



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**MODELO SIR CON POBLACION VARIABLE
Y VACUNACION**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

FRANCISCO PLIEGO LOPEZ



**FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM**

DIRECTORA DE TESIS: DRA. MARIA DE LOURDES ESTEVA PERALTA

2004



**FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: Modelo SIR con población variable y vacunación.

realizado por Francisco Pliego López con número de cuenta 9757479-2
quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

Dra. María de Lourdes Esteva Peralta

Propietario

Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña

Propietario

Dr. Faustino Sánchez Garduño

Suplente

Dr. Jesús López Estrada

Suplente

Dr. Pedro Miramontes Vidal

Consejo Departamental de Matemáticas

JAG



M. en C. José Antonio Gómez Ortega

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMÁTICAS

Agradecimientos

A MIS PADRES.

Quienes con su esfuerzo y sacrificio me han permitido estar aquí. Gracias por su confianza y su amor incondicional a pesar de mis defectos, por estar siempre a mi lado con una caricia y una palabra de aliento.

A MI ABUELA.

Rosario. Por el ejemplo de superación y trabajo que me ha dado a lo largo de toda mi vida.

A MIS HERMANOS.

Carla, Antonio y Eduardo. Por el amor y la alegría que me dan cada día.

A MIS AMIGOS.

T, Evert, Leonel, José Luis, Edgardo; Ciro, Noe, Víctor Hugo, Juan, Mario, Miguel, Darío, Mario; Jorge, Eric, Fernando, Leonardo, Roberto, Ignacio; Antonio, Armando, Alfredo, Ambrosio, Adrian, Salvador, Carlos, Israel y Alberto. Por compartir conmigo los mejores momentos de mi vida.

A MIS AMIGAS.

C, Cc, Anabel, Guadalupe, Irene, Elsa, Elvia, Claudia, Nadia, Lizeth y Luz. Por su cariño y consejos.

A MIS MAESTROS.

Por compartir conmigo sus conocimientos y experiencias para hacerme un mejor ser humano. Al profesor Francisco Ochoa Hernández quien me enseñó que la forma de aprender matemáticas es haciéndolas.

A MIS SINODALES.

Dr. Manuel Falconi Magaña, Dr. Faustino Sánchez Garduño, Dr. Pedro Miramontes Vidal, Dr. Jesús López Estrada, quienes con sus consejos me ayudaron a mejorar este trabajo.

A LA DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA.

Quien me guió para realizar este trabajo, gracias por su confianza, su tiempo y su paciencia.

Índice

Introducción	1
1 Modelo con reclutamiento	3
1.1 Introducción	3
1.2 Formulación del modelo	3
1.3 Análisis de las proporciones en equilibrio del sistema (1.2.2).....	5
1.4 Conclusiones.	14
2 Modelo con crecimiento exponencial	16
2.1 Introducción.....	16
2.2 Formulación del modelo.	16
2.3 Análisis de las proporciones en equilibrio del sistema (2.2.2).....	18
2.4 Análisis de los totales.	26
2.5 Conclusiones.	31
3 Modelo con crecimiento exponencial y mortalidad por enfermedad. 39	
3.1 Introducción.....	39
3.2 Formulación del modelo.	39
3.3 Análisis de las proporciones en equilibrio del sistema (3.2.3).....	41
3.4 Análisis de los totales.	52

3.5 Conclusiones.....	62
4 Discusión.....	70
A.....	74
A.1 Conceptos básicos.....	74
A.2 Teoremas.....	76
Bibliografía.....	81

Introducción

El objetivo de esta tesis es analizar el comportamiento de una enfermedad en una población humana de tamaño variable con respecto al tiempo. Para esto estudiaremos poblaciones humanas con distintas estructuras demográficas.

Los modelos a considerar en esta tesis son del tipo *SIR* es decir, que la enfermedad confiere inmunidad permanente a quienes se recuperan de ella. La población humana se divide en clases ajenas, las cuales cambian con respecto al tiempo t . La clase susceptible al tiempo t consiste de los individuos que pueden contraer la enfermedad pero aún no están infectados. La clase infectada consiste de los individuos que transmiten la enfermedad a los demás. La clase recuperada consiste de aquellos individuos que se han eliminado de las clases susceptible e infectada por recuperación con inmunidad, vacunación o muerte, a la densidad total de humanos la denotamos por N .

En los modelos epidemiológicos que analizamos hacemos las siguientes suposiciones:

1. En los modelos tomaremos en cuenta la muerte natural la cual será proporcional al tamaño de cada clase con constante de mortalidad μ .
2. La población se mezcla homogéneamente, entonces el número total de contactos de la clase susceptible con la clase infectada está dado por el termino λSI de los cuales sólo una fracción $\frac{\lambda SI}{N}$ da lugar a un nuevo caso de infección, donde λ es la tasa de contactos adecuados de un infeccioso por unidad de tiempo. Un contacto adecuado es aquel cuyo resultado da lugar a un nuevo caso de infección.

3. Los individuos recuperados son removidos de la clase infectada con una tasa proporcional al tamaño de la clase con constante de proporcionalidad γ , la cual es llamada la tasa de recuperación. La proporción de individuos expuestos (e inmediatamente infectados) al tiempo t_0 quienes permanecen aún infectados al tiempo $t_0 + t$ es $e^{-\gamma t}$, y el periodo infeccioso es igual a $1/\gamma$.

4. Una parte de la población susceptible es vacunada contra la enfermedad a una tasa por unidad de tiempo igual a α .

En el Capítulo 1 analizamos un modelo de población con reclutamiento. El comportamiento de los totales de cada clase se puede obtener directamente por medio de las proporciones, por lo que analizaremos estas para trabajar con un sistema de dimensión dos y soluciones acotadas.

En el Capítulo 2 se analizará un modelo donde la población total tiene un crecimiento exponencial. Aquí analizamos los totales y las proporciones de cada clase ya que su comportamiento puede diferir dependiendo de los parámetros involucrados.

En el Capítulo 3 analizamos un modelo similar al del capítulo dos, solo que en este tomaremos en cuenta la mortalidad por enfermedad y veremos el efecto que tiene sobre el modelo.

Al igual que en capítulo anterior analizamos los totales y las proporciones de cada clase.

En cada uno de los capítulos se anexan las simulaciones numéricas realizadas para cada sistema de ecuaciones diferenciales, las simulaciones se hicieron con el programa Maple, al igual que las gráficas que representan el comportamiento de las proporciones susceptibles, infectada, recuperada y los diagramas de fase, además de los comportamientos de los totales de cada una de las clases y de la población total.

1

Modelo con reclutamiento

1.1 Introducción

En este capítulo se analizará el modelo epidémico *SIR* suponiendo que la población humana tiene una estructura demográfica de reclutamiento o inmigración y muerte natural. Sea Λ la constante de reclutamiento o inmigración para la población y consideramos que las muertes naturales ocurren en forma proporcional al tamaño de la población entonces el término de proporción de muerte está dado por μN donde μ es la tasa de mortalidad. El comportamiento de la población está dado por la siguiente ecuación diferencial:

$$N' = \Lambda - \mu N$$

donde $'$ denota la derivada respecto al tiempo. Para este modelo el tamaño de la población tiende a la constante $\frac{\Lambda}{\mu}$ para cualquier población inicial positiva.

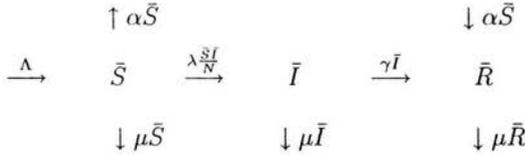
1.2 Formulación del modelo

En esta sección formulamos y analizamos matemáticamente el modelo con reclutamiento y muerte por medio de las ecuaciones que constituyen tal modelo.

Las variables relevantes para el modelo son las siguientes: la tasa de contactos adecuados es denotada por λ , la tasa de recuperación es denotada por γ , la tasa de vacunación es denotada por α . Supongamos además que todos los parámetros son positivos.

Sean $\bar{S}(t)$, $\bar{I}(t)$ y $\bar{R}(t)$ la densidad de la población de susceptibles, infecciosos y recuperados (con inmunidad) al tiempo t respectivamente.

El modelo está representado por el siguiente diagrama:



Las ecuaciones diferenciales para el modelo son:

$$\begin{aligned}
 \bar{S}'(t) &= \Lambda - \frac{\lambda \bar{S} \bar{I}}{N} - \mu \bar{S} - \alpha \bar{S} \\
 \bar{I}'(t) &= \frac{\lambda \bar{S} \bar{I}}{N} - \mu \bar{I} - \gamma \bar{I} \\
 \bar{R}'(t) &= \alpha \bar{S} + \gamma \bar{I} - \mu \bar{R} \\
 N'(t) &= \Lambda - \mu N.
 \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

Con la siguiente condición: $\bar{S}(t) + \bar{I}(t) + \bar{R}(t) = N(t)$.

Dado que $\bar{S}(t) + \bar{I}(t) + \bar{R}(t) \rightarrow \Lambda/\mu$ cuando $t \rightarrow \infty$ vamos a considerar el sistema (1.2.1) en la región:

$$A = \{(\bar{S}, \bar{I}, \bar{R}) \in \mathbb{R}_+^3 / \bar{S} + \bar{I} + \bar{R} = \Lambda/\mu\}.$$

La cual es invariante para el sistema (1.2.1) dado que cualquier solución $(\bar{S}, \bar{I}, \bar{R})$ que comienza en A satisface $(\bar{S}, \bar{I}, \bar{R})' = 0$.

Por lo tanto supondremos que la población total $N(t)$ es constante e igual a Λ/μ .

Consideremos las proporciones para cada t ,

$$S = \frac{\bar{S}}{N} = \frac{\bar{S}}{\frac{\Lambda}{\mu}}, \quad I = \frac{\bar{I}}{N} = \frac{\bar{I}}{\frac{\Lambda}{\mu}}, \quad R = \frac{\bar{R}}{N} = \frac{\bar{R}}{\frac{\Lambda}{\mu}}$$

$$\text{donde } S + I + R = \frac{\bar{S}}{N} + \frac{\bar{I}}{N} + \frac{\bar{R}}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

y como $R = 1 - S - I$ obtenemos las ecuaciones para las proporciones de individuos:

$$S'(t) = \mu - \lambda SI - \mu S - \alpha S \quad (1.2.2)$$

$$I'(t) = \lambda SI - \gamma I - \mu I.$$

En la región $\Omega = \{(S, I) : 0 \leq S \leq 1, 0 \leq I \leq 1, S + I \leq 1\}$.

1.3 Análisis de las proporciones en equilibrio del sistema (1.2.2).

Primero vamos a demostrar que el modelo tiene sentido desde el punto de vista biológico, esto es que el número de individuos en cada una de las clases sea no negativo.

Proposición 1.3.1 *La región $\Omega = \{(S, I) : 0 \leq S \leq 1, 0 \leq I \leq 1, S + I \leq 1\}$ es positivamente invariante bajo el flujo inducido por el sistema (1.2.2).*

Demostración. La frontera de Ω está compuesta por la unión de los siguientes conjuntos:

$$\Omega_1 = \{0 \leq S \leq 1, I = 0\},$$

$$\Omega_2 = \{S = 0, 0 \leq I \leq 1\},$$

$$\Omega_3 = \{S + I = 1\}.$$

Si $S = 0$ entonces $S' = \mu > 0$,

si $I = 0$ entonces $I' = 0$,

si $S + I = 1$ entonces $[\vec{n}_{ext} \cdot (S', I')] = (S + I)' = -\alpha S - \gamma I \leq 0$.

Por lo tanto, el campo vectorial definido en (1.2.2) en la frontera de Ω , apunta hacia el interior de la región o permanece en ella por lo que se concluye que todas las trayectorias que comienzan en Ω permanecen en ella para $t > 0$. ■

El parámetro R_0 , llamado el número de contacto, se interpreta epidemiológicamente así: la tasa de traslado de la proporción infectada a la proporción de recuperados está dada por la tasa de recuperación más la tasa de mortalidad, esto es $(\mu + \gamma)$, por lo que la media de muerte por infección es $\frac{1}{\mu + \gamma}$ en condiciones sin vacunación el número de contacto R_0 está dado por $\frac{\lambda}{\mu + \gamma}$, debido a la vacunación sólo una parte de la proporción susceptible puede ser infectada, tal fracción está dada por $\frac{\mu}{\mu + \alpha}$. Entonces el número promedio de contactos adecuados (los que producen enfermedad) de un infeccioso con los susceptibles durante el periodo de infección está dado por el término $\tilde{R}_0 = \frac{\lambda}{\mu + \gamma} * \frac{\mu}{\mu + \alpha} = R_0 * \frac{\mu}{\mu + \alpha}$ el cual es llamado el número de contacto modificado, de la expresión para \tilde{R}_0 tenemos $\tilde{R}_0 < R_0$, aquí se puede observar que el efecto de la vacunación hace que el número de contactos adecuados de un infeccioso se reduzca es decir que el número de infecciones secundarias que produce sea menor al que produciría sin vacunación.

Obtengamos los puntos de equilibrio del modelo.

El sistema (1.2.2) tienen dos puntos de equilibrio:

$$E_0 = \left(\frac{\mu}{\mu + \alpha}, 0 \right) \quad \text{y} \quad E_1 = (S^*, I^*),$$

donde

$$S^* = \frac{\mu + \gamma}{\lambda}, \quad I^* = \frac{(\mu + \alpha)(\tilde{R}_0 - 1)}{\lambda},$$

E_0 corresponde al estado en ausencia de enfermedad y E_1 corresponde al estado endémico.

Si $\tilde{R}_0 \leq 1$, E_0 es el único punto en Ω , y si $\tilde{R}_0 > 1$, ambos E_0 y E_1 están en Ω .

Ahora analizaremos la estabilidad local de los puntos de equilibrio E_0 y E_1 , para lo cual usaremos la matriz de Jacobi del sistema (1.2.2) la cual es:

$$DF = \begin{bmatrix} -\lambda I - \mu - \alpha & -\lambda S \\ \lambda I & \lambda S - \gamma - \mu \end{bmatrix}$$

Donde DF denota la derivada de el campo vectorial F dado por el lado derecho del sistema (1.2.2).

Evaluando DF en el punto E_0 tenemos:

$$DF(E_0) = \begin{bmatrix} -\mu - \alpha & -\frac{\lambda\mu}{\mu + \alpha} \\ 0 & (\mu + \gamma)(\tilde{R}_0 - 1) \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios son:

$$\xi_1 = -(\mu + \alpha) < 0 \quad \text{y} \quad \xi_2 = (\mu + \gamma)(\tilde{R}_0 - 1)$$

de donde si $\tilde{R}_0 < 1$ entonces E_0 es localmente asintóticamente estable.

La estabilidad de E_0 para el caso $\tilde{R}_0 = 1$ es decir $\frac{\lambda\mu}{\mu + \alpha} = \mu + \gamma$, la probaremos usando

una función de Liapunov. Sea $S = (U + \frac{\mu}{\mu + \alpha})$ y $I = V$, entonces

$$U'(t) = -\lambda UV - (\mu + \alpha)U - \frac{\lambda\mu}{\mu + \alpha}V$$

$$V'(t) = \lambda UV$$

y la región positivamente invariante Ω se convierte en

$$\Omega^* = \left\{ (U, V) : -\frac{\mu}{\mu + \alpha} \leq U, 0 \leq V, U + V \leq 1 - \frac{\mu}{\mu + \alpha} \right\}.$$

La función de Liapunov

$$L = \frac{U^2}{2} + \frac{\mu}{\mu + \alpha}V$$

es positiva definida y su derivada es

$$L' = -\lambda U^2 V - (\mu + \alpha)U^2 \leq 0.$$

El conjunto $E = \{(U, V) : L' = 0\}$, corresponde al eje V donde $U = 0$. Como $U = 0$

implica que $U'(t) = -\frac{\lambda\mu}{\mu + \alpha}V$, entonces el único subconjunto positivamente invariante

de E es el origen. Por el Teorema de Lasalle-Liapunov [véase Apéndice A], todas las

soluciones tienden al punto de equilibrio $(0, 0)$ en las coordenadas (U, V) . Por lo tanto E_0

es localmente asintóticamente estable.

Para el caso $\tilde{R}_0 > 1$ el punto de equilibrio E_0 es un punto silla y el punto de equilibrio E_1 esta en el interior de Ω .

La matriz de Jacobi evaluada en E_1 es:

$$DF(E_1) = \begin{bmatrix} -(\mu + \alpha)\tilde{R}_0 & -(\mu + \gamma) \\ (\mu + \alpha)(\tilde{R}_0 - 1) & 0 \end{bmatrix}$$

cuyo polinomio característico es:

$$p(r) = r^2 + (\mu + \alpha)\tilde{R}_0 r + (\mu + \alpha)(\mu + \gamma)(\tilde{R}_0 - 1)$$

y los valores propios están dados por:

$$\frac{-(\mu + \alpha)\tilde{R}_0}{2} \pm \frac{\sqrt{[(\mu + \alpha)\tilde{R}_0]^2 - 4(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)(\tilde{R}_0 - 1)}}{2}$$

de donde si $\tilde{R}_0 > 1$ entonces ambas raíces tienen parte real negativa y por tanto E_1 es localmente asintóticamente estable. Con base en este análisis tenemos el siguiente teorema que describe el comportamiento de las trayectorias.

Teorema 1.3.1 Si $\tilde{R}_0 \leq 1$ entonces el punto de equilibrio E_0 es globalmente asintóticamente estable en Ω . Si $\tilde{R}_0 > 1$ entonces el punto de equilibrio E_1 es globalmente asintóticamente estable en la región $\Omega - \{(S, 0) : 0 \leq S \leq 1\}$ y las trayectorias que comienzan en el eje S tienden al punto de equilibrio E_0 .

Demostración. Si $\tilde{R}_0 \leq 1$ entonces E_0 es el único punto de equilibrio de (1.2.2) en Ω . No hay trayectorias cerradas en Ω ya que una trayectoria cerrada debe contener un punto de equilibrio en su interior y dado que E_0 esta en la frontera de Ω la cual ya demostramos que es positivamente invariante (proposición 1.3.1) esto no es posible. Por el teorema de Poincaré-Bendixson generalizado [véase Apéndice A], entonces todas las soluciones tienden al punto de equilibrio E_0 .

Si $\tilde{R}_0 > 1$ entonces E_0 es un punto silla, E_1 está en el interior de Ω y es localmente asintóticamente estable.

Como el campo vectorial del sistema (1.2.2) es transversal a la frontera de Ω excepto en el eje S el cual es un conjunto invariante del sistema (1.2.2) sobre este eje tenemos que:

$$S' = \mu - \mu S - \alpha S \text{ entonces } S(t) \rightarrow \frac{\mu}{\mu + \alpha} \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Por lo que E_0 es el único conjunto omega límite en la frontera de Ω y todas las trayectorias que comienzan en el eje S tienden a E_0 .

Ahora aplicaremos el criterio de Dulac-Bendixson [véase Apéndice A], para demostrar que no hay trayectorias cerradas alrededor de E_1 . Para esto multiplicamos el sistema (1.2.2) por la función $\frac{1}{I}$, $I \neq 0$ de donde tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{S'}{I} &= \frac{\mu}{I} - \lambda S - \frac{(\mu + \alpha)S}{I}, \\ \frac{I'}{I} &= \lambda S - \mu - \gamma. \end{aligned}$$

Aplicando el criterio mencionado al sistema anterior:

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\mu}{I} - \lambda S - \frac{(\mu + \alpha)S}{I} \right) + \frac{\partial}{\partial I} (\lambda S - \mu - \gamma) = -\lambda - \frac{\mu + \alpha}{I} < 0.$$

Por lo tanto no hay trayectorias cerradas en Ω . Por el teorema de Poincaré-Bendixson generalizado, todas las soluciones tienden al punto de equilibrio E_1 con excepción de aquellas que comienzan en el eje S . ■

A continuación se presentan algunas simulaciones numéricas para el sistema (1.2.2).

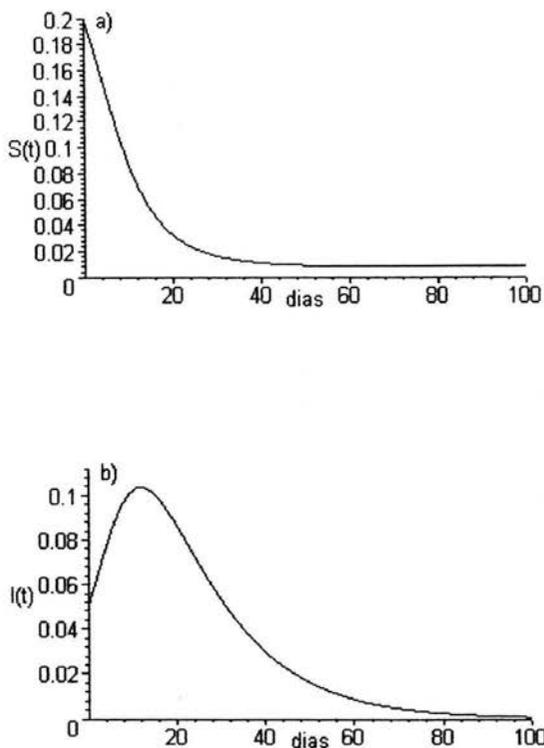


Figura 1.1: Solución numérica del sistema (1.2.2). La gráfica muestra el comportamiento de a) la proporción de susceptibles y b) la proporción de infectados en un tiempo de 100 días. Los parámetros usados son: $\mu^{-1} = 60$ años, $\gamma^{-1} = 14$ días, $\alpha = .002$, $\lambda = 1$, en este caso $\tilde{R}_0 = .307$. Las condiciones iniciales son $S_0 = 0.2$, $I_0 = 0.05$.

