



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

LA LATIZ DE CARAS DE UN CONO DE DIMENSION FINITA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A:

DANIEL LABARDINI FRAGOSO



FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DRA. MARTHA TAVELLE MARROFESIALES



2004

FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"La Latiz de Caras de un Cono de Dimensión Finita."

realizado por Labardini Fragoso Daniel

con número de cuenta 09710007-0 , quien cubrió los créditos de la carrera de:
Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Dra. Martha Takane Imay.

Propietario

Dr. Francisco Marmolejo Rivas.

Propietario

Dra. Edith Corina Sáenz Valadez.

Suplente

Dr. Alejandro Javier Díaz Barriga Casales.

Suplente

Dr. Max Neumann Coto.

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE MATEMÁTICAS

La Latiz de Caras de un Cono de Dimensión Finita

Daniel Labardini Fragoso

Mayo de 2004

*A mi prima Luz Adela y a Margarita,
mujeres que siempre recordaré
con mucho cariño.*

Ya no puede pasarme nada.
Ni bueno, ni malo.
Sólo me queda contar los días,
como un humilde soldado.
El significado y el ánimo
no son los mismos.

Hay que admitirlo
y decirlo al fin con calma:
Vendrá y se llevará todo.
Después de haberme quitado
la carne, los huesos,
el lápiz de corazón de grafito sobre la mesa,
la inteligencia, el alma,
el pizarrón colgando en la pared,
la música que ilumina la recámara,
las lágrimas, el miedo...
...el aire saturado de polen...

Y después, tinieblas...
... tinieblas, tinieblas...
... tinieblas, tinieblas...
... tinieblas.

ABDULAH SIDRAN
EL CÍRCULO PERFECTO

...después de quitarme a Luza, a Mago y a María...

Agradecimientos

Aquí incluyo a toda la gente a la que, de no ser por la mayor gratitud que en este momento tengo hacia Luza y Mago por su gran ternura y comprensión, iría dedicado cualquier mérito de esta tesis.

En primer lugar quiero agradecer a Martha por la paciencia y la comprensión que siempre ha tenido hacia mí, comprensión y paciencia que creo no merecer; también por toda la ayuda que me ha brindado.

A mis maestros, Martha Takanc, Alejandro Díaz Barriga, Lourdes Velasco, Rafael Rojas y Francisco Marmolejo. Lo poco o mucho que he aprendido de Matemáticas lo debo a ellos.

De igual manera, a mis sinodales: Francisco Marmolejo, Max Neumann, Alejandro Díaz Barriga, Corina Sáenz, Christof Geiß y Berta Zavala. Lamento que oficialmente sólo sea posible que haya cuatro sinodales.

A Alejandro Díaz Barriga, Emilio Lluís Puebla y Eugenia O'Reilly Regueiro; ha sido para mí un honor ser su ayudante.

A mis alumnos de Álgebra Superior I del semestre 2004-I, en especial a Hanna, Daniel, Gabriel, Natalia, Angélica y los dos Albertos, de quienes aprendí muchas cosas.

Al Instituto de Matemáticas de nuestra Universidad, por la confianza que me mostró al otorgarme un lugar en él.

Al Actuario Mayer Guerrero, por el apoyo económico que me brindó durante la licenciatura.

También me encuentro muy agradecido hacia mis amigos: Carlos Talancón, amigo de toda la vida; María Peñalosa, quien me hizo sentir un irresistible vendaval de emociones, me gustaría entender qué es lo que sucedió después, *the first time we met was quite naturally perfect, it was a work of art, flawless, sublime, a triumph equaled only by its monumental failure*; mis amigos

de la prepa, Miguel González, Omar González, Diana de la Orta y Nancy Roa; mis amigos del Instituto, Yesenia Alfaro, Miguel Chávez, Pietra Delgado, Leonardo Espinosa, Paulina Figueroa, Grecia García, Abraham Martín del Campo, Eugenia O'Reilly, Carlos Preisser, José Ramírez, Selene Sánchez y Francisco Santillán; los chavos de la SMM, Milena Carrillo y Raúl Perusquía; y mis amigos de la Facultad, Omar Antolín, Francisco Barrios, Rebeca de Buen, Juan Espinosa, Kelly Flores, Selene García, Juan Manuel Gómez, Melisa Gutiérrez, Claudia López, David Mireles, Rocío Navarro, Pedro Solórzano, Pedro Valencia, Fernanda Villegas y Mariano Zerón. Gracias a todos ustedes, porque siempre están dispuestos a escuchar mis peripecias y a mostrarme el camino a seguir. Gracias, Frank, porque de ti he comenzado a aprender a ser ambicioso. Y tengo que extender este agradecimiento, por la misma razón, a Omar A., Davo, Charo, Guaza, el Notable y Carlos T. Y a Abraham le agradezco su invaluable ayuda en la obtención de la versión final de esta tesis.

A la familia Talancón Sánchez, en especial a Carlos, quienes, al igual que Mago y su familia, me tendieron la mano en los momentos más difíciles que he vivido.

Al Doctor Eduardo Thomas; si no lo hubiese conocido, no habría sido capaz de salir de la peor crisis de mi vida.

A la familia Lerma Labardini, por haberme permitido disfrutar tantos bellos momentos con Luza.

A mi familia, porque siempre me ha brindado el apoyo que necesito. Gracias "Madrina", papá, Indra y Nandini, pues constantemente me alientan a superar las adversidades y me ayudan a reflexionar.

Gracias a mi abuelo, Fernando Fragoso, porque siempre me ayuda incondicionalmente en muchas cosas; Abue Fer, sigo deseando que seas inmortal. A mi abuelo, Daniel Labardini, por todo lo que de él aprendí antes de perderlo. Mucho debo también a mis abuelas, Ernestina Heredia y Susana Tello, por todo el cariño que desde niño me han dado. Gracias Abuelitos.

A Saúl Morales, por la confianza que ha depositado en mí. También a mis tías Belén, Mary y Maru Fragoso, y a todos los que han creído en mí.

Gracias a todos; sin ustedes, muy probablemente no habría logrado terminar la licenciatura. Me emociona el hecho de poder agradecer a tanta gente.

Sinceramente, Daniel.

—I really should thank you for it; after all, it was your life that taught me the purpose of the whole life...

Smith en "*Matrix Revolutions*".

Índice general

Agradecimientos	III
Introducción	VII
1. Elementos de la Teoría de Latices	1
1.1. Conjuntos Parcialmente Ordenados	1
1.2. Supremos e Ínfimos	3
1.3. Latices	5
1.4. Tipos de Latices	8
1.5. La Condición de Jordan-Dedekind para Cadenas	15
2. Teoría de Conos	17
2.1. Nociones Preliminares de Conjuntos Convexos	18
2.2. Conos	21
2.3. Ejemplos	26
2.4. El Orden Parcial \leq_K	35
2.5. Caras	38
2.6. La Latiz de Caras de un Cono	48
3. Cortes Transversales Convexos	51
3.1. Conjuntos Afines	51
3.2. Conjuntos Convexos y sus Caras	59
3.3. Cortes Transversales de Conos	63
3.4. El Operador ψ de un Convexo Compacto	69
3.5. La Latiz de \mathfrak{C} -caras de un Convexo Compacto	71
4. Consecuencias: Principales Resultados	73

4.1. Un poco de Escindibilidad de Conos	73
4.2. Geometría de un Cono a partir de su Latiz de Caras	75
4.3. Otros resultados	86
Apéndice. Espacios normados	89
Glosario de Símbolos	95
Bibliografía	97

Introducción

En este trabajo estudiaremos la *latiz de caras de un cono* en un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Un *cono* será un subconjunto cerrado de un espacio vectorial real normado (cerrado según la topología inducida por la norma en el espacio), no vacío, cerrado bajo combinaciones lineales no negativas de sus elementos, con la condición adicional de que el único vector del cono que posea inverso aditivo dentro del cono sea el cero del espacio.

Una *cara* de un cono K será un cono F contenido en K con la propiedad de que si $v + w \in F$ para $v, w \in K$, entonces $v, w \in F$. En otras palabras, será un cono F contenido en K con la propiedad de que si $v, w \in K$ son tales que el interior relativo del segmento de recta que los une intersecta a F , entonces $v, w \in F$. Veremos que el conjunto de caras de un cono forma una *latiz* bajo la relación de contención usual de conjuntos.

En 1981, en los artículos “*Modular Face Lattices: Low Dimensional Cases*” ([GPB-5]), “*Theory of Cones*” ([GPB-6]) y “*Problems in the Theory and Applications of Finite Dimensional Cones*” ([GPB-7]), George Philip Barker postuló la siguiente conjetura: “*Si K es un cono real autodual inescindible de dimensión cinco y su latiz de caras $\mathcal{F}(K)$ es modular, entonces $\mathcal{F}(K)$ no puede tener altura 3*”. Pregunta que se enmarca en el problema de clasificar geoméricamente los conos cuya latiz de caras es *modular*. En comunicación con Barker nos enteramos que esta conjetura carecía de demostración o contraejemplo. Una meta del presente trabajo fue demostrar, junto con mi asesora de tesis, que la conjetura es cierta. De hecho, logramos dar una demostración que no hace uso de la hipótesis de *autodualidad* de K .

En “*Modular Face Lattices: Low Dimensional Cases*” ([GPB-5]), Barker demuestra que la conjetura mencionada es válida en dimensión 4, es decir, prueba que “*si K es un cono real autodual inescindible de dimensión cuatro y su latiz de caras $\mathcal{F}(K)$ es modular, entonces $\mathcal{F}(K)$ no puede tener altura 3*”. En esta tesis logramos demostrar que esto sucede sin hacer uso de la hipótesis de *autodualidad* de K .

Una idea esencial para conseguir estas demostraciones es sugerida por Barker en “*Faces and Duality in Convex Cones*” ([GPB-4]), artículo en el cual dice que los resultados que obtiene acerca

de la latiz de caras de un cono de dimensión finita, son “equivalentes bajo una transformación natural de lenguaje a resultados acerca de conjuntos convexos compactos”. En esta tesis tratamos de establecer dicha transformación natural, y la usamos para obtener resultados acerca de conos basados en la geometría de convexos compactos y viceversa. Cabe aclarar que no usamos la expresión “transformación natural” en un sentido categórico.

Es aquí donde quiero agradecer a G. P. Barker y a Bit-Shun Tam por la comunicación que con ambos sostuvimos, ya que muy amablemente nos mostraron qué se había hecho al respecto. Además, B. Tam nos envió la traducción de los principales resultados de la Tesis de Maestría de uno de sus alumnos (véase la referencia [YCN]).

Explicaremos brevemente el contenido, por capítulos, de la presente tesis: Los capítulos 3 y 4 constituyen el corazón de este trabajo. En el capítulo 3 establecemos un isomorfismo entre la latiz de caras de un cono K de dimensión finita n y la latiz de \mathcal{C} -caras de un *corte transversal convexo* suyo (“convex cross section”). Un corte transversal convexo de K será un subconjunto convexo compacto $(n - 1)$ -dimensional suyo C tal que K se obtenga como la unión de los rayos “positivos” generados por los elementos de C . Esto nos permitirá, en muchas ocasiones, analizar con mayor facilidad la geometría de K , pues, por ejemplo, un corte transversal convexo de un cono de dimensión 4 tendrá dimensión 3. En el capítulo 3, también deducimos consecuencias para conjuntos convexos compactos de dimensión finita, algunas de las cuales, a pesar de tener una clara obviedad intuitiva, carecen de demostraciones triviales o cortas.

Posteriormente, en el capítulo 4, explotamos el isomorfismo establecido en el capítulo 3, para obtener resultados acerca de la geometría de un cono de *dimensión baja* a partir de su latiz de caras, cuando ésta tiene *altura baja*, haciendo uso de los muy útiles *compactos estrictamente convexos*.

Los capítulos 1 y 2 son una introducción a nuestro trabajo. En el capítulo 1 damos las nociones básicas de la Teoría de Latices, que usamos brevemente en el capítulo 2, y de manera más fuerte en los capítulos 3 y 4. El capítulo 2 está constituido por los resultados básicos de la Teoría de Conos. En él, buscamos dar la mejor descripción posible del comportamiento de la latiz de caras de un cono. Cabe señalar que usualmente la definición de cono se da en espacios reales o complejos normados; sin embargo, en esta tesis omitimos por completo cualquier definición o uso de conos en espacios complejos. En [BZS] puede verse la definición de cono complejo y que todo cono complejo es también un cono real.

Con el afán de que el contenido de esta tesis sea comprendido con el mínimo de prerrequisitos posible, en los capítulos 1 y 2 comenzamos desde los conceptos completamente elementales. El lector que domine el material impartido en los cursos de Análisis Matemático I, Álgebra Lineal I y Álgebra Lineal II, y tenga las nociones básicas de Topología, debe poder leer este trabajo sin

problema alguno: Salvo en obviedades claras y proposiciones cuyas demostraciones distraerían demasiado la atención del lector, tratamos de dar pruebas completas de los resultados obtenidos; además, damos sendas referencias para los pocos resultados que enunciamos sin demostración, éstos se encuentran, principalmente, en la sección 3 del capítulo 4, la cual es incluida para dar un panorama más completo del comportamiento de las latices de caras de conos. También incluimos un apéndice acerca de espacios vectoriales reales normados, que tiene por objeto central probar un hecho que usamos repetidamente, a saber, que todas las normas en un espacio real de dimensión finita son equivalentes.

Sobre los detalles notacionales: hemos incluido un “Glosario de Símbolos”, en el cual podrá consultarse las notaciones “no estándar” que aquí usamos.

Acerca de algunos detalles técnicos: muchos de nuestros resultados son válidos para espacios vectoriales reales de dimensión finita sin que éstos sean necesariamente los \mathbb{R}^n ; sin embargo, cuando, para enunciar estos resultados con una mayor generalidad (generalidad más bien sutil), necesitamos dar muchos rodeos, hemos preferido quedar satisfechos con establecer el enunciado para los \mathbb{R}^n .

Y un par de observaciones un pocos más ociosas: Suponemos que el cero **no** pertenece al conjunto de los números naturales; esto lo hacemos para facilitar la enunciación de proposiciones. También, repetidamente hacemos uso del Axioma de Elección; de hecho, en ocasiones hacemos esto sin aclararlo explícitamente.

Para evitar confusiones en la lectura, la numeración de los teoremas, definiciones, corolarios..., es corrida, de manera que en toda la tesis hay, por ejemplo, un solo lema 21, una sola definición 15, etc. Nos contentamos con mencionar la sección en la que se encuentra un resultado citado, cuando éste es citado en una sección a la cual no pertenece. Así, por ejemplo, si en el capítulo 4 nos referimos al teorema 120, que se encuentra en la sección 5 del capítulo 2, diremos algo parecido a “debido al teorema 120 (sección 2.5)”.

Este trabajo fue sustentado parcialmente por el apoyo del proyecto PAPIIT: “Álgebra Lineal y Representaciones de Grupos”. También tuvo lugar gracias a la “Beca de Lugar” que el Instituto de Matemáticas de la UNAM me ha otorgado durante un año y medio en sus instalaciones. La ayuda que he recibido de Abraham Martín del Campo en el perfeccionamiento del “texeo” de esta tesis y en la elaboración de los dibujos ha sido de gran valor para mí: realmente hizo maravillas que nos permitieron corregir una infinidad de “missprints” para poder obtener la versión final. Por supuesto, los errores que sobrevivieron a la habilidad de Abraham, son responsabilidad mía.

Después de este preámbulo, entremos en materia.

Daniel Labardini, Mayo de 2004.

Capítulo 1

Elementos de la Teoría de Latices

–Many that live deserve death, and some that die deserve life. Can you give it to them, Frodo?

Gandalf en “*The Lord of the Rings, The Fellowship of the Ring*”.

Este capítulo está dedicado a establecer las nociones básicas de la Teoría de Latices, que utilizaremos a lo largo del presente trabajo. Las referencias para un estudio más detallado son [Bi] y [PC]. Una latiz será un conjunto con un cierto orden (un orden *parcial*), de manera que cualquier par de elementos tenga un *supremo* y un *ínfimo*. Comencemos definiendo lo que es un orden parcial.

1.1. Conjuntos Parcialmente Ordenados

Definición 1. Sean A un conjunto y \leq una relación binaria sobre A (es decir, un subconjunto de $A \times A$). Decimos que \leq **ordena parcialmente a A** , o que \leq es un **orden parcial para A** ssi se cumplen simultáneamente las siguientes 3 condiciones:

$$(i) \quad \forall x \in A \quad (x \leq x) \quad \text{(Reflexividad)}$$

$$(ii) \quad \forall x, y \in A \quad (x \leq y \text{ y } y \leq x \Rightarrow x=y) \quad \text{(Antisimetría)}$$

$$(iii) \quad \forall x, y, z \in A \quad (x \leq y \text{ y } y \leq z \Rightarrow x \leq z) \quad \text{(Transitividad)}$$

Diremos también que $\langle A, \leq \rangle$ es un **conjunto parcialmente ordenado**.

Nota 2. Si $\langle A, \leq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado, a veces diremos que A es el conjunto parcialmente ordenado, haciendo referencia tácita a la relación \leq .

Notación 3. Si $x, y \in A$ son tales que $x \leq y$ y $x \neq y$, escribiremos $x < y$. Y si $x \leq y$ ($x < y$), también escribiremos $y \geq x$ ($y > x$).

Ejemplo 4. $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$, donde \leq es el orden usual. Éste es también un ejemplo de lo que es un orden total. ▲

Ejemplo 5. Dado cualquier conjunto C , $\langle \wp(C), \subseteq \rangle$ es un orden parcial, donde $\wp(C)$ es la potencia de C , i.e., el conjunto cuyos elementos son los subconjuntos de C ; $y \subseteq$ es la contención de conjuntos. ▲

Ejemplo 6. Si V es un espacio vectorial, entonces el conjunto $S = \{W / W \text{ es subespacio vectorial de } V\}$ se encuentra parcialmente ordenado también por la relación de contención \subseteq . ▲

Ejemplo 7. Dado un conjunto parcialmente ordenado $\langle A, \leq \rangle$, se puede construir un nuevo orden parcial \leq^{op} sobre A mediante la regla $x \leq^{op} y \iff y \leq x$. $\langle A, \leq^{op} \rangle$ recibe el nombre de orden parcial dual de $\langle A, \leq \rangle$. Si hacemos referencia tácita a \leq^{op} escribiremos A^{op} . ▲

Definición 8. Dados conjuntos parcialmente ordenados A y B , se dice que una función $\Psi : A \rightarrow B$ **preserva el orden** ssi $\forall x, y \in A$ ($x \leq y \implies \Psi(x) \leq \Psi(y)$). También suele decirse que es un **morfismo de órdenes parciales**. Un morfismo de órdenes parciales $\Psi : A \rightarrow B$ que tenga una función inversa bilateral $\Omega : B \rightarrow A$ que preserve el orden es llamado un **isomorfismo de órdenes parciales**. En otras palabras, $\Psi : A \rightarrow B$ es un isomorfismo de órdenes parciales ssi es una biyección y $\forall x, y \in A$ ($x \leq y \iff \Psi(x) \leq \Psi(y)$). Si tal es el caso, se dice que A y B son **isomorfos** como conjuntos parcialmente ordenados.

Definición 9. Es posible que tengamos una función entre conjuntos parcialmente ordenados $\Psi : A \rightarrow B$ que no preserve el orden, sino que lo invierta, es decir, que cumpla con que $\forall x, y \in A$ ($x \leq y \implies \Psi(x) \geq \Psi(y)$). En tal el caso, diremos que Ψ **invierte el orden**, o que es un **morfismo dual de órdenes parciales**. Llamaremos a Ψ un **isomorfismo dual de órdenes parciales** ssi es una biyección y cumple con que $\forall x, y \in A$ ($x \leq y \iff \Psi(x) \geq \Psi(y)$).

Supóngase que se tiene un morfismo de órdenes parciales $\Psi : A \rightarrow B^{op}$, entonces $\Psi : A \rightarrow B$ es un morfismo dual de órdenes parciales. Esto también sucede si $\Psi : A^{op} \rightarrow B$. Y si $\Phi : A \rightarrow B$ preserva el orden, entonces $\Phi : A \rightarrow B^{op}$ ($\Phi : A^{op} \rightarrow B$) invierte el orden.

1.2. Supremos e Ínfimos

Pasemos ahora a dos conceptos en los cuales se basa la definición de latiz, éstos son las definiciones de supremo e ínfimo de un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado:

Definición 10. Sean $\langle A, \leq \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y $S \subseteq A$. Diremos que $M \in A$ es el **supremo** de (los elementos de) S ssi:

- (i) $\forall x \in S$ se tiene que $x \leq M$
- (ii) Para cada $M' \in A$ con la propiedad de que $\forall x \in S, x \leq M'$, se tiene $M \leq M'$.

Definición 11. Diremos que $m \in A$ es el **ínfimo** de (los elementos de) S ssi:

- (i) $\forall x \in S$ se tiene que $m \leq x$
- (ii) Para cada $m' \in A$ con la propiedad de que $\forall x \in S, m' \leq x$, se tiene $m' \leq m$.

Notación 12. Si M es el supremo de S , a menudo escribiremos $M = \vee S$ o $M = \bigvee_{s \in S} s$. Y si m es el ínfimo de S , usualmente lo denotaremos como $m = \wedge S$ o como $m = \bigwedge_{s \in S} s$.

Nota 13. Obsérvese que (en caso de existir) los supremos e ínfimos son únicos.

Definición 14. Si M es el supremo de S y $M \in S$, diremos que M es el **máximo** de (los elementos de) S . Si m es el ínfimo de S y $m \in S$, diremos que m es el **mínimo** de (los elementos de) S .

Definición 15. Si $\langle A, \leq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado y $a, b \in A$, diremos que b **cubre** a a , o que a es **cubierto** por b , y escribiremos $a \rightarrow b$ (o $b \leftarrow a$), ssi: (i) $a < b$ y (ii) no existe $x \in A$ tal que $a < x < b$.

Nota 16. En un conjunto parcialmente ordenado $\langle A, \leq \rangle$, dado $a \in A$, no necesariamente existe un b que cubra a a . Y en caso de existir dicho b , no necesariamente es único. Por último, también es conveniente mencionar que puede haber elementos de A que son cubiertos, y, al mismo tiempo, elementos de A que no son cubiertos por nadie. Demos algunos ejemplos de estos casos.

Ejemplo 17. *Así, por ejemplo, si consideramos \mathbb{N} con el orden usual \leq , tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \rightarrow (n + 1)$; es decir, todo número natural es cubierto por su sucesor en $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$. En cambio, si tomamos en cuenta \mathbb{R} también con el orden usual, dado $a \in \mathbb{R}$, no existe $b \in \mathbb{R}$ que lo cubra.*

▲

Ejemplo 18. *Y si nuestro conjunto parcialmente ordenado es el conjunto de todos los subgrupos aditivos de \mathbb{Z} (ordenado por la contención), el subgrupo $\{0\}$ no es cubierto por nadie, los subgrupos de la forma $p\mathbb{Z}$ con p primo son cubiertos sólo por \mathbb{Z} , y los subgrupos de la forma $pq\mathbb{Z}$, con p y q primos distintos, son cubiertos al mismo tiempo por $p\mathbb{Z}$ y por $q\mathbb{Z}$.*

▲

1.3. Latices

Llegamos entonces a la definición de latiz:

Definición 19. Sea $\langle A, \leq \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado. Diremos que $\langle A, \leq \rangle$ es una latiz ssi cada par de elementos de A tiene un supremo y un ínfimo. El supremo de $x, y \in A$ suele denotarse por $x \vee y$, y el ínfimo por $x \wedge y$.

Ejemplo 20. Dado un conjunto C , se tiene que $\langle \wp(C), \subseteq \rangle$ es una latiz, en que el supremo y el ínfimo vienen dados por la unión y la intersección (conjuntistas), respectivamente. \blacktriangle

Así, vemos que si $\langle A, \leq \rangle$ es una latiz, entonces tenemos las operaciones (binarias) \vee y \wedge . A continuación veremos las propiedades más relevantes de dichas operaciones, y luego veremos que si tenemos dos operaciones ∇ y Δ que cumplen con estas propiedades, entonces determinan por completo un orden parcial \preceq en A tal que $\langle A, \preceq \rangle$ es una latiz y ∇ y Δ son las operaciones supremo e ínfimo (respectivamente) correspondientes a \preceq . Esto nos dirá que se puede definir el concepto de latiz en términos de operaciones binarias o, como lo hemos hecho, en términos de órdenes parciales.

Lema 21. Dada una latiz $\langle A, \leq \rangle$, tenemos entonces dos operaciones $\vee : A \times A \rightarrow A$, $\wedge : A \times A \rightarrow A$, con las siguientes propiedades (desde luego, denotamos $\vee(x, y)$ por $x \vee y$ y $\wedge(x, y)$ por $x \wedge y$):

$$\mathbf{L1.} \quad \forall x \in A, \quad x \vee x = x = x \wedge x. \quad (\text{Idempotencia})$$

$$\mathbf{L2.} \quad \forall x, y \in A, \quad x \wedge y = y \wedge x \quad y \vee x = x \vee y. \quad (\text{Conmutatividad})$$

$$\mathbf{L3.} \quad \forall x, y, z \in A, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \quad y$$

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z. \quad (\text{Asociatividad})$$

$$\mathbf{L4.} \quad \forall x, y \in A, \quad x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y). \quad (\text{Absorción})$$

$$\text{Más aún, } \forall x, y \in A \quad (x \leq y \iff x \wedge y = x \iff x \vee y = y). \quad (\text{Consistencia})$$

Demostración. **L1** y **L2** son obvias. Para probar **L3**, observemos que $x \wedge (y \wedge z) \leq y \wedge z \leq y$, $x \wedge (y \wedge z) \leq x$, y por lo tanto, $x \wedge (y \wedge z) \leq x \wedge y$, y como $x \wedge (y \wedge z) \leq y \wedge z \leq z$, deducimos que $x \wedge (y \wedge z) \leq (x \wedge y) \wedge z$. Por otro lado, $(x \wedge y) \wedge z \leq x \wedge y \leq y$, $(x \wedge y) \wedge z \leq z$, y por lo tanto, $(x \wedge y) \wedge z \leq y \wedge z$, y como $(x \wedge y) \wedge z \leq x \wedge y \leq x$, concluimos que $(x \wedge y) \wedge z \leq x \wedge (y \wedge z)$. La demostración de que $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ se obtiene de la demostración que acabamos

de dar, *dualizándola* (véase [Bi]), esto es, sustituyendo cada \wedge por una \vee , e invirtiendo el \leq (sustituyéndolo por \geq).

L4 es obvia, pues $x \wedge y \leq x \leq x \vee y$, y la Consistencia es clara. ■

Probemos ahora que una latiz queda determinada por completo por operaciones que cumplan **L1–L4**:

Teorema 22. *Supóngase que tenemos un conjunto A , y dos operaciones binarias $\nabla : A \times A \rightarrow A$, $\Delta : A \times A \rightarrow A$ que satisfacen **L1**, **L2**, **L3** y **L4**. Definamos una relación binaria \leq mediante la regla $a \leq b \iff a \Delta b = a$. Entonces $\langle A, \leq \rangle$ es una latiz, y se tiene que para $x, y \in A$ $x \vee y = x \nabla y$ y $x \wedge y = x \Delta y$.*

Demostración. $\langle A, \leq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado:

De **L1** vemos que se verifica que $\forall x \in A (x \leq x)$. Sean $x, y \in A$ y supongamos que al mismo tiempo $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = x \Delta y = y \Delta x = y$; esto es, vemos que se cumple que $\forall x, y \in A (x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$. Finalmente, tomemos $x, y, z \in A$ y supongamos que cumplen que $x \leq y$ y $y \leq z$, esto quiere decir que $x = x \Delta y = x \Delta (y \Delta z) = (x \Delta y) \Delta z = x \Delta z$, lo cual significa que $x \leq z$. Nótese que ya hemos usado **L1**, **L2** y **L3** (al menos las partes que involucran el símbolo \wedge).

∇ y Δ son consistentes:

$x \leq y \implies x \Delta y = x \implies x \nabla y = (x \Delta y) \nabla y = y \nabla (y \Delta x) = y$, por **L2** y **L4**.
Recíprocamente, $x \nabla y = y \implies x \Delta y = x \Delta (x \nabla y) = x \implies x \leq y$, nuevamente por **L4**.

Todo par de elementos de A tiene un supremo y un ínfimo:

Sean $x, y \in A$. ¿Quiénes podrían ser mejores candidatos a supremo e ínfimo que $x \nabla y$ y $x \Delta y$? Probemos que lo son: $x \Delta (x \nabla y) = x \nabla y \Delta (x \nabla y) = y \Delta (y \nabla x) = y$ por **L2** y **L4**, de manera que $x \leq x \nabla y$ y $y \leq x \nabla y$. Supongamos que $M' \in A$ tiene la propiedad de que $x \leq M'$ y $y \leq M'$, entonces $(x \nabla y) \nabla M' = x \nabla (y \nabla M') = x \nabla M' = M'$, lo cual implica que $x \nabla y \leq M'$, por **L3** y por la consistencia que acabamos de probar. Por otro lado, debido a **L1**, **L2** y **L3**, $(x \Delta y) \Delta y = x \Delta (y \Delta y) = x \Delta y = (x \Delta x) \Delta y = x \Delta (x \Delta y) = (x \Delta y) \Delta x$, lo cual significa que $x \Delta y \leq y$, $x \Delta y \leq x$. Que $x \Delta y$ es el ínfimo de x y y se prueba de una manera completamente análoga a como se probó que $x \nabla y$ es el supremo de x y y . Esto significa que todo par de elementos tiene un supremo $x \vee y$ y un ínfimo $x \wedge y$, y que éstos coinciden, respectivamente, con $x \nabla y$ y $x \Delta y$. ■

Así, una latiz queda completamente determinada por las operaciones de supremo e ínfimo. Por esta razón, cuando tengamos una latiz $\langle A, \leq \rangle$, acostumbraremos escribir $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$, para hacer referencia explícita a dichas operaciones.

Ya que hemos definido una estructura, a saber, lo que es una latiz, definamos lo que será una subestructura, i.e., una sublatiz:

Definición 23. Una *sublatiz* de una latiz $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ es un subconjunto X de A con la propiedad de que $\forall x, y \in X$ se tiene $x \vee y, x \wedge y \in X$ (obviamente, restringimos a X las operaciones de supremo e ínfimo y la relación \leq para considerarlo latiz por derecho propio).

Ejemplo 24. Dados una latiz $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ y elementos $a, b \in A$, el conjunto $[a, b] = \{x \in A / a \leq x \leq b\}$ es una sublatiz de $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ (incluso cuando es vacío). ▲

Nota 25. Puede haber subconjuntos de A que sean latices bajo el orden parcial que heredan de A , pero que no sean sublatices de A .

Ejemplo 26. Para ejemplificar la nota anterior, sea $C = \{x_1, x_2, x_3\}$ un conjunto con tres elementos. Entonces $D = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, C\}$ es una latiz si se le considera ordenado por \subseteq , es decir, es una latiz con el orden parcial que hereda de $\langle \wp(C), \subseteq \rangle$. Sin embargo, $\langle D, \subseteq \rangle$ **no** es una sublatiz de $\langle \wp(C), \subseteq \rangle$. ▲

Definamos ahora lo que es un morfismo entre este tipo de estructuras.

Definición 27. Sea $\Psi : A \rightarrow B$ una función entre los conjuntos subyacentes de latices $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ y $\langle B, \leq, \vee, \wedge \rangle$. Diremos que Ψ es un **sup-morfismo** ssi $\forall x, y \in A, \Psi(x \vee y) = \Psi(x) \vee \Psi(y)$; llamaremos a Ψ un **inf-morfismo** ssi $\forall x, y \in A, \Psi(x \wedge y) = \Psi(x) \wedge \Psi(y)$, y un **morfismo de latices** ssi es al mismo tiempo un sup-morfismo y un inf-morfismo. Finalmente, Ψ será un **isomorfismo de latices** ssi es un morfismo de latices biyectivo.

1.4. Tipos de Latices

Veamos algunos de los principales tipos de latices que existen. La importancia de algunos radica en el parecido de las operaciones \vee y \wedge con las operaciones de suma y multiplicación de un anillo. Las latices que posean este parecido serán las distributivas, modulares y semimodulares. Habrá otras en las que estaremos buscando un parecido a la unión e intersección de conjuntos, ellas serán las completas y las complementadas. Comenzaremos viendo lo que es la latiz dual de una latiz dada.

Recordemos que si $\langle A, \leq \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado, podemos construir un nuevo orden parcial \leq^{op} para A mediante la regla $x \leq^{op} y \iff y \leq x$. Es muy fácil ver que si $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ es una latiz, entonces $\langle A, \leq^{op} \rangle$ es también una latiz, en la que, para $x, y \in A$, $x \vee^{op} y = x \wedge y$ y $x \wedge^{op} y = x \vee y$.

Definición 28. La latiz $\langle A, \leq^{op}, \vee^{op}, \wedge^{op} \rangle$ recién descrita recibe el nombre de latiz **dual** de $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$.

Definición 29. Si $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ es una latiz, diremos que es **completa** ssi todo subconjunto de A tiene supremo e ínfimo.

Ejemplo 30. Dado un conjunto C , $\langle \wp(C), \subseteq, \cup, \cap \rangle$ es una latiz completa. Nótese que tiene a C como elemento máximo, y a \emptyset como elemento mínimo. ▲

Ejemplo 31. Si $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ es una latiz cuyo conjunto subyacente A es finito, entonces es completa; esta afirmación es fácil de demostrar por inducción sobre el número de elementos de $S \subseteq A$. ▲

Ejemplo 32. Dado un grupo (espacio vectorial, anillo, campo, módulo...) G , como “intersección conjuntista arbitraria de subgrupos (subespacios, ideales, subanillos..., resp.) de G es de nuevo un subgrupo (subesp., ideal, ..., resp.)”; no es muy difícil ver que $\langle G, \subseteq, \vee, \cap \rangle$ es una latiz completa, donde, para cualquier familia \mathcal{F} de subgrupos (subesps....) de G , $\vee \mathcal{F} = \cap \{S / S \text{ es subgrupo (subesps....) de } G \text{ y } \cup \mathcal{F} \subseteq S\}$. Obsérvese que en todas las latices mencionadas en este ejemplo, G es el elemento máximo, y $\{0\}$ es el elemento mínimo. ▲

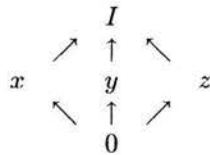
Ejemplo 33. En los capítulos 2 y 3 veremos que para un conjunto convexo C , “intersección arbitraria de caras es cara”, así que la familia de caras de C forma una latiz completa (nuevamente, para una familia \mathcal{F} de caras de C , $\bigvee \mathcal{F} = \bigcap \{F / F \text{ es cara de } C \text{ y } \bigcup \mathcal{F} \subseteq F\}$). ▲

Ejemplo 34. (\mathbb{R}, \leq) es una latiz, pero no es completa, porque cualquier subconjunto no acotado carece de supremo o de ínfimo. $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \leq)$ también es latiz, pero no es completa porque cualquier subconjunto que no sea acotado inferiormente carece de ínfimo; a pesar de ello, cualquier subconjunto **no vacío** tiene supremo. Por último, $(\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}, \leq)$ es una latiz completa. Obsérvese que en este último ejemplo, $\bigvee \emptyset = -\infty = \bigwedge (\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\})$ y $\bigwedge \emptyset = \infty = \bigvee (\mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\})$. ▲

Esto último es característico de una latiz completa. Es decir, si tenemos una latiz completa (A, \leq, \vee, \wedge) , entonces A tiene un elemento máximo $I = \bigvee A = \bigwedge \emptyset$ y un elemento mínimo $0 = \bigwedge A = \bigvee \emptyset$. En relación con las latices que tienen elementos máximo y mínimo hacemos esta definición:

Definición 35. Sea (A, \leq, \vee, \wedge) una latiz con elementos máximo I , y mínimo 0 . Dados $x, y \in A$, diremos que y es un **complemento** de x ssi (i) $x \vee y = I$ y (ii) $x \wedge y = 0$. Diremos que (A, \leq, \vee, \wedge) es **complementada** o **con complementos** ssi todo elemento de A tiene un complemento (en A).

