir como

$$\frac{1}{\epsilon_1 \kappa \tanh\kappa h_1} \left( \frac{1}{1 + \frac{\epsilon_2 \tanh\kappa h_2}{\epsilon_1 \tanh\kappa h_1}} \right).$$

Utilizamos ahora la hipótesis que  $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \ll 1$  para desarrollar en serie de Taylor el término entre paréntesis como

$$\frac{1}{1 + \frac{\epsilon_2 \tanh\kappa h_2}{\epsilon_1 \tanh\kappa h_1}} \approx 1 - \frac{\epsilon_2 \tanh\kappa h_2}{\epsilon_1 \tanh\kappa h_1},$$

entonces podemos reescribir  $\phi$  como

$$\hat{\phi}(k, l, 0) \approx \frac{ikE_0}{\kappa \tanh\kappa h_1} \left( 1 - \frac{\epsilon_2 \tanh\kappa h_2}{\epsilon_1 \tanh\kappa h_1} \right) \hat{h}.$$

Ya que estudiaremos el comportamiento de  $\hat{\phi}$  en términos no lineales, tomaremos la aproximación a primer orden de la expresión anterior, esto ya que estamos interesados en los términos de primer orden que el efecto del conductor superior pueda contribuir a la onda; para los términos lineales sí tomaremos en cuenta los efectos del conductor superior y obtendremos así la relación de dispersión deseada. Aproximamos  $\phi$  evaluado en la intercara como

$$\hat{\phi}(k, l, 0) \approx \frac{ikE_0}{\kappa \tanh \kappa h_1} \hat{h}$$

Tomamos en la expresión anterior el límite cuando  $(k, l) \sim (0, 0)$  para obtener

$$\hat{\phi}(k, l, 0) \approx \frac{ikE_0}{\kappa^2 h_1} \hat{h}. \quad (1.33)$$

Supondremos ahora que  $\hat{h}$  tiene soporte sólo para números de onda pequeños, esto es  $(k, l) \sim (0, 0)$ . Sea entonces  $\hat{h}$  tal que tenga soporte para un círculo de radio  $\epsilon$ . Calcularemos el orden de magnitud para los términos no lineales de (1.32), comenzamos por el término

$$\widehat{h_x} * \widehat{\phi_x},$$

de la relación (1.33) podemos escribir

$$\widehat{\phi_x} \approx \frac{-k^2 E_0}{\kappa^2 h_1} \hat{h}.$$

Si la onda se propaga en el eje  $x$  tenemos que  $k \gg l$  por lo cual  $\kappa^2 \approx k^2$  por lo tanto

$$\widehat{\phi_x} \approx -\frac{E_0}{h_1} \hat{h},$$

por lo que

$$\widehat{h_x} * \widehat{\phi_x} \approx -\frac{E_0}{h_1} \widehat{h_x} * \hat{h}$$

que es el término no lineal que estamos buscando. Calculamos ahora el orden de magnitud de este término, recordando que  $\hat{h}$  tiene soporte para  $\kappa < \epsilon$ , entonces

$$\begin{aligned} \hat{h} * \widehat{h_x} &= \iint_{\mathbb{R}^2} i(k-u) \hat{h}(k-u, w-l) \hat{h}(u, w) dudw \\ &\approx \iint_{-\epsilon}^{\epsilon} i(k-u) \hat{h}(k, l) \widehat{h}(0, 0) dudw \\ &\sim O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Calculamos ahora el término

$$\hat{h} * (\epsilon_1 \widehat{\phi_{1zz}} - \epsilon_2 \widehat{\phi_{2zz}}).$$

Utilizamos el hecho que los potenciales eléctricos deben satisfacer la ecuación de Laplace para escribir

$$\begin{aligned} \hat{h} * (\epsilon_1 \widehat{\phi_{1zz}} - \epsilon_2 \widehat{\phi_{2zz}}) &= -\hat{h} * (\epsilon_1 (\widehat{\phi_{1xx}} + \widehat{\phi_{1yy}}) - \epsilon_2 (\widehat{\phi_{2xx}} + \widehat{\phi_{2yy}})) \\ &= -(\epsilon_1 - \epsilon_2) \hat{h} * (\kappa^2 \hat{\phi}). \end{aligned}$$

Recobramos la expresión (1.33) y notamos que

$$\kappa^2 \hat{\phi} \approx \frac{-\kappa^2 E_0}{\kappa^2 h_1} \widehat{h}_x,$$

por lo que obtenemos

$$\hat{h} * (\epsilon_1 \widehat{\phi_{1zz}} - \epsilon_2 \widehat{\phi_{2zz}}) \approx (\epsilon_1 - \epsilon_2) \frac{E_0}{h_1} \hat{h} * \widehat{h}_x,$$

que es nuevamente el término no lineal que estamos buscando. Estudiamos ahora los demás términos no lineales y veremos que tienen órdenes en  $\epsilon$  más grandes que el término no lineal anterior. Calculamos ahora el orden de magnitud de

$$\begin{aligned} \hat{h} * \widehat{h}_x * (\epsilon_1 \widehat{\phi_{1xz}} - \epsilon_2 \widehat{\phi_{2xz}}) &= \hat{h} * \widehat{h}_x * (\epsilon_1 i k \widehat{\phi_{1z}} - \epsilon_2 i k \widehat{\phi_{2z}}) \\ &\approx -\epsilon_1 E_0 \hat{h} * \widehat{h}_x * (k^2 \hat{h}), \end{aligned}$$

donde se ha utilizado ahora la aproximación lineal de la condición de frontera en la intercara. Escribimos la integral explícitamente para encontrar que

$$\begin{aligned} \hat{h} * \widehat{h}_x * (k^2 \hat{h}) &= \hat{h}_x * \iint_{\mathbb{R}^2} u^2 \hat{h}(k-u, w-l) \hat{h}(u, w) ddw \\ &\approx \hat{h}_x * \iint_{-\epsilon}^{\epsilon} u^2 \hat{h}(k, l) \hat{h}(0, 0) ddw \\ &\sim \epsilon^4 \hat{h}(0, 0) \iint_{\mathbb{R}^2} i(k-\tau) \hat{h}(k-\tau, l-\theta) \hat{h}(\tau, \theta) d\tau d\theta \\ &\approx \epsilon^4 \hat{h}(0, 0) \iint_{-\epsilon}^{\epsilon} i(k-\tau) \hat{h}(k, l) \hat{h}(0, 0) d\tau d\theta \\ &\sim O(\epsilon^6). \end{aligned}$$



Seguimos con el término

$$\widehat{h}_y * (\epsilon_1 \widehat{\phi}_{1y} - \epsilon_2 \widehat{\phi}_{2y}) = (\epsilon_1 - \epsilon_2) \widehat{h}_y * \widehat{\phi}_y.$$

En la expresión anterior se ha utilizado la continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico. Escribimos la integral de convolución explícitamente utilizando la aproximación

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_y &\approx -\frac{lkE_0}{\kappa^2 h_1} \hat{h} \\ &\approx -\frac{l}{k} \frac{E_0}{h_1} \hat{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{h}_y * \widehat{\phi}_y &= -\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{w}{u} (l-w) \hat{h}(k-u, l-w) \hat{h}(u, w) dudw \\ &\sim -\iint_{-\epsilon}^{\epsilon} \frac{w}{u} (l-w) \hat{h}(k, l) \hat{h}(0, 0) dudw \\ &\sim O(\epsilon^3 \ln \epsilon). \end{aligned}$$

Finalmente tenemos el término

$$\begin{aligned} \hat{h} * \widehat{h}_y * (\epsilon_1 \widehat{\phi}_{1yz} - \epsilon_2 \widehat{\phi}_{2yz}) &= \hat{h} * \widehat{h}_y * (\epsilon_1 i l \widehat{\phi}_{1z} - \epsilon_2 i l \widehat{\phi}_{2z}) \\ &\approx -\epsilon_1 E_0 \hat{h} * \widehat{h}_y * (kl\hat{h}), \end{aligned}$$

en esta expresión se ha utilizado nuevamente la aproximación lineal para la condición de frontera en la intercara. Escribimos entonces

$$\begin{aligned} \hat{h} * \widehat{h}_y * (kl\hat{h}) &= \hat{h} * \iint_{\mathbb{R}^2} i(w-l)uw \hat{h}(k-u, l-w) \hat{h}(u, w) dudw \\ &\approx \hat{h} * \iint_{-\epsilon}^{\epsilon} i(w-l)uw \hat{h}(k, l) \hat{h}(0, 0) dudw \\ &\sim \epsilon^5 \hat{h}(0, 0) \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{h}(k-\tau, l-\theta) \hat{h}(\tau, \theta) d\tau d\theta \\ &\approx \epsilon^5 \hat{h}(0, 0) \iint_{-\epsilon}^{\epsilon} \hat{h}(k, l) \hat{h}(0, 0) d\tau d\theta \\ &\sim O(\epsilon^7). \end{aligned}$$

Hemos mostrado que a primer orden, la condición de frontera en la intercara se puede escribir como

$$\epsilon_1 E_0 \widehat{h}_x + (\epsilon_1 \widehat{\phi}_{1z} - \epsilon_2 \widehat{\phi}_{2z}) + 2 \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2) E_0}{h_1} \widehat{h} * \widehat{h}_x = 0. \quad (1.35)$$

### Límite para una Capa de Altura Infinita.

De la misma forma en que hicimos para el caso del fluido estratificado, tomaremos ahora el límite en el cual la altura de la película superior crece a infinito pero conservando la proporción de onda corta con el número de onda  $k$ , es decir, tomamos el límite en el cual  $kh_2 \rightarrow \infty$ , y tomando en cuenta que la onda se propagará en el eje  $x$  (dado que en esa dirección se encuentra el campo eléctrico y hacia allá migrarán los átomos). Escribimos la ecuación de movimiento aproximada linealmente

$$h_t = \alpha_1(\phi_{1xx} + \phi_{1yy}) - \alpha_2(\phi_{2xx} + \phi_{2yy}),$$

donde los potenciales están evaluados en  $z = 0$ . Tomando la transformada de Fourier de la expresión anterior

$$\widehat{h}_t = (\alpha_1 - \alpha_2)(-\kappa^2)\widehat{\phi},$$

donde se ha utilizado la condición de continuidad del potencial eléctrico en  $z = 0$  para escribir  $\widehat{\phi}_1(z = 0) = \widehat{\phi}_2(z = 0) = \widehat{\phi}$ . Recobramos la expresión (1.29) encontrada anteriormente

$$\widehat{\phi}_1 = -\frac{ik\epsilon_1 E_0}{\kappa(\epsilon_1 \sinh \kappa h_1 + \epsilon_2 \cosh \kappa h_1 \tanh \kappa h_2)} \widehat{h} \cosh \kappa h_1$$

evaluando en  $z = 0$ . Podemos reescribir esta relación en términos de  $\phi_z$  como

$$\widehat{\phi}_1 = -\frac{\epsilon_1 \widehat{\phi}_{1z} - \epsilon_2 \widehat{\phi}_{2z}}{\kappa(\epsilon_1 \sinh \kappa h_1 + \epsilon_2 \cosh \kappa h_1 \tanh \kappa h_2)} \cosh \kappa h_1,$$

recuperando la expresión (1.35) podemos escribir la ecuación de movimiento como

$$\widehat{h}_t = (\alpha_1 - \alpha_2)(\kappa^2) \frac{-\epsilon_1 E_0 \widehat{h}_x - c_0 \widehat{h} * \widehat{h}_x}{\kappa(\epsilon_1 \sinh \kappa h_1 + \epsilon_2 \cosh \kappa h_1 \tanh \kappa h_2)} \cosh \kappa h_1$$

con

$$c_0 = 2 \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2) E_0}{h_1}.$$

De esta forma obtenemos

$$\begin{aligned}\widehat{h}_t = & -(\alpha_1 - \alpha_2)\epsilon_1 E_0 \frac{\kappa}{(\epsilon_1 \tanh \kappa h_1 + \epsilon_2 \tanh \kappa h_2)} \widehat{h}_x \\ & - c_0(\alpha_1 - \alpha_2) \frac{\kappa}{(\epsilon_1 \tanh \kappa h_1 + \epsilon_2 \tanh \kappa h_2)} \widehat{h} * \widehat{h}_x.\end{aligned}\quad (1.36)$$

Nuevamente tomamos el desarrollo en serie de Taylor para  $\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \ll 1$  en el coeficiente del término no lineal,

$$\begin{aligned}\widehat{h}_t = & -(\alpha_1 - \alpha_2)\epsilon_1 E_0 \frac{\kappa}{(\epsilon_1 \tanh \kappa h_1 + \epsilon_2 \tanh \kappa h_2)} \widehat{h}_x \\ & - c_0(\alpha_1 - \alpha_2) \frac{\kappa}{\epsilon_1 \tanh \kappa h_1} \left(1 - \frac{\epsilon_2 \tanh \kappa h_2}{\epsilon_1 \tanh \kappa h_1}\right) \widehat{h} * \widehat{h}_x\end{aligned}$$

y consideramos sólo la aproximación a primer orden de este coeficiente ya que estamos interesados en los efectos que a primer orden tenga el conductor superior en el rompimiento de la onda, por lo cual escribimos

$$\begin{aligned}\widehat{h}_t \approx & -(\alpha_1 - \alpha_2)\epsilon_1 E_0 \frac{\kappa}{(\epsilon_1 \tanh \kappa h_1 + \epsilon_2 \tanh \kappa h_2)} \widehat{h}_x \\ & - c_0(\alpha_1 - \alpha_2) \frac{\kappa}{\epsilon_1 \tanh \kappa h_1} \widehat{h} * \widehat{h}_x\end{aligned}\quad (1.37)$$

Para el coeficiente del término lineal obtendremos la relación de dispersión del problema, tomaremos el límite cuando  $kh_2 \rightarrow \infty$  tal y como hicimos en el problema del fluido estratificado; notamos que si la onda se propaga en la dirección  $x$ , a primera aproximación

$$\tanh \alpha h_2 = \tanh kh_2 \sqrt{1 + \frac{l^2}{k^2}} \approx \tanh kh_2$$

y por lo tanto

$$\lim_{kh_2 \rightarrow \infty} \tanh kh_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } k > 0 \\ -1 & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Llamamos ahora

$$W = \frac{\kappa}{(\epsilon_1 \tanh \kappa h_1 + \epsilon_2 \tanh \kappa h_2)}.$$

Escribimos, en el límite cuando  $kh_2 \rightarrow \infty$

$$W = \frac{1}{\epsilon_1 \frac{\tanh \kappa h_1}{\kappa} + \epsilon_2 \frac{1}{|k| \sqrt{1 + \frac{l^2}{k^2}}}}.$$

Ahora tomamos el límite de onda larga para la capa inferior, es decir, tomamos el límite cuando  $\kappa h_1 \rightarrow 0$ , en ese caso

$$\tanh \kappa h_1 \approx \kappa h_1,$$

para obtener

$$W = \frac{1}{\epsilon_1 h_1 + \epsilon_2 \frac{1}{|k| \sqrt{1 + \frac{l^2}{k^2}}}}$$

y podemos reescribimos la expresión anterior como

$$W = \frac{1}{\epsilon_1 h_1} \frac{1}{1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{1}{h_1 |k| \sqrt{1 + \frac{l^2}{k^2}}}},$$

para observar que el término  $\frac{1}{h_1 |k| \sqrt{1 + \frac{l^2}{k^2}}}$  será muy grande comparado con 1 si la altura de la capa inferior es sumamente pequeña (que es el caso en el cual experimentalmente se observa la electromigración de superficie). De esta forma,  $W$  se puede escribir como

$$W = \frac{1}{\epsilon_2} |k| \sqrt{1 + \frac{l^2}{k^2}}$$

y tomamos la aproximación a primer orden para la raíz cuadrado para obtener

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\epsilon_2} |k| \left( 1 + \frac{l^2}{2k^2} \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon_2} \left( |k| + \frac{l^2}{2|k|} \right). \end{aligned}$$

Ahora reescalamos el número de onda en  $y$  como  $m^2 = l^2/2|k|$  para obtener finalmente la relación de dispersión en el límite en el que la capa superior es infinita

$$W = \frac{1}{\epsilon_2} (|k| + m^2). \tag{1.38}$$

Así, podemos reescribir la ecuación (1.37), tomando el límite de onda larga  $\kappa \sim 0$  en el coeficiente del término no lineal, como

$$\widehat{h}_t + (\alpha_1 - \alpha_2)E_0 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (|k| + m^2) \widehat{h}_x + \frac{c_0(\alpha_1 - \alpha_2)}{\epsilon_1 h_1} \widehat{h} * \widehat{h}_x = 0.$$

De igual forma que en el caso del fluido estratificado, tomando la transformada de Fourier inversa de la ecuación anterior resulta que

$$h_t + c_2 h h_x + c_1 \left( \frac{1}{\pi} \left( \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi, y, t) d\xi}{\xi - x} \right)_{xx} + h_{xyy} \right) = 0,$$

donde

$$c_1 = (\alpha_1 - \alpha_2)E_0 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2},$$

$$c_2 = \frac{c_0(\alpha_1 - \alpha_2)}{\epsilon_1 h_1}$$

con

$$c_0 = 2 \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)E_0}{h_1}.$$

Hacemos el cambio de variable

$$\psi = \sqrt{c_1} y$$

de la regla de la cadena se sigue que

$$\frac{\partial^2}{\partial \psi^2} = c_1 \frac{\partial}{\partial y^2}$$

y

$$h_t + c_2 h h_x + \frac{c_1}{\pi} \left( \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi, y, t) d\xi}{\xi - x} \right)_{xx} + h_{x\psi\psi} = 0.$$

Esta es la misma ecuación diferencial que obtuvimos en el problema del fluido estratificado, y la reescribiremos utilizando la denotación original de variables como

$$h_t + \beta h h_x + \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\zeta, y, t) d\zeta}{\zeta - x} \right)_{xx} + h_{xyy} = 0 \quad (1.39)$$

que es la **Ecuación bi-dimensional de Benjamin-Ono**. Podemos calcular la corrección en el término no lineal cuando se utiliza la aproximación a segundo orden de la expresión

$$\begin{aligned} \widehat{h}_t = & -(\alpha_1 - \alpha_2)\epsilon_1 E_0 \frac{\kappa}{(\epsilon_1 \tanh \kappa h_1 + \epsilon_2 \tanh \kappa h_2)} \widehat{h}_x \\ & - c_0(\alpha_1 - \alpha_2) \frac{\kappa}{\epsilon_1 \tanh \kappa h_1} \left( 1 - \frac{\epsilon_2 \tanh \kappa h_2}{\epsilon_1 \tanh \kappa h_1} \right) \widehat{h} * \widehat{h}_x. \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando  $\kappa h_2 \rightarrow \infty$  y posteriormente el límite de onda larga  $\kappa \rightarrow 0$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \widehat{h}_t = & -(\alpha_1 - \alpha_2)E_0 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (|k| + m^2) \widehat{h}_x \\ & - \frac{c_0(\alpha_1 - \alpha_2)}{\epsilon_1 h_1} \left( 1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{1}{|k| \sqrt{1 + \frac{l^2}{k^2}}} \right) \widehat{h} * \widehat{h}_x. \end{aligned} \quad (1.40)$$

En el límite  $l^2/k^2 \ll 1$  podemos aproximar la expresión anterior como

$$\begin{aligned} \widehat{h}_t = & -(\alpha_1 - \alpha_2)E_0 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (|k| + m^2) \widehat{h}_x \\ & - \frac{c_0(\alpha_1 - \alpha_2)}{\epsilon_1 h_1} \left( 1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{1 - \frac{1}{2} \frac{l^2}{k^2}}{|k|} \right) \widehat{h} * \widehat{h}_x. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Reescalando nuevamente el número de onda en  $y$  como  $m^2 = \frac{1}{2} \frac{l^2}{|k|}$  tenemos

$$\begin{aligned} \widehat{h}_t = & -(\alpha_1 - \alpha_2)E_0 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (|k| + m^2) \widehat{h}_x \\ & - \frac{c_0(\alpha_1 - \alpha_2)}{\epsilon_1 h_1} \left( 1 - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{1}{|k|} \left( 1 - \frac{m^2}{|k|} \right) \right) \widehat{h} * \widehat{h}_x \end{aligned} \quad (1.42)$$

que es la corrección a segundo orden para el término no lineal. La ecuación anterior se puede utilizar para estudiar el efecto de perturbaciones en las estructuras coherentes que se propagan en la intercara entre los conductores tomando en cuenta las correcciones de segundo orden de los efectos no lineales del modelo. Hemos pues deducido la ecuación bi-dimensional de Benjamin-Ono a partir de dos problemas físicos. Primero se dedujo esta

ecuación del problema de propagación de ondas en un fluido estratificado, este análisis es muy semejante al análisis en una dimensión y que da origen a la ecuación de Benjamin-Ono. Posteriormente se estudió el problema de electromigración de superficie en la intercara entre dos películas conductoras, mediante argumentos análogos a aquellos realizados para el problema del fluido estratificado se concluyó que la ecuación que modela la altura de la intercara es la misma en ambos problemas salvo por un término lineal en la relación de dispersión que no se obtiene en el problema de electromigración de superficie. En los capítulos siguientes estudiaremos la propagación de estructuras coherentes de la ecuación (1.39). Para esto propondremos una función de prueba candidata a solitón que se propague modificando sus parámetros pero conservando su forma, encontraremos así la evolución en el tiempo de estos parámetros buscando los puntos de equilibrio que den origen a solitones.

## Capítulo 2

# Estudio de Solitones en la Ecuación Bi-Dimensional de Benjamin-Ono.

En este capítulo estudiaremos las soluciones de la ecuación de Benjamin-Ono en dos dimensiones, encontrada en el capítulo anterior, escrita de la forma

$$u_t + \beta uu_x + \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right)_{xx} + u_{xyy} = 0. \quad (2.1)$$

La ecuación anterior es un análogo en dos dimensiones de la ecuación de Benjamin-Ono en una dimensión, presentada en el capítulo anterior, la cual sabemos tiene una solución exacta en forma de onda localizada que se propaga con un perfil permanente tipo solitón. Por otro lado, la ecuación (2.1) es semejante a la ecuación de ZK

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0$$

salvo por el término dispersivo de Benjamin-Ono en la dirección  $x$ . La ecuación de ZK ha sido estudiada previamente [9] y aunque no se conoce solución exacta, posee estructuras coherentes en forma de solitones. En efecto, si se escoge como condición inicial una función de la forma

$$u(x, y, 0) = Ae^{-\sigma^2(x^2+y^2)}$$

ésta evoluciona en el tiempo modificando sus parámetros (la amplitud, el ancho de la gaussiana y su velocidad) pero conservando su perfil de onda



localizada. Este resultado será retomado más adelante para estudiar las soluciones a la ecuación (2.1).

Dado que no conocemos una solución exacta a la ecuación bi-dimensional de Benjamin-Ono, debemos escoger una función de prueba como condición inicial para estudiar su evolución en el tiempo, esperando que esta conserve una estructura de onda localizada. Para la elección de la función de prueba buscaremos soluciones que se propaguen con forma de onda permanente, esto nos dará una forma con menos grados de libertad de la ecuación (2.1), para la cual estudiaremos la forma variacional, esto con el propósito de buscar extremos de la acción respecto a los parámetros libres de la función de prueba y así encontrar los puntos de equilibrio para los cuales esta función es más estable. Posteriormente demostraremos ciertas leyes de conservación que debe satisfacer una solución a la ecuación y que nos permitirán, en el capítulo siguiente, encontrar relaciones analíticas para la evolución de una condición inicial con la forma de la función de prueba escogida. Por último, con base en los resultados numéricos, veremos que cuando se deja evolucionar una condición inicial bajo la ecuación anterior, esta tiende a los puntos de equilibrio cediendo masa en forma de radiación la cual tiene una amplitud mucho menor que la onda principal. Esta radiación no se encuentra en todo el espacio sino que se encuentra confinada en un lugar geométrico determinado; mediante un argumento de fase estacionaria, encontraremos esta región del espacio y su evolución en el tiempo, llamada la *cáustica* de la radiación.