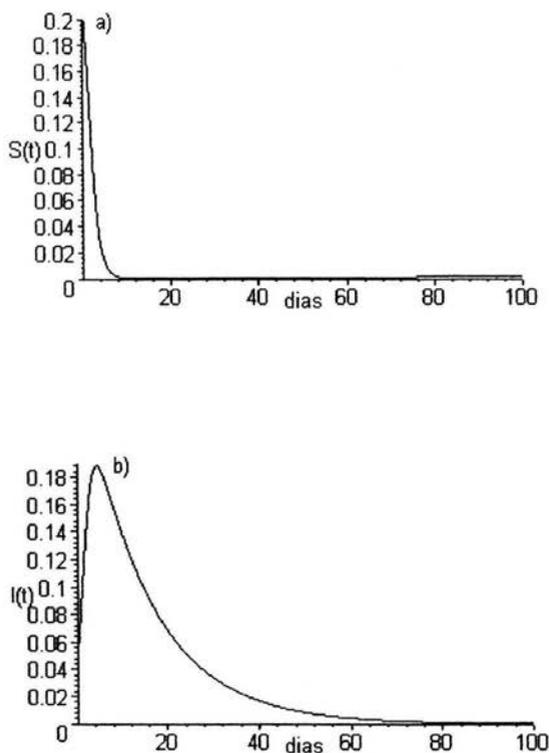


Figura 1.2: Solución numérica del sistema (1.2.2). La gráfica muestra el comportamiento de a) la proporción de susceptibles y b) la proporción de infectados en un tiempo de 100 días. Los parámetros usados son: $\mu^{-1} = 60$ años, $\gamma^{-1} = 14$ días, $\alpha = .002$, $\lambda = 4$, en este caso $\tilde{R}_0 = 1.231$. Las condiciones iniciales son $S_0 = 0.2$, $I_0 = 0.05$.

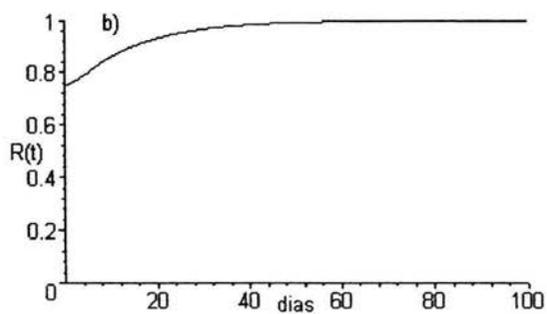
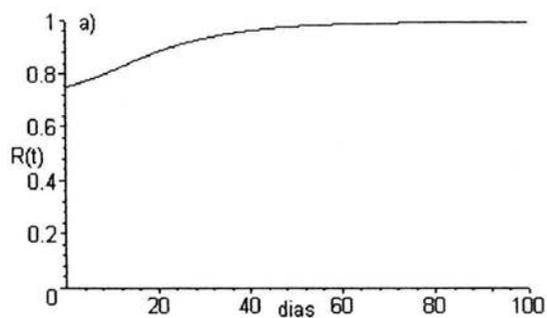


Figura 1.3: Solución numérica del sistema (1.2.2). La gráfica muestra el comportamiento de la proporción de recuperados para los casos a) $\tilde{R}_0 < 1$, y b) $\tilde{R}_0 > 1$, en un tiempo de 100 días. Las condiciones iniciales y parámetros son como en las figuras 1.1 y 1.2 respectivamente.

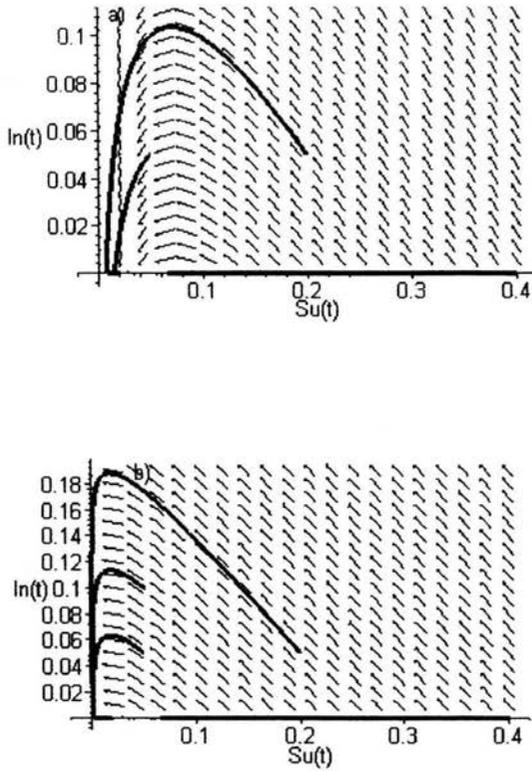


Figura 1.4. Planos fase para el sistema (1.2.2) para distintas condiciones iniciales, para el caso a) $\tilde{R}_0 < 1$ puede observarse que todas las soluciones tienden al punto de equilibrio $E_0 = (.022, 0)$, para el caso b) $\tilde{R}_0 > 1$ puede observarse que todas las soluciones tienden al punto de equilibrio endémico $E_1 = (.0179, .00011)$. A excepción de aquellas que comienzan en el eje S las cuales tienden al punto de equilibrio E_0 .

1.4 Conclusiones.

En esta sección analizamos los resultados obtenidos para nuestro modelo, así como los parámetros involucrados para los cuales se reportan las siguientes dinámicas.

El parámetro más importante es $\tilde{R}_0 = \frac{\lambda\mu}{(\mu + \gamma)(\mu + \alpha)}$ ya que éste determina la existencia de un estado de equilibrio endémico en la población. Recordemos que si $\tilde{R}_0 \leq 1$ entonces el punto libre de enfermedad E_0 es el único punto de equilibrio en Ω y es globalmente asintóticamente estable, mientras que para $\tilde{R}_0 > 1$ ambos E_0 y E_1 están en Ω y todas las trayectorias tienden al punto de equilibrio endémico E_1 cuanto t tiende a infinito, a excepción de aquellas que comienzan en el eje S , como se puede observar en la figura 1.4 donde se muestran los planos fase para ambos casos.

Una forma de interpretar este resultado es en términos del número de remplazamiento $S\tilde{R}_0$ el cual es el número de infecciones secundarias producidas por un infeccioso. Si $S\tilde{R}_0$ es menor a uno, entonces un infeccioso se reemplaza a sí mismo con menos de un nuevo infectado razón por la cual enfermedad tiende a desaparecer, en caso contrario si $S\tilde{R}_0$ es mayor que uno entonces el infeccioso se reemplaza a sí mismo con más de un nuevo infeccioso lo que hace que la proporción de susceptibles decaiga mientras que la de proporción de infecciosos crece rápidamente hasta alcanzar un pico y entonces comienza a decrecer debido a que no hay suficientes susceptibles para infectar (un ejemplo de esto es lo que sucede en las epidemias) y tiende al punto de equilibrio endémico E_1 .

El comportamiento de los totales de cada una de las clases se puede obtener directamente de las proporciones usando la relación:

$$\bar{S}(t) = S(t) * N(t) = S(t) * \frac{\Lambda}{\mu}$$

$$\bar{I}(t) = I(t) * N(t) = I(t) * \frac{\Lambda}{\mu}$$

$$\bar{R}(t) = R(t) * N(t) = R(t) * \frac{\Lambda}{\mu}.$$

A continuación se muestra el diagrama de bifurcaciones con respecto del parámetro \tilde{R}_0 .

Para obtener el diagrama se usó la expresión $I^* = \mu(\tilde{R}_0 - 1) / \tilde{R}_0(\mu + \gamma)$ y los parámetros como en la figura 1.2.

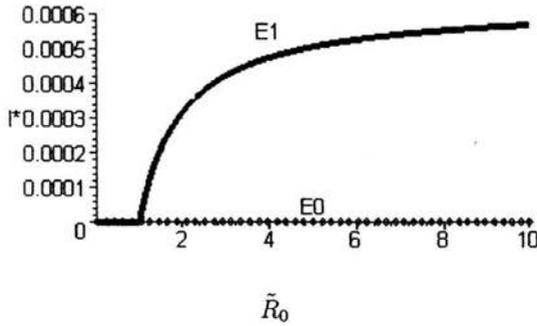


Figura 1.5: Diagrama de bifurcaciones de los puntos de equilibrio del sistema (1.2.2). La línea punteada representa la rama inestable y la continua la rama estable.

2

Modelo con crecimiento exponencial

2.1 Introducción.

En este capítulo se analizará un modelo donde la población crece en forma exponencial. Denotaremos por ν a la tasa de natalidad y μ a la tasa de mortalidad de la población, las cuales son constantes. El comportamiento de la población está dado por la siguiente ecuación diferencial:

$$N' = (\nu - \mu)N,$$

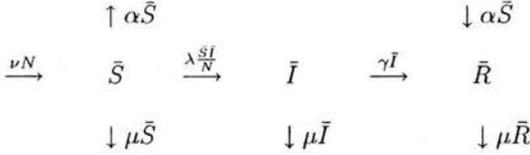
cuya solución es $N(t) = N_0 e^{(\nu - \mu)t}$. De esta última ecuación tenemos que la población N tiende a cero si $(\nu - \mu) < 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ y tiende a infinito si $(\nu - \mu) > 0$. Si $(\nu - \mu) = 0$ la población permanece constante en su valor inicial N_0 .

2.2 Formulación del modelo.

En esta sección formulamos y analizamos matemáticamente el modelo con crecimiento exponencial por medio de las ecuaciones diferenciales que describen su comportamiento. Las variables y parámetros para el modelo son los siguientes: N es la densidad de la población total, la tasa de contactos adecuados es denotada por λ , la tasa de recuperación es denotada por γ , la tasa de vacunación es denotada por α . Supongamos además que todos los parámetros son positivos.

Sean $\bar{S}(t)$, $\bar{I}(t)$ y $\bar{R}(t)$ la densidad de la población de susceptibles, infecciosos y recuperados (con inmunidad) al tiempo t , respectivamente.

El modelo está representado por el siguiente diagrama:



Las ecuaciones diferenciales para el modelo son:

$$\begin{aligned}
 \bar{S}'(t) &= \nu N - \frac{\lambda \bar{S}\bar{I}}{N} - \mu \bar{S} - \alpha \bar{S} \\
 \bar{I}'(t) &= \frac{\lambda \bar{S}\bar{I}}{N} - \mu \bar{I} - \gamma \bar{I} \\
 \bar{R}'(t) &= \alpha \bar{S} + \gamma \bar{I} - \mu \bar{R} \\
 N'(t) &= (\nu - \mu)N.
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Con la siguiente condición: $\bar{S}(t) + \bar{I}(t) + \bar{R}(t) = N(t) = N_0 e^{(\nu - \mu)t}$

Considerando las proporciones para cada t ,

$$S = \frac{\bar{S}}{N}, \quad I = \frac{\bar{I}}{N}, \quad R = \frac{\bar{R}}{N}.$$

donde $S + I + R = \frac{\bar{S}}{N} + \frac{\bar{I}}{N} + \frac{\bar{R}}{N} = \frac{N}{N} = 1$

y como $R = 1 - S - I$ tenemos el siguiente sistema para las proporciones de individuos:

$$S'(t) = \nu - \lambda SI - \nu S - \alpha S, \tag{2.2.2}$$

$$I'(t) = \lambda SI - \gamma I - \nu I.$$

En la región $\Omega = \{(S, I) : 0 \leq S \leq 1, 0 \leq I \leq 1, S + I \leq 1\}$.

2.3 Análisis de las proporciones en equilibrio del sistema (2.2.2).

Al igual que en el capítulo anterior se puede demostrar el sistema (2.2.2) está bien definido desde el punto de vista biológico.

Para este modelo al igual que en el anterior obtenemos el número de contacto modificado \tilde{R}_0 , el cual para este caso está dado por $\tilde{R}_0 = \frac{\lambda}{\nu + \gamma} * \frac{\nu}{\nu + \alpha} = R_0 * \frac{\nu}{\nu + \alpha}$. Al igual que en el modelo anterior \tilde{R}_0 es menor que R_0 , solamente que en este caso las proporciones se ven afectadas por la tasa de nacimiento, y no por la de mortalidad.

Ahora obtenemos los puntos de equilibrio del modelo.

Las ecuaciones (2.2.2) tienen dos puntos de equilibrio:

$$E_0 = \left(\frac{\nu}{\nu + \alpha}, 0 \right) \quad \text{y} \quad E_1 = (S^*, I^*),$$

donde

$$S^* = \frac{\nu + \gamma}{\lambda}, \quad I^* = \frac{(\nu + \alpha)(\tilde{R}_0 - 1)}{\lambda},$$

E_0 corresponde al estado en ausencia de enfermedad y E_1 corresponde al estado endémico.

Si $\tilde{R}_0 \leq 1$, E_0 es el único punto en Ω , y si $\tilde{R}_0 > 1$, E_0 y E_1 ambos están en Ω .

Ahora analizaremos la estabilidad local de los puntos de equilibrio E_0 y E_1 para lo cual usaremos la matriz de Jacobi del sistema (2.2.2) la cual es:

$$DF = \begin{bmatrix} -\lambda I - \nu - \alpha & -\lambda S \\ \lambda I & \lambda S - \gamma - \nu \end{bmatrix}$$

Evaluando DF en el punto E_0 tenemos:

$$DF(E_0) = \begin{bmatrix} -\nu - \alpha & -\frac{\lambda\nu}{\nu + \alpha} \\ 0 & (\nu + \gamma)(\tilde{R}_0 - 1) \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios son:

$$\xi_1 = -(\nu + \alpha) < 0 \quad \text{y} \quad \xi_2 = (\nu + \gamma)(\tilde{R}_0 - 1)$$

de donde si $\tilde{R}_0 < 1$ entonces E_0 es localmente asintóticamente estable.

Para el caso $\tilde{R}_0 = 1$, es decir $\frac{\lambda\nu}{\nu + \alpha} = \nu + \gamma$, hay un valor propio cero, la estabilidad de E_0

la probaremos como en el capítulo uno, sea $S = (U + \frac{\nu}{\nu + \alpha})$ y $I = V$, entonces

$$U'(t) = -\lambda UV - (\nu + \alpha)U - \frac{\lambda\nu}{\nu + \alpha}V$$

$$V'(t) = \lambda UV$$

y la región positivamente invariante Ω se convierte en

$$\Omega^* = \left\{ (U, V) : -\frac{\nu}{\nu + \alpha} \leq U, 0 \leq V, U + V \leq 1 - \frac{\nu}{\nu + \alpha} \right\}.$$

La función de Liapunov

$$L = \frac{U^2}{2} + \frac{\nu}{\nu + \alpha}V$$

es positiva definida y su derivada es

$$L' = -\lambda U^2 V - (\nu + \alpha)U^2 \leq 0.$$

El conjunto $E = \{(U, V) : L' = 0\}$, corresponde al eje V donde $U = 0$. Como $U = 0$ im-

plica que $U'(t) = -\frac{\lambda\nu}{\nu + \alpha}V$, entonces el único subconjunto positivamente invariante de E

es el origen. Por el Teorema de Lasalle-Liapunov, todas las soluciones tienden al punto de equilibrio $(0, 0)$ en las coordenadas (U, V) . Por lo tanto E_0 es localmente asintóticamente estable.

Para el caso $\tilde{R}_0 > 1$ el punto de equilibrio E_0 es un punto silla y el punto de equilibrio E_1 está en el interior de Ω . La estabilidad de este punto se determina evaluando DF en E_1 :

$$DF(E_1) = \begin{bmatrix} -(\nu + \alpha)\tilde{R}_0 & -(\nu + \gamma) \\ (\nu + \alpha)(\tilde{R}_0 - 1) & 0 \end{bmatrix}$$

cuyo polinomio característico es:

$$p(r) = r^2 + (\nu + \alpha)\tilde{R}_0 r + (\nu + \alpha)(\nu + \gamma)(\tilde{R}_0 - 1)$$

y los valores propios están dados por:

$$\frac{-(\nu + \alpha)\tilde{R}_0}{2} \pm \frac{\sqrt{[(\nu + \alpha)\tilde{R}_0]^2 - 4(\nu + \alpha)(\nu + \gamma)(\tilde{R}_0 - 1)}}{2}$$

de donde si $\tilde{R}_0 > 1$ entonces ambas raíces tienen parte real negativa y por tanto E_1 es localmente asintóticamente estable. El comportamiento asintótico de las trayectorias en el plano fase SI se describen en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.1 *Si $\tilde{R}_0 \leq 1$ entonces el punto de equilibrio E_0 es globalmente asintóticamente estable en Ω . Si $\tilde{R}_0 > 1$ entonces el punto de equilibrio E_1 es globalmente asintóticamente estable en la región $\Omega - \{(S, 0) : 0 \leq S \leq 1\}$ y las trayectorias que comienzan en el eje S tienden al punto de equilibrio E_0 .*

Demostración. Si $\tilde{R}_0 \leq 1$ entonces E_0 es el único punto de equilibrio en el interior de Ω . No hay trayectorias cerradas en Ω ya que una trayectoria cerrada debe contener un punto de equilibrio en su interior y dado que E_0 está en la frontera de Ω la cual es positivamente invariante esto no es posible. Por el teorema de Poincaré-Bendixson generalizado, todas las soluciones tienden al punto de equilibrio E_0 .

Si $\tilde{R}_0 > 1$ entonces E_0 es un punto silla, E_1 está en el interior de Ω y es localmente asintóticamente estable. Como el campo vectorial del sistema (2.2.2) es transversal a la frontera de Ω excepto en el eje S el cual es un conjunto invariante del sistema (2.2.2) sobre este eje tenemos que:

$$S' = \nu - \nu S - \alpha S \text{ entonces } S(t) \rightarrow \frac{\nu}{\nu + \alpha} \text{ cuando } t \rightarrow \infty.$$

Por lo que E_0 es el único conjunto omega límite en la frontera de Ω y todas las trayectorias que comienzan en el eje S tienden a E_0 .

Ahora aplicamos el criterio de Dulac-Bendixson, para demostrar que no hay trayectorias cerradas alrededor de E_1 . Multiplicando el sistema (2.2.2) por la función $\frac{1}{I}$, $I \neq 0$, tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{S'}{I} &= \frac{\nu}{I} - \lambda S - \frac{(\nu + \alpha)S}{I}, \\ \frac{I'}{I} &= \lambda S - \nu - \gamma.\end{aligned}$$

Aplicando el criterio al sistema anterior:

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\nu}{I} - \lambda S - \frac{(\nu + \alpha)S}{I} \right) + \frac{\partial}{\partial I} (\lambda S - \nu - \gamma) = -\lambda - \frac{\nu + \alpha}{I} < 0.$$

Por lo tanto no hay trayectorias cerradas en Ω . Por el teorema de Poincaré-Bendixson generalizado, todas las soluciones tienden al punto de equilibrio E_1 a excepción de las que comienzan en el eje S . ■

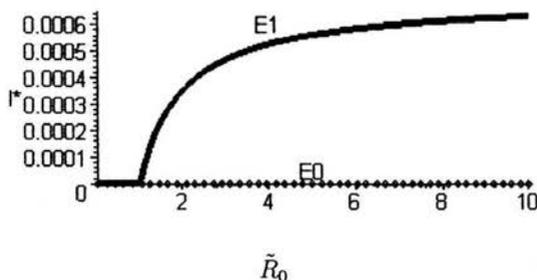


Figura 2.1: Diagrama de bifurcaciones de los puntos de equilibrio del sistema (2.2.2) con respecto al parámetro \tilde{R}_0 . La línea punteada representa la rama inestable y la continua la rama estable. Utilizando la expresión $I^* = \nu(\tilde{R}_0 - 1) / \tilde{R}_0(\nu + \gamma)$ y los parámetros como en la figura 2.3.

A continuación tenemos las simulaciones numéricas para el sistema (2.2.2).

