UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

COMPARACION DE MULTIPLES PRUEBAS SOBRE MEDIAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A:

LIZETH KAREM HERRERA CEJA

DIRECTORA DE TESIS: M. EN A.P. MARIA DEL PILAR ALONSO REYES

2004

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNOMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Comparación de múltiples pruebas sobre medias

realizado por Herrera Ceja Lizeth Karem

con número de cuenta 09626197-6, quien cubrió los créditos de la carrera de:

Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M.En A.P. María del Pilar Alonso Reyes	
Propietario	M. en C. José Antonio Flores Díaz	
Propietario	Dr. Luis Antonio Rincón Solís	
Suplente	Act. Ana Bertha Palacios Paz	
Suplente	Act. Lucio Gerardo Chávez Heredia	C. Chávez H.

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Flores Díaz

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional Autónoma de México por permitirme ser parte de ella, ya que para mí fue un orgullo formarme como profesionista .

A la Facultad de Ciencias por todos los conocimientos otorgados a lo largo de mi carrera y por los momentos díficiles y gratos que viví en ella.

Gracias a la Dirección General de Evaluación Educativa por el apoyo económico que me brindó através del Programa de Becas para la Elaboración de Tesis en Proyectos de Investigación (Probetel).

A todos mis profesores que a lo largo de mi vida me han ayudado a llegar hasta donde estoy ahora y que me han enseñado a cumplir todo lo que me propongo.

A mis sinodales:

José Antonio Flores, Luis Antonio Rincón, Ana Bertha Palacios y Gerardo Chávez por su tiempo dedicado a la revisión de esta tesis.

A mi directora de tesis:
Ma. Del Pilar Alonso Reyes por su paciencia, dedicación y sobre todo por la amistad que hasta ahora hemos tenido. Muchas gracias por todo el conocimiento heredado.

Agradezco a Dios porque con la fé que tengo hacia él, me ha permitido seguir adelante en los momentos más díficiles de mi vida..

DEDICATORIAS

A mi mamá por ser una gran mujer, cuya meta siempre ha sido enseñarme a ser una mujer fuerte para ser capaz de resolver todos los problemas que pueda encontrar en mi camino.

A mi papá porque es alguien que admiró, para mí eres un ejemplo a seguir, gracias por todos los consejos que siempre me has dado, porque sino fuera por eso, yo no hubiera llegado a ésta que es una de mis metas.

Les agradezco todos los momentos tan felices que me han dado y sobre todo porque siempre han sido mis mejores amigos apoyándome en mis decisiones.

A mis hermanas: Jacqueline, Anahí y Giselle, porque han sabido comprender mi carácter y sé que siempre contaré con ellas incondicionalmente.

A mi sobrino Brian por los momentos tan divertidos que me hace vivir.

A mi familia: abuelos, tíos y primos, porque sé que siempre cuento con ellos, gracias por todos los consejos que siempre me han brindado.

A Manolo porque ha sido alguien muy importante en mi vida, gracias por estar siempre conmigo apoyándome en los momentos más difíciles e impulsarme a seguir adelante. Te quiero mucho.

A Karla y Ramsés, porque son muy especiales para mí, los quiero mucho.

A todos mis amigos, muchas gracias por todo su apoyo incodicional hacia mí. Mi mayor tesoro es saber que siempre cuento con ustedes en las buenas y en las malas. Ustedes son para mí personas admirables. En especial: Ambrosio, Miguel Angel, Nadia, Wendy, Oscar, Ana, Alberto R., Sergio, Angeles, Iliana, Erick, Lupita, Arturo, Pepe, Víctor, Alberto J., Omar, Jorge, Héctor, Israel y Francisco.

A todos gracias por su confianza que han depositado en mí.

Es verdad que el cambio conlleva el riesgo del fracaso,
esa es la principal razón del temor a la libertad.

Pero también es verdad que en la vida no hay errores,
sólo lecciones que aprender.

Anónimo.

El conocimiento nos conduce a
lugares sin fronteras.

Roger Patrón Luján

COMPARACIÓN DE MÚLTIPLES PRUEBAS SOBRE MEDIAS

HERRERA CEJA LIZETH KAREM

MAYO 2004.

Índice general

Introducción

Uno de los problemas que frecuentemente tiene el investigador es decidir cuál de las pruebas estadísticas es la más adecuada para analizar un conjunto de datos. La aplicación de la estadística en el análisis de datos es muy amplia y las áreas en las que se aplican son muy diversas, desde las ciencias exactas hasta las ciencias sociales.

En particular, en esta tesis se analizan las pruebas sobre medias, ya que en cualquier investigación por lo general se quiere comparar dos grupos o más para detectar las posibles diferencias entre ellos.

Existen varios métodos con los que se puede apoyar uno para resolver este tipo de problemas, es decir, quizá se quiera, por ejemplo decidir, si los hombres pueden realizar cierta tarea con una mayor velocidad que las mujeres o bien, quizá decidir, si los gastos semanales promedio en alimentación de las familias de una ciudad exceden los gastos de las familias de otra ciudad, en menor cantidad, en este caso se estaría hablando de los métodos paramétricos, ya que se está suponiendo que las muestras provienen de poblaciones normales o que son lo suficientemente grandes para justificar el uso de aproximaciones normales. La prueba "t de Student", es un claro ejemplo de las pruebas paramétricas.

Hay situaciones en las cuales no se pueden cumplir las suposiciones requeridas como en las pruebas paramétricas, entonces los investigadores han realizado otras técnicas alternativas que se han denominado métodos no paramétricos, usualmente se presentan en casi todos los campos de estudio, pero, particularmente en las investigaciones sociales y en estudios de preferencia de los consumidores son donde más se utilizan. Algunos ejemplos de este tipo de métodos es cuando se quiere clasificar la capacidad docente de varios maestros o cuando se desea saber si hubo alguna diferencia al aplicar una dieta reductora a un grupo de personas en determinado periodo.

En muchas ocasiones cuando se tienen más de dos poblaciones a comparar, no sólo se quiere saber si son diferentes, sino se desea conocer cuál de ellas puede ser distinta. Para ello se hace uso de las comparaciones múltiples, hay una variedad de pruebas pero, sólo se analizan en esta tesis: la prueba de la Mínima Diferencia Significativa (MDS), Duncan, Newman-Keuls, Tukey y Scheffé.

Se tiene como objetivo de esta tesis, realizar las pruebas de medias que se utilizan con mayor frecuencia, esto con el fin de analizar si hay gran diferencia entre los resultados que se obtienen con cada una de ellas.

En el primer capítulo, se muestran los conceptos básicos que se necesitan para realizar una prueba estadística, es decir, se explica lo que es la hipótesis nula y alternativa, la elección del estadístico de prueba, nivel de significancia y región de rechazo, así como las diferentes escalas de medición que se utilizan como supuestos para realizar una prueba estadística.

En el segundo, tercero y cuarto capítulo, se menciona la teoría, esto es, los supuestos, hipótesis, estadístico de prueba y regla de decisión, de las pruebas normales, de las pruebas no paramétricas: Signos, Wilcoxon, Mann-Whitney, Friedman y Kruskal-Wallis y de las pruebas de diseño de experimentos: la prueba de la Mínima Diferencia Significativa (MDS), Duncan, Newman-Keuls, Tukey y Scheffé.

