00384

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

TEORÍA DE ABEL - JACOBI PARA CIERTAS LAMINACIONES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

P R E S E N T A

M. en C. EMIGDIO MARTÍNEZ OJEDA

DIRECTOR DE TESIS: DR. SANTIAGO ALBERTO VERJORSKY SOLA

MÉXICO, D.F. JUNIO 2004

Dedicatoria

A mi Familia, al Bicho y a la memoria del Teach

Agradecimientos

Me gustaría comenzar agradeciendo a Alberto Verjovsky, quien ha sido mucho más que un director de tesis, quien por su calidad matemática y humana me ha ayudado con gran paciencia y optimismo, permitiendo desarrollar mi independencia matemática.

Gran parte de estos agradecimientos son para todos los miembros del Instituto de Matemáticas de la UNAM (Universidad Nacional Autonoma de México) campus D.F y campus Cuernavaca por todo el apoyo recibido desde antes y durante la elaboración de esta tesis.

Un agradecimiento muy especial al Prof. Etienne Ghys quien con su gran personalidad me ayudo matemáticamente haciendo las preguntas claves. Además del apoyo para mi estancia en l'ENS-Lyon donde pude hacer matemáticas en un gran ambiente.

A los sinodales por revisar y hacer las observaciones necesarias. Muy en especial al Dr. Jesus Muciño.

A Laura Hidalgo por mostrarme y explicar el mapeo norma y los trabajos de Mumford.

A Bertrand Deroin sin lugar a dudas alguien muy especial, a quien va no sólo un agradecimiento, si no un "gracias carnal", ya que me abrió las puertas de Lyon he hizo mi estadia superfantástica tanto matemáticamente como el haberme mostrado a "mi barrio soleado".

A Manuel Cruz y Jose Martínez por el "asilo político" en su cubículo y las discusiones matemáticas que hemos tenido y seguimos teniendo. Por esas charlas tan amenas he interesantes que hemos tenido al calor de un mezcal, tequila o un cafe.

A Jose Luis Herrera por su gran amistad y sencilles. Por las multiples veces que me dio asilo en Cuernavaca, esas largas pláticas y el cine por las noches haciendo más placentera mi estancia.

A Herbert Kanarek por esas pláticas prolongadas en tiempos difíciles y en tiempos de felicidad.

A la banda de los becarios, Elhoim, Pepe Yudico, el Tabique, Diana Maya y todos los que me acompañaron durante estos años.

Al Becerril, el Igor, el Jeronimo, el Ivan, la Foco, el Paulino y a todos los cuates de toda la vida.

Antes de finalizar quisiera agradecer a todas las personas que de una o de otra forma han contribuido a hacer de esta tesis lo que es hoy.
Por supuesto que tengo presente a mis Padres, Hermana y familia, Fabiola (Bicho), las dos familias del Bicho e invariablemente, la memoria del Teach.

Contenido

Los maestros abren
la puerta,
pero eres tú quien
debe atravesarla.
(Probervio Chino).

Introducción.

Sin lugar a dudas, una de las joyas de la matemática del siglo XIX es la teoría de Abel-Jacobi debida al matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829), y a los matemáticos alemánes Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851) y Bernard Riemann (1826-1866). Dicha teoría fue creada para atacar el problema de resolver integrales hiperelípticas, las cuales son por definición integrales de la forma

$$\int_\gamma \frac{dz}{\sqrt{f(z)}},$$

donde γ es una trayectoria en el plano complejo $\mathbb{C}$ (con coordenada z) y $f(z) = (z - a_1)\cdots(z - a_d)$ es un polinómio con raices a_i diferentes por pares. Si $d = deg(f)$ es 1 o 2, una integración explícita por funciones elementales es bien conocida del cálculo integral. Si $d = 3$ o 4, la integración es posible usando funciones elípticas; sin embargo, para $d \geq 5$ una integración explícita no es conocida en general. La razón de esto es la siguiente:
La diferencial $\omega = \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$ no es univaluada considerada como una función en $\mathbb{C}$. Si denotamos por X_g a la superficie de Riemann compacta asociada a $\sqrt{f(z)}$, la cual es por definición una cubierta dos a uno de la esfera de Riemann $\mathbb{CP}^1$, ramificada en los puntos $a_1, \dots, a_d$ y el punto al infinito si d es impar, entonces, la diferencial ω puede ser considerada como una diferencial holomorfa en X_g. Es esencialmente la estructura topológica de X_g la causa del problema, esto es lo complicado del objeto.

En términos geométricos, la teoría de Abel-Jacobi puede ser descrita de la manera siguiente:

Se debe integrar no sólo ω, sino simultáneamente todo el conjunto de diferenciales holomorfas $\{\omega_i = z^{i-1}\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}\}$ en X_g, con $i = 1, \dots, g = [\frac{d-1}{2}]$.

Para esto, fijemos un punto p_0 en X_g y consideremos la transformación

$$p \mapsto \left(\int_{p_0}^{p} \omega_1, \dots, \int_{p_0}^{p} \omega_g\right),$$

definida en una pequeña vecindad U de p_0. Desafortunadamente esta transformación no puede ser extendida a toda X_g, puesto que las integrales dependen de la trayectoria de

p_0 a p. Sin embargo, si consideramos esta transformación módulo los valores de integrales a lo largo de todas las posibles trayectorias cerradas, obtenemos una transformación bien definida. Para ser más precisos, consideremos el grupo de las trayectorias cerradas que parten del punto p_0 módulo homología, es decir, $H_1(X_g, \mathbb{Z})$. La imagen de la transformación de $H_1(X_g, \mathbb{Z})$ en $\mathbb{C}^g$ definida por $\gamma \mapsto \left(\int_\gamma \omega_1, \ldots, \int_\gamma \omega_g\right)$ es una retícula en $\mathbb{C}^g$, es decir, un subgrupo discreto de rango $2g$. Así, el cociente

$$Jac(X_g) = \mathbb{C}^g / H_1(X_g, \mathbb{Z})$$

es un toro complejo, llamado *la variedad Jacobiana de* X_g. Se puede demostrar que $Jac(X_g)$ es isomorfa a una variedad proyectiva. Un toro complejo con esta propiedad es llamado *una variedad abeliana.*
Por construcción, la transformación de integración $U \longrightarrow \mathbb{C}^g$ definida anteriormente se extiende a una transformación holomorfa

$$A : X_g \longrightarrow Jac(X_g)$$

dada por $p \mapsto \left(\int_{p_0}^p \omega_1, \ldots, \int_{p_0}^p \omega_g\right)$ mod $H_1(X_g, \mathbb{Z})$ la cual es llamada *la transformación de Abel-Jacobi.* En estos términos, *la integración de* $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$ *es esencialmente equivalente a los dos pasos siguientes:*

(1) *Determinar la variedad Jacobiana* $Jac(X_g)$.
(2) *Determinar la transformación de Abel-Jacobi* $A : X_g \longrightarrow Jac(X_g)$.

Desafortunadamente sólo en muy pocos casos esto se puede hacer explícitamente, sin embargo, uno puede tratar de estudiar la geometría del par $(Jac(X_g), A)$ lo que puede ser considerado como un tipo de sustituto del paso 1. Este método no se restringe a integrales hiperelípticas, también trabaja para integrales holomorfas en cualquier superficie de Riemann compacta.

Abel y Jacobi no expresaron sus resultados en este lenguaje moderno, los resultados de Abel estan contenidos en su gran trabajo, *Mémoire sur une propriéte général d'une classe très étendue de fonctions transcendantes* [**4**], el cual fue presentado en la academia de Paris en 1826, pero fue publicado hasta 1841 mucho después de la muerte de Abel en 1829 y aún después de la publicación de la primera edición de sus obras. Antes de 1841, sólo dos pequeñas notas sobre este trabajo habían sido publicadas por Abel, ellas contenían algunos de sus resultados en el caso hiperelíptico, (ver [**2**]) y el enunciado del teorema de Abel en su forma general, con un esbozo de demostración en [**3**].
El trabajo de Abel sirvió como fundamento para el trabajo de Jacobi sobre "el problema de inversión" de integrales abelianas.
Alrededor de 1832, Jacobi descubre cómo el teorema de Abel puede ser usado para "invertir" integrales abelianas. Jacobi en su trabajo *Considerationes generales de transcendentibus abelianis Gesammelte Werke* (ver [**24**]) deriva del teorema de Abel una fórmula

de adición para integrales abelianas hiperelípticas. Dos años más tarde, en 1834, deja en claro que el problema de "inversión" involucra funciones de varias variables complejas (ver [**25**]). El problema de "inversión" para integrales abelianas hiperelípticas de género 2, como había propuesto Jacobi, consistía en construir funciones enteras y periódicas en $\mathbb{C}^2$ con valores en $X_g^{(2)}$ (el producto simétrico) las cuales definirían un inverso a una cierta transformación (ver [**25**]). Este problema fue resuelto por Göpel and Rosenhain en 1847, quienes introdujeron para este fin *las funciones Theta de dos variables.* El problema generalizado concerniente a las curvas hiperelípticas de género arbitrario fue resuelto por Weierstrass, en trabajos publicados de 1848 a 1856. Estos trabajos motivaron el estudio de las funciones Theta de varias variables complejas, las cuales fueron exitosamente usadas por Riemann para dar una solución al problema de inversión para una curva algebraica arbitraria en su gran artículo de 1857, *Theorie der Abel'schen Functionen* [**40**].

A finales del siglo XIX los geómetras iniciaron el estudio de la teoría de funciones abelianas y funciones Theta por métodos geométricos. Originalmente una "variedad abeliana" de dimensión g significaba una hipersuperficie de $\mathbb{CP}^{g+1}$ dada como la imagen de $\mathbb{C}^g$ bajo la transformación definida por $g+2$ funciones Theta apropiadas. Después esta noción fue extendida, entendiendo por ella una variedad proyectiva dada como la imagen de $\mathbb{C}^g$ bajo la transformación definida por un sistema de funciones Theta del mismo tipo (Lefschetz [**29**]). Sin embargo, puesto que esas variedades regularmente tenían singularidades "complicadas" y no admitían un grupo de estructura, el lenguaje de toros complejos se volvió más fructifero para este propósito. Picard parece haber sido el primero en expresar la teoría de funciones abelianas en este lenguaje. Pero fue sólo después del artículo fundamental de Lefschetz [**28**] que este punto de vista fue generalmente aceptado. Las bases de la teoría geométrica de variedades abelianas son debidas en gran parte a Scorza, Rosati y Lefschetz.
Un *toro complejo* es un grupo de Lie complejo y compacto. Cualquier toro complejo es de la forma $X = \mathbb{C}^g/\Lambda$, donde Λ es una retícula en $\mathbb{C}^g$. Una función meromorfa en $\mathbb{C}^g$, periódica con respecto a Λ, puede ser considerada como una función meromorfa en X. Una *variedad abeliana* es un toro complejo el cual admite "muchas" funciones meromorfas. En otras palabras, las variedades abelianas son exactamente los toros complejos algebraicos.

Hoy en día, la teoría de Abel-Jacobi y las variedades abelianas, juegan un papel importante en varias ramas de la matemática, entre las que podemos mencionar están la teoría de números, la teoría de campos de clases, geometría algebraica, los sistemas Hamiltonianos integrables, entre otras.

Por otra parte, *las laminaciones* son una generalización de las foliaciones, en el sentido que el espacio ambiente ya no es necesariamente una variedad, es decir, es un espacio topológico localmente homeomorfo a $\mathbb{B}^n \times T$, donde $\mathbb{B}^n$ es una bola abierta en $\mathbb{R}^n$, T es un espacio topológico arbitrario y donde las hojas tienen estructura diferenciable o bien estructura holomorfa. Si las hojas tienen dimensión real dos, diremos que esta laminación es *una laminación por superficies*; más aún, si dotamos de una estructura holomorfa a las hojas de esta laminación obtenemos *una laminación por superficies de Riemann* (ver definición 1.1.1 del capítulo 1). Las hojas de estas laminaciones son típicamente superficies de Riemann no compactas.

En tiempos recientes (finales del siglo XX) las laminaciones por superficies de Riemann han mostrado ser naturales y útiles. Como testimonio de ello son los resultados obtenidos por Denis Sullivan [**48**] con los cuales se da una demostración conceptual a la conjetura de Feigembaun sobre "un esenario de renormalización" en el espacio de todas las transformaciones de la linea real $x \mapsto x^2 + a$ con $a \geq 2$, el cual podia explicar sus descubrimientos númericos sobre la cascada de periodos dobles $1, 2, 4, 8, \ldots 2^n \ldots$.
Para dar con dicho resultado, se usa fuertemente un estudio de los cambios infinitesimales en la estructura compleja de cierta "superficie de Riemann solenoidal". En otras palabras, en un estudio del espacio de Teichmuller de una cierta laminación por superficies de Riemann, la cual fibra sobre una superficie de Riemann compacta con fibra el conjunto de Cantor y todas sus hojas son densas.
Otro testimonio son los resultados de I. Biswas, S. Nag y D. Sullivan [**5**] y [**6**]. En estos trabajos, ellos considerando el límite inverso sobre el sistema dirigido de todas las cubiertas marcadas no ramificadas finitas de una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$ fija. Dicho límite resulta ser una laminación por superficies de Riemann compacta, es decir un espacio foliado compacto cuyas hojas tienen estructura de superficies de Riemann, la cual es llamada *la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico* (ver sección 1.2.6 del capítulo 1). El primer trabajo [**5**], se centra en el límite directo de espacios de Teichmuller correspondientes al límite inverso sobre el sistema dirigido que determina a la laminación universal algebraica hiperbólica y los resultados que aquí se obtinen están intimamente relacionados con la teoría de cuerdas bosónica de Polyakov. Los resultados de [**6**] pueden ser vistos como una contribución a la formulación no perturbativa de la estructura de la medida de Polyakov en una forma independiente del género.

Etienne Ghys en su artículo *Laminations par surfaces de Riemann* (ver [**18**]) describe algunos resultados generales sobre laminaciones por superficies de Riemann poniendo énfasis en su analogía con las superficies de Riemann compactas, es decir, centra la discución sobre los teoremas fundamentales en superficies de Riemann: la clasificación topológica, teorema de unifromización, teorema de Riemann. En este artículo, estudia el tipo conforme de las hojas y la existencia de funciones meromorfas. Siguiendo con el orden de las ideas de este artículo, una pregunta natural es:

¿Cuál es la teoría de Abel-Jacobi para laminaciones por superficies de Riemann?

En esta tesis se trata de dar respuesta a esta pregunta para el caso de *las laminaciones producto* $\mathcal{L}_g = X_g \times K$, donde X_g es una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 1$ y K es el conjunto de Cantor (ver ejemplo 1.2.1 del capítulo 1). Así como para el caso de *las laminaciones universales algebraicas de tipo elíptico (o parabólico) y de tipo hiperbólico.* Dichas laminaciones, aparecen al considerar la torre de recubrimientos holomorfos no ramificados por superfcies de Riemann compactas sobre una ya predeterminada. Hay que notar que el tipo de la laminación universal algebraica que obtenemos no dependen de la superficie base, sino del tipo (elíptico o hiperbólico) de la misma, es decir, sólo depende del hecho que la superficie base sea elíptica (o parabólica) ($g = 1$) o bien hiperbólica, $g \geq 2$. Así, esto da el nombre de laminación universal algebraica de tipo elíptico o bien de tipo hiperbólico (ver sección 1.2.6 del capítulo 1).

El presente trabajo está estructurado de la siguiente manera:
En el capítulo 1 se dan las definiciones básicas sobre la teoría de laminaciones por superficies de Riemann siguiendo el trabajo de E. Ghys **[18]**, se definen y construyen explícitamente las laminaciones producto y las laminaciones universales algebraicas (ver sección 1.2.6). Se hace un repaso breve de la teoría de Abel-Jacobi, la variedad de Picard, el grupo de Picard, poniendo particular énfasis en las subvariedades analíticas de la variedad Jacobiana y de la variedad de Picard. Todo lo anterior sirve para introducir la notación y los elementos que posteriormente se generalizarán en el capítulo 2.
El capítulo 2 inicia con una descripción de las 1-formas diferenciales holomorfas y las cohomología de de Rham y Dolbeault tangenciales para las laminaciones producto. Se prueba un teorema análogo al teorema de dualidad de Serre para las laminaciones producto:
Teorema 2.2.10(Dualidad de Serre para laminaciones producto) *Sea L un haz lineal holomorfo tangencial sobre $\mathcal{L}_g$. Entonces, existe un isomorfismo canónico*

$$H^1(\mathcal{L}_g; L)_T \cong H^0(\mathcal{L}_g; L^* \otimes \overline{F^*\mathcal{L}_g})^*.$$

Se describe a la homología tangencial para las laminaciones producto, con lo cual, se define un análogo de la variedad Jacobiana de cualquier laminación producto en analogía a la definición clásica de la variedad Jacobiana para superficies de Riemann compactas. Así como una caracterización de esta:
Teorema 2.4.8 *Existe un isomorfismo canónico entre la Jacobiana de la laminación producto $\mathcal{L}_g$ y $C^0(K, Jac(X_g))$, es decir,*

$$Jac(\mathcal{L}_g) \cong C^0(K, Jac(X_g)).$$

Con la definición de Jacobiana de una laminación producto en mente, definimos *la transformación de Abel-Jacobi*; más aún, probamos que esta transformación es un encaje tangencialmente holomorfo de la laminación producto en su Jacobiana:

Teorema 2.5.5 *La transformación de Abel-Jacobi es un encaje holomorfo tangencial de la laminación producto (con puntos base $Z(t)$) en su Jacobiana.*

La sección 2.6 se centra en un estudio de los divisores en la laminación producto. Empezando por dar sentido a la nociones de divisor, grado de un divisor y el grupo de divisores en las laminaciones producto. Dando una caracterización de este último grupo:
Proposición 2.6.8 *El grupo de divisores en la laminación producto $\mathcal{L}_g$ es canónicamente isomorfo al grupo de las funciones continuas del conjunto de Cantor en el grupo de divisores de la superficie de Riemann compacta X_g.*
Se definen los divisores principales en la laminación universal algebraica y se estudia su relación con los divisores asociados a funciones meromorfas tangenciales (sección 2.6.2) probando que todo divisor es principal si y sólo si es el divisor asociado a una función meromorfa tangencial:
Proposición 2.6.15 *Un divisor, $D(t)$, en la laminación producto $\mathcal{L}_g$, es principal si y sólo si existe una función meromorfa tangencial en la laminación $\mathcal{L}_g$ tal que*

$$(f) = D(t).$$

En la sección 2.7 se ve *al grupo de Picard de la laminación de la laminación producto* como el grupo de divisores módulo el grupo de divisores principales y como el grupo de haces lineales holomorfos, se define la clase de Chern tangencial para haces lineales holomorfos y se establece una relación entre la Jacobiana y el grupo de los haces lineales holomorfos tangenciales que tienen clase de Chern tangencial constante 0:
Teorema 2.7.14 *La Jacobiana de la laminación producto, $Jac(\mathcal{L}_g)$ es naturalmente isomorfa al grupo de los haces lineales holomorfos tangenciales con clase de Chern tangencial constante 0 en $\mathcal{L}_g$, es decir,*

$$Jac(\mathcal{L}_g) \cong Pic_0(\mathcal{L}_g).$$

Posteriormente se analizan los subconjuntos W_k y sus subconjuntos"singulares" en la Jacobiana y en el grupo $Pic_0(\mathcal{L}_g)$. La última sección del capítulo 2 es una breve introducción y descripción de la teoría de moduli para laminaciones producto.

En los capítulos 3 y 4 se desarrolla la teoría de Abel-Jacobi para las laminaciones universales algebraicas de tipo elíptico (o parabólico) y de tipo hiperbólico.

El capítulo 3 sección 3.1.1 usando la descripción explicita de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico) $\widehat{\mathbf{E}_\tau}$ se define la Jacobiana de $\widehat{\mathbf{E}_\tau}$ como el límite inverso de las variedades Jacobianas asociadas a las superficies de Riemann compactas involucradas en la definición de la laminación universal algebraica $\widehat{\mathbf{E}_\tau}$, es decir,

Proposición 3.1.2 *El límite inverso*

$$(Jac(\widehat{\mathbb{E}_\tau, p_\tau}), \hat{C}_H) = \varprojlim_{H,H' \in I} \{Jac(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)}), C_{\tau(H),\tau(H')}\}$$

existe y será llamado la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico).

Con dicha construcción y definición se prueba un análogo al teorema de Abel-Jacobi clásico para superficies de Riemann en el caso de la laminación universal algebraica $\widehat{\mathbb{E}_\tau}$:

Teorema 3.1.6 (Abel-Jacobi para la laminación universal algebraica de tipo elíptico) *Existe un encaje holomorfo tangencial canónico, $\widehat{A}$, de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico) en su Jacobiana.*

A dicha transformación la llamamos *transformación de Abel-Jacobi de tipo elíptico (o parabólico).*

Siguiendo con las mismas ideas, se define la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico $\widehat{X}_g$:

Proposición 3.1.16 *El límite inverso*

$$Jac((\widehat{X}_{g,\tau}), \hat{C}_H) = \varprojlim_{H,H' \in I} \{Jac(X_{g(H)}), C_{g(H)g(H')}\}$$

existe y será llamado la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico.

Y se prueba:

Teorema 3.1.19 (Abel-Jacobi para la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico) *Existe un encaje holomorfo tangencial canónico, $\widehat{A}$, de la laminación algebraica universal de tipo hiperbólico en su Jacobiana.*

A dicha transformación la llamamos *transformación de Abel-Jacobi de tipo hiperbólico).*

Las secciones restante de este capítulo estan dedicadas a tratar de entender a las Jacobianas de las laminaciones universales algebraicas mediante un estudio de los cubrientes universales de las variedades Jacobianas involucradas probando que:

Teorema 3.3.6 *El grupo fundamental algebraico de $\mathbb{E}$ es canónicamente isomorfo al grupo de transformaciones de cubierta de la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo elíptico sobre la Jacobiana de $\mathbb{E}_\tau$, es decir,*

$$\widehat{\pi}_1(\mathbb{E}_\tau, p_0) \cong Deck(Jac(\widehat{\mathbb{E}}_\tau)/Jac(\mathbb{E}_\tau)).$$

En el caso de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico se prueba que el grupo de las transformaciones de cubierta de la Jacobiana de la laminación $\widehat{X}_g$ sobre $Jac(X_g)$ esta dada por:

Proposición 3.3.13 *El límite inverso*

$$Deck(Jac(\widehat{X}_{g,\tau})/Jac(X_{g,\tau})) = \varprojlim_{U,V \in J} \{\Gamma_U, q_{UV}\}$$

del sistema inverso $\{\Gamma_U, q_{UV}\}_{U,V\in J}$ *existe.*
Donde Γ_U denota un grupo finito, el cual es un grupo de transformaciones de cubierta.

En el último capítulo damos sentido a la noción de divisor y grado de un divisor en las laminaciones universales algebraicas. Definimos el grupo de divisores, el grupo de Picard y la proto-variedad de Picard. Estudiamos las propiedades del grupo de Picard y de la proto-variedad de Picard analizando sus subconjuntos en analogía con el caso clasico, finalmente describimos la relación entre la proto-variedad de Picard y la Jacobiana de las laminaciones universales algebraicas.

1

Preliminares.

Aprende bien las reglas,
y luego olvidalas.
(Basho).

1.1. Definiciones básicas.

En esta sección damos las definiciones y terminología de los objetos con los cuales se va a trabajar (comparar con **[32]** y con **[18]**).

Definición 1.1.1. Un espacio topológico metrizable y separable M, es *un espacio foliado de dimensión* n, si existe una colección de conjuntos abiertos $U_x \subset M$ con $x \in M$ y homeomorfismos $h_x : U_x \longrightarrow \mathbb{B}^n_x \times T_x$ con $\mathbb{B}^n_x$ abierto en $\mathbb{R}^n$ y T_x es un espacio topológico Hausdorff arbitrario, donde los cambios de coordenadas $h_y \circ h_x^{-1}$ tienen la forma

$$h_y \circ (h_x)^{-1}(w,t) = (\phi_{yx}(w,t), \gamma_{yx}(t))$$

en el dominio de definición de las funciones ϕ_{yx} y γ_{yx}.
La asignación $t \mapsto \phi_{yx}(\bullet, t)$ da una transformación continua del espacio topológico T_x en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{B}^n_x, \mathbb{B}^n_y)$.

Debemos notar que estamos asumiendo que la colección $\{U_x\}$ en la definición anterior es maximal entre las colecciones que cumplen tales condiciones.

En particular, si el espacio M (es compacto) tiene una cubierta abierta $\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ junto con homeomorfismos $h_i : U_i \longrightarrow \mathbb{D} \times T_i$, donde $\mathbb{D}$ es el disco unitario centrado en el origen de $\mathbb{C}$ y T_i es un espacio topológico Hausdorff arbitrario, tenemos la siguiente definición:

Definición 1.1.2. Diremos que los abiertos U_i y los homeomorfismos h_i definen *un atlas de estructura de laminación (compacta) por superficies de Riemann*, si los cambios de coordenadas satisfacen, en su dominio de definición, la relación

$$h_{ij}(z,t) = h_i \circ (h_j)^{-1}(z,t) = (\phi_{ij}(z,t), \gamma_{ij}(t)),$$

donde ϕ_{ij} y γ_{ij} son transformaciones continuas y ϕ_{ij} depende holomorfamente de la variable z. Los abiertos de la cubierta abierta anterior serán llamados *abiertos distinguidos.*

Definición 1.1.3. *Dos atlas* de estructura de laminaciones (compactas) por superficies de Riemann *son equivalentes*, si su unión es de nuevo un atlas de estructura de laminación (compacta) por superficies de Riemann.

Definición 1.1.4. Un espacio topológico, métrico (compacto) M es *una laminación (compacta) por superficies de Riemann*, si está dotado de una clase de equivalencia de atlas $\mathcal{L}$ de estructura de laminación (compacta) por superficies de Riemann. Denotaremos por $(M, \mathcal{L})$ a la laminación (compacta) por superficies de Riemann M con estructura $\mathcal{L}$.

Definición 1.1.5. La imagen inversa del conjunto $\mathbb{D} \times \{t\}$ bajo el homeomorfismo h_i la llamaremos *una placa* de $(M, \mathcal{L})$; es decir, si es de la forma $h_i^{-1}(\mathbb{D} \times \{t\})$.
Una trayectoria de placas de $(M, \mathcal{L})$ es una sucesión finita $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ de placas de $(M, \mathcal{L})$ tal que $\alpha_j \bigcap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ para toda $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Puesto que $(M, \mathcal{L})$ está cubierta por placas, podemos definir en M, la siguiente relación de equivalencia: $p \sim q$ si existe una trayectoria de placas $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ con $p \in \alpha_1$ y $q \in \alpha_k$.

Definición 1.1.6. A cada clase de equivalencia bajo $\sim$, se le llama *una hoja de* $(M, \mathcal{L})$.

Equivalentemente, el cambio de coordenadas holomorfo de la placa $h_i^{-1}(\mathbb{D} \times \{t_1\})$ en la placa $h_j(\mathbb{D} \times \{t_2\})$ "pega" dichas placas para forma un conjunto maximal conexo, llamado una hoja.

Definición 1.1.7. Diremos que un subconjunto F de $(M, \mathcal{L})$ es *saturado (o invariante)*, si F es una unión de hojas.

Observación 1.1.8. Las uniones y las intersecciones arbitrarias de conjuntos saturados son conjuntos saturados, en particular los complementos también son conjuntos saturados.

Observación 1.1.9. Si F es un subconjunto cerrado y saturado de $(M, \mathcal{L})$, entonces, la restricción de la estructura de laminación al subconjunto F define una estructura de laminación (compacta) por superficies de Riemann en F, es decir $(F, \mathcal{L}_{|_F})$.

Definición 1.1.10. Un subconjunto cerrado y no vacío F de $(M, \mathcal{L})$ será llamado *un conjunto minimal*, si es saturado y no tiene subconjuntos propios no vacíos y saturados.

Lema 1.1.11. *Toda hoja L contenida en un conjunto minimal F es densa en F. Recí procamente, si toda hoja de un subconjunto cerrado y saturado F es densa, entonces F es un conjunto minimal.*

Demostración. Consideremos una hoja L en el conjunto minimal F. Por el lema de Zorn obtenemos que la cerradura de toda hoja en un conjunto minimal contiene un conjunto minimal. Usando nuevamente la minimalidad de F obtenemos que dicha hoja es densa en F. Recíprocamente, supongamos que F no es minimal, entonces existe un subconjunto propio no vacío, F', cerrado y saturado de F; como las hojas son densas en F, entonces podemos encontrar un subconjunto cerrado y saturado de F que contenga propiamente a F'.

■

Definición 1.1.12. Diremos que *una laminación es minimal*, si todas sus hojas son densas.

Lema 1.1.13. *Si $(M,\mathcal{L})$ es una laminación compacta no vacía, entonces $(M,\mathcal{L})$ posee un conjunto minimal saturado no vacío.*

1.2. Ejemplos.

Daremos básicamente cinco ejemplos generales: las laminaciones producto, las laminaciones por superficies de Riemann obtenidas por la suspensión de una representación (en particular de un homeomorfismo, comparar con [**10**]), laminaciones por superficies de Riemann asociadas a aplicaciones dilatantes del círculo (comparar con [**18**] y con [**47**]), la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico) y la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico. En cada caso haremos ejemplos explícitos.

1.2.1. Laminaciones producto Cantorianas. Consideremos una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 1$, X_g. Formamos el espacio topológico producto $M_g = X_g \times K$, donde K es un conjunto de Cantor, (en realidad, El conjunto de Cantor, ver sección 1.2.4), y $\mathcal{L}_g$ es la estructura de laminación compacta por superficies de Riemann natural.
Llamaremos de ahora en adelante a esta laminación compacta, *laminación producto*, y la denotaremos simplemente por $\mathcal{L}_g$.

1.2.2. La suspensión de una representación. Un método muy general para la construcción de ejemplos de laminaciones, es el de la suspensión de una representación del grupo fundamental de una variedad S en el grupo de difeomorfismos (o en el grupo de homeomorfismos) de una variedad (espacio topológico) T. Para fijar ideas comenzaremos con un caso más sencillo, la suspensión por un difeomorfismo de una variedad lisa (comparar con [**50**]):

Ejemplo 1.2.1. La suspensión de un difeomorfismo f.
Consideremos una variedad lisa S (i.e de clase $\mathcal{C}^{\infty}$) y un difeomorfismo $f : S \longrightarrow S$ de clase $\mathcal{C}^r$, *con* $r \geqslant 1$.
En la variedad producto $S \times \mathbb{R}$, consideremos la relación de equivalencia $\backsim$ definida por:

$$(s,t) \backsim (s',t') \text{ si y sólo si } t - t' = n \in \mathbb{Z} \text{ y } s' = f^{\circ n}(s).$$

Así, si definimos $g(s,t) = (f^{-1}(s), t+1)$, entonces g es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^r$ de $S \times \mathbb{R}$ en sí mismo y $(s,t) \backsim (s',t')$ si y sólo sí $(s',t') = g^{\circ n}(s,t)$ para alguna $n \in \mathbb{Z}$. Denotemos al espacio cociente dotado de la topología cociente por $M = S \times \mathbb{R}/\backsim$ y a la

proyección natural por $\pi : S \times \mathbb{R} \longrightarrow M$.
Dado un punto $p \in M$, donde $p = \pi(s,t)$, consideremos los abiertos $V = S \times (t-\frac{1}{2}, t+\frac{1}{2})$ y $U = \pi(V)$, se puede verificar que $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} V_n$, donde $V_n = g^{\circ n}(V)$ y $\pi|_{V_n} : V_n \longrightarrow U$ es un homeomorfismo para toda $n \in \mathbb{Z}$.
De lo anterior, concluimos que $\pi : S \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ es una transformación cubriente.
Observemos que para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ la transformación $g^{\circ n} = (\pi|_{V_n})^{-1} \circ \pi|_V : V \longrightarrow V_n$ es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^r$, de donde es posible inducir en M una estructura de variedad diferenciable (de dimensión $dim(S) + 1$) de clase $\mathcal{C}^r$, de tal forma que π sea un difeomorfismo local de clase $\mathcal{C}^r$.
En $S \times \mathbb{R}$ consideremos la foliación $\mathcal{F}_0$ cuyas hojas son las líneas $\{s\} \times \mathbb{R}$, donde $s \in S$, las cuales son tangentes al campo vectorial $X^0(s,t) = (0,1)$ en $S \times \mathbb{R}$. La foliación $\mathcal{F}_0$ y el campo vectorial X^0 son invariantes bajo el difeomorfismo g, es decir, $g(\mathcal{F}_0) = \mathcal{F}_0$ y $g_*(X^0) = (dg)^{-1}(X^0 \circ g) = X^0$, con lo cual se puede afirmar que existen una foliación $\mathcal{F}$ y un campo vectorial X en M que satisfacen las relaciones:

$$\mathcal{F}_0 = \pi^*(\mathcal{F}) \text{ y } X^0 = \pi^*(X).$$

Las curvas integrales del campo vectorial X son las hojas de la foliación $\mathcal{F}$. La foliación $\mathcal{F}$ recibe el nombre de *la suspensión del difeomorfismo* f.

Ejemplo 1.2.2. Del ejemplo anterior, nos restringimos al intervalo $[0,1]$ y tomamos la relación de equivalencia: $(s,0) \backsim (f^{-1}(s),1)$, con lo cual obtenemos una foliación $\mathcal{F}$ transversa a las fibras de un haz fibrado. La foliación $\mathcal{F}$ es la inducida en M por la foliación trivial $\{s\} \times [0,1]$ en $S \times [0,1]$. En este caso el espacio M fibra sobre S^1, donde cada fibra tiene una estructura de grupo discreto. En efecto, puesto que podemos tomar como cartas locales de M a los cocientes U y V de $\tilde{U} = S \times (\epsilon, 1-\epsilon)$, y $\tilde{V} = S \times \{[0,2\epsilon] \bigcup (1-2\epsilon, 1)\}$ respectivamente bajo la identificación $\sim$. Entonces, la intersección $U \bigcap V$ tiene dos componentes W_{12} y W_{21}, así como transformaciones $g_{12} : W_{12} \longrightarrow Diff(S)$, $g_{21} : W_{21} \longrightarrow Diff(S)$ las cuales están dadas por $g_{12} = Id$ y $g_{21} = f$ respectivamente.

Ejemplo 1.2.3. Espacio foliado de dimensión uno.
Consideremos el conjunto $\{0,1\}$ con la topológia discreta y formemos el producto cartesiano infinito $\prod_{\mathbb{Z}}\{0,1\} = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ con la topología producto usual. Se puede verificar que $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ es compacto, totalmente disconexo, perfecto, Hausdorff y se le puede dar una métrica, con lo cual es homeomorfo a un conjunto de Cantor. Denotaremos por K al conjunto $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.
Consideremos el homeomorfismo $f : K \longrightarrow K$ dado como

$$f(\ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots) = (\ldots, i'_k, i'_{k+1}, \ldots) \text{ donde } i'_k = i_{k+1} \forall k \in \mathbb{Z}, i_k \in \{0,1\}.$$

En el espacio producto $[0,1] \times K$ hacemos la identificación:
$(1, (\ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots)) \sim (0, f(\ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots))$. Al igual que en el ejemplo 1.2.2 anterior, tomamos la suspensión con respecto al homeomorfismo f, de donde tenemos que $M = [0,1] \times K/ \sim$ es un espacio topológico que fibra sobre S^1 con fibra $\pi^{-1}(p) = K$ y existe una foliación $\mathcal{F}$ en M con hojas de dimensión uno, dichas hojas de la foliación resultan de "pegar" los conjuntos $[0,1] \times \{(\ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots)\}$.
Explícitamente, el atlas de estructura de espacio foliado para M está dado como sigue: Cubrimos a S^1 con una familia finita de sub-arcos abiertos, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, que se intersecten dos a dos en un arco abierto, entonces, los conjuntos $U_i = \pi^{-1}(A_i) \cong A_i \times K$ forman una cubierta abierta de M. En cada U_j, la foliación inducida $\mathcal{F}_{|U_j}$ tiene como hojas a conjuntos homeomorfos a los arcos abiertos $A_j \times \{(\ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots)\}$ con $(\ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots) \in K$.
Los conjuntos $U_j \cong A_j \times K$ junto con las proyecciones en los respectivos factores x_i, y_i, es decir, $x_j : U_j \longrightarrow K$ y $y_j : U_j \longrightarrow K$ son pensados como las cartas foliadas con coordenadas. Las hojas de $\mathcal{F}_{|U_j}$ son las placas y es claro que una placa de U_j intersecta a lo más una placa de U_k con $1 \leq j, k \leq n$.
Así, $\mathcal{U} = \{U_j, x_j, y_j\}_{i=1}^n$ es un atlas foliado para M.
Puesto que f tiene un número infinito de puntos periódicos, de períodos arbitrariamente grandes, entonces $\mathcal{F}$ tiene un número infinito de hojas cerradas de longitudes arbitrariamente grandes. También existen f-órbitas límites de las órbitas periódicas para iteraciones positivas como para iteraciones negativas, así como una colección de conjuntos minimales que son órbitas no cerradas y finalmente, también existen órbitas que son densas en K. Todas estas propiedades del homomorfismo f son observadas en el espacio foliado M.

A partir de las ideas de los ejemplos anteriores podemos construir ejemplos de laminaciones compactas y no compactas por superficies de Riemann. Tomemos como la variedad lisa S a una superficie de Riemann y como T a una variedad lisa compacta arbitraria. Consideremos un homomorfismo h del grupo fundamental de S en el grupo de homeomorfismos (o grupo de difeomorfismos) de T, es decir:

$$h : \pi_1(S) \longrightarrow Homeo(T) \tag{1}$$

$$h : \pi_1(S) \longrightarrow Diff(T). \tag{2}$$

El grupo fundamental de S, $\pi_1(S)$, actúa en la variedad producto $\tilde{S} \times T$, donde $\tilde{S}$ es el cubriente universal de S, de la manera siguiente:

$$(\tilde{s}, t) \to (\sigma_{[\alpha]}(\tilde{s}), h([\alpha])(t)), \ [\alpha] \in \pi_1(S), \tag{3}$$

donde $\sigma_{[\alpha]}$ denota la transformación de cubierta asociada a $[\alpha]$.

Lema 1.2.4. *El cociente de la variedad producto $\tilde{S} \times T$ dado por la relación de equivalencia anterior define una variedad topológica (diferenciable) M con las siguientes propiedades:*

- *M fibra sobre S con fibras homeomorfas a T, es decir:*

(4) $$M = \tilde{S} \times T/ \backsim, \ \pi^{-1}(y) \cong T,$$

  en otras palabras, π es una fibración localmente trivial.
- *M tiene una foliación, $\mathcal{F}$, transversa a las fibras de la fibración anterior, más aún, las hojas de la foliación $\mathcal{F}$ son cubrientes de la base S.*
- *Las fibras en M están identificadas de acuerdo a las órbitas del grupo $h(\pi(S))$.*

Observación 1.2.5. Por la última propiedad en la proposición anterior tenemos que si la acción es minimal entonces la foliación es minimal.

Consideremos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.2.6. $\mathbb{C}^* \times \widehat{\mathbb{Z}}_2/\sim$.
Denotemos por $\widehat{\mathbb{Z}}_2$ al conjunto de los enteros diádicos vistos como grupo topológico abeliano, el cual es homeomorfo al conjunto de Cantor ternario (ver 1.2.4). Notemos que las órbitas de los puntos $t \in \widehat{\mathbb{Z}}_2$ dadas por la transformación $t \mapsto t+1$ son densas en los enteros diádicos.
En el espacio producto $\mathbb{C}^* \times \widehat{\mathbb{Z}}_2$ consideremos la relación de equivalencia $\sim$ dada por:

$$(z,t) \sim (z',t') \text{ si y sólo si } z' = 2^n z \text{ y } t' = t+n \text{ para alguna } n \in \mathbb{Z}.$$

Consideremos el espacio de órbitas bajo ésta relación de equivalencia. Por otro lado sabemos que $\mathbb{C}^*/2z$ es un toro complejo, así $\mathbb{C}^* \times \widehat{\mathbb{Z}}_2/\sim$ es una laminación compacta por superficies de Riemann con hojas densas (i.e es una laminación minimal), las cuales son holomorfamente equivalentes a $\mathbb{C}$. Más aún, esta laminación fibra sobre el toro $\mathbb{C}^*/2z$ con fibra $\widehat{\mathbb{Z}}_2$.

Ejemplo 1.2.7. En el caso de representaciones del grupo fundamental tomemos a S como X_2 una superficie de Riemann compacta de género dos y a T como $\mathbb{CP}^1$.
Sabemos que el grupo fundamental de X_2, $\pi_1(X_2)$, tiene una representación finita dada por $\{a_i, b_i,\ i = 1,2 | \prod_{i=1}^{2} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = e\}$, en esta consideremos al subgrupo libre en dos generadores $G = \langle (a_1, b_1) \rangle$. En $PSL(2,\mathbb{C})$ escogemos a α *y* β de tal forma que el grupo que generan sea un grupo Kleiniano con un conjunto de Cantor como conjunto límite Λ (por ejemplo, un grupo Fuchsiano de segunda especie, en particular un grupo de Schottky el cual tiene como conjunto límite un conjunto de Cantor, **[30]**). Definimos un homomorfismo h de G en $PSL(2,\mathbb{C})$ tal que $h(b_1) = \beta$ y $h(a_1) = \alpha$. La suspensión de h es una superficie compleja $M = \tilde{X}_2 \times \mathbb{CP}^1$ que fibra sobre X_2 con fibra $\mathbb{CP}^1$. Se puede ver

mediante el trabajo de Serre ([**45**]) que M es una superficie algebraica reglada, es decir, existe un encaje holomorfo de M en $\mathbb{CP}^N$ para alguna $N \in \mathbb{N}$. Más aún, el cociente del conjunto $\tilde{X}_2 \times \Lambda$ bajo $\sim$ es un conjunto compacto, $X \subset M$, el cual es saturado en el que cada fibra se convierte en un conjunto de Cantor. Este compacto X está equipado de una foliación, la cual está dada por restricción.
Este es un ejemplo típico de laminación compacta por superficies de Riemann minimal, el cual es un espacio topológico que no es una variedad (la minimalidad resulta del hecho de que todas las órbitas del conjunto límite de un grupo Kleineano son densas en este conjunto límite).

1.2.3. Límites inversos. Antes de continuar con los ejemplos, daremos las definiciones básicas y algunos resultados sobre límites inversos.
Denotemos por I a un conjunto no vacío, el cual después será un conjunto de índices. Decimos que I es *preordenado* con respecto a la relación $\leq$, si la relación dada es reflexiva y transitiva. Entendiendo que la relación $\leq$ es reflexiva si $i \leq i$ para toda $i \in I$ y es transitiva si $i \leq j$ y $j \leq k$ entonces $i \leq k$ para toda $i, j, k \in I$. Nótese que un preorden es más débil que un orden parcial ya que no se esta asuminedo antisimetría (si $i \leq j$ y $j \leq i$ no necesariamente implica que $i = j$).

Un conjunto preordenado I es un *un conjunto dirigido* si cualquier subconjunto finito de I tiene una cota superior en I, equivalentemente para todo $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$.
Recuerdese que los conjuntos dirigidos son precisamente lo que es necesario para definir la noción de una red en espacios topológicos abstractos.

Definición 1.2.8. Una familia $\{Y_i | i \in I\}$ de espacios topológicos y una familia de transformaciones continuas $\{\varphi_{ij} : Y_j \longrightarrow Y_i | i, j \in I,\ i \leq j\}$, tal que φ_{ii} es la transformación identidad en Y_i para cada $i \in I$ y $\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} = \varphi_{ik}$ siempre y cuando $i \leq j \leq k$ es llamada *un sistema inverso* $\{Y_i, \varphi_{ij}\}$ *de espacios topológicos con indices en un conjunto dirigido* I.

Si en la definición anterior cambiamos espacio topológico por grupo, grupo topológico y la familia de transformaciones continuas la cambiamos por una familia de homomorfismos, homomorfismos continuos, entonces, tendremos un sistema inverso de grupos, grupos topológicos respectivamente.

Si $\{Y_i, \varphi_{ij}\}$ es un sistema inverso de espacios topológicos (grupos, grupos topológicos) y Y es un espacio topológico (grupo, grupo topológico, resp.), la familia de transformaciones continuas (homomorfismos, homomorfismos continuos, resp.) $\{\psi_i : Y \longrightarrow Y_i | i \in I\}$ es *compatible* si $\varphi_{ij} \circ \psi_j = \psi_i$ para $i \leq j$, es decir, si el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{Id} & Y \\ {\scriptstyle \psi_j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_i} \\ Y_j & \xrightarrow{\varphi_{ij}} & Y_i \end{array}$$

es conmutativo.

Definición 1.2.9. Un espacio topológico (grupo, grupo topológico, resp.) Y junto con una familia compatible $\{\varphi_i : Y \longrightarrow Y_i\}$ de transformaciones continuas (homomorfismos, homomorfismos continuos, resp.) con la propiedad universal es *un límite inverso* (Y, φ_i) de un sistema inverso $\{Y_i, \varphi_{ij}\}$ de espacios topológicos (grupos, grupos topológicos, resp.).

Donde la propiedad universal significa:
Si hay una familia compatible de transformaciones continuas (homomorfismos, homomorfismos continuos, resp.) $\{\psi_i : X \longrightarrow Y_i\}$ de un espacio topológico (un grupo, un grupo topológico, resp.) X, entonces, hay una única transformación continua (homomorfismo, homomorfismo continuo, resp.) $\psi : X \longrightarrow Y$ tal que $\varphi_i \circ \psi = \psi_i$ para cada i.

Consideremos un sistema inverso de grupos finitos a cada uno de los cuales lo dotamos de la topología discreta. Su límite inverso adquiere la topología inducida de la topológia del producto infinito. Esta topología es llamada *pro-finita*, así, este límite inverso adquiere la estructura de grupo topológico.

Definición 1.2.10. Un grupo topológico isomorfo al límite inverso de un sistema inverso de grupos finitos, dotado de la topológia pro-finita, es llamado *un grupo pro-finito.*

Se puede demostrar (ver **[51]** pág. 13) que el límite inverso de un sistema inverso $\{Y_i, \varphi_{ij}\}$ existe y es único salvo isomorfismos. En este sentido, nos referiremos *al límite inverso* del sistema inverso $\{Y_i, \varphi_{ij}\}$, al cual, denotaremos denotado por $\varprojlim\{Y_i, \varphi_{ij}\}$ o simplemente por $\varprojlim Y_i$.

Notemos que si $\{Y_i, \varphi_{ij}\}$ es un sistema inverso de grupos topológicos, entonces su límite inverso, visto como un conjunto, es justamente el límite inverso $\{Y_i, \varphi_{ij}\}$ visto como un sistema inverso de conjuntos.

Una demostración del siguiente resultado puede ser encontrada en **[51]**, pág.14.

Proposición 1.2.11. *Si $\{Y_i, \varphi_{ij}\}$ un sistema inverso de espacios topoógicos con índices en I, entonces:*

(1) *Si cada Y_i es Hausdorff, también lo es $\varprojlim Y_i$.*
(2) *Si cada Y_i es totalmente disconexo, también lo es $\varprojlim Y_i$.*
(3) *Si cada Y_i es Hausdorff, entonces $\varprojlim Y_i$ es cerrado en el producto cartesiano.*

(4) *Si cada Y_i es un espacio no vacío, compacto y Hausdorff, entonces $\varprojlim Y_i$ es no vacío, compacto y Hausdorff.*

1.2.4. Caracterización del conjunto de Cantor. Una demostración de los siguientes resultados pueden encontrarse en [**21**] págs. 98-99.