## 2.1. El Problema de Ondas de Forma Permanente.

En primer lugar buscamos soluciones de forma permanente para la ecuación (2.1) que viajen en la dirección  $x$  con velocidad  $c$ , lo anterior lo podemos escribir de la siguiente forma, si (2.1) tiene una solución  $u(x, y, t)$  entonces esta solución puede ser escrita como

$$u(x, y, t) = u(x - ct, y) = u(\theta, y).$$

Hacemos ahora el cambio de variable  $\theta = x - ct$ , Utilizando la regla de la cadena tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial \theta},$$

entonces la ecuación (2.1) toma la forma

$$-cu_\theta + \beta uu_\theta + \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y)}{\xi - (\theta + ct)} d\xi \right)_{\theta\theta} + u_{\theta yy} = 0.$$

Para el término

$$\left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y)}{\xi - (\theta + ct)} d\xi \right)$$

hacemos el cambio de variable  $v = \xi - ct$ , por lo tanto  $d\xi = dv$  y los límites de integración serán  $v = -\infty - ct$  el inferior y  $v = \infty - ct$  el superior; si la función  $u$  se anula a cero en  $\pm\infty$ , entonces la forma del término dispersivo no cambia y conserva su forma

$$\left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(v, y)}{v - \theta} dv \right).$$

Es claro que ahora podemos reescribir la ecuación (2.1), para esta solución que se propaga con velocidad constante, como

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( -cu + \frac{\beta}{2}u^2 + \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right)_{\theta} + u_{yy} \right) = 0,$$

la cual podemos integrar una vez para obtener

$$\left( -cu + \frac{\beta}{2}u^2 + \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right)_{\theta} + u_{yy} \right) = A(y),$$

donde  $A(y)$  es una función que depende únicamente de  $y$ . Ahora, si la función  $u$  se anula cuando  $(\theta, y) \rightarrow \pm\infty$ , entonces  $A(y)$  debe ser idénticamente cero. Ahora encontraremos una forma variacional para la ecuación

$$cu - \frac{1}{2}u^2 - \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right)_{\theta} - u_{yy} = 0. \quad (2.2)$$

Sabemos del cálculo de variaciones que un funcional de la forma

$$J(u) = \int \int_{\Omega} F(x, y, u(x, y), u_x, u_y) dx dy,$$

donde  $F$  es la *lagrangiana* del sistema, tiene una ecuación de Euler-Lagrange [10]

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) = 0 \quad (2.3)$$

en la región  $\Omega$ . Cabe mencionar que esta ecuación de Euler-Lagrange se debe satisfacer si  $u(x, y)$  es un punto crítico del funcional  $J(u)$ <sup>1</sup> y se obtiene tomando la *Derivada de Gateaux* del funcional [10]. Para la ecuación (2.2)  $\Omega = \mathbb{R}^2$ , es claro entonces que el término  $cu - \frac{1}{2}u^2 - u_{yy}$  tiene una lagrangiana  $F$

$$F = \frac{c}{2}u^2 - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{2}u_y^2.$$

Utilizando la ecuación (2.3) es fácil ver que la lagrangiana anterior da como resultado los términos correspondientes a la ecuación (2.2) salvo por el término de Benjamin-Ono. Cabe hacer notar que la derivada de Gateaux es un operador lineal, por lo que basta sumar la forma funcional correspondiente a este término al lagrangiano anterior para obtener la forma funcional completa. Encontramos ahora la forma variacional del término dispersivo de Benjamin-Ono como sigue

$$L(x, y, u, u_\theta, u_y) = \frac{\alpha}{2}u_\theta \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right). \quad (2.4)$$

La motivación para proponer una forma variacional de este tipo es la siguiente. Dadas las propiedades de la transformada de Fourier (en concreto la relación de Parseval), sabemos que la acción de un funcional cuadrático debe ser la misma que la acción de la transformada de Fourier del funcional esto es

$$\iint_{\mathbb{R}^2} L(u, u_x, u_y) dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathcal{F}(L(u, u_x, u_y)) dk dl,$$

donde  $\mathcal{F}(u(x, y)) = \hat{u}(k, l)$  denota la transformada de Fourier de la función  $u$ . Entonces, tomamos la transformada de Fourier del término dispersivo de Benjamin-Ono

$$\mathcal{F} \left( \left( \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right)_\theta \right) = |k| \hat{u}(k, l).$$

La forma variacional de este término es

$$J(\hat{u}) = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{|k|}{2} |\hat{u}|^2 dk dl,$$

donde  $|\hat{u}|^2$  denota el cuadrado de la norma de la función  $\hat{u}$ , es decir  $\hat{u}\hat{u}^*$  (recordar que la transformada de Fourier de una función es una función

---

<sup>1</sup>Para garantizar que  $u$  sea un mínimo se debe estudiar la segunda variación del funcional.

de variable compleja). De la forma variacional anterior notamos que tenemos el término  $|k| = k \operatorname{sgn} k$ ; si reescribimos la relación anterior en término nuevamente de la función  $u$ , tomando la transformada de Fourier inversa, obtendremos la transformada de Hilbert de la función  $u$  del término  $\operatorname{sgn} k$ , y una derivada en  $\theta$  del término  $k$ .

Mostraremos ahora que al tomar la derivada de Gateaux para el funcional correspondiente al término (2.4) efectivamente obtenemos el término dispersivo de Benjamin-Ono como en la ecuación (2.2). Tenemos entonces que tomar la derivada de Gateaux del funcional

$$J(u) = \frac{\alpha}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_{\theta} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right) d\theta dy.$$

La derivada de Gateaux de un funcional  $J(u)$  se define como

$$D_h(u_0) = \frac{d}{dt} (J(u_0 + th)) \Big|_{t=0}.$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned} D_h(J(u)) &= \frac{d}{dt} (J(u + th)) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} (u + th)_{\theta} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(u(\xi, y) + th(\xi, y))}{\xi - \theta} d\xi \right) d\theta dy \right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\alpha}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{d}{dt} \left( u_{\theta} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right) \right. \\ &\quad + tu_{\theta} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right) \\ &\quad + th_{\theta} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right) \\ &\quad \left. + t^2 h_{\theta} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right) \right) \Big|_{t=0} d\theta dy, \end{aligned}$$

derivando y evaluando en  $t = 0$  obtenemos

$$\begin{aligned} D_h J(u) &= \frac{\alpha}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} \left( u_{\theta} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right) \right. \\ &\quad \left. + h_{\theta} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right) \right) d\theta dy. \end{aligned}$$

Estudiamos el término

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_{\theta} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right) d\theta,$$

dato que la variable  $y$  no interviene en la integral omitiremos su dependencia para simplificar la notación así como la notación P.V. para denotar el valor principal de la integral. Hacemos entonces el cambio de variable  $v = \xi - \theta$  y sustituimos en la integral con respecto a  $\xi$  el término  $u_{\theta}(\theta)$ , tenemos así

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u_{\theta} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right) d\theta &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{u(\theta)}{v} \right]_{\theta} h(v + \theta) dv d\theta \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\theta)}{v} h_{\theta}(v + \theta) d\theta dv, \end{aligned}$$

donde se ha invertido el orden de integración y se ha integrado por partes una vez. Haciendo ahora  $w = v + \theta$  tenemos

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\theta)}{v} h_{\theta}(v + \theta) d\theta dv &= - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(w - v)}{v} h_w(w) dw dv \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} h_w(w) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(w - v)}{v} dv dw. \end{aligned}$$

invirtiendo nuevamente el orden de integración. Nuevamente hacemos un cambio de variable  $z = w - v$ , de forma tal que obtenemos

$$\begin{aligned} - \int_{-\infty}^{\infty} h_w(w) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(w - v)}{v} dv dw &= - \int_{-\infty}^{\infty} h_w(w) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(z)}{z - w} dz dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_w(w) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(z)}{w - z} dz dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h_{\theta}(\theta) \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)}{\xi - \theta} d\xi \right) d\theta. \end{aligned}$$

En la expresión anterior se ha retomado la notación original de las variables  $w = \theta$  y  $z = \xi$  por comodidad y hemos escrito nuevamente el valor principal explícitamente. Tenemos entonces que la suma de términos es

$$\begin{aligned}
 D_h J(u) &= \frac{\alpha}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} \left( u_\theta \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right) \right. \\
 &\quad \left. + h_\theta \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right) \right) d\theta dy \\
 &= \alpha \iint_{\mathbb{R}^2} h_\theta \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right) d\theta dy \\
 &= -\alpha \iint_{\mathbb{R}^2} h \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right)_\theta d\theta dy
 \end{aligned}$$

integrando una vez por partes respecto a  $\theta$ . Notamos ahora que si  $D_h J(u) = 0$  para toda función  $h$ , utilizando el lema de Haar, obtenemos el término de dispersión de Benjamin-Ono buscado:

$$\left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right)_\theta = 0.$$

Tenemos entonces que el funcional para la ecuación (2.2) es

$$J(u) = \iint_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{c}{2} u^2 - \frac{\beta}{6} u^3 + \frac{1}{2} u_y^2 + \frac{\alpha}{2} u_\theta \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right) \right) d\theta dy. \quad (2.5)$$

Procedemos ahora a proponer una función de prueba con parámetros libres para ser evaluada en el funcional anterior de tal forma que encontrando sus puntos críticos (es decir, extremando la acción (2.5) del sistema) respecto a dichos parámetros obtengamos los puntos de equilibrio de la función.

### 2.1.1. Función de Prueba.

Sabemos que, en una dimensión, la ecuación de Benjamin-Ono

$$u_t + \alpha u u_x + \frac{\beta}{\pi} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)}{\xi - \theta} d\xi \right)_{xx} = 0, \quad (2.6)$$

tiene una solución exacta de la forma [11]

$$u(x, t) = \frac{ab^2}{(x - ct)^2 + b^2},$$

con  $b = \beta/c$  y  $a = 4c/\alpha$ , donde  $c$  es la velocidad de la onda viajera. Esta solución tiene la forma de una onda viajera de forma permanente tipo solitón. En dos dimensiones, la ecuación de ZK

$$u_t + uu_x + u_{xxx} + u_{xyy} = 0, \tag{2.7}$$

tiene soluciones en forma de onda viajera de la forma [9]

$$u(x, y, t) = ae^{\sigma^2((x-\xi(t))^2+y^2)},$$

donde  $d(\xi(t))/dt$  es la velocidad de la onda viajera (que viaja a lo largo del eje  $x$ ). Notamos que la ecuación (2.1) es una combinación de la ecuación de Benjamin-Ono y la ecuación ZK, es decir, tiene el mismo término dispersivo en la dirección  $x$  que la ecuación de Benjamin-Ono y el mismo término dispersivo en la dirección  $y$  que la ecuación ZK. Con base en estos resultados, proponemos una función de prueba para la ecuación (2.1) como sigue

$$u(x, y, t) = \frac{a}{(x - ct)^2 + \lambda^2} e^{y^2/\lambda^2} = \frac{a}{\theta^2 + \lambda^2} e^{y^2/\lambda^2}. \tag{2.8}$$

La función anterior es una onda localizada que viaja en la dirección  $x$  con velocidad  $c$ , y que recupera la forma de la solución a la ecuación de Benjamin-Ono en una dimensión para la dirección  $x$  y la forma de la solución a la ecuación ZK en la dirección  $y$ . Notamos que los parámetros libres de la función de prueba son la amplitud  $a$  y el ancho  $\lambda$ , este ancho es el mismo en ambas direcciones. Un perfil de la función (2.8) se puede observar en la Figura 2.1.

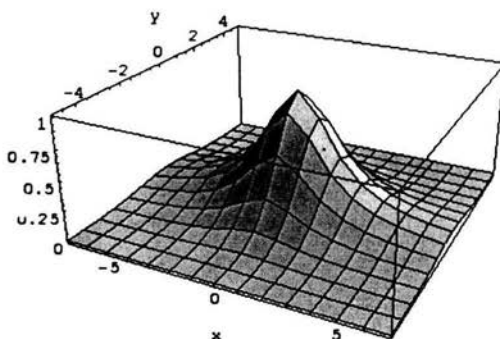


Figura 2.1: Función de Prueba con  $a = 4$ ,  $\lambda = 2$ .

Veremos ahora que el funcional (2.5) evaluado en esta función de prueba efectivamente posee puntos críticos. Procedemos entonces a usar la función (2.8) con el funcional (2.5) para obtener la acción de dicha función, que al

extremar respecto a los parámetros libres nos darán los puntos críticos, los cuales serán candidatos a los parámetros de las soluciones tipo onda viajera. Por simplicidad estudiaremos cada término de dicho funcional por separado. Comenzamos entonces por el término

$$\begin{aligned}
 \frac{c}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} u^2 d\theta dy &= \frac{ca^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{(\theta^2 + \lambda^2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2y^2/\lambda^2} dy \\
 &= \frac{ca^2}{2} \left( \frac{1}{\lambda^3} \frac{\pi}{2} \right) \left( \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi^3}{2}} \frac{ca^2}{\lambda^2}.
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Calculamos ahora el segundo término del funcional

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{6} \iint_{\mathbb{R}^2} u^3 d\theta dy &= \frac{a^3}{6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{(\theta^2 + \lambda^2)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3y^2/\lambda^2} dy \\
 &= \frac{a^3}{6} \left( \frac{1}{\lambda^5} \frac{3\pi}{8} \right) \left( \lambda \sqrt{\frac{\pi}{3}} \right) \\
 &= \frac{1}{16} \sqrt{\frac{\pi^3}{3}} \frac{a^3}{\lambda^4}.
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Para el término que corresponde al coeficiente de dispersión de ZK tenemos que

$$u_y = \frac{-2y}{\lambda^2} \frac{a}{\theta^2 + \lambda^2} e^{-y^2/\lambda^2}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} u_y^2 d\theta dy &= \frac{a^2}{2} \frac{4}{\lambda^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{(\theta^2 + \lambda^2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-2y^2/\lambda^2} dy \\
 &= \frac{2a^2}{\lambda^4} \left( \frac{1}{\lambda^3} \frac{\pi}{2} \right) \left( \frac{\lambda^3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi^3}{2}} \frac{a^2}{\lambda^4}.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Finalmente, tenemos que

$$u_\theta = \frac{-2a\theta}{\theta^2 + \lambda^2} e^{-y^2/\lambda^2}$$



y como se muestra en el Apéndice B

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi - \theta)(\xi^2 + \lambda^2)} = -\frac{\pi}{\lambda} \frac{\theta}{\theta^2 + \lambda^2}.$$

De aquí que el último término del funcional será

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} u_{\theta} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y)}{\xi - \theta} d\xi \right) d\theta dy = \\ & \frac{\alpha}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{-2a\theta e^{-2y^2/\lambda^2}}{(\theta^2 + \lambda^2)^2} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a d\xi}{(\xi - \theta)(\xi^2 + \lambda^2)} \right) \right) d\theta dy = \\ & \alpha a^2 \left( \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \left( \frac{\pi}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta^2}{(\theta^2 + \lambda^2)^3} d\theta \right) = \\ & \alpha a^2 \left( \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \left( \frac{\pi}{\lambda} \frac{\pi}{8\lambda^3} \right) = \frac{\alpha}{8} \sqrt{\frac{\pi^5}{2}} \frac{a^2}{\lambda^3}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Utilizamos ahora las relaciones (2.9), (2.10), (2.11) y (2.12) para escribir la forma completa del funcional evaluado en la función de prueba (2.8)

$$J(u) = A \left( \frac{ca^2}{\lambda^2} + \frac{a^2}{\lambda^4} \right) - B \frac{a^3}{\lambda^4} + D \frac{a^2}{\lambda^3}, \tag{2.13}$$

donde las constantes  $A, B, D$  son

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi^3}{2}}, \\ B &= \frac{\beta}{16} \sqrt{\frac{\pi^3}{3}}, \\ D &= \frac{\alpha}{8} \sqrt{\frac{\pi^5}{2}}. \end{aligned}$$

### 2.1.2. Puntos de Equilibrio.

En esta sección encontraremos los puntos de equilibrio para el funcional (2.13) que se han encontrado utilizando la función de prueba (2.8). De esta forma, derivamos la ecuación (2.13) respecto a los parámetros libres  $a, \lambda$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial J}{\partial a} &= A \left( \frac{2ca}{\lambda^2} + \frac{2a}{\lambda^4} \right) - \frac{3Ba^2}{\lambda^4} + \frac{2Da}{\lambda^3} = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial \lambda} &= A \left( -\frac{2ca^2}{\lambda^3} - \frac{4a^2}{\lambda^5} \right) + \frac{4Ba^3}{\lambda^5} - \frac{3Da^2}{\lambda^4} = 0;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{a}{\lambda^4} (2Ac\lambda^2 + 2A - 3Ba + 2D\lambda) &= 0, \\ -\frac{a^2}{\lambda^5} (2Ac\lambda^2 + 4A - 4Ba + 3D\lambda) &= 0.\end{aligned}$$

De las relaciones anteriores eliminamos la solución trivial  $a = 0$  así como la solución singular  $\lambda = 0$ , por lo que obtenemos

$$2Ac\lambda^2 + 2A - 3Ba + 2D\lambda = 0 \quad (2.14)$$

$$2Ac\lambda^2 + 4A - 4Ba + 3D\lambda = 0. \quad (2.15)$$

Restando (2.15) a (2.14) y despejando  $a$  obtenemos

$$a = \frac{1}{B}(D\lambda + 2A). \quad (2.16)$$

Sumando (2.14) con (2.15) y despejando  $c$  obtenemos

$$\begin{aligned}c &= \frac{7B}{4A} \frac{a}{\lambda^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{\lambda^2} - \frac{5D}{4A} \frac{1}{\lambda}, \\ &= \frac{7\beta}{8\sqrt{6}} \frac{a}{\lambda^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{\lambda^2} - \frac{5\alpha\pi}{8} \frac{1}{\lambda}.\end{aligned} \quad (2.17)$$

Sustituyendo el valor de la amplitud encontrado en (2.16) obtenemos

$$c = \frac{D}{2A} \frac{1}{\lambda} - \frac{2}{\lambda^2}. \quad (2.18)$$

Tanto la relación (2.17) como la relación (2.18) serán utilizadas en el capítulo siguiente para encontrar una expresión analítica para la evolución de la onda viajera. Es de hacer notar que, de manera natural, conviene expresar tanto la amplitud como la velocidad de la onda principal en términos del ancho  $\lambda$  de la onda viajera, esto será recuperado más adelante.

## 2.2. Leyes de Conservación.

En el problema de electromigración de superficie como el estudiado en el capítulo anterior, si la intercara entre los conductores es perturbada, denotando  $h$  la amplitud de la perturbación sobre el nivel de equilibrio, entonces la *masa total* de la perturbación será

$$M = \iint_{\Omega} \rho h(x, y, t) \, dx dy,$$

donde  $\rho$  es la densidad de los conductores migrantes y  $\Omega$  la región del espacio que representa las películas conductoras. Notamos entonces, si el conductor tiene densidad constante, que la masa es proporcional a la integral

$$\iint_{\Omega} h(x, y, t) \, dx dy.$$

De la misma forma, el momento de la onda será proporcional a

$$P = \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2} \iint_{\Omega} h(x, y, t) \, dx dy,$$

con  $(X, Y)$  las coordenadas del centro de masa de la onda y  $(\dot{X}, \dot{Y})$  su velocidad. Las componentes de la velocidad en ambas direcciones pueden ser escritas de la siguiente forma

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{M} \iint_{\Omega} x h(x, y, t) \, dx dy \right) \quad (2.19)$$

y de la misma forma

$$\dot{Y} = \frac{dY}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{M} \iint_{\Omega} y h(x, y, t) \, dx dy \right). \quad (2.20)$$

Veremos que si una función  $u(x, y, t)$  satisface la ecuación de Benjamin-Ono en dos dimensiones (eq. (2.1)) y  $u$  y sus derivadas se anulan en infinito, entonces se satisfacen ciertas leyes de conservación, a saber, la conservación de masa y el momento total de la onda. Calculamos entonces el cambio en el tiempo de la masa de una onda  $u$  que satisface la ecuación (2.1) para la región  $\Omega = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\frac{dM}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} u(x, y, t) \, dx dy \right) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} u_t(x, y, t) \, dx dy \\
&= - \iint_{\mathbb{R}^2} \left( \beta u u_x + u_{xyy} + \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} \, d\xi \right)_{xx} \right) \, dx dy \\
&= - \iint_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{\beta}{2} u^2 + u_{yy} + \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} \, d\xi \right)_{xx} \right) \, dx dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\beta}{2} u^2 + u_{yy} + \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} \, d\xi \right)_{xx} \right) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} \, dy \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

donde se ha utilizado primero la relación (2.1) para  $u_t$ , el teorema fundamental del cálculo y el hecho que  $u$  y sus derivadas (incluyendo su transformada de Hilbert) se anulan en infinito. Ahora procedemos a calcular la conservación del momento total, primero calculando las relaciones (2.19) y (2.20), para ello utilizamos la relación (2.21) para la ecuación de la componente de la velocidad en  $x$

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{M} \iint_{\Omega} x u(x, y, t) \, dx dy \right) \\
&= \frac{1}{M} \frac{d}{dt} \left( \iint_{\Omega} x u(x, y, t) \, dx dy \right) \\
&= \frac{1}{M} \iint_{\Omega} x u_t \, dx dy \\
&= - \frac{1}{M} \iint_{\mathbb{R}^2} x \left( \beta u u_x + u_{xyy} + \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} \, d\xi \right)_{xx} \right) \, dx dy \\
&= - \frac{1}{M} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} x \left( \frac{\beta}{2} u^2 + \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} \, d\xi \right)_{xx} \right) \, dx dy \right. \\
&\quad \left. + \iint_{\mathbb{R}^2} x (u_{xy})_y \, dy dx \right),
\end{aligned}$$

en la relación anterior se ha utilizado el hecho que  $u$  satisface la ecuación (2.1). Ahora integraremos por partes el primer término de la relación anterior y utilizaremos el teorema fundamental del cálculo para el segundo término, obteniendo así

$$\begin{aligned}
 \frac{dX}{dt} &= -\frac{1}{M} \left( \int_{-\infty}^{\infty} x \left( \frac{\beta}{2} u^2 + \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right)_x \right) \right) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} dy \\
 &\quad - \iint_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{\beta}{2} u^2 + \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right)_x \right) dx dy \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} x(u_{xy}) \Big|_{y=-\infty}^{y=\infty} dx \\
 &= -\frac{1}{M} \left( - \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\beta}{2} u^2 dx dy \right. \\
 &\quad \left. - \alpha \iint_{\mathbb{R}^2} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right)_x dx dy \right) \\
 &= -\frac{1}{M} \left( - \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\beta}{2} u^2 dx dy \right. \\
 &\quad \left. - \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right) \Big|_{x=-\infty}^{\infty} dy \right) \\
 &= \frac{\beta}{M} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} u^2 dx dy, \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

utilizando nuevamente que  $u$  y sus derivadas se anulan en infinito. Ahora calculamos la componente de la velocidad en la dirección  $y$

$$\begin{aligned}
 \frac{dY}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{M} \iint_{\Omega} y u(x, y, t) dx dy \right) \\
 &= \frac{1}{M} \iint_{\Omega} y u_t dx dy \\
 &= -\frac{1}{M} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} y \left( \frac{\beta}{2} u^2 + \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right)_x \right) dx dy \right. \\
 &\quad \left. + \iint_{\mathbb{R}^2} y (u_{xy})_y dy dx \right)
 \end{aligned}$$

apelamos al teorema fundamental del cálculo para reescribir la expresión

anterior como

$$\begin{aligned}
 \frac{dY}{dt} &= -\frac{1}{M} \left( \int_{-\infty}^{\infty} y \left( \frac{\beta}{2} u^2 + \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right)_x \right) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} dy \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} y(u_{xy}) \Big|_{y=-\infty}^{y=\infty} dx - \iint_{\mathbb{R}^2} u_{xy} dx dy \right) \\
 &= \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} u_x \Big|_{y=-\infty}^{y=\infty} dx \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Utilizando las relaciones (2.22) y (2.23) para calcular el momento de la onda

$$\begin{aligned}
 P &= \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2} \iint_{\mathbb{R}^2} u(x, y, t) dx dy \\
 &= M \dot{X} \\
 &= \frac{\beta}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} u^2 dx dy
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

y por lo tanto

$$\frac{dP}{dt} = \beta \iint_{\mathbb{R}^2} uu_t dx dy.$$

Escribimos explícitamente el término  $uu_t$  obteniendo

$$\begin{aligned}
 uu_t &= - \left( u \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right)_{xx} + uu_{xyy} + \beta u^2 u_x \right) \\
 &= - \left( \left[ u \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right)_x \right]_x - u_x \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right)_x \right. \\
 &\quad \left. + (uu_{xy})_y - u_y u_{xy} + \beta \left( \frac{u^3}{3} \right)_x \right) \\
 &= - \left( \left[ u \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right)_x \right]_x - u_x \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right)_x \right. \\
 &\quad \left. + (uu_{xy})_y - \left( \frac{u_y^2}{2} \right)_x + \beta \left( \frac{u^3}{3} \right)_x \right).
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Observamos en la relación anterior que cuando integremos sobre todo  $\mathbb{R}^2$  podremos utilizar el teorema fundamental del cálculo para todos los términos

con derivada, esto dará como resultado estos términos evaluados en  $\pm\infty$ , los cuales se anulan dadas las hipótesis que hemos impuesto sobre  $u$ ; de esta forma, el único término que no se anula inmediatamente en la expresión anterior es el segundo, obtenemos así que el cambio de momento en la onda es

$$\frac{dP}{dt} = \iint_{\mathbb{R}^2} u_x \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} \right)_x dx dy.$$

