



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MEXICO**

**FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES
ACATLÁN**



**ABSTRACCIÓN COMBINATORIA DE MATRICES CON
RESPECTO A LA INDEPENDENCIA LINEAL, TEORÍA
DE MATROIDES**

T E S I N A

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE :
**LICENCIADO EN MATEMÁTICAS
APLICADAS Y COMPUTACIÓN**

P R E S E N T A :
LEONARDO ROMÁN OLMEDO GARCÍA

ASESOR: FIS. MAT. JORGE LUIS SUÁREZ MADARIAGA

MAYO 2004





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

CONTENIDO

	Página
INTRODUCCIÓN.	
I. DEFINICIONES BÁSICAS.	
1.1 Nociones previas.	9
1.1.1 Estructuras algebraicas.	9
1.1.2 Algunos conceptos de teoría de Graficas.	11
1.1.3 Algunos conceptos de teoría de transversales. ...	14
1.2 Sistema de axiomas para un matroide.	15
1.2.1 Matroide de Conjuntos Independientes y matroide de Circuitos.	15
1.2.2 Matroide de Bases.	23
1.2.3 Matroide en términos de la función de rango.	27
1.2.4 Matroide en términos de la cerradura.	31
II. MATROIDES INDUCIDOS POR LÍNEAS Y PUNTOS.	
2.1 Matroide transversal.	37
2.2 Látises de planos.	43

CONTENIDO

	Página
III. REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE MATROIDES Y DUALIDAD EN MATROIDES.	
3.1 Representación geométrica de matroides de rango ≤ 3.	53
3.2 Dualidad.	68
3.1.1 Dual de matroides representables.	70
3.1.2 Dual de matroides gráficos.	71
3.1.3 Dual de matroides transversales.	74
IV. ALGUNAS APLICACIONES.	
4.1 Algoritmo de Glotón para matroides.	83
4.2 El Problema de asignación de tareas y trabajadores.	88
4.3 Matroide oráculo y Digrafoides.	95
CONCLUSIONES.	100
BIBLIOGRAFÍA.	102

“La ciencia es la belleza de nuestra ignorancia”.

Leo Ullman.

*Eres
como una gota de manantial
que horada mi existir
y unge mi savia humidificándome.
Como un cachito de belleza terrenal
en que palpito de cara al sol.*

*Eres
el aire que aromatiza mis pensamientos,
que inhalo y cunde en mis adentros,
el arcoiris de un día nublado,
el panorama en que quedo presa
cuando pretendo rayos de sol.*

*Eres
el dulce de todo fruto
que se prodiga a mi avidez.
eres esto y mucho más.
eres motivo de mi denuedo
de hacer mi marcha
de hacer y ser.*

Majka Ullmann.

INTRODUCCIÓN

La teoría de matroides data de la década de 1930's cuando B.L. van der Waerden [1937] realiza las primeras aproximaciones acerca de la axiomatización de la dependencia lineal algebraica, pero la persona acreditada generalmente para comenzar la teoría de matroides fue Hassler Whitney [1935] que en su investigación que publica en el año de 1935 utiliza por primera vez el termino "Matroide". Whitney trabajo por largo tiempo en el campo de teoría de gráficas, donde establece muchas similitudes entre las ideas de independencia y rango en teoría de gráficas e independencia lineal y dimensión en espacios vectoriales. En su investigación Whitney usa el concepto de matroide para formalizar esas similitudes. Sin embargo, Boruvka [1926] cuya investigación acerca del algoritmo de Greedy antecede a van der Waerden y a Whitney, introduce en ésta el termino de "matroide".

Whitney define a un matroide como una generalización abstracta de una matriz y mucho del lenguaje de la teoría de matroides está basado en álgebra lineal y teoría de gráficas; de esta última, los matroides comparten, en ocasiones, ciertos resultados con un tratamiento gráfico distinto.

Un matroide es esencialmente un conjunto con alguna clase de "estructura independiente" definida sobre éste. El nombre de matroide proviene de considerar la independencia de las columnas de una matriz. A su vez, van der Waerden redescubre la idea de un matroide mientras trataba de formalizar las definiciones de independencia lineal algebraica.

El trabajo de Whitney y van der Waerden fue ignorado por más de 20 años, con las importantes excepciones de S. Maclane [1936] y R. Rado [1942], hasta la ruptura ocurrida en 1958 cuando W. T. Tutte caracteriza a los matroides provenientes de gráficas. Después, en 1965, J. Edmonds y D. R. Fulkerson [1965], reconocen la importancia de los matroides en teoría de transversales. Otros que de manera independiente realizaron importantes contribuciones fueron L. Mirsky y H. Perfect [1967] y Brualdi y Scrimger [1968]. Hasta entonces, un gran número de combinatoristas han contribuido en el desarrollo de esta teoría.

Es frecuente que la terminología de matroides varíe considerablemente de autor en autor. Mirsky y Perfect [1967] usan "espacio de independencia", Crapo y Rota [1971] en su trabajo sobre geometría combinatoria usan "pregeometrías" para "matroide"; Rado [1942] usa el termino de "funciones de independencia"; Cohn usa el termino de "relación de dependencia transitiva".

El presente trabajo está dedicado a dar a conocer, de manera general, los sistemas de tipo especial que llevan el nombre de matroides.

Este trabajo requiere un conocimiento básico preliminar de álgebra lineal, estructuras algebraicas, teoría de gráficas y teoría de transversales. Para ello, en el capítulo 1 se presentan los conceptos y notación preliminares necesarios para una mejor comprensión del trabajo. Posteriormente se establecen los conceptos fundamentales que caracterizan a un matroide en los diferentes contextos, los cuales son: la independencia lineal y las base en los espacios vectoriales, los ciclos en los grafos, la función de rango y la cerradura.

En el capítulo 2 se ven las clases de matroides que se generan a partir de la teoría de transversales y látises.

En el tercer capítulo se explica cuando un matroide es representable y como se realiza esta representación, finalizando el capítulo con la teoría dual para matroides.

El capítulo 4 se describen algunas de las aplicaciones que tienen los matroides para resolver problemas de grafos, redes, transversales y un oráculo para matroides.

CAPÍTULO I

DEFINICIONES BÁSICAS.

Las dos clases fundamentales de matroides que aparecen en los documentos de Whitney [1935] se originan de matrices y de grafos. En este capítulo se dará, primeramente una breve inspección a conceptos de estructuras algebraicas, teoría de graficas y teoría de transversales, posteriormente se definen las ideas básicas equivalentes para matroides, indicando como cada una de ellas, la independencia lineal (proveniente de matrices) y los circuitos (de las gráficas) se asocian naturalmente entre sí, y con base en ello definir un matroide en términos de: bases, rango y cerradura, siendo en conjunto el "*sistema de axiomas*" para un matroide.

1.1 NOCIONES PREVIAS

1.1.1 ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS

En este trabajo, excepto cuando sea indicado todos los conjuntos que se consideran serán **finitos**.

Si E es un conjunto, entonces la *colección de subconjuntos* y su *cardinalidad* será denotada por, 2^E y $|E|$ respectivamente. Frecuentemente a lo largo del capitulado cuando se de un conjunto arbitrario nos interesaremos por los miembros maximal y minimal.

Definición. Suponga que S es una colección de conjuntos. Un elemento X de S es **maximal** si no existe un elemento Y en S que sea un superconjunto propio de X . En otras palabras X es maximal si X no es subconjunto propio de algún otro elemento de S .

Definición. Suponga que S es una colección de conjuntos. Un elemento X de S es **minimal** si no existe un elemento Y en S que sea un subconjunto propio de X . En otras palabras X es minimal si X no es un superconjunto propio de algún otro elemento de S .

Si X y Y son conjuntos, entonces $X-Y$ denotara el conjunto $\{x \in X: x \notin Y\}$. Para conjuntos X_1, X_2, \dots, X_n , la notación $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ también implicara que X_1, X_2, \dots, X_n son disjuntos. Frecuentemente se querrá sumar o remover un elemento simple del conjunto X . En tal caso comúnmente se abrevia $X \cup \{e\}$ y $X - \{e\}$ por $X \cup e$ y $X - e$.

Campo.

Cuando $k = 1$, $GF(p^k)$ coincide con Z_p , el anillo de enteros modulo p . De manera que, $GF(p)$ tiene como sus elementos a $0, 1, \dots, p-1$ y la suma y la multiplicación de estos elementos efectuada bajo modulo p . Cuando $k > 1$, $GF(p^k)$, puede ser constituido de la siguiente forma. Sea $h(w)$ un polinomio de grado k y suponga que este polinomio es irreducible, esto es, $h(w)$ no es producto de dos polinomios de grado menor sobre $GF(p)$. Tales polinomios irreducibles sabemos que existen. Considere el conjunto S de todos los polinomios en w que tiene grado a lo más de $k-1$ y tiene coeficientes en $GF(p)$. hay exactamente p opciones para cada una de los k coeficientes de un miembro de S . Por consiguiente, $|S| = p^k$. Además, la suma y la multiplicación son efectuada bajo modulo $h(w)$, forma un campo nombrado $GF(p^k)$.

Ahora usaremos la construcción antes dicha para generar $GF(4)$, la cual no es isomorfica a Z_4 . sea $h(w) = w^2 + w + 1$. Esto es para mostrar que este polinomio es irreducible sobre $GF(2)$, y la suma y multiplicación se muestran en las siguientes tablas para $GF(4)$

+	0	1	w	w+1
0	0	1	w	w+1
1	1	0	w+1	w
w	w	w+1	0	1
w+1	w+1	w	1	0

×	0	1	w	w+1
0	0	0	0	0
1	0	0	w	w+1
w	0	w	w+1	1
w+1	0	w+1	1	w

Sea F un campo y considere a secuencia $1, 1+1, 1+1+1, \dots$ en F . Si estos elementos son todos distintos, entonces se dice que F tiene *característica* 0.; por otra parte la *característica* de F es el entero positivo mas pequeño p para la cual la suma de p unos es cero. De lo anterior se desprende que , p es un primo, el subconjunto $\{0, 1, \dots, p-1\}$ de F es un subcampo de F isomorfo a Z_p : $p\alpha=0 \forall \alpha \in F$.

La intersección de todos los subcampos de un campo F es en si mismo un campo llamado *subcampo primo* de F . Si F tiene característica 0, entonces su subcampo primo es \mathbb{Q} , el campo de los números racionales. Si F tiene característica p , cuando $p \neq 0$, entonces su subcampo primo es Z_p .

Si F es un *campo*, entonces F tiene exactamente p^k elementos para algún numero primo p y un entero positivo k . Claro esta que, para todo p y k , hay un campo único $GF(p^k)$ teniendo exactamente p^k elementos. Este campo es llamado *Campo de Galois* de orden p^k . Cuando $k = 1$ coincide con Z_p el anillo de enteros modulo p . Así $GF(p^k)$ tiene como elementos $0, 1, \dots, p-1$, y la suma y multiplicación de sus elementos ejecutadas en modulo p . Los campos finitos que con mayor frecuencia se abordan son $GF(2)$ y $GF(3)$ los cuales son Z_2 y Z_3 . Los elementos de Z_3 usualmente se escriben como $0, 1, -1$.

Un campo finito arbitrario con q elementos se denota por $GF(q)$.

Si F es un campo y r es un numero natural, entonces $V(r, F)$ denota el espacio vectorial *r-dimensional* sobre F . Este espacio vectorial también será escrito como $V(r, q)$ o $V_r(q)$. Si F es el campo finito $GF(q)$ se denota su geometría proyectiva por $PG(r, q)$.

Las matrices $I_r, J_r, 0_r$ son, respectivamente la matriz identidad, de todos los unos y de todos los ceros tamaño $r \times r$. Si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conjunto X de vectores en un espacio vectorial V sobre F , entonces $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ denota el subespacio de V generado por X , que es, el conjunto de todas las combinaciones lineales de v_1, v_2, \dots, v_n . La dimensión de V se denota por $\dim V$.

1.1.2 ALGUNOS CONCEPTOS DE TEORÍA DE GRÁFICAS.

Definición: Una **gráfica** G es un par ordenado $(V(G), E(G))$, donde $V = V(G)$ es el conjunto finito, no nulo, cuyos elementos son llamados vértices y $E = E(G)$ es el conjunto de elementos llamados arcos o aristas, cada uno de los cuales consiste en un par no ordenado de vértices.

Para definir los conceptos necesarios nos auxiliaremos de la figura 1, la cual es una representación pictórica de una gráfica particular.

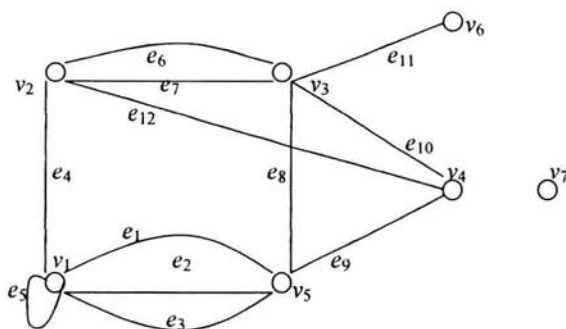


Figura. 1

El arco e_5 el cual une un vértice con sí mismo, es llamado **loop**. Los arcos e_1, e_2 y e_3 los cuales unen al mismo par de vértices distintos, son llamados **arcos paralelos**. El vértice v_7 el cual no presenta arcos, es un **vértice aislado**. Los vértices o extremos del arco e_9 son v_4 y v_5 .

Si $e \in E(G)$ y $e = \{v_i, v_j\}$ donde v_i y v_j están en $V(G)$, entonces se dice que u y v son **vecinos** o **adyacentes** y e es incidente a u y v . Por ejemplo en la figura 1 es el arco e_8 único incidente en v_3 y v_5 . Una gráfica G es **simple** si esta no tiene loops ni elementos paralelos.

Una gráfica H es una **subgráfica** de G si $V(H)$ y $E(H)$ son subconjuntos de $V(G)$ y $E(G)$ respectivamente. Si V' es un subconjunto no nulo de $V(G)$, entonces $G[V']$ denota la subgráfica de G cuyo conjunto de vértices es V' y cuyo conjunto de arcos consiste de aquellos arcos de G que tiene extremos en V' . Se dice que $G[V']$ es la subgráfica de G inducida por V' . Análogamente, si E' es el subconjunto no vacío de aristas de $E(G)$, entonces $G[E']$ denota la subgráfica de G inducida por E' , que tiene a E' como su conjunto de arcos y el conjunto de extremos de los arcos de E' como su conjunto de vértices.

Sean G_1 y G_2 dos grafos, su **unión** es la gráfica con conjunto de vértices $V(G_1) \cup V(G_2)$ y conjunto de arcos $E(G_1) \cup E(G_2)$. Si $V(G_1)$ y $V(G_2)$ son disjuntos, entonces también lo son $E(G_1)$ y $E(G_2)$, y G_1 y G_2 son llamadas **gráficas disjuntas**.

Las graficas G y H son **isomórficas**, $G \cong H$, si existe una biyección $\psi: V(G) \rightarrow V(H)$ y $\theta: E(G) \rightarrow E(H)$ tal que un vértice v de G es incidente con un arco e de G si y solo si $\psi\{v\}$ es incidente con $\theta\{e\}$. Dos graficas que juegan un rol importante dentro de la teoría de matroides, y con mucho en teoría de grafos son K_5 y $K_{3,3}$, estas gráficas se muestran en la figura 2.

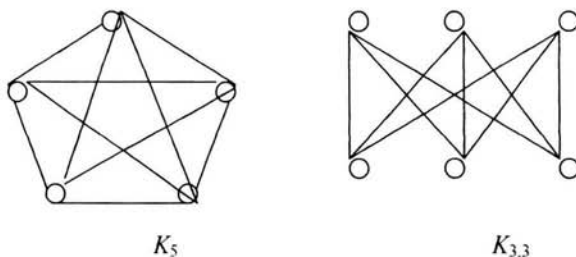


Figura 2

En estas gráficas, K_n son llamadas **graficas completas** de n vértices. $K_{3,3}$ es un tipo especial de gráficas denominados **bipartitas**.

Si el conjunto de vértices de un grafo puede dividirse en dos conjuntos disjuntos V_1 y V_2 en el cual cada arco de G une un vértice de V_1 con un vértice de V_2 la gráfica se dice ser grafica **bipartita** y usualmente se denotan por $K_{m,n}$ donde $m = |V_1|$ y $n = |V_2|$.

Definición: Sea $[S,T] = \{(u,v) \in E \mid u \in S, v \in T\}$. Un **conjunto de corte** es un subconjunto $C \subseteq E$ de la forma $C = [S, T]$, donde $\emptyset \neq S \subseteq V$ y $T \cap S = \emptyset$.

En otras palabras un conjunto de corte de un grafo G es un conjunto de arcos cuya eliminación incrementa el número de componentes de G , por ejemplo en la figura 3, los arcos $\{u,v\}$ y $\{u,w\}$ forman un grupo de corte.

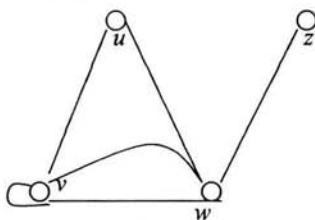


Figura 3.

Una **curva de Jordan** es una curva continua en el plano, en la cual sus extremos no se intersectan a si mismos. Una **curva cerrada de Jordan** es una curva de Jordan cuyos extremos coinciden. Si todos los puntos de la curva cerrada son eliminados del plano, los puntos que restantes son particionados en dos conjuntos abiertos. El teorema de la curva de Jordan afirma que una línea que une a un punto de esos conjuntos abiertos con un punto dentro del otro conjunto abierto debe de intersectar a la curva cerrada de Jordan.

Un **camino** o **trayectoria** W en una gráfica G es una secuencia finita de arcos de la forma $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{m-1}, v_m\}$.

Una gráfica es **conectada** o **conexa** si cada par de vértices distintos es unido por una trayectoria; los **vértices finales** son v_0 y v_k y la trayectoria se dice ser (v_0, v_k) -trayectoria. En cualquier gráfica G , la subgráficas conectadas maximales son llamadas **componentes**. El número de esos componentes será denotado por $w(G)$.

Si P es una (u, v) -trayectoria en un grafo G y e es un arco de G que une u a v pero no está en P , entonces la subgráfica de G con conjunto de vértices es $V(P)$ y conjunto de arcos en $E(P) \cup e$ es llamado un **ciclo**.

Una gráfica conectada que no presenta ciclos es un **árbol**, mientras que la unión de los árboles es un **bosque**. Evidentemente un grafo es un bosque si y solo si este no tenga ciclos. Un **árbol de expansión** o **expandido** de un grafo conectada G es una subgráfica T de G tal que T es un árbol y $V(T) = V(G)$, ver figura 4.

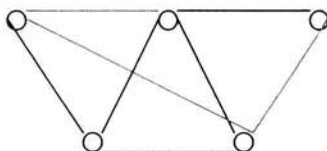


Figura 4.

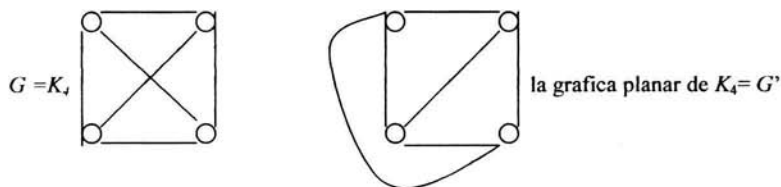
En particular, para todo árbol T :

$$|E(T)| = |V(T)| - 1,$$

Ahora si T es un árbol expandido de un grafica G , entonces:

$$|E(T)| = |V(G)| - 1.$$

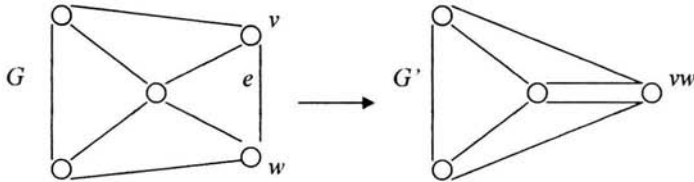
Una gráfica G es **planar** si puede representarse en un plano de tal manera que los arcos o líneas no se intercepten, excepto en sus extremos o vértices.



Si G es una gráfica planar, entonces podemos obtener una nueva gráfica G' de G por una sucesión de las dos siguientes operaciones:

- i) eliminando o restringiendo uno o más de sus arcos.

- ii) contrayendo uno o más de sus arcos, por ejemplo, removiendo un arco $e=\{v,w\}$ e identificando los vértices v y w , en los cuales todos los arcos que fueron formalmente incidentes en v y w ahora son incidentes en el nuevo vértice, como se muestran en la siguiente figura.



Una **gráfica dirigida** o **digráfica** D es un conjunto no nulo de $V(D)$ de vértices y un conjunto $A(D)$ de arcos los cuales consisten de un par ordenado (posiblemente idénticos) de vértices, en el cual, cualquier arco es dirigido de un vértice a otro.

Una **trayectoria dirigida** es una secuencia $(v_0, a_1, v_1, a_2, \dots, v_{n-1}, a_n, v_n)$ donde v_0, v_1, \dots, v_n son los vértices y a_1, a_2, \dots, a_n son los arcos o flechas, y, para todo $i=1, 2, \dots, n$, a_i une a v_{i-1} con v_i .

1.1.3 ALGUNOS CONCEPTOS DE TEORÍA DE TRANSVERSALES.

Definición: Sea E un conjunto finito, y $\mathbf{T} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ una familia de subconjuntos no nula de E . Un **Transversal** o **Sistema de Representantes Distintos (SRD)** de \mathbf{T} es un conjunto de m elementos distintos de E escogido de cada uno de los subconjuntos S_i . Un **transversal parcial** de \mathbf{T} es un transversal de cualquier subfamilia de \mathbf{T} .

Por ejemplo, en la figura 5, la familia $\mathbf{T} = \{S_1, S_2, S_3\}$ de subconjuntos de $E = \{a, b, c, d\}$, donde $S_1 = \{b, c, d\}$, $S_2 = S_3 = \{a\}$, no tienen transversal, pero el transversal parcial es: \emptyset , $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ y $\{a, d\}$; note que la situación puede ser representada por una grafica bipartita en la cual cada arco asocia uno de los S_i con uno de los elementos de E (ver figura 5); entonces un transversal parcial corresponde a un conjunto de arcos, para los cuales no se tienen vértices en común.

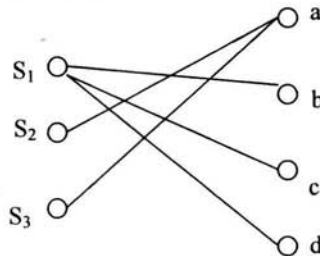


Figura 5.

1.2 SISTEMA DE AXIOMAS PARA UN MATROIDE

1.2.1 MATROIDE DE CONJUNTOS INDEPENDIENTES Y MATROIDE DE CIRCUITOS

Definición. Un matroide M es un par ordenado (E, \mathbf{I}) , siendo E un conjunto finito e \mathbf{I} una colección de conjuntos de E que satisface las siguientes tres propiedades:

- (I1) $\emptyset \in \mathbf{I}$
- (I2) Si $I \in \mathbf{I}$ e $I' \in \mathbf{I}$, entonces $I' \in \mathbf{I}$.
- (I3) Si $I_1, I_2 \in \mathbf{I}$ y $|I_1| < |I_2|$, entonces existe un elemento $e \in I_2 - I_1$ tal que $I_1 \cup e \in \mathbf{I}$.

La condición (I3) es llamada *axioma de argumentación de independencia*.

Si M es un matroide (E, \mathbf{I}) , entonces M es llamado un *matroide sobre E* . Los miembros de \mathbf{I} son los *conjuntos independientes* de M y E es el *conjunto fundamental* de M . Frecuentemente se escribe $\mathbf{I}(M)$ para \mathbf{I} y $E(M)$ para E . Un subconjunto de E que no está en \mathbf{I} es llamado *dependiente*.

El nombre de "matroide" fue acuñado por Whitney [1935], porque una de las definiciones de tales objetos proceden de matrices. Sea A una matriz de $m \times n$ sobre algún campo F . Se denotaran las columnas de A por el conjunto de n -elementos de E e \mathbf{I} el conjunto, familia o colección de aquellos subconjuntos X de E para los cuales los conjuntos de columnas de X son linealmente independientes en $V(m, F)$, donde m es la m -dimensión del espacio vectorial sobre F .

Proposición. (E, \mathbf{I}) es un matroide.

Demostración. Evidentemente \mathbf{I} satisface (I1) e (I2). Se Probará que satisface (I3). Sean I_1 e I_2 subconjuntos linealmente independientes de E tal que $|I_1| < |I_2|$. Si W es subespacio de $V(m, F)$ generado por $I_1 \cup I_2$, entonces $\dim W$, la dimensión de W , es al menos $|I_2|$. Ahora se supone que $I_1 \cup e$ es linealmente dependiente para todo $e \in I_2 - I_1$, entonces W está en el espacio generado por I_1 , así $|I_2| \leq \dim W \leq |I_1| < |I_2|$; que es una contradicción. Se concluye que $I_2 - I_1$ contiene un elemento e tal que $I_1 \cup e \in \mathbf{I}$, esto cumple con (I3).

El matroide obtenido de la matriz A es denotado por $M[A]$. Este matroide es llamado el *matroide vector* de A .

Ejemplo 1.1 Considere las siguientes cuatro matrices A_1, A_2, A_3 y A_4 , sobre el campo de \mathbb{R} de números reales:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 5 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

todas ellas son diferentes pero A_1, A_2 y A_3 tiene propiedades en común. La última columna en cada una es cero, la primera columna es múltiplo de la segunda o viceversa, el vector cero puede ser obtenido por una combinación lineal de la tercera, cuarta y de la primera ó segunda columnas. Más formalmente, $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ e $I \subseteq E$ es un subconjunto linealmente independiente si y solo si:

- $f \notin X$
- $\{a, b, c, d\} \cap X$, tiene a lo más dos elementos
- $\{a, b\} \cap X$, tiene a lo más un elemento.

En la matriz A_4 , $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $I = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{5\}, \{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}\}$, así la colección de conjuntos dependientes de este matroide es:

$$\{\{3\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}\} \cup \{X \subseteq E : |X| \geq 3\}$$

La familia de *conjuntos dependientes minimal* es $\{\{3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{2, 4, 5\}\}$, esto es, todos los conjuntos dependientes cuyos subconjuntos propios son independientes.

Un conjunto dependiente minimal en un matroide arbitrario será llamado *circuito de M* y denota el conjunto o familia de circuitos de M por \mathbf{C} ó $\mathbf{C}(M)$. Un circuito de M que tenga n elementos también será llamado un *n -circuito*.

Evidentemente, como en los ejemplos anteriores, $I(M)$ ha sido definido, y $\mathbf{C}(M)$ puede ser determinado. Análogamente $I(M)$ puede ser determinado desde $\mathbf{C}(M)$; los miembros de $I(M)$ son aquellos subconjuntos de $E(M)$ que no contienen miembros de $\mathbf{C}(M)$. Así un matroide M puede ser determinado únicamente por su conjunto \mathbf{C} de circuitos.

Ahora se examinará algunas de las propiedades de \mathbf{C} con una visión para caracterizar aquellos subconjuntos de 2^E que pueden ocurrir como el conjunto de circuitos de un matroide sobre E .