En general, los complementos **no** son únicos, la siguiente latiz nos da un ejemplo:



Ejemplo 36. Si C es un conjunto, entonces $(\wp(C), \subseteq, \cup, \cap)$ es complementada, con complementos únicos, donde el complemento de $S \subseteq C$ es $C \setminus S$. ▲

Ejemplo 37. Dado V , un espacio vectorial real o complejo de dimensión finita con producto escalar, la latiz de subespacios de V es complementada, pues si W es subespacio de V , W^\perp es un complemento. Obsérvese que los complementos no son únicos; para verlo, basta ver que podemos extender una base de W (si éste es subespacio propio no trivial) de distintas maneras a una base de V . ▲

Definición 38. Sea $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ una latiz con elemento mínimo 0. Un **átomo** de A es un elemento $x \in A$ que cubre a 0.

Definición 39. Una latiz $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ con elemento mínimo 0 es **atómica** ssi todo elemento de A es el supremo de algún conjunto de átomos de A , ie, ssi $\forall x \in A \exists S \subseteq A$ con la propiedad de que todo $y \in S$ es átomo y $x = \vee S = \bigvee_{y \in S} y$.

Ejemplo 40. Si C es un conjunto, entonces $\langle \wp(C), \subseteq, \cup, \cap \rangle$ es atómica. Los átomos son los subconjuntos de C que tienen un solo elemento. ▲

Pasemos a las latices cuyas operaciones \vee y \wedge guardan parecido a las operaciones de un anillo. Comencemos con la distributividad, que nos da una regla, de manera que podamos ver a \vee como análoga a la suma de un anillo, y a \wedge como similar a la multiplicación. Veremos también que la analogía es un tanto limitada, ya que la distributividad con respecto a \vee es equivalente a la distributividad con respecto a \wedge , cosa que en los anillos no pasa, ya que, en general, el producto no distribuye a la suma (la analogía se reestablece de un modo un tanto distinto en las *álgebras booleanas*, que son un tipo particular de latices distributivas que no veremos aquí por salirse de los objetivos de la tesis; [Bi] toca este tema).

Definición 41. Una latiz $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ es **distributiva** ssi $\forall x, y, z \in A$ se cumple la igualdad $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Proposición 42. $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ es distributiva $\iff \forall x, y, z \in A$ se tiene $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Demostración. \implies : Sean $x, y, z \in A$, entonces $(x \vee y) \wedge (x \vee z) = [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z] = x \vee [z \wedge (x \vee y)] = x \vee [(z \wedge x) \vee (z \wedge y)] = [x \vee (z \wedge x)] \vee (z \wedge y) = x \vee (z \wedge y)$.

\impliedby : Sólo intercámbiese los signos \vee y \wedge que aparecen en la demostración de \implies (véase [Bi] para la validez de este argumento, que es la *dualización*). ■

Vamos a ver ahora cuál es la “falla” de las latices no distributivas, pues hay desigualdades distributivas que toda latiz cumple.

Lema 43. En cualquier latiz $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ se cumplen las desigualdades distributivas:

$$(i) \ x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$(ii) \ x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$\forall x, y, z \in A$.

Demostración. Claramente tenemos que $x \wedge y \leq x, x \wedge y \leq y \leq y \vee z$, y por lo tanto, $x \wedge y \leq x \wedge (y \vee z)$. Análogamente, $x \wedge z \leq x \wedge (y \vee z)$. De donde desprendemos que $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x \wedge (y \vee z)$. Lo cual prueba la primera desigualdad $\forall x, y, z \in A$.

Para la segunda desigualdad tenemos que, si $x, y, z \in A$, entonces $x \vee y \geq x, x \vee y \geq y \geq y \wedge z$, por lo que $x \vee y \geq x \vee (y \wedge z)$. De manera análoga, $x \vee z \geq x \vee (y \wedge z)$, y por lo tanto, $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \geq x \vee (y \wedge z)$. Esto prueba la segunda desigualdad. ■

Entonces, si $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ no es distributiva, deben existir elementos $x, y, z \in A$ tales que alguna de las dos desigualdades es estricta; ya sea que $x \wedge (y \vee z) > (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ o que $x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Definición 44. Una latiz $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ es **modular** ssi $\forall f, g, h \in A$ tales que $f \leq h$, se cumple la igualdad $f \vee (g \wedge h) = (f \vee g) \wedge h$.

Nota 45. Toda latiz distributiva es modular, pero no toda latiz modular es distributiva.

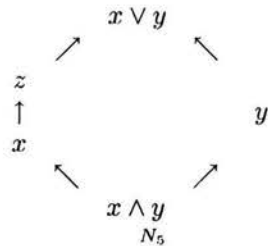
Lema 46. En una latiz $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ se cumple la desigualdad modular:

$$\forall x, y, z \in A [x \leq z \implies x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z].$$

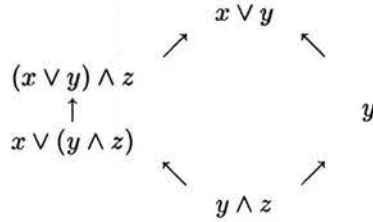
Si $x = z$, entonces se tiene la igualdad $(x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z) \forall y \in A$.

Demostración. Si $x \leq z$, entonces, debido a que $x \leq x \vee y$, tenemos que $x \leq (x \vee y) \wedge z$. También vemos que $y \wedge z \leq y \leq x \vee y, y \wedge z \leq z$, y por lo tanto, $y \wedge z \leq (x \vee y) \wedge z$. Así, $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$. Si $x = z$, entonces $x \vee (y \wedge x) = x = (x \vee y) \wedge x$. ■

Nos será útil ver geoméricamente la situación en la que “falle” la modularidad, o sea, cuando tenemos una latiz no modular. Para ello, consideremos la latiz N_5 , cuyo diagrama mostramos a continuación:



Si A tiene a N_5 como sublatiz, esto es, si A posee una sublatiz cuyo diagrama sea el mismo que el de N_5 , entonces, vemos que $x \leq z$, y también $x = x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge z = z$, y por lo tanto A no es modular. Recíprocamente, si A no es modular, entonces (por el lema 46 que acabamos de demostrar), existen, $x, y, z \in A$ tales que $x < z$ y $x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge z$. Si ponemos atención en los elementos $y, x \vee y, y \wedge z, (x \vee y) \wedge z$ y $x \vee (y \wedge z)$, podemos demostrar que forman una sublatiz de A , y que su diagrama es:



que es N_5 . Sólo nos falta un detalle para probar el siguiente teorema:

Teorema 47. *Una latiz es no modular si y sólo si contiene a N_5 como sublatiz.*

Demostración. Lo único que nos falta probar es, que en el caso en que A no es modular, el conjunto $\{y, x \vee y, y \wedge z, (x \vee y) \wedge z, x \vee (y \wedge z)\}$ es una sublatiz de A (donde $x, y, z \in A$ cumplen con las propiedades descritas en el párrafo anterior). Para ello, basta demostrar que $[(x \vee y) \wedge z] \vee y = x \vee y$, $[x \vee (y \wedge z)] \vee y = x \vee y$, $[(x \vee y) \wedge z] \wedge y = y \wedge z$, $[x \vee (y \wedge z)] \wedge y = y \wedge z$.

$[(x \vee y) \wedge z] \vee y = x \vee y$: Es obvio que $y \leq x \vee y$ y que $(x \vee y) \wedge z \leq x \vee y$, por lo que $[(x \vee y) \wedge z] \vee y \leq x \vee y$. Supongamos ahora que $M \in A$ es tal que $y \leq M$ y que $(x \vee y) \wedge z \leq M$; entonces $x \leq x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge z \leq M$, por lo que $x \vee y \leq M$. Entonces podemos concluir la primera igualdad.

$[x \vee (y \wedge z)] \vee y = x \vee y$: De la igualdad anterior, es fácil ver que $[x \vee (y \wedge z)] \vee y \leq x \vee y$. Ahora, si $M \in A$ tiene la propiedad de que $x \vee (y \wedge z) \leq M$, $y \leq M$, entonces $x \leq M$ y $y \leq M$, y entonces $x \vee y \leq M$. Esto prueba la segunda igualdad.

$[(x \vee y) \wedge z] \wedge y = y \wedge z$: Es obvio que $(x \vee y) \wedge z \leq z$, por lo que $[(x \vee y) \wedge z] \wedge y \leq y \wedge z$. Si $m \in A$ es tal que $m \leq y$, $m \leq z$, entonces $m \leq x \vee y$, de donde $m \leq (x \vee y) \wedge z$, y por lo tanto, $m \leq [(x \vee y) \wedge z] \wedge y$. Así, queda probada la tercera igualdad.

$[x \vee (y \wedge z)] \wedge y = y \wedge z$: Como por hipótesis se cumple la desigualdad $x \vee (y \wedge z) < (x \vee y) \wedge z$, deducimos que $y \wedge z = [(x \vee y) \wedge z] \wedge y < [x \vee (y \wedge z)] \wedge y$. Sea entonces $m \in A$ con la propiedad de que $m \leq x \vee (y \wedge z)$ y $m \leq y$, entonces, dado que $x < z$ por hipótesis, $m \leq x \vee (y \wedge z) \leq z \vee (y \wedge z) = z$, de donde $m \leq y \wedge z$. Con lo cual probamos la última igualdad. ■

De manera inmediata tenemos un corolario muy útil.

Corolario 48. *Toda sublatiz de una latiz modular es modular. ■*

El corolario del siguiente teorema nos dará la pauta para definir latices semimodulares.

Teorema 49. *En una latiz modular $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$, la función $\phi_a: [b, a \vee b] \rightarrow [a \wedge b, a]$, $\phi_a(x) = x \wedge a$, es un isomorfismo de órdenes parciales cuya inversa es la función $\psi_b: [a \wedge b, a] \rightarrow [b, a \vee b]$ dada por $\psi_b(y) = y \vee b$.*

Demostración. Es claro que si $x \in [b, a \vee b]$, entonces $\phi_a(x) \in [a \wedge b, a]$, pues $b \leq x \leq a \vee b \implies a \wedge b \leq a \wedge x = \phi_a(x) \leq a \wedge (a \vee b) = a$. ϕ_a preserva el orden: si $x \leq z$, entonces $x \wedge a \leq z \wedge a$. ϕ_a refleja el orden: si $\phi_a(x) \leq \phi_a(z)$, entonces $x \wedge a \leq z \wedge a$, y por lo tanto, debido a la modularidad, $x = (b \vee a) \wedge x = b \vee (a \wedge x) \leq b \vee (a \wedge z) = (b \vee a) \wedge z = z$. ϕ_a es biyectiva: $\psi_b \circ \phi_a(x) = \psi_b(x \wedge a) = (x \wedge a) \vee b = b \vee (a \wedge x) = (b \vee a) \wedge x = x$ y $\phi_a \circ \psi_b(y) = \phi_a(y \vee b) = (y \vee b) \wedge a = y \vee (b \wedge a) = y$.

Así, habiendo mostrado que ϕ_a es biyectiva (tiene inversa bilateral), que preserva y refleja el orden, podemos concluir que es un isomorfismo de órdenes parciales. ■

Corolario 50. *En una latiz modular $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ se cumplen las siguientes dos propiedades:*

SMS. *Si $a \neq b$ y ambos, a y b , cubren a c (ie, $c \rightarrow a$, $c \rightarrow b$), entonces $a \vee b$ cubre tanto a a como a b (ie, $a \vee b \leftarrow a$, $a \vee b \leftarrow b$).*

SMI. *Dualmente, si $a \neq b$ y c cubre tanto a a como a b , entonces a y b cubren a $a \wedge b$.*

Demostración. Si a y $b \neq a$ cubren a c , entonces $c = a \wedge b$. Entonces, por el teorema inmediato anterior, $[a, a \vee b]$ y $[a \wedge b, b]$ son isomorfos; pero $[a \wedge b, b]$ consta sólo de dos elementos por hipótesis, a saber, de $a \wedge b$ y de b . Esto implica que $a \rightarrow a \vee b$. De manera análoga, $b \rightarrow a \vee b$. La segunda afirmación se demuestra de la misma forma. ■

Nota 51. *Puede demostrarse que si $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ tiene altura finita (para la definición de altura de una latiz, véase la definición 57 de la página 15), entonces es modular si y sólo si cumple simultáneamente **SMS** y **SMI** (véase el teorema II.16 de la página 41 de [Bi] para una prueba).*

Definición 52. *Las latices tales que todo par de elementos cumple SMS son llamadas superiormente semimodulares, mientras que las latices tales que todo par de elementos cumple SMI son llamadas inferiormente semimodulares.*

A continuación enunciamos una condición más fuerte que SMS, pero que en latices de altura finita (véase la definición 57 de la página 15) es equivalente a la semimodularidad superior (inferior). Para una prueba, puede consultarse el corolario 1 de la página 81 de [Bi].

Lema 53. *Una latiz de altura finita es superiormente semimodular si y sólo si, para cada par de elementos x, y , se cumple que $(x \wedge y \rightarrow x) \implies (y \rightarrow x \vee y)$. Dualmente, una latiz de altura finita es inferiormente semimodular si y sólo si, para cada par de elementos x, y , se cumple que $(x \wedge y \rightarrow x) \longleftarrow (y \rightarrow x \vee y)$. ■*

Y para finalizar esta sección, damos uno de los ejemplos más importantes de modularidad en latices. Sea G un grupo y consideremos el conjunto $\mathcal{N} = \{N/N \text{ es subgrupo normal de } G\}$, entonces $(\mathcal{N}, \subseteq, \vee, \cap)$ es una latiz en la que el supremo de $M, N \in \mathcal{N}$ viene dado por $M \vee N = MN = \{mn / m \in M \text{ y } n \in N\}$.

Ejemplo 54. *Dado un grupo G , los subgrupos normales de G forman una latiz modular.*

Demostración. Ya hemos establecido la manera de hacer a \mathcal{N} una latiz. En vista del lema inmediato anterior, para ver que $(\mathcal{N}, \subseteq, \vee, \cap)$ es modular basta demostrar que, para $L, N, M \in \mathcal{N}$, $L \subseteq N$ implica que $(L \vee M) \cap N \subseteq L \vee (M \cap N)$. Para ello, sea $a \in (L \vee M) \cap N$, entonces $a = lm$ para algunos $l \in L, m \in M$. Entonces $m = l^{-1}a$, con $l^{-1} \in L \subseteq N$ y $a \in (L \vee M) \cap N \subseteq N$, y por lo tanto $m \in N$. Esto significa que $a = lm$ con $l \in L$ y $m \in M \cap N$, es decir, $a \in L \vee (M \cap N)$. ■

1.5. La Condición de Jordan-Dedekind para Cadenas

Definición 55. Sean $\langle A, \leq \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y $x, y \in A$ tales que $x \leq y$. Una **cadena** de x a y es una sucesión de elementos de A (posiblemente infinita, pero necesariamente indizada por un ordinal $\alpha+1$), $C = \langle x_i \rangle_{i \in \alpha+1}$, tal que $x_0 = x$, $x_\alpha = y$ y $\forall i \in \{1, 2, \dots, \alpha\}$ $x_{i-1} < x_i$. Diremos que la **altura de la cadena** es $h(C) = \alpha$, y acostumbraremos a escribir la cadena como $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_\alpha$. Por último, diremos que la altura de la cadena es **finita** si α es un ordinal finito, es decir, un número natural.

Definición 56. Sean $\langle A, \leq \rangle$ un conjunto parcialmente ordenado y $x, y \in A$ tales que $x \leq y$. Una **cadena maximal** de x a y es una cadena $C = \langle x_i \rangle_{i \in \alpha+1}$ de x a y con la propiedad de que $\forall z \in A$ para la cual exista $i \in \{1, 2, \dots, \alpha\}$ tal que $x_{i-1} \leq z \leq x_i$, se tenga forzosamente que $x_{i-1} = z$ o que $x_i = z$.

Es fácil ver que $C = \langle x_i \rangle_{i \in \alpha+1}$ es una cadena maximal de x a y si y sólo si se cumple que $x_0 = x$, $x_\alpha = y$, y $x_{i-1} \rightarrow x_i$ para toda i .

Definición 57. Por la **altura** de un conjunto parcialmente ordenado $\langle A, \leq \rangle$, que denotaremos por $h(A)$, entenderemos el supremo de las alturas de las cadenas entre elementos de A . Diremos que $\langle A, \leq \rangle$ tiene **altura finita** ssi $h(A)$ es finita.

Podemos definir, de manera compatible con nuestra definición de altura de un orden parcial, lo que es la altura de un elemento de un conjunto parcialmente ordenado si éste tiene elemento mínimo 0. Compatible porque, si hay elementos máximo I y mínimo 0, entonces la altura $h(A)$ coincide con la altura de I .

Definición 58. Sean $\langle A, \leq \rangle$ un orden parcial con elemento mínimo 0 y $x \in A$, la **altura de x** será el supremo de las alturas de las cadenas de 0 a x , y la denotaremos por $h(x)$.

Definición 59. Diremos que un orden parcial $\langle A, \leq \rangle$ cumple con la **Condición de Jordan-Dedekind para Cadenas** ssi para todo $x, y \in A$ todas las cadenas maximales de uno a otro tienen la misma altura.

Teorema 60. Sea $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ una latiz superiormente semimodular de altura finita. Entonces A cumple con la Condición de Jordan-Dedekind para Cadenas.

Demostración. Mostraremos, por inducción sobre n , que si una cadena maximal de altura n conecta dos elementos arbitrarios de A , entonces todas las cadenas maximales que conectan dichos dos puntos tienen la misma altura n .

Más formalmente, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\psi(n)$ la propiedad $\forall x, y \in A [(\exists x=x_0 < \dots < x_n=y \text{ cadena maximal de altura } n) \implies (\text{toda cadena maximal de } x \text{ a } y \text{ tiene altura } n)]$. Mostraremos que $\forall n \in \mathbb{N}$ se cumple $\psi(n)$.

$\psi(1)$ es trivial, ya que $\forall x, y \in A$ tales que existe una cadena maximal de altura 1, se tiene que y cubre a x , y por lo tanto, la única cadena maximal de x a y es $x < y$.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que se cumple $\psi(n)$ y mostremos que se cumple $\psi(n+1)$: Sean $x, y \in A$, y supongamos que $\exists x=x_0 < \dots < x_{n+1}=y$ cadena maximal de altura $n+1$. Para mostrar que cualquier otra cadena maximal de x a y tiene altura $n+1$, sea $x=v_0 < v_1 < \dots < v_m=y$ una cadena maximal arbitraria que los conecta (nótese que $2 \leq m$ pues si $m=1$, entonces y cubre a x y entonces concluimos que $1=n+1$ pues ya vimos que $\psi(1)$ se cumple, pero entonces $n=0$ ∇)

Entonces, como x_1 y v_1 cubren ambos a x_0 , tenemos que $x_1 \wedge v_1 = x_0$, y por lo tanto, $x_1 \vee v_1$ cubre a la vez a x_1 y a v_1 . Si $x_1 \vee v_1 = y$, hemos terminado, porque entonces $n+1 = 2 = m$. Si no es así, sea $x_1 \vee v_1 = \lambda_0 < \dots < \lambda_s = y$ una cadena maximal (forzosamente finita pues A tiene altura finita) de $x_1 \vee v_1$ a y (ésta existe porque $x_1 < y$, $v_1 < y$, y además $x_1 \vee v_1 \neq y$). Entonces, como $x_1 < \dots < x_{n+1}=y$ es una cadena maximal de x_1 a y de altura n , la cadena (también maximal) $x_1 < x_1 \vee v_1 = \lambda_0 < \dots < \lambda_s = y$ también tiene altura n (por hipótesis de inducción), lo que implica que la cadena (también maximal) $v_1 < x_1 \vee v_1 = \lambda_0 < \dots < \lambda_s = y$ tiene altura n , lo cual implica a su vez (de nuevo por la hipótesis inductiva) que la cadena $v_1 < \dots < v_m=y$ tiene altura n , de donde concluimos que la cadena $x = v_0 < v_1 < \dots < v_m=y$ tiene altura $n+1$. ■

De manera *dual* (en el sentido de [Bi]), tenemos el siguiente teorema:

Teorema 61. *Sea $\langle A, \leq, \vee, \wedge \rangle$ una latiz inferiormente semimodular de altura finita. Entonces A cumple con la Condición de Jordan-Dedekind para Cadenas. ■*

Capítulo 2

Teoría de Conos

- What seems to be the problem?
- Death.
- Death?... Well, I'm afraid that's a little out of my jurisdiction.
- I want more life, father!

Tyrell y Roy en "*Blade Runner*".

Este capítulo está dedicado a presentar los principales resultados de la Teoría de Conos que utilizaremos en esta tesis. Aunque se puede considerar conos en espacios vectoriales complejos, nos dedicaremos a estudiar primordialmente conos en espacios reales. Y estaremos más interesados en conos en espacios de dimensión finita, pero alcanzaremos a dar algún ejemplo en dimensión infinita.

A lo largo de las secciones 2, 3, 4, 5, y 6 de este capítulo, supondremos que nuestros espacios vectoriales son reales y normados. En ocasiones, cuando V sea un espacio real de dimensión finita, supondremos que viene equipado de antemano con un producto interior; nuestra justificación para hacer esto se encuentra en [SF]. Cuando nos refiramos a \mathbb{R}^n , a menos que especifiquemos lo contrario, supondremos que la norma considerada es la usual (esto es, la que vale $\|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2} \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$). Comenzamos con algunos resultados elementales de conjuntos convexos que usaremos en este capítulo.

2.1. Nociones Preliminares de Conjuntos Convexos

Definición 62. Un subconjunto C de un espacio vectorial real es *convexo* ssi $\forall x, y \in C \forall t \in [0, 1], (1-t)x + ty \in C$.

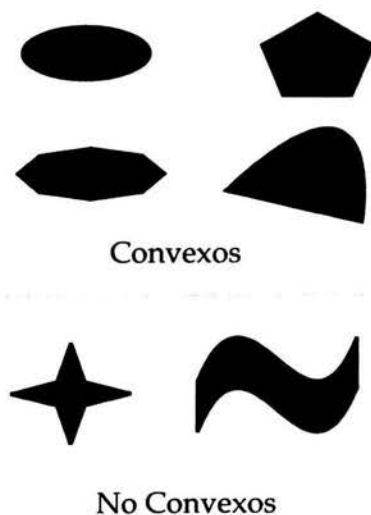


Figura 2.1:

Lema 63. Si V es un espacio vectorial real, y $\{C_i\}_{i \in I} \subseteq V$ es una familia no vacía de conjuntos convexos, entonces $\bigcap_{i \in I} C_i$ es nuevamente un conjunto convexo. ■

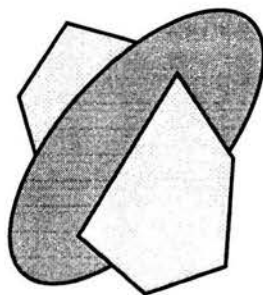


Figura 2.2: Intersección de convexos es convexa

Este lema nos permite definir la *envolvente convexa* de un subconjunto S de un espacio vectorial real, ya que al menos V pertenece a la familia de subconjuntos convexos de V que contienen a S .

Definición 64. Sean V un espacio vectorial real y $S \subseteq V$. Definimos la **envolvente convexa** de S , como la intersección de la familia de subconjuntos convexos de V que contienen a S . Esto es, $\text{conv}(S) = \bigcap \{C / C \text{ es convexo y } S \subseteq C \subseteq V\}$ es la envolvente convexa de S .

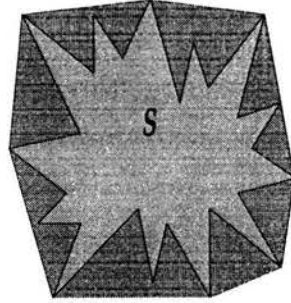


Figura 2.3: S y su envolvente convexa.

Así, por ejemplo, si $v, w \in V$, $\text{conv}(\{v, w\}) = \text{conv}(v, w)$ es el segmento de recta que los une (incluyéndolos a ellos dentro del segmento). Entonces C es convexo si y sólo si $\forall v, w \in C$ se cumple que $\text{conv}(v, w) \subseteq C$.

Proposición 65. Sea S un subconjunto de un espacio vectorial real V . Entonces $\text{conv}(S)$ es la unión de las envolventes convexas de los subconjuntos finitos de S . Esto es, $\text{conv}(S) = \bigcup \{\text{conv}(T) / T \text{ es un subconjunto finito de } S\}$.

Demostración. Es claro que $\bigcup \{\text{conv}(T) / T \text{ es un subconjunto finito de } S\} \subseteq \text{conv}(S)$ y que $S \subseteq \bigcup \{\text{conv}(T) / T \text{ es un subconjunto finito de } S\}$, por lo que, si este último es convexo, deberá tenerse que $\text{conv}(S) = \bigcup \{\text{conv}(T) / T \text{ es un subconjunto finito de } S\}$. Sean entonces $v, w \in \bigcup \{\text{conv}(T) / T \text{ es un subconjunto finito de } S\}$, entonces existen subconjuntos finitos de S , T_1 y T_2 tales que $v \in \text{conv}(T_1) \subseteq \text{conv}(T_1 \cup T_2)$ y $w \in \text{conv}(T_2) \subseteq \text{conv}(T_1 \cup T_2)$. Entonces $\text{conv}(v, w) \subseteq \text{conv}(T_1 \cup T_2)$. Como $T_1 \cup T_2$ es finito, vemos que $\text{conv}(v, w) \subseteq \bigcup \{\text{conv}(T) / T \text{ es un subconjunto finito de } S\}$. ■

Lema 66. Sea $T = \{v_1, \dots, v_m\}$ un subconjunto finito de V . Entonces $\text{conv}(T) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i / \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \text{ y } \forall i \lambda_i \geq 0 \right\}$.

Demostración. Denotemos por C al conjunto $\left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i / \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \text{ y } \forall i \lambda_i \geq 0 \right\}$. Es obvio que $T \subseteq C$, por lo que, si C es convexo, quedará establecido que $\text{conv}(T) \subseteq C$. Sean entonces $v =$

$\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i, w = \sum_{i=1}^m \beta_i v_i \in C$ y $t \in [0, 1]$. Entonces $(1-t)v + tw = (1-t) \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \right) + t \left(\sum_{i=1}^m \beta_i v_i \right) = \sum_{i=1}^m ((1-t)\alpha_i + t\beta_i) v_i$, donde $\sum_{i=1}^m ((1-t)\alpha_i + t\beta_i) = (1-t) \sum_{i=1}^m \alpha_i + t \sum_{i=1}^m \beta_i = 1$, y para cada i , $(1-t)\alpha_i + t\beta_i \geq 0$ porque ambos sumandos son no negativos. Es decir, $(1-t)v + tw \in C$. Por lo tanto, $\text{conv}(T) \subseteq C$.

Que $C \subseteq \text{conv}(T)$ lo demostramos por inducción sobre la cardinalidad de T : Si $|T| = m \in \{1, 2\}$, entonces es claro que $C \subseteq \text{conv}(T)$. Supongamos inductivamente que $m \geq 3$ y que el resultado es cierto para conjuntos con menos de m elementos. Sea entonces $v = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i \in C$; si $\alpha_1 = 1$, entonces $v = v_1 \in \text{conv}(T)$; por lo que podemos suponer que $\alpha_1 \neq 1$. Entonces $\sum_{j=2}^m \frac{\alpha_j}{1-\alpha_1} = 1$ y para toda $j \in \{2, \dots, m\}$ tenemos $\frac{\alpha_j}{1-\alpha_1} \geq 0$, de donde deducimos, dada la hipótesis inductiva, que $w = \sum_{j=2}^m \frac{\alpha_j}{1-\alpha_1} v_j \in \text{conv}(v_2, \dots, v_m) \subseteq \text{conv}(T)$. Pero entonces $v = \alpha_1 v_1 + (1-\alpha_1)w \in \text{conv}(T)$, pues $\text{conv}(T)$ es convexo. ■

Enunciamos sin demostración una proposición muy útil; la prueba puede leerse en la página 57 de [RW].

Proposición 67. *Sea S un subconjunto compacto de un espacio V de dimensión finita, entonces su envolvente convexa, $\text{conv}(S)$, es compacta.* ■

2.2. Conos

Sea V un espacio vectorial real con norma $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$. Recordemos que una norma induce una métrica y por lo tanto una topología en V . En la definición de cono entrará la noción de subconjunto cerrado de V , esto querrá decir que el subconjunto es cerrado según la topología inducida por la norma $\|\cdot\|$.

Definición 68. Sea $K \subseteq V$. Diremos que K es un cono de V ssi se cumplen simultáneamente las siguientes 4 condiciones:

- (i) K es cerrado.
- (ii) $K + K \subseteq K$ (es decir, $\forall v, w \in K, v + w \in K$).
- (iii) $\alpha K \subseteq K \forall \alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \geq 0$ (esto es, $\alpha v \in K \forall v \in K$).
- (iv) $K \cap (-K) = \{\bar{0}\}$, donde $-K = \{-v / v \in K\}$.

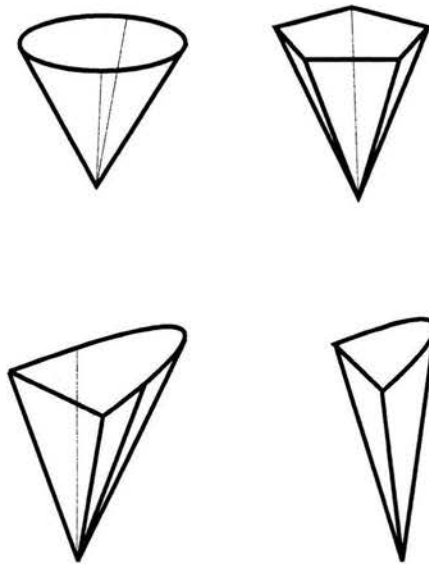


Figura 2.4: Conos tridimensionales

Lema 69. Sea $K \subseteq V$ un cono, entonces:

- a) $K \neq \emptyset$.
- b) K es convexo.

c) $-K$ es cono.

d) $\text{int}_V(-K) = -\text{int}_V(K)$.

Demostración. a) Por la condición iv) de la definición, K no puede ser vacío.

b) Sea $t \in [0, 1]$, entonces $1 - t \geq 0$, y por lo tanto, para $x, y \in K$, $(1 - t)x, ty \in K$ (por el postulado iii) de la definición), luego (por el postulado ii)) $(1 - t)x + ty \in K$. Luego, un cono real es convexo.

c) Es obvio que si K es un cono, entonces $-K$ también es cono.

d) Como dada cualquier bola abierta $B(x, \delta)$ se cumple que $-B(x, \delta) = B(-x, \delta)$, es fácil ver que $\text{int}_V(-K) = -\text{int}_V(K)$. ■

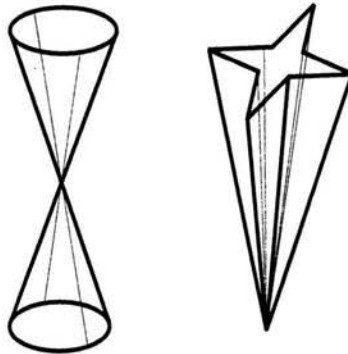


Figura 2.5: No Conos

Denotemos por $\langle S \rangle$ al subespacio vectorial de V generado por un subconjunto $S \subseteq V$. Entonces, ya que un cono K es cerrado bajo combinaciones lineales positivas de sus elementos, es fácil ver que $\langle K \rangle = K - K = \{v - w \mid v, w \in K\}$.

Recordemos que usando el Lema de Zorn, se puede demostrar que un conjunto S de vectores de V posee (al menos) un subconjunto maximal linealmente independiente, que resulta ser base de $\langle S \rangle$ (cuando V es de dimensión finita no se requiere del Lema de Zorn). En relación con conos, diremos que K es un **cono generador** si dicho subconjunto maximal es una base de V , esto es, si $\langle K \rangle = V$. Veamos cómo tiene esto que ver con la topología de K cuando V tiene dimensión finita.

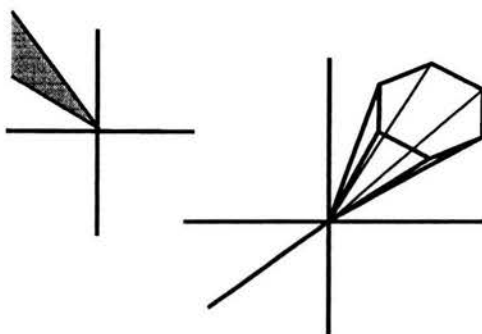


Figura 2.6: Conos generadores de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , respectivamente.

Definición 70. Sea K un cono de V , diremos que K es un **cono generador de V** ssi $\langle K \rangle = V$.

Definición 71. Dado un cono K (no necesariamente generador) de V , la **dimensión de K** , que denotaremos por $\dim(K)$, será la dimensión de $\langle K \rangle$ sobre \mathbb{R} .

Definición 72. Sea K un cono de V , diremos que K es un **cono sólido en V** ssi $\text{int}_V(K) \neq \emptyset$.

Lo primero que veremos es que si K es sólido, entonces contiene una base del espacio V . Luego veremos que si V tiene dimensión finita, entonces es equivalente para un cono ser sólido y contener una base de V . En la siguiente sección, que contendrá sólo ejemplos, quedará de manifiesto que si V no tiene dimensión finita, entonces no podemos garantizar esta equivalencia.

Lema 73. Sea K un cono sólido en V , entonces K es generador de V .

Demostración. Como K es sólido, existen $k \in K$ y $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ tales que $B(k, r) \subseteq K$. Sea $v \in V$, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, tal que $\|\alpha v\| < r$, entonces $\alpha v + k \in B(k, r) \subseteq K$ (véase la figura 2.7). Esto implica que $\alpha v + k = x \in K$, por lo que $v = \alpha^{-1}x - \alpha^{-1}k \in K - K = \langle K \rangle$. ■

Obsérvese que en la demostración de este lema, hemos demostrado también que, si $k \in \text{int}_V(K)$, entonces $\forall v \in V \exists \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, tal que $\alpha v + k \in K$. Escribamos esto como un corolario de nuestro lema.

Corolario 74. Sean K un cono sólido en V y $k \in \text{int}_V(K)$. Entonces $\forall v \in V \exists \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, tal que $\alpha v + k \in K$. ■

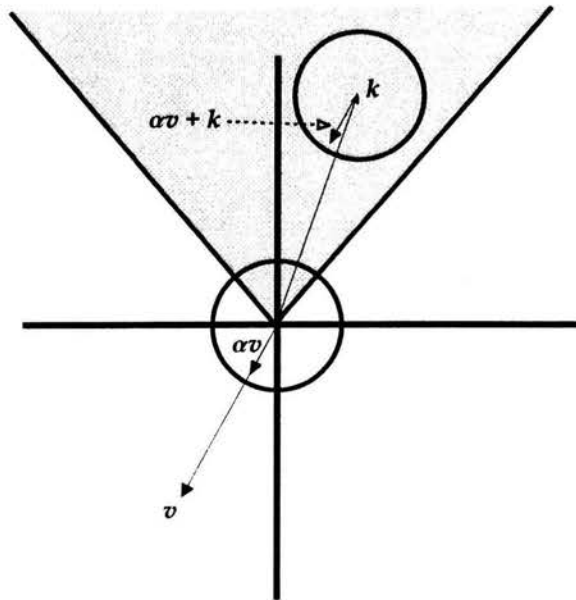


Figura 2.7:

En el apéndice de este trabajo (proposición 212 y teorema 218), puede verse que si $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V sobre \mathbb{R} , entonces $\|\cdot\|_{\text{sup}} : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida mediante $\|\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n\|_{\text{sup}} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\alpha_i|\}$ es una norma para V , y que si V tiene dimensión finita, entonces cualesquiera dos normas de V inducen en él la misma topología. Suponiendo esto, demostraremos este teorema.