Mostraremos ahora que, dada la simetría de la transformada de Hilbert, el término anterior se anula. Omitiremos en la muestra siguiente la integral sobre la variable  $y$ , y por simplicidad no se escribirá explícitamente la notación P.V. para denotar el valor principal, pero recordando que cuando se integre un núcleo de la forma  $1/x$  se debe tomar el valor principal de Cauchy. Tenemos entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_x(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)}{\xi - x} d\xi dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x) \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\xi - x} \right) d\xi dx,$$

dada la simetría del núcleo  $1/(\xi - x)$ , es claro que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\xi - x} \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\xi - x} \right),$$

por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x) \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\xi - x} \right) d\xi dx = \\ \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x) \int_{-\infty}^{\infty} -u(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\xi - x} \right) d\xi dx, \end{aligned}$$

integrando una vez por partes respecto a  $\xi$  y escribiendo el término  $u_x(x)$  dentro de la integral respecto a  $\xi$  obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_x(x) \int_{-\infty}^{\infty} -u(\xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\xi - x} \right) d\xi dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x) \frac{u_\xi(\xi)}{\xi - x} d\xi dx,$$

ahora cambiamos el orden de integración

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_\xi(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_x(x)}{\xi - x} dx d\xi = - \int_{-\infty}^{\infty} u_\xi(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_x(x)}{x - \xi} dx d\xi.$$

Dado que las variables de integración son mudas, podemos cambiar la notación para obtener el mismo término que teníamos anteriormente

$$-\int_{-\infty}^{\infty} u_{\xi}(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_x(x)}{x-\xi} dx d\xi = -\int_{-\infty}^{\infty} u_x(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{\xi}(\xi)}{\xi-x} d\xi dx.$$

Por lo tanto hemos mostrado que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_x(x) \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{\xi}(\xi)}{\xi-x} d\xi dx = -\int_{-\infty}^{\infty} u_x(x) \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{\xi}(\xi)}{\xi-x} d\xi dx.$$

de donde se sigue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_x(x) \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_{\xi}(\xi)}{\xi-x} d\xi dx = 0$$

y por tanto

$$\frac{dP}{dt} = 0. \quad (2.26)$$

Escribimos entonces las leyes de conservación que habremos de utilizar en el capítulo siguiente

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} u(x, y, t) dx dy \right) = 0, \quad (2.27)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\beta}{2} \frac{d}{dt} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} u^2(x, y, t) dx dy \right) = 0. \quad (2.28)$$

## 2.3. Confinamiento de Radiación por la Cústica.

La Figura 2.2 muestra un perfil de la solución a la ecuación (2.1) realizada numéricamente. Observamos de la figura que la solución se compone de dos partes, una onda principal en frente y ondas de menor amplitud que viajan detrás de la onda principal. Para la Figura 2.2 se ha utilizado como condición inicial una función con el mismo perfil de la función (2.8).

La interpretación de lo observado en la Figura 2.2 es la siguiente. Al hacer evolucionar una condición inicial (que en principio es una función localizada) bajo la ecuación (2.1), esta condición inicial modificará sus parámetros (amplitud, ancho y velocidad) hacia aquéllos que extremen el funcional de la onda viajera. Dado que la masa total de la onda viajera debe conservarse, el cambio de masa de la onda principal se compensa desprendiendo masa en



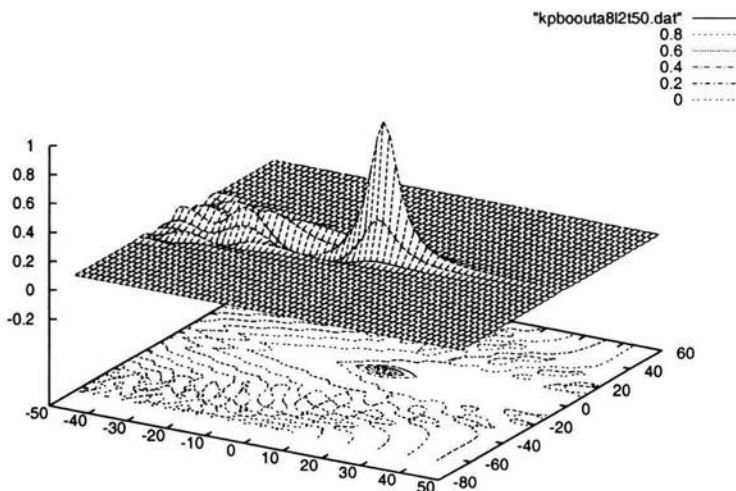


Figura 2.2: Solución numérica de la ecuación (2.1) para una condición inicial de la forma (2.8) con  $a_0 = 8$  y  $\lambda = 2$  al tiempo  $t = 50$ . Notar la radiación desprendida por detrás de la onda principal. Cortesía del Doctor N.F. Smyth.

forma de ondas de menor amplitud que la onda coherente, a este fenómeno se le conoce como *radiación*. El hecho que esta radiación desprendida por la onda coherente tenga una amplitud mucho menor que aquélla de la onda coherente hará que el término no lineal de la ecuación (2.1) sea despreciable en comparación con los términos dispersivos. Estos términos dispersivos dan como resultado que una condición inicial localizada se propague en el espacio en forma oscilatoria y a su vez pierdan su soporte, es decir, conforme evoluciona la condición inicial en el tiempo ocupa una región más grande del espacio. Notamos también, de la Figura 2.2, que esta radiación cedida no se encuentra por todo el espacio, sino que se encuentra confinada a un lugar geométrico determinado, este lugar geométrico recibe el nombre de *cústica*. Lo que encontraremos en esta sección es que al resolver la ecuación (2.1) linealizada y no homogénea (la no homogeneidad se debe a la fuente de la radiación, que es la onda coherente) se puede escribir la radiación en una expresión integral, mediante un argumento de *fase estacionaria* (método de análisis asintótico que se estudia en el Apéndice C) encontraremos las curvas en el espacio que describen el comportamiento de la radiación cedida. Estas

curvas, dadas en forma paramétrica, tienen una envolvente que se interpreta como la curva que confina la radiación a una región determinada del espacio, es decir, la cústica. A continuación encontraremos la forma y evolución en el tiempo de este lugar geométrico.

Retomamos entonces la ecuación (2.1)

$$u_t + \beta uu_x + \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right)_{xx} + u_{xyy} = 0.$$

La radiación desprendida de la onda principal debe satisfacer la versión no homogénea de esta ecuación (dado que se tiene una fuente de la radiación), salvo por el hecho que es de mucho menor amplitud que la onda principal y por ello podemos linealizar la ecuación en estos puntos. Escribimos entonces

$$u_t + \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right)_{xx} + u_{xyy} = S(x, y, t). \quad (2.29)$$

Procedemos ahora a tomar la transformada de Fourier de la ecuación (2.29) respecto a las variables  $(x, y)$ , denotando  $\hat{u}$  a la transformada de Fourier de la función  $u$ ,

$$\hat{u}(k, l) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} u(x, y) e^{-i(k(x-\zeta(t))+ly)} dx dy,$$

donde se ha utilizado una translación del origen al punto  $x = \zeta(t)$  dado que estamos considerando una onda que viaja en la dirección  $x$  con velocidad  $\zeta'(t)$ . Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier, tenemos

$$\hat{u}_t + \alpha(-k^2) \mathcal{F} \left\{ \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right) \right\} + (-ikl^2) \hat{u} = \hat{S}(k, l)$$

y, como se ve en el Apéndice A, tenemos que

$$\mathcal{F} \left\{ \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right) \right\} = (i\pi \text{sgn} k) \hat{u}.$$

De esta forma, en términos de su transformada de Fourier, la ecuación (2.29) se escribe

$$\hat{u}_t - i\alpha\pi k|k| \hat{u} - ikl^2 \hat{u} = \hat{S}(k, l, t),$$

que es una ecuación diferencial lineal no homogénea de primer orden para  $\hat{u}_t$ . Es fácil comprobar que la solución a esta ecuación es

$$\hat{u} = e^{i(\alpha\pi k|k|+kl^2)t} \int_0^t \hat{S}(k, l, \tau) e^{-i(\alpha\pi k|k|+kl^2)\tau} d\tau.$$

Tomamos ahora la transformada inversa de Fourier para encontrar la función  $u(x, y)$ , y denotamos por  $\hat{G}(k, l, t)$  todo el término que multiplica a la exponencial

$$\hat{G}(k, l, t) = \int_0^t \hat{S}(k, l, \tau) e^{-i(\alpha\pi k|k|+kl^2)\tau} d\tau,$$

entonces la función  $u$  es

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{G}(k, l, t) e^{i(k(x-\zeta(t))+ly+(\alpha\pi k|k|+kl^2)t)} dkdl.$$

Podemos reescribir la ecuación anterior como

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{G}(k, l, t) e^{it\left(\frac{k(x-\zeta(t))+ly}{t}+(\alpha\pi k|k|+kl^2)\right)} dkdl.$$

Notamos que la relación anterior es exactamente de la forma que requiere el método de fase estacionaria. Tenemos que la fase es

$$\phi(k, l, x, y, t) = k(x - \zeta(t)) + ly + (\alpha\pi k|k| + kl^2)t$$

y encontramos los puntos de fase estacionaria, a saber

$$\phi_k = (x - \zeta(t)) + 2\alpha\pi|k|t + l^2t = 0 \tag{2.30}$$

$$\phi_l = y + 2klt = 0. \tag{2.31}$$

De la ecuación (2.31) podemos despejar  $l$

$$l = -\frac{y}{2kt}$$

y sustituir este valor en la ecuación (2.30) para obtener

$$(x - \zeta(t)) + 2\alpha\pi|k|t + \frac{y^2}{4k^2t} = 0. \tag{2.32}$$

La anterior es una familia de curvas parametrizadas por  $k$ . La Figura 2.3 muestra algunas curvas dadas por la ecuación (2.32) para  $\zeta(t) = 0$ .

La pregunta ahora es si esta familia de curvas cubren todo el espacio o están confinadas a un lugar geométrico. Del cálculo diferencial sabemos que si

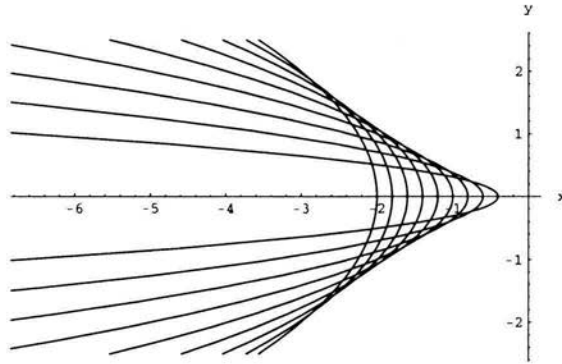


Figura 2.3: Curvas de fase estacionaria para diferentes valores de  $k$  y  $\alpha = 1/\pi$  y  $\zeta = 0$ .

una familia de curvas  $f(x, y, k)$  están confinadas a un lugar geométrico del espacio  $(x, y)$  entonces se debe satisfacer que

$$\frac{\partial f}{\partial k} = 0.$$

Si esto se satisface entonces la familia de curvas estará confinada a un lugar geométrico cuya curva frontera recibe el nombre de *cústica*. Utilizando este resultado, derivamos la ecuación (2.32) respecto a  $k$  para obtener

$$\phi_{kk} = 2\alpha\pi\text{sgn}k t - \frac{2}{k^3} \frac{y^2}{4t} = 0,$$

de donde se obtiene

$$|k|^3 = \frac{y^2}{4\alpha\pi t^2}.$$

Utilizamos este valor en la ecuación (2.32)

$$x - \zeta(t) + 2\pi\alpha t \left( \frac{y^2}{4\alpha\pi t^2} \right)^{1/3} + \frac{y^2}{4t} \left( \frac{4\alpha\pi t^2}{y^2} \right)^{2/3} = 0,$$

obtenemos así la ecuación para la cústica de la ecuación (2.1), que está dada por

$$x - \zeta(t) = -3 \left( \frac{\pi^2 \alpha^2 y^2 t}{4} \right)^{1/3}. \quad (2.33)$$

En las gráficas 2.4 se muestra la forma de la cáustica y su evolución en el tiempo para un valor de  $\alpha = 1/\pi$ .

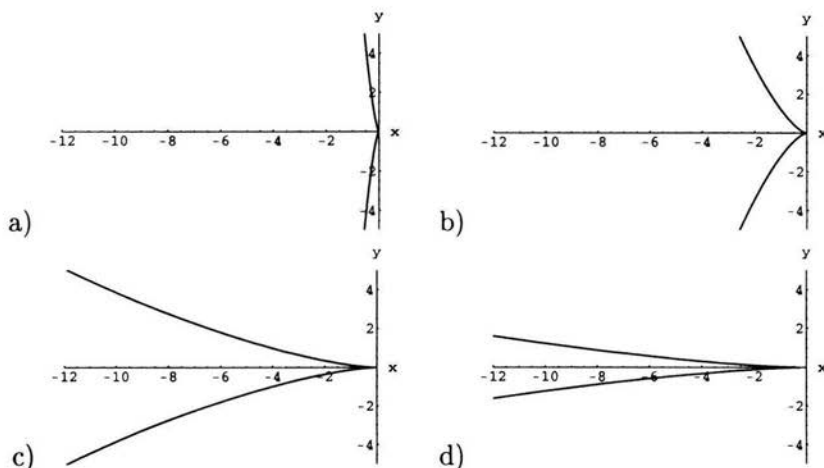


Figura 2.4: Cáustica para tiempo a)  $t = 0.001$ ; b)  $t = 1$ ; c)  $t = 10$  y d)  $t = 100$ .  $\alpha = 1/\pi$ .

De las Figuras 2.4 notamos una propiedad importante, la cáustica se “cierra” conforme avanza el tiempo. Notamos que para  $t = 0$  la cáustica está completamente abierta abarcando todo el semiplano  $x < 0$ . Este resultado sabemos que es incorrecto, en  $t = 0$  no hay cáustica dado que se impone una condición inicial localizada del forma (2.8); la cáustica se forma conforme el tiempo transcurre. Este resultado incorrecto se debe a dos razones: primero, supusimos cuando resolvimos la ecuación (2.29) que la cáustica siempre estaba presente, lo cual es incorrecto dado lo que hemos comentado; segundo, el método de fase estacionaria tiene un argumento de tiempos grandes, entonces es de esperarse que para  $t = 0$  el resultado sea incorrecto. Lo que resulta interesante es el resultado cuando  $t \rightarrow \infty$ , la cáustica se cierra completamente y sólo prevalece la onda coherente. Este resultado adquiere importancia dado lo que se conoce de otras ecuaciones que dan origen a estructuras coherentes tipo solitón. Para la ecuación de ZK, que tiene un término dispersivo en  $x$  como  $u_{xxx}$ , se sabe [9] que la cáustica son un par de rectas que no varían su forma en el tiempo, de modo tal que siempre se tiene (salvo para tiempos cortos) la estructura coherente más la radiación. Dada la forma del término dispersivo de Benjamin-Ono, el resultado final de dejar evolucionar una condición inicial localizada es obtener nuevamente una única estructura

coherente tipo solitón.

En el siguiente capítulo utilizaremos estos resultados para estudiar la dinámica de la estructura coherente. Lo que se hará será tomar las leyes de conservación y suponer que se tiene una solución compuesta de dos partes, la estructura coherente y una función de amplitud mucho menor que representa la radiación. Utilizando las leyes de conservación encontradas seremos capaces de llegar a una ecuación diferencial que describa el comportamiento de los parámetros de la estructura coherente. El resultado del confinamiento de radiación por cáusticas será importante primero para encontrar la masa de la estructura coherente, que será la integral de la onda coherente sobre todo el espacio que no conforma la radiación, y segundo, veremos que el hecho de que la cáustica se cierre cuando  $t \rightarrow \infty$  hará que el resultado numérico de resolver la ecuación (2.1) compare muy bien con el resultado obtenido mediante las leyes de conservación sin necesidad de incluir en éstas la radiación cedida.



## Capítulo 3

# Evolución de la Estructura Coherente No Lineal.

En este capítulo utilizaremos los resultados obtenidos en el capítulo anterior para encontrar expresiones analíticas que describan la evolución en el tiempo de los parámetros que determinan una onda coherente que evoluciona bajo la ecuación de Benjamin-Ono en dos dimensiones

$$u_t + \beta uu_x + \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right)_{xx} + u_{xyy} = 0, \quad (3.1)$$

con una condición inicial de la forma

$$u_0(x, y) = \frac{a}{x^2 + \lambda^2} e^{-y^2/\lambda^2}. \quad (3.2)$$

Esperamos que, conforme transcurra el tiempo, esta condición inicial se desplace en la dirección  $x$  conservando su forma pero modificando sus parámetros, es decir, la onda tendrá en un tiempo  $t$  la forma siguiente

$$u(x, y, t) = \frac{a(t)}{(x - \zeta(t))^2 + \lambda(t)^2} e^{-y^2/\lambda(t)^2}, \quad (3.3)$$

con  $\dot{\zeta}(t)$  la velocidad de la onda. Nótese que la función  $u(x, y, t)$  alcanza su máximo en el punto  $(\zeta(t), 0)$  y este máximo es  $a/\lambda^2$ , además, el ancho característico de la función (los puntos donde cambia la concavidad) son proporcionales a  $\lambda$  tanto en  $x$  como en  $y$ . Utilizando los resultados obtenidos anteriormente, encontraremos una serie de ecuaciones diferenciales para las funciones  $a(t)$ ,  $\lambda(t)$  y  $\zeta(t)$ .



### 3.1. La Onda Coherente.

En la Figura 3.1 observamos el resultado de resolver numéricamente la ecuación (3.1) con una condición inicial de la forma (3.2). Notamos, como se comentó en el capítulo anterior, que la onda evoluciona de tal forma que la solución se compone de dos partes, una onda coherente que conserva la forma de la condición inicial, y la radiación cedida por esta onda confinada a la cáustica, y que es de amplitud mucho menor que la onda coherente.

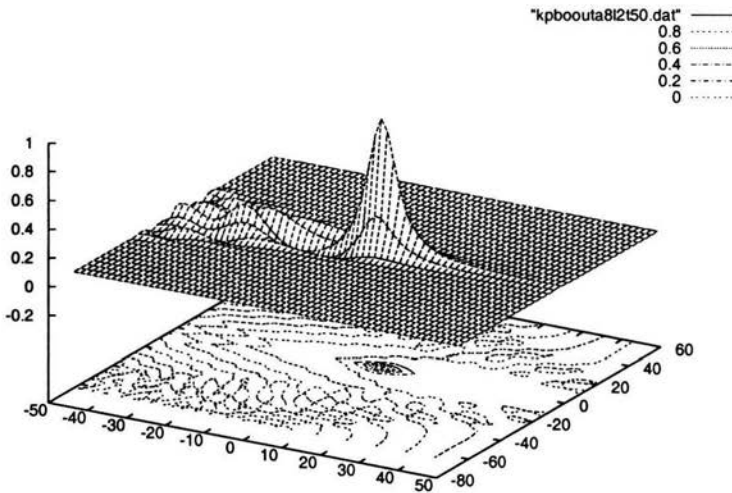


Figura 3.1: Solución numérica de la ecuación (3.1) para una condición inicial de la forma (3.2) con  $a_0 = 8$  y  $\lambda = 2$  al tiempo  $t = 50$ . Cortesía del doctor N.F. Smyth.

Dada esta forma es que proponemos una solución que sea la suma de dos funciones, una de ellas que representa la onda principal y la segunda que representa la radiación cedida. Escribimos explícitamente esto como

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) + u_1(x, y, t),$$

donde  $u_0$  representa la onda principal y  $u_1$  la radiación, supondremos además que la onda principal se encuentra únicamente en la región fuera de la cáustica que denotaremos como  $R(y, t)$  (ver Figura 3.2). A la frontera de la región  $R(y, t)$  la escribimos como

$$x(y, t) = \zeta(t) - 3 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2 y^2 t}{4} \right)^{1/3} = \zeta(t) - h(y, t)$$

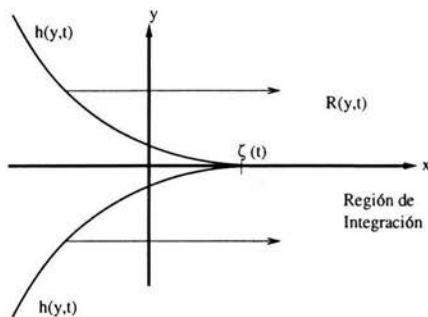


Figura 3.2: La región de integración  $R(y, t)$  es aquella que se encuentra delante de la zona delimitada por la cáustica  $\zeta - h(y, t)$ .