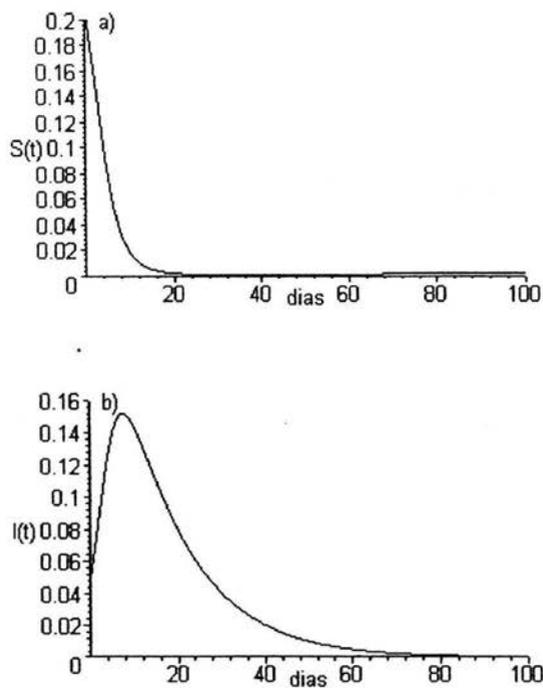


Figura 2.2: Solución numérica del sistema (2.2.2). La gráfica muestra el comportamiento de a) la proporción de susceptibles y b) la proporción de infectados en un tiempo de 100 días. Los parámetros usados son: $\nu = 5 \cdot 10^{-5}$, $\gamma^{-1} = 14$ días, $\alpha = .002$, $\lambda = 1$, en este caso $\tilde{R}_0 = .682$. Las condiciones iniciales son $S_0 = 0.2$, $I_0 = 0.05$.

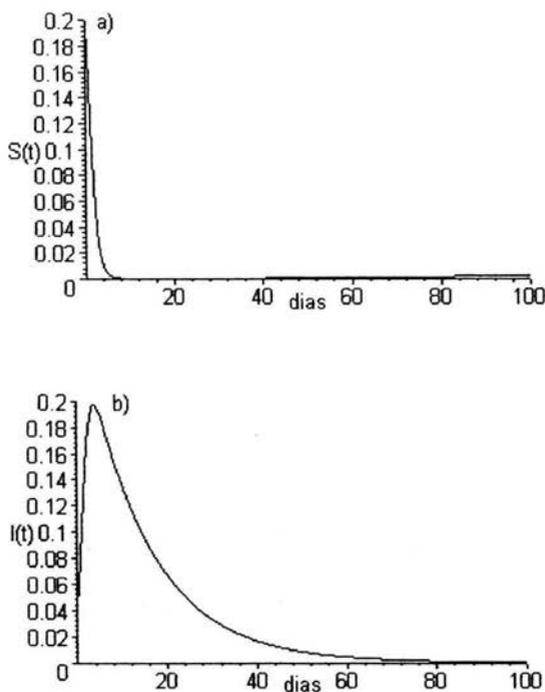


Figura 2.3: Solución numérica del sistema (2.2.2). La gráfica muestra el comportamiento de a) la proporción de susceptibles y b) la proporción de infectados en un tiempo de 100 días. Los parámetros usados son: $\nu = 5 \cdot 10^{-5}$, $\gamma^{-1} = 14$ días, $\alpha = .002$, $\lambda = 5$, en este caso $\tilde{R}_0 = 1.70$. Las condiciones iniciales son $S_0 = 0.2$, $I_0 = 0.15$.

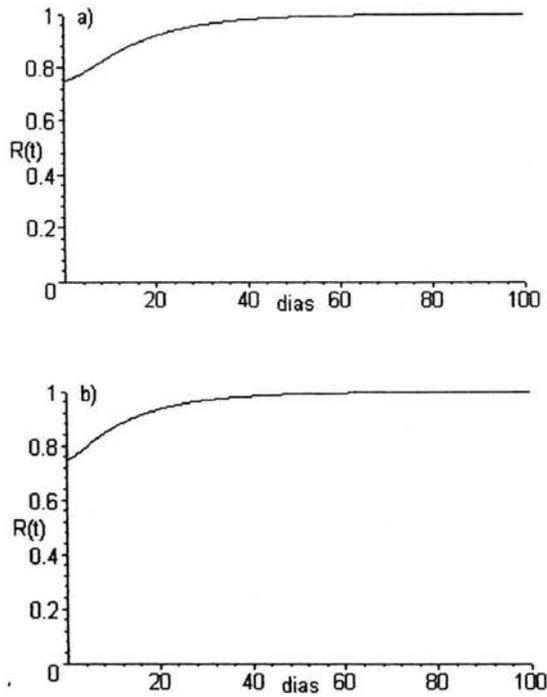


Figura 2.4: Solución numérica del sistema (2.2.2). La gráfica muestra el comportamiento de la proporción de recuperados para los casos a) $\tilde{R}_0 < 1$, y b) $\tilde{R}_0 > 1$, en un tiempo de 100 días. Las condiciones iniciales y parámetros son como en las figuras 2.2 y 2.3 respectivamente.

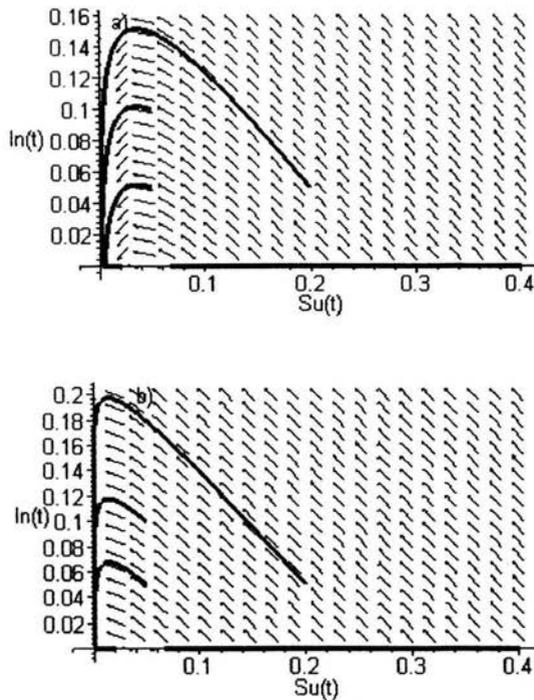


Figura 2.5. Planos fase para el sistema (2.2.2) para distintas condiciones iniciales, para el caso a) $\tilde{R}_0 < 1$ se puede observar que todas las soluciones tienden al punto de equilibrio $E_0 = (.0244, 0)$, para el caso b) $\tilde{R}_0 > 1$ puede observarse que todas las soluciones tienden al punto de equilibrio endémico $E_1 = (.0143, .00028)$. A excepción de aquellas que comienzan en el eje S las cuales tienden al punto de equilibrio E_0 .

2.4 Análisis de los totales.

En esta sección vamos analizar el comportamiento asintótico de la población humana N y los totales de cada una de las clases epidemiológicas $(\bar{S}, \bar{I}, \bar{R})$ del modelo (2.2.1).

Para lo cual definimos los siguientes parámetros:

$$P = \frac{\nu}{\mu}$$

$$P_1 = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\lambda\nu}{(\mu + \gamma)(\nu + \alpha)} & \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1 \\ \frac{\lambda S^*}{\mu + \gamma} & \text{si } \tilde{R}_0 > 1 \end{array} \right\}$$

Primero consideramos la dinámica de las soluciones con condiciones iniciales $\bar{I} \neq 0$ y $P \neq 1$.

Teorema 2.4.1 *La población $N(t)$ decrece a cero si $P < 1$ y crece a infinito si $P > 1$. La tasa asintótica de crecimiento está dada por $\mu(P - 1)$.*

Demostración. La dinámica para la población humana está dada por la siguiente ecuación

$$N'(t) = (\nu - \mu)N = \mu(P - 1)N$$

cuya solución está dada por:

$$N(t) = N_0 e^{\mu(P-1)t} = N_0 e^{(\nu-\mu)t}.$$

Por lo tanto cuando $t \rightarrow \infty$; $N(t)$ decrece a cero si $P < 1$ y tiende a infinito si $P > 1$. ■

Se observa que en el caso $P < 1$, $(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t))$ tiende a $(0, 0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Teorema 2.4.2 *Para $P > 1$ y $t \rightarrow \infty$, las soluciones $(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t))$ del sistema (2.2.1) con condiciones iniciales en el plano $\bar{I} \neq 0$ tienden a $(\infty, 0, \infty)$ si $P_1 < 1$; y a (∞, ∞, ∞) si $P_1 > 1$.*

Demostración. Del sistema (2.2.1) la ecuación para $\bar{I}(t)$ está dada por

$$\bar{I}'(t) = \lambda S \bar{I} - \mu \bar{I} - \gamma \bar{I}$$

recordemos también que

$$S \rightarrow \frac{\nu}{\nu + \alpha} \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$S \rightarrow S^* \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

sustituyendo tenemos la forma límite para $\bar{I}(t)$

$$\bar{I}'(t) = \frac{\lambda \nu \bar{I}}{\nu + \alpha} - (\mu + \gamma) \bar{I} = (\mu + \gamma)(P_1 - 1) \bar{I} \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$\bar{I}'(t) = \lambda S^* \bar{I} - (\mu + \gamma) \bar{I} = (\mu + \gamma)(P_1 - 1) \bar{I} \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

cuya solución está dada por

$$\bar{I}(t) = \bar{I}_0 e^{(\mu + \gamma)(P_1 - 1)t} = \bar{I}_0 e^{[\frac{\lambda \nu}{\nu + \alpha} - (\mu + \gamma)]t} \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$\bar{I}(t) = \bar{I}_0 e^{(\mu + \gamma)(P_1 - 1)t} = \bar{I}_0 e^{[\lambda S^* - (\mu + \gamma)]t} \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

lo cual implica que $\bar{I}(t)$ decrece exponencialmente si $P_1 < 1$ y crece exponencialmente si $P_1 > 1$.

Por otro lado, del sistema (2.2.1) podemos escribir la ecuación para $\bar{S}(t)$ como

$$\bar{S}'(t) = \nu N - \lambda \bar{S} I - \mu \bar{S} - \alpha \bar{S}$$

además tenemos que

$$I \rightarrow 0 \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$I \rightarrow I^* \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

por lo que la forma límite para $\bar{S}(t)$ es

$$\bar{S}'(t) = \nu N - \mu \bar{S} - \alpha \bar{S} \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$\bar{S}'(t) = \nu N - \lambda \bar{S} I^* - \mu \bar{S} - \alpha \bar{S} \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

sustituyendo la solución de $N(t)$ tenemos que la solución para $\bar{S}(t)$ en su forma límite está dada por

$$\bar{S}(t) = \bar{S}_0 e^{-(\mu+\alpha)t} + \frac{\nu}{\nu+\alpha} N_0 [e^{(\nu-\mu)t} - e^{-(\mu+\alpha)t}] \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$\bar{S}(t) = \bar{S}_0 e^{-(\lambda I^* + \mu + \alpha)t} + \frac{\nu N_0}{\lambda I^* + \nu + \alpha} [e^{(\nu-\mu)t} - e^{-(\lambda I^* + \mu + \alpha)t}] \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

de donde cuando $t \rightarrow \infty$

$$\bar{S}(t) \rightarrow \frac{\nu}{\nu+\alpha} N_0 e^{(\nu-\mu)t} = \frac{\nu}{\nu+\alpha} N(t) \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$\bar{S}(t) \rightarrow \frac{\nu}{\lambda I^* + \nu + \alpha} N_0 e^{(\nu-\mu)t} = \frac{\nu}{\lambda I^* + \nu + \alpha} N(t) \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

dado que $P > 1$ entonces $N(t) \rightarrow \infty$. Por lo tanto en ambos casos $\bar{S}(t) \rightarrow \infty$.

Del sistema (2.2.1) tenemos que

$$\bar{R}'(t) = \alpha \bar{S} + \gamma \bar{I} - \mu \bar{R}$$

sustituyendo las soluciones de $\bar{S}(t)$, $\bar{I}(t)$ tenemos que la solución de $\bar{R}(t)$ con $\tilde{R}_0 \leq 1$, está dada por

$$\bar{R}(t) = \bar{R}_0 e^{-\mu t} + \bar{S}_0 [-e^{-(\alpha+\mu)t} + e^{-\mu t}] + \frac{\alpha N_0}{\nu + \alpha} [e^{(\nu-\mu)t} - e^{-\mu t}] + \frac{\nu N_0}{(\nu + \alpha)} [e^{-(\mu+\alpha)t} - e^{-\mu t}] + \frac{\gamma \bar{I}_0}{\lambda \nu} [e^{[\frac{\lambda \nu}{\nu + \alpha} - (\mu + \gamma)]t} - e^{-\mu t}]$$

y para $\tilde{R}_0 > 1$, está dada por

$$\bar{R}(t) = \bar{R}_0 e^{-\mu t} + \frac{\alpha \bar{S}_0}{\lambda I^* + \alpha} [-e^{-(\lambda I^* + \alpha + \mu)t} + e^{-\mu t}] + \frac{\alpha N_0}{\lambda I^* + \nu + \alpha} [e^{(\nu-\mu)t} - e^{-\mu t}] + \frac{\alpha \nu N_0}{(\lambda I^* + \nu + \alpha)(\lambda I^* + \alpha)} [e^{-(\lambda I^* + \mu + \alpha)t} - e^{-\mu t}] + \frac{\gamma \bar{I}_0}{\lambda S^* - \gamma} [e^{[\lambda S^* - (\mu + \gamma)]t} - e^{-\mu t}]$$

cuando $t \rightarrow \infty$ tenemos que

$$\bar{R}(t) \rightarrow \frac{\alpha N_0 e^{(\nu-\mu)t}}{\nu + \alpha} + \frac{\gamma \bar{I}_0 e^{(\mu + \gamma)(P_1 - 1)t}}{\frac{\lambda \nu}{\nu + \alpha} - \gamma} = \frac{\alpha N(t)}{\nu + \alpha} + \frac{\gamma \bar{I}(t)}{\frac{\lambda \nu}{\nu + \alpha} - \gamma} \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$\bar{R}(t) \rightarrow \frac{\alpha N_0 e^{(\nu-\mu)t}}{\lambda I^* + \nu + \alpha} + \frac{\gamma \bar{I}_0 e^{(\mu + \gamma)(P_1 - 1)t}}{\lambda S^* - \gamma} = \frac{\alpha N(t)}{\lambda I^* + \nu + \alpha} + \frac{\gamma \bar{I}(t)}{\lambda S^* - \gamma} \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

en ambos casos $P > 1$, por lo que $N(t) \rightarrow \infty$, si $P_1 > 1$, los terminos que contienen a $\bar{I}(t)$ son positivos e $\bar{I}(t)$ crece exponencialmente de donde $\bar{R}(t) \rightarrow \infty$. Si $P_1 < 1$, entonces $\bar{I}(t)$ decrece exponencialmente y como $N(t)$ crece exponencialmente entónces $\bar{R}(t) \rightarrow \infty$. ■

Teorema 2.4.3 Si $P = 1$ entonces $N(t)$ permanece fijo en su valor inicial N_0 y cuando $t \rightarrow \infty$, las soluciones de (2.2.1) con condiciones iniciales fuera del plano $\bar{I} = 0$ tienden a $(\frac{N_0\nu}{\nu + \alpha}, 0, \frac{N_0\alpha}{\nu + \alpha})$ si $\tilde{R}_0 \leq 1$, y a $N_0(S^*, I^*, R^*)$, si $\tilde{R}_0 > 1$.

Demostración. Si $P = 1$ entonces $N'(t) = 0$ y por lo tanto, $N(t)$ permanece fijo en su valor inicial N_0 , en este caso el sistema (2.2.1) tiene población constante y el comportamiento de los totales de cada una de las clases se obtiene en forma directa de las proporciones.

$$\bar{S}(t) = N(t) * S(t) \longrightarrow N_0 * \frac{\nu}{\nu + \alpha} \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$\bar{I}(t) = N(t) * I(t) \longrightarrow N_0 * 0 = 0 \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$\bar{R}(t) = N(t) * (1 - S(t) - I(t)) \longrightarrow N_0 * \frac{\alpha}{\nu + \alpha} \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

y

$$\bar{S}(t) = N(t) * S(t) \longrightarrow N_0 * S^* \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

$$\bar{I}(t) = N(t) * I(t) \longrightarrow N_0 * I^* \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

$$\bar{R}(t) = N(t) * (1 - S(t) - I(t)) \longrightarrow N_0 * R^* \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

cuando $t \rightarrow \infty$.

Con lo que queda demostrado el teorema: ■

Por último analizamos el comportamiento asintótico de las soluciones en el plano $\bar{I} = 0$.

Teorema 2.4.4 Sobre el plano $\bar{I} = 0$, el número de infecciosos $\bar{I}(t)$ permanece constante e igual a cero, el número de susceptibles $\bar{S}(t)$ tiende a $\frac{\nu N(t)}{\nu + \alpha}$ y el número de recuperados $\bar{R}(t)$ tiende a $\frac{\alpha N(t)}{\nu + \alpha}$.

Demostración. Si $\bar{I}(t) = 0$ entonces el sistema (2.2.1) se reduce en:

$$\bar{S}'(t) = \nu N - \mu \bar{S} - \alpha \bar{S}$$

$$\bar{R}'(t) = \alpha \bar{S} - \mu \bar{R}$$

$$N'(t) = (\nu - \mu)N.$$

Las soluciones para el sistema están dadas por:

$$N(t) = N_0 e^{(\nu - \mu)t}$$

$$\bar{S}(t) = \bar{S}_0 e^{-(\mu + \alpha)t} + \frac{\nu}{\nu + \alpha} N_0 [e^{(\nu - \mu)t} - e^{-(\mu + \alpha)t}]$$

$$\bar{R}(t) = -\bar{S}_0 e^{-(\mu + \alpha)t} + \frac{\alpha}{\nu + \alpha} N_0 e^{(\nu - \mu)t} + \frac{\nu}{\nu + \alpha} N_0 e^{-(\mu + \alpha)t}$$

cuando $t \rightarrow \infty$ tenemos que

$$\bar{S}(t) \rightarrow \frac{\nu}{\nu + \alpha} N_0 e^{(\nu - \mu)t} = \frac{\nu}{\nu + \alpha} N(t)$$

$$\bar{R}(t) \rightarrow \frac{\alpha}{\nu + \alpha} N_0 e^{(\nu - \mu)t} = \frac{\alpha}{\nu + \alpha} N(t)$$

y en el límite se cumple que

$$\bar{S}(t) + \bar{I}(t) + \bar{R}(t) = \frac{\nu}{\nu + \alpha} N(t) + 0 + \frac{\alpha}{\nu + \alpha} N(t) = N(t). \blacksquare$$

2.5 Conclusiones.

Al igual que en el modelo anterior, el comportamiento de las proporciones está determinado por el parámetro umbral $\tilde{R}_0 = \frac{\lambda\nu}{(\nu + \gamma)(\nu + \alpha)}$. Si $\tilde{R}_0 < 1$ entonces el punto de equilibrio libre de enfermedad E_0 es el único punto en Ω y es globalmente asintóticamente estable; mientras que para $\tilde{R}_0 > 1$ ambos puntos E_0 y E_1 están en Ω y todas las trayectorias tienden al punto de equilibrio endémico E_1 cuanto t tiende a infinito a excepción de aquellas que comienzan en el eje S , como se puede observar en la figura 2.5 donde se muestran los planos fase para ambos casos.

Mientras que para los totales definimos, dos nuevos parámetros: P y P_1 .

P regula el crecimiento de la población, si $P < 1$ entonces la población tiende a cero (figuras 2.6 y 2.7), si $P > 1$ entonces la población tiende a infinito (figuras 2.10, 2.11 y 2.12) y si $P = 1$ entonces la población permanece constante a su valor inicial (figuras 2.8, 2.9).

P_1 controla el comportamiento asintótico del total de infectados, cuando la proporción de infectados decrece en una población que está creciendo.

La diferencia entre este modelo con población variable y el anterior con población constante consiste en que para este modelo, la proporción de infectados I y el total de infectados \bar{I} pueden tener comportamientos distintos. Así, I puede tender a un valor endémico positivo mientras que el total de infectados \bar{I} puede tender a cero cuando la población total está decreciendo (caso $P < 1$, $\tilde{R}_0 > 1$). Por otro lado, I puede tender a cero e \bar{I} crecer exponencialmente (caso $P > 1$, $\tilde{R}_0 \leq 1$, $P_1 > 1$), como se muestra en las figuras 2.7 y 2.11 respectivamente.