Teorema 75. *Supongamos que V tiene dimensión finita y que K es un cono de V . Entonces K es sólido en V si y sólo si K contiene una base de V .*

Demostración. \implies : Es el lema anterior.

\impliedby : Como K genera a V , contiene a una base $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V . Entonces el conjunto $S = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n / 0 < \lambda_i\}$ está contenido en el interior de K : Sea $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \in S$, definamos $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq n} \{\lambda_i\}$, entonces $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Sea $w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in B_{\text{sup}}(v, \frac{\varepsilon}{2})$, entonces $\max_{1 \leq i \leq n} \{|\alpha_i - \lambda_i|\} < \frac{\varepsilon}{2}$ y por lo tanto, para cada i , $-\frac{\varepsilon}{2} < \alpha_i - \lambda_i < \frac{\varepsilon}{2}$, de donde $0 \leq \lambda_i - \varepsilon < \lambda_i - \frac{\varepsilon}{2} < \alpha_i$; por lo que $w \in S$. Como S es un conjunto no vacío, obtenemos que K es sólido en V . ■

De este último teorema también obtenemos que si V es un espacio vectorial real normado de dimensión arbitraria, y K es un cono de V tal que $\dim(K)$ es finita, entonces K es sólido en $\langle K \rangle$,

pues la norma de V induce una norma en $\langle K \rangle$, y todas las normas de $\langle K \rangle$ inducen en éste la misma topología.

2.3. Ejemplos

Como hemos dicho antes, esta sección estará dedicada a establecer ejemplos de las definiciones de conos que hemos dado. Habrá desde ejemplos muy concretos y triviales (visualizables en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3), hasta ejemplos que tratan de manufacturaciones de conos a partir de conos dados.

Ejemplo 76. Dado un espacio vectorial real V , $\{\bar{0}\}$ siempre es un cono de V . Obsérvese que $\{\bar{0}\}$ es sólido en $V \iff V = \{\bar{0}\} \iff \{\bar{0}\}$ es generador de V . ▲

Ejemplo 77. Los únicos conos sólidos de \mathbb{R} son $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$ y $-\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$. ▲

Ejemplo 78. Sea K un cono sólido de \mathbb{R}^2 , entonces existen vectores linealmente independientes, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ tales que $K = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 / \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$.

Demostración. Como K es sólido en \mathbb{R}^2 , contiene una base $\{w_1, w_2\}$ de \mathbb{R}^2 , y como es convexo, el segmento de recta $\text{conv}(w_1, w_2)$ está completamente contenido en K . Consideremos $\mathbb{S}^1 \cap K$, que es compacto; como $\mathbb{R}^+ \text{conv}(w_1, w_2) \subseteq K$, tenemos que $\mathbb{S}^1 \cap K$ posee más de 1 elemento (de hecho, es homeomorfo al intervalo cerrado unitario). Sean $v_1, v_2 \in \partial_{\mathbb{S}^1}(\mathbb{S}^1 \cap K)$ distintos, entonces es claro que $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente y que $\mathbb{S}^1 \cap K \subseteq \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 / \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\} \subseteq K$. Sea entonces $v \in K$, si $v = \bar{0}$ entonces es claro que $v \in \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 / \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$; supongamos pues, que $v \neq \bar{0}$, entonces $\frac{v}{\|v\|} \in \mathbb{S}^1 \cap K$ y por lo tanto existen $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^+$ tales que $\frac{v}{\|v\|} = \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2$. Pero entonces $v = \|v\| \gamma_1 v_1 + \|v\| \gamma_2 v_2 \in \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 / \lambda_1, \lambda_2 \geq 0\}$. ▲

Ejemplo 79. Si $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores de V , entonces $K = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m / \lambda_i \geq 0 \text{ para toda } i\}$ es un cono (véase la figura 2.8). Si $m = 1$, entonces llamaremos a K el **rayo** generado por v_1 . Obsérvese, por otro lado, que si V tiene dimensión finita, K es sólido en V si y sólo si $m = \dim(V)$. ▲

Definición 80. En el caso particular en el que V sea \mathbb{R}^n , $m = n$, y $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canónica de \mathbb{R}^n , el cono definido en el ejemplo anterior será llamado el **cono positivo** de dimensión n y lo denotaremos por $(\mathbb{R}^n)^+$ (véase la figura 2.8). Obsérvese que $(\mathbb{R}^n)^+ = (\mathbb{R}^+)^n$.

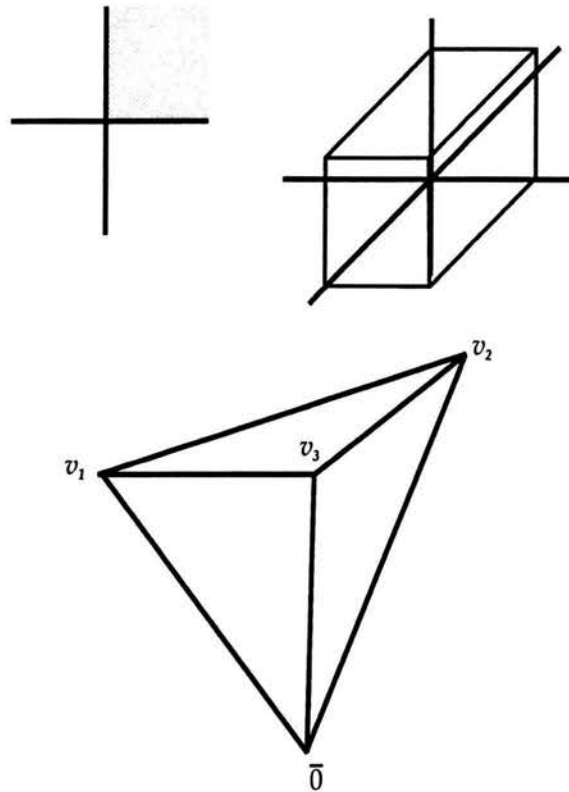


Figura 2.8: $(\mathbb{R}^2)^+$, $(\mathbb{R}^3)^+$ y $\text{pos}(v_1, v_2, v_3)$

Ejemplo 81. Sea $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$, y consideremos la cerradura del conjunto de las combinaciones lineales no negativas de elementos de S , $\text{pos}(S) = \overline{\{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid n \in \mathbb{N}, v_1, \dots, v_n \in S, \lambda_i \geq 0 \text{ para toda } i\}}$. Supongamos que $\text{pos}(S) \cap (-\text{pos}(S)) = \{\bar{0}\}$ (situación que sucede cuando, por ejemplo, S es subconjunto de un cono). Entonces $\text{pos}(S)$ es un cono de V . ▲

Nota 82. Si $S = \emptyset$, definimos $\text{pos}(S) = \{\bar{0}\}$. Obsérvese que definimos $\text{pos}(S)$ para todo subconjunto S de V , aunque no se cumpla la condición $\text{pos}(S) \cap (-\text{pos}(S)) = \{\bar{0}\}$ (ie, aunque no sea cono).

Ejemplo 83. Para ver que no todo $\text{pos}(S)$ es cono, sean V de dimensión finita, $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de V , y $S = \{-v_1, v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Entonces es claro que $\text{pos}(S)$ no es cono porque al menos $\bar{0} \neq v_1 \in \text{pos}(S) \cap (-\text{pos}(S))$. ▲

Ejemplo 84. Sean $n \geq 2$ y $K = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq x_n^2 \text{ y } x_n \geq 0\}$, K es un cono sólido en \mathbb{R}^n y es llamado el **cono de helado** de dimensión n . Es fácil ver que

$K = \{\lambda(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 1) \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1 \text{ y } \lambda \geq 0\}$. O sea, que K es la unión de los rayos generados por (los puntos de) una bola unitaria cerrada $(n-1)$ -dimensional colocada a altura 1. ▲

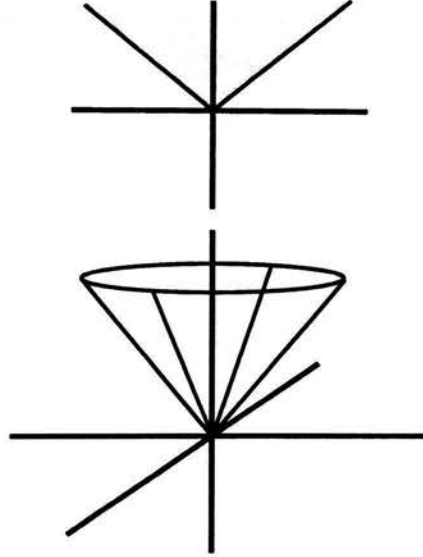


Figura 2.9: Los conos de helado bi y tridimensional.

Este último ejemplo es un caso particular de una de las construcciones más importantes de conos en el presente trabajo, a saber, a partir de *subconjuntos compactos convexos* de \mathbb{R}^n .

Teorema 85. *Sea C un subconjunto compacto convexo no vacío de \mathbb{R}^n y consideremos el conjunto $K = \{\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n, 1) \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C \text{ y } \lambda \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Entonces K es un cono de \mathbb{R}^{n+1} y por lo tanto $K = \text{pos}(C \times \{1\})$ (véase la figura 2.10).*

Demostración. K es cerrado:

Sea $v = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \bar{K}$ un punto de contacto de K , entonces existe una sucesión $\langle v_m \rangle_{m \in \mathbb{N}}$ de elementos de K que converge a v , digamos que cada v_m tiene la forma $\lambda_m(x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm}, 1)$. Entonces (dado que una sucesión en \mathbb{R}^{n+1} converge si y sólo si converge entrada a entrada) $\lambda_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_{n+1}$. Como $\lambda_m \geq 0$ para toda $m \in \mathbb{N}$, vemos que $x_{n+1} \geq 0$. Observemos que tenemos la sucesión $\langle (x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm}) \rangle_{m \in \mathbb{N}}$ de elementos de C , dicha sucesión contiene una subsucesión convergente porque C es compacto; supongamos que $\langle (x_{1m_t}, x_{2m_t}, \dots, x_{n m_t}) \rangle_{t \in \mathbb{N}}$ es esa subsucesión y que $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in C$ es su límite. Entonces, $v = \lim_{m \rightarrow \infty} v_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m(x_{1m}, \dots, x_{nm}, 1) = \lim_{m \rightarrow \infty} (\lambda_m x_{1m}, \dots, \lambda_m x_{nm}, \lambda_m) = (\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m x_{1m}, \dots, \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m x_{nm}, \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m) = (\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{m_t} x_{1m_t}, \dots, \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{m_t} x_{n m_t}, \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{m_t}) = ((\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{m_t})(\lim_{t \rightarrow \infty} x_{1m_t}), \dots, (\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_{m_t})(\lim_{t \rightarrow \infty} x_{n m_t}), x_{n+1}) = (x_{n+1} y_1, \dots, x_{n+1} y_n, x_{n+1}) = x_{n+1}(y_1, \dots, y_n, 1) \in K$.

$K + K \subseteq K$:

Sean $v, w \in K$, entonces $v = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n, 1)$ y $w = \mu(y_1, y_2, \dots, y_n, 1)$ con λ y μ no negativos y $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in C$. Si $\lambda = \mu = 0$, entonces es obvio que $v + w \in K$. Supongamos entonces que, sin pérdida de generalidad, $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda, \mu \leq \lambda + \mu \neq 0$ porque μ es no negativo y así, $v + w = \lambda(x_1, \dots, x_n, 1) + \mu(y_1, \dots, y_n, 1) = (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n, \lambda + \mu) = (\lambda + \mu) \left(\frac{\lambda x_1 + \mu y_1}{\lambda + \mu}, \dots, \frac{\lambda x_n + \mu y_n}{\lambda + \mu}, 1 \right) \in K$, pues $\left(\frac{\lambda x_1 + \mu y_1}{\lambda + \mu}, \dots, \frac{\lambda x_n + \mu y_n}{\lambda + \mu} \right) \in C$ ya que $\frac{\lambda}{\lambda + \mu} (x_1, \dots, x_n) + \frac{\mu}{\lambda + \mu} (y_1, \dots, y_n) \in C$ ya que $\frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} = 1$ y C es convexo.

$\alpha K \subseteq K \forall \alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \geq 0$:

Es obvio.

$K \cap (-K) = \{\bar{0}\}$:

La contención \supseteq es clara. Sea entonces $v \in K \cap (-K)$, entonces existen $\lambda, \mu \geq 0$ y $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in C$ tales que $v = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n, 1) = -\mu(y_1, y_2, \dots, y_n, 1)$, pero entonces $\lambda = -\mu \leq 0$, y por lo tanto $\lambda = 0$, de donde $v = \bar{0}$.

Por lo tanto, K es un cono de \mathbb{R}^{n+1} . ■

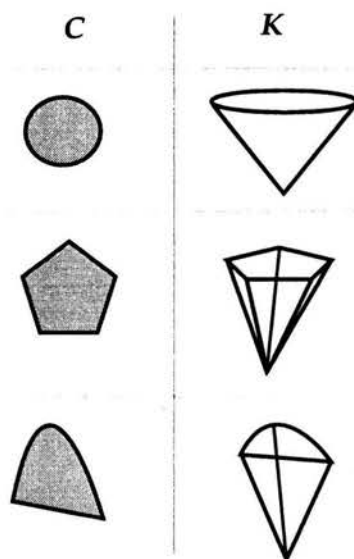


Figura 2.10:

Se sigue de manera inmediata que en el ejemplo 84 previo a este teorema lo que obtenemos es efectivamente un cono. En el capítulo 3 veremos que todo cono sólido en un espacio vectorial real de dimensión $n \geq 2$ finita puede obtenerse de la manera descrita en este teorema, es decir, como la unión de los rayos generados por los elementos de algún conjunto compacto convexo

$(n-1)$ -dimensional. De hecho ésta es una de las ideas más importantes en esta tesis, ya que nos permitirá resolver problemas acerca de conjuntos compactos convexos de dimensión finita a través de las técnicas de conos y viceversa.

Demos ahora un ejemplo de un cono de dimensión infinita, veremos que el cono es generador pero no sólido.

Ejemplo 86. Consideremos el espacio vectorial $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} / x_n \in \mathbb{R} \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \text{ y } \exists m \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_t = 0 \text{ para toda } t \geq m\}$ (con la norma $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\bigoplus \mathbb{R}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$) y el conjunto $\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+ = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R} / x_n \geq 0 \text{ para toda } n \in \mathbb{N}\}$. Entonces $\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+$ es un cono generador de $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ que no es sólido.

Demostración. $\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+$ es cerrado:

Sea $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right) \setminus \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+$. Entonces existen $l, m \in \mathbb{N}$ tales que $v_l < 0$ y $\forall t \geq m$, $v_t = 0$. Entonces $(v_1, \dots, v_m) \in \mathbb{R}^m \setminus (\mathbb{R}^m)^+$. Como $(\mathbb{R}^m)^+$ es cono de \mathbb{R}^m , existe $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon$ tal que $B_{\mathbb{R}^m}((v_1, \dots, v_m), \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^m \setminus (\mathbb{R}^m)^+$. Sea $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B_{\bigoplus \mathbb{R}}((v_n)_{n \in \mathbb{N}}, \varepsilon)$, es decir, $\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - w_n)^2} < \varepsilon$, de donde $\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - w_n)^2 = \sum_{n \leq m} (v_n - w_n)^2 + \sum_{n > m} (v_n - w_n)^2 < \varepsilon^2$. Esto implica que $(w_1, \dots, w_m) \in B_{\mathbb{R}^m}((v_1, \dots, v_m), \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^m \setminus (\mathbb{R}^m)^+$, por lo que existe $q \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq m$, tal que $w_q < 0$, pero entonces $w \in \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right) \setminus \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+$. Es decir, hemos probado que $\forall v \in \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right) \setminus \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+ \exists \varepsilon > 0$ tal que $B_{\bigoplus \mathbb{R}}(v, \varepsilon) \subseteq \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right) \setminus \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+$, esto significa que $\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right) \setminus \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+$ es abierto y por lo tanto $\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+$ es cerrado.

Es obvio que $\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+ + \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+ \subseteq \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+$; que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \geq 0$, se tiene que $\alpha \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+ \subseteq \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+$; y que $\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+ \cap \left(-\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+\right) = \{\bar{0}\}$. Por lo tanto $\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+$ es un cono.

Ahora mostremos que $\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+ \subseteq \partial_{\bigoplus \mathbb{R}}\left(\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+\right)$:

Sean $v \in \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+$ y $\varepsilon > 0$, entonces $\exists m \in \mathbb{N}$ tal que $v_t = 0$ para toda $t \geq m$. Definamos $w \in \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ mediante $w_n = \begin{cases} v_n & \text{si } n \leq m \\ \frac{-\varepsilon}{2} & \text{si } n = m+1 \\ 0 & \text{si } n > m \end{cases}$, entonces $w \in B_{\bigoplus \mathbb{R}}(v, \varepsilon) \cap \left[\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right) \setminus \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+\right]$.

Por lo tanto $\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+ \subseteq \partial_{\oplus \mathbb{R}}\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+$, y entonces $\text{int}_{\oplus \mathbb{R}}\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+ = \emptyset$, por lo que $\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+$ no es sólido. Sin embargo, ya que $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+$ (donde $e_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{si } i \neq n \end{cases}$), vemos que $\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}\right)^+$ es generador de $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$, pues $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una base de $\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ sobre \mathbb{R} . \blacktriangle

Ahora construyamos un cono a partir de una funcional lineal y una norma en un espacio de dimensión finita. Es fácil ver que normas distintas del espacio (a pesar de que definen la misma topología en él) dan lugar a conos distintos. Recordemos que en un espacio normado V , la norma $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua (ya que de la desigualdad del triángulo se deduce que $|\|v\| - \|w\|| \leq \|v - w\|$), y que una transformación lineal entre espacios reales de dimensión finita, $T : V \rightarrow W$, es siempre una función continua (véase [JJ]).

Ejemplo 87. Sea V un espacio normado de dimensión finita y $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ una funcional lineal, entonces $K = \{v \in V / \|v\| \leq f(v)\}$ es un cono de V .

Demostración. K es cerrado:

Sea $v \in \overline{K}$ un punto de contacto de K , entonces existe una sucesión $\langle v_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de K que converge a v . Por ser elementos de K , para toda $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $\|v_n\| \leq f(v_n)$. Por converger a v y por la continuidad de f y de $\|\cdot\|$, $\|v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|$ y $f(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n)$. Y como $f(v_n) - \|v_n\| \geq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $f(v) - \|v\| = \lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(v_n) - \|v_n\|) \geq 0$, de donde concluimos que $v \in K$.

$K + K \subseteq K$:

Sean $v, w \in K$, entonces $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \leq f(v) + f(w) = f(v + w)$, de donde $v + w \in K$.

$\alpha K \subseteq K \forall \alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \geq 0$:

Sea $v \in K$, entonces $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\| = \alpha \|v\| \leq \alpha f(v) = f(\alpha v)$, por lo que $\alpha v \in K$.

$K \cap (-K) = \{\overline{0}\}$:

La contención \supseteq es clara. Sea pues $v \in K \cap (-K)$, entonces $\|v\| \leq f(v)$ y $\|v\| = \|-v\| \leq f(-v) = -f(v)$, y esto último puede suceder si y sólo si $\|v\| = f(v) = 0$. Pero entonces $v = \overline{0}$.

Por lo tanto K es un cono. \blacktriangle

Recordemos que si V y W son espacios vectoriales reales de dimensión finita, podemos definir en $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = \{T : V \rightarrow W / T \text{ es transformación lineal}\}$ una estructura de espacio vectorial normado, donde la suma y la multiplicación por escalares se define de manera obvia (puntualmente) y la norma de esta forma: $\forall T \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$, $\|T\| = \sup_{\|v\|=1} \{\|T(v)\|\}$.

Nota 88. De hecho, puede demostrarse que para una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión arbitraria $T : V \longrightarrow W$, la continuidad es equivalente a la finitud de $\sup_{\|v\|=1} \{\|T(v)\|\}$. Ver [JJ].

Ejemplo 89. (El cono de operadores que dejan un cono invariante). Sean V de dimensión finita y $K \subseteq V$ un cono sólido, definamos $\Pi(K) = \{T \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V) / T[K] \subseteq K\}$. Entonces $\Pi(K)$ es un cono de $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$.

Demostración. $\Pi(K)$ es cerrado:

Sea $T \in \overline{\Pi(K)}$ un punto de contacto de $\Pi(K)$, entonces existe una sucesión $\langle T_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\Pi(K)$ que converge a T . Sean $v \in K$ y $\varepsilon > 0$, si $v = \bar{0}$, es obvio que $T(v) \in K$; supongamos entonces que $v \neq \bar{0}$. Entonces $\frac{1}{\|v\|} T_n(v) = T_n(\frac{v}{\|v\|}) \in K$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\|v\|} \|T(v) - T_r(v)\| = \left\| T(\frac{v}{\|v\|}) - T_r(\frac{v}{\|v\|}) \right\| \leq \|T - T_r\| < \varepsilon$ para toda $r \geq m$. Es decir la sucesión $\left(T_n(\frac{v}{\|v\|}) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ (que consta de elementos de K) converge a $T(\frac{v}{\|v\|})$, y como K es cerrado, $T(\frac{v}{\|v\|}) \in K$. Pero entonces $T(v) = \|v\| T(\frac{v}{\|v\|}) \in K$ porque K es cerrado bajo la multiplicación por escalares no negativos. Como $v \in K$ fue arbitrario, podemos concluir que $T[K] \subseteq K$, es decir, que $T \in \Pi(K)$. Así, $\Pi(K)$ es cerrado.

$$\Pi(K) + \Pi(K) \subseteq \Pi(K) :$$

Sean $F, T \in \Pi(K)$, y sea $v \in K$, entonces $F(v), T(v) \in K$ y como $K + K \subseteq K$, vemos que $(F + T)(v) = F(v) + T(v) \in K$. Como $v \in K$ fue arbitrario, concluimos que $(F + T)[K] \subseteq K$, es decir, que $F + T \in \Pi(K)$.

$$\alpha \Pi(K) \subseteq \Pi(K) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ con } \alpha \geq 0 :$$

La demostración es totalmente análoga a la demostración de que $\Pi(K) + \Pi(K) \subseteq \Pi(K)$ que acabamos de dar.

$$\Pi(K) \cap (-\Pi(K)) = \{\bar{0}\} :$$

La contención \supseteq es obvia. Sean entonces $T \in \Pi(K) \cap (-\Pi(K))$ y $v \in V$. Como K es sólido, contiene una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V . Entonces existen $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tales que $v = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i$. Pero para $i \in \{1, \dots, n\}$, tenemos que $T(v_i), -T(v_i) \in K$, y como K es un cono, concluimos que $T(v_i) = \bar{0}$. Pero entonces $T(v) = \bar{0}$. Como $v \in V$ fue arbitrario, concluimos que $T = \bar{0}$.

Por lo tanto, $\Pi(K)$ es un cono de $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$. \blacktriangle

Sigamos suponiendo que V tiene dimensión finita. Entonces el espacio $V^* = \{f : V \longrightarrow \mathbb{R} / f \text{ es lineal}\} = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ tiene la misma dimensión que V . Según lo dicho en el párrafo previo

a la nota 88, la norma en V^* viene dada por: $\forall f \in V^*, \|f\| = \sup_{\|v\|=1} \{|f(v)|\}$. Dado un cono sólido K de V , definiremos un cono en V^* que será un tanto parecido a $\Pi(K)$.

Ejemplo 90. (El cono dual). Sea V un espacio real de dimensión finita, y sea K un cono sólido de V . Definamos $K^* = \{f \in V^* / \forall v \in K (f(v) \geq 0)\}$, entonces K^* es un cono de V^* . Lo llamaremos el **cono dual** de K .

Demostración. K^* es cerrado:

Sea $f \in \overline{K^*}$ un punto de contacto de K^* . Entonces existe una sucesión $\langle f_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de K^* que converge a f . Sea $v \in K$, si $v = \bar{0}$, entonces es obvio que $f(v) = 0$. Supongamos entonces que $v \neq \bar{0}$. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $f_n(v) \geq 0$, y además, $|f(v) - f_n(v)| = |(f - f_n)(v)| = \|v\| \left| (f - f_n) \left(\frac{v}{\|v\|} \right) \right| \leq \|v\| \|f - f_n\| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, es decir, $f_n(v) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(v)$, por lo que $f(v) \geq 0$. Como esto vale para toda $v \in K$, concluimos que $f \in K^*$. Por lo tanto, K^* es cerrado.

Es obvio que $K^* + K^* \subseteq K^*$ y que para todo real no negativo α se cumple $\alpha K^* \subseteq K^*$.

$$K^* \cap (-K^*) = \{\bar{0}\} :$$

La contención \supseteq es clara. Para mostrar que se cumple la otra contención, sea $f \in K^* \cap (-K^*)$, entonces $\forall v \in K$ se cumple que $f(v) \leq 0 \leq f(v)$. Como K es sólido, contiene una base de V en la cual se anula f , por lo que $f = \bar{0}$.

Así, K^* es un cono de V^* . \blacktriangle

Veamos cómo se caracterizan los elementos del interior del cono dual de un cono de dimensión finita. Recordemos que si V tiene dimensión finita, entonces $\mathbb{S}_V^{n-1} = \{x \in V / \|x\| = 1\}$ es compacta. Además, dada una base $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de V , la función $f_1 : V \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $f_1 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right) = \alpha_1$ es continua (por ser una transformación lineal entre espacios de dimensión finita), y por lo tanto, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f_1(x)| \leq M \forall x \in \mathbb{S}_V^{n-1}$ (por la compacidad de ésta y porque el valor absoluto usual es una función continua).

Proposición 91. Sean K un cono sólido en un espacio V de dimensión finita y $f \in K^*$, entonces $f \in \text{int}_{V^*}(K^*)$ si y sólo si $f(v) > 0$ para todo $v \in K \setminus \{\bar{0}\}$.

Demostración. \implies : Si existe $v \in K \setminus \{\bar{0}\}$ tal que $f(v) = 0$, entonces, extendiendo $\{v\}$ a una base $\beta = \{v, v_2, \dots, v_n\}$ de V , definamos para cada $m \in \mathbb{N}$, $f_m \in V^*$ mediante $f_m \left(\alpha_1 v + \sum_{i=2}^n \alpha_i v_i \right) = -\alpha_1 \frac{1}{m} + \sum_{i=2}^n \alpha_i f(v_i)$. Así, $f_m(v) = -\frac{1}{m}$, por lo que $f_m \notin K^*$; y además, para $x = \alpha_1 v + \sum_{i=2}^n \alpha_i v_i \in$

\mathbb{S}_V^{n-1} tenemos que $|f - f_m(x)| = \left| (f - f_m) \left(\alpha_1 v + \sum_{i=2}^n \alpha_i v_i \right) \right| = |f(\alpha_1 v) - f_m(\alpha_1 v)| = |\alpha_1| \frac{1}{m} \leq M \frac{1}{m}$, de donde $\|f - f_m\| \leq M \frac{1}{m}$ y entonces $f \notin \text{int}_{V^*}(K^*)$.

\Leftarrow : Por cada $x \in \mathbb{S}_V^{n-1} \cap K$, existen $\varepsilon_x, \delta_x > 0$ tales que $f(B_V(x, \delta_x)) \subseteq (f(x) - \frac{\varepsilon_x}{2}, f(x) + \frac{\varepsilon_x}{2}) \subseteq (f(x) - \varepsilon_x, f(x) + \varepsilon_x) \subseteq \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ (porque f es continua). La familia $\{B_V(x, \delta_x)\}_{x \in \mathbb{S}_V^{n-1} \cap K}$ es una cubierta abierta de $\mathbb{S}_V^{n-1} \cap K$, y por la compacidad de $\mathbb{S}_V^{n-1} \cap K$, posee una subcubierta finita $\{B_V(x_1, \delta_{x_1}), \dots, B_V(x_m, \delta_{x_m})\}$ (que sigue cubriendo a $\mathbb{S}_V^{n-1} \cap K$). Sea $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq m} \{\frac{\varepsilon_{x_i}}{2}\}$, y mostremos que $B_{V^*}(f, \varepsilon) \subseteq K^*$: Sean $g \in B_{V^*}(f, \varepsilon)$ y $v \in K$; si $v = \bar{0}$, es claro que $g(v) \geq 0$; supongamos pues que $v \neq \bar{0}$, entonces $\frac{v}{\|v\|} \in B_V(x_i, \delta_{x_i})$ para alguna i , de donde $\left| f(x_i) - g\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right| \leq \left| f(x_i) - f\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right| + \left| f\left(\frac{v}{\|v\|}\right) - g\left(\frac{v}{\|v\|}\right) \right| < \frac{\varepsilon_{x_i}}{2} + \varepsilon \leq \varepsilon_{x_i}$, por lo que $g\left(\frac{v}{\|v\|}\right) > 0$. Pero entonces $g(v) = \|v\| g\left(\frac{v}{\|v\|}\right) > 0$. Como v fue un elemento arbitrario de K , deducimos que $g \in K^*$. Y como g fue un elemento arbitrario de $B_{V^*}(f, \varepsilon)$, concluimos que $f \in \text{int}_{V^*}(K^*)$. ■

Más adelante veremos que (bajo las hipótesis de la proposición que acabamos de demostrar) K^* es sólido en V^* , probando que existe una funcional lineal $V \rightarrow \mathbb{R}$ cuyo núcleo interseca a K sólo en el cero. De una manera totalmente análoga a la demostración de esta última proposición puede probarse la siguiente:

Proposición 92. Sean K un cono sólido en un espacio V de dimensión finita y $T \in \Pi(K)$, entonces $T \in \text{int}_{\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)}(\Pi(K))$ si y sólo si $T(v) \in \text{int}_V(K)$ para todo $v \in K \setminus \{\bar{0}\}$. ■

Nota 93. Obsérvese que tanto $\Pi(K)$ como K^* son conjuntos de transformaciones lineales que mapean un cono en otro: $\Pi(K)$ es el conjunto de las transformaciones $V \rightarrow V$ que mandan el cono K dentro de él mismo, mientras que K^* es el conjunto de las transformaciones $V \rightarrow \mathbb{R}$ que mapean K dentro de \mathbb{R}^+ , que es un cono sólido en \mathbb{R} .

2.4. El Orden Parcial \leq_K

En esta sección introduciremos dos relaciones en V basadas en un cono K de V . Dichas relaciones nos permitirán ver a K como si fuera el cono positivo $(\mathbb{R}^n)^+$, además de resumir información aritmética y topológica de K . Una de las dos relaciones será un orden parcial y la otra no.

Proposición 94. *Sean V un espacio vectorial real normado y K un cono de V . Definamos una relación \leq_K sobre V mediante la regla $v \leq_K w \iff w - v \in K$. Entonces \leq_K es un orden parcial para V .*

Demostración. $\forall v \in V (v \leq_K v)$:

Es obvio porque $\bar{0} \in K$.

$\forall v, w \in V (v \leq_K w \text{ y } w \leq_K v \Rightarrow v = w)$:

Si $v \leq_K w$ y $w \leq_K v$, entonces $w - v, v - w \in K$, es decir, $w - v \in K \cap (-K) = \{\bar{0}\}$, de donde $w = v$.

$\forall v, w, x \in V (v \leq_K w \text{ y } w \leq_K x \Rightarrow v \leq_K x)$:

Si $v \leq_K w$ y $w \leq_K x$, entonces $w - v, x - w \in K$, y por lo tanto, $x - v = (x - w) + (w - v) \in K$, es decir, $v \leq_K x$.

Por lo tanto, $\langle V, \leq_K \rangle$ es un conjunto parcialmente ordenado. ■

Geoméricamente, dado $v \in V$, para ver todos los elementos mayores que él, basta colocar una copia paralela de K de manera que su vértice sea v , es decir, $K + \{v\} = \{w \in V / v \leq_K w\}$ (véase la figura 2.11).

Definición 95. *Establezcamos ahora la siguiente relación en V : $v \ll_K w \iff w - v \in \text{int}_V(K)$.*

Nota 96. *A menos que $V = K = \{\bar{0}\}$, \ll_K nunca es un orden parcial, ya que (salvo en el caso mencionado) $\bar{0} \in \partial_V(K)$ y por lo tanto, \ll_K no cumple con el portulado i) de la definición de orden parcial. Obsérvese también que $\text{int}_V(K) \neq \emptyset$ si y sólo si \ll_K no es una relación vacía.*

Enunciemos ahora algunas de las propiedades de las relaciones que hemos definido, estas propiedades “se portan bien” con respecto a la suma y a la multiplicación por escalares positivos. La demostración es inmediata y la omitimos.

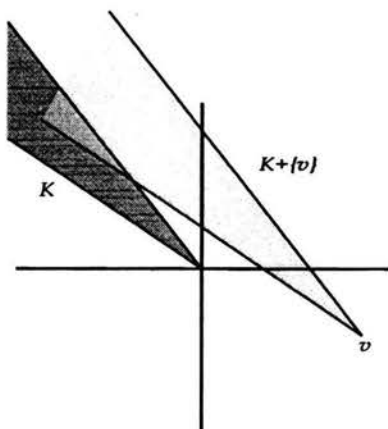


Figura 2.11: $K + \{v\} = \{w \in V \mid v \leq_K w\}$

Lema 97. Sean $u, v, w \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\beta < 0 < \alpha$. Entonces:

- (i) $v \leq_K w \iff v + u \leq_K w + u$.
- (ii) $v \leq_K w \iff \alpha v \leq_K \alpha w$.
- (iii) $v \leq_K w \iff \beta w \leq_K \beta v$.
- (iv) $v \ll_K w \iff v + u \ll_K w + u$.
- (v) $v \ll_K w \iff \alpha v \ll_K \alpha w$.
- (vi) $v \ll_K w \iff \beta w \ll_K \beta v$. ■

Establezcamos algunas propiedades más de \leq_K y de \ll_K y caractericemos a los puntos del interior de K en términos de ellas.

Lema 98. Sean $v, w \in V$ con $\bar{0} \leq_K v$.

- (i) Supongamos que $\alpha > 0$ es tal que $\bar{0} \leq_K v + \alpha w$. Entonces $\forall \beta \in [0, \alpha]$ $(\bar{0} \leq_K v + \beta w)$.
- (ii) Supongamos que $\alpha > 0$ es tal que $\bar{0} \leq_K v - \alpha w$. Entonces $\forall \beta \in [0, \alpha]$ $(\bar{0} \leq_K v - \beta w)$.

Demostración. i) $v, v + \alpha w \in K \implies \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)v, \frac{\beta}{\alpha}(v + \alpha w) \in K \implies v + \beta w = \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)v + \frac{\beta}{\alpha}(v + \alpha w) \in K$.

ii) $v, v - \alpha w \in K \implies \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)v, \frac{\beta}{\alpha}(v - \alpha w) \in K \implies v - \beta w = \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right)v + \frac{\beta}{\alpha}(v - \alpha w) \in K$. ■

Obsérvese que este lema y su demostración no son otra cosa que la convexidad de K , que ya habíamos probado en el lema 69 de la sección 2.2.