En el quinto capítulo, se utiliza el paquete de "*Statistica 6*", para realizar las diferentes pruebas y analizar los resultados.

Posteriormente, se presentan las conclusiones y anexos que contienen las tablas estadísticas.

Capítulo 1

CONCEPTOS BÁSICOS

Uno de los objetivos principales dentro de la estadística, es la inferencia, la cual se encarga de hacer afirmaciones acerca de la poblaciones, basándose en la información obtenida mediante muestras tomadas de ellas. La estadística inferencial está interesada en dos tipos de problemas: la estimación de los parámetros de la población y pruebas de hipótesis sobre dichos parámetros.

Un problema en común para la inferencia estadística es determinar, en términos de probabilidad, si las diferencias observadas entre dos muestras significa que las poblaciones muestreadas son realmente diferentes o en el caso en que se tenga varios grupos, poder determinar si difieren entre ellos.

Las primeras técnicas de inferencia que aparecieron fueron aquellas que hicieron suposiciones acerca de la naturaleza de las poblaciones de las cuales se derivan las observaciones y los datos, estas técnicas estadísticas se llaman pruebas paramétricas. Como ejemplos, una técnica de inferencia puede estar basada en la suposición de que los datos se derivan de una población normalmente distribuida o en la suposición de que dos muestras de datos se tomaron de poblaciones que tienen la misma varianza.

Aunque las pruebas paramétricas son muy importantes, hay situaciones en las cuales no se pueden cumplir todas las suposiciones acerca de la población de la cual se han muestreado los datos, ya que existen experimentos que producen respuestas que no son estrictamente cuantificables, es por eso que se han desarrollado otras técnicas de inferencia, llamadas pruebas no paramétricas, las cuales dan como resultado conclusiones que requieren menos suposiciones.

Las pruebas estadísticas, paramétricas o no paramétricas, tienen el propósito de verificar hipótesis estadísticas que son proposiciones o supuestos sobre los parámetros de una o más poblaciones y que parecen importantes para ciertas teorías, recabando datos que permitan tener un procedimiento objetivo para rechazar o bien aceptarlas.

El procedimiento que generalmente se sigue para realizar las pruebas estadísticas, paramétricas o no paramétricas, consiste en los siguientes pasos:

- Formulación de la hipótesis nula y alternativa.
- Elección del estadístico de prueba.
- Obtención de la Distribución muestral del estadístico.
- Nivel de significancia (α).
- Región de rechazo y regla de decisión.

A continuación se dará una breve explicación de cada uno de los pasos para comprender en qué consisten.

1.1. Formulación de la hipótesis nula y alternativa

El primer paso que se realiza para hacer una prueba estadística, es la formulación de la hipótesis nula denotada por H_0, que es una hipótesis de "no efecto" y por lo general se formula con el propósito de ser rechazada, es decir, es la negación del punto que se está tratando de probar. Si es rechazada se apoya en la hipótesis alternativa que generalmente se denota por H_1, que es la declaración operacional de la hipótesis de investigación [1]del experimentador.

Si la hipótesis alternativa puede afirmar solamente que el parámetro es diferente al de la hipótesis nula, se trata de una hipótesis no direccional o bilateral, un ejemplo sería aquel en el que la hipótesis alternativa establece que dos grupos difieren respecto a la media, donde se tiene que la hipótesis de la prueba estaría definida de la siguiente manera:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad vs. \qquad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Para el caso en que el parámetro es diferente y además se indique la dirección de la diferencia, en este caso se estaría hablando de una hipótesis direccional o unilateral, si se toma el ejemplo anterior de las medias en donde un grupo específico tenga una media mayor que el otro, entonces H_1 podría tomar dos casos en el que la media del grupo 1 es mayor o menor que la media del grupo 2 respectivamente, la hipótesis de la prueba estaría definida de la siguiente manera:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad vs. \qquad H_1 : \mu_1 > \mu_2 \quad o \quad H_1 : \mu_1 < \mu_2$$

[1]La hipótesis de investigación es la predicción derivada de la teoría sometida a prueba.

1.2. Elección del estadístico de prueba

Para elegir un estadístico de prueba adecuado se debe escoger aquel cuyo modelo se aproxime más a las condiciones de la investigación el cual se utilizará para rechazar o aceptar la hipótesis nula H_0.

El estadístico de prueba debe satisfacer las siguientes condiciones:

a) Su función de probabilidad debe ser conocida cuando se supone que la hipótesis nula es cierta.

b) Debe contener el valor del parámetro que está siendo contrastado, y

c) Los restantes términos que intervienen deben ser conocidos o se pueden calcular a partir de la muestra.

Otro punto importante que se debe considerar es la manera en que se obtuvo la muestra de la población y la clase de medición o escala que se empleó en las definiciones operacionales de las variables usadas, es decir los puntajes.

A continuación se menciona cuales son las escalas de medición utilizadas en las pruebas estadísticas.

- **Escala Nominal**. Consiste en situar a cada observación o dato en una u otra categoría dada o el asignarle un nombre. Esta escala trata de agrupar objetos en clases, de modo que todos los que pertenezcan a la misma sean equivalentes. Ejemplos son: el sexo: Masculino o Femenino; talla de ropa:chica, mediana y grande, etc.

- **Escala Ordinal**. Consiste en situar a los individuos en un orden, de acuerdo a algún criterio. Los datos ordinales constituyen un escalón superior en relación a los datos nominales, porque permite decir si un individuo está antes o después que otro en una escala. Un ejemplo son las pruebas de inteligencia y las calificaciones como NA, B, MB, etc.

- **Escala Intervalar**. Consiste en asignar un número a un individuo para indicar su posición exacta a lo largo de una escala continua. Los datos de intervalo ocupan otro escalón superior en la jerarquía de las escalas de medición, porque permite decir qué distancia separa a un individuo de otro dentro de una escala. Una de las características distintivas de la medida de intervalos es que el punto cero puede asignarse arbitrariamente y en ningún caso indica ausencia completa de la propiedad en cuestión. Por ejemplo puede ser la temperatura, posición en una línea, etc.

- **Escala de Razón o Cociente**. Esta escala se diferencia de la intervalar únicamente en que el punto cero no es arbitrario, sino un valor absoluto, es decir, si se tiene una longitud igual a cero significa que no hay longitud. Se puede decir que la escala de razón tiene las mismas características a la intervalar, pero con el rasgo adicional de que la razón de dos valores cualesquiera, es independiente de la unidad de medición. Por ejemplo, 4 metros es a 2 metros como 2 metros es a 1 metro. Algunos ejemplos son: longitud, enumeración, densidad, intervalos de tiempo, etc.

Una vez que se haya elegido el estadístico de prueba, se tiene que determinar la distribución muestral del estadístico.