(C1) $\emptyset \notin \mathbf{C}$

(C2) Si C_1 y C_2 son miembros distintos de \mathbf{C} y $C_1 \subseteq C_2$, entonces $C_1 = C_2$

1.1 **Lema.** \mathcal{C} tiene las siguiente propiedad:

(C3) Si C_1 y C_2 son miembros distintos de \mathcal{C} y $e \in C_1 \cap C_2$, entonces existe un miembro C_3 de tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

Demostración. Se supone que $(C_1 \cup C_2) - e$ no contiene un circuito. Entonces $(C_1 \cup C_2) - e \in \mathcal{I}$. Por (C2) $C_1 - C_2$ no es nulo, así se puede escoger un elemento f de este conjunto. Como C_2 es un conjunto dependiente minimal, $C_2 - f \in \mathcal{I}$. Ahora, se escoge un subconjunto I de $C_1 \cup C_2$ el cual es maximal con la conveniencia que este contiene a $C_2 - f$ y es independiente. Evidentemente $f \in \mathcal{I}$. Además, como C_1 es un circuito, algún elemento g de C_1 no esta en I . Como $f \in C_1 - C_2$ los elementos f y g son distintos. De aquí

$$|I| \leq |(C_1 \cup C_2) - \{f, g\}| = |C_1 \cup C_2| - 2 < |(C_1 \cup C_2) - e|$$

Ahora aplicando (I3) a, I_1 e I_2 que están en I y $(C_1 \cup C_2) - e$, respectivamente. El conjunto independiente resultante contradice la maximilidad de I .

La condición (C3) es llamada **axioma de eliminación de circuito o axioma de eliminación de circuito débil**.

1.1 Teorema.

Sea E un conjunto y \mathcal{C} una colección de subconjuntos de E que satisface (C1-C3). Sea \mathcal{I} la colección de subconjuntos de E que no contienen miembros de \mathcal{C} . Entonces (E, \mathcal{I}) es un matroide que tiene a \mathcal{C} como su conjunto de circuitos.

Demostración. Primero se prueba que \mathcal{I} satisface (I1)-(I3). Por (C1) \emptyset no contiene ningún miembro de \mathcal{C} , así $\emptyset \in \mathcal{I}$ y se cumple (I1). Si I no contiene ningún miembro de \mathcal{C} y $I' \subseteq I$, entonces I' no contiene miembros de \mathcal{C} . Así se cumple con (I2).

Ahora se prueba (I3), suponga que I_1 e I_2 son miembros de \mathcal{I} y $|I_1| < |I_2|$. Se asuma que (I3) falla para el par (I_1, I_2) . Ahora \mathcal{I} tiene un miembro que es un subconjunto de $I_1 \cup I_2$ y tiene más elementos que I_1 . Se escoge un subconjunto tal I_3 para el cual $|I_1 - I_3|$ es minimal. Como (I3) falla, $I_1 - I_3$ es no nulo, así se puede escoger un elemento e de este conjunto. Ahora para cada elemento f de $I_3 - I_1$, sea $T_f \in (I_1 \cup e) - f$. Entonces $T_f \subseteq I_1 \cup I_2$ y $|I_1 - T_f| < |I_1 - I_3|$. Por lo tanto $T_f \notin \mathcal{I}$, así T_f contiene un miembro C_f de \mathcal{C} . Evidentemente $f \notin C_f$. Además $e \in C_f$ de otra manera $C_f \subseteq I_3$ contradiciendo el hecho de que $I_3 \in \mathcal{I}$.

Sea g un elemento de $I_3 - I_1$. Si $C_g \cap |I_3 - I_1| = \emptyset$, entonces $C_g \subseteq ((I_3 \cap I_1) \cup e) - g \subseteq I_1$; esto es una contradicción. Por lo tanto hay un elemento h en $C_g \cap |I_3 - I_1|$. Ahora $e \in C_g \cap h$,

así (C3) implica que hay un elemento C de \mathcal{C} tal que $C \subseteq (C_g \cup C_h) - e$. Pero C_g y C_h son subconjuntos de $I_3 \cup e$ y por consiguiente $C \subseteq I_3$, nuevamente una contradicción. Y por ello se concluye que (I3) se satisface.

Por ello, (E, \mathcal{I}) es un *matroide* M .

Los siguientes enunciados son equivalentes.

- (i) C es un *circuito* de M .
- (ii) $C \notin \mathcal{I}$ y $C - x \in \mathcal{I}(M)$ para todo x en C
- (iii) C tiene un miembro C' como un subconjunto, pero C' no es *subconjunto propio* de C .
- (iv) $C \in \mathcal{C}$.

Combinando el teorema anterior con el lema 1.1 se genera el siguiente corolario.

Corolario. Sea un conjunto \mathcal{C} de subconjunto de un conjunto E . Entonces \mathcal{C} es la *colección de circuitos* de un *matroide* sobre E si y solo si \mathcal{C} satisface las condiciones

- (C1) $\emptyset \notin \mathcal{C}$
- (C2) Si C_1 y C_2 son miembros distintos de \mathcal{C} y $C_1 \subseteq C_2$, entonces $C_1 = C_2$
- (C3) Si C_1 y C_2 son miembros distintos de \mathcal{C} y $e \subseteq C_1 \cap C_2$, entonces existe un miembro $C_3 \in \mathcal{C}$ tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$.

Ahora se sabe que los matroides vector son una de las dos clases fundamentales de matroides. La segunda de las clases consiste de matroides derivados de graficas.

Sea G una gráfica y E su conjunto de arcos o aristas. Sea \mathcal{C} la colección de conjuntos de aristas de los ciclos de G donde se renombrará un ciclo o circuito a toda trayectoria cerrada cuyos vértices tienen grado dos.

Proposición. \mathcal{C} es el conjunto de circuitos de un matroide sobre E

Demostración. Claramente \mathcal{C} satisface (C1) y (C2). Se prueba que cumple con (C3), sea C_1 y C_2 los conjuntos de arcos de dos ciclos diferentes de G que tiene a e como arco común. Sea u y v los extremos de e . Ahora se construye un ciclo de G cuyo conjunto de arcos esta contenido en $(C_1 \cup C_2) - e$, para $i = 1, 2$; sea P_i la trayectoria de u a v en G cuyo conjunto de arcos es $C_i - e$. Comenzando en u , la travesía de P_1 hacia v siendo w el primer vértice el cual el siguiente arco de P_1 no esta en P_2 . Se continua el recorrido P_1 desde w a v , hasta que por primera vez un vértice x es alcanzado, este es distinto de w pero si pertenece al camino P_2 . Puesto que P_1 y P_2 finalizan en v , tal vértice debe existir. Ahora se une el segmento de P_1 que va de w a x con el segmento de P_2 de x a w . El resultado es un ciclo (ver figura 6), el conjunto de arcos el cual es contenido en $(C_1 \cup C_2) - e$ por lo tanto \mathcal{C} satisface (C3).

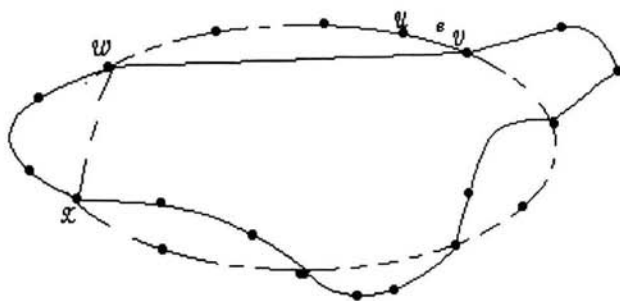


Figura 6.

El matroide derivado de una grafica G es llamado **matroide ciclo**, **matroide circuito** o **matroide polígono**. Este es denotado por $M(G)$. Claramente el conjunto de arcos es independiente en $M(G)$ si y solo si X no contenga el conjunto de arcos de un circuito o, equivalentemente, $G[X]$, la gráfica inducida por X , sea un bosque. Ahora el conjunto fundamental de $M(G)$ es el conjunto de arcos de G , frecuentemente se referirá a ciertas subgráficas de G tales como ciclos, cuando se hable solo de su conjunto de arcos.

Ejemplo 1.2. Sea G el grafo que se muestra en la figura 7 y sea $M = M(G)$. donde $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y $C(M) = \{\{e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_2, e_5\}, \{e_2, e_4, e_5\}\}$. Comparando M con el matroide $M[A_4]$ en el ejemplo 1.1, se ve que bajo la biyección ψ de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ definida por $\psi(i) = e_i$, un conjunto X es un circuito en $M[A_4]$ si y solo si $\psi(X)$ es un circuito en M . Así los matroides $M[A_4]$ y M tienen la misma estructura o son *isomórficos*, $M_1 \cong M_2$, si existe una biyección ψ de $E(M_1)$ a $E(M_2)$ tal que, para todo $X \subseteq E(M_1)$, $\psi(X)$ es independiente en M_2 si y solo si X es independiente en M_1 .

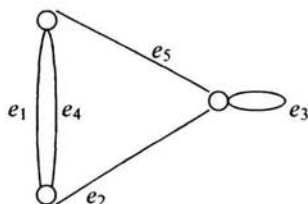


Figura 7.

Un matroide que es *isomorfo* al matroide ciclo de una gráfica es llamado **gráfico**. Así el matroide $M[A_4]$ del ejemplo 1.2 es gráfico. Si M es *isomorfo* al matroide vector de una matriz D sobre el campo F , entonces M se dice ser **representable sobre F** o **F -representable**; D es llamada una **representación para M sobre F** o una **F -representación para M** . Un matroide es representable o, para algunos autores, **mátrico** si este es representable sobre algún campo. De este modo el matroide $M(G)$ del ejemplo 1.2 es representable, la matriz A_4 es una **R -representación** para este.

En el ejemplo 1.2, el *loop* e_3 y el par $\{e_1, e_4\}$ de arcos paralelos dan origen a circuitos en $M(G)$ de tamaño uno y dos respectivamente. Apropiándonos de la terminología de teoría de gráficas, se nombra un elemento e un *loop* de un matroide arbitrario M si $\{e\}$ es un circuito de M . Por otra parte, si f y g son elementos de M tales que $\{f, g\}$ es un circuito, entonces f y g son *paralelos* en M . Una *clase paralela* de M es un subconjunto maximal X de $E(M)$ tal que cualesquiera dos miembros distintos de X son paralelos y ningún miembro de X es un loop. Una clase paralela es *trivial* si ésta contiene solo un elemento. Si M no tiene ni loops ni clases paralelas triviales, entonces M es un *matroide simple* o *geometría combinatoria*.

Cuando se observan ejemplos de matroides con ciertas propiedades, uno no tiende a ver la colección de subconjuntos de un conjunto que satisface a (I1)-(I3). En cambio, uno ve los matroides correspondientes a ciertas graficas o matrices. En tales ejemplos, la grafica o matriz provee una manera relativamente facil de presentar la información que es necesaria para determinar un matroide. No todos los matorides son gráficos o representables, pero, como se verá después, otras clases de matroides tienen presentaciones similares. Raramente uno especifica un matroide por listar explícitamente todos los conjuntos independientes o todos los circuitos.

Todos los matroides de tres o menos elementos son gráficos. A continuación, en listamos estos matroides. Este no necesariamente es único. Sin embargo, los cuatro valores de n que mostramos en la tabla 1 son los únicos cuatro valores para los cuales existen exactamente 2^n matroides no isomórficos. En la tabla 2 mostramos que existen exactamente 17 matroides no isomórficos sobre un conjunto de 4 elementos. Esto es, si $f(n)$ denota el número de matroides no isomorfos sobre un conjunto de n elementos, entonces $f(n)$ es mucho más cercano a 2^{2^n} que a 2^n . Esta estimación se debe a Piff [1973] y a Welsh [1971] dada por :

$$n - 5/2 \log n \leq \log \log f(n) \leq n - (1-\epsilon) \log n, \quad \text{para todo } \epsilon > 0.$$

Tabla 1.

Matroides con 3 o menos elementos



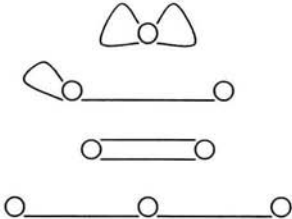
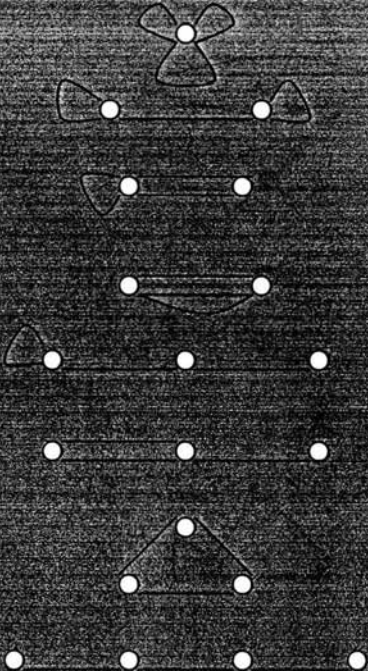
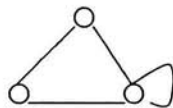
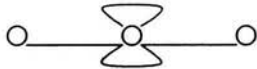
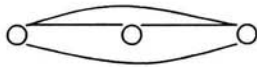
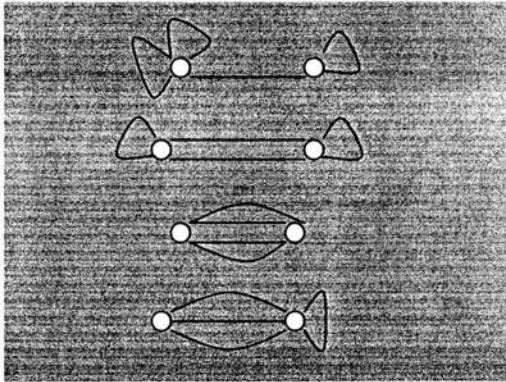
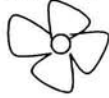
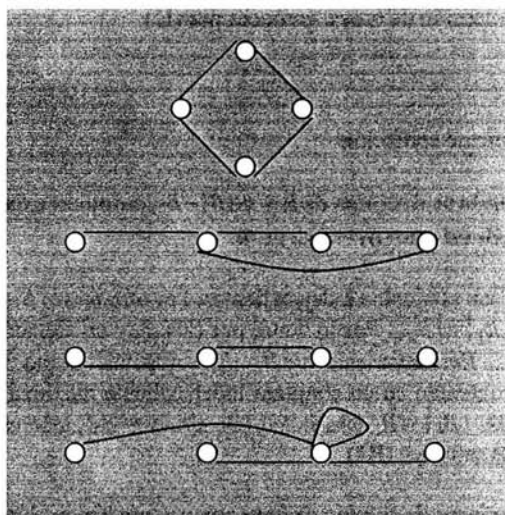
Número de elementos	Grafica correspondiente	Número de matroides de n elementos no isomorficos
0		1
1		2
2		4
3		8

Tabla 2 .

Matroides con 4 elementos

Número de elementos 4	Grafica correspondiente	17 matroides de 4 elementos no isomorficos
--------------------------	-------------------------	--





Se ha visto que un matroide M fijado sobre un conjunto fundamental E puede ser especificado por una lista de sus conjuntos independientes o por listar sus circuitos. Evidentemente M puede ser determinado por su colección de conjuntos independientes maximales, en la siguiente sección, usaremos esta colección para obtener la tercera caracterización de matroides.

1.2.2 MATROIDE DE BASES

Una lista de conjuntos independientes maximal en un matroide M , es, claramente, la manera más eficiente de especificar un matroide M , que una lista de todos los conjuntos independientes. Llamaremos **conjunto independiente maximal** en M a una **base** de M . Aquí se verá las bases de un matroide. Mostrando que esos conjuntos tienen mucho en común con las bases de un espacio vector.

1.2 Lema. Si B_1 y B_2 son **bases** de un matroide M , entonces $|B_1| = |B_2|$.

Demostración. Suponga que $|B_1| < |B_2|$. entonces como B_1 y B_2 son independientes en M , (I3) implica que hay un elemento e de $B_2 - B_1$ tal que $B_1 \cup e \in \mathcal{I}$. Esto contradice la maximalidad de B_1 , por ello $|B_1| \geq |B_2|$ y similarmente, $|B_2| \geq |B_1|$.

Si M es matroide y B su colección de bases, entonces por (I1).

(B1) B no es nulo.

Lema. B satisface la siguiente condición

(B2) Si B_1 y B_2 son miembros distintos de B y $x \in B_1 - B_2$, entonces existe un elemento y de $B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - x) \cup y \in B$.

Demostración. $B_1 - x$ y B_2 son conjuntos independientes. Por otra parte $|B_1 - x| < |B_2|$, ahora por el lema precedente, $|B_1| = |B_2|$. Por lo tanto, por (I3), hay un elemento $y \in B_2 - (B_1 - x)$ tal que $(B_1 - x) \cup y \in I$. Evidentemente $y \in B_2 - B_1$. Además, como $(B_1 - x) \cup y$ es independiente, este está contenido en un conjunto independiente maximal B_1' . Por el lema 1.2, $|B_1'| = |B_1|$. Además, $|B_1| = |(B_1 - x) \cup y|$. Así $(B_1 - x) \cup y = B_1'$, esto es, $(B_1 - x) \cup y$ es una base de M . Con ello B satisface (B2).

La condición (B2) es el **axioma de cambio de base** competente a matroides.

1.2 Teorema.

Sea E un conjunto y B una colección de subconjuntos de E que satisface a (B1) y (B2). Sea I la colección de subconjuntos de E que están contenidos en algún miembro de B . Entonces (E, I) es un matroide que tiene a B como su colección de bases.

Demostración. B satisface (B1), I cumple con (I1). Además, si $I \in I$, entonces $I \subseteq B$ para algún conjunto B en B . Así si $I' \subseteq I$, entonces $I' \subseteq B$, y esto implica $I' \in I$. Cumpliendo I con (I2). Se comprueba que I cumple con (I3), para ello se utilizará el siguiente lema:

1.3 Lema. Los miembros de B son **equicardinales**.

Demostración. Se supone que B_1 y B_2 son miembros distintos de B para los cuales $|B_1| > |B_2|$ tal que, entre todos los pares, $|B_1 - B_2|$ es minimal. Claramente $B_1 - B_2 \neq \emptyset$. Así, se escoge un x de $B_1 - B_2$, se puede encontrar un elemento y de $B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - x) \cup y \in B$. Como se ve $|(B_1 - x) \cup y| = |B_1| > |B_2|$ y $|((B_1 - x) \cup y) - B_2| < |B_1 - B_2|$. Así la selección de B_1 y B_2 es contradictoria y el lema se cumple.

Retomamos la prueba de el teorema, se supone que (I3) falla para I . Entonces I tiene subconjuntos I_1 e I_2 con $|I_1| < |I_2|$ tal que, para todo e en $I_2 - I_1$, el conjunto $I_1 - e \notin I$. Por definición B contiene miembros B_1 y B_2 tal que $I_1 \subseteq B_1$ y $B_2 \subseteq I_2$. Se escoge un conjunto B_2 tal que $|B_2 - (I_2 \cup B_1)|$ es minimal. Por la selección de I_1 e I_2

$$I_2 - B_1 = I_2 - I_1 \quad \dots\dots\dots(1)$$

Ahora se supone que $B_2 - (I_2 \cup B_1)$ no es nulo. Entonces se puede escoger un elemento x de este conjunto. Por (B2), hay un elemento y de $B_2 - B_1$, tal que $(B_2 - x) \cup y \in B$. Pero entonces $|((B_1 - x) \cup y) - (I_2 \cup B_1)| < |B_2 - (I_2 \cup B_1)|$ y la selección B_2 se contrapone. Con ello $B_2 - (I_2 \cup B_1)$ es vacío y $B_2 - B_1 = I_2 - B_1$. Así por (1)

$$B_2 - B_1 = I_2 - I_1 \quad \dots\dots\dots(2)$$

Se muestra que $B_1 - (I_1 \cup B_2)$ es vacío. Si no, entonces hay un elemento x en este conjunto y un elemento y en $B_2 - B_1$ de modo que $(B_1 - x) \cup y \in B$. Ahora $I_1 \cup y \subseteq (B_1 - x) \cup y$ así $I_1 \cup y \in I$. Ahora $y \in B_2 - B_1$, lo que implica por (2) que $y \in I_2 - I_1$ y así se tiene una contradicción para que nuestra suposición (13) no sea válida. Se concluye que $B_1 - (I_1 \cup B_2)$ es vacío. De esto $B_1 - B_2 = I_1 - I_2$. Ya que el último conjunto está contenido en $I_2 - I_1$, implica que

$$B_2 - B_1 \subseteq I_1 - I_2 \quad \dots\dots\dots(3)$$

Por el lema 1.3, $|B_1| = |B_2|$, también $|B_1 - B_2| = |B_1 - B_2|$. Por lo tanto por (2) y (3), $|I_1 - I_2| \geq |I_2 - I_1|$, así $|I_1| \geq |I_2|$. Esto contradice completamente la prueba que (E, I) es un matroide. Claramente B es el conjunto de bases de un matroide, y el teorema es demostrado.

Corolario. Sea B un conjunto de subconjuntos de un conjunto E . Entonces B es la *colección de bases* de un matroide sobre E si y solo si este satisface las condiciones:

- (B1) B no es nulo.
- (B2) Si B_1 y B_2 son miembros distintos de B y $x \in B_1 - B_2$, entonces existe un elemento y de $B_2 - B_1$ tal que $(B_1 - x) \cup y \in B$.

Ejemplo 1.3. Sea m y n enteros no negativos tales que $m \leq n$. Sea E un conjunto de n -elementos y B la colección de subconjuntos de m -elementos de E . Entonces podemos ver que B es el conjunto de bases de un matroide sobre E . Se denota este matroide por $U_{m,n}$ y este se llama *matroide uniforme* de rango m sobre un conjunto de n elementos.

$$I(U_{m,n}) = \{ X \subseteq E : |X| \leq m \}, \quad y$$

$$C(U_{m,n}) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } m = n \\ \{ X \subseteq E : |X| = m + 1 \} & \text{si } m < n \end{cases}$$

Si $m = 0$ cualquier elemento de $U_{m,n}$ es un loop, mientras que si $m = 1$, $U_{m,n}$ es una clase paralela de elementos. Para $m \geq 2$, $U_{m,n}$ es simple. El matroide uniforme de la forma $U_{n,n}$ es precisamente el matroide que no tiene conjuntos dependientes. Se llama a tales matroides *libres*.

En un matroide M , se ha especificado la relación entre $B(M)$ e $I(M)$, y entre $I(M)$ y $C(M)$. Notese que $B(M)$ es la colección de subconjuntos maximal de $E(M)$ y que no contiene miembros de $C(M)$, mientras $C(M)$ es la colección de subconjuntos minimal que no están contenidos en ningún miembro de $B(M)$.

Ahora se verá las bases en matroides gráficos y representables,

Sea G una gráfica. Obsérvese primero que, para $X \subseteq E(G)$, X es independiente en $M(G)$ exactamente cuando $G[X]$, la subgráfica inducida por X , es un bosque. De este modo X es una base de $M(G)$ precisamente cuando $G[X]$ es un bosque y, para todo $e \notin X$, $G[X \cup e]$ contiene un circuito. Cuando G es conectada, X es una base de $M(G)$ si y solo si $G[X]$ es un árbol de expansión de G . En general, X es una base de $M(G)$ si y solo si, para cada componente conectado H de G al menos un arco no es loop, $H[X \cap E(H)]$ es un árbol de expansión de H .

Ejemplo 1.4. Considere las gráficas G_1 y G_2 de la figura 8. Cada una tiene el conjunto de arcos $\{1,2,3,4,5\}$. Además cada $M(G_1)$ y $M(G_2)$ tiene a $\{2,3,4,5\}$ como su única base. De este modo $M(G_1) = M(G_2)$ aunque G_1 y G_2 no son isomorficas

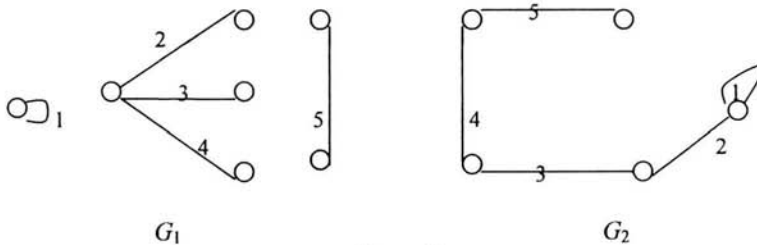


Figura 8.

Se abordará brevemente los matroides representables.

Sea A una matriz de $m \times n$ sobre el campo F . Las columnas de A generan un subespacio W de $V(m, F)$ de dimensión r . Si B es un subconjunto de las columnas de A , entonces B es una base de $M[A]$ si y solo si $|B| = r$ y las columnas de B forman una base para W .

Ejemplo 1.5. Sea la matriz A sobre el campo $GF(3)$, de la figura 9. En este caso la $\dim W = 2$ y las bases de $M[A]$ son todos aquellos subconjuntos de dos elementos de $\{1,2,3,4\}$. Por consiguiente $M[A] \cong U_{2,4}$ y se dice que es ternaria y esta es representable sobre $GF(3)$.

$$A = \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Figura 9.

Los matroides ternarios son de las clases de matroides representables más estudiadas. Otras dos clases de matroides representables son los binarios y los regulares. Un *matroide binario* es uno que es representable sobre $GF(2)$. Un *matroide regular* es uno que puede ser representado por una *matriz unimodular total*, esta es una matriz sobre \mathbb{R} para la cual cualquier submatriz cuadrada tiene determinante en $\{0, 1, -1\}$. Algunos autores se refieren a los matroides regulares como *matroides unimodulares*.

El hecho de que todas las bases de un matroide son equicardinales da la posibilidad de definir un matroide en términos de la función de dimensión de un espacio vectorial.

1.2.3 MATROIDE EN TÉRMINOS DE LA FUNCIÓN DE RANGO.

Dos conceptos muy utilizados en álgebra lineal son la dimensión de un espacio vectorial y el generado de un conjunto de vectores. En esta sección y en la siguiente, se introduce la generalización de esas ideas para un matroide.

Sea M un matroide (E, \mathcal{I}) y suponga que $X \subseteq E$. Sea $\mathcal{I} \upharpoonright X = \{I \subseteq X : I \in \mathcal{I}\}$; entonces es fácil ver que el par $(X, \mathcal{I} \upharpoonright X)$ es un matroide. Llamemos a este matroide *la restricción* de M por X o *la eliminación* de $E-X$ de M . Este es denotado por $M \upharpoonright X$ o $M \setminus (E-X)$ o $M \setminus X$. Es fácil ver que

$$\mathcal{C}(M \upharpoonright X) = \{C \subseteq X : C \in \mathcal{C}(M)\}$$

Como $M \upharpoonright X$ es un matroide. El lema 1.2 implica que todas sus bases son equicardinales. Se define el *rango* $r(X)$ de X , por el tamaño de una base B de $M \upharpoonright X$ y llamamos a este conjunto B *una base de X* . Evidentemente r mapea 2^E dentro del conjunto de enteros no negativos. Esta función, la *función de rango* de M , comúnmente se escribirá como r_M y usualmente cuando se escriba $r(M)$ nos referimos a $r(E(M))$. Es claro que r tiene la siguiente propiedad

- (R1) Si $X \subseteq E$, entonces $0 \leq r(X) \leq |X|$.
 (R2) Si $X \subseteq Y \subseteq E$, entonces $r(X) \leq r(Y)$, además,

1.4 Lema. La *función de rango* de un matroide M satisface la siguiente condición.

- (R3) Si X y Y son subconjuntos de E , entonces $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) = r(X) + r(Y)$.