Teorema 1.2.12. *Si M es un espacio métrico, compacto y totalmente disconexo, entonces es homeomorfo a un límite inverso de conjuntos finitos dotados de la topología discreta.*

Teorema 1.2.13. *Cualesquiera dos espacios compactos, métricos, perfectos y totalmente disconexos son homeomorfos.*

Como consecuencia del teorema anterior tenemos el siguiente colorario:

Corolario 1.2.14. *Cualquier espacio compacto, métrico, perfecto y totalmente disconexo es homeomorfo al conjunto de Cantor ternario.*

1.2.5. Laminaciones por superficies de Riemann asociadas a aplicaciones dilatantes del círculo. Describiremos un método debido a Dennis Sullivan, el cual permite asociar una laminación por superficies de Riemann a ciertos sistemas dinámicos en el círculo unitario. Nos basaremos en la descripción que da Etienne Ghys en [**18**] (comparar con [**15**]).

Tomemos una aplicación $g : S^1 \longrightarrow S^1$ del círculo unitario en sí mismo que es dilatante, es decir, la derivada de g es estrictamente mayor que uno para todo punto de S^1. Tal aplicación es un recubrimiento del círculo. Para transformar la dinámica de g que es no invertible en una dináminca invertible, consideremos su extensión natural definida de la manera siguiente:
Denotemos por $V = \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} | x_n \in S^1$ y que satisfacen $g(x_n) = x_{n+1}\}$ al conjunto de todas las sucesiones de puntos en el círculo que son las órbitas de g.
Un punto de V es equivalente a dar un punto $x_0 \in S^1$ y escoger una sucesión de preimágenes sucesivas bajo g.
Dotamos a $V \subset \prod_{n\in\mathbb{N}} S^1$ con la topología inducida por la topología producto, con la cual V es un espacio compacto que posee una biyección natural f definida por: $f(\{x_n\}) = \{x_{n+1}\}$, también una proyección natural $\pi : V \longrightarrow S^1$ definida por $\pi(\{x_n\}) = x_0$. Las fibras de π son conjuntos de Cantor y se satisface que $g \circ \pi = \pi \circ f$.

Afirmación 1.2.15. Existe una foliación $\mathcal{F}$ de dimensión uno sobre V que es invariante y dilatada por f, donde dilatada significa que f expande la norma de los vectores tangentes a la foliación.

Demostración. Notemos que dar un punto de V es equivalente a dar un punto $x_0 \in S^1$ y escoger una sucesión de preimágenes sucesivas bajo g. Si el punto x_0 se desplaza continuamente sobre el círculo, uno puede seguir esta elección de preimágenes por continuidad y describir así una curva en V. Estas curvas son las hojas de la foliación $\mathcal{F}$.

■

También se pueden definir tlas hojas de la foliación $\mathcal{F}$ como las variedades inestables de la aplicación f de la manera siguiente:
Dos puntos $a, b \in V$ están en la misma hoja de $\mathcal{F}$ si y solamente sí, la distancia entre $f^{-on}(a)$ y $f^{-on}(b)$ tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Nota 1.2.16. El espacio V es llamado regularmente *un solenoide de dimensión uno*, ver [**47**].

Para construir una laminación compacta por superficies de Riemann debemos crear una estructura afín invariante sobre las hojas de $\mathcal{F}$. Recordemos que la recta afín $\mathbb{R}$ puede ser considerada de manera natural, como la frontera del semi-plano superior de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | Im(z) > 0\}$, es decir, que toda aplicación afín $x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ se extiende a un biholomorfismo $z \in \mathbb{H} \mapsto az + b \in \mathbb{H}$.
Otra manera de expresar lo anterior, consiste en decir que el conjunto de los vectores no nulos y positivamente orientados de una recta afín orientada, se identifican naturalmente con el semi-plano superior de Poincaré.
Consideremos al espacio $\widetilde{V}'$ formado por los vectores tangentes a la foliación $\mathcal{F}$ no nulos y orientados positivamente. Este espacio es no compacto y está dotado de una foliación $\widetilde{\mathcal{F}}'$ por copias del semi-plano superior $\mathbb{H}$.
Como vimos en la afirmación anterior f es dilatante, entonces la acción de f sobre $\widetilde{V}'$ es libre y propia. De tal forma que el cociente de $\widetilde{V}'$ por la acción de f es un espacio compacto V' dotado de una laminación por superficies de Riemann, $\mathcal{F}'$, donde las hojas de esta laminación son cocientes de $\mathbb{H}$. Más precisamente, uno distingue dos casos:
Si una hoja $\widetilde{l}'$ de $\widetilde{\mathcal{F}}'$ no se preserva por ninguna potencia de f, entonces la hoja en $\mathcal{F}'$ que le corresponde es isomorfa a $\mathbb{H}$. Por el contrario, si una hoja $\widetilde{l}'$ de $\widetilde{\mathcal{F}}'$ es preservada por alguna potencia de f, es decir, $f^{0n}($ y por ninguna f^{0i}, $0 < i < n)$, entonces f^{0n} actúa sobre $\widetilde{l}'$ como una homotecia de razón $\lambda > 1$ y la hoja l' correspondiente de $\mathcal{F}'$, es el cociente de $\mathbb{H}$ por esta homotecia. Así, l' es isomorfa a un cilindro. Como superficie de Riemann l' es un anillo definido como $\{w \in \mathbb{C} | 1 < |w| < \lambda\}$, donde $\ln(\lambda)$ es el módulo del anillo. A cada punto periódico x de período n de la transformación g, le corresponde una hoja en esta laminación que es un anillo de módulo $ln((g^{0n})'(x))$.
En resumen, *podemos asociar una laminación por superficies de Riemann a toda aplicación*

dilatante del círculo.

Consideremos el siguiente ejemplo concreto de la descripción anterior:

Ejemplo 1.2.17. Solenoide diádico de dimensión uno.
Consideremos a $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y la aplicación $g(z) = z^2$.
En éste caso tenemos que $V = \mathcal{S}_2 = \{\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} : (z_n)^2 = z_{n-1}\}$ es un subconjunto compacto del producto $\prod_{j=1}^{\infty} S^1$ con la topología inducida de la topología producto.
Existe una biyección natural f de $\mathcal{S}_2$ consigo mismo, la cual está dada por el "shift" o corrimiento de Bernoulli. Más precisamente $f(\{z_0, z_1, z_2, z_3, \dots\}) = (\{z_1, z_2, z_3, \dots\})$. La proyección $\pi : \mathcal{S}_2 \longrightarrow S^1$ está dada por: $\pi(\{z_n\}) = z_0$. Para describir las fibras de la transformación π, pensemos por un momento en la fibra sobre el 1, es decir, $\pi^{-1}(1)$:

$$1 \leftarrow g_1^{-1} = \{1, -1\} \leftarrow g_2^{-1} = \{1, -1, i, -i\} \leftarrow \dots$$

donde la transformación entre los conjuntos g_{j+1}^{-1} y g_j^{-1} es g. Así:

$$(5) \qquad \pi^{-1}(1) = \varprojlim_n (1 \leftarrow g_1^{-1} = \{1, -1\} \leftarrow g_2^{-1} = \{1, -1, i, -i\} \leftarrow \dots) \cong \widehat{\mathbb{Z}}_{(2)} \cong K$$

donde $\widehat{\mathbb{Z}}_2$ denota al conjunto de los números enteros diádicos visto como grupo topológico, el cual es homeomorfo al conjunto de Cantor K. Puesto que el 1 no juega ningún papel relevante en la descripción anterior, tenemos que la fibra para cualquier $z_0 \in S^1$ es el conjunto de Cantor $\widehat{\mathbb{Z}}_2$; más aún, $\mathcal{S}_2$ es una fibración localmente trivial con fibras homeomorfas al conjunto de Cantor $\widehat{\mathbb{Z}}_2$.
Consideremos una cubierta abierta finita de S^1 por arcos abiertos A_i, con la propiedad de que se intersecten dos a dos en un sub-arco y que sean *cubiretos igualmente (evenly covering)* por cualquier número de iterados de la transformación g. Entonces, la colección de los abiertos $U_i = \pi^{-1}(A_i) \cong A_i \times \widehat{\mathbb{Z}}_2$ forma una cubierta abierta finita para $\mathcal{S}_2$.

Ejemplo 1.2.18. Solenoide diádico de dimensión dos.
Consideremos la transformación $\widetilde{g}$ que aparece al considerar el límite inverso $(\mathcal{S}_2, \widetilde{g}) = \varprojlim\{S^1, g\}$. En el espacio topológico $\mathcal{S}_2 \times \mathbb{R}^+$ consideremos la acción libre y propiamente discontinua de los enteros $\mathbb{Z}$ generada por la aplicación $(\tilde{z}, y) \mapsto (\widetilde{g}(\tilde{z}), 2y)$. Denotemos por $S = \mathcal{S}_2 \times \mathbb{R}^+/\sim$ al espacio de órbitas bajo esta acción. Afirmamos que este cociente es una laminación por superficies de Riemann, en la cual todas sus hojas son densas; las hojas que son simplemente conexas son conformemente equivalentes al disco y las otras hojas son conformemente equivalentes a anillos de módulo finito (ver [**47**]).

1.2.6. Laminaciones universales algebraicas. Consideremos una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 1$, X_g, con un punto marcado $p \in X_g$ y denotemos por $\pi_1(X_g, p)$ al grupo fundamental de la superficie marcada (X_g, p), el cual tiene una presentación finita:

$$\pi_1(X_g, p) = \{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots b_g : \Pi_{i=1}^g a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = e\}.$$

Tomemos la familia I de subgrupos normales, H, de índice finito en $\pi_1(X_g)$ junto con la propiedad que para todo $H, H' \in I$ existe un subgrupo $H'' \in I$, tal que es subgrupo normal de la intersección de los otros dos, en otras palabras $H'' \triangleleft H \bigcap H''$.
Podemos pensar a I como un conjunto dirigido con respecto al orden parcial $\prec$, el cual está definido por: $H \prec H'$ si y sólo si H' es un subgrupo de H, es decir,

$$I = \{H | H \triangleleft \pi_1(X_g, p),\ [\pi_1(X_g, p) : H] < \infty,\ \forall H', H'' \exists H''' \text{ tal que } H''' \triangleleft H' \bigcap H''\}.$$

Nota 1.2.19. Es posible tomar la familia I' de todos los subgrupos H de $\pi(X_g)$ de índice finito no necesariamente normales y pensar a I' como un conjunto dirigido con respecto al mismo orden parcial $\prec$.

Definimos el morfismo $q_{HH'} : \pi_1(X_g, p)/H' \longrightarrow \pi_1(X_g, p)/H$ entre los grupos finitos $\pi_1(X_g, p)/H'$ y $\pi_1(X_g, p)/H$ para cualesquiera $H, H' \in I$ tales que $H \prec H'$ como:

$$q_{HH'}(H'a) = Ha \text{ para todo } a \in \pi_1(X_g, p),$$

con lo cual tenemos que $\{\pi_1(X_g, p)/H; q_{HH'}\}_{H,H' \in I}$ *es un sistema inverso de grupos finitos.*
Si para cada $H \in I$ al grupo cociente $\pi_1(X_g, p)/H$ lo dotamos con la topológia discreta, entonces, los homomorfismos $q_{HH'}$ son homomorfismos continuos. Así,
$\{\pi_1(X_g, p)/H, q_{HH'}\}_{H,H' \in I}$ *es un sistema inverso de grupos topológicos.*
Observemos que $\pi_1(X_g, p)/H$ se puede identificar con el grupo de transformaciones de cubierta de la cubierta finita de Galois correspondiente a H.

El siguiente resultado se puede encontrar en **[15]**.

Proposición 1.2.20. *El límite inverso:*

$$(\widehat{\pi}, \phi_H) := \varprojlim_{H \in I} \{\pi_1(X_g, p)/H, q_{HH'}\}$$

del sistema inverso $\{\pi_1(X_g, p)/H, q_{HH'}\}_{H \in I}$ *existe y es un grupo pro-finito donde* $\{\phi_H : \hat{\pi} \longrightarrow H\}$ *es una familia de homomorfismos continuos que satisfacen la propiedad universal del límite inverso.*

Definición 1.2.21. El grupo $(\widehat{\pi}, \phi_H)$ anterior es llamado *la completación pro-finita de* $\pi_1(X_g, p)$ *(o grupo fundamental algebraico de* X_g*).* El cual denotaremos por $\hat{\pi}$.

Observemos que $\hat{\pi}$ es homeomorfo al conjunto de Cantor ternario por el corolario 1.2.14 de la sección 1.2.4.
Notemos que hay un homomorfismo natural de $\pi_1(X_g, p)$ en $\widehat{\pi}$ inducido por las proyecciones naturales de $\pi_1(X_g, p)$ en $\pi_1(X_g, p)/H$.
Puesto que $\pi_1(X_g, p)$ es residualmente finito, uno puede probar que este homomorfismo de $\pi_1(X_g, p)$ en $\widehat{\pi}$ es inyectivo.

Usando la definición y notación anterior, construimos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.2.22. Laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico).

Consideremos el caso de género $g = 1$, en otras palabras, consideremos una curva elíptica marcada $(\mathbb{E}_\tau, p)$ donde $\mathbb{E}_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$ con módulo fijo, $\tau \in \mathcal{M}_1 := \mathbb{H}/SL(2,\mathbb{Z})$, (ver [**11, 16, 44**]).

Consideremos el grupo fundamental de $\mathbb{E}_\tau$, $\pi_1(\mathbb{E}_\tau, p) \cong \mathbb{Z}^2$. La construcción del conjunto dirigido I (o bien I') para este caso consiste en considerar sólo subgrupos H de índice finito de $\pi_1(\mathbb{E}_\tau, p)$. Para cada $H \in I$ definimos el espacio topológico $\mathbb{C}/\Lambda_H := (\mathbb{E}_{\tau(H)}, p(H))$, el cual es una superficie de Riemann compacta de género uno marcada donde el punto $p(H)$ está dado como la H-órbita de $\tilde{p} \in \widetilde{\mathbb{E}_{\tau(H)}} = \mathbb{C}$ con estructura compleja $\tau(H)$, es decir, una curva elíptica.

Por lo anterior tenemos una familia de espacios topológicos (curvas elípticas marcadas) con indices en I. Se puede ver que dado $H \in I$ existe una transformación, f_H, cubriente (holomorfa no ramificada) finita a uno, n:1, de $(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p(H))$ en $(\mathbb{E}_\tau, p)$ donde $[\pi_1(\mathbb{E}_\tau) : H] = n$. Por el teorema del levantamiento, dados cualesquiera $H, H' \in I$ existe una transformación, $f_{HH'}$, cubriente (holomorfa no ramificada) finita a uno entre $(\mathbb{E}_{\tau(H')}, p(H'))$ y $(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p(H))$. Todo esto define a una familia de transformaciones continuas (holomorfas no ramificadas)

$$\{f_{HH'} : (\mathbb{E}_{\tau(H')}, p(H')) \longrightarrow (\mathbb{E}_{\tau(H)}, p(H)) \forall H, H' \in I\}.$$

Con la familia de transformaciones anterior y la familia de espacios $\{\mathbb{E}_{\tau(H)}\}$ tenemos que $\{(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p(H)), f_{HH'}\}_{H,H' \in I}$ *forma un sistema inverso de curvas elípticas marcadas*, dicho en otras palabras, tenemos una torre de recubrimientos (holomorfos no ramificados) de Galois (o regulares) finitos marcados sobre $(\mathbb{E}_\tau, p)$.

Para una demostración del siguiente resultado se puede consultar [**9**] pág.283, comparar con [**15**] y con [**35**] pág.66.

Proposición 1.2.23. *El límite inverso*

$$(\hat{\mathbb{E}}_\tau, F_H) = \varprojlim_{H \in I} \{(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p(H)), f_{HH'}\} = \varprojlim_{H,H' \in I} \{(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p(H)), f_{\tau(H)\tau(H')}\}$$

del sistema inverso $\{(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p(H)), f_{\tau(H)\tau(H')}\}$ *existe y es un grupo topológico abeliano que fibra sobre* $(\mathbb{E}_\tau, p)$ *con fibra* $\widehat{F}^{-1}(z)$ *homeomorfa al conjunto de Cantor* $\prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p$, *donde* $\mathbb{Z}_p$ *denota a los números enteros p-ádicos y* $\prod_{p \in P} \mathbb{Z}_p$ *denota el producto sobre todos los números primos.*

Definición 1.2.24. Al límite inverso $(\hat{\mathbb{E}}_\tau, F_H)$ anterior lo llamaremos *la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico).*

Ejemplo 1.2.25. Laminación universal algebraica de tipo hiperbólico Galoisiana.

Para construir este ejemplo consideremos el caso de género $g \geq 2$, es decir, consideremos una superficie de Riemann compacta de género mayor o igual a dos marcada, $(X_{g,\tau}, p)$, con una clase de estructura hiperbólica τ fija, dicho de otra manera, una curva algebraica proyectiva lisa (X_g, p) marcada y un punto τ en el espacio moduli de curvas algebraicas proyectivas lisas de género g.

Para cada $H \in I$ definimos la superficie de Riemann compacta hiperbólica marcada $(X_{g(H),\tau(H)} = \mathbb{D}/H;\ p(H))$, de género $g(H)$ y estructura compleja $\tau(H) \in \mathcal{M}_{g(H)}$, con lo cual tenemos una familia de superficies de Riemann compactas hiperbólicas marcadas de diferentes géneros como indices en el conjunto I. Se puede ver que para cada $H \in I$ existe una transformación, f_H, cubriente (holomorfa no ramificada) finita, n:1, entre $(X_{g(H),\tau(H)}, p(H))$ y $(X_{g,\tau}, p)$, donde el índice $[\pi_1(X_{g,\tau}, p) : H] = n$. Por el teorema del levantamiento sabemos que para cualesquiera $H, H' \in I$ existe una transformación, $f_{HH'}$, cubriente (holomorfa no ramificada) finita entre $(X_{g(H),\tau(H)}, p(H))$ y $(X_{g,\tau}, p)$. Todo esto define una familia de transformaciones continuas (holomorfas no ramificadas)

$$\{f_{HH'} : (X_{g(H'),\tau(H')}, p(H)) \longrightarrow (X_{g(H),\tau(H)}, p) \forall H, H' \in I\}.$$

Con la familia de transformaciones anterior y con la familia de espacios $\{X_{g(H),\tau(H}\}$ tenemos que $\{(X_{g(H),\tau(H)}, p(H)), f_{H,H'}\}_{H,H' \in I}$ *forma un sistema inverso de superficies de Riemann hiperbólicas marcadas*, dicho en otras palabras, tenemos una torre de recubrimientos marcados de Galois (o regulares) holomorfos no ramificados finitos sobre $X_{g,\tau}$.

Supondremos que el módulo τ de la superficie de Riemann compacta base $X_{g,\tau}$ está fijo, a menos que otra cosa se diga.

Para una demostración del siguiente resultado se puede consultar **[9]** pág. 283. Comparar con **[15]**.

Proposición 1.2.26. *El límite inverso*

$$(\hat{X}_{g,\tau}, F_H) = \varprojlim_{H \in I} \{(\mathbb{D}/H, p(H)), f_{H,H'}\} = \varprojlim_{H,H' \in I} \{(X_{g(H)}, p(H)), f_{g(H)g(H')}\}$$

del sistema inverso $\{(X_{g(H)}, p(H)), f_{g(H)g(H')}\}_{H,H \in I}$ *existe y fibra sobre* $(X_{g,\tau}, p)$ *con fibra el conjunto Cantor.*

Definición 1.2.27. Al límite inverso $(\hat{X}_{g,\tau}, F_H)$ anterior lo llamaremos *la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico "Galoisiana".*

Consideremos el siguiente ejemplo, el cual por si mismo es muy interesante:

Ejemplo 1.2.28. Laminación universal algebraica de tipo hiperbólico "diádica".

Para este ejemplo, tomemos una superficie de Riemann compacta de género 2 marcada provista de una estructura compleja τ, $(X_{2,\tau}, p)$ y consideremos únicamente cubrientes holomorfos no ramificados 2 a 1 sobre $(X_{2,\tau}, p)$. En este caso la fórmula de Riemann-Hurwitz toma la expresión siguiente:

$$g' = 2(g-1) + 1,$$

donde el género de la superficie cubriente es g' y el género de la superficie cubierta es g, así, tenemos que cualquier transformación, f, holomorfa cubriente no ramificada 2 a 1 sobre (X_2, p) debe estar definida en una superficie de Riemann compacta de género 3. En otras palabras, $f_2 : (X_3, p_3) \longrightarrow (X_2, p)$ cubre 2 a 1 a (X_2, p) sin puntos de ramificación. Sobre la superficie (X_3, p_3) hacemos la construcción anterior, es decir, consideramos transformaciones holomorfas cubrientes no ramificadas 2 a 1, con lo cual tenemos una superficie de Riemann compacta de género 5 y una transformación $f_3 : (X_5, p_5) \longrightarrow (X_3, p_3)$ cubriente 2 a 1 sobre (X_3, p_3) sin puntos de ramificación.
Definimos el conjunto de índices $I \subset \mathbb{N}$ de manera recursiva por la condición $g' = 2(g-1)+1$ empezando con $g = 2$, es decir, $I = \{2, 3, 5, \ldots, g' = 2(g-1)+1, \ldots\}$.
Formamos la familia de superficies de Riemann compactas hiperbólicas marcadas con índices en I, así como una familia de transformaciones holomorfas cubrientes no ramificadas finitas, con lo cual tenemos *un sistema inverso de superficies de Riemann hiperbólicas marcadas*, el cual denotaremos por:

$$\{(X_g, p_g), f_g\}_{g \in I} = \{(X_2, p) \xleftarrow{f_2} (X_3, p_3) \xleftarrow{f_3} (X_5, p_5) \longleftarrow \ldots\}.$$

Notemos que estamos considerando únicamente subgrupos normales de índice dos de $\pi((X_{2,\tau}, p))$ por la forma en la que escogemos a los géneros g' de los cubrientes.

Proposición 1.2.29. *El límite inverso*

$$(\widehat{X}_{2,\tau})_{(2)} = \varprojlim_{i} \{(X_2, p) \xleftarrow{f_2} (X_3, p_3) \xleftarrow{f_3} (X_4, p_4) \longleftarrow \ldots\}$$

del sistema inverso $\{(X_g, p_g), f_g\}_{g \in I}$ existe y tiene la estructura de una laminación por superficies de Riemann con fibra $\pi^{-1}(z)$ homeomorfa al conjunto de Cantor diádico $\widehat{\mathbb{Z}}_2$.

Demostración. Denotemos por $\pi : (\hat{X}_{2,\tau})_{(2)} \longrightarrow X_2$ a la proyección canónica. Consideremos el atlas $\{\phi_z, U_z\}$ de variedad compleja para X_2, es decir, U_z es un disco en (X_2, p) que contiene a z y $\phi_z : \mathbb{D} \longrightarrow U_z$ es un homeomorfismo.
Podemos suponer que un disco U_z lo escogemos lo suficientemente pequeño para que sea cubierto de un modo igual con respecto a cualquiera de las cubiertas $f : (X_g, p_g) \longrightarrow (X_2, p_2)$ en el sistema inverso definido.

Usamos el atlas $\{\phi_z, U_z\}$, para construir un atlas de $(\hat{X}_{2,\tau})_{(2)}$ de la siguiente manera:
Consideremos $T_z = \pi^{-1}(z)$ el cual es homeomorfo al conjunto de Cantor diádico, dicho conjunto lo podemos ver como subconjunto compacto del producto infinito en dos elementos, $\Pi\{0,1\}$, y por otra parte definimos el abierto $\widehat{U}_z = \pi^{-1}(U_z)$ en $(\hat{X}_{2,\tau})_{(2)}$. Ahora definiremos una carta $\widehat{\phi}_z : \mathbb{D} \times T_z \longrightarrow \widehat{U}_z$ de la siguiente manera:
Un punto $t \in T_z$ es por definición una colección infinita de puntos $(z, z_1, z_2, \dots)$ con $z_i \in X_i$ que satisfacen la condición requerida para estar en el límite inverso. Puesto que U_z está cubierto de un modo igual por todo el sistema de cubiertas, podemos levantar ϕ_z a través de f_i a $\phi_{z_i} : \mathbb{D} \longrightarrow U_{z_i}$ donde U_{z_i} es la componente de $f_i^{-1}(U_z)$ que contiene a z_i.
Por la propiedad universal del límite inverso, existe un homeomorfismo $\widehat{\phi}_z^t : \mathbb{D} \longrightarrow U_z^t$ donde U_z^t es el disco definido alrededor de $t \in (\hat{X}_{2,\tau})_{(2)}$. Así, obtenemos el homeomorfismo $\widehat{\phi}_z : \mathbb{D} \times T_z \longrightarrow \widehat{U}_z$.

■

Definición 1.2.30. Al límite inverso $(\widehat{X}_{2,\tau})_{(2)}$ anterior lo llamaremos *la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico "diádica"*.

Ejemplo 1.2.31. Laminación universal algebraica de tipo hiperbólico.

Fijemos un cubriente universal marcado para (X_g, p) con $g \geq 2$, es decir, $u : (\widetilde{X_g}, \tilde{p}) \longrightarrow (X_g, p)$ e identifiquemos de manera canónica $\pi_1(X_g, p)$ con el grupo de transformaciones de cubierta del cubriente u. Hay que notar que cualquier elección de cubrientes universales marcados que se tomen resultan ser canónicamente isomorfos.

Para construir este ejemplo consideremos el conjunto dirigiudo $I(X_g)$ de todos los cubrientes marcados no ramificados finitos $p : (Y, y) \longrightarrow (X_g, p)$ sobre (X_g, p), donde el orden parcial está determinado de la manera siguiente: dado cualquier otro cubriente marcado $(q : (Z, z) \longrightarrow (X_g, p)) \in I(X_g)$ decimos que $q \prec p$ si y sólo si existe $r : (Z, z) \longrightarrow (Y, y)$ tal que $p \circ r = q$.
Es importante observar que una transformación que factoriza, cuando existe, está univocamente determinada ya que estamos trabajando en una categoría con puntos marcados. Hay transformaciones canónicas $A : I(X_g) \longrightarrow I'$ y $B : I' \longrightarrow I(X_g)$ entre $I(X_g)$ y el conjunto dirigiudo I' que preservan orientación. La transformación A asocia a cualquier cubriente $(p : (Y, y) \longrightarrow (X_g, p)) \in I(X_g)$ la imagen del monomorfismo $p_* : \pi_1(Y, y) \longrightarrow \pi_1(X_g, p)$ y la transformación B asigna al subgrupo $H \in I'$ el cubriente marcado $(\widetilde{X_g}/H, p(H)) \longrightarrow (X_g, p)$. Aquí $p(H)$ denota la H-órbita del punto marcado en el cubriente universal $\widetilde{X_g}$. Así, esos cubrientes aparecen de tomar el cociente de $\widetilde{X_g}$ por los subgrupos de índice finito de $\pi_1(X_g, p)$, dando modelos canónicos, salvo isomorfismo, de elementos arbitrarios de $I(X_g)$. Observemos que la composición $A \circ B$ es la transformación identidad en I', consecuentemente A es sobreyectivo y B transforma a I' de manera inyectiva sobre un subconjunto cofinal en $I(X_g)$.

Como ya lo explicamos anteriormente, este subconjunto cofinal contiene un representante para cualquier clase de isomorfismo de un cubriente marcado de X_g.

Observación 1.2.32. Se puede construir el límite inverso con cualquiera de los conjuntos $I(X_g), I'$ o I utilizando las relaciones descritas anteriormente. Pero el objeto límite no dependerá de cuál de los conjuntos diriguidos se haya usado.

En virtud de la observación anterior, este límite inverso será llamado *la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico.*

1.3. Teoría de funciones.

En esta sección es describirá la teoría de funciones sobre las laminaciones por superficies de Riemann, basandonos en el libro de Schochet y Moore **[32]** y el artículo de E. Ghys **[18]**.

En vista de la definición de laminación por superficies de Riemann, tenemos que hablar de funciones lisas (de clase $\mathcal{C}^\infty$) tangenciales $\mathcal{C}^\infty_T(\mathcal{L}, \mathbb{C})$, funciones holomorfas tangenciales $\mathcal{O}_T(\mathcal{L})$, etc.. En otras palabras, funciones que tienen la propiedad deseada a lo largo de las hojas y que varían continuamente en la transversal.

De ahora en adelante, denotaremos por $\mathcal{C}^0(\mathcal{L}, \mathbb{C})$ a la gavilla de las funciones continuas definidas globalmente en la laminación $(M, \mathcal{L})$ con valores en $\mathbb{C}$.

Definición 1.3.1. Una función $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{L}, \mathbb{C})$, *es una función holomorfa (lisa, de clase $\mathcal{C}^r$ con $r \geqslant 1$) tangencial,* si es una función holomorfa (de clase $\mathcal{C}^\infty$, de clase $\mathcal{C}^r$) a lo largo de las hojas, es decir, $f \circ h_i^{-1} : \mathbb{D} \times \{t_i\} \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa (de clase $\mathcal{C}^\infty$, de clase $\mathcal{C}^r$, resp.) para toda $t_i \in T_i$, donde h_i es la carta trivializadora del abierto distinguido U_i.

Definición 1.3.2. Una función continua, f, definida sobre la laminación $(M, \mathcal{L})$ que toma valores en $\mathbb{CP}^1$, se dice que *es meromorfa tangencial* si es una función meromorfa a lo largo de las hojas, es decir, $f \circ h_i^{-1} : \mathbb{D} \times \{t_i\} \longrightarrow \mathbb{C}$ es meromorfa para toda t_i.

Notación 1.3.3. $\mathcal{O}_T(\mathcal{L})$ denotará al anillo de las funciones holomorfas tangenciales sobre la laminación $(M, \mathcal{L})$.
$\mathfrak{M}_T(\mathcal{L})$ denotará al anillo de las funciones meromorfas tangenciales sobre la laminación $(M, \mathcal{L})$.
$\mathcal{C}^\infty_T(\mathcal{L}, \mathbb{C})$ denotará al anillo de las funciones lisas tangenciales definidas en la laminación $(M, \mathcal{L})$.
$\mathcal{C}^0_T(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ denotará al anillo de las transformaciones continuas entre las laminaciones $(M, \mathcal{L})$ y $(M', \mathcal{L}')$ que mandan hojas en hojas, es decir, en cartas locales tenemos que $h'_i \circ f \circ (h_i)^{-1} : \mathbb{D} \times \{t_i\} \longrightarrow \mathbb{D} \times \{t'_i\}$ es continua y varía continuamente con respecto a t_i.

Definición 1.3.4. Una transformación $f \in \mathcal{C}^0_T(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ *es una transformación holomorfa (lisa, de clase $\mathcal{C}^r$) tangencial*, si es holomorfa (de clase $\mathcal{C}^\infty$, de clase $\mathcal{C}^r$, resp.) a lo largo de las hojas, es decir,

$$h'_i \circ f \circ (h_i)^{-1} : \mathbb{D} \times \{t_i\} \longrightarrow \mathbb{D} \times \{t'_i\},$$

es holomorfa (de clase $\mathcal{C}^\infty$, de clase $\mathcal{C}^r$, resp.) para toda t_i, donde h_i, h'_i son las cartas trivializadoras de los abiertos distinguidos U_i y U'_i respectivamente.

Notación 1.3.5. $\mathcal{O}_T(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ denotará al anillo de las transformaciones holomorfas tangenciales entre las laminaciones $(M, \mathcal{L})$ y $(M', \mathcal{L}')$.
$\mathcal{C}^\infty_T(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ denotará al anillo de las transformaciones lisas tangenciales entre las laminaciones $(M, \mathcal{L})$ y $(M', \mathcal{L}')$.

Supongamos que $(M, \mathcal{L})$ y $(M', \mathcal{L}')$ son dos espacios foliados.

Definición 1.3.6. *Un encaje holomorfo tangencial* $f : (M, \mathcal{L}) \longrightarrow (M', \mathcal{L}')$ es una transformación continua que es un encaje holomorfo hoja a hoja.

Dotamos al espacio $\mathcal{C}^0_T(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ de una topología, **la topología fuerte**, de la manera siguiente:
Sean $A = \{h_i, U_i\}_{i \in I}$ y $B = \{h'_i, V_i\}_{i \in I}$ atlas foliados para $(M, \mathcal{L})$ y $(M', \mathcal{L}')$ respectivamente con la propiedad que tanto los abiertos U_i como los abiertos V_i sean localmente finitos. Consideremos una familia $K = \{K_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos compactos de $(M, \mathcal{L})$ tal que K_i es un subconjunto propio de U_i para cada i, así como una familia $\epsilon = \{\epsilon_i\}_{i \in I}$ de números positivos.
Sea $f \in \mathcal{C}^0_T(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ tal que $f(K_i) \subset V_i$ para cada i. *Los conjuntos básicos* $N_0(f, A, B, K, \epsilon)$ *para esta topología* están dados por el conjunto de las funciones $g \in \mathcal{C}^0_T(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ tales que satisfacen $g(K_i) \subset V_i \; \forall \, i \in I$ y $||h'_i \circ f \circ (h_i)^{-1}(z,t) - h'_i \circ g \circ (h_i)^{-1}(z,t)|| < \epsilon_i$ para todo $(z,t) \in h_i(K_i)$.

Nota 1.3.7. Puesto que $(M, \mathcal{L})$ es un espacio topológico compacto, la topología fuerte coincide con la débil (compacto-abierta).

Las demostraciones de los siguientes resultados pueden ser encontrados en [**32**], cap.II.

Proposición 1.3.8. *Si $(M, \mathcal{L})$ es una laminación por superficies de Riemann, entonces, cualquier cubierta abierta de $(M, \mathcal{L})$ tiene una partición de la unidad lisa tangencial subordinada a dicha cubierta abierta.*

Proposición 1.3.9. *Si consideramos a las laminaciones por superficies de Riemann producto $(M, \mathcal{L}) = S \times T$ y $(M', \mathcal{L}') = S' \times T'$, entonces, $\mathcal{C}^\infty_T(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ es denso en $\mathcal{C}^0_T(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ en la topología fuerte (compacto-abierta).*

Proposición 1.3.10. *Si consideramos dos abiertos distinguidos $U = \mathbb{D} \times T$ y $U' = \mathbb{D} \times T'$, un subconjunto cerrado K de U y W un subconjunto abierto de U, así como una función $f \in \mathcal{C}^0_T(U, U')$ tangencialmente lisa en una vecindad de $K \setminus W$, entonces, cualquier vecindad N_0 de f en $\mathcal{C}^0_T(U, U')$ contiene una transformación $h : U \longrightarrow U'$ la cual es lisa tangencial en una vecindad de K y coincide con f en $U \setminus W$.*

Teorema 1.3.11. *Si consideramos dos laminaciones por superficies de Riemann producto $(M, \mathcal{L}) = S \times T$ y $(M', \mathcal{L}') = S' \times T'$, entonces, $\mathcal{C}^\infty_T(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ es densa en $\mathcal{C}^0_T(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$ en la topología fuerte.*

1.4. Haces lineales y secciones tangenciales.

Para dar las definiciones de haz lineal y secciones lisas tangenciales, consideremos una laminación por superficies de Riemann no necesariamente compacta $\mathcal{L}$.
Un haz lineal liso tangencial L en $\mathcal{L}$ consiste de una familia $\{L_p\}_{p \in \mathcal{L}}$ de espacios vectoriales complejos de dimensión uno parametrizados por $\mathcal{L}$ tal que, si el punto p en coordenadas locales tiene la forma $p = (z, t)$, entonces, esta parametrización depende continuamente de t y lisamente de la variable z.
Una sección lisa tangencial s de L sobre un conjunto $E \subset \mathcal{L}$ es una transformación lisa tangencial que asigna el vector $s(p) \in L_p$ para cualquier punto $p \in E$.

Para precisar lo anterior, consideremos una haz lineal L sobre $\mathcal{L}$ y lo dotamos con una estructura lisa tangencial $\mathcal{C}^\infty_T$, donde *una estructura lisa tangencial $\mathcal{C}^\infty_T$ del haz lineal L* es dar una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de $\mathcal{L}$ por abiertos distinguidos y para cualquier abierto $U \in \mathcal{U}$ dar una transformación $s_U : U \to L$ lisa tangencial que nunca se anula (*un marco sobre U*) de tal manera que *las funciones de transición* $\varphi_{VU} : U \bigcap V \longrightarrow \mathbb{C}^*$ definidas por la relación $s_V(p) = \varphi_{VU}(p) s_U(p)$ sean funciones lisas tangenciales.

Un marco tangencialmente lisa s de L en un subconjunto abierto Ω de $\mathcal{L}$ es tambien llamado *una trivialización de L en Ω*.

Observemos que si para cualquier $U \in \mathcal{U}$ la función $f_U : U \bigcap \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^*$ definida por $s(p) = f_U(p) s_U(p)$ es una función tangencialmetne lisa, entonces, la sección s de L sobre el conjunto abierto $\Omega \subset \mathcal{L}$ es lisa tangencial.

Puesto que la estructura lisa tangencial de un haz lineal no debe depender de las cubiertas abiertas escogidas, diremos que *dos estructuras lisas tangenciales ($\mathcal{C}^\infty_T$) en L coinciden* si ellas tienen las mismas secciones lisas tangenciales $\mathcal{C}^\infty_T$. En otras palabras, si $\mathcal{V}$ es otra cubierta abierta de $\mathcal{L}$ por abiertos distinguidos y $\{t_V\}_{V \in \mathcal{V}}$ es una familia de marcos en L definida en los conjuntos abiertos de $\mathcal{V}$, entonces, $(\mathcal{V}, \{t_V\}_{V \in \mathcal{V}})$ define la misma estructura $\mathcal{C}^\infty_T$ en L que $(\mathcal{U}, \{s_U\}_{U \in \mathcal{U}})$ si y sólo si los marcos t_V son secciones lisas tangenciales de L.

Las funciones de transición definidas anteriormente satisfacen la siguiente *condición de cociclo*:
Si U, V y W son conjuntos abiertos en $\mathcal{U}$ con intersecciones no vacías, entonces

$$\varphi_{WU} = \varphi_{WV}\varphi_{VU} \text{ en } U \bigcap V \bigcap W.$$

Afirmamos que cualquier familia $\{\varphi_{UV} : U \bigcap V \longrightarrow \mathbb{C}^*\}$ de funciones lisas tangenciales parametrizadas por los pares (U, V) de abiertos en $\mathcal{U}$ con intersecciones no vacías, provienen de un haz lineal lisa tangencial L en $\mathcal{L}$ si estas funciones satisfacen la condición de cociclo. Para demostrar esta afirmación, basta probar que dada la familia $\{\varphi_{UV} : U \bigcap V \longrightarrow \mathbb{C}^*\}$ se puede definir un haz lineal liso tangencial L en $\mathcal{L}$ y secciones s_U en $U \in \mathcal{U}$, los cuales se definen de la siguiente manera:
Para cualquier punto $p \in \mathcal{L}$ consideremos $\mathcal{U}_p = \{U \in \mathcal{U}; p \in U\}$. Definimos L_p como el espacio vectorial complejo de dimensión uno obtenido como el cociente de $\mathcal{U}_p \times \mathbb{C}$ por la relación de equivalencia $\sim$ siguiente, $(U, \lambda) \sim (V, \mu)$ si y sólo si $\mu = \varphi_{UV}(p)\lambda$, y definimos s_U por $s_U(p) = [(U, 1)]$. Entonces, las s'_U satisfacen la relación $s'_V(p) = \varphi_{VU}(p)s'_U(p)$ por construcción. Así, L es un haz lineal lisa tangencial y $\{\varphi_{UV}\}$ es la familia asociada de funciones de transición.

Nota 1.4.1. En la laminación por superficies de Riemann $\mathcal{L}$ podemos definir los *haces lineales holomorfos tangenciales sobre* $\mathcal{L}$ y extender todas las afirmaciones anteriores simplemente remplazando lisa tangencial $\mathcal{C}^\infty_T$ por holomorfo tangencial $\mathcal{O}_T$.

Mostramos algunos ejemplos de lo anterior.

Ejemplo 1.4.2. El haz lineal holomorfo tangencial trivial sobre $\mathcal{L}$.
Consideremos $L = \mathcal{L} \times \mathbb{C}$, su estructura holomorfa, $\mathcal{O}_T$, está definida por $\mathcal{U} = \{\mathcal{L}\}$ y la trivialización por $s_{\mathcal{L}} = 1$.
Las secciones holomorfas tangenciales pueden ser identificadas con las funciones holomorfas tangenciales

Ejemplo 1.4.3. El haz tangente holomorfo tangencial $F\mathcal{L}$.
Este haz lineal tangencial holomorfo está definido como sigue:
Sea $\{U, \phi_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ una familia de cartas holomorfas tangenciales en $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de $\mathcal{L}$ por abiertos distinguidos. Para cualquier intersección de U y V en $\mathcal{U}$ definimos la familia de funciones de transición:

$$\{\varphi_{VU} = \frac{\partial \phi_U}{\partial \phi_V}\}.$$

Está familia es una familia de funciones holomorfa tangenciales que nunca se anula en $U \bigcap V$. Las funciones φ_{VU} satisfacen la condición de cociclo y $F\mathcal{L}$ es el haz lineal holomorfo tangencial asociado.

Usando una carta coordenada local (z,t) tenemos que una sección s de $F\mathcal{L}$ puede ser escrita localmente como:

$$s = f(z,t)\frac{\partial}{\partial z}$$

y esta es holomorfa tangencial si y sólo si f es holomorfa tangencial.

Ejemplo 1.4.4. El haz lineal canónico holomorfo tangencial $F^*\mathcal{L}$.
Este es el haz lineal holomorfo tangencial en $\mathcal{L}$ el cual puede ser definido por las funciones de transición

$$\varphi_{UV}^{-1} = \varphi_{VU} = \frac{\partial \phi_V}{\partial \phi_U}.$$

Usando una carta coordenada local (z,t) tenemos que una sección s de $F^*\mathcal{L}$ puede ser escrita localmente como:

$$s = f(z,t)dz$$

y esta es holomorfa tangencial si y sólo si f es holomorfa tangencial.

Ejemplo 1.4.5. El producto tensorial de dos haces lineales holomorfos tangenciales.
Si L y L' son dos haces lineales holomorfos tangenciales en $\mathcal{L}$, su producto tensorial $L \otimes L'$ es el haz lineal holomorfo tangencial en $\mathcal{L}$ definido de la siguiente manera:
Para cada punto $p \in \mathcal{L}$ tomamos $(L \otimes L')_p = L_p \otimes L'_p$. La estructura holomorfa tangencial $\mathcal{O}_T$ es tal que, para cualquier abierto Ω de $\mathcal{L}$, cualquier sección $s \in \mathcal{O}_T(\Omega; L)$ y cualquier $s' \in \mathcal{O}_T(\Omega; L')$, la sección dada por $s \cdot s' : p \mapsto s(p) \cdot s'(p)$ en $L \otimes L'$ sobre Ω es holomorfa tangencial.

1.5. Variedades Jacobianas de superficies de Riemann compactas.

En esta sección daremos un resumen breve de la teoría de curvas algebraicas proyectivas lisas y variedad Jacobiana, ver **[33]** y comparar con **[11, 16, 17]**.

Consideremos una superficie de Riemann compacta y de género $g > 0$, X_g. Asociada a X_g tenemos su variedad Jacobiana, $Jac(X_g)$, la cual es una variedad abeliana de dimensión compleja g (ver sección 1.8). La superficie X_g (marcada) se encaja de manera natural en $Jac(X_g)$ mediante la transformación de Abel-Jacobi:

(6) $$A_g : X_g \hookrightarrow Jac(X_g).$$

El teorema de Riemann-Roch (ver **[13]** pág.73) implica que el espacio vectorial complejo de las 1-formas diferenciales holomorfas (equivalentemente, las 1-formas diferenciales abelianas del primer tipo) en X_g, $H^0(X_g, K) = H^0(X_g, \mathcal{O}^{(1,0)})$, es un espacio vectorial de dimensión g. Aquí K denota el haz cotangente holomorfo, es decir, el haz canónico de X_g. Para definir la variedad Jacobiana de X_g, escojamos una base de homología $\{a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g\}$ para $H_1(X_g, \mathbb{Z})$ (de hecho una base simpléctica, la cual llamaremos *canónica*). Construimos la base dual $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ de 1-formas diferenciales holomorfas mediante:

$$\int_{a_j} \omega_i = \delta_{ij} \; ; \quad \int_{b_j} \omega_i = \pi_{ij}. \tag{7}$$

La matriz $\Pi = \{\pi_{ij}\}$ es llamada *la matriz de periodos (normalizada)* de X_g.

Proposición 1.5.1. *La matriz* Π *es una matriz en* $GL(g, \mathbb{C})$*, simétrica y con parte imaginaria definida positiva, a saber*

$$Im(\pi_{ij}) = \frac{i}{2} \int_{X_g} \omega_i \wedge \bar{\omega}_j = \langle \omega_i, \omega_j \rangle.$$

La demostración de esta proposición es una aplicación de las relaciones de Riemann, ver **[27]** pág.75.

Definición 1.5.2. *La variedad Jacobiana de* X_g es el toro complejo

$$Jac(X_g) = \mathbb{C}^g / \Lambda(I, \Pi) \tag{8}$$

donde $\Lambda(I, \Pi)$ denota la retícula en $\mathbb{C}^g$ generada por las columnas de la matriz identidad I en $GL(g, \mathbb{C})$ y por las columnas de la matriz Π, es decir, las $2g$ columnas de la matriz (I, Π).

Descripción de la transformación de Abel-Jacobi A_g:
Escógamos un punto base p_0 en X_g. Entonces, para cada elección de trayectorias que unan al punto p_0 con un punto arbitrario $p \in X_g$, el vector

$$\left(\int_{p_0}^{p} \omega_1, \dots, \int_{p_0}^{p} \omega_g\right) \in \mathbb{C}^g \tag{9}$$

está bien definido módulo la retícula $\Lambda(I, \Pi)$. Por lo tanto, este vector determina un punto en $Jac(X_g)$, el cual es por definición la imagen bajo *la transformación de Abel-Jacobi* A_g *del punto* p.

Nota 1.5.3. La matriz de períodos Π de las diferenciales abelianas no es única, puesto que depende de la elección de bases para $H_1(X_g, \mathbb{Z})$ y para $H^1(X_g, \mathcal{O}^{1,0})$. Es casi inmediato que diferentes elecciones tienen el efecto de remplazar Π por una matriz $N\Pi M$ donde $N \in GL(2g, \mathbb{Z})$ y $M \in GL(g, \mathbb{C})$. Así, todas esas elecciones dan el mismo toro complejo llamado *la variedad Jacobiana* $Jac(X_g)$.

Descripción intrínseca de $Jac(X_g)$:
Consideremos al espacio vectorial de las 1-formas diferenciales holomorfas y nos fijamos

en el espacio vectorial dual, es decir, $H^0(X_g, \mathcal{O}^{(1,0)})^*$.
El apareamiento de 1-ciclos con 1-formas diferenciales dado por integración

$$([\alpha], \omega) \mapsto \int_{[\alpha]} \omega,$$

muestra que $H_1(X_g, \mathbb{Z})$ es un subgrupo discreto (retícula) de $H^0(X_g, \mathcal{O}^{(1,0)})^*$, con lo cual tiene sentido la siguiente definición:

Definición 1.5.4. *La variedad Jacobiana $Jac(X_g)$* está dada por:

$$Jac(X_g) = H^0(X_g, \mathcal{O}^{(1,0)})^*/H_1(X_g, \mathbb{Z}). \tag{10}$$

Para la descripción de *la transformación de Abel-Jacobi en este contexto intrínseco*; se escoge un punto base $p_0 \in X_g$, así, para cualquier punto $p \in X_g$, el punto

$$A_g(p) \in Jac(X_g) = H^0(X_g, \mathcal{O}^{(1,0)})^*/H_1(X_g, \mathbb{Z})$$

corresponde a la clase lateral del funcional lineal $A_g(p)(\omega) = \int_{p_0}^{p} \omega$, en otras palabras,

$$\omega \mapsto [\int_{p_0}^{p} \omega].$$

La conexión entre las dos descripciones anteriores de la variedad Jacobiana está dada de la manera siguiente:
Cada elemento $l \in H^0(X_g, \mathcal{O}^{(1,0)})^*$ aparece como $l(\omega) = \int_\gamma \omega$ donde γ es alguna 1-cadena en X_g. Entonces, la clase de l en $Jac(X_g)$ corresponde al punto $(\int_\gamma \omega_1, \dots, \int_\gamma \omega_g)$ mod (Λ) en $\mathbb{C}^g/\Lambda(I, \Pi)$, es decir:

$$[l] \mapsto (\int_\gamma \omega_1, \dots, \int_\gamma \omega_g) \text{ mod } (\Lambda).$$

1.6. El grupo y la variedad de Picard.

En esta sección daremos un resumen muy breve sobre el grupo de Picard y la variedad de Picard, ver [**11, 13, 14, 16**].