1.3. Distribución muestral del estadístico

La distribución muestral es una distribución teórica, puede ser obtenida si se toman todas las posibles muestras de un mismo tamaño. Se extraen cada una de ellas aleatoriamente de una misma población, es decir, la distribución muestral es la distribución de todos los posibles valores que algún estadístico puede tomar, siendo H_0 verdadera. Para poder considerar una distribución muestral es necesario utilizar herramientas que ofrecen los teoremas concernientes a distribuciones normales y tamaños de muestra, uno de ellos sería el teorema de límite central.

A partir de la suposición de que los datos se distribuyen normalmente y con parámetros desconocidos, se obtienen distribuciones como: la t de Student ($t_{(n-1)}$), la F de Fischer ($f_{(n-1)}$) y la Ji-cuadrada (χ^2) que son utilizadas generalmente en estadística paramétrica. Para estadísticas no paramétricas se utilizan aproximaciones a estas distribuciones.

1.4. Nivel de significancia

El nivel de significancia (α) se refiere a la probabilidad de cometer un error de tipo I, que consiste en rechazar la hipótesis H_0 cuando H_0 es verdadera. Se interpreta como el nivel máximo que el investigador está dispuesto a equivocarse. Algunos autores[2], lo definen como "el valor de riesgo α elegido para definir la región crítica, es decir, la zona de rechazo de la hipótesis nula". Si el resultado de una prueba estadística está dentro de la región crítica se dice que es significativo.

[2]Canavos, W. J. Probabilidad y Estadística: Aplicaciones y Métodos, Mc Graw-Hill, 1987. Pag. 308-309.

En las ciencias sociales, frecuentemente, se usa como nivel de significancia $\alpha = 0.05$, lo cual indica que se acepta un 5 % de probabilidad de rechazar la hipótesis H_0 cuando es cierta. Sin embargo, en medicina el nivel de significancia α debe ser mucho menor, tal vez 0.005 ó 0.001. En general, α tomará valores tales como: 0.1, 0.05, 0.025, 0.01, ó 0.001, si bien cualquier otro valor también puede utilizarse.

Íntimamente ligado a "α" se encuentra el riesgo "β" que se define como la probabilidad de cometer un error de tipo II, que consiste en no rechazar H_0 cuando H_0 es falsa. Por lo tanto, existen dos tipos de errores que se toman en cuenta:

Decisión	H_0 **Verdadera**	H_0 **Falsa**
No rechazar H_0	Correcta $(1-\alpha)$	Error de tipo II (β)
Rechazar H_0	Error de tipo I (α)	Correcta $(1-\beta)$

que expresado de otra manera significa que:

1. Si la hipótesis nula es verdadera y no se rechaza, la decisión es correcta con probabilidad $(1-\alpha)$.

2. Si la hipótesis nula es verdadera y se rechaza, la decisión es incorrecta, y este error se denomina error de tipo I.

$$P(\text{error tipo I}) = \alpha = P(\text{Rechazar hipótesis verdadera})$$

3. Si la hipótesis nula es falsa y no se rechaza, la decisión es incorrecta, y este error se denomina error de tipo II.

$$P(\text{error de tipo II}) = \beta = P(\text{No rechazar hipótesis falsa})$$

4. Si la hipótesis nula es falsa y se rechaza, la decisión es correcta con probabilidad $(1-\beta)$.

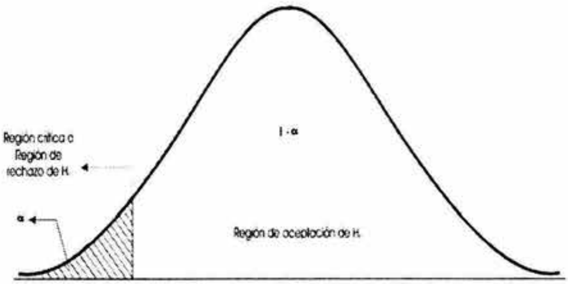
De los dos tipos de errores algunos investigadores prefieren cometer un error de tipo I. Sin embargo, no se debe tener la idea de que no importa la posibilidad de cometer errores de tipo II, sino encontrar alguna forma para tratar de minimizar los dos tipos de errores.

1.5. Región de rechazo y Regla de decisión

La región de rechazo[3] o región crítica consiste en todos los valores posibles que una prueba estadística puede tomar conforme a H_0. Permite decidir si se acepta o rechaza la hipótesis nula H_0, en función del valor del estadístico elegido y del valor de significancia α fijado.

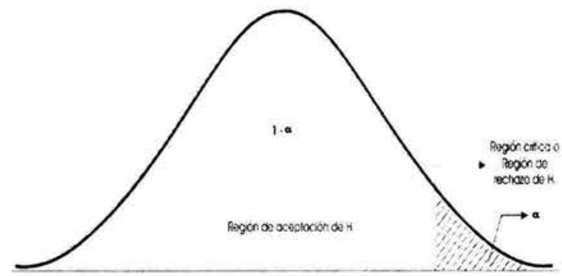
La localización de la región de rechazo también es afectada por la forma de la hipótesis de H_1, es decir:

- **Prueba de una cola o unilateral:** se presenta cuando H_1 indica la dirección predicha de la diferencia. Aquí la región de rechazo está totalmente en un extremo (o cola) de la distribución muestral.



(1.1)

Gráfico (1.1) Representación gráfica de la región crítica y de la región de aceptación para una prueba unilateral a la izquierda.



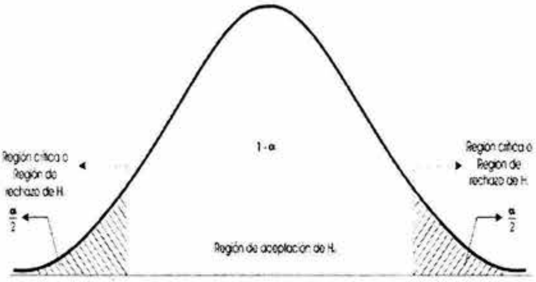
(1.2)

Gráfico (1.2) Representación gráfica de la región crítica y de la región de aceptación para una prueba unilateral a la derecha.

---

[3]La región de rechazo o región crítica está constituidapor el conjunto de muestra para las cuales se rechaza la hipótesis nula H_0.

- **Prueba de dos colas o bilateral:** se presenta cuando H_1 no indica la dirección de la diferencia predicha. En este caso la región de rechazo está en ambos extremos de la distribución muestral.



(1.3)

Gráfico (1.3) Representación gráfica de la región crítica y de la región de aceptación para una prueba bilateral.

Las pruebas de una o dos colas se distinguen en la localización, pero no en el tamaño de la región de rechazo.

La regla de decisión se toma en términos de la región de rechazo o región crítica. Por ejemplo, en una prueba de una cola la regla de decisión dice que se rechaza H_0 si el valor obtenido en el estadístico de prueba es tan extremo o igual al valor crítico. En la prueba de dos colas se tienen dos valores críticos y se rechaza H_0 si el valor obtenido en el estadístico de prueba es tan extremo como uno u otro de los dos valores críticos.

Se puede concluir que se rechaza H_0, cuando un valor observado en una prueba estadística es igual o menor que el valor previamente determinado como α. El valor observado es llamado previamente significativo. La hipótesis nula es rechazada H_0 siempre que se encuentre un valor significativo.