Recordamos que (R3) es la reminiscencia de la identidad:

$$\dim(V+W) + \dim(V \cap W) = \dim V + \dim W.$$

que se cumple para espacios vectoriales V y W donde $V+W$ consisten de todos los vectores de $v+w$, donde $v \in V$ y $w \in W$. La desigualdad (R3) se conoce como la *submodularidad o desigualdad submodular*.

Demostración de lema. Sea $B_{X \cap Y}$ una base para $X \cap Y$. Entonces $B_{X \cap Y}$ es un conjunto independiente en $M(X \cup Y)$. Este es por lo tanto, una base $B_{X \cup Y}$ de este matroide. Ahora $B_{X \cup Y} \cap X$ y $B_{X \cup Y} \cap Y$ son conjuntos independientes en $M|X$ y $M|Y$, respectivamente. Por lo que

$$|B_{X \cup Y} \cap X| \leq r(X), \text{ y } |B_{X \cup Y} \cap Y| \leq r(Y).$$

Así

$$\begin{aligned} r(X) + r(Y) &\geq |B_{X \cup Y} \cap X| + |B_{X \cup Y} \cap Y| \\ &= |(B_{X \cup Y} \cap X) \cup (B_{X \cup Y} \cap Y)| + |(B_{X \cup Y} \cap X) \cap (B_{X \cup Y} \cap Y)| \\ &= |B_{X \cup Y} \cap (X \cup Y)| + |B_{X \cup Y} \cap X \cap Y|. \end{aligned}$$

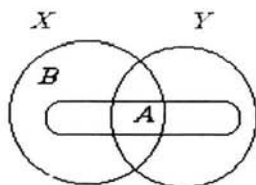
Pero,

$$B_{X \cup Y} \cap (X \cup Y) = B_{X \cup Y} \text{ y } B_{X \cup Y} \cap X \cap Y = B_{X \cap Y}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} r(X) + r(Y) &\geq |B_{X \cup Y}| + |B_{X \cap Y}| \\ &= r(X \cup Y) + r(X \cap Y). \end{aligned}$$

En otras palabras, si $A \subseteq X \cap Y$ es un subconjunto independiente maximal de $X \cap Y$, se extiende a A mas allá de $X \cap Y$ y así poder obtener un elemento $B \subseteq X \cup Y$ tal que $A \subseteq B$ y B es un subconjunto independiente maximal de $X \cup Y$. Con ello, se obtiene que $|B \cap X| + |B \cap Y| = |B| + |A|$. Pero B es independiente, por consiguiente $B \cap X$ y $B \cap Y$ los son. Entonces, $|B \cap X| \leq r(X)$ y $|B \cap Y| \leq r(Y)$ esto conduce a que $r(X) + r(Y) \leq |B| + |A| = r(X \cup Y) + r(X \cap Y)$; ver el siguiente diagrama:



Continuando el modelo de las secciones anteriores, ahora se establece las condiciones (R1)-(R3) que caracterizan la función de rango para un matroide.

1.3 Teorema.

Sea E un conjunto y r la función que mapea 2^E dentro del conjunto de enteros no negativos que satisface (R1), (R2) y (R3). Sea \mathcal{I} la colección de subconjuntos X de E para los cuales $r(X) = |X|$. Entonces (E, \mathcal{I}) es un matroide que tiene función de rango r .

Auxiliándose del siguiente lema, se tiene:

1.5 Lema. Sea E un conjunto y r la función que mapea 2^E satisfaciendo (R2) y (R3). Si X y Y son subconjuntos de E tal que, para todo y en $Y-X$, $r(U \cup y) = r(X)$, entonces $r(X \cup Y) = r(X)$.

Demostración. Sea $Y-X = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$. Si $k = 1$, el resultado es inmediato. Se asume que esto es verdadero para $k = n$ y sea $k = n + 1$. Entonces, por inducción y (R3):

$$\begin{aligned} r(X) + r(X) &\geq r(X \cup \{y_1, y_2, \dots, y_n\}) + r(X \cup y_{n+1}) \\ &= r((X \cup \{y_1, y_2, \dots, y_n\}) \cup (X \cup y_{n+1})) + r((X \cup \{y_1, y_2, \dots, y_n\}) \cap (X \cup y_{n+1})) \\ &= r(X \cup \{y_1, y_2, \dots, y_{n+1}\}) + r(X) \\ &\geq r(X) + r(X) \end{aligned}$$

donde el último paso proviene de (R2). Ya que la primera y la última líneas son iguales. Se Concluye que

$$r(X \cup \{y_1, y_2, \dots, y_{n+1}\}) = r(X),$$

y así el lema se satisface.

Continuando con la demostración del teorema. Por (R1), $0 \leq r(\emptyset) \leq \emptyset = 0$, así $r(\emptyset) \leq |\emptyset| = \emptyset \in \mathbb{I}$, satisfaciéndose (R1). ahora suponga que $I \in \mathbb{I}$ e $I' \subseteq I$. Entonces $r(I) = |I|$. Por (R3)

$$r(I \setminus (I-I')) + r(I' \cap (I-I')) \leq r(I') + r(I-I'),$$

esto es,

$$r(I) + r(\emptyset) \leq r(I') + r(I-I') \quad \dots\dots\dots(1)$$

Pero $r(I) = |I|$ y $r(\emptyset) = 0$. Además, por (R2), $r(I') \leq |I'|$ y $r(I-I') \leq |I-I'|$ Por lo tanto, por (1).

$$|I| \leq r(I') + r(I-I') \leq |I'| + |I-I'| = |I|$$

la cual debe cumplirse de principio a fin. Por lo tanto $r(I') = |I'|$, esto es, $I' \in \mathbb{I}$.

Se prueba que \mathbb{I} satisface (I3), para ello supóngase lo contrario, esto es, sean I_1 e $I_2 \in \mathbb{I}$ con $|I_1| < |I_2|$ y suponga que, para todo e en $I_1 - I_2$, $I_1 \cup e \notin \mathbb{I}$. Entonces, para todo e , $r(I_1 \cup e) \neq |I_1 \cup e|$. Ahora por (R1), (R2) y el hecho de que $I_1 \in \mathbb{I}$. Se concluye esto, para todo e ,

$$|I_1| + 1 > r(I_1 \cup e) \geq r(I_1) = |I_1|, \quad \text{y así}$$

$$r(I_1 \cup e) = |I_1|.$$

Aplicando el lema 1.5 con $X = I_1$ y $Y = I_2$, inmediatamente se obtiene que $r(I_1) = r(I_1 \cup I_2)$. Pero $|I_1| = r(I_1)$ y $r(I_1 \cup I_2) \geq r(I_2) = |I_2|$, con ello $|I_1| \geq |I_2|$; una contradicción. Se concluye que \mathbb{I} satisface (I3) y por lo tanto (E, \mathbb{I}) es un matroide.

Ahora solo falta probar que r es la función de rango r_M de M .

Suponga que $X \subseteq E$. Si $X \in \mathcal{I}$, entonces $r(X) = |X|$ y como x es una base de $M|X$, $r_M(X) = |X|$. Ahora, si $X \in \mathcal{I}$, entonces $r(X) = r_M(X)$. Ahora, si $X \notin \mathcal{I}$ y sea B una base para $M|X$. Entonces $r_M(X) = |B|$. Además, $B \cup x \notin \mathcal{I}$ para todo x en $X - B$. Como $|B| = r(B) \leq r(B \cup x) < |B \cup x|$, así $r(B \cup x) = r(B)$. Por el lema 1.5, $r(B \cup X) = r(B)$, esto es, $r(X) = r(B) = |B|$, de este modo si $X \notin \mathcal{I}$, entonces $r(X) = r_M(X)$. Concluimos que $r = r_M$.

El siguiente corolario es una combinación del último teorema y el lema 1.4.

Corolario. Sea E un conjunto. Una función $r: 2^E \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ es la **función de rango** de un **matroide** sobre E si y solo si r satisface las siguientes condiciones:

- (R1) Si $X \subseteq E$, entonces $0 \leq r(X) \leq |X|$.
- (R2) Si $X \subseteq Y \subseteq E$, entonces $r(X) \leq r(Y)$.
- (R3) Si X y Y son subconjuntos de E , entonces $r(X \cup Y) + r(X \cap Y) = r(X) + r(Y)$.

Conjuntos independientes, bases y circuitos son fáciles de caracterizar en términos de la función de rango; esto queda implícito en la siguiente proposición.

Proposición. Sea M un matroide con función de rango r y suponga que $X \subseteq E(M)$. Entonces:

- (i) X es **independiente** si y solo si $|X| = r(X)$
- (ii) X es una **base** si y solo si $|X| = r(X) = r(M)$
- (iii) X es un **circuito** si y solo si X no es **nulo** y, para toda x en X , $r(X - x) = |X| - 1 = r(X)$.

Ahora se especificará la función de rango de forma explícita para matroides uniformes, representable y gráficos. En todos los casos suponga que $X \subseteq E(M)$.

Si $M = U_{m,n}$, entonces:

$$r(X) = \begin{cases} |X|, & \text{si } |X| < m \\ m, & \text{si } |X| \geq m \end{cases}$$

Si $M = M[A]$ donde A es una matriz de $m \times n$ sobre el campo F , entonces claramente $r(X)$ es la función de rango de A_X , la $m \times |X|$ submatriz de A consiste de aquellos columnas de A que son denominadas por los miembros de X . $r(X)$ equivale a la dimensión del subespacio $V(m, F)$ generado por las columnas de A_X .

Ahora sea $M = M(G)$ donde G es un grafica. Primero se determinará $r(M)$. Se supone inicialmente que G es conectada. Entonces una base de G es el conjunto de arcos de un árbol de expansión. Por definición

$$|V(T)| = |E(T)| + 1 \dots \dots \dots (+0)$$

de manera que , si G es conectada

$$r(M) = |V(T)| - 1 \dots \dots \dots (+1)$$

es claro que, si G tiene $w(G)$ componentes conectados, entonces

$$r(M) = |V(T)| - w(G) \dots \dots \dots (+2)$$

ahora si $X \subseteq E(G)$, entonces

$$r(M) = |V(G[X])| - w(G[X]) \dots \dots \dots (+3).$$

Ejemplo 1.6. Sea $M = M(G)$ donde G es la gráfica que se muestra en la figura 10(a).Entonces, como G es conectada, $r(M) = |V(G)| - 1 = 4$. Si $X = \{4,5,6,7,8\}$, entonces una base para este es $\{4,5,6\}$, así $r(X) = 3$. Vemos en la figura 10(b) que, $|V(G[X])| = 4$ y que $w(G[X]) = 1$, así por (+3), $r(X) = 3$. Si $Y = \{1,3,5\}$, entonces $|V(G[Y])| = 4$ y $w(G[Y]) = 2$, con ello $r(Y) = 2$. Finalmente si $\{1,2\}$, entonces $r(Z) = 0$ porque el \emptyset es una base para $M|Z$.

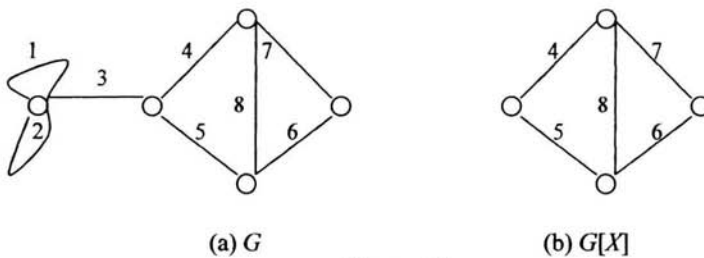


Figura. 10

1.2.4 MATROIDE EN TÉRMINOS DE LA CERRADURA.

En un espacio vectorial V , el vector v esta en el generado de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ si el subespacio generado de $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $\{v_1, v_2, \dots, v_n, v\}$ tiene la misma dimensión. Sea M un matroide arbitrario con conjunto fundamental E y función de rango r , y sea cl la función de 2^E dentro de 2^E definida para todo $X \subseteq E$, por

$$cl(X) = \{x \in E: r(X \cup x) = r(X)\}$$

esta función es llamada **operador de cerradura** de M . Así dentro del ejemplo 1.6 del apartado 1.2.3; $cl(\emptyset) = \{1,2\}$, $cl(\{1,3,5\}) = \{1,2,3,5\}$, y $cl(\{4,5,6\}) = \{1,2,4,5,6,7,8\}$.

En otras palabras, si M tiene un conjunto de ciertos vectores de un espacio vector entonces significa que x es generado como una combinación lineal de vectores en X . Por definición, los miembros de X son también considerados como miembros de la cerradura.

Uno de los resultados en esta sección definirá un matroide en términos de su operador de cerradura. Un resultado preliminar importante es el siguiente lema.

1.6 Lema. El *operador de cerradura* de un matroide sobre el conjunto E tiene las siguientes propiedades.

(CL1) Si $X \subseteq E$, entonces $X \subseteq cl(X)$.

(CL2) Si $X \subseteq Y \subseteq E$, entonces $cl(X) \subseteq cl(Y)$

(CL3) Si $X \subseteq E$, entonces $cl(cl(X)) = cl(X)$

(CL4) Si $X \subseteq E$ y $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$, entonces $x \in cl(X \cup y)$.

Demostración. Por definición (CL1) se satisface. Ahora se probará que se cumple (CL2). Suponga que $X \subseteq Y$ y $x \in cl(X) - X$. Entonces $r(X \cup x) = r(X)$. Así, si B_X es una base de X , entonces B_X es una base de $X \cup x$. Por lo que, $Y \cup x$ tiene una base $B_{Y \cup x}$ que contiene a B_X pero no a x . Ahora, $B_{Y \cup x}$ también debe ser una base de Y , de este modo $r(Y \cup x) = |B_{Y \cup x}| = r(Y)$ y con ello, $x \in cl(Y)$. Se concluye que $cl(X) \subseteq cl(Y)$, cumpliéndose así (CL2).

Se probará (CL3), primero se hará notar que, por (CL1), $cl(X) \subseteq cl(cl(X))$. Se actuará de manera inversa, se escoge un x dentro de $cl(cl(X))$. Entonces $r(cl(X) \cup x) = r(cl(X))$. Pero, para cualquier $y \in cl(X) - X$, $r(X \cup y) = r(X)$. Así, por el lema 1.5, $r(X) = r(X \cup (cl(X) - X)) = r(cl(X))$. Ahora $r(cl(X) \cup x) = r(X)$. Pero, por (R2), $r(cl(X) \cup x) \geq r(X \cup x) \geq r(X)$. Por lo tanto $cl(cl(X)) \subseteq cl(X)$ y (CL3) se cumple.

Para la prueba de (CL4) se necesita usar el siguiente resultado.

1.7 Lema. Si $X \subseteq E$ y $x \in E$, entonces $r(X) \leq r(X \cup x) \leq r(X) + 1$.

Demostración. Sea B_X una base de X . Entonces sus bases B_X y $B_X \cup x$ son una bases de $X \cup x$ y así $r(X \cup x)$ es $r(X)$ ó $r(X) + 1$.

Ahora suponga que $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$. Entonces $r(X \cup x \cup y) = r(X \cup x)$ y $r(X \cup y) \neq r(X)$. De la última desigualdad y el lema 1.7, se deduce que $r(X \cup y) = r(X) + 1$. De manera que

$$r(X) + 1 = r(X \cup y) \leq r(X \cup x \cup y) = r(X \cup x) \leq r(X) + 1.$$

Por lo tanto, $r(X \cup x \cup y) = r(X \cup y)$, con ello se cumple que $x \in cl(X \cup y)$, como se requiere.

Las condiciones (CL1)-(CL4) representan esas funciones que pueden ser el *operador de cerradura* para un matroide. La condición (CL4) se conoce también como *propiedad de cambio de Mac Lane-Steinitz*.

1.4 Teorema.

Sea E un conjunto y cl una función de 2^E que mapea a 2^E , que satisface (CL1)-(CL4). Sea $I = \{X \subseteq E : x \notin cl(X-x), \forall x \in X\}$.

Entonces (E, I) es un matroide que tiene operador de cerradura cl .

Demostración. A priori $\emptyset \in I$, así se cumple (I1). Ahora suponga $I \in I$ e $I' \subseteq I$. Si $x \in I'$, entonces $x \in I$ y de este modo $x \notin cl(I-x)$. Por (CL2), $cl(I-x)$ contiene a $cl(I'-x)$, por ello $x \notin cl(I'-x)$ de manera que $I' \in I$. Así I cumple con (I2). Continuando con el resto de la prueba se necesita del siguiente lema.

1.8 Lema. Suponga $X \subseteq E$ y $x \in E$. Si $X \in I$, no así $X \cup x$, entonces $x \in cl(X)$.

Demostración. Como $X \cup x \notin I$, existe un elemento $y \in X \cup x$ tal que $y \in cl((X \cup x) - y)$. Si $y = x$, el lema se cumple. Si $y \neq x$, entonces $(X \cup x) - y = (X - y) \cup x$ y $y \in cl((X - y) \cup x) - cl(X - y)$. Por lo tanto (CL4), $x \in cl((X - y) \cup y) = cl(X)$.

Retomemos la prueba de que I cumple con (I3). Suponga que I_1 e I_2 son miembros de I tal que $|I_1| < |I_2|$ e (I3) falla para el par (I_1, I_2) . Se supone, por otra parte que entre todo par, $|I_1 \cap I_2|$ es maximal. Se escoge $y \in I_2 - I_1$ y considere $I_2 - y$. También conceda que $I_1 \subseteq cl(I_2 - y)$. Por (CL2) y (CL3), $cl(I_1) \subseteq cl(I_2 - y)$. Como $y \notin cl(I_2 - y)$, $y \in cl(I_1)$. Por lo que, por el lema 1.8, $I_1 \cup y \in I$ y con base en ello se satisface (I3) para el par (I_1, I_2) , provocando una contradicción. Se concluye que I_1 no es subconjunto de $cl(I_2 - y)$ y para cualquier elemento t de el par $(I_1, (I_2 - y) \cup t)$, esto es, para algún $x \in ((I_2 - y) \cup t) - I_1$, en conjunto $I_1 \cup x \in I$. Pero $x \in I' - I_1$, logrando así que (I3) se satisfaga. Esta contradicción completa la prueba de que (E, I) es un matroide M .

Ahora se debe comprobar que cl y el operador de cerradura cl_M de M coincidan. Suponga primero que $x \in cl_M(X) - X$. Entonces $r_M(X \cup x) = r_M(X)$. Sea B una base de X . Entonces $B \in I$ y $B \cup x \notin I$, así por el lema 1.8, $x \in cl(B)$. Pero por (CL2), $cl(B) \subseteq cl(X)$. Por lo que $x \in cl(X)$ y así, $cl_M(X) \subseteq cl(X)$. Probemos la desigualdad de manera inversa. Suponga que $x \in cl(X) - X$. Sea B una base de X . Entonces $B \cup y \notin I$ para cualquier $y \in X - B$, así, por el lema 1.8, $X \subseteq cl(B)$. Ahora $B \cup x \notin I$, de modo que B es una base para $X \cup x$ y $r_M(X \cup x) = |B| = r_M(X)$. Por ello, $x \in cl_M(X)$ y se satisface que $cl(X) \subseteq cl_M(X)$, por lo tanto $cl(X) = cl_M(X)$.

Corolario. Sea E un conjunto. Una función $cl: 2^E \rightarrow 2^E$ es el *operador de cerradura* de un *matroide* sobre E si y solo si esta satisface las siguientes condiciones.

- (CL1) Si $X \subseteq E$, entonces $X \subseteq cl(X)$.
- (CL2) Si $X \subseteq Y \subseteq E$, entonces $cl(X) \subseteq cl(Y)$.
- (CL3) Si $X \subseteq E$, entonces $cl(cl(X)) = cl(X)$.
- (CL4) Si $X \subseteq E$ y $y \in cl(X \cup x) - cl(X)$, entonces $x \in cl(X \cup y)$.

Si M es un matroide y $X \subseteq E(M)$, llamemos a $cl(X)$ la **cerradura o el cerrado** de X dentro de M , también se denota por $cl_M(X)$. Si $X = cl(X)$, entonces X es llamado un **plano o conjunto cerrado** de M . Un **hiperplano** de M , es un plano de rango $r(M)-1$. Un subconjunto X de $E(X)$ es un **conjunto cerradura o conjunto cerrado** de M si $cl(X) = E(M)$.

Ejemplo 1.7. Sea $M = M(K_5)$, ver figura 11. entonces M tiene un único plano de rango 0, el vacío (\emptyset); M tiene 10 planos de rango 1, los 10 arcos de K_5 . los planos de rango 2 de M son de dos tipos: los conjuntos de arcos de triángulos, de los cuales hay 10; y pares de arcos no adyacentes, de los cuales existen 15. Los planos de rango 3 ó hiperplanos son también de dos tipos: los conjuntos de arcos de las subgraficas K_4 , de los cuales hay 5; y los conjuntos de arcos de las graficas isomorficas de la unión de una graficas K_2 y una K_3 , de las cuales hay 10. Finalmente un solo plano de rango 4, $E(K_5)$.

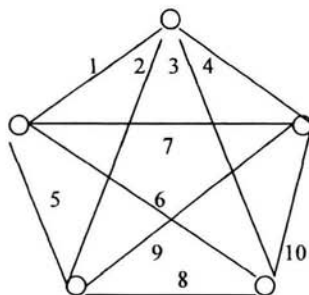


Figura 11.

1.5 Teorema.

Sea E un conjunto. Una función r de 2^E dentro del conjunto de enteros positivos es la **función de rango de un matroide sobre E** si y solo si satisfaga las siguientes condiciones.

(R1)' $r(\emptyset) = 0$

(R2)' Si $X \subseteq E$ y $x \in E$, entonces $r(X) \leq r(X \cup x) \leq r(X) + 1$.

(R3)' Si $X \subseteq E$ y x y y son elementos de E tales que $r(X \cup x) = r(X \cup y) = r(X)$, entonces $r(X \cup x \cup y) = r(X)$.

CAPÍTULO II

MATROIDES INDUCIDOS POR LÍNEAS Y PUNTOS.

Lo concerniente de esta sección será definir un matroide transversal y su homologo bajo el enfoque de gráficas bipartitas, concluyendo este capitulo con la látis de planos de un matroide.

2.1 MATROIDE TRANSVERSAL

Edmonds y Fulkerson [1965] probaron que el conjunto de transversales parciales de una familia finita de conjuntos forman una colección de conjuntos independientes de un matroide, lo cual fue probado independientemente, y generalizado para conjuntos infinitos por Mirsky y Perfect [1967].

Sea S un conjunto finito. Una familia de subconjuntos de S es una secuencia finita (A_1, A_2, \dots, A_m) , tal que para cada J en $\{1, 2, \dots, m\}$, $A_j \subseteq S$. Note que los términos de esta secuencia, los miembros de esta familia, no necesariamente son distintos. Si $J = \{1, 2, \dots, m\}$, frecuentemente abreviaremos (A_1, A_2, \dots, A_m) como $(A_j: j \in J)$. Un *transversal* o *Sistema de Representantes Distintos* de (A_1, A_2, \dots, A_m) es un subconjunto $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ de S tal que $e_j \in A_j, \forall j \in J$.

Definición. T es un transversal de $(A_j: j \in J)$ si existe una biyección $\psi: J \rightarrow T$ tal que $\psi(j) \in A_j, \forall j \in J$. Si $X \subseteq S$, entonces X es un transversal parcial de $(A_j: j \in J)$ si, para algún subconjunto K de J , X es un transversal de $(A_j: j \in K)$.

Otro camino para visualizar un Transversal parcial es usar la idea de *emparejamiento o apareamiento* en una grafica bipartita.

Definición. Si \mathbf{A} es la familia (A_1, A_2, \dots, A_m) de subconjuntos de S y $J = \{1, 2, \dots, m\}$, entonces el grafo bipartito $\nabla[\mathbf{A}]$ asociado a \mathbf{A} tiene conjunto de vértices $S \cup J$, y el conjunto de arcos es $\{x_j: x \in S, j \in J \text{ y } x \in A_j\}$.

Un *apareamiento* en un grafica es un conjunto de arcos los cuales no tienen vértices en común. No es difícil ver que un subconjunto X de S es un transversal parcial de \mathbf{A} si y solo si existe un apareamiento en $\nabla[\mathbf{A}]$, en el cual todo arco tiene un vértice en X . Cuando tal apareamiento existe decimos que X es apareado dentro de J . Además, si J_X consiste de esos vértices de J que interceptan un arco del emparejamiento, se dice entonces que X es apareado o empatado a J_X .

Ejemplo 2.1. Sea $S = \{x_1, x_2, \dots, x_6\}$, $A_1 = \{x_1, x_2, x_6\}$, $A_2 = \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$, $A_3 = \{x_2, x_3\}$ y $A_4 = \{x_2, x_4, x_6\}$, entonces si $\mathbf{A} = (A_j: 1 \leq j \leq 4)$, $\nabla[\mathbf{A}]$, se muestra en la figura 12.

El conjunto $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ es un transversal de \mathbf{A} , figura 12(a). Para ver esto solo necesitamos visualizar que $\{x_1, x_4, 2, x_3, 3, x_2, 4\}$ es un apareamiento en $\nabla[\mathbf{A}]$. Análogamente, como $\{x_6, 1, x_2, 3, x_4, 2\}$ es un apareamiento en $\nabla[\mathbf{A}]$, figura 12(b); $\{x_6, x_2, x_4\}$ es un transversal parcial de \mathbf{A} , figura 12(c). Evidentemente \mathbf{A} tiene varios transversales parciales.

Los problemas Scheduling ó asignación de tareas y trabajadores, nos conduce a considerar solamente el conjunto de familia de transversales parciales. Y en el capítulo cuatro se vera una aplicación de este tipo.

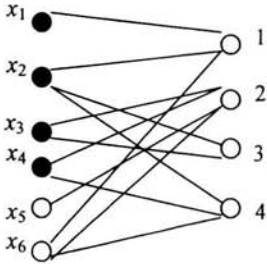


Fig. 12(a) en gris un conjunto transversal de A

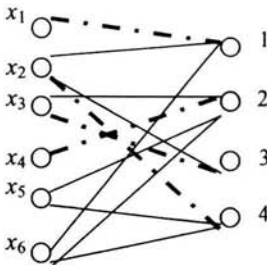


Fig. 12(b) un emparejamiento en $\nabla[A]$

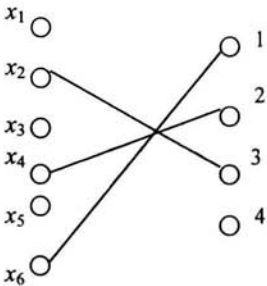


Fig. 12(c) a su vez, es un emparejamiento en $\nabla[A]$ y un transversal parcial de A .

2.1 Teorema.

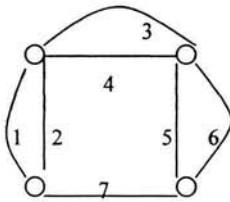
Sea \mathbf{A} una familia de (A_1, A_2, \dots, A_m) de subconjuntos de un conjunto S . Sea \mathcal{I} el conjunto de transversales parciales de \mathbf{A} . Entonces \mathcal{I} es la colección de conjuntos independientes de un matroide sobre S

Demostración. El conjunto vacío es un transversal de la subfamilia nula de A , así (I1) se satisface. Además, si I es un transversal parcial de A e $I' \subseteq I$, entonces I' también es un transversal parcial de A , cumpliendo así con (I2).