Para comenzar con dicho resumen consideremos una superficie de Riemann compacta de género g,X_g.

Notación 1.6.1. $Div(X_g)$ denotará al *grupo de divisores* en X_g.
$Div_0(X_g)$ denotará al *grupo de divisores de grado cero.*
$DivP(X_g)$ denotará al *grupo de los divisores principales* en X_g.

Es bien sabido que la superficie X_g se puede pensar también como una curva algebraica no singular, tamién que $Div_0(X_g)$ es un subgrupo de $Div(X_g)$ y que $DivP(X_g)$ es un subgrupo de $Div_0(X_g)$ con lo cual se considerará la siguiente definición:

Definición 1.6.2. El grupo cociente

$$Pic(X_g) := Div(X_g)/DivP(X_g)$$

es llamado el *grupo de Picard* de X_g.

Las siguientes dos definiciones del grupo de Picard son equivalentes y serán de gran útilidad.

Definición 1.6.3. *El grupo de Picard de* X_g, $Pic(X_g)$, está dado como el primer grupo de cohomología de la gavilla de funciones holomorfas que nunca se anulan en la curva X_g. En otras palabras,

$$Pic(X_g) = H^1(X_g, \mathcal{O}^*).$$

Definición 1.6.4. *El grupo de Picard de* X_g, $Pic(X_g)$, es el grupo de todos los haces lineales holomorfos sobre X_g. La operación de grupo está dada por el producto tensorial de haces y los inversos son los haces duales.

El producto tensorial del haz lineal L con el haz lineal L', $L \otimes L' = LL'$, está dado por el producto $\{g_{ij}g'_{ij}\}$ de las funciones de transición $\{g_{ij}\}$ del haz L y $\{g'_{ij}\}$ de L', y el inverso L^{-1} está dado por las funciones de transición $\{g_{ij}^{-1}\}$.

Denotaremos por $Pic_d(X_g) = \{L \in Pic(X_g) : deg(L) = c_1(L) = d\}$ *al conjunto de los haces lineales holomorfos sobre* X_g *de clase de Chern* d donde $d \in \mathbb{Z}$ (ver sección 1.8 de este capitulo).

Lema 1.6.5. *Existe una biyección entre el conjunto de los haces lineales de grado cero y el conjunto de los haces lineales de grado d de manera no canónica.*

Demostración. Tomemos cualquier haz lineal holomorfo de grado d, $\mathcal{O}_{X_g}[(p)]$, entonces la aplicación que asigna $L \to L \otimes \mathcal{O}_{X_g}[(p)]$ define la biyección.

■

Por el teorema de Riemann-Roch sabemos que el haz canónico de X_g, K_{X_g}, tiene grado $2g-2$ de donde tenemos el siguiente lema.

Lema 1.6.6. *Existe una biyección canónica entre el conjunto de los haces lineales de grado cero y el conjunto de los haces lineales de grado* $2g-2$, *es decir,* $Pic_0(X_g) \cong Pic_{2g-2}(X_g)$.

Demostración. La aplicación $\varphi : Pic_0(X_g) \longrightarrow Pic_{2g-2}(X_g)$ dada por $L \to L \otimes K_{X_g}$, define la biyección canónica buscada.

■

Observemos que el grupo de Picard de X_g es la unión disjunta de todos los conjuntos de haces lineales holomorfos en X_g de todos los grados posibles, es decir, $Pic(X_g) = \bigsqcup_{d\in\mathbb{Z}} Pic_d(X_g)$.

Para el caso particular de $d=0$, $Pic_0(X_g)$ resulta ser un grupo. Más aún, resulta ser una variedad la cual es llamada *la variedad de Picard de X_g*. Dicha variedad está dada como:

$$Pic_0(X_g) = H^1(X_g, \mathcal{O})/H^1(X_g, \mathbb{Z}). \tag{11}$$

Del hecho que la sucesión

$$0 \longrightarrow Pic_0(X_g) \longrightarrow H^1(X_g, \mathcal{O}^*_{X_g}) \xrightarrow{c_1} H^2(X_g, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

es exacta se tiene que el grupo de todos los haces lineales complejos en X_g se pueden pensar como:

$$Pic(X_g) = H^1(X_g, \mathcal{O}^*_{X_g}) \cong \mathbb{Z} \oplus Pic_0(X_g).$$

Concluimos esta sección con el resultado siguiente.

Proposición 1.6.7. *La variedad de Picard y la variedad Jacobiana de la superficie X_g son canónicamente isomorfas como toros complejos y como grupos de Lie complejos compactos (Más aún, $Pic_0(X_g)$ y $Jac(X_g)$ son isomorfas como variedades abelianas principalmente polarizadas, ver sección 1.8).*

Una demostración de este hecho se puede ver en **[16]** pág. 153.

1.6.1. La transformación norma Nm_f. Para definir la transformación norma tomemos dos superficies de Riemann compactas X_r y X_g de géneros $r \geq g$ respectivamente y consideremos una transformación holomorfa, $f : X_r \longrightarrow X_g$, cubriente y finita a uno (que puede ser o no ramificada) entre ellas. En otras palabras, estamos consideremos un morfismo finito de curvas proyectivas lisas.
Dada cualquier función meromorfa h en X_r, es decir, $h \in \mathcal{M}(X_r)$, definimos la función meromorfa $Nm_f h$ en X_g como

$$(Nm_f h)(p) = \prod_{q\in f^{-1}(p)} h(q)^{\nu(q)} \tag{12}$$

donde $\nu(q)$ es la multiplicidad con la que el punto q aparece en la fibra de f sobre p. Así, esta función meromorfa induce un homomorfismo sobreyectivo de grupos (multiplicativos)

$$Nm_f : \mathcal{M}(X_r)^* \longrightarrow \mathcal{M}(X_g)^*$$

La transformación $Nm_f : Div(X_r) \longrightarrow Div(X_g)$ dada por $Nm_f(\sum n_i q_i) = \sum n_i f(q_i)$ es llamada *la transformación norma*.

Observación 1.6.8. La transformación norma Nm_f anterior es un morfismo entre los grupos de divisores.

Observación 1.6.9. La transformación norma anterior Nm_f preserva grados, es decir, si $deg(D) = n$, entonces, $deg(Nm_f(D)) = n \ \forall D \in Div(X_r)$.

Lema 1.6.10. *Para cualquier función meromorfa $h \in \mathcal{M}(X_r)$, la imagen del divisor (h) bajo la transformación norma, $Nm_f((h))$, es igual al divisor de la función $Nm_f h$, en otras palabras,*

$$Nm_f((h)) = (Nm_f h).$$

Una demostración de este lema se puede consultar en [**11**] págs. 281-286.

Una observación inmediata del lema 1.6.10 anterior es que Nm_f es un morfismo bien definido entre los grupos de divisores principales de las superficies X_r y X_g. Más aún, se puede definir la transformación norma entre los grupos de Picard de las superficies X_r y X_g.

Proposición 1.6.11. *La transformación norma Nm_f induce un morfismo entre los grupos de Picard de las superficies de Riemann compactas X_r y X_g, es decir*

$$Nm_f : Pic(X_r) \longrightarrow Pic(X_g).$$

Definición 1.6.12. El morfismo anterior también se denota por Nm_f y es llamado *la transformación norma.*

Consideremos la transformación holomorfa $A_g \circ f : X_r \longrightarrow Jac(X_g)$. Por la propiedad universal de la Jacobiana (secc.4 del cap.11 de [**27**]) existe un único homomorfismo analítico N_f que convierte al siguiente diagrama en conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X_r & \xrightarrow{A_r} & Jac(X_r) \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle N_f} \\ X_g & \xrightarrow{A_g} & Jac(X_g). \end{array} \tag{13}$$

Lema 1.6.13. *El homomorfismo analítico N_f y la transformación norma restringida a la variedad de Picard convierten al diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} Jac(X_r) & \xrightarrow{\cong} & Pic_0(X_r) \\ {\scriptstyle N_f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Nm_f} \\ Jac(X_g) & \xrightarrow{\cong} & Pic_0(X_g) \end{array}$$

en un diagrama conmutativo.

Demostración. Este lema es una consecuencia del diagrama conmutativo (13) anterior y del hecho que la variedad de Picard y la variedad Jacobiana de X_g son canónicamente isomorfas.

∎

1.7. Las variedades $W_k(X_g)$ en $Jac(X_g)$ y en $Pic_0(X_g)$.

En esta sección se dará un resumen breve sobre las subvariedades distinguidas de la variedad Jacobiana y la variedad de Picard. Una explicación más amplia y detallada se puede encontrar en [**17**] cap.2.

1.7.1. Las variedades $W_k(X_g)$ en $Jac(X_g)$. Para $k = 1$ definimos a *la subvariedad $W_1(X_g)$ de $Jac(X_g)$* como la imagen de X_g bajo la transformación de Abel-Jacobi. En otras palabras, $W_1(X_g) = A_g(X_g) = ImA_g(X_g) \subset Jac(X_g)$.
Si consideremos al conjunto $Div_k(X_g)$ de divisores positivos de grado k en la superficie X_g, entonces, la imagen de este conjunto bajo el homomorfismo de Jacobi φ_g es un subconjunto bien definido en $Jac(X_g)$. A dicho subconjunto lo denotaremos por $W_k(X_g)$. Este subconjunto $W_k(X_g)$ puede ser descrito equivalentemente como la imagen de la transformación complejo analítica $\varphi_g : X_g^k \longrightarrow Jac(X_g)$ definida por: $\varphi_g(p_1, \ldots, p_k) = A_g(p_1) + \cdots + A_g(p_k)$.

Usando el teorema de Grauert-Remmert (sobre la transformación propia en varias variables complejas, ver [**19**] pág.395) tenemos que la imagen de la transformación φ_g anterior es una subvariedad analítica de $Jac(X_g)$, de donde $W_k(X_g) \subset Jac(X_g)$ es una subvariedad analítica. Más aún, *$W_k(X_g)$ es una subvariedad analítica irreducible.* Aqui irreducible es en el sentido de que cualquier función meromorfa en $Jac(X_g)$ la cual se anula en un subconjunto abierto relativo en $W_k(X_g)$ necesariamente se anula idénticamente en todo $W_k(X_g)$.
Esta última afirmación es una consecuencia del teorema de identidad para funciones de varias variables complejas, puesto que la restricción a W_k de una función meromorfa en $Jac(X_g)$ puede ser identificada con una función meromorfa en la variedad X_g^k por medio de la transformación φ_g.
En terminos de coordenadas locales z_j cerca de los puntos $p_j \in X_g$, el jacobiano de la transformación analítica φ_g en el punto $(z_1, \ldots, z_k) \in X_g^k$ es una matriz compleja $\{w_i'(z_j)\}$ de $k \times g$ donde las $\omega_i(z_j) = w_i'(z_j)dz_j$ son las diferenciales holomorfas Abelianas canónicas en X_g expresadas en esas coordenadas locales. La matriz jacobiana anterior tiene rango máximo en subconjuntos abiertos densos de X_g^k puesto que las diferenciales Abelianas son linealmente independientes. En particular esta matriz tendrá rango máximo en el complemento de una subvariedad analítica de X_g^k, así, en particular tenemos que para $k = 1, \ldots, g$, la transformación complejo analítica $\varphi_g : X_g^k \longrightarrow Jac(X_g)$ es un

homeomorfismo local no singular en un abierto denso de la variedad X_g^k. Usando resultados de la teoría de funciones de varias variables complejas se sigue que las subvariedades irreducibles $W_k(X_g)$ son de dimensión k, para $k = 1, \ldots, g$.

Usando la descripción anterior hacemos las siguientes observaciones:
Observemos que para $k = 1$ la transformación de Abel-Jacobi, A_g, coincide con la transformación complejo analítica φ_g, es decir, $A_g = \varphi_g : X_g \longrightarrow Jac(X_g)$. Más aún, es una transformación holomorfa no singular, por lo tanto $W_1(X_g)$ es una subvariedad analítica no singular de $Jac(X_g)$.
Observemos que para $1 < k < g$ la transformación complejo analítica $\varphi_g : X_g^k \longrightarrow Jac(X_g)$ tiene singularidades y la imagen $W_k(X_g)$ también puede tener singularidades.
Observemos que para $k = g$ la subvariedad $W_k(X_g)$ es igual a $Jac(X_g)$. En efecto, puesto que $Jac(X_g)$ es una variedad irreducible de dimensión g que es justamente la dimensión de la subvariedad irreducible $W_k(X_g)$. Esta afirmación es conocida como *el teorema de inversión de Jacobi.*
Afirmamos que se satisface $W_k(X_g) \subset W_{k+1}(X_g)$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. En efecto, ya que $\varphi_g(p_1, \ldots, p_k) = \varphi_g(p_0, p_1, \ldots, p_k)$ donde p_0 es el punto base. Usando la afirmación anterior tenemos una cadena de subvariedades irreducibles:

$$X_g \cong W_1(X_g) \subset W_2(X_g) \subset \ldots W_{g-1}(X_g) \subset W_k(X_g) = W_{g+1} = \cdots = Jac(X_g).$$

Para el trabajo posterior es útil dar las siguientes definiciones que utilizan la naturaleza de la operación de grupo en la variedad Jacobiana.

Definición 1.7.1. Para cualquier subconjunto $S \subset Jac(X_g)$ tenemos:

(1) *El conjunto inverso* $-S = \{-s | s \in S\}$.
(2) *El trasladado por* u, $S + u = \{s + u | s \in S\}$.
(3) *La suma* $T + S = \{t + s | t \in T,\ s \in S\}$, para cualesquiera par de subconjuntos S, T de la Jacobiana.
(4) *El cociente* $S \ominus T = \{u \in Jac(X_g) | T + u \subset S\}$.

Observación 1.7.2. (1) Si S es una subvariedad analítica de $Jac(X_g)$, entonces, $-S$ y
$S + u$ son subvariedades analíticas de $Jac(X_g)$.
(2) Si T y S son subvariedades analíticas de $Jac(X_g)$, entonces, $T + S$ es subvariedad analítica de $Jac(X_g)$.
(3) Si S es subvariedad analítica de $Jac(X_g)$ y T es cualquier subconjunto de $Jac(X_g)$, entonces, $S \ominus T$ es una subvariedad analítica de $Jac(X_g)$. Esto último es una consecuencia del hecho que $S \ominus T = \bigcup_{t \in T}(S - t)$.

1.7.2. Las variedades $W_k(X_g) \subset Pic_0(X_g)$. Para definir a las subvariedades $W_k(X_g) \subset Pic_0(X_g)$ recordemos que

$$Pic_0(X_g) = \{L \in H^1(X_g, \mathcal{O}^*) : c_1(L) = 0\}.$$

Las subvariedades $W_k(X_g)$ vistas como subconjuntos de la variedad de Picard de X_g consisten precisamente de aquellos haces lineales $L \in Pic_0(X_g)$ los cuales pueden ser escritos en la forma $L = L_{p_1} \dots L_{p_k} L_{p_0}^{-k}$ para algunos puntos $p_1, \dots p_k$ en la superficie X_g. Esto es equivalente a la condición de que el haz lineal $LL_{p_0}^k$ tenga una sección holomorfa no trivial, de donde se sigue que:

$$W_k(X_g) = \{L \in Pic_0(X_g) : dim\Gamma(X_g, \mathcal{O}(LL_{p_0}^{-k}) \geq 1\}.$$

Denotaremos por $\gamma(LL_{p_0}^{-k})$ a la $dim_{\mathbb{C}}\Gamma(X_g, \mathcal{O}(LL_{p_0}^{-k})$ y por simplicidad definimos

$$W_0 = 0 = \{L \in Pic_0(X_g) : \gamma(L) \geq 1\}.$$

1.7.3. Las subvariedades analíticas de divisores positivos especiales $W_k^\nu(X_g)$. Para definir a las subvariedades analíticas de divisores positivos especiales $W_k^\nu(X_g)$ necesitamos consideremos un entero positivo ν, es decir, $\nu \geq 1$.
El subconjunto $W_k^\nu(X_g)$ de la subvariedad analítica $W_k(X_g)$ esta dado por $W_k^\nu(X_g) = \{L \in Pic^0(X_g) : \gamma(LL_{p_0}^{-k}) \geq \nu\}$. Este subconjunto será llamado *el subconjunto de divisores positivos especiales para* $\nu \geq 1$.

Observemos que para toda $\nu \geq 1$ los subconjuntos $W_k^\nu(X_g)$ forman una filtración descendiente de la subvariedad analítica $W_k(X_g)$ de divisores positivos de grado k, es decir,

$$W_k(X_g) = W_k^1(X_g) \supseteq W_k^2(X_g) \supseteq \dots .$$

Los subconjuntos $W_k^\nu(X_g)$ también pueden ser caracterizados de la siguiente manera:

Lema 1.7.3. *Para cualesquiera enteros $k \geq 0$ y $\nu \geq 1$ tenemos que:*

$$W_k^\nu(X_g) = W_{k-\nu+1}(X_g) \ominus (-W_{\nu-1}(X_g)) \text{ siempre y cuando } \nu \leq k+1 \tag{14}$$

y $W_k^\nu(X_g) = \emptyset$ siempre y cuando $\nu > k+1$.

Una demostraciòn de esta caracterizaciòn se puede encontrar en **[17]** pág. 46

El siguiente resultado es una consecuencia del hecho que la igualdad $W_k^\nu(X_g) = \bigcup_{u \in W_{\nu-1}(X_g)} W_{k-\nu+1}(X_g) + u$ se da siempre que $\nu \leq k+1$, y en cualquier otro caso los conjuntos $W_k^\nu(X_g)$ son vacíos.

Corolario 1.7.4. *Los subconjuntos de divisores positivos especiales $W_k^\nu(X_g)$ son subvariedades complejo analíticas de $Jac(X_g)$.*

1.7.4. La relación entre las variedades $W_k(X_g)$ y los k-productos simétricos. Motivado del siguiente hecho se introduce la definición del k-producto simétrico de una superficie de Riemann compacta X_g:
La restricción del homomorfismo de Jacobi, $\varphi_g : X_g^k \longrightarrow Jac(X_g)$, al conjunto de divisores positivos de grado k puede ser visto como una transformación compleja analítica del producto cartesiano de la superficie X_g en la variedad $Jac(X_g)$. Se puede verificar que la transformación φ_g es independiente del orden de los factores en el producto cartesiano X_g^k. Esto sugiere la introducción de *el k-producto simétrico de la superficie de Riemann compacta* X_g como:

$$X_g^{(k)} = X_g^k / S_k$$

donde S_k es el grupo simétrico y actúa en X_g^k mediante los automorfismos complejos

$$(p_1, \ldots, p_k) \mapsto (p_{\pi(1)}, \ldots, p_{\pi(k)}),\ \forall \pi \in S_k.$$

Teorema 1.7.5. *El k-producto simétrico $X_g^{(k)}$ de la superficie de Riemann compacta X_g tiene la estructura de una variedad compleja analítica de dimensión k tal que, la transformación $\tau_g : X_g^k \longrightarrow X_g^{(k)}$ es una transformación analítica cubriente que exhibe a la variedad X_g^k como un cubriente ramificada $k! : 1$ sobre $X_g^{(k)}$.*

Demostración. Ver **[17]**, pág.72

∎

Del teorema anteriror observamos que el homomorfismo de Jacobi, $\varphi_g : X_g^k \longrightarrow Jac(X_g)$, puede ser factorizado a través de la transformación cubriente τ_g como $\varphi_g = \psi_g \circ \tau_g$ para alguna transformación compleja analítica $\psi_g : X_g^{(k)} \longrightarrow Jac(X_g)$.
La transformación ψ_g anterior será llamada *la transformación de Jacobi.* En muchos sentidos la transformación de Jacobi ψ_g es más natural que el homomorfismo de Jacobi φ_g, aunque la variedad $X_g^{(k)}$ es más complicada que la variedad X_g^k.

Proposición 1.7.6. *Si el índice k esta en el rango $1 \leq k \leq g-1$, entonces, la imagen de la transformación $\psi_g : X_g^{(k)} \longrightarrow Jac(X_g)$ es la subvariedad analítica propia $W_k(X_g) \subset Jac(X_g)$ de divisores positivos de grado k. Así, en particular la transformación ψ_g puede ser vista como una transformación analítica $\psi_g : X_g^{(k)} \longrightarrow W_k(X_g) \subset Jac(X_g)$.*

Proposición 1.7.7. *Si el índice k satisface que $k \geq g$, entonces, la imagen de la transformación ψ_g es toda la variedad Jacobiana. En particular, $\psi_g : X_g^{(g)} \longrightarrow Jac(X_g)$ es una transformación analítica sobreyectiva entre variedades de dimensión g.*

Demostración. Ver **[17]** págs. 75-76

∎

1.7.5. La variedad singular de $W_k(X_g)$. Las subvariedades analíticas $W_k^\nu(X_g)$ de divisores positivos especiales en $W_k(X_g)$ son transformadas por ψ_g en las subvariedades analíticas $G_k^\nu(X_g)$ del producto simétrico $X_g^{(k)}$, en otras palabras, $G_k^\nu(X_g) = \psi_g^{-1}(W_k^\nu(X_g)) \subseteq X_g^{(k)}$. A las subvariedades $G_k^\nu(X_g)$ también se les llamada *subvariedades de divisores positivos especiales.*

Nota 1.7.8. Si tomamos a un punto $D \in X_g^{(k)}$, el cual visto como un divisor tiene la expresión $D = p_1 + \cdots + p_k$, entonces, la imagen $\psi_g(D) \in Jac(X_g)$ está representada en la variedad de Picard por el haz lineal complejo $L_{p_1} \dots L_{p_k} L_{p_0}^{-k}$. Más aún, el punto $\psi_g(D)$ está en $W_k^\nu(X_g)$ precisamente cuando:

$$dim\Gamma(X_g, \mathcal{O}(L_{p_1} \dots L_{p_k} L_{p_0}^{-k} L_{p_0}^{k})) \geq \nu.$$

De acuerdo a la nota anterior tenemos que *las subvariedades de divisores positivos especiales en la variedad $X_g^{(k)}$* están dadas por:

$$G_k^\nu(X_g) = \{p_1 + \cdots + p_k \in X_g^{(k)} | dim\Gamma(X_g, \mathcal{O}(L_{p_1} \dots L_{p_k})) \geq \nu\}.$$

Observemos que las subvariedades $G_k^\nu(X_g)$ satisfacen una filtración descendiente de la variedad $X_g^{(k)}$ por subvariedades analíticas:

$$X_g^{(k)} = G_k^1(X_g) \supseteq G_k^2(X_g) \supseteq \dots$$

las cuales terminan en el conjunto vacío.

Teorema 1.7.9. *Si tomamos un punto $D \in X_g^{(k)}$ el cual visto como un divisor tiene la expresión $D = p_1 + \cdots + p_k$ y satisface que $dim\Gamma(X_g, \mathcal{O}(L_{p_1} \dots L_{p_k}) = \nu$. Entonces, la fibra $\psi_g^{-1}(\psi_g(D))$ de la transformación complejo analítica $\psi_g : X_g^{(k)} \longrightarrow Jac(X_g)$ es una subvariedad analítica de $X_g^{(k)}$ de dimensión $\nu - 1$, la cual puede ser representada como la imagen de una transformación analítica inyectiva de $\mathbb{CP}^{\nu-1}$ en $X_g^{(k)}$.*

Teorema 1.7.10. *En cualquier punto $D = p_1 + \cdots + p_k \in X_g^{(k)}$ tal que se cumple que $dim\Gamma(X_g, \mathcal{O}(L_{p_1} \dots L_{p_k})) = \nu$, entonces, la diferencial de la transformación analítica ψ_g tiene rango dado por:*

$$rankD\psi_g|_D = k + 1 - \nu.$$

Demostración. Ver **[17]**, págs.77 y 80.

∎

Los siguientes resultados son consecuencia del teorema anterior.

Corolario 1.7.11. *Si $k \geq 2g - 1$, entonces, la transformación analítica $\psi_g : X_g^{(k)} \longrightarrow Jac(X_g)$ tiene la propiedad que $\psi^{-1}(x)$ es una subvariedad analítica en $X_g^{(k)}$ de dimensión $k - g$, la cual es analíticamente homeomorfa a $\mathbb{CP}^{k-g}$ para cada $x \in Jac(X_g)$.*

Corolario 1.7.12. *Si $D = p_1 + \cdots + p_k \in X_g^{(k)}$ es un punto para el cual $dim\Gamma(X_g, \mathcal{O}(L_{p_1} \ldots L_{p_k}) = \nu$, entonces, la fibra $\psi_g^{-1}(\psi_g(D))$ de la transformación $\psi_g : X_g^{(k)} \longrightarrow Jac(X_g)$ es una subvariedad analítica de $X_g^{(k)}$, la cual es analíticamente homeomorfa a $\mathbb{CP}^{\nu-1}$.*

El resultado mas importante que nos atañe es

Corolario 1.7.13. *Si $1 \leq k \leq g$, entonces, la transformación analítica $\psi_g : X_g^{(k)} \longrightarrow Jac(X_g)$ induce un homeomorfismo complejo analítico*

$$\psi_g : X_g^{(k)} \setminus G_k^2(X_g) \longrightarrow W_k(X_g) \setminus W_k^2(X_g).$$

Las demostraciones de los colorarios anteriores pueden ser encontradas en [**17**] págs. 82-84.

1.8. Variedades abelianas principalmente polarizadas y divisor Theta.

En esta sección haremos un resumen sobre variedades abelianas y el divisor Theta. Una explicación más detallada de lo expuesto aquí puede ser encontrado en [**27**].

Se dice que un toro complejo $T = \mathbb{C}^g/\Lambda$ es una *variedad abeliana* si T admite un encaje proyectivo, en otras palabras, si T es una variedad algebraica proyectiva.
El teorema de Appell-Humbert-Lefschetz (ver [**26**]) afirma que T es una variedad abeliana si y sólo si, existe una forma hermitiana, $H : \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{C}$, definida positiva tal que la forma real antisimétrica $E = Im(H)$ toma valores enteros en $\Lambda \times \Lambda$.

En las siguientes lineas describiremos brevemente la relación entre la primera clase de Chern, $c_1(L)$, y las formas hermitianas definidas positivas $\mathbb{Z}$-valuadas en $\Lambda \times \Lambda$.

Para introducir la primera clase de Chern de un haz lineal holomorfo L sobre T consideremos la sucesión exacta exponencial $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_T \to \mathcal{O}_T^* \to 1$ y su sucesión larga de cohomologia

$$\ldots \longrightarrow H^1(T, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(T, \mathcal{O}_T) \longrightarrow H^1(T, \mathcal{O}_T^*) \xrightarrow{c_1} H^2(T, \mathbb{Z}) \longrightarrow \ldots.$$

La imagen $c_1(L)$ en $H^2(T, \mathbb{Z})$ de un haz lineal holomorfo $L \in H^1(T, \mathcal{O}_T^*)$, es llamada *la primera clase de Chern del haz lineal L.*

Se puede considerar a $c_1(L)$ como una forma alternante $\mathbb{Z}$-valuada en $\Lambda \times \Lambda$ ya que los grupos $H^2(T, \mathbb{Z})$ y $Alt^2(\Lambda, \mathbb{Z})$ son canónicamente isomorfos (ver [**27**] pag. 14). Si consideramos la extensión $\mathbb{R}$-lineal de la forma alternante $\mathbb{Z}$-valuada $c_1(L)$, entonces, obtenemos una forma alternante de $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{R}$.
Para determinar cuales formas alternantes $\mathbb{R}$-valuadas provienen de haces lineales holomorfos L sobre T tenemos la siguiente proposición.

Proposición 1.8.1. *Si $E : \mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{R}$ es cualquier forma alternante $\mathbb{R}$-valuada, entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.*

(1) *Existe un haz lineal holomorfo L sobre T tal que E representa la primera clase de Chern $c_1(L)$.*

(2) *$E(\Lambda, \Lambda) \subset \mathbb{Z}$ y $E(iv, iw) = E(v, w)$ $\forall v, w \in \mathbb{C}^g$.*

Demostración. Ver [**27**] pág. 28.

■

El siguiente lema muestra que las formas alternantes de la proposición anterior son justamente las partes imaginarias de formas hermitianas.

Lema 1.8.2. *Existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de las formas hermitianas H en $\mathbb{C}^g$ y el conjunto de formas alternantes $\mathbb{R}$-valuadas E en $\mathbb{C}^g$ que satisfacen la igualdad $E(iv, iw) = E(v, w)$. Dicha correspondencia está dada por:*

$$E(v, w) = ImH(v, w) \text{ y } H(v, w) = E(iv, w) + iE(v, w) \forall\ v, w \in \mathbb{C}^g.$$

Demostración. Ver [**27**] pág. 29

■

En resumen, *se puede considerar a la primera clase de Chern, $c_1(L)$, de un haz lineal holomorfo L sobre T como una forma alternante en $H^2(T, \mathbb{Z})$ o bien como una forma hermitiana H en $\mathbb{C}^g$ cuya forma alternante $E = ImH$ es entera valuada en la retícula Λ_g.*

Se dice que *un haz lineal holomorfo L sobre T es definido positivo* si la forma hermitiana asociada a $c_1(L)$ es definida positiva.

Usando lo anterior tenemos la siguiente definición.

Definición 1.8.3. Una *polarización, H, en T* es la primera clase de Chern $c_1(L) = H$ de un haz lineal holomorfo definido positivo en T. Equivalentemente H es una forma hermitiana en $\mathbb{C}^g$ definida positiva.

Observemos que si T es un toro complejo y existe un haz lineal holomorfo L definido positivo, entonces, *T es una variedad abeliana con una polarización $H = c_1(L)$.*
Una polarización implica que existe un encaje holomorfo de T en $\mathbb{CP}^N$ para alguna $N \in \mathbb{N}$

Definición 1.8.4. El par (T, H) es llamado *una variedad abeliana polarizada* y algunas veces escribiremos (T, L) en lugar de (T, H).

Supongamos que (T, H) es una variedad abeliana polarizada. Por la discución anterior podemos pensar a H como una forma hermitiana en $\mathbb{C}^g$ cuya forma alternante $E = ImH$ es entera valuada en la retícula Λ_g. De acuerdo al teorema elemental de división (ver

[7] cap.IX), existe una base $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_g, \mu_1, \ldots, \mu_g\}$ de Λ_g respecto a la cual la forma alternante E está dada por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}$$

donde D es una matriz diagonal, es decir, $D = diag(d_1, \ldots, d_g)$ con enteros $d_k \geq 0$ que satisfacen d_k/d_{k+1} para $k = 1, \ldots, g-1$. Los números $d_1, \ldots, d_g$ están determinados unívocamente por E y por Λ, y así por L. El vector $(d_1, \ldots, d_g)$ como la matriz D son llamados *el tipo del haz lineal*. La base $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_g, \mu_1, \ldots, \mu_g\}$ anterior es llamada *una base simplectica o canónica de Λ para L (H o E respectivamente).*
Una polarización $H = c_1(L)$es llamada *principal* si es del tipo $(1, 1, \ldots, 1)$ o la forma alternante E está dada por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos dos variedades abelianas polarizadas (T, H) y (T', L'). Se dice que un homomorfismo de toros complejos $f : T \longrightarrow T'$ tal que $f^*c_1(L) = c_1(L')$ es *un homomorfismo de variedades abelianas polarizadas.* En otras palabras, un homomorfismo de toros complejos $f : T \longrightarrow T'$ para el cual el haz lineal holomorfo L' y el haz lineal holomorfo f^*L sobre T' son analíticamente equivalentes es llamado un homomorfismo entre (T, H) y (T', L').

1.8.1. Funciónes y divisores Theta. La idea central de esta secciòn es construir *las funciones theta* utilizando una forma hermitiana H. Estas funciones se pueden usar para dar un encaje proyectivo de T.

Para definir explícitamente a las funciones theta introducimos *el semi-espacio superior de Siegel*, $\mathcal{H}_g = \{M \in Symm(g \times g, \mathbb{C}) : Im(M) > 0\}$, el cual es *el espacio de parámetros para las variedades abelianas principalmente polarizadas de dimensión g.*

Nota 1.8.5. Se puede probar que $\mathcal{H}_g$ es una variedad compleja de dimensión $g(g+1)/2$. Así como también que los puntos de $\mathcal{H}_g$ parametrizan las clases de isomorfismos de variedades abelianas, T, de dimensión g equipadas con una base simplectica o canónica para $H_1(T, \mathbb{Z})$. Así, cualquier variedad abeliana de dimensión g puede ser considerada como un toro complejo $\mathbb{C}^g/\Lambda$ en el cual la retícula Λ está generada por los vectores columnas de la matriz (I, τ) de $g \times 2g$ donde τ es un punto de $\mathcal{H}_g$.

Nota 1.8.6. El espacio moduli de variedades abelianas principalmente polarizadas esta dado por el cociente

$$\mathcal{H}_g/Sp(2g, \mathbb{Z})$$

donde $Sp(2g, \mathbb{Z})$ es el grupo de matrices de $2g \times 2g$ con coeficientes enteros y determinante 1.

La función theta de Riemann fundamental para la variedad abeliana $\mathbb{C}^g/\Lambda$ correspondiente a $\Lambda = -\Lambda(I, \tau)$ (con $\tau \in \mathcal{H}_g$), es la función entera de g variables complejas definida por la expansión de Fourier

$$\theta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} exp\{2\pi i(\frac{1}{2}\ {}^t n\tau n +^t nz)\} \tag{15}$$

donde ${}^t n$ denota el transpuesto del vector $n \in \mathbb{Z}^g$ y ${}^t n\tau n$ es la multiplicación de matrices. El hecho que la parte imaginaria de la matriz τ sea positiva definida, asegura que el término exponencial decaiga como e^{-an^2} para algún a positivo; así, esta serie converge absolutamente y uniformemente en subconjuntos compactos de $\mathbb{C}^g$, con lo cual obtenemos una función entera que es casi-periódica con respecto a las translaciones generadas por la retícula Λ.

La casi-periodicidad característica de la función θ fundamental está dada por la ecuación:

$$\theta_\tau(z + \lambda) = exp\{2\pi i(-{}^t v - \frac{1}{2}\ {}^t v\tau v)\}\theta_\tau(z) \tag{16}$$

donde λ es un elemento de la retícula Λ y tiene una expresión $\lambda = Iv' + \tau v$ para vectores enteros v' y v. Al termino $exp\{2\pi i(-{}^t v - \frac{1}{2}\ {}^t v\tau v)\}$ se le llama *factor de automorfía.*

Observemos que la ecuación de casi-periodicidad (16) determina a la función θ fundamental unívocamente salvo multiplicación por constantes.

Se puede probar que $\theta_\tau(z)$ es una sección holomórfa de un haz holomorfo sobre T. Dicho haz holomorfo esta descrito por los factores de automorfía de la ecuación (16). En particular $\theta_\tau(z)$ tiene un conjunto cero bien definido en la variedad abeliana, el cual es un divisor (*el divisor* θ) y es denotado por (θ).

Nota 1.8.7. Una gran virtud de la función theta fundamental es que todas las secciones holomorfas de todos los haces lineales holomorfos sobre T, pueden ser representadas en términos de la función theta de Riemann fundamental. Así, podemos pensar a θ como una función theta "básica", ver [**34**].

2

Un viaje de mil millas empieza con un paso. (Proverbio Chino).

La Jacobiana de las laminaciones producto.

2.1. 1-formas diferenciales holomorfas tangenciales de la laminación producto.

En esta sección describiremos explicitamente a las 1-formas diferenciales holomorfas en $\mathcal{L}_g$.

Consideremos a la laminación producto $\mathcal{L}_g$ para g fijo (ver ejemplo 1.2.1), al haz tangente holomorfo tangencial de la laminación producto, $F\mathcal{L}_g$, el cual está dado explícitamente por $\{U_i, g_{ij}\}$, donde $\{U_i\}$ es una cubierta por abiertos distinguidos de $\mathcal{L}_g$ y $g_{ij} = \frac{\partial h_{ij}}{\partial z}$.
Consideremos también al haz canónico holomorfo tangencial de la laminación producto, $F^*\mathcal{L}_g$, el cual está dado por $\{U_i, g_{ij}^{-1}\}$.
De las consideraciones anteriores tenemos que cualquier 1-forma diferencial holomorfa tangencial, w, en $\mathcal{L}_g$ vista en coordenadas locales (U_α, h_α) tiene la expresión $w_{U_\alpha} = f(z,t)dz_{U_\alpha}$ donde f es una función tangencialmente holomorfa.

Observemos que para cada punto fijo $t_0 \in K$ la 1-forma diferencial holomorfa tangencial $w(z, t_0)$ es una 1-forma diferencial holomorfa en un abierto de la superficie de Riemann compacta $X_g \times \{t_0\}$.

Consideremos a la gavilla, $\mathcal{O}^{(1,0)}_{\mathcal{L}_g}$, de 1-formas diferenciales holomorfas tangenciales en la laminación producto, es decir, para cada abierto (U, h) de $\mathcal{L}_g$ tenemos

$$\mathcal{O}^{(1,0)}_{\mathcal{L}_g}(U) := \{\omega : \omega(z,t) = f_U(z,t)dz_U\}$$

donde f_U denota a una función continua definida en las coordenadas (U, h), la cual es holomorfa con respecto a la variable z.

Denotemos por $\mathcal{O}^{(1,0)}_{X_g}$ a la gavilla de 1-formas diferenciales holomorfas en la superficie de Riemann compacta X_g, y consideremos una base canónica $\{\omega_i\}_{i=1}^{g}$ de 1-formas diferenciales para el espacio vectorial finito de las 1-formas diferenciales holomorfas globales en X_g, $H^0(X_g, \mathcal{O}^{(1,0)}_{X_g})$, el cual sabemos que es isomorfo a $\mathbb{C}^g$ (ver sección 1.5).

En analogía al caso clásico de superficies de Riemann compactas $H^0(\mathcal{L}_g, \mathcal{O}^{(1,0)}_{\mathcal{L}_g})_T$ denotará al espacio vectorial de las secciones globales de la gavilla $\mathcal{O}^{(1,0)}_{\mathcal{L}_g}$. Usando la base $\{\omega_i\}_{i=1}^g$ para $H^0(X_g, \mathcal{O}^{(1,0)}_{X_g})$ tenemos que cualquier elemento w en $H^0(\mathcal{L}_g, \mathcal{O}^{(1,0)}_{\mathcal{L}_g})_T$ tiene una expresión en coordenadas locales:

$$w(z,t) = \sum_{i=1}^{g} a_i(z,t)\omega_i$$

donde para cada z fijo las a_i son funciones continuas del conjunto de Cantor en $\mathbb{C}$, es decir, $a_i \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$ para $i = 1, \ldots, g$.

Proposición 2.1.1. *El espacio vectorial $H^0(\mathcal{L}_g, \mathcal{O}^{(1,0)}_{\mathcal{L}_g})_T$ está en correspondencia canónica con el espacio vectorial $\mathcal{C}^0(K, H^0(X_g, \mathcal{O}^{(1,0)}_{X_g}))$, el cual es isomorfo al espacio vectorial $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}^g)$.*

Demostración. Si $\omega \in H^0(\mathcal{L}_g, \mathcal{O}^{(1,0)}_{\mathcal{L}_g})_T$, entonces, ω tiene una expresión local $\omega = \sum_{i=1}^g a_i(z,t)\omega_i$ donde para cada $t \in K$ fijo $a_i(z,t)\omega_i$ es una 1-forma diferencial holomorfa en la superficie $X_g \times \{t\}$. En otras palabras, ω en la base canónica $\{\omega_i\}_{i=1}^g$ tiene la expresión $\omega = (a_1(z,t), \ldots, a_g(z,t))$. Con lo cual tenemos la correspondencia canónica. El último isomorfismo es una consecuencia del hecho que $\Gamma(X_g, \mathcal{O}^{(1,0)}_{X_g}) \cong \mathbb{C}^g$.

■

A continuación se enunciaran algunos hechos bien conocidos sobre el espacio $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$ (ver [**41**]).

(1) El espacio vectorial $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}^g)$ con la norma del supremo es un espacio de Banach complejo de dimensión infinita.
(2) Con la topología inducida por la norma del supremo, $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}^g)$ es un espacio vectorial topológico Hausdorff tal que:
   - *No es localmente compacto.*
   - *Es localmente acotado*, es decir, existe una vecindad acotada de la función idénticamente cero.
   - *Es un espacio vectorial normado*, es decir, existe una norma en $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}^g)$, tal que la métrica inducida por esta norma es compatible con la topología de espacio vectorial topológico, lo cual es equivalente a que el espacio $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}^g)$ sea localmente convexo y localmente acotado.
(3) El espacio vectorial $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}^g)$ es una $\mathbb{C}$-álgebra de Banach conmutativa.

Demostración. Basta con mostrar que

(17) $$\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}^g) \text{ es isomorfo e isométrico a } \bigoplus_{i=1}^{g} \mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}).$$

Si $h \in \bigoplus_{i=1}^{g} \mathcal{C}^0(K,\mathbb{C})$ entonces h tiene una expresión de la forma $h = h_1 \oplus \cdots \oplus h_g$, de donde la identificación canónica, I, entre $\mathcal{C}^0(K,\mathbb{C}^g)$ y $\bigoplus_{i=1}^{g} \mathcal{C}^0(K,\mathbb{C})$ es el isomorfismo buscado. Más aún, si definimos la norma de h como $||h|| = sup_{t\in K 1\leq i\leq g}\{|h_i|\}$ entonces $||I(f)|| = ||f||\ \forall f \in \mathcal{C}^0(K,\mathbb{C}^g)$ con lo cual obtenemos el resultado.

■

2.2. Cohomología de De Rham y Dolbeault tangenciales de las laminaciones producto.

2.2.1. Cohomología de De Rham. En esta sección describiremos explicitamente la cohomología de De Rham tangencial de las laminaciones producto.
Consideremos a los conjuntos $\Omega^i(X_g)$ de i-formas diferenciales lisas en X_g como espacios vectoriales topológicos localmente convexos, donde la topología está dada por la unión de las normas $\mathcal{C}^k$ (ver [**9**]). Así, el conjunto de las transformaciones continuas del conjunto de Cantor en $\Omega^i(X_g)$ resulta ser un espacio vectorial topológico para cada i. A dicho espacio vectorial topológico lo denotaremos por $\mathcal{C}^0(K,\Omega^i(X_g))$.

Para cada $i = 0,1,2$, denotaremos por $\Omega^i_T(\mathcal{L}_g)$ al espacio vectorial de *las i-formas diferenciales lisas ($\mathcal{C}^\infty_T$) tangenciales definidas globalmente en la laminación producto $\mathcal{L}_g$*. Explícitamente tenemos:

$$\Omega^0_T(\mathcal{L}_g) = \mathcal{C}^\infty_T(\mathcal{L}_g,\mathbb{C}) = \mathcal{C}^0(K,\mathcal{C}^\infty(X_g)), \tag{18}$$

$$\Omega^1_T(\mathcal{L}_g) = \{a_1(x,y,t)dx + a_2(x,y,t)dy : a_i \in \mathcal{C}^\infty_T(\mathcal{L}_g,\mathbb{C})\} = \mathcal{C}^0(K,\Omega^1(X_g)), \tag{19}$$

$$\Omega^2_T(\mathcal{L}_g) = \{b(x,y,t)(dx\wedge dy) : b \in \mathcal{C}^\infty_T(\mathcal{L}_g,\mathbb{C})\} = \mathcal{C}^0(K,\Omega^2(X_g)), \tag{20}$$

donde la última igualdad en cada uno de los casos anteriores se sigue del hecho que para cada $t \in K$ fijo la i-forma diferencial lisa tangencial $w \in \Omega^i_T(\mathcal{L}_g)$ es una i-forma diferencial lisa en $X_g \times \{t\}$ que varía continuamente con respecto a t. En otras palabras, es una familia continua en $\Omega^i(X_g)$ parametrizada por el conjunto de Cantor.

Ahora, dotamos a los espacios vectoriales $\Omega^i_T(\mathcal{L}_g)$ de *la topología $\mathcal{I}$*, la cual está dada de la siguiente manera:
Fijemos un atlas coordenado foliado finito $\{U_i,z_i\}_{i=1}^n$ en la laminación producto $\mathcal{L}_g$. Para cada entero $k \geq 0$ denotamos por $||\cdot||_k$ a *la norma $\mathcal{C}^k$ tangencial relativa al atlas $\{U_i,z_i\}_{i=1}^n$*, es decir, si $\phi \in \Omega^i_T(\mathcal{L}_g)$, entonces,

$$||\phi||_k = \sup_{1\leq i\leq n}\{\sum_{I=0}^{k} |\frac{\partial^I\phi}{\partial z_i^I}_{|U_i}|\}$$

donde $\frac{\partial^I \phi}{\partial z_i^I}_{|U_i}$ denota la I-ésima derivada de los coeficientes de ϕ en el abierto U_i.
Notemos que la norma $||\cdot||_k$ define una topología, $\mathcal{I}_k$, en $\Omega^i_T(\mathcal{L}_g)$, la cual es Hausdorff y localmente convexa, convirtiendo a $\Omega^i_T(\mathcal{L}_g)$ en un espacio vectorial topológico. Observemos que $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_{k+1}$ para toda $k \geq 0$.
Finalmente, *la topología* $\mathcal{I}$ es la unión de las topologías $\mathcal{I}_k$, es decir, $\mathcal{I} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{I}_k$. Así, *el espacio vectoriral* $\Omega^i_T(\mathcal{L}_g)$ *con la topología* $\mathcal{I}$ *es un espacio vectorial topológico localmente convexo.* Es bien sabido que con esta topología el operador *derivación exterior tangencial*, $d_T : \Omega^i_T(\mathcal{L}_g) \longrightarrow \Omega^{i+1}_T(\mathcal{L}_g)$, el cual es el operador diferencial a lo largo de las hojas, resulta ser una transformación lineal y continua (ver **[32]** cap.II pág .69). También, que existe la *sucesión exacta de De Rham*

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}_T \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_T \longrightarrow \Omega^1_T \xrightarrow{d_T} \Omega^2_T \longrightarrow 0. \tag{21}$$

Definición 2.2.1. Para cada $i = 0, 1, 2$ *el i-ésimo grupo de cohomología de De Rham tangencial de la laminación producto* $\mathcal{L}_g$ es $H^i(\mathcal{L}_g; \mathbb{C})_T = \frac{\text{Ker } \{d_T : \Omega^i_T(\mathcal{L}) \longrightarrow \Omega^{i+1}_T(\mathcal{L})\}}{\text{Im } \{d_T : \Omega^{i-1}_T(\mathcal{L}) \longrightarrow \Omega^i_T(\mathcal{L})\}}$.

Es bien sabido que la topología localmente convexa en los $\Omega^i(X_g)$ convierte a los grupos de cohomología de De Rham $H^i_{DR}(X_g)$ en espacios vectoriales topológicos (ver **[12]**).
Los siguientes resultados relacionan a los grupos de cohomología de De Rham tangencial de la laminación producto $\mathcal{L}_g$ y a los grupos de cohomología de De Rham $H^i_{DR}(X_g)$.