1.5.1. Nivel p o valor p

Otra manera de decidir si la hipótesis nula se rechaza o no se rechaza es determinando la probabilidad observada, cuando H_0 es cierta, de que la estadística de prueba tome un valor mayor o igual que el calculado con base a una muestra aleatoria.

Un nivel p relativamente pequeño puede sugerir que si H_0 es realmente cierta, el valor de la estadística de prueba sea poco probable. Entonces se opta por rechazar H_0 debido a que esta decisión tendrá una alta probabilidad de ser correcta.

La aproximación del nivel p o valor p como ayuda en la toma de decisiones es bastante natural pues casi todos los paquetes de computadora que proporcionan el cálculo de prueba de hipótesis entregan valores de p junto con valores de la estadística de la prueba apropiada.

- El nivel p o valor p permite a cada investigador utilizar su propio valor para α para así determinar si rechaza la hipótesis nula o no.
- Un nivel p o valor p es el nivel de significancia más bajo en el que el valor observado de la estadística de prueba es significativo.
- El nivel p o valor p es el nivel de significancia más pequeño que conduce al rechazo de la hipótesis nula H_0.
- El nivel p o valor p es el mínimo nivel de significancia en el cual H_0 sería rechazada cuando se utiliza un procedimiento de prueba especificado con un conjunto dado de información.

Capítulo 2

PRUEBAS CON DISTRIBUCIÓN NORMAL

En este capítulo, se presentan las pruebas con distribución normal para comparar la media de una población y de dos poblaciones.también son conocidas como paramétricas.

Algunos de los supuestos que deben de cumplir estás pruebas son:

- Las observaciones deben de constituir una muestra aleatoria.
- Las observaciones deben de ser tomadas de poblaciones normalmente distribuidas.
- Las observaciones deben pertenecer por lo menos a la escala intervalar.
- Las poblaciones de donde se adquieren las observaciones, deben tener la misma varianza.

La ventaja de estás pruebas paramétricas es que son más eficaces, si se cumplen todos los supuestos, pero en caso de no cumplirlos pueden obtenerse resultados no confiables, esto dependerá de cual de los supuestos sea el que no se cumpla.

2.1. Pruebas de hipótesis sobre la media de una población N(μ,σ).

2.1.1. Varianza poblacional conocida

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución normal con media μ y varianza conocida σ^2. Se desea probar la siguiente hipotésis nula:

$$H_0 : \mu = \mu_o \quad vs. \quad H_1 : \mu \neq \mu_o$$

La construcción de la prueba se hará a través del teorema de la familia exponencial[1], el cual se enuncia a continuación.

Teorema 1 *Si $f(x,\theta)$ pertenece a la familia exponencial $f(x,\theta) = a(\theta)b(x)\exp c(\theta)d(x)$, entonces la prueba uniformemente más potente será:*

i) $C^* = \{X_1, X_2, \ldots, X_n / \Sigma d(x_i) < k\}$ si $c(\theta)$ es monótona decreciente para θ.

ii) $C^* = \{X_1, X_2, \ldots, X_n / \Sigma d(x_i) > k\}$ si $c(\theta)$ es monótona creciente para θ.

donde C^* es la región crítica.

ahora se analizará que la siguiente función cumpla las condiciones del teorema para poder encontrar el estadístico de prueba y la región crítica.

Sea

$$\begin{aligned} f(x;\mu,\sigma^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \\ &= \frac{e^{-\frac{\left(x^2-2x\mu+\mu^2\right)}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\mu/\sigma)^2} e^{-\frac{1}{2}(x/\sigma)^2} e^{\left(\mu/\sigma^2\right)x}. \end{aligned}$$

Se puede observar que la función si pertenece a la familia exponencial con:

$$\begin{aligned} a(\mu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(\mu/\sigma)^2}, \\ b(x) &= e^{-\frac{1}{2}\left(x^2/\sigma^2\right)}, \\ c(\mu) &= \frac{\mu}{\sigma^2}, \\ d(x) &= x. \end{aligned}$$

El teorema de la familia exponencial indica que la región crítica depende de la función $c(\mu) = \frac{\mu}{\sigma^2}$. Como se observa ésta es monótona creciente, por lo tanto se debe utilizar la siguiente región crítica para poder encontrar el estadístico de prueba.

$$\begin{aligned} C^* &= \{X_1, X_2, \ldots, X_n / \Sigma d(x_i) > k\} \\ &= \{X_1, X_2, \ldots, X_n / \Sigma x_i > k\} \\ &= \left\{X_1, X_2, \ldots, X_n / \frac{\Sigma x_i}{n} > \frac{k}{n}\right\} \\ &= \left\{X_1, X_2, \ldots, X_n / \overline{x} > \frac{k}{n}\right\}. \end{aligned}$$

[1] Consultar Mood Alexander. Introduction to the theory of statistics, Mc Graw-Hill, 1974. Pag. 422.

Se sabe que $\overline{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$,entonces al estándarizar se obtiene que:

$$C^* = \left\{ X_1, X_2, \ldots, X_n / \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} > \frac{k - \mu}{\frac{n\sigma}{\sqrt{n}}} = k^* \right\}.$$

Estadístico de Prueba

$$T = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$

Regla de Decisión.

Rechazar H_0 si $T > k^*$, donde k^* es el cuantil con probabilidad acumulada[2] de $N_{(0,1)}^{1-\alpha/2}$.

2.1.2. Varianza poblacional desconocida

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución normal con media μ y varianza σ^2 desconocida de tamaño n. Se desea probar la siguiente hipotésis nula:

$$H_0 : \mu = \mu_o \quad vs. \quad H_1 : \mu \neq \mu_o$$

Para poder encontrar la región crítica se utiliza el teorema de cociente de verosimilitud generalizado[3], el cual se enuncia a continuación.

Teorema 2 *Cociente de verosimilitud generalizado. Sea $L(\theta; \underline{X})$ la función de verosimilitud para alguna muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ teniendo función de verosimilitud $f(X_1, X_2, \ldots, X_n; \theta)$ $\theta \in \underline{\overline{\theta}}$. El cociente de verosimilitud generalizado es definido por λ.*

$$\lambda = \frac{\sup\limits_{\theta \in \overline{\theta}_o} L(\theta; \underline{X})}{\sup\limits_{\theta \in \underline{\overline{\theta}}} L(\theta; \underline{X})} \qquad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Si $\lambda \leq k \Longrightarrow (X_1, X_2, \ldots, X_n) \in C^*$
Si $\lambda \geq k \Longrightarrow (X_1, X_2, \ldots, X_n) \in C^{*c}$

donde C^* y C^{*c} son la región crítica.

[2]Consultar tabla 1 del Anexo.

[3]Consultar Mood Alexander. Introduction to the theory of statistics, Mc Graw-Hill, 1974. Pag. 419-422.

Para una población con distribución de probabilidad $N(\mu, \sigma^2)$, con varianza σ^2 desconocida. La función de verosimilitud es

$$\begin{aligned} L(X_1, X_2, \ldots, X_n; \mu, \sigma^2) &= L(\mathbf{X};\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdots e^{-\frac{(x_n-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde se denota a la muestra $X_1, X_2, \ldots, X_n = \mathbf{X}$.