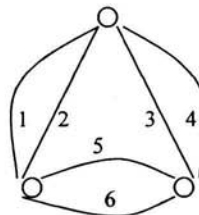
Se probará ahora I para (I3). Suponga que I_1 e I_2 son transversales parciales de A tal que $|I_1| < |I_2|$. Entonces, en $\nabla[A]$, hay un apareamiento W_1 y W_2 que empata a I_1 e I_2 , respectivamente, dentro de J . El color de los arcos $W_1 - W_2$, $W_2 - W_1$ y $W_1 \cap W_2$ son naranja, azul y negro, respectivamente. Sea W la subgráfica de $\nabla[A]$ inducida por aquellos arcos que son naranja o azules. Ahora si $|I_1| = |W_1|$ y $|I_2| = |W_2|$, existe más arcos azules que naranja en W . Ambos, W_1 y W_2 son apareamientos, todo vértice en W tiene grado uno o dos. Todo componente conectado de W es un ciclo o una trayectoria. Además, como W es bipartita, cualquier ciclo es par. Como ningún par de arcos coloreados intersectan a un vértice, hay igual número de arcos naranja y azules en cualquier circuito de W y toda trayectoria par. Ya que W tiene más arcos azules que naranja esta debe tener como componente a una trayectoria impar, P , cuyos primer y último arcos son azules. Sea los vértices de P , en el orden, v_1, v_2, \dots, v_{2k} , claramente v_1 y v_2 pertenecen a S y los otros a J . Se supone que $v_1 \in S$. Ya que v_1 intersecta a un arco azul y no a uno naranja, $v_1 \in I_2 - I_1$. Además $\{v_2, v_4, \dots, v_{2k}\} \subseteq J$ y $\{v_3, v_5, \dots, v_{2k-1}\} \subseteq I_1 \cap I_2$. Ahora se intercambian los colores sobre los arcos naranja y azules de P dejando el resto de la $\nabla[A]$ sin modificar. En la gráfica recoloreada, hay más arcos naranja que antes. Todo vértice en $I_1 \cup v_1$ es el extremo de un arco naranja o negro. Además, este conjunto de arcos naranja y negro forma un apareamiento. Se concluye que $I_1 \cup v_1$ es un transversal parcial de A . Así (I3) se cumple e I es la colección de conjuntos independientes de un matroide.

El *matroide* obtenido sobre el *conjunto de transversales parciales* de A se denotará por $M[A]$. Su *conjunto fundamental* fue denotado por S para evitar confusiones con el conjunto de arcos de una grafo. Si M es un matroide arbitrario y $M \cong M[A]$ para alguna familia de conjuntos de A , entonces llamamos a M un *matroide transversal* y A una *presentación de M* .

Ejemplo 2.2. Sea G_1 y G_2 las gráficas que se muestran en la siguiente figura:



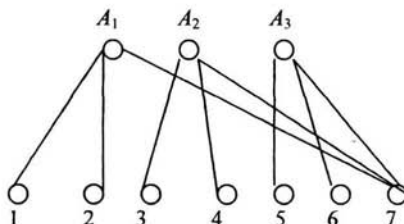
G_1



G_2

Sea $A_1 = \{1,2,7\}$, $A_2 = \{3,4,7\}$ y $A_3 = \{5,6,7\}$. Entonces si $A = (A_j: 1 \leq j \leq 3)$ y $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$; $M[A] \cong M(G_1)$.

Esta es la gráfica bipartita que representa el matroide transversal de la figura G_1 del ejemplo 2.2, anterior.



En contraste, $M(G_2)$ no es transversal. Para comprobarlo, se asume lo contrario, esto es, suponga que $M(G_2) = M[A']$ para cualquier familia de A' de subconjuntos de $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Como $\{1\}$ y $\{2\}$ son independientes pero $\{1,2\}$ es dependiente, existe un miembro único, A_1' , de A' que intercepta a $\{1,2\}$. Además, A_1' contiene a ambos, 1 y 2. De manera similar, A' tiene un único miembro de A_2' intersectando a $\{3,4\}$ y un miembro A_3' que se topa con $\{5,6\}$ y esos miembros contienen a $\{3,4\}$ y $\{5,6\}$ respectivamente. Como $\{1,3\}$, $\{1,5\}$ y $\{3,5\}$ deben ser transversales parciales de A' , los conjuntos A_1' , A_2' y A_3' son distintos. Esto implica que $\{1,3,5\}$ es un transversal parcial de A' ; siendo esto una contradicción. Se concluye que $M(G_2)$ es un transversal.

Algunas veces será conveniente ver los matroides transversales directamente de gráficas bipartitas. Continuando, si ∇ es una *gráfica bipartita* con grupos de vértices S y J , entonces el conjunto de subconjuntos X de S que son empatados con J es precisamente la **colección de conjuntos independientes** de un matroide transversal. Este matroide es $M[A]$, donde A es la familia $(A_j: j \in J)$ de *conjuntos asociados* con ∇ , esto es, $A_j = \{x \in S: xj \in E(\nabla)\}$ para todo j en J .

Considere la gráfica bipartita G con bipartición $S \cup J$. el teorema de Hall nos dice:

Teorema de Hall. G tiene un *apareamiento que cubre a S* si y solo si $|N(X)| \geq |X|$ que satisface $\forall X \subseteq S$, cuando $N(X)$ denota el conjunto de vecinos de X .

Si el apareamiento no existe, uno puede estudiar aquellos subconjuntos S los cuales pueden ser cubiertos por arcos de puntos disjuntos de la gráfica bipartita. Por ejemplo, considere la gráfica bipartita que a continuación se muestra en la figura 12(c) en la que los subconjuntos de S están contenidos dentro del apareamiento el cual contiene a lo más tres elementos del conjunto $\{1,2,3,4\}$. El mejor subconjunto para este ejemplo son solo los conjuntos independientes de el matroide circuito de la gráfica de la figura 12(d)

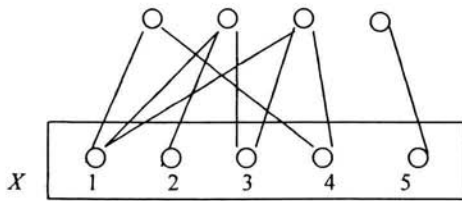


Figura 12(c)

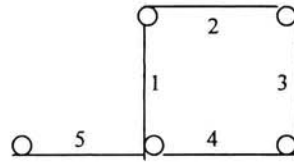
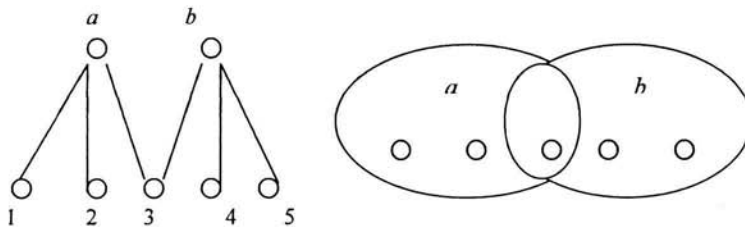


Figura 12(d)

Considere los matroides que se muestran a continuación:



Mientras el conjunto inferior del conjunto de puntos, en color naranja, es considerado el conjunto fundamental S de nuestro matroide, el conjunto superior, en este caso a y b será considerado como el subconjunto A_i de S .

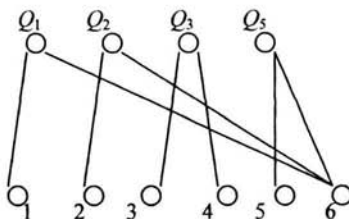
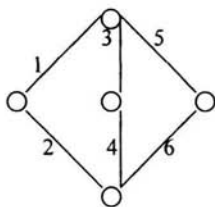
Una representación para estos es la siguiente matriz sobre el campo \mathbb{R} de los reales, donde las x representa las entradas arbitrarias no nulas.

$$M = \begin{pmatrix} x & x & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & x & x \end{pmatrix}$$

2.2 Teorema.

Una transversal $M[\mathbf{A}]$ de rango r puede ser presentada por un conjunto $\mathbf{A}=(A_1, A_2, \dots, A_k)$ con $k=r$. Por lo tanto los subconjunto A_i pueden ser conjuntos de corte de $M[\mathbf{A}]$.

Este teorema menciona que, aunque cualquier matroide transversal $M[A]$ de rango r puede ser presentado por un conjunto $\bar{A}=(A_1, A_2, \dots, A_k)$ consistente en r conjuntos de corte de $M[A]$ uno no puede esperar que estos conjuntos de corte formen un sistema fundamental de conjuntos de corte con respecto a la base de $M[A]$. Si este es el caso $M[A]$ es llamado **matroide transversal fundamental**



2.2 LÁTISES DE PLANOS.

El conjunto de planos de un matroide, ordenados por inclusión, tiene una estructura especial y será generalizada en esta sección. Esta caracterización para matroides ha sido demostrada por varios autores, ver Birkhoff [1967] y, Crapo y Rota [1971].

Un rasgo que derivará del estudio de los planos en una estructura de orden es que estas estructuras no son afectadas por loops y elementos paralelos. Iniciaremos por ver una construcción elemental que remueve loops y elementos paralelos de un matroide. El gráfica simple G^- asociado a G , es obtenido de G al eliminar todos los loops y los arcos paralelos convirtiendo todos los arcos como arcos simples, ver la figura. 13.

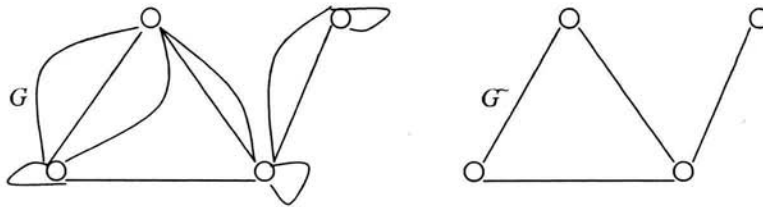


Figura 13.

Observaciones elementales:

- El elemento e es un *loop* de M si y solo si e esta dentro de las *bases* de M .
- Si e_1 no es un loop de M , entonces e_2 es *paralelo* con e_1 si y solo si, para cualquier base B que contenga a e_1 , el conjunto $(B-e_1) \cup e_2$ es también una *base*.

De modo que ninguna base intersecta a un grupo de loops de M . Ahora sea X una clase paralela no trivial (arcos paralelos) de M y, para cada $x \in X$, sea B_x el conjunto de bases de M que contiene a X . Si x y y son elementos distintos de X , entonces $B_x \cap B_y = \emptyset$, pero $\{B-x: B \in B_x\} = \{B-y: B \in B_y\}$. Por lo tanto, si se eliminan todos los loops de M entonces, para cada clase paralela no trivial X , se elimina solo uno de los elementos paralelos. Este matroide será de notado por M^- y será llamado el *matroide simple asociado con M* . Formalmente, el conjunto fundamental de M^- es el conjunto fundamental de todas la clases paralelas de M , mientras que los subconjunto $(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k)$ de estas clases paralelas esta en $I(M^-)$ si y solo si $r_M(X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k) = k$. Evidentemente, para la grafica G que tiene asociada la grafica G^- , tenemos que $(M(G))^- = M(G^-)$.

Ahora se examinará la estructura del conjunto de planos de un matroide.

Un *conjunto parcialmente ordenado* o *poset* es un conjunto P junto con una **relación binaria**, \leq , tal que, $\forall x,y,z \in P$, las siguientes condiciones se cumplen.

- (P1) $x \leq x$.
- (P2) Si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$.
- (P3) Si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

Los poset abundan en matemáticas. Como ejemplo podemos tomar los números reales con la usual relación *menor o igual que*; el conjunto D_n de divisores enteros positivos de un entero positivo n bajo la relación $x \leq y$ si x divide a y .

Dentro de un conjunto parcialmente ordenado P , si $x \leq y$ algunas ocasiones se escribirá como $y \geq x$. Si $x \leq y$, pero $x \neq y$, escribimos $x < y$ ó $y > x$.

Definición. Si $x < y$ y no hay un elemento z en P tal que $x < z < y$, entonces decimos que y cubre a x en P .

Se puede representar a P por un *diagrama de Hasse*. Tal diagrama es una gráfica simple, los vértices corresponden a los elementos de P . En esta gráfica, si $x > y$, entonces el vértice correspondiente a x es un lugar superior al correspondiente a y . Dos vértices x y y están unidos por un arco siempre que x cubra a y . En la figura 14(a) y 14(b) se muestran dos diagramas de Hasse correspondientes al conjunto $\{1,2,3,4\}$ ordenado por inclusión; y el otro correspondiente a D_{24} , el conjunto de los divisores enteros positivos de 24 bajo el orden de divisibilidad se describen aquí.

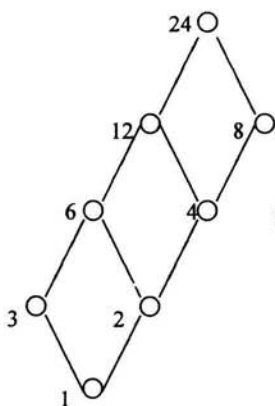


Figura 14(a)

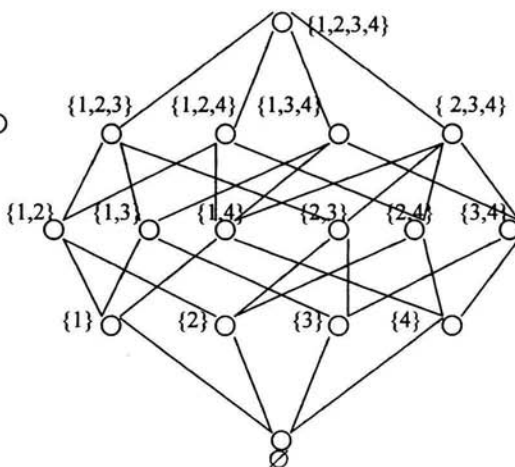
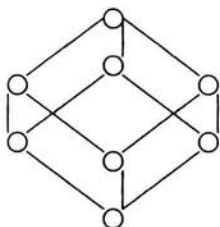


Figura 14(b)

El diagrama de Hasse de la siguiente figura representa un conjunto parcialmente ordenado D_{30} de los divisores enteros positivos, y el subconjunto $\{1,2,3\}$ ordenado por inclusión. Esos subconjuntos son isomorficos.



Definición. Dos posets P_1 y P_2 son *isomorficos* si existe una biyección $\psi: P_1 \rightarrow P_2$, tal que $x \leq y$ cuando y solo cuando $\psi(x) \leq \psi(y)$.

Los poset representados en las tres figuras anteriores son ejemplos de *látises* o *retículos*.

Definición. Un *retículo* o *látis* es un poset L tal que, para todo par de elementos, el *limite inferior* (o ínfimo) y el *limite superior* (o supremo) de el par existe.

Definición. Si x y y son elementos arbitrarios de L , entonces L contiene elementos $x \vee y$ y $x \wedge y$, la *unión* y la *intercepción* de x y y , tal que,

(L1)** $x \vee y \geq x$, $x \vee y \geq y$, y si $z \geq x$ y $z \geq y$, entonces $z \geq x \vee y$; y

(L2)** $x \wedge y \leq x$, $x \wedge y \leq y$, y si $z \leq x$ y $z \leq y$, entonces $z \leq x \wedge y$.

Los diagramas que se muestran en las figuras 14(c) y 14(d) representan conjuntos parcialmente ordenados que no son látises. En el primero, $2 \wedge 3$ no existen; en el segundo, $2 \vee 3$ no existen.

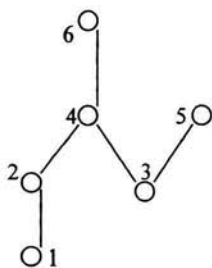


Figura 14(c)

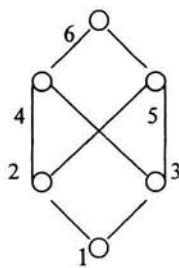


Figura 14(d).

** las operaciones \vee y \wedge son conmutativas y asociativas

Si M es un matroide, entonces $L(M)$ denotará el conjunto de planos de M ordenados por inclusión.

Lema. $L(M)$ es un *látis* y, para todos los planos X y Y de M

$$X \wedge Y = X \cap Y \quad \text{y} \quad X \vee Y = cl(X \cup Y).$$

Para definir una *látis* de planos de un matroide requerimos de la siguiente terminología.

Sea P un conjunto parcialmente ordenado finito. Una *cadena* en P de x_0 a x_n es un subconjunto $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de P tal que $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. La *longitud* de tal cadena es n , y la cadena es *maximal* si x_i cubre a x_{i-1} para todo i en $\{1, 2, \dots, n\}$. Si, para cualquier par $\{a, b\}$ de elementos de P con $a < b$, todas las cadenas maximales de a a b tienen la misma longitud, entonces P se dice que satisface la *condición de cadena de Jordan-Dedekind*.

Los diagramas de Hasse de la figura 15 son todos retículos, pero ninguno es isomorfo al retículo de planos de un matroide.

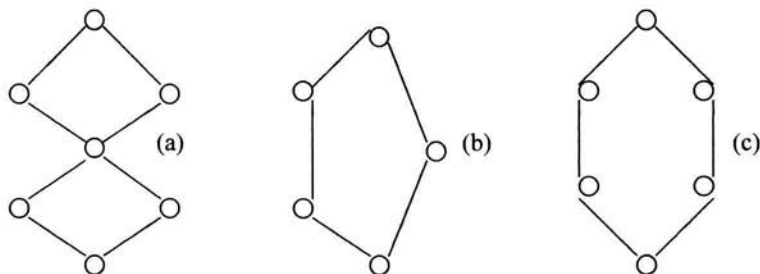


Figura 15

Solamente la figura 15(b) no cumple la condición de cadena de Jordan-Dedekind.

Si el poset P tiene un elemento x tal que, $z \leq x$ para todo $x \in P$, entonces llamamos a z el cero de P y se denota por 0 . similarmente, si P tiene un elemento w tal que, $w \geq x$ para todo $x \in P$, entonces w es denominado el uno de P . El primer poset en la figura 14(a) no tiene ni cero ni uno; el segundo (figura 14(b)) tiene ambos.

Ahora suponga que P es un conjunto parcialmente ordenado que tiene a cero. Un elemento x es llamado un átomo de P si x cubre a 0 . El *rango* o *talla* $h(y)$ de un elemento y de P es la longitud máxima de una cadena de 0 a y . De este modo, en particular, los átomos de P son precisamente los elementos de rango o talla uno.

Cualquier retículo finito tiene un cero y un uno. En particular, para un matroide M , el cero de $L(M)$ es $cl(\emptyset)$, mientras que el uno es $E(M)$.

Definición. Un retículo finito L es llamado **submodular** o **semimodular**, si este satisface la condición de cadena de Jordan-Dedekind y, para todo par x y y de elementos de L

$$h(x)+h(y) \geq h(x \vee y)+h(x \wedge y) \dots\dots\dots(+5)$$

Una **látis geométrica** ó **retículo geométrico** es una *látis semimodular finita* en la cual cualquier elemento es la unión de átomos.

2.3 Teorema.

Un retículo L es **geométrico** si y solo si ste es una **látis de planos de un matroide**.

Demostración. Sea M un matroide. Se comenzará por mostrar que $L(M)$ es geométrica, y para esto, utilizaremos el siguiente lema.

Lema. Si X y Y son planos de un matroide y $X \subseteq Y$, entonces cualquier **cadena maximal de planos de X a Y** tiene **longitud $r(Y)-r(X)$** .

Demostración. Suponga que Y cubre a X . se quiere demostrar que $r(Y) = r(X)+1$. Como $X \not\subseteq Y$, se puede escoger un elemento $x \in X-Y$. Claramente $X \not\subseteq cl(X \cup x) \subseteq Y$. por lo tanto, ya que Y cubre a X , debe tener $cl(X \cup x) = Y$. Pero, (R2)', $r(cl(X \cup x)) = r(X \cup x) \leq r(X) + 1$; por consiguiente, $r(Y) = r(X)+1$ como se requiere.

Esta es una consecuencia inmediata del lema $L(M)$ que satisface la condición de cadena de Jordan-Dedekind. Además, para todos los planos X , $h(X) = r(X)$. Así, para los planos X y Y ,

$$\begin{aligned} h(X) + h(Y) &= r(X) + r(Y) \geq r(X \cup Y) + r(X \cap Y), \text{ por (R3);} \\ &= r(cl(X \cup Y)) + r(cl(X \cap Y)) \\ &= r(cl(X \cup Y)) + h(cl(X \cap Y)) \\ &= h(X \vee Y) + h(X \wedge Y). \end{aligned}$$

Por lo tanto $L(M)$ es una látis semimodular. Si X es un plano y $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ es una base para X , entonces

$$X = cl(\{b_1, b_2, \dots, b_n\}) = cl(\{b_1\}) \vee cl(\{b_2\}) \vee \dots \vee cl(\{b_n\})$$

Ya que, $cl(\{b_i\})$ es un átomo, se concluye que todo plano de M es una unión de átomos y, $cl(\emptyset)$ es la unión del conjunto vacío de átomos. De este modo $L(M)$ es una látis geométrica.

De forma inversa, suponga que L es una látis geométrica arbitraria. Si el cero y el uno de L coinciden, entonces $L \cong L(U_{0,0})$. Ahora suponga que el cero y el uno son distintos.

Entonces L tiene un conjunto no vacío de átomos, si $X \subseteq E$, se define $r(X) = h(\bigvee_{x \in X} x)$. Se mostrará que r es la función de rango de un matroide M sobre un conjunto E cuyas látis de planos de isomorfica a L . Primero, notemos que $r(\emptyset) = 0$, esto es, r satisface (R1)'. Ahora suponga que $X \subseteq E$ y $e \in E$. Entonces,

$$h(X) = h(\bigvee_{x \in X} x) \leq h(\bigvee_{x \in X \cup e} x) = r(X \cup e).$$

Además,

$$r(X \cup e) \leq h(e) - h((\bigvee_{x \in X} x) \wedge e) \leq r(X) + 1$$

De manera que r satisface (R2)'. Finalmente, si $X \subseteq E$ y e y f son elementos de E tales que

$$r(X \cup e) = r(X \cup f) = r(X),$$

entonces

$$\begin{aligned} r(X \cup e \cup f) &= h(\bigvee_{x \in X \cup e \cup f} x) \\ &= h((\bigvee_{x \in X \cup e} x) \vee (\bigvee_{x \in X \cup f} x)) \\ &= h(\bigvee_{x \in X \cup e} x) + h(\bigvee_{x \in X \cup f} x) - h(\bigvee_{x \in X \cup e} x) \wedge h(\bigvee_{x \in X \cup f} x) \\ &\leq r(X) + r(Y) - h((\bigvee_{x \in X} x)) = r(X). \end{aligned}$$

Ahora, r satisface (R3)' y así, por el teorema 1.5 (del capítulo I, apartado 1.2.4) r es la función de rango de un matroide sobre un conjunto E .

Para completar la prueba se necesita mostrar que L y $L(M)$ son conjuntos parcialmente ordenados (posets) isomorficos. Para hacer esto, sea $\psi: L \rightarrow L(M)$ definida por $\psi = \{x \in E: x \leq X\}$. Para ψ , debemos verificar que $\{x \in E: x \leq X\}$ es un plano de M . Si no, existe un elemento y de E tal que $y \not\leq X$ y $r(\{x \in E: x \leq X\} \cup y) = r(\{x \in E: x \leq X\})$. Pero, entonces $h((\bigvee_{x \leq X} x) \vee y) =$

$h(\bigvee_{x \leq X} x)$, y por (+5) deducimos que $y \leq \bigvee_{x \in X} x = X$; esto genera una contradicción. Por lo tanto

ψ es un plano. Ello, claramente preserva el orden uno a uno. Para mostrar el isomorfismo, se supone que Y es un plano de $L(M)$. Debemos mostrar que $Y = \psi(Y')$ cuando $Y = \bigvee_{y \in Y} y$.

Ya que $\psi(Y') = \{y \in E: y \leq Y'\}$, es claro que $\psi(Y') \supseteq Y$. Por otro lado, si $z \in \psi(Y')$, entonces $z \leq \bigvee_{y \in Y} y$. Por lo tanto $h((\bigvee_{y \in Y} y) \vee z) = h(\bigvee_{y \in Y} y)$, esto es, $r(Y \cup z) = r(Y)$, con ello $z \in cl(Y) = Y$.

De modo que $Y \supseteq \psi(Y')$. Se concluye que ψ es isomorfica. Ahora, $L \cong L(M)$ y el teorema es demostrado.

Ejemplo 2.3. Sea $M = M(G)$ donde G es la gráfica que se muestra en la figura 16(a). Una representación geométrica para este matroide se muestra en la figura 16(b) y la látis $L(M)$ se muestra en la figura 17. Es claro ver que el diagrama de Hasse de $L(M)$ puede ser un tanto desordenado aun si M es relativamente pequeño.

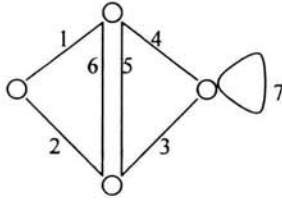


Figura 16(a)

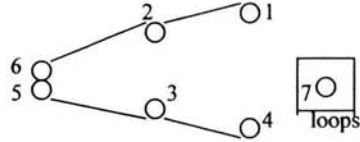


Figura 16(b)

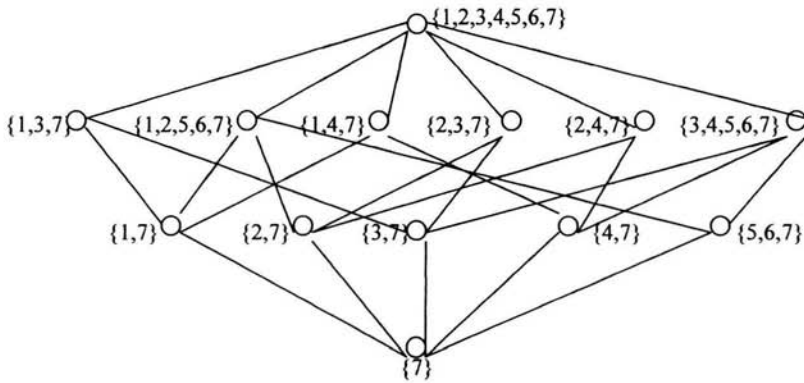


Figura 17.

Teorema.

Una látis finita es isomorfica a la látis de planos de un matroide si y solo si esta es geométrica.

Ejemplo 2.4. Sea G_1 y G_2 las graficas que se muestran en la figura 18. Entonces $G_1 \neq G_2$ y $M(G_1) \neq M(G_2)$, pero $L(M(G_1)) \cong L(M(G_2))$.