Para cada $i = 0, 1, 2$ denotamos por $Z_i(\mathcal{L}_g) = \{\omega \in \Omega^i_T : d_T\omega = 0\}$ al conjunto de *las i-formas diferenciales cerradas tangenciales en la laminación producto* $\mathcal{L}_g$, y por $B_i(\mathcal{L}_g) = \{\omega \in \Omega^i_T : \text{existe } \nu \in \Omega^{i-1}_T \text{ tal que } d_T\nu = \omega\}$ al conjunto de *las i-formas diferenciales exactas tangenciales en la laminación producto* $\mathcal{L}_g$. Puesto que d_T es lineal y continua tenemos que $Z_i(\mathcal{L})$ es un subespacio vectorial topológico cerrado de $\Omega^i_T(\mathcal{L})$.

Lema 2.2.2. *Para cada* $i = 0, 1, 2$, *el conjunto* $Z_i(\mathcal{L}_g)$ *(respectivamente* $B_i(\mathcal{L}_g)$*) se identifica canónicamente con el conjunto* $\mathcal{C}^0(K, Z_i(X_g))$ *(respectivamente* $\mathcal{C}^0(K, B_i(X_g))$*).*

Demostración. Este resultado es una consecuencia de la definición de los conjuntos $Z_i(\mathcal{L}_g)$ y $B_i(\mathcal{L}_g)$. Para ilustrar este hecho, esbozaremos únicamente el caso i=1, ya que los demás casos son similares.
Por definición tenemos que:

$$Z_1(\mathcal{L}_g) = \{w(x,y,t) = f_1(x,y,t)dx + f_2(x,y,t)dy \in \Omega^1_T(\mathcal{L}) : d_T w = 0 \text{ para cada t fijo}\},$$

es decir, para cada $t_0 \in K$ fijo, $w(x,y,t_0)$ es una 1-forma diferencial cerrada en $X_g \times \{t_0\}$ de donde $Z_1(\mathcal{L}_g) = \mathcal{C}^0(K, Z_1(X_g))$.

De manera similar tenemos que:

$$B_1(\mathcal{L}_g) = \{w(x,y,t) \in \Omega^1_T(\mathcal{L}) : \text{ existe } f \in \Omega^0_T(\mathcal{L}_g) \text{ tal que } w = d_T f\},$$

es decir, para cada $t_0 \in K$ fijo, $w(x, y, t_0)$ es una 1-forma diferencial exacta en $X_g \times \{t_0\}$ de donde $B_1(\mathcal{L}_g) = \mathcal{C}^0(K, B_1(X_g))$.

■

Puesto que $\Omega^i_T(\mathcal{L}_g) = (\mathcal{C}^0(K, \Omega^i(X_g)), \mathcal{I})$ para cada $i = 0, 1, 2$ tenemos que el i-ésimo grupo de cohomología de De Rham tangencial toma la expresión

$$H^i(\mathcal{L}_g; \mathbb{C})_T = \frac{\mathcal{C}^0(K, \mathrm{Ker}\ \{d : \Omega^i(X_g) \longrightarrow \Omega^{i+1}(X_g))\}}{\mathcal{C}^0(K, \mathrm{Im}\ \{d : \Omega^{i-1}(X_g) \longrightarrow \Omega^i(X_g))\}}.$$

Observemos que los grupos $H^i(\mathcal{L}_g; \mathbb{C})_T$ con la topología inducida son grupos topológicos.

Proposición 2.2.3. *Para cada $i = 0, 1, 2$, el i-ésimo grupo de cohomología de De Rham tangencial, $H^i(\mathcal{L}_g; \mathbb{C})_T$, es isomorfo al grupo $(\mathcal{C}^0(K, H^i_{DR}(X_g)), \mathcal{I})$.*

Demostración. Observemos que $\mathcal{L}_g$ puede ser vista como una fibración $X_g \to \mathcal{L}_g \to K$. Consideremos el haz vectorial $\pi : E \longrightarrow K$ dado por $E_t := \pi^{-1}(t) = H^*_{DR}(X_g)$. Entonces, los grupos de cohomología de De Rham tangencial son isomorfos a las secciones continuas del haz E, de donde obtenemos el resultado.

■

2.2.2. Cohomología de Dolbeault. Consideremos una función coordenada h_α en $U(p)$, una vecindad de un punto $p \in \mathcal{L}_g$ tal que $z_\alpha(p) = x_\alpha + iy_\alpha$. Las formas $dz_\alpha = dx_\alpha + idy_\alpha$ y $d\bar{z}_\alpha = dx_\alpha - idy_\alpha$ dan una base para el $\mathcal{C}^\infty_T$-modulo $\Omega^1_T(U(p))$ de tal forma que

$$\Omega^1_T(U(p)) \cong \{\mathcal{C}^\infty_T(U(p))\}dz_\alpha + \{\mathcal{C}^\infty_T(U(p))\}d\bar{z}_\alpha. \tag{22}$$

La descomposición dada en (22) es intrinseca, esto es, es independiente de la elección de las funciones coordenadas. En efecto, ya que este resultado es válido hoja por hoja (ver **[16]**) y lo único que estamos haciendo es ajustar los coeficientes que son funciones continuas en el Cantor.
Si escribimos $\Omega^{(1,0)}_T(U(p)) = \{\mathcal{C}^\infty_T(U(p))\}dz_\alpha$ y $\Omega^{(0,1)}_T(U(p)) = \{\mathcal{C}^\infty_T(U(p))\}d\bar{z}_\alpha$ la descomposición dada en (22) toma la forma:

$$\Omega^1_T(U(p)) = \Omega^{(1,0)}_T(U(p)) + \Omega^{(0,1)}_T(U(p)). \tag{23}$$

Denotemos por $\Omega^2_T(U(p)) = \{\mathcal{C}^\infty_T(U(p))\}dx_\alpha \wedge dy_\alpha = \{\mathcal{C}^\infty_T(U(p))\}dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\alpha$.
Para uniformizar la notación escribimos $\Omega^2_T(U(p)) = \Omega^{(1,1)}_T(U(p))$ y $\Omega^{(0,0)}_T(U(p)) = \mathcal{C}^\infty_T(U(p))$.
En terminos de la fórmula (23), la derivada tangencial exterior $d_T : \mathcal{C}^\infty_T(U(p)) \longrightarrow \Omega^1_T(U(p))$ puede ser escrita como la suma

$$d_T = \partial_T + \bar{\partial}_T \tag{24}$$

donde $\bar{\partial}_T$ es el operador $\bar{\partial}$ tangencial.

2.2.2.1. *El operador $\bar\partial$ tangencial.* De los parrafos anteriores tenemos que para cualquier función $f \in \mathcal{C}^\infty_T(U,\mathbb{C})$ tiene sentido $\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z,t) = \frac{\partial f}{\partial \bar z}(x+iy,t) = \frac{1}{2}(\frac{\partial f(x+iy,t)}{\partial x} + i\frac{\partial f(x+iy,t)}{\partial y})$. Definimos

$$\bar\partial_T f = \frac{\partial f}{\partial \bar z} \cdot d\bar z, \tag{25}$$

con lo cual, $\bar\partial_T f$ es un elemento de $\mathcal{C}^\infty(U, \overline{F^*\mathcal{L}_U})$.

El operador $\bar\partial_T$ así definido satisface la *fórmula de Leibnitz*:

$$\bar\partial_T(f_1 \cdot f_2) = f_1 \cdot \bar\partial_T f_2 + f_2 \cdot \bar\partial_T f_1. \tag{26}$$

Más aún, $\bar\partial_T f$ se anula si y sólo si se satisface *la ecuación de Cauchy-Riemann tangencial*

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

es decir, si y sólo si f es una transformación holomorfa tangencial. Estas observaciones y afirmaciones muestran que se satisface:

$$\bar\partial_T(h \cdot f) = h \cdot \bar\partial_T \text{ si } h \text{ es tangencialmente holomorfa.} \tag{27}$$

Ahora, consideremos dos abiertos distinguidos U y V de $\mathcal{L}_g$ y una transformación tangencialmente holomorfa φ entre ellos, es decir, $\varphi : U \longrightarrow V$.

Lema 2.2.4. *Para cualquier función $f \in \mathcal{C}^\infty_T(V,\mathbb{C})$ se satisface:*

$$\bar\partial_T(f \circ \varphi) = \varphi^*(\bar\partial_T f). \tag{28}$$

Observemos que este lema implica que *el operador diferencial $\bar\partial_T$* puede ser definido en las funciones $\mathcal{C}^\infty_T$ sobre cualquier laminación producto, de tal forma que la ecuación (25) se da localmente para cualquier carta coordenada tangencial z. Con lo cual la fórmula de Leibnitz (26) y la relación (27) permanecen válidas en cualquier laminación producto, así como la caracterización de funciones holomorfas tangenciales y las funciones $f \in \mathcal{C}^\infty_T(\mathcal{L}_g,\mathbb{C})$ tales que $\bar\partial_T f = 0$.

Una *definición intrínseca del operador diferencial $\bar\partial_T$* aplicado a cualquier función $f \in \mathcal{C}^\infty_T(V,\mathbb{C})$ es:

$$\bar\partial_T f = (d_T f)^{(0,1)}.$$

Lema 2.2.5. (Teorema de Stokes para laminaciones producto.) *Si $\mathcal{L}_g$ es cualquier laminación producto y si ω es cualquier 1-forma diferencial tangencial en $\mathcal{L}_g$, entonces,*

$$\int_{\partial\mathcal{L}_g} \omega = \int_{\mathcal{L}_g} \omega = 0. \tag{29}$$

Demostración. Notemos que

$$\int_{\partial \mathcal{L}_g} \omega = \int_{\partial X_g \times K} w,$$

entonces, $\int_{\partial X_g \times K} \omega = \int_K \left(\int_{\partial X_g \times \{t\}} \omega \right) d\mu$ para alguna medida de probabilidad en K. Aplicando el teorema de Stokes a la superficie de Riemann compacta X_g tenemos

$$\int_K \left(\int_{\partial X_g \times \{t\}} \omega \right) d\mu = \int_K \left(\int_{X_g \times \{t\}} d\omega \right) d\mu = 0.$$

■

Denotemos por $\mathbb{D}$ al disco unitario abierto en $\mathbb{C}$ y por $V = h_\alpha(U(p)) \subset \mathbb{C} \times K$. Supondremos que $\mathbb{D} \times K \subset V$.

Lema 2.2.6. *Consideremos a $g \in \mathcal{C}^\infty_T(V)$ y sea $D \subset \mathbb{D}$ un subconjunto abierto de $\mathbb{D}$, de tal forma que $\bar{D} \times K$ es un subconjunto compacto de V. Entonces, existe una función $f \in \mathcal{C}^\infty_T(V)$ tal que $\bar{\partial}_T f = g(z,t)$ siempre y cuando $(z,t) \in D \times K$.*

Demostración. Sea r una función lisa tangencial ($\mathcal{C}^\infty_T$) en $\mathbb{C} \times K$ tal que

$$r(z,t) = \begin{cases} 1, & \text{si } (z,t) \in \bar{D} \times K \\ 0, & \text{si } (z,t) \in \mathbb{C} \times K \setminus V \end{cases} \tag{30}$$

con soporte compacto en $\mathbb{C} \times K$. Consideremos la función

$$h(z,t) = \begin{cases} r(z,t)g(z,t), & \text{si } (z,t) \in V \\ 0, & \text{si } (z,t) \in \mathbb{C} \times K \setminus V. \end{cases} \tag{31}$$

Sea f la función definida por:

$$f(z,t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C} \times K} \frac{h(z+\zeta,t)}{\zeta} \phi(s) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \tag{32}$$

donde ϕ es una medida de probabilidad en K, (aqui estamos pensando a K como un grupo topológico compacto abeliano y por lo tanto tomamos la medida de Haar asociada). Notemos que la función $f(z,t)$ es una función $\mathcal{C}^\infty_T$ bien definida en $\mathbb{C} \times K$. Diferenciando obtenemos la fórmula

$$\frac{\partial f(z,t)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C} \times K} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \{ \frac{h(z+\zeta,t)}{\zeta} \} \phi(s) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}. \tag{33}$$

Ahora, fijemos un punto $(z,t) \in \mathbb{C} \times K$. Escojamos un disco $\triangle \subset \mathbb{C}$ centrado en el origen tal que en $\triangle \times K$ la función $h(z+\zeta,t)$ se anula para $\zeta \in (\mathbb{C} \setminus \triangle) \times K$. Sea $\triangle_\epsilon \subset \mathbb{C}$ un disco centrado en el origen y de radio ϵ tal que $(\bar{\triangle}_\epsilon \times K) \subset \triangle \times K$. Denotemos por γ a la frontera de $\triangle$ y por γ_ϵ a la frontera de $\triangle_\epsilon$. Consideremos $\gamma \times K$ y $\gamma_\epsilon \times K$. Entonces

$$2\pi i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{(\triangle \setminus \triangle_\epsilon) \times K} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \{ \frac{h(z+\zeta,t)}{\zeta} \} \phi(s) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}. \tag{34}$$

Aplicando el teorema de Stokes foliado (lema 2.2.5) y recordando que en la porción $\gamma \times K$ de $(\triangle \setminus \triangle_\epsilon) \times K$ la integral se anula garantizamos que

$$2\pi i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\gamma_\epsilon \times K} \frac{h(z+\zeta, t)}{\zeta} \phi(s) d\zeta. \tag{35}$$

Parametrizando el circulo γ_ϵ por $\zeta = \epsilon e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$, tenemos

$$2\pi i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 2\pi i h(z,t). \tag{36}$$

Así, $f(z,t)$ es la función deseada, con lo cual concluimos la demostración del lema.

■

Los grupos de cohomología de Dolbeault tangenciales están definidos similarmente a los grupos de cohomología de De Rham tangencial usando el operador $\bar{\partial}_T$ en lugar del operador $\bar{d}_T$.

Definición 2.2.7. *El grupo de cohomología de Dolbeault tangencial de $\mathcal{L}_g$ (de tipo (p,q))* es el grupo $H^{(p,q)}_{\bar{\partial}_T}(\mathcal{L}_g)$ dado por:

$$H^{(p,q)}_{\bar{\partial}_T}(\mathcal{L}_g) = \frac{Ker\{\bar{\partial}_T : \Omega^{(p,q)}_T(\mathcal{L}_g) \longrightarrow \Omega^{(p,q+1)}_T(\mathcal{L}_g)\}}{Im\{\bar{\partial}_T : \Omega^{(p,q-1)}_T(\mathcal{L}_g) \longrightarrow \Omega^{(p,q)}_T(\mathcal{L}_g)\}}. \tag{37}$$

Observación 2.2.8. De la definición anterior se sigue que:

- $H^{(0,0)}_{\bar{\partial}_T}(\mathcal{L}_g) = \mathcal{O}_T(\mathcal{L}_g) = \mathcal{C}^0(K, \mathcal{O}_{X_g}) = \mathcal{C}^0(K, H^{(0,0)}_{\bar{\partial}}(X_g))$.
- $H^{(1,0)}_{\bar{\partial}_T}(\mathcal{L}_g) = \mathcal{O}^{(1,0)}_T(\mathcal{L}_g) = \mathcal{C}^0(K, \mathcal{O}^{(1,0)}_{X_g}) = \mathcal{C}^0(K, H^{(1,0)}_{\bar{\partial}}(X_g))$.

De la sucesión de De Rham (21) tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \Omega^{(1,0)}_T \arrow[dr, "\bar{\partial}"] & & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] & \Omega^{(0,0)}_T \arrow[ur, "\partial"] \arrow[dr, "\bar{\partial}"'] & & \Omega^{(1,1)}_T \arrow[r] & 0. \\
 & & & \Omega^{(0,1)}_T \arrow[ur, "\partial"'] & &
\end{tikzcd} \tag{38}$$

El lema 2.2.6 implica la siguiente proposición.

Proposición 2.2.9. (Sucesión de Dolbeault.) *La siguiente sucesión:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_T \longrightarrow \Omega^{(0,0)}_T \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{(0,1)}_T \longrightarrow 0 \tag{39}$$

es una sucesión exacta de gavillas.

Recordemos que $\mathcal{L}_g$ puede ser vista como una fibración $X_g \to \mathcal{L}_g \to K$. Consideremos el haz vectorial $\pi : E \longrightarrow K$ dado por $E_t = \pi^{-1}(t) = H^*_{\bar{\partial}_T}(X_g)$. Entonces, los grupos de cohomología de Dolbeault tangencial son isomorfos a las secciones del haz E, así tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2.10. (Teorema de Dolbeault para laminaciones producto.) *El grupo de cohomología de Dolbeault tangencial $\mathcal{L}_g$ de tipo(p,q) es canónicamente isomorfo al grupo de las transformaciones continuas del conjunto de Cantor en el grupo de cohomología de Dolbeault de tipo (p,q) de la superficie de Riemann compacta X_g.*

2.2.3. Dualidad de Serre. En esta sección daremos todos los elementos para demostrar un análogo al teorema de dualidad de Serre para el caso de las laminaciones producto.

Consideremos un haz lineal holomorfo tangencial L en la laminación producto $\mathcal{L}_g$. Sea U cualquier abierto distinguido en $\mathcal{L}_g$ tal que L posee una trivialización tangencialmente holomorfa s, es decir, s es una sección tangencialmente holomorfa de L sobre U que nunca se anula, (esta existe por que cualquier abierto de $\mathbb{C}$ es Stein). Así, cualquier $s' \in \mathcal{C}^\infty_T(U,L)$ puede ser escrita de la forma $s' = f \cdot s$ donde $f \in \mathcal{C}^\infty_T(U,\mathbb{C})$.

Observemos que para cualquier $s' = f \cdot s \in \mathcal{C}^\infty_T(U,L)$ se tiene que $\bar{\partial}_T s' = \bar{\partial}_T f \cdot s \in \mathcal{C}^\infty_T(U, L \otimes \overline{F^*\mathcal{L}_g})$ en vista de que s es tangencialmente holomorfa.

Observemos que el elemento $\bar{\partial} f \cdot s$ en $\mathcal{C}^\infty_T(U, L \otimes \overline{F^*\mathcal{L}_g})$ no depende de la elección de la trivialización tangencialmente holomorfa s escogida. En efecto, ya que el operador $\bar{\partial}_T$ satisface la relación (27).

Lema 2.2.11. *Existe un único operador diferencial tangencial de primer orden que actua en las secciones de L con valores en las secciones de $L \otimes \overline{F^*\mathcal{L}_g}$, el cual transforma a s' en $\bar{\partial} f \cdot s$ para cualesquiera U, s', s y f.*

Demostración. Dado el haz lineal holomorfo L es claro que $\bar{\partial}_T$ es un operador tangencial de primer orden en $\mathcal{C}^\infty_T(U,L)$. Del hecho que $\bar{\partial}_T f \cdot s$ es independiente de la trivialización tangencialmente holomorfa escogida, obtenemos el resultado.

■

El operador tangencial de primer orden $\bar{\partial}_T : \mathcal{C}^\infty_T(U,L) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_T(U, L \otimes \overline{F^*\mathcal{L}_g})$ dado en el lema anterior será llamado *el operador $\bar{\partial}_T$ con coeficientes en* L y será denotado por $\bar{\partial}_L$.

De la construcción de $\bar{\partial}_L$ tenemos que para cualquier sección lisa en U, $s' \in \mathcal{C}^\infty_T(U,L)$, se satisface que $\bar{\partial}_L s' = 0$ si y sólo si s' es una sección tangencialmente holomorfa en U.

Proposición 2.2.12. (La sucesión de Dolbeault-Serre.) *La siguiente sucesión:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_T(L) \longrightarrow \Omega^{(0,0)}_T(L) \xrightarrow{\bar{\partial}_L} \Omega^{(0,1)}_T(L) \longrightarrow 0 \tag{40}$$

es una sucesión exacta de gavillas.

Demostración. Sea U cualquier conjunto abierto distinguido en $\mathcal{L}_g$. Entonces, la sucesión dada en (40) restringuida a U se reduce a la sucesión de Dolbeault dada en (39), por lo tanto, la sucesión (40) es una sucesión exacta de gavillas

■

Definición 2.2.13. El kernel del operador $\bar{\partial}_L : \mathcal{C}^\infty_T(\mathcal{L}_g, L) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_T(U, L \otimes \overline{F^*\mathcal{L}_g})$ será llamado *el cero grupo de cohomología de Dolbeault tangencial de* L y lo denotaremos por $H^0(\mathcal{L}_g; L)_T$.

Definición 2.2.14. El cokernel del operador $\bar{\partial}_L : \mathcal{C}^\infty_T(\mathcal{L}_g, L) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_T(\mathcal{L}_g, L \otimes \overline{F^*\mathcal{L}_g})$, es decir, el espacio vectorial

$$H^1(\mathcal{L}_g; L)_T = \mathcal{C}^\infty_T(\mathcal{L}_g, L \otimes \overline{F^*\mathcal{L}_g})/\bar{\partial}_L(\mathcal{C}^\infty_T(\mathcal{L}_g; L)),$$

lo llamaremos *el primer grupo de cohomología de Dolbeault tangencial de* L.

Denotamos por $\mathcal{C}^\infty_T(\mathcal{L}_g, L)$ al conjunto de las secciones tangencialmente lisas de L y por $\mathcal{C}^0_T(K, \mathcal{C}^\infty(X_g, L(t)))$ al conjutno de las transformaciones continuas del conjunto de Cantor en el conjunto de las secciones lisas de $L(t)$ sobre $X_g \times \{t\}$, donde $L(t)$ denota la restricción del haz holomorfo tangencial L a la hoja $X_g \times \{t\}$.

Lema 2.2.15. *Si L es un haz lineal holomorfo tangencial en la laminación producto $\mathcal{L}_g$, entonces, $\mathcal{C}^\infty_T(\mathcal{L}_g, L)$ es canónicamente isomorfo a $\mathcal{C}^0_T(K, \mathcal{C}^\infty(X_g, L(t)))$.*

Demostración. Consideremos a $f \in \mathcal{C}^\infty_T(\mathcal{L}_g, L)$. Por definición se sigue que para cada $t \in K$ fijo, $f(z,t) \in L(t)$. Por otro lado, para cada $z \in X_g$ fijo, $f(z, \cdot)$ determina una familia de secciones en los diferentes haces lineales holomorfos que varian continuamente con respecto a t, por lo tanto, si consideramos a $F \in \mathcal{C}^0_T(K, \mathcal{C}^\infty(X_g, L(t)))$ dado por $(F(t))(z) \mapsto f(z,t)$ da el isomorfismo buscado.

■

En particular si consideremos al haz lineal anti-canónico tangencial $\overline{F^*\mathcal{L}_g}$ tenemos un isomorfismo canónico $\mathcal{C}^\infty_T(\mathcal{L}_g, L \otimes \overline{F^*\mathcal{L}_g}) \cong \mathcal{C}^0_T(K, \mathcal{C}^\infty(X_g, L(t) \otimes \bar{\omega}_{X_g}))$ donde $\bar{\omega}_{X_g}$ denota al haz canónico de X_g.

Uno de los resultados más importantes de la teoría clasica de superficies de Riemann compactas es el teorema de Dualidad de Serre (ver [**13, 14, 16**]). En las siguientes lineas enunciamos este teorema para el caso de las laminaciones producto.

Teorema 2.2.16. (Dualidad de Serre para laminaciones producto.) *Sea L un haz lineal holomorfo tangencial sobre $\mathcal{L}_g$. Entonces, existe un isomorfismo canónico*

$$H^1(\mathcal{L}_g; L)_T \cong H^0(\mathcal{L}_g; L^* \otimes \overline{F^*\mathcal{L}_g})^*.$$

Antes de dar la demostración de este teorma necesitamos las siguientes consideraciones.

Es bien sabido (ver [**32**]) que los elementos $c \in \Omega_i^T(\mathcal{L}_g)$ en el dual fuerte de $\Omega_T^i(\mathcal{L}_g)$ son *i-corrientes* en el sentido de De Rham (ver [**12**]), es decir, los $c \in \Omega_i^T(\mathcal{L}_g)$ son funcionales lineales continuos definidos en el espacio vectorial topológico Hausdorff localmente convexo $\Omega_T^i(\mathcal{L}_g)$.

Recordemos la noción de *0-corriente (o distribución)* (ver [**32**] y comparar con [**16**]): Consideremos a una cubierta coordenada finita $\{U_\alpha, h_\alpha\}$ para $\mathcal{L}_g$ y denotemos por $h_{\alpha\beta}$ a las funciones de transición. Una *0-corriente en* $h_\alpha(U_\alpha) \cong \mathbb{D} \times K$ es una transformación lineal continua $T : \mathcal{C}_T^\infty(h_\alpha(U_\alpha)) \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que en cualquier subconjunto compacto $\Omega \subset h(U_\alpha)$ hay una constante $M \in \mathbb{R}^+$ y un número natural $n \in \mathbb{N}$ con la propiedad que

$$(41) \qquad |T(f)| \leq M \sum_{I=i+j\leq n} Sup_{z\in\Omega} \left|\frac{\partial^{I=i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}\right|$$

donde $supp(f) \subset \Omega$. El conjunto de todas las *0-corrientes* en $h_\alpha(U_\alpha)$ forma un espacio vectorial el cual será denotado por $\mathcal{K}_{h_\alpha(U_\alpha)}$.
Si consideramos una 0-corriente $T \in \mathcal{K}_{h_\alpha(U_\alpha)}$, *la derivada tangencial* de T está definida por $\frac{\partial T}{\partial x}(f) = -T(\frac{\partial f}{\partial x})$ y $\frac{\partial T}{\partial y}(f) = -T(\frac{\partial f}{\partial y})$ para cualquier $f \in \mathcal{C}_T^\infty(h_\alpha(U_\alpha))$. Observemos que estas derivadas tangenciales por definición son nuevamente 0-corrientes. Así, la derivada tangencial de una 0-corriente es una 0-corriente.
Notemos que con esta definición podemos aplicar los operadores tangenciales $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ a las 0-corrientes obteniendo nuevamente 0-corrientes.

Lema 2.2.17. *Supongamos que $g(z,t,s)$ es una función continua en $\mathbb{C} \times K \times \mathbb{R}$, la cual es $\mathcal{C}^\infty$ con respecto a las variables (z,s) y que para cualquier s en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$ el soporte de $g(z,t,s)$, como una función de (z,t), está contenido en un compacto $\Omega \subset \mathbb{C} \times K$ fijo. Entonces, si T es una 0-corriente en una vecindad V de Ω, la función de s, $Tg(z,t,s)$, es una función $\mathcal{C}^\infty$ en I.*

Demostración. Notemos que para cualquier $s \in I$ y cualquier $h \neq 0$ tenemos

$$(42) \qquad \frac{1}{h}\left[Tg(z,t,s+h) - T(z,t,s)\right] = T\left[\frac{g(z,t,s+h) - g(z,t,s)}{h}\right].$$

Notemos que la función $\left[\frac{g(z,t,s+h)-g(z,t,s)}{h}\right]$, así como sus derivadas parciales de cualquier orden con respecto a z, converge uniformemente en Ω cuando $h \mapsto 0$ y sus soportes estan siempre contenidos en Ω. De la definición de 0-corriente tenemos que la expresión (42) aproxima a $T\left[\frac{\partial g(z,t,s)}{\partial s}\right]$. Así, $Tg(z,t,s)$ es una función diferenciable de s. Repitiendo el mismo argumento tenemos que la función $Tg(z,t,s)$ de s es una función $\mathcal{C}^\infty$ en I.

∎

Lema 2.2.18. *Supongamos que $g(z,t,\zeta)$ es una función continua en $\mathbb{C} \times K \times \mathbb{C}$, tal que es $\mathcal{C}^\infty$ con respecto a las variables (z,ζ) y que* $\sup g \subset \Omega \times L$ *donde $\Omega \subset \mathbb{C} \times K$ y $L \subset \mathbb{C}$ son subconjuntos compactos. Entonces, si T es una 0-curriente en una vecindad abierta U de Ω, la igualdad*

$$T\left(\int_{\mathbb{C}} g(z,t,\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}\right) = \int_{\mathbb{C}} Tg(z,t,\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \tag{43}$$

se da.

Demostración. Consideremos la transformación $(z,t) \mapsto \int_{\mathbb{C}} g(z,t,\zeta)d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$, la cual es una transformación $\mathcal{C}^\infty_T$, con soporte contenido en Ω. Por el lema 2.2.17 tenemos que $Tg(z,t,\zeta)$ es una función $\mathcal{C}^\infty$ como función de ζ y con soporte contenido en L; así, ambos lados de (43) están bien definidos. Las sumas de Riemann para la integral $\int_{\mathbb{C}} g(z,t,\zeta)d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$ son todas funciones de (z,t) tangencialmente lisas con soportes contenidos en Ω, esas sumas, así como sus derivadas parciales de cualquier orden con respecto a z, convergen uniformemente en Ω. Entonces, la igualdad (43) se sigue de la definición de 0-curriente.

■

Recordemos que las transformaciones tangencialmente holomorfas pueden ser vistas dentro del espacio de 0-corrientes, simplemente asociando a cualquier transformación tangencialmente holomorfa h la 0-corriente $T_h(f) = \int_{h_\alpha(U_\alpha)} fh$ para cualquier $f \in \mathcal{C}^\infty_T(h_\alpha(U_\alpha))$.

El siguiente resultado se sigue de los dos lemas anteriores.

Proposición 2.2.19. *Si T es una 0-curriente en un subconjunto $h_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C} \times K$, tal que $\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = 0$, entonces, T es una función tangencialmente holomorfa en $h_\alpha(U_\alpha)$.*

Para extender la noción de 0-curriente a las laminaciones producto es necesario entender como se transforman las 0-corrientes bajo una transformación lineal entre diferentes "subdominios" de $\mathbb{C} \times K$.
Supongamos que U, V son subdominios de $\mathbb{C} \times K$ y que $h : U \longrightarrow V$ es un homomorfismo tangencialmente liso. Consideremos la transformación lineal $h^* : \mathcal{K}_V \longrightarrow \mathcal{K}_U$ dada por $(h^*T) = T[(f \circ h^{-1} J_h^{-1}]$ donde $T \in \mathcal{K}_V$, $f \in \mathcal{C}^\infty_T(U)$ y J_h es el determinante Jacobiano tangencial de la transformación h.

Una *0-corriente (o distribución) T en la cubierta coordenada* $\{U_\alpha, h_\alpha\}$ esta definida como una colección $\{T_\alpha\}$ de 0-corrientes en los diferentes subconjuntos $h_\alpha(U_\alpha)$ tal que en cada intersección no vacia $U_\alpha \bigcap U_\beta \subset \mathcal{L}_g$, tenemos $h^*_{\alpha\beta}(T_\alpha) = T_\beta$.

Dos 0-corrientes T y T' en las cubiertas coordenadas $\{U_\alpha, h_\alpha\}$ y $\{U'_\alpha, h'_\alpha\}$ son llamadas *equivalentes* si ellas definen una 0-corriente en la union de las cubiertas coordenadas. Una clase de equivalencia de 0-corrientes en cubiertas coordenadas de $\mathcal{L}_g$ define una *0-corriente en la laminación producto $\mathcal{L}_g$*. Entonces, *la gavilla $\mathcal{K}$ de gérmenes de 0-corrientes en $\mathcal{L}_g$*

está bien definida, de hecho es una gavilla de grupos abelianos. Las secciones globales de la gavilla $\mathcal{K}$ son precisamente las 0-corrientes en $\mathcal{L}_g$. Para cualquier haz lineal L tangencialmente holomorfo en $\mathcal{L}_g$, la correspondiente gavilla $\mathcal{K}(L)$ de *gérmenes de 0-corrientes con coeficientes en el haz lineal* L puede ser construida de manera paralela a la construcción de los gérmenes de secciones tangencialmente lisas con coeficientes en el haz linea L.

Para simplificar la notación escribiremos simplemente
$\mathcal{K}^{(1,0)}(L) = \mathcal{K}(\omega_{\mathcal{L}_g} L)$, $\mathcal{K}^{(0,1)}(L) = \mathcal{K}(\bar{\omega}_{\mathcal{L}_g} L)$ y $\mathcal{K}^{(1,1)}(L) = \mathcal{K}(\omega_{\mathcal{L}_g}\bar{\omega}_{\mathcal{L}_g} L)$.

A continuación damos una descripción más invariante de la gavilla $\mathcal{K}$:
Supongamos que $h_\alpha(U_\alpha)$ tiene coordenadas locales (z_α, t_α) donde $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$. Observemos que el determinante Jacobiano tangencial de la función $h_{\alpha\beta}$ esta dado por $J_{h_{\alpha\beta}} = \frac{\partial(x_\alpha, y_\alpha)}{\partial(x_\beta, y_\beta)} = |\frac{dz_\alpha}{dz_\beta}| = |F\mathcal{L}^*_{g_{|\beta\alpha}}|^2$ donde $F\mathcal{L}^*_{g_{|\beta\alpha}}$ es la restricción del haz canónico de $\mathcal{L}_g$.

Lema 2.2.20. *El conjunto* $\Gamma(\mathcal{L}_g, \Omega_T^{(1,1)})$ *es igual al conjunto* $\Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{C}_T^\infty(|\omega_{\mathcal{L}_g}|^2))$.

Supongamos que $\varphi \in \Gamma(\mathcal{L}_g, \Omega_T^{(1,1)}) = \Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{C}_T^\infty(|F\mathcal{L}_g^*|^2))$ y que $T \in \Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{K})$. Así φ, corresponde a una familia de funciones $\varphi_\alpha \in \Gamma(h_\alpha(U_\alpha), \mathcal{C}_T^\infty)$ tal que $h^*_{\beta\alpha}(\varphi_\beta) = |F\mathcal{L}^*_{g_{|\beta\alpha}}|^2\varphi_\alpha$ en cada $U_\alpha \bigcap V_\beta \neq \emptyset$. Si $\mathrm{supp}(\varphi_\alpha) \subset U_\alpha \bigcap V_\beta$, entonce, $T_\beta(\varphi_\beta) = T_\alpha(\varphi_\alpha)$ de tal forma que $T(\varphi)$ esta bien definido. Más generalmente, sea $\{r_\alpha\}$ una partición de la unidad en $\mathcal{L}_g$ (ver [**32**]), entonces definimos

$$T(\varphi) = \sum_\alpha T_\alpha(r_\alpha \varphi), \tag{44}$$

la cual tiene a lo más un número finito de valores α para los cuales $T_\alpha(r_\alpha\varphi_\alpha) \neq 0$, así, localmente está es una suma finita.

Del razonamiento anterior tenemos que los elementos de $\Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{K})$ pueden ser pensados como funcionales lineales en el subespacio $\Gamma(\mathcal{L}_g, \Omega_T^{(1,1)})$.
De una manera totalmente análoga, para cualquier haz lineal L tangencialmente holomorfo en $\mathcal{L}_g$, el espacio $\Gamma(\mathcal{L}_g), \mathcal{K}(L^{-1}))$ puede ser visto como el espacio de las funcionales lineales en $\Gamma(\mathcal{L}_g, \Omega_T^{(1,1)}(L))$. Supongamos que $\{U_\alpha, h_\alpha\}$ es una cubierta coordenada finita de $\mathcal{L}_g$ con la propiedad que la transformación h_α pueda ser extendida a un homeomorfismo tangencilamente liso en una vecindad $\bar{U}_\alpha$ de $\mathbb{C} \times K$. Para cualquier entero $n \geq 0$ y cualquier elemento $f = \{f_\alpha\} \in \Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{C}_T^\infty(L))$ tomemos

$$P_n(f) = \sum_\alpha \sum_{I=i+j\leq n} \sup_{(z_\alpha, t_\alpha)\in h_\alpha(U_\alpha)} |D^I f_\alpha(z_\alpha, t_\alpha)|. \tag{45}$$

Las funciones P_n así definidas en $\Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{C}_T^\infty(L))$ son normas en el sentido que:

- $P_n(f) \geq 0$, donde la igualdad sólo se da cuando $f = 0$.
- $P_n(f + g) \leq P_n(f) + P_n(g)$.

- $P_n(cf) = |c|P_n(f)$ para cualquier constante $c \in \mathbb{C}$.

Introducimos en $\Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{C}_T^\infty(L))$ la topología definida por esta familia de normas. Con esta topología $\Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{C}_T^\infty(L))$ se convierte en un espacio vectorial topológico. Un funcional lineal $T : \Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{C}_T^\infty(L)) \longrightarrow \mathbb{C}$ es continuo en esta topología si y sólo si existe un entero n y una constante $c \in \mathbb{R}^+$ tales que $|T(f)| \leq cP_n(f)$ para toda $f \in \Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{C}_T^\infty(L))$.

Lema 2.2.21. *El espacio $\Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{K}^{(1,1)}(L^{-1}))$ es el espacio de los funcionales lineales en el espacio vectorial topológico $\Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{C}_T^\infty(L))$.*

Demostración. Por (44) tenemos que si $T = \{T_\alpha\} \in \Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{K}^{(1,1)}(L^{-1}))$, entonces, T determina un funcional lineal en $\Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{C}_T^\infty(L))$ donde $\{r_\alpha\}$ es cualquier partición de la unidad.
Puesto que las T_α son 0-currientes, la continuidad de T se sigue de la comparación de la definición de 0-curriente (ecuación (41)) y la definición de las normas P_n (ecuación (45)).
Para la otra contención. Supongamos que T es un funcional lineal continuo en $\Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{C}_T^\infty(L))$.
Afirmamos que cualquier función $f \in \mathcal{C}_T^\infty(U_\alpha)$ puede ser extendida a una sección $f \in \Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{C}_T^\infty(L))$. En efecto, si $L = \{\xi_{\alpha\beta}\}$ y $(z_\beta, t_\beta) \in h_\beta(U_\alpha \bigcap U_\beta) \subset h_\beta(U_\beta)$, entonces, tomamos $f_\alpha(z_\alpha, t_\alpha) = f(z_\alpha, t_\alpha)$ y $f_\beta(z_\beta, t_\beta) = \xi_{\alpha\beta}^{-1}(z_\beta, t_\beta) f(h_{\alpha\beta}(z_\beta, t_\beta))$; finalmente la extendemos a una función en $h_\beta(U_\beta)$ como cero en el resto de $h_\beta(U_\beta)$.
Tomando $T_\alpha(f) = T(f)$ definimos un funcional lineal $T : \Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{C}_T^\infty(h_\alpha(U_\alpha)) \longrightarrow \mathbb{C}$. De la comparación de las ecuaciones (41) y (45) se sigue que T_α es una 0-curriente en $h_\alpha(U_\alpha)$.
Observemos que si $f \in \mathcal{C}_T^\infty(h_\alpha(U_\alpha))$ tiene *supp*$(f) \subset h_\alpha(U_\alpha \bigcap U_\beta)$, entonces, $(h_{\beta\alpha}^* T_\beta)(f) = T_\beta[(f \circ h_{\alpha\beta})|\omega_{\beta\alpha}|^2] = |\omega_{\beta\alpha}|^2 T(g)$ donde $g \in \mathcal{C}_T^\infty(h_\beta(U_\beta))$ esta definida por $g(z_\beta, t_\beta) = f(h_{\alpha\beta}(z_\beta, t_\beta))$.
Puesto que $g_\alpha(z_\alpha, t_\alpha) = \xi_{\alpha\beta}^{-1}(z_\alpha, t_\alpha) f_\alpha(z_\alpha, t_\alpha))$ se sigue que $T(g) = \xi_{\alpha\beta}^{-1} T(f)$. Así, $h_{\beta\alpha}^* T_\beta = \xi_{\alpha\beta}^{-1}|\omega_{\beta\alpha}|^2 T_\alpha$ de tal forma que $\{T_\alpha\} \in \Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{K}^{(1,1)}(L))$.
Para cualquier partición de la unidad $\{r_\alpha\}$ se sigue que $T(f) = T(\sum_\alpha r_\alpha f) \sum_\alpha T(r_\alpha f) = \sum_\alpha T_\alpha(r_\alpha f)$. Así, esta identifica a T con la sección $\{T_\alpha\} \in \Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{K}^{(1,1)}(L^{-1}))$, con lo cual concluimos la demostración.

∎

Consideremos los espacios vectoriales complejos $A = \Gamma(\mathcal{L}_g, \Omega_T^{(0,0)}(L))$ y $B = \Gamma(\mathcal{L}_g, \Omega_T^{(0,1)}(L))$, el homomorfismo $\bar{\partial}_L : A \longrightarrow B$ dado al principio de esta sección. De la definición del primer grupo de cohomología de Dolbeault tangencial de L se sigue que $H^1(\mathcal{L}_g, \mathcal{O}_T(L)) \cong B/\bar{\partial}_L A$.
Al tomar las normas P_n (ver (45)) en los espacios A y B estos son espacios vectoriales topológicos (de hecho son espacios de Fréchet), entonces, se sigue que $\bar{\partial}_L : A \longrightarrow B$ es una transformación lineal continua en terminos de esta topología.

Lema 2.2.22. *La imagen de A bajo $\bar{\partial}$, i.e $\bar{\partial}_L A \subset B$, es un subespacio cerrado.*

Demostración. Denotemos por $\Omega \subset A$ al kernel del operador $\bar{\partial}_L$, así Ω es un subespacio cerrado de A, con lo cual A/Ω es un espacio de Fréchet y la transformación $\bar{\partial}_L : A/\Omega \longrightarrow B$ es lineal y continua con kernel trivial.
Sea E un subconjunto cerrado de B el cual es complementario a $\bar{\partial}_L(A) = \bar{\partial}_L(A/\Omega)$, así E es un espacio de Fréchet. Entonces, el producto $A/\Omega \times E$ resulta ser un espacio de Fréchet y la transformación $\bar{\partial}_L + i : (A/\Omega) \times E \longrightarrow B$ dada por $(\bar{\partial}_L + i)(a,e) = \bar{\partial}_L(a) + e$ es una transformación continua.
Hay que notar que esta última transformación tiene kernel trivial y su imagen es todo B, así, por el teorema de la transformación abierta (ver [**43**]), este es un isomorfismo de espacios de Fréchet. Puesto que $(A/\Omega) \times \{0\} \subset (A/\Omega) \times E$ es un subespacio cerrado, y como $(\bar{\partial}_L + i)((A/\Omega) \times \{0\}) = \bar{\partial}_L A$ se sigue que $\bar{\partial}_T A$ es un subespacio cerrado de B.

∎

Del lema anterior tenemos que $B/\bar{\partial}_L A$ resulta ser un espacio de Fréchet. Así, cualquier funcional lineal continuo en el cociente $B/\bar{\partial}_L A$ da un funcional lineal continua en B el cual se anula en el subespacio $\bar{\partial}_L A$ (ver [**43**]).

Denotemos por A^* y B^* a los espacios duales de A y B respectivamente y sea $\bar{\partial}_L^* : B^* \longrightarrow A^*$ el homomorfismo dual a $\bar{\partial}_L A$.
Observemos que el kernel $\Omega^* \subset B^*$ del homomorfismo $\bar{\partial}_L A^*$ es el espacio dual de $B/\bar{\partial}_L A$.

Demostración. (Del teorema de dualidad de Serre)
Se sigue del lema 2.2.21 que $A^* \cong \Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{K}^{(1,1)}(L^{-1}))$ y $B^* \cong \Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{K}^{(1,0)}(L^{-1}))$. De la definición de las derivadas tangenciales de 0-corrientes tenemos que $\bar{\partial}^* = -\bar{\partial}$ donde $\bar{\partial}$ es el operador tangencial aplicado a 0-corrientes. Así, el espacio $B/\bar{\partial}A (\cong H^1(\mathcal{L}_g, \mathcal{O}(L)))$ es el espacio dual del kernel de la transformación $-\bar{\partial} : \Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{K}^{(1,0)}(L^{-1})) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{K}^{(1,1)}(L^{-1}))$; pero por la proposición (2.2.19) este kernel es precisamente
$\Gamma(\mathcal{L}_g, \mathcal{O}^{(1,0)}(L^{-1})) = H^0(\mathcal{L}_g, \mathcal{O}^{(1,0)}(L^{-1}))$, con lo cual concluimos la demostración.

∎

2.3. Homología tangencial de las laminaciones producto.

En esta sección daremos la construcción de los grupos de homología tangencial para las laminaciones producto (comparar con la construcción dada en [**32**] pág.86).

En las secciones anteriores dotamos al espacio vectorial de i-formas diferenciales lisas tangenciales $\Omega^i_T(\mathcal{L}_g)$ de una topología pidiendo que en todo subconjunto compacto de cualquiera de los abiertos coordenados se tenga convergencia uniforme de los coeficientes de las i-formas diferenciales junto con todas sus derivadas en la dirección tangencial (ver sección 2.2.1).

Denotaremos por $\Omega_i^T(\mathcal{L}_g)$ al conjunto de los homomorfismos continuos del espacio vectorial topológico $\Omega_T^i(\mathcal{L}_g)$ a $\mathbb{C}$, es decir,

$$\Omega_i^T(\mathcal{L}_g) = Hom_{cont}(\Omega_T^i(\mathcal{L}_g), \mathbb{C}),$$

en otras palabras, *el dual fuerte de* $\Omega_T^i(\mathcal{L}_g)$ es por definición el espacio de las funcionales lineales continuas de $\Omega_T^i(\mathcal{L}_g)$.

Definición 2.3.1. Los elementos de $\Omega_i^T(\mathcal{L}_g)$ son llamados *i-corrientes* (comparar con [**12**]).

Explícitamente tenemos los isomorfismos:

$$\Omega_T^0(\mathcal{L}_g) = Hom_{cont}(\mathcal{C}^0(K, \Omega^0(X_g)), \mathbb{C}) \cong \mathcal{C}^0(K, \Omega^0(X_g))^*, \tag{46}$$

$$\Omega_T^1(\mathcal{L}_g) = Hom_{cont}(\mathcal{C}^0(K, \Omega^1(X_g)), \mathbb{C}) \cong \mathcal{C}^0(K, \Omega^1(X_g))^*, \tag{47}$$

$$\Omega_T^2(\mathcal{L}_g) = Hom_{cont}(\mathcal{C}^0(K, \Omega^2(X_g)), \mathbb{C}) \cong \mathcal{C}^0(K, \Omega^2(X_g))^*. \tag{48}$$

El operador

$$d_* : \Omega_i^T(\mathcal{L}_g) \longrightarrow \Omega_{i-1}^T(\mathcal{L}_g)$$

está dado por:

$$\langle w, d_* c\rangle = (-1)^{k-1}\langle d_T w, c\rangle,$$

donde $c \in \Omega_i^T(\mathcal{L}_g)$, $w \in \Omega_T^{i-1}(\mathcal{L}_g)$ y $\langle \omega, c\rangle$ denota la valuación de una corriente c en una forma w.
Mediante un cálculo directo se puede verificar que

$$d_* \circ d_* = d_*^2 = 0,$$

con lo cual tenemos la siguiente definición:

Definición 2.3.2. El *i-esimo grupo de homología tangencial de la laminación producto* $\mathcal{L}_g$ está dado por

$$H_i(\mathcal{L}_g; \mathbb{C})_T = \frac{Ker\ d_* : \Omega_i^T(\mathcal{L}_g) \longrightarrow \Omega_{i-1}^T(\mathcal{L}_g)}{Im\ d_* : \Omega_{i+1}^T(\mathcal{L}_g) \longrightarrow \Omega_i^T(\mathcal{L}_g)}.$$

2.3.1. Primer grupo de homología tangencial. Consideremos a $H_1(X_g, \mathbb{C})$, el primer grupo de homología de la superficie de Riemann compacta X_g visto como un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita (ver [**12**]).
El siguiente resultado es bien conocido (ver [**32**]).