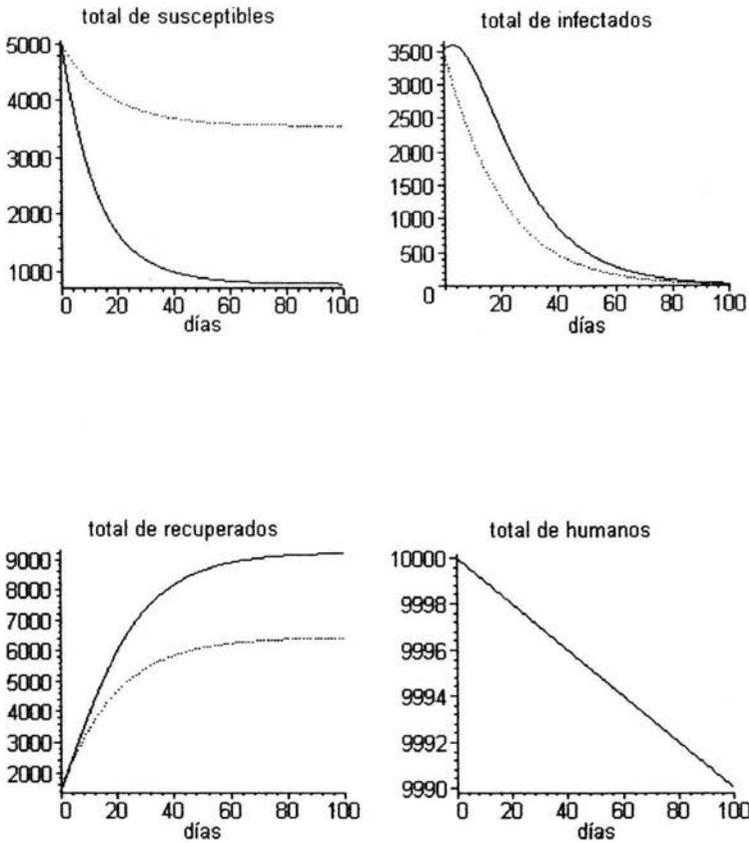


Figura 2.6: Curso temporal de los totales de las clases: susceptible, infectada, recuperada y la población, sin y con vacunación, cuando $P < 1$, $\tilde{R}_0 \leq 1$. Los parámetros son: $\nu = 4 \cdot 10^{-5}$, $\gamma^{-1} = 14$ días, $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$, con condiciones iniciales $\bar{S}_0 = 5000$, $\bar{I}_0 = 3500$, $\bar{R}_0 = 1500$ y $N_0 = 10000$. La línea punteada representa las soluciones con $\alpha = 0$ y $\lambda = .05$ y la continua con $\alpha = .0001$ y $\lambda = .175$. Para ambos casos, $P = .8$ y $\tilde{R}_0 = .6998$.

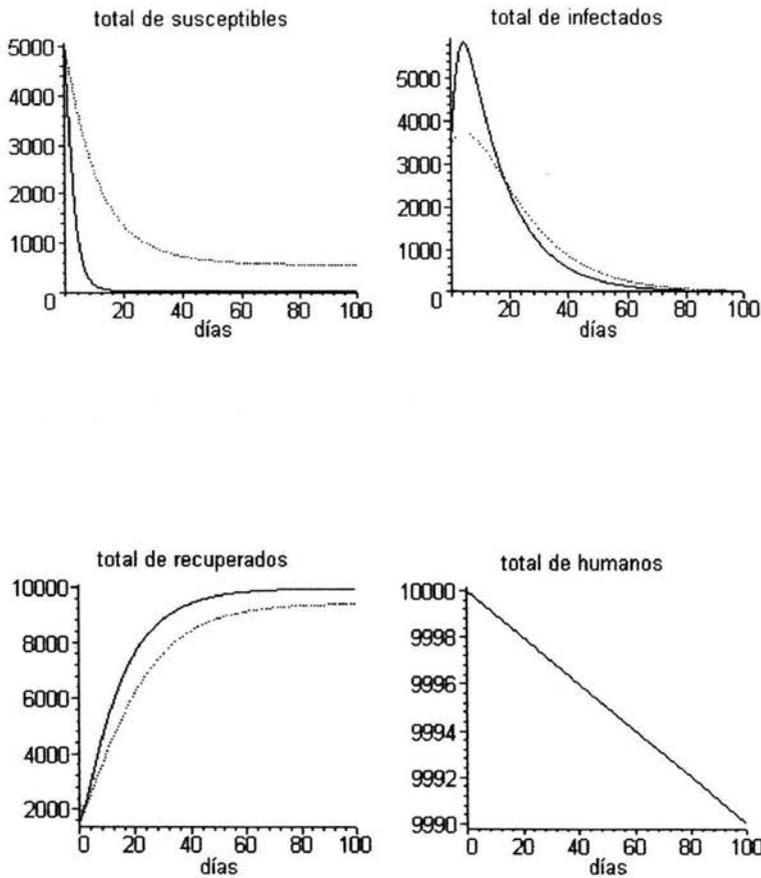


Figura 2.7: Curso temporal de los totales de las clases: susceptible, infectada, recuperada y la población, sin y con vacunación cuando $P < 1$, $\tilde{R}_0 > 1$. Las condiciones iniciales y los parámetros son como en la figura 2.6 a excepción de $\lambda = .2$ y $\lambda = .7$, respectivamente. Para ambos casos, $P = .8$ y $\tilde{R}_0 = 2.799$.

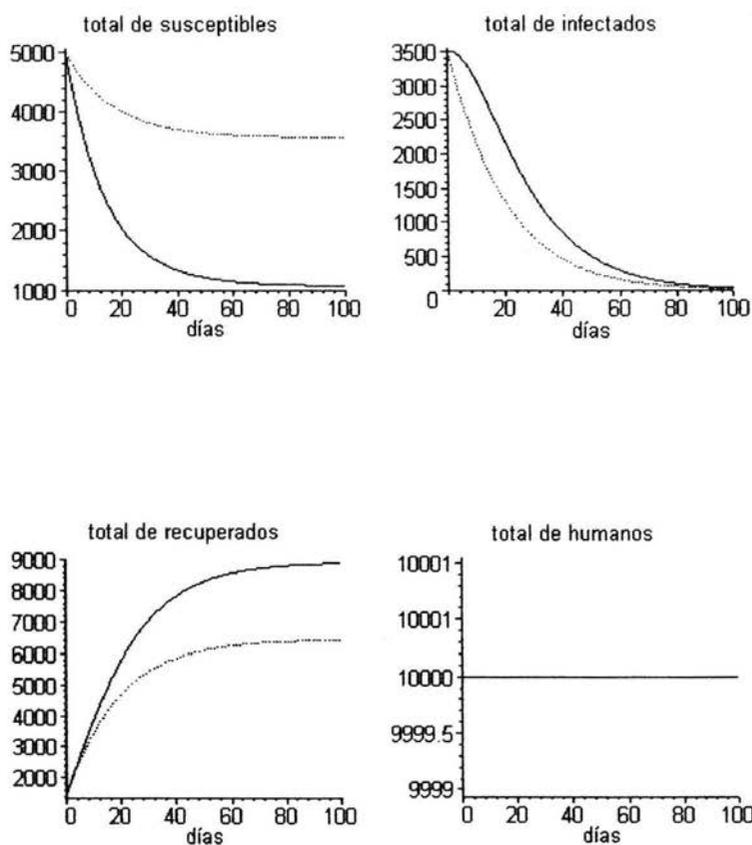


Figura 2.8: Curso temporal de los totales de las clases: susceptible, infectada, recuperada y la población, sin y con vacunación cuando $P = 1$, $\tilde{R}_0 < 1$. Los parámetros son: $\nu = 5 \cdot 10^{-5}$, $\gamma^{-1} = 14$ días, $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$, con condiciones iniciales como en la figura 2.6. La línea punteada representa las soluciones con $\alpha = 0$ y $\lambda = .05$ y la continua con $\alpha = .0001$ y $\lambda = .15$. Para ambos casos, $\tilde{R}_0 = .6997$.

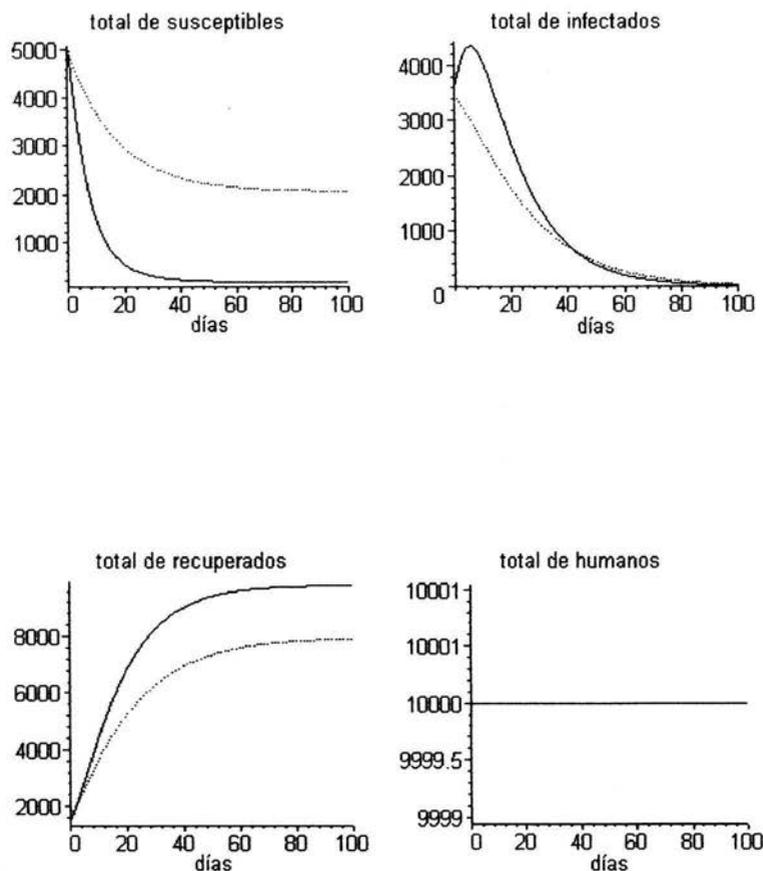


Figura 2.9: Curso temporal de los totales de las clases: susceptible, infectada, recuperada y la población, sin y con vacunación cuando $P = 1$, $\tilde{R}_0 > 1$. Las condiciones iniciales y parámetros son como en la figura 2.8 a excepción de $\lambda = .1$, y $\lambda = .3$, respectivamente. Para ambos casos, $\tilde{R}_0 = 1.399$.

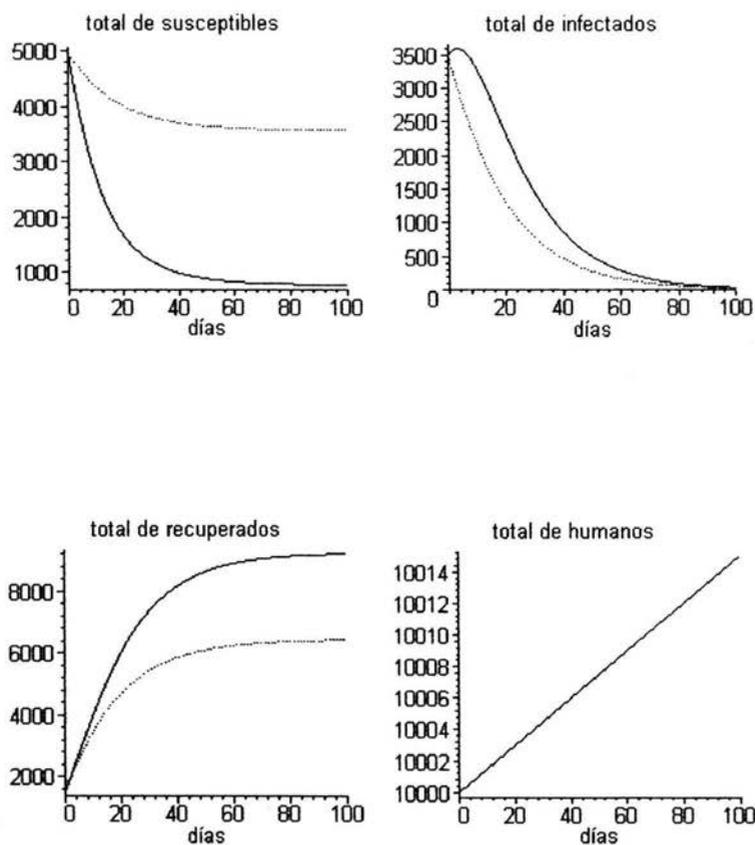


Figura 2.10: Curso temporal de los totales de las clases: susceptible, infectada, recuperada y la población, sin y con vacunación cuando $P > 1$, $\tilde{R}_0 \leq 1$, $P_1 < 1$. Los parámetros son: $\nu = 4 \cdot 10^{-5}$, $\gamma^{-1} = 14$ días, $\mu = 2.5 \cdot 10^{-5}$, con condiciones iniciales como en la figura 2.6. La línea punteada representa las soluciones con $\alpha = 0$ y $\lambda = .05$ y la continua con $\alpha = .0001$ y $\lambda = .175$. Para ambos casos, $P = 1.6$, $\tilde{R}_0 = .699$ y $P_1 = .70$.

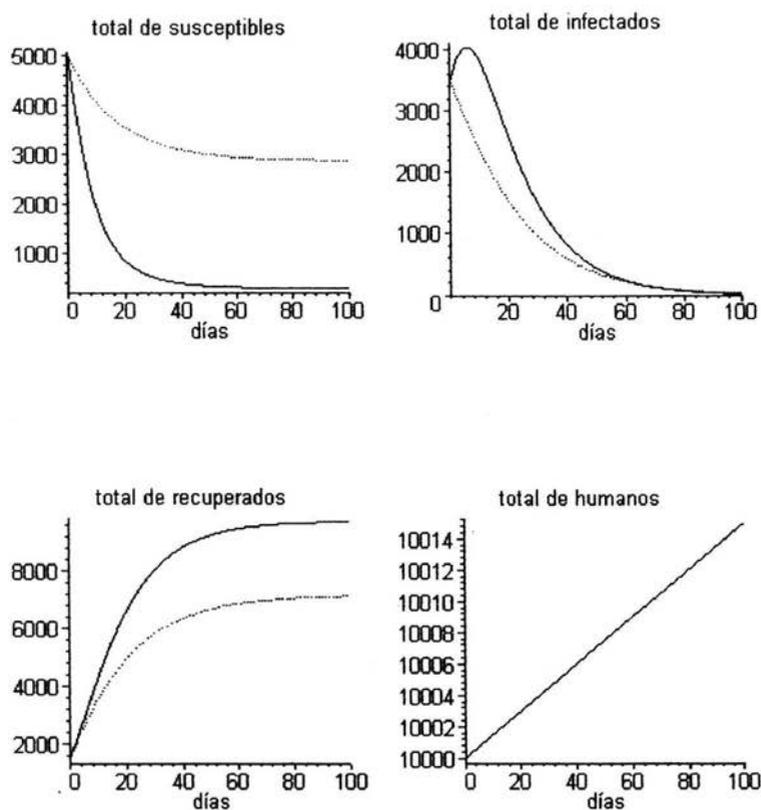


Figura 2.11: Curso temporal de los totales de las clases: susceptible, infectada, recuperada y la población, cuando $P > 1$, $\tilde{R}_0 \leq 1$, $P_1 > 1$. Las condiciones iniciales y parámetros son como en la figura 2.10 a excepción de, $\lambda = .0714$, y $\lambda = .25$, respectivamente. Para ambos casos, $P = 1.6$, $\tilde{R}_0 = .9998$ y $P_1 = 1.0007$.

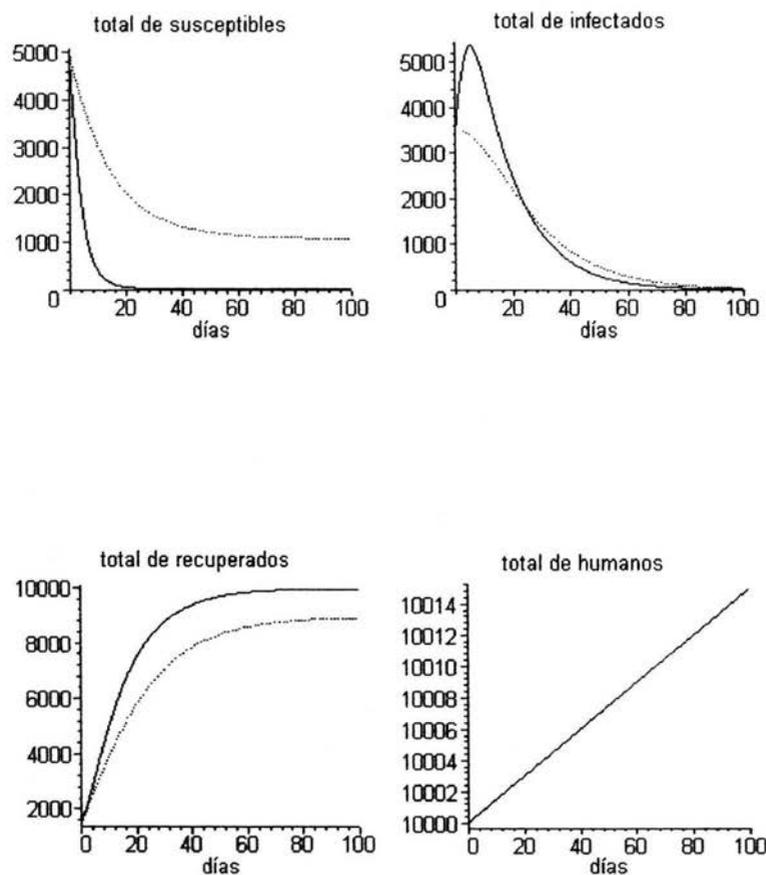


Figura 2.12: Curso temporal de los totales de las clases: susceptible, infectada, recuperada y la población, sin y con vacunación cuando $P > 1$, $\tilde{R}_0 > 1$, $P_1 > 1$. Las condiciones iniciales y parámetros son como en la figura 2.10 a excepción de, $\lambda = .15$, y $\lambda = .525$ respectivamente. Para ambos casos, $P = 1.6$, $\tilde{R}_0 = 2.099$ y $P_1 = 1.0002$.

3

Modelo con crecimiento exponencial y mortalidad por enfermedad

3.1 Introducción.

En este capítulo se analiza el modelo anterior pero ahora tomando en cuenta la mortalidad por enfermedad, la cual puede afectar de manera significativa el tamaño de la población si la enfermedad permanece endémica en la población. Al igual que en el modelo anterior denotaremos por ν a la tasa de natalidad, por μ a la tasa de mortalidad de la población, por δ a la tasa de mortalidad por enfermedad, las cuales son constantes. El comportamiento de la población está dado por la siguiente ecuación diferencial:

$$N' = (\nu - \mu)N - \delta \bar{I}$$

De esta última ecuación tenemos que si $\delta = 0$ el modelo se reduce al del capítulo anterior por lo que supondremos $\delta > 0$.

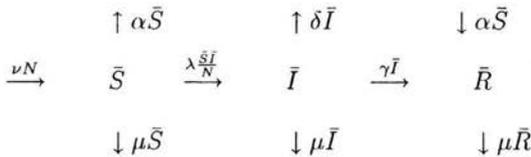
3.2 Formulación del modelo.

Las variables y parámetros para el modelo son los siguientes: N es la densidad de la población total, la tasa de contactos adecuados es denotada por λ , la tasa de recuperación es denotada por γ , la tasa de vacunación es denotada por α . Además de suponer que todos los parámetros son positivos consideramos $\nu > \delta$, $\lambda > \delta$ es decir que el número de nacimientos y contactos adecuados son mayores que el número de muertes por enfermedad. La justifi-

cación biológica de esto es que en caso contrario los infecciosos mueren en mayor cantidad que los nuevos casos de infección y por tanto la enfermedad se extingue rápidamente.

Sean $\bar{S}(t)$, $\bar{I}(t)$ y $\bar{R}(t)$ la densidad de la población de susceptibles, infecciosos y recuperados (con inmunidad) al tiempo t respectivamente.

El modelo está representado por el siguiente diagrama:



Las ecuaciones diferenciales para el modelo son:

$$\begin{aligned}
 \bar{S}'(t) &= \nu N - \frac{\lambda \bar{S}\bar{I}}{N} - \mu \bar{S} - \alpha \bar{S} \\
 \bar{I}'(t) &= \frac{\lambda \bar{S}\bar{I}}{N} - \mu \bar{I} - \gamma \bar{I} - \delta \bar{I} \\
 \bar{R}'(t) &= \alpha \bar{S} + \gamma \bar{I} - \mu \bar{R} \\
 N'(t) &= (\nu - \mu)N - \delta \bar{I}
 \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

con la siguiente condición: $\bar{S}(t) + \bar{I}(t) + \bar{R}(t) = N(t)$.

Considerando las proporciones:

$$S = \frac{\bar{S}}{N}, \quad I = \frac{\bar{I}}{N}, \quad R = \frac{\bar{R}}{N}$$

tenemos el nuevo sistema

$$\begin{aligned}
 S'(t) &= \nu - \lambda SI - \nu S - \alpha S + \delta SI \\
 I'(t) &= \lambda SI - \gamma I - \nu I - \delta I + \delta I^2 \\
 R'(t) &= \alpha S + \gamma I - \nu R + \delta IR \\
 N'(t) &= (\nu - \mu - \delta I)N
 \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Usando la relación $S + I + R = \frac{\bar{S}}{N} + \frac{\bar{I}}{N} + \frac{\bar{R}}{N} = \frac{N}{N} = 1$

y como $R = 1 - S - I$ tenemos el sistema para las proporciones de individuos:

$$S'(t) = \nu - \lambda SI - \nu S - \alpha S + \delta SI \quad (3.2.3)$$

$$I'(t) = \lambda SI - \gamma I - \nu I - \delta I + \delta I^2.$$

En la región $\Omega = \{(S, I) : 0 \leq S \leq 1, 0 \leq I \leq 1, S + I \leq 1\}$.

3.3 Análisis de las proporciones en equilibrio del sistema (3.2.3).

Como en los modelos anteriores se puede demostrar que la región Ω es positivamente invariante bajo el flujo inducido por el sistema (3.2.3).