La razón de verosimilitud, $\lambda(\mathbf{X})$, es el cociente de la función de verosimilitud generalizado para los valores de μ y σ^2 y que la hacen máxima en el espacio paramétrico de la hipótesis nula $\{\mu_o; \sigma^2 > 0\}$ y en el espacio paramétrico total $\{-\infty < \mu < \infty; \sigma^2 > 0\}$.

Como primer paso se tienen que encontrar los estimadores máximos verosimiles de μ y σ^2 bajo cada hipótesis. El logaritmo de la función de verosimilitud (2.1) es

$$\ln L(\mathbf{X};\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2,$$

se calculan las derivadas de $\ln L(\mathbf{X};\mu, \sigma^2)$ respecto a μ y σ^2

$$\frac{\partial L(\mathbf{X};\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)}{\sigma^2}.$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{X};\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{2\sigma^4}.$$

En el espacio paramétrico de la hipótesis nula $\{\mu = \mu_o; \sigma^2 > 0\}$ la media toma un sólo valor, μ_o, por lo cual será el que hace máxima $L(\mathbf{X};\mu, \sigma^2)$. El valor correspondiente a σ^2 procede de igualar la derivada a cero y sustituyendo en ella $\mu = \mu_o$, ya que es bajo H_0, resultando

$$\begin{aligned} \frac{n}{2\sigma^2} &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_o)^2}{2\sigma^4} \\ \frac{n2\sigma^4}{2\sigma^2} &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_o)^2 \\ \widehat{\sigma}_o^2 &= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_o)^2}{n} = S_o^2 \end{aligned}$$

En el espacio paramétrico total, los valores de μ y σ^2 se obtienen resolviendo las dos derivadas, éstas se igualan a cero, generando un sistema de ecuaciones y llegando a la solución:

$$\widehat{\mu} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$$

$$\widehat{\sigma}_1^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n} = S_1^2$$

ahora, se llevan estos valores al cociente de verosimilitud, obteniendo el estadístico $\lambda(\mathbf{X})$ como:

$$\lambda(\mathbf{X}) = \frac{L(\mathbf{X};\mu_o, S_o^2)}{L(\mathbf{X};\mu, S_1^2)} = \frac{\frac{1}{(S_o^2)^{\frac{n}{2}}(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2S_o^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_o)^2}}{\frac{1}{\left(S_1^2\right)^{\frac{n}{2}}(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2S_1^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}},$$

se sustituyen S_o^2, S_1^2 por sus expresiones y se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\lambda(\mathbf{X}) &= \frac{\frac{1}{\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_o)^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_o)^2}{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_o)^2}{n}}}}{\frac{1}{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}}} \\
&= \left[\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}}{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_o)^2}{n}}\right]^{\frac{n}{2}} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{e^{-\frac{n}{2}}} \\
&= \left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_o)^2}\right]^{\frac{n}{2}} \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

En la expresión $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_o)^2$ se suma y se resta $\overline{x}$, y resulta

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+\overline{x}-\overline{x}-\mu_o)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+n(\overline{x}-\mu_o)^2,$$

que al sustituirla en el denominador de la ecuación (2.2) queda

$$\lambda(\mathbf{X})=\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+n(\overline{x}-\mu_o)^2}\right]^{\frac{n}{2}},$$

al dividir la expresión entre $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2$ da como resultado

$$\lambda(\mathbf{X})=\frac{1}{\left[1+\frac{n(\overline{x}-\mu_o)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}\right]^{\frac{n}{2}}},$$

para encontrar la región crítica se hace $\lambda\leq k$, que es equivalente a

$$\frac{1}{1+\frac{n(\overline{x}-\mu_o)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}}<k^{\frac{2}{n}}=k'$$

Esta desigualdad, es equivalente a

$$\frac{n(\overline{x}-\mu_o)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}>\frac{1}{k'}-1=k''$$

$$\frac{n(\overline{x}-\mu_o)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}>(n-1)k''$$

Como se observa se obtuvo un estadístico con distribución "F". Si se le aplica o se realiza la raíz se obtiene un estadístico con distribución"t" el que tiene como región crítica la siguiente:

$$\frac{\sqrt{n}(\overline{x}-\mu_o)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\overline{x})^2}{n-1}}}>\sqrt{(n-1)k''}=K^*.$$

donde

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}.$$

Estadístico de Prueba.

$$T = \frac{\sqrt{n}\,(\overline{x} - \mu_o)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}} = \frac{\sqrt{n}\,(\overline{x} - \mu_o)}{S}.$$

Regla de Decisión.

Rechazar H_0 si $T > K^*$, donde K^* es el cuantil de una distribución[4] $t_{(n-1)}^{1-\alpha/2}$.

2.2. Pruebas de hipótesis para medias entre dos poblaciones N(μ,σ).

2.2.1. Varianzas poblacionales conocidas

Sean dos poblaciones $N(\mu_1, \sigma_1)$ y $N(\mu_2, \sigma_2)$, con varianzas conocidas y distintas[5]. Se establece la siguiente hipótesis nula de la igualdad de medias y la alternativa de su diferencia, la que es

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad vs. \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Para llevar a cabo la prueba se toman dos muestras aleatorias, independientes entre sí, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ de tamaño n y m, $n + m = N$.

Para contrastar la hipótesis se recurre al teorema cociente de verosimilitud generalizado, se necesita para ello obtener los valores de los parámetros μ_1 y μ_2 que hacen máxima la función de verosimilitud en cada espacio paramétrico. El espacio paramétrico total es $\{-\infty < \mu_1 < \infty; -\infty < \mu_2 < \infty\}$ y para la hipótesis nula $\{\mu_1 = \mu_2 = \mu/\mu \in \mathbb{R}\}$.

En primer lugar, se establece la función de verosimilitud conjunta de las dos muestras. La función de verosimilitud de una muestra aleatoria simple es igual al producto de la función de densidad poblacional particularizada para cada elemento muestral. Al

[4] Consultar la tabla 2 del Anexo.