Proposición 2.3.3. *Existe un apareamiento*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Omega_T^* \otimes \Omega_*^T \longrightarrow \mathbb{C} \tag{49}$$

el cual induce un apareamiento continuo

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H^*(\mathcal{L}_g; \mathbb{C})_T \otimes H_*(\mathcal{L}_g; \mathbb{C})_T \longrightarrow \mathbb{C} \tag{50}$$

y un isomorfismo

$$H_i(\mathcal{L}_g; \mathbb{C})_T \cong Hom_{cont}(H^i(\mathcal{L}_g; \mathbb{C})_T, \mathbb{C}). \tag{51}$$

Denotemos por $\mathcal{C}^0(K, H_1(X_g, \mathbb{C}))$ al espaccio de Banach de las transformaciones continuas del conjunto de Cantor en $H_1(X_g, \mathbb{C})$

Lema 2.3.4. *El grupo $Hom_{cont}(\mathcal{C}^0(K, H^1_{DR}(X_g)), \mathbb{C})$ se identifica canónicamente con el grupo $\mathcal{C}^0(K, Hom_{\mathbb{Z}}(H^1_{DR}(X_g), \mathbb{C}))$, más aún, este último grupo es igual al grupo $\mathcal{C}^0(K, H_1(X_g, \mathbb{C}))$.*

Demostración. La igualdad es inmediata ya que

$$H_1(X_g; \mathbb{C}) = Hom_{\mathbb{Z}}(H^1_{DR}(X_g), \mathbb{C}),$$

así, basta con probar la primera parte.

∎

Usando todas las consideraciones y resultados anteriores tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.3.5. *El primer grupo de homología tangencial de la laminación producto $\mathcal{L}_g$ es canónicamente isomorfo al grupo topológico de las funciones continuas del conjunto de Cantor en el primer grupo de homología de la superficie de Riemann X_g, es decir*

$$H_1(\mathcal{L}_g, \mathbb{C})_T \cong \mathcal{C}^0(K, H_1(X_g, \mathbb{C})).$$

Proposición 2.3.6. *El espacio $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{Z}^{2g})$ es un subgrupo discreto de $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}^g)$.*

Demostración. Es inmediato que es un subgrupo aditivo, sólo falta verificar que es discreto. Para ello, consideremos el conjunto $B_1(0) = \{\psi \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}^g) : ||\psi||_{sup} < 1\}$, de donde tenemos que $B_1(0) \bigcap \mathcal{C}^0(K, \mathbb{Z}^{2g}) = \{f = 0\}$, con lo cual concluimos la prueba.

∎

2.4. La Jacobiana de las laminaciones producto.

Denotemos por $EC^0(K, \mathbb{C}^g)$ al conjunto de las funciones escalonadas con valores en $\mathbb{C}^g$. En otras palabras, si $f \in EC^0(K, \mathbb{C}^g)$, entonces, $f(t) = (f_1(t), \dots f_g(t))$ donde f_i es una función escalonada con valores en $\mathbb{C}$ para cada $i = 1, \dots, g$.
Denotemos por $\langle \mathcal{C}^0(K, \mathbb{Z}^{2g}) \rangle_{\mathbb{R}}$ al conjunto generado por $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{Z}^{2g})$ sobre los números reales, es decir, $\langle \mathcal{C}^0(K, \mathbb{Z}^{2g}) \rangle_{\mathbb{R}} = \{\psi \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}^g) : \psi = \sum \alpha_i \phi_i;\ \phi_i \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{Z}^{2g}),\ \alpha_i \in \mathbb{R}\}$.

Lema 2.4.1. *La cerradura topológica de $EC^0(K, \mathbb{C}^g)$, es decir, $\overline{EC^0(K, \mathbb{C}^g)}$, es igual a $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}^g)$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}^g)$, entonces, f es uniformemente continua.
Sea $\epsilon > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ si la distancia entre x y y en el conjunto de Cantor es menos a δ, es decir, $d_K(x, y) < \delta$. Puesto que K es compacto y totalmente disconexo existe una cubierta abierta finita $\{U_i\}_{i=1}^n$ de K tal que sus elementos son disjuntos, no vacios y de diametro menor que δ.
Consideremos un punto x_j en U_j para cada j y definamos $f_j \in EC^0(K, \mathbb{C}^g)$ como $f_j(t) = f(x_j)\chi_{U_j}$ donde χ_{U_i} es la función caracteristica en U_i.
Finalmente consideramos a $f_\delta = \sum f_j$ en $EC^0(K, \mathbb{C}^g)$.
De la construcción y las consideraciones anteriores tenemos que para toda $x, y \in K$ tales que $d(x, y) \leq \delta$ la igualdad $|f(x) - f_\delta(y)| \leq \epsilon$ se da, así obtenemos el resultado.

■

Lema 2.4.2. *El conjunto $EC^0(K, \mathbb{C}^g)$ es un subconjunto de $\langle \mathcal{C}^0(K, \mathbb{Z}^{2g}) \rangle_{\mathbb{C}}$.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y si $f = (f_1, \ldots, f_g) \in EC^0(K, \mathbb{C}^g)$, entonces, la función f tiene una expresión $f = \sum f(x_j)\chi_{U_j}$ para alguna cubierta abierta finita $\{U_j\}$ de K con las mismas propiedades que en el lema anterior. A cada $f(x_i) \in \mathbb{C}^g$ lo escribimos como una combinación $\mathbb{R}$-lineal en $\mathbb{Z}^{2g}$. Así, es claro que definimos una función en $\langle \mathcal{C}^0(K, \mathbb{Z}^{2g}) \rangle_{\mathbb{C}}$.

■

Como consecuencia de los dos lemas anteriores tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.4.3. *La cerradura de $\langle \mathcal{C}^0(K, \mathbb{Z}^{2g}) \rangle_{\mathbb{C}}$, es decir, $\overline{\langle \mathcal{C}^0(K, \mathbb{Z}^{2g}) \rangle_{\mathbb{C}}}$, es igual a $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}^g)$*

Lema 2.4.4. *El cociente*

$$\frac{\mathcal{C}^0(K, H^0(X_g, \mathcal{O}_{X_g}^{(1,0)})^*)}{\mathcal{C}^0(K, H_1(X_g, \mathbb{Z}))}. \tag{52}$$

es un espacio topológico Hausdorff bien definido.

Demostración. Notemos que $H^0(X_g, \mathcal{O}_{X_g}^{(1,0)}) \cong \mathbb{C}^g$ y que $H_1(X_g, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2g}$. Así, tenemos que $\mathcal{C}^0(K, H^0(X_g, \mathcal{O}_{X_g}^{(1,0)})^*)$ es isomorfo a $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}^g)$ y que $\mathcal{C}^0(K, H_1(X_g, \mathbb{Z}))$ es isomorfo a $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{Z}^{2g})$. Por la proposición 2.3.6 y por la proposición anterior tenemos que el cociente es un espacio topológico Hausdorff bien definido.

■

Observemos que este cociente es un grupo abeliano complejo de dimensión infinita asociado a la laminación producto $\mathcal{L}_g$ de manera natural.

Como vimos en la sección 1.5 del capitulo 1, dada una superficie de Riemann compacta de género g, X_g, su variedad Jacobiana, $Jac(X_g)$, está definida de manera intrínseca como:

(53) $$Jac(X_g) = H^0(X_g, \mathcal{O}_{X_g}^{(1,0)})^*/H_1(X_g, \mathbb{Z}).$$

En analógia al caso clásico hacemos la siguiente definición:

Definición 2.4.5. *La Jacobiana, $Jac(\mathcal{L}_g)$, de la laminación producto $\mathcal{L}_g$,* está dada por:

(54) $$Jac(\mathcal{L}_g) = \mathcal{C}^0(K, H^0(X_g, \mathcal{O}_{X_g}^{(1,0)})^*)/\mathcal{C}^0(K, H_1(X_g, \mathbb{Z})).$$

Nota 2.4.6. De manera intuitiva $Jac(\mathcal{L}_g)$ juega el papel de un "toro complejo" de dimensión infinita, ya que es un espacio vectorial complejo de dimensión infinita modulo el subgrupo discreto $\mathcal{C}^0(K, \mathbb{Z}^{2g})$, es decir,

$$Jac(\mathcal{L}_g) \cong \mathcal{C}^0(K, \mathbb{C}^g)/\mathcal{C}^0(K, \mathbb{Z}^{2g}).$$

Proposición 2.4.7. *Existe un isomorfismo natural entre $C^0(K, \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^{2g})$ y el cociente $C^0(K, \mathbb{C}^g)/C^0(K, \mathbb{Z}^{2g})$.*

Demostración. Denotemos por A al cociente $C^0(K, \mathbb{C}^g)/C^0(K, \mathbb{Z}^{2g})$ y por B al grupo $C^0(K, \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^{2g})$. Sea $[f] \in A$ y consideremos a f como el representante de dicha clase.
Definamos la aplicación $F : A \longrightarrow B$ como $F(f) \mapsto f \bmod \mathbb{Z}^{2g}$ y notemos que F es un morfismo bien definido. En efecto, puesto que si $f, g \in [f]$, entonces, $F(f - g) = (f - g) \bmod \mathbb{Z}^{2g}$, y como $(f - g) \bmod \mathbb{Z}^{2g} = 0$, entonces, $F(f) = F(g)$. Más aún, se satisface que $F(a\tilde{f} + \tilde{g}) = aF(\tilde{f}) + F(\tilde{g})$ $\forall a \in \mathbb{C}$, es decir, F es una transformación lineal entre espacios de Banach.
F es inyectiva. En efecto, ya que $KerF = \{f \in C^0(K, \mathbb{C}^g) \mid Im(f) \subset \mathbb{Z}^{2g}\} = \mathcal{C}^0(K, \mathbb{Z}^{2g})$.
F es sobreyectiva. En efecto, ya que para cualquier transformación $f : K \longrightarrow \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^{2g}$, la imagen del grupo fundamental de K en el punto t bajo la transformación inducida f_* está contenida en la imagen bajo π_* del grupo fundamental de $\mathbb{C}^g$, es decir, $f_*\pi_1(K) \subset \pi_*(\pi_1(\mathbb{C}^g))$ donde $\pi : \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{C}^g/\mathbb{Z}^{2g}$. Usando la propiedad del levantamiento de proyecciones cubrientes obtenemos una función $\tilde{f} : K \longrightarrow \mathbb{C}$. Notemos que la clase $[\tilde{f}] \in A$ da el elemento tal que $F([\tilde{f}]) = f$.

∎

El siguiente resultado es una consecuencia de todas las consideraciones anteriores.

Teorema 2.4.8. *Existe un isomorfismo canónico entre la Jacobiana de la laminación producto $\mathcal{L}_g$ y el grupo topológico abeliano de las transformaciones continuas del conjunto de Cantor en la Jacobiana de la superficie de Riemann compacta X_g.*

De la definición de $Jac(\mathcal{L}_g)$ y del teorema (2.4.8) anterior, observamos que $Jac(\mathcal{L}_g)$ tiene la estructura de un grupo abeliano topológico no localmente compacto.

2.5. La transformación de Abel-Jacobi de las laminaciones producto.

La transformación de Abel-Jacobi es una piedra angular en la teoría de superficies de Riemann compactas. En esta sección vemos que esta transformación puede ser definida en el caso de las laminaciones producto.
Para definir la transformación de Abel-Jacobi de las laminaciones producto, comenzaremos definiendo lo que entenderemos por los puntos base en una laminación producto $\mathcal{L}_g$ y posteriormente integramos en cada hoja de dicha laminación con los puntos base ya predeterminados. Exhibimos que en este caso, dicha transformación de Abel-Jacobi define un encaje holomorfo tangencial de la laminación $\mathcal{L}_g$ en su Jacobiana.

Consideremos cualquier función continua $Z : K \longrightarrow X_g$ y tomemos su gráfica , $graf(Z) \subset K \times X_g$.

Definición 2.5.1. Los puntos en la gráfica de la función Z, $graf(Z)$, serán llamados *puntos base (con respecto a Z) en la laminación producto $\mathcal{L}_g$.*

Geométricamente estamos escogiendo de manera continua un punto por cada hoja de la laminación producto $\mathcal{L}_g$, es decir, un punto en cada superficie de Riemann compacta X_g, lo que generaliza la noción de divisor.

Lema 2.5.2. *La aplicación $\widehat{A} : (\mathcal{L}_g, Z) \longrightarrow Jac(\mathcal{L}_g)$ dada por*

$$(z, t, Z(t)) \mapsto A_{Z(t)}(z) = \int_{Z(t)}^{z} \omega, \tag{55}$$

es una transformación continua bien definida.

Demostración. La aplicación $\widehat{A}$ es una transformación continua bien definida ya que esta definida por la transformación de Abel-Jacobi clásica hoja a hoja y por definición la variación en las hojas es continua.

∎

Definición 2.5.3. La transformación $\widehat{A}$ anterior será llamada *la transformación de Abel-Jacobi, $\widehat{A}$, de la laminación producto $\mathcal{L}_g$ con puntos base Z en su Jacobiana $Jac(\mathcal{L}_g)$.*

Observación 2.5.4. Consideremos el punto $p_0 = (z_0, t_0) \in \mathcal{L}_g$. Por el teorema 2.4.8 la transformación de Abel-Jacobi $\widehat{A}$ (con puntos base Z) asocia la función

$$f(t) = \begin{cases} \int_{Z(t_0)}^{z_0} \omega & \text{si } t = t_o, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{56}$$

al punto p_0, donde $\int_{Z(t_0)}^{z_0} \omega \in Jac(X_g \times \{t\}) (\cong Jac(X_g))$ y $0 \in Jac(X_g)$ es el elemento identidad del grupo $Jac(X_g)$. Así, la imagen de la laminación producto bajo la transformación de Abel-Jacobi es el conjunto de las transformaciones continuas del conjunto de Cantor a la imagen $A(X_g) \subset Jac(X_g)$ bajo la transformación clásica de Abel-Jacobi.

El hecho que $Z(t)$ es una transformación continua, el hecho que para cada $t \in K$ fijo la transformación de Abel-Jacobi clásica es un encaje holomorfo y de la observación anteiro se sigue el siguiente resultado.

Teorema 2.5.5. *La transformación de Abel-Jacobi es un encaje holomorfo tangencial de la laminación producto (con puntos base $Z(t)$) en su Jacobiana.*

2.6. Divisores y el grupo de divisores de las laminaciones producto.

2.6.1. Divisores y grado de divisores. En esta sección damos sentido a la noción de divisor y al grado de un divisor en la laminación producto.
Consideraremos subconjuntos cerrados C_i en la laminación producto $\mathcal{L}_g$ con las siguientes propiedades:
Las restricciones de C_i a cada una de las hojas $X_g \times \{t\}$ sean divisores en X_g y la familia de divisores dada por las restricciones sea una familia continua parametrizada por el conjunto de Cantor.

Definición 2.6.1. Una suma formal finita $\sum C_i$ en la laminación producto $\mathcal{L}_g$, será llamada *un divisor en la laminación producto $\mathcal{L}_g$*.

Definimos *el divisor cero en la laminación producto $\mathcal{L}_g$* como el subconjunto cerrado de $\mathcal{L}_g$ tal que su restricción a cada hoja sea el divisor cero. El conjunto de todos los divisores en $\mathcal{L}_g$ será denotado por $Div(\mathcal{L}_g)$.

2.6.1.1. *Grado tangencial de divisores.* Consideremos un divisor $D(t)$ en $\mathcal{L}_g$.

Definición 2.6.2. *El grado tangencial de $D(t)$* es la función continua $deg_T : K \longrightarrow \mathbb{Z}$, tal que para cada $t_0 \in K$ $deg_T(D(t_0))$ es el grado del divisor en la hoja $X_g \times \{t_0\}$. En otras palabras, es la asignación continua hoja a hoja del grado usual de divisores en superficies de Riemann compactas.

Lema 2.6.3. *Si $D(t) \in Div(\mathcal{L}_g)$, entonces, el grado tangencial de $D(t)$ es una función localmente constante del conjunto de Cantor en $\mathbb{Z}$. Más aún, satisface la igualdad $deg_T(D_1 + D_2) = deg_T(D_1) + deg_T(D_2)$ para cualquier par $D_1(t), D_2(t) \in Div(\mathcal{L}_g)$.*

Demostración. Puesto que K es un conjunto compacto, totalmente disconexo y la función deg_T es continua, entonces, tenemos que Im $deg_T(K)$ consta unicamente de un número finito de elementos. La aditividad de la función deg_T se sigue de las propiedades generales de las funciones localmente constantes.

■

Sea d cualquier número entero.

Definición 2.6.4. Un divisor $D(t)$ en $\mathcal{L}_g$ tal que su grado tangencial es constante igual a d, será llamado *un divisor con grado tangencial constante d en $\mathcal{L}_g$*. En otras palabras, en cualquier hoja, $D(t)$ tiene grado d. *El conjunto de divisores con grado tangencial constante d en $\mathcal{L}_g$* será denotado por $Div_d(\mathcal{L}_g)$.

Observación 2.6.5. Por el lema anterior tenemos que si $D(t)$ en $\mathcal{L}_g$, entonces, existe una cubierta abierta finita $\{U_i(D)\}_{i=1}^m$ of K y enteros $d_1, d_2, \ldots, d_m \in \mathbb{Z}$ tales que

$$deg_T(D(t)) = \begin{cases} d_1 & \text{si }, t \in U_1(D) \\ \vdots & \\ d_m & \text{si }, t \in U_m(D). \end{cases} \tag{57}$$

Proposición 2.6.6. *El conjunto de divisores con grado tangencial constante d en $\mathcal{L}_g$ puede ser identificado canónicamente con el conjunto de las transformaciones continuas del conjunto de Cantor al conjunto de de los divisores de grado d en la superficie de Riemann compacta X_g.*

Demostración. De la definición de divisor con grado tangencial constante d en $\mathcal{L}_g$ se sigue que un divisor en la laminación producto es lo mismo que una familia continua de divisores de grado d en X_g parametrizados por el conjunto de Cantor. Así, cada $D(t)$ con grado tangencial constante d en $\mathcal{L}_g$ define una función continua de K en $Div_d(X_g)$.

■

2.6.1.2. *Grupo de divisores.*

Definición 2.6.7. Dados cualesquiera dos divisores $D_1(t)$ y $D_2(t)$ en la laminación producto $\mathcal{L}_g$, *la suma de $D_1(t)$ y $D_2(t)$* es la suma de divisores hoja a hoja, es decir,

$$D_1(t) + D_2(t) = (D_1 + D_2)(t).$$

Observemos que con esta definición de suma, el conjunto $Div(\mathcal{L}_g)$ forma un grupo abeliano, el cual llamarémos *el grupo de divisores en la laminación producto $\mathcal{L}_g$* y lo denotaremos por $Div(\mathcal{L}_g)$.

Proposición 2.6.8. *El grupo de divisores en la laminación producto $\mathcal{L}_g$ es canónicamente isomorfo al grupo de las funciones continuas del conjunto de Cantor en el grupo de divisores de la superficie de Riemann compacta X_g.*

Demostración. Este resultado es una consecuencia de las definiciones de divisor y suma de divisores en la laminación producto.

■

Observemos que un divisor en la laminación producto $\mathcal{L}_g$ lo podemos pensar como una familia de divisores en X_g parametrizados continuamente por el conjunto de Cantor, es decir, para cada $t_0 \in K$ fijo, $D(t_0)$ es un divisor en X_g.

Nota 2.6.9. Consideremos el punto $p_0 = (z_0, t_0) \in \mathcal{L}_g$. Por la proposición anterior la transformación asociada al punto p_0 es la función dada por

$$f(t) = \begin{cases} z \in Div(X_g), & \text{si } t = t_0 \\ 0 \in Div(X_g), & \text{de otra forma.} \end{cases} \tag{58}$$

2.6.2. Divisores principales y funciones meroformas tangenciales.

Definición 2.6.10. Si $D(t)$ es un divisor en la laminación producto $\mathcal{L}_g$ tal que su restricción a cada una de las hojas $X_g \times \{t\}$ es un divisor principal, entonces será llamado *un divisor principal en la laminación producto* $\mathcal{L}_g$.

La manera en la que debemos pensar a un divisor principal $D(t)$ en la laminación producto es como una familia de divisores principales en la superficie de Riemann compacta X_g parametrizados continuamente por el conjunto de Cantor, es decir, para cada $t \in K$ fijo $D(t)$ es un divisor principal en X_g.

Observemos que cualquier divisor principal en $\mathcal{L}_g$ tiene grado tangencial cero. En otras palabras, si denotamos por $DivP(\mathcal{L}_g)$ al *conjunto de los divisores principales en la laminación* $\mathcal{L}_g$ entonces, $deg_T(DivP(\mathcal{L}_g)) = 0$ y $DivP(\mathcal{L}_g) \subset Div_0(\mathcal{L}_g)$.

Restringuiendo la definición de suma de divisores al conjunto $DivP(\mathcal{L}_g)$ tenemos que este conjunto es un subgrupo del grupo abeliano $Div(\mathcal{L}_g)$. En otras palabras, la suma de divisores principales en $\mathcal{L}_g$ es la suma de divisores principales hoja a hoja de manera continua. A dicho grupo lo denotaremos por $DivP(\mathcal{L}_g)$.

Proposición 2.6.11. *El grupo de divisores principales de la laminación producto $\mathcal{L}_g$ es canónicamente isomorfo al grupo de las funciones continuas del conjunto de Cantor en el grupo de los divisores principales de la superficie de Riemann compacta X_g.*

Demostración. Este resultado es una consecuencia de las definiciones de divisor principal y suma de divisores principales en la laminación producto $\mathcal{L}_g$.

∎

2.6.2.1. *Los divisores principales vistos como divisores de funciones meromorfas tangenciales.* Recordemos que *una función meromorfa tangencial en la laminación producto* $\mathcal{L}_g$ es una función continua tangencial $f : \mathcal{L}_g \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ tal que su restricción a cada una de las hojas de la laminación producto $\mathcal{L}_g$ es meromorfa (Ver la definición 1.3.2 del capitulo 1.) En otras palabras, a una función meromorfa tangencial en $\mathcal{L}_g$ la podemos pensar como una familia continua de funciones meromorfas en X_g parametrizadas por el conjunto de Cantor.

Denotaremos por $\mathcal{M}_T(\mathcal{L}_g)$ al conjunto de todas las funciones meromorfas tangenciales en la laminación producto $\mathcal{L}_g$ y por $\mathcal{C}^0(K, \mathcal{M}(X_g))$ al conjunto de las funciones continuas del conjunto de Cantor en el espacio de las funciones meromorfas de la superficie de Riemann compacta X_g.

Proposición 2.6.12. *El conjunto $\mathcal{M}_T(\mathcal{L}_g)$ se identifica canónicamente con el conjunto $\mathcal{C}^0(K, \mathcal{M}(X_g))$.*

El siguiente resultado es el análogo al teorma clásico de Rouche en el caso de las laminaciones producto (comparar con [**18**]).

Lema 2.6.13. *Sea f una función tangencialmente meromorfa definida en $\mathcal{L}_g$. Supongamos que f tiene un cero (resp. un polo) en $p_0 = (z_0, t_0)$ de orden n. Entonces, existe un conjunto abierto $U \in K$ tal que para cualquier $t \in U$, $f(z_0, t)$ tiene un cero (resp. un polo) de orden n.*

Demostración. Sea Ω una region en X_g. Sea γ una curva cerrada homóloga a cero en Ω tal que $z_0 \notin \gamma$. Recordemos que para cada $t_0, t \in K$ $f_{t_0}(z) := f(z, t_0)$ y $f_t(z) := f(z, t)$ son transformaciones holomorfas. Consideremos el conjunto abierto $U \subset K$ tal que $|f_{t_0}(z) - f_t(z)| < |f_{t_0}(z)|$ para toda z en γ. Por el teorema clásico de Rouche f_t and f_{t_0} tiene el mismo número de ceros (polos) encerrados por γ.

∎

Notemos que el número de ceros (resp. polos) en cualquier hoja de $\mathcal{L}_g$ es finito, ya que cada hoja es holomorfamente equivalente a X_g. Así tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.6.14. *Sea f una función tangencialmente meromorfa en $\mathcal{L}_g$ y L cualquier hoja en $\mathcal{L}_g$. Entonces, el conjunto $(f^{-1}(0) \bigcap L)$ (resp. $(f^{-1}(\infty) \bigcap L)$ tiene únicamente un número finito de elementos.*

Dada una función, f, meromorfa tangencial en $\mathcal{L}_g$, definimos *el divisor de ceros de f*, como:

$$(f)_0 = \{(z, t) \in \mathcal{L}_g : f_t(z) = 0\}.$$

Así como *el divisor de polos de f*:

$$(f)_\infty = \{(z, t) \in \mathcal{L}_g : f_t(z) = \infty\}.$$

Con lo cual definimos *el divisor de f* como

$$(f) = (f)_0 - (f)_\infty.$$

Notemos que $(f)_0 = \bigsqcup_{t\in K}(f_t)_0$ y que $(f)_\infty = \bigsqcup_{t\in K}(f_t)_\infty$.

Observemos que con estas definiciones tenemos que cualquier divisor de una función meromorfa tangencial en la laminación producto $\mathcal{L}_g$, $f \in \mathcal{M}(\mathcal{L}_g)$, es un divisor principal en la laminación producto $\mathcal{L}_g$.

Proposición 2.6.15. *Un divisor, $D(t)$, en la laminación producto $\mathcal{L}_g$, es principal si y sólo si existe una función meromorfa tangencial en la laminación $\mathcal{L}_g$ tal que*

$$(f) = D(t).$$

Demostración. Como ya observamos anteriormente el divisor de una función meromorfa tangencial es un divisor principal. Así sólo resta probar que si $D(t)$ es un divisor principal entonces existe una función meromorfa tangencial que lo realiza.
Sea $D(t)$ un divisor principal en la laminación $\mathcal{L}_g$, entonces en cada hoja de $\mathcal{L}_g$ existe una función meromorfa f_t que realiza a $D(t)$ en dicha hoja, consideremos la familia de funciones meromorfas $\{f_t\}_{t\in K}$ tal que para cada t_0, $(f_{t_0}) = D(t_0)$. Como $t \in K$ dicha familia es continua y por lo tanto $f(z,t) = f_t(z)$ resuelve el problema.

■

Definición 2.6.16. Un divisor $D(t)$ en la laminación producto $\mathcal{L}_g$ de grado tangencial constante $d \in \mathbb{N}^+$, será llamado *un divisores efectivo (o positivos) de grado tangencial constante d en la laminación producto $\mathcal{L}_g$.*

Proposición 2.6.17. *El grupo de divisores de la laminación producto $\mathcal{L}_g$ está formado por una unión disjunta de conjuntos de divisores de grado tangencial constante d para todo $d \in \mathbb{Z}$, es decir,*

$$Div(\mathcal{L}_g) = \bigsqcup_{d\in\mathbb{Z}} Div_d(\mathcal{L}_g).$$

2.6.2.2. *El grado total de divisores.* Recordemos que *un grupo profinito* es un grupo topológico Hausdorff, compacto, abeliano y totalmente disconexo (ver [**38**]). Si además este grupo es perfecto entonces es homeomorfo al conjunto de Cantor. En esta sección pensaremos al conjunto de Cantor como un grupo profinito. Así, existe de manera natural *la medida de Haar, μ.* Con estas suposiciones consideremos la función continua Deg_μ : $Div(\mathcal{L}_g) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$D \mapsto \int_K deg_T(D)d\mu = \sum_{i=1}^{m} d_i\mu(U_i), \tag{59}$$

donde los d_i son enteros y los $\{U_i(D)\}_{i=1}^m$ son los abiertos de la cubierta abierta de K tales que $deg_T(U_i) = d_i$ como se vio en la observación 2.6.5.

La aditividad de las integrales y el lema 2.6.3 implican el sigueinte resultado.

Lema 2.6.18. *Para cualquier par D_1, D_2 de divisores en $\mathcal{L}_g$, la igualdad $Deg_\mu(D_1 + D_2) = Deg_\mu(D_1) + Deg_\mu(D_2)$ se da.*

Definición 2.6.19. *El grado total de un divisor $D(t)$ en $\mathcal{L}_g$* esta dado $Deg_\mu(D(t))$.

2.7. El grupo de Picard de las laminaciones producto.

En vista de nuestro estudio y descripción de los divisores en $\mathcal{L}_g$ queremos hacer un estudio detallado de los haces lineales holomorfos tangenciales, los cuales son compatibles con lo que hemos llamado divisor, así como la correspondencia que existe entre estos elementos.
De la sección anterior sabemos que el grupo de divisores principales en la laminación producto $\mathcal{L}_g$ es un subgrupo normal del grupo de los divisores de grado tangencial cero en la laminación $\mathcal{L}_g$, es decir, $DivP(\mathcal{L}_g) \trianglelefteq Div_0(\mathcal{L}_g)$. Tambien, que el grupo de divisores de grado tangencial cero en la laminación $\mathcal{L}_g$ es un subgrupo normal del grupo de divisores en la laminación $\mathcal{L}_g$, es decir, $Div_0(\mathcal{L}_g) \trianglelefteq Div(\mathcal{L}_g)$. En analogía a la definición del grupo de Picard clásica (ver sección 1.6 del capitulo 1) hacemos la siguiente definición:

Definición 2.7.1. Al grupo abeliano

$$Div(\mathcal{L}_g)/DivP(\mathcal{L}_g) \tag{60}$$

lo llamaremos *el grupo de Picard de la laminación producto* $\mathcal{L}_g$ y lo denotaremos por $Pic(\mathcal{L}_g)$.

Nota 2.7.2. En el grupo $Pic(\mathcal{L}_g)$ la operación de grupo está dada hoja a hoja de manera continua, es decir, si $[D_1(t)]$, $[D_2(t)] \in Pic(\mathcal{L}_g)$ entonces

$$[D_1(t)] + [D_2(t)] = [D_1(t) + D_2(t)].$$

Observación 2.7.3. De la proposición 2.6.17 anterior, tenemos que el grupo de Picard de la laminación producto $\mathcal{L}_g$ está formado por la unión disjunta de los conjuntos $Div_d(\mathcal{L}_g)/DivP(\mathcal{L}_g)$, es decir,

$$Pic(\mathcal{L}_g) = \bigsqcup_{d \in \mathbb{Z}} Div_d(\mathcal{L}_g)/DivP(\mathcal{L}_g).$$

Proposición 2.7.4. *El grupo de Picard de la laminación producto $\mathcal{L}_g$ se identifica canónicamente con el grupo de las funciones continuas del conjunto de Cantor en el grupo de Picard de la superficie de Riemann compacta X_g, es decir,*

$$Pic(\mathcal{L}_g) \cong \mathcal{C}^0(K, Div(X_g)/DivP(X_g)).$$

Corolario 2.7.5.

$$Pic(\mathcal{L}_g) \cong \mathcal{C}^0(K, \bigsqcup_{d \in \mathbb{Z}} Div_d(X_g)/DivP(X_g)).$$

Ahora consideremos el conjunto de todos los haces lineales holomorfos tangenciales sobre $\mathcal{L}_g$. Consideremos la operación de producto tensorial en este conjunto, es decir, el producto tensorial de haces hoja a hoja el cual varia de manera continua. Explicitamente, si $L_1, L_2 \in Pic(\mathcal{L}_g)$ entonces

$$L_1 \otimes L_2 = L_1(t) \otimes L_2(t), \tag{61}$$

donde para cada $t \in K$ fijo, $L_1(t) \otimes L_2(t) \in Pic(X_g)$.

Si consideramos a $Pic(X_g)$ como el grupo de todos los haces lineales holomorfos sobre la superficie de Riemann compacta X_g y hacemos la identificación entre $Pic(X_g)$ y $Div(X_g)/DivP(X_g)$, entonces, por la proposición 2.7.4 tenemos la siguiente caracterización equivalente del grupo de Picard de la laminación producto $\mathcal{L}_g$.

Proposición 2.7.6. *El grupo de Picard de la laminación producto $\mathcal{L}_g$ se identifica canónicamente con el grupo de las funciones continuas del conjunto de Cantor en el grupo de Picard de la superficie de Riemann compacta X_g, es decir,*

$$Pic(\mathcal{L}_g) \cong \mathcal{C}^0(K, Pic(X_g)).$$

Definición 2.7.7. El grupo de todos los haces lineales holomorfos tangenciales en la laminación producto $\mathcal{L}_g$ (modulo equivalencia holomorfa tangencial) será llamado *el grupo de Picard de la laminación producto.*

Así, podemos pensar a $Pic(\mathcal{L}_g)$ como el grupo de los haces lineales holomorfos tangenciales en $\mathcal{L}_g$ (modulo isomorfismos tangenciales).

2.7.0.3. *Clase de Chern Tangencial.* Haciendo refencia a la sección 1.6 del capitulo 1 hacemos las siguientes definiciones.
Consideremos un haz lineal holomorfo tangencial, L, en la laminación producto $\mathcal{L}_g$ y un número entero d.

Definición 2.7.8. *La clase de Chern tangencial del haz lineal holomorfo tangencial* L, es la función $c_{1T} : K \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que para cada $t \in K$, $c_{1T}(t)$ es la clase de Chern del haz lineal holomorfo $L(t)$ en la superficie X_g, es decir,

$$c_{1T}(t) = c_1(L(t)) \; \forall t \in K.$$

En otras palabras, es la función continua que asocia la clase de Chern usual para haces lineales holomorfos en una X_g hoja a hoja. Usando los mismos argumentos que en la sección de grado tangencial de divisores tenemos el siguiente resultado.

Lema 2.7.9. *Para cualquier haz lineal holomorfo tangencial L en $\mathcal{L}_g$ la clase de Chern tangencial de L es una función localmente constante del conjunto de Cantor en $\mathbb{Z}$. Más* *aun, la igualdad* $c_{1T}(L_1+L_2) = c_{1T}(L_1)+c_{1T}(L_2)$ *se da para cualquier par* L_1, L_2 *de haces lineales holomorfos tangenciales.*

Sea d un número entero. Un haz lineal holomorfo L en $\mathcal{L}_g$ tal que su clase de Chern tangencial sea constante d, será llamado *un haz lineal holomorfo con clase de Chern tangencial constante* d.

Denotaremos por $Pic_d(\mathcal{L}_g)$ *al conjunto de todos los haces lineales holomorfos tangenciales que tienen clase de Chern tangencial* d *en* $\mathcal{L}_g$.

Proposición 2.7.10. *Para cada* $d \in \mathbb{Z}$, *el conjunto* $Pic_d(\mathcal{L}_g)$ *se identifica canónicamente con el conjunto de las funciones continuas del conjunto de Cantor en el conjunto de los haces lineales holomorfos con clase Chern* d *sobre* X_g, *es decir,*

$$Pic_d(\mathcal{L}_g) \cong \mathcal{C}^0(K, Pic_d(X_g)).$$

Observemos que $Pic_0(\mathcal{L}_g)$ es un grupo abeliano con la operación definida por la ecuación 61.

Proposición 2.7.11. *Existe una correspondencia canónico entre* $Pic_0(\mathcal{L}_g)$ *y* $Pic_{2-2g}(\mathcal{L}_g)$.

Demostración. Consideremos al haz lineal holomorfo tangencial canónico $F\mathcal{L}_g^*$. La aplicación $\varphi : Pic_0(\mathcal{L}_g) \longrightarrow Pic_{2-2g}(\mathcal{L}_g)$ dada por

$$\varphi(L) = F\mathcal{L}_g^* \otimes L,$$

define la correspondencia buscada.

■

Proposición 2.7.12. *Para cada* $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 2-2g\}$ *existe una correspondencia no canónico entre* $Pic_0(\mathcal{L}_g)$ *y* $Pic_d(\mathcal{L}_g)$.

Demostración. Escogamos a, L_d, cualquier haz lineal holomorfo tangencial con clase de Chern tangencial constante d, entonces, la aplicación $\varphi : Pic_0(\mathcal{L}_g) \longrightarrow Pic_d(\mathcal{L}_g)$ dada por

$$\varphi(L) = L \otimes L_d,$$

es una correspondencia.

■

2.7.0.4. *Clase de Chern total.* Consideremos nuevamente al conjunnto de Cantor como un grupo profinito perfecto (ver sección grado total de divisores). Así, tenemos de manera natural la medida de Haar μ en el conjunto de Cantor. Consideremos la transformación $c_1 : Pic(\mathcal{L}_g) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$D \mapsto \int_K c_{1T}(D) d\mu = \sum_{i=1}^{m} d_i \mu(U_i), \tag{62}$$

donde los d_i son enteros dados por c_{1T} y $\{U_i(D)\}_{i=1}^{m}$ es la cubierta abierta de K tal que $c_{1T}(U_i) = d_i$ (ver ecuación (57)).

La aditividad de la integral junto con el lema 2.7.9 implican el siguiente resultado.

Lema 2.7.13. *Para cualquier par L_1, L_2 de haces lineales holomorfos tangenciales en $Pic(\mathcal{L}_g)$, la igualdad $c_1(L_1 + L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2)$ se da.*

De este lema tenemos que la transformación c_1 aplicada al haz lineal holomorfo tangencial L en $\mathcal{L}_g$ será llamado *la clase de Chern total de haz lineal holomorfo tangencial L.*

2.7.1. La relación entre la Jacobiana y el grupo de Picard. De la proposición 2.7.10 tenemos que $Pic_0(\mathcal{L}_g) \cong \mathcal{C}^0(K, Pic_0(X_g))$ y puesto que la variedad $Pic_0(X_g)$ es isomorfa a la variedad $Jac(X_g)$ como toros complejos, de hecho como variedades abelianas principalmente polarizadas (ver la proposición 1.6.7 del capitulo 1), entonces, tenemos el isomorfismo natural

$$\mathcal{C}^0(K, Pic_0(X_g)) \cong \mathcal{C}^0(K, Jac(X_g)).$$

Usando el isomorfismo natural anterior y el teorema 2.4.8 tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.7.14. *La Jacobiana de la laminación producto, $Jac(\mathcal{L}_g)$ es naturalmente isomorfa al grupo de los haces lineales holomorfos tangenciales con clase de Chern tangencial constante 0 en $\mathcal{L}_g$, es decir,*

$$Jac(\mathcal{L}_g) \cong Pic_0(\mathcal{L}_g).$$

2.8. Los conjuntos W_k en $Jac(\mathcal{L}_g)$ y en $Pic(\mathcal{L}_g)$.

2.8.1. Los subconjuntos $W_k(\mathcal{L}_g)$ en $Jac(\mathcal{L}_g)$. Consideremos la transformación $\widehat{\varphi} : Div(\mathcal{L}_g) \longrightarrow Jac(\mathcal{L}_g)$ dada por:

$$\widehat{\varphi}(D(t)) = (\varphi \circ D)(t),$$

donde φ es el morfismo de Jacobi clásico en la superficie de Riemann compacta X_g (ver sección 1.7 del capitulo 1.

Notemos que la transformación $\widehat{\varphi}$ es un morfismo de grupos. Así, la transformación $\widehat{\varphi}$ será llamada *el morfismo de Jacobi en la laminación producto $\mathcal{L}_g$.*

observemos que la imagen de un punto $p_0 \in \mathcal{L}_g$ bajo la transformación de Abel-Jacobi $\widehat{A}$ en la laminación producto (ver sección 2.5) es la misma que la imagen del divisor $(p_0) \in Div(\mathcal{L}_g)$ bajo el morfismo de Jacobi en la laminación producto. En efecto, ya que si $p_0 = (z_0, t_0)$ entonces

$$\widehat{A}(p_0) = \begin{cases} A(z_0) & \text{si } t = t_0, \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad \text{y por otro lado } (p_0) = \begin{cases} (z_0) & \text{si } t = t_0, \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

por otro lado sabemos que en el caso clásico se satisface la igualdad $A(z_0) = \varphi((z_0))$.

Definición 2.8.1. La imagen de la laminación producto $\mathcal{L}_g$ bajo la transformación de Abel-Jacobi en la laminación producto, $\widehat{A}$, será llamada *el subconjunto $W_1(\mathcal{L}_g)$ de la Jacobiana de la laminación producto $\mathcal{L}_g$*, es decir,

$$W_1(\mathcal{L}_g) = \widehat{A}(\mathcal{L}_g) \subset Jac(\mathcal{L}_g).$$

Nota 2.8.2. Por la observación 2.5.4 de la sección 2.5 tenemos que el subconjunto $W_1(\mathcal{L}_g)$ se identifica canónicamente con el conjunto de las funciones continuas del conjunto de Cantor en el subconjunto clásico $W_1(X_g)$ de la Jacobiana de X_g (ver [**17**]), es decir,

$$W_1(\mathcal{L}_g) \cong \mathcal{C}^0(K, W_1(X_g)).$$

Sea $k \in \mathbb{N}^+$. Consideremos el conjunto de los divisores positivos de grado tangencial constante k en la laminación producto $\mathcal{L}_g$, $Div_k(\mathcal{L}_g)$ (ver sección 2.6).

Definición 2.8.3. Para cada $k \in \mathbb{N}$, la imagen bajo el morfismo de Abel-Jacobi en la laminación producto del conjunto de divisores positivos de grado tangencial constante k será llamada *el subconjunto $W_k(\mathcal{L}_g)$ de la Jacobiana de la laminación producto $\mathcal{L}_g$*, es decir,

$$W_k(\mathcal{L}_g) = \widehat{\varphi}(Div_k(\mathcal{L}_g)).$$

Usando los mismos argummentos que en la nota anterior tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.8.4. *El conjunto $W_k(\mathcal{L}_g)$ se identifica canónicamente con el conjunto de las funciones continuas del conjunto de Cantor en el subconjunto clásico $W_k(X_g)$ en X_g, es decir,*

$$W_k(\mathcal{L}_g) \cong \mathcal{C}^0(K, W_k(X_g)).$$

Nota 2.8.5. Para toda $k \in \mathbb{N}^+$ se satisface que $W_k(\mathcal{L}_g) \subset W_{k+1}(\mathcal{L}_g)$. En efecto, ya que se satisface $W_k(X_g) \subset W_{k+1}(X_g)$ (ver sección 1.7 del capitulo 1).

Proposición 2.8.6. *Para toda $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq g$ se satisface la igualdad*

$$W_k(\mathcal{L}_g) = W_g(\mathcal{L}_g).$$

Demostración. Es bien sabido (ver [**17**] que para $k \geq g > 0$ se da la igualdad $W_k(X_g) = W_g(X_g)$. Así, tenemos $\mathcal{C}^0(K, W_k(X_g)) = \mathcal{C}^0(K, W_g(X_g))$ con lo cual concluimos la prueba.

■

Nota 2.8.7. De la definición de nuestros conjuntos $W_k(\mathcal{L})$ es claro que no se tiene un análogo al teorema de inversión de Jacobi, ya que,

$$W_g(\mathcal{L}_g) \subsetneq Jac(\mathcal{L}_g).$$

2.8.2. Los conjuntos $W_k(\mathcal{L}_g)$ en $Pic_0(\mathcal{L}_g)$. *Los subconjuntos $W_k(\mathcal{L}_g)$ vistos como subconjuntos de $Pic_0(\mathcal{L}_g)$* consisten precisamente de todos los haces lineales holomórfos tangenciales $L \in Pic_0(\mathcal{L}_g)$ que pueden ser escritos en la forma

$$L(t) = L_{(z_1,t)} \dots L_{(z_r,t)} L^{-k}_{(z_0,t)}$$

para alguna familia de puntos $\{(z_0,t),(z_1,t),\dots,(z_k,t)\}_{t\in K}$ en X_g parametrizados continuamente por el conjunto de Cantor, es decir, para cada $t \in K$ fijo consideramos los haces lineales holomorfos $L(t)L^{-k}_{(z_0,t)}$ en X_g que tienen una sección holomorfa no trivial, de donde se sigue que para cada $t \in K$ fijo estamos considerando el conjunto

$$\{L(t) \in Pic(X_g) : \ \dim \Gamma(X_g, \mathcal{O}(L(t)L_{(z,t)^{-k}})) \geq 1\},$$

(comparar con la sección 1.7).

De todo lo anterior tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.8.8. *Para cada $k \in \mathbb{N}^+$, el subconjunto $W_k(\mathcal{L}_g)$ se identifica canónicamente con el conjunto de funciones continuas del conjunto de Cantor en la subvariedad $W_k(X_g)$ de $Pic(X_g)$, es decir,*

$$W_k(\mathcal{L}_g) \cong \mathcal{C}^0(K, W_k(X_g)).$$

Por simplicidad definimos $W_0(\mathcal{L}) = 0 \in Pic(\mathcal{L}_g)$.

2.8.3. Los subconjuntos singulares de $W_k(\mathcal{L}_g)$. Notemos que la imagen de la restricción del morfismo de Jacobi en la laminación producto, $\widehat{\varphi}$, al conjunto de los divisores de grado tangencial d es lo mismo que $\mathcal{C}^0(K, X_g^{(d)})$. En efecto, ya que por definición $\widehat{\varphi}(D(t)) = (\varphi \circ D)(t)$. Lo anterior motiva las definiciones siguientes.

Definición 2.8.9. *El k-producto de la laminación producto $\mathcal{L}_g$* será el conjunto:

$$(\mathcal{L}_g)^k = \mathcal{C}^0(K, X_g^k).$$

Definición 2.8.10. *El k-producto simétrico de la laminación producto $\mathcal{L}_g$* será el conjunto:

$$Sim(\mathcal{L}_g) = \mathcal{C}^0(K, X_g^{(k)}).$$

Consideremos a los subconjuntos $W_k(\mathcal{L}_g)$ de $Pic_0(\mathcal{L}_g)$ (ver proposición 2.8.8).

Definición 2.8.11. *Los subconjuntos, $W_k^\nu(\mathcal{L}_g)$, de divisores positivos especiales para $\nu \geq 1$, en la laminación producto $\mathcal{L}_g$* estan dados por

$$W_k^\nu(\mathcal{L}_g) = \mathcal{C}^0(K, W_k^\nu(X_g)),$$

donde los conjuntos $W_k^\nu(X_g)$ son las subvariedades de divisores positivos especiales para $\nu \geq 1$ en X_g (ver [**17**]).

Observemos que se satisface

$$W_k(\mathcal{L}_g) = W_k^1(\mathcal{L}_g) \subset W_k^2(\mathcal{L}_g) \subset \ldots W_k^{k+1}(\mathcal{L}_g) = \emptyset.$$

Llamaremos a la imagen inversa de $W_k^\nu(\mathcal{L}_g)$ bajo el morfismo de Jacobi $\widehat{\varphi}$ *el subconjunto de divisores positivos especiales para $\nu \geq 1$ en la laminación producto $\mathcal{L}_g$*, es decir

$$G_k^\nu(\mathcal{L}_g) = \widehat{\varphi}^{-1}(W_k^\nu(\mathcal{L}_g)) \subset \mathcal{C}^0(K, X_g^{(k)}).$$

Nota 2.8.12. Si consideremos a $f \in (\mathcal{L}_g)^k = \mathcal{C}^0(K, X_g^{(k)})$, entonces $\widehat{\varphi}(f) \in Jac(\mathcal{L}_g)$ y es un elemento de $W_k^\nu(\mathcal{L}_g) \subset Pic_0(\mathcal{L}_g)$ si los haces lineales holomorfos tangenciales $L(t) = L_{(z_1,t)} \ldots L_{(z_r,t)} L_{(z_0,t)}^{-k}$ asociados satisfancen que $\Gamma(X_g, \mathcal{O}(L(t)L_{(z,t)^{-k}})) \geq \nu\}$.

Por esta nota y las definiciones anteriores tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.8.13. *El conjunto de divisores positivos especiales para $\nu \geq 1$ en $Div(\mathcal{L}_g)$ se identifica con el conjunto $\mathcal{C}^0(K, G_k^\nu(X_g))$, es decir,*

$$G_k^\nu(\mathcal{L}_g) = \mathcal{C}^0(K, G_k^\nu(X_g)).$$

2.9. Laminaciones producto con estructura variable.

Parece razonable desarollar una *teoría moduli* para laminaciones producto. En esta sección damos una pequeñia introducción al tema.