Para este modelo como en los anteriores, el parámetro R_0 se interpreta epidemiológicamente así: la tasa de traslado de la proporción infectada a la proporción de recuperados está dada por la tasa de recuperación más la tasa de nacimientos y la tasa de mortalidad por enfermedad esto es $(\nu + \gamma + \delta)$ por lo que la media por infección es $\frac{1}{\nu + \gamma + \delta}$ y entonces sin vacunación el número de contacto está dado por $\frac{\lambda}{\nu + \gamma + \delta}$ nuevamente debido a la vacunación sólo una parte de la proporción susceptible puede ser infectada, tal fracción está dada por $\frac{\nu}{\nu + \alpha}$. Entonces el número promedio de contactos adecuados (los que producen enfermedad) de un infeccioso con los susceptibles durante el periodo de infección está dado por el termino $\tilde{R}_0 = \frac{\lambda}{\nu + \gamma + \delta} * \frac{\nu}{\nu + \alpha} = R_0 * \frac{\nu}{\nu + \alpha}$ el cual es nuestro número de contacto modificado para este modelo. Al igual que en los modelos anteriores \tilde{R}_0 es menor que R_0 .

De la segunda ecuación de (3.2.3) tenemos las siguientes relaciones para los puntos de equilibrio:

$$I = 0 \quad \text{ó} \quad S^* = \frac{(\nu + \gamma + \delta) - \delta I}{\lambda} \quad (3.3.1)$$

Si $I = 0$ entonces el punto de equilibrio libre de enfermedad para el sistema (3.2.3) está dado por:

$$E_0 = \left(\frac{\nu}{\nu + \alpha}, 0 \right)$$

Ahora bien si $I \neq 0$ sustituyendo el valor de S^* en la primera ecuación de (3.2.3), se tiene que I^* debe ser raíz real de la siguiente ecuación cuadrática:

$$f(I) = \frac{1}{\lambda} [\lambda\nu + (\nu + \gamma + \delta - \delta I)(-\lambda I - \nu - \alpha + \delta I)] = 0 \quad (3.3.2)$$

Para estar en el interior de Ω , un punto de equilibrio dado por (3.3.1) debe satisfacer las siguientes desigualdades:

$$0 < I < 1 \quad (3.3.3)$$

$$0 < \frac{(\nu + \gamma + \delta) - \delta I}{\lambda} < 1 \quad (3.3.4)$$

La desigualdad (3.3.4) se cumple si $\frac{\nu + \gamma + \delta - \lambda}{\delta} < I < \frac{\nu + \gamma + \delta}{\delta}$.

Como I^* es una raíz del polinomio (3.3.2), para que se cumplan las dos desigualdades antes mencionadas, debemos de buscar las raíces de (3.3.2) en el intervalo (I_1, I_2) donde

$$I_1 = \max \left\{ 0, \frac{\nu + \gamma + \delta - \lambda}{\delta} \right\} \quad \text{e} \quad I_2 = \min \left\{ 1, \frac{\nu + \gamma + \delta}{\delta} \right\}$$

Tenemos que el mínimo de I_2 es 1, evaluando en f tenemos

$$f(1) = \frac{1}{\lambda} [\lambda\nu + (\nu + \gamma)(-\lambda - \nu - \alpha + \delta)] < 0$$

$$f(0) = \frac{1}{\lambda} [\lambda\nu - (\nu + \gamma + \delta)(\nu + \alpha)] = \frac{(\nu + \gamma + \delta)(\nu + \alpha)}{\lambda} (\tilde{R}_0 - 1).$$

Por lo tanto la raíz está entre I_1 e I_2 .

De donde $f(I)$ tiene una raíz en $[0, 1]$ si $\tilde{R}_0 > 1$.

Por lo tanto si $\tilde{R}_0 > 1$, entonces existe el punto endémico $E_1 = (S^*, I^*)$.

Si $\tilde{R}_0 \leq 1$, E_0 es el único punto en el interior de Ω y si $\tilde{R}_0 > 1$, E_0 y E_1 ambos están en Ω .

Ahora analizaremos la estabilidad local de los puntos de equilibrio E_0 y E_1 para lo cual usaremos la matriz de Jacobi del sistema (3.2.3) la cual es:

$$DF = \begin{bmatrix} (\delta - \lambda)I - \nu - \alpha & (\delta - \lambda)S \\ \lambda I & \lambda S - (\nu + \gamma + \delta) + 2\delta I \end{bmatrix}$$

Evaluando DF en el punto E_0 tenemos:

$$DF(E_0) = \begin{bmatrix} -\nu - \alpha & \frac{(\delta - \lambda)\nu}{\nu + \alpha} \\ 0 & (\nu + \gamma + \delta)(\tilde{R}_0 - 1) \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios son:

$$\lambda_1 = -(\nu + \alpha) \quad \text{y} \quad \lambda_2 = (\nu + \gamma + \delta)(\tilde{R}_0 - 1)$$

de donde si $\tilde{R}_0 < 1$ entonces E_0 es localmente asintóticamente estable.

Para el caso $\tilde{R}_0 = 1$, la matriz de Jacobi del sistema (3.2.3) evaluada en el punto de equilibrio E_0 tiene un valor propio cero; en este caso utilizamos el Teorema de la Variedad Central [véase Apéndice A], para demostrar que E_0 es localmente asintóticamente estable.

Primero trasladamos el sistema (3.2.3) al origen para lo cual usamos el cambio de coordenadas $(\hat{S}, \hat{I}) = (S - \frac{\nu}{\nu + \alpha}, I)$, obtenemos el nuevo sistema:

$$\begin{aligned} \hat{S}'(t) &= -(\lambda - \delta)\hat{S}\hat{I} - (\nu + \alpha)\hat{S} - \frac{(\lambda - \delta)\nu}{\nu + \alpha}\hat{I} \\ \hat{I}'(t) &= \lambda\hat{S}\hat{I} + \delta\hat{I}^2 \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Para aplicar el Teorema de la Variedad Central, para lo cual usamos el siguiente cambio de variables:

$$x = \hat{I} \quad (3.3.6)$$

$$y = \hat{S} + \frac{(\lambda - \delta)\nu}{(\nu + \alpha)^2}\hat{I}$$

calculando la derivada respecto a t de cada una de las nuevas variables y usando las ecuaciones (3.2.3), obtenemos el sistema en su forma normal:

$$x' = 0x - \left[\frac{\lambda\nu(\lambda - \delta)}{(\nu + \alpha)^2} - \delta \right]x^2 + \lambda xy \quad (3.3.7)$$

$$y' = -(\nu + \alpha)y + \frac{\lambda\nu(\lambda - \delta)}{(\nu + \alpha)^2} \left[1 - \frac{\nu(\lambda - \delta)}{(\nu + \alpha)^2} \right] x^2 - (\lambda - \delta) \left[1 - \frac{\lambda\nu}{(\nu + \alpha)^2} \right] xy.$$

Por el inciso a) del Teorema de la Variedad Central, existe una variedad central $y = h(x)$, tal que $h(x) = O(x^2)$. Sustituyendo $h(x)$ en la primera ecuación del sistema (3.3.7), y agrupando los términos de orden dos obtenemos, por el inciso b) del Teorema de la Variedad Central, que la estabilidad de la solución cero de (3.3.7) está dada por:

$$x' = - \left[\frac{\lambda\nu(\lambda - \delta)}{(\nu + \alpha)^2} - \delta \right] x^2 + O(x^3) \quad (3.3.8)$$

En la ecuación (3.3.8) como $x > 0$ entonces $x' < 0$, por lo que la solución cero de (3.3.8) es estable, entonces todas las soluciones tienden al punto de equilibrio $(0, 0)$ en las coordenadas (\hat{S}, \hat{I}) . Por lo tanto el punto de equilibrio E_0 es localmente asintóticamente estable.

Para el caso $\tilde{R}_0 > 1$ el punto de equilibrio E_0 es un punto silla y el punto de equilibrio E_1 está en el interior de Ω , la estabilidad de este punto se determina evaluando DF en el punto E_1 :

$$DF(E_1) = \begin{bmatrix} (\delta - \lambda)I^* - \nu - \alpha & (\delta - \lambda)S^* \\ \lambda I^* & \lambda S^* - (\nu + \gamma + \delta) + 2\delta I^* \end{bmatrix}$$

de las ecuaciones (3.2.3) se obtienen las siguientes relaciones:

$$-\frac{\nu}{S^*} = (\delta - \lambda)I^* - \nu - \alpha \quad (3.3.9)$$

$$\lambda S^* - (\nu + \gamma + \delta) + \delta I^* = 0. \quad (3.3.10)$$

Entonces la matriz DF evaluada en E_1 se puede escribir como:

$$DF(E_1) = \begin{bmatrix} \frac{-\lambda\nu}{(\nu + \gamma + \delta) - \delta I^*} & (\delta - \lambda) \frac{(\nu + \gamma + \delta) - \delta I^*}{\lambda} \\ \lambda I^* & \delta I^* \end{bmatrix}$$

cuyo polinomio característico está dado por:

$$p(r) = r^2 + Br + C \quad (3.3.11)$$

donde

$$B = \frac{\lambda\nu}{(\nu + \gamma + \delta) - \delta I^*} - \delta I^*$$

$$C = I^*(\lambda - \delta)[(\nu + \gamma + \delta) - \delta I^*]$$

de (3.3.4) obtenemos la relación

$$\frac{\nu + \gamma + \delta - \lambda}{\delta} < I^*$$

lo cual implica que

$$(\nu + \gamma + \delta) - \delta I^* < \lambda \quad (3.3.12)$$

tomando inversos tenemos

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{1}{(\nu + \gamma + \delta) - \delta I^*} \quad (3.3.13)$$

multiplicando ambos lados por $\lambda\nu$ obtenemos

$$\nu = \frac{\lambda\nu}{\lambda} < \frac{\lambda\nu}{(\nu + \gamma + \delta) - \delta I^*} \quad (3.3.14)$$

como $I^* < 1$ y por hipótesis $\delta < \nu$ se tiene también que

$$\delta I^* < \delta < \nu \quad (3.3.15)$$

de donde entonces

$$\delta I^* < \frac{\lambda\nu}{(\nu + \gamma + \delta) - \delta I^*} \quad (3.3.16)$$

por lo tanto $B > 0$.

Como por hipótesis $\delta < \lambda$ y usando (3.3.15) también $C > 0$.

Por lo tanto se satisfacen las condiciones de Routh-Hurwitz [véase Apéndice A], para el polinomio (3.3.11) lo que implica que el punto E_1 es localmente asintóticamente estable.

A continuación tenemos el siguiente teorema que describe el comportamiento asintótico de las trayectorias en el plano fase SI .

Teorema 3.3.1 Si $\tilde{R}_0 \leq 1$ entonces el punto de equilibrio E_0 es globalmente asintóticamente estable en Ω . Si $\tilde{R}_0 > 1$ entonces el punto de equilibrio E_1 es globalmente asintóticamente estable en la región $\Omega - \{(S, 0) : 0 \leq S \leq 1\}$ y las trayectorias que comienzan en el eje S tienden al punto de equilibrio E_0 .

Demostración. Si $\tilde{R}_0 \leq 1$ entonces E_0 es el único punto de equilibrio en Ω . No hay trayectorias cerradas en Ω ya que una trayectoria cerrada debe contener un punto de equilibrio en su interior y dado que E_0 está en la frontera de Ω la cual es positivamente invariante esto no es posible. Por el teorema de Poincaré-Bendixson generalizado, entonces todas las trayectorias tienden al punto de equilibrio E_0 .

Si $\tilde{R}_0 > 1$ entonces E_0 es un punto silla y además E_1 está en el interior de Ω .

Como el campo vectorial del sistema (3.2.3) es transversal a la frontera de Ω excepto en el eje S el cual es un conjunto invariante del sistema (3.2.3) sobre este eje tenemos que:

$$S' = \nu - \nu S - \alpha S \text{ entonces } S(t) \longrightarrow \frac{\nu}{\nu + \alpha} \text{ cuando } t \longrightarrow \infty.$$

Por lo que E_0 es el único conjunto omega límite en la frontera de Ω y todas las trayectorias que comienzan en el eje S tienden a E_0 .

Ahora aplicaremos el criterio de Dulac-Bendixson, para demostrar que no hay trayectorias cerradas alrededor de E_1 para esto multiplicamos el sistema (3.2.3) por la función $\frac{1}{I}, I \neq 0$, de donde tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{S'}{I} &= \frac{\nu}{I} + (-\lambda + \delta)S - \frac{(\nu + \alpha)S}{I}, \\ \frac{I'}{I} &= \lambda S + \delta I - \nu - \gamma - \delta. \end{aligned}$$

Aplicando el criterio al sistema anterior y recordando que $\lambda > \delta, \nu > \delta$:

$$\frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\nu}{I} - \lambda S + \delta S - \frac{\nu S + \alpha S}{I} \right) + \frac{\partial}{\partial I} (\lambda S + \delta I - \nu - \gamma - \delta) = -\lambda + 2\delta - \frac{\nu + \alpha}{I} < 0.$$

Por lo tanto no hay trayectorias cerradas en Ω . Por el teorema de Poincaré-Bendixson generalizado, todas las soluciones tienden al punto de equilibrio E_1 con excepción de aquellas que comienzan en el eje S . ■

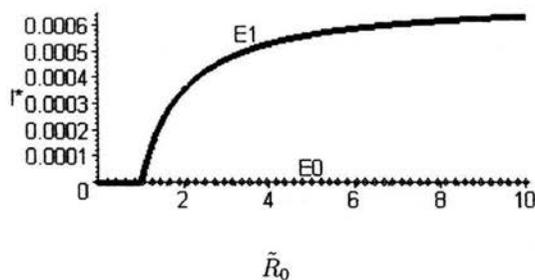


Figura 3.1: Diagrama de bifurcaciones de los puntos de equilibrio del sistema (3.2.3) con respecto del parámetro \tilde{R}_0 . La línea punteada representa la rama estable y la continua la rama inestable. Utilizando los parámetros como en la figura 3.3.

En seguida se muestran algunas simulaciones numéricas para el sistema (3.2.3).

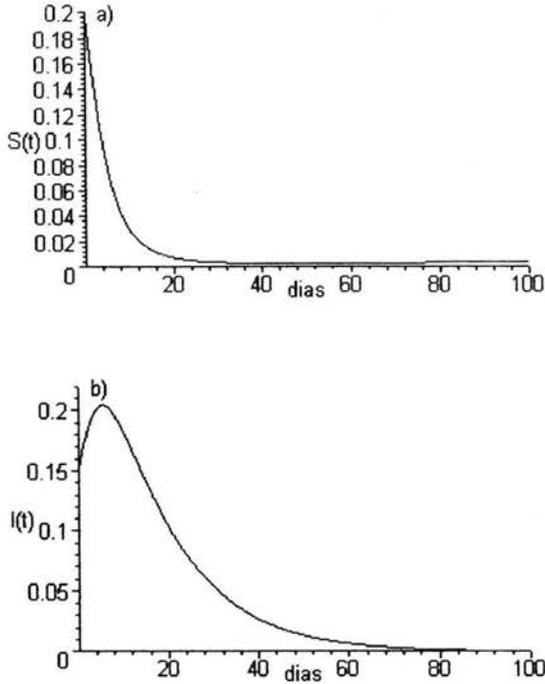


Figura 3.2: Solución numérica del sistema (3.2.3). La gráfica muestra el comportamiento de a) la proporción de susceptibles y b) la proporción de infectados en un tiempo de 100 días. Los parámetros usados son: $\nu = 5 \cdot 10^{-5}$, $\gamma^{-1} = 14$ días, $\delta = 4 \cdot 10^{-5}$, $\alpha = .002$, $\lambda = 1$, en este caso $\tilde{R}_0 = .341$. Las condiciones iniciales son $S_0 = 0.2$, $I_0 = 0.15$.

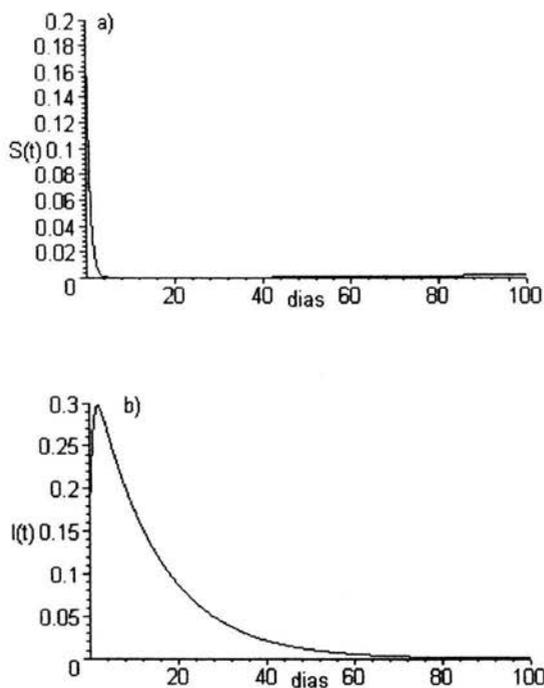


Figura 3.3: Solución numérica del sistema (3.2.3). La gráfica muestra el comportamiento de a) la proporción de susceptibles y b) la proporción de infectados en un tiempo de 100 días. Los parámetros usados son: $\nu = 5 \cdot 10^{-5}$, $\gamma^{-1} = 14$ días, $\alpha = .002$, $\lambda = 5$, $\delta = 4 \cdot 10^{-5}$, en este caso $\tilde{R}_0 = 1.70$. Las condiciones iniciales son $S_0 = 0.2$, $I_0 = 0.15$.

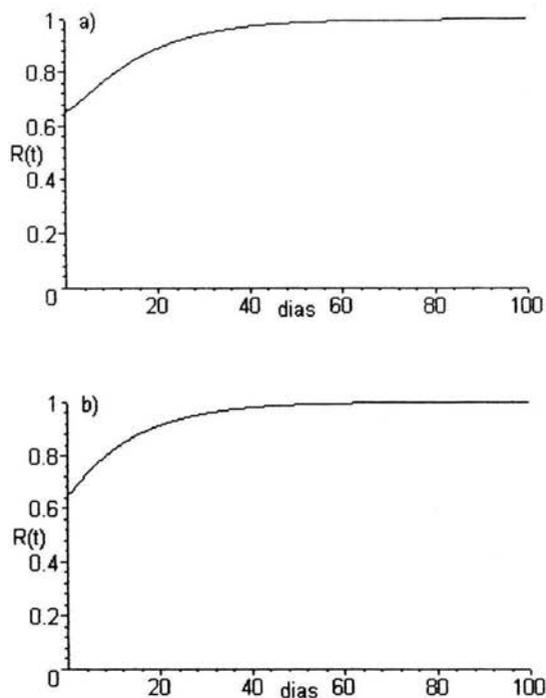


Figura 3.4: Solución numérica del sistema (3.2.3). La gráfica muestra el comportamiento de la proporción de recuperados para los casos a) $\tilde{R}_0 < 1$, y b) $\tilde{R}_0 > 1$, en un tiempo de 100 días. Las condiciones iniciales y parámetros son como en las figuras 3.2 y 3.3 respectivamente.

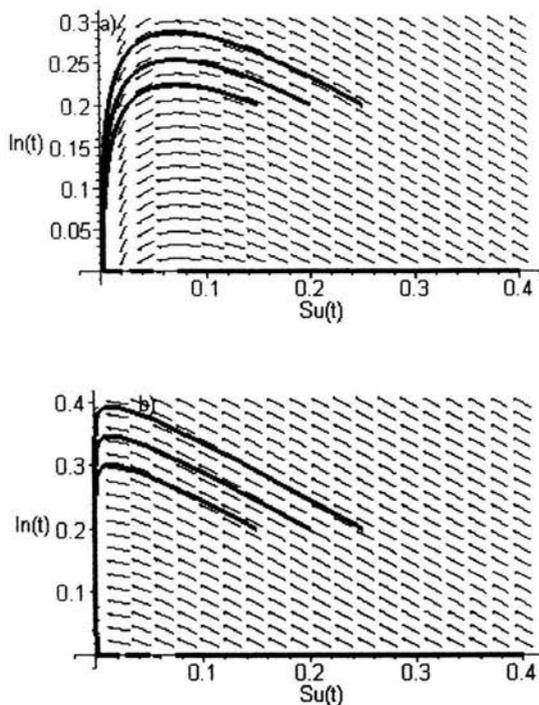


Figura 3.5. Planos fase para el sistema (3.2.3). a) para el caso $\tilde{R}_0 < 1$ puede observarse que todas las soluciones tienden al punto de equilibrio $E_0 = (.0244, 0)$. b) para el caso $\tilde{R}_0 > 1$ puede observarse que todas las soluciones tienden al punto de equilibrio $E_1 = (.0142, .00028)$. A excepción de aquellas que comienzan en el eje S las cuales tienden al punto de equilibrio E_0 .

3.4 Análisis de los totales.

En esta sección vamos a analizar el comportamiento asintótico de la población humana N y los totales de cada una de las clases epidemiológicas $(\bar{S}, \bar{I}, \bar{R})$ del modelo (3.2.1).