Calculamos la masa total de la onda principal

$$\frac{d}{dt} \left( \iint_{R(y,t)} u_0(x, y, t) dx dy \right) = \frac{d}{dt} \left( \int_0^\infty \int_{\zeta(t)-h(y,t)}^\infty u_0(x, y, t) dx dy + \int_{-\infty}^0 \int_{\zeta(t)-h(y,t)}^\infty u_0(x, y, t) dx dy \right), \quad (3.4)$$

con

$$u_0(x, y, t) = \frac{a(t)}{(x - \zeta(t))^2 + \lambda(t)^2} e^{-y^2/\lambda(t)^2}.$$

Procedemos ahora a calcular explícitamente esta integral. Notamos primero que si cambiamos  $y$  por  $-y$  en el segundo término de la integral, obtenemos el primer término, entonces escribimos

$$\frac{d}{dt} \left( \iint_{R(y,t)} u_0(x, y, t) dx dy \right) = 2 \frac{d}{dt} \left( \int_0^\infty \int_{\zeta(t)-h(y,t)}^\infty \frac{a}{(x - \zeta)^2 + \lambda^2} e^{-y^2/\lambda^2} dx dy \right),$$

donde por comodidad se ha omitido la dependencia explícita del tiempo en los parámetros. A continuación hacemos el cambio de variable  $u = x - \zeta$  de forma que tenemos (no se escribirá por el momento la derivada respecto al tiempo)

$$\begin{aligned} & 2a \int_0^\infty e^{-y^2/\lambda^2} \int_{\zeta(t)-h(y,t)}^\infty \frac{dx}{(x-\zeta)^2 + \lambda^2} dy = \\ & 2a \int_0^\infty e^{-y^2/\lambda^2} \int_{-h(y,t)}^\infty \frac{du}{u^2 + \lambda^2} dy = \\ & \frac{2a}{\lambda} \int_0^\infty e^{-y^2/\lambda^2} \arctan(u) \Big|_{-h(y,t)/\lambda}^\infty dy, \end{aligned}$$

evaluando el arcotangente obtenido después de integrar  $1/(u^2 + \lambda^2)$  tenemos

$$\begin{aligned} & \frac{2a}{\lambda} \int_0^\infty e^{-y^2/\lambda^2} \arctan(u) \Big|_{-h(y,t)/\lambda}^\infty dy = \\ & \frac{2a}{\lambda} \int_0^\infty e^{-y^2/\lambda^2} \left[ \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{h(y,t)}{\lambda}\right) \right] dy = \\ & \frac{2a}{\lambda} \left\{ \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-y^2/\lambda^2} dy + \int_0^\infty \arctan\left(\frac{h(y,t)}{\lambda}\right) e^{-y^2/\lambda^2} dy \right\}. \end{aligned}$$

Obtuvimos entonces que

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \iint_{R(y,t)} u_0(x,y,t) dx dy \right) = \\ & \frac{d}{dt} \left( \frac{2a}{\lambda} \left\{ \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-y^2/\lambda^2} dy + \int_0^\infty \arctan\left(\frac{h(y,t)}{\lambda}\right) e^{-y^2/\lambda^2} dy \right\} \right) = \\ & \frac{d}{dt} \left( \frac{2a}{\lambda} \left\{ \frac{\lambda\sqrt{\pi^5}}{4} + \int_0^\infty \arctan\left(\frac{h(y,t)}{\lambda}\right) e^{-y^2/\lambda^2} dy \right\} \right). \quad (3.5) \end{aligned}$$

Dejaremos esta relación por el momento ya que, como se puede notar, el segundo término no se puede integrar explícitamente y habrá que realizar un análisis asintótico adecuado, para lo cual necesitamos más información. Retomamos ahora la expresión (3.4) para derivar explícitamente la integral, por lo que se tiene

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left( \iint_{R(y,t)} u_0(x,y,t) dx dy \right) = \\
& \frac{d}{dt} \left( \int_0^\infty \int_{\zeta(t)-h(y,t)}^\infty u_0(x,y,t) dx dy + \int_{-\infty}^0 \int_{\zeta(t)-h(y,t)}^\infty u_0(x,y,t) dx dy \right) = \\
& \int_0^\infty \int_{\zeta-h}^\infty u_t dx dy - \int_0^\infty u|_{x=\zeta-h} (\dot{\zeta} - \dot{h}) dy \\
& + \int_{-\infty}^0 \int_{\zeta-h}^\infty u_t dx dy - \int_{-\infty}^0 u|_{x=\zeta-h} (\dot{\zeta} - \dot{h}) dy. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

En la relación anterior se ha utilizado la regla de la cadena, el teorema fundamental del cálculo así como el hecho que  $u$  se anula en infinito, además  $\dot{h}$  representa la derivada parcial de  $h$  respecto al tiempo. Analizamos ahora el término  $u_t$  en la expresión anterior; utilizando la ecuación (3.1) obtenemos

$$\begin{aligned}
u_t &= - \left( \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^\infty \frac{u(\xi)}{\xi - x} d\xi \right)_{xx} + uu_x + u_{xyy} \right) \\
&= - \left( \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^\infty \frac{u(\xi)}{\xi - x} d\xi \right)_x + \frac{\beta}{2} u^2 + u_{yy} \right)_x,
\end{aligned}$$

apelamos al teorema fundamental del cálculo para reescribir la expresión anterior como

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \int_{\zeta-h}^\infty u_t dx dy = \\
& - \int_0^\infty \left( \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^\infty \frac{u(\xi)}{\xi - x} d\xi \right)_x + \frac{1}{2} u^2 + u_{yy} \right) \Big|_{x=\zeta-h}^\infty dy = \\
& \int_0^\infty \left( \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^\infty \frac{u(\xi)}{\xi - x} d\xi \right)_x + \frac{1}{2} u^2 + u_{yy} \right) \Big|_{x=\zeta-h} dy, \tag{3.7}
\end{aligned}$$

utilizando el hecho que  $u$  y sus derivadas se anulan en infinito. Calcularemos ahora cada uno de los términos de la integral anterior. Primero tenemos

$$\begin{aligned}
\left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^\infty \frac{u(\xi)}{\xi - x} d\xi \right)_x &= \left( -\frac{a\pi}{\lambda} \frac{x - \zeta}{(x - \zeta)^2 + \lambda^2} e^{-y/\lambda^2} \right)_x \\
&= -\frac{a\pi}{\lambda} e^{-y^2/\lambda^2} \left\{ \frac{\lambda^2 - (x - \zeta)^2}{((x - \zeta)^2 + \lambda^2)^2} \right\}. \tag{3.8}
\end{aligned}$$

El segundo término es simplemente

$$u^2 = a^2 \frac{e^{-2y^2/\lambda^2}}{((x - \zeta)^2 + \lambda^2)^2}. \quad (3.9)$$

Por último tenemos

$$u_{yy} = \left( \frac{4y^2}{\lambda^4} - \frac{2}{\lambda^2} \right) \frac{ae^{-y^2/\lambda^2}}{(x - \zeta)^2 + \lambda^2}. \quad (3.10)$$

De las expresiones (3.8), (3.9) y (3.10) notamos que todos los términos son pares respecto a  $y$ , incluyendo la función  $h$ , entonces nuevamente podemos hacer el cambio  $y$  por  $-y$  en los dos últimos términos de la expresión (3.6) para así obtener

$$\frac{d}{dt} \left( \iiint_{R(y,t)} u \, dx dy \right) = 2 \left( \int_0^\infty \int_{\zeta-h}^\infty u_t \, dx dy - \int_0^\infty u|_{x=\zeta-h} (\dot{\zeta} - \dot{h}) \, dy \right).$$

Escribimos ahora todos los términos de la integral utilizando (3.8), (3.9) y (3.10) evaluando en  $x = \zeta - h$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \iiint_{R(t)} u \, dx dy \right) = \\ & -2 \left\{ \int_0^\infty \left( \left( \frac{\alpha a \pi}{\lambda} \frac{\lambda^2 - h^2}{(h^2 + \lambda^2)^2} - \left( \frac{4y^2}{\lambda^4} - \frac{2}{\lambda^2} \right) \frac{a}{h^2 + \lambda^2} \right) e^{-y^2/\lambda^2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\beta}{2} a^2 \frac{e^{-2y^2/\lambda^2}}{(h^2 + \lambda^2)^2} \right) dy + a \int_0^\infty \frac{e^{-y^2/\lambda^2}}{h^2 + \lambda^2} (\dot{\zeta} - \dot{h}) \, dy \right\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Notamos nuevamente que las integrales de la forma

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y^2/\lambda^2}}{h^2 + \lambda^2} dy = \int_0^\infty \frac{e^{-y^2/\lambda^2}}{9 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{2/3} t^{2/3} y^{4/3} + \lambda^2} dy$$

no se pueden realizar explícitamente, es por esto que dejaremos expresada la relación (3.11) por el momento hasta obtener más información de la evolución de la onda y estar en capacidades de realizar un análisis asintótico conveniente.

## 3.1.1. Conservación del Momento.

Utilizaremos en esta sección la expresión encontrada en el capítulo anterior para la conservación del momento, a saber

$$\frac{d}{dt} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} u^2 dx dy = 0.$$

De la relación anterior tendríamos, en principio, que calcular la contribución de la integral sobre la región  $R(y, t)$  para la onda principal y la contribución de la radiación en la región dentro de la cáustica, sin embargo, notamos que la ecuación del momento involucra el cuadrado de la función  $u$ , es por esto que, considerando que la radiación tiene una amplitud muy pequeña en comparación con la onda principal, despreciamos el término  $u_1^2$  dado que en comparación a  $u_0^2$  es muy pequeño y notamos que en el término  $u_0 u_1$  las dos funciones tienen soportes diferentes,  $u_0$  tiene soporte para la región  $R(y, t)$  fuera de la cáustica mientras que  $u_1$  tiene soporte sólo para la región comprendida entre las cáusticas, por lo cual la integral sobre todo el espacio del término  $u_0 u_1$  será despreciable; tomando así únicamente la contribución de la integral dada por la onda principal  $u_0$  sobre todo  $\mathbb{R}^2$ . Calculando entonces explícitamente la integral anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} u_0^2 dx dy &= \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{((x - \zeta)^2 + \lambda^2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2y^2/\lambda^2} dy \\ &= \frac{a^2}{2} \left( \frac{\pi}{2\lambda^3} \right) \left( \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi a^2}{4 \lambda^2}, \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{a^2}{\lambda^2} \right) = 0. \quad (3.12)$$

Notamos que tenemos tres parámetros que determinan la onda principal: su amplitud, su ancho y su velocidad; hemos encontrado hasta este momento sólo dos relaciones que determinan su comportamiento: la masa de la onda principal (eq. (3.4)) y la conservación del momento (eq. (3.12)). Debemos entonces encontrar una relación más que nos proporcione una tercera relación y así tener un sistema cerrado; esta tercera relación será el *momento en  $x$  de la onda*.

### 3.1.2. Momento en $x$ del Momento de la Estructura Coherente.

El momento en  $x$  del momento de la onda está dado por la relación

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{x}{2} u^2 dx dy,$$

siguiendo un argumento similar al presentado para la conservación del momento, tomamos como única contribución relevante aquella dada por  $u_0^2$ , y calcularemos el cambio en el tiempo del momento en  $x$  del momento de la onda. Tenemos así

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{x}{2} u_0^2 dx dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(x - \zeta)}{2} u_0^2 dx dy + \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\zeta}{2} u_0^2 dx dy.$$

Nos percatamos que el primer término de la integral anterior es impar sobre la variable  $x - \zeta$ , por lo tanto al integrarlo sobre todo  $\mathbb{R}$  la integral se anulará, quedando solamente

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{x}{2} u_0^2 dx dy &= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\zeta}{2} u_0^2 dx dy \\ &= \frac{\zeta}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} u_0^2 dx dy \\ &= \frac{\zeta}{2} \left( \frac{\pi}{2\lambda^3} \right) \left( \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \\ &= \frac{\pi^{3/2} \zeta a^2}{4\sqrt{2} \lambda^2}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Por otro lado tenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{x}{2} u_0^2 dx dy \right) = \iint_{\mathbb{R}^2} x u_0 u_{0t} dx dy.$$

Utilizamos ahora la ecuación (3.1) para calcular el término  $u_0 u_{0t}$  dado que  $u_0$  debe satisfacer la ecuación de Benjamin-Ono en dos dimensiones, siendo así

$$\begin{aligned}
u_0 u_{0t} = & \\
& - u_0 \left( \beta u_0 u_{0x} + \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right)_{xx} + u_{0xyy} \right) = \\
& - \left( \left( \beta \frac{u_0^3}{3} \right)_x + (u_0 u_{0xy})_y - u_{0y} u_{0xy} + u_0 \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right)_{xx} \right) = \\
& - \left( \beta \left( \frac{u_0^3}{3} \right)_x + (u_0 u_{0xy})_y - \left( \frac{1}{2} u_{0y}^2 \right)_x + u_0 \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right)_{xx} \right).
\end{aligned}$$

Escribimos ahora la integral

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathbb{R}^2} x u_0 u_{0t} dx dy = & - \iint_{\mathbb{R}^2} x \left[ \left( \frac{\beta}{3} u_0^3 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 \right)_x + (u_0 u_{0xy})_y \right] dx dy \\
& - \iint_{\mathbb{R}^2} x u_0 \alpha \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right)_{xx} dx dy.
\end{aligned}$$

Para el primer término de la primera integral podemos integrar una vez por partes para obtener

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{\beta}{3} u_0^3 - \frac{1}{2} u_{0y}^2 \right) dx dy.$$

El segundo sumando de esa misma integral lo podemos integrar directamente cambiando el orden de integración y utilizando el teorema fundamental del cálculo, es claro entonces que tendremos que evaluar el término  $u_0 u_{0xy}$  entre menos infinito e infinito lo cual se anula dada la forma de  $u_0$  y sus derivadas. La segunda integral la podemos integrar dos veces por partes para poner las derivadas respecto a  $x$  sobre el término  $x u_0$ , quedando entonces

$$\alpha \iint_{\mathbb{R}^2} (2u_{0x} + x u_{0xx}) \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right) dx dy.$$

Procedemos ahora a evaluar cada una de las integrales anteriores. Primero evaluamos



$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{u_0^3}{3} dx dy &= \frac{a^3}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{((x-\zeta)^2 + \lambda^2)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3y^2/\lambda^2} dy \\
 &= \frac{a^3}{3} \left( \frac{3\pi}{8\lambda^5} \right) \left( \lambda \sqrt{\frac{\pi}{3}} \right) \\
 &= \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\pi^3}{3}} \frac{a^3}{\lambda^4}.
 \end{aligned}$$

Para la segunda integral calculamos

$$u_{0y}^2 = \frac{4y^2}{\lambda^4} \frac{a^2}{((x-\zeta)^2 + \lambda^2)^2} e^{-2y^2/\lambda^2},$$

entonces

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} u_{0y}^2 dx dy &= \frac{2a^2}{\lambda^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{((x-\zeta)^2 + \lambda^2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-2y^2/\lambda^2} dy \\
 &= \frac{2a^2}{\lambda^2} \left( \frac{\pi}{2\lambda^3} \right) \left( \frac{\lambda^3}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi^3}{2}} \frac{a^2}{\lambda^4}.
 \end{aligned}$$

Para la integral que involucra la transformada de Hilbert de la función  $u_0$ , recordamos primero que

$$\left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right) = -\frac{\pi}{\lambda} a e^{-y^2/\lambda^2} \frac{x - \zeta}{(x - \zeta)^2 + \lambda^2},$$

además

$$u_{0x} = -2ae^{-y^2/\lambda^2} \frac{(x - \zeta)}{((x - \zeta)^2 + \lambda^2)^2}$$

y

$$u_{0xx} = 2ae^{-y^2/\lambda^2} \frac{3(x - \zeta)^2 - \lambda^2}{((x - \zeta)^2 + \lambda^2)^3},$$

de forma tal que

$$\begin{aligned}
& 2 \iint_{\mathbb{R}^2} u_{0x} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right) dx dy = \\
& \frac{4\pi a^2}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - \zeta)^2 dx}{((x - \zeta)^2 + \lambda^2)^3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2y^2/\lambda^2} dy = \\
& \frac{4\pi a^2}{\lambda^2} \left( \frac{\pi}{8\lambda^3} \right) \left( \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi^5}{2}} \frac{a^2}{\lambda^3}. \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Tenemos ahora

$$\begin{aligned}
& \iint_{\mathbb{R}^2} x u_{0xx} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right) dx dy = \\
& \iint_{\mathbb{R}^2} (x - \zeta) u_{0xx} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right) dx dy \\
& + \iint_{\mathbb{R}^2} \zeta u_{0xx} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right) dx dy.
\end{aligned}$$

Notamos que el integrando de la segunda integral es

$$\zeta u_{0xx} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right) = \zeta \frac{2a^2\pi}{\lambda} \frac{(x - \zeta)(3(x - \zeta)^2 - \lambda^2)}{((x - \zeta)^2 + \lambda^2)^3},$$

que es una función impar para las variables  $x - \zeta$  y por lo tanto la integral de esta función en todo  $\mathbb{R}$  se anulará, quedando únicamente

$$\begin{aligned}
& \iint_{\mathbb{R}^2} x u_{0xx} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right) dx dy = \\
& \iint_{\mathbb{R}^2} (x - \zeta) u_{0xx} \left( \text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(\xi, y, t)}{\xi - x} d\xi \right) dx dy = \\
& \frac{2\pi a^2}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2y^2/\lambda^2} dy \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{3(x - \zeta)^4}{((x - \zeta)^2 + \lambda^2)^4} \right. \\
& \quad \left. - \frac{\lambda^2(x - \zeta)^2}{((x - \zeta)^2 + \lambda^2)^4} \right) dx = \\
& \frac{2\pi a^2}{\lambda} \left( \frac{3\pi}{16\lambda^3} - \frac{\pi}{16\lambda^3} \right) \left( \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\sqrt{2\pi^5}}{8} \frac{a^2}{\lambda^3}. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Escribiendo todos los términos correspondientes al momento en  $x$  del momento tenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi^3}{2}} \zeta \frac{a^2}{\lambda^2} \right) = \frac{\beta \sqrt{\pi^3} a^3}{8\sqrt{3} \lambda^4} - \frac{\sqrt{\pi^3} a^2}{4\sqrt{2} \lambda^4} - \alpha \frac{\sqrt{\pi^5} a^2}{2\sqrt{2} \lambda^3} + \alpha \frac{\sqrt{\pi^5} a^2}{4\sqrt{2} \lambda^3}$$

y después de simplificar algunos términos obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \zeta \frac{a^2}{\lambda^2} \right) = \frac{\beta a^3}{\sqrt{6} \lambda^4} - \frac{a^2}{\lambda^4} - \alpha \pi \frac{a^2}{\lambda^3}.$$

Utilizamos ahora la ecuación (3.12) correspondiente a la conservación del momento para escribir

$$\frac{a^2}{\lambda^2} \frac{d}{dt} (\zeta) = \frac{\beta a^3}{\sqrt{6} \lambda^4} - \frac{a^2}{\lambda^4} - \alpha \pi \frac{a^2}{\lambda^3}.$$

Por lo tanto se tiene que

$$\dot{\zeta} = \frac{\beta a}{\sqrt{6} \lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} - \alpha \pi \frac{1}{\lambda}. \quad (3.16)$$

Retomamos ahora el resultado obtenido en el capítulo anterior, específicamente la ecuación (2.17) donde se expresa el punto de equilibrio para la velocidad de la onda viajera en términos de su amplitud y ancho, a saber,

$$c = \frac{7\beta a}{8\sqrt{6} \lambda^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{\lambda^2} - \frac{5\alpha\pi}{8} \frac{1}{\lambda}$$

y notamos que esta expresión es muy semejante a la ecuación (3.16) obtenida a partir del momento en  $x$  del momento. Esto nos sirve como indicador de que debiéramos recuperar, para las ecuaciones de evolución, la misma forma que aquella obtenida con el análisis variacional. Es importante destacar que cuando se tiene una solución exacta, como es el caso de la ecuación de Benjamin-Ono en una dimensión, el análisis variacional recupera de manera exacta las relaciones entre los parámetros que involucran la solución. Para el caso de la ecuación bi-dimensional de Benjamin-Ono no conocemos una solución exacta, pero es importante que, dada la función de prueba que hemos escogido, el análisis variacional y las leyes de conservación presenten el mismo polinomio que relaciona sus parámetros salvo por los coeficientes. Este argumento será utilizado más adelante cuando encontremos los puntos de equilibrio que relacionan la amplitud y el ancho de la onda. Además de esto, encontramos en el capítulo anterior que, de manera natural, la variable que describe el comportamiento de la onda es el ancho  $\lambda$ , con estos resultados en mente, retomaremos ahora la ecuación obtenida para la masa de la onda principal para realizar un análisis asintótico y obtener la expresión deseada.

### 3.2. Análisis de Puntos de Equilibrio.

Reescribiremos las ecuaciones (3.5) y la ecuación (3.11) correspondientes a la masa de la onda principal, las cuales son, respectivamente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \iint_{R(y,t)} u_0 dx dy \right) = \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{2a}{\lambda} \left\{ \frac{\lambda\sqrt{\pi^5}}{4} + \int_0^\infty \arctan \left( \frac{h(y,t)}{\lambda} \right) dy \right\} \right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

para la expresión de la masa de la onda coherente obtenida integrando la función de prueba sobre la región  $R(y, t)$ , y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \iint_{R(t)} u_0 dx dy \right) = \\ - 2 \left\{ \int_0^\infty \left( \left( \frac{\alpha a \pi}{\lambda} \frac{\lambda^2 - h^2}{(h^2 + \lambda^2)^2} - \left( \frac{4y^2}{\lambda^4} - \frac{2}{\lambda^2} \right) \frac{a}{h^2 + \lambda^2} \right) e^{-y^2/\lambda^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\beta}{2} a^2 \frac{e^{-2y^2/\lambda^2}}{(h^2 + \lambda^2)^2} \right) dy + a \int_0^\infty \frac{e^{-y^2/\lambda^2}}{h^2 + \lambda^2} (\dot{\zeta} - \dot{h}) dy \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

relación correspondiente a utilizar el teorema fundamental del cálculo para derivar el integrando que involucra la masa de la onda. Estas dos expresiones son iguales.

En esta sección estudiaremos los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial correspondiente a las ecuaciones (3.17) y (3.18). Para esto realizaremos un análisis asintótico de los términos que intervienen en la ecuación; para este análisis asintótico de los puntos de equilibrio debemos tener en cuenta, primero, bajo qué variable haremos este análisis, y segundo, qué resultado esperamos obtener. La respuesta a la primera pregunta es el **tiempo** por dos razones fundamentales. Primero, no podemos hacer suposiciones *a priori* acerca de la amplitud de la onda y su ancho; segundo, en el análisis realizado anteriormente, supusimos la presencia de la radiación confinada por la cáustica la cual, en principio, ocupa todo el semi plano izquierdo  $x < 0$  en  $t = 0$ ; esto sabemos que es incorrecto, en  $t = 0$  solo se tiene la condición inicial (3.2), la cual evoluciona conforme el tiempo transcurre desprendiendo radiación y formando la cáustica, por lo tanto es natural hacer un análisis asintótico para tiempos relativamente grandes. Cabe mencionar que la

ecuación diferencial que se obtendrá no recuperará los transitorios de la onda para  $t \sim 0$ , esto se corroborará con la comparación con la solución numérica de la ecuación (3.1). La respuesta a la segunda pregunta la obtuvimos en el capítulo anterior, si todo funciona correctamente, debiéramos obtener, en el punto de equilibrio (si este existe), una relación que se parezca a la ecuación (2.16), la cual escribimos a continuación

$$a = \frac{\alpha}{\beta} \pi \sqrt{6} \frac{1}{\lambda} + \frac{4}{\beta} \sqrt{6}.$$

Procedemos entonces a encontrar esta relación. Lo que haremos será tomar la relación (3.11), notando que todas las integrales involucradas tienen términos de la forma

$$\int_0^{\infty} g(y, t) \frac{e^{-y^2/\lambda^2}}{h^2 + \lambda^2} dy,$$

donde

$$h^2 = 9 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{2/3} t^{2/3} y^{4/3}.$$

Haremos el cambio de variable

$$v = \frac{t^{1/2} y}{\lambda^{3/2}},$$

para que entonces la integral tome la forma

$$\int_0^{\infty} g'(v) \frac{e^{-\frac{\lambda}{t} v^2}}{v^{4/3} + 1} dv.$$

Al tomar entonces el límite cuando  $t \rightarrow \infty$  el término exponencial será despreciable y por lo tanto podremos calcular la integral resultante ya que no dependerá del valor de  $t$ . Posteriormente retomaremos la ecuación (3.17) para derivarla explícitamente, realizar un cambio de variable semejante al que se realizará para la ecuación (3.18) y tomar nuevamente el límite cuando  $t \rightarrow \infty$  y así poder evaluar las integrales resultantes. De esta última relación obtendremos una expresión diferencial para  $a$  y  $\lambda$ , utilizando la relación correspondiente a la conservación del momento de la onda podremos expresar el resultado en términos de  $\lambda$  y condiciones iniciales. De igualar las expresiones resultantes tanto de la ecuación (3.17) y la ecuación (3.18) encontraremos la ecuación diferencial para  $\lambda$  que estamos buscando y analizaremos

sus puntos de equilibrio.