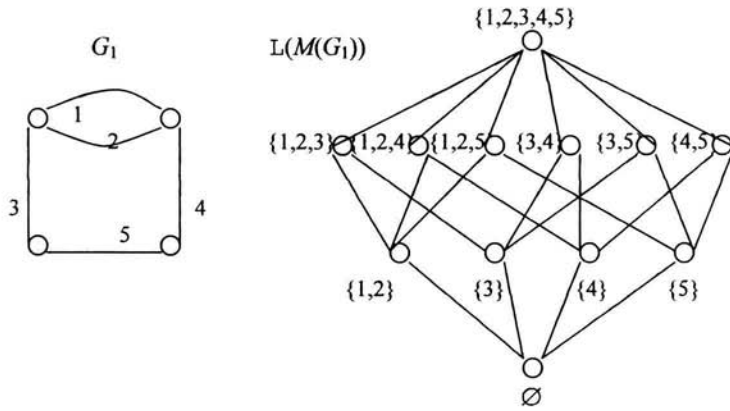


Figura 18.

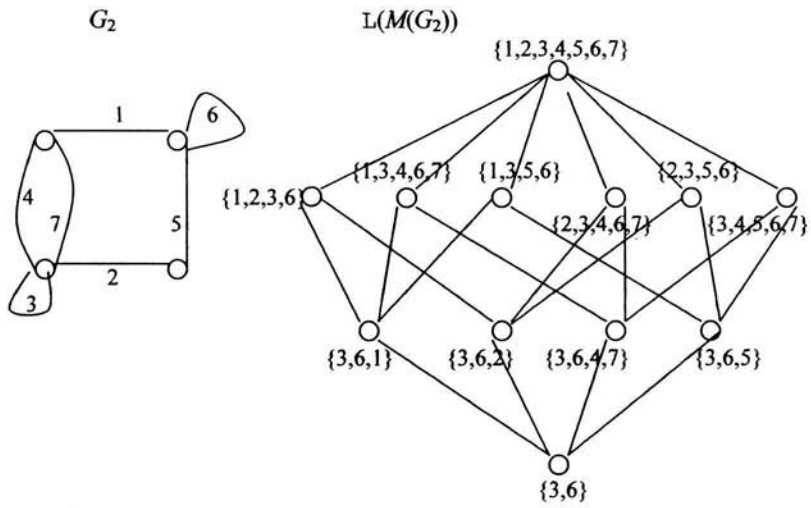


Figura 18.

CAPÍTULO III

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE MATROIDES Y DUALIDAD EN MATROIDES .

En este capítulo se proporcionan las reglas de producción para representar a un matroide de rango inferior a 4 y se expone la relación entre la teoría dual y los matroides.

3.1 REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE MATROIDES DE RANGO ≤ 3 .

Una de los primeros ejemplos para la introducción a los matroides fue el siguiente. Sea F un campo arbitrario, $V(m,F)$ el espacio vector sobre F y E el conjunto de vectores de ese espacio vectorial. Este conjunto permite definir un matroide $M = (E,F)$ como: $X \subseteq E$ es independiente (denotado por $X \in F$) si y solo si la familia de vectores X son linealmente independientes sobre F .

Por ejemplo los vectores $(1,1,0), (1,0,1)$ y $(0,1,1)$ son linealmente dependientes sobre B , los cuales forman un matroide uniforme $U_{2,3}$. Estos mismos vectores son linealmente independientes sobre Q o R formando un matroide libre $U_{3,3}$. independientemente de escoger el campo, el vector cero corresponde a un loop, vectores paralelos (iguales) corresponde a elementos paralelos.

Un matroide $M = (E,I)$ es llamado *coordinatizable* o *representable* sobre el campo F si los vectores apropiados de un espacio vector sobre un campo F pueden jugar el rol de E en la construcción en M . Por ejemplo: $U_{2,4}$ es representable sobre R . Considere los vectores $(1,0), (0,1), (1,1)$ y $(1,2)$ como un ejemplo, pero no sobre B .

La representación de $U_{2,4}$ es entonces:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

se puede probar que el matroide $U_{2,4}$ definido sobre el conjunto $E = \{a,b,c,d\}$ no puede ser representable sobre B ($GF(2)$). Ya que $\{a,b\}$ es una base, una representación podría verse como:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & p & q \\ 0 & 1 & r & s \end{pmatrix}$$

ninguno de los números p,q,r,s puede ser cero (por ejemplo, si $p = 0$, entonces $\{b,c\}$ no es independiente). entonces todos ellos deben ser iguales a otro elemento de B , digamos, iguales a 1. Sin embargo, entonces $\{c,d\}$ no es independiente.

Conforme a lo anterior, podemos obtener que $U_{2,4}$ sea coordinatizable sobre otro campo F diferente de B . Claramente, F tiene al menos un elemento diferente t , que sea diferente de 0 y 1, entonces

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & t \end{pmatrix}$$

es una representación conveniente .

La razón del nombre de representación es clara; todos los elementos de E corresponden a vectores (no necesariamente distintos) y usamos las coordenadas de estos vectores. Si usamos otra base en el espacio vectorial la representación o coordinatización debe ser distinta.

Teorema.

Cualquier matroide grafico es representable sobre cualquier campo.

Un matroide es llamado **regular** si es representable sobre cualquier campo. Por ello los matroides gráficos son regulares. Y por el teorema anterior, también los matroides cograficos son regulares.

Teorema.

Si un matroide es representable sobre un campo entonces también lo será su dual.

La “representación” de matroides, es una visualización para estos. No todos los matroides pueden ser “dibujados”, sin embargo es una herramienta muy útil.

Considere los matroides M_1 , será el matroide uniforme $U_{2,4}$ y M_2 será el matroide circuito la grafica de la siguiente figura:

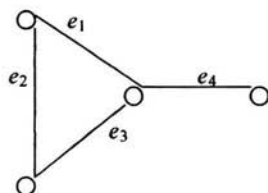


Figura 19.1

ambos matroides , representables sobre el campo \mathbb{R} . Por ejemplo:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{ambas representan a } M_1 \text{ y}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_2' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ambas representan a } M_2.$$

Las cuatro vectores columna de A_1 y los de A_1' son muy diferentes, ver la siguiente de la figura 19.2.

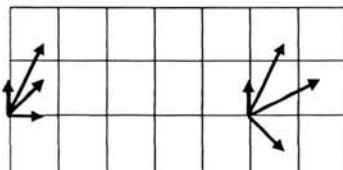


Figura 19.2

Desde el punto de vista de la teoría de matroides ellos acarrear la misma información: tenemos cuatro vectores, dos de los cuales son linealmente independientes y los otros pueden ser expresados como una combinación lineal de estos.

Considérese una línea e "en cualquier posición" en el plano (e no pasa a través del origen y no es paralela a cualquiera de los otros vectores). en lugar de nuestros vectores considérese la intersección de sus líneas con e (fig. 19.3). Los dos resultados son esencialmente el mismo: cuatro puntos distintos sobre una línea, ver fig. 19.4. Este dibujo, no obstante, contiene toda la información de M_1 .

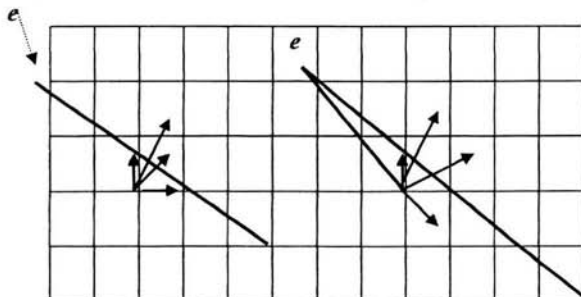


Figura 19.3



Figura 19.4

Análogamente, los cuatro vectores de A_2 y A_2' son diferentes (ver figura 19.5) pero si tomamos un plano E "en cualquier posición" y colocando los vectores consideramos las intersecciones de sus líneas con E (fig. 19.6) entonces los resultados son esencialmente los mismos: cuatro puntos distintos, los primeros son colineales como se aprecia en la figura 19.7. Este dibujo también contiene toda información acerca de M_2 .

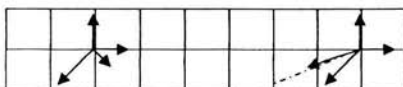


Figura 19.5

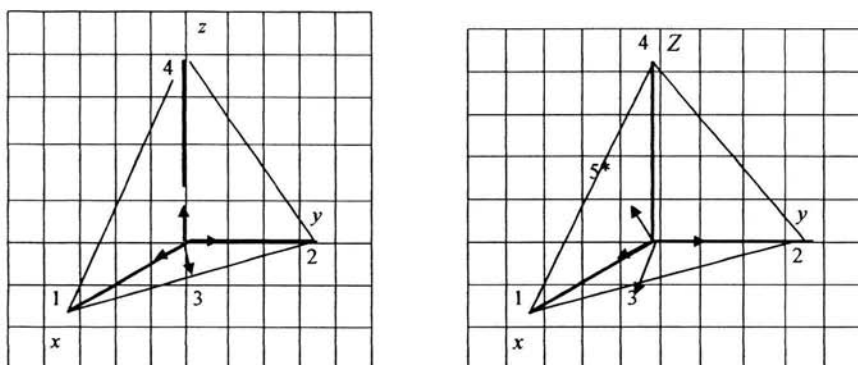


Figura 19.6

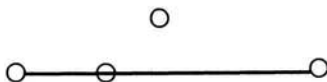


Figura 19.7

En general, estos diagramas son gobernados por las siguientes reglas. Todo loop es marcado dentro de una inserción sencilla. Elementos paralelos son representados por puntos que se tocan, o algunos por puntos sencillos etiquetados para todos los elementos de la clase paralela. Correspondiendo a cada elemento que no es loop ni clase paralela, hay un punto distinto en el diagrama los cuales no tocan otros puntos. Si tres elementos forman un

circuito, los correspondientes puntos son colineales. Asimismo, si cuatro elementos forman un circuito, los puntos correspondientes son coplanares. En tales diagramas las líneas no necesitan ser rectas y los planos pueden ser torcidos. Además, algunas veces para simplificar el diagrama, será mejor listarlos que dibujarlos. Otras veces ciertas líneas con menos de tres puntos serán marcadas como parte de la indicación de un plano o como líneas de construcción. Tales diagramas son llamados **representación geométrica** para el matroide. No debe confundirse el diagrama con el diagrama de una gráfica.

Intentemos ahora visualizar $M(K_4)$. Si escogemos la base $\{1,2,3\}$, ver Figura 19.8 entonces esta puede ser representada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & 0 & e \\ 0 & 1 & 0 & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d & f \end{pmatrix}$$

donde a,b,c,d,e,f números adecuados diferentes de cero. Por ejemplo $\{1,2,4\}$ son un circuito ya que la cuarta columna es una combinación lineal de las dos primeras columnas. Debemos escoger $a = b = c = d = e = f = 1$, los seis vectores de la figura 19.9, y la intersección con el plano generado por la representación se ve en la figura 19.10.

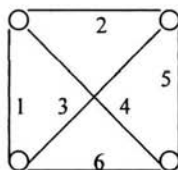


Figura 19.8

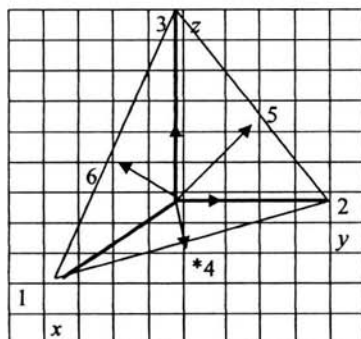


Figura 19.9

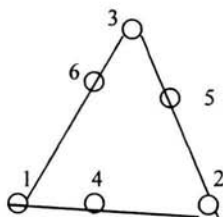


Figura 19.10

Nuestro proceso fallo ya que escogimos a,b,c,d,e,f arbitrariamente, a pesar del requerimiento de

$$\begin{vmatrix} a & 0 & e \\ b & c & 0 \\ 0 & d & f \end{vmatrix} = 0$$

ya que $\{4,5,6\}$ son dependientes en el matroides. Debería escogerse, digamos, $a = b = c = 1$, $d = f = 2$ y $e = -1$, entonces los vectores 4,5 y 6 se convierten en coplanares (ver figura 19.11) y los correspondientes puntos colineales (figura 19.12).

El dibujo de la figura 19.12 pudo haberse hecho mucho más rápidamente si no se consideran las tres dimensiones. Deberíamos simplemente decir que $\{1,2,4\}, \{1,3,6\}, \{2,3,5\}$ y $\{4,5,6\}$ son los circuitos de 3-elementos de $M(K_4)$ los cuales pueden verse trivialmente como se muestran en la figura 19.8. Una ventaja es que si necesitamos un matroide con ciertas características, entonces tal dibujo puede ser hecho independientemente de si el matroide es grafico.

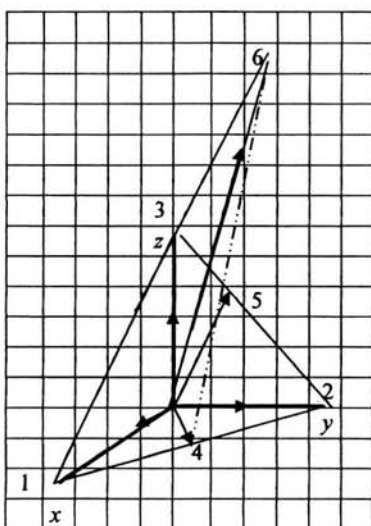


Figura 19.11

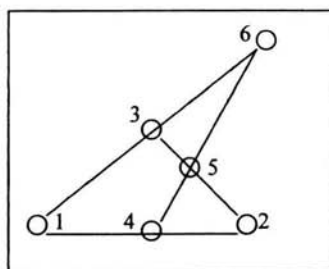


Figura 19.12

Como en teoría de graficas, no necesitamos preocuparnos sobre la posición actual de los puntos, aun la "colinealidad" puede no necesariamente ser una línea recta (ejemplo 3.2).

Ejemplo 3.1. El “Matroide Escher” (Brilanski y Kelly 1980) considera el diagrama de la figura 20(a), las líneas dependientes son $\{1,2,3\}$ y $\{1,4,5\}$ y los planos dependientes $\{1,2,3,4,5\}$ y $\{1,2,3,6,7\}$, y $\{1,4,5,6,7\}$. Con las reglas de los diagramas expuesta anteriormente este diagrama no representa a un matroide sobre $E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Para ver esto, asumimos lo contrario y sea $X = \{1,2,3,6,7\}$ y $Y = \{1,4,5,6,7\}$. Entonces $r(X) = 3 = r(Y)$ y $r(X \cup Y) = 4$. así, por (R3), $r(\{1,6,7\}) = r(X \cap Y) \leq 2$. pero 1,6 y 7 son puntos distintos no colineales, así $\{1,6,7\}=3$; es una contradicción, si hacemos a 1,6 y 7 colineales como en la figura 20(b); el diagrama resultante representa un matroide de rango-4.

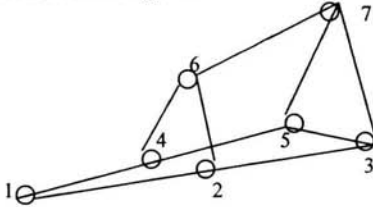


Figura 20(a)

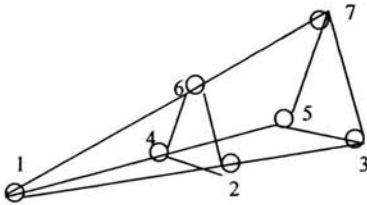


Figura 20(b)

Ejemplo 3.2. El dibujo que se muestra en la figura 21 es una representación de planos proyectivos del conjunto $E = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ de 7-elementos, $PG(2,2)$. Interpretando ese dibujo como diagramas sujetos a las reglas propuestas con anterioridad, no es difícil ver que representa un matroide de rango-3, donde todos los subconjuntos de 3-elementos son bases excepto $\{1,2,3\}$, $\{1,4,7\}$, $\{1,5,6\}$, $\{2,5,7\}$, $\{3,4,5\}$, $\{3,6,7\}$ y $\{2,4,6\}$. solamente 6 de las 7 “colinealidades” se denotan por líneas rectas, $\{2,4,6\}$ esta denotado por un círculo. El plano proyectivo de 7-puntos es llamado *plano de Fano*. El matroide correspondiente, el *matroide de Fano*, es denotado por F_7 o $PG(2,2)$. Este es de fundamental importancia; realmente toda geometría proyectiva juega un importante rol en teoría de matroides.

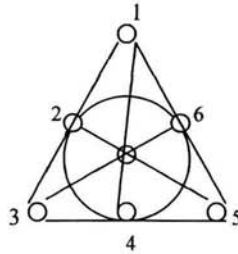


Figura 21 (a)

A continuación se asignará los vectores unidad para los elementos de la base $\{1,2,5\}$, observar la figura 21(a), y se escribirá formalmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & a & 0 & e & x \\ 0 & 1 & 0 & b & c & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & d & f & z \end{pmatrix}$$

Figura 21(b).

Los ceros de las columnas 4,5 y 6 están implicando a las líneas $\{1,2,3\}$, $\{2,5,7\}$ y $\{1,5,6\}$, respectivamente, y todas las letras son diferentes de cero. La línea $\{3,6,7\}$ da la ecuación generada por el determinante de las columnas 4,5 y 6, o sea, $acf + bde = 0$.

El punto 4 esta dentro de las líneas $\{1,4,7\}$, $\{2,4,6\}$ y $\{3,4,5\}$ y proporciona las ecuaciones $cz = dy$, $ez = fx$ y $ay = bx$, respectivamente. Este sistema de ecuaciones homogéneo tiene una solución, diferente de la trivial $x = y = z = 0$, si y solo si el determinante de los coeficientes, esto es, $acf + bde = 0$.

Ya que ninguno de los acf o bde es diferente de cero, su suma y diferencia pueden ser simultáneamente omitidas solamente si la característica del campo es igual a 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 21(c)

La matriz de la figura 21(c) representa al matroide de Fano sobre $GF(2)$.

El diagrama de la figura 22(a) representa el matroide obtenido de F_7 al eliminar el elemento 7. Note que no tiene dibujada la línea que va de 3 a 6 ni a través de 2 y 5 ni de 1 y 4, aunque $\{3,6\}$, $\{2,5\}$ y $\{1,4\}$ sean los planos de rango-2 de el matroide. Tales líneas de 2-puntos son comúnmente omitidas de ese diagrama que son planos de 3-puntos.

Visualizar que $F_7 \setminus 7 \cong M(K_4)$, donde los arcos de la grafica K_4 son denominados como en la figura 22(b)

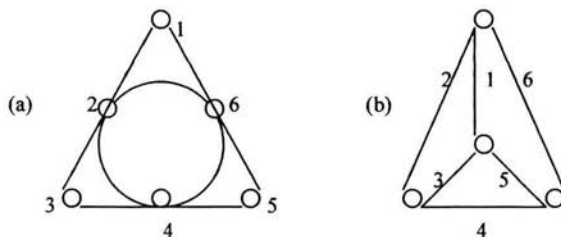


Figura 22

De la misma manera, $F_7 \setminus 2$, para el cual una representación geométrica se muestra en la figura 23, también es isomorfo a $M(K_4)$. En general $F_7 \setminus x \cong M(K_4)$ para toda $x \in E(F_7)$. Este es uno de los muchos atractivos de F_7 .

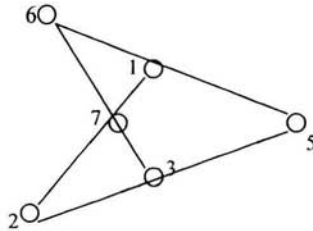


Figura 23

Se han dado las condiciones suficientes y necesarias bajo las cuales un diagrama es una representación geométrica para un matroide simple de rango menor a cuatro, en el cual los planos de rango-1, rango-2 y rango-3 corresponden a los puntos, líneas y planos en el diagrama. Esas reglas son declaradas solo para matroides simples porque claramente sabemos como reconocer loops y elementos paralelos.

A las reglas postuladas con anterioridad se le suman las siguientes *Condiciones de no degeneración*:

- *Cualquier línea contienen al menos dos puntos.*
- *Todo par de puntos distintos se apoyan sobre una línea*
- *Cualquier plano contiene al menos tres puntos no colineales y,*
- *Cualquier conjunto de tres puntos distintos no colineales se constituyen sobre un plano.*

Para un diagrama que tiene menos de un plano la otra condición es:

- (%1) *Cualquiera de dos líneas distintas interceptan a lo más en un punto.*

Para un diagrama que tiene dos o más planos hay tres reglas que se suman a las condiciones de no degeneración

- (%2) *Todo par de planos distintos interceptan (encuentran) a más de dos puntos por consiguiente en una línea.*
- (%3) *Todo par de líneas distintas intersectan en un punto por consiguiente en al menos un punto y se apoyan sobre un plano común; y*
- (%4) *Cualquier línea no constituida sobre un plano ella intercepta en al menos un punto.*

Ejemplo 3.3. El diagrama de la figura 24 obedece a (%1) y es por lo tanto una representación geométrica para un matroide N . Comparando la figura 24 con la representación geométrica para F_7 en la figura 21, vemos que $\{2,4,6\}$ es a la vez circuito e hiperplano en F_7 , considerando que, en N , este conjunto es una base. Decimos que N ha sido obtenido de F_7 por *relajar* el circuito-hiperplano $\{2,4,6\}$. Esta operación puede ser ejercida sobre matroides en general.

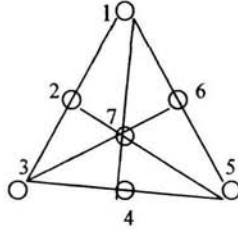


Figura 24

Proposición. Sea M un matroide que tiene un conjunto X que es un *circuito-hiperplano*. Sea $B' = B(M) - \{X\}$. Entonces B' es el conjunto de *bases* de un matroide M' sobre $E(M)$ además,

$$C(M') = (C(M) - \{X\}) \cup \{X \cup e : e \in E(M) - X\}$$

El matroide M' de la pasada proposición es llamando *relajación* de M . De este modo, el matroide N de la figura 7 es una relajación de F_7 , llamamos a este el *matroide no de fano* y es denotado por F_7^- .

Ejemplo 3.4. Los diagramas de la figura 25(a) y 25 (b) obedecen a (%1) y son por lo tanto representaciones geométricas para matroides de rango-3. Estos diagramas son llamados matroide Pappus y matroide no de Pappus, 25(a) y 25(b).; estos provienen de la configuración de Pappus en geometría proyectiva.

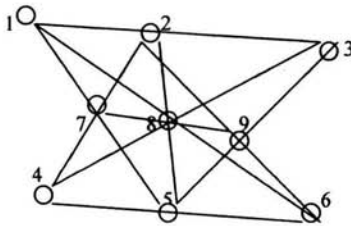


Figura 25(a)

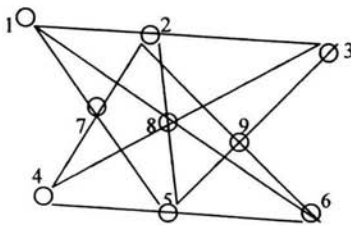


Figura 25(b)

Ejemplo 3.5. La figura 26 contiene otra configuración familiar de geometría proyectiva, la *configuración de Desargues 3-dimensional*. Los puntos, líneas y planos obedecen a $(\%2)-(\%4)$, así que este diagrama es una representación para matroide de rango-4 de 10 elementos. Este diagrama es la representación geométrica para $M(K_5)$

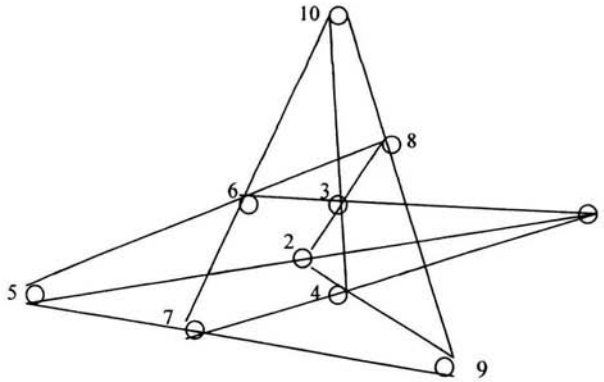


Figura 26.

No es de sorprender que los puntos, líneas y planos son frecuentemente usados en matroides arbitrarios para referirse a planos de rango-1,2 y 3, respectivamente

La eliminación de un elemento de este puede ser obtenida por la restricción del punto correspondiente en el dibujo. Si un elemento x es contraído, el dibujo es proyectado desde el punto, correspondiente a x , a un subespacio en "cualquier posición" y de una dimensión menor. Por ejemplo, la contracción del elemento 1 de F_7 y 6 de $M(K_4)$ de las figuras 21 y 23, respectivamente, se muestran en las siguientes figuras 27(a) y 27(b). Los matroides resultantes son gráficos, y equivalen a los matroides circuito de las figuras 27(c) y 27(d) respectivamente.

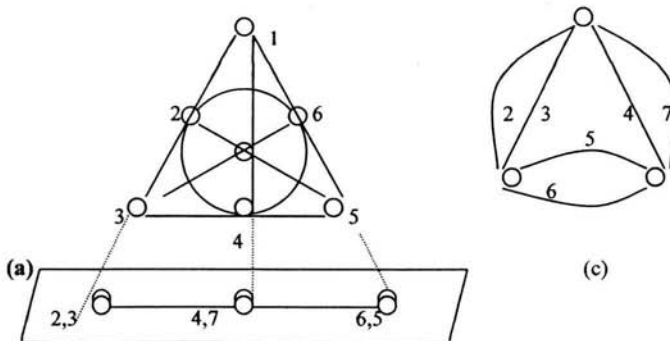


Figura 27

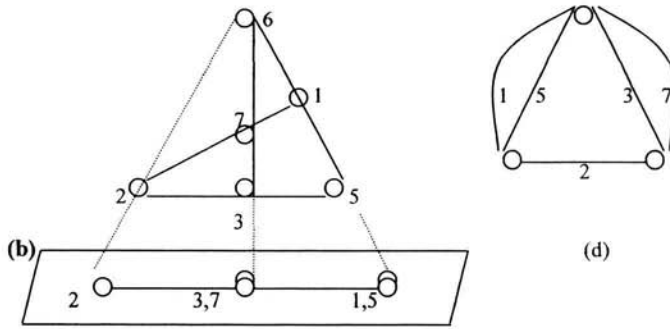


Figura 27.

Las operaciones de eliminación o restricción y contracción de arcos en una gráfica tienen analogías en teoría de matroides.

Como se mencionó en la sección 1.2.3; si M es un matroide sobre un conjunto E y T es un subconjunto de E , entonces el matroide restricción $M \setminus T$ (o también eliminación $M \times T$) es el matroide sobre T (o eliminación de M por T) cuyos circuitos son precisamente aquellos circuitos de M los cuales están contenidos en T , similarmente, el **matroide contracción** $M \cdot T$ (o M / T) es el matroide sobre T cuyos cocircuitos son aquellos cocircuitos de M los cuales están contenidos en T . Cualquier matroide que es obtenido de M por la sucesión de las operaciones de restricción y contracción es llamado **menor de M** .

Sea $M \cdot T$ la contracción de M por T , dada por el matroide:

$$M / T = (M^* \setminus T)^* \dots\dots\dots(\text{ddr})$$

Evidentemente M / T tiene como conjunto fundamental $E - T$.