[5] Ruíz-Maya Pérez Luis. Estadística II: Inferencia, Editorial AC., Madrid, 1995. Pag. 524-529.

ser las dos muestras independientes la función de verosimilitud conjunta es igual al producto de las funciones de verosimilitud de cada muestra,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{X},\mathbf{Y};\mu_1,\mu_2) &= L(\mathbf{X};\mu_1)\,L(\mathbf{X};\mu_2) \\ &= f(x_1,\mu_1)\cdots f(x_n,\mu_1)f(y_1,\mu_2)\cdots f(y_m,\mu_2) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left(\sigma_1^2\right)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma_2^2\right)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{\sum_{i=1}^{m}(y_i-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}. \end{aligned}$$

Calculando el logaritmo natural

$$\begin{aligned} \ln L(\mathbf{X},\mathbf{Y};\mu_1,\mu_2) &= -\frac{N}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma_1^2\right)-\frac{m}{2}\ln\left(\sigma_2^2\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{\sum_{i=1}^{m}(y_i-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Bajo la hipótesis nula, $\mu_1=\mu_2=\mu$, la función de verosimilitud conjunta es

$$L(\mathbf{X},\mathbf{Y};\mu)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left(\sigma_1^2\right)^{\frac{n}{2}}\left(\sigma_2^2\right)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma_1^2}+\frac{\sum_{i=1}^{m}(y_i-\mu)^2}{\sigma_2^2}\right]},$$

y su logaritmo natural

$$\begin{aligned} \ln L(\mathbf{X},\mathbf{Y};\mu) &= -\frac{N}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma_1^2\right)-\frac{m}{2}\ln\left(\sigma_2^2\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma_1^2}+\frac{\sum_{i=1}^{m}(y_i-\mu)^2}{\sigma_2^2}\right]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

A continuación se tienen, bajo las condiciones establecidas para cada hipótesis, los valores de los parámetros que hacen máximas las funciones de verosimilitud. Para obtenerlos se realiza la derivada de la ecuación (2.3) respecto a μ_1 y μ_2

$$\frac{\partial \ln L(\mathbf{X},\mathbf{Y};\mu_1,\mu_2)}{\partial \mu_1}=\frac{1}{\sigma_1^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)=0$$

$$\frac{\partial \ln L(\mathbf{X},\mathbf{Y};\mu_1,\mu_2)}{\partial \mu_2}=\frac{1}{\sigma_2^2}\sum_{i=1}^{m}(y_i-\mu_2)=0$$

se obtiene como solución de las ecuaciones, en el espacio paramétrico total, los estimadores máximo verosímiles de μ_1 y μ_2

$$\widehat{\mu}_1 = \overline{x} \quad y \quad \widehat{\mu}_2 = \overline{y} \tag{2.5}$$

En el caso de la hipótesis nula, $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu$, se deriva la ecuación (2.4) respecto a μ

$$\frac{\partial \ln L(\mathbf{X}, \mathbf{Y}; \mu)}{\partial \mu} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \mu)}{\sigma_1^2} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} (y_i - \mu)}{\sigma_2^2} = 0$$

Al multiplicar por $\sigma_1^2 \sigma_2^2$ y sustituir valores conocidos se obtiene

$$\sigma_2^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) + \sigma_1^2 \sum_{i=1}^{m} (y_i - \mu) = 0$$

$$\sigma_2^2 (n\overline{x} - n\mu) + \sigma_1^2 (m\overline{y} - m\mu) = 0$$

se despeja a μ

$$\mu \left(m\sigma_1^2 + n\sigma_2^2\right) = n\sigma_2^2 \overline{x} + m\sigma_1^2 \overline{y}$$

el estimador μ bajo H_0 es

$$\widehat{\mu} = \frac{n\sigma_2^2 \overline{x} + m\sigma_1^2 \overline{y}}{m\sigma_1^2 + n\sigma_2^2}. \tag{2.6}$$

La media estimada bajo H_0 es la media ponderada de las medias muestrales utilizando como ponderaciones los tamaños de las muestras y las varianzas poblacionales.

Una vez que se hallan los valores que hacen máxima la función de verosimilitud en cada espacio paramétrico, se forma el cociente de verosimilitud generalizado $\lambda(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \frac{\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \left(\sigma_1^2\right)^{\frac{n}{2}} \left(\sigma_2^2\right)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{\mu})^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sum_{i=1}^{m}(y_i-\overline{\mu})^2}{\sigma_2^2}\right]}}{\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \left(\sigma_1^2\right)^{\frac{n}{2}} \left(\sigma_2^2\right)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sum_{i=1}^{m}(y_i-\overline{y})^2}{\sigma_2^2}\right]}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{\mu})^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sum_{i=1}^{m}(y_i-\overline{\mu})^2}{\sigma_2^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{\sigma_1^2} - \frac{\sum_{i=1}^{m}(y_i-\overline{y})^2}{\sigma_2^2}\right]}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Se simplifica el exponente de la ecuación (2.7)

$$\frac{1}{\sigma_1^2} \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{\mu})^2 - \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2\right] + \frac{1}{\sigma_2^2} \left[\sum_{i=1}^{m} (y_i - \overline{\mu})^2 - \sum_{i=1}^{m} (y_i - \overline{y})^2\right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma_1^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-2x_i\overline{\mu}+\overline{\mu}^2\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2-2x_i\overline{x}+\overline{x}^2\right)\right] \\
&\quad +\frac{1}{\sigma_2^2}\left[\sum_{i=1}^{m}\left(y_i^2-2y_i\overline{\mu}+\overline{\mu}^2\right)-\sum_{i=1}^{m}\left(y_i^2-2y_i\overline{y}+\overline{y}^2\right)\right] \\
&= \frac{1}{\sigma_1^2}\left[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-2n\overline{x}\overline{\mu}+n\overline{\mu}^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2n\overline{x}^2-n\overline{x}^2\right] \\
&\quad +\frac{1}{\sigma_2^2}\left[\sum_{i=1}^{m}y_i^2-2m\overline{y}\overline{\mu}+m\overline{\mu}^2-\sum_{i=1}^{m}y_i^2+2m\overline{y}^2-m\overline{y}^2\right] \\
&= \frac{n}{\sigma_1^2}\left(\overline{x}^2-2\overline{\mu}\overline{x}+\overline{\mu}^2\right)+\frac{m}{\sigma_2^2}\left(\overline{y}^2-2\overline{\mu}\overline{y}+\overline{\mu}^2\right) \\
&= \frac{n\left(\overline{\mu}-\overline{x}\right)^2}{\sigma_1^2}+\frac{m\left(\overline{\mu}-\overline{y}\right)^2}{\sigma_2^2}. \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

En las ecuaciones (2.5) y (2.6) se obtienen las expresiones muestrales de $\overline{x}, \overline{y}$ y $\overline{\mu}$ por lo cual los numeradores de la ecuación (2.8) pasan a ser

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}-\overline{x} &= \frac{n\sigma_2^2\overline{x}+m\sigma_1^2\overline{y}}{m\sigma_1^2+n\sigma_2^2}-\overline{x} \\
&= \frac{n\sigma_2^2\overline{x}+m\sigma_1^2\overline{y}-m\sigma_1^2\overline{x}-n\sigma_2^2\overline{x}}{m\sigma_1^2+n\sigma_2^2} \\
&= \frac{m\sigma_1^2}{m\sigma_1^2+n\sigma_2^2}(\overline{y}-\overline{x}). \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