Comenzamos entonces estudiando el primer término de la ecuación (3.18) que servirá de ejemplo para todos los demás ya que son de la misma forma,

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha\pi a}{\lambda} \frac{\lambda^2 e^{-y^2/\lambda^2}}{(h^2 + \lambda^2)^2} dy = \int_0^{\infty} \frac{\alpha\pi a}{\lambda} \frac{\lambda^2 e^{-y^2/\lambda^2}}{\left(9 \left(\frac{\alpha^2 \pi^2}{4}\right)^{2/3} t^{2/3} y^{4/3} + \lambda^2\right)^2} dy,$$

denotaremos ahora por comodidad

$$b = 9 \left(\frac{\alpha^2 \pi^2}{4}\right)^{2/3}$$

y hacemos ahora el cambio de variable que nos dará la forma requerida para el análisis posterior, sea

$$v = \frac{t^{1/2} y}{\lambda^{3/2}},$$

bajo este cambio de variable obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \frac{\alpha\pi a}{\lambda} \frac{\lambda^2 e^{-y^2/\lambda^2}}{\left(9 \left(\frac{\alpha^2 \pi^2}{4}\right)^{2/3} t^{2/3} y^{4/3} + \lambda^2\right)^2} dy = \\ & \frac{\alpha\pi a}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 e^{-\frac{\lambda}{t} v^2}}{(b\lambda^2 v^{4/3} + \lambda^2)^2} \frac{\lambda^{3/2}}{t^{1/2}} dv = \\ & \frac{\alpha\pi a}{\lambda} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2 e^{-\frac{\lambda}{t} v^2}}{(b\lambda^2 v^{4/3} + \lambda^2)^2} \frac{\lambda^{3/2}}{t^{1/2}} dv = \\ & \frac{\alpha\pi a}{t^{1/2} \lambda^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda}{t} v^2}}{(bv^{4/3} + 1)^2} dv. \end{aligned}$$

Este mismo cambio de variable lo haremos para cada uno de los términos de la ecuación (3.11), así obtenemos para el siguiente término proveniente de la transformada de Hilbert de la función  $u_0$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\alpha a \pi}{\lambda} \frac{h^2 e^{-y^2/\lambda^2}}{(h^2 + \lambda^2)^2} dy &= \int_0^\infty \frac{bt^{2/3} y^{4/3} e^{-y^2/\lambda^2}}{(bt^{2/3} y^{4/3} + \lambda^2)^2} dy \\ &= \frac{\alpha \pi a}{t^{1/2} \lambda^{3/2}} b \int_0^\infty \frac{v^{4/3} e^{-\frac{\lambda}{t} v^2}}{(bv^{4/3} + 1)^2} dv. \end{aligned}$$

Para el primer término proveniente de  $u_{0yy}$  tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{4y^2}{\lambda^4} \frac{ae^{-y^2/\lambda^2}}{h^2 + \lambda^2} dy &= \frac{4a}{\lambda^4} \int_0^\infty \frac{y^2 e^{-y^2/\lambda^2}}{bt^{2/3} y^{4/3} + \lambda^2} dy \\ &= \frac{4a}{\lambda^{3/2} t^{3/2}} \int_0^\infty \frac{v^2 e^{-\frac{\lambda}{t} v^2}}{bv^{4/3} + 1} dv, \end{aligned} \quad (3.19)$$

este término lo podemos integrar una vez por partes para obtener

$$\int_0^\infty \frac{v^2 e^{-\frac{\lambda}{t} v^2}}{bv^{4/3} + 1} dv = \frac{t}{2\lambda} \int_0^\infty \frac{(1 - \frac{b}{3} v^{4/3}) e^{-\frac{\lambda}{t} v^2}}{(bv^{4/3} + 1)^2} dy,$$

tenemos entonces

$$\int_0^\infty \frac{4y^2}{\lambda^4} \frac{ae^{-y^2/\lambda^2}}{h^2 + \lambda^2} dy = \frac{2a}{\lambda^{5/2} t^{1/2}} \int_0^\infty \frac{(1 - \frac{b}{3} v^{4/3}) e^{-\frac{\lambda}{t} v^2}}{(bv^{4/3} + 1)^2} dy.$$

Para el segundo término proveniente de  $u_{0yy}$  tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{2}{\lambda^2} \frac{a}{h^2 + \lambda^2} e^{-y^2/\lambda^2} dy &= \frac{2a}{\lambda^2} \int_0^\infty \frac{e^{-y^2/\lambda^2}}{bt^{2/3} y^{4/3} + \lambda^2} dy \\ &= \frac{2a}{t^{1/2} \lambda^{5/2}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda}{t} v^2}}{bv^{4/3} + 1} dv. \end{aligned}$$

Evaluamos ahora el término proveniente de  $u_0^2$  para obtener

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{a^2}{2} \frac{e^{-2y^2/\lambda^2}}{(h^2 + \lambda^2)^2} dy &= \frac{a^2}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-2y^2/\lambda^2}}{bt^{2/3} y^{4/3} + \lambda^2} dy \\ &= \frac{a^2}{2t^{1/2} \lambda^{3/2}} \int_0^\infty \frac{e^{-2\frac{\lambda}{t} v^2}}{(bv^{4/3} + 1)^2} dv. \end{aligned}$$

Estudiamos ahora el término

$$a \int_0^{\infty} \frac{e^{-y^2/\lambda^2}}{h^2 + \lambda^2} (\dot{\zeta} - \dot{h}) dy.$$

Para esto utilizamos la ecuación (3.16), obteniendo así

$$\begin{aligned} a \int_0^{\infty} \frac{e^{-y^2/\lambda^2}}{h^2 + \lambda^2} (\dot{\zeta} - \dot{h}) dy &= a \int_0^{\infty} \frac{e^{-y^2/\lambda^2}}{h^2 + \lambda^2} \left( \frac{\beta}{\sqrt{6}} \frac{a}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\alpha\pi}{\lambda} \right) dy \\ &\quad - a \int_0^{\infty} \frac{e^{-y^2/\lambda^2}}{h^2 + \lambda^2} \left( \frac{\alpha^2 \pi^2 y^2}{4t^2} \right)^{1/3} dy, \end{aligned}$$

dado que

$$\dot{h} = \left( \frac{\alpha^2 \pi^2 y^2}{4t^2} \right)^{1/3},$$

notamos que para la primera integral aparecen términos muy semejantes a los ya calculados, omitiremos los detalles y escribimos directamente

$$\begin{aligned} a \int_0^{\infty} \frac{e^{-y^2/\lambda^2}}{h^2 + \lambda^2} \left( \frac{\beta}{\sqrt{6}} \frac{a}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\alpha\pi}{\lambda} \right) dy &= \\ \frac{1}{t^{1/2}} \left( \frac{\beta}{\sqrt{6}} \frac{a^2}{\lambda^{5/2}} - \frac{a}{\lambda^{5/2}} - \frac{\alpha\pi a}{\lambda^{3/2}} \right) \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{\lambda}{t} v^2}}{bv^{4/3} + 1} dv. \end{aligned}$$

Estos términos los agruparemos con los antes obtenidos. Para la integral que involucra  $\dot{h}$  tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{ae^{-y^2/\lambda^2}}{h^2 + \lambda^2} \left( \frac{\alpha^2 \pi^2 y^2}{4t^2} \right)^{1/3} dy &= \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} \frac{a}{t^{2/3}} \int_0^{\infty} \frac{y^{2/3} e^{-y^2/\lambda^2}}{bt^{2/3} y^{4/3} + \lambda^2} dy \\ &= \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} \frac{a\lambda^{1/2}}{t^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{v^{2/3} e^{-\frac{\lambda}{t} v^2}}{bv^{4/3} + 1} dv, \end{aligned}$$

notamos que este término no se puede agrupar con los términos antes obtenidos, ya que va a cero como  $t^{-3/2}$  y no como  $t^{-1/2}$  como el resto de los términos, dejaremos este término expresado por el momento. Agrupamos entonces todos los términos obtenidos y escribimos



$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left( \iint_{R(t)} u_0 \, dx dy \right) = \\
& - \frac{2}{t^{1/2}} \left\{ \frac{\alpha \pi a}{\lambda^{3/2}} \int_0^\infty \left[ \frac{1 - bv^{4/3}}{(bv^{4/3} + 1)^2} - \frac{1}{bv^{4/3} + 1} \right] e^{-\frac{\lambda}{t} v^2} dv \right. \\
& + \frac{a}{\lambda^{5/2}} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{bv^{4/3} + 1} - 2 \frac{1 - \frac{b}{3} v^{4/3}}{(bv^{4/3} + 1)^2} \right] e^{-\frac{\lambda}{t} v^2} dv \\
& \left. + \beta \frac{a^2}{\lambda^{5/2}} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{\sqrt{6} bv^{4/3} + 1} e^{-\frac{\lambda}{t} v^2} - \frac{1}{2 (bv^{4/3} + 1)^2} e^{-2\frac{\lambda}{t} v^2} \right] e^{-\frac{\lambda}{t} v^2} dv \right\} \\
& + 2 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} \frac{a \lambda^{1/2}}{t^{3/2}} \int_0^\infty \frac{v^{2/3} e^{-\frac{\lambda}{t} v^2}}{bv^{4/3} + 1} dv. \tag{3.20}
\end{aligned}$$

Regresamos a la expresión (3.5)

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left( \iint_{R(y,t)} u_0(x, y, t) \, dx dy \right) = \\
& \frac{d}{dt} \left( \frac{2a}{\lambda} \left\{ \frac{\lambda \sqrt{\pi^5}}{4} + \int_0^\infty \arctan \left( \frac{h(y, t)}{\lambda} \right) e^{-y^2/\lambda^2} dy \right\} \right) = \\
& \frac{\sqrt{\pi^5}}{2} \dot{a} + \frac{2a}{\lambda} \frac{d}{dt} \int_0^\infty \arctan \left( \frac{h(y, t)}{\lambda} \right) e^{-y^2/\lambda^2} dy = \\
& \frac{\sqrt{\pi^5}}{2} \dot{a} + \frac{2a}{\lambda} \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left( \arctan \left( \frac{h(y, t)}{\lambda} \right) e^{-y^2/\lambda^2} \right) dy.
\end{aligned}$$

Derivando el término entre paréntesis de la integral anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left( \arctan \left( \frac{h(y, t)}{\lambda} \right) e^{-y^2/\lambda^2} \right) = \\
& e^{-y^2/\lambda^2} (\arctan(h/\lambda))' + \arctan(h/\lambda) \left( e^{-y^2/\lambda^2} \right)' = \\
& e^{-y^2/\lambda^2} \frac{\left( \frac{h}{\lambda} \right)'}{\frac{h^2}{\lambda^2} + 1} + \arctan(h/\lambda) \left( \frac{2y^2}{\lambda^3} \right) \dot{\lambda} e^{-y^2/\lambda^2}
\end{aligned}$$

y

$$(h/\lambda)' = 3 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2 y^2}{4} \right)^{1/3} \left( \frac{t^{-2/3} \lambda - t^{1/3} \dot{\lambda}}{\lambda^2} \right).$$

Reescribimos entonces la integral habiendo evaluado la derivada

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left( \arctan \left( \frac{h(y,t)}{\lambda} \right) e^{-y^2/\lambda^2} \right) dy = \\ & \int_0^\infty \left[ 3 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2 y^2}{4} \right)^{1/3} \left( \frac{t^{-2/3} \lambda^{-1} - t^{1/3} \lambda^{-2} \dot{\lambda}}{b \frac{t^{2/3} y^{4/3}}{\lambda^2} + 1} \right) \right. \\ & \left. + \frac{2y^2 \dot{\lambda}}{\lambda^3} \arctan(h/\lambda) \right] e^{-y^2/\lambda^2} dy = \\ & \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} \frac{1}{t^{2/3} \lambda} \int_0^\infty \frac{y^{2/3} e^{-y^2/\lambda^2}}{b \frac{t^{2/3} y^{4/3}}{\lambda^2} + 1} dy \\ & + \frac{2\dot{\lambda}}{\lambda^3} \int_0^\infty \left( y^2 \arctan(h/\lambda) - \right. \\ & \left. - 3 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} \frac{t^{1/3}}{\lambda^2} \frac{y^{2/3}}{b \frac{t^{2/3} y^{4/3}}{\lambda^2} + 1} \right) e^{-y^2/\lambda^2} dy. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Analizamos el primer término de la expresión anterior utilizando el mismo cambio de variable

$$v = \frac{t^{1/2}}{\lambda^{3/2}} y,$$

entonces

$$\left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} \frac{1}{t^{2/3} \lambda} \int_0^\infty \frac{y^{2/3} e^{-y^2/\lambda^2}}{b \frac{t^{2/3} y^{4/3}}{\lambda^2} + 1} dy = \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} \frac{\lambda^{3/2}}{t^{2/3}} \int_0^\infty \frac{v^{2/3} e^{-\frac{\lambda}{t} v^2}}{b v^{4/3} + 1} dy$$

y multiplicando este término por  $2a/\lambda$  obtenemos

$$2 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} \frac{a \lambda^{1/2}}{t^{2/3}} \int_0^\infty \frac{v^{2/3} e^{-\frac{\lambda}{t} v^2}}{b v^{4/3} + 1} dy,$$

que es idéntico al último término de la ecuación (3.20) y por lo tanto se cancelarán entre sí. Para el término

$$\int_0^\infty \frac{2y^2}{\lambda^3} e^{-y^2/\lambda^2} \arctan(h/\lambda) dy =$$

$$\frac{2}{\lambda^3} \int_0^\infty y^2 e^{-y^2/\lambda^2} \arctan \left[ 3 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2 t}{4} \right)^{1/3} \frac{y^{2/3}}{\lambda} \right] dy,$$

podemos integrar una vez por partes las funciones  $ye^{-y^2/\lambda^2}$  y  $y \arctan \left[ 3 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2 t}{4} \right)^{1/3} \frac{y^{2/3}}{\lambda} \right]$ , de forma tal que se tiene

$$\frac{2}{\lambda^3} \int_0^\infty y^2 e^{-y^2/\lambda^2} \arctan \left[ 3 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2 t}{4} \right)^{1/3} \frac{y^{2/3}}{\lambda} \right] dy =$$

$$\frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \left[ \arctan(h/\lambda) + \frac{2}{\lambda} \left( \frac{\alpha^2 \pi^2 t}{4} \right)^{1/3} \frac{y^{2/3}}{b \frac{t^{2/3} y^{4/3}}{\lambda^2} + 1} \right] e^{-y^2/\lambda^2} dy.$$

El último término de la expresión anterior es igual al último término de la ecuación (3.21), y podemos hacer el mismo cambio de variable que hemos hecho anteriormente para obtener

$$\frac{2}{\lambda} \left( \frac{\alpha^2 \pi^2 t}{4} \right)^{1/3} \int_0^\infty \frac{y^{2/3}}{b \frac{t^{2/3} y^{4/3}}{\lambda^2} + 1} e^{-y^2/\lambda^2} dy =$$

$$\frac{\lambda^{3/2}}{t^{3/2}} \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} \int_0^\infty \frac{v^{2/3}}{bv^{4/3} + 1} e^{-\frac{\lambda}{t} v^2} dv,$$

de igual forma podemos cambiar variable para la integral que involucra el arcotangente para escribir

$$\int_0^\infty \arctan \left[ 3 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2 t}{4} \right)^{1/3} \frac{y^{2/3}}{\lambda} \right] e^{-y^2/\lambda^2} dy =$$

$$\frac{\lambda^{3/2}}{t^{1/2}} \int_0^\infty \arctan \left( 3 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} v^{2/3} \right) e^{-\frac{\lambda}{t} v^2} dv \quad (3.22)$$

y obtener la expresión completa

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^{3/2}}{2} \dot{a} + \frac{2a\dot{\lambda}}{t^{1/2}\lambda^{1/2}} \left\{ \int_0^\infty \arctan \left[ 3 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} v^{2/3} \right] e^{-\frac{\lambda}{t} v^2} dv \right. \\ & \left. - \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} \int_0^\infty \frac{v^{2/3} e^{-\frac{\lambda}{t} v^2}}{bv^{4/3} + 1} dv \right\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ahora utilizaremos una vez más la relación obtenida a través de la conservación del momento para escribir

$$\dot{a} = \frac{a_0}{\lambda_0} \dot{\lambda}$$

y

$$a = \frac{a_0}{\lambda_0} \lambda.$$

Con lo cual escribimos, junto con la ecuación (3.20) la relación completa para la masa de la onda principal como

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\pi^{3/2}}{2} + \frac{2\lambda^{1/2}}{t^{1/2}} \int_0^\infty \left( \arctan \left[ 3 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} v^{2/3} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right) \frac{v^{2/3}}{bv^{4/3} + 1} \right) e^{-\frac{\lambda}{t} v^2} dv \right\} \frac{a_0}{\lambda_0} \dot{\lambda} = \\ & - \frac{2}{t^{1/2}} \left\{ \frac{\alpha \pi a}{\lambda^{3/2}} \int_0^\infty \left[ \frac{1 - bv^{4/3}}{(bv^{4/3} + 1)^2} - \frac{1}{bv^{4/3} + 1} \right] e^{-\frac{\lambda}{t} v^2} dv \right. \\ & + \frac{a}{\lambda^{5/2}} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{bv^{4/3} + 1} - 2 \frac{1 - \frac{b}{3} v^{4/3}}{(bv^{4/3} + 1)^2} \right] e^{-\frac{\lambda}{t} v^2} dv \\ & \left. + \frac{a^2}{\lambda^{5/2}} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{e^{-\frac{\lambda}{t} v^2}}{bv^{4/3} + 1} - \frac{1}{2} \frac{e^{-2\frac{\lambda}{t} v^2}}{(bv^{4/3} + 1)^2} \right] e^{-\frac{\lambda}{t} v^2} dv \right\}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

que es la forma diferencial que buscamos. Observamos de la relación anterior que cuando  $t \rightarrow \infty$  el lado derecho de la ecuación va a cero mientras que el lado izquierdo conserva el término  $\pi^{3/2}/2$  por lo que la ecuación diferencial no es singular y se tiene un punto de equilibrio  $\dot{\lambda} = 0$ , lo cual quiere decir que la onda principal se estabiliza, como era de esperarse. Buscamos entonces la forma de este punto de equilibrio estudiando el término

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha\pi a}{\lambda^{3/2}} \int_0^\infty \left[ \frac{1 - bv^{4/3}}{(bv^{4/3} + 1)^2} - \frac{1}{bv^{4/3} + 1} \right] e^{-\frac{\lambda}{t}v^2} dv \\
& + \frac{a}{\lambda^{5/2}} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{bv^{4/3} + 1} - 2 \frac{1 - \frac{b}{3}v^{4/3}}{(bv^{4/3} + 1)^2} \right] e^{-\frac{\lambda}{t}v^2} dv \\
& + \beta \frac{a^2}{\lambda^{5/2}} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{e^{-\frac{\lambda}{t}v^2}}{bv^{4/3} + 1} - \frac{1}{2} \frac{e^{-2\frac{\lambda}{t}v^2}}{(bv^{4/3} + 1)^2} \right] e^{-\frac{\lambda}{t}v^2} dv = 0,
\end{aligned}$$

multiplicando por  $\lambda^{3/2}$  y dividiendo por  $a$  obtenemos

$$\begin{aligned}
& \alpha\pi \int_0^\infty \left[ \frac{1 - bv^{4/3}}{(bv^{4/3} + 1)^2} - \frac{1}{bv^{4/3} + 1} \right] e^{-\frac{\lambda}{t}v^2} dv \\
& + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{bv^{4/3} + 1} - 2 \frac{1 - \frac{b}{3}v^{4/3}}{(bv^{4/3} + 1)^2} \right] e^{-\frac{\lambda}{t}v^2} dv \\
& + \frac{a}{\lambda} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{e^{-\frac{\lambda}{t}v^2}}{bv^{4/3} + 1} - \frac{1}{2} \frac{e^{-2\frac{\lambda}{t}v^2}}{(bv^{4/3} + 1)^2} \right] e^{-\frac{\lambda}{t}v^2} dv = 0.
\end{aligned}$$

Procedemos a realizar el análisis asintótico, tomamos en la relación anterior el límite cuando  $t$  va a infinito, es claro que obtenemos

$$\begin{aligned}
& \alpha\pi \int_0^\infty \left[ \frac{1 - bv^{4/3}}{(bv^{4/3} + 1)^2} - \frac{1}{bv^{4/3} + 1} \right] dv \\
& + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{bv^{4/3} + 1} - 2 \frac{1 - \frac{b}{3}v^{4/3}}{(bv^{4/3} + 1)^2} \right] dv \\
& + \beta \frac{a}{\lambda} \int_0^\infty \left[ \frac{1/\sqrt{6}}{bv^{4/3} + 1} - \frac{1/2}{(bv^{4/3} + 1)^2} \right] dv = 0.
\end{aligned}$$

Podemos simplificar un poco la expresión anterior, quedando así

$$\begin{aligned}
& \alpha\pi \int_0^\infty \left[ \frac{-2bv^{4/3}}{(bv^{4/3} + 1)^2} \right] dv + \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \left[ \frac{\frac{5b}{3}v^{4/3} - 1}{(bv^{4/3} - 1)^2} \right] dv \\
& + \beta \frac{a}{\lambda} \int_0^\infty \left[ \frac{1/\sqrt{6}}{bv^{4/3} + 1} - \frac{1/2}{(bv^{4/3} + 1)^2} \right] dv = 0. \quad (3.25)
\end{aligned}$$

Las integrales anteriores pueden ser evaluadas explícitamente,

$$\int_0^{\infty} \frac{dv}{bv^{4/3} + 1} = \frac{1}{\sqrt{6\alpha}},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dv}{(bv^{4/3} + 1)^2} = \frac{1}{4\sqrt{6\alpha}},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{v^{4/3} dv}{(bv^{4/3} + 1)^2} = \frac{1}{6\sqrt{3}2^{1/6}\alpha^{7/3}\pi^{4/3}},$$

sustituyendo estos valores en la expresión (3.25) obtenemos

$$-\frac{2b\pi\alpha}{6\sqrt{3}2^{1/6}\alpha^{7/3}\pi^{4/3}} + \frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{5b}{3} \frac{1}{6\sqrt{3}2^{1/6}\alpha^{7/3}\pi^{4/3}} - \frac{1}{4\sqrt{6\alpha}} \right\} + \beta \frac{a}{\lambda} \left\{ \frac{1}{\sqrt{6\alpha}} - \frac{1}{2} \frac{1}{4\sqrt{6\alpha}} \right\} = 0,$$

recordando el valor de  $b$

$$b = 9 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{2/3},$$

entonces

$$\frac{b}{6\sqrt{3}2^{1/6}\alpha^{7/3}\pi^{4/3}} = \frac{\sqrt{3}}{2^{5/2}\alpha}$$

y la expresión anterior será así

$$-\frac{\sqrt{3}\pi}{2^{3/2}} + \frac{1}{\alpha\lambda} \left( \frac{5}{\sqrt{3}2^{5/2}} - \frac{1}{4\sqrt{6}} \right) + \frac{\beta a}{\alpha\lambda} \left( \frac{1}{6} - \frac{1}{8\sqrt{6}} \right) = 0,$$

despejando a  $a$  de la expresión anterior obtenemos

$$a \cong \frac{1}{\beta} (16,64\alpha\lambda - 0,3531). \quad (3.26)$$

Recordamos ahora la expresión (2.16) obtenida el capítulo anterior

$$a = \frac{1}{B} (D\lambda + 2A),$$

evaluando numéricamente los valores anteriores obtenemos

$$a \cong \frac{1}{\beta}(7,69\alpha\lambda + 9,79).$$

Comparando la expresión (3.26) con la expresión anterior notamos que, aunque ambas relaciones tienen la misma forma, éstas difieren en la ordenada al origen; en el análisis realizado utilizando métodos variacionales encontramos que la ordenada al origen debe ser positiva, pero hemos encontrado mediante las leyes de conservación y el análisis asintótico que esto no se satisface. Este resultado era de esperarse ya que la función de prueba escogida no es una solución exacta a la ecuación de Benjamin-Ono bi-dimensional, y los términos despreciados cuando se utilizaron las leyes de conservación adquieren importancia. Es por esto que debemos modificar algún parámetro de la onda coherente de modo que en los puntos de equilibrio se recupere la misma forma que aquella encontrada mediante el análisis variacional. Esto lo haremos en la sección siguiente.