La restricción para matroides es una extensión de la operación de eliminación en teoría de gráficas:

$$M(G \setminus T) = M(G) \setminus T \dots\dots\dots(\text{ddg})$$

Ejemplo 3.6. Sea $M = M(G)$ donde G es la gráfica planar de la figura 28. Entonces $M(G) / 6 = (M^*(G) \setminus 6)^*$, donde G^* es el dual geométrico de G y cada arco de G^* tienen la misma etiqueta correspondiente a la gráfica G . Así, a partir de (ddr) y (ddg), $M(G) / 6 = (M(G^* \setminus 6))^* = M^*(G^* \setminus 6) = M((G^* \setminus 6)^*)$. Pero, en la figura 28 vemos que $G^* \setminus 6$ tiene como dual geométrica la gráfica $G / 6$ que es obtenida de G por encoger o contraer el arco 6 a un punto. Por lo tanto $M(G) / 6 = M(G / 6)$. Esto ilustra que la operación de contracción para matroides es una generalización de la operación de encogimiento para gráficas.

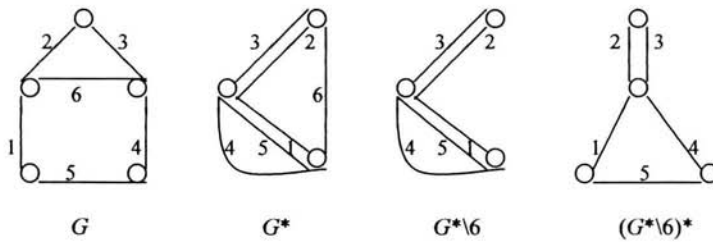


Figura 28. $M(G)/6 = M(G/6)$

Los dibujos en las figuras 19.4, 19.7, 19.10 y 19.12 fueron obtenidos por una proyección del espacio 2- y 3-dimensional a un subespacio de dimensión 1 y 2, respectivamente. Si tales dibujos corresponden a un matroide representable, una forma de construir esa representación para un matroide es el siguiente:

Suponga los matroide M_1 y M_2 dados por los dibujos de la figura 29(a) y 29(b), respectivamente. Imagine sus puntos, por un momento, dentro del espacio de dimensión 1- y 2-, respectivamente, y escribimos sus vectores en un sistema de coordenadas adecuado.

Los vectores son, digamos, $(0,1,2,3,4)$ y $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, respectivamente.

Entonces sumamos un renglón de unos a estas matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ estas son las representaciones}$$

verdaderas de M_1 y M_2 , respectivamente.



Figura 29 (a)

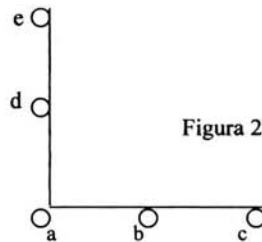


Figura 29(b)

La idea detrás de estos ejemplos es que eliminando el k^{th} renglón de la matriz obtenemos la proyección de los vectores de un subespacio de dimensión $k-1$, ortogonal a el k^{th} eje. El hecho de que el k^{th} renglón contenga elementos no nulos, asegura que el subespacio $(k-1)$ -dimensional lo sea. (por ejemplo, ninguno paralelo a cualquiera de los vectores). Considere ahora el plano $z=1$ en el espacio de tres dimensiones de la figura 30. Si P_1 y P_2 son puntos en este plano, sean u_1 y u_2 los vectores de OP_1 y OP_2 , respectivamente. Si

$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ es una combinación lineal arbitraria entonces sus extremos de v generalmente no estarán sobre el plano, sin embargo, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ si lo estarán.

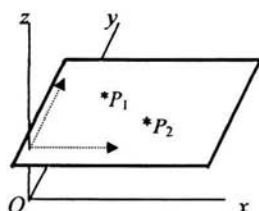


Figura 30.

Definición. Sea $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k\}$ un conjunto de vectores de $V(m, F)$. La combinación lineal $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{v}_i$, donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in F$, se denomina *combinación de afinidad*, donde $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Un conjunto $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k\}$ de vectores de $V(m, F)$. Se denominará *independiente de afinidad o independiente de manera afín*, si $\sum_{i=1}^k \lambda_i \underline{v}_i = \underline{0}$ y $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$, por lo que se desprende que $\lambda_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Equivalentemente, se define un vector $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k\}$ dependiente de manera afín si el conjunto $\{(\underline{v}_1, 1), (\underline{v}_2, 1), \dots, (\underline{v}_k, 1)\}$ es linealmente dependiente en $V(m+1, F)$, donde $(\underline{v}_i, 1)$ es la $(m+1)$ -tupla de elementos de F cuya primera entrada es \underline{v}_i y las restantes son las entradas de 1. Un conjunto de elementos de $V(m, F)$ es independiente de manera afín si este no es dependiente de manera afín.

Proposición. Suponga que E es un conjunto que representa un conjunto de elementos de $V(m, F)$. Sea \mathcal{I} la colección de subconjuntos $X \in E$ tal que X es un subconjunto independiente de afinidad en $V(m, F)$. Entonces (E, \mathcal{I}) es un matroide.

Demostración. Suponga que E representa el conjunto $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k\}$. Entonces, de la segunda definición de dependencia afín, deducimos que $(E, \mathcal{I}) = \mathcal{M}[A]$ donde de A es la matriz de $(m+1) \times n$ sobre el campo F , la i -ésima columna la cual es $(\underline{v}_i, 1)^T$.

El matroide (E, \mathcal{I}) de la última proposición es conocido como el *matroide de afinidad* sobre E , y si M es isomorfo a el matroide decimos que M es *afín sobre F* .

Ejemplo 3.7. Sea E el subconjunto $\{(0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (0,2), (1,1)\}$ de $V(2, \mathbb{R})$ y considere el matroide de afinidad sobre E . Los seis elementos de E pueden ser representados como puntos dentro del plano Euclidiano \mathbb{R}^2 como se ve en la figura 31. No es difícil visualizar que los conjuntos dependientes de M consisten de todos los subconjuntos de E con cuatro o más elementos junto con todos los subconjuntos de 3-elementos, tales que los correspondientes tres puntos en la figura 31 son colineales.

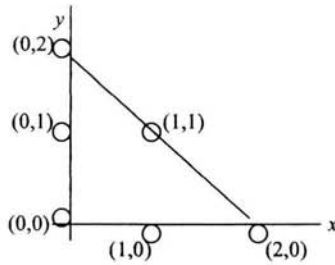


Figura 31

En general, si M es un matroide de afinidad sobre \mathbb{R} de rango $m+1$ donde $m \leq 3$, entonces un subconjunto X de $E(M)$ es dependiente en M si, en la representación de X por puntos en \mathbb{R}^m , existen dos puntos idénticos o tres puntos colineales, o cuatro puntos en un coplanares o cinco puntos en el espacio. Por ello, los planos de M de rango uno, dos y tres son representados geoméricamente por puntos líneas y planos respectivamente. Una representación geométrica típica de matroides afines esta dada en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.8. Considere el matroide afín M sobre el subconjunto E de $V(3, \mathbb{R})$ donde $E = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$. M tiene la representación de la figura 32. En esta figura vemos que los subconjuntos dependientes con menos de 5 elementos son los tres planos $\{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (1,1,0)\}$, $\{(0,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,1,1)\}$, $\{(1,0,0), (1,1,0), (0,0,1), (0,1,1)\}$, así tenemos un camino de representar geoméricamente matroides afinidad de rango menor a cuatro. El siguiente ejemplo muestra como extender el uso de este tipo de diagramas para representar matroides arbitrarios de rango menor a cuatro.

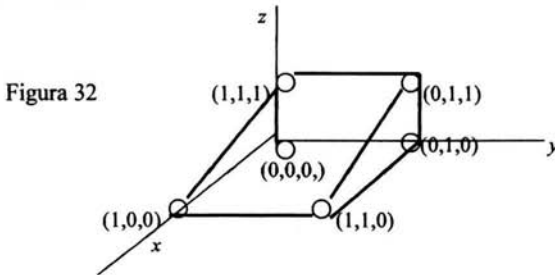


Figura 32

Ejemplo 3.9 El matroide M en el ejemplo 1.1 (matriz A_4 del capítulo I, sección 1.2.1) puede ser representado por el diagrama de la figura 33 en tal diagrama, representamos un circuito de 2-elementos por puntos que se tocan, y un circuito de tres elementos por una línea a través de los puntos correspondientes. Los loops los cuales no pueden ocurrir en un matroide afín, son representados por una inserción como se muestra.

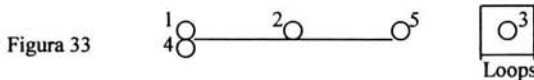


Figura 33

3.2 DUALIDAD.

Esta teoría comprende la noción de ortogonalidad en un espacio vectorial y el concepto de dual planar de una gráfica planar. El concepto de dualidad es de fundamental importancia en la aplicación de los matroides a teoría combinatoria y otros contextos.

Teorema.

Sea M un matroide y $\mathcal{B}^*(M) = \{E(M) - B : B \in \mathcal{B}(M)\}$. Entonces \mathcal{B}^* es el conjunto de bases de un matroide sobre $E(M)$.

Demostración. Para ello nos auxiliaremos del siguiente lema:

Lema. El conjunto \mathcal{B} de bases de un matroide M satisface las siguientes condiciones:

(B2)*. Si B_1 y B_2 son miembros distintos de \mathcal{B} y $x \in B_2 - B_1$, entonces existe un elemento y de $B_1 - B_2$ tal que $(B_1 - y) \cup x \in \mathcal{B}$.

Existe una diferencia entre (B2) y (B2)*.

Primeramente se comprobará el lema. El siguiente corolario se desprende del teorema 1.2 que se encuentra en el capítulo I, sección 1.2.2

Corolario. Sea B una base del matroide M . Si $e \in E(M) - B$, entonces $B \cup e$ contiene un circuito único, $C(e, B)$. Además, $e \in C(e, B)$.

$C(e, B)$ se llama *circuito fundamental de e con respecto a B* .

Entonces por el corolario anterior, $B_1 \cup x$ contiene un circuito único, $C(x, B_1)$. Como $C(x, B_1)$ es dependiente y B_2 es independiente, $C(x, B_1) - B_2$ es no nulo. Sea y un elemento de este conjunto. Evidentemente, $y \in B_1 - B_2$. Además, ya que $(B_1 - y) \cup x$ no contiene a $C(x, B_1)$, este es independiente. Finalmente, como $(B_1 - y) \cup x$ igual número de elementos que B_1 y es independiente, este es una base.

Retomemos la prueba del teorema. Como $\mathcal{B}(M)$ es no nulo, $\mathcal{B}^*(M)$ es no nulo. De modo que $\mathcal{B}^*(M)$ satisface (B1). Ahora suponga que B_1^* y B_2^* son miembros de $\mathcal{B}^*(M)$ y $x \in B_1^* - B_2^*$. Para $i = 1, 2$, sea $B_i = E(M) - B_i$. Entonces, $B_i \in \mathcal{B}^*(M)$ y $B_1^* - B_2^* = B_1 - B_2$. Por (B2)*, como $x \in B_1^* - B_2^*$ hay un elemento y de $B_1 - B_2$ tal que $(B_1 - y) \cup x \in \mathcal{B}(M)$. Por consiguiente, $y \in B_1^* - B_2^*$ y $E(M) - ((B_1 - y) \cup x) \in \mathcal{B}^*(M)$. Pero, $E(M) - ((B_1 - y) \cup x) = (E(M) - B_1) - x \cup y = (B_1^* - x) \cup y$. Concluimos que $\mathcal{B}^*(M)$ satisface (B2). Lo que indica que $\mathcal{B}^*(M)$ es el conjunto de bases de un matroide sobre $E(M)$

El matroide del pasado teorema, con conjunto fundamental $E(M)$ y conjunto de bases es $B^*(M)$, es llamado *dual de M* y es denotado como M^* . Así $B(M^*) = B^*(M)$. Además es claro que:

$$(M^*)^* = M.$$

Ejemplo . Considere $U_{m,n}$. Sus bases son todos los subconjuntos de m -elementos de un conjunto de n -elementos E . Por lo tanto, $B^*(U_{m,n})$ consiste de todos los subconjuntos de $(n-m)$ -elementos de E y así

$$U_{m,n}^* = U_{n-m,n}$$

Las bases de M^* son llamadas *cobases* de M . Una convención similar aplica para distinguir otros subconjuntos de $E(M^*)$. Por ejemplo los circuitos, los hiperplanos, los conjuntos independientes y el conjunto expansión o generado (cerrado) de M^* son llamados *cocircuitos*, *cohiperplanos*, *conjuntos coindependientes*, *conjunto coexpandido o cogenerado* de M . Los siguientes resultados muestran una relación elemental entre esos conjuntos.

3.1 Proposición. Sea M un matroide sobre un conjunto E y suponga que $X \subseteq E$. Entonces

- (i) X es **independiente** si y solo si $E-X$ es **cogenerado**.
- (ii) X es **generado** si y solo si $E-X$ es **coindependiente**.
- (iii) X es un **hiperplano** si y solo si $E-X$ es **cocircuito**, y.
- (iv) X es **circuito** si y solo si $E-X$ es **cohiperplano**.

En general cuando atribuimos el símbolo de asterisco denotamos la asociación con el dual. Así, por ejemplo, r^* denota la *función de rango de M^** mientras C^* denota *conjuntos de circuitos*. Evidentemente

$$r(M) + r^*(M) = |E(M)|.$$

Proposición. Para todo subconjunto X de el conjunto fundamental E de un matroide M ,

$$r^*(M) = |X| - r(M) + r(E-X).$$

Los circuitos de M^* son llamados *conjunto de corte* de M . Ya que cualquier matroide tiene un dual y este dual es único se obtiene el siguiente resultado.

Proposición. Sea X y Y conjuntos de corte en $M = (E, Q)$. Entonces $X \subseteq Y$ implica que $X=Y$. Si $X \neq Y$ y $u \in X \cap Y$ entonces M tiene un conjunto de corte Z con $Z \subseteq X \cup Y - \{u\}$. Además, si B es una base y X un conjunto de corte entonces $X \cap Y \neq \emptyset$.

El elemento $x \in E$ es un *punto o lazo* en el matroide $M = (E, Q)$ si $\{x\}$ es un *conjunto de corte* en M . Esto ocurre si y solo si cuando x es un *loop* en M^* . Si ningún $x, y \in E$ es un punto o lazo y $\{x, y\}$ es un conjunto de corte de M entonces x y y son *elementos en serie* en M si y solo si x y y son *paralelos* en M^* .

Teorema.

Sea \mathcal{C} la colección de circuitos en el matroide $M = (E, \mathcal{C})$. entonces un subconjunto $X \subseteq E$ es un conjunto de corte de M si y solo si

- (Ct1) $X \neq \emptyset$
- (Ct2) $|X \cap Y| \neq 1, \forall Y \in \mathcal{C}$.
- (Ct3) X es minimal.

3.2.1 DUAL DE MATROIDES REPRESENTABLES.

En esta sección se explica que el dual de un matroide representable es F -representable al construir una representación explícita de M^* desde una representación de M .

Sea A una matriz de $m \times n$ sobre el campo F y sea $M[A]$ el matroide vectorial de A . Entonces $M[A]$ tiene como su conjunto fundamental las columnas de A . Sea $M = M[A]$. Entonces M permanece sin cambios si se efectúa cualquiera de las siguientes operaciones elementales sobre A .

- 1ª. Intercambio de dos renglones.
- 2ª. Multiplicar un renglón por un miembro no nulo de F .
- 3ª. Reemplazar un renglón por la suma de ese renglón y otro.
- 4ª. Eliminar el renglón cero (a menos que este sea el único renglón).
- 5ª. Intercambiar dos columnas.
- 6ª. Multiplicar una columna no nula por un miembro no nulo de F .
- 7ª. Reemplazar cada entrada de la matriz por su imagen bajo algún automorfismo de F .

Se asume que la matriz A no es nula. Esta, por una secuencia de las operaciones 1ª - 5ª, uno puede reducir A en una matriz de la forma $[I_r | D]$ donde I_r es la matriz de identidad $r \times r$ y D es cualquier matriz de $r \times (n-r)$ sobre F . Evidentemente $r = r(M)$. La matriz $[I_r | D]$ es llamada *matriz de representación estándar* para M . En el siguiente teorema las columnas de $[I_r | D]$ son nombradas, en orden, e_1, e_2, \dots, e_n como en la figura 30(a) y que la matriz $[-D^T | I_{n-r}]$ tiene sus columnas en el mismo orden, como en la figura 30(b), con $n > r$.

$$\begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{c|c} e_1 e_2 \dots e_r & e_{r+1} e_{r+2} \dots e_n \\ \hline I_r & D \end{array} \right) & & \left(\begin{array}{c|c} e_1 e_2 \dots e_r & e_{r+1} e_{r+2} \dots e_n \\ \hline D^T & I_{n-r} \end{array} \right) \\ \text{(a)} & & \text{(b)} \end{array}$$

Figura 30.

Teorema.

Si M es el matroide vector de $[I_r | D]$, entonces M^* es el matroide vector de $[-D^T | I_{n-r}]$.

3.2 Corolario. Si M es representable sobre el campo F , entonces M^* también es representable sobre F .

Ejemplo. Considere la siguiente matriz A , como se muestra en la figura 31(a) y 31(b). Como se vio en el capítulo anterior, la matriz 31(a) representa el matroide F_7 sobre $GF(2)$. Mientras que la matriz 31(b), es una matriz sobre $GF(3)$, que es la representación del matroide no de Fano (F_7^-). Entonces, por el teorema precedente F_7^* y $(F_7^-)^*$ esta representado por las matrices de la figura 31(a) y 31(b), respectivamente.

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|ccc} I_3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ \text{(a)} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & I_4 \\ -1 & 0 & -1 & \\ -1 & -1 & 0 & \\ -1 & -1 & -1 & \end{array} \right) \\ \text{(b)} \end{array}$$

Figura 31.

3.2.2 DUAL DE MATROIDES GRÁFICOS.

Si G es una gráfica denotamos el dual del matroide circuito de G por $M^*(G)$. Este matroide es llamado *matroide de lazo* o algunas veces *matroide cociclo* de G . Un matroide arbitrario que es isomorfo al matroide de lazo de alguna grafica G es llamado *cográfico*. En esta sección investigaremos los matroides cográficos enfocándonos particularmente en la cuestión de cuando tales matroides son gráficos.

Si X es el conjunto de arcos en una gráfica G , denotaremos por $B \setminus X$ la subgráfica de G obtenida por eliminar todos los arcos de X . Si $G \setminus X$ tiene mas componentes conectados que G , se llamará a X un *corte de arco* de G . Un arco e para el cual $\{e\}$ es un corte de arco es llamado un *arco de corte*. Un corte de arco minimal también será llamado *lazo o cociclo* de G .

Proposición. Sea G una gráfica. Entonces H es un hiperplano en $M(G)$ si y solo si $E(G) - H$ es un conjunto minimal de arcos cuya remoción en G incrementa el número de componentes conectados.

La anterior proposición nos dice que el complemento de un hiperplano en $M(G)$ es un lazo o puente en G . Esta, junto con la proposición 3.1 (capítulo III, sección 3.2) producen la siguiente proposición.

Proposición. Los siguientes enunciados son equivalentes para un subconjunto X de un conjunto de arcos de una gráfica.

- (i) X es un circuito de $M^*(G)$ (X también es llamado *conjunto de corte de M* , denotado por $M = (E, Q)$).
- (ii) X es un cocircuito o conjunto de corte de $M(G)$
- (iii) X es un lazo o puente de G .

Para una gráfica arbitraria G , los circuitos de $M(G)$ son los conjuntos de arcos de los ciclos de G , mientras los circuitos de $M^*(G)$ son el conjunto de arcos lazo (o conjunto de corte). Si v es un vértice de G y X es el conjunto de arcos que se interceptan en v , entonces X es un corte de arco. Si X es corte de arco minimal, llamamos a este un *vértice de lazo* de G .

Ejemplo. Si H es la gráfica que se muestra en la figura 32, entonces los vértices lazo son $\{e_3\}$, $\{e_1, e_4\}$ y $\{e_2, e_4, e_5\}$. Evidentemente, aunque $\{e_1, e_2, e_3, e_5\}$ es el conjunto de se interceptan en v_2 , este no es un lazo. Además, no es difícil ver que $M(H) \cong M^*(G)$ donde G es la gráfica del ejemplo 1.2 del capítulo I, sección 1.2.1

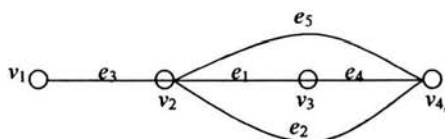


Figura 32.

Los matroides del anterior ejemplo tienen la propiedad de que su dual también es gráfico. En la pasada sección dijimos que el dual de un matroide representable es siempre representable. Ahora y para finalizar este apartado daremos las condiciones para que el dual de un matroide gráfico sea gráfico. El siguiente resultado indica que esto no necesariamente ocurre e indicamos como respuesta para este problema la siguiente proposición.

Proposición. Ningún $M^*(K_5) \circ M^*(K_{3,3})$ es gráfico.

Esta proposición es una reminiscencia del teorema de Kuratowski para gráficas planares.

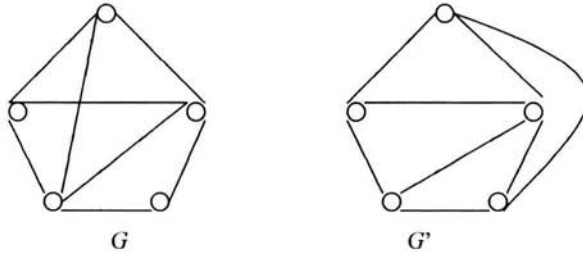
Teorema de kuratowski. Una gráfica G es planar si y solo si esta no contiene subgráficas homeomorfas de K_5 y $K_{3,3}$.

Más formalmente, una gráfica plana G es una gráfica dibujada en el plano Euclidiano de modo que los vértices son puntos en el plano, los arcos son curvas de Jordan, y dos arcos distintos no se interceptan o cruzan excepto posiblemente en sus extremos. Una

gráfica G es planar si esta es isomorfa a una gráfica plana G' . Bajo esta circunstancia, tal gráfica G' es llamada *encajamiento* o *incrustación planar* de G .

Las regiones que se forman dentro de la gráfica plana se denominan *caras* de G , más estrictamente las podemos definir como sigue: Suponga que P es el conjunto de puntos del plano que no son vértices de G y no se sitúan sobre los arcos de G . Dos puntos x y y de P están en la misma cara de G si existe una curva de Jordan que una a x y y . Una gráfica plana tiene exactamente una cara sin fronteras, y se denomina a esta como *cara infinita*.

Es fácil ver que las gráficas K_5 y $K_{3,3}$ no son planares pero que cualquier subgráfica propia de ellas lo es. Y para apreciar mejor esto veamos el siguiente ejemplo.



Por ultimo, el siguiente teorema permite establecer cuando una gráfica cualquiera G su matroide de lazo es gráfico.

Teorema.
 Si G es planar, entonces $M^*(G)$ es gráfico.

Para comprender esto y concluir con esta sección veamos un ejemplo donde se construye una gráfica cuyo matroide ciclo es isomorfo a $M^*(G)$. Se ilustra esta construcción con la figura 33. Las figuras 33(a) y 33(c) muestran la gráfica planar de G y su *dual geométrico* G^* . En (b), G y G^* han sido superpuestos o encajados para mostrar que G^* es formado al tomar un vértice por cada cara de G y unir dos de tales vértices cuando la caras correspondientes comparten un arco. Los arcos de G^* son dibujados como cruces de los arcos correspondientes de G . La gráfica G' en (d) es un encajamiento diferente de G^* .

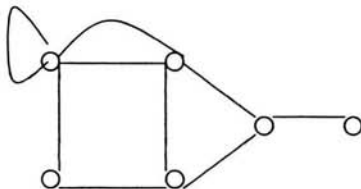


Figura 33 (a) G .

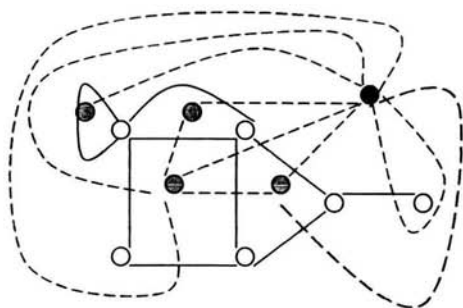


Figura 33 (b)

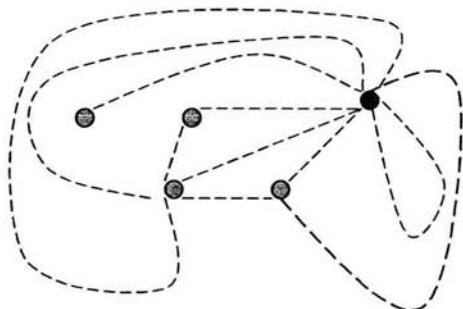


Figura 33 (c) G^*

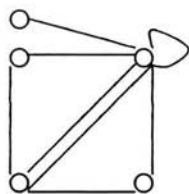


Figura 33 (d) G'

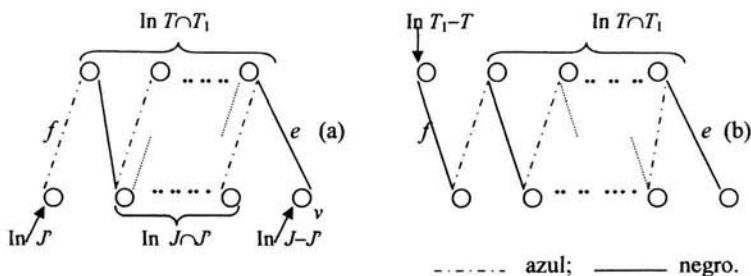
3.2.3 DUAL DE MATROIDES TRANSVERSALES.

Para finalizar este capítulo identificaremos la clase dual de matroides transversales siendo esta una clase de matroides que se derivan de gráficas dirigidas. Comenzamos por dar algunos resultados técnicos de matroides transversales.

Sea \mathbf{A} una familia $(A_j; j \in J)$ de conjuntos y sea $M = M[\mathbf{A}]$. El rango $r(M) \leq |J|$.

3.1 Lema. Sea \mathbf{A} una familia de (A_1, A_2, \dots, A_m) de subconjuntos de un conjunto E y suponga que T , un transversal parcial de \mathbf{A} , es un transversal de $\mathbf{A}' = (A_1, A_2, \dots, A_t)$, donde $t < m$, entonces cualquier transversal parcial de \mathbf{A} es un transversal de \mathbf{A}' .