Teorema 99. *Sean K un cono sólido en \mathbb{R}^n y $v \in K$. Entonces $\bar{0} \ll_K v$ si y sólo si $\forall w \in \mathbb{R}^n \exists \lambda > 0$ tal que $\bar{0} \leq_K v + \lambda w$.*

Demostración. \implies :

Supongamos que $\bar{0} \ll_K v$ y sea $w \in \mathbb{R}^n$, entonces $\exists \varepsilon > 0$ tal que $B_{\mathbb{R}^n}(v, \varepsilon) \subseteq K$. Definiendo $\lambda := \frac{\varepsilon}{2\|w\|}$, vemos que $v + \lambda w \in K$ (suponemos $w \neq \bar{0}$, pues si $w = \bar{0}$ cualquier $\lambda > 0$ sirve). Obsérvese que, de hecho, $v + \lambda w \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(K)$.

\impliedby :

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de \mathbb{R}^n . Entonces existen escalares estrictamente positivos, $\lambda_1, \gamma_1, \lambda_2, \gamma_2, \dots, \lambda_n, \gamma_n$, tales que $v + \lambda_i e_i, v - \gamma_i e_i \in K$ (para toda i). Definamos $\lambda := \min_{1 \leq i \leq n} \{\lambda_i, \gamma_i\}$.

Así, si $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in \mathbb{R}^n \setminus \{\bar{0}\}$, entonces, definiendo $\alpha := \max_{1 \leq i \leq n} \{|\alpha_i|\}$, $\alpha > 0$; por lo que $\frac{\lambda}{n\alpha} > 0$. Observemos que si $\alpha_i \geq 0$, entonces $0 \leq \frac{\lambda|\alpha_i|}{\alpha} = \frac{\lambda\alpha_i}{\alpha} \leq \lambda \leq \lambda_i, \gamma_i$, y por lo tanto, por el lema anterior, $v + \frac{\lambda\alpha_i}{\alpha} e_i \in K$. Por otro lado, si $\alpha_i < 0$, entonces, como $v + \gamma_i(-e_i) \in K$ y $0 < \frac{\lambda|\alpha_i|}{\alpha} \leq \gamma_i$, tenemos que $v + \frac{\lambda|\alpha_i|}{\alpha}(-e_i) = v + \frac{\lambda\alpha_i}{\alpha}(e_i) \in K$.

De manera que $nv + \frac{\lambda}{\alpha}u = nv + \frac{\lambda}{\alpha}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) \in K$, y entonces $v + \frac{\lambda}{n\alpha}u \in K$.

Entonces $\forall w = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i \in \mathbb{S}^{n-1} = \{z \in \mathbb{R}^n / \|z\| = 1\}$ se cumple que $0 \leq |\beta_i| \leq 1$ para toda i , por lo que $0 < \beta := \max_{1 \leq i \leq n} \{|\beta_i|\} \leq 1$, entonces $0 < \frac{\lambda}{n} \leq \frac{\lambda}{n\beta}$, y además (por lo que demostramos en el párrafo inmediato anterior) $v + \frac{\lambda}{n\beta}w \in K$. Y por el lema anterior, $v + \frac{\lambda}{n}w \in K$.

Es decir, acabamos de demostrar que $\partial_{\mathbb{R}^n}(\bar{B}(v, \frac{\lambda}{n})) = v + \frac{\lambda}{n}\mathbb{S}^{n-1} \subseteq K$. Como K es convexo, concluimos que $B(v, \frac{\lambda}{n}) \subseteq \bar{B}(v, \frac{\lambda}{n}) \subseteq K$. Esto muestra que $\bar{0} \ll_K v$. ■

Corolario 100. *Sean K un cono sólido en \mathbb{R}^n y $u, v \in K$. Si $\bar{0} \ll_K v$, entonces $\bar{0} \ll_K u + v$.*

Demostración. Sea $w \in \mathbb{R}^n$. Por el teorema anterior, existe $\lambda > 0$ tal que $\bar{0} \leq_K v + \lambda w$, entonces $\bar{0} \leq_K (u + v) + \lambda w$. Así, $\forall w \in \mathbb{R}^n \exists \lambda > 0$ tal que $\bar{0} \leq_K (u + v) + \lambda w$. Por el teorema anterior, podemos concluir que $\bar{0} \ll_K u + v$. ■

2.5. Caras

Las Caras de un Cono serán “subconjuntos extremales” del cono. Demostraremos que intersección arbitraria de caras de un cono es cara del cono, y basados en esto, definiremos la cara generada por un subconjunto S de un cono K como la intersección de las caras de K en las que S está contenido. Posteriormente, daremos descripciones más fácilmente manejables de la cara generada por S , éstas nos permitirán obtener un resultado clave: todo elemento de K pertenece al interior relativo de la cara que genera.

La mayoría de los resultados que obtengamos en esta sección serán bajo la hipótesis de que V es un espacio de dimensión finita. En dichos resultados aclararemos dicha hipótesis, es decir, si enunciamos un resultado sin escribir la hipótesis de que V tiene dimensión finita, querremos decir que la proposición es válida para un espacio de dimensión arbitraria.

Definición 101. Sean K un cono de un espacio vectorial V y F un subconjunto de K . Diremos que F es una **cara** de K , y escribiremos $F \trianglelefteq K$ ssi se cumple simultáneamente que:

- (i) F es cono de V .
- (ii) $\forall v, w \in K (v + w \in F \implies v, w \in F)$.

La **dimensión de F** será la dimensión que tenga como cono. Si F es una cara de K y $\dim(F)=1$, diremos que F es un **rayo extremal** de K .

Obsérvese que si F es una cara, entonces F es un rayo extremal si y sólo si $\exists v \in K \setminus \{\bar{0}\}$ tal que $F = \text{pos}(v) = \{\lambda v / \lambda \in \mathbb{R}^+\}$. A un $v \in K \setminus \{\bar{0}\}$ con la propiedad de que $\text{pos}(v)$ es rayo extremal de K lo llamaremos **vector extremal** de K .

La definición de cara, en términos del orden parcial \leq_K , diría que un subconjunto F de K es cara si y sólo si a) F es cono, y b) $\forall y \in F \forall v \in K (\bar{0} \leq_K v \leq_K y \implies y \in F)$. Es inmediato que esto es equivalente a la definición de cara que hemos dado arriba (y hace el papel de la suma que “cae” en F , y $v, y - v$ el de los elementos de K cuya suma es y , un elemento de F).

Nota 102. Tres rayos extremales distintos de un cono nunca son coplanares, y si tomamos un vector extremal de cada uno, éstos son linealmente independientes.

Lema 103. Sea F una cara de K . Entonces $G \trianglelefteq F$ si y sólo si $G \subseteq F$ y $G \trianglelefteq K$. En particular, todo rayo extremal de F es también rayo extremal de K .

Demostración. \implies :

Si G es una cara de F , entonces es obvio que $G \subseteq F$. Sean entonces $v, w \in K$ tales que $v+w \in G$. Entonces $v+w \in F$, y como $F \trianglelefteq K$, vemos que $v, w \in F$. Como $G \trianglelefteq F$, concluimos que $v, w \in G$. Por lo tanto, $G \trianglelefteq K$.

\impliedby :

Sean $v, w \in F$ tales que $v+w \in G$, entonces, como $G \trianglelefteq K$ y $F \subseteq K$, concluimos que $v, w \in G$. ■

Lema 104. Sean K un cono de un espacio V , y $\{F_i\}_{i \in I}$ una familia arbitraria no vacía de caras de K . Entonces $\bigcap_{i \in I} F_i$ es una cara de K .

Demostración. $\bigcap_{i \in I} F_i$ es un cono:

Como, para cada $i \in I$, F_i es un subconjunto cerrado de V , dado que “intersección arbitraria de subconjuntos cerrados de un espacio topológico es de nuevo un subconjunto cerrado”, vemos que $\bigcap_{i \in I} F_i$ es un subconjunto cerrado de V .

Por otro lado, si $v, w \in \bigcap_{i \in I} F_i$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$, entonces $\alpha v, v+w \in F_i$ para toda i , pues cada F_i es cono de V . Esto es, $\alpha v, v+w \in \bigcap_{i \in I} F_i$.

Además, $\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) \cap \left(-\bigcap_{i \in I} F_i\right) = \{\bar{0}\}$. Pues si $v \in \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) \cap \left(-\bigcap_{i \in I} F_i\right)$, entonces $v \in F_i \cap (-F_i)$ para toda $i \in I$; como la familia $\{F_i\}_{i \in I}$ es no vacía concluimos que $v = \bar{0}$. Y la contención $\left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) \cap \left(-\bigcap_{i \in I} F_i\right) \supseteq \{\bar{0}\}$ es obvia. Así, $\bigcap_{i \in I} F_i$ es un cono.

$$\forall v, w \in K \left(v+w \in \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) \implies v, w \in \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right) \right):$$

Si $v, w \in K$ son tales que $v+w \in \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right)$, entonces $v+w \in F_i$ para toda $i \in I$; como cada F_i es cara, vemos que $v, w \in F_i$ para toda $i \in I$. Es decir, concluimos que $v, w \in \left(\bigcap_{i \in I} F_i\right)$. ■

Después de este lema, podemos definir lo que es una cara generada por un subconjunto S de K , ya que la familia de caras de K que contienen a S es no vacía (al menos K está en la familia) y tiene sentido entonces hablar de su intersección:

Definición 105. Sean K un cono, y S un subconjunto arbitrario de K . La cara de K generada por S , que denotaremos $\varphi(S)$, es la intersección de la familia de caras de K que contienen a S . Esto es, $\varphi(S) = \bigcap \{F / F \trianglelefteq K \text{ y } S \subseteq F\}$.

Notación 106. Si $\{x_1, \dots, x_m\}$ es un subconjunto finito de K , escribiremos $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ en lugar de $\varphi(\{x_1, \dots, x_m\})$.

Las siguientes propiedades son inmediatas de la definición:

Lema 107. Sean K un cono y S y T subconjuntos de K tales que $S \subseteq T$. Entonces:

(i) $S \subseteq \varphi(S)$

(ii) S es cara de K si y sólo si $S = \varphi(S)$

(iii) $\varphi(S) = \varphi(\varphi(S))$

(iv) $\varphi(S) \subseteq \varphi(T)$ ■

Lo siguiente que haremos será dar alguna descripción más accesible de $\varphi(S)$.

Lema 108. Sean K un cono de dimensión finita y $S \subseteq K$, entonces $F_S = \{y \in K / \exists z \in \text{pos}(S) \text{ tal que } y \leq_K z\}$ es una cara de K .

Demostración. F_S es cerrado:

Se seguirá del lema 153 y la proposición 154 de la sección 3.2.

$$F_S + F_S \subseteq F_S \text{ y } \alpha F_S \subseteq F_S \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+ :$$

Si $x, y \in F_S$, entonces existen $z_0, z_1 \in \text{pos}(S)$ tales que $x \leq_K z_0$ y $y \leq_K z_1$. Pero $\text{pos}(S) + \text{pos}(S) \subseteq \text{pos}(S)$, por lo que $z_0 + z_1 \in \text{pos}(S)$, y además se cumple $x + y \leq_K z_0 + z_1$ y $x + y \in K$. Por lo tanto, $x + y \in F_S$. Un argumento totalmente análogo muestra que $\alpha F_S \subseteq F_S \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$, pues $\alpha(\text{pos}(S)) \subseteq \text{pos}(S) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$.

$$F_S \cap (-F_S) = \{\bar{0}\} :$$

La contención \supseteq es obvia. Y como $F_S \subseteq K$, la contención $F_S \cap (-F_S) \subseteq \{\bar{0}\}$ es también clara.

Por lo tanto, F_S es un cono.

$$\forall v, w \in K (v + w \in F_S \implies v, w \in F_S) :$$

Si $v, w \in K$ son tales que $v + w \in F_S$, entonces $\exists z \in \text{pos}(S)$ tal que $v + w \leq_K z$, pero entonces, dado que $v \leq_K v + w$, $w \leq_K v + w$ y que \leq_K es una relación transitiva, vemos que $v \leq_K z$ y $w \leq_K z$, por lo que $v, w \in F_S$.

Así, F_S es una cara de K . ■

Lema 109. Sean K un cono de dimensión finita y $S \subseteq K$, entonces $F_S = \varphi(S)$.

Demostración. Demostraremos que toda cara de K que contiene a S contiene también a F_S , como F_S es cara de K , eso nos dará el resultado.

Sean pues $F \leq K$ tal que $S \subseteq F$ y $y \in F_S$. Entonces $\exists z \in \text{pos}(S)$ tal que $y \leq_K z$. Como F es cono y $S \subseteq F$, vemos que $\text{pos}(S) \subseteq F$ y por lo tanto, $z \in F$; de donde vemos que los elementos y y $z - y$ de K son tales que $y + (z - y) \in F$. Como F es cara de K , concluimos que $y \in F$. Como y fue un elemento arbitrario de F_S , vemos que $F_S \subseteq F$. Y como F fue una cara arbitraria de K con la propiedad de contener a S , vemos que $F_S = \varphi(S)$. ■

Corolario 110. Sean K un cono en un espacio V de dimensión finita y $x \in K$. Entonces:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \{v \in V / \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \bar{0} \leq_K v \leq_K \alpha x\} \\ &= \{v \in V / \exists \beta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \text{ tal que } \bar{0} \leq_K v \leq_K \beta x\} \\ &= \{v \in V / \exists \gamma \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \text{ tal que } \bar{0} \leq_K \gamma v \leq_K x\} \end{aligned}$$

Demostración. $\varphi(x) \subseteq \{v \in V / \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \bar{0} \leq_K v \leq_K \alpha x\}$:

Por el lema anterior, $\varphi(x) = \{y \in K / \exists z \in \text{pos}(\{x\}) \text{ tal que } y \leq_K z\}$. Así, si $y \in \varphi(x)$, entonces $\exists z \in \text{pos}(\{x\}) = \{\alpha x / \alpha \in \mathbb{R}^+\}$ tal que $y \leq_K z$, es decir, existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $y \leq_K \alpha x$. Esto es, $y \in \{v \in V / \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \bar{0} \leq_K v \leq_K \alpha x\}$.

$$\{v \in V / \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \bar{0} \leq_K v \leq_K \alpha x\} \subseteq \{v \in V / \exists \beta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \text{ tal que } \bar{0} \leq_K v \leq_K \beta x\} :$$

Si $y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$ son tales que $\bar{0} \leq_K y \leq_K \alpha x$, entonces tenemos dos casos: Si $\alpha = 0$, entonces $y = \bar{0}$, y por lo tanto, tomando $\beta = 1$, vemos que $\bar{0} \leq_K y \leq_K \beta x$. Si $\alpha > 0$, entonces tomando $\beta = \alpha$, vemos que $\bar{0} \leq_K y \leq_K \beta x$. De cualquier forma concluimos que $y \in \{v \in V / \exists \beta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \text{ tal que } \bar{0} \leq_K v \leq_K \beta x\}$.

$$\{v \in V / \exists \beta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \text{ tal que } \bar{0} \leq_K v \leq_K \beta x\} \subseteq \{v \in V / \exists \gamma \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \text{ tal que } \bar{0} \leq_K \gamma v \leq_K x\} :$$

Sean $y \in V$ y $\beta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tales que $\bar{0} \leq_K y \leq_K \beta x$. Entonces, haciendo $\gamma = \beta^{-1} > 0$, vemos que $\bar{0} \leq_K \gamma y \leq_K x$ (debido al lema 97, sección 2.4). Por lo que $y \in \{v \in V / \exists \gamma \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \text{ tal que } \bar{0} \leq_K \gamma v \leq_K x\}$.

$$\{v \in V / \exists \gamma \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \text{ tal que } \bar{0} \leq_K \gamma v \leq_K x\} \subseteq \varphi(x) :$$

Tomemos $y \in V$ y $\gamma \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tales que $\bar{0} \leq_K \gamma y \leq_K x$, entonces (de nuevo, por el lema 97), $\bar{0} \leq_K y \leq_K \gamma^{-1}x$, es decir, $\exists z = \gamma^{-1}x \in \text{pos}(\{x\})$ tal que $\bar{0} \leq_K y \leq_K z$. Por lo tanto, $y \in \{v \in K / \exists z \in \text{pos}(\{x\}) \text{ tal que } v \leq_K z\} = \varphi(x)$.

Esto prueba las tres igualdades enunciadas en el corolario. ■

Corolario 111. Sean K un cono en \mathbb{R}^n y $x \in K$; entonces $x \in \text{int}_{\langle \varphi(x) \rangle}(\varphi(x))$. Es decir, todo elemento de K pertenece al interior relativo de la cara que genera.

Demostración. Sea $w \in \langle \varphi(x) \rangle$, entonces existen $w_1, w_2 \in \varphi(x)$ tales que $w = w_1 - w_2$. Por el corolario anterior, $\exists \gamma \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que $\bar{0} \leq_K \gamma w_2 \leq_K x$, es decir, tal que $x + \gamma(-w_2) \in K$. Por otro lado, $\gamma w_2 \in \varphi(x)$, y por lo tanto, $x + \gamma(-w_2) \in \langle \varphi(x) \rangle$; de donde $x + \gamma(-w_2) \in \langle \varphi(x) \rangle \cap K = \varphi(x)$. Entonces $x + \gamma w = x + \gamma(w_1 - w_2) = \gamma w_1 + x + \gamma(-w_2) \in \varphi(x)$.

Así, hemos mostrado que $\forall w \in \langle \varphi(x) \rangle \exists \gamma \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que $x + \gamma w \in \varphi(x)$. Por el teorema 99 (sección 2.4), concluimos que $x \in \text{int}_{\langle \varphi(x) \rangle}(\varphi(x))$. ■

Lema 112. Sean K un cono de \mathbb{R}^n y $F \trianglelefteq K$, con $F \neq K$ (ie, una cara *propia*), entonces $F \subseteq \partial_{\mathbb{R}^n}(K)$.

Demostración. Supongamos que $F \not\subseteq \partial_{\mathbb{R}^n}(K)$, entonces, dado que $F \subseteq K$, existe $v \in F \cap \text{int}_{\mathbb{R}^n}(K)$. Sea $w \in K$, entonces, por el teorema 99 (sección 2.4), existe $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que $v - \lambda w \in K$. Así, $(v - \lambda w) + \lambda w = v \in F$, y debido a que F es cara de K , $\lambda w \in F$. Como $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, también $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, y por lo tanto, $w = \frac{1}{\lambda}(\lambda w) \in F$. Entonces podemos concluir que $K \subseteq F$, pues w fue un elemento arbitrario de K . ■

Corolario 113. Sean K un cono sólido de \mathbb{R}^n y F una cara de K tal que $\dim(F) = \dim(K) = n$. Entonces $F = K$. Es decir, toda cara propia de K tiene dimensión estrictamente menor a la dimensión de K .

Demostración. Como $\dim(F)=n$, F es sólido en \mathbb{R}^n , y por lo tanto, existe $v \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(F) \subseteq \text{int}_{\mathbb{R}^n}(K)$; entonces, por el lema anterior, F no puede ser distinta de K . ■

Sean K un cono sólido de \mathbb{R}^n y $x \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(K)$, entonces $\varphi(x) = K$, debido al lema 112. Por otro lado, si $v \in K$ es tal que $\varphi(v) = K$, entonces $v \in \text{int}_{\langle \varphi(v) \rangle}(\varphi(v)) = \text{int}_{\langle K \rangle}(K) = \text{int}_{\mathbb{R}^n}(K)$, por el corolario 111. Es fácil ver que esto implica el siguiente teorema.

Teorema 114. Sean K un cono, $F \trianglelefteq K$ y $v \in F$. Entonces $\varphi(v) = F$ si y sólo si $v \in \text{int}_{\langle F \rangle}(F)$. ■

Proposición 115. Sea K un cono sólido de \mathbb{R}^n . Entonces todo elemento de K es combinación lineal no negativa de algún conjunto de vectores extremales de K con a lo más n elementos.

Demostración. Por inducción sobre $\dim(K)$: Si $\dim(K) \in \{1, 2\}$, el resultado es obvio (véase ejemplos 77 y 78 de la sección 2.3). Supongamos entonces que $\dim(K) \geq 3$ y que el resultado es cierto para todos los conos con dimensión menor que $\dim(K)$. Sea $v \in K$. Entonces hay dos casos:

Caso 1: $v \in \partial_{\mathbb{R}^n}(K)$. Entonces $\varphi(v) \not\subseteq K$, pues $v \in \text{int}_{\langle \varphi(v) \rangle}(\varphi(v))$; por lo que (por el corolario 113) $\dim(\varphi(v)) < \dim(K)$. Entonces, dado que $\varphi(v)$ es un cono sólido en $\langle \varphi(v) \rangle$, la hipótesis inductiva nos dice que existe un conjunto de extremales de $\varphi(v)$ con a lo más $\dim(\varphi(v))$ elementos, de los cuales v es combinación lineal no negativa. Como $\dim(\varphi(v)) < \dim(K)$, en este caso hemos terminado, pues por el lema 103, todo vector extremal de $\varphi(v)$ es también vector extremal de K .

Caso 2: $v \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(K)$. Entonces v **no** es un vector extremal de K (pues de serlo, se tendría que $v \in \varphi(v) \subseteq \partial_{\mathbb{R}^n}(K)$). Sea entonces v_1 un vector extremal de K ; de esta manera, $\{v, v_1\}$ es linealmente independiente. Consideremos el cono $K' = K \cap \langle \{v, v_1\} \rangle$, cuya dimensión es 2; existen un vector extremal w de K' y escalares no negativos λ_1, β , tales que $v = \lambda_1 v_1 + \beta w$. Obsérvese que $w \in \partial_{\langle \{v, v_1\} \rangle}(K')$, y por lo tanto, $w \in \partial_{\mathbb{R}^n}(K)$. Entonces, por el caso 1, existen a lo más $\dim(\varphi(w))$ vectores extremales de K de los cuales w es combinación lineal no negativa. El resultado se desprende entonces de esto último, de que $v = \lambda_1 v_1 + \beta w$ con $\lambda_1, \beta \geq 0$, y de que $\dim(\varphi(w)) < \dim(K)$. ■

Corolario 116. *Sea K un cono sólido en \mathbb{R}^n . Entonces \mathbb{R}^n posee una base que consta de vectores extremales de K .*

Demostración. Como K es sólido en \mathbb{R}^n , existe una base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathbb{R}^n contenida en K (teorema 75, sección 2.2). Por la proposición anterior, cada v_i puede expresarse como una combinación lineal de $m_i \leq n$ vectores extremales w_{i1}, \dots, w_{im_i} de K . Entonces el conjunto $S = \bigcup_{i=1}^n \{w_{i1}, \dots, w_{im_i}\}$ genera a \mathbb{R}^n y posee sólo extremales de K . Así, existe un subconjunto γ de S que es una base de \mathbb{R}^n . ■

Nota 117. *Es claro que dada $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de \mathbb{R}^n que consta de extremales de K , pueden existir vectores $v \in K$ que no puedan expresarse como combinación lineal no negativa de los elementos de β (esto pasa cuando K tiene más de n rayos extremales). Lo que nos dicen la proposición 115 y su corolario es que para cada $v \in K$ se puede encontrar vectores extremales de los cuales v sea combinación lineal no negativa.*

Supóngase que $F \neq \{\bar{0}\}$ es una cara de K , entonces por cada $v \in F \setminus \{\bar{0}\}$, existe un conjunto finito de vectores extremales de K , $\{w_{v1}, \dots, w_{vm_v}\}$ y un número finito de escalares positivos, $\lambda_{v1}, \dots, \lambda_{vm_v}$ tales que $v = \sum_{i=1}^{m_v} \lambda_{vi} w_{vi}$. Entonces un sencillo argumento inductivo muestra que

para cada i , se tiene que $w_{vi} \in F$. Esto nos lleva a que $F = \text{pos} \left(\bigcup_{v \in F} \{w_{v1}, \dots, w_{vm_v}\} \right)$. Es decir, F es el cono generado por los vectores extremales de K que pertenecen a F .

Definición 118. *Sea K un cono de un espacio V de dimensión finita. Diremos que K es poliédrico ssi K posee sólo un número finito de caras.*

Teorema 119. *Un cono K de dimensión finita es poliédrico si y sólo si su número de rayos extremales es finito.*

Demostración. \implies : Es obvio, pues todo rayo extremal es cara de K .

\impliedby : Sean f_1, \dots, f_m todos los rayos extremales de K , y sean $v_1 \in f_1, \dots, v_m \in f_m$ vectores extremales tales que cada f_i es el rayo generado por v_i . Por la proposición 115 y el párrafo que sigue a la nota 117, dada una cara $F \neq \{\bar{0}\}$ existe un subconjunto finito $S \neq \emptyset$ de $\{v_1, \dots, v_m\}$ tal que $F = \text{pos}(S)$ (S es justamente el conjunto de los v_i que pertenecen a F); además, si F_1 y F_2 son caras no cero distintas de K , es claro que los conjuntos S_1 y S_2 de extremales que determinan, son distintos. Esto nos dice que K tiene a lo más $|\wp(\{v_1, \dots, v_m\})|$ caras; y como $\wp(\{v_1, \dots, v_m\})$ es un conjunto finito, concluimos que K tiene un número finito de caras. ■

A continuación estableceremos un teorema (cuya demostración se debe precisamente a la directora de esta tesis y a B. Zavala (véase [BZS]) del cual hay que hacer varias observaciones: La obviedad intuitiva de su afirmación y de sus consecuencias seguramente hará que el lector se extrañe por la longitud de la demostración. Su belleza se incrementa por el hecho de que las consecuencias son (quizá) más importantes en esta tesis, que la afirmación misma que contiene. Entre otras cosas, el siguiente teorema:

- (1) Muestra que todo cono K de dimensión finita está contenido en un cono poliédrico.
- (2) Exhibe un hiperplano $(n - 1)$ -dimensional que intersecta a K precisamente en el vector cero, teniendo como corolario que el cono dual K^* (véase el ejemplo 90 de la sección 2.3) es sólido en V^* .
- (3) Exhibe también un conjunto convexo compacto " $(n - 1)$ -dimensional" C_K tal que K es la unión de los rayos generados por los elementos de C_K (véase el teorema 85 de la sección 2.3 y el párrafo que lo sigue para un antecedente). Esto último nos permitirá, en los capítulos 3 y 4, analizar la geometría de K en términos de la geometría de C_K . Y así, el análisis se facilitará considerablemente, pues C_K será, en muchas ocasiones, más "fácilmente visualizable": Por ejemplo, podremos "visualizar" la geometría de un cono de dimensión 4, porque en ese caso, la dimensión de C_K será 3.

Después de tan largo preámbulo, pasemos al enunciado y la demostración del resultado.

Teorema 120. (*M. Takane y B. Zavala*). *Sea K un cono sólido en \mathbb{R}^n , $n \geq 1$. Entonces existe un cono poliédrico \widehat{K} tal que $K \subseteq \widehat{K}$.*

Demostración. Encontraremos un conjunto compacto “ $n - 1$ -dimensional” C_K tal que $K = \mathbb{R}^+ C_K = \{\lambda v / v \in C_K \text{ y } \lambda \geq 0\}$. Dado que todo compacto es acotado, C_K estará contenido en un cubo $n - 1$ -dimensional, que es convexo y compacto; y usando la técnica del teorema 85 (sección 2.3), veremos que el cono generado por dicho cubo es poliédrico (de hecho, tendrá tantos rayos extremales como vértices tiene el cubo). Trabajaremos con el producto interior y la norma euclidianos de \mathbb{R}^n .

Consideremos $\mathbb{S}^{n-1} \cap K = \{x \in K / \|x\| = 1\}$ y su envolvente convexa, $\text{conv}(\mathbb{S}^{n-1} \cap K)$; veamos que $\bar{0} \notin \text{conv}(\mathbb{S}^{n-1} \cap K)$: Si $\bar{0} \in \text{conv}(\mathbb{S}^{n-1} \cap K)$, entonces, por la proposición 65 y el lema 66 de la sección 2.1, existirían un conjunto finito de vectores $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{S}^{n-1} \cap K$ y un conjunto finito de escalares no negativos $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$, tales que $\bar{0} = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ y $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. Demostremos por inducción sobre m que esto último no es posible: Si $m = 1$, entonces $\lambda_1 = 1$ y por lo tanto $x_1 = \bar{0}$, lo que contradice que $x_1 \in \mathbb{S}^{n-1}$. Si $m > 1$, entonces la hipótesis inductiva nos dice que para toda i , $\lambda_i > 0$; entonces $-\lambda_m x_m = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i x_i \in K \cap (-K)$ y por lo tanto $-\lambda_m x_m = \bar{0}$, y como $\lambda_m > 0$, obtenemos $\bar{0} = x_m \in \mathbb{S}_V^{n-1} \nabla$. Por lo tanto, $\bar{0} \notin \text{conv}(\mathbb{S}^{n-1} \cap K)$.

Además, por la proposición 67, $\text{conv}(\mathbb{S}^{n-1} \cap K)$ es un subconjunto compacto de V , y por lo tanto, dado que $\bar{0} \notin \text{conv}(\mathbb{S}^{n-1} \cap K)$, existe un $v \in \text{conv}(\mathbb{S}^{n-1} \cap K)$, $v \neq \bar{0}$, cuya distancia al cero es mínima con respecto a los demás elementos de $\text{conv}(\mathbb{S}^{n-1} \cap K)$. Sean $H = \{v\}^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n / \langle w, v \rangle = 0\}$, $H^{\leq} = \{w \in \mathbb{R}^n / \langle w, \frac{v}{\langle v, v \rangle} \rangle \geq 1\}$, $H^{\leq 1} = \{w \in \mathbb{R}^n / \langle w, \frac{v}{\langle v, v \rangle} \rangle \leq 1\}$ y $H^=1 = H + \{v\} = \{w \in \mathbb{R}^n / \langle w, \frac{v}{\langle v, v \rangle} \rangle = 1\}$.

Entonces $\bar{B}(0, \|v\|) \subseteq H^{\leq 1}$, pues si $y \in \bar{B}(0, \|v\|)$, entonces $\langle y, y \rangle \leq \langle v, v \rangle$, por lo que (dado que $0 \leq \langle y - v, y - v \rangle = \langle y, y \rangle - 2\langle y, v \rangle + \langle v, v \rangle$) $2\langle y, v \rangle \leq \langle y, y \rangle + \langle v, v \rangle \leq 2\langle v, v \rangle$, y entonces $\langle y, \frac{v}{\langle v, v \rangle} \rangle = \frac{\langle y, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \leq 1$. Así, $\bar{B}(0, \|v\|) \subseteq H^{\leq 1}$. Además, si $y \in \bar{B}(0, \|v\|)$ es distinto de v , entonces $0 < \langle y - v, y - v \rangle$, y entonces $2\langle y, v \rangle < 2\langle v, v \rangle$, por lo que $\frac{\langle y, v \rangle}{\langle v, v \rangle} < 1$. Esto nos dice que $\bar{B}(0, \|v\|) \cap H^{\leq} = \{v\} = \bar{B}(0, \|v\|) \cap H^=1$, es decir, que el hiperplano $(n - 1)$ -dimensional $H^=1$ es tangente en v a la esfera euclidiana que es frontera de $\bar{B}(0, \|v\|)$.

Mostremos que $\text{conv}(\mathbb{S}^{n-1} \cap K) \subseteq H^{\leq}$: si existe $x \in \text{conv}(\mathbb{S}^{n-1} \cap K) \setminus H^{\leq}$, entonces, $\text{conv}(v, x) \subseteq \text{conv}(\mathbb{S}^{n-1} \cap K)$, y como $v \in H^{\leq}$, tenemos $v \neq x$. Entonces $\text{conv}(v, x) \cap \bar{B}(0, \|v\|)$ tiene al menos dos elementos, pues si constara de un solo elemento, ese elemento tendría que ser v , por lo que si Π es el subespacio generado por v y x , entonces $\text{conv}(v, x) \subseteq \Pi$ y así, $\text{conv}(v, x)$ sería

tangente al círculo que es frontera relativa de $\Pi \cap \overline{B}(0, \|v\|)$ y entonces, $\text{conv}(v, x)$ debería estar contenido en $H^{\perp=1}$, cosa que no sucede. Pero entonces $\text{conv}(v, x)$ es secante al círculo frontera (relativa) de $\Pi \cap \overline{B}(0, \|v\|)$ y por lo tanto existe un $y \in \text{conv}(v, x) \subseteq \text{conv}(\mathbb{S}^{n-1} \cap K)$ tal que $0 < \|y\| < \|v\|$, lo que contradice que v sea el elemento de $\text{conv}(\mathbb{S}^{n-1} \cap K)$ más cercano a $\bar{0}$. Por lo tanto $\text{conv}(\mathbb{S}^{n-1} \cap K) \subseteq H^{\perp \leq 1}$ (obsérvese que aquí hemos usado que el producto interior y la norma considerados son los euclidianos).

Usemos lo mostrado en el párrafo anterior para demostrar, por reducción al absurdo, que $H \cap K = \{\bar{0}\}$. Si $z \in H \cap K$ es distinto de cero entonces, por un lado, $\left\langle z, \frac{v}{\langle v, v \rangle} \right\rangle = 0$; mientras que, por otro, $\frac{z}{\|z\|} \in \text{conv}(\mathbb{S}^{n-1} \cap K)$, y por lo tanto, $\frac{1}{\|z\|} \left\langle z, \frac{v}{\langle v, v \rangle} \right\rangle = \left\langle \frac{z}{\|z\|}, \frac{v}{\langle v, v \rangle} \right\rangle \geq 1$, de donde vemos que $\left\langle z, \frac{v}{\langle v, v \rangle} \right\rangle \neq 0 \nabla$. Por lo tanto, $H \cap K = \{\bar{0}\}$. Notemos que H es un subespacio $(n-1)$ -dimensional de \mathbb{R}^n y por lo tanto $\mathbb{R}^n \setminus H$ tiene dos componentes conexas: la de aquellos vectores cuyo producto interior con $\frac{v}{\langle v, v \rangle}$ es negativo es una, y la otra consta de los vectores cuyo producto interior con $\frac{v}{\langle v, v \rangle}$ es positivo. Debido a que $H \cap K = \{\bar{0}\}$, $\left\langle v, \frac{v}{\langle v, v \rangle} \right\rangle > 0$, y K es convexo, por el teorema del valor intermedio vemos que el producto interior de los elementos distintos de cero de K con $\frac{v}{\langle v, v \rangle}$ es estrictamente positivo.

Ahora probemos que $C_K = H^{\perp=1} \cap K$ es compacto: Que es cerrado se debe a que es intersección de dos cerrados. Supongamos que no es acotado; entonces podemos escoger una sucesión $\langle u_m \rangle_{m \in \mathbb{N}}$ de elementos de C_K con la propiedad de que $\|u_m\| > m$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Para los miembros de dicha sucesión se cumple que $\left\langle u_m, \frac{v}{\langle v, v \rangle} \right\rangle = 1$, por lo que $\left\langle \frac{u_m}{\|u_m\|}, \frac{v}{\langle v, v \rangle} \right\rangle = \frac{1}{\|u_m\|} \leq \frac{1}{m}$. Por otro lado, la sucesión $\left\langle \frac{u_m}{\|u_m\|} \right\rangle_{m \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\left\langle \frac{u_{m_t}}{\|u_{m_t}\|} \right\rangle_{t \in \mathbb{N}}$, pues $\frac{u_m}{\|u_m\|} \in \mathbb{S}^{n-1} \cap K$ para cada m y $\mathbb{S}^{n-1} \cap K$ es compacto. Supongamos que $u \in \mathbb{S}^{n-1} \cap K$ es el límite de la sucesión $\left\langle \frac{u_{m_t}}{\|u_{m_t}\|} \right\rangle_{t \in \mathbb{N}}$; entonces, debido a la continuidad de la funcional lineal $\left\langle \cdot, \frac{v}{\langle v, v \rangle} \right\rangle : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\left\langle u, \frac{v}{\langle v, v \rangle} \right\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \left\langle \frac{u_{m_t}}{\|u_{m_t}\|}, \frac{v}{\langle v, v \rangle} \right\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\|u_{m_t}\|} = 0$, por lo que $\bar{0} = u \in \mathbb{S}^{n-1} \nabla$. Esta última contradicción nos permite afirmar que C_K es acotado. Así, concluimos que $C_K = H^{\perp=1} \cap K$ es compacto.