### 3.3. Velocidad Modificada.

Sabemos de los estudios de las ecuaciones de Benjamin-Ono en una dimensión [11] y de la ecuación de ZK [9] que es natural modificar la velocidad de la onda añadiendo un flujo medio de modo tal que al utilizar las ecuaciones de conservación se recuperen los puntos de equilibrio encontrados con el análisis variacional. De las leyes de conservación y del análisis variacional encontramos una relación muy semejante para la velocidad de la onda, estas fueron respectivamente

$$c = \frac{7\beta}{8\sqrt{6}} \frac{a}{\lambda^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{\lambda^2} - \frac{5\alpha\pi}{8} \frac{1}{\lambda},$$

$$\dot{\zeta} = \frac{\beta}{\sqrt{6}} \frac{a}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} - \alpha\pi \frac{1}{\lambda}.$$

Notamos que no sólo tienen la misma dependencia en  $a$  y  $\lambda$ , sino que los valores numéricos en ambas relaciones son muy semejantes. La forma en que habremos de modificar la velocidad será la siguiente, añadiremos un parámetro libre  $\nu$  de tal forma que [?, ?, minzoni] cuando el valor de  $a$  sea aquél encontrado para el punto de equilibrio, la velocidad sea aquélla del punto de equilibrio sin importar el valor de  $\nu$ . Siendo así, escribimos

$$\dot{\zeta} = \frac{7\beta}{8\sqrt{6}}(1 + \delta\nu) \frac{a}{\lambda^2} - \frac{3}{2}(1 + \gamma\nu) \frac{1}{\lambda^2} - \frac{5\alpha\pi}{8}(1 + \epsilon\nu) \frac{1}{\lambda},$$

entonces

$$\dot{\zeta} = \frac{7\beta}{8\sqrt{6}} \frac{a}{\lambda^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{\lambda^2} - \frac{5\alpha\pi}{8} \frac{1}{\lambda} + \nu \left( \frac{7\beta\delta}{8\sqrt{6}} \frac{a}{\lambda^2} - \frac{3\gamma}{2} \frac{1}{\lambda^2} - \frac{5\alpha\pi\epsilon}{8} \frac{1}{\lambda} \right).$$

En el punto de equilibrio

$$a = \frac{1}{\beta} (\sqrt{6}\alpha\pi\lambda + 4\sqrt{6}),$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{7\beta\delta}{8\sqrt{6}} \frac{\sqrt{6}\alpha\pi\lambda + 4\sqrt{6}}{\beta\lambda^2} - \frac{3\gamma}{2} \frac{1}{\lambda^2} - \frac{5\alpha\pi\epsilon}{8} \frac{1}{\lambda} \right) = \\ \frac{1}{\lambda} \left( \frac{7\delta\alpha\pi}{8} - \frac{5\pi\alpha\epsilon}{8} \right) + \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{28\delta}{8} - \frac{3\gamma}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Obtenemos de esta forma, haciendo  $\delta = 1$ ,

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{7}{5}, \\ \gamma &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

y la velocidad modificada es entonces

$$\dot{\zeta} = \frac{7\beta}{8\sqrt{6}} (1 + \nu) \frac{a}{\lambda^2} - \frac{3}{2} \left(1 + \frac{7}{5}\nu\right) \frac{1}{\lambda^2} - \frac{5\alpha\pi}{8} \left(1 + \frac{7}{3}\nu\right) \frac{1}{\lambda}. \quad (3.27)$$

Recuperamos ahora la expresión obtenida para la conservación de masa, a saber

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \iint_{R(t)} u_0 \, dx dy \right) &= - \frac{2}{t^{1/2}} \left\{ \frac{\alpha\pi a}{\lambda^{3/2}} \int_0^\infty \frac{1 - bv^{4/3}}{(bv^{4/3} + 1)^2} e^{-\frac{\lambda}{t}v^2} \, dv \right. \\ &\quad + \frac{2a}{\lambda^{5/2}} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{bv^{4/3} + 1} - \frac{1 - \frac{b}{3}v^{4/3}}{(bv^{4/3} + 1)^2} \right] e^{-\frac{\lambda}{t}v^2} \, dv \\ &\quad \left. - \frac{\beta}{2} \frac{a^2}{\lambda^{5/2}} \int_0^\infty \frac{e^{-2\frac{\lambda}{t}v^2}}{(bv^{4/3} + 1)^2} \, dv + \frac{a}{\lambda^{1/2}} \dot{\zeta} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda}{t}v^2}}{bv^{4/3} + 1} \, dv \right\} \\ &\quad + 2 \left( \frac{\alpha^2\pi^2}{4} \right)^{1/3} \frac{a\lambda^{1/2}}{t^{3/2}} \int_0^\infty \frac{v^{2/3} e^{-\frac{\lambda}{t}v^2}}{bv^{4/3} + 1} \, dv. \end{aligned}$$



Nos concentramos en el término entre corchetes, ya que sabemos que es el que nos dará los puntos de equilibrio. Escribimos entonces en la expresión anterior la velocidad modificada y simplificamos el segundo término del lado derecho

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha\pi a}{\lambda^{3/2}} \int_0^\infty \frac{1 - bv^{4/3}}{(bv^{4/3} + 1)^2} e^{-\frac{\lambda}{t}v^2} dv \\ & + \frac{a}{\lambda^{5/2}} \int_0^\infty \frac{\frac{8b}{3}v^{4/3}}{(bv^{4/3} + 1)^2} e^{-\frac{\lambda}{t}v^2} dv \\ & - \frac{\beta}{2} \frac{a^2}{\lambda^{5/2}} \int_0^\infty \frac{e^{-2\frac{\lambda}{t}v^2}}{(bv^{4/3} + 1)^2} dv \\ & + \frac{a}{\lambda^{1/2}} \left( \frac{7\beta}{8\sqrt{6}}(1 + \nu) \frac{a}{\lambda^2} - \frac{3}{2}(1 + \frac{7}{5}\nu) \frac{1}{\lambda^2} - \frac{5\alpha\pi}{8}(1 + \frac{7}{3}\nu) \frac{1}{\lambda} \right) \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda}{t}v^2} dv}{bv^{4/3} + 1}. \end{aligned}$$

Agrupando términos obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha\pi a}{\lambda^{3/2}} \int_0^\infty \left[ \frac{1 - bv^{4/3}}{(bv^{4/3} + 1)^2} - \frac{\frac{5}{8}(1 + \frac{7}{5}\nu)}{bv^{4/3} + 1} \right] e^{-\frac{\lambda}{t}v^2} dv \\ & + \frac{a}{\lambda^{5/2}} \int_0^\infty \left[ \frac{\frac{8b}{3}v^{4/3}}{(bv^{4/3} + 1)^2} - \frac{\frac{3}{2}(1 + \frac{7}{3}\nu)}{bv^{4/3} + 1} \right] e^{-\frac{\lambda}{t}v^2} dv \\ & - \beta \frac{a^2}{\lambda^{5/2}} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{2} \frac{e^{-2\frac{\lambda}{t}v^2}}{(bv^{4/3} + 1)^2} - \frac{7}{8\sqrt{6}}(1 + \nu) \frac{e^{-\frac{\lambda}{t}v^2}}{bv^{4/3} + 1} \right] dv. \end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio serán aquéllos que satisfagan la relación anterior igual a cero, de la cual simplificando un poco obtenemos

$$\begin{aligned} & - \frac{\alpha\pi a}{8\lambda^{3/2}} \int_0^\infty \frac{(13 + 7\nu)bv^{4/3} - (3 - 7\nu)}{(bv^{4/3} + 1)^2} e^{-\frac{\lambda}{t}v^2} dv \\ & - \frac{a}{\lambda^{5/2}} \int_0^\infty \frac{(\frac{7}{2}\nu - \frac{7}{6})bv^{4/3} + (\frac{3}{2} + \frac{7}{2}\nu)}{(bv^{4/3} + 1)^2} e^{-\frac{\lambda}{t}v^2} dv \\ & - \beta \frac{a^2}{\lambda^{5/2}} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{2} \frac{e^{-2\frac{\lambda}{t}v^2}}{(bv^{4/3} + 1)^2} - \frac{7}{8\sqrt{6}}(1 + \nu) \frac{e^{-\frac{\lambda}{t}v^2}}{bv^{4/3} + 1} \right] dv = 0. \end{aligned}$$

Ahora buscamos que los dos primeros términos de la expresión anterior sean siempre positivos para que de esta forma se recupere la forma funcional para la amplitud en el punto de equilibrio, de este razonamiento obtenemos que

$$v > \frac{3}{7}.$$

Este resultado se obtiene de manera análoga en el estudio de la ecuación de Benjamin-Ono, donde se pide que  $\nu > -1/2$ , el valor adecuado para  $\nu$  será obtenido mediante la comparación de los resultados de resolver numéricamente la ecuación (3.1) y la ecuación diferencial que encontraremos más adelante. Nuevamente tomamos el límite cuando  $t \rightarrow \infty$ , de esta forma

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha\pi a}{8\lambda^{3/2}} \int_0^\infty \frac{(13+7\nu)bv^{4/3} - (3-7\nu)}{(bv^{4/3}+1)^2} dv \\ & -\frac{a}{\lambda^{5/2}} \int_0^\infty \frac{(\frac{7}{2}\nu - \frac{7}{6})bv^{4/3} + (\frac{3}{2} + \frac{7}{2}\nu)}{(bv^{4/3}+1)^2} dv \\ & -\beta \frac{a^2}{\lambda^{5/2}} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{2} \frac{1}{(bv^{4/3}+1)^2} - \frac{7}{8\sqrt{6}}(1+\nu) \frac{1}{bv^{4/3}+1} \right] dv = 0. \end{aligned}$$

Evaluando nuevamente las integrales y simplificando un poco la expresión obtenemos

$$\begin{aligned} & -\frac{\pi a}{8\lambda^{3/2}} \left( (13+7\nu) \sqrt{\frac{3}{32} + \frac{7\nu-3}{4\sqrt{6}}} \right) \\ & -\frac{a}{\alpha\lambda^{5/2}} \left( \left( \frac{7}{2}\nu - \frac{7}{6} \right) \sqrt{\frac{3}{32} + \frac{3+7\nu}{8\sqrt{6}}} \right) - \frac{\beta a^2}{\alpha\lambda^{5/2}} \left( \frac{1}{8\sqrt{6}} - \frac{7(1+\nu)}{48} \right) = 0 \end{aligned}$$

y los puntos de equilibrio serán entonces

$$\begin{aligned} & \beta a \left( \frac{7(1+\nu)}{48} - \frac{1}{8\sqrt{6}} \right) = \\ & \frac{\pi}{8} \alpha \lambda \left( (13+7\nu) \sqrt{\frac{3}{32} + \frac{7\nu-3}{4\sqrt{6}}} \right) + \left( \left( \frac{7}{2}\nu - \frac{7}{6} \right) \sqrt{\frac{3}{32} + \frac{3+7\nu}{8\sqrt{6}}} \right). \quad (3.28) \end{aligned}$$

Notamos además que basta que  $\nu$  sea mayor que cero para que el término del lado izquierdo de la relación anterior sea positivo. De esta forma, si se satisface que  $\nu > 3/7$ , todos los términos de la expresión anterior serán positivos y se obtendrá la misma forma que aquella obtenida mediante el análisis variacional; además, podemos proponer un valor de  $\nu = 1$  para verificar numéricamente el resultado anterior. Siendo así, obtenemos que

$$a \cong \frac{1}{\beta} (4,1\alpha\lambda + 3,04),$$

lo cual se encuentra en los órdenes de magnitud de los valores encontrados para la amplitud mediante el análisis funcional; de cualquier forma, el valor correcto de  $\nu$  será encontrado por medio de la resolución numérica de la ecuación diferencial final. De esta forma podemos comprobar que el análisis asintótico realizado recupera de manera satisfactoria el punto de equilibrio, y por lo tanto estamos en condiciones de escribir la ecuación diferencial que nos describirá el comportamiento del ancho de la onda  $\lambda$ .

### 3.4. Evolución de $\lambda$ .

Escribimos ahora la expresión completa correspondiente a la conservación de masa de la onda principal (eq. (3.24)) pero ahora con la velocidad modificada, por lo que obtenemos

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\pi^{3/2}}{2} + \frac{2\lambda^{1/2}}{t^{1/2}} \int_0^\infty \left( \arctan \left[ 3 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} v^{2/3} \right] \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} \frac{v^{2/3}}{bv^{4/3} + 1} \right) e^{-\frac{\lambda}{t} v^2} dv \right\} \frac{a_0}{\lambda_0} \dot{\lambda} = \\ & \frac{2}{t^{1/2}} \left\{ \frac{\alpha \pi a}{8\lambda^{3/2}} \int_0^\infty \frac{(13 + 7\nu)bv^{4/3} - (3 - 7\nu)}{(bv^{4/3} + 1)^2} e^{-\frac{\lambda}{t} v^2} dv \right. \\ & + \frac{a}{\lambda^{5/2}} \int_0^\infty \frac{(\frac{7}{2}\nu - \frac{7}{6})bv^{4/3} + (\frac{3}{2} + \frac{7}{2}\nu)}{(bv^{4/3} + 1)^2} e^{-\frac{\lambda}{t} v^2} dv \\ & \left. + \beta \frac{a^2}{\lambda^{5/2}} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{2} \frac{e^{-2\frac{\lambda}{t} v^2}}{(bv^{4/3} + 1)^2} - \frac{7}{8\sqrt{6}} (1 + \nu) \frac{e^{-\frac{\lambda}{t} v^2}}{bv^{4/3} + 1} \right] dv \right\}. \quad (3.29) \end{aligned}$$

Haremos ahora el argumento de análisis asintótico para los términos que multiplican a  $\dot{\lambda}$ , este será muy semejante al realizado para los demás términos. Comenzamos por

$$\int_0^\infty \arctan \left[ 3 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} v^{2/3} \right] e^{-\frac{\lambda}{t} v^2} dv,$$

hacemos el cambio de variable

$$u = \sqrt{\frac{\lambda}{t}}v,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \arctan \left[ 3 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} v^{2/3} \right] e^{-\frac{\lambda}{t}v^2} dv = \\ & \sqrt{\frac{t}{\lambda}} \int_0^\infty \arctan \left[ 3 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} \left( \frac{t}{\lambda} \right)^{1/3} u^{2/3} \right] e^{-u^2} du, \end{aligned}$$

en el límite cuando  $t \rightarrow \infty$

$$\arctan \left[ 3 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} \left( \frac{t}{\lambda} \right)^{1/3} u^{2/3} \right] \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

de esta manera

$$\int_0^\infty \arctan \left[ 3 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3} v^{2/3} \right] e^{-\frac{\lambda}{t}v^2} dv \rightarrow \sqrt{\frac{t}{\lambda}} \frac{\pi^{3/2}}{2}.$$

Por otro lado, tenemos

$$\int_0^\infty \frac{v^{2/3}}{bv^{4/3} + 1} e^{-\frac{\lambda}{t}v^2} dv,$$

hacemos nuevamente el cambio de variable

$$u = \sqrt{\frac{\lambda}{t}}v,$$

para obtener

$$\int_0^\infty \frac{v^{2/3}}{bv^{4/3} + 1} e^{-\frac{\lambda}{t}v^2} dv = \left( \frac{t}{\lambda} \right)^{5/6} \int_0^\infty \frac{u^{2/3}}{b\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{2/3}u^{4/3} + 1} e^{-u^2} du,$$

y en el límite cuando  $t \rightarrow \infty$  tenemos

$$\int_0^\infty \frac{u^{2/3}}{b\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{2/3}u^{4/3} + 1} e^{-u^2} du \rightarrow \int_0^\infty \frac{u^{2/3}}{b\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{2/3}u^{4/3}} e^{-u^2} du,$$

simplificando y haciendo el cambio de variable

$$u^2 = v,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{5/6} \int_0^\infty \frac{u^{2/3}}{b\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{2/3}u^{4/3}} e^{-u^2} du &= \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{1/6} \frac{1}{b} \int_0^\infty \frac{e^{-v}}{v^{1/3} 2\sqrt{v}} dv \\ &= \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{1/6} \frac{1}{2b} \int_0^\infty \frac{e^{-v}}{v^{5/6}} dv \\ &= \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{1/6} \frac{1}{2b} \Gamma(1/6). \end{aligned}$$

Reescribimos entonces la ecuación (3.29) en el límite cuando  $t \rightarrow \infty$ , dejando implícitos los valores de las integrales involucradas en términos de las constantes

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty \frac{1}{(bv^{4/3} + 1)^2} dv = \frac{1}{4\alpha\sqrt{6}} \\ B &= \int_0^\infty \frac{v^{4/3}}{(bv^{4/3} + 1)^2} dv = \frac{1}{3^{3/2}2^{1/6}\alpha^{7/3}\pi^{4/3}} \\ C &= \int_0^\infty \frac{1}{bv^{4/3} + 1} dv = \frac{1}{\alpha\sqrt{6}} \end{aligned}$$

tenemos entonces

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\pi^{3/2}}{2} + \frac{2\lambda^{1/2}}{t^{1/2}} \left( \frac{\pi^{3/2}}{4} \sqrt{\frac{t}{\lambda}} - \frac{\Gamma(1/6)}{18 \left(\frac{\alpha^2\pi^2}{4}\right)^{1/3}} \left(\frac{\lambda}{t}\right)^{1/6} \right) \right\} \frac{a_0}{\lambda_0} \dot{\lambda} = \\ &\left\{ \pi^{3/2} - \frac{\Gamma(1/6)}{9 \left(\frac{\alpha^2\pi^2}{4}\right)^{1/3}} \left(\frac{\lambda}{t}\right)^{1/3} \right\} \frac{a_0}{\lambda_0} \dot{\lambda} = \\ &\frac{2}{t^{1/2}} \left\{ \frac{\alpha\pi a}{8\lambda^{3/2}} ((13 + 7\nu)bB - (3 - 7\nu)A) \right. \\ &+ \frac{a}{2\lambda^{5/2}} \left( (7\nu - \frac{7}{3})bB + (3 + 7\nu)A \right) \\ &\left. + \beta \frac{a^2}{\lambda^{5/2}} \left( \frac{A}{2} - \frac{7}{8\sqrt{6}}(1 + \nu)C \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Hemos encontrado las 3 expresiones que determinan la evolución de la estructura coherente. Tenemos la ecuación (3.12) correspondiente a la conservación del momento

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{a^2}{\lambda^2} \right) = 0,$$

la ecuación (3.27) correspondiente a la velocidad modificada de la onda

$$\dot{\zeta} = \frac{7\beta}{8\sqrt{6}}(1 + \nu) \frac{a}{\lambda^2} - \frac{3}{2} \left(1 + \frac{7}{5}\nu\right) \frac{1}{\lambda^2} - \frac{5\alpha\pi}{8} \left(1 + \frac{7}{3}\nu\right) \frac{1}{\lambda},$$

las cuales, junto con la ecuación (3.30) correspondiente a la masa de la estructura coherente, utilizaremos para encontrar la ecuación diferencial que describe la evolución del parámetro  $\lambda$ . Escribimos primero

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{a_0}{\lambda_0},$$

de forma tal que la ecuación (3.30) se puede escribir como

$$\left\{ \pi^{3/2} - \frac{\Gamma(1/6)}{9 \left(\frac{\alpha^2 \pi^2}{4}\right)^{1/3}} \left(\frac{\lambda}{t}\right)^{1/3} \right\} \dot{\lambda} = \frac{2}{t^{1/2}} \left\{ \frac{1}{8\lambda^{1/2}} \left[ \alpha\pi \left( (13 + 7\nu)bB - (3 - 7\nu)A \right) - \beta \frac{a_0}{\lambda_0} \left( \frac{7}{\sqrt{6}}(1 + \nu)C - 4A \right) \right] + \frac{1}{2\lambda^{3/2}} \left( (7\nu - \frac{7}{3})bB + (3 + 7\nu)A \right) \right\}. \quad (3.31)$$

Que es la ecuación diferencial que estamos buscando para  $\lambda$ . En la siguiente sección se resolverá esta ecuación numéricamente y se compararán los resultados con la resolución numérica de la ecuación (3.1).

### 3.5. Resultados Numéricos.

En la Figura 3.3 se presenta una gráfica de  $\lambda$  como función del tiempo. Esta gráfica corresponde a la solución numérica de la ecuación (3.1) realizada por el Dr. Noel Smyth, con valores iniciales  $a_0=4$  y  $\lambda_0=2$ ,  $\alpha = \frac{1}{\pi}$  y  $\beta = 2$ , los valores de estas constantes serán los mismos para el resto del análisis numérico. Observamos de la Figura 3.3 que el valor numérico de  $\lambda$  es de

aproximadamente 0.92. Con este valor calcularemos el valor de  $\nu$  que mejor se ajusta al punto de equilibrio en la ecuación (3.31). Definimos las funciones

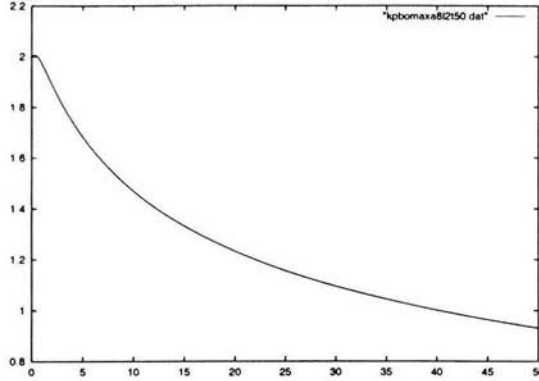


Figura 3.3: Gráfica de  $\lambda$  como función del tiempo resultado de resolver numéricamente la ecuación (3.1) para una condición inicial de la forma (3.2) con  $a_0 = 8$  y  $\lambda = 2$  al tiempo  $t = 50$ . Cortesía del doctor N.F. Smyth.

$$H(\nu) = ((13 + 7\nu)bB - (3 - 7\nu)A),$$

$$G(\nu) = \left( \frac{7}{\sqrt{6}}(1 + \nu)C - 4A \right),$$

$$\left( (7\nu - \frac{7}{3})bB + (3 + 7\nu)A \right).$$

Reescribimos los puntos de equilibrio de  $\lambda$  como

$$\frac{1}{8\sqrt{\lambda_{eq}}} \left( \alpha\pi H(\nu) - \beta \frac{a_0}{\lambda_0} G(\nu) \right) + \frac{1}{2(\lambda_{eq})^{3/2}} F(\nu) = 0,$$

resolviendo esta ecuación para  $a_0=8$ ,  $\lambda_0=2$  y  $\lambda_{eq} = 0.92$  obtenemos que el valor de  $\nu$  es

$$\nu = 0.7.$$

Notamos que ahora el valor de  $\lambda$  cuando  $t \rightarrow \infty$  depende únicamente del valor de  $\frac{a_0}{\lambda_0}$ , resolvemos entonces para  $\lambda_{eq}$  y obtenemos

$$\lambda_{eq} = \frac{4F(0.7)}{\alpha\pi H(0.7) - \beta \frac{a_0}{\lambda_0} G(0.7)}. \quad (3.32)$$

De la relación anterior nos percatamos que  $\lambda_{eq}$  tiene un valor crítico cuando  $\alpha\pi H(0.7) - \beta \frac{a_0}{\lambda_0} G(0.7) = 0$ , de donde

$$\frac{a_0}{\lambda_0} = \frac{\alpha \pi H(0.7)}{\beta G(0.7)}, \quad (3.33)$$

para valores de  $\alpha = 1/\pi$  y  $\beta = 2$  tenemos el valor crítico en  $\frac{a_0}{\lambda_0} = 1.8$ , dado que el valor de  $\lambda$  tiene que ser positivo, la expresión (3.32) está definida solo para  $\frac{a_0}{\lambda_0} > 1.8$ . Una gráfica de la función (3.32) se muestra en la Figura 3.4.

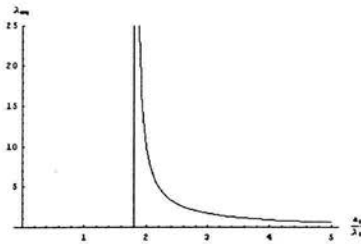


Figura 3.4:  $\lambda_{eq}$  como función de  $\frac{a_0}{\lambda_0}$ .

En las Figuras 3.5, 3.6, 3.7 y 3.8 se muestran las gráficas correspondientes a las soluciones numéricas de la ecuación (3.31) para diferentes valores de  $\frac{a_0}{\lambda_0} > 1.8$  realizadas en *Mathematica*. Notamos que la convergencia de la función hacia el punto de equilibrio depende fuertemente del valor de  $\frac{a_0}{\lambda_0}$ , siendo que entre más se acerque este valor al punto crítico de 1.8 (y por lo tanto  $\lambda_{eq}$  es más grande) la convergencia de la función disminuye.

Notamos de la gráfica 3.7b, donde se muestra la solución numérica de la ecuación (3.31) con los mismo valores iniciales que aquéllos de la gráfica 3.3, que la ecuación diferencial encontrada no reproduce el comportamiento de  $\lambda$  cuando  $t \rightarrow 0$ ; esto es algo que ya sabíamos dado el análisis que hemos realizado conforme las leyes de conservación. El método de fase estacionaria predice que en  $t = 0$  la cáustica está completamente abierta, lo cual sabemos que es incorrecto ya que en  $t = 0$  solo tenemos la condición inicial.