Demostración. Sea $\nabla[A]$ una gráfica bipartita asociada con A . Sea $J = \{1, \dots, m\}$ y $J' = \{1, 2, \dots, t\}$. En $\nabla[A]$, hay un apareamiento de T sobre J . El color de los arcos de este emparejamiento es azul. Ahora suponga que hay un transversal parcial maximal de T_1 a J . Se escoge un apareamiento tal que este intercepte varios vértices de J como sea posible, y el color de los arcos de este emparejamiento es negro. Note que algunos arcos pueden estar coloreados con ambos colores. Como T y T_1 ambos están en las bases de $M[A]$, $|T| = |T_1|$. Además, T_1 no es un transversal de A' y por lo tanto, para cualquier v en $J - J'$, hay un arco negro e interceptando a v . Sea P una trayectoria de arcos coloreada empezando en v que tiene longitud máxima entre tales trayectorias. El primero de los arcos en esta trayectoria es e y este e es de color negro. Puesto que ambos arcos, negro y azules, forman apareamientos, los arcos de P son alternados y ningún arco es negro y azul. Sea el último arco de P , f , de modo que f es azul o negro. Suponga la forma de la figura 33 (a). Se intercambian los colores sobre los arcos de P . Entonces, en la nueva coloración de $\nabla[A]$, todavía los arcos negro emparejan a T_1 sobre J . Pero este nuevo apareamiento negro intercepta más vértices de J' que el emparejamiento negro original; siendo esto una contradicción. Concluimos que f es naranja. Así P tiene más arcos negro que azules (figura 33(b)). Otra vez intercambiamos los colores sobre los arcos de P , esta vez se ve a los arcos azules de la gráfica recoloreada. Ellos aun forman un apareamiento, pero este apareamiento tiene $|T| + 1$ arcos. Esto contradice de que T es un transversal parcial maximal de A . Por lo tanto se finaliza la prueba del lema



El lema indica que si M es un matroide transversal sobre un conjunto E , cuyos conjuntos independientes son los transversales parciales de una familia A de subconjuntos de E , entonces A es llamado una *presentación* de M , en otras palabras, M tiene una presentación A que tiene exactamente $r(M)$ subconjuntos o miembros, y por consiguiente, r número de trayectorias disjuntas $\{P_x: x \in X\}$ en una digráfica arbitraria G .

3.4 Teorema.

Sea G una gráfica dirigida con conjunto de vértice V y sea B_0 un subconjunto de V . Entonces $L(G, B_0)$ es el conjunto de conjuntos independientes de un matroide cotransversal sobre V . Inversamente, dado cualquier matroide cotransversal M sobre un conjunto V y cualquier base B_0 de M , existe una gráfica dirigida G teniendo conjunto de vértices V tal que M tiene $L(G, B_0)$ como su conjunto de conjuntos independientes.

Para explicar el teorema **(D1)** nos apoyaremos en la siguiente ejemplo.

Se comienza por introducir nuevos conceptos. Suponga que G es una gráfica dirigida o *dirigida* y X y Y son subconjuntos de el conjunto de vértices V . Decimos que X está *ligado* a Y si $|X|=|Y|$ y existen $|X|$ trayectorias dirigidas disjuntas cuyo vértice inicial está en X y finaliza en Y , se denota al conjunto de trayectorias dirigidas por $\{P_x: x \in X\}$. Puede suceder que tales trayectorias consistan de solo un vértice aislado. Si $Z \subseteq V$, entonces se dice que X está *ligado dentro* de Z si X está ligado a algún subconjunto de Z . Ahora sea B_0 un subconjunto de V , y se denota por $L(G, B_0)$ esos subconjuntos de V que están ligados a B_0 . $L(G, B_0)$ es el conjunto de conjuntos independientes de un matroide sobre V .

Sea G la siguiente gráfica y G^- la gráfica bipartita construida a partir de G ; ver figura 34. Comenzamos esta construcción por hacer una copia disjunta V^- de V . Para cada elemento v de V , se denota por v^- los correspondientes elementos de V^- . El conjunto de vértices de G^- es $V \cup V^-$. Este conjunto de arcos es $\{vv^-: v \in V\} \cup \{vu^-: (u,v) \in E(G)\}$, los arcos en negro (líneas punteadas) representan a vv^- y los arcos en azul (líneas continuas) representan a vu^- .

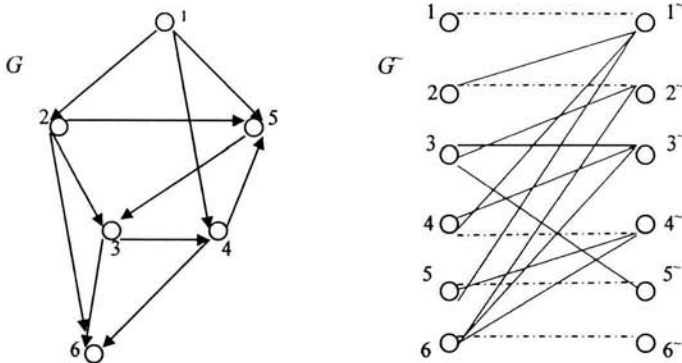


Figura 34

El siguiente lema sustenta a él teorema **(D1)** que caracteriza a los duales de matroides transversales.

3.4 Lema. Suponga que X y Y son subconjuntos de V . Entonces X es *ligado a* Y si y solo si $V-X$ es un *apareamiento* a $V^- - Y^-$ en G^- .

Ahora bien, se supone que el conjunto $\{P_x: x \in X\}$ de trayectorias dirigidas disjuntas en G liga a X con Y . Se define un mapeo ψ de $V^- - Y^-$ sobre $V - X$. Ya que $\{P_x: x \in X\}$ son disjuntas, ψ será definido como función uno a uno. Además, de las definiciones de G^- y ψ , $\{\psi(u^-)u^-: u^- \in V^- - Y^-\}$ es un subconjunto de $E(G^-)$ y los arcos de este subconjunto aparean a $V - X$ con $V^- - Y^-$.

$$\psi(u^-) = \begin{cases} v, & \text{si } u \text{ esta sobre una de las trayectorias } \{P_x: x \in X\} \text{ y } v \text{ es su sucesor sobre esta trayectoria.} \\ u, & \text{si } u \in V-X \text{ pero } u \text{ no esta sobre ninguna de las trayectorias } \{P_x: x \in X\} \end{cases}$$

Ilustraremos la construcción del conjunto de trayectorias $\{P_x: x \in X\}$ refiriéndonos a la figura 34. Se toma el apareamiento en G^- que se muestra en la figura 35(a). Entonces, $X = \{1,2,6\}$ y $V-X = \{3,4,5\}$ y $Y = \{1,5,6\}$ y $V-Y = \{2,3,4\}$. El color de los arcos en este apareamiento es azul. Además, todos los arcos de color negro vv^- para $v \in V$ y nuestro apareamiento forman la figura 35(b). Como $X = \{1,2,6\}$ y $Y = \{1,5,6\}$, 1 y 6, ambos están dentro de $X \cap Y$, así P_1 y P_6 consisten en vértices simples 1 y 6, respectivamente. Por otro lado, P_2 es $22^-33^-44^-55^-$, así P_2 es 2345, la figura 35(c) muestra las tres trayectorias disjuntas P_1, P_2 y P_6 en G^- .

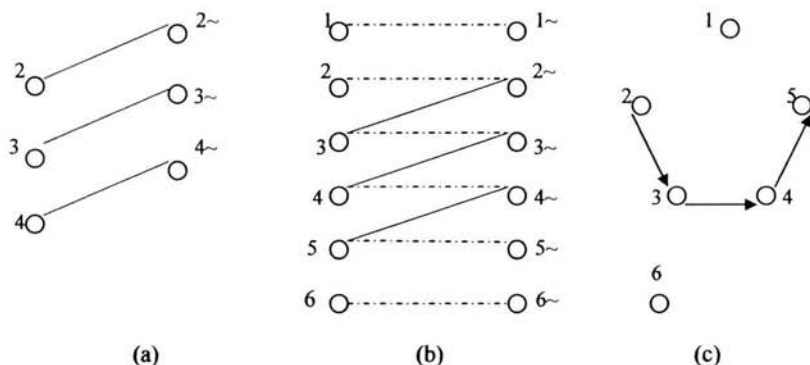


Figura 35.

Ahora, se ejemplificará la operación inversa. Una vez más se tomará como referencia nuevamente a la figura 34. Sea $X = \{1,4\}$ y $Y = \{6,3\}$. Las trayectorias ligadas X y Y se muestran en la figura 36(a). Entonces $\psi(1^-) = 2$, $\psi(2^-) = 6$, $\psi(4^-) = 5$ y $\psi(5^-) = 3$, así el apareamiento de $V^- - Y^-$ a $V-X$ se muestra en la figura 36(b).

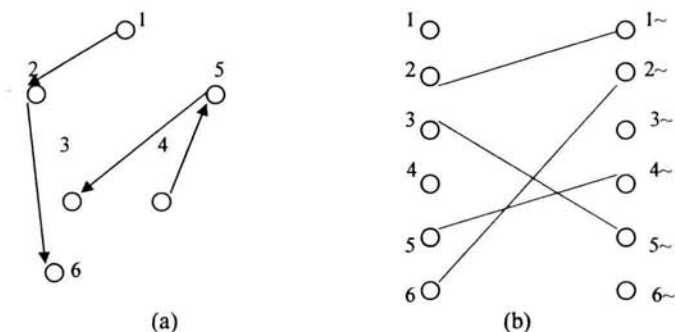


Figura 36

Demostración del teorema. Dada una gráfica dirigida G , se construye la correspondiente gráfica bipartita G^- . Por el anterior lema, es un miembro maximal de $L(G, B_0)$, si y solo si $V-B$ es apareado a $V^- - B_0^-$ en G^- . Sea G_1^- la subgráfica de G^- inducida por eliminar los vértices de B_0 . Entonces $V-B$ es empatado a $V^- - B^-$ en G_1^- si y solo si B es un miembro maximal de $L(G, B_0)$. Pero los subconjunto de B que son empatados a $V^- - B_0^-$ son precisamente las bases de un matroide transversal N sobre V y las afirmación es que las cobases de B son los miembros maximales de $L(G, B_0)$. De modo que $L(G, B_0)$ es la familia de conjuntos independientes del matroide cotransversal N^* sobre V .

Ahora sea N un matroide transversal sobre V y sea $V-B_0$ una base de N . Entonces, por el lema 3.1, $N = M[A]$ para cualquier familia A de conjuntos que tiene como transversal a $V-B_0$. Sea $\nabla[A]$ la gráfica bipartita asociada con A donde $(A_j; j \in J)$. Esta grafica contiene un emparejamiento $V-B_0$ sobre J . Si $j \in J$ y j es unido a v dentro de este emparejamiento, se reetiqueta a j como v^- . Entonces, para cada u en B_0 , se suma un nuevo vértice u^- a $\nabla[A]$ uniendo este vértice a u y no otros. La gráfica resultante es de la forma G^- para cualquier gráfica dirigida G . además, usando una vez más el lema 3.4 N^* tiene $L(G, B_0)$ como su colección de conjuntos independientes.

Dada una gráfica dirigida G y un conjunto B_0 de su conjunto de vértices, el matroide que tiene $L(G, B_0)$ como su colección de conjuntos independientes es llamado un **gamoide estricto**.

Corolario. Un matroide es estrictamente un gamoide si y solo si su matroide dual es transversal.

Ejemplo. Sea G_1 la gráfica de la figura 37(a), sea $B_0 = \{1, 2, 3\}$. Entonces no es difícil verificar que $L(G_1, B_0)$ tienen las representaciones geométricas de la figura 37(b).

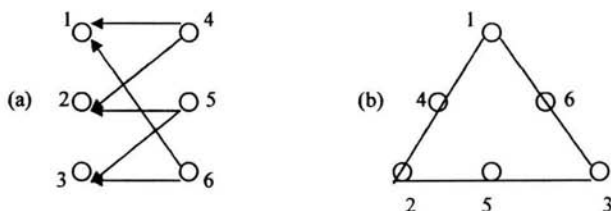


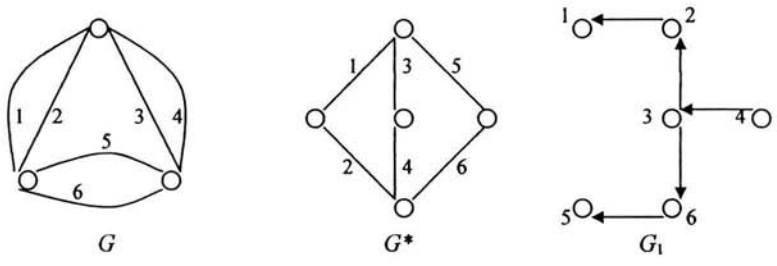
Figura 37.

Ya que cualquier matroide uniforme es transversal y tiene un dual uniforme, entonces todo matroide uniforme es estrictamente un gamoide.

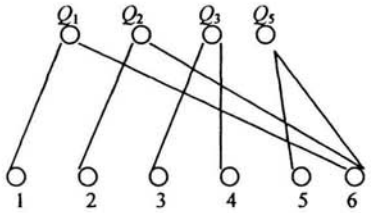
De modo que, por el corolario 3.2 (capítulo III, sección 3.2.1), el dual de un matroide F -representable es F -representable, cualquier gamoide estricto es F -representable sobre un campo suficientemente grande.

Como se mostro en el ejemplo 2.2 (capítulo II, sección 2.1) la gráfica planar G que a continuación se muestra no es transversal. Con ello, $M(G^*)$ no es un gamoide estricto,

donde G^* es el dual geométrico de G (dibujo (b)). Note, sin embargo, que $M(G)=L(G_1, B_0)$ donde G_1 es la gráfica (c) y $B_0 = \{1,5\}$. Así, $L(G, B_0)$ es un gamoide estricto cuyo dual no es un gamoide estricto de manera que $M(G^*)$ es un matroide transversal cuyo dual no es transversal.



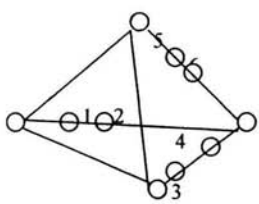
El matroide transversal correspondiente a la gráfica G^* a su vez es un matroide circuito. Además, por el teorema (T2) (capítulo II, sección 2.1) este podría ser un matroide transversal fundamental, sin embargo, al proponer a $\{1,2,3,5\}$ como una base se obtiene la gráfica bipartita que a continuación se muestra, por consiguiente también $\{3,4,5,6\}$ tendría que ser independiente.



la matriz representativa de este matroide es:

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

donde los asteriscos representan algebraicamente los transversales independientes. La representación geométrica de esta matriz es:



CAPÍTULO IV

ALGUNAS APLICACIONES.

En este capítulo, se considera otra caracterización para matroides. Lo interesante de esto es que indica claramente por qué los matroides se aplican naturalmente a problemas de optimización combinatoria.

4.1 ALGORITMO GLOTÓN PARA MATROIDES.

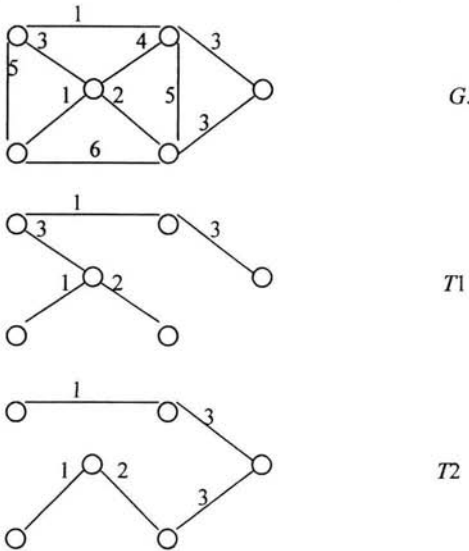
Se comienza aproximándonos a problemas de optimización en gráficas.

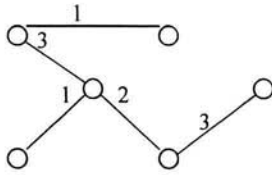
Sea G una gráfica conectada y suponga que w es una función de $E(G)$ en \mathbb{R} . Se llama a w una **función de peso sobre G** y, para todo $X \subseteq E(G)$, se define el **peso $w(X)$** de X por $\sum_{x \in X} w(x)$. Para la gráfica G y w , el problema es encontrar el árbol de expansión de G de peso mínimo. Por instancia, G podrá ser K_n donde los vértices de K_n corresponden a poblaciones que son enlazadas por una red ferroviaria y el peso sobre cada arco es el costo de proveer un enlace directo entre poblaciones correspondientes a los extremos (vértices) de sus arcos. En este caso, el peso mínimo de un árbol de expansión en G corresponde a el costo mínimo de proveer una red ferroviaria que enlace a las n poblaciones.

El algoritmo de Kruskal [1956] resuelve este problema escogiendo un arco a la vez en cada fase, el siguiente arco e que se escoge es uno de peso mínimo tal que

- i) e no ha sido previamente escogido
- ii) e no forma un ciclo con algún conjunto de arcos previamente seleccionados.

Ejemplo 4.1.1 Sea G la gráfica de la figura 37 cuyo peso se muestra sobre los arcos. No es difícil ver que el algoritmo de Kruskal producirá uno de los árboles de expansión T_1 , T_2 y T_3 . Los cuales son obtenidos tras haber escogido dos arcos de peso igual a tres.





T3

Figura 37.

El problema de árbol de expansión de peso mínimo es un caso especial del siguiente problema de optimización (Bixby 1981). Sea I la colección de subconjuntos de un conjunto E y suponga que I satisface (I1) e (I2). Sea w la función de E en \mathbb{R} . Como antes, definimos el peso $w(X)$ por todo subconjunto no nulo X de E por:

$$w(X) = \sum_{x \in X} w(x) \quad \text{donde } w(\emptyset) = 0.$$

El problema de optimización para el par (I, w) es el siguiente:

(%5) Encontrar un **miembro maximal** B de I de **peso máximo**.

Se llama a este conjunto B una solución para este problema. Si se reemplaza la función de peso w por su inverso y se resuelve el problema de optimización para $(I, -w)$, entonces se obtiene un miembro maximal B' de I para el cual $w(B')$ es mínimo. Por lo tanto, siendo I la colección de conjuntos independientes en $M(G)$ donde G es un grafo conectado, vemos que el problema del árbol de expansión de peso mínimo es un caso especial de (%5).

El **algoritmo Glotón (de Greedy)** para el par (I, w) es:

- (i) conjunto $X_0 = \emptyset$ y $j = 0$.
- (ii) Si $E - X_j$ contiene un elemento e tal que $X_j \cup e \in I$, escogiendo un elemento e_{j+1} de peso máximo, sea $X_{j+1} = X_j \cup e_{j+1}$, e ir a (iii); si no ir a (iv).
- (iii) Sumar 1 a j , e ir a (ii).
- (iv) Parar.

4.1 Lema. Si (E, I) es un matroide M , entonces B_G es la solución del problema de optimización (%5).

Demostración. Si $r(M) = r$, entonces $B_G = \{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ y B_G es una base de M . Sea B otra base de M , se dice que $B = \{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ donde $w(f_1) \geq w(f_2) \geq \dots \geq w(f_r)$. Para probar 4.1 se utiliza el siguiente lema que muestra que B_G no solo es una base de peso máximo de M .

Lema . Si $1 \leq j \leq r$, entonces $w(e_j) \geq w(f_j)$.

Demostración. Se supone lo contrario y sea k el entero menor para el cual $w(e_k) < w(f_k)$. Se toma $I_1 = \{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}\}$ e $I_2 = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$. Ahora $|I_1| < |I_2|$, (I3) implica que $I_1 \cup f_i \in \mathcal{I}$ para cualquier $f_i \in I_2 - I_1$. pero $w(f_i) \geq w(f_k) > w(e_k)$. Dentro del algoritmo Glotón se tiene que escoger a f_i en vez de e_k . Esta contradicción completa la prueba del anterior lema y con ello del lema 4.1.

De la combinación de los dos lemas anteriores, se deduce que el algoritmo de Kruskal produce un árbol de expansión de peso mínimo en una gráfica conectada G . Se remarca así que si G tiene n vértices, un árbol de expansión de G tiene $n-1$ arcos .

Teorema.

Sea \mathcal{I} una colección de subconjuntos de un conjunto E . Entonces (E, \mathcal{I}) es un matroide si y solo si \mathcal{I} cumpla con las siguientes condiciones:

- (I1) $\emptyset \in \mathcal{I}$
- (I2) Si $I \in \mathcal{I}$ e $I' \in \mathcal{I}$, entonces $I \cap I' \in \mathcal{I}$
- (G) Para toda función de peso $w: E \rightarrow \mathbb{R}$, el algoritmo Glotón produce un miembro maximal de \mathcal{I} de peso máximo.

La prueba del último teorema ha sido publicada por numerosos autores. Pero el primero en utilizar el termino de “matroide” fue Burovka en el año de 1926, precediendo tanto a van der Wearden y a Whitney.

Demostración. Si (E, \mathcal{I}) es un matroide, entonces (I1) e (I2) ciertamente se cumplen, por el lema 4.1, también se satisface (G). Ahora suponga que \mathcal{I} satisface (I1), (I2) y (G). Se probará ahora que \mathcal{I} satisface (I3). Para ello asuma lo contrario, esto es, suponga que I_1 e I_2 son miembros de \mathcal{I} con $|I_1| < |I_2|$ tal que $I_1 \cup e \notin \mathcal{I}$ para todo $e \in I_2 - I_1$.

Ahora $|I_1 - I_2| < |I_2 - I_1|$ e $I_2 - I_1$ no es vacío, se puede escoger un miembro positivo ϵ tal que

$$0 < (1+\epsilon) |I_1 - I_2| < |I_2 - I_1|.$$

Se define $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$w(\epsilon) = \begin{cases} 2, & \text{si } \epsilon \in I_1 \cap I_2 \\ 1/|I_1 - I_2|, & \text{si } \epsilon \in I_1 - I_2 \\ (1+\epsilon)/|I_2 - I_1| & \text{si } \epsilon \in I_2 - I_1 \\ 0 & \text{c. o. c.} \end{cases}$$

Entonces el algoritmo Glotón primero toma todos los elementos de $I_1 \cap I_2$ y todos los elementos de $I_1 - I_2$. Por suposición, no se puede tomar cualquier elemento de $I_2 - I_1$. Así los elementos restantes de B_G estarán dentro de $E - (I_1 \cup I_2)$. De este modo

$$w(B_G) = 2 |I_1 \cap I_2| + |I_1 - I_2| (1/|I_1 - I_2|) \\ = 2 |I_1 \cap I_2| + 1 + \epsilon. \dots\dots\dots(2)$$

Pero, por (I_2) , I_2 esta contenido en un miembro maximal de I_2 de I y

$$w(I_2) \geq w(I_2) = 2 |I_1 \cap I_2| + |I_1 - I_2| [(1+\epsilon)/|I_1 - I_2|] \\ = 2 |I_1 \cap I_2| + 1 + \epsilon. \dots\dots\dots(3)$$

De (2) y (3), se deduce que $w(I_2) > w(B_G)$, esto es, el algoritmo Glotón falla para la función de peso. Esto contradice completamente la prueba del teorema.

Ejemplo 4.1.2 para una gráfica dirigida. El teorema afirma que una base máxima lexicograficamente no solo tiene peso máximo, si no que la base es más pesada elemento a elemento que cualquier otro conjunto independiente, es decir, si B es una base máxima lexicograficamente e I es un conjunto independiente conjunto el peso del elemento k más pesado de B es al menos igual al elemento k más pesado de I , esto se cumple para cualquier k .

Propósito

Determinar el conjunto máximo lexicograficamente en un matroide $M = (E, I)$.

Debemos seleccionar los elementos en orden de acuerdo al peso, descartando los elementos que no satisfagan la independendencia lineal del conjunto hasta ahora determinado.

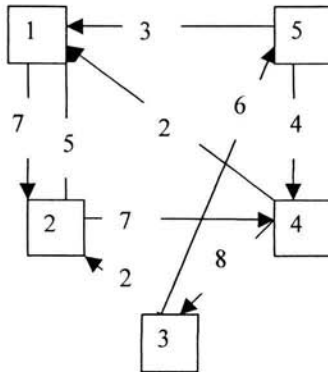
Algoritmo Glotón

```

Begin
  I:=0
  While E do
    Begin
      Sea e∈E cuyo peso sea máximo ;
      Then E = E(e)
      If I + e∈ I then I:= I + e
    End;
  End.

```

Dada la gráfica dirigida $D = (V,E)$ y un peso $w(e)$ se puede encontrar una base B de peso máximo, donde B es una base de si y solo si dos arcos de B no tienen el mismo nodo terminal.



Al aplicar el algoritmo se obtiene:

1ª. Iteración:

$$I = \{ \{4,3\} \}$$

$$w(e) = (8)$$

$$E = E - I = E - \{ (4,3) \}$$

2ª. Iteración

$$I = \{ \{4,3\}, \{2,4\} \}$$

$$w(e) = (8), (7)$$

$$E = E - I = E - \{ (4,3), (2,4) \}$$

3ª. Iteración

$$I = \{ \{4,3\}, \{2,4\}, \{1,2\} \}$$

$$w(e) = (8), (7), (7)$$

$$E = E - I = E - \{ (4,3), (2,4), (1,2) \}$$

4ª. Iteración

$$I = \{ \{4,3\}, \{2,4\}, \{1,2\}, \{3,5\} \}$$

$$w(e) = (8), (7), (7), (6)$$

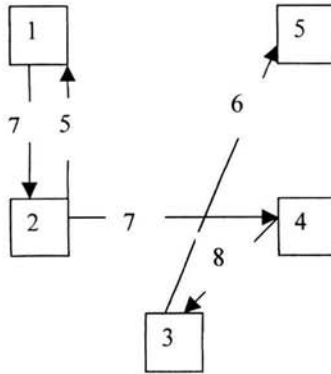
$$E = E - I = E - \{ (4,3), (2,4), (1,2), (3,5) \}$$

5ª. Iteración

$$I = \{ \{4,3\}, \{2,4\}, \{1,2\}, \{3,5\}, \{2,1\} \}$$

$$w(e) = (8), (7), (7), (6), (5)$$

$$E = E - I = E - \{(4,3), (2,4), (1,2), (3,5), (2,1)\}$$



Solución optima.

4.2 EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE TAREAS Y TRABAJADORES .

La siguiente aplicación, se debió a Gale [1968], y es para matroides transversales. Suponga un cierto conjunto de trabajadores que han sido asignados en orden de importancia y queremos encontrar los trabajos de cada combinación de trabajadores a quienes se califiquen por desempeño en algún subconjunto de trabajos. También asumimos que los trabajos son simultáneos así que ningún trabajador puede ser asignado a más de un trabajo. En general, no será posible ocupar todos los trabajos, así que buscamos el camino de escoger el conjunto de trabajos para ser ocupados esto es relativamente óptimo para el orden de prioridad sobre los trabajos.

Antes de explicar la optimalidad en este contexto, describiremos una reformulación del problema en términos de matroides.

Sea S el conjunto de trabajos y Y el conjunto de trabajadores. Para cada $y \in Y$, sea A_y el conjunto de trabajos que el trabajador y está calificado para desempeñar. Sea $A = (A_y: y \in Y)$. Evidentemente el número máximo de trabajos que pueden ser dados simultáneamente es de tamaño de una transversal parcial mayor A , o equivalentemente, el rango de $M[A]$.

Ahora sea $p: S \rightarrow \mathbb{R}$ la función que corresponden al orden de prioridad de los trabajos, un p -valor inferior correspondiente a la prioridad superior por trabajo. Una **asignación de trabajos** es una base de $M[A]$. Sea B la asignación de trabajo $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ donde $p(x_1) \leq p(x_2) \leq \dots \leq p(x_r)$. Entonces B es llamado **óptimo** si, para cualquier otra asignación de trabajos $\{z_1, z_2, \dots, z_r\}$ tenemos $p(x_i) \leq p(z_i)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Si definimos I como la colección de conjuntos independientes de $M[A]$ y $w = -p$, entonces, por el lema 4.1 el algoritmo de Greedy aplicado a el par (I, w) encontrara la asignación de trabajos optima.