y de manera análoga,

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}-\overline{y} &= \frac{n\sigma_2^2\overline{x}+m\sigma_1^2\overline{y}}{m\sigma_1^2+n\sigma_2^2}-\overline{y} \\
&= \frac{n\sigma_2^2\overline{x}+m\sigma_1^2\overline{y}-m\sigma_1^2\overline{y}-n\sigma_2^2\overline{y}}{m\sigma_1^2+n\sigma_2^2} \\
&= \frac{n\sigma_2^2}{m\sigma_1^2+n\sigma_2^2}(\overline{x}-\overline{y}). \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Al regresar a la ecuación (2.8) y sustituir en $(\overline{\mu}-\overline{x})$ y $(\overline{\mu}-\overline{y})$ lo obtenido en la ecuaciones (2.9) y (2.10), se llega a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
& \frac{n}{\sigma_1^2}\left(\frac{m\sigma_1^2(\overline{y}-\overline{x})}{m\sigma_1^2+n\sigma_2^2}\right)^2+\frac{m}{\sigma_2^2}\left(\frac{n\sigma_2^2(\overline{x}-\overline{y})}{m\sigma_1^2+n\sigma_2^2}\right)^2 \\
= & \frac{n}{\sigma_1^2}\left[\frac{\left(m\sigma_1^2\right)^2(\overline{y}-\overline{x})^2}{\left(m\sigma_1^2+n\sigma_2^2\right)^2}\right]+\frac{m}{\sigma_2^2}\left[\frac{\left(n\sigma_2^2\right)^2(\overline{x}-\overline{y})^2}{\left(m\sigma_1^2+n\sigma_2^2\right)^2}\right] \\
= & \frac{n\left(m\sigma_1^2\right)^2}{\sigma_1^2\left(m\sigma_1^2+n\sigma_2^2\right)^2}(\overline{y}-\overline{x})^2+\frac{m\left(n\sigma_2^2\right)^2}{\sigma_2^2\left(m\sigma_1^2+n\sigma_2^2\right)^2}(\overline{x}-\overline{y})^2 \\
= & \frac{(\overline{x}-\overline{y})^2}{\left(m\sigma_1^2+n\sigma_2^2\right)^2}\left[\frac{n\left(m\sigma_1^2\right)^2}{\sigma_1^2}+\frac{m\left(n\sigma_2^2\right)^2}{\sigma_2^2}\right] \\
= & \frac{(\overline{x}-\overline{y})^2}{\left(m\sigma_1^2+n\sigma_2^2\right)^2}\left[nm^2\sigma_1^2+mn^2\sigma_2^2\right] \\
= & \frac{(\overline{x}-\overline{y})^2}{\left(m\sigma_1^2+n\sigma_2^2\right)^2}\left[nm\left(m\sigma_1^2+n\sigma_2^2\right)\right] \\
= & \frac{(\overline{x}-\overline{y})^2}{m\sigma_1^2+n\sigma_2^2}nm. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Al sustituir la ecuación (2.11) en el exponente de la ecuación (2.7) se obtiene que el cociente de verosimilitud es:

$$\lambda(\mathbf{X},\mathbf{Y})=e^{-\frac{1}{2}\frac{nm}{m\sigma_1^2+n\sigma_2^2}(\overline{x}-\overline{y})^2}\leq k$$

Para determinar la región crítica se necesita conocer la distribución de $\lambda(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ o la de un estadístico derivado de $\lambda(\mathbf{X},\mathbf{Y})$. Para ello es necesario despejar el estadístico que tenga la función de distribución como sigue:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\frac{nm}{m\sigma_1^2+n\sigma_2^2}(\overline{x}-\overline{y})^2 & \leq \ln k_2 \\
(\overline{x}-\overline{y})^2 & \geq \ln k_2\left[\frac{2\left(m\sigma_1^2+n\sigma_2^2\right)}{nm}\right]
\end{aligned}$$

se define a

$$k_1=\ln k_2\left[\frac{2\left(m\sigma_1^2+n\sigma_2^2\right)}{nm}\right]$$

se llega a que la región crítica es igual a

$$(\overline{x}-\overline{y})^2\geq k_1$$

la distribución tiene que tomar valores positivos y negativos por lo que la región crítica es:

$$C^*=\{x,y/\left|\overline{x}-\overline{y}\right|\geq k\}.$$

Conocida la distribución en el muestreo del estadístico $\overline{x}-\overline{y}$ la forma de proceder es la siguiente: si $\overline{x}-\overline{y}\leq -k$ o $\overline{x}-\overline{y}\geq k$ se rechaza la hipótesis nula, $H_0:\mu_1=\mu_2$.

Para determinar a k, y que la región crítica quede totalmente determinada se fija el nivel de significancia α. Se parte de la definición de α para calcular la constante k que delimita la región crítica.

$$\begin{aligned}
\alpha &= P(\text{rechazar } H_0 \text{ dado que } H_0 \text{ es cierta})\\
&= P(0\leq \lambda(\mathbf{X},\mathbf{Y})\leq k_2)\\
&= P(\overline{x}-\overline{y})^2\geq k_1/H_0)\\
&= P(|\overline{x}-\overline{y}|\geq k/H_0)\\
&= P(\overline{x}-\overline{y}\leq -k/H_0)+P(\overline{x}-\overline{y}\geq k/H_0).
\end{aligned}$$

La región crítica es de dos colas, $|\overline{x}-\overline{y}|\geq k$, y esta en función de la diferencia de las medias muestrales por lo que se necesita obtener su distribución.

Si es cierta la hipótesis nula, $\mu_1=\mu_2=\mu$, las distribuciones de las medias muestrales son:

$$\overline{x}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\right);\quad \overline{y}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma_2}{\sqrt{m}}\right).$$

y la función de distribución de las dos medias, $\overline{x}-\overline{y}$, es

$$\overline{x}-\overline{y}\sim N\left(0,\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}\right).$$

Estandarizando se obtiene

$$P(\overline{x}-\overline{y}\leq -k/H_0)=P\left(\frac{\overline{x}-\overline{y}-0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\leq\frac{-k-0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\right)$$

donde

$$\frac{\overline{x}-\overline{y}-0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}=\xi\sim N_{(0,1)}$$

entonces

$$\begin{aligned}
P(\overline{x}-\overline{y}\leq -k/H_0) &= P\left(\xi\leq -\frac{k}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}\right)\\
&= \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

y, análogamente,

$$\begin{aligned} P(\overline{x} - \overline{y} \geq k/H_0) &= P\left(\xi \geq \frac{k}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}\right) \\ &= \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Si se llama a $Z^{1-\alpha/2}$ al valor tabular de la distribución ξ (es el cuantil con probabilidad acumulada de $1 - \frac{\alpha}{2}$) que deja a su derecha una probabilidad igual a $\alpha/2$, el valor de la constante k delimitador de la región crítica es

$$\begin{aligned} -Z^{1-\alpha/2} &= -\frac{k}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}} \\ k &= Z^{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}, \end{aligned}$$

que al sustituir en la región crítica se obtiene

$$|\overline{x} - \overline{y}| \geq Z^{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}.$$

Estadístico de Prueba.

$$T = \frac{|\overline{x} - \overline{y}|}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}.$$

Regla de Decisión.

Rechazar H_0, si $|T| > Z^{1-\alpha/2}$, donde Z es el cuantil con probabilidad acumulada[6] de una $N_{(0,1)}$.

2.2.2. Varianza poblacional común desconocida

Sean dos poblaciones $N(\mu_1, \sigma)$ y $N(\mu_2, \sigma)$, cuya varianza común es desconocida[7]. La hipótesis a contrastar es la siguiente:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad vs. \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

Para llevar a cabo la prueba se toman dos muestras aleatorias, independientes entre sí, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ de tamaño n y m, $n + m = N$.