Para valores de  $\frac{a_0}{\lambda_0} < 1.8$  el punto de equilibrio para  $\lambda$  está en infinito. Esto se interpreta de la siguiente manera: para estos valores iniciales el solitón no tiene suficiente momento (recordar que el valor de  $\frac{a_0}{\lambda_0}$  es el momento inicial



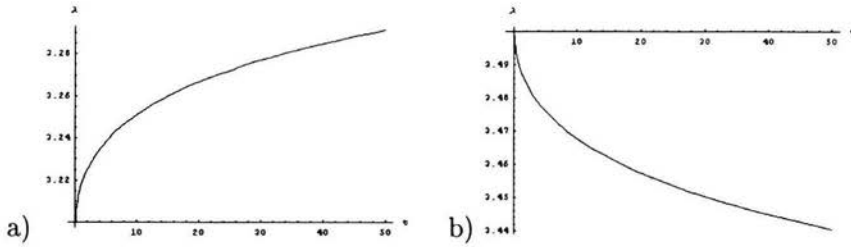


Figura 3.5: Solución numérica de  $\lambda$  para un valor de  $\frac{a_0}{\lambda_0} = 2.4$ . En a)  $\lambda_0 = 3.2$ , b)  $\lambda_0 = 3.5$ ,  $\lambda_{eq} = 3.377$ .

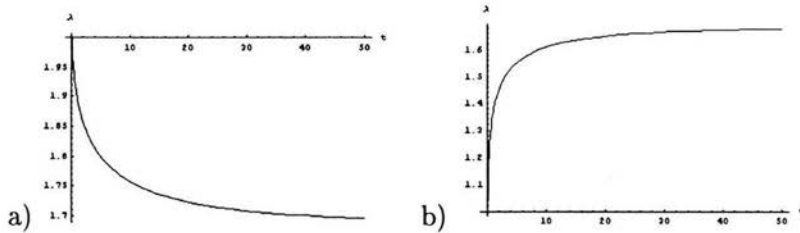


Figura 3.6: Solución numérica de  $\lambda$  para un valor de  $\frac{a_0}{\lambda_0} = 3$ . En a)  $\lambda_0 = 2$ , b)  $\lambda_0 = 1$ ,  $\lambda_{eq} = 1.68$ .

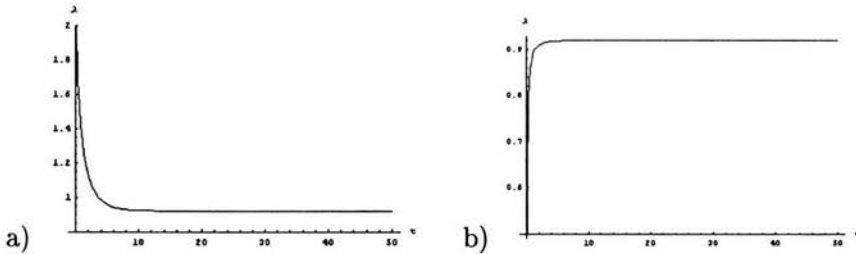


Figura 3.7: Solución numérica de  $\lambda$  para un valor de  $\frac{a_0}{\lambda_0} = 4$ . En a)  $\lambda_0 = 2$ , b)  $\lambda_0 = 0.5$ ,  $\lambda_{eq} = 0.92$ .

de la estructura coherente) y por lo tanto muere, si  $\lambda \rightarrow \infty$  el solitón se vuelve infinitamente plano (recordar la forma de la onda coherente); dada la conservación del momento la cantidad  $\frac{a}{\lambda}$  debe permanecer constante, por lo tanto  $a$  tiende a infinito conforme  $\lambda$  tiende a infinito, la amplitud máxima de la estructura coherente está dada por  $\frac{a}{\lambda^2}$ , por lo tanto si  $\lambda \rightarrow \infty$  el solitón

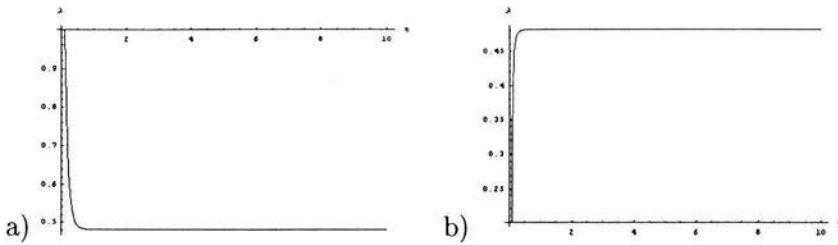


Figura 3.8: Solución numérica de  $\lambda$  para un valor de  $\frac{a_0}{\lambda_0} = 6$ . En a)  $\lambda_0 = 1$ , b)  $\lambda_0 = 0.2$ ,  $\lambda_{eq} = 0.4815$ .

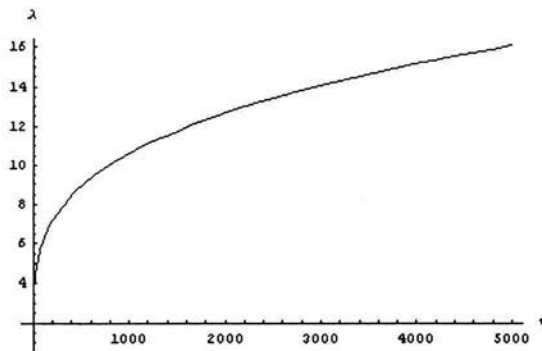


Figura 3.9: Gráfica de  $\lambda$  como función de  $t$  para una valor de  $\frac{a_0}{\lambda_0} = 1.4$  y  $\lambda_0 = 1$ .

disminuye su amplitud como  $\frac{1}{\lambda}$  y por lo tanto desaparece. Una gráfica de la solución numérica de la ecuación (3.31) para una valor de  $\frac{a_0}{\lambda_0} = 1.4$  se muestra en la Figura 3.9. Por otro lado, para valores de  $\frac{a_0}{\lambda_0}$  muy grandes, el valor de  $\lambda$  en el equilibrio tiende a cero, volviendo al solitón infinitamente estrecho, de la misma forma  $a \rightarrow 0$  y por lo tanto el solitón tiende a desaparecer.

En la Figura 3.10 mostramos un plano fase para las soluciones numéricas de la ecuación (3.31) correspondiente a los valores de  $\frac{a_0}{\lambda_0}$  de 3, 4, y 6. Notamos de este retrato fase cómo la convergencia de  $\lambda$  hacia el punto de equilibrio aumenta conforme el valor de  $\frac{a_0}{\lambda_0}$  aumenta.

Podemos ahora calcular si el tiempo que tarda el solitón en desaparecer es finito cuando  $\frac{a_0}{\lambda_0} < 1.8$ . Para esto tomamos nuevamente la ecuación (3.31)

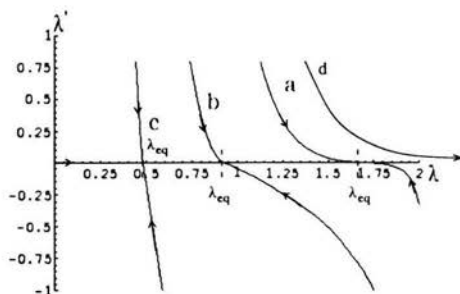


Figura 3.10: Retrato fase para las soluciones numéricas de la ecuación (3.31) para valores de  $\frac{a_0}{\lambda_0}$  de a) 3, b) 4 y c) 6. d) Bosquejo del retrato fase para una condición inicial con  $\frac{a_0}{\lambda_0} < 1.8$ .

$$\left\{ \pi^{3/2} - \frac{\Gamma(1/6)}{9 \left( \frac{\alpha^2 \pi^2}{4} \right)^{1/3}} \left( \frac{\lambda}{t} \right)^{1/3} \right\} \dot{\lambda} = \frac{2}{t^{1/2}} \left\{ \frac{1}{8\sqrt{\lambda_{eq}}} \left( \alpha\pi H(\nu) - \beta \frac{a_0}{\lambda_0} G(\nu) \right) + \frac{1}{2(\lambda_{eq})^{3/2}} F(\nu) \right\}.$$

Para tiempos y valores de  $\lambda$  suficientemente grandes tenemos que

$$\pi^{3/2} \dot{\lambda} \frac{t^{1/2}}{2} = \frac{1}{8\sqrt{\lambda_{eq}}} \left( \alpha\pi H(\nu) - \beta \frac{a_0}{\lambda_0} G(\nu) \right).$$

Reescalamos el tiempo como

$$\lambda = \lambda(t^{3/2}),$$

supongamos que ahora el solitón desaparece en un tiempo  $T$ , tenemos entonces

$$\frac{8\pi^{3/2}}{\left( \alpha\pi H(\nu) - \beta \frac{a_0}{\lambda_0} G(\nu) \right)} \int_{\lambda_0}^{\infty} \sqrt{\lambda} d\lambda = \int_0^T dt = T,$$

pero observamos que la integral del lado izquierdo diverge, por lo cual concluimos que, si  $\frac{a_0}{\lambda_0} < 1.8$  el solitón desaparece en un tiempo infinito.

Retomaremos ahora la expresión (3.33) para el umbral de  $\frac{a_0}{\lambda_0}$  a partir del cual se llega a un valor de  $\lambda$  en el equilibrio finito, esta expresión la escribimos a continuación

$$\frac{a_0}{\lambda_0} = \frac{\alpha \pi H(0.7)}{\beta G(0.7)}.$$

Observamos que el valor de este punto crítico depende únicamente de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$ , recordamos del capítulo 1 el valor de estos parámetros en el contexto de propagación de ondas en la intercara entre conductores debido a la electromigración de superficie

$$\alpha = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) E_0 \epsilon_1}{\pi \epsilon_2},$$

$$\beta = \frac{2(\alpha_1 - \alpha_2) E_0 \epsilon_1 - \epsilon_2}{h_1^2 \epsilon_1},$$

por lo tanto el valor umbral de  $\frac{a_0}{\lambda_0}$  está dado por la razón entre los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$

$$\frac{a_0}{\lambda_0} \sim \frac{\alpha}{\beta} \sim \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2(\epsilon_1 - \epsilon_2)},$$

en la expresión anterior se ha escrito la dependencia del cociente en términos de las constantes  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ . Nuevamente tomamos el límite cuando  $\epsilon_1 \gg \epsilon_2$  para obtener que, en términos de estas constantes, el valor del umbral depende de la razón

$$\frac{a_0}{\lambda_0} \sim \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}.$$

De esta forma, el valor umbral a partir del cual se forman solitones estables en la intercara entre los conductores crece conforme la razón de las permitividades eléctricas de los conductores es más grande, y por debajo de este valor umbral el punto de equilibrio de  $\lambda$  para el solitón está en infinito y por lo tanto el solitón desaparece.

Hemos encontrado, utilizando las leyes de conservación y descomponiendo la solución a la ecuación en derivadas parciales no lineal (3.1) en dos partes, la estructura coherente y la radiación desprendida, una ecuación diferencial ordinaria para  $\lambda$  que, con el valor apropiado de  $\nu$  obtenido mediante la comparación con los resultados numéricos, predice la evolución en el tiempo de este parámetro así como sus puntos de equilibrio, los cuales dependen

únicamente de la razón entre la amplitud inicial  $a_0$  y el ancho inicial  $\lambda_0$ . Analizando la ecuación diferencial obtenida hemos sido capaces de encontrar un umbral para el momento inicial del solitón,  $\frac{a_0}{\lambda_0} > 1.8$ , a partir del cual la estructura coherente se estabiliza y se propaga como solitón. Por otro lado, si el momento inicial del solitón no supera el umbral mencionado, el punto de equilibrio de  $\lambda$  está en infinito y por lo tanto el solitón desaparece en un tiempo infinito. Por último hemos encontrado cómo depende en términos de las permitividades eléctricas de los conductores este valor umbral, el hecho de que se pueda controlar, escogiendo conductores adecuados, el umbral mínimo a partir del cual se tiene solitones, puede adquirir importancia en la industria de la electrónica a micro escalas.

# Conclusiones.

El estudio de ondas que se propagan en la intercara entre películas conductoras delgadas y la búsqueda de solitones en estas circunstancias es una aproximación que no se le había dado al fenómeno de electromigración de superficie. Modelando este sistema en el límite cuando la longitud de onda es muy pequeña comparada con la altura del conductor superior es que obtuvimos la ecuación bi-dimensional de Benjamin-Ono, la cual es una ecuación diferencial no lineal que no había sido estudiada anteriormente. Como se destacó en el capítulo 2, no se conocen soluciones exactas a esta ecuación. Es por esto que adquiere importancia el resultado obtenido que, efectivamente, si se deja evolucionar bajo esta ecuación una condición inicial con el perfil de la función de prueba utilizada, ésta se propaga como estructura coherente localizada tipo solitón. En el capítulo 3 fuimos capaces, además, de obtener una expresión analítica que describe cómo cambia el ancho de la estructura coherente conforme transcurre el tiempo, y por lo tanto podemos encontrar cómo evolucionan sus demás parámetros (la amplitud y la velocidad) para tiempos suficientemente grandes; de la misma forma podemos calcular exactamente la dependencia del equilibrio en términos de los parámetros iniciales así como identificar el umbral de momento para el cual el solitón desaparece. Pero los comentarios finales de este trabajo no terminan en esta importante conclusión, ya que como se enfatizó en el capítulo 1, el hecho de que efectivamente existan soluciones tipo solitón para la ecuación bi-dimensional de Benjamin-Ono implica que, debido al fenómeno de electromigración de superficie, si la intercara entre dos conductores es deformada, puede ocurrir que esta perturbación se propague y ocasione fallas en dispositivos electrónicos. Pareciera recurrente que mencionemos siempre este tipo de instrumentos como ejemplo de electromigración de superficie, pero presentan las características ideales para que este fenómeno se presente (líneas conductoras de escales del orden de  $\text{\AA}$ , altas densidades de corriente transportadas y uso prolongado a altas temperaturas de funcionamiento), además de que si representa motivo de falla atrae la atención y recursos

para su investigación. Por otro lado, no tenemos conocimiento que se haya realizado el estudio de la electromigración de superficie en la intercara entre conductores buscando ondas tipo solitón que se propaguen en ella, por lo cual resulta interesante proponer un experimento en el cual se verifiquen la predicción de formación de solitones y su estabilidad obtenidas en el capítulo 3.

La ecuación bi-dimensional de Benjamin-Ono se dedujo a partir de dos problemas físicos con ecuaciones constitutivas completamente diferentes, el problema de ondas que se propagan en la intercara de un fluido estratificado, y el problema de electromigración de superficie en la intercara entre dos conductores. Para el problema del fluido estratificado la deducción de la relación de dispersión es un análogo directo del mismo problema en una dimensión así como su límite cuando la altura del fluido superior crece a infinito. Se quiso comenzar con este problema ya que puede resultar más claro al lector identificar cómo surge esta ecuación a partir de un fenómeno sumamente entendido como es la dinámica de un fluido irrotacional incompresible, que de un fenómeno del cual se sabe relativamente poco como es el de electromigración de superficie. Posteriormente estudiamos este fenómeno concentrándonos en el problema de propagación de ondas en la intercara más que la deducción de las ecuaciones que rigen el movimiento de los átomos que migran. La relación de dispersión de este problema es semejante a aquélla del fluido, pero notamos que en el límite cuando la capa superior crece a infinito, para el fluido aparece un término de transporte (término lineal en  $k$ ) mientras que para los conductores este término no se recupera, esto implica una diferencia inmediata. De esta forma obtuvimos la ecuación bi-dimensional de Benjamin-Ono para estos dos problemas físicos, en uno de ellos la deducción es directa del problema original en una dimensión, mientras que el problema de los dos conductores representa el estudio de un fenómeno al cual no se le había dado este acercamiento.

Una vez obtenida la ecuación bi-dimensional de Benjamin-Ono nos enfrentamos al problema en el cual no conocemos soluciones de ninguna naturaleza para esta ecuación. Recuperando los resultados conocidos para las ecuaciones de Benjamin-Ono en una dimensión y la ecuación de ZK propusimos una función de prueba que se propaga como onda permanente y, mediante el análisis variacional, encontramos los puntos que extreman la acción del sistema respecto a los parámetros de esta función, este análisis fue de gran utilidad en el capítulo 3 para comparar los resultados obtenidos mediante las leyes de conservación con los puntos de equilibrio dados por el análisis

variacional, ya que como se pudo notar, cuando se calcula el momento de la estructura coherente se obtienen integrales complicadas para las cuales hay que hacer algún tipo de análisis asintótico y obtener un resultado de utilidad. La única manera que se tuvo para saber si este resultado era correcto o no (salvo por la comparación numérica) es comparar los puntos de equilibrio con aquéllos del análisis variacional. Por otro lado fueron interesantes los resultados obtenidos para describir la cáustica que confina la radiación desprendida por la estructura coherente, ya que en una primera impresión uno podría esperar encontrar una cáustica que comienza totalmente cerrada y se abriera conforme transcurre el tiempo, esto no es así y el resultado obtenido fue totalmente el opuesto. Este comportamiento de la radiación también fue de utilidad cuando se estudiaron las leyes de conservación, ya que en estas se desprecia el efecto de la radiación y, con base en los resultados conocidos para análisis semejantes para ecuaciones como ZK y Benjamin-Ono, es totalmente necesario incluir la masa de la radiación desprendida para obtener resultados satisfactorios. En nuestro caso esto no fue necesario ya que para tiempos grandes la cáustica se encuentra totalmente cerrada y las leyes de conservación, despreciando la radiación, son exactas.

Son ya varios los estudios que se han realizado para ecuaciones diferenciales no lineales que dan origen a solitones, entre ellas podemos mencionar nuevamente ZK, Benjamin-Ono, la ecuación de KP, entre otras, en las cuales se utilizan las leyes de conservación y se descompone la solución a la ecuación diferencial no lineal en dos partes, una estructura coherente y radiación desprendida, para obtener ecuaciones analíticas que describan el comportamiento de la estructura coherente que se propaga siguiendo la ecuación correspondiente. La ecuación bi-dimensional de Benjamin-Ono es una más. Utilizando este método encontramos ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden acopladas para los parámetros de una estructura coherente que tiene como condición inicial el perfil de la función de prueba propuesta en el capítulo 2, la cual esperamos se propague conservando su perfil. Mediante estas leyes de conservación reproducimos las relaciones entre los parámetros de la función que se habían encontrado mediante el análisis funcional, esperando que se obtuvieran polinomios que variaran sólo por los coeficientes. Esto se reprodujo con gran exactitud para la velocidad, pero para la amplitud de la onda en el punto de equilibrio obtuvimos que no se recuperaba totalmente la forma variacional; este resultado era de esperarse ya que se están utilizando la ley de conservación de masa despreciando aquélla de la radiación, pero esto mismo se obtiene en los estudios de las ecuaciones antes mencionadas y resulta natural modificar la velocidad de la onda añadiendo



un flujo medio, de modo tal que la amplitud de la estructura coherente recupere los puntos de equilibrios encontrados mediante el análisis variacional. De esta forma obtuvimos una ecuación diferencial de primer orden para  $\lambda$  la cual, con el valor apropiado para el flujo medio, compara no sólo con los puntos de equilibrio del análisis variacional sino con las soluciones numéricas realizadas por el Dr. Noel Smyth. De esta forma podemos concluir, al final del capítulo 3, cómo se comporta el ancho de la onda respecto a las condiciones iniciales. Concluimos también que la ecuación diferencial obtenida no recupera el comportamiento de la solución numérica para tiempos pequeños, lo cual, como se comentó en su momento, era de esperarse ya que el análisis de fase estacionaria realizado para encontrar la cáustica del problema funciona para tiempos suficientemente grandes. Para tiempos pequeños se obtiene la cáustica ocupando todo el semi plano izquierdo lo cual es incorrecto, esto se refleja de manera directa en la ecuación diferencial obtenida. Obtuvimos además un valor umbral para el momento inicial del solitón, si el valor de  $\frac{a_0}{\lambda_0} < 1.8$  entonces el solitón no tiene suficiente momento y desaparece en un tiempo infinito. Por otro lado, mientras más grande sea el valor de  $\frac{a_0}{\lambda_0}$  el valor en equilibrio de  $\lambda$  tiende a cero, lo cual nos indica que el solitón se vuelve infinitamente angosto y dada la relación  $\frac{a}{\lambda} = \text{cte.}$ , el valor de  $a$  tiende a cero y por lo tanto el solitón tiende a desaparecer.

Hemos mencionado que la electromigración de superficie es una causa importante de falla en circuitos integrados. Sabemos que para una superficie conductora libre la propagación de solitones está modelada por la ecuación de KDV en el caso unidimensional y por la ecuación de ZK cuando se incluye el término dispersivo en la dirección transversal a aquélla de la propagación de la onda. De esta forma, la formación de solitones puede considerarse también como causa importante de falla en circuitos integrados si es que una de estas estructuras coherentes se impacta contra una terminal electrónica. Al final del capítulo 3 obtuvimos la dependencia del valor umbral del momento inicial de la onda para el cual se obtiene un solitón estable en términos de las permitividades eléctricas de los conductores. Una aplicación inmediata del modelo físico estudiado y los resultados obtenidos es la prevención de la propagación de solitones en las interconexiones metálicas de los circuitos integrados recubriéndolas con algún material (algún tipo de "gel" , por ejemplo) que tenga propiedades conductoras y que su permitividad eléctrica sea mucho menor a la del conductor, logrando así reproducir el modelo planteado (nótese que si se trata de un material flexible la hipótesis en la cual se desprecian los desplazamientos y esfuerzos elásticos en la intercara es válida) de forma tal que se pueda controlar el valor umbral para el cual se propagan

---

solitones haciéndolo muy grande. De esta forma se podría prevenir la falla de estos dispositivos a causa de la formación de un solitón en la superficie.

Por último podemos mencionar, como temas de estudio futuros a este trabajo, un modelo que incluya las fuerzas de tensión que pueden existir en la intercara entre los conductores. Para la descripción de este fenómeno se supuso que la intercara entre los conductores siempre permanece unida, un trabajo futuro podría tratar de explicar qué sucede cuando, debido al transporte de masa, se crean vacíos en la intercara misma anulando la interacción entre los materiales. En otro orden de ideas, el estudio mismo de solitones a partir de las leyes de conservación ha demostrado ser una herramienta eficaz para obtener expresiones analíticas que describan la evolución de estructuras coherentes, trabajos futuros podrían estudiar la existencia de otros perfiles de estructuras coherentes que se propaguen como solitón y que se dejen evolucionar bajo la ecuación bi-dimensional de Benjamin-Ono, así como el estudio de la estabilidad de la estructura coherente bajo perturbaciones de la condición inicial y el efecto de los términos no lineales de segundo orden encontrados en el capítulo 1, cuando se perturba la estructura coherente.



# Apéndice A

En este apéndice encontraremos la transformada de Fourier de la Transformada de Hilbert de una función  $u(x)$  que satisfaga las propiedades de regularidad y decaimiento en infinito que este operador requiere<sup>1</sup>. La transformada de Hilbert de una función  $u(x)$  se define como

$$\tilde{u}(x) = \mathcal{H}u = \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)}{\xi - x} d\xi$$

donde PV denota el valor principal de Cauchy de la integral en cuestión, es decir,

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} u dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} u dx + \int_{\epsilon}^{\infty} u dx \right\}$$

De la definición anterior observamos que la función  $u$  debe satisfacer condiciones de regularidad para que la integral tenga sentido, así como un comportamiento en infinito como  $1/x^2$  para que la integral converja. Ahora encontraremos la transformada de Fourier de la función  $\tilde{u}$  resultado de aplicar la transformada de Hilbert de la función  $u$ . De la definición de la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}(u(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-ikx} dx$$

---

<sup>1</sup>Cuando la función  $u$  depende de más variables el resultado será el mismo que el que habremos de encontrar en este apéndice.

tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\tilde{u} &= \mathcal{F}\left(\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)}{\xi-x} d\xi\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)}{\xi-x} d\xi\right) e^{-ikx} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)e^{-ikx}}{\xi-x} d\xi\right) dx\end{aligned}$$

donde se ha incluido el término exponencial en la integral del valor principal. Ahora utilizamos la simetría del núcleo  $1/(\xi-x)$  para invertir el orden de integración dejando denotado el valor principal

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\tilde{u} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)e^{-ikx}}{\xi-x} d\xi\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\xi)e^{-ikx}}{\xi-x} dx\right) d\xi.\end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable  $u = \xi - x$  para obtener

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\tilde{u} &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik(\xi-x)}}{u} du d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi)e^{-ik\xi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iku}}{u} du d\xi\end{aligned}$$

estudiamos únicamente la integral

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iku}}{u} du. \quad (3.34)$$

Esta integral se puede realizar fácilmente utilizando el teorema de Cauchy para variable compleja. De este teorema sabemos que la integral de una función de variable compleja sobre un contorno cerrado será cero a menos que haya singularidades dentro del contorno; cuando la función a integrar es una función racional y esta función tiene polos (ceros del denominador) dentro del contorno, la integral sobre éste será

$$\oint_C u(z)dz = 2\pi i \sum_{z_i} \text{Res}(z_i)$$

donde  $\text{Res}(z_i)$  denota el residuo de la función  $u$  en el polo  $z_i$ , los cuales se escriben como

$$\text{Res}(z_i) = \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{(j-1)}}{dz^{(j-1)}} \left( (z-z_i)^j u(z) \right) \Big|_{z=z_i}$$

donde  $j$  es el orden del polo en  $z_i$ . Utilizando este resultado resolveremos la integral (3.34). Los contornos que utilizaremos para calcular esta integral son mostrados en la Figura 3.11, donde el contorno se elegirá de acuerdo al signo de  $k$  como se muestra en la figura señalada. Es claro que para estos contornos obtendremos la integral deseada tomando primero el límite cuando  $R \rightarrow \infty$  y luego el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , además, dado que no hay polos de la función dentro del contorno, la integral será cero. Detonaremos por comodidad

$$f(z) = \frac{e^{ikz}}{z}$$

entonces tenemos para  $k > 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_C f(z) dz \\ &= \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz + \int_{c_3} f(z) dz + \int_{c_4} f(z) dz \end{aligned}$$

donde cada trayectoria  $c_i$  está indicada en la Figura 3.11.