A continuación, mostremos que pasa lo mismo que en el teorema 85 de la sección 2.3, es decir, que K es la unión de los rayos generados por C_K : Sea $w \in K$, si $w = \bar{0}$, entonces $w = 0v$, y $v \in H^{\perp=1}$. Supongamos, pues, que $w \neq \bar{0}$. Entonces $\left\langle w, \frac{v}{\langle v, v \rangle} \right\rangle > 0$, porque $w \notin H$, y así, $\left\langle \frac{w}{\left\langle w, \frac{v}{\langle v, v \rangle} \right\rangle}, \frac{v}{\langle v, v \rangle} \right\rangle = 1$, por lo que $\frac{w}{\left\langle w, \frac{v}{\langle v, v \rangle} \right\rangle} \in H^{\perp=1} \cap K$. Así, para todo $w \in K$ existen $\lambda \in \mathbb{R}^+$ y $w' \in C_K = H^{\perp=1} \cap K$ tales que $w = \lambda w'$.

Entonces existe un cubo $(n-1)$ -dimensional Q tal que $C_K \subseteq Q$. Como veremos en el corolario 165 y el teorema 167 de la sección 3.3, $\hat{K} = \text{pos}(Q)$ es un cono poliédrico que contiene a K . ■

Corolario 121. *Sea K un cono sólido en \mathbb{R}^n . Entonces el cono dual K^* es sólido en $(\mathbb{R}^n)^*$.*

Demostración. La funcional lineal $\left\langle \cdot, \frac{v}{\langle v, v \rangle} \right\rangle : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ del teorema anterior, es estrictamente positiva en los elementos no cero de K . ■

2.6. La Latiz de Caras de un Cono

Teorema 122. *Sea $\mathcal{F}(K) = \{F / F \trianglelefteq K\}$ el conjunto de todas las caras de un cono K . Entonces $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es una latiz, en la que $F \vee G = \varphi(F \cup G)$ y $F \wedge G = F \cap G$ para $F, G \in \mathcal{F}(K)$. Más que eso, $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es una latiz completa.*

Demostración. Sea \mathfrak{F} una familia de caras de K . Si $\mathfrak{F} = \emptyset$, entonces $\vee \mathfrak{F} = \{\bar{0}\}$ y $\wedge \mathfrak{F} = K$. Supongamos que $\mathfrak{F} \neq \emptyset$, entonces, por el lema 104 (sección 2.5), $\cap \mathfrak{F}$ es una cara de K , que obviamente contiene a cualquier otra cara contenida en todos los elementos de \mathfrak{F} . Por otro lado, es obvio que $\varphi(\cup \mathfrak{F})$ es una cara contenida en cualquier cara que contenga a todos los elementos de \mathfrak{F} . Por lo tanto \mathfrak{F} tiene un supremo $\vee \mathfrak{F} = \varphi(\cup \mathfrak{F})$ y un ínfimo $\wedge \mathfrak{F} = \cap \mathfrak{F}$. Esto demuestra que $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es una latiz completa. ■

Del lema 103 (sección 2.5) se sigue que si K es un cono y $F \trianglelefteq K$, entonces $\langle \mathcal{F}(F), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es una sublatiz de $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$. Escribamos esto como un corolario.

Corolario 123. *Si K es un cono y $F \trianglelefteq K$, entonces $\langle \mathcal{F}(F), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es una sublatiz de $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$. ■*

Proposición 124. *Para subconjuntos no vacíos, S, T , de un cono K , tenemos las siguientes igualdades: $\varphi(S \cup T) = \varphi(S + T) = \varphi(\varphi(S) + \varphi(T)) = \varphi(S) \vee \varphi(T)$.*

Demostración. $\varphi(S \cup T) \subseteq \varphi(S + T)$:

Si $s \in S$, entonces, tomando $t \in T$ (lo cual puede hacerse porque $T \neq \emptyset$), $s+t \in S+T \subseteq \varphi(S+T)$. Como $\varphi(S+T)$ es cara de K , deducimos que $s \in \varphi(S+T)$; por lo tanto, $S \subseteq \varphi(S+T)$. Análogamente, como $S \neq \emptyset$, $T \subseteq \varphi(S+T)$. Entonces $S \cup T \subseteq \varphi(S+T)$, por lo que, por el lema 107 de la sección 2.5, $\varphi(S \cup T) \subseteq \varphi(\varphi(S+T)) = \varphi(S+T)$.

$\varphi(S+T) \subseteq \varphi(\varphi(S) + \varphi(T))$:

Por el lema 107, $S \subseteq \varphi(S)$, $T \subseteq \varphi(T)$; por lo que $S+T \subseteq \varphi(S) + \varphi(T)$, de donde, nuevamente por el lema 107, $\varphi(S+T) \subseteq \varphi(\varphi(S) + \varphi(T))$.

$\varphi(\varphi(S) + \varphi(T)) \subseteq \varphi(S) \vee \varphi(T)$:

Es claro que $\varphi(S) + \varphi(T) \subseteq \varphi(S) \vee \varphi(T)$, y por el lema 107, $\varphi(\varphi(S) + \varphi(T)) \subseteq \varphi(\varphi(S) \vee \varphi(T)) = \varphi(S) \vee \varphi(T)$.

$\varphi(S) \vee \varphi(T) \subseteq \varphi(S \cup T)$:

Como $S, T \subseteq S \cup T$, tenemos que, por el lema 107, $\varphi(S), \varphi(T) \subseteq \varphi(S \cup T)$, de donde $\varphi(S) \vee \varphi(T) \subseteq \varphi(S \cup T)$, pues, por el teorema 122, $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es una latiz.

Esto prueba las 3 igualdades. ■

Corolario 125. Sea K un cono. Si $x_1, \dots, x_m \in K$, entonces $\varphi\left(\sum_{i=1}^m x_i\right) = \bigvee_{i=1}^m \varphi(x_i)$.

Demostración. Inmediata de la proposición anterior, usando un sencillo argumento de inducción.

■

Teorema 126. Sea K un cono de dimensión finita. Entonces $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es una latiz atómica.

Demostración. Es obvio que K y $\{\bar{0}\}$ son los elementos máximo y mínimo de $\mathcal{F}(K)$, respectivamente. Primero mostraremos que los átomos de $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \cap \rangle$ son precisamente los rayos extremales de K : Que todos los rayos extremales son átomos es obvio. Sea entonces F una cara de K , supongamos que F no es un rayo extremal; podemos suponer adicionalmente que $\dim(F) > 1$, porque $\{\bar{0}\}$ no es átomo. Sea $v \in \text{int}_{\langle F \rangle}(F)$, entonces v no es un vector extremal de K , ya que $\varphi(v) = F$; por esto y por la proposición 115 (sección 2.5), existe un conjunto $\{v_1, \dots, v_m\}$ de vectores extremales de K , con $m \geq 2$, tales que $v = \sum_{i=1}^m v_i$, entonces $\varphi(v_1)$ es un rayo extremal de K contenido propiamente en F , y por lo tanto, F no es un átomo de $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$. Así, los átomos de esta latiz son justamente los rayos extremals de K .

Veamos que toda cara de K es el supremo de algún conjunto de extremales de K : Sea $F \trianglelefteq K$, si $F = \{\bar{0}\}$, entonces $\{\bar{0}\} = \vee \emptyset$, y \emptyset es claramente un conjunto de rayos extremales de K . Supongamos entonces que $F \neq \{\bar{0}\}$, y sea nuevamente $v \in \text{int}_{\langle F \rangle}(F)$, entonces, por la proposición 115, existe un conjunto $\{v_1, \dots, v_m\}$ de vectores extremales de K tales que $v = \sum_{i=1}^m v_i$, y entonces, por el corolario anterior y el teorema 114 (sección 2.5), $F = \varphi(v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^m v_i\right) = \bigvee_{i=1}^m \varphi(v_i)$, y cada $\varphi(v_i)$ es un rayo extremal de K . ■

Capítulo 3

Cortes Transversales Convexos

–I’ve seen things you people wouldn’t believe, mmjjj.
Attack ships on fire over the shoulder of Orion. I watched
 C beams glitter in the dark near the Tannhäuser Gate.
All those moments will be lost in time, like tears in rain...
Time to die.

Roy en “*Blade Runner*”.

Un *corte transversal convexo* de un cono K de dimensión finita será un subconjunto compacto convexo $(n - 1)$ -dimensional C de K tal que K sea la unión de los rayos generados por (los elementos de) C . Este capítulo se dedica a establecer las principales relaciones entre las latices de caras, las topologías y las características geométricas de C y de K . Comenzamos con algunas nociones de subespacios afines que utilizaremos en este y el siguiente capítulos.

3.1. Conjuntos Afines

Definición 127. Sea V un espacio vectorial. Por un **subespacio afín** de V entenderemos la traslación de un subespacio vectorial de V por un vector de V . Esto es, $A \subseteq V$ es un subespacio afín ssi existen un subespacio vectorial W de V y $v \in V$ tales que $A = W + \{v\}$.

Nota 128. Todo subespacio afín de V es no vacío y todo subespacio vectorial es también subespacio afín.

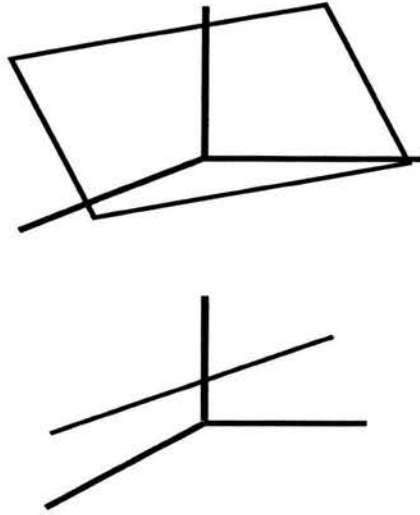


Figura 3.1: Ejemplos de subespacios afines de \mathbb{R}^3 .

Definición 129. Si $A = W + \{v\}$ es un subespacio afín de V , la **dimensión de A** , que denotaremos por $\dim(A)$, será la dimensión de W como subespacio vectorial de V .

Nota 130. Si W es subespacio vectorial de V , usualmente nos referiremos a él como “subespacio” simplemente; mientras que si A es subespacio afín, no omitiremos la palabra “afín”.

Lema 131. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia no vacía de subespacios afines de V tales que $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Entonces $\bigcap_{i \in I} A_i$ es un subespacio afín de V .

Demostración. Por cada $i \in I$ existen W_i subespacio vectorial de V y $v_i \in V$ tales que $A_i = W_i + \{v_i\}$. Sean $v \in \bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ y $W = \bigcap_{i \in I} W_i$, entonces W es un subespacio vectorial de V y por cada $i \in I$ existe $w_i \in W_i$ tal que $v = w_i + v_i$. Mostremos que $\bigcap_{i \in I} A_i = W + \{v\}$: Sea $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$, entonces, por cada $i \in I$ existe $y_i \in W_i$ tal que $x = y_i + v_i$, por lo que $x - v = y_i - w_i \in W_i$; de donde $x - v \in \bigcap_{i \in I} W_i = W$. Por lo tanto $\bigcap_{i \in I} A_i \subseteq W + \{v\}$. Ahora, si $x \in W + \{v\}$, entonces existe $y \in W = \bigcap_{i \in I} W_i$ tal que $x = y + v$, de donde vemos que, para cada $i \in I$, $x = y + w_i + v_i \in W_i + \{v_i\}$. De aquí, $W + \{v\} \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$. ■

De la demostración anterior también podemos ver que si $A = W + \{v\}$ es un subespacio afín de V , entonces $\forall x \in A$ ($A = W + \{x\}$).

Si S es un subconjunto no vacío de V , entonces S está contenido en al menos un subespacio afín de V , a saber, V mismo. Además, la intersección de los subespacios afines de V que contienen

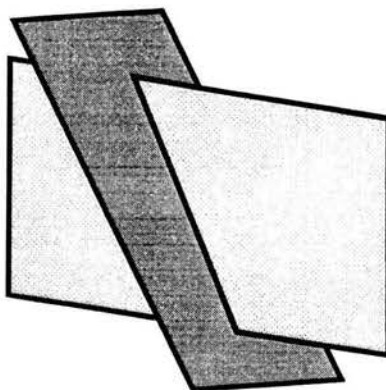


Figura 3.2: Intersección de subespacios afines es subespacio afín.

a S es no vacía, ya que al menos contiene a S , que es no vacío. Estas dos razones justifican la siguiente definición:

Definición 132. Sea S un subconjunto no vacío de V . El **subespacio afín generado por S** , que denotaremos por $\text{afín}(S)$ es la intersección de los subespacios afines de V que contienen a S . Esto es, $\text{afín}(S) = \bigcap \{A / A \text{ es subespacio afín de } V \text{ y } S \subseteq A\}$.

Nota 133. Obsérvese que si W y W' son subespacios de V tales que $W + \{v\} = W' + \{v\}$, entonces $W = W'$.

Como \mathbb{R}^n tiene dimensión finita sobre \mathbb{R} , sabemos que toda cadena ascendente de subespacios suyos tiene altura finita (de hecho, n es una cota superior para dicha altura). Esto implica el siguiente lema:

Lema 134. Toda cadena ascendente de subespacios afines de \mathbb{R}^n tiene altura finita. ■

Una ligera variación en la demostración de la proposición 65 (sección 2.1) nos da como resultado la siguiente:

Proposición 135. Sea S un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V , entonces $\text{afín}(S) = \bigcup \{\text{afín}(T) / T \text{ es un subconjunto finito de } S\}$. ■

Lema 136. Sea $T = \{v_1, \dots, v_m\}$ un subconjunto finito de V . Entonces $\text{afín}(T) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i / \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}$.

Demostración. Sea A el conjunto $\left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i / \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 \right\}$. Es obvio que $T \subseteq A$, por lo que si A es subespacio afín, se tendrá la contención $\text{afín}(T) \subseteq A$. Para mostrar que A es afín, demostremos que $A - \{v_1\}$ es un subespacio de V : Es obvio que $\bar{0} \in (A - \{v_1\})$; sean $\alpha \in \mathbb{R}$, $w_1 = \left(\sum_{i=1}^m \beta_i v_i \right) - v_1$, $w_2 = \left(\sum_{i=1}^m \gamma_i v_i \right) - v_1 \in (A - \{v_1\})$ (con $\sum_{i=1}^m \beta_i v_i, \sum_{i=1}^m \gamma_i v_i \in A$), entonces $\alpha w_1 + w_2 = \left(\sum_{i=1}^m \alpha \beta_i v_i \right) - \alpha v_1 + \left(\sum_{i=1}^m \gamma_i v_i \right) - v_1 = (\alpha \beta_1 - \alpha + \gamma_1) v_1 + \left(\sum_{i=2}^m (\alpha \beta_i + \gamma_i) v_i \right) - v_1$, y $\alpha \beta_1 - \alpha + \gamma_1 + \sum_{i=2}^m (\alpha \beta_i + \gamma_i) = \alpha \left(\sum_{i=1}^m \beta_i \right) - \alpha + \left(\sum_{i=1}^m \gamma_i \right) = 1$, por lo que $\alpha w_1 + w_2 \in A - \{v_1\}$. Así, A es subespacio afín de V y $\text{afín}(T) \subseteq A$.

Sea W el subespacio de V tal que $\text{afín}(T) = W + \{v_1\}$. Que $A \subseteq \text{afín}(T)$ lo demostramos por inducción sobre la cardinalidad de T : Si $|T| = 1$, el resultado es obvio. Si $|T| = 2$, entonces $\text{afín}(T) = \mathbb{R}\{(v_2 - v_1)\} + \{v_1\} = \{v_1 + \lambda(v_2 - v_1) / \lambda \in \mathbb{R}\} = \{\lambda v_2 + (1 - \lambda)v_1 / \lambda \in \mathbb{R}\}$. Supongamos entonces que $|T| = m > 2$ y que la afirmación es cierta para todos los conjuntos con menos de m elementos. Sea $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \in A$ (con $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$); si $\lambda_1 = 1$, entonces $\sum_{i=2}^m \lambda_i = 0$, y por lo tanto $v - v_1 = \sum_{i=2}^m \lambda_i v_i = \left(\sum_{i=2}^m \lambda_i (v_i - v_1) \right) \in W$, de donde $v \in \text{afín}(T)$. Supongamos, pues, que $\lambda_1 \neq 1$, entonces, debido a que $\sum_{i=2}^m \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_1} = 1$ y a la hipótesis inductiva, $\sum_{i=2}^m \frac{\lambda_i v_i}{1 - \lambda_1} \in \text{afín}(v_2, \dots, v_m) \subseteq \text{afín}(T)$; por lo que $v = \lambda_1 v_1 + (1 - \lambda_1) \sum_{i=2}^m \frac{\lambda_i v_i}{1 - \lambda_1} \in \text{afín}\left(v_1, \sum_{i=2}^m \frac{\lambda_i v_i}{1 - \lambda_1}\right) \subseteq \text{afín}(T)$. ■

Proposición 137. *Sea S un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^n . Entonces existe un subconjunto finito T de S tal que $\text{afín}(T) = \text{afín}(S)$.*

Demostración. Sean $v \in S$ y W subespacio de \mathbb{R}^n tales que $\text{afín}(S) = W + \{v\}$. Sea $\beta = \{v_1, \dots, v_m\}$ un subconjunto linealmente independiente de W maximal con la propiedad de que $\beta + \{v\} \subseteq S$. Mostremos que β es una base de W : Sea $x \in S$, si $x - v \in \beta$, entonces $x \in \langle \beta \rangle + \{v\}$; supongamos pues, que $x - v \notin \beta$, entonces $\{x - v\} \cup \beta$ es linealmente dependiente (por la maximalidad de β), de donde $x \in \langle \beta \rangle + \{v\}$. Entonces $\langle \beta \rangle + \{v\} = \text{afín}(S) = W + \{v\}$, y por lo tanto $\langle \beta \rangle = W$ y β es una base de W .

Entonces el conjunto $T = \{v, v_1 + v, \dots, v_m + v\}$ es un subconjunto finito de S tal que $\text{afín}(T) = \text{afín}(S)$. ■

Obsérvese que en esta última demostración, la cardinalidad de T fue precisamente $\dim(W) + 1$. Es fácil ver también que T es un subconjunto minimal de S con la propiedad de que $\text{afín}(T) = \text{afín}(S)$, y que se necesita al menos $\dim(W) + 1$ elementos de S para generar su espacio afín. Démosle un nombre a este tipo de conjuntos:

Definición 138. Sea $S = \{v_1, \dots, v_{r+1}\}$ un subconjunto finito de \mathbb{R}^n , con $0 \leq r \leq n$. Diremos que S es **afín r -independiente** ssi $\text{afín}(S)$ tiene dimensión r .

Así, el conjunto T referido arriba es afín r -independiente, y todo subespacio afín r -dimensional de \mathbb{R}^n ($0 \leq r \leq n$) está generado por un conjunto afín r -independiente.

Lema 139. Sea $S = \{v_1, \dots, v_{r+1}\}$ un subconjunto afín r -independiente de \mathbb{R}^n . Si $A = W + \{v_1\}$ es un subespacio afín r -dimensional de \mathbb{R}^n tal que $S \subseteq A$, entonces $A = \text{afín}(S)$.

Demostración. La contención $\text{afín}(S) \subseteq A$ es obvia. Por otro lado, sea U el subespacio de \mathbb{R}^n tal que $\text{afín}(S) = U + \{v_1\}$, entonces U es un subespacio r -dimensional de W , pero W tiene dimensión r , por lo que $U = W$, y entonces $\text{afín}(S) = U + \{v_1\} = W + \{v_1\} = A$. ■

Lema 140. Sea $S = \{v_1, \dots, v_{r+1}\}$ un subconjunto finito de \mathbb{R}^n . Entonces S es afín r -independiente si y sólo si el conjunto $\widehat{S} = \{v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_{r+1} - v_1\}$ es linealmente independiente. En cualquiera de estas situaciones equivalentes se tiene que $\text{afín}(S) = \langle \widehat{S} \rangle + \{v_1\}$.

Demostración. \implies :

Sea W el subespacio de \mathbb{R}^n tal que $\text{afín}(S) = W + \{v_1\}$, entonces $\dim(W) = r$. Mostraremos que \widehat{S} es una base de W ; para ello, basta demostrar que $\langle \widehat{S} \rangle = W$. La contención $\langle \widehat{S} \rangle \subseteq W$ es obvia. Sea pues $w \in W$, entonces $w + v_1 \in \text{afín}(S)$, por lo que, debido al lema 136, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1} \in \mathbb{R}$ tales que $w + v_1 = \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i v_i$ y $\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i = 1$. Entonces $w = \left(\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i v_i \right) - v_1 = \left(\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i v_i \right) - \left(\sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i v_1 \right) = \sum_{i=1}^{r+1} (\lambda_i v_i - \lambda_i v_1) = \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i (v_i - v_1) = \sum_{i=2}^{r+1} \lambda_i (v_i - v_1) \in \langle \widehat{S} \rangle$. Así, \widehat{S} es un conjunto con r elementos que genera al espacio W , que tiene dimensión r ; por lo tanto \widehat{S} es una base de W , de donde obtenemos que \widehat{S} es linealmente independiente. También obtenemos que $\text{afín}(S) = \langle \widehat{S} \rangle + \{v_1\}$.

\impliedby :

\widehat{S} genera un subespacio r -dimensional de \mathbb{R}^n , por lo que si probamos que $\text{afín}(S) = \langle \widehat{S} \rangle + \{v_1\}$, podremos concluir que S es afín r -independiente. Es claro que $S \subseteq \langle \widehat{S} \rangle + \{v_1\}$, por lo que $\text{afín}(S) \subseteq \langle \widehat{S} \rangle + \{v_1\}$. Ahora, si $v \in \langle \widehat{S} \rangle + \{v_1\}$, entonces existen $\lambda_2, \dots, \lambda_{r+1} \in \mathbb{R}$ tales que $v = v_1 + \sum_{i=2}^{r+1} \lambda_i (v_i - v_1) = \left(1 - \sum_{i=2}^{r+1} \lambda_i \right) v_1 + \sum_{i=2}^{r+1} \lambda_i v_i \in \text{afín}(S)$, por el lema 136. Por lo tanto, $\text{afín}(S) = \langle \widehat{S} \rangle + \{v_1\}$ y S es afín r -independiente. ■

Lema 141. Sea $S = \{v_1, \dots, v_{r+1}\}$ un subconjunto linealmente independiente de \mathbb{R}^n , entonces S es afín r -independiente.

Demostración. Es fácil ver que la independencia lineal de S implica la independencia lineal del conjunto $\{-v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_{r+1} - v_1\}$, y ésta, a su vez, la del conjunto $\{v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_{r+1} - v_1\}$. Por el lema anterior, S es afín r -independiente. ■

Lema 142. Sean $S = \{v_1, \dots, v_{r+1}\}$ un subconjunto afín r -independiente de \mathbb{R}^n y $v \in \mathbb{R}^n$. Entonces el conjunto $\{v, v_1, \dots, v_{r+1}\}$ es afín $(r+1)$ -independiente si y sólo si $v \notin \text{afín}(S)$.

Demostración. \implies :

Es claro que si $v \in \text{afín}(S)$, entonces $\{v, v_1, \dots, v_{r+1}\}$ no es afín $(r+1)$ -independiente, pues $\text{afín}(\{v, v_1, \dots, v_{r+1}\}) = \text{afín}(S)$, y éste tiene dimensión r por hipótesis.

\impliedby :

Veamos que el conjunto $\{v - v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_{r+1} - v_1\}$ es linealmente independiente: Si no lo fuera, existirían $\lambda_1, \dots, \lambda_{r+1} \in \mathbb{R}$ escalares no todos cero tales que $\lambda_1(v - v_1) + \sum_{i=2}^{r+1} \lambda_i(v_i - v_1) = \bar{0}$. Por el lema anterior, la r -independencia afín de S implica que el conjunto $\{v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_{r+1} - v_1\}$ es linealmente independiente, y esto obliga a que en la combinación lineal $\lambda_1(v - v_1) + \sum_{i=2}^{r+1} \lambda_i(v_i - v_1) = \bar{0}$, λ_1 sea distinto de cero. Entonces $v = v_1 - \sum_{i=2}^{r+1} \frac{\lambda_i}{\lambda_1}(v_i - v_1) = \left(1 + \sum_{i=2}^{r+1} \frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)v_1 + \sum_{i=2}^{r+1} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)v_i \in \text{afín}(S)$ por el lema 136, pero estamos suponiendo que $v \notin \text{afín}(S)$, por lo que el argumento anterior implica que $\{v - v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_1, \dots, v_{r+1} - v_1\}$ es linealmente independiente. Por el lema 140, esto es equivalente a que $\{v, v_1, \dots, v_{r+1}\}$ sea afín $(r+1)$ -independiente. ■

Definición 143. Sea $S = \{v_1, \dots, v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_t\}$ un subconjunto finito de \mathbb{R}^n , con $0 \leq r \leq n$. Diremos que S se encuentra en **posición r -general** ssi todo subconjunto con $r+1$ elementos de S es afín r -independiente.

Ejemplo 144. Así, un punto siempre está en posición 0-general, dos puntos distintos siempre están en posición 1-general. $S = \{v_1, \dots, v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_t\}$ con $t \geq 3$, está en posición 2-general si no posee ninguna terna colineal. $S = \{v_1, \dots, v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_t\}$ con $t \geq 4$, está en posición 3-general si no posee ninguna cuaterna de puntos coplanares... ▲

Definición 145. Sea S un subconjunto no vacío de \mathbb{R}^n . Diremos que S es **sólido en afín**(S) ssi $\text{int}_{\text{afín}(S)}(S) \neq \emptyset$.

Definición 146. Sea C un subconjunto convexo no vacío de \mathbb{R}^n . La **dimensión de C** será la dimensión de $\text{afín}(C)$. Al vacío no le asignamos dimensión.

El siguiente lema nos dice que esta última definición está bien dada.

Lema 147. Sea C un subconjunto convexo no vacío de \mathbb{R}^n . Entonces C es sólido en $\text{afín}(C)$.

Demostración. Supongamos por un momento que $\bar{0} \in C$. Sean W el subespacio de \mathbb{R}^n tal que $\text{afín}(C) = W + \{\bar{0}\} = W$ y $\beta = \{v_1, \dots, v_m\}$ una base de W tal que $\beta \subseteq C$ (la existencia de una tal base se debe a la proposición 137). Extendamos β a una base $\gamma = \{v_1, \dots, v_m, w_{m+1}, \dots, w_n\}$ de \mathbb{R}^n y, como en el párrafo que precede al teorema 75 (sección 2.2), sea $\|\cdot\|_{\text{sup}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la norma definida mediante
$$\left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i + \sum_{j=m+1}^n \alpha_j w_j \right\|_{\text{sup}} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\alpha_i|\}.$$

Ahora mostremos que $\frac{\bar{0}}{m+1} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{m+1} (\bar{0} + v_i) = \sum_{i=1}^m \frac{v_i}{m+1} \in \text{int}_{\text{afín}(C)}(C)$: Sea $\varepsilon = \frac{1}{m(m+1)}$, entonces $B_{\text{afín}(C)}\left(\sum_{i=1}^m \frac{v_i}{m+1}, \varepsilon\right) \subseteq C$, pues si $x \in B_{\text{afín}(C)}\left(\sum_{i=1}^m \frac{v_i}{m+1}, \varepsilon\right)$, entonces, dado que $x \in \text{afín}(C) = \text{afín}(\beta) = W$, existen escalares $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que $x = \lambda \bar{0} + \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$ y $\lambda + \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$; dichos escalares son únicos debido a la independencia lineal de β . Además, para cada $i \in \{1, \dots, m\}$, $\left| \lambda_i - \frac{1}{m+1} \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^m \frac{v_i}{m+1} - x \right\|_{\text{sup}} < \frac{1}{m(m+1)}$, de donde $0 \leq \frac{m-1}{m(m+1)} = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m(m+1)} < \lambda_i < \frac{m+1}{m(m+1)}$. Esto implica que $\lambda = 1 - \sum_{i=1}^m \lambda_i > 1 - \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} = 0$. Así, por el lema 66 (sección 2.1), $x \in \text{conv}(v_1, \dots, v_m) \subseteq C$. Entonces $B_{\text{afín}(C)}\left(\sum_{i=1}^m \frac{v_i}{m+1}, \varepsilon\right) \subseteq C$ y, por lo tanto, C es sólido en $\text{afín}(C) = \text{afín}(\beta) = W$.

Si $\bar{0} \notin C$, entonces, tomando un $v \in C$, el conjunto $C' = C - \{v\}$ es convexo y contiene al cero, por lo que es sólido en $\text{afín}(C')$. Es inmediato ver que entonces C es sólido en $\text{afín}(C) = \text{afín}(C') + \{v\}$, pues la traslación por v preserva convexidad e interiores relativos. ■

Particularizando las hipótesis de este último lema, obtenemos un corolario:

Corolario 148. Si $\{x_1, \dots, x_{n+1}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es afín n -independiente, entonces $\text{conv}(x_1, \dots, x_{n+1})$ es sólido en \mathbb{R}^n . ■

Corolario 149. Sea C un subconjunto convexo compacto no vacío de \mathbb{R}^n . Entonces C es sólido en \mathbb{R}^n si y sólo si $\text{afín}(C) = \mathbb{R}^n$.

Demostración. \implies : Si $\text{afin}(C) \neq \mathbb{R}^n$, entonces C no puede ser sólido en \mathbb{R}^n , porque $\text{int}_{\mathbb{R}^n}(C) \subseteq \text{int}_{\mathbb{R}^n}(\text{afin}(C)) = \emptyset$.

\impliedby : Es el lema 147. ■

3.2. Conjuntos Convexos y sus Caras

Definición 150. Sean C un subconjunto convexo de un espacio real V , y $F \subseteq C$. Diremos que F es una \mathfrak{C} -cara de C ssi se cumple simultáneamente que:

- (i) F es convexo.
- (ii) $\forall v, w \in C \ (int_{afin(v,w)}(conv(v,w)) \cap F \neq \emptyset \implies v, w \in F)$.

La **dimensión de F** será la dimensión que tenga como convexo si $F \neq \emptyset$ (al vacío no le asignamos dimensión). Si F es una \mathfrak{C} -cara de C y $dim(F)=0$, diremos que F es un **vértice** de C ; y si $dim(F)=1$, diremos que F es una **arista** de C . El conjunto de \mathfrak{C} -caras de C será denotado por $\mathfrak{C}(C)$.

Es obvio que si F es un vértice de C , entonces F consta de un solo elemento x . En un claro abuso de lenguaje, en ocasiones nos referiremos a x (y no a $F = \{x\}$) como vértice de C . Obsérvese que el único vértice de un cono K es $\{\bar{0}\}$. Por otro lado, es conveniente observar que \emptyset es siempre una \mathfrak{C} -cara.

Nota 151. Tres vértices distintos de un conjunto convexo nunca son colineales. Por otro lado, obsérvese que, para $v, w \in V$, $int_{afin(v,w)}(conv(v,w)) = \{tv + (1-t)w / t \in (0, 1)\}$, de manera que si C es un conjunto convexo y $F \subseteq C$, entonces F es \mathfrak{C} -cara de C si y sólo si a) F es convexo, y b) $\forall v, w \in C \ (\exists t \in (0, 1) \text{ tal que } tv + (1-t)w \in F \implies v, w \in F)$.

De manera análoga al lema 103, tenemos el siguiente:

Lema 152. Sean C un conjunto convexo, $H \in \mathfrak{C}(C)$ y $G \subseteq C$. Entonces $G \in \mathfrak{C}(H)$ si y sólo si $G \in \mathfrak{C}(C)$ y $G \subseteq H$. En particular, todo vértice de H es un vértice de C .

Demostración. \implies :

Es claro que si $G \in \mathfrak{C}(H)$, entonces es convexo y $G \subseteq H$. Sean, pues, $v, w \in C$ tales que $int_{afin(v,w)}(conv(v,w)) \cap G \neq \emptyset$, entonces, como $G \subseteq H$, $int_{afin(v,w)}(conv(v,w)) \cap H \neq \emptyset$, de donde $v, w \in H$, y por lo tanto $v, w \in G$, pues $G \in \mathfrak{C}(H)$. Así, $G \in \mathfrak{C}(C)$.

\longleftarrow :

Si $G \in \mathfrak{C}(C)$ y $G \subseteq H$, entonces es obvio que $G \in \mathfrak{C}(H)$. ■

Lema 153. Si C es un subconjunto convexo cerrado de \mathbb{R}^n , entonces todas sus \mathfrak{C} -caras son cerradas.

Demostración. Sea F una \mathcal{C} -cara de C . Si $F = \emptyset$ o F es un vértice, el resultado es obvio. Supongamos entonces que F tiene más de un elemento y sea $v \in \overline{F}$ un punto de contacto de F . Entonces $v \in C$, pues C es cerrado de \mathbb{R}^n . Además, existe una sucesión $\langle v_m \rangle_{m \in \mathbb{N}}$ de elementos de F que converge a v . Podemos suponer que la sucesión es no constante, pues si es constante, es obvio que $v \in F$.

La sucesión $\langle v_m \rangle_{m \in \mathbb{N}}$ nos da entonces una cadena $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_s \subseteq \dots$ de subespacios afines de $\text{afín}(F)$ tal que $\text{afín}(\{v_1, \dots, v_s\}) = A_s$ para cada $s \in \mathbb{N}$. Dicha cadena se estaciona por el lema 134 (sección 3.1). Supongamos que se estaciona en A_r ($r \geq 2$ porque la sucesión $\langle v_m \rangle_{m \in \mathbb{N}}$ es no constante). Entonces $v \in A_r$, pues A_r es cerrado de \mathbb{R}^n y todos los miembros de la sucesión $\langle v_m \rangle_{m \in \mathbb{N}}$ pertenecen a A_r .

Como en la proposición 137 (sección 3.1), escojamos un subconjunto $T = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_{d+1}}\}$ de $\{v_1, \dots, v_r\}$ afín d -independiente (ie, un subconjunto minimal con la propiedad de generar al espacio afín A_r), donde $d = \dim(A_r)$. Entonces T tiene al menos dos elementos, por lo que $\text{int}_{A_r}(\text{conv}(T))$ es infinito. Sea $w \in \text{int}_{A_r}(\text{conv}(T))$, entonces, debido precisamente a que $v \in A_r$ y a que $\text{int}_{A_r}(\text{conv}(T))$ es infinito, $\text{conv}(v, w)$ posee un elemento $y \in \text{int}_{A_r}(\text{conv}(T))$ distinto de v y de w . Así, vemos que $v \in F$, porque v y w son dos elementos de C tales que $\text{int}_{\text{afín}(\text{conv}(v,w))}(\text{conv}(v, w)) \cap F \neq \emptyset$. ■

Como todo cono K es convexo, es natural preguntarse cómo se relacionan sus caras con sus \mathcal{C} -caras. Lo que podemos afirmar es que toda cara es \mathcal{C} -cara; sin embargo, la afirmación recíproca no es cierta, porque \emptyset es \mathcal{C} -cara de K , pero no cara. Demostremos que basta pedir que una \mathcal{C} -cara de K sea no vacía para ser cara (véase la definición 101, sección 2.5).