Para lo cual definimos los siguientes parámetros:

$$P = \begin{cases} \frac{\nu}{\mu} & \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1 \\ \frac{\nu}{\mu + \delta I^*} & \text{si } \tilde{R}_0 > 1 \end{cases}$$

$$P_1 = \begin{cases} \frac{\lambda \nu}{(\mu + \gamma + \delta)(\nu + \alpha)} & \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1 \\ \frac{\lambda S^*}{\mu + \gamma + \delta} & \text{si } \tilde{R}_0 > 1 \end{cases}$$

Primero consideramos la dinámica de las soluciones con condiciones iniciales $\bar{I} \neq 0$ y $P \neq 1$.

Teorema 3.4.1 *La población $N(t)$ decrece a cero si $P < 1$ y crece a infinito si $P > 1$.*

La tasa asintótica de decrecimiento o incremento está dada por $\mu(P - 1)$ si $\tilde{R}_0 \leq 1$; y por $(\mu + \delta I^)(P - 1)$, si $\tilde{R}_0 > 1$.*

Demostración. La dinámica para la población humana está dada por la siguiente ecuación

$$N'(t) = (\nu - \mu - \delta I)N.$$

Dado que I tiende a cero si $\tilde{R}_0 \leq 1$ y a I^* si $\tilde{R}_0 > 1$, entonces la forma límite está dada por

$$N'(t) = (\nu - \mu)N = \mu(P - 1)N \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$N'(t) = (\nu - \mu - \delta I^*)N = (\mu + \delta I^*)(P - 1)N \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

la solución está dada por:

$$N(t) = N_0 e^{\mu(P-1)t} = N_0 e^{(\nu-\mu)t} \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$N(t) = N_0 e^{\mu(P-1)t} = N_0 e^{(\nu-\mu-\delta I^*)t} \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

Por lo tanto, cuando $t \rightarrow \infty$; $N(t)$ decrece a cero si $P < 1$ y tiende a infinito si $P > 1$.

Se observa que en el caso $P < 1$, $(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t))$ tiende a $(0, 0, 0)$ cuando $t \rightarrow \infty$. ■

Teorema 3.4.2 Para $P > 1$ y $t \rightarrow \infty$, las soluciones $(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t))$ del sistema (3.2.1) con condiciones iniciales en el plano $\bar{I} \neq 0$ tienden a $(\infty, 0, \infty)$ si $P_1 < 1$; y a (∞, ∞, ∞) si $P_1 > 1$.

Demostración. Recordemos que la ecuación para $\bar{I}(t)$ está dada por

$$\bar{I}'(t) = \lambda S \bar{I} - \mu \bar{I} - \gamma \bar{I} - \delta \bar{I}$$

y además

$$S \rightarrow \frac{\nu}{\nu + \alpha} \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$S \rightarrow S^* = \frac{(\nu + \gamma + \delta) - \delta I}{\lambda} \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

sustituyendo tenemos la forma límite para $\bar{I}(t)$

$$\bar{I}'(t) = \frac{\lambda \nu \bar{I}}{\nu + \alpha} - (\mu + \gamma + \delta) \bar{I} = (\mu + \gamma + \delta)(P_1 - 1) \bar{I} \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$\bar{I}'(t) = \lambda S^* \bar{I} - (\mu + \gamma + \delta) \bar{I} = (\mu + \gamma + \delta)(P_1 - 1) \bar{I} \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

cuya solución está dada por

$$\bar{I}(t) = \bar{I}_0 e^{(\mu + \gamma + \delta)(P_1 - 1)t} = \bar{I}_0 e^{[\frac{\lambda \nu}{\nu + \alpha} - (\mu + \gamma + \delta)]t} \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$\bar{I}(t) = \bar{I}_0 e^{(\mu + \gamma + \delta)(P_1 - 1)t} = \bar{I}_0 e^{[\lambda S^* - (\mu + \gamma + \delta)]t} \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

lo cual implica que $\bar{I}(t)$ decrece exponencialmente si $P_1 < 1$ y crece exponencialmente si $P_1 > 1$.

Del sistema (3.2.1) podemos escribir la ecuación para $\bar{S}(t)$ como

$$\bar{S}'(t) = \nu N - \lambda \bar{S} I - \mu \bar{S} - \alpha \bar{S}$$

usando que

$$I \rightarrow 0 \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$I \longrightarrow I^* \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

tenemos la forma límite para $\bar{S}(t)$

$$\bar{S}'(t) = \nu N - \mu \bar{S} - \alpha \bar{S} \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$\bar{S}'(t) = \nu N - \lambda \bar{S} I^* - \mu \bar{S} - \alpha \bar{S} \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

sustituyendo las soluciones de $N(t)$ tenemos que las soluciones para $\bar{S}(t)$ en su forma límite están dadas por

$$\bar{S}(t) = \bar{S}_0 e^{-(\mu+\alpha)t} + \frac{\nu}{\nu+\alpha} N_0 [e^{(\nu-\mu)t} - e^{-(\mu+\alpha)t}] \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$\bar{S}(t) = \bar{S}_0 e^{-(\lambda I^* + \mu + \alpha)t} + \frac{\nu N_0}{\lambda I^* - \delta I^* + \nu + \alpha} [e^{(\nu - \mu - \delta I^*)t} - e^{-(\lambda I^* + \mu + \alpha)t}] \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

de donde cuando $t \longrightarrow \infty$

$$\bar{S}(t) \longrightarrow \frac{\nu}{\nu+\alpha} N_0 e^{(\nu-\mu)t} = \frac{\nu}{\nu+\alpha} N(t) \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$\bar{S}(t) \longrightarrow \frac{\nu}{\lambda I^* - \delta I^* + \nu + \alpha} N_0 e^{(\nu - \mu - \delta I^*)t} = \frac{\nu}{\lambda I^* - \delta I^* + \nu + \alpha} N(t) \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

entonces la forma exponencial de $N(t)$ en el límite nos asegura que $\bar{S}(t) \longrightarrow \infty$ dado que

$$P > 1.$$

Del sistema (3.2.1) tenemos que

$$\bar{R}'(t) = \alpha \bar{S} + \gamma \bar{I} - \mu \bar{R}$$

sustituyendo las soluciones de $\bar{S}(t)$, $\bar{I}(t)$ tenemos la solución límite de $\bar{R}(t)$ con $\tilde{R}_0 \leq 1$,

está dada por

$$\begin{aligned} \bar{R}(t) = & \bar{R}_0 e^{-\mu t} + \bar{S}_0 [-e^{-(\alpha+\mu)t} + e^{-\mu t}] + \frac{\alpha N_0}{\nu + \alpha} [e^{(\nu-\mu)t} - e^{-\mu t}] + \\ & \frac{\nu N_0}{(\nu + \alpha)} [e^{-(\mu+\alpha)t} - e^{-\mu t}] + \frac{\gamma \bar{I}_0}{\frac{\lambda \nu}{\nu + \alpha} - (\gamma + \delta)} [e^{[\frac{\lambda \nu}{\nu + \alpha} - (\mu + \gamma + \delta)]t} - e^{-\mu t}] \end{aligned}$$

y para $\tilde{R}_0 > 1$, está dada por

$$\bar{R}(t) = \bar{R}_0 e^{-\mu t} + \frac{\alpha \bar{S}_0}{\lambda I^* + \alpha} [-e^{-(\lambda I^* + \alpha + \mu)t} + e^{-\mu t}] + \frac{\alpha N_0}{\lambda I^* + \nu + \alpha} [e^{(\nu-\mu)t} - e^{-\mu t}] +$$

$$\frac{\alpha\nu N_0}{(\lambda I^* + \nu + \alpha)(\lambda I^* + \alpha)} [e^{-(\lambda I^* + \mu + \alpha)t} - e^{-\mu t}] + \frac{\gamma \bar{I}_0}{\lambda S^* - (\gamma + \delta)} [e^{[\lambda S^* - (\mu + \gamma + \delta)]t} - e^{-\mu t}]$$

cuando t tiende a infinito tenemos que

$$\bar{R}(t) \rightarrow \frac{\alpha N_0 e^{(\nu - \mu)t}}{\nu + \alpha} + \frac{\gamma \bar{I}_0 e^{[\frac{\lambda\nu}{\nu + \alpha} - (\mu + \gamma + \delta)]t}}{\frac{\lambda\nu}{\nu + \alpha} - (\gamma + \delta)} = \frac{\alpha N(t)}{\nu + \alpha} + \frac{\gamma \bar{I}(t)}{\frac{\lambda\nu}{\nu + \alpha} - (\gamma + \delta)} \quad \text{si } \tilde{R}_0 \leq 1$$

$$\bar{R}(t) \rightarrow \frac{\alpha N_0 e^{(\nu - \mu)t}}{\lambda I^* + \nu + \alpha} + \frac{\gamma \bar{I}_0 e^{[\lambda S^* I - (\mu + \gamma + \delta)]t}}{\lambda S^* - (\gamma + \delta)} = \frac{\alpha N(t)}{\lambda I^* + \nu + \alpha} + \frac{\gamma \bar{I}(t)}{\lambda S^* - (\gamma + \delta)} \quad \text{si } \tilde{R}_0 > 1$$

en ambos casos $P > 1$, por lo que $N(t) \rightarrow \infty$, si $P_1 > 1$, los terminos que contienen a $\bar{I}(t)$ son positivos e $\bar{I}(t)$ crece exponencialmente de donde $\bar{R}(t) \rightarrow \infty$. Si $P_1 < 1$, entonces $\bar{I}(t)$ decrece exponencialmente y como $N(t)$ crece exponencialmente entonces $\bar{R}(t) \rightarrow \infty$. ■

Teorema 3.4.3 Si $P = 1$ y $\delta > 0$, entonces $N(t)$ tiende a un equilibrio $N^* \geq 0$ y $(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t))$ tiende a $(\frac{N^*\nu}{\nu + \alpha}, 0, \frac{N^*\alpha}{\nu + \alpha})$ si $\tilde{R}_0 \leq 1$, y a $(\bar{S}^*, \bar{I}^*, \bar{R}^*)$, si $\tilde{R}_0 > 1$.

Demostración. Como $\delta > 0$ por hipótesis, tomemos dos subcasos: $\tilde{R}_0 \leq 1$ y $\tilde{R}_0 > 1$.

Si $P = 1$ y $\tilde{R}_0 \leq 1$ entonces $\nu = \mu$, y por lo tanto la ecuación diferencial para la población está dada por:

$$N'(t) = (-\delta I)N$$

cuya solución esta dada por:

$$0 \leq N(t) = N_0 e^{-\delta \int_0^t I(\tau) d\tau}$$

En el límite $N(t) \rightarrow N^*$, que depende de N_0 , entonces para cada valor de N_0 tenemos un punto de equilibrio N^* .

Para los totales, usando las ecuaciones del sistema (3.2.1) igualadas a cero tenemos que existe una línea de equilibrios dada por $(\frac{N^*\nu}{\mu + \alpha}, 0, \frac{N^*\alpha\nu}{\mu(\mu + \alpha)})$ utilizando la igualdad $\nu = \mu$,

tenemos $(\frac{N^*\nu}{\nu + \alpha}, 0, \frac{N^*\alpha}{\nu + \alpha})$, y todas las soluciones con condiciones iniciales positivas se aproximan a esta línea.

Para demostrar esto usamos la función de Liapunov

$$V = N(t)$$

cuya derivada orbital está dada por

$$\dot{V} = -\delta \bar{I} \leq 0.$$

Por el Teorema de Lasalle-Liapunov, todas las soluciones de (3.2.1) tienden al máximo conjunto invariante contenido en

$$M_1 = \{(\bar{S}(t), \bar{I}(t), \bar{R}(t)) \in R_+^3 \mid \bar{I} = 0\}.$$

El cual se puede comprobar usando (3.2.1) que corresponde a la línea de equilibrios.

La matriz de Jacobi del sistema (3.2.1) está dada por

$$D\bar{F} = \begin{bmatrix} -\frac{(\bar{I} + \bar{R})\lambda\bar{I}}{(\bar{S} + \bar{I} + \bar{R})^2} - \alpha & \nu - \frac{(\bar{S} + \bar{R})\lambda\bar{S}}{(\bar{S} + \bar{I} + \bar{R})^2} & \nu + \frac{\lambda\bar{S}\bar{I}}{(\bar{S} + \bar{I} + \bar{R})^2} \\ \frac{(\bar{I} + \bar{R})\lambda\bar{I}}{(\bar{S} + \bar{I} + \bar{R})^2} & \frac{(\bar{S} + \bar{R})\lambda\bar{S}}{(\bar{S} + \bar{I} + \bar{R})^2} - (\nu + \gamma + \delta) & \frac{-\lambda\bar{S}\bar{I}}{(\bar{S} + \bar{I} + \bar{R})^2} \\ \alpha & \gamma & -\nu \end{bmatrix}$$

evaluando en los puntos de equilibrio $(\frac{N^*\nu}{\nu + \alpha}, 0, \frac{N^*\alpha}{\nu + \alpha})$ tenemos:

$$D\bar{F} = \begin{bmatrix} -\alpha & \nu - \frac{\lambda\nu}{\nu + \alpha} & \nu \\ 0 & \frac{\lambda\nu}{\nu + \alpha} - (\nu + \gamma + \delta) & 0 \\ \alpha & \gamma & -\nu \end{bmatrix}$$

cuyos valores propios están dados por

$$\xi_1 = 0$$

$$\xi_2 = -(\nu + \alpha)$$

$$\xi_3 = (\nu + \gamma + \delta)(\bar{R}_0 - 1).$$

Entonces para $\tilde{R}_0 < 1$, hay un valor propio igual a cero y los otros tienen parte real negativa, por lo que entonces los puntos de equilibrio $(\frac{N^*\nu}{\nu + \alpha}, 0, \frac{N^*\alpha}{\nu + \alpha})$ son neutralmente estables, y todas las trayectorias cercanas a la línea de equilibrios se aproximan a ella [1].

Para $\tilde{R}_0 = 1$, la matriz de Jacobi del sistema (3.2.1) evaluada en los puntos de equilibrio $(\frac{N^*\nu}{\nu + \alpha}, 0, \frac{N^*\alpha}{\nu + \alpha})$ tiene un valor propio cero de multiplicidad dos; en este caso utilizamos nuevamente el Teorema de la Variedad Central, para demostrar que los puntos de equilibrio $(\frac{N^*\nu}{\nu + \alpha}, 0, \frac{N^*\alpha}{\nu + \alpha})$ con $N^* > 0$ son inestables, por lo tanto todas las soluciones tienden a $(0, 0, 0)$.

Primero trasladamos el sistema (3.2.1) al origen para lo cual usamos el cambio de coordenadas $(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R}) = (\bar{S} - \frac{N^*\nu}{\nu + \alpha}, \bar{I}, \bar{R} - \frac{N^*\alpha}{\nu + \alpha})$, y la relación $\bar{S} + \bar{I} + \bar{R} = N$ obtenemos el nuevo sistema:

$$\begin{aligned}\hat{S}'(t) &= \nu(\hat{S} + \hat{I} + \hat{R} + N^*) - \frac{\lambda\hat{I}}{(\hat{S} + \hat{I} + \hat{R} + N^*)}(\hat{S} + \frac{N^*\nu}{\nu + \alpha}) - (\hat{S} + \frac{N^*\nu}{\nu + \alpha})(\nu + \alpha) \\ \hat{I}'(t) &= \frac{\lambda\hat{I}}{(\hat{S} + \hat{I} + \hat{R} + N^*)}(\hat{S} + \frac{N^*\nu}{\nu + \alpha}) - (\nu + \gamma + \delta)\hat{I} \\ \hat{R}'(t) &= \alpha(\hat{S} + \frac{N^*\nu}{\nu + \alpha}) + \gamma\hat{I} - \nu(\hat{R} + \frac{N^*\alpha}{\nu + \alpha})\end{aligned}\quad (3.4.1)$$

Para aplicar el Teorema de la Variedad Central, usamos el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{\nu}{\nu + \alpha}\hat{S} - \frac{\gamma(\nu + \alpha) + \alpha\delta}{(\nu + \alpha)^2}\hat{I} + \frac{\nu}{\nu + \alpha}\hat{R} \\ x_2 &= \hat{I} \\ y &= \frac{\alpha}{\nu + \alpha}\hat{S} - \frac{\gamma(\nu + \alpha) + \alpha\delta}{(\nu + \alpha)^2}\hat{I} - \frac{\nu}{\nu + \alpha}\hat{R}\end{aligned}\quad (3.4.2)$$

calculando la derivada respecto a t de cada una de las nuevas variables y usando las ecuaciones (3.2.1), obtenemos el sistema en su forma normal:

$$x_1' = 0x_1 - \frac{\delta}{\nu + \alpha}x_2 + m_1[-g_1(x_1 + y)x_2 + g_2x_2^2 + g_2x_2(\frac{\alpha}{\nu}x_1 + \frac{\gamma(\nu + \alpha) + \alpha\delta}{\nu(\nu + \alpha)}x_2 - y)]$$

$$x_2' = 0x_2 + g_1(x_1 + y)x_2 - g_2x_2^2 - g_2x_2\left(\frac{\alpha}{\nu}x_1 + \frac{\gamma(\nu + \alpha) + \alpha\delta}{\nu(\nu + \alpha)}x_2 - y\right) \quad (3.4.3)$$

$$y' = -(\nu + \alpha)y + n_1[-g_1(x_1 + y)x_2 + g_2x_2^2 + g_2x_2\left(\frac{\alpha}{\nu}x_1 + \frac{\gamma(\nu + \alpha) + \alpha\delta}{\nu(\nu + \alpha)}x_2 - y\right)]$$

donde

$$m_1 = \frac{(\nu + \gamma)(\nu + \alpha) + \alpha\delta}{(\nu + \alpha)^2}$$

$$g_1 = \frac{\lambda\alpha}{N^*(\nu + \alpha)}$$

$$g_2 = \frac{\lambda\nu}{N^*(\nu + \alpha)}$$

$$n_1 = \frac{(\nu - \gamma)(\nu + \alpha) - \alpha\delta}{(\nu + \alpha)^2}.$$

Por el inciso a) del Teorema de la Variedad Central, existe una variedad central $y = h(x_1, x_2)$, tal que $h(x_1, x_2) = O((x_1 + x_2)^2)$. Sustituyendo $h(x_1, x_2)$ en las primeras dos ecuaciones del sistema (3.4.3), y agrupando los términos de orden cúbico obtenemos, por el inciso b) del Teorema de la Variedad Central, que la estabilidad de la solución cero de (3.4.3) está dada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$u_1' = u_2\left(\frac{\lambda[(\nu + \gamma)(\nu + \alpha) + \alpha\delta]^2}{N^*(\nu + \alpha)^4}u_2 - \frac{\nu\delta}{\nu + \alpha}\right) + O((u_1 + u_2)^3) \quad (3.4.4)$$

$$u_2' = u_2^2 \frac{-\lambda}{N^*(\nu + \alpha)} \left[\frac{(\nu + \gamma)(\nu + \alpha) + \alpha\delta}{(\nu + \alpha)} \right] + O((u_1 + u_2)^3).$$

El sistema (3.4.4) depende únicamente de u_2 , de la segunda ecuación si $u_2 > 0$ entonces $u_2' < 0$ y si $u_2 < 0$ entonces $u_2' < 0$, por lo que el sistema (3.4.4) es inestable. Por lo tanto, la solución $(\frac{N^*\nu}{\nu + \alpha}, 0, \frac{N^*\alpha}{\nu + \alpha})$ con $N^* > 0$ es inestable.

Ahora analizando el caso $\tilde{R}_0 > 1$, la condición $P = 1$ implica que $\nu - \mu = \delta I^*$. sustituyendo en el sistema (3.2.1) tenemos una línea de equilibrios $(\bar{S}^*, \bar{I}^*, \bar{R}^*)$ dada por:

$$\bar{S}^* = \frac{\mu + \gamma + \delta}{\lambda} N^*$$

$$\bar{I}^* = \frac{r}{\delta} N^*$$

$$\bar{R}^* = \frac{\alpha(\mu + \gamma + \delta)}{\lambda\mu} N^* + \frac{\gamma r}{\mu\delta} N^*$$

donde $r = \nu - \mu$.