Escribimos explícitamente cada una de las integrales

$$\int_{c_1} f(z) dz = \int_{-R}^{-\epsilon} f(x) dx$$

$$\int_{c_3} f(z) dz = \int_{\epsilon}^R f(x) dx$$

para la integral sobre  $c_2$  parametrizamos a  $z$  como

$$\begin{aligned} z &= \epsilon e^{-i\theta}, \\ dz &= -i\epsilon e^{-i\theta} d\theta, \\ -\pi &< \theta < 0, \end{aligned}$$

para obtener

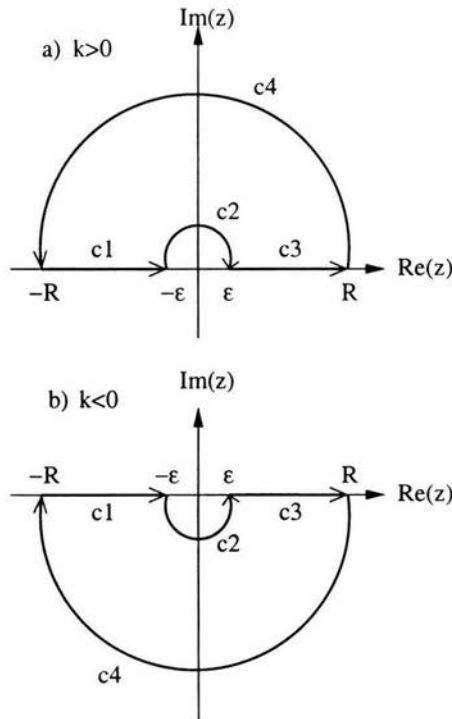


Figura 3.11: Contornos de integración de acuerdo al signo de  $k$ .

$$\begin{aligned}
 \int_{c_2} f(z) dz &= - \int_{-\pi}^0 \frac{e^{ik\epsilon e^{-i\theta}}}{\epsilon e^{-i\theta}} i\epsilon e^{-i\theta} d\theta \\
 &= -i \int_{-\pi}^0 e^{ik\epsilon e^{-i\theta}} d\theta.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Ahora parametrizamos  $z$  para la integral sobre la trayectoria  $c_4$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 z &= Re^{i\theta} \\
 dz &= iRe^{i\theta} d\theta \\
 0 &< \theta < \pi
 \end{aligned}$$

y obtenemos así

$$\begin{aligned}
 \int_{c_4} f(z) dz &= \int_0^\pi \frac{e^{ikRe^{i\theta}}}{Re^{i\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \\
 &= i \int_0^\pi e^{ikRe^{i\theta}} d\theta \\
 &= i \int_0^\pi e^{-kR\text{sen}\theta} e^{ikR\text{cos}\theta} d\theta.
 \end{aligned}$$

Tomamos ahora los límites  $R \rightarrow \infty$  y  $\epsilon \rightarrow 0$  para obtener la integral deseada

$$\begin{aligned}
 \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iku}}{u} du &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_3} f(z) dz \right) \\
 &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{c_2} f(z) dz + \int_{c_4} f(z) dz \right) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \int_{-\pi}^0 e^{ik\epsilon e^{-i\theta}} d\theta - \lim_{R \rightarrow \infty} i \int_0^\pi e^{-kR\text{sen}\theta} e^{ikR\text{cos}\theta} d\theta
 \end{aligned}$$

evaluando los límites obtenemos

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \int_{-\pi}^0 e^{ik\epsilon e^{-i\theta}} d\theta &= i \int_{-\pi}^0 d\theta \\
 &= i\pi
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Ahora para el límite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} i \int_0^\pi e^{-kR\text{sen}\theta} e^{ikR\text{cos}\theta} d\theta$$

vemos que el comportamiento de la integral estará dado por la parte real del integrando, siendo este

$$e^{-kR\text{sen}\theta}$$

notamos que  $R, k > 0$ , y en el intervalo  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\text{sen}\theta > 0$  por lo que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} e^{-kR\text{sen}\theta} = 0$$

y entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} i \int_0^\pi e^{-kR\text{sen}\theta} e^{ikR\text{cos}\theta} d\theta = 0$$



por lo que obtenemos

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iku}}{u} du = i\pi, \quad k > 0$$

Para el caso en que  $k < 0$ , tomamos el contorno mostrado en la Figura 3.11 correspondiente, y los argumentos son muy similares, escribimos nuevamente

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_C f(z) dz \\ &= \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz + \int_{c_3} f(z) dz + \int_{c_4} f(z) dz \end{aligned}$$

donde cada trayectoria  $c_i$  está indicada en la figura mencionada. Escribiendo explícitamente las integrales obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{c_1} f(z) dz &= \int_{-R}^{-\epsilon} f(x) dx, \\ \int_{c_3} f(z) dz &= \int_{\epsilon}^R f(x) dx. \end{aligned}$$

Para la integral sobre  $c_2$  parametrizamos a  $z$  ahora como

$$\begin{aligned} z &= \epsilon e^{i\theta}, \\ dz &= i\epsilon e^{i\theta} d\theta, \\ \pi &< \theta < 2\pi, \end{aligned}$$

para obtener

$$\begin{aligned} \int_{c_2} f(z) dz &= \int_{\pi}^{2\pi} \frac{e^{ik\epsilon e^{i\theta}}}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_{\pi}^{2\pi} e^{ik\epsilon e^{i\theta}} d\theta. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Para la trayectoria  $c_4$  escribimos

$$\begin{aligned} z &= R e^{-i\theta}, \\ dz &= -iR e^{-i\theta} d\theta, \\ 0 &< \theta < \pi, \end{aligned}$$

y obtenemos así

$$\begin{aligned}\int_{c_4} f(z)dz &= - \int_0^\pi \frac{e^{ikRe^{-i\theta}}}{Re^{-i\theta}} iRe^{-i\theta} d\theta \\ &= -i \int_0^\pi e^{ikRe^{-i\theta}} d\theta \\ &= -i \int_0^\pi e^{kR\text{sen}\theta} e^{ikR\text{cos}\theta} d\theta.\end{aligned}$$

Tomamos ahora los límites  $R \rightarrow \infty$  y  $\epsilon \rightarrow 0$  para obtener la integral deseada

$$\begin{aligned}\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iku}}{u} du &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{c_1} f(z)dz + \int_{c_3} f(z)dz \right) \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{c_2} f(z)dz + \int_{c_4} f(z)dz \right) \\ &= - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \int_\pi^{2\pi} e^{ik\epsilon e^{i\theta}} d\theta + \lim_{R \rightarrow \infty} i \int_0^\pi e^{kR\text{sen}\theta} e^{ikR\text{cos}\theta} d\theta,\end{aligned}$$

evaluando los límites obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \int_\pi^0 e^{ik\epsilon e^{i\theta}} d\theta &= i \int_\pi^0 d\theta \\ &= i\pi.\end{aligned}\tag{3.38}$$

Ahora el límite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} i \int_0^\pi e^{kR\text{sen}\theta} e^{ikR\text{cos}\theta} d\theta$$

nuevamente analizamos el término

$$e^{kR\text{sen}\theta}$$

sabemos que  $R > 0$  y  $k < 0$ , y en el intervalo  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\text{sen}\theta > 0$  por lo que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} e^{kR\text{sen}\theta} = 0$$

y entonces

$$\lim_{R \rightarrow \infty} i \int_0^\pi e^{kR\text{sen}\theta} e^{ikR\text{cos}\theta} d\theta = 0$$

por lo que obtenemos

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iku}}{u} du = -i\pi, \quad k < 0$$

de tal forma que

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iku}}{u} du = i\pi \text{sgn}k.$$

Recordamos la integral original

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\tilde{u} &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) e^{-ik\xi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iku}}{u} du d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (i\pi \text{sgn}k) u(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \\ &= (i\pi \text{sgn}k) \hat{u}(k) \end{aligned}$$

donde  $\hat{u}(k)$  representa la transformada de Fourier de  $u$ . Hemos obtenido entonces que la transformada de Fourier  $\hat{u}$  de una función  $\tilde{u}$  que es la transformada de Hilbert de una función  $u$  es

$$\mathcal{F}\tilde{u} = (i\pi \text{sgn}k) \hat{u}(k). \quad (3.39)$$

# Apéndice B

En este apéndice calcularemos la transformada de Hilbert de una función racional. Tenemos entonces una función  $u(x)$  dada por

$$u(x) = \frac{1}{x^2 + \lambda^2}$$

y queremos calcular su transformada de Hilbert, esto se escribe como

$$\mathcal{H}(u) = \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi^2 + \lambda^2} \frac{1}{\xi - x} d\xi \quad (3.40)$$

donde PV denota el valor principal de Cauchy de la integral, el cual se escribe como

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{-\epsilon} f(x) dx + \int_{\epsilon}^{\infty} f(x) dx \right\}$$

Para calcular la integral anterior utilizaremos la variable compleja, en concreto el teorema de residuos en polos visto en el capítulo anterior, el cual afirma que la integral de una función de variable compleja sobre un contorno cerrado (orientado contra las manecillas del reloj) será igual a la suma de los residuos en los polos de la función, es decir

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_i \text{Res}(f(z_i)),$$

donde Res denota el residuo en el polo  $z_i$  de la función  $f(z)$ , si ésta es una función racional, los residuos en los polos se escriben como

$$\text{Res}(F(z_i)) = \frac{1}{(j-1)!} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} ((z - z_i)^{j-1} f(z)) \Big|_{z_i},$$

donde  $j$  es el orden del polo  $z_i$ . De esta forma podremos calcular la integral (3.40) extendiendo la función racional a una función de variable compleja

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + \lambda^2}$$

y utilizando el contorno cerrado mostrado en la Figura 3.12, la integral deseada la obtendremos tomando el límite cuando  $R \rightarrow \infty$  y luego tomando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Tenemos entonces, utilizando el teorema de residuos en los polos que

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \left( \frac{1}{z + i\lambda} \frac{1}{z - x} \right) \Big|_{z=i\lambda}$$

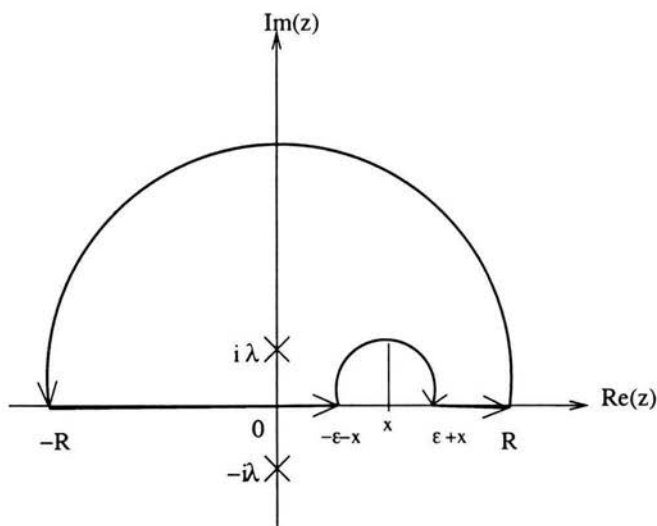


Figura 3.12: Contorno de integración. Los polos de la función se encuentran en  $z = i\lambda$ ,  $z = -i\lambda$  y  $z = x$ .

Ahora escribimos cada una de las trayectorias que componen el contorno  $C$ , comenzamos por

$$\int_{c_1} f(z) dz = \int_{-R}^{x-\epsilon} \frac{1}{\xi^2 + \lambda^2} \frac{1}{\xi - x} d\xi$$

y análogamente

$$\int_{c_3} f(z) dz = \int_{x+\epsilon}^R \frac{1}{\xi^2 + \lambda^2} \frac{1}{\xi - x} d\xi$$

Para la integral sobre la trayectoria  $c_2$  parametrizamos a  $z$  como

$$\begin{aligned} z &= \epsilon e^{i\theta} + x, \\ dz &= i\epsilon e^{i\theta} d\theta, \\ \theta &\in [0, \pi], \end{aligned}$$

de esta forma obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{c_2} f(z) dz &= - \int_0^\pi \frac{1}{(\epsilon e^{i\theta} + x)^2 + \lambda^2} \frac{1}{\epsilon e^{i\theta}} i\epsilon e^{i\theta} d\theta \\ &= -i \int_0^\pi \frac{1}{(\epsilon e^{i\theta} + x)^2 + \lambda^2} d\theta. \end{aligned}$$

Por otro lado, para la trayectoria sobre  $c_4$  parametrizamos como

$$\begin{aligned} z &= R e^{i\theta} \\ dz &= i R e^{i\theta} d\theta \\ \theta &\in [0, \pi] \end{aligned}$$

para obtener

$$\begin{aligned} \int_{c_4} f(z) dz &= \int_0^\pi \frac{1}{R^2 e^{i2\theta} + \lambda^2} \frac{1}{R e^{i\theta} - x} i R e^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^\pi \frac{1}{R^2 e^{i2\theta} + \lambda^2} \frac{1}{R e^{i\theta} - x} R e^{i\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Ahora tomamos el límite cuando  $R \rightarrow \infty$ , es claro para las integrales sobre  $c_1$  y  $c_3$  obtendremos los límites en  $-\infty$  e  $\infty$  respectivamente, mientras que para la integral sobre  $c_4$ , en este límite el integrando va como

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2 e^{i2\theta} + \lambda^2} \frac{1}{R e^{i\theta} - x} R e^{i\theta} &\sim \frac{1}{R^3 e^{i3\theta}} R e^{i\theta} \\ &= \frac{1}{R^2 e^{i2\theta}} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

De esta forma tenemos

$$\int_{-\infty}^{x-\epsilon} \frac{1}{\xi^2 + \lambda^2} \frac{1}{\xi - x} d\xi + \int_{x+\epsilon}^{\infty} \frac{1}{\xi^2 + \lambda^2} \frac{1}{\xi - x} d\xi = \\ i \int_0^\pi \frac{1}{(\epsilon e^{i\theta} + x)^2 + \lambda^2} d\theta - \frac{\pi}{\lambda} \frac{1}{x - i\lambda},$$

donde se ha evaluado ya el residuo en el polo  $z = i\lambda$ , ahora tomamos el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  obtenemos

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi^2 + \lambda^2} \frac{1}{\xi - x} d\xi = i \int_0^\pi \frac{1}{x^2 + \lambda^2} d\theta - \frac{\pi}{\lambda} \frac{1}{x - i\lambda} \\ = \frac{i\pi}{x^2 + \lambda^2} - \frac{\pi}{\lambda} \frac{1}{x - i\lambda}$$

multiplicamos numerador y denominador del último término de la expresión anterior por  $x + i\lambda$  para obtener

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi^2 + \lambda^2} \frac{1}{\xi - x} d\xi = \frac{i\pi}{x^2 + \lambda^2} - \frac{\pi}{\lambda} \frac{x + i\lambda}{x^2 + \lambda^2} \\ = \frac{-\pi}{\lambda} \frac{x}{x^2 + \lambda^2}. \quad (3.41)$$

Por lo tanto hemos obtenido que

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi^2 + \lambda^2} \frac{1}{\xi - x} d\xi = -\frac{\pi}{\lambda} \frac{x}{x^2 + \lambda^2}, \quad (3.42)$$

que es la expresión que estábamos buscando.

# Apéndice C. El Método de Fase Estacionaria en Dos Dimensiones.

Supongamos que tenemos una función escrita en forma integral como sigue

$$f(x, y, t) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(k, l) e^{it\phi(k, l, x, y, t)} dk dl$$

donde  $\phi(k, l, x, y)$  y  $g(k, l)$  son funciones reales. Deseamos encontrar el comportamiento de  $f(x, y, t)$  para  $t$  grande. Nos concentraremos en funciones que estén dadas como una transformada inversa de Fourier. De esta forma el tipo de fases que encontraremos serán de la forma

$$\phi(x, y, k, l, t) = \frac{kx}{t} + \frac{ly}{t} - \omega(k, l)$$

Dado que la función  $e^{it\phi(k, l, x, y)}$  tiene comportamiento oscilatorio, la mayor contribución de la integral anterior estará dada por aquellos puntos  $(k, l)$  donde  $\phi$  cambie lentamente, dado que para otros puntos, las oscilaciones serán de mayor frecuencia y al momento de integrar se cancelarán entre ellos. Es por ello que buscamos aquel punto  $(k_0, l_0)$  (suponiendo que sea único) el cual

$$\frac{\partial \phi}{\partial k}(k_0, l_0) = 0,$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial l}(k_0, l_0) = 0.$$

y en este mismo punto  $\phi$  sea un mínimo. Podemos entonces desarrollar en serie de Taylor alrededor de este punto, de esta forma



$$\begin{aligned} \phi(x, y, k, l) \approx & \phi(k_0, l_0) + \frac{1}{2} \phi_{kk}(k_0, l_0)(k - k_0)^2 + \frac{1}{2} \phi_{ll}(k_0, l_0)(l - l_0)^2 \\ & + \phi_{kl}(k_0, l_0)(k - k_0)(l - l_0) + O(|(k - k_0, l - l_0)|^3) \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables  $k' = k - k_0$ ,  $l' = l - l_0$  y aproximando  $g(k, l) \sim g(k_0, l_0)$ , podemos escribir para  $f$

$$f(x, y, t) \approx g(k_0, l_0) e^{it\phi(k_0, l_0)} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\frac{t}{2}(\phi_{kk}(k_0, l_0)k'^2 + \phi_{ll}(k_0, l_0)l'^2 + \phi_{kl}k'l')} dk' dl' \quad (3.43)$$

Si la fase está dada en términos de un núcleo de Fourier, tenemos que

$$\begin{aligned} \phi_{kk} &= -\omega_{kk}, \\ \phi_{ll} &= -\omega_{ll}, \\ \phi_{kl} &= -\omega_{kl}. \end{aligned}$$

Si el punto  $(k_0, l_0)$  es un mínimo (y por lo tanto  $\omega$  tiene un máximo), la forma cuadrática de la expresión (3.43) (regresaremos a la notación original  $(k, l)$ )

$$-\frac{1}{2}(k, l) \begin{pmatrix} \omega_{kk}(k_0, l_0) & \omega_{kl}(k_0, l_0) \\ \omega_{kl}(k_0, l_0) & \omega_{ll}(k_0, l_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$$

la matriz hessiana tiene valores propios reales y positivos (dado que se trata de un mínimo) de forma tal que podemos escribir

$$\begin{pmatrix} \omega_{kk}(k_0, l_0) & \omega_{kl}(k_0, l_0) \\ \omega_{kl}(k_0, l_0) & \omega_{ll}(k_0, l_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix}.$$

con  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  y  $\mathbf{v}_1 = (v_{11}, v_{12})$  el valor propio de norma unitaria asociado al valor propio  $\lambda_1$  y  $\mathbf{v}_2 = (v_{21}, v_{22})$  el valor propio de norma unitaria asociado al valor propio  $\lambda_2$ . Podemos entonces para (3.43) hacer el cambio de variable

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = Q^T \vec{k} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$$

Dado que la matriz de cambio de base  $Q^T$  es unitaria, podemos escribir (3.43) como

$$f(x, y, t) \approx g(k_0, l_0) e^{it\phi(k_0, l_0)} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-i\frac{t}{2}(\lambda_1 v^2 + \lambda_2 w^2)} dv dw$$

Esta integral la podemos evaluar directamente para obtener

$$\begin{aligned} f(x, y, t) &\approx g(k_0, l_0) e^{-it\phi(k_0, l_0)} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{i\lambda_1 \frac{t}{2}}} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{i\lambda_2 \frac{t}{2}}} \\ &= \frac{\pi}{2t} \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} g(k_0, l_0) e^{i(k_0 x + l_0 y - \omega(k_0, l_0)t - \frac{\pi}{2})}. \end{aligned}$$

Que es la expresión asintótica que estábamos buscando para  $f(x, y, t)$  cuando  $t$  es suficientemente grande.



# Bibliografía

- [1] Bradley, Mark R. *Electromigration-Induced Soliton Propagation on Metal Surfaces*. Physical Review E, Vol. 60, num. 4, pp. 3736-3740, 1999.
- [2] Bradley, Mark R. *Transverse Instability of Solitons Propagating on Current-Carrying Metal Thin Films*. Physica D, 158, pp. 216-232, 2001.
- [3] Rous, P.J., M.F.G. Hedouin. *The Theory of Electromigration at Surfaces*. Surface Science Newsletter. Num. 27, 2000.
- [4] Solak, H.H. et al. *In-Situ X-Ray Photoemission Spectromicroscopy of Electromigration in Patterned Al-Cu Lines with MAXIMUM*. Materials Research Society Symposium Proceedings, Vol. 516, 1988.
- [5] Vaidya, S. et al., *Line Width Dependence of Electromigration in Evaporated Al-0.5Cu*. Appl. Phys. Lett. Vol 36, pp. 464-466, 1980.
- [6] Schimschak, M. Krug, J. *Surface Electromigration as a Moving Boundary Value Problem*. Physical Review Letters, Vol. 78, num. 2, pp. 278-281, 1997.
- [7] Feynman, Richard. *Lectures on Physics. Vol II*. Addison-Wesley, 1987.
- [8] Berger, Melvyn. *Nonlinearity and Functional Analysis*. Lectures on Nonlinear Problems in Mathematical Analysis. Academic Press, 1977.
- [9] Mier y Terán, Luis. *Soluciones Modulacionales para la Ecuación de Zakharov-Kuznetsov*. Tesis de Licenciatura, Físico, Facultad de Ciencias, UNAM, 2003.
- [10] Ize, Jorge. *Cálculo de Variaciones*. Serie Fenomec, 1987.

- [11] Flores, Gilberto. *La Evolución de la Onda Interna en la Ecuación de Benjamin-Ono Vía Leyes de Conservación*. Tesis de Licenciatura, Matemático, Facultad de Ciencias, UNAM.
- [12] Minzoni, A.A., Smith, N.F. *Evolution of Lump Soliton for the KP Equation*. *Wave Motion* **24**, pp. 291-305, 1996.
- [13] Bleistein, Norman. *Asymptotic Expansions of Integrals*. Holt, Rinehart and Winston.
- [14] Churchill, Ruel V. *Variable Compleja y Aplicaciones*. McGraw-Hill, 5ta edición, 1992.
- [15] Drazin, P.G. y Johnson, R.S. *Solitons: an Introduction*. Cambridge University Press, 1989.
- [16] Folland, Gerard B., *Fourier Analysis and its Applications*. Wadsworth & Books. 1992.
- [17] Jackson, John David. *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons, Inc. 3ra edición, 1999.
- [18] Lamb, G.L. *Elements of Soliton Theory*. John Wiley and Sons, 1980.
- [19] Remoissenet, Michel. *Waves Called Solitons*. Springer, 3ra edición, 1999.