Proposición 154. Sean K un cono de \mathbb{R}^n y $F \subseteq K$. Entonces F es una cara de K si y sólo si F es \mathcal{C} -cara de K y $F \neq \emptyset$.

Demostración. \implies :

Sea F una cara de K , entonces, dado que $\bar{0} \in F$, vemos que $F \neq \emptyset$. Sean $v, w \in K$ tales que $\text{int}_{\text{afín}(v,w)}(\text{conv}(v, w)) \cap F \neq \emptyset$, entonces existe $t \in (0, 1)$ tal que $tv + (1-t)w \in F$. Como F es cara de K , esto implica que $tv, (1-t)w \in F$, lo que a su vez implica que $v, w \in F$, ya que $t \in (0, 1)$. Entonces, dado que F es un conjunto convexo, es una \mathcal{C} -cara no vacía de K .

\impliedby :

Primero veamos que $\bar{0} \in F$: Si $\bar{0} \notin F$, entonces, dado que F es no vacío, existe $x \in F$ distinto de cero. Tomando $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$, tendríamos que $x \in \text{int}_{\text{afín}(\bar{0}, \alpha x)}(\text{conv}(\bar{0}, \alpha x))$ y por lo tanto $\bar{0} \in F$. Así, $\bar{0} \in F$.

F es un subconjunto cerrado de \mathbb{R}^n por el lema anterior. Además, dados $x \in F$ y $\alpha \in \mathbb{R}^+$, hay dos casos: (1) Cuando $\alpha \in [0, 1]$, entonces $\alpha x \in F$ por la convexidad de F . (2) Cuando $\alpha > 1$, entonces $x \in \text{int}_{\text{afin}(\bar{0}, \alpha x)}(\text{conv}(\bar{0}, \alpha x))$ y por lo tanto $\alpha x \in F$. Así, F es cerrado bajo la multiplicación por escalares no negativos.

Si $x, y \in F$, entonces $\frac{1}{2}(x + y) \in \text{conv}(x, y) \subseteq F$. Por lo demostrado en el párrafo anterior, tenemos que entonces $(x + y) \in F$.

También es claro que $F \cap (-F) = \{\bar{0}\}$. Finalmente, sean $v, w \in K$ tales que $v + w \in F$; podemos suponer que v y w son ambos distintos de cero (porque si alguno es cero es claro entonces que $v, w \in F$) y distintos entre sí (pues si son iguales, entonces $2v \in F$ y por lo tanto $v \in F$). Entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que $\lambda(v + w) \in \text{int}_{\text{afin}(v, w)}(\text{conv}(v, w)) \cap F$, de donde $v, w \in F$.

Así, F es una cara de K . ■

Nota 155. Sea K un cono. Puede preguntar el lector, con toda razón, ¿por qué hacer distinción entre las caras y las \mathfrak{C} -caras de K si la única diferencia radica en el conjunto vacío? Una de las razones que damos es que estableceremos un isomorfismo entre la latiz de caras de K y la latiz de \mathfrak{C} -caras de algún corte transversal suyo, y no hacer hincapié en el hecho de que el vacío no es cara y sí \mathfrak{C} -cara haría más complicada la exposición de los resultados. Por ejemplo, en el teorema 126 (sección 2.6), establecimos que la latiz de caras de K es atómica; sin embargo, la latiz de \mathfrak{C} -caras de K no lo es (el único átomo es el cero). No hacer la distinción entre una cosa y otra habría obligado a hacer muchos rodeos para enunciar resultados de este tipo.

Lema 156. Sean C un subconjunto convexo de un espacio real V , y \mathfrak{F} una familia arbitraria no vacía de \mathfrak{C} -caras de C . Entonces $\cap \mathfrak{F}$ es también una \mathfrak{C} -cara de C .

Demostración. Por el lema 63 (sección 2.1), $\cap \mathfrak{F}$ es convexo. Sean $v, w \in C$ tales que $\text{int}_{\text{afin}(v, w)}(\text{conv}(v, w)) \cap (\cap \mathfrak{F}) \neq \emptyset$, entonces para toda $F \in \mathfrak{F}$ tenemos que $\text{int}_{\text{afin}(v, w)}(\text{conv}(v, w)) \cap F \neq \emptyset$, por lo que $v, w \in F$ para cada $F \in \mathfrak{F}$ (valga la repetición), es decir, $v, w \in \cap \mathfrak{F}$. Así, $\cap \mathfrak{F}$ es una \mathfrak{C} -cara de C . ■

Inmediatamente podemos definir, como en la definición 105 (sección 2.5), lo que es la \mathfrak{C} -cara generada por un subconjunto S de un convexo C , como la intersección de las \mathfrak{C} -caras de C que contienen a S .

Definición 157. Sea S un subconjunto de un conjunto convexo C . La \mathfrak{C} -cara generada por S , que denotaremos por $\psi(S)$, es la intersección de las \mathfrak{C} -caras de C que contienen a S . Esto es, $\psi(S) = \cap \{F / F \text{ es } \mathfrak{C}\text{-cara de } C \text{ y } S \subseteq F\}$.

Nota 158. Si K es un cono y $\emptyset \neq S \subseteq K$, entonces $\varphi(S) = \psi(S)$, donde $\varphi(S)$ es la cara de K generada por S (véase la definición 105, sección 2.5).

Notación 159. Sin embargo, cuando hablemos de conos, mantendremos la letra φ para denotar la cara generada. Es más, como posteriormente hablaremos sólo de conos y de conjuntos compactos convexos, nuestra notación será φ cuando hablemos de caras de conos y ψ cuando hablemos de \mathfrak{C} -caras de compactos convexos.

De una manera completamente análoga a la demostración del teorema 122 de la sección 2.6 puede probarse el siguiente:

Teorema 160. Sea $\mathfrak{C}(C) = \{F / F \text{ es } \mathfrak{C}\text{-cara de } C\}$ el conjunto de \mathfrak{C} -caras de un subconjunto convexo C de un espacio real V . Entonces $(\mathfrak{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge)$ es una latiz completa, en la que, para $F, G \in \mathfrak{C}(C)$, $F \vee G = \psi(F \cup G)$ y $F \wedge G = F \cap G$. ■

3.3. Cortes Transversales de Conos

En esta sección definimos lo que es un corte transversal de un cono de dimensión finita, vemos que todo cono de \mathbb{R}^n posee al menos uno, y establecemos un resultado que nos permitirá conocer las caras de K en términos de su corte transversal y viceversa.

Definición 161. Sean K un cono sólido en \mathbb{R}^n y $C \subseteq K$. Diremos que C es un *corte transversal convexo* de K ssi sucede simultáneamente que:

- (i) C es compacto y convexo.
- (ii) $\forall v \in K \setminus \{\bar{0}\} \exists! \lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que $\lambda v \in C$.

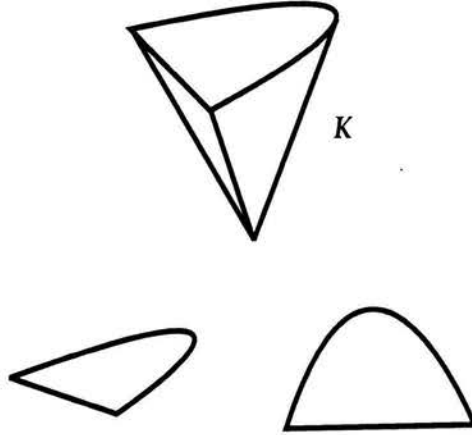


Figura 3.3: Posibles cortes transversales de K

Proposición 162. Sean K un cono sólido en \mathbb{R}^n y $C \subseteq K$. Entonces C es un corte transversal convexo de K si y sólo si se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- a) C es compacto y convexo.
- b) $\forall v \in K \exists w \in C \exists \mu \in \mathbb{R}^+$ tales que $v = \mu w$.
- c) C es la intersección de un subespacio afín $(n - 1)$ -dimensional de \mathbb{R}^n con K .

Demostración. \implies : Es claro que se cumple a). Para ver que se cumple b), sea $v \in K$; si $v = \bar{0}$, entonces tomando cualquier $w \in C$ (que es claramente no vacío), tenemos que $v = 0w$; si $v \neq \bar{0}$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que $\lambda v \in C$, haciendo $\mu = \frac{1}{\lambda}$ y $w = \lambda v$, tenemos que $v = \mu w$.

Ahora, como K es sólido en \mathbb{R}^n , existe una base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ de \mathbb{R}^n contenida en K ; para cada $v_j \in \beta \exists \lambda_j \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que $\lambda_j v_j \in C$. El conjunto $\gamma = \{\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n\}$ es linealmente independiente; en otras palabras, γ es un subconjunto afín $(n-1)$ -independiente de C . Si $v \in K \setminus \text{afín}(\gamma)$, entonces $\gamma \cup \{v\}$ es afín n -independiente, por lo que $\text{conv}(\gamma \cup \{v\})$ es sólido en \mathbb{R}^n y está contenido en K . Tomando $u \in \text{int}_{\mathbb{R}^n}(\text{conv}(\gamma \cup \{v\}))$, vemos que $\text{conv}(\bar{0}, u)$ es infinito, por lo que hay una infinidad de escalares positivos λ tales que $\lambda u \in \text{conv}(\gamma \cup \{v\})$. Esto nos dice que v no puede pertenecer a C . Así, $C \subseteq K \cap \text{afín}(\gamma)$ y $\text{afín}(C) = \text{afín}(\gamma)$. Y si $w \in K \cap \text{afín}(\gamma)$ entonces existe un único escalar positivo λ tal que $\lambda w \in C$; si $\lambda \neq 1$, entonces $\bar{0} \in \text{afín}(w, \lambda w) \subseteq \text{afín}(\gamma)$, de donde existen $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$ tales que $\bar{0} = \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i v_i$ y $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$, lo cual contradice la independencia lineal de β ; por lo tanto $\lambda = 1$ y $w \in C$. Concluimos entonces que $C = K \cap \text{afín}(\gamma)$, y $\text{afín}(\gamma)$ es un subespacio afín $(n-1)$ -dimensional de \mathbb{R}^n .

\Leftarrow : Es obvio que se cumple $i)$. Sea $v \in K \setminus \{\bar{0}\}$, entonces existen $w \in C$ y $\mu \in \mathbb{R}^+$ tales que $v = \mu w$; como $v \neq \bar{0}$, $\mu \neq 0$, de donde, haciendo $\lambda = \frac{1}{\mu}$, tenemos que $\lambda v \in C$. Sean A el subespacio afín $(n-1)$ -dimensional de \mathbb{R}^n tal que $C = K \cap A$ y $\lambda_1 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que $\lambda_1 v \in C$. Si $\lambda_1 \neq \lambda$, entonces $\bar{0} \in \text{afín}(\lambda v, \lambda_1 v)$, y por lo tanto, $\text{pos}(\lambda v) \subseteq K \cap \text{afín}(\lambda v, \lambda_1 v) \subseteq K \cap A = C$, lo cual contradice que C sea compacto. Por lo tanto $\lambda_1 = \lambda$. ■

De acuerdo a la demostración del teorema 120, tenemos de manera inmediata el siguiente:

Teorema 163. *Todo cono sólido de \mathbb{R}^n posee un corte transversal convexo.* ■

Nota 164. *Dado un cono K sólido en \mathbb{R}^n , existe una infinidad de cortes transversales convexos suyos.*

El siguiente corolario nos dice que, en cierto sentido, “tomar un corte transversal convexo a partir de un cono” y “tomar el cono generado por un subconjunto compacto convexo n -dimensional de \mathbb{R}^{n+1} ” son operaciones mutuamente inversas. La demostración es inmediata del teorema 85 (sección 2.3), la demostración del teorema 120 (sección 2.5) y la definición 161.

Corolario 165. *Si C es un conjunto compacto convexo n -dimensional y no contiene al cero, y K el cono que genera en \mathbb{R}^{n+1} , entonces C es un corte transversal convexo de K . Recíprocamente, todo cono K de dimensión finita es el cono generado por cualquier corte transversal convexo suyo.* ■

Obsérvese que, como una consecuencia de la proposición 162, $\bar{0} \notin C$, pues si $\bar{0} \in C$ y A es el espacio afín tal que $C = A \cap K$, entonces A es subespacio vectorial de \mathbb{R}^n , y si $v \in C$ es distinto

de cero, entonces $\mathbb{R}^+\{v\} \subseteq K \cap A = C$, lo cual contradice la compacidad de C . Entonces C estaría obligado a ser $\{\bar{0}\}$, pero entonces no se cumple la condición *ii*) de la definición 161. Por lo tanto, $\bar{0} \notin C$.

Proposición 166. *Si K es un cono sólido en \mathbb{R}^n y C es un corte transversal convexo suyo, entonces $\bar{0} \notin C$, $C = K \cap \text{afín}(C)$ y $\dim(\text{afín}(C)) = n - 1$.*

Demostración. Que $\bar{0} \notin C$ quedó demostrado en el párrafo anterior. Sea $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de \mathbb{R}^n contenida en K . Salvo tomar múltiplos estrictamente positivos de los elementos de β , podemos suponer que $\beta \subseteq C$. Entonces, por el lema 141 (sección 3.1), β es afín $(n - 1)$ -independiente, de donde $\dim(\text{afín}(C)) \geq n - 1$. Pero $\dim(\text{afín}(C)) < n$, porque C está contenido en un subespacio afín $(n - 1)$ -dimensional de \mathbb{R}^n . Entonces podemos concluir que $\dim(\text{afín}(C)) = n - 1$.

Como C es la intersección de un subespacio afín $(n - 1)$ -dimensional de \mathbb{R}^n y $\dim(\text{afín}(C)) = n - 1$, vemos que tal subespacio afín debe ser $\text{afín}(C)$, de donde $C = K \cap \text{afín}(C)$. ■

Teorema 167. *Sean K un cono de dimensión finita y C un corte transversal convexo suyo. Entonces $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$, la latiz de caras de K , es isomorfa a $\langle \mathcal{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$, la latiz de \mathcal{C} -caras de C .*

Demostración. Sea $F \in \mathcal{F}(K)$, veamos que $F \cap C \in \mathcal{C}(C)$: Si $F = \{\bar{0}\}$, entonces, por la proposición anterior, $F \cap C = \emptyset \in \mathcal{C}(C)$. Supongamos entonces que $F \neq \{\bar{0}\}$; $F \cap C$ (que es no vacío) es convexo por ser intersección de convexos. Sean entonces $v, w \in C$ tales que $\text{int}_{\text{afín}(v,w)}(\text{conv}(v,w)) \cap (F \cap C) \neq \emptyset$; tomemos $x \in \text{int}_{\text{afín}(v,w)}(\text{conv}(v,w)) \cap (F \cap C) \neq \emptyset$, entonces existen escalares estrictamente positivos λ_1, λ_2 , tales que $x = \lambda_1 v + \lambda_2 w$. Como F es cara de K , $\lambda_1 v, \lambda_2 w \in F$, y por lo tanto $v, w \in F \cap C$. Así, $F \cap C$ es \mathcal{C} -cara de C . Definamos $\Omega : \mathcal{F}(K) \rightarrow \mathcal{C}(C)$ mediante $\Omega(F) = F \cap C$. Veamos que Ω es un isomorfismo de latices:

$\Omega : \mathcal{F}(K) \rightarrow \mathcal{C}(C)$ es un inf-morfismo: Sean $F, G \in \mathcal{F}(K)$, entonces $\Omega(F \wedge G) = \Omega(F \cap G) = (F \cap G) \cap C = (F \cap C) \cap (G \cap C) = \Omega(F) \cap \Omega(G) = \Omega(F) \wedge \Omega(G)$.

$\Omega : \mathcal{F}(K) \rightarrow \mathcal{C}(C)$ es un sup-morfismo: Sean $F, G \in \mathcal{F}(K)$, entonces $\Omega(F \vee G) = \Omega(\varphi(F \cup G)) = \varphi(F \cup G) \cap C$, mientras que $\Omega(F) \vee \Omega(G) = (F \cap C) \vee (G \cap C)$. Si $v \in (F \cap C) \vee (G \cap C)$, entonces, dado que $F \subseteq F \cup G \subseteq \varphi(F \cup G)$, vemos que $v \in \varphi(F \cup G) \cap C$, es decir, $(F \cap C) \vee (G \cap C) \subseteq \varphi(F \cup G) \cap C$; análogamente $(F \cap C) \vee (G \cap C) \subseteq \varphi(F \cup G) \cap C$. Esto implica que $(F \cap C) \vee (G \cap C) \subseteq \varphi(F \cup G) \cap C$. Por otro lado, si $H \in \mathcal{C}(C)$ contiene a la vez a $F \cap C$ y a $G \cap C$, entonces $\varphi(H)$ contiene a $F \cup G$ y por lo tanto a $\varphi(F \cup G)$. Pero entonces $\varphi(F \cup G) \cap C \subseteq \varphi(H) \cap C$, y si logramos demostrar que $\varphi(H) \cap C = H$, se tendrá que $\varphi(F \cup G) \cap C \subseteq (F \cap C) \vee (G \cap C)$.

La contención $H \subseteq \varphi(H) \cap C$ es clara. Si $v \in \varphi(H) \cap C$, entonces (por el lema 109 de la sección 2.5) existe $z \in \text{pos}(H)$ tal que $v \leq_K z$. Si $v = z$, entonces (teorema 85, sección 2.3) existen $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $h \in H$ tales que $v = \alpha h$. Por la definición 161, $h = v$ y por lo tanto, $v \in H$. Si $v <_K z$, entonces existen $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que $\lambda z \in H$, y $\mu \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $x \in C$ tales que $z - v = \mu x$. Entonces $\lambda z = \lambda \mu x + \lambda v$, es decir, x y v son elementos de C tales que existe un múltiplo positivo $\beta \lambda z$ de λz que pertenece a $\text{int}_{\text{afín}(x,v)}(\text{conv}(x, v)) \subseteq C$. Entonces $\beta \lambda z$, $\lambda z \in C$, y por la definición 161, $\beta = 1$ y $\lambda z \in \text{int}_{\text{afín}(x,v)}(\text{conv}(x, v))$; como $\lambda z \in H$ y $H \in \mathfrak{C}(C)$, concluimos que $v \in H$. Así, $\varphi(H) \cap C \subseteq H$. Por lo tanto, Ω es un sup-morfismo. Este párrafo también prueba que Ω es una función suprayectiva, pues para cada $H \in \mathfrak{C}(C)$ tenemos $H = \Omega(\varphi(H))$.

$\Omega : \mathcal{F}(K) \rightarrow \mathfrak{C}(C)$ es una función inyectiva: Sean $F, G \in \mathcal{F}(K)$ tales que $F \neq G$, entonces $F \cap C \neq G \cap C$, porque $F = \text{pos}(F \cap C)$ y $G = \text{pos}(G \cap C)$.

Así, Ω es un isomorfismo de latices. Obsérvese que $\Omega^{-1} : \mathfrak{C}(C) \rightarrow \mathcal{F}(K)$ viene dada por $\Omega^{-1}(H) = \varphi(H)$, y que $\varphi(H) = \text{pos}(H)$. ■

Sigamos suponiendo las hipótesis de este último teorema. Recordemos que, de acuerdo a las definiciones 71 (sección 2.2) y 101 (sección 2.5), la dimensión de una cara F de K es la dimensión de $\langle F \rangle$ sobre \mathbb{R} ; y, según las definiciones 146 (sección 3.1) y 150 (sección 3.2), la dimensión de una \mathfrak{C} -cara $H \neq \emptyset$ de C es la dimensión (sobre \mathbb{R}) de $\text{afín}(H)$ (al vacío no le asignamos dimensión). Observemos también que $\Omega(\{\bar{0}\}) = \emptyset$. A continuación, veamos cómo se relacionan las dimensiones de F y de $\Omega(F)$ cuando F es una cara no cero de K .

Proposición 168. *Sean K un cono sólido en \mathbb{R}^n , C un corte transversal convexo suyo y $F \in \mathcal{F}(K) \setminus \{\{\bar{0}\}\}$. Entonces $\dim(\Omega(F)) = \dim(F) - 1$.*

Demostración. Sean $d = \dim(F)$ y $\{v_1, \dots, v_d\}$ una base de $\langle F \rangle$ que consta de vectores extremales de F . Salvo tomar múltiplos estrictamente positivos de los v_i , podemos suponer que $\{v_1, \dots, v_d\} \subseteq \Omega(F) = F \cap C$. Entonces el conjunto $\{v_1, \dots, v_d\}$ es afín $(d-1)$ -independiente por el lema 141 (sección 3.1). Mostremos que $\text{afín}(\{v_1, \dots, v_d\}) = \text{afín}(\Omega(F))$:

La contención $\text{afín}(\{v_1, \dots, v_d\}) \subseteq \text{afín}(\Omega(F))$ es obvia. Para mostrar la contención $\text{afín}(\Omega(F)) \subseteq \text{afín}(\{v_1, \dots, v_d\})$ basta probar que $\Omega(F) \subseteq \text{afín}(\{v_1, \dots, v_d\})$; sea, pues, $v \in \Omega(F) = F \cap C$, si $v \notin \text{afín}(\{v_1, \dots, v_d\})$, entonces, por el lema 142 (sección 3.1), el conjunto $\{v, v_1, \dots, v_d\}$ es afín d -independiente. Pero $\langle F \rangle$ es un espacio afín d -dimensional que contiene a $\{v, v_1, \dots, v_d\}$, lo que implica (lema 139, sección 3.1) que $F \subseteq \langle F \rangle = \text{afín}(\{v, v_1, \dots, v_d\}) \subseteq \text{afín}(\Omega(F)) \subseteq \text{afín}(C)$, y entonces $F \subseteq K \cap \text{afín}(C) = C$, lo que contradice que C sea compacto (pues F es no acotado). Por lo tanto $v \in \text{afín}(\{v_1, \dots, v_d\})$. Así, $\text{afín}(\{v_1, \dots, v_d\}) = \text{afín}(\Omega(F))$ y se tiene que $\dim(\Omega(F)) = \dim(F) - 1$. ■

Proposición 169. Sean K un cono sólido en \mathbb{R}^n , C un corte transversal convexo suyo y $S \subseteq C$. Entonces $\Omega(\varphi(S)) = \psi(S)$.

Demostración. La contención $\psi(S) \subseteq \Omega(\varphi(S))$ es clara, ya que $\Omega(\varphi(S))$ es una \mathfrak{C} -cara de C que contiene a S . Por otro lado, $\Omega^{-1}(\psi(S))$ es una cara de K que contiene a S , por lo que $\varphi(S) \subseteq \Omega^{-1}(\psi(S))$, de donde $\Omega(\varphi(S)) \subseteq \psi(S)$. Por lo tanto, $\Omega(\varphi(S)) = \psi(S)$. ■

Establezcamos algunas consecuencias inmediatas para convexos compactos:

Corolario 170. Si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo compacto de dimensión n , entonces C tiene al menos un subconjunto afín n -independiente de $n + 1$ vértices.

Demostración. Consideremos, como en el teorema 85 de la sección 2.3, el cono $K = \text{pos}(C \times \{1\}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Es obvio que la latiz de \mathfrak{C} -caras de $C \times \{1\}$ es isomorfa a la latiz de \mathfrak{C} -caras de C , y que vértices de $C \times \{1\}$ corresponden a vértices de C . Más que eso, es claro que un conjunto de $n + 1$ vértices de C es afín n -independiente si y sólo si los correspondientes $n + 1$ vértices de $C \times \{1\}$ son afines n -independientes.

Pero K contiene una base β de \mathbb{R}^{n+1} que consta de vectores extremales suyos. Salvo tomar múltiplos estrictamente positivos de los elementos de β , podemos suponer que $\beta \subseteq C \times \{1\}$. Entonces, por la proposición 168, los elementos de β son vértices de $C \times \{1\}$, y β es afín n -independiente por el lema 141. ■

Corolario 171. Sea C un subconjunto convexo compacto sólido de \mathbb{R}^n . Entonces toda \mathfrak{C} -cara propia de C está contenida en la frontera de C .

Demostración. Sean $K = \text{pos}(C \times \{1\}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ y H una \mathfrak{C} -cara propia de C , entonces $H \times \{1\}$ es una \mathfrak{C} -cara propia de $C \times \{1\}$. Entonces $\varphi(H \times \{1\}) = \text{pos}(H \times \{1\})$ es una cara propia de K , por lo que $\varphi(H \times \{1\}) \subseteq \partial_{\mathbb{R}^{n+1}}(K)$. Sea $v \in H$. Así, existe una sucesión $\langle v_m \rangle_{m \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus K$ que converge a $(v, 1)$. Existe algún $r \in \mathbb{N}$ tal que para toda $t \geq r$ se tiene que la última entrada $v_{t(n+1)}$ de v_t es estrictamente positiva. Entonces la sucesión $\left\langle \frac{v_t}{v_{t(n+1)}} \right\rangle_{t \geq r}$ converge a $(v, 1)$; los miembros de dicha sucesión son claramente, elementos de $\text{afín}(C \times \{1\}) \setminus C$, pues $\text{afín}(C \times \{1\}) = \mathbb{R}^n \times \{1\}$ y $K = \text{pos}(C \times \{1\})$. Así, $H \times \{1\} \subseteq \partial_{\text{afín}(C \times \{1\})}(C)$. Entonces $H \subseteq \partial_{\mathbb{R}^n}(C)$. ■

Corolario 172. Si C es un subconjunto convexo compacto sólido de \mathbb{R}^n y H es una \mathfrak{C} -cara de C tal que $\dim(C) = \dim(H) = n$, entonces $H = C$.

Demostración. Sea $K = \text{pos}(C \times \{1\}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$; entonces, por la proposición 169, $\Omega(\varphi(H \times \{1\})) = \psi(H \times \{1\}) = H \times \{1\}$ y $\Omega(\varphi(C \times \{1\})) = \psi(C \times \{1\}) = C \times \{1\}$, por lo que, por la proposición 168, $\varphi(H \times \{1\})$ es una cara de $\varphi(C \times \{1\}) = K$ tal que $\dim(\varphi(H \times \{1\})) = \dim(H \times \{1\}) + 1 = \dim(H) + 1 = n + 1 = \dim(C) + 1 = \dim(C \times \{1\}) + 1 = \dim(K)$. Entonces, por el corolario 113 (sección 2.5), $\Omega^{-1}(H \times \{1\}) = \varphi(H \times \{1\}) = K = \varphi(C \times \{1\}) = \Omega^{-1}(C \times \{1\})$, y como Ω^{-1} es una función inyectiva, concluimos que $H \times \{1\} = C \times \{1\}$, y por lo tanto $H = C$.

■

3.4. El Operador ψ de un Convexo Compacto

En esta sección, establecemos unos pocos resultados que nos serán muy útiles en el capítulo 4; éstos, además, nos ayudan a ver que, en convexos compactos de dimensión finita, suceden cosas (intuitivamente obvias) análogas a las que tienen lugar en los conos finito-dimensionales.

Lema 173. *Si C es un subconjunto convexo compacto n -dimensional de \mathbb{R}^n y $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ un subconjunto afín n -independiente de C , entonces $\psi(v_1, \dots, v_{n+1}) = C$.*

Demostración. Inmediato del corolario anterior, pues $\psi(v_1, \dots, v_{n+1})$ es una \mathfrak{C} -cara de C de dimensión n . ■

Lema 174. *Si $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo compacto no vacío, y $v \in C$, entonces $v \in \text{int}_{\text{afín}(\psi(v))}(\psi(v))$.*

Demostración. Sea $K = \text{pos}(C \times \{1\}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, entonces, por el corolario 111 (sección 2.5), $(v, 1) \in \text{int}_{\langle \varphi((v,1)) \rangle}(\varphi((v, 1)))$, es decir, existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que $B_{\mathbb{R}^{n+1}}((v, 1), \varepsilon) \subseteq \varphi((v, 1))$. Entonces $B_{\text{afín}(\psi(v,1))}((v, 1), \varepsilon) = \text{afín}(\psi(v, 1)) \cap B_{\mathbb{R}^{n+1}}((v, 1), \varepsilon) \subseteq \text{afín}(\psi(v, 1)) \cap \varphi((v, 1)) = \psi((v, 1))$. ■

Corolario 175. *Si H es una \mathfrak{C} -cara de un subconjunto convexo compacto C de \mathbb{R}^n y $v \in H$, entonces $\psi(v) = H$ si y sólo si $v \in \text{int}_{\text{afín}(H)}(H)$.*

Demostración. \implies : Si $v \notin \text{int}_{\text{afín}(H)}(H)$, entonces, como, por el lema anterior, $v \in \text{int}_{\text{afín}(\psi(v))}(\psi(v))$, $\psi(v) \subsetneq H$.

\impliedby : Si $\psi(v) \neq H$, entonces, como $\psi(v) \subseteq H$, por el corolario 171, $\psi(v) \subseteq \partial_{\text{afín}(H)}(H)$, y por lo tanto, $v \notin \text{int}_{\text{afín}(H)}(H)$. ■

Corolario 176. *Sean C y D convexos compactos de dimensión finita tales que $D \subseteq C$ y $\psi_C : \wp(C) \rightarrow \mathfrak{C}(C)$ y $\psi_D : \wp(D) \rightarrow \mathfrak{C}(D)$ los operadores “cara generada” por los subconjuntos de C y de D , respectivamente. Entonces $\forall v \in D$ ($\psi_D(v) \subseteq \psi_C(v)$).*

Demostración. Es claro que $v \in \psi_D(v) \cap \psi_C(v)$; también es claro que $\psi_D(v) \cap \psi_C(v)$ es un conjunto convexo. Además, si u, w son elementos de D tales que $\text{int}_{\text{afín}(u,w)}(\text{conv}(u, w)) \cap (\psi_D(v) \cap \psi_C(v)) \neq \emptyset$, entonces, dado que $\psi_C(v)$ es \mathfrak{C} -cara de C y $D \subseteq C$, $u, w \in \psi_C(v)$. Como $\psi_D(v)$ es \mathfrak{C} -cara de D , también vemos que $u, w \in \psi_D(v)$. Así, $u, w \in (\psi_D(v) \cap \psi_C(v))$. De manera que $\psi_D(v) \cap \psi_C(v)$ es una \mathfrak{C} -cara de D que contiene a v . Por lo tanto, $\psi_D(v) \subseteq \psi_C(v)$. ■

Corolario 177. Sean C un convexo compacto de dimensión finita y $\{v_1, \dots, v_m\}$ un subconjunto finito de C . Si $v \in \text{int}_{\text{afin}(v_1, \dots, v_m)}(\text{conv}(v_1, \dots, v_m))$, entonces $\psi_C(v) = \psi_C(\{v_1, \dots, v_m\})$.

Demostración. Sean $\psi_C : \wp(C) \rightarrow \mathfrak{C}(C)$ y $\psi_D : \wp(\text{conv}(v_1, \dots, v_m)) \rightarrow \mathfrak{C}(\text{conv}(v_1, \dots, v_m))$ los operadores “cara generada” por los subconjuntos de C y de $\text{conv}(v_1, \dots, v_m)$, respectivamente. Por el corolario 175, $\psi_D(v) = \text{conv}(v_1, \dots, v_m)$. Como $\text{conv}(v_1, \dots, v_m) \subseteq C$, por el corolario anterior tenemos que $\psi_D(v) \subseteq \psi_C(v)$, por lo que $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \text{conv}(v_1, \dots, v_m) \subseteq \psi_C(v)$. Entonces $\psi_C(\{v_1, \dots, v_m\}) \subseteq \psi_C(v)$. Pero la contención $\psi_C(v) \subseteq \psi_C(\{v_1, \dots, v_m\})$ es obvia. Por lo tanto, $\psi_C(v) = \psi_C(\{v_1, \dots, v_m\})$. ■

Teorema 178. Sean K un cono sólido en \mathbb{R}^n y C un corte transversal convexo suyo. Entonces el isomorfismo $\Omega : \mathcal{F}(K) \rightarrow \mathfrak{C}(C)$ del teorema 167 preserva y refleja interiores relativos. Esto es, si $F \in \mathcal{F}(K) \setminus \{\{\bar{0}\}\}$ y $H \in \mathfrak{C}(C) \setminus \{\emptyset\}$, entonces:

- (i) $\text{int}_{\text{afin}(\Omega(F))}(\Omega(F)) = \text{int}_{\langle F \rangle}(F) \cap C$.
- (ii) $\text{int}_{(\Omega^{-1}(H))}(\Omega^{-1}(H)) = (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) (\text{int}_{\text{afin}(H)}(H))$.

Demostración. $\text{int}_{\text{afin}(\Omega(F))}(\Omega(F)) = \text{int}_{\langle F \rangle}(F) \cap C$:

Sea $v \in \text{int}_{\text{afin}(\Omega(F))}(\Omega(F))$, entonces, por la proposición 169 (sección 3.3) y el corolario 175, $\Omega(\varphi(v)) = \psi(v) = \Omega(F)$. Como Ω es una función inyectiva, vemos que $\varphi(v) = F$; por el teorema 114, esto nos lleva a que $v \in \text{int}_{\langle F \rangle}(F)$. Esto, en conjunción con el claro hecho de que $v \in C$, nos permite deducir que $\text{int}_{\text{afin}(\Omega(F))}(\Omega(F)) \subseteq \text{int}_{\langle F \rangle}(F) \cap C$.

Sea ahora $v \in \text{int}_{\langle F \rangle}(F) \cap C$, entonces, nuevamente por la proposición 169, $\Omega(F) = \Omega(\varphi(v)) = \psi(v)$; por el corolario 175, $v \in \text{int}_{\text{afin}(\Omega(F))}(\Omega(F))$. Así, tenemos la contención $\text{int}_{\langle F \rangle}(F) \cap C \subseteq \text{int}_{\text{afin}(\Omega(F))}(\Omega(F))$, y por lo tanto, la igualdad $\text{int}_{\text{afin}(\Omega(F))}(\Omega(F)) = \text{int}_{\langle F \rangle}(F) \cap C$.

$\text{int}_{(\Omega^{-1}(H))}(\Omega^{-1}(H)) = (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) (\text{int}_{\text{afin}(H)}(H))$:

Sea $v \in \text{int}_{(\Omega^{-1}(H))}(\Omega^{-1}(H))$, entonces $v \neq \bar{0}$ porque $\Omega^{-1}(H) \neq \{\bar{0}\}$. Además, $\varphi(v) = \Omega^{-1}(H)$. Sea λ el único real estrictamente positivo tal que $\lambda v \in C$. Entonces $\varphi(v) = \varphi(\lambda v)$, y por la proposición 169, $H = \Omega(\varphi(v)) = \Omega(\varphi(\lambda v)) = \psi(\lambda v)$, por lo que, por el corolario 175, $\lambda v \in \text{int}_{\text{afin}(H)}(H)$. Así, $v = \frac{1}{\lambda}(\lambda v) \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) (\text{int}_{\text{afin}(H)}(H))$. Esto prueba la contención $\text{int}_{(\Omega^{-1}(H))}(\Omega^{-1}(H)) \subseteq (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) (\text{int}_{\text{afin}(H)}(H))$.