Consideremos dos laminaciones producto $\mathcal{L}_g = X_g \times K$ y $\mathcal{L}'_g = X'_g \times K$ con atlas dados por X_g y X'_g respectivamente.
Diremos que *la laminación $\mathcal{L}_g$ y la laminación $\mathcal{L}'_g$ son isomorfas (o equivalentes)* si existe un biholomorfismo tangencial entre ellas. Así, *el espacio moduli de laminaciones producto*, $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_g)$, es el conjunto de todas las laminaciones producto salvo isomorfismos.

Consideremos el conjunto $\{graph(f) | f \in \mathcal{C}^0(K, \mathfrak{M}_g)\}$ de las gráfica s de todas las transformaciones continuas de K en el espacio moduli de superficies de Riemann compactas de género g. Notemos que hay una correspondencia canónica entre $\{graph(f) | f \in \mathcal{C}^0(K, \mathfrak{M}_g)\}$ y $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_g)$.

La nota anterior y el hecho que $\{graph(f) | f \in \mathcal{C}^0(K, \mathfrak{M}_g)\}$ es equivalente a pensar en el conjunto de las transformaciones continuas del conjunto de Cantor en $\mathfrak{M}_g$ implican el siguiente resultado.

Proposición 2.9.1. *El espacio moduli de laminaciones producto puede ser identificado canónicamente con el conjunto de las transformaciones continuas del conjunto de Cantor en el espacio moduli de superficies de Riemann compactas de genero g.*

Definición 2.9.2. *Una laminación producto con estructura variable* es un elemento de $\mathfrak{M}(\mathcal{L}_g)$.

En otras palabras, cualquier $\tau \in \mathcal{C}^0(K, \mathfrak{M}_g)$ determina una laminación producto con estructura variable continua dada por τ.

3

La Jacobiana de las laminaciones universales algebraicas.

No trates de seguir los pasos de los hombres sabios del pasado; busca lo que ellos buscaron. (Basho)

3.1. La Jacobiana.

3.1.1. Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico). Consideremos dos curvas elípticas $(\mathbb{E}_\tau, p_\tau)$ y $(\mathbb{E}_{\tau'}, p_{\tau'})$ con puntos marcados p_τ y $p_{\tau'}$ respectivamente, una transformación holomorfa $f : (\mathbb{E}_{\tau'}, p_{\tau'}) \longrightarrow (\mathbb{E}_\tau, p_\tau)$ cubriente, no ramificada finita a uno entre las dos curvas elípticas tal que manda el punto privilegiado de la primer curva elíptica en el punto privilegiado de la segunda curva elíptica. Consideremos las transformaciones de Abel-Jacobi $A_{\tau'} : (\mathbb{E}_{\tau'}, p_{\tau'}) \longrightarrow Jac(\mathbb{E}_{\tau'}, p_{\tau'})$ y $A_\tau : (\mathbb{E}_\tau, p_\tau) \longrightarrow Jac(\mathbb{E}_\tau, p_\tau)$ respectivamente. Es bien sabido (ver [**13, 16**]) que las transformaciones de Abel-Jacobi no sólo son un encaje sino isomorfismos analíticos de grupos. También es bien sabido (ver [**14**]) que existe una transformación $\mathbb{C}$-lineal, $\widetilde{C} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, tal que induce un epimorfismo analítico, $C_{\tau,\tau'}$, entre los grupos $Jac(\mathbb{E}_{\tau'}, p_{\tau'})$ y $Jac(\mathbb{E}_\tau, p_\tau)$ y hace al diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{E}_{\tau'}, p_{\tau'}) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{E}_\tau, p_\tau) \\ {\scriptstyle A_{\tau'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A_\tau} \\ Jac(\mathbb{E}_{\tau'}, p_{\tau'}) & \xrightarrow{C_{\tau\tau'}} & Jac(\mathbb{E}_\tau, p_\tau) \end{array} \tag{63}$$

conmutativo.

Consideremos al conjunto dirigido I y al sistema inverso $\{(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)}), f_{H,H'}\}_{H,H'\in I}$ (ver ejemplo 1.2.6). Para cada una de las curvas elípticas marcadas, $(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)})$ consideremos su variedad Jacobiana, $Jac(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)})$ y las transformaciones $C_{\tau(H)\tau(H')}$ entre dichas variedades Jacobianas. Estas transformaciones $C_{\tau(H)\tau(H')}$ existen gracias al diagrama conmutativo 63 anterior. Así, tenemos el siguiente resultado:

Lema 3.1.1. *El conjunto* $\{Jac(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)}); C_{\tau(H)\tau(H')}\}_{H,H'\in I}$ *forma un sistema inverso de grupos topológicos abelianos (de hecho, variedades Abelianas).*

Demostración. Es claro que $\{Jac(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)})\}_{H\in I}$ es una familia de grupos topológicos abelianos (variedades abelianas) parametrizadas por I; por otro lado $\{C_{\tau(H)\tau(H')} : Jac(\mathbb{E}_{\tau(H')}, p_{\tau(H')}) \longrightarrow Jac(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)})\}_{H,H'\in I}$ es una familia de transformaciones continuas (epimorfismos analíticos) tales que: $C_{\tau(H)\tau(H)} = Id_{\tau(H)}$ para cada $H \in I$. Así, sólo resta verificar que para cualesquiera dos $H, H' \in I$ existe un $H'' \in I$ que satisface la relación:

$$C_{\tau(H)\tau(H'')} = C_{\tau(H)\tau(H')} \circ C_{\tau(H')\tau(H'')}.$$

Dados H y H' en I existe $H'' \in I$ tal que $H' \prec H''$ y $H \prec H''$, así como transformaciones $f_{\tau(H)\tau(H'')}$ y $f_{\tau(H')\tau(H'')}$ que satisfacen la relación $f_{\tau(H)\tau(H'')} = f_{\tau(H)\tau(H')} \circ f_{\tau(H')\tau(H'')}$ para algún $f_{\tau(H)\tau(H'')}$, todo ello por estar en el sistema inverso que determina a la laminación universal algebraica parabólica. Así, asociado a $f_{\tau(H)\tau(H')}$ existe $C_{\tau(H)\tau(H')}$. Puesto que $C_{\tau(H)\tau(H'')}$, $C_{\tau(H')\tau(H'')}$ y $C_{\tau(H)\tau(H')}$ son sobreyectivos, se sigue que la composición $C_{\tau(H)\tau(H')} \circ C_{\tau(H')\tau(H'')}$ está bien definida y se da la igualdad $C_{\tau(H)\tau(H'')} = C_{\tau(H)\tau(H')} \circ C_{\tau(H')\tau(H'')}$.

■

El siguiente resultado es una consecuencia del lema anterior.

Proposición 3.1.2. *El límite inverso*

$$(Jac(\widehat{\mathbb{E}_\tau, p_\tau}), \widehat{C}_H) = \varprojlim_{H,H'\in I} \{Jac(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)}), C_{\tau(H)\tau(H')}\}$$

del sistema inverso $\{Jac(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)})\}_{H\in I}$ *de grupos topológicos existe.*

Al límite inverso anterior lo llamaremos *la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico)* y será denotado simplemente por $Jac(\mathbb{E}_\tau)$.

Es bien conocido (ver [**37**]) que el límite inverso de grupos topológicos abelianos, compactos y Hausdorff es un grupo topológico abeliano, compacto y Hausdorff.

Corolario 3.1.3. *La Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico),* $Jac(\widehat{\mathbb{E}}_\tau, \widehat{p}_\tau)$, *es un grupo topológico abeliano, compacto y Hausdorff.*

Nota 3.1.4. D. Mumford (ver [**35**],cap.4 pag. 66) define una torre de recubrimientos por isogenias (de grado primo a la caracteristica del campo $\mathbb{K}$) sobre una variedad abeliana, X (definida sobre el campo $\mathbb{K}$), obteniendo que este límite inverso tiene la estructura de un $\mathbb{K}$-esquema propio. Todo lo anterior en nuestro caso se reduce a tomar $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y considerar cubrientes o recubrimientos holomorfos finitos no ramificados, con lo cual se puede ver que la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico) tiene la estructura de un $\mathbb{C}$-esquema propio.

Nota 3.1.5. Si consideramos a la familia $\{A_{\tau(H)}(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)}) \subset Jac(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)})\}_{H\in I}$, así como a la familia de los respectivos epimorfismos analíticos
$\{C_{|\tau(H),\tau(H')} : A_{\tau(H')}(\mathbb{E}_{\tau(H')}, p_\tau) \longrightarrow A_{\tau(H)}(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_\tau)\}$. Obtenemos un nuevo sistema inverso y por lo tanto el límite inverso:

$$\varprojlim_{H,H'\in I} \{A_{\tau(H)}(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)}), C_{|\tau(H),\tau(H')}\}.$$

Recordemos (ver definición 1.3.6) que por un encaje holomorfo tangencial ψ entre dos espacios foliados M y N, cuyas hojas tienen estructura compleja, estamos entendiendo una transformación continua $\psi : M \longrightarrow N$ la cual lleva hojas de M en hojas de N holomorfamente.

Teorema 3.1.6. (**Abel-Jacobi para la laminación universal algebraica de tipo elíptico**) *Existe un encaje holomorfo tangencial canónico, $\widehat{A}$, de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico) en su Jacobiana.*

Demostración. Sea $\widehat{p} = (z_0, z_H, \ldots, z_{H'}, \ldots) \in \mathbb{E}_\tau$. Definimos la aplicación $\widehat{A} : \hat{\mathbb{E}}_\tau \longrightarrow Jac(\hat{\mathbb{E}}_\tau)$ como $A(\widehat{p}) = (A_\tau(z_0), A_{\tau(H)}(z_H), \ldots, A_{\tau(H')}(z_{H'}), \ldots)$. La cual esta bien definida ya que el diagrama 63 es conmutativo a cada nivel del límite inverso. Del hecho que $A_{\tau(H)}(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_\tau)$ es analíticamente isomorfo a $(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_\tau)$ para cada $H \in I$ se sigue que $\widehat{A}$ es un homeomorfismo (isomorfismo de grupos topologicos). Más aun, del hecho que los epimorfismos analíticos $C_{\tau(H')\tau(H)}$ estan construidos para que a cada nivel los diagramas conmuten se sigue que es una aplicación tangencialmente holomorfa.

∎

Definición 3.1.7. Llamaremos al encaje holomorfo tangencial canónico, $\widehat{A}$, *la transformación de Abel-Jacobi de tipo elíptico (o parabólico).*

Observemos que el límite inverso $\varprojlim_{H,H'\in I}\{A_{\tau(H)}(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)}), C_{|\tau(H),\tau(H')}\}$ es homeomorfo a la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico). Más aun, es igual a la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico), es decir,

$$(\hat{\mathbb{E}}_\tau, F_H) \cong Jac(\widehat{\mathbb{E}}_\tau, \widehat{p}_\tau) = \varprojlim_{H,H'\in I} \{A_{\tau(H)}(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)}), C_{|\tau(H),\tau(H')}\}.$$

Así, *la Jacobiana de laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico) es una laminacón minimal.*

Corolario 3.1.8. *La restricción de $\widehat{A}$ a cada una de las hoja L en $\hat{\mathbb{E}}_\tau$, es una transformación holomorfa. Más aun, el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} (\hat{\mathbb{E}}_\tau, \widehat{p}) & \xrightarrow{\widehat{A}} & Jac(\hat{\mathbb{E}}_\tau, \widehat{p}) \\ {\scriptstyle\pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ (\mathbb{E}_\tau, p_\tau) & \xrightarrow{A_\tau} & Jac(\mathbb{E}_\tau, p_\tau) \end{array}$$

es conmutativo.

Que el diagrama anteriro sea conmutativo se sigue de la definición (algebraica) del mapeo $\widehat{A}$.

3.1.2. Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico. Consideremos dos superficies de Riemann compactas de géneros $r \geq g \geq 2$, X_r y X_g respectivamente con un punto privilegiado o marcado $z_0 \in X_r$, así como una estructura hiperbólica fija para X_g compatible con su estructura compleja. Consideremos una transformación holomorfa $f : (X_r, z_0) \longrightarrow (X_g, f(z_0))$ cubriente, no ramificada finita a uno, así como también las transformaciones de Abel-Jacobi $A_r : (X_r, z_0) \longrightarrow (Jac(X_r), A_r(z_0))$ y $A_g : (X_g, f(z_0)) \longrightarrow (Jac(X_g), A(f(z_0)))$, donde $A_r(z_0)$ y $A(f(z_0))$ denotan al elemento identidad en el grupo Jac correspondiente. Por abuso de notación estos ya no los escribiremos.

Denotemos por T^g al toro complejo de dimensión g dado por $T^g = \mathbb{C}^g/\Lambda_g$ y por π_g a la proyección de $\mathbb{C}^g$ en T^g.

Lema 3.1.9. *Cualquier homomorfismo analítico, C, entre dos toros complejos, $C : T^r \longrightarrow T^g$, proviene de una transformación $\mathbb{C}$-lineal $\widetilde{C} : \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{C}^g$ que preserva retículas, es decir, $\widetilde{C}(\Lambda_r) \subset \Lambda_g$.*

Demostración. Consideremos al homomorfismo analítico $C : T^r \longrightarrow T^g$. Por las propiedades del cubriente universal, existe una transformación holomorfa $\widetilde{C} : \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{C}^g$ la cual podemos suponer que fija al origen, ya que C es un homomorfismo de grupos. Queremos demostrar que $\widetilde{C}$ es en efecto una transformación lineal.
Observemos que $C \circ \pi_r(z + \lambda_r) - C \circ \pi_r(z) = 0 \in T^g$ para todo $z \in \mathbb{C}^r$ y $\lambda_r \in \Lambda_r$. Así, tenemos que $\widetilde{C}(z + \lambda_r) - \widetilde{C}(z) \in \Lambda_g$. Para cada $\lambda_r \in \Lambda_r$ definimos la aplicación $\varphi_{\lambda_r} : \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{C}^g$ dada por $\varphi_{\lambda_r}(z) = \widetilde{C}(z + \lambda_r) - \widetilde{C}(z)$, la cual es constante ya que $\frac{\partial \varphi_{\lambda_r}}{\partial z_i} = 0 \; \forall z_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Por otro lado, como $\widetilde{C}(0) = 0$, entonces $\varphi_{\lambda_r}(0) = \widetilde{C}(\lambda_r)$, así, la constante es $\widetilde{C}(\lambda_r)$ y por lo tanto $\widetilde{C}(z + \lambda_r) = \widetilde{C}(z) + \widetilde{C}(\lambda_r)$.
Observemos que $\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial z_i}(z+\lambda_r) = \frac{\partial \widetilde{C}}{\partial z_i}(z)$ para toda λ_r, es decir, $\frac{\partial \widetilde{C}}{\partial z_i}$ es una función 2r-periódica para todo z_i. Por el teorema de Liouville tenemos que $D\widetilde{C}$ es constante y por lo tanto $\widetilde{C}$ es una transformación $\mathbb{C}$-lineal.

■

Nota 3.1.10. De la demostración anterior es facíl ver que cualquier transformación holomorfa entre toros complejos tiene un levantamiento a una transformación afin.

Lema 3.1.11. *Dada una transformación holomorfa* $f : (X_r, z_0) \longrightarrow (X_g, f(z_0))$ *cubriente, no ramificada finita a uno, existe una transformación* $\mathbb{C}$*-lineal* $\widetilde{C} : \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{C}^g$ *con las siguientes propiedades:*

(1) *Induce un homomorfismo analítico de grupos,* $C : Jac(X_r) \longrightarrow Jac(X_g)$.

(2) *Hace que el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} (X_r, z_0) & \xrightarrow{f} & (X_g, f(z_0)) \\ {\scriptstyle A_r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle A_g} \\ Jac(X_r) & \xrightarrow{C} & Jac(X_g) \end{array} \tag{64}$$

sea conmutativo.

Demostración. Consideremos la transformación holomorfa $\psi : X_r \longrightarrow Jac(X_g)$ dada por $\psi = A_g \circ f$, así como su levantamiento $\widetilde{\psi} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^g$, donde $\widetilde{\psi} = (\widetilde{\psi}_1, \dots, \widetilde{\psi}_g)$. Cada $\widetilde{\psi}_i$ es holomorfa y satisface la condición de cociclo (o de factor de automorfía) $\widetilde{\psi}_i(\gamma\tilde{z}) - \widetilde{\psi}_i(\tilde{z}) = c_i(\gamma, \tilde{z}_0)$ para toda $\gamma \in \Gamma$ (donde Γ es un grupo de automorfismos complejos de $\mathbb{D}$ tal que $X_r \cong \mathbb{D}/\Gamma$). Más aún, los factores de automorfia $c_i(\gamma, \tilde{z}_0)$ son las componentes de un vector en la retícula Λ_g, es decir,

$$\Big(\widetilde{\psi}_1(\gamma\tilde{z}) - \widetilde{\psi}_1(\tilde{z}), \widetilde{\psi}_2(\gamma\tilde{z}) - \widetilde{\psi}_2(\tilde{z}), \dots, \widetilde{\psi}_g(\gamma\tilde{z}) - \widetilde{\psi}_g(\tilde{z})\Big) \in \Lambda_g.$$

Observemos que las funciones $\widetilde{\psi}_i$ son integrales abelianas en $\mathbb{D}$; en efecto, ya que $\frac{d}{dz}(\widetilde{\psi}_i(\gamma z) - \widetilde{\psi}_i(z)) = 0$ para toda $\gamma \in \Gamma$ y por lo tanto $\frac{d}{dz}\psi_i(z) = W_i$ es una diferencial abeliana en X_r. En vista de esta observación, cada una de las funciones $\widetilde{\psi}_i$puede ser expresada en términos de las r diferenciales abelianas canónicas ω_j de X_r en la forma siguiente:

$$\widetilde{\psi}_i(\tilde{z}) = \sum_{j=1}^{r} \widetilde{C}_{ij}\Big(\int_{\tilde{z}_0}^{\tilde{z}} \tilde{\omega}_j\Big) + \widetilde{C}_i \;\; 1 \le i \le g,$$

donde por definición

(1) $\omega_j(\gamma) = \int_{z_0}^{\gamma z_0} \omega_j$.

(2) $\widetilde{C}_{ij}$ y $\widetilde{C}_i$ son constantes con la propiedad que $(\sum_{j=1}^r \widetilde{C}_{1j}\omega_j(\gamma), \sum_{j=1}^r \widetilde{C}_{2j}\omega_j(\gamma), \dots, \sum_{j=1}^r \widetilde{C}_{gj}\omega_j(\gamma))$ es un vector en la retícula Λ_g para toda $\gamma \in \Gamma$.

Así, la matriz

$$\widetilde{C} = \{\widetilde{C}_{ij}\} \in M(g \times r, \mathbb{C})$$

determina una transformación $\mathbb{C}$-lineal tal que $\widetilde{C}(\Lambda_r) \subseteq \Lambda_g$ de donde $\tilde{C}$ induce una transformación $C : Jac(X_r) \longrightarrow Jac(X_g)$ que es homomorfismo analítico.
Para que el diagrama 64 conmute, hay que probar que $\psi = C \circ A_r$.
De la construcción del homomorfismo analítico C descrita en la primera parte de esta demostración y de la nota 3.1.10 tenemos que la transformación holomorfa $\psi : X_r \longrightarrow Jac(X_g)$ tiene la expresión

$$\psi = C \circ A_r + p.$$

Para obtener el resultado sólo falta normalizar apropiadamente las integrales abelianas en este caso. Escogemos al punto $A_r(z_0)$ como la identidad del grupo $Jac(X_r)$. Por nuestra elección de $f(z_0)$ como punto marcado en X_g escogemos a $A_g(f(z_0))$ como la identidad en $Jac(X_g)$, con lo cual obtenemos el resultado.

■

Observación 3.1.12. El homomorfismo analítico C está dado unicamente en términos de $\psi(z) = A_g \circ f$, una vez que hemos escogido a $A_r(z_0)$ y a $A_g(f(z_0))$ como los elementos identidad en los grupos correspondientes.

Lema 3.1.13. *Sea X_r una superficie de Riemann compacta de género $r \geq 1$ entonces, $A_r(X_r)$ genera a toda la variedad Jacobiana $Jac(X_r)$ como grupo topológico abeliano complejo.*

Demostración. (1). Si pensamos a la curva X_r como el conjunto de algunos divisores de grado uno en X_r, entonces, podemos generar a $Div_r(X_r)$ en términos de este conjunto, simplemente sumando los puntos formalmente con los pesos apropiados.
Por el teorema de inversión de Jacobi (ver [**13**] pag. 314) tenemos que la imagen bajo el homomorfismo de Jacobi del conjunto $Div_r(X_r)$ es toda la variedad Jacobiana. Como la transformación de Abel-Jacobi coincide con el homomorfismo de Jacobi en X_r, entonces, obtenemos el resultado.

■

Presentamos otra demostración al hecho de que $A_r(X_r)$ genera a $Jac(X_r)$:

Demostración. (2). Observemos que a la curva X_r la podemos ver como el conjunto de divisores de grado cero de la forma $p - p_0$, donde p es cualquier punto de X_r y p_0 es un punto fijo escogido de tal forma que $A_r(p_0) = 0$ en la variedad Jacobiana. Por otro lado, la variedad Jacobiana es isomorfa al conjunto de divisores de grado cero modulo divisores principales, así, queremos ver que dado cualquier divisor de grado cero, digamos $\sum n_i p_i$ se puede ver como una combinación del conjunto $A_r(X_r)$. Pero debe ser claro que podemos descomponer a $\sum n_i p_i$ en dos partes, una con coeficientes positivos y otra con coeficientes negativos y cada una de estas partes las podemos poner como suma de divisores de la forma $p - p_0$ para algunos $p \in X_r$, con lo cual concluimos la prueba.

■

Proposición 3.1.14. *El morfismo analítico C definido en el lema 3.1.11 es sobreyectivo.*

Demostración. Observemos que la restricción del homomorfismo analítico $\widetilde{C}$ a $A_r(X_r)$ es sobreyectiva. En efecto, puesto que f es sobreyectiva y satisface el diagrama 64. Por el lema 3.1.13 el subgrupo generado por $W_1(X_r) := A_r(X_r)$ es toda la variedad Jacobiana $Jac(X_r)$ como grupo topológico complejo, es decir, $\langle A_r(X_r)\rangle = Jac(X_r)$ de donde tenemos que

$$C(Jac(X_r)) = C\langle A_r(X_r)\rangle = \langle C \circ A_r(X_r)\rangle = \langle A_g(X_g)\rangle = Jac(X_g). \tag{65}$$

■

Consideremos al conjunto dirigido I, así como el sistema inverso $\{(X_{g(H)}, p_{g(H)}), f_{g(H)g(H')}\}_{H,H'\in I}$, (ver ejemplo 1.2.6). Para cada una de las superficies $(X_{g(H)}, p_{g(H)})$ consideremos su variedad Jacobiana, $Jac\left(X_{g(H)}, A_{g(H)}(p_{g(H)})\right)$, donde la identidad de grupo esta dado por $A_{g(H)}(p_{g(H)})$. Por abuso de notación sólo escribiremos, $Jac(X_{g(H)})$.
Considerar los morfismos analíticos $C_{g(H)g(H')} : Jac(X_{g(H')}) \longrightarrow Jac(X_{g(H)})$ entre variedades Jacobianas, lo cual podemos hacer gracias al lema 3.1.11.

Lema 3.1.15. *El conjunto $\{Jac(X_{g(H)}), C_{g(H)g(H')}\}_{H,H'\in I}$ forma un sistema inverso de grupos topológicos abelianos y compactos (de hecho, de variedades Jacobianas).*

Demostración. Es claro que $\{Jac(X_{g(H)})\}_{H\in I}$ es una familia de variedades Jacobianas
parametrizadas por I; por otro lado $\{C_{g(H)g(H')} : Jac(X_{g(H')}) \longrightarrow Jac(X_{g(H)})\}_{H,H'\in I}$ es una familia de transformaciones continuas (epimorfismos analíticos) tales que: $C_{g(H)g(H)} = Id_{g(H)}$ para cada $H \in I$. Sólo falta verificar que para cualesquiera dos $H, H' \in I$ tales que $H \prec H'$ existe un $H'' \in I$ para el cual se satisface la relación:

$$C_{g(H)g(H'')} = C_{g(H)g(H')} \circ C_{g(H')g(H'')}.$$

Dados cualesquiera H y H' en I tales que $H \prec H'$ existe $H'' \in I$ tal que $H'' \succ H' \succ H$, así como transformaciones $f_{g(H)g(H'')}$, $f_{g(H')g(H'')}$ que satisfacen la relación $f_{g(H)g(H'')} = f_{g(H)g(H')} \circ f_{g(H')g(H'')}$, todo ello por estar en el sistema inverso que determina a la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico. Así, asociado a $f_{g(H)g(H')}$ existe el epimorfismo analítico $C_{g(H)g(H')}$; por otro lado, los homomorfismos analíticos $C_{g(H)g(H'')}$, $C_{g(H')g(H'')}$ y $C_{g(H)g(H')}$ son transformaciones sobreyectivas, de donde se sigue que la composición $C_{g(H)g(H'')} = C_{g(H)g(H')} \circ C_{g(H')g(H'')}$ está bien definida.

■

Como consecuencia del lema anterior tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.1.16. *El límite inverso*

$$Jac((\widehat{X}_{g,\tau}), \widehat{C}_H) = \varprojlim_{H,H'\in I} \{Jac(X_{g(H)}), C_{g(H)g(H')}\}$$

del sistema inverso $\{Jac(X_{g(H)}), C_{g(H)g(H')}\}_{H,H'\in I}$ *de grupos topológicos abelianos existe.*

Al límite inverso anterior lo llamaremos *la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico.*

Al igual que en el caso de la laminación universal algebraica de tipo elíptico tenemos:

Corolario 3.1.17. $(Jac(\widehat{X}_{g,\tau}), \widehat{C}_H)$ *es un grupo topológico abeliano, compacto y Hausdorff.*

Pregunta. La Jacobiana de la laminación universal algebraica hiperbólica, $Jac(\widehat{X}_{g,\tau})$ es un espacio foliado compacto, cuyas hojas son analíticamente equivalentes a $\mathbb{C}^n$, donde n varía en el conjunto $\{g(H)\}_{H\in I}$? En otras palabras, $Jac(\widehat{X}_{g,\tau})$ tiene hojas de diferentes dimensiones que pueden ser arbitrariamente grandes? Es decir entender este objeto. Talvez usando las variedades de Mumford sugerencia de Shrinivas, asi como buscar en el moduli. Ver la conexion con funciones automorfas y operador de Hecke.

Nota 3.1.18. Si consideramos a la familia $\{A_{g(H)}(X_{g(H)}, p_{g(H)}) \subset Jac(X_{g(H)})\}_{H\in I}$, formada por las imágenes bajo la transformación de Abel-Jacobi de cada una de las superficies de Riemann compactas marcadas, así como a la familia
$\{C_{|g(H),g(H')} : A_{g(H')}(X_{g(H')}, p_{g(H')}) \longrightarrow A_{g(H)}(X_{g(H)}, p_{g(H)})\}$ de los respectivos epimorfismos analíticos restringuidos a dichas imagenes, obtenemos un nuevo sistema inverso de variedades complejas, de donde podemos considerar el límite inverso (como espacios topológicos):

$$\varprojlim_{H,H'\in I} \{A_{g(H)}(X_{g(H)}, p_{g(H)}), C_{|g(H),g(H')}\}.$$

Este límite inverso es un subconjunto propio de la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico, el cual es homemorfo a la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico. Así $Jac(\hat{X}_{g,\tau})$ tiene un subgrupo propio minimal. Por lo tanto $Jac(\hat{X}_{g,\tau})$ no puede ser minimal.

Teorema 3.1.19. *(***Abel-Jacobi para la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico***) Existe un encaje holomorfo tangencial canónico,* $\widehat{A}$*, de la laminación algebraica universal de tipo hiperbólico en su Jacobiana.*

Demostración. Sea $\widehat{p} = (z_0, z_H, \dots, z_{H'}, \dots) \in \hat{X}_{g,\tau}$. Definimos la aplicación $\widehat{A}$: $\hat{X}_{g,\tau} \longrightarrow Jac(\hat{X}_{g,\tau})$ como $A(\widehat{p}) = (A_g(z_0), A_{g(H)}(z_H), \dots, A_{g(H')}(z_{H'}), \dots)$. La cual esta bien definida ya que el diagrama 64 es conmutativo a cada nivel del límite inverso. Del hecho que $A_{g(H)}(X_{g(H)}, p_\tau)$ es biholomorficamente equivalente a $(X_{g(H)}, p_{g(H)})$ para cada $H \in I$, es inmediato que $\widehat{A}$ es un homeomorfismo. Más aun, del hecho que los epimorfismos analíticos $C_{g(H')g(H)}$ estan construidos para que a cada nivel los diagramas conmuten se sigue que es una aplicación tangencialmente holomorfa.

■

Definición 3.1.20. Llamaremos al encaje holomorfo tangencial canónico, $\widehat{A}$, *la transformación de Abel-Jacobi de tipo hiperbólico.*

De la demostración del teorema anterior tenemos el siguiente resultado.

Corolario 3.1.21. *La restricción de $\widehat{A}$ a cada una de las hoja L en $\hat{X}_{g,\tau}$, es una transformación holomorfa. Más aun, el diagrama*

$$\begin{array}{ccc}
(\hat{X}_{g,\tau}, \widehat{p}) & \xrightarrow{\widehat{A}} & Jac(\hat{X}_{g,\tau}, \widehat{p}) \\
\pi \big\downarrow & & \big\downarrow \pi \\
(X_{g,\tau}, p_\tau) & \xrightarrow{A_\tau} & Jac(X_{g,\tau}, p_\tau)
\end{array}$$

es conmutativo.

3.1.3. El grupo de carácteres de la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico). En vista que $Jac(\mathbf{E}_\tau)$ es un grupo topológico abeliano, Hausdorff y compacto, es natural preguntarse por el grupo de caracteres asociado a $(Jac(\hat{\mathbf{E}}_\tau), \widehat{C}_H)$. El siguiente teorema es bien conocido (ver [**42**] pag.37).

Teorema 3.1.22. *Si G es el producto cartesiano de una familia $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de grupos topológicos abelianos, compactos con la operación grupo coordenada a coordenada. Entonces, el grupo de caracteres de G, $\Gamma(G)$, es la suma directa de los correspondientes grupos de caracteres $\Gamma(G_\alpha)$, es decir,*

$$\Gamma(G) = \bigoplus_{\alpha\in I} \Gamma(G_\alpha).$$

Supongamos que H es un subgrupo cerrado de un grupo topológico abeliano, localmente compacto G. Consideremos al conjunto de todos los caracteres γ en el grupo de caracteres de G tales que $\gamma(h) = 1$ para cualquier $h \in H$, a dicho conjunto se le llama *el anulador de H* y lo denotaremos por $H^\perp$. En otras palabras,

$$H^\perp = \{\gamma \in \Gamma(G) : \gamma(h) = 1 \ \forall h \in H\}. \tag{66}$$

El siguiente teorema es un resultado clásico (ver [**42**] pag.35) en la estructura de los grupos Abelianos localmente compactos.

Teorema 3.1.23. *El anulador de H es isomorfo (como grupo topológico) al grupo de caracteres del grupo cociente G/H, es decir, $H^{\perp} \cong \Gamma(G/H)$.*
El grupo cociente $\Gamma(G)/H^{\perp}$ es isomorfo (como grupo topológico) al grupo de caracteres de H, es decir $\Gamma(G)/H^{\perp} \cong \Gamma(H)$.

Sea $\mathbb{K}$ un campo global y sea $\mathbb{K}_\nu$ la completación de $\mathbb{K}$ en un lugar ν (ver [**38**]). Observemos que $\langle \mathbb{K}_\nu, + \rangle$ es un grupo aditivo localmente compacto. En el caso que $\mathbb{K}$ sea un campo de números, el teorema de Ostrowsky (ver [**38**]) nos dice que $\langle \mathbb{K}_\nu, + \rangle$ resulta ser $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o un campo p-ádico.

Para cada ν lugar finito, $\mathbb{K}_\nu$ admite a $\mathfrak{O}_\nu = \{x \in \mathbb{K}_\nu : ||x||_\nu \leq 1\}$, el anillo de enteros local con respecto al lugar ν, como subgrupo compacto-abierto (en particular cerrado, ver [**38**]).

El producto directo restringuido de los $\mathbb{K}_\nu$ con respecto a los $\mathfrak{O}_\nu$ esta dado como

$$\mathbb{A}_{\mathbb{K}} = \prod_{\nu \in \{\text{lugares finitos}\}}^{\prime} = \{(x_\nu) : x_\nu \in \mathbb{K}_\nu \text{ con } x_\nu \in \mathfrak{O}_\nu, \forall \nu \text{ exepto un número finito}\}.$$

Al producto directo restringuido anterior se le conoce como *el grupo de Adeles de* $\mathbb{K}$.

Es bien sabido (ver [**38**] pag.181) que $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ *es un grupo topológico localmente compacto.*

Observemos que la aplicación $x \mapsto (x, x, \dots)$ define un encaje algebraico de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$. En efecto ya que $\mathbb{K}$ siempre se encaja en $\mathbb{K}_\nu$ para todos los lugares ν y cualquier elemento de $\mathbb{K}$ es un entero local para todos los lugares salvo un gran número finito de lugares.

Por definición el conjunto $\mathbb{A}_\omega$ consiste de todos los elementos del grupo de Adeles cuyas componentes en los lugares finitos tienen valor absoluto menor o igual a uno.

Los siguientes resultados son bien conocidos (ver [**38**]).

Teorema 3.1.24. *(***Teorema de aproximación***) Para cualquier campo global $\mathbb{K}$ se satisface*

$$\mathbb{A}_{\mathbb{K}} = \mathbb{K} + \mathbb{A}_\omega. \textit{ Más aún, } \mathbb{K} \bigcap \mathbb{A}_\omega = \mathfrak{O}_{\mathbb{K}}.$$

Corolario 3.1.25. *Se satisface la siguiente igualdad*

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} + (\mathbb{R} \times \prod_{p \in primos} \mathbb{Z}_p). \textit{ Más aún } \mathbb{Q} \bigcap \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Z}.$$

Lema 3.1.26. *Sea $\mathbb{L}|\mathbb{K}$ una extensión finita. Fijemos una $\mathbb{K}$-base $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ de $\mathbb{L}$, entonces, la transformación natural*

$$\alpha : \prod_{j=1}^{n} \mathbb{A}_{\mathbb{K}} \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{L}}$$

dada por $((x_{\nu,j})_\nu)_j \mapsto \sum u_j(x_{\nu,j})_\nu$ *es un isomorfismo de grupos topológicos.*

Conjetura 3.1.27. El grupo de caracteres de la Jacobiana de la laminación universal algebraica parabólica es isomorfo al grupo de caracteres del campo global $\mathbb{Q}(i)$, es decir,

$$\Gamma(Jac(\hat{\mathbb{E}}_\tau)) = \Gamma(\mathbb{Q}(i)). \tag{67}$$

Demostración. (Idea)
Por el lema 5-10 pag. 191 de **[38]** tenemos que

$$\prod_{j=1}^{2} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{A}_{\mathbb{Q}(i)}.$$

Hay que verificar que

$$\mathbb{A}_{\mathbb{Q}(i)} \cong \mathbb{R}^2 \times (\prod \mathbb{Z}_{(p)} \oplus i\mathbb{Z}_{(p)}),$$

Probar que este último es isomorfo a

$$\mathbb{R}^2 \times (\prod \mathbb{Z}_{(p)})^2.$$

Sabemos que el grupo de caracteres de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}(i)}/\mathbb{Q}(i)$, $\Gamma(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}(i)}/\mathbb{Q}(i))$, es el grupo de caracteres del campo global $\mathbb{Q}(i)$, $\Gamma(\mathbb{Q}(i))$.
Sabemos que el cociente $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}(i)}/\mathbb{Q}(i)$ es homeomorfo a la acción de $(\prod \mathbb{Z}_{(p)})^2$ en $\mathbb{R}^2 \times (\prod \mathbb{Z}_{(p)})^2$. Probar que dicha acción es equivalente a la acción que determina a la Jacobiana de la laminación universal algebraica parabólica, de donde obtendriamos el resultado.

■

3.2. El cubriente universal a las hojas de la Jacobiana.

3.2.1. De tipo elíptico (o parabólico). Del diagrama conmutativo 63, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C} = \mathbb{C}_{H'} & \xrightarrow{\widetilde{C}_{\tau(H)\tau(H')}} & \mathbb{C}_H = \mathbb{C} \\
{\scriptstyle \pi_{\tau(H')}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{\tau(H)}} \\
\mathbb{C}_{H'}/\Lambda_{\tau(H')} \cong Jac(\mathbb{E}_{\tau(H')}) & \xrightarrow{C_{\tau(H)\tau(H')}} & \mathbb{C}_H/\Lambda_{\tau(H)} \cong Jac(\mathbb{E}_{\tau(H)}),
\end{array}$$

donde $\widetilde{C}_{\tau(H)\tau(H')}$ es el levantamiento del epimorfismo analítico $C_{\tau(H)\tau(H')}$, es decir, es una transformación $\mathbb{C}$-lineal que preserva retículas.

Observemos que para cada $H \in I$ las transformaciones $\widetilde{C}_{\tau(H)\tau(H)}$ satisfacen que $\widetilde{C}_{\tau(H)\tau(H)} = Id_{\tau(H)}$ y se puede verificar que para cualesquiera $H, H' \in I$ tales que $H \prec H'$ existe $H'' \in I$ tal que se satisface la relación:

$$\widetilde{C}_{\tau(H)\tau(H'')} = \widetilde{C}_{\tau(H)\tau(H')} \circ \widetilde{C}_{\tau(H')\tau(H'')}$$

con lo cual hemos probado el siguiente resultado:

Lema 3.2.1. *El conjunto* $\{\mathbb{C}_H, \widetilde{C}_{\tau(H)\tau(H')}\}_{H,H'\in I}$ *forma un sistema inverso de espacios vectoriales topológicos indexados por* I.

El siguiente resultado es una consecuencia del lema anterior.

Proposición 3.2.2. *El límite inverso*

$$(\mathbb{C}, \widetilde{C}_H) = \varprojlim_{H,H'\in I} \{\mathbb{C}_H, \widetilde{C}_{\tau(H)\tau(H')}\}$$

del sistema inverso $\{\mathbb{C}_H, \widetilde{C}_{\tau(H)\tau(H')}\}_{H,H'\in I}$ *existe.*

Teorema 3.2.3. *Existe una transformación cubriente,* π, *de* $(\mathbb{C}, \widetilde{C}_H)$ *en cualquiera de las hojas* L *de la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico).*

Demostración. Sabemos que las hojas de la laminación universal algebraica de tipo elíptico son holomorfamente equivalentes a $\mathbb{C}$; así, es claro que $(\mathbb{C}, \widetilde{C}_H)$ es el cubriente universal de cualquiera de las hojas de dicha laminación. La transformación cubriente π, está inducida por la colección de las transformaciones cubrientes, $\pi = \{\pi_{\tau(H)}\}_{H\in I}$, es decir, $\widehat{p} = (\tilde{p}_\tau, \tilde{p}_{\tau(H)}, \tilde{p}_{\tau(H')}, \dots) \mapsto (\pi_\tau(\tilde{p}_\tau), \pi_{\tau(H)}(\tilde{p}_{\tau(H)}), \pi_{\tau(H')}(\tilde{p}_{\tau(H')}), \dots)$.

$\blacksquare$

Llamaremos a $\pi : (\mathbb{C}, \widetilde{C}_H) \longrightarrow L$ *el cubriente universal de las hojas de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico).*

3.2.2. De tipo hiperbólico. Del lema 3.1.9 tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{g(H')} \arrow[r, "\widetilde{C}_{g(H)g(H')}"] \arrow[d, "\pi_{g(H')}"'] & \mathbb{C}^{g(H)} \arrow[d, "\pi_{g(H)}"] \\
\mathbb{C}^{g(H')}/\Lambda_{g(H')} \cong Jac(X_{g(H')}) \arrow[r, "C_{g(H)g(H')}"] & \mathbb{C}^{g(H)}/\Lambda_{g(H)} \cong Jac(X_{g(H)})
\end{tikzcd}$$

donde $\widetilde{C}_{g(H)g(H')}$ es el levantamiento del homomorfismo analítico $C_{g(H)g(H')}$, es decir, es una transformación $\mathbb{C}$-lineal que preserva retículas.

Lema 3.2.4. *El conjunto* $\{\mathbb{C}^{g(H)}, \widetilde{C}_{g(H)g(H')}\}_{H,H'\in I}$ *forma un sistema inverso de espacios vectoriales topológicos.*

Demostración. Es claro que $\{\mathbb{C}^{g(H)}\}_{H\in I}$ forma una familia de espacios vectoriales topológicos indexados por I. Por otro lado, si consideramos la familia de transformaciones $\mathbb{C}$-lineales, $\{\widetilde{C}_{g(H)g(H')} : \mathbb{C}^{g(H')} \longrightarrow \mathbb{C}^{g(H)}\}_{H,H'\in I}$, tenemos que para cada $H \in I$ se satisface $\widetilde{C}_{g(H)g(H)} = Id_{g(H)}$ y se puede verificar que para cualesquiera $H, H' \in I$ tales que

$H \prec H'$ existe $H'' \in I$ tal que las transformaciones $\mathbb{C}$-lineales $\widetilde{C}_{g(H)g(H')}$, $\widetilde{C}_{g(H)g(H'')}$ y $\widetilde{C}_{g(H')g(H'')}$ satisfacen la relación:

$$\widetilde{C}_{g(H)g(H'')} = \widetilde{C}_{g(H)g(H')} \circ \widetilde{C}_{g(H')g(H'')}$$

de donde obtenemos el resultado.

∎

El siguiente resultado es una consecuencia del lema anterior.

Proposición 3.2.5. *El límite inverso*

$$(\mathbb{C}_\infty, \widetilde{C}_H) = \varprojlim_{H,H' \in I} \{\mathbb{C}^{g(H)}, \widetilde{C}_{g(H)g(H')}\}$$

del sistema inverso $\{\mathbb{C}^{g(H)}, \widetilde{C}_{g(H)g(H')}\}_{H,H' \in I}$ *existe.*

Teorema 3.2.6. *Existe una transformación cubriente, π, de $(\mathbb{C}_\infty, \widetilde{C}_H)$ en cualquiera de las hojas L de la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico.*

Demostración. Recordemos que las hojas de la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico se construyen a partir de los cubrientes universales de las variedades Jacobianas $Jac(X_{g(h)})$, bajo la acción de los grupos de transformaciones de cubierta asociados a las retículas $\Lambda_{g(H)}$, respetando la condición de límite inverso, así, $(\mathbb{C}_\infty, \widetilde{C}_H)$ es un espacio cubriente para cualquier hoja de la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico y al igual que en el caso elíptico (o parabólico), la transformación π está inducida por la colección de las transformaciones cubrientes, $\pi = \{\pi_{g(H)}\}_{H \in I}$, es decir
$\widehat{p} = (\tilde{p}_g, \tilde{p}_{g(H)}, \tilde{p}_{g(H')}, \dots) \mapsto (\pi_g(\tilde{p}_g), \pi_{g(H)}(\tilde{p}_{g(H)}), \pi_{g(H')}(\tilde{p}_{g(H')}), \dots)$.

∎

3.2.2.1. *La topología producto en $\mathbb{C}_\infty$.* Consideremos el producto infinito $\prod_{H \in I} \mathbb{C}^{g(H)}$ de los espacios vectoriales topologicos $\mathbb{C}^{g(H)}$. El siguiente resultado es bien conocido (ver [**43**]).

Lema 3.2.7. *El conjunto $\prod_{H \in I} \mathbb{C}^{g(H)}$ con la topología producto es un espacio vectorial topológico con las operaciones siguientes:*

- $\{z_{g(H)}\} + \{w_{g(H)}\} = \{z_{g(H)} + w_{g(H)}\}$ *para todo* $\{z_{g(H)}\}$, $\{w_{g(H)}\} \in \prod_{H \in I} \mathbb{C}^{g(H)}$.
- $\lambda\{z_{g(H)}\} = \{\lambda z_{g(H)}\}$ *para toda* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Denotamos por $P_{g(H')}$ a la transformación proyección canónica $P_{g(H')} : \prod_{H \in I} \mathbb{C}^{g(H)} \longrightarrow \mathbb{C}^{g(H')}$ la cual es $\mathbb{C}$-lineal.

El límite inverso $(\mathbb{C}_\infty, \widetilde{C}_H)$ visto como un subconjunto del producto infinito, tiene la expresión:

$$(68) \qquad \mathbb{C}_\infty = \{\{z_{g(H)}\} \in \prod_{H\in I} \mathbb{C}^{g(H)} : \widetilde{C}_{g(H)g(H')} \circ P_{g(H')}(\{z_{g(H)}\}) = P_{g(H)}(\{z_{g(H)}\})\},$$

donde la transformación $\widetilde{C}_H$ está dada por $\widetilde{C}_H = P_{g(H)}|_{\mathbb{C}_\infty}$. El siguiente resultado es bien conocido (ver [**43**]).

Proposición 3.2.8. *El conjunto $\mathbb{C}_\infty$ con la topología inducida de la topología producto es un subespacio topológico Hausdorff cerrado del producto $\prod_{H\in I} \mathbb{C}^{g(H)}$. Más aun, es un espacio vectorial topológico.*

Demostración. Es claro que $0 \in \mathbb{C}_\infty$. Por otro lado $\mathbb{C}_\infty$ es cerrado bajo la suma de sus elementos y multiplicación por un escalar, ya que las transformaciones $\widetilde{C}_{g(H)g(H')}$ son $\mathbb{C}$-lineales. La continuidad de las operaciones se sigue del hecho que $\mathbb{C}_\infty$ es un grupo topológico con la suma vectorial y es fácil ver que la multiplicación por escalares es continua.

■

3.2.2.2. *La topológia proyectiva en $\mathbb{C}_\infty$.* Para cada $H \in I$ consideremos a $\mathbb{C}^{g(H)}$ como un espacio vectorial topológico localmente convexo, en otras palabras, consideremos la topología localmente convexa $\mathcal{I}_{g(H)}$ en $\mathbb{C}^{g(H)}$.

Construyamos una base de vecindades de un punto $\{x_{g(H)}\} \in \prod_{H\in I} \mathbb{C}^{g(H)}$ de la manera siguiente:
Puesto que el punto $\{x_{g(H)}\}$ satisface por definición $x_{g(H')} = P_{g(H')}(\{x_{g(H)}\})$, la base de vecindades del punto $\{x_{g(H)}\}$ estará dada por las intersecciones $\bigcap_{H\in A} P^{-1}_{g(H)}(U_{g(H)})$, donde $U_{g(H)}$ es cualquier vecindad abierta de $x_{g(H)}$ en $\mathbb{C}^{g(H)}$ en la topología $\mathcal{I}_{g(H)}$ y donde A es cualquier subconjunto finito de I (comparar con [**43**] pag.5).
La topología en $\prod_{H\in I} \mathbb{C}^{g(H)}$ dada por esta base de vecindades es *la topología más gruesa en $\prod_{H\in I} \mathbb{C}^{g(H)}$ para la cual cada una de las transformaciones $P_{g(H)}$ es continua.*

Definición 3.2.9. *La topología proyectiva, $\mathcal{I}$, en $\prod_{H\in I} \mathbb{C}^{g(H)}$ con respecto a la familia* $\{\mathbb{C}^{g(H)}, \mathcal{I}_{g(H)}, P_{g(H)}\}_{H\in I}$, es la topológia más gruesa en $\prod_{H\in I} \mathbb{C}^{g(H)}$ para la cual cada una de las transformaciones $P_{g(H)}$ en $\prod_{H\in I} \mathbb{C}^{g(H)}$ es continua.