Dado que $N(t) \rightarrow N^*$ la forma límite del sistema (3.2.1) está dada por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\bar{S}'(t) &= \nu N^* - \frac{\lambda \bar{S} \bar{I}}{N^*} - \mu \bar{S} - \alpha \bar{S} \\ \bar{I}'(t) &= \frac{\lambda \bar{S} \bar{I}}{N^*} - \mu \bar{I} - \gamma \bar{I} - \delta \bar{I} \\ \bar{R}'(t) &= \alpha \bar{S} + \gamma \bar{I} - \mu \bar{R}\end{aligned}\tag{3.4.5}$$

cuya matriz de Jacobi está dada por:

$$D\bar{F} = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda \bar{I}}{N^*} - (\mu + \alpha) & -\frac{\lambda \bar{S}}{N^*} & 0 \\ \frac{\lambda \bar{I}}{N^*} & \frac{\lambda \bar{S}}{N^*} - (\mu + \gamma + \delta) & 0 \\ \alpha & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

de (3.4.5) evaluado sobre el punto de equilibrio $(\bar{S}^*, \bar{I}^*, \bar{R}^*)$ obtenemos las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}-\frac{\lambda \bar{I}^*}{N^*} - \mu - \alpha &= -\frac{\nu N^*}{\bar{S}^*} \\ \frac{\lambda \bar{S}^*}{N^*} &= \mu + \gamma + \delta\end{aligned}$$

sustituyendo en la jacobiana se tiene que

$$D\bar{F} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu N^*}{\bar{S}^*} - \frac{\lambda \bar{S}^*}{N^*} & -\frac{\lambda \bar{S}^*}{N^*} & 0 \\ \frac{\lambda \bar{I}^*}{N^*} & 0 & 0 \\ \alpha & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

evaluando en los puntos de equilibrio $(\bar{S}^*, \bar{I}^*, \bar{R}^*)$ tenemos:

$$D\bar{F} = \begin{bmatrix} -\frac{\lambda\nu}{(\mu + \gamma + \delta)} & -(\mu + \gamma + \delta) & 0 \\ \frac{\lambda r}{\delta} & 0 & 0 \\ \alpha & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

cuyo polinomio característico está dado por

$$p(q) = [q + \mu] \left[q^2 + q \left(\frac{\lambda\nu}{\mu + \gamma + \delta} \right) + \frac{\lambda r (\mu + \gamma + \delta)}{\delta} \right]$$

de donde uno de los valores propios es $-\mu < 0$ y los otros dos están dados por las raíces del polinomio

$$q^2 + q\left(\frac{\lambda\nu}{\mu + \gamma + \delta}\right) + \frac{\lambda r(\mu + \gamma + \delta)}{\delta} \quad (3.4.6)$$

cuyos coeficientes

$$A = \frac{\lambda\nu}{\mu + \gamma + \delta} > 0$$

$$B = \frac{\lambda r(\mu + \gamma + \delta)}{\delta} > 0.$$

Por lo tanto se satisfacen las condiciones de Routh-Hurwitz, para el polinomio (3.4.6) lo que implica que las raíces de (3.4.6) tienen parte real negativa. Por lo tanto la línea de equilibrios $(\bar{S}^*, \bar{I}^*, \bar{R}^*)$ es localmente asintóticamente estable [1]. ■

Teorema 3.4.4 *Sobre el plano $\bar{I} = 0$, el número de infecciosos $\bar{I}(t)$ permanece constante e igual a cero; el número de susceptibles $\bar{S}(t)$ tiende a $\frac{\nu}{\nu + \alpha} N(t)$ y el número de recuperados $\bar{R}(t)$ tienden a $\frac{\alpha}{\nu + \alpha} N(t)$.*

Demostración. Si $\bar{I}(t) = 0$ entonces el sistema (3.2.1) se reduce a :

$$\bar{S}'(t) = \nu N - \mu \bar{S} - \alpha \bar{S}$$

$$\bar{R}'(t) = \alpha \bar{S} - \mu \bar{R}$$

$$N'(t) = (\nu - \mu)N.$$

las soluciones para el sistema están dadas por:

$$N(t) = N_0 e^{(\nu - \mu)t}$$

$$\bar{S}(t) = \bar{S}_0 e^{-(\mu + \alpha)t} + \frac{\nu}{\nu + \alpha} N_0 [e^{(\nu - \mu)t} - e^{-(\mu + \alpha)t}]$$

$$\bar{R}(t) = -\bar{S}_0 e^{-(\mu + \alpha)t} + \frac{\alpha}{\nu + \alpha} N_0 e^{(\nu - \mu)t} + \frac{\nu}{\nu + \alpha} N_0 e^{-(\mu + \alpha)t}$$

cuando $t \rightarrow \infty$ tenemos que

$$\bar{S}(t) \rightarrow \frac{\nu}{\nu + \alpha} N_0 e^{(\nu - \mu)t} = \frac{\nu}{\nu + \alpha} N(t)$$

$$\bar{R}(t) \longrightarrow \frac{\alpha}{\nu + \alpha} N_0 e^{(\nu - \mu)t} = \frac{\alpha}{\nu + \alpha} N(t)$$

nuevamente en el límite se cumple que

$$\bar{S}(t) + \bar{I}(t) + \bar{R}(t) = \frac{\nu}{\nu + \alpha} N(t) + 0 + \frac{\alpha}{\nu + \alpha} N(t) = N(t). \blacksquare$$

3.5 Conclusiones.

Para este modelo obtuvimos tres parámetros que controlan el desarrollo de la enfermedad y el crecimiento de la población humana. El parámetro \tilde{R}_0 es la condición umbral que determina la existencia de la proporción endémica de humanos infectados. El parámetro P_1 como en el modelo anterior controla el comportamiento asintótico del total de infectados humanos cuando la proporción de infectados decrece en una población que está creciendo. El parámetro P al igual que en el modelo anterior regula el crecimiento de la población. Si $\tilde{R}_0 \leq 1$, P es la tasa de reproducción usual. Cuando $\tilde{R}_0 > 1$, P es una forma de medir el impacto de la enfermedad en la población.

Si $P = 1$, el comportamiento asintótico de la población depende del valor de δ . Si $\delta > 0$, N tiende a un equilibrio N^* el cual depende de la proporción de infectados. Así para $\tilde{R}_0 < 1$, (lo cual implica $\nu = \mu$), N decrece hasta el equilibrio $N^* \leq N_0$ (figura 3.8); y para el caso $\tilde{R}_0 > 1$ (lo cual implica $\nu = \mu + \delta I^*$), N decrecerá o se incrementará inicialmente, dependiendo de si la fracción inicial I_0 es mayor o menor que $\frac{\nu - \mu}{\delta}$, y después tenderá a N^* , el cual puede ser mayor que N_0 (figura 3.9). Nuevamente se puede apreciar los distintos comportamientos que pueden tener la proporción de infectados I y el total \bar{I} . Así, I puede tender a un valor endémico positivo mientras que el total de infectados \bar{I} puede tender a cero cuando la población total está decreciendo (caso $P < 1$, $\tilde{R}_0 > 1$). Por otro lado I puede tender a cero e \bar{I} crecer exponencialmente (caso $P > 1$, $\tilde{R}_0 \leq 1$, $P_1 > 1$), como se muestra en las figuras 3.7 y 3.11 respectivamente.

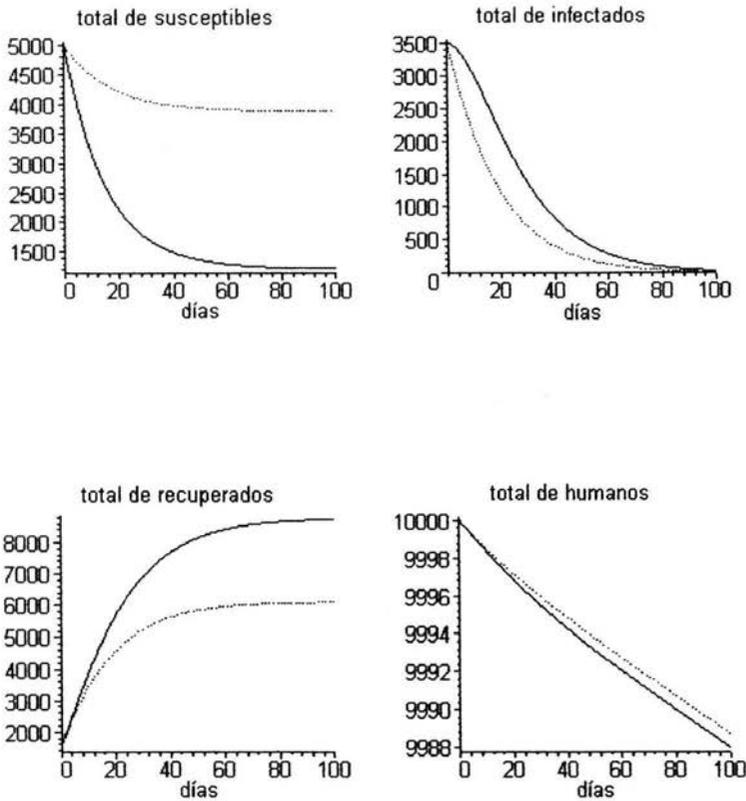


Figura 3.6: Curso temporal de los totales de las clases: susceptible, infectada, recuperada y la población, sin y con vacunación, cuando $P < 1$, $\tilde{R}_0 \leq 1$. Los parámetros son: $\nu = 4 \cdot 10^{-5}$, $\gamma^{-1} = 14$ días, $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$, $\delta = 2 \cdot 10^{-5}$, con condiciones iniciales $\bar{S}_0 = 5000$, $\bar{I}_0 = 3500$, $\bar{R}_0 = 1500$ y $N_0 = 10000$. La línea punteada representa las soluciones con $\alpha = 0$ y $\lambda = .04$ y la continua con $\alpha = .0001$ y $\lambda = .14$. Para ambos casos, $P = .8$ y $\tilde{R}_0 = .5597$.

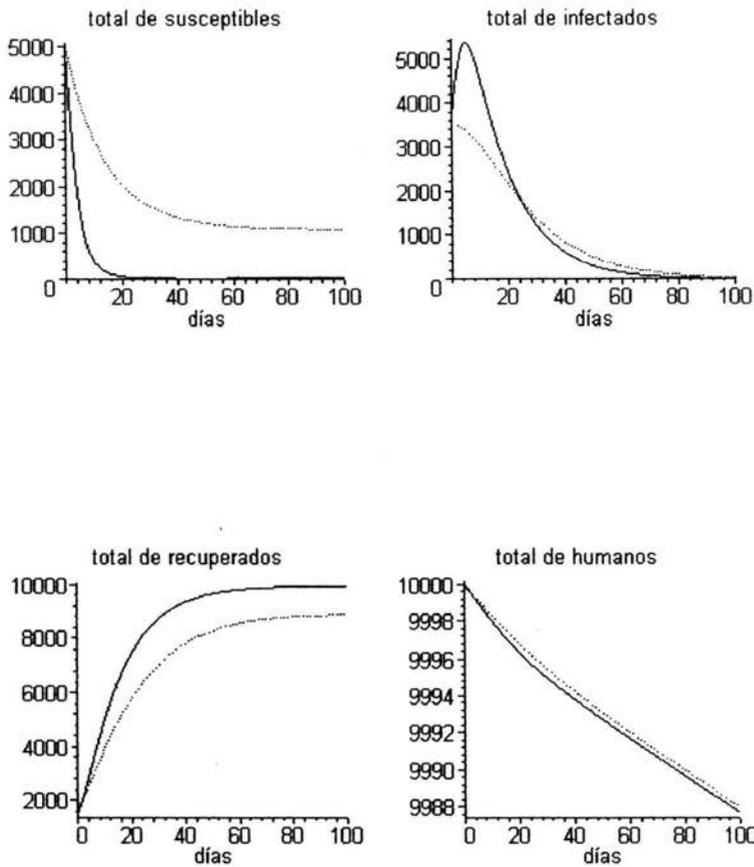


Figura 3.7: Curso temporal de los totales de las clases: susceptible, infectada, recuperada y la población, sin y con vacunación cuando $P < 1$, $\tilde{R}_0 > 1$. Las condiciones iniciales y los parámetros son como en la figura 3.6 a excepción de $\lambda = .15$ y $\lambda = .525$, respectivamente. Para ambos casos, $P = .799$ y $\tilde{R}_0 = 2.099$, $I^* = .00029$.

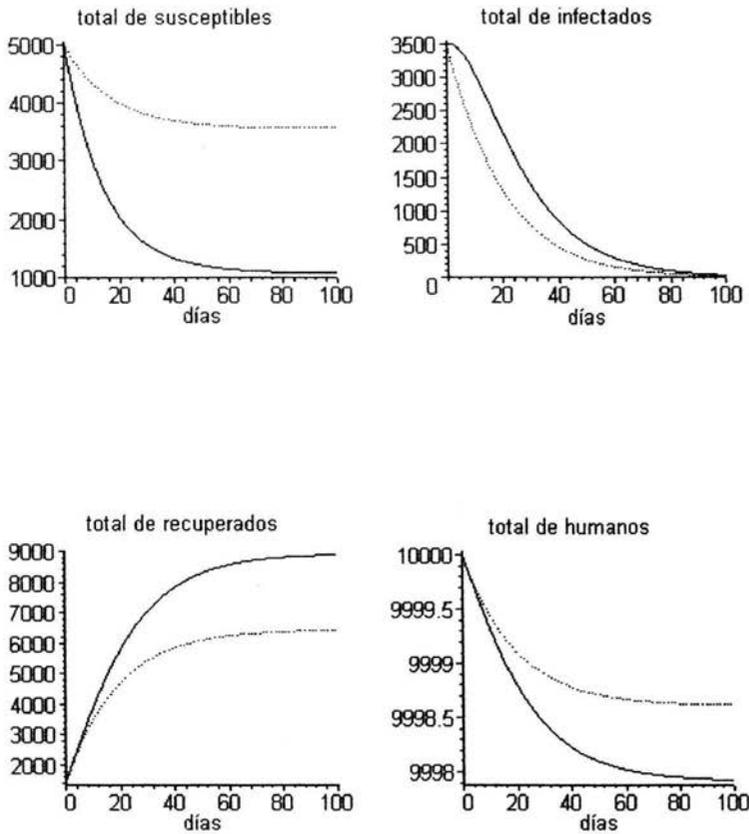


Figura 3.8: Curso temporal de los totales de las clases: susceptible, infectada, recuperada y la población, sin y con vacunación cuando $P = 1$, $\tilde{R}_0 \leq 1$. Los parámetros son: $\nu = 5 \cdot 10^{-5}$, $\gamma^{-1} = 14$ días, $\mu = 5 \cdot 10^{-5}$, $\delta = 2 \cdot 10^{-5}$, con condiciones iniciales como en la figura 3.6. La línea punteada representa las soluciones con $\alpha = 0$ y $\lambda = .05$ y la continua con $\alpha = .0001$ y $\lambda = .15$. Para ambos casos, $\tilde{R}_0 = .6995$.

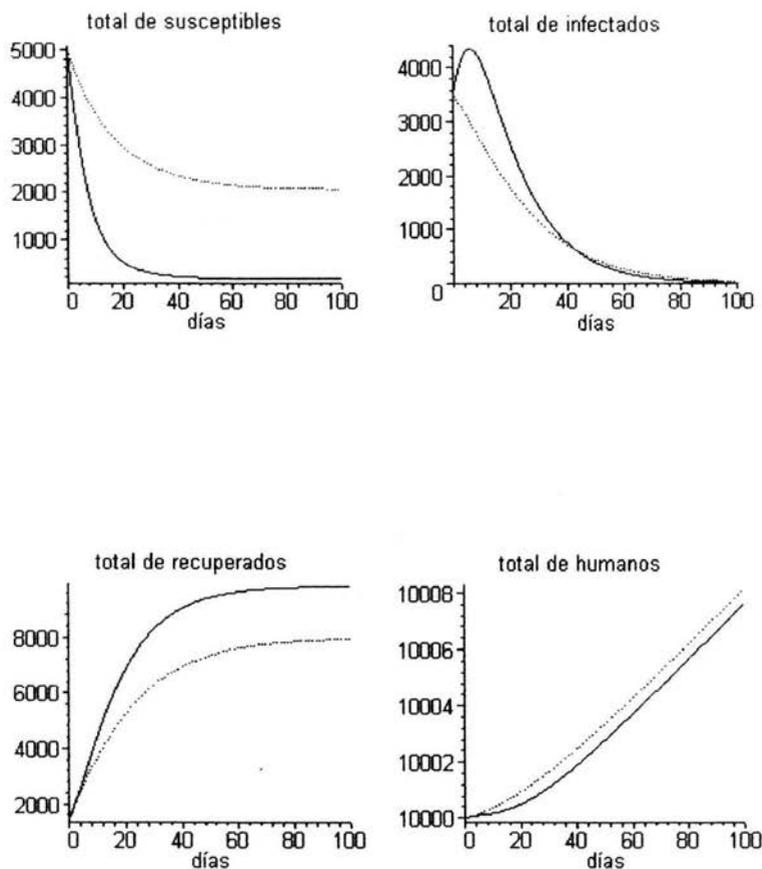


Figura 3.9: Curso temporal de los totales de las clases: susceptible, infectada, recuperada y la población, sin y con vacunación cuando $P = 1$, $\tilde{R}_0 > 1$. Las condiciones iniciales y parámetros son como en la figura 3.8 a excepción de $\lambda = .1$, y $\lambda = .3$, respectivamente y $\mu = 4.5 \cdot 10^{-5}$. Para ambos casos, $\tilde{R}_0 = 1.399$, $I^* = .5$.

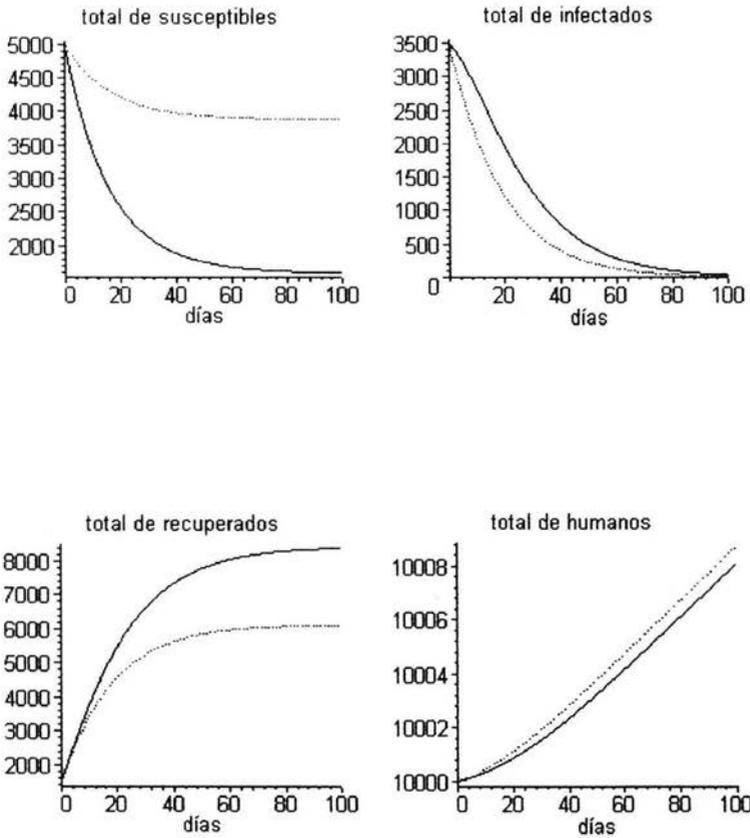


Figura 3.10: Curso temporal de los totales de las clases: susceptible, infectada, recuperada y la población, sin y con vacunación cuando $P > 1$, $\tilde{R}_0 \leq 1$, $P_1 < 1$. Los parámetros son: $\nu = 5 \cdot 10^{-5}$, $\gamma^{-1} = 14$ días, $\mu = 4 \cdot 10^{-5}$, $\delta = 2 \cdot 10^{-5}$, con condiciones iniciales como en la figura 3.6. La línea punteada representa las soluciones con $\alpha = 0$ y $\lambda = .04$ y la continua con $\alpha = .0001$ y $\lambda = .12$. Para ambos casos, $P = 1.25$, $\tilde{R}_0 = .5596$ y $P_1 = .5597$.

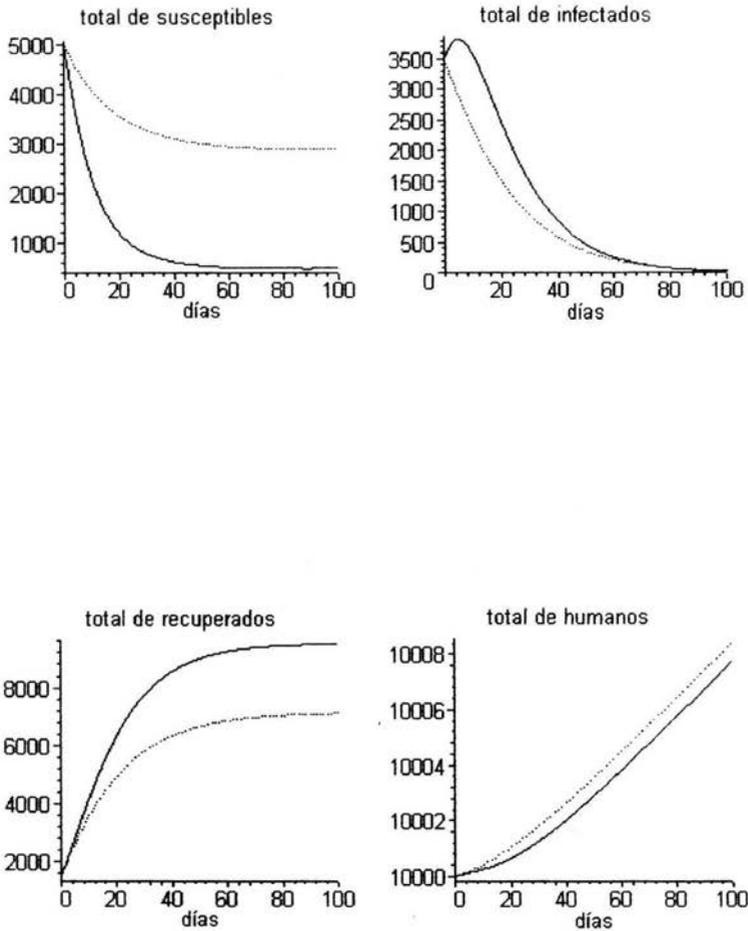


Figura 3.11: Curso temporal de los totales de las clases: susceptible, infectada, recuperada y la población, cuando $P > 1$, $\tilde{R}_0 \leq 1$, $P_1 > 1$. Las condiciones iniciales y parámetros son como en la figura 3.10 a excepción de, $\lambda = .071465$, y $\lambda = .2144$, respectivamente. Para ambos casos, $P = 1.25$, $\tilde{R}_0 = .99993$ y $P_1 = 1.000069$.