Ahora tomemos $v \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) (\text{int}_{\text{afin}(H)}(H))$, entonces existen $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $w \in \text{int}_{\text{afin}(H)}(H)$ tales que $v = \lambda w$. Para dicho w se cumple que $\psi(w) = H$, y por lo tanto, $\Omega^{-1}(H) = \Omega^{-1}(\psi(w)) = \varphi(w) = \varphi(\lambda w) = \varphi(v)$, de donde $v \in \text{int}_{(\Omega^{-1}(H))}(\Omega^{-1}(H))$. Así, $(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) (\text{int}_{\text{afin}(H)}(H)) \subseteq \text{int}_{(\Omega^{-1}(H))}(\Omega^{-1}(H))$, y por lo tanto, $\text{int}_{(\Omega^{-1}(H))}(\Omega^{-1}(H)) = (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) (\text{int}_{\text{afin}(H)}(H))$. ■

3.5. La Latiz de \mathfrak{C} -caras de un Convexo Compacto

Teorema 179. *Sea C un subconjunto convexo compacto de \mathbb{R}^n , entonces la latiz de \mathfrak{C} -caras de C , $(\mathfrak{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge)$, es una latiz atómica.*

Demostración. Es de esperarse que los átomos de $(\mathfrak{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge)$ sean justamente los vértices de C , probémoslo: Por un lado, como la dimensión de todo vértice es cero, es claro que cada vértice de C es átomo de $(\mathfrak{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge)$. Falta mostrar que no hay más átomos; sea pues H una \mathfrak{C} -cara de C y supongamos que H no es un vértice. Podemos suponer que $H \neq \emptyset$, pues, claramente, el vacío no es un átomo. Entonces $\dim(H) \geq 1$, por lo que, si $K = \text{pos}(C \times \{1\}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $\dim(\Omega^{-1}(H \times \{1\})) \geq 2$. Por el teorema 126, existe un rayo extremal F de K contenido propiamente en $\Omega^{-1}(H \times \{1\})$. Entonces $\Omega(F)$ es un vértice de $C \times \{1\}$ contenido propiamente en $H \times \{1\}$. Esto nos da como resultado que existe un vértice de C contenido propiamente en H . Así, los átomos de $(\mathfrak{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge)$ son justamente los vértices de C .

Probemos ahora que toda \mathfrak{C} -cara de C es el supremo de algún conjunto de átomos: Sea $H \in \mathfrak{C}(C)$; si $H = \emptyset$, entonces $H = \vee \emptyset$, y \emptyset es claramente un conjunto de vértices de C . Supongamos, pues, que $H \neq \emptyset$; entonces (de nuevo, si $K = \text{pos}(C \times \{1\}) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$) $\Omega^{-1}(H \times \{1\})$ es una cara no cero de K , por lo que existe un conjunto finito S de rayos extremales de K tal que $\Omega^{-1}(H \times \{1\}) = \bigvee_{F \in S} F$. Como Ω es un isomorfismo de latices y S es finito, vemos que $H \times \{1\} = \Omega(\bigvee_{F \in S} F) = \bigvee_{F \in S} \Omega(F)$, y para cada $F \in S$, $\Omega(F)$ es un vértice de $C \times \{1\}$. ■

Corolario 180. *Sea C un subconjunto convexo compacto de \mathbb{R}^n , entonces C es la envolvente convexa de sus vértices. Esto es, $C = \text{conv}(\text{vért}(C))$, donde $\text{vért}(C) = \{w \in C / w \text{ es un vértice de } C\}$.*

Demostración. Es claro que $\text{conv}(\text{vért}(C)) \subseteq C$. La contención $C \subseteq \text{conv}(\text{vért}(C))$ la probamos por inducción sobre la dimensión de C . Si C es el vacío, o tiene dimensión cero o uno, el resultado obviamente se cumple. Supongamos entonces que $\dim(C) \geq 2$ y que el resultado es válido para todos los conjuntos convexos de dimensión menor que $\dim(C)$. Sea $v \in C$, entonces hay dos casos:

Caso 1. $v \in \partial_{\text{afin}}(C)$. Entonces, por el lema 174, $\psi(v)$ es una \mathfrak{C} -cara propia de C . Por el corolario 172, $\dim(\psi(v)) < \dim(C)$. Por la hipótesis inductiva, $\psi(v) = \text{conv}(\text{vért}(\psi(v)))$, y entonces hemos terminado, pues, por el lema 152, todo vértice de $\psi(v)$ es también un vértice de C .

Caso 2. $v \in \text{int}_{\text{afin}}(C)$. Entonces v no es un vértice de C , pues $\dim(C) \geq 2$. Sea entonces $w \in C$ un vértice de C (la existencia de un tal w se debe al teorema anterior). Así, dado

que C es compacto, $\text{afín}(v, w) \cap C$ es compacto, por lo que $\partial_{\text{afín}(v,w)}(\text{afín}(v, w) \cap C)$ posee exactamente dos elementos ($\partial_{\text{afín}(v,w)}(\text{afín}(v, w) \cap C)$ es, en realidad, homeomorfo al intervalo cerrado unitario), uno de ellos es w . Sea, pues u el otro elemento de $\partial_{\text{afín}(v,w)}(\text{afín}(v, w) \cap C)$ (ie, u es el único elemento de $(\partial_{\text{afín}(v,w)}(\text{afín}(v, w) \cap C)) \setminus \{w\}$). Entonces $u \in \partial_{\text{afín}(C)}(C)$, por lo que, debido al caso anterior, $u \in \text{conv}(\text{vért}(C))$, es decir, por la proposición 65, existe un subconjunto finito T de $\text{vért}(C)$ tal que $u \in \text{conv}(T)$. Así, concluimos que $v \in \text{conv}(u, w) \subseteq \text{conv}(T \cup \{w\})$, y $T \cup \{w\}$ es un conjunto de vértices de C . ■

Definición 181. Sea C un subconjunto convexo compacto de \mathbb{R}^n . Diremos que C es poliédrico ssi tiene un número finito de \mathfrak{C} -caras; esto es, ssi el conjunto $\mathfrak{C}(C)$ es finito.

Lema 182. Sea C un subconjunto compacto convexo de \mathbb{R}^n , entonces C es poliédrico si y sólo si $\text{Vért}(C)$ es finito.

Demostración. \implies : Es obvio, porque todo vértice es \mathfrak{C} -cara de C .

\impliedby : Si $H \in \mathfrak{C}(C)$, entonces, por el corolario 180, H es la envolvente convexa de sus vértices. Es claro que si H_1 y H_2 son \mathfrak{C} -caras distintas de C , entonces el conjunto de vértices que determinan (aquéllos de los cuales son envolventes convexas) son distintos. Por lo que C tiene a lo más $|\wp(\text{vért}(C))|$ caras. Como $\wp(\text{vért}(C))$ es un conjunto finito, $\mathfrak{C}(C)$ debe ser un conjunto finito. ■

Capítulo 4

Consecuencias: Principales Resultados

–There is a Building. Inside this Building there is a level where no elevator can go, and no stair can reach... This level is filled with doors; this doors lead to many places, hidden places... But one Door is special..., one Door leads to the Source...

“The Key Maker” en “*Matrix Reloaded*”.

En este capítulo, nos dedicamos, principalmente, a deducir resultados acerca de la geometría de un cono de dimensión *baja*, cuando su latiz de caras tiene altura *baja*. Se usará muy fuertemente la analogía conos \Leftrightarrow convexos compactos, que establecimos en el capítulo 3. En la sección 4.2 demostraremos una conjetura que George Philip Barker enunció en 1981, en los artículos [GPB-5], [GPB-6] y [GPB-7].

4.1. Un poco de Escindibilidad de Conos

Definición 183. Sean K un cono en un espacio V de dimensión finita y K_1, K_2 subconos de K (ie, conos contenidos en K). Diremos que K es la **suma directa** de K_1 y K_2 , y escribiremos $K = K_1 \oplus K_2$, ssi:

(i) $\langle K_1 \rangle \cap \langle K_2 \rangle = \{\bar{0}\}$.

(ii) $K = K_1 + K_2$, esto es, para todo $v \in K$ existen $v_1 \in K_1, v_2 \in K_2$ tales que $v = v_1 + v_2$.

(iii) K_1 y K_2 son subconjuntos propios de K .

Si K es la suma directa de dos subconjuntos suyos, diremos que K es **escindible**; de otra manera, diremos que K es **inescindible**.

Así, un cono K se escinde si podemos expresar $\langle K \rangle$ de manera no trivial como la suma directa de subespacios generados por subconjuntos de K .

Proposición 184. Sean K un cono sólido en un espacio V de dimensión finita $n \geq 2$, y C un corte transversal convexo de K . Si existen $H, L \in \mathcal{C}(C)$ tales que $\dim(H) = n - 2$, $\dim(L) = 0$, y $C = \text{conv}(H \cup L)$, entonces $K = \varphi(H) \oplus \varphi(L)$ y por lo tanto K se escinde.

Demostración. Observemos primero que $H \cap L = \emptyset$, pues L es un vértice y $\dim(H) = n - 2$. Si H y L no fueran ajenos, entonces L debería estar contenido en H , y por lo tanto, $C = \text{conv}(H) = H$, de donde C tendría dimensión $n - 2$, lo que contradice a la definición 161 (sección 3.3).

$$\langle \varphi(H) \rangle \cap \langle \varphi(L) \rangle = \{\bar{0}\}:$$

Supongamos que $\dim(\langle \varphi(H) \rangle \cap \langle \varphi(L) \rangle) \geq 1$; como L es un vértice de C , $\dim(\langle \varphi(L) \rangle) = 1$, de donde $\langle \varphi(L) \rangle$ debe estar completamente contenido en $\langle \varphi(H) \rangle$. Sea v el único elemento de L . Entonces existen $v_1, v_2 \in \varphi(H)$ tales que $v = v_1 - v_2$. Además $v \notin \varphi(H)$, pues si $v \in \varphi(H)$, entonces v pertenecería a H por la definición 161 (sección 3.3). Pero entonces $v + v_2 = v_1 \in \varphi(H)$, y sin embargo, $v \notin \varphi(H)$, lo que contradice que $\varphi(H)$ sea una cara de K , contradicción que resulta de suponer que $\dim(\langle \varphi(H) \rangle \cap \langle \varphi(L) \rangle) \geq 1$. Por lo tanto, $\dim(\langle \varphi(H) \rangle \cap \langle \varphi(L) \rangle) = 0$, y así, $\langle \varphi(H) \rangle \cap \langle \varphi(L) \rangle = \{\bar{0}\}$.

$$K = \varphi(H) + \varphi(L):$$

Sea $w \in K$. Si $w = \bar{0}$, entonces $w = \bar{0} + \bar{0}$, con $\bar{0} \in \varphi(H) \cap \varphi(L)$. Supongamos pues, que $w \neq \bar{0}$. Entonces, por la definición 161, existe un único $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que $\lambda w \in C$; como $C = \text{conv}(H \cup L)$, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, $w_1, \dots, w_r \in H$, $v \in L$ tales que $\mu + \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$ y $\lambda w = \mu v + \sum_{i=1}^r \lambda_i w_i$ (por la proposición 65 y el lema 66, sección 2.1). Entonces $w = \lambda^{-1} \mu v + \sum_{i=1}^r \lambda^{-1} \lambda_i w_i \in \varphi(L) + \varphi(H)$.

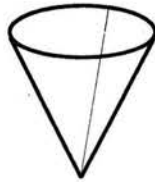
Es claro que $\varphi(H)$ y $\varphi(L)$ son, ambos, subconos propios de K . Así, $K = \varphi(H) \oplus \varphi(L)$, y por lo tanto, K se escinde. ■

4.2. Geometría de un Cono a partir de su Latiz de Caras

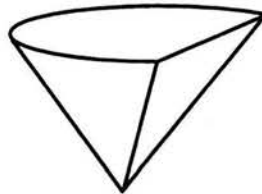
–What if you lose?

–I will have my vengeance, in this life or the next, and you will beg for death before the end.

Definición 185. Sea K un cono de dimensión finita. Diremos que K es un cono **estríctamente convexo** ssi $\forall v, w \in K$ con $\{v, w\}$ linealmente independiente, se tiene que $v + w \in \text{int}_{(K)}(K)$.



Cono estrictamente convexo



No estrictamente convexo

Figura 4.1:

Definición 186. Sea C un conjunto convexo compacto de dimensión finita. Diremos que C es un compacto **estríctamente convexo** ssi $\forall v, w \in C$ con $v \neq w$, se tiene que $\text{int}_{\text{afin}(v,w)}(\text{conv}(v, w)) \subseteq \text{int}_{\text{afin}(C)}(C)$.

Lema 187. Si K es un cono estrictamente convexo de dimensión mayor que uno y $v \in \partial_{(K)}(K) \setminus \{\bar{0}\}$, entonces v es un vector extremal de K , y por lo tanto, $h(K) = h(\mathcal{F}(K)) = 2$, donde $h(K)$ y $h(\mathcal{F}(K))$ son las alturas de K y de $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$, respectivamente (véase las definiciones 57 y 58). Consecuentemente, $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es modular.

Demostración. Supongamos que $v \in K \setminus \{\bar{0}\}$ no es un vector extremal de K . Por la proposición 115, existe un conjunto finito, $\{v_1, \dots, v_m\}$, de extremales de K ($m \geq 2$), tal que $v = \sum_{i=1}^m v_i$. Por la definición 186 y el corolario 100 (sección 2.4), $v \in \text{int}_{(K)}(K)$.



Compacto estrictamente convexo



Compacto no estrictamente convexo

Figura 4.2:

Así, todo elemento no cero de la frontera de K es vector extremal de éste. Si F es una cara maximal de K y $w \in \text{int}_{(F)}(F)$, entonces $w \in \partial_{(K)}(K) \setminus \{\bar{0}\}$ porque K tiene dimensión mayor que 1, de donde $F = \varphi(w)$ es un rayo extremal de K . Así, K cubre a todos sus rayos extremales, por lo que $h(\mathcal{F}(K)) = 2$.

$\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es modular:

Sean $E, F, G \in \mathcal{F}(K)$ tales que $F \neq G$ y $E \rightarrow F, E \rightarrow G$. Entonces F y G son rayos extremales de K y $E = \{\bar{0}\}$. Como K cubre a la vez a F y a G , vemos que $K = F \vee G$. Por lo tanto, $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es superiormente semimodular.

Por otro lado, si $E, F, G \in \mathcal{F}(K)$ son tales que $F \neq G$ y $F \rightarrow E, G \rightarrow E$, entonces F y G son rayos extremales de K y $E = K$. Entonces F y G cubren a $\{\bar{0}\} = F \wedge G$. Por lo tanto, $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es inferiormente semimodular.

Por lo dicho en la nota 51 (sección 1.4), $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es modular. ■

Lema 188. Si C es un compacto estrictamente convexo de dimensión mayor que cero, y $v \in \partial_{\text{afin}(C)}(C)$, entonces v es vértice de C , y por lo tanto, $h(C) = h(\mathfrak{C}(C)) = 2$. Consecuentemente, $\langle \mathfrak{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es modular.

Demostración. Si v no es vértice de C , entonces existen $u, w \in C \setminus \{v\}$ tales que $v \in \text{int}_{\text{afin}(u,w)}(\text{conv}(u, w)) \subseteq \text{int}_{\text{afin}(C)}(C)$.

Si H es una \mathfrak{C} -cara maximal de C , entonces tomando $x \in \text{int}_{\text{afin}(H)}(H)$ ($\text{int}_{\text{afin}(H)}(H) \neq \emptyset$ porque $H \neq \emptyset$ pues $\dim(C) \geq 1$), tenemos que $H = \psi(x)$ es un vértice de C , ya que $H \subseteq \partial_{\text{afin}(C)}(C)$. Así, C cubre a todos los átomos de $\langle \mathfrak{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$; por lo tanto, $h(C) = h(\mathfrak{C}(C)) = 2$. La modularidad de $\langle \mathfrak{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ se prueba, entonces, de una manera totalmente análoga a la demostración de la modularidad de $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ dada en el lema anterior. ■

Nota 189. *Todo compacto estrictamente convexo de dimensión finita mayor que uno tiene una infinidad de vértices (de hecho, tantos como números reales).*

Lema 190. *Sean $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto estrictamente convexo, v un vértice de C , y A un abierto de \mathbb{R}^n tal que $v \in A$. Si $\dim(C) > 1$, entonces existe un número infinito de vértices de C que pertenecen a A .*

Demostración. Supongamos que A posee sólo un número finito de vértices de C ; digamos que v, v_2, \dots, v_m , son todos los vértices de C que pertenecen a A . Entonces existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que $B_{\mathbb{R}^n}(v, \varepsilon) \cap \text{vért}(C) = \{v\}$. Por otro lado, como $\dim(C) > 1$, $D = B_{\mathbb{R}^n}(v, \varepsilon) \cap C = B_{\text{afin}(C)}(v, \varepsilon) \cap C$ es un convexo de dimensión mayor que 1. Mostremos que entonces $B_{\text{afin}(D)}(v, \varepsilon) \subseteq C$, lo cual nos dirá que v no es un vértice de C .

Sea $w \in B_{\text{afin}(D)}(v, \varepsilon) \setminus \{v\}$, entonces, como $\dim(D) > 1$, existe $u \in D \setminus \{v\}$ tal que $\{u, v, w\}$ es afín 2-independiente. Entonces $\text{conv}(u, w) \cap C \neq \emptyset$. Ahora bien, $\text{conv}(u, w) \cap C$ es un compacto convexo contenido en $\text{afin}(C)$, de manera que si $w \notin C$, entonces existe $x \in \text{conv}(u, w) \cap C$ que pertenece a $\partial_{\text{afin}(C)}(C)$. Pero entonces x es un vértice de C que es distinto de v (por la afinidad 2-independiente de $\{u, v, w\}$) y pertenece a $B_{\text{afin}(D)}(v, \varepsilon) \subseteq B_{\mathbb{R}^n}(v, \varepsilon)$, que es una contradicción. Por lo tanto $w \in C$.

Pero entonces v no es un vértice de C , contradicción que resulta de suponer que existe un número finito de vértices de C en A . ■

Lema 191. *Sean K un cono de dimensión finita y C un corte transversal convexo suyo. Entonces K es un cono estrictamente convexo si y sólo si C es un compacto estrictamente convexo.*

Demostración. \implies : Sean $v, w \in C$ con $v \neq w$ y $u \in \text{int}_{\text{afin}(v,w)}(\text{conv}(v, w))$, entonces existe $\lambda \in (0, 1)$ tal que $u = \lambda v + (1 - \lambda)w$. Es claro que $\{v, w\}$ es linealmente independiente, de donde $\{\lambda v, (1 - \lambda)w\}$ es también linealmente independiente. Por lo tanto, $u \in \text{int}_{\langle K \rangle}(K)$. Por la proposición 169 (sección 3.3), $C = \Omega(K) = \Omega(\varphi(u)) = \psi(u)$, de donde, debido al corolario 175 (sección 3.4), $u \in \text{int}_{\text{afin}(C)}(C)$. Por lo tanto, $\text{int}_{\text{afin}(v,w)}(\text{conv}(v, w)) \subseteq \text{int}_{\text{afin}(C)}(C)$.

\Leftarrow : Sean $v, w \in K$ con $\{v, w\}$ linealmente independiente, entonces existen $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tales que $\lambda v, \mu w \in C$ y $\lambda v \neq \mu w$. Entonces $\text{int}_{\text{afin}(\lambda v, \mu w)}(\text{conv}(\lambda v, \mu w)) \subseteq \text{int}_{\text{afin}(C)}(C)$. Es claro que existe $\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que $\alpha(v+w) \in \text{int}_{\text{afin}(\lambda v, \mu w)}(\text{conv}(\lambda v, \mu w))$; entonces, debido al teorema 178 (sección 3.5), $v+w \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}) (\text{int}_{\text{afin}(C)}(C)) = \text{int}_{(\Omega^{-1}(C))}(\Omega^{-1}(C)) = \text{int}_{(K)}(K)$. ■

Lema 192. *Sea C un convexo compacto tal que $\langle \mathcal{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es superiormente semimodular y $h(\mathcal{C}(C)) \geq 3$. Si v, w son vértices de C , entonces $\text{conv}(v, w) \subseteq v \vee w \subseteq \partial_{\text{afin}(C)}(C)$.*

Demostración. Si $v = w$, el resultado es obvio. Supongamos entonces que $v \neq w$. Por el corolario 50 (sección 1.4) y el teorema 60 (sección 1.5), todas las cadenas maximales que van de \emptyset a C en $\langle \mathcal{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ tienen altura mayor que dos, por lo que C no cubre ni a v ni a w . Pero v y w cubren ambos a \emptyset , por lo que $v \vee w$ cubre a la vez a v y a w , y así, $v \vee w \subsetneq C$, de donde $\text{conv}(v, w) \subseteq v \vee w \subseteq \partial_{\text{afin}(C)}(C)$ (por el corolario 171, sección 3.3). ■

Lema 193. *Sea C un conjunto convexo compacto de dimensión finita $n \geq 3$ tal que $\langle \mathcal{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es inferiormente semimodular y $h(\mathcal{C}(C)) = 3$. Entonces cualesquiera dos \mathcal{C} -caras maximales de C se intersectan en exactamente un punto.*

Demostración. Sean H y L \mathcal{C} -caras maximales distintas de C . Como C cubre a H y a L en $\langle \mathcal{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$, H y L cubren a $H \wedge L$. Pero $H \wedge L$ es un átomo de $\langle \mathcal{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$, porque $h(\mathcal{C}(C)) = 3$ y existen al menos dos cadenas maximales de $H \wedge L$ a C que tienen altura dos. Como los átomos de $\langle \mathcal{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ son precisamente los vértices de C , hemos terminado. ■

Proposición 194. *Sean $n \geq 3$ y $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convexo compacto sólido no poliédrico tal que $\langle \mathcal{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es modular y $h(C) = h(\mathcal{C}(C)) = 3$. Entonces C tiene una \mathcal{C} -cara propia de dimensión mayor que uno.*

Demostración. Supongamos que C no tiene ninguna \mathcal{C} -cara propia de dimensión mayor que uno; entonces, como $h(\mathcal{C}(C)) = 3$, todas las \mathcal{C} -caras maximales de C tienen dimensión uno. Como $\dim(C) \geq 3$, C posee al menos cuatro vértices distintos, digamos v_1, v_2, v_3, v_4 . Como estamos suponiendo que todas las \mathcal{C} -caras maximales de C tienen dimensión uno, tenemos que $\psi(v_i, v_j) = \text{conv}(v_i, v_j)$. Pero $\text{conv}(v_1, v_2) \cap \text{conv}(v_3, v_4) = \emptyset$, y esto es una contradicción al lema anterior. ■

Teorema 195. *Sea C un subconjunto convexo compacto sólido no poliédrico de \mathbb{R}^3 tal que $\langle \mathcal{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es modular y $h(\mathcal{C}(C)) = 3$. Entonces C tiene una única \mathcal{C} -cara H de dimensión 2. Para esa \mathcal{C} -cara se cumple que $|\text{Vért}(C) \setminus H| = 1$. (Véase Figura 4.3).*

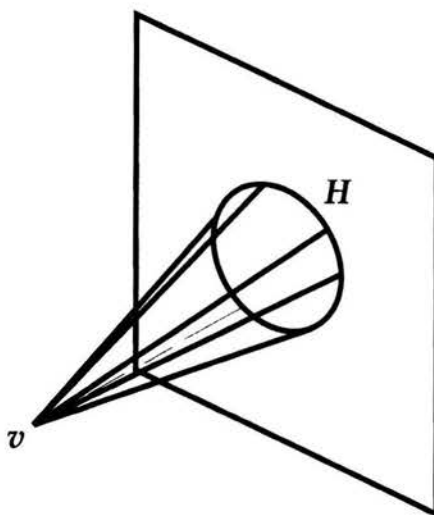


Figura 4.3:

Demostración. Por la proposición anterior, existe al menos una \mathcal{C} -cara H de C con dimensión 2. Nótese que H es un compacto estrictamente convexo (pues $h(H) = 2$). Mostremos que $|Vért(C) \setminus H| = 1$: Como $dim(C) = 3$, es claro que $Vért(C) \setminus H \neq \emptyset$. Así, supongamos que $u, v \in Vért(C) \setminus H$ son distintos. Sea $z \in int_{afín(H)}(H)$; entonces u, v y z son no colineales, pues u y v son vértices de C y H es \mathcal{C} -cara de C .

Así, $dim(afín(u, v, z)) = 2$. Entonces $afín(u, v, z) \cap afín(H)$ es una recta l . Como l contiene a z que es un punto de $int_{afín(H)}(H)$ (conjunto que es infinito porque H tiene dimensión mayor que cero), y como H es compacto, $l \cap H = conv(a, b)$ para algunos $a, b \in H$ distintos. Además, como H es un compacto estrictamente convexo, a y b son vértices de H y por lo tanto de C (ver figura 4.4).

Ahora, $afín(H)$ separa a \mathbb{R}^3 en dos componentes conexas, esto es, $\mathbb{R}^3 \setminus afín(H)$ posee exactamente dos componentes conexas. Veamos que u y v se encuentran en la misma componente: Si no es así, entonces $afín(H) \cap conv(u, v)$ consta de un solo elemento w , distinto de u y de v . Como H es \mathcal{C} -cara de C y $u, v \notin H$, vemos que $w \notin H$. Pero entonces $int_{afín(z, w)}(conv(z, w)) \cap H \neq \emptyset$, y esto, en conjunción con el hecho de que $w \notin H$, contradice que H sea \mathcal{C} -cara de C . Por lo tanto, u y v pertenecen a la misma componente conexa de $\mathbb{R}^3 \setminus afín(H)$.

Entonces, como a, b, u y v son todos vértices (distintos) de C , forman un cuadrilátero (ver figura 4.4). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que se encuentran configurados como en la figura referida (S.P.G. precisamente porque u y v están en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^3 \setminus afín(H)$). Entonces, por el corolario 177 (sección 3.4), $\psi(a, v) = \psi(b, u) = \psi(a, b, u,$

$v) = \psi(H \cup \{u\} \cup \{v\}) = C$ (pues H es maximal), lo que contradice al lema 192. Esto nos dice que $Vért(C) \setminus H$ no puede tener más de un elemento.

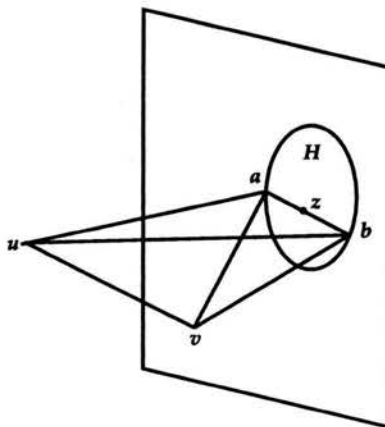


Figura 4.4:

Si L es una \mathfrak{C} -cara bidimensional cualquiera de C , entonces L es un compacto estrictamente convexo (pues $h(L) = 2$), lo que obliga a L a poseer una infinidad de vértices. Pero, por lo que hemos demostrado arriba, de esa infinidad de vértices, sólo uno podría no pertenecer a H . De manera que podemos tomar dos vértices distintos $x, y \in H \cap L$; por la convexidad estricta de H y de L , los corolarios 175 y 177 (sección 3.4) nos dicen que $H = \psi(x, y) = L$. Por lo tanto, C posee sólo una \mathfrak{C} -cara de dimensión 2. ■

Teorema 196. *Sea K un cono sólido no poliédrico en \mathbb{R}^4 . Si K es inescindible y $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es modular, entonces $h(\mathcal{F}(K)) \neq 3$.*

Demostración (por contrapositiva). Supongamos que $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es modular y $h(\mathcal{F}(K)) = 3$, veremos que entonces K se escinde. Sea C un corte transversal convexo de K . Por el teorema 167 (sección 3.3), $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ y $\langle \mathfrak{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ son latices isomorfos, por lo que $\langle \mathfrak{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es modular y $h(\mathfrak{C}(C)) = 3$. Por el teorema anterior, C tiene una única \mathfrak{C} -cara H de dimensión 2, y un único vértice $v \in C \setminus H$. Por la proposición 184 (sección 4.2), $K = \varphi(H) \oplus \varphi(v)$ y K se escinde. ■

Teorema 197. *Sea C un subconjunto convexo compacto sólido no poliédrico de \mathbb{R}^4 tal que $\langle \mathfrak{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es modular y $h(\mathfrak{C}(C)) = 3$. Entonces C tiene una \mathfrak{C} -cara H de dimensión 3. Dicha \mathfrak{C} -cara es la única \mathfrak{C} -cara maximal de C con dimensión mayor que uno, y además se cumple que $|Vért(C) \setminus H| = 1$.*

Demostración. Por la proposición 194, C tiene una \mathcal{C} -cara propia H de dimensión mayor que uno. Como $\dim(C) = 4$, H tiene dimensión 2 o 3. Y como $h(H) = 2$, H es un compacto estrictamente convexo.

Si $\dim(H) = 3$, entonces $Vért(C) \setminus H$ es claramente no vacío. Supongamos que p y q son dos elementos distintos de $Vért(C) \setminus H$; entonces, como en el tercer párrafo de la prueba del teorema 195, p y q pertenecen a la misma componente conexa de $\mathbb{R}^4 \setminus afin(H)$ (es claro que si $\dim(H) = 3$, entonces $\mathbb{R}^4 \setminus afin(H)$ tiene exactamente dos componentes conexas). Sea $c \in int_{afin(H)}(H)$, entonces p, q y c no son colineales, porque p y q son vértices de C que no están en H y H es \mathcal{C} -cara de C ; de forma que $\dim(afin(p, q, c)) = 2$. Entonces, viendo que $\dim(afin(H)) = 3$, $\dim(afin(p, q, c)) = 2$, $afin(p, q, c) \cap afin(H) \neq \emptyset$ y $\dim(\mathbb{R}^4) = 4$, tenemos que $\dim(afin(H) \cap afin(p, q, c)) = 1$, por lo que, debido a la compacidad de H , $H \cap afin(p, q, c) = conv(a, b)$ para $a, b \in H$ distintos ($a \neq b$ porque $int_{afin(H)}(H) \cap afin(p, q, c)$ es infinito).

Como H es un compacto estrictamente convexo, a y b son vértices de H . Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que a, b, p , y q están configurados de una manera análoga a la figura 4.4 (con $v = p$ y $u = q$ en dicha figura) (S.P.G. precisamente porque p y q están en la misma componente conexa de $\mathbb{R}^4 \setminus afin(H)$), concluimos que, por el corolario 177 (sección 3.4), $\psi(a, p) = \psi(b, q) = \psi(a, b, p, q) = \psi(H \cup \{p, q\}) = C$ (pues H es maximal), lo que contradice al lema 192.

Así, podemos afirmar que si H es una \mathcal{C} -cara tridimensional de C , entonces $|Vért(C) \setminus H| = 1$. Ahora, si $\dim(H) = 3$ y L es una \mathcal{C} -cara maximal de C tal que $\dim(L) > 1$, entonces L es un compacto estrictamente convexo, y por lo tanto (dado que $\dim(L) > 1$), posee una infinidad de vértices. Como $|Vért(C) \setminus H| = 1$, deben existir al menos dos vértices distintos $a, b \in H \cap L$. Por el corolario 177, $H = \psi(a, b) = L$, ya que H y L son compactos estrictamente convexos.

En resumen, hasta el momento hemos mostrado que si $\dim(H) = 3$, entonces se cumple que $|Vért(C) \setminus H| = 1$ y que H es la única \mathcal{C} -cara de C que tiene dimensión estrictamente mayor que uno. Ahora veamos que éste es siempre el caso, es decir, veamos que en efecto, $\dim(H) = 3$:

Supongamos que no es así, entonces $\dim(H) = 2$ y C no puede tener \mathcal{C} -cara tridimensional alguna, pues si L es una \mathcal{C} -cara tridimensional de C , entonces, por el lema 193, $H \wedge L$ tiene un solo elemento, y entonces la infinidad de vértices de H nos dice que $|Vért(C) \setminus L| \neq 1$. Así, todas las \mathcal{C} -caras maximales de C deben tener dimensión 1 o 2.

Sea A cualquier subespacio afín tridimensional de \mathbb{R}^4 tal que $H \subseteq A$. Entonces, por el mismo argumento usado en la demostración del teorema 195, existe a lo más un vértice de C en $A \setminus H$.

Como $\dim(H) = 2$, existe por lo menos un vértice $v \in C \setminus afin(H)$. Entonces $\psi(H \cup \{v\}) = C$ (porque H es maximal) y $\dim(afin(H \cup \{v\})) = 3$.

Como C es un sólido en \mathbb{R}^4 y $C = \text{conv}(\text{Vért}(C))$, debe existir un vértice w de C perteneciente a $\mathbb{R}^4 \setminus \text{afín}(H \cup \{v\})$.

Ahora bien, como $\dim(\text{afín}(H \cup \{v\})) = 3$, $\mathbb{R}^4 \setminus \text{afín}(H \cup \{v\})$ tiene exactamente dos componentes conexas, digamos E_1 y E_2 . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $w \in E_1$. Veamos que existe un vértice u de C en E_2 : Si no hubiera un tal u , entonces $\text{Vért}(C) \subseteq E_1 \cup \text{afín}(H \cup \{v\})$, y como $E_1 \cup \text{afín}(H \cup \{v\})$ es convexo, debería tenerse que $C = \text{conv}(\text{Vért}(C)) \subseteq E_1 \cup \text{afín}(H \cup \{v\})$, de donde $C \cap E_2 = \emptyset$, lo cual implica que tendría que suceder que $\text{conv}(H \cup \{v\}) \subset \partial_{\mathbb{R}^4}(C)$ (porque $H \cup \{v\} \subseteq \text{afín}(H \cup \{v\})$ y todos los puntos de $\text{afín}(H) \cup \{v\}$ son límite de sucesiones de elementos de E_2); pero la contención $\text{conv}(H \cup \{v\}) \subseteq \partial_{\mathbb{R}^4}(C)$ no se da, porque, debido a que $\psi(H \cup \{v\}) = C$, $\text{conv}(H \cup \{v\}) \cap \text{int}_{\mathbb{R}^4}(C)$ es no vacío (por el corolario 177, sección 3.4). Así, existe un vértice u de C que pertenece a E_2 . Véase la figura 4.7 (página 84).

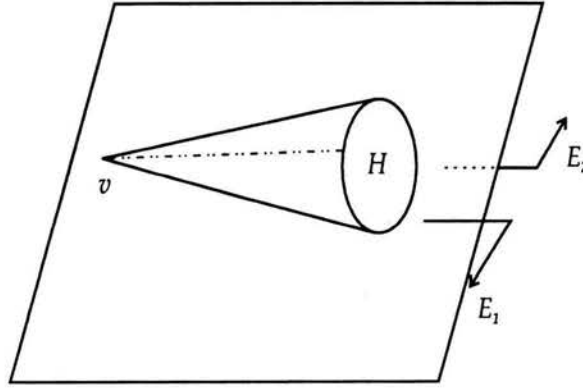


Figura 4.5:

Consideremos $\text{conv}(H \cup \{v\})$. Por el corolario 177, se cumple la contención $\text{int}_{\text{afín}(H \cup \{v\})}(\text{conv}(H \cup \{v\})) \subseteq \text{int}_{\mathbb{R}^4}(C)$. Por otro lado, cada vez que tengamos un $y \in \partial_{\text{afín}(H \cup \{v\})}(\text{conv}(H \cup \{v\}))$, podemos encontrar un par de vértices (que son o no distintos, dependiendo de y), g, h de C , tales que $y \in \text{conv}(g, h)$ (por la convexidad estricta de las \mathcal{C} -caras maximales de C). Por el lema 192, $\text{conv}(g, h) \subseteq \partial_{\mathbb{R}^4}(C)$, y así, deducimos que se cumple la contención $\partial_{\text{afín}(H \cup \{v\})}(\text{conv}(H \cup \{v\})) \subseteq \partial_{\mathbb{R}^4}(C)$.