Observación 3.2.10. Puesto que las transformaciones $P_{g(H)}$, para cada $\mathbb{C}^{g(H)}$, son lineales y las topológias $\mathcal{I}_{g(H)}$ son localmente convexas tenemos que las traslaciones, en el producto $\prod_{H\in I} \mathbb{C}^{g(H)}$ con la topológia proyectiva $\mathcal{I}$, son homeomorfismos. Más aún, la topológia $\mathcal{I}$ tiene una base de vecindades del cero por conjuntos convexos que satisfacen las propiedades siguientes:

(1) Para cada vecindad V en la base de vecindades β del origen existe una vecindad $U \in \beta$ tal que $U + U \subset V$.
(2) Cualquier $V \in \beta$ es radial y circular (ver [**43**] pag.11).

Como consecuencia de la observación 3.2.10 y de la proposición 1.2 de [**43**] pag.14 tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.2.11. *El espacio topológico* $(\prod_{H\in I} \mathbb{C}^{g(H)}, \mathcal{I})$ *es un espacio vectorial topológico localmente convexo.*

Si consideramos a $\mathbb{C}_\infty$ como un subconjunto de $(\prod_{H\in I} \mathbb{C}^{g(H)}, \mathcal{I})$ y lo dotamos de la topológia inducida, es decir, la topológia proyectiva inducida en $\mathbb{C}_\infty$ con respecto al encaje canónico $\mathbb{C}_\infty \hookrightarrow \prod_{H\in I} \mathbb{C}^{g(H)}$ (ver [**43**] pag.52), tenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.2.12. *El límite inverso* $\mathbb{C}_\infty$ *con la topológia proyectiva inducida, es un espacio vectorial topológico localmente convexo y completo.*

Corolario 3.2.13. *Los conjuntos* $\mathbb{C}_\infty$ *y* $\prod_{H\in I} \mathbb{C}^{g(H)}$ *con la topología proyectiva son espacios vectoriales topológicos localmente convexos, completos y métricos, es decir, espacios de Fréchet.*

Demostración. Consideremos la métrica definida por

$$d(\{x_{g(H)}\}, \{y_{g(H)}\}) = \sum_{H\in I} \frac{1}{2^{g(H)}} \frac{||x_{g(H)} - y_{g(H)}||_{g(H)}}{1 + ||x_{g(H)} - y_{g(H)}||_{g(H)}}, \tag{69}$$

donde $||\cdot||_{g(H)}$ denota la norma de $\mathbb{C}^{g(H)}$.

∎

Observemos que para el espacio vectorial $\mathbb{C}_\infty$ no existe una base numerable. En efecto, ya que un espacio vectorial topológico V de dimensión infinita tiene una base numerable, llamada regularmente base de Holder, si es de la primera categoría, es decir, si es una unión numerable de espacios vectoriales de dimensión finita. Como $\mathbb{C}_\infty$ no es una única númerable de espacios vectoriales de dimensión finita, entonces, no puede existir una base numerable en este caso.

3.3. Las transformaciones de cubierta de la Jacobiana.

3.3.1. De tipo elíptico (o parabólico). Consideremos una transformación holomorfa no constante $f : \mathbb{E}_{\tau'} \longrightarrow \mathbb{E}_\tau$ entre curvas elípticas tal que $f(0) = 0$. Sabemos que ésta es una transformación holomorfa cubriente no ramificada finito a uno; más aún, esta transformación holomorfa es compatible con la estructura de grupo de las curvas elípticas, de donde es un morfismo analítico. El núcleo de la transformación f, $Ker(f)$, consiste sólo de un número finito de elementos (con lo cual la transformación f es una isogenia de variedades abelianas, ver **[26]** y **[27]**), así, podemos escribir

$$Ker(f) = f^{-1}(0) = \{0, p_1, \ldots, p_{n-1}\} = \bigcup_{i=0}^{n-1} \{(Ker(f))_0 + p_i\},$$

donde $(Ker(f))_0 = 0 \in \mathbf{E}_{\tau'}$. Más aún, el grado de la transformación f, $deg(f)$, es justamente el índice del subgrupo normal $\tilde{f}(\Lambda_{\tau'})$ en Λ_τ (ver **[27]** pag.12), es decir, $deg(f) = [\Lambda_\tau : \tilde{f}(\Lambda_{\tau'})]$.

Consideremos al sistema inverso $\{\mathbf{E}_{\tau(H)} = (\mathbb{C}/\Lambda_{\tau(H)}, p_{\tau(H)}), f_{\tau(H)\tau(H')}\}_{H,H' \in I}$ y al conjunto dirigido I (ver ejemplo 1.2.6).

Observación 3.3.1. Dados cualesquiera $H, H' \in I$ se satisface que la imagen de $\Lambda_{\tau(H')}$ bajo la transformación $\tilde{f}_{\tau(H)\tau(H')}$ es un subgrupo normal de índice finito en $\Lambda_{\tau(H)}$. Más aún, la imagen de $\Lambda_{\tau(H')}$ bajo la transformación $\tilde{f}_{\tau\tau(H)} \circ \tilde{f}_{\tau(H)\tau(H')}$ es un subgrupo normal en Λ_τ de índice finito.

Por la observación anterior consideremos a la familia
$J = \{\tilde{f}_{\tau\tau(H)} \circ \tilde{f}_{\tau(H)\tau(H')}(\Lambda_{\tau(H')});\ \tilde{f}_{\tau\tau(H)}(\Lambda_{\tau(H)})\}_{H,H' \in I}$ de todos los subgrupos de índice finito de Λ_τ. Y definamos *el orden parcial* $\prec$ *en* J como sigue:
para cualesquiera $U, V \in J$ decimos que $U \prec V$ si y solamente si V es un subgrupo de U.

Lema 3.3.2. *La familia J forma un conjunto dirigido bajo el orden parcial $\prec$.*

Demostración. Sean $U, V \in J$, definamos el conjunto $W \in J$ como $W = U \bigcap V$, el cual satisface que $U \prec W$ y $V \prec W$.

■

Para cualesquiera $U, V \in J$ tales que $U \prec V$, definimos *el morfismo q_{UV} entre los grupos finitos $\Gamma_V = \Lambda_\tau / V$ y $\Gamma_U = \Lambda_\tau / U$* como

$$q_{UV} : \lambda + V \mapsto \lambda + U$$

para toda $\lambda \in \Lambda_\tau$.

Lema 3.3.3. *El conjunto $\{\Gamma_U, q_{UV}\}_{U,V \in J}$ forma un sistema inverso de grupos finitos.*

Demostración. El conjunto $\{\Gamma_U, q_{UV}\}_{UV \in J}$ esta formado por la familia de grupos finitos $\{\Gamma_U\}_{U \in J}$ y por la familia de epimorfismos $\{q_{UV}\}_{U,V \in J}$, dicha familia de epimorfismos satisface que $q_{UU} = Id_U$ para cada $U \in J$ y sí $U, V, W \in I$ satisfacen que $U \prec V \prec W$ entonces se cumple $q_{UV} \circ q_{VW} = q_{UW}$.

■

Observación 3.3.4. Es un hecho bien conocido (ver [**14**] pag.39) que dada la transformación holomorfa no constante $f : \mathbb{E}_{\tau'} \longrightarrow \mathbb{E}_\tau$ el grupo de las transformaciones de cubierta de este cubriente finito de Galois (o cubriente regular finito), $Deck(\mathbb{E}_{\tau'}/\mathbb{E}_\tau)$, es isomorfo al grupo finito $\Lambda_\tau/\tilde{f}(\Lambda_{\tau'})$, es decir, $Deck(\mathbb{E}_{\tau'}/\mathbb{E}_\tau) \cong \Lambda_\tau/\tilde{f}(\Lambda_{\tau'})$.

Para cualesquiera dos $H, H' \in I$ consideremos las curvas elípticas $\mathbb{E}_{\tau(H')}$, $\mathbb{E}_{\tau(H)}$ y $\mathbb{E}_\tau$, así como las transformaciones holomorfas cubrientes no ramificadas $f_{\tau(H)\tau(H')}$, $f_{\tau\tau(H)}$ y $f_{\tau\tau(H')}$ en el sistema inverso $\{(\mathbb{C}/\Lambda_{\tau(H)}, p_{\tau(H)}), f_{\tau(H)}\}$. Por la observación 3.3.4 anterior tenemos el siguiente diagrama

(70)

$$\begin{array}{ccc} Deck(\mathbb{E}_{\tau(H')}/\mathbb{E}_\tau) & \xrightarrow{\cong} & \Lambda_\tau/\tilde{f}_{\tau\tau(H')}(\Lambda_{\tau\tau(H')}) = \Gamma_V \\ {\scriptstyle h_{\tau(H)\tau(H')}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q_{UV}} \\ Deck(\mathbb{E}_{\tau(H')}/\mathbb{E}_\tau) & \xrightarrow{\cong} & \Lambda_\tau/\tilde{f}_{\tau\tau(H)}(\Lambda_{\tau\tau(H)}) = \Gamma_U, \end{array}$$

donde por definición las transformaciones $h_{\tau(H)\tau(H')}$ estan construidas para que el diagrama conmute. Por lo tanto, tenemos un sistema inverso $\{Deck(\mathbb{E}_{\tau(H)}/\mathbb{E}_\tau); h_{\tau\tau(H)}\}$ indexado por I.

El lema 3.3.3 y la discución anterior implican el siguiente resultado.

Proposición 3.3.5. *El límite inverso*

$$Deck(Jac(\widehat{\mathbb{E}}_\tau)/Jac(\mathbb{E}_\tau)) := \varprojlim_{H\in I}\{Deck(\mathbb{E}_{\tau(H)}/\mathbb{E}_\tau); h_{\tau\tau(H)}\}$$

asociado al sistema inverso $\{Deck(\mathbb{E}_{\tau(H)}/\mathbb{E}_\tau); h_{\tau\tau(H)}\}$ *existe. Más aun, es canónicamente isomorfo a* $\varprojlim_{U,V\in J}\{\Gamma_U, q_{UV}\}$.

Al límite inverso $Deck(Jac(\widehat{\mathbb{E}}_\tau)/Jac(\mathbb{E}_\tau))$ lo llamaremos *el grupo de transformaciones de cubierta de la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo elípico (o parabólico) sobre la Jacobiana de* $\mathbb{E}_\tau$.

Teorema 3.3.6. *El grupo fundamental algebraico de* $\mathbb{E}$ *es canónicamente isomorfo al grupo de transformaciones de cubierta de la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo elíptico sobre la Jacobiana de* $\mathbb{E}_\tau$*, es decir,*

$$\widehat{\pi}_1(\mathbb{E}_\tau, p_0) \cong Deck(Jac(\widehat{\mathbb{E}}_\tau)/Jac(\mathbb{E}_\tau)).$$

Demostración. Este resultado es una consecuencia del hecho que los elementos en el sistema inverso que se ocupan para definir al grupo fundamental algebraico de $\mathbb{E}_\tau$ y los elementos en el sistema inverso que define al grupo de las transformaciones de cubierta de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico) sobre la Jacobiana de $\mathbb{E}_\tau$ son canónicamente isomorfos.

■

Ejemplo 3.3.7. El grupo *Deck* de la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico) diádica
Consideremos a la *laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico) diádica:*

$$(\widehat{\mathbb{E}}_\tau)_{(2)} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \{\mathbb{E}_\tau \xleftarrow{f_2} \mathbb{E}_{\tau(2)} \xleftarrow{f_{2^2}} \mathbb{E}_{\tau(2^2)} \longleftarrow \dots \xleftarrow{f_{2^n}} \mathbb{E}_{\tau(2^n)} \longleftarrow \dots\},$$

donde f_{2^n} denota a la transformación holomorfa cubriente no ramificada dos a uno entre $\mathbb{E}_{\tau(2^n)}$ y $\mathbb{E}_{\tau(2^{n-1})}$. Denotemos por $\tilde{f}_{2^n}$ a la transformación $\mathbb{C}$-lineal inducida por f_{2^n}.

Observación 3.3.8. Todos los subgrupos de índice finito de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ son de la forma $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} n \\ m\end{smallmatrix}\right)$ con $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ en $GL(2,\mathbb{Z})$. Así, los subgrupos de índice 2^n de $\mathbb{Z}^2$ estan en correspondencia con las matrices $M\in GL(2,\mathbb{Z})$ de determinante 2^n.

En este caso la familia J esta formada por todos los subgrupos de Λ_τ de índice 2^n para todo $n\in\mathbb{Z}^+$. Así, la familia $\Gamma = \{\Gamma_U := \Lambda_\tau/U : U \in J\}$. Explicitamente tenemos:

$$\Gamma_1 = e \cong \mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}$$

$$\Gamma_2 = \Lambda_\tau/\tilde{f}_2(\Lambda_{\tau(2)}) \cong \begin{matrix} \mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}) \\ \mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}/(\mathbb{Z}\oplus 2\tau\mathbb{Z}) \end{matrix}$$

$$\Gamma_4 = \Lambda_\tau/\tilde{f}_2\circ\tilde{f}_4(\Lambda_{\tau(4)}) \cong \begin{matrix} \mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}/(2^2\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}) \\ \mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}\oplus 2\tau\mathbb{Z}) \\ \mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}/(\mathbb{Z}\oplus 2^2\tau\mathbb{Z}) \end{matrix}$$

$$\vdots$$

$$\Gamma_{2^n} = \Lambda_\tau/\tilde{f}_2\circ\tilde{f}_4\circ\cdots\circ\tilde{f}_{2^n}(\Lambda_{\tau(2^n)}) \cong \begin{matrix} \mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}/(2^n\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}) \\ \mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}/(2^{n-1}\mathbb{Z}\oplus 2\tau\mathbb{Z}) \\ \vdots \\ \mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}\oplus 2^{n-1}\tau\mathbb{Z} \\ \mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z}/(\mathbb{Z}\oplus 2^n\tau\mathbb{Z}). \end{matrix}$$

Para cualesquiera $U,V\in J$ tales que $U \prec V$ el morfismo sobreyectivo q_{UV} entre los grupos finitos $\Gamma_V := \Lambda_\tau/V$ y $\Gamma_U := \Lambda_\tau/U$ esta dado por $q_{UV} : (\lambda+V)\mapsto(\lambda+U)$. Así, el homomorfismo sobreyectivo $q_{2^n} : \Gamma_{2^n} \longrightarrow \Gamma_{2^{n-1}}$ está dado explicitamente por:
$q_{2^n} : \lambda + (\tilde{f}_2\circ\tilde{f}_4\circ\cdots\circ\tilde{f}_{2^n}(\Lambda_{\tau(2^n)})) \mapsto \lambda + (\tilde{f}_2\circ\tilde{f}_4\circ\cdots\circ\tilde{f}_{2^{n-1}}(\Lambda_{\tau(2^{n-1})}))$ para toda $\lambda\in\Lambda_\tau$.

Por lo anterior el límite inverso del sistema inverso $\{\Gamma_{2^n}, q_{2^n}\}$ es isomorfo a

$$\varprojlim_{n,m\in\mathbb{N}} \{(\mathbb{Z}\oplus\tau\mathbb{Z})/(2^n\mathbb{Z}\oplus 2^m\tau\mathbb{Z})\} \text{ el cual es isomorfo a } \widehat{\mathbb{Z}}_2\oplus\tau\widehat{\mathbb{Z}}_2 \cong \widehat{\mathbb{Z}}_2\times\widehat{\mathbb{Z}}_2,$$

donde $\widehat{\mathbb{Z}}_2$ denota a los números enteros diádicos.

Observemos que el conjunto de los grupos finitos $\{\Gamma_{2^n}\}$ es un conjunto cofinal en el conjunto de los grupos $\{\Gamma_U\}$. Así, tenemos que:

$$Deck(Jac((\widehat{\mathbb{E}}_\tau)_{(2)})/Jac(\mathbb{E}_\tau)) \cong \widehat{\mathbb{Z}}_2 \oplus \tau\widehat{\mathbb{Z}}_2 \cong \widehat{\mathbb{Z}}_2 \times \widehat{\mathbb{Z}}_2.$$

3.3.2. De tipo hiperbólico. Para hacer la descripción de las transformaciones de cubierta en este caso, seguiremos los mismos paso que en el caso de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico), sin embargo, el hecho que las dimensiones de las diferentes variedades Jacobianas involucradas en el límite inverso vaya creciendo de acuerdo al género hace que esto no sea tan fácil.

Siguiendo con nuestra notación, $\widetilde{C}_{g(H)g(H')}$ denotará a la transformación $\mathbb{C}$-lineal inducida por el epimorfismo analítico $C_{g(H)g(H')} : Jac(X_{g(H')}) \longrightarrow Jac(X_{g(H)})$. Asumiremos sin perdida de generalidad (ver sección 1.5 del capitulo 1) que para cada $H \in I$ la variedad Jacobiana tiene la expresión:

$$Jac(X_{g(H)}) = \mathbb{C}^{g(H)}/\Lambda_{g(H)},$$

donde $\Lambda_{g(H)}$ es una retícula en $\mathbb{C}^{g(H)}$.

Es bien sabido (ver **[27]** pag.11) que el $Ker(C_{g(H)g(H')})$ es un subgrupo cerrado de $Jac(X_{g(H')})$ y por lo tanto compacto; más aún, que la componente conexa del $Ker(C_{g(H)g(H')})$ que contiene al cero, $Ker(C_{g(H)g(H')})_0$, es un sub-toro complejo de $Jac(X_{g(H)})$ el cual esta dado explicitamene por:

$$Ker(C_{g(H)g(H')})_0 = \frac{\widetilde{C}^{-1}_{g(H)g(H')}(\Lambda_{g(H)})_0}{\widetilde{C}^{-1}_{g(H)g(H')}(\Lambda_{g(H)})_0 \cap \Lambda_{g(H')})}$$

donde $\widetilde{C}^{-1}_{g(H)g(H')}(\Lambda_{g(H)})_0$ es la componente conexa de $\widetilde{C}^{-1}_{g(H)g(H')}(\Lambda_{g(H)})$ que contiene al cero. Dicha componente conexa es un espacio vectorial de dimensión $g(H') - g(H) = m$. Así, $Ker(C_{g(H)g(H')})_0$ es un toro complejo de dimensión m, es decir, $Ker(C_{g(H)g(H')})_0 = \mathbb{C}^m/\Lambda$ para alguna retícula Λ en $\mathbb{C}^m$. El subgrupo $Ker(C_{g(H)g(H')})$ tiene a lo más un número finito de componentes, ya que es compacto; así $Ker(C_{g(H)g(H')})_0$ es un subgrupo de índice finito en $Ker(C_{g(H)g(H')})$ con lo cual tenemos:

$$Ker(C_{g(H)g(H')})/Ker(C_{g(H)g(H')})_0 = \{p_0 = 0, p_1, \dots p_n\} = \bigsqcup_{i=0}^{n}\{Ker(C_{g(H)g(H')})_0 + p_i\}.$$

De las observaciones anteriores tenemos el siguiente resultado:

Lema 3.3.9. *Si $X_{g(H')}$ y $X_{g(H)}$ son dos superficies de Riemann compactas de géneros $g(H') \geq g(H) \geq 2$ y $C_{g(H)g(H')} : Jac(X_{g(H')}) \longrightarrow Jac(X_{g(H)})$ es el homomorfismo analítico entre sus variedades Jacobianas. Entonces,*

$$Ker(C_{g(H)g(H')}) = \bigsqcup_{i=0}^{n}\{(Ker(C_{g(H)g(H')}))_0 + \tilde{p}_i\}, \tag{71}$$

donde $Ker(C_{g(H)g(H')})_0$ *es la componente conexa del subgrupo* $Ker(C_{g(H)g(H')})$ *que contiene al cero y* $\tilde{p}_i$ *son algunos elementos en* $Ker(C_{g(H)g(H')})$.

Proposición 3.3.10. *La variedad* $Jac(X_{g(H')})$ *fibra sobre la variedad* $Jac(X_{g(H)})$ *con fibra homeomorfa a* $Ker(C_{g(H)g(H')}) = \bigsqcup_{i=0}^{n}\{Ker(C_{g(H)g(H')})_0 + \tilde{p}_i\}$.

Demostración. Por el lema anterior la fibra sobre el elemento identidad es $Ker(C_{g(H)g(H')}) = \bigsqcup_{i=0}^{n}\{Ker(C_{g(H)g(H')})_0+\tilde{p}_i\}$. Para cualquier otro punto $z \in Jac(X_{g(H)}$ su fibra es homeomorfa a $Ker(C_{g(H)g(H')}) = \bigsqcup_{i=0}^{n}\{Ker(C_{g(H)g(H')})_0 + \tilde{p}_i\}$ ya que el homomorfismo esta dado por la traslación que lleva al elemento identidad, en el punto z.

■

Otra demostración:

Demostración. Por la factorización de Stein (ver **[27]** pag.11) sabemos que el epimorfismo analítico $C_{g(H)g(H')}$, se factoriza de manera canónica como

$$C_{g(H)g(H')} = h_{g(H)g(H')} \circ I_{g(H)g(H')},$$

donde $h_{g(H)g(H')} : Jac(X_{g(H')}) \longrightarrow Jac(X_{g(H')})/(KerC_{g(H)g(H')})_0$ es un homomorfismo analítico de toros complejos y $I_{g(H)g(H')} : Jac(X_{g(H')})/(KerC_{g(H)g(H')})_0 \longrightarrow Jac(X_{g(H)})$ es una isogenia. Así, tenemos que

$$Ker(I_{g(H)g(H')}) = I^{-1}_{g(H)g(H')}(0) = \{q_0 = 0, \ldots, q_k\} \tag{72}$$

para alguna $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 1$ y $q_i \neq q_j$ para toda $i \neq j$.
Por otro lado, notemos que para cada q_i, el conjunto $h^{-1}_{g(H)g(H')}(q_i)$ es homeomorfo a un toro complejo de dimensión m, es decir, $h^{-1}_{g(H)g(H')}(q_i) \cong \mathbb{C}^m/\Lambda$. En efecto, ya que el homomorfismo $h_{g(H)g(H')}$ satisface que $h^{-1}_{g(H)g(H')}(0) \cong \mathbb{C}^m/\Lambda$; así, por lo anterior se satisface

$$h^{-1}_{g(H)g(H')}(I^{-1}_{g(H)g(H')}(p)) = h^{-1}_{g(H)g(H')}(\{q_0 = 0, q_1, \ldots, q_k\}) = \bigcup_{i=0}^{k} h^{-1}_{g(H)g(H')}(q_i). \tag{73}$$

Afirmamos que esta unión es una unión disjunta. Para ello primero observemos que $h^{-1}_{g(H)g(H')}(q_i) \neq h^{-1}_{g(H)g(H')}(q_j)$ para toda $i \neq j$. En efecto, ya que $h^{-1}_{g(H)g(H')}(0) \cong h^{-1}_{g(H)g(H')}(q_i) \cong Ker(h_{g(H)g(H')})$, el cual es un toro complejo de dimensión m por la nota anterior. Además, para toda $i \neq j$ se satisface que $h_{g(H)g(H')}(h^{-1}_{g(H)g(H')}(q_i)) = q_i \neq q_j = h_{g(H)g(H')}(h^{-1}_{g(H)g(H')}(q_j))$.
Finalmente, como $h^{-1}_{g(H)g(H')}(q_i)$ es conexo y $h_{g(H)g(H')}$ es un homomorfismo analítico entonces $h^{-1}_{g(H)g(H')}(q_i) \bigcap h^{-1}_{g(H)g(H')}(q_i) = \emptyset$, de donde obtenemos la afirmación.

■

Consideremos al conjunto dirigido I y al sistema $\{Jac(X_{g(H)}), C_{g(H)g(H')}\}_{H,H'\in I}$ (ver ejemplo 1.2.6). Observemos que para cualesquiera $H, H' \in I$ se satisface que $\widetilde{C}_{g(H)g(H')}$ $(\Lambda_{g(H')})$ es un subgrupo normal de índice finito en $\Lambda_{g(H)}$, es decir $\widetilde{C}_{g(H)g(H')}(\Lambda_{g(H')}) \trianglelefteq \Lambda_{g(H)}$; más aún, $\widetilde{C}_{g,g(H)} \circ \widetilde{C}_{g(H)g(H')}(\Lambda_{g(H')})$ es un subgrupo normal de índice finito en Λ_g. Así, consideremos a la familia
$J = \{\widetilde{C}_{g,g(H)} \circ \widetilde{C}_{g(H)g(H')}(\Lambda_{g(H')}) = \widetilde{C}_{g,g(H')}(\Lambda_{g(H')})\ \forall \Lambda_{g(H')}\}_{H,H'\in I}$ de todos los subgrupos normales de índice finito de Λ_g que se obtienen de esta forma y definamos *el orden parcial $\prec$ en J* como sigue:
para cualesquiera $U, V \in J$ decimos que $U \prec V$ si y solamente si V es un subgrupo normal de U.

Lema 3.3.11. *La familia J forma un conjunto dirigido bajo el orden parcial $\prec$.*

Demostración. La familia J está parcialmente ordenada por construcción. Sean $U, V \in J$, definimos el conjunto $W \in J$ como $W = U \bigcap V$, el cual satisface que $U \prec W$ y $V \prec W$.

■

Para cualesquiera $U, V \in J$ tales que $U \prec V$, definimos el morfismo $q_{UV} : \Gamma_V = \Lambda_g/V \longrightarrow \Gamma_U = \Lambda_g/U$ entre los grupos finitos Γ_V y Γ_U, es decir, como $q_{UV} : (\lambda + V) \mapsto (\lambda + U)$ para toda $\lambda \in \Lambda_g$.

Lema 3.3.12. *El conjunto $\{\Gamma_U, q_{UV}\}_{U,V\in J}$ forma un sistema inverso de grupos finitos.*

Demostración. El conjunto $\{\Gamma_U, q_{UV}\}_{U,V\in J}$, esta formado por una familia de grupos finitos, $\{\Gamma_U\}_{U\in J}$ y por una familia de epimorfismos, $\{q_{UV}\}_{U,V\in J}$ tal que se satisface que $q_{UU} = Id_U$ para cada $U \in J$ y si $U, V, W \in J$ son tales que $U \prec V \prec W$ entonces $q_{UV} \circ q_{VW} = q_{UW}$ se da.

■

Por la factorización canónica de Stein tenemos que

$$C_{g(H)g(H')} = I_{g(H)g(H')} \circ h_{g(H)g(H')},$$

donde $I_{g(H)g(H')} : \frac{Jac(X_{g(H')})}{(KerC_{g(H)g(H')})_0} \longrightarrow Jac(X_{g(H)})$. Así, se puede verificar que el grupo de las transformaciones de cubierta,

$$Deck\left(\frac{Jac(X_{g(H')})}{(KerC_{g(H)g(H')})_0} / Jac(X_{g(H)})\right),$$

de este cubriente finito de Galois (o cubriente regular finito) es isomorfo al grupo finito $\Lambda_{g(H)}/C_{g(H)g(H')}(\Lambda_{g(H')})$. En otras palabras, tenemos un isomorfismo natural

$$Deck\left(\frac{Jac(X_{g(H')})}{(KerC_{g(H)g(H')})_0} / Jac(X_{g(H)})\right) \cong \Lambda_{g(H)}/(C_{g(H)g(H')}\Lambda_{g(H')}).$$

El lema y las observaciones anteriores implican el siguiente resultado.

Proposición 3.3.13. *El límite inverso*

$$Deck(Jac(\widehat{X}_{g,\tau})/Jac(X_{g,\tau})) = \varprojlim_{U,V\in J} \{\Gamma_U, q_{UV}\}$$

del sistema inverso $\{\Gamma_U, q_{UV}\}_{U,V\in J}$ *existe.*

Al límite inverso anteiro lo llamaremos *el grupo de transformaciones de cubierta de la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico sobre la Jacobiana de* $X_{g,\tau}$.

Ejemplo 3.3.14. El grupo *Deck* de la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico diádica

Consideremos a la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico díadica:

$$(Jac((\widehat{X}_{2,\tau})_{(2)}), \widehat{C}_{g(H)}) = \varprojlim_{H,H'\in I} \{Jac(X_{g(H)}), C_{g(H)g(H')}\} \tag{74}$$

Supongamos que la superficie de Riemann compacta base es de género 2, con estructura compleja τ y que su variedad Jacobiana está dada como $Jac(X_2) = \mathbb{C}^2/\Lambda_2$, donde $\Lambda_2 = (\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})^2 = \mathbb{Z}^2 \oplus iId_2\mathbb{Z}^2$ y Id_2 denota la matriz identidad en $GL(2,\mathbb{Z})$. Entonces, los grupos $\Gamma_{g(H)}$ explicitamente estan dados por:

$\Gamma_1 = e$

$\Gamma_{g(H)} = \Lambda_2/\widetilde{C}_{2g(H)}(\Lambda_{g(H)})$

$\vdots$

$\Gamma_{g(H')} = \Lambda_2/\widetilde{C}_{2g(H)} \circ \cdots \circ \widetilde{C}_{g(H'')g(H')}(\Lambda_{g(H')})$.

Observemos que $[\widetilde{C}_{2,g(H)}(\Lambda_{g(H)}) : \Lambda_2] = 2, \ldots, [\widetilde{C}_{2,g(H)} \circ \cdots \circ \widetilde{C}_{g(H)g(H')}(\Lambda_{g(H')}) : \Lambda_2] = 2^k$ para alguna $k \in \mathbb{N}$, es decir, los grupos $\Lambda_2/\widetilde{C}_{2g(H)} \circ \cdots \circ \widetilde{C}_{g(H'')g(H')}(\Lambda_{g(H')})$ son grupos finitos de orden 2^n; así como también que los epimorfismos $q_{g(H)g(H')} : \Gamma_{g(H')} \longrightarrow \Gamma_{g(H)}$ están dados explicitamente como $\lambda + \Gamma_{g(H')} \mapsto \lambda + \Gamma_{g(H)}$ para toda λ en Λ_2.

El límite inverso

$$Deck(Jac((\hat{X}_{2,\tau})_{(2)})/Jac(X_2)) = \varprojlim_{H\in I} \{e \xleftarrow{q_{2,g(H')}} \Gamma_{g(H)} \xleftarrow{q_{g(H)g(H')}} \Gamma_{g(H')} \longleftarrow \ldots\}$$

es la completación diádica de Λ_2, (ver la sección 1.2.6), es decir,

$$\varprojlim_{H\in I} \{\Gamma_{g(H)}, q_{g(H)g(H')}\} \cong (\widehat{\mathbb{Z}}_{(2)} \oplus i\widehat{\mathbb{Z}}_{(2)})^2. \tag{75}$$

Nota 3.3.15. Si comenzamos la torre de recubrimientos que definen a la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico díadica con una superficie de género $g > 2$, entonces, obtendremos una laminación $(\widehat{X}_{g,\tau})_{(2)}$ homeomorfa a $(\hat{X}_{2,\tau})_{(2)}$. Así, las Jacobianas de dichas laminaciones son homeomorfas. Más aún, existe el epimorfismo analítico $C_{2g} : Jac(X_g) \longrightarrow Jac(X_2)$. Supongamos que $Jac(X_{g,\tau})$ tiene una expresión de la forma $Jac(X_g) = \mathbb{C}^g/\Lambda_g = \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})^{2g}$, entonces, $Deck(Jac(\hat{X}_{g,\tau})/Jac(X_g)) \cong (\widehat{\mathbb{Z}}_{(2)} \oplus i\widehat{\mathbb{Z}}_{(2)})^{2g}$. Más aún, la transformación $\widetilde{C}_{2g}$ relaciona al grupo de transformaciones de cubierta de $Jac((\widehat{X}_{g,\tau})_{(2)})$ sobre $Jac(X_{g,\tau})$ y al grupo de transformaciones de cubierta de $Jac((\hat{X}_{2,\tau})_{(2)})$ sobre $Jac(X_{2,\tau})$ de la forma:

$$\widetilde{C}_{2g}(Deck(Jac(\widehat{X}_2)/Jac(X_g))) \trianglelefteq Deck(Jac(\widehat{X}_2)/Jac(X_2)). \tag{76}$$

3.4. El cubriente universal generalizado de la Jacobiana.

Entenderemos por *el cubriente universal de la Jacobiana de la laminación universal algebraica (de tipo elíptico o de tipo hiperbólico)* a un espacio foliado (ver definición 1.1.1, sección 1 del capitulo 1), en el cual el grupoide fundamental (el gérmen fundamental, ver [**15**]) actúa dando como cociente un espacio homeomorfo a la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo parabólica o de tipo hiperbólico segun sea el caso.
Al igual que en el caso clásico de espacios topológicos, el cubriente universal de nuestras Jacobianas es el espacio topológico "donde se desacen o desenvuelven" las identificaciones que definen a las Jacobianas universales algebraicas.

3.4.1. De tipo elíptico (o parabólico). Dado que la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo elíptico o parabólico es canónicamente homeomorfa a la laminación, entonces, el grupo fundamental generalizado (el gérmen fundamental, ver [**15**]) de la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo elíptico o parabólico, es el mismo que el de la laminación. Siguiendo el trabajo de T. Gendron [**15**], se puede ver que *el cubriente universal generalizado de la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo elíptico o parabólico* es:

$$\mathbb{C} \times \widehat{\pi}_1(\mathbf{E}_\tau),$$

donde $\widehat{\pi}_1(\mathbf{E}_\tau)$ es la completación profinita del grupo fundamental de la curva elíptica $\mathbf{E}_\tau$ (ver la definición 1.2.20 del capitulo 1).

Nota 3.4.1. Recordemos (ver sección 1.8) que $Jac(X_g)$ es una variedad abeliana principalmente polarizada de dimensión g. Consideremos "la torre de toros complejos T_n^g de dimensión g sobre $Jac(X_g)$", es decir, "la torre" de recubrimientos holomorfos no ramificados finitos a uno (isogenias) sobre $Jac(X_g)$. En otras palabras, tenemos una torre de recubrimientos por variedades abelianas de la misma dimensión que $Jac(X_g)$, dicha torre de recubrimentos está dada por el límite inverso:

$$\widehat{Jac(X_g)} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \{T_n^{g(H)}, h_n\}, \tag{77}$$

donde las h_n son homomorfismos analíticos con kerneles finitos (i.e isogenias). *Este límite inverso tiene la estructra de un $\mathbb{C}$-esquema propio* (ver Mumford [**35**] pag. 44).

Usando los mismos argumentos que los usados en la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico) tenemos que $\widehat{Jac(X_g)}$ es un espacio foliado cuyas hojas son analíticamente equivalentes a $\mathbb{C}^g$, más aún, que *el cubriente universal generalizado de* $\widehat{Jac(X_g)}$ es:

$$\mathbb{C}^g \times_{\widehat{\Lambda}_g} \widehat{\Lambda}_g,$$

donde $\widehat{\Lambda}_{g(H)} \cong \widehat{\pi}_1(Jac(X_g)$ es la completación profinita de Λ_g con respecto al sistema dirigido que define a $\widehat{Jac(X_g)}$.

4

El grupo de divisores y el grupo de Picard de las laminaciones universales algebraicas.

Las flores se deshojan
aunque las amemos,
las malas hierbas crécen
aunque las aborrezcamos;
es así.
(Dogén).

4.1. El grupo de divisores.

En esta sección se define el grupo de divisores en las laminaciones universales algebraicas comenzando con la de tipo elíptico

4.1.1. El grupo de divisores en la laminación universal algebraica de tipo elíptico. Consideremos al sistema inverso $\{(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)}), f_{\tau(H)\tau(H')}\}_{H,H'\in I}$ y al conjunto dirigido I, (ver ejemplo 1.2.6).
Dados cualesquiera $H, H' \in I$ consideremos las curvas elípticas marcadas $(\mathbb{E}_{\tau(H')}, p_{\tau(H')})$ y $(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)})$, la transformación $f_{\tau(H)\tau(H')} : (\mathbb{E}_{\tau(H')}, p_{\tau(H')}) \longrightarrow (\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)})$ holomorfa cubriente no ramificada, los grupos de divisores $Div(\mathbb{E}_{\tau(H')}, p_{\tau(H')})$ y $Div(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)})$ respectivamente, así como el morfismo norma $N_{f_{\tau(H)\tau(H')}} : Div(\mathbb{E}_{\tau(H')}) \longrightarrow Div(\mathbb{E}_{\tau(H)})$ el cual esta dado por

$$N_{f_{\tau(H)\tau(H')}} : D = \sum n_i p_i \to f(D) = \sum n_i f(p_i) \in Div(\mathbb{E}_{\tau(H)})$$

(ver sección 1.6.1).
Con las consideraciones anteriores podemos enunciar el siguiente resultado.

Lema 4.1.1. *El conjunto* $\{Div(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)}); N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}_{H,H'\in I}$ *forma un sistema inverso de grupos libres abelianos.*

Demostración. Es claro que $\{Div(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)})\}_{H\in I}$ es una familia de grupos abelianos libres parametrizadas por I; por otro lado $\{N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}_{H,H'\in I}$ es una familia de epimorfismos analíticos tales que: $N_{f_{\tau(H),\tau(H)}} = Id_{\tau(H)}$ para cada $H \in I$. Sólo falta verificar que para cualesquiera dos $H, H' \in I$ tales que $H \prec H'$ existe un $H'' \in I$ para el cual se satisface la relación:

$$N_{f_{\tau(H)\tau(H'')}} = N_{f_{\tau(H)\tau(H')}} \circ N_{f_{\tau(H')\tau(H'')}}.$$

En efecto, dados H y H' en I tales que $H \prec H'$ existe $H'' \in I$ tal que $H'' \succ H' \succ H$, así como transformaciones $f_{\tau(H)\tau(H'')}$ y $f_{\tau(H')\tau(H'')}$ que satisfacen la relación $f_{\tau(H)\tau(H'')} = f_{\tau(H)\tau(H')} \circ f_{\tau(H')\tau(H'')}$, todo ello por estar en el sistema inverso que determina a la laminación universal algebraica de tipo elíptico (ó parabólico). Así, asociado a $f_{\tau(H)\tau(H')}$ existe $N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}$. Puesto que $N_{f_{\tau(H)\tau(H'')}}$, $N_{f_{\tau(H')\tau(H'')}}$ y $N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}$ son transformaciones sobreyectivas se sigue que $N_{f_{\tau(H)\tau(H')}} \circ N_{f_{\tau(H')\tau(H'')}}$ está bien definida y se satisface $N_{f_{\tau(H)\tau(H'')}} = N_{f_{\tau(H)\tau(H')}} \circ N_{f_{\tau(H')\tau(H'')}}$.

■

El lema anterior implica el siguiente resultado.

Proposición 4.1.2. *El límite inverso*

$$Div(\widehat{\mathbb{E}_\tau, p_\tau}), \widehat{N}_H) = \varprojlim_{H,H' \in I} \{Div(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)}), N_{\tau(H)\tau(H')}\}$$

del sistema inverso $\{Div(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)}), N_{\tau(H)\tau(H')}\}$ *existe.*

Al límite inverso anterior lo llamaremos *el grupo de divisores de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico)* y lo denotaremos simplemente por $Div(\hat{\mathbb{E}}_\tau)$. Así, *un divisor, $\widehat{D}$, en la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico)* será un elemento en $Div(\hat{\mathbb{E}}_\tau)$.
Observemos que de la definición anterior de divisor $\widehat{D}$ tenemos que $\widehat{D}$ puede se pensado como una colección de divisores que estan relacionados, es decir, $\widehat{D} = \{D_{\tau(H)}\}_{H \in I}$ tal que:

- $D_{\tau(H)} \in Div(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)})$ para cada $H \in I$ y
- $N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}(D_{\tau(H')}) = D_{\tau(H)}$ para cada $H, H' \in I$ tal que $H \prec H'$.

Nota 4.1.3. Si cambiamos de puntos base en las curvas elípticas entonces existe un isomorfismo canónico entre los grupos de divisores de las laminaciones, esto se debe al hecho que el isomorfismo se da a cada nivel del límite inverso.

Observación 4.1.4. La operación del grupo en $Div(\hat{\mathbb{E}}_\tau)$ es clara al ser este un grupo abeliano, sin embargo, a dicha operación la debemos pensar como la operación de suma de divisores a cada nivel del límite inverso.

Diremos que un divisor, $\widehat{D} = \{D_{\tau(H)}\}$, en la laminación universal algebraica parabólica es *un divisor efectivo* si cada uno de los divisores $D_{\tau(H)}$ es un divisor efectivo.

4.1.2. El grupo de divisores en la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico. En esta sección definimos el grupo de divisores de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico en completa analogía a la definición para la laminación universal algebraica de tipo elíptico.
Consideremos al conjunto dirigido I y al sistema inverso $\{X_{g(H)}, f_{g(H)g(H')}\}_{H,H'\in I}$ (ver ejemplo 1.2.6). Dados cualesquiera dos $H, H' \in I$ tal que $H \prec H'$ consideremos las superficies de Riemann compactas marcadas $(X_{g(H')}, p_{g(H')})$ y $(X_{g(H)}, p_{g(H)})$ de géneros $g(H') \geq g(H) > 1$ con una estructura hiperbólica fija para $X_{g(H')}$, la transformación holomorfa $f_{g(H)g(H')} : (X_{g(H')}, p_{g(H')}) \longrightarrow (X_{g(H)}, p_{g(H)})$, cubriente no ramificada finita a uno, los grupos de divisores $Div(X_{g(H')})$ y $Div(X_{g(H)})$ respectivamente. Así como el morfismo norma $N_{f_{g(H)g(H')}} : Div(X_{g(H')}) \longrightarrow Div(X_{g(H)})$, (ver sección 1.6.1).

Con las consideraciones anteriores tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.1.5. *El conjunto* $\{Div(X_{g(H)}, p_{g(H)}); N_{f_{g(H)g(H')}}\}_{H,H'\in I}$ *forma un sistema inverso de grupos abelianos (libres).*

Demostración. Esta demostración es completamente análoga a la demostración del lema 4.1.1

∎

El lema anterior implica el siguiente resultado.

Proposición 4.1.6. *El límite inverso*

$$(Div(\widehat{X_g, p_g}), \widehat{N}_H) = \varprojlim_{H,H'\in I} \{Div(X_{g(H)}, p_{g(H)}), N_{f_{g(H)g(H')}}\}$$

del sistema inverso $\{Div(X_{g(H)}, p_{g(H)}), N_{g(H)g(H')}\}$ *existe*

Al límite inverso anterior lo llamaremos *el grupo de divisores de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico* y lo denotaremos simplemente por $Div(\hat{X}_{g,\tau})$.
Así, *un divisor,* $\widehat{D}$*, en la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico* será un elemento de $Div(\hat{X}_{g,\tau})$.

Observación 4.1.7. Un divisor $\widehat{D}$ en la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico es una colección $\{D_{g(H)}\}_{H\in I}$ tal que:

- $D_{g(H)} \in Div(X_{g(H)})$ para cada $H \in I$.
- $N_{f_{g(H)g(H')}}(D_{g(H')}) = D_{g(H)}$ para cada $H, H' \in I$ con $H' \succ H$.

Observación 4.1.8. La operación de grupo en $Div(\hat{X}_{g,\tau})$ está dada explícitamente como la operación de suma de divisores a cada nivel del límite inverso.

Definición 4.1.9. Diremos que un divisor, $\widehat{D} = \{D_{g(H)}\}$, en la laminación universal algebraica hiperbólica es *un divisor efectivo*, si cada uno de los divisores $D_{g(H)}$ es un divisor efectivo.

4.2. Divisores de grado d y la proto-variedad de Divisores de grado d.

Comenzamos esta sección definiendo el grado de un divisor en las laminaciones universales algebraicas. Usando esta definición de grado y las propiedades de la transformación **norma** hacemos un análisis más detallado de los divisores de grado d en las laminaciones universales algebraicas.

4.2.1. El grado de un divisor en las laminaciones universales algebraicas. Consideremos dos divisores $D_1 = \sum n_i p_i$ y $D_2 = \sum m_j q_j$ en la superficie de Riemann compacta X_g tales que tienen el mismo grado, equivalentemente, $deg(D_1 - D_2) = 0$. Supongamos que $f : X_{g(H)} \longrightarrow X_g$ es una transformación holomorfa no-ramificada, cubriente finita a uno.

Lema 4.2.1. *Los elementos del conjunto $Nm_f^{-1}(D_1 - D_2)$ son divisores en la superficie de Riemann compacta $X_{g(H)}$ de grado cero.*

Demostración. Recordemos que la transformación norma Nm_f preserva los grados de los divisores y es sobreyectiva (ver observación 1.6.9). Así, si $Nm_f^{-1}(D_1 - D_2) = \{D_k\}$, entonces, $Nm_f(D_k) = D_1 - D_2$, con lo cual obtenemos el resultado.

■

Consideremos un divisor $\widehat{D} = \{D_H\}$ en las laminaciones universales algebraicas y d un número entero.
En base al lema anterior hacemos la siguiente definición.

Definición 4.2.2. El grado del divisor $\widehat{D}$ en las laminaciones universales algebraicas es la función $deg : Div(\hat{X}_{g,\tau}) \longrightarrow \mathbb{Z}$ la cual asocia el grado usual de cualquier D_H que forman a $\widehat{D}$. En otras palabras, diremos que $\widehat{D}$ tiene grado d si cada uno de los elementos en la colección que definen a $\widehat{D}$ tiene grado d.

4.2.2. De tipo elíptico (o parabólico). Observemos que sobre un divisor $\widehat{D}$ de grado d en $\mathbf{E}_{\tau(H)}$ hay un número de divisores de grado d en $\mathbf{E}_{\tau(H')}$ que es igual al grado de la transformación norma $N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}$.

4.2.2.1. *Divisores de grado cero.* Para el caso particular $d = 0$, tenemos que el conjunto de divisores de grado cero en $\mathbf{E}_\tau$ es un grupo cuyos elementos se pueden escribir como $q_\tau - p_\tau$ donde q_τ es un punto arbitrario de $\mathbf{E}_\tau$ y p_τ es el punto que hemos escogido en esta curva elíptica, el cual juega el papel del neutro del grupo.

Consideremos las curvas elípticas marcadas $(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)})$, así como las transformaciones holomorfas $f_{\tau(H)\tau(H')} : (\mathbb{E}_{\tau(H')}, p_{\tau(H')}) \longrightarrow (\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)})$ en el sistema inverso que determina a la laminación universal algebraica de tipo elíptico (ó parabólico) (ver ejemplo en la sección 1.2.6).

Para cada una de las curvas elípticas marcadas, $(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)})$, consideremos su grupo de divisores y el morfismo de Abel-Jacobi, $\varphi_{\tau(H)} : Div(\mathbb{E}_\tau, p_{\tau(H)}) \longrightarrow Jac(\mathbb{E}_\tau, p_{\tau(H)})$. Este morfismo esta dado explicitamente por: $\sum n_i p_i \mapsto \varphi_{\tau(H)}(\sum n_i p_i)$, donde $\varphi(\sum n_i p_i)$ denota la suma de los puntos del divisor $D = \sum n_i p_i$ como puntos de la curva elíptica $\mathbb{E}_\tau$.
Con todo lo anterior tenemos el siguiente lema.

Lema 4.2.3. *El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} Div(\mathbb{E}_{\tau(H)}) & \xrightarrow{\varphi_{\tau(H)}} & Jac(\mathbb{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)}) \\ {\scriptstyle N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle C_{\tau(H)\tau(H')}} \\ Div(\mathbb{E}_\tau) & \xrightarrow{\varphi_\tau} & Jac(\mathbb{E}_\tau, p_\tau) \end{array}$$

es conmutativo.