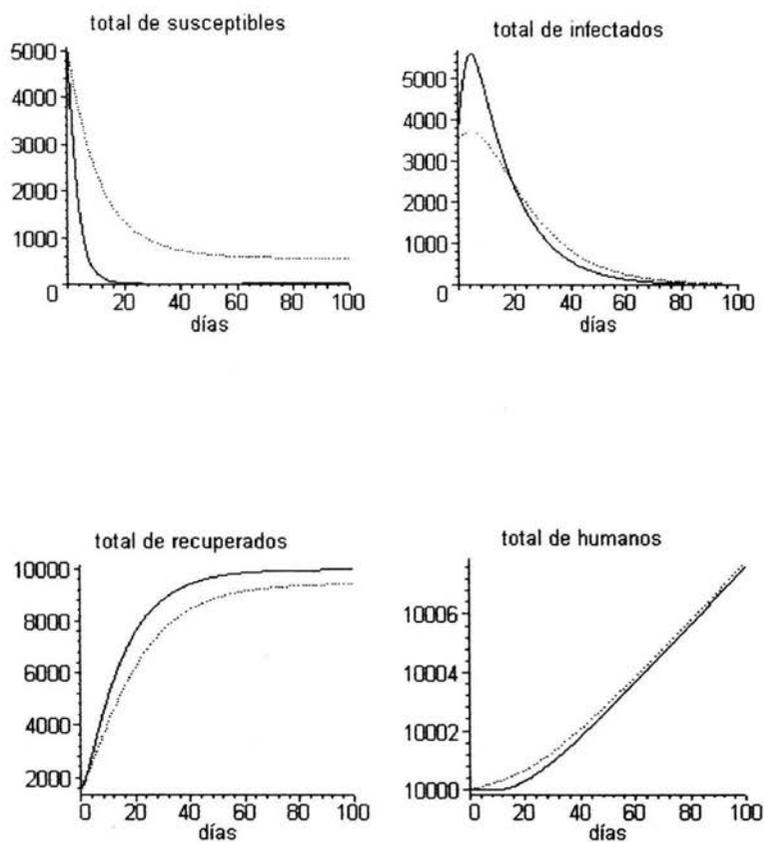


Figura 3.12: Curso temporal de los totales de las clases: susceptible, infectada, recuperada y la población, sin y con vacunación, cuando $P > 1$, $\tilde{R}_0 > 1$, $P_1 > 1$. Las condiciones iniciales y parámetros son como en la figura 3.10 a excepción de, $\lambda = .2$, y $\lambda = .6$ respectivamente. En ambos casos, $P = 1.249$, $\tilde{R}_0 = 2.798$, $P_1 = 1.00013$ y $I^* = .0004517$.

4

Discusión

En esta tesis hemos formulado tres modelos epidémicos del tipo SIR con población humana variable y vacunación. En el primero de ellos la población humana tiende con el tiempo a un valor constante razón por lo que sólo es necesario analizar las proporciones de cada una de las clases epidémicas. Para este modelo encontramos un parámetro umbral \tilde{R}_0 que controla el desarrollo de la enfermedad. Este parámetro condiciona la existencia de una proporción endémica de infectados humanos.

Para los otros dos modelos donde el crecimiento de la población es exponencial, además de \tilde{R}_0 , encontramos otros dos parámetros: el número de reproducción básico P_1 que controla el comportamiento asintótico de el número de infectados humanos y el parámetro P que controla el crecimiento de la población total. Aquí pudimos observar los casos cuando el total y la proporción de infectados tienen comportamientos distintos.

En el tercer modelo donde consideramos mortalidad por enfermedad pudimos observar el efecto que ésta puede tener directamente sobre la dinámica de la población, por ejemplo hacer decrecer la tasa de crecimiento exponencial de la población.

Estos modelos con población variable se pueden usar para modelar enfermedades que permanecen endémicas o que aumenten la mortalidad en forma considerable, en una población que está cambiando con respecto al tiempo, en el caso de las epidemias es más común suponer que la población permanece constante ya que éstas ocurren en poco tiempo razón por la cual no hay un cambio en el tamaño de la población tan perceptible. Aunque los

modelos no son del todo realistas pues hace falta considerar muchos aspectos relativos a la enfermedad como el modo de transmisión, periodo de latencia, así como factores sociales, demográficos, culturales, si nos proporcionan una buena aproximación al desarrollo de la enfermedad lo que permite implementar mejores políticas de salud que ayuden a controlar el surgimiento de ésta.

Así por ejemplo en una población que está creciendo pueden adoptarse dos políticas de salud distintas: la primera consiste en reducir el número total de infectados y la segunda en reducir la proporción de infectados. Para la primera política, es necesario reducir los parámetros umbrales P y P_1 , mientras que para la segunda sólo es necesario reducir el parámetro \tilde{R}_0 .

Lo anterior implica que es más sencillo reducir la proporción de infectados que reducir el total. Por lo tanto dado que la proporción de infectados es relativamente pequeña con respecto a la población total se necesita de un menor esfuerzo en cuanto a servicios médicos y hospitales para atender a la población enferma.

El papel de la vacunación repercute de manera importante en el desarrollo de la enfermedad como ya vimos en los modelos, la vacunación modifica el parámetro R_0 por el nuevo parámetro \tilde{R}_0 el cual es menor, lo que reduce el número de infecciones secundarias que produce un infeccioso, así por ejemplo en las simulaciones para los totales se observa que si la vacunación se incrementa el número de susceptibles decrece, \tilde{R}_0 decrece y por lo tanto la infección y el número de infecciosos también mientras que los recuperados se incrementan aun más por la entrada de individuos vacunados.

Uno de los aspectos más interesantes es que la proporción de infecciosos de cada modelo puede presentar oscilaciones amortiguadas, las cuales corresponden a picos epidémicos. La presencia de estas oscilaciones depende de que el polinomio característico que resulta de evaluar la jacobiana en el punto de equilibrio endémico, tenga raíces con parte imaginaria distinta de cero. Por ejemplo para el primer modelo las raíces imaginarias están dadas por el discriminante

$$\sqrt{[(\mu + \alpha)\tilde{R}_0]^2 - 4(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)(\tilde{R}_0 - 1)}$$

si $\alpha = 0$ tenemos

$$\sqrt{[\mu\tilde{R}_0]^2 - 4\mu^2\tilde{R}_0 + 4\mu\gamma(\tilde{R}_0 - 1)}$$

como $\mu \ll 1$ y $\tilde{R}_0 > 1$ y si además $\tilde{R}_0 - 1 \gg 1$, μ es del orden de 10^{-5} , mientras que los otros parámetros son del orden de 10^{-3} , o mayores, de donde los términos con μ^2 son despreciables y entonces el término $4\mu\gamma(\tilde{R}_0 - 1)$ es el que predomina.

De donde el periodo entre cada pico epidémico está dado aproximadamente por el término $2\pi / \sqrt{4\mu\gamma(\tilde{R}_0 - 1)}$. Con los parámetros usados en la figura 1.2, el periodo entre cada oscilación es de aproximadamente 10.126 años.

En este mismo ejemplo podemos observar uno de los efectos de la vacunación, si $\alpha > 0$ y $\alpha \gg \mu$, y sea

$$[(\mu + \alpha)\tilde{R}_0]^2 > 4(\mu + \alpha)(\mu + \gamma)(\tilde{R}_0 - 1)$$

lo cual implica que

$$(\mu + \alpha) > \frac{4(\mu + \gamma)(\tilde{R}_0 - 1)}{\tilde{R}_0^2}$$

como $\mu \ll 1$ podemos despreciarla y tenemos

$$\alpha > \frac{4\gamma(\tilde{R}_0 - 1)}{\tilde{R}_0^2}.$$

Entonces de acuerdo con esta última desigualdad, si la vacunación es lo suficientemente grande se pueden prevenir estas oscilaciones y por lo tanto nuevos brotes epidémicos de la enfermedad.

Apéndice A

En este apéndice revisamos algunos conceptos sobre la estabilidad de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales. Además, enunciaremos los teoremas usados en esta tesis, demostrando algunos de ellos y dando la referencia de donde se puede encontrar la demostración de los restantes.

A.1 Conceptos básicos

Definición. Sea la ecuación diferencial autónoma

$$\dot{x} = f(x) \quad f(x) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (\text{A.1.1})$$

la solución de esta ecuación diferencial define un flujo $\varphi(x_0, t)$ tal que $\varphi(x_0, 0) = x_0$, es la solución de la ecuación diferencial al tiempo t con valor inicial (en $t = 0$) x_0 .

Definición. Dado $x_0 \in \Omega$, se llama trayectoria u órbita por x_0 a la curva paramétrica en $\mathbb{R}^n : \varphi(x_0, t)$, con x_0 fijo y t parámetro, es decir al conjunto de valores en \mathbb{R}^n que recorre una solución $\varphi(x_0, t)$ al variar t con x_0 fijo. La órbita de x_0 se denota como $\gamma(x_0)$. Se le llama semiórbita positiva de x_0 , o semitrayectoria positiva de x_0 , al conjunto de puntos en \mathbb{R}^n dado por $\gamma^+(x_0) = \{\varphi(x_0, t), \text{ para } t \geq 0\}$.

Se define semiórbita o semi trayectoria negativa de manera análoga, si sustituimos $t \geq 0$ por $t \leq 0$. La semiórbita negativa de x_0 se denota como $\gamma^-(x_0)$ [6].

Hay que aclarar que aunque las nociones de solución y trayectoria están relacionadas, son distintas. Una solución es una función, y una trayectoria es el conjunto imagen de una

solución, con la orientación que la parametrización dada por la solución induce de manera natural.

Definición. Si x_0 es tal que $f(x_0) = 0$ diremos que x_0 es un punto crítico o de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$.

Definición. Si x_0 es un punto crítico diremos que la solución constante $x(t) \equiv x_0$ es una solución estacionaria de la ecuación $\dot{x} = f(x)$.

Definición. Un punto x es un punto estacionario de un flujo si y sólo si $\varphi(x, t) = x$ para toda t .

Definición. Un punto x es periódico, de período T si y solo si $\varphi(x, t + T) = \varphi(x, t)$ para todo t , y $\varphi(x, t + s) \neq \varphi(x, t)$ para todo $0 < s < T$. La curva $\Gamma = \{y / y = \varphi(x, t), 0 \leq t < T\}$ es llamada una órbita periódica de la ecuación diferencial y es una curva cerrada.

Definición. Un conjunto M es invariante si y sólo si para toda $x \in M$, $\varphi(x, t) \in M$ para toda t .

A continuación definimos los conjuntos ω -límite y α -límite, de x .

Definición. Un punto y es un punto ω -límite de la órbita $\varphi(x_0, t)$ si existe una sucesión (t_n) con $t_n \rightarrow \infty$, y $\varphi(x_0, t_n) \rightarrow y$ cuando $n \rightarrow \infty$. El conjunto de todos los puntos ω -límite de la órbita $\varphi(x_0, t)$ es llamado conjunto ω -límite de $\varphi(x_0, t)$ y es denotado como $\omega(x_0)$.

Definición. Un punto y es un punto α -límite de la órbita $\varphi(x_0, t)$ si existe una sucesión (s_n) con $s_n \rightarrow -\infty$, y $\varphi(x_0, s_n) \rightarrow y$ cuando $n \rightarrow \infty$. Análogamente al conjunto de todos los puntos α -límite de la órbita $\varphi(x_0, t)$ se le llama conjunto α -límite de $\varphi(x_0, t)$ y es denotado como $\alpha(x_0)$.

Definición. Se dice que $x(t)$ tiende a un conjunto M cuando t tiende a infinito, si para cada $\varepsilon > 0$, existe $T > 0$, con la propiedad de que para cada $t > T$ existe un punto p en M con $\|x(t) - p\| < \varepsilon$.

Definición. Un conjunto $M \in R^n$ es una variedad local invariante de (A.1.1) si para $x_0 \in M$, la solución $x(t)$ de (A.1.1) con $x(0) = x_0$ esta en M para $|t| < T$, donde $T >= 0$.

A.2 Teoremas

El primer teorema que revisaremos es el Metodo de Routh-Hurwitz, que es un teorema de carácter algebraico, este teorema está demostrado en [4].

Método de Routh-Hurwitz. Dada la ecuación:

$$L(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n z = 0.$$

Con a_1, a_2, \dots, a_n constantes. Definimos $D_1 = a_1$ y para $k = 2, \dots, n$ sea

$$D_k = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \dots & a_{2k-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{pmatrix} \quad \text{donde } a_j = 0 \text{ si } j > n.$$

Entonces las raíces de $L(z)$ tienen parte real negativa si y solo si $D_k > 0$ para $k = 1..n$. La condición de que todos los determinantes sean positivos implica que todos los coeficientes a_j sean positivos. El método se vuelve impráctico para valores grandes de n .

Para $n = 2, 3, 4$ se tienen los siguientes resultados:

$$n = 2 \quad a_1, a_2 \text{ positivos.}$$

$$n = 3 \quad a_1, a_2 \text{ y } a_3 \text{ positivos y } a_1 a_2 - a_3 > 0.$$

$$n = 4 \quad a_1, a_2, a_3 \text{ y } a_4 \text{ positivos y } a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_4 a_1^2 > 0.$$

Criterio de Dulac-Bendixson.

Sea $\dot{x} = f(x)$. Si existe una función continuamente diferenciable $g : R^2 \rightarrow R$ tal que $\nabla \cdot (gf)$ es continua y no cero, en algún dominio conexo D , entonces ninguna trayectoria cerrada puede permanecer enteramente en D .

Demostración. Supongamos que existe una órbita periódica Γ que permanece enteramente en D . Entonces el teorema de la divergencia establece que

$$\int_{\Gamma} g(n \cdot f) dl = \iint_A \nabla \cdot (gf) dx dy$$

donde A es el "área" acotada por Γ , dado que $\nabla \cdot (gf)$ es distinto de cero en todo A , entonces el lado derecho de la igualdad es distinto de cero. Por otra parte una órbita periódica es una trayectoria y por tanto es tangencial al campo vectorial de donde entonces $n \cdot f = 0$ donde n es la normal exterior a la órbita periódica de donde

$$\int_{\Gamma} g(n \cdot f) dl = 0$$

lo que nos lleva a una contradicción. Por lo tanto no existen trayectorias cerradas que permanezcan enteramente en D . ■

Definición. Supongamos que el origen $x = 0$ es un punto estacionario para la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$, $x \in R^n$, sea G una vecindad abierta de 0 y $V : cl(G) \rightarrow R$ una función continuamente diferenciable. Entonces podemos definir la derivada de V a lo largo de las trayectorias diferenciando V con respecto del tiempo t , usando la regla de la cadena tenemos

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \dot{x} \cdot \nabla V = f \cdot \nabla V = \sum f_i(x) \frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Se dirá que V es una función de Liapunov sobre G si y sólo si V es continuamente diferenciable sobre $cl(G)$, y

i) $V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ para toda $x \in cl(G) \setminus \{0\}$.

ii) $\dot{V} \leq 0$ para toda $x \in G$.

Donde cl denota a la cerradura de G .

Teorema de Lasalle-Liapunov. (Principio de Invariancia). Sea Ω un conjunto cerrado y acotado (compacto), con la propiedad de que cada solución de $\dot{x} = f(x)$ que inicia en Ω permanece para todo tiempo futuro en Ω . Supóngase que existe una función escalar V con su primera derivada parcial continua en Ω tal que $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω . Sea E el conjunto de todos los puntos en Ω donde $\dot{V}(x) = 0$. Sea M es el más grande subconjunto invariante de E . Entonces toda solución que comienza en Ω tiende a M cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. Sea $x(t)$, una solución que inicia en Ω . Como $\dot{V}(x) \leq 0$ en Ω , $V(x(t))$ es una función no creciente de t . $V(x)$, es continua en el conjunto compacto Ω , es acotada por abajo en Ω . Entonces $V(x(t))$ tiene un límite c cuando $t \rightarrow \infty$. Además el conjunto límite positivo Γ^+ esta en Ω , (por que Ω es un conjunto cerrado), y como V es continua en Ω , $V(x) \equiv c$ en Γ^+ . Γ^+ es un conjunto invariante, y entonces $\dot{V}(x) = 0$ en Γ^+ . De donde Γ^+ esta en M . Esto implica que $x(t) \rightarrow M$ cuando $t \rightarrow \infty$, por lo tanto todas las soluciones que comienzan en Ω tienden a M cuando t tiende a infinito. ■

El siguiente teorema está demostrado en [8] pp.15-18.

Teorema de Poincaré-Bendixson generalizado. Sea $\dot{x} = f(x)$ un sistema en el plano con un número finito de puntos de equilibrio. Si la órbita positiva $\gamma^+(x_0)$ de x_0 es acotada entonces una de las siguientes proposiciones es verdad:

- El conjunto $\omega(x_0)$ es un simple punto \bar{x} el cual es un punto de equilibrio y $\varphi(x_0, t) \rightarrow \bar{x}$ cuando $t \rightarrow \infty$.

• $\omega(x_0)$ es una órbita periódica Γ que puede ser cualquiera de las siguientes dos posibilidades:

$\gamma^+(x_0) = \omega(x_0) = \Gamma$ o si no $\gamma^+(x_0)$ es una espiral que incrementa con respecto de t en un sentido de Γ .

• $\omega(x_0)$ consiste de puntos de equilibrio y órbitas cuyos conjuntos α y ω -límite son los puntos de equilibrio.

A continuación recordamos el Teorema de la Variedad Central que se utilizó en el análisis de estabilidad de la línea de equilibrios en el Capítulo 3.

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\bar{x}' = A\bar{x} + f(\bar{x}, \bar{y}) \tag{A.2.1}$$

$$\bar{y}' = B\bar{y} + g(\bar{x}, \bar{y})$$

donde $\bar{x} \in R^n$, $\bar{y} \in R^n$, A y B son matrices constantes, f y g son funciones de clase C^1 .

Supongamos que f , g y sus derivadas son iguales a cero en el origen. Supongamos además que todos los valores propios de A tienen parte real igual a cero, y que todos los valores propios de B tienen parte real negativa.

Sea $\bar{y} = h(\bar{x})$ una curva, donde h es diferenciable, si $\bar{y} = h(\bar{x})$ es una variedad invariante de (A.2.1) se dice que es una variedad central de (A.2.1), si se satisface $h(0) = 0$ y $Dh(0) = 0$.

El siguiente teorema está demostrado en [2].

Teorema de la Variedad Central.

a) Existe una variedad central para el sistema (A.2.1), $\bar{y} = h(\bar{x})$, $\|\bar{x}\| < \delta$ donde h es de clase C^2 .

b) Supongamos que la solución cero de

$$\bar{u}' = A\bar{u} + f(\bar{u}, h(\bar{u})) \quad (\text{A.2.2})$$

es estable (asintóticamente estable) (inestable). Entonces la solución cero de (A.2.1) es estable (asintóticamente estable) (inestable).

c) Supongase que la solución cero de (A.2.1) es estable. Sea $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ una solución de (A.2.1) con $\bar{x}(0), \bar{y}(0)$ suficientemente pequeños entonces existe una solución $\bar{u}(t)$ de (A.2.2) tal que cuando $t \rightarrow \infty$

$$\bar{x}' = \bar{u}(t) + O(e^{-\gamma t})$$

$$\bar{y}' = h(\bar{u}(t)) + O(e^{-\gamma t}),$$

donde $\gamma > 0$, es una constante.

Bibliografía

- [1] Aulbach B.: *Continuous and Discrete Dynamics near Manifolds of Equilibria*. Lecture Notes in Mathematics 1058. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [2] Carr, J.: *Applications of Center Manifold Theory*. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1981.
- [3] Coddington, E.A., Levinson, N.: *Theory of ordinary differential equations*. New York: McGraw-Hill, 1995.
- [4] Coppel. W. A.: *Stability and Asymptotic behavior of Differential Equations*. D.C. Heath and Company, Boston, 1965.
- [5] Esteva, L.: *Dinámica de la Enfermedad del Dengue*. Tesis de doctorado: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México, 1997.
- [6] Glendinning Paul: *Stability, instability and chaos: an introduction to theory of non-linear differential equations*. Cambridge text in Applied Mathematics. U.K.: Cambridge University Press, 1994.
- [7] Hale J., H. Kocak.: *Dynamics and Bifurcations*. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1991.
- [8] Palis Jr. J, de Melo W.: *Geometric Theory of Dynamical Systems*. New York, Springer-Verlag, 1982.