Ejemplo 4.2.1 En gráfica bipartita de la figura 38, $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ corresponden al conjunto de trabajadores, $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ es el conjunto de trabajos y dos vértices son unidos cuando el correspondiente trabajador puede desempeñar un trabajo determinado. Suponga que el orden de prioridad es $p(x_1) < p(x_2) < \dots < p(x_6)$. Entonces no es difícil de verificar que la única asignación de trabajo óptima esta dada por $\{x_1, x_2, x_4, x_6\}$.

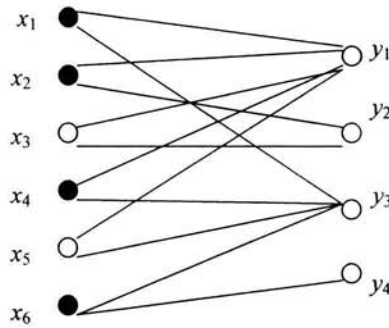


Figura 38.

Se remarca que, dentro del problema de asignación de trabajadores y tareas (o problema Scheduling), el algoritmo de greedy encuentra una solución base optima para el correspondiente matroide transversal. Sin embargo, no podemos escoger al mismo tiempo los trabajadores para los trabajos en esta base optima. Como ejemplo suponga que la figura 39 representa un problema tal con trabajadores y_1 y y_2 y trabajos x_1 y x_2 tal que $p(x_1) < p(x_2)$. Entonces el algoritmo de Greedy escoge x_1 en primer lugar y x_2 segundo. Pero, si y_1 esta asignado a x_1 , entonces y_2 no puede ser asignado a x_2 .

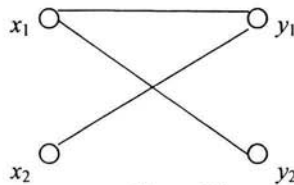


Figura 39.

Ejemplo 4.2.2 para graficas bipartitas.

Para ello se citarán algunos teoremas y/o resultados que fueron demostrados por Omaña[1987].

Considere una gráfica bipartita $G = (U, V, E)$ de la figura 40. Si $M = (E, R)$ es un matroide, entonces cualquier conjunto maximal independiente es máximo, es decir, una base de M es un emparejamiento de máxima cardinalidad.

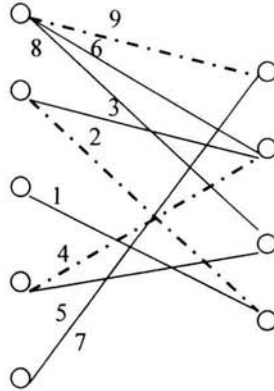


Figura 40.

Sin embargo en la anterior figura se muestra una gráfica bipartita donde el apareamiento 2,4,9 no es de cardinalidad máxima. Esto se debe a que una gráfica bipartita no es propiamente un matroide propiamente, pero es la intersección de dos matroides partición.

Teorema.

Sea E un conjunto finito y $P = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ una partición del conjunto E . Un subconjunto I de E es independiente si y solo si no existen dos elementos de I en el mismo conjunto de P , es decir, $r(I, E_j) \leq 1 \quad j=1, \dots, p$. Entonces $M_p = (E, I)$ es un matroide llamado *partición*.

Considere una gráfica bipartita $G = (U, V, E)$. Sea P_1 una partición de E que define una relación de incidencia en los nodos de U y sea P_2 la relación que define la incidencia en V . Al considerar estas particiones se puede establecer el teorema que relaciona el problema de apareamiento máximo con la intersección de matroides.

Teorema.

Sea $M_1 = (E, I_1)$ y $M = (E, I_2)$ las matroides partición determinadas por las particiones P_1 y P_2 respectivamente, entonces un subconjunto de E es un **apareamiento** en I si y solo si es la **intersección** de M_1 y M_2 .

Ejemplo. Considere la gráfica bipartita del ejemplo anterior(figura 40) entonces las particiones son:

$$P_1 = \{\{9,6,8\} \{2,3\} \{1\} \{4,5\} \{7\}\}$$

$$P_2 = \{\{9,7\} \{6,4,3\} \{8,5\} \{2,1\}\}$$

Definición. El problema de apareamiento máximo, consiste en determinar un subconjunto I independiente en la intersección $I_1 \cap I_2$ cuya cardinalidad sea máxima.

Teorema (apareamiento máximo en graficas bipartitas).

Un **apareamiento** es **máximo** si y solo si **no contiene una cadena alternate y aumentante** entre todo par de vértices.

Se cualquier subconjunto independiente en M_1 y M_2 , se desea construir una sucesión aumentante respecto a I , de la siguiente forma.

Definición. Sea I la intersección de dos matroides $M_1 = (E, I_1)$ y $M_2 = (E, I_2)$ y sea $S = (e_1, e_2, \dots, e_s)$ una sucesión de elementos diferentes, donde $e_i \in E - I$ para i impar. Sea $S_1 = (e_1, \dots, e_i)$ para $i \leq s$. Se dice que S es una sucesión alternate respecto a I si:

- I- $e_1 \in I_1$.
- II- Para cualquier i par, $cl(I \oplus S_i) = cl(I \oplus e_i)$, entonces $I \oplus S_i \in I_2$
- III- Para cualquier i impar, $cl(I \oplus S_i) = cl(I \oplus e_i)$, entonces $I \oplus S_i \in I_1$

Definición: una sucesión es aumentante respecto a I , si $cl(S)$ es *impar* e $I \oplus S \in I_2$.

Ejemplo 4.2.2 (continuación). Considere la gráfica de la siguiente figura 41 y el apareamiento $I = \{2,4,9\}$

- a) $I + 1 = \{1,2,4,9\} \in I_1$
- b) $I + 1 - 2 = \{1,4,9\} \in I_2$
- c) $I + 1 - 2 + 3 = \{1,3,4,9\} \in I_1 \cap I_2$
- d) $I + 1 - 2 + 3 - 4 = \{1,3,9\} \in I_1 \cap I_2$

e) $I + 1 - 2 + 3 - 4 + 5 = \{1, 3, 5, 9\} \in I_1 \cap I_2$

De lo anterior obtenemos $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

- De a) se obtiene I).
- De b) y d) se obtiene $I \oplus S_2, I \oplus S_4 \in I_2$, la condición II), y
- De c) y e) se obtiene $I \oplus S_3, I \oplus S_5 \in I_1$, condición III).
- Por último de e se observa que $I \oplus S \in I_2$ por lo que S , además de ser alternante, se dice ser aumentante.

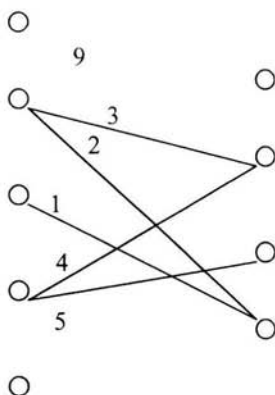


Figura 41, sucesión aumentante respecto a I

Con esto se establece el problema de apareamiento de gráficas bipartitas en términos de intersección de matroides partición. Por ello de las definiciones anteriores se concluye que si una intersección admite una sucesión aumentante esta no es de cardinalidad máxima. De este modo se debe construir una grafica denominada *frontera* cuyos nodos son los elementos de I y los arcos del apareamiento en $G = (U, V, E)$

Definición: Sea la gráfica frontera $GF(I)$ inducida por la intersección I una gráfica bipartita y dirigida obtenida de la siguiente forma:

- Para cada $e_i \in E - I$ tal que $e_i \in cl_1(I)$ existe un arista dirigida (e_i, e_j) a cada e_j de $C_1 \in \subseteq I - e_i$, donde $C_1 \notin \subseteq I$ es el circuito único de $I + e_1$ en M_1 ; si $e_i \subseteq \notin cl_1(I)$ entonces e_i es una fuente en $GF(I)$
- Para cada $e_i \in E - I$ tal que $e_i \in \subseteq \notin cl_2(I)$ existe un arista dirigida (e_i, e_j) a cada e_j de $C_2 - e_i$, donde C_2 es el circuito único de $I + e_1$ en M_2 ; si $e_i \subseteq \in cl_2(I)$ entonces e_i es un sumidero en $GF(I)$.

Obsérvese que la subgráfica $GF_1(I)$ contiene los arcos dirigidos de I a $E - I$ y la subgráfica $GF_2(I)$ contiene los arcos en dirección opuesta.

Continuando con el ejemplo anterior se desea determinar la gráfica frontera de la intersección $I = \{2,4,9\}$.

- $E - I = \{1,3,5,6,7,8\}$, $cl(I) = \{9,8,6,5,4,3,2\}$

$$\{e_i \in E - I : e_i \in cl_1(I) = \{3,5,6,8\}\}$$

- $I + 3 = \{2,3,4,9\}$
- $I + 5 = \{2,4,5,9\}$
- $I + 6 = \{2,4,6,9\}$
- $I + 8 = \{2,4,8,9\}$

$$\{e_i \in E : e_i \in cl_1(I) = \{1,7\} \text{ Fuentes.}\}$$

- $E - I = \{1,2,3,4,6,7,9\}$, $cl(I) = \{1,2,3,4,6,7,9\}$

$$\{e_i \in E - I : e_i \notin cl_2(I) = \{1,3,6,7\}\}$$

- $I + 1 = \{1,2,4,9\}$
- $I + 3 = \{2,3,4,9\}$
- $I + 6 = \{2,4,6,9\}$
- $I + 7 = \{2,4,7,9\}$

$$\{e_i \in E - I : e_i \notin cl_1(I) = \{5,8\} \text{ Sumideros.}\}$$

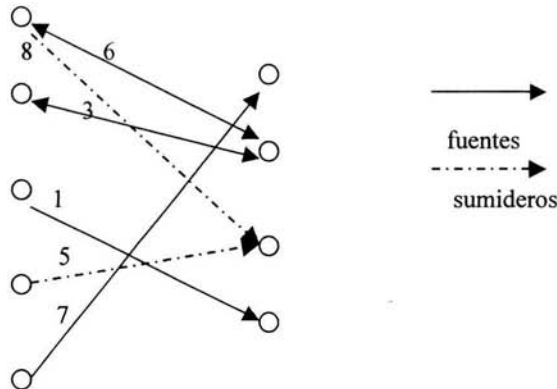


Figura 42, gráfica frontera GF de la intersección I

Notese que cualquier sucesión aumentante se asocia con una trayectoria fuente sumidero en la gráfica frontera, sin embargo una gráfica frontera no induce necesariamente a una sucesión aumentante a menos que la sucesión en $GF(I)$ no admita atajos.

Definición. Se dice que una sucesión aumentante admite atajos si existe un arco (e_k, e_j) en $GF(I)$, donde $1 \leq k \leq j-2 \leq s-2$.

Lema. Sean I, J conjuntos independientes en M_1 y M_2 simultáneamente tales que $r(J) = r(I) + 1$. Entonces existe una trayectoria fuente sumidero S en $GF(I)$, donde $S \subseteq I \oplus J$.

Teorema.

Sean I_p e I_{p+1} conjuntos independientes en M_1 y M_2 con p y $p+1$ elementos respectivamente. Entonces existen una sucesión aumentante $S \subseteq I_p \oplus I_{p+1}$ con respecto a I_p .

Teorema.

Una intersección I es de máxima cardinalidad si y solo si no admite sucesiones aumentantes.

4.3 MATROIDE ORÁCULO Y DIGRAFOIDES.

Existen algoritmos para matroides que son polinomiales, es decir, el número total de operaciones es proporcional a un polinomio de entradas de tamaño n (comúnmente, n es la cardinalidad del conjunto fundamental E de cualquier matroide M_1, M_2, \dots en cuestión), suponiendo cuestiones como “¿Es $X \subseteq E$ independiente en M_i ?” puede ser resuelto en un solo paso.

Esto significa, que los matroides M_1, M_2, \dots están dados por alguna “subrutina” R_1, R_2, \dots , respectivamente, cuando hablamos de tales operaciones le llamamos a cualquiera de esas subrutinas operaciones simples.

Ya que la mayoría de las aplicaciones, usualmente requieren de matroides gráficos o matroides representables, los cuales pueden ser dados por alguna grafica o por alguna matriz, en ambos casos el requerimiento de almacenaje es proporcional cuando mucho a n^2 y verificar la independencia en tales matroides puede ser realizado a lo más en n^3 pasos; esta suposición nos guía a algoritmos polinomiales. Pero ¿cuál es el caso general?.

Como se menciono en el capítulo I, sección 1.2.1, el número de matroides no isomorfos sobre un conjunto E de n elementos es casi 2^{2^n} . Aun si deseamos escribir este número (digamos, en representación binaria), se requiere un almacenaje, proporcional a 2^n . De este modo, tiene mucho sentido requerir de un algoritmo polinomial en el tamaño de tales entradas (llamémosle la descripción del matroide $M = (E, I)$ ya que esas entradas por sí mismas son una función exponencial de $n = |E|$). Esta es la razón por la cual requerimos de que el algoritmo sea polinomial en n en vez de otro, es decir, cuando el tamaño de los datos de entrada crece, cualquier algoritmo polinomial será más eficiente que cualquier algoritmo exponencial.

Naturalmente, en este caso M no esta realmente descrito; todo se tiene en una subrutina R la cual responde a la pregunta “¿Es $X \subseteq E$ independiente en M ?” en un paso. Ciertos problemas de decisión (como “¿es M un matroide sin loops?”) necesitan entonces pocos pasos (pocas llamadas de alguna subrutina R) para obtener la respuesta, pero no se puede “identificar” el matroide por esa cuestión.

De este modo podemos estar seguros que la subrutina R para un matroide cualquiera no puede ser realizada de modo que el número de operaciones es polinomial en n . Mejor Imagínese esa subrutina como un “oráculo”.

El oráculo «independiente» es un dispositivo a cuya entrada se suministra un subconjunto arbitrario X del conjunto E , mientras que en la salida se desea tener una respuesta a la pregunta: «¿será o no X un conjunto independiente del matroide sobre el conjunto E ?». De manera semejante se define el oráculo «Base» (oráculo de circuito o de látises), el cual nos da la respuesta a la cuestión: «¿será o no X un conjunto E (circuito o de látises, respectivamente) del matroide sobre el conjunto E ?». Dicho de otro modo los oráculos pueden interpretarse como una aplicaciones del conjunto I de

todos los subconjuntos de I conjunto E en un conjunto de dos elementos {si;no}. También se puede definir el oráculo de rango y de cerradura que se interpretan como aplicaciones de I en el conjunto de números naturales y como una aplicación de E en E respectivamente.

Los oráculos mencionados están expuestos en la siguiente tabla

Denominación del oráculo	Entrada	Salida
«Independiente»	$X \subseteq E$	Si, siempre que sea X un conjunto independiente del matroide M ; no en el caso contrario.
«Base»	$X \subseteq E$	Si, siempre que sea X una base de un matroide M ; no en el caso contrario.
«Ciclo»	$X \subseteq E$	Si, siempre que sea X un circuito del matroide M ; no en el caso contrario.
«Circuito cerrado»	$X \subseteq E$	Si, siempre que sea X un circuito del matroide M ; no en el caso contrario.
«Rango»	$X \subseteq E$	$r(X)$ es un rango del conjunto X de M .

Digrafoides.

El estudio de estas estructuras se inicia cuando Minty en sus trabajos sobre gráficas descubre el lema de arcos coloreados por medio del cual fue posible la axiomatización del concepto de grafoide, siendo esta un caso particular de matroide y una generalización de gráfica. La definición de grafoide puede ser ampliada para comprender el caso donde se consideran gráficas dirigidas, recibiendo estas el nombre de *digrafoides*

Definición. Un **grafoide** es una terna (E, C, Q) donde E es un conjunto finito y, C y Q son las familias o colección de subconjunto de E , cuyos elementos son denominados **circuits** y **cocircuits** del grafoide respectivamente y que satisfacen las siguientes condiciones:

Para cualquier $X \in C$ y $Y \in Q$ $|X \cap Y| \neq 1$

Para cualquier partición $\{R, B, A\}$, donde $|R|=1$ se tiene que:

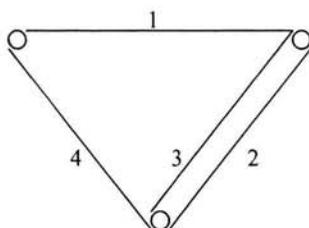
- a) $X \subseteq C$ tal que $R \subseteq X$ y $X \subseteq R \cup B$, o bien,

- b) $Y \subseteq Q$ tal que $R \subseteq Y$ y $Y \subseteq R \cup A$, pero no ambas.
 c) Ningún circuito contiene otro circuito propiamente y ningún cocircuito contiene otro cocircuito propiamente.

Suponga que los circuitos y cocircuitos de un grafoide (E, C, Q) se numeran de $1, \dots, c$ y de $1, \dots, d$ respectivamente.

Se define la matriz de incidencia de los circuitos de un grafoide como $c_{ij} = 1$, si la arista e_j esta en el circuito i ; y $c_{ij} = 0$ en otro caso, de manera análoga se define la matriz de incidencia de los cocircuitos.

Ejemplo 4.3.1. Considere la siguiente gráfica no dirigida H



Las colecciones C y Q son:

$$C = \{\{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3\}\}$$

$$Q = \{\{1,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}\}$$

Las matrices de incidencia son

$$C = \begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Con estas definiciones se inicia el proceso de orientar grafoides de la siguiente manera. Un grafoide es *orientable* si es posible orientar algunos de los 1's en sus matrices de incidencia C y Q por -1 's, de manera que cada renglón de C sea ortogonal a cada renglón de Q .

Así para las matrices del ejemplo anterior se tiene, considerando el cambio siguiente que:

$$C = \begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se hace notar que $Q = C^*$.

Lema. Sea $G = (X, E)$ un gráfica, sean C y Q un ciclo y un cociclo respectivamente, entonces $|C \cap Q| \neq 1$.

Lema. Sea $G = (X, E)$ una gráfica dirigida con los arcos coloreados en naranja, azul y negro, supongase que e_j esta coloreado de naranja, entonces exactamente una de las siguientes propiedades se cumple:

- existe un ciclo naranja y azul que contiene el arco e_j y todos los arcos naranja orientados en el mismo sentido de e_j .
- existe un cociclo naranja y negro que contiene el arco e_j y todos los arcos naranja orientados en el mismo sentido de e_j .

Los anteriore lemas permiten dar la definición de grafoide dirigido.

Definición. Un *digrafoide* es una estructura que consiste de :

- Un grafoide (E, C, Q)
- Una partición de cada circuito y cocircuito en dos subconjuntos que satisface el axioma siguiente:
- Para algún circuito X y cocircuito Y , sean X^+, X^- la partición de X y Y^+, Y^- la partición de Y , entonces se cumple que:
 $|X^+ \cap Y^+| + |X^- \cap Y^-| = |X^- \cap Y^+| + |X^+ \cap Y^-|$, siendo esta ultima la **condición de ortogonalidad**.

Así para el ejemplo anterior se tiene que:

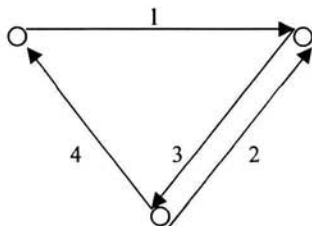
$$\begin{aligned} X_1 &= \{1, 2, 4\}, & Y_1 &= \{1, 4\} \\ X_2 &= \{1, 3, 4\}, & Y_2 &= \{1, 2, 3\} \\ X_3 &= \{2, 3\}, & Y_3 &= \{2, 3, 4\} \end{aligned}$$

Considerando las siguientes particiones se tiene :

$$\begin{aligned} X_1^+ &= \{X_1\}, & X_1^- &= \{\emptyset\}, & Y_1^+ &= \{1\}, & Y_1^- &= \{4\} \\ X_2^+ &= \{1, 4\}, & X_2^- &= \{3\}, & Y_2^+ &= \{2\}, & Y_2^- &= \{1, 3\} \\ X_3^+ &= \{X_3\}, & X_3^- &= \{\emptyset\}, & Y_3^+ &= \{3, 4\}, & Y_3^- &= \{2\} \end{aligned}$$

En otras palabras la condición de ortogonalidad nos indica que si el arco u es orientado hacia la izquierda $u \in X^+ \cap Y^-$, si este es orientado en sentido opuesto entonces $u \in X^- \cap Y^+$. Si $u \in X^+ \cap Y^+ \cap X^- \cap Y^-$ obtendríamos orientaciones contrarias.

Es fácil verificar que las particiones satisfacen la condición de ortogonalidad, la cual nos conduce a la siguiente gráfica:



Es de recalcar que la definición de digrafoide no se refiere a una orientación particular, sino que si que a todas las posibles orientaciones de la gráfica, notando claramente que al especificar su orientación a usar, se especifica completamente el digrafoide en cuestión y que dos orientaciones distintas al menos en un arco de la gráfica, puede conducir a dos digrafoides distintos.

CONCLUSIONES

En el trabajo presente se ha visto y analizado la teoría de matroides, tratando de presentar todas las ideas de manera unificada y conforme a los objetivos establecidos.

Esta teoría es muy amplia, puesto que los matroides surgen de los más diversos contextos combinatorios y algebraicos. Tales conceptos como son la independencia y la dependencia lineal en espacios vectoriales, los circuitos en las graficas, las superficies en las geometrías proyectivas y los planos de las látises, se reducen todos a una misma estructura matroidal. El hecho de que los matroides aparecen en tan variados dominios y en tan diferentes aspectos los hacen dignos de estudio. Debido a la posibilidad de aplicación, al exponer la teoría de matroides y su relación con la teoría de látises, la teoría de gráficas y de los espacios vectoriales, así como del lenguaje geométrico se ha mostrado la similitud que guarda esta con las teorías de redes, de graficas, de transversales, del álgebra, de la topología, la electrotecnia, la geometría, el análisis combinatorio, la codificación e investigación de operaciones.

Además, este trabajo se basa en explicar en que consiste el sistema de axiomas para los matroides, los obtenidos de transversales, gráficas bipartitas y a partir de las látises; de cómo puede obtenerse una representación para un matroide de rango inferior o igual a tres, así como el dual de un matroides tanto representable como gráfico.

Las aplicaciones más importantes se manifiestan en los campos de la investigación de operaciones, optimización combinatoria e ingeniería eléctrica, la ingeniería, la química, entre otros.

Cabe mencionar que una posible inconveniencia de la teoría de matroides, es que no es tan digerible a primera instancia. Sin embargo, considero que si se tienen conocimientos elementales de álgebra lineal y teoría de gráficas, el acceso a los matroides será más didáctico, evidentemente, esta facilidad se debe a la representabilidad de la teoría gráficas.

La teoría de matroides debería de ser considerada en la materia de optimización II, teoría de graficas y/o álgebra lineal, ya que ampliaría nuestros enfoques y enriquecería nuestros conocimientos matemáticos, en específico sobre independencia lineal, investigación de operaciones y análisis combinatorio.

Finalmente, sintetizaré en las siguientes tablas algunos de los conceptos básicos que caracterizan a la teoría de matroides.

Definición	Un conjunto $X \subseteq E$ es				Definición
	Independiente elemento y sub elemento	Base elemento	Circuito elemento y sub elemento	Cofcircuito elemento y sub elemento	
Colección I de cjos. Indeps	$X \in E$	X es maximal con $X \in I$	X minimal con $X \notin I$	X minimal con $(X \cap Y \neq \emptyset, \forall Y \in E)$	$\max_{Y \in I} X \cap Y $
Sistema de circuitos \mathcal{C}	$Y \subseteq X, Y \in \mathcal{C}$	X maximal con $(Y \subseteq X, Y \in \mathcal{C})$	$X \in \mathcal{C}$	X minimal no nulo con $(X \cap Y \neq 1 \forall Y \in \mathcal{C})$	$\max\{ Y ; Y \subseteq X, Y \text{ no contiene elementos de } \mathcal{C}\}$
La función de rango r	$ X = r(X)$	$ X = r(X) = r(E)$	$ X > r(X), Y = r(Y) \forall Y \subset X$	X minimal con $r(E-X) < r(E)$	$r(X)$

Cómo se pueden imaginar ciertos conceptos en teoría de matroides?

Conceptos de teoría de matroides	Suponga que el matroide puede estar dado por		
	Una grafica	Vectores	Dibujo geométrico
Elemento base	Arco	Vectores	Punto
Subelemento base	Árbol	Subespacio	Subespacio vectorial
Base	Árbol generador	Base	Base afín
Rango	Rango	Dimensión del subespacio	Dimensión del subespacio + 1
Dual	Dual de grafos	Eliminación de filas	Contraespacio afín

BIBLIOGRAFÍA

- Birkhoff G., Lattice theory, 3er. Ed. Amer.Math.Soc.Colloq.Publ., 25 (1967).
- Brualdi R. A.and Scrimger E. B., Exchange system, matchings and transversals, J. J. Combinatorial theory, 5 (1968), 244-257.
- Brylawski, T. and D. Kelly, Matroids and Geometries combinatories, Departament of mathematics, University of Carolina of north, Hill, 1980.
- Crapo H.H. and Rota G.C., Combinatorial geometries,M.I.T., press, 1971.
- Edmonds J. and Fulkerson D.R., transversal and matroid partition, j Res. Nat. Bur. Standatr 69 B, (1965).
- Kuafman A., Puntos y Flechas, Teoría de grafos, Macambo SA Borxareu editores.
- Lawler E.L., Combinatorial Optimization Network and Matroid, Holt, Reinhart and Wiston, N.Y., 1976.
- Mirsky L. and Perfect H., Applications of the notion of independence to problems of combinatorial analysis. J. Combinatorial theory, 2 (1967) 327-357.
- Mirsky L. and Perfect H. Transversal theory, Academis Press,N.Y.,1970
- Murota Kazuo, Matrices and Matroids for System Analysis, Algorithms and Combinatrics, Ed. Springer.
- Oxley James G, Matroid theory, Oxford Science Publications, Oxford, 1992.
- Rado R., A theorem on independence relations, Quart. J. Math.,(Oxford)13 (1942) 8 3-89
- Recski Adras, Matroid theory and its applications in electric networks and statics. Algorithmics and combinatorics 6, Epringer-Jerlay, 1986.
- Ribnikov K., Análisis Combinatorio, Editorial Mir Moscú.1988.
- Maclane S., Some interpretetions of abstrac linear dependence in terms of projective geometry,Amer. J. Math., 58 (1936), 236-240.
- van der Waerden B. L., Modern álgebra, 2ª. Ed., Springer, Berlin, 1937.

Welsh D.J.A., Matroid theory. Academic Press, London.

White Neil, Matroids theory, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Cambridge University Press.

White Neil, Matroids applications, Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge University Press.

Whitney B, On the abstract properties of linear dependence. Amer. J Math., 57 (1935) 509-533.

Wilson R.J., An Introduction to matroid theory, American Mathematical Monthly, Volume 80, Issue 5(May, 1973), 500-525.

Wilson Robin, Introducción a la Teoría de grafos, Ed. Alianza universidad.

Thurasyllaman, Swamy, Graphs: Theory and algorithms, Concordia University, Montreal Canada., Interscience Publications Jonh Wiley & sons, Inc.

W. T. Tutte. Lectures on matroides, J. Res. Nat. Bur. Stand.,69B (1965) 1-47.

www.jstor.org/

<http://links.jstor.org/sici?sici=00029890%28197305%2980%3A5%3C500%3AAITMT%3E2.0.CO%3B2-S>.

www.math.lsu.edu/oxley

www.math.binghamton.edu/zaslav/Matroids

www.ams.org/new-in-math/cover/matroids5.html

www.emis.de/monographs/md/index.html