Usando el lema anterior tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.2.4. *Existe un morfismo canónico, $\widehat{\varphi}$, entre el grupo de divisores en la laminación universal algebraica de tipo elíptica (ó parabólico) y la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (ó parabólico), es decir,*

$$\widehat{\varphi} : Div(\hat{\mathbb{E}}_\tau) \longrightarrow Jac(\hat{\mathbb{E}}_\tau).$$

Definición 4.2.5. Al morfismo canónico $\widehat{\varphi} : Div(\hat{\mathbb{E}}_\tau) \longrightarrow Jac(\hat{\mathbb{E}}_\tau)$ anterior lo llamaremos *el morfismo de Abel-Jacobi de tipo elíptico (o parabólico).*

4.2.2.2. *Divisores de grado d.* Para el caso $d \in \mathbb{Z}$ en general, sabemos que el grupo de divisores de grado d en una curva elíptica está en correspondencia biyectiva con la curva elíptica, de hecho es "un transladado" del grupo de divisores de grado cero. Así, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.2.6. *El conjunto de divisores de grado d de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico) está en correspondencia biyectiva con la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico).*

Nota 4.2.7. El límite inverso

$$H = \varprojlim_{H \in I} \{Ker(N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}); N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}$$

del sistema inverso $\{Ker(N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}); N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}_{H \in I}$ es un subgrupo del grupo de divisores de grado cero de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico), el cual es isomorfo con el conjunto de Cantor $\prod_{p \in P} \widehat{\mathbb{Z}}_{(p)}$ visto como grupo topológico.

Recordemos que para cada $d \in \mathbb{Z}$ el grupo de divisores $Div_d(X_g)$ en una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 1$ puede ser identificado con los subconjuntos (subvariedades analíticas) de su variedad Jacobiana, $Jac(X_g)$, mediante el morfismo de Abel-Jacobi (ver sección 1.7). Así, enunciamos el siguiente resultado.

Lema 4.2.8. *Para cada $d \in \mathbb{Z}$ los conjuntos $\{Div_d(\mathbb{E}_{\tau(H)}), N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}_{H\in I}$ y $\{Div_d(X_{g(H)}), N_{f_{g(H)g(H')}}\}_{H\in I}$ forman sistemas inversos de subvariedades analíticas.*

Demostración. Este resultado es una consecuencia del hecho que las transformaciones norma $N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}$ preserva grados y del hecho que $\{Div_d(\mathbb{E}_{\tau(H)}), N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}_{H\in I}$ es un subconjunto del sistema inverso $\{Jac(\mathbb{E}_{\tau(H)}), C_{\tau(H)\tau(H')}\}_{H\in I}$. Ya que las condiciones para formar un sistema inverso se satisfacen simplemente por restricción.
La demostración para el caso de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico es análoga.

■

El lema anterior implica el siguiente resultado.

Proposición 4.2.9. *Para cada $d \in \mathbb{Z}$ los límites inversos*

$$Div_d(\hat{\mathbb{E}}_\tau) = \varprojlim_{H\in I} \{Div_d(\mathbb{E}_{\tau(H)}), N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}_{H\in I}$$

y

$$Div_d(\hat{X}_{g,\tau}) = \varprojlim_{H\in I} \{Div_d(X_{g(H)}), N_{f_{g(H)g(H')}}\}_{H\in I}$$

de los sistemas inversos $\{Div_d(\mathbb{E}_{\tau(H)}), N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}_{H\in I}$ y $\{Div_d(X_{g(H)}), N_{f_{g(H)g(H')}}\}_{H\in I}$ existen.

Definición 4.2.10. A los límites inversos $Div_d(\hat{\mathbb{E}}_\tau)$ y $Div_d(\hat{X}_{g,\tau})$ los llamaremos *la proto-variedad de divisores de grado d de la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo elíptico y de tipo hiperbólico* respectivamente.

Nota 4.2.11. El nombre de proto-variedad esta inspirado en por el trabajo *Groupes proalgebriques* de Jean Pierre Serre (*Publications Mathématiques del' I.H.E.S. tome 7 (1960)* págs.5-67.

En particular, $Div_0(\hat{\mathbb{E}}_\tau)$ ($Div_0(\hat{X}_{g,\tau})$) es *la proto-variedad de divisores de grado cero de la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (de tipo hiperbólico).*

4.2.3. De tipo hiperbólico. En esta sección enunciamos los rsultados sobre los divisores de grado d y la proto-variedad de divisores de grado d en la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico. Las demostraciones son completamente análogas a las demostraciones de los resultados en la sección de la laminación universal algebraica de tipo elíptico.

Consideremos las superficies de Riemann compactas marcadas $(X_{g(H)}, p_{g(H)})$, así como las transformaciones holomorfas $f_{g(H)g(H')} : (X_{g(H')}, p_{g(H')}) \longrightarrow (X_{g(H)}, p_{g(H)})$ en el sistema inverso que determina a la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico (ver ejemplo en la sección 1.2.6).
Para cada una de las superficies de Riemann marcadas $(X_{g(H)}, p_{g(H)})$ consideremos su grupo de divisores y el morfismo $\varphi_{g(H)} : Div(X_{g(H)}, p_{g(H)}) \longrightarrow Jac(X_{g(H)}, p_{g(H)})$ de Abel-Jacobi.

Lema 4.2.12. *El siguiente diagrama es conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} Div(X_{g(H')}) & \xrightarrow{\varphi_{g(H')}} & Jac(X_{g(H')}, p_{g(H)}) \\ {\scriptstyle N_{f_{g(H)g(H')}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C_{g(H)g(H')}} \\ Div(X_{g(H)}) & \xrightarrow{\varphi_{g(H)}} & Jac(X_{g(H)}, p_{g(H)}) \end{array}$$

Teorema 4.2.13. *Existe un morfismo canónico, $\widehat{\varphi}$, entre el grupo de divisores de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico y la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico.*

Definición 4.2.14. Llamaremos al morfismo canónico $\widehat{\varphi} : Div(\hat{X}_{g,\tau}) \longrightarrow Jac(\hat{X}_{g,\tau})$ anterior *el morfismo de Abel-Jacobi de tipo hiperbólico.*

4.3. Divisores principales.

En esta sección definimos a los divisores principales y a los grupos de divisores principales en las laminaciones universales algebraicas. También se prueba un resultado para caracterizar a los divisores principales en el caso de la laminación universal algebraica de tipo elíptico.

Consideremos dos superficies de Riemann compactas X_r y X_g de géneros $r \geq g \geq 1$. Sea $f_{gr} : X_r \longrightarrow X_g$ una transfrormación holomorfa no constante.

Lema 4.3.1. *La transformación norma $N_{f_{gr}} : Div(X_r) \longrightarrow Div(X_g)$ se restringe al subconjunto de divisores de grado d; más aún, al subgrupo de divisores principales.*

Demostración. De la observación 1.6.9 se sigue que la transformación norma restringida a los divisores de grado d en la superficie X_r tiene como imagen a los divisores de grado d en la superficie X_g.
Si D y D' son dos divisores en X_r linealmente equivalentes, es decir, existe un divisor principal $(h) \in DivP(X_r)$ tal que $D - D' = (h)$, del lema 1.6.10 tenemos que $N_{f_{gr}}(D)$ y $N_{f_{gr}}(D')$ son linealmente equivalentes en X_g y por lo tanto existe un divisor principal $(g) \in DivP(X_g)$ tal que $N_{f_{gr}}(D) - N_{f_{gr}}(D') = (g)$, de donde definimos $N_{f_{gr}}(h) = (g)$, con lo cual concluimos la última parte del lema.

■

Nota 4.3.2. La transformación $N_{f_{gr}}$ definida en la demostración anterior esta bien definida modulo multiplicación por constantes.

Usando la definición de divisor en las laminaciones universales algebraicas, el hecho que la transformación norma preserva grados y el hecho que la restricción de la transformación norma a los divisores de grado cero y al subgrupo de divisores principales es sobreyectiva hacemos la siguiente definición.

Definición 4.3.3. Un divisor $\widehat{D} = \{D_H\}$ las laminaciones universales algebraicas será llamado *un divisor principal*, si cada uno de los divisores en la colección que define al divisor $\widehat{D}$ es principal.

Lema 4.3.4. *El conjunto* $\{DivP(\mathbb{E}_{\tau(H)}), N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}_{H\in I}$ *así como el conjunto* $\{DivP(X_{g(H)}), N_{f_{g(H)g(H')}}\}_{H\in I}$ *forman sistemas inversos de grupos abelianos.*

Demostración. Este resultado es una consecuencia del hecho que el conjunto $\{DivP(X_{g(H)}), N_{f_{g(H)g(H')}}\}_{H\in I}$ es un subconjunto del conjunto que sirve para definir al límite inverso $Div_0(\widehat{X}_{g(H)})$ ya que para cada $H \in I$, $DivP(X_{g(H)})$ es un subgrupo de $Div_0(X_{g(H)})$ y la transformación norma esta bien definida. Así, es claro que por restricción se satisfacen las condiciones para formar un límite inverso. La demostración en el caso elíptico es análoga.

■

Usando el lema anterior tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.3.5. *Los límites inversos*

$$DivP(\hat{\mathbb{E}}_\tau) = \varprojlim_{H\in I}\{DivP(\mathbb{E}_{\tau(H)}), N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}$$

y

$$DivP(\hat{X}_{g,\tau}) = \varprojlim_{H\in I}\{DivP(X_{g(H)}), N_{f_{g(H)g(H')}}\}$$

de los sistemas inversos $\{DivP(\mathbb{E}_{\tau(H)}), N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}$ *y* $\{DivP(X_{g(H)}), N_{f_{g(H)g(H')}}\}_{H\in I}$ *existen.*

Definición 4.3.6. Los límites inversos $DivP(\hat{\mathbb{E}}_\tau)$ y $DivP(\hat{X}_{g,\tau})$ anteriores serán llamados *el grupo de divisores principales de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico) y de tipo hiperbólico* respectivamente.

Teorema 4.3.7. *Si* $\widehat{D} = \{D_{\tau(H)}\}$ *es un divisor en la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico), entonces,* $\widehat{D}$ *es un divisor principal si y solo si se satisface*

- $deg(\widehat{D}) = 0$ *y*

- $\widehat{\phi}(\widehat{D}) = \{\varphi_{\tau(H)}(D_{\tau(H)}\}_{H\in I} = \{p_{\tau(H)}\}_{H\in I} = 0 \in \hat{\mathbf{E}}_{\tau}$.

donde $\widehat{\varphi}$ es el morfismo de Abel-Jacobi de tipo elíptico.

Demostración. Si $\widehat{D} = \{D_{\tau(H)}\}$ es un divisor principal, entonces, $deg(D_{\tau(H)}) = 0$ y $\varphi_{\tau(H)}(D_{\tau(H)}) = 0$ para todo $D_{\tau(H)}$.
Por el contrario, si se satisface que $deg(\widehat{D}) = 0$ y $\widehat{\phi}(\widehat{D}) = \{\varphi_{\tau(H)}(D_{\tau(H)}\}_{H\in I} = \{p_{\tau(H)}\}_{H\in I} = 0 \in \hat{\mathbf{E}}_{\tau}$, entonces, los elementos en $\{D_{\tau(H)}\}$ tienen grado cero y $\varphi(\{D_{\tau(H)}\}) = p_{\tau(H)} = 0 \in \mathbf{E}_{\tau(H)}$, por lo tanto $\widehat{D} = \{D_{\tau(H)}\}$ es un divisor principal.

■

4.4. Funciones meromorfas tangenciales y el grupo de los divisores principales.

En esta sección exhibiremos que existen funciones meromorfas tangenciales no triviales en las laminaciones universales algebraicas mediante la construcción de un conjunto de funciones meromorfas no triviales que nunca se anulan. Empezamos con la laminación universal algebraica de tipo elíptico.

4.4.1. De tipo elíptico (o parabólico). Consideremos dos curvas elípticas $\mathbf{E}_{\tau}$ y $\mathbf{E}_{\tau'}$, una aplicación holomorfa no raificada, $f_{\tau\tau'} : \mathbf{E}_{\tau'} \longrightarrow \mathbf{E}_{\tau}$, cubriente, así como los conjuntos $\mathcal{M}(\mathbf{E}_{\tau})$ y $\mathcal{M}(\mathbf{E}_{\tau'})$ de funciones meromorfas de $\mathbf{E}_{\tau}$ y $\mathbf{E}_{\tau'}$ respectivamente.
Denotamos por $\mathcal{M}(\mathbf{E}_{\tau})^*$ y $\mathcal{M}(\mathbf{E}_{\tau'})^*$ a los subconjuntos de $\mathcal{M}(\mathbf{E}_{\tau})$ y $\mathcal{M}(\mathbf{E}_{\tau'})$ formados por las funciones meromorfas que nunca se anulan.

Para cada función meromorfa h en $\mathbf{E}_{\tau}$, i.e. $h \in \mathcal{M}(\mathbf{E}_{\tau'})$, definimos la función meromorfa $Nm_{f_{\tau\tau'}}(h)$ en $\mathcal{M}(\mathbf{E}_{\tau})$, de la forma siguiente:

$$Nm_{f_{\tau\tau'}}(h)(p) = \prod_{q\in f_{\tau\tau'}^{-1}(p)} h(q)$$

(ver sección 1.6.1 del capítulo 1).
Es un hecho bien conocido que la transformación $Nm_{f_{\tau\tau'}} : \mathcal{M}(\mathbf{E}_{\tau'})^* \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{E}_{\tau})^*$ es un homomorfismo sobreyectivo de grupos (multiplicativos) (ver **[11]** pág. 282).

Tomemos al conjunto dirigido I que ocupamos para definir a la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico) (ver ejemplo 1.2.6). Para cada una de las curvas elípticas marcadas $(\mathbf{E}_{\tau(H)}, p_{\tau(H)})$ consideremos el grupo multiplcativo $\mathcal{M}(\mathbf{E}_{\tau(H)})^*$ junto con los morfismos norma $\{Nm_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}_{H,H'\in I}$. Así tenemos:

Lema 4.4.1. *El conjunto $\{\mathcal{M}(\mathbf{E}_{\tau(H)})^*; Nm_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}_{H,H'\in I}$ forma un sistema inverso de grupos multiplicativos.*

Demostración. Es claro que $\{\mathcal{M}(\mathbb{E}_{\tau(H)})^*\}_{H,H'\in I}$ es una familia de grupos y que $\{Nm_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}_{H,H'\in I}$ es una familia de morfismos sobreyectivos con indices en el conjunto I tal que $Nm_{f_{\tau(H)\tau(H')}} = Id$, ya que $f_{\tau(H)\tau(H')}$ es la identidad. Así, sólo falta verificar que dados $H, H', H'' \in I$ tales que $H \prec H' \prec H''$ se satisface la relación $Nm_{f_{\tau(H)\tau(H'')}} = Nm_{f_{\tau(H)\tau(H')}} \circ Nm_{f_{\tau(H')\tau(H'')}}$. Dicha relación se satisface por que las transformaciones $f_{\tau(H)\tau(H')}$ las satisfacen.

Usando el lema anterior tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.4.2. *El límite inverso*

$$\mathcal{M}(\hat{\mathbb{E}}_\tau)^* = \varprojlim_{H\in I}\{\mathcal{M}(\mathbb{E}_{\tau(H)})^*; Nm_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}$$

del sistema inverso $\{\mathcal{M}(\mathbb{E}_{\tau(H)})^*; Nm_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}_{H,H'\in I}$ *existe.*

Definición 4.4.3. Al límite inverso $\mathcal{M}(\hat{\mathbb{E}}_\tau)^*$ anterior lo llamaremos *el conjunto de las funciones meromorfas que nunca se anulan en la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico).*

4.4.2. De tipo hiperbólico. En esta sección enunciamos los resultados para el caso de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico. Las demostraciones son análogas a las dadas en la sección anterior.

Consideremos dos superficies de Riemann compactas X_r y X_g de géneros $r \geq g \geq 2$ respectivamente y una aplicación holomorfa no ramificada, $f_{gr} : X_r \longrightarrow X_g$, cubriente. Denotamos por $\mathcal{M}(X_g)$ al conjunto de las funciones meromorfas ($\equiv$ racionales) globales en la superficie X_g y por $\mathcal{M}^*(X_g)$ al subconjunto de $\mathcal{M}(X_g)$ de las funciones meromorfas ($\equiv$ racionales) globales que nunca se anulan.

Dada la función meromorfa $h \in \mathcal{M}(X_r)$ definimos una función meromorfa $Nm_{f_{gr}}(h)$ en $\mathcal{M}(X_g)$ como:

$$Nm_{f_{gr}}(h)(p) = \prod_{q\in f_{gr}^{-1}(p)} h(q).$$

Es un hecho bien conocido que la transformación norma:

$$Nm_{f_{gr}}(h) : \mathcal{M}(X_r)^* \longrightarrow \mathcal{M}(X_g)^*$$

es un homomorfismo sobreyectivo de grupos (multiplicativos) (ver sección 1.6.1 del capítulo 1).

Tomemos al conjunto dirigido I que ocupamos para definir a la laminación universal algebraica hiperbólica (ver ejemplo 1.2.31) y consideremos la familia de grupos multiplicativos y morfismos parametrizada por I $\{\mathcal{M}(X_{g(H)})^*; Nm_{f_{g(H)g(H')}}\}_{H,H'\in I}$.

Lema 4.4.4. *El conjunto* $\{\mathcal{M}(X_{g(H)})^*; Nm_{f_{g(H)g(H')}}\}_{H,H'\in I'}$ *forma un sistema inverso de grupos multiplicativos.*

Proposición 4.4.5. *El límite inverso*

$$\mathcal{M}^*(\hat{X}_{g,\tau}) = \varprojlim_{H\in I'} \{\mathcal{M}^*(X_{g(H)}), N_{f_{g(H)g(H')}}\}$$

del sistema inverso $\{\mathcal{M}(X_{g(H)})^*; Nm_{f_{g(H)g(H')}}\}_{H,H'\in I'}$ *existe.*

Definición 4.4.6. Al límite inverso anterior lo llamaremos *el conjunto de las funciones meromorfas que nunca se anulan en la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico.*

4.5. El grupo de Picard

En esta sección definimos al grupo de Picard de las laminaciones universales algebraicas.

Del hecho que el grupo de Picard de una superficie de Riemann compacta de género g se puede ver como una unión disjunta de clases laterales del grupo, es decir, $Pic(X_g) = \bigsqcup_{d\in\mathbb{Z}} Pic_d(X_g)$, y puesto que la transformación norma Nm_f está definida de $Pic(X_\tau)$ a $Pic(X_g)$, preserva grados y es sobreyetiva (ver 1.6.8) entonces, podemos pensar en el límite inverso de los grupos de Picard junto con los límites inversos de las clases laterales $Pic_d(X_g)$.

Lema 4.5.1. *El conjunto* $\{Pic(\mathbb{E}_{\tau(H)}), N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}_{H,H'\in I}$ *así como el conjunto* $\{Pic(X_{g(H)}), N_{f_{g(H)g(H')}}\}_{H,H'\in I}$ *forman sistemas inversos de grupos.*

Demostración.

■

El siguiente resultado es una consecuencia del lema anterior.

Proposición 4.5.2. *Los límites inversos*

$$Pic(\hat{\mathbb{E}}_\tau) = \varprojlim \{Pic(\mathbb{E}_{\tau(H)}), N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}_{H,H'\in I}$$

y

$$Pic(\hat{X}_{g,\tau}) = \varprojlim \{Pic(X_{g(H)}), N_{f_{g(H)g(H')}}\}_{g(H)g(H')\in I}$$

del sistema inverso $\{Pic(\mathbb{E}_{\tau(H)}), N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}_{H,H'\in I}$ *y del sistema inverso* $\{Pic(X_{g(H)}), N_{f_{g(H)g(H')}}\}_{g(H)g(H')\in I}$ *existen.*

Definición 4.5.3. A los límites inversos $Pic(\hat{\mathbb{E}}_\tau)$ y $Pic(\hat{X}_{g,\tau})$ anteriores los llamaremos *el grupo de Picard de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico) y el grupo de Picard de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico* respectivamente.

Ahora consideraremos los límites inversos de los conjuntos $Pic_d(\mathbb{E}_{g(H)})$ y $Pic_d(X_{g(H)})$ y veremos su relación con los grupos de Picard de las laminaciones universales algebraicas anteriores.

Lema 4.5.4. *Para cada $d \in \mathbb{Z}$ el conjunto $\{Pic_d(X_{\tau(H)}), N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}_{H,H'\in I}$ y el conjunto $\{Pic_d(X_{g(H)}), N_{f_{g(H)g(H')}}\}_{g(H)g(H')\in I}$ forman sistemas inversos de conjuntos.*

Demostración.

■

Proposición 4.5.5. *Los límites inversos*

$$Pic(\hat{\mathbb{E}}_\tau) = \varprojlim_{H\in I}\{Pic_d(\mathbb{E}_{\tau(H)}), N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}$$

y

$$Pic_d(\hat{X}_{g,\tau}) = \varprojlim_{H\in I}\{Pic_d(X_{g(H)}), N_{f_{g(H)g(H')}}\}$$

del sistema inverso $\{Pic_d(\mathbb{E}_{\tau(H)}), N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\}_{H,H'\in I}$ y del sistema inverso $\{Pic_d(X_{g(H)}), N_{f_{g(H)g(H')}}\}$ existen

Definición 4.5.6. Los límites inversos $Pic(\hat{\mathbb{E}}_\tau)$ y $Pic_d(\hat{X}_{g,\tau})$ anteriores y serán llamados *el conjunto de haces lineales de clase de Chern d de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico) y el conjunto de haces lineales ce clase de Chern d de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico* respectivamente.

Observación 4.5.7. Un haz lineal holomorfo tangencial L en las laminaciones universales algebraicas de clase de Chern d es una sucesión $\{L_H\}$ de haces lineales holomorfos de clase de Chern d, es decir, $L_{\tau(H)} \in Pic_d(\mathbb{E}_{\tau(H)})$ y $L_{g(H)} \in Pic_d(X_{g(H)})$ para cada $H \in I$ respectivamente.

Teorema 4.5.8. *Existen biyecciones no canónicas entre los conjuntos de haces lineales de clase de Chern d de las laminaciones universales algebraicas y los grupos de haces lineales de clase de Chern 0 de las laminaciones universales algebraicas.*

Demostración. Las biyecciones están dadas como las sucesiones de biyecciones no canonicas a cada nivel.

■

Teorema 4.5.9. *Existen isomorfismos*

$$Pic(\hat{\mathbb{E}}_\tau) = \bigsqcup_{d\in\mathbb{Z}} \varprojlim\{Pic_d(\mathbb{E}_{\tau(H)}), N_{f_{\tau(H)\tau(H')}}\} \cong Div_0(\hat{\mathbb{E}}_\tau)/DivP(\hat{\mathbb{E}}_\tau)$$

y

$$Pic(\hat{X}_{g,\tau}) = \bigsqcup_{d\in\mathbb{Z}} \varprojlim\{Pic_d(X_{g(H)}), N_{f_{g(H)g(H')}}\} \cong Div_0(\hat{X}_{g,\tau})/DivP(\hat{X}_{g,\tau}).$$

Demostración.

■

4.6. La relación entre la Jacobiana, el grupo de divisores y la proto-variedad de Picard.

4.6.1. La proto-variedad de Picard. Consideremos a los sistemas inversos que determinan a las laminaciones universales algebraicas universales (ver ejemplo 1.2.6 del capítulo 1). Para cada una de las superficies de Riemann involucradas en dicho sistema inverso tomemos su variedad Jacobiana, su variedad de Picard y los homomorfismos sobreyectivos $C_{g(H)g(H')}$ y $Nm_{f_{g(H)g(H')}}$ entre ellas respectivamente.
Sabemos que en el caso de superficies de Riemann compactas existe un isomorfismo canónico entre la variedad de Picard y la variedad Jacobiana (ver proposición 1.6.7 del capitulo 1). Por lo cual es inmediato ver que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} Jac(X_{g(H')}) & \xrightarrow{\cong} & Pic_0(X_{g(H')}) \\ {\scriptstyle C_{g(H)g(H')}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle N_{f_{g(H)g(H')}}} \\ Jac(X_{g(H)}) & \xrightarrow{\cong} & Pic_0(X_{g(H)}) \end{array}$$

es conmutativo, donde $C_{g(H)g(H')}$ es el homomorfismo sobreyectivo definido en la sección 3.1.2.

Por todo lo anterior tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.6.1. *Existe un isomorfismo canónico, $\widehat{\phi}_g$, entre la Jacobiana y la proto-variedad de Picard de las laminaciones universales algebraicas, es decir,*

$$Jac(\hat{\mathbb{E}}_\tau) \cong Pic_0(\hat{\mathbb{E}}_\tau),$$

$$Jac(\hat{X}_{g,\tau}) \cong Pic_0(\hat{X}_{g,\tau}).$$

Definición 4.6.2. Al morfismo $\widehat{\phi}_g$ anterior lo llamaremos *el homomorfismo de Abel-Jacobi.*

Nota 4.6.3. Notemos que el isomorfismo canónico $\widehat{\phi}$ está dado por la sucesión de morfismos de Jacobi, es decir, $\widehat{\phi} = \{\phi_{g(H)}\}_{g\in I}$.

Usando los mismos argumentos que en los parrofos anteriores tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.6.4. *Existe un morfismo canónico $\widehat{\varphi}$ del grupo de divisores de la laminación universal algebriaca de tipo elíptico (o parabólico) (de tipo hiperbólico) en la*

Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo elíptico (o parabólico) (de tipo hiperbólico respectivamente), es decir,

$$\widehat{\varphi} : Div(\hat{\mathbf{E}}_\tau) \longrightarrow Jac(\hat{\mathbf{E}}_\tau), \quad \widehat{\varphi} : Div(\hat{X}_{g,\tau}) \longrightarrow Jac(\hat{X}_{g,\tau}).$$

Definición 4.6.5. Al morfismo canónico $\widehat{\varphi}$ entre el grupo de divisores y la Jacobiana de las laminaciones universales algebraicas lo llamaremos *el morfismo de Jacobi.*

Observemos que se tienen los diagramas conmutativos:

$$\begin{array}{ccccc} Div(X_\tau) & \xrightarrow{\varphi_\tau} & Jac(X_\tau) & \xrightarrow{\cong} & Pic_0(X_\tau) \\ {\scriptstyle N_{f_{g(H)g(H')}}}\big\downarrow & & {\scriptstyle C_{g(H)g(H')}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle N_{f_{g(H)g(H')}}} \\ Div(X_g) & \xrightarrow{\varphi_g} & Jac(X_g) & \xrightarrow{\cong} & Pic_0(X_g) \end{array}$$

Usando el hecho que la imagen bajo la transformación de Abel-Jacobi $A_{g(H)} : X_{g(H)} \longrightarrow Jac(X_{g(H)})$ de un punto $p \in X_{g(H)}$ es lo mismo que la imagen del divisor $p - p_0$ bajo el homomorfismo de Jacobi (ver **[16]** cap.2) tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.6.6. *La imagen bajo la transformación de Abel-Jacobi* $\widehat{A} : \hat{X}_{g,\tau} \longrightarrow Jac(\hat{X}_{g,\tau})$ *de un punto* $\widehat{p}$ *es lo mismo que la imagen bajo el morfismo de Jacobi* $\widehat{\varphi} : Div(\hat{X}_{g,\tau}) \longrightarrow Jac(\hat{X}_{g,\tau})$ *del divisor* $\widehat{p} - \widehat{p_0}$ *y este divisor corresponde al haz lineal* $L_{\widehat{p}} L_{\widehat{p_0}}^{-1} \in Pic_0(\hat{X}_{g,\tau})$.

Demostración. Este resultado es una consecuencia del hecho que las transformaciones de $A_{g(H)}$ y $\varphi_{g(H)}$ están definidas a cada nivel del límite inverso y en cada uno de estos niveles el resultado se sigue.

∎

4.7. Los conjuntos de divisores positivos de grado k en la Jacobiana de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico.

4.7.1. El k-producto simétrico de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico. En esta sección se define el k-producto simétrico de la laminación universal de tipo hiperbólico.

Consideremos a las superficies de Riemann compactas $X_{g(H)}$ que aparecen en el límite inverso que define a la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico.

Sea k cualquier entero positivo y consideremos el k-producto cartesiano $X^k_{g(H')}$ y $X^k_{g(H)}$de las superficies de Riemann compactas $X_{g(H')}$ y $X_{g(H)}$ de géneros $g(H') \geq g(H)$ respectivamente.

Definimos la transformación holomorfa no ramificada, $f^k_{g(H)g(H')} : X^k_{g(H')} \longrightarrow X^k_{g(H)}$, entre los k-productos cartesianos de las superficies como:

$$f^k_{g(H)g(H')}(z_1,\ldots,z_k) = (f_{g(H)g(H')}(z_1),\ldots,f_{g(H)g(H')}(z_k)).$$

Lema 4.7.1. *El conjunto* $\{X^k_{g(H)}, f^k_{g(H)g(H')}\}_{H\in I}$ *forma un sistema inverso de variedades complejas de dimensión* k.

Demostración. Por definición la transformación $f^k_{g(H)g(H')}$, es una transformación sobreyectiva. Así, $\{X_{g(H)}\}$ es una familia de variedades complejas de dimensión k y $\{f^k_{g(H)g(H')}\}$ es una familia de transformaciones holomorfas sobreyectivas. Dados $H, H' \in I$ tales que $H \prec H'$, entonces, existen un $H'' \in I$ tal que $H \prec H''$ y $H' \prec H''$, en otras palabras, dados $g(H)$ y $g(H')$ tales que $g(H) \leq g(H')$, entonces, existe $g(H'')$ tal que $g(H) \leq g(H') \leq g(H'')$; así como transformaciones holomorfas no ramificadas $f_{g(H)g(H")}$: $X^k_{g(H'')} \longrightarrow X^k_{g(H)}$ y $f_{g(H')g(H")} : X^k_{g(H'')} \longrightarrow X^k_{g(H')}$ que satisfacen la relación $f^k_{g(H)g(H")} = f^k_{g(H)g(H')} \circ f^k_{g(H')g(H")}$. En efecto, ya que se satisface la relación $f_{g(H)g(H")} = f_{g(H)g(H')} \circ f_{g(H')g(H")}$.

■

Usando el lema anterior tenemos la siguiente proposición.

Proposición 4.7.2. *El límite inverso*

$$\hat{X}^k_{g,\tau} = \varprojlim\{X^k_{g(H)}, f^k_{g(H)g(H')}\}$$

del sistema inverso $\{X^k_{g(H)}, f^k_{g(H)g(H')}\}_{H\in I}$ *existe.*

Definición 4.7.3. El límite inverso $\hat{X}^k_{g,\tau}$ anterior será llamado *el k-producto cartesiano de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico.*

Observación 4.7.4. Dado que $X^k_{g(H)}$ es un límite inverso de variedades, entonces, es una proto-variedad (ver nota 4.2.11).

Ahora, consideremos los k-productos simétricos $X^{(k)}_{g(H)}$ y $X^{(k)}_{g(H'')}$ de las superficies de Riemann$X_{g(H)}$ y $X_{g(H')}$ respectivamente, así como la aplicación $f^{(k)}_{g(H)g(H')} : X^{(k)}_{g(H')} \longrightarrow X^{(k)}_{g(H)}$, dada por:

$$f^{(k)}_{g(H)g(H')}(z_1,\ldots,z_k)_\pi = (f_{g(H)g(H')}(z_1),\ldots,f_{g(H)g(H')}(z_k))_\pi$$

donde $(f_{g(H)g(H')}(z_1),\ldots,f_{g(H)g(H')}(z_k))_\pi$ denota simplemente la clase del punto $(f_{g(H)g(H')}(z_1),\ldots,f_{g(H)g(H')}(z_k))$ en el producto simétrico.
Se puede probar sin dificultad que la transformación $f^{(k)}_{g(H)g(H')}$ además de estar bien definida, es un cubriente holomorfo ramificado.

Lema 4.7.5. *El conjunto* $\{X^{(k)}_{g(H)}, f^{(k)}_{g(H)g(H')}\}_{H,H'\in I}$ *forma un sistema inverso de variedades complejas.*

Demostración. Es claro que $\{X^{(k)}_{g(H)}\}$ forma una familia de variedades complejas con indices en el conjunto I y $\{f^{(k)}_{g(H)g(H')}\}$ es una familia de transformaciones sobreyectivas. Si $g(H) \leq g(H')$, entonces, existen $g(H'')$ talque $g(H'') \geq g(H') \geq g(H)$ y transformaciones holomorfas $f^{(k)}_{g(H)g(H")} : X^{(k)}_{g(H'')} \longrightarrow X^{(k)}_{g(H)}$ y $f^{(k)}_{g(H')g(H")} : X^{(k)}_{g(H'')} \longrightarrow X^{(k)}_{g(H')}$ que satisfacen la relación $f^{(k)}_{g(H)g(H")} = f^{(k)}_{g(H)g(H')} \circ f^{(k)}_{g(H')g(H")}$. En efecto, ya que esta igualdad se da para la transformación $f^{k}_{g(H)g(H')}$ y por definición $f^{(k)}_{g(H)g(H')}$ está en terminos de $f^{k}_{g(H)g(H')}$.

■

Usando el lema anterior tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.7.6. *El límite inverso*

$$\hat{X}^{(k)}_{g,\tau} = \varprojlim_{H\in I}\{X^{(k)}_{g(H)}, f^{(k)}_{g(H)g(H')}\}$$

del sistema inverso $\{X^{(k)}_{g(H)}, f^{(k)}_{g(H)g(H')}\}$ *existe.*

Definición 4.7.7. El límite inverso $\hat{X}^{(k)}_{g,\tau}$ anterior será llamado *el k-producto simétrico de la laminación universal algebraica de tipo hiperbólico.*

4.7.2. Las proto-subvariedades de $Pic_0(\hat{X}_{g,\tau})$. En la sección 4.2 observamos que $W_1(\hat{X}_{g,\tau}) = \varprojlim_{H\in I}\{W_1((X_{g(H)}), C_{g(H)g(H')}\}$ existe y es homeomorfo a $\hat{X}_{g,\tau}$ (ver nota 3.1.18). Al conjunto $W_1(\hat{X}_{g,\tau})$ lo llamaremos *la* $W_1(\hat{X}_{g,\tau})$ *proto-variedad de* $Pic_0(\hat{X}_{g,\tau})$.

Consideremos dos superficies de Riemann compactas X_r y X_g de géneros $r \geq g$ respectivamente, así como una transformación holomorfa $f_{gr} : X_r \longrightarrow X_g$ cubriente no ramificada finita a uno entre ellas.
Sea k cualquier entero positivo fijo.
Es bien conocido que la variedad $W_k(X_g)$ puede ser vista como una subvariedad de la variedad de Picard $Pic_0(X_g)$, es decir, $W_k(X_g) \subset Pic_0(X_g)$ (ver **[17]** cap.2).

Lema 4.7.8. *La restricción de la transformación norma* $N_{f_{gr}}$ *a la subvariedad* $W_k(X_r)$ *tiene como imagen justamente a la subvariedad* $W_k(X_g)$. *Más aún, la restricción de la transformación norma* $N_{f_{gr}}$ *es sobreyectiva.*

Demostración. Sea $L \in W_k(X_r)$ entonces $L = L_{p_1}\dots L_{p_k}L^{-k}_{p_0} = \mathcal{O}_{X_r}(p_1\dots p_k p_0^{-k})$. Aplicando la transformación norma tenemos que $N_{f_{g(H)g(H')}}(L) = L_{f(p_1)}\dots L_{f(p_k)}L^{-k}_{f(p_0)} = \mathcal{O}_{X_g}(f(p_1)\dots f(p_k)f(p_0)^{-k}) \in W_k(X_g)$.
Para probar la sobreyectividad, si $L' \in W_k(X_g)$, entonces, tiene una expresión $L' = \mathcal{O}(p'_1\dots p'_k p_0'^{-k})$.
Consideremos los conjuntos $\{f^{-1}_{g(H)g(H')}(p'_i)\}^{k}_{i=0}$ y escogamos un punto en cada uno de estos

conjuntos. Sean $p_1, \ldots, p_k, p_0$ dichos puntos. Así, formamos un divisor de grado k con un punto base privilegiado en X_τ. Finalmente definamos $L = L_{p_1} \ldots L_{p_k} L_{p_0}^{-K} \in W_k(X_\tau)$, con lo cual tenemos el resultado.

∎

Lema 4.7.9. *Para cada $k \in \mathbb{N}^+$ fijo el conjunto $\{W_k(X_{g(H)}); Nm_{f_{g(H)g(H')}}\}_{H,H' \in I}$ forma un sistema inverso de variedades complejas.*

Demostración.

∎

El siguiente resultado es una consecuencia del lema anterior.

Proposición 4.7.10. *El límite inverso*

$$W_k(\hat{X}_{g,\tau}) = \varprojlim_{H \in I} \{W_k((X_{g(H)}), Nm_{f_{g(H)g(H')}}\}$$

del sistema inverso $\{W_k(X_{g(H)}); Nm_{f_{g(H)g(H')}}\}_{H,H' \in I}$ existe.

Definición 4.7.11. Al límite inverso $W_k(\hat{X}_{g,\tau})$ anterior lo llamaremos *la proto-subva riedad $W_k(\hat{X}_{g,\tau})$ de $Pic_0(\hat{X}_{g,\tau})$.*

Proposición 4.7.12. *Las proto-subvariedades $W_k(\hat{X}_{g,\tau})$ forman una filtración*

$$W_1(\hat{X}_{g,\tau}) \subset W_2(\hat{X}_{g,\tau}) \subset \cdots \subset W_{g-1}(\hat{X}_{g,\tau}) \subset W_g(\hat{X}_{g,\tau}) = Jac(\hat{X}_{g,\tau}).$$

Demostración.

4.7.3. El conjunto singular $W_k^2(\hat{X}_{g,\tau})$ de la proto-variedad $W_k(\hat{X}_{g,\tau})$. En esta sección estudiaremos sólo el conjunto singular de la proto-variedad $W_k(\hat{X}_{g,\tau})$ en el caso hiperelíptico, es decir, cuando la superficie de Riemann base de la laminación universal algebraica es hiperelíptica.

Lema 4.7.13. *Si X_g es una curva hiperelíptica, entonces, el sistema inverso $\{X_{g(H)}, f_{g(H)g(H')}\}_{H,H' \in I}$ formado por los cubrientes holomorfos finitos no-ramificados consta sólo de superficies de Riemann hiperelípticas.*

Demostración. Este resultado es una consecuencia de un teorema de Maters, ver [**36**] págs. 344-348.

∎

Por un teorema de Clifford (ver [**17**] pág.98) tenemos que si las superficies de Riemann $X_{g(H)}$ son hiperelípticas, entonces, las variedades $W_k^2(X_{g(H)}) \neq \emptyset$.

Lema 4.7.14. *Consideremos a las subvariedades* $W_k^2(X_r) \subset W_k(X_r)$ *y* $W_k^2(X_{g(H)}) \subset W_k(X_{g(H)})$. *Entonces, la transformación norma* $N_{f_{g(H)g(H')}}$ *restringida a* $W_k^2(X_r)$ *tiene precisamente a* $W_k^2(X_{g(H)})$ *como imagen. Más aún es sobreyectiva.*

Demostración. Puesto que la transformación $N_{f_{g(H)g(H')}}$ restringida a la subvariedad $W_m(X_r)$ es sobreyectiva para toda m, en particular para $m = k-1$ y $m = 1$. Por otro lado, sabemos que $W_k^2(X_r) = W_{k-1}(X_r) \ominus (-W_1(X_r)) = \bigcap_{L \in W_k(X_r)}(W_{k-1}(X_r) + L)$. De donde se sigue el resultado.

■

Nota 4.7.15. La demostración del lema 4.7.14 funciona en el caso general siempre y cuando tengamos que las subvariedades $W_k^2(X_{g(H)})$ son no vacias.

Lema 4.7.16. *El conjunto* $\{W_k^2(X_{g(H)}), Nm_{f_{g(H)g(H')}}\}_{H,H' \in I}$ *forma un sistema inverso de conjuntos.*

Demostración.

■

Del lema anterior tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.7.17. *Existe* $\varprojlim\{W_k^2(X_{g(H)}), Nm_{f_{g(H)g(H')}}\} = W_k^2(\hat{X}_{g,\tau})$.

Usando los mismos argumentos que en los parrafos anteriores tenemos los siguientes resultados.

Teorema 4.7.18. *Si para toda superficie* $X_{g(H)} \in \{X_{g(H)}, f_{g(H)g(H')}\}$ *se satisface que* $W_k^2(X_{g(H)}) \neq \emptyset$, *entonces existe* $\varprojlim\{W_k^2(X_{g(H)}), Nm_{f_{g(H)g(H')}}\} = W_k^2(\hat{X}_{g,\tau})$.

Teorema 4.7.19. *Bajo las mismas hipótesis del teorema anterior tenemos que* $\hat{X}^k_{g,\tau} \setminus \varphi(W_k^2(\hat{X}_{g,\tau})) \cong W_k(\hat{X}_{g,\tau}) \setminus W_k^2(\hat{X}_{g,\tau})$, *donde el homeomorfismo es complejo analítico de laminaciones.*

Bibliografía

[1] Abel, N. H; *OEuvres* 2vol. Edited by Sylow and Lie, Christiania, Oslo, (1881).

[2] Abel, N. H; *Remarques sur quelque propriétés générales d'un certaine sorte de fonctions transcendantes* OEuvres, t.I, 444-456.

[3] Abel, N. H; *Démostration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendates* OEuvres, t.I, 515-517

[4] Abel, N. H. *Mémoire sur une propriéte général d'une classe tres étendue de fonctions transcendantes, présente a l'Academie des Sciences a Paris le 30 octobre 1826, Mémoires preésenté par divers savants, t. VII, Paris 1841* OEuvres, t.I, 145-211.

[5] Biswas I., Nag S., Sullivan D.; *Determinant Bundles, Quillen Metrics, and Mumford Isomorphisms over the Universal Commensurability Techmuller Space* Acta Math. 176, (1996) 145-169.

[6] Biswas I., Nag S.; *Limit constructions over Riemann surfaces and their parameter spaces, and the commensurability group actions* arXiv:math.AG/9811005 2 Nov. (1998).

[7] Bourbaki, N.; *Algébre*, Hermann, Paris (1958).

[8] Candel A., Colon L.; *Foliations I*, Graduate Studies in Mathematics vol. 23, AMS, (2000).

[9] Candel A.; *Uniformization of Surface Laminations*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4 série, t. 26, (1993), 489-516.

[10] Camacho Cesar, Lins Neto Alcides; *Geometric Theory of Foliations*, Birkhä user, (1985).

[11] Arbarello, E., Cornalba M., Griffiths P. A., Harris J.; *Geometry of Algebraic Curves* Vol. I, Springer-Verlag,

[12] De Rham Georges; *Variétiés Différentiables*, Hermann, Paris 1960.

[13] Farkas Hershel M., Kra Irwin; *Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Math. Springer-Verlag, New York (1992).

[14] Foster Otto; *Lectures on Riemann Surfaces*, Graduate Texts in Math. Springer-Verlag New York, (1991).

[15] Gendron T.M.; *The algebraic theory of the fundamental germ*, Por aparecer.

[16] Gunning R.; *Lectures on Riemann Surfaces*, Mathematical Notes. Princenton Univ. Press, Princenton, New Jersey (1966).

[17] Gunning R.; *Lectures on Riemann Surfaces, Jacobi Varieties*, Mathematical Notes. Princenton Univ. Press, Princenton, New Jersey, (1972).

[18] Ghys E.; *Lamination par surfaces de Riemann*, Panorama et Syntheses, 8, (1999) 49-95.

[19] Griffiths P., Harris J.; *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley and Sons Inc., Wiley Classics Library, (1994).

[20] Harsthone R.; *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math. Springer-Verlag, New York (1997).

[21] Hocking John G. and Young Gail S.; *Topology*, Dover Publication Inc. New York (1988).

[22] Ingram W.T.; *Inverse Limits*, Aportaciones Matemáticas, Investigación 15, Sociedad Matemática Mexicana (2000)

[23] Jacobi, C. G. J. *Gesammelte Werke* vol.II, edited by K. Weierstrass, Chelsa, New York, (1969).

[24] Jacobi, C. G. J. *Considerationes generales de transcendentibus abelianis* Gesammelte Werke, vol II. pág. 5-16. Chelsa, New York, (1969).

[25] Jacobi, C. G. J. *De functionibus duarum variabilum quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium abelianarum innititur*, Gesammelte Werke, vol II. pág. 23-50. Chelsa, New York, (1969).

[26] Kempf George, R.; *Complex Abelian Varieties and Theta Functions*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1991)

[27] Lange H.,Birkenhake Ch.; colección *Complex Abelian Varieties*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1992).

[28] Lefschetz, S. *On certain numerical invariants of algebraic varieties with applications to Abelian varieties*, Trans. Amer. Math. Soc. 22, (1921) 327-248.

[29] Lefschetz, S. *Hyperelliptic surfaces and Abelian varieties* Chap. 17, 349-395, Vol.1 of Selected Topics in Algebraic Geometry, Washintong (1928).

[30] Maskit Bernard; *Kleinian Groups*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (1988).

[31] Miranda Rick; *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, Graduate Studies in Math. Vol. 5. AMS, (1995).

[32] Moore C. and Schochet C.; *Global Analysis on Foliated Spaces*, MSRI Publ 9, Springer, New York (1990).

[33] Nag Subhashis; *Riemann Surfaces and their Jacobians: A Toolkit*, Indian J. Pure Appl. Math 24 (12) págs. 729-745.

[34] Mumford David; *Tata Lectures on Theta I*, Progress in Math. 28, Birkhäuser (1983).

[35] Mumford David whit Madhav Nori and Peter Norman; *Tata Lectures on Theta III*, Progress in Math. 97, Birkhäuser (1991).

[36] Mumford David; *Prym Varieties I, Contributions to Analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers)*, Academic Press, New York, (1974) pág. 325-350.

[37] Pontriagin, I. *Topological groups*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1939).

[38] Ramakrishnan Dinakar, Valenza Robert J.; *Fourier Analysis on Number Fields*, Graduate Texts in Mathematics 186, Springer-Verlang, New York, (1999).

[39] Riemann, B. *Mathematische Werke*, B.G. Teubner 1876, Dover publications, (1953).

[40] Riemann, B. *Theorie der Abel'schen Functionen*, Mathematischen Werke pág. 88-142.

[41] Rudin, W.; *Functional Analysis*, Tata Mc Graw-Hill Publishing company Ltd., New Delhi, (1976).

[42] Rudin, W.; *Fourier Analysis on Groups*, Intersciences Publishers (1962).

[43] Schaefer H. Helmut; *Topological Vector Spaces*, Graduate Texts in Mathematics 3, Springer-Verlag, New York (Fifth printing) (1986).

[44] Schlichenmaier Martin; *An Introduction to Riemann Surfaces, Algebraic Curves and Moduli Spaces*, Lectures Notes in Physics 322, Springer-Verlag.

[45] Serre Jean P.; *Geometrie Algebrique et Geometrie Analytique*, Annals of the institute Fourier, Vol.6.

[46] Steenrod Norman; *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1951).

[47] Sullivan D.; *Linking the universalities of Milnor-Thurston, Feigenbaum and Ahlfors-Bers*, Top. Methods in Modern Math. (A Symposium in Honor of John Milnor Sixtieth Birthday) Publish or Perish, Inc. Houston, Texas, USA. (1993). Págs 543-564.

[48] Sullivan D.; *Bounds, quadratic differentials and renormalization conjetures*, Mathematics of the twenty-first century, vol.2 AMS Centennial Publications, Providence, RI, (1992) pág.417-466.

[49] Verjovsky S. Alberto; *A uniformitazion theorem for holomorphic foliations*. The Lefschetz centennial conference, part III (Mexico city, 1984) 233-253, Contemp. Math.,**58**, III Amer. Math. Soc. Providence, RI 1987

[50] Verjovsky S. Alberto; *Sistemas de Anosov*, Monografías del IMCA, XII Escuela Latinoamericana de Matemáticas.

[51] Wilson John S. *Profinite Groups*, London Math. Society Monographs New Series 19; Oxford Science Publications, Oxford (1998).