Tomemos el segmento de recta $\text{conv}(w, u)$. Como $w \in E_1$ y $u \in E_2$, $\text{conv}(w, u) \cap \text{afín}(H \cup \{v\})$ consta de exactamente un elemento z que también pertenece a C , por la convexidad de éste. Veamos que $z \in (\partial_{\text{afín}(H \cup \{v\})}(\text{conv}(H \cup \{v\}))) \setminus H$:

(1) Por el lema 192, $\text{conv}(w, u) \subseteq \partial_{\mathbb{R}^4}(C)$, de manera que $z \in \partial_{\mathbb{R}^4}(C)$, y por lo tanto $z \notin \text{int}_{\text{afín}(H \cup \{v\})}(\text{conv}(H \cup \{v\}))$, pues $\text{int}_{\text{afín}(H \cup \{v\})}(\text{conv}(H \cup \{v\})) \subseteq \text{int}_{\mathbb{R}^4}(C)$.

(2) z no es vértice de $\text{conv}(H \cup \{v\})$, pues, dado que $\text{afín}(H \cup \{v\}) \setminus H$ puede contener a lo más un vértice de C , tenemos la contención $\text{Vért}(\text{conv}(H \cup \{v\})) \subseteq \text{Vért}(C)$ y, claramente, z no es un vértice de C .

(3) $z \notin H$, pues H es \mathcal{C} -cara de C , $z \in \text{int}_{\text{afín}(w,u)}(\text{conv}(w, u))$ y $w, u \notin H$.

(4) $z \notin \text{afín}(H)$, pues si sucediera que $z \in \text{afín}(H)$, entonces se tendría que, tomando $x \in \text{int}_{\text{afín}(H)}(H)$, $\text{int}_{\text{afín}(x,z)}(\text{conv}(x, z)) \cap H \neq \emptyset$, y sin embargo, por (3), $z \notin H$; así, estaríamos contradiciendo que H es \mathcal{C} -cara de C .

(5) $z \notin \text{afín}(H \cup \{v\}) \setminus \text{conv}(H \cup \{v\})$: Ya hemos visto que $z \notin \text{afín}(H)$. Sean D_1 y D_2 las dos componentes conexas de $\text{afín}(H \cup \{v\}) \setminus \text{afín}(H)$, y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $v \in D_1$. Si $z \in D_2$, entonces $\text{conv}(v, z)$ interseca a $\text{afín}(H)$ en exactamente un punto s , que pertenece a $\text{int}_{\text{afín}(v,z)}\text{conv}(v, z)$ (porque $v, z \notin \text{afín}(H)$), y como $z \notin H$, debe tenerse que $s \notin H$. Tomando $x \in \text{int}_{\text{afín}(H)}(H)$, tenemos que $s \in C$ y que $H \cap \text{int}_{\text{afín}(s,x)}(\text{conv}(s, x)) \neq \emptyset$, lo cual contradice que H sea \mathcal{C} -cara de C . Por lo tanto, $z \in D_1$. Sea $t \in \text{int}_{\text{afín}(H \cup \{v\})}(\text{conv}(H \cup \{v\}))$ tal que v, z y t son no colineales (tal t existe, pues $\dim(\text{conv}(H \cup \{v\})) = 3$); entonces $\text{afín}(v, z, t) \cap H = \text{conv}(v_1, v_2)$, donde v_1 y v_2 son vértices distintos de H (véase la figura 4.6). Como v es vértice de C , es claro que $v \notin \text{conv}(z, v_1, v_2)$; si se tuviera que $z \notin \text{conv}(v_1, v_2, v)$, entonces (suponiendo, sin pérdida de generalidad, que v, z, v_1 y v_2 están configurados como en la figura 4.6), por el corolario 177, $C = \psi(u, w, v_2) = \psi(z, v_2) = \psi(v, v_1)$, lo cual contradice al lema 192. Por lo tanto, $z \in \text{conv}(v, v_1, v_2)$.

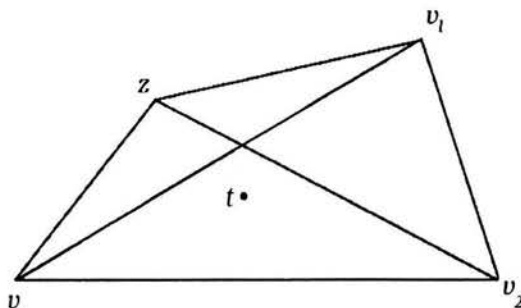


Figura 4.6:

(1), (2), (3), (4) y (5) implican que existe un vértice $v_3 \in H$ tal que $z \in \text{int}_{\text{afín}(v,v_3)}(\text{conv}(v, v_3))$. Y por el corolario 177, $\psi(v, v_3) = \psi(z) = \psi(u, w)$, de donde $\psi(z)$ es un \mathcal{C} -cara bidimensional de C que contiene a u, v y w .

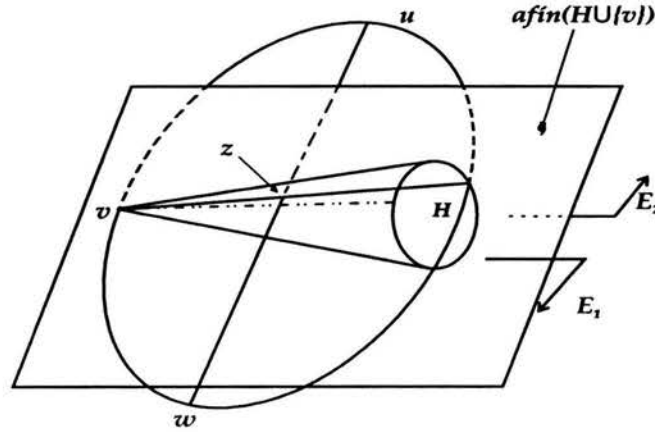


Figura 4.7:

Hagamos una pausa y observemos que hemos probado que, dado cualquier vértice (de C) $w' \in E_1$, $\psi(u, w')$ contiene a v como elemento, lo que nos dice, debido al lema 193, que $\psi(u, w') = \psi(u, w)$, y por lo tanto w' es un vértice de $\psi(u, w)$. Esto es, todo vértice de C que esté en E_1 debe estar en $\psi(u, w)$. Análogamente, todo vértice de C que esté en E_2 debe pertenecer a $\psi(u, w)$.

Sean pues $t_1, t_2 \in \text{Vért}(H)$ distintos y que no pertenezcan a $\psi(u, w)$, y $u_1 \in \text{Vért}(C) \cap E_2$ y $w_1 \in \text{Vért}(C) \cap E_1$; por lo dicho en el párrafo anterior $\psi(t_1, u_1)$ y $\psi(t_2, w_1)$ deben tener dimensión 1; pues si, por ejemplo, $\psi(t_2, w_1)$ tuviera dimensión 2, entonces debería tener una infinidad de vértices que, por lo dicho en el párrafo anterior, deberían pertenecer a $\psi(u, w)$, y entonces debería tenerse $\psi(t_2, w_1) = \psi(u, w)$, pero esta igualdad contradice la elección de t_2 . Un razonamiento análogo demuestra que $\dim(\psi(t_1, u_1)) = 1$.

Pero, entonces, $\psi(t_1, u_1) = \text{conv}(t_1, u_1)$ y $\psi(t_2, w_1) = \text{conv}(t_2, w_1)$, y el hecho mismo de que la dimensión de ambos es 1 obliga a que la intersección de estos conjuntos es vacía, lo cual contradice al lema 193.

Así, vemos que suponer que $\dim(H) = 2$ nos lleva a una contradicción, lo que nos permite concluir que $\dim(H) = 3$. ■

Teorema 198. Sea K un cono sólido no poliédrico en \mathbb{R}^5 . Si K es inescindible y $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es modular, entonces $h(\mathcal{F}(K)) \neq 3$.

Demostración (por contrapositiva). Supongamos que $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es modular y $h(\mathcal{F}(K)) = 3$, veremos que entonces K se escinde. Sea C un corte transversal convexo de K . Por el

teorema 167 (sección 3.3), $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ y $\langle \mathcal{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ son lattices isomorfas, por lo que $\langle \mathcal{C}(C), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es modular y $h(\mathcal{C}(C)) = 3$. Por el teorema anterior, C tiene una única \mathcal{C} -cara H de dimensión 3, y un único vértice $v \in C \setminus H$. Por la proposición 184 (sección 4.2), $K = \varphi(H) \oplus \varphi(v)$ y K se escinde. ■

4.3. Otros resultados

Como dijimos en la Introducción, esta sección está dedicada a dar resultados sobre latices de caras de conos, resultados que, por apartarse un tanto del objetivo principal de la tesis, aparecen en su mayoría sin demostración. Sin embargo, consideramos prudente enunciarlos para que el lector tenga un panorama más completo de los temas tratados en este trabajo.

Teorema 199. ([GPB-2]) *Sea K un cono real de dimensión finita. Entonces la latiz $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es complementada. ■*

Definición 200. *Sea K un cono real de dimensión n finita, se dice que K es un cono **simplicial** ssi K posee exactamente n rayos extremales (caras de dimensión 1).*

Es fácil ver que un cono n -dimensional es simplicial si y sólo si todo corte transversal suyo es un *simplejo* $(n - 1)$ -dimensional, esto es, la envolvente convexa de n puntos afinmente $(n - 1)$ -independientes.

Teorema 201. ([GPB-2]) *Sea K un cono de dimensión finita. Entonces K es simplicial si y sólo si $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es una latiz distributiva. ■*

Teorema 202. ([GPB-2]) *Sea K un cono de dimensión finita. Si $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es superiormente semimodular y K es poliédrico, entonces $\langle \mathcal{F}(K), \subseteq, \vee, \wedge \rangle$ es distributiva, es decir, K es simplicial. ■*

Teorema 203. ([LS]) *Sea K un cono de dimensión finita. Si K_1 y K_2 son subconos propios de K tales que $K = K_1 \oplus K_2$, entonces K_1 y K_2 son caras de K . ■*

Teorema 204. ([LS]) *Sea K un cono sólido en un espacio real V de dimensión finita. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. K es inescindible.
2. $\forall T \in \Pi(K) (T[Ext(K)] \subseteq Ext(K) \implies T \in Ext(\Pi(K)))$.
3. $\forall T \in \Pi(K) (T[K] = K \implies T \in Ext(\Pi(K)))$.
4. $Id_V \in Ext(\Pi(K))$.

5. K^* es inescindible.
6. $\Pi(K)$ es inescindible. ■

—Wait, I've seen this...; yes, this is it, this is the end. Yes..., you were lying right there just like that, and I..., I..., I stand here, right here, and I..., I'm supposed to say something. I say EVERYTHING THAT HAS A BEGINNING HAS AN END, Neo.

Smith en "*Matrix Revolutions*".

Apéndice. Espacios normados

–Good! Adaptation, improvisation, but your weakness is not your technique.

Morpheus en “*The Matrix*”.

Como hemos dicho en la Introducción, este apéndice tiene como objetivo central mostrar que todas las normas de un espacio real de dimensión finita son equivalentes, esto es, que definen la misma topología en el espacio subyacente. El lector puede encontrar la prueba que aquí damos, de manera íntegra y con una forma más general, en las páginas 140-145 de [FG].

Definición 205. Sea V un espacio vectorial real. Diremos que una función $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una **norma** para V ssi se cumplen simultáneamente las siguientes tres condiciones:

- i) $\forall v \in V (\|v\| = 0 \iff v = \bar{0})$.
- ii) $\forall v, w \in V (\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|)$.
- iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall v \in V (\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|)$.

Si $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una norma para V , diremos que $\langle V, \|\cdot\| \rangle$ es un **espacio vectorial real normado**.

En otras palabras, una norma es sólo una manera de medir el “tamaño” de los vectores, y las condiciones de la definición sólo piden que $\|\cdot\|$ se comporte como esperamos que se comporte una distancia. Introduzcamos la noción de distancia en un conjunto no vacío.

Definición 206. Sea C un conjunto no vacío. Diremos que una función $d : C \times C \rightarrow \mathbb{R}^+$ es una **distancia** o **métrica** para C ssi se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones:

- i) $\forall x, y \in C (d(x, y) = 0 \iff x = y)$.
- ii) $\forall x, y \in C (d(x, y) = d(y, x))$.

iii) $\forall x, y, z \in C (d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z))$.

Si d es una métrica para C , diremos que $\langle C, d \rangle$ es un **espacio métrico**.

Es fácil ver que se cumple la siguiente proposición:

Proposición 207. Sea $\langle V, \|\cdot\| \rangle$ un espacio vectorial real normado. Entonces $\langle V, d \rangle$ es un espacio métrico si definimos $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$ mediante $d(v, w) = \|v - w\|$. ■

Definición 208. Sean $\langle C, d \rangle$ un espacio métrico, $x \in C$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ y $S \subseteq C$.

i) La **Bola Abierta** de radio ε alrededor de x es el conjunto $B(x, \varepsilon) = B_C(x, \varepsilon) = \{y \in C / d(x, y) < \varepsilon\}$.

ii) La **Bola Cerrada** de radio ε alrededor de x es el conjunto $\bar{B}(x, \varepsilon) = \bar{B}_C(x, \varepsilon) = \{y \in C / d(x, y) \leq \varepsilon\}$.

iii) Diremos que S es **abierto** ssi $\forall s \in S \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que $B(s, \varepsilon) = B_C(s, \varepsilon) \subseteq S$.

iv) Diremos que S es **cerrado** ssi $C \setminus S$ es abierto.

Definición 209. Sean T un conjunto y $\tau \subseteq \wp(T)$. Diremos que τ es una **topología** para T , o que $\langle T, \tau \rangle$ es un **espacio topológico** ssi se cumple simultáneamente que:

i) $T, \emptyset \in \tau$.

ii) $\forall A, B \in \wp(T) (A, B \in \tau \implies A \cap B \in \tau)$.

iii) $\forall \mathfrak{F} \subseteq \wp(T) (\mathfrak{F} \subseteq \tau \implies \cup \mathfrak{F} \in \tau)$.

Debido a la siguiente proposición, los elementos de una topología de un conjunto son comúnmente llamados *abiertos* del conjunto. La demostración es inmediata y la omitimos.

Proposición 210. Sea $\langle C, d \rangle$ un espacio métrico. Entonces $\langle C, \tau \rangle$ es un espacio topológico, donde $\tau = \{S / S \text{ es un subconjunto abierto de } C\}$. ■

Así, todo espacio vectorial real normado, al ser espacio métrico, es también un espacio topológico.

Definición 211. Sean $\langle C, d \rangle$ un espacio métrico y $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de C . Diremos que $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ es una **sucesión de Cauchy** ssi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall r, s \in \mathbb{N}$ con $r, s \geq N$ se cumple $d(x_r, x_s) < \varepsilon$. Y diremos que $\langle C, d \rangle$ es un espacio métrico **completo** ssi toda sucesión de Cauchy que conste de elementos de C , converge a un elemento de C .

Proposición 212. Sean V un espacio vectorial real de dimensión finita y $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Entonces la función $\|\cdot\|_{\text{sup}} : V \rightarrow \mathbb{R}^+$, definida mediante $\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\|_{\text{sup}} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\alpha_i|\}$ para $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in V$, es una norma para V . Además, una sucesión $\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_{im} v_i \right\rangle_{m \in \mathbb{N}}$ de elementos de V es de Cauchy si y sólo si cada una de las n sucesiones $\langle \alpha_{im} \rangle_{m \in \mathbb{N}}$ ($1 \leq i \leq n$) de elementos de \mathbb{R} es de Cauchy, y $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_{im} v_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_{im} \right) v_i$, de donde V es un espacio métrico completo bajo la métrica inducida por $\|\cdot\|_{\text{sup}}$.

Demostración. $\forall v \in V$ ($\|v\|_{\text{sup}} = 0 \iff v = \bar{0}$): Es obvio.

$\forall v, w \in V$ ($\|v+w\|_{\text{sup}} \leq \|v\|_{\text{sup}} + \|w\|_{\text{sup}}$):

Sean $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, $w = \sum_{i=1}^n \gamma_i v_i \in V$. Entonces $\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^n \gamma_i v_i \right\|_{\text{sup}} = \left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \gamma_i) v_i \right\|_{\text{sup}} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\alpha_i + \gamma_i|\}$. Si $j \in \{1, \dots, n\}$ es tal que $\max_{1 \leq i \leq n} \{|\alpha_i + \gamma_i|\} = |\alpha_j + \gamma_j|$, entonces, por la desigualdad del triángulo en \mathbb{R} , $|\alpha_j + \gamma_j| \leq |\alpha_j| + |\gamma_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|\alpha_i|\} + \max_{1 \leq i \leq n} \{|\gamma_i|\} = \|v\|_{\text{sup}} + \|w\|_{\text{sup}}$.

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall v \in V$ ($\|\alpha v\|_{\text{sup}} = |\alpha| \|v\|_{\text{sup}}$):

$\max_{1 \leq i \leq n} \{|\alpha \alpha_i|\} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\alpha| |\alpha_i|\} = |\alpha| \max_{1 \leq i \leq n} \{|\alpha_i|\}$, pues $|\alpha| \geq 0$.

Por lo tanto, $\langle V, \|\cdot\|_{\text{sup}} \rangle$ es un espacio vectorial real normado.

Supongamos que la sucesión $\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_{im} v_i \right\rangle_{m \in \mathbb{N}}$ de elementos de V es de Cauchy. Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall r, s \in \mathbb{N}$ con $r, s \geq N$ se cumple $\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_{ir} v_i - \sum_{i=1}^n \alpha_{is} v_i \right\|_{\text{sup}} = \left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_{ir} - \alpha_{is}) v_i \right\|_{\text{sup}} < \varepsilon$, es decir, tal que $\forall r, s \in \mathbb{N}$ con $r, s \geq N$ se cumple, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $|\alpha_{ir} - \alpha_{is}| \leq \max_{1 \leq j \leq n} \{|\alpha_{jr} - \alpha_{js}|\} < \varepsilon$. Esto es, cada una de las n sucesiones $\langle \alpha_{im} \rangle_{m \in \mathbb{N}}$ (de elementos de \mathbb{R}) es de Cauchy. Como \mathbb{R} es completo, cada una de estas sucesiones converge a un elemento α_i de \mathbb{R} (o sea, $\alpha_{im} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \alpha_i$). Sea pues $\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\forall r \in \mathbb{N}$ con $r \geq M$ se cumple, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $|\alpha_{ir} - \alpha_i| \leq \max_{1 \leq j \leq n} \{|\alpha_{jr} - \alpha_j|\} < \bar{\varepsilon}$; esto es, la sucesión $\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_{im} v_i \right\rangle_{m \in \mathbb{N}}$ converge a $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Por lo tanto, V es completo con respecto a la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|_{\text{sup}}$. Esto también prueba que si las n sucesiones $\langle \alpha_{im} \rangle_{m \in \mathbb{N}}$ son de Cauchy entonces la sucesión $\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_{im} v_i \right\rangle_{m \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. ■

Definición 213. Sean V un espacio vectorial real y $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ normas para V . Diremos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son **normas equivalentes** ssi inducen la misma topología en V .

No debería ser necesario aclarar que lo que queremos decir con esta definición es que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes ssi las métricas por ellas inducidas en V , inducen la misma topología para V . Claramente, la equivalencia de normas es una relación de equivalencia en el conjunto de normas de un espacio vectorial real normado. A continuación, demostraremos que cualesquiera dos normas de un espacio real de dimensión finita son equivalentes. El camino será largo, pero bello.

Lema 214. Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas de un espacio vectorial real V . $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes si y sólo si existen $b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tales que para todo $v \in V$ se cumplen las desigualdades $\|v\|_1 \leq b\|v\|_2$, $\|v\|_2 \leq c\|v\|_1$.

Demostración. \implies : Si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes, entonces existen $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tales que $B_{\|\cdot\|_1}(\bar{0}, \varepsilon) \subseteq B_{\|\cdot\|_2}(\bar{0}, 1)$ y $B_{\|\cdot\|_2}(\bar{0}, \delta) \subseteq B_{\|\cdot\|_1}(\bar{0}, 1)$. Sean $b = \frac{2}{\delta}$, $c = \frac{2}{\varepsilon}$ y $v \in V$; si $v = \bar{0}$, entonces es obvio que se cumplen las desigualdades $\|v\|_1 \leq b\|v\|_2$, $\|v\|_2 \leq c\|v\|_1$. Si $v \neq \bar{0}$, entonces $\frac{\delta}{2\|v\|_2}v \in B_{\|\cdot\|_2}(\bar{0}, \delta)$ y $\frac{\varepsilon}{2\|v\|_1}v \in B_{\|\cdot\|_1}(\bar{0}, \varepsilon)$. Entonces $\|v\|_1 < \frac{2}{\delta}\|v\|_2$ y $\|v\|_2 < \frac{2}{\varepsilon}\|v\|_1$.

\impliedby : Sean A un abierto de V según la norma $\|\cdot\|_1$ y $w \in A$, entonces existe $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que $B_{\|\cdot\|_1}(w, \varepsilon) \subseteq A$. Entonces $B_{\|\cdot\|_2}(w, \frac{\varepsilon}{b}) \subseteq A$. Como w fue un elemento arbitrario de A , vemos que A es un abierto de V según la norma $\|\cdot\|_2$. Como A fue un abierto arbitrario según $\|\cdot\|_1$, podemos concluir que todo abierto de V según $\|\cdot\|_1$ es también un abierto de V según $\|\cdot\|_2$. De una manera completamente análoga se prueba que todo abierto con respecto a $\|\cdot\|_2$ es también un abierto con respecto a $\|\cdot\|_1$. Así, la topología que $\|\cdot\|_1$ define en V es la misma que la topología que $\|\cdot\|_2$ define, por lo que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes. ■

Lema 215. Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas de un espacio vectorial real V . Si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes y V es un espacio métrico completo con respecto a $\|\cdot\|_1$, entonces también es completo con respecto a $\|\cdot\|_2$.

Demostración. Por el lema anterior, existen $b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tales que $\forall v \in V$ ($\|v\|_1 \leq b\|v\|_2$, $\|v\|_2 \leq c\|v\|_1$). Sean, $\langle y_m \rangle_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, según $\|\cdot\|_2$, de elementos de V , y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $r, t \in \mathbb{N}$ con $r, t \geq N$, $\|y_r - y_t\|_1 \leq b\|y_r - y_t\|_2 < \varepsilon$. Es decir, $\langle y_m \rangle_{m \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy con respecto a $\|\cdot\|_1$. Como V es completo con respecto a esta norma, $\langle y_m \rangle_{m \in \mathbb{N}}$ converge a un elemento y de V . Sea $\bar{\varepsilon} \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, entonces existe $M \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $r \in \mathbb{N}$ con $r \geq M$, $\|y_r - y\|_2 \leq c\|y_r - y\|_1 < \bar{\varepsilon}$, lo que nos dice que la sucesión $\langle y_m \rangle_{m \in \mathbb{N}}$ converge a $y \in V$ con respecto a $\|\cdot\|_2$. Como $\langle y_m \rangle_{m \in \mathbb{N}}$ fue

una sucesión de Cauchy arbitraria, podemos concluir que V es un espacio métrico completo con respecto a $\|\cdot\|_2$. ■

Proposición 216. Sean V un espacio real de dimensión finita y $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Sean $\|\cdot\|_{\text{sup}} : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ la norma que vale $\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\|_{\text{sup}} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\alpha_i|\}$ para $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in V$ y $\|\cdot\|_1 : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ cualquier otra norma de V . Definamos $b = n \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|v_i\|_1 \right)$. Entonces, para todo $v \in V$ se cumple la desigualdad $\|v\|_1 \leq b \|v\|_{\text{sup}}$.

Demostración. Sea $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in V$, entonces $\|v\|_1 = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\|_1 \leq \sum_{i=1}^n \|\alpha_i v_i\|_1 = \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \|v_i\|_1 \leq \sum_{i=1}^n \left(\max_{1 \leq j \leq n} \{|\alpha_j|\} \right) \|v_i\|_1 = \left(\max_{1 \leq j \leq n} \{|\alpha_j|\} \right) \sum_{i=1}^n \|v_i\|_1 \leq \left(\max_{1 \leq j \leq n} \{|\alpha_j|\} \right) \sum_{i=1}^n \max_{1 \leq j \leq n} \|v_j\|_1 = \|v\|_{\text{sup}} n \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|v_i\|_1 \right) = b \|v\|_{\text{sup}}$. ■

La bella demostración de la siguiente proposición es un clásico argumento de reducción al absurdo.

Proposición 217. Sean V un espacio real de dimensión finita y $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V . Sean $\|\cdot\|_{\text{sup}} : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ la norma que vale $\left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \right\|_{\text{sup}} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|\alpha_i|\}$ para $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in V$ y $\|\cdot\|_1 : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ cualquier otra norma de V . Entonces existe $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que, para todo $v \in V$, se cumple la desigualdad $\|v\|_{\text{sup}} \leq c \|v\|_1$. Más aún, V es un espacio métrico completo con respecto a $\|\cdot\|_1$.

Demostración (por inducción sobre la dimensión de V). Si la dimensión de V es 1, entonces, haciendo $c = \frac{1}{\|v_1\|_1}$, tenemos que $\|\alpha_1 v_1\|_{\text{sup}} = |\alpha_1| = \frac{|\alpha_1| \|v_1\|_1}{\|v_1\|_1} = \frac{\|\alpha_1 v_1\|_1}{\|v_1\|_1} = c \|\alpha_1 v_1\|_1$. Además, como, por la proposición 212, V es completo con respecto a $\|\cdot\|_{\text{sup}}$, vemos que es también completo con respecto a $\|\cdot\|_1$.

Supongamos, pues, que $\dim(V) = n > 1$, y que la proposición se cumple para todos los espacios de dimensión $n-1$. Supongamos que no existe $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que, para todo $v \in V$, se cumpla $\|v\|_{\text{sup}} \leq c \|v\|_1$. Entonces, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $w_m \in V$ tal que $\frac{\|w_m\|_{\text{sup}}}{m} > \|w_m\|_1$. Hagamos una elección y sea $T = \{w_m / w_m \text{ fue escogido con la propiedad de que } \frac{\|w_m\|_{\text{sup}}}{m} > \|w_m\|_1 \text{ para } m \in \mathbb{N}\}$, entonces T es infinito (pues la sucesión $\left\langle \frac{\|w_m\|_{\text{sup}}}{\|w_m\|_1} \right\rangle_{m \in \mathbb{N}}$ es no acotada). Supongamos que, para cada $m \in \mathbb{N}$, $w_m = \sum_{i=1}^n \alpha_{im} v_i$; debe existir un $i \in \{1, \dots, n\}$ para el cual existe un subconjunto infinito S de \mathbb{N} tal que $\forall s \in S \left(\|w_s\|_{\text{sup}} = |\alpha_{is}| \right)$ (de no ser así, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ el conjunto $S_i = \{w_s \in T / \|w_s\|_{\text{sup}} = |\alpha_{is}|\}$ sería finito, pero entonces $T = \bigcup_{i=1}^n S_i$ sería finito ∇). Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que dicho i es precisamente n .

Consideremos entonces la sucesión $\langle w_s \rangle_{s \in S}$, como para cada $s \in S$ se tiene $\|w_s\|_{\text{sup}} = |\alpha_{ns}| > s \|w_s\|_1 \geq 0$, para toda $s \in S$ se cumple que $\alpha_{ns} \neq 0$. Entonces, para cada $s \in S$, el n -ésimo coeficiente de $\alpha_{ns}^{-1} w_s$ con respecto a β es 1, es decir, $\alpha_{ns}^{-1} w_s = u_s + v_n$, donde $u_s \in \langle \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \rangle$ (dicho u_s existe y es único). Además, para cada $s \in S$, $\|u_s + v_n\|_1 = \|\alpha_{ns}^{-1} w_s\|_1 = |\alpha_{ns}^{-1}| \|w_s\|_1 = \frac{\|w_s\|_1}{\|w_s\|_{\text{sup}}} < \frac{1}{s}$.

Sea ahora $N \in \mathbb{N}$, entonces existe $M \in S$ tal que, para todo $r, t \in S$ con $r, t \geq M$, se cumple $\|u_r - u_t\|_1 \leq \|u_r + v_n\|_1 + \|-v_n - u_t\|_1 = \|u_r + v_n\|_1 + \|v_n + u_t\|_1 < \frac{1}{r} + \frac{1}{t} \leq \frac{1}{N}$. Lo que prueba que la sucesión $\langle u_s \rangle_{s \in S}$ es de Cauchy según $\|\cdot\|_1$.

Así, hemos construido una sucesión de Cauchy (según $\|\cdot\|_1$), $\langle u_s \rangle_{s \in S}$, de elementos de $\langle \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \rangle$. Como $\dim(\langle \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \rangle) = n - 1$, la hipótesis inductiva nos dice (debido a la proposición 212 y al lema 215) que $\langle \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \rangle$ es completo con respecto a $\|\cdot\|_1$, por lo que la sucesión $\langle u_s \rangle_{s \in S}$ debe converger, bajo la norma $\|\cdot\|_1$, a un elemento u de $\langle \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \rangle$. Pero entonces, dado que toda norma es una función continua, $\|u + v_n\|_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} \|u_s + v_n\|_1 = 0$, lo que significa que $v_n = -u \in \langle \{v_1, \dots, v_{n-1}\} \rangle$, hecho que contradice la independencia lineal de $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$. Esta contradicción nos permite establecer que existe un $c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ tal que, para todo $v \in V$, se cumple la desigualdad $\|v\|_{\text{sup}} \leq c \|v\|_1$.

Por el lema 214 y la proposición 216, $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ y $\|\cdot\|_1$ son normas equivalentes, y por la proposición 212 y el lema 215, V es completo con respecto a $\|\cdot\|_1$. Como la equivalencia de normas es una relación de equivalencia en el conjunto de normas de V , podemos concluir que cualesquiera dos normas de V son equivalentes, ya que hemos probado que todas son equivalentes a $\|\cdot\|_{\text{sup}}$. ■

Como todo espacio vectorial real V de dimensión finita posee (al menos) una base, vemos que, por la proposición 212, V tiene al menos una norma. Resumamos esto y las proposiciones y lemas de este apéndice enunciando el siguiente teorema:

Teorema 218. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Entonces V posee al menos una norma, todas sus normas son equivalentes, y V es un espacio métrico completo con respecto a cualquiera de ellas.* ■

Glosario de Símbolos

ssi significa *si y sólo si*, y es usado en las definiciones.

Dados conjuntos A y B , $A \setminus B$ es el conjunto cuyos elementos son los elementos de A que no pertenecen a B . Esto es, $A \setminus B = \{x / x \in A \text{ y } x \notin B\}$. No confundir con $A - B$, que no siempre está definido.

Dados un espacio vectorial V y $S, T \subseteq V$, $-S$ es el conjunto de los inversos aditivos de los elementos de S , es decir, $-S = \{-x / x \in S\} = \{x / -x \in S\}$; $S+T$ es el conjunto que resulta de sumar cada elemento de S con cada elemento de T , es decir, $S+T = \{s+t / s \in S \text{ y } t \in T\} = \{x / x \in V \text{ y } \exists s \in S \exists t \in T \text{ tales que } x = s+t\}$. Mientras que $S-T$ es el conjunto $S+(-T)$.

$\cap \mathfrak{F}$ es la intersección de una familia no vacía de conjuntos. Esto es, $\cap \mathfrak{F} = \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F = \{x / x \in F \forall F \in \mathfrak{F}\}$, que tiene sentido cuando $\mathfrak{F} \neq \emptyset$.

$\cup \mathfrak{F}$ es la unión de una familia arbitraria de conjuntos. Esto es, $\cup \mathfrak{F} = \bigcup_{F \in \mathfrak{F}} F = \{x / \exists F \in \mathfrak{F} \text{ tal que } x \in F\}$.

Dados un espacio topológico $\langle T, \tau \rangle$ y subconjuntos $S \subseteq A$ de T , $int_A(S)$ es el interior de S en A y $\partial_A(S)$ es la frontera de S en A cuando a éste le damos la topología relativa (ie, la topología del subespacio).

$\langle S \rangle$ Subespacio vectorial generado por un subconjunto S de un espacio vectorial.

$afín(S)$ Subespacio afín generado por un subconjunto no vacío S de un espacio vectorial.

\vee Operación supremo de una latiz.

\wedge Operación ínfimo de una latiz.

$\varphi(S)$ Cara generada por un subconjunto S de un cono.

- $\psi(S)$ \mathfrak{C} -cara generada por un subconjunto S de un conjunto convexo.
- $\mathcal{F}(K)$ Conjunto cuyos elementos son las caras de un cono K .
- $\mathfrak{C}(C)$ Conjunto cuyos elementos son las \mathfrak{C} -caras de un conjunto convexo.
- $ext(K)$ Conjunto de rayos extremales de un cono K .
- $Vért(C)$ Conjunto de vértices de un conjunto convexo C .

Bibliografía

- [GPB-1] Barker, George Philip. *On Matrices having an Invariant Cone*. Czechoslovak Mathematical Journal, 22 (97), págs. 49-68. 1972.
- [GPB-2] Barker, G. P. *The Lattice of Faces of a Finite Dimensional Cone*. Linear Algebra and its Applications, vol. 7, págs 71-82. 1973.
- [GPB-3] Barker, G. P. *Perfect Cones*. Linear Algebra and its Applications, vol 22, págs. 211-221. 1978.
- [GPB-4] Barker, G. P. *Faces and Duality in Convex Cones*. Linear and Multilinear Algebra, vol. 6, págs. 161-169. Octubre de 1978.
- [GPB-5] Barker, G. P. *Modular Face Lattices: Low Dimensional Cases*. Rocky Mountains Journal of Mathematics, vol. 11, no. 3, págs 435-439. Verano de 1981.
- [GPB-6] Barker, G. P. *Theory of Cones*. Linear Algebra and its Applications, vol. 39, págs. 263-291. Agosto de 1981.
- [GPB-7] Barker, G. P. *Problems in the Theory and Applications of Finite Dimensional Cones*. Comunicación con el autor (artículo no publicado).
- [Bi] Birkhoff, G. *Lattice Theory* (3ª ed.), Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 25. Providence, R.I.: AMS 1967.
- [PC] Crawley, Peter; Dilworth, Robert. *Algebraic Theory of Lattices*. Prentice-Hall, New Jersey, EUA. 1973.
- [SF] Friedberg, Stephen; Insel, Arnold; Spence, Lawrence. *Álgebra Lineal*. Publicaciones Cultural, México. 1982.
- [FG] Gouvêa, Fernando Quadros. *p-adic Numbers*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Universitext. 2000.
- [BG] Grünbaum, Branko. *Convex Polytopes*. Wiley, New York. 1967.

- [JJ] Jost, Jürgen. *Postmodern Analysis*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Universitext. 1998.
- [LS] Loewy, Raphael; Schneider, Hans. *Indecomposable Cones*. Linear Algebra and Applications. 11:235-245. 1975.
- [YCN] Nie, Yun-Chyau. *A partial English translation of "Cones with Semimodular Face Lattice"*. Resumen de la Tesis de Maestría de Nie. Tamkang University, Junio de 1987. Comunicación con Bit-Shun Tam (Director de Tesis).
- [RW] Webster, Roger. *Convexity*. Oxford University Press. Oxford Science Publications. 1994.
- [TZ] Takane Imay, Martha; Zavala Santana, Berta. *Some remarks on irreducible and strongly irreducible operators*. Aportaciones Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana, Serie Comunicaciones 27 (2000), págs 91-100.
- [BZS] Zavala Santana, Berta. *Teoría Espectral de Operadores que dejan Conos Invariantes*. Tesis Profesional. UNAM, Facultad de Ciencias. 1999.