[6]Consultar tabla 1 del Anexo.

[7]Ruíz-Maya Pérez Luis, Estadística II: Inferencia, Editorial AC., Madrid, 1995. Pag. 530–534.

La función de verosimilitud conjunta es igual a

$$L\left(\mathbf{X},\mathbf{Y};\mu_1,\mu_2,\sigma^2\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2+\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-\mu_2)^2\right]},$$

y su logaritmo

$$\begin{aligned}\ln L(\mathbf{X},\mathbf{Y};\mu_1,\mu_2,\sigma^2) &= -\frac{N}{2}\ln(2\pi)-\frac{N}{2}\ln\left(\sigma^2\right)\\ &\quad -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\mu_2)^2\right].\end{aligned}$$

Se tienen que calcular los estimadores máximos verosímiles de μ_1,μ_2 y σ^2 en el espacio paramétrico total
$\{-\infty<\mu_1<\infty;-\infty<\mu_2<\infty;\sigma^2>0\}$. Para esto se necesita obtener las derivadas con respecto a cada uno de los parámetros.

$$\frac{\partial\ln L(\mathbf{X},\mathbf{Y};\mu_1,\mu_2,\sigma^2)}{\partial\mu_1}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)}{\sigma^2}=0 \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial\ln L(\mathbf{X},\mathbf{Y};\mu_1,\mu_2,\sigma^2)}{\partial\mu_2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-\mu_2)}{\sigma^2}=0 \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial\ln L(\mathbf{X},\mathbf{Y};\mu_1,\mu_2,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=-\frac{N}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\mu_2)^2\right]=0 \tag{2.14}$$

De las ecuaciones (2.12) y (2.13) se obtienen los estimadores máximo verosímiles de μ_1 y μ_2

$$\widehat{\mu}_1=\overline{x}\quad y\quad \widehat{\mu}_2=\overline{y}$$

y de la ecuación (2.14) se obtiene el estimador S_1^2 de la varianza común desconocida σ^2,

$$S_1^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-\overline{y})^2}{N}.$$

ahora se obtiene, la función de verosimilitud para el espacio paramétrico definido por la hipótesis nula, $\mu_1=\mu_2=\mu$, $\{-\infty<\mu<\infty;\sigma^2>0\}$.

$$L\left(\mathbf{X},Y;\mu_1,\mu_2,\sigma^2\right)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left(\sigma^2\right)^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2+\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-\mu)^2\right]},$$

y su logaritmo natural

$$\begin{aligned}\ln L(\mathbf{X},\mathbf{Y};\mu_1,\mu_2,\sigma^2) &= -\frac{N}{2}\ln(2\pi)-\frac{N}{2}\ln\left(\sigma^2\right)\\ &\quad -\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\mu)^2\right].\end{aligned}$$

Se deriva con respecto a los dos parámetros μ y σ^2

$$\frac{\partial \ln L(\mathbf{X},\mathbf{Y};\mu,\sigma^2)}{\partial\mu}=\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\mu)\right]=0 \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial \ln L(\mathbf{X},\mathbf{Y};\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=-\frac{N}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\mu)^2\right]=0 \tag{2.16}$$

De la ecuación (2.15) se despeja el estimador de la media común μ

$$\widehat{\mu}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+\sum\limits_{i=1}^{m}y_i}{N}=\frac{n\overline{x}+m\overline{y}}{N} \tag{2.17}$$

y de la ecuación (2.16) el de σ^2, que se denomina S_o^2,

$$S_o^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{\mu})^2+\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-\overline{\mu})^2}{N}.$$

El cociente de la función de verosimilitud, particularizada para los valores que la hacen máxima en cada espacio parámetrico, es

$$\begin{aligned}\lambda(\mathbf{X},\mathbf{Y}) &= \frac{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left(S_0^2\right)^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{1}{2S_0^2}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{\mu})^2+\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-\overline{\mu})^2\right]}}{\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\left(S_1^2\right)^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{1}{2S_1^2}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-\overline{y})^2\right]}}=\\ &= \left(\frac{S_1^2}{S_0^2}\right)^{\frac{N}{2}}=\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-\overline{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{\mu})^2+\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-\overline{\mu})^2}\right]^{N}\leq k_4\end{aligned}$$

ahora obteniendo la raíz n-ésima se llega a la relación

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{\mu})^2+\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-\overline{\mu})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-\overline{y})^2}\geq k_3 \tag{2.18}$$

En cada suma del numerador del primer miembro de la ecuación (2.18) se suman y se restan las correspondientes medias muestrales, $\overline{x}$ e $\overline{y}$,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{\mu})^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}+\overline{x}-\overline{\mu})^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+n(\overline{x}-\overline{\mu})^2,$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{\mu})^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y}+\overline{y}-\overline{\mu})^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2+m(\overline{y}-\overline{\mu})^2,$$

al sumar miembro a miembro estas dos últimas expresiones

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{\mu})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\overline{\mu})^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2+n(\overline{x}-\overline{\mu})^2+m(\overline{y}-\overline{\mu})^2,$$

y al sustituir la ecuación (2.17) se obtiene

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{\mu})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\overline{\mu})^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2\\ &\quad +n\left(\overline{x}-\frac{n\overline{x}+m\overline{y}}{n+m}\right)^2+m\left(\overline{y}-\frac{n\overline{x}+m\overline{y}}{n+m}\right)^2,\end{aligned} \tag{2.19}$$

ahora se desarrolla

$$\begin{aligned}n\left(\overline{x}-\frac{n\overline{x}+m\overline{y}}{n+m}\right)^2+m\left(\overline{y}-\frac{n\overline{x}+m\overline{y}}{n+m}\right)^2 &= n\left(\frac{n\overline{x}+m\overline{x}-n\overline{x}-m\overline{y}}{n+m}\right)^2\\ &\quad +m\left(\frac{n\overline{y}+m\overline{y}-n\overline{x}-m\overline{y}}{n+m}\right)^2\\ &= n\left(\frac{m\overline{x}-m\overline{y}}{n+m}\right)^2+m\left(\frac{n\overline{y}-n\overline{x}}{n+m}\right)^2\\ &= \frac{nm^2}{(n+m)^2}(\overline{x}-\overline{y})^2+\frac{mn^2}{(n+m)^2}(\overline{x}-\overline{y})^2\\ &= \frac{(\overline{x}-\overline{y})^2}{(n+m)^2}\left(nm^2+mn^2\right)\\ &= \frac{(\overline{x}-\overline{y})^2}{(n+m)^2}\left[nm\,(m+n)\right]\\ &= \frac{nm}{n+m}(\overline{x}-\overline{y})^2.\end{aligned}$$

entonces la ecuación (2.19) se puede simplificar a

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{\mu})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\overline{\mu})^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2+\frac{nm}{n+m}(\overline{x}-\overline{y})^2$$

y al sustituir en la expresión (2.18) se tiene

$$\begin{aligned}
&\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2+\frac{nm}{n+m}(\overline{x}-\overline{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-\overline{y})^2}\\
=\ & 1+\frac{\frac{nm}{n+m}(\overline{x}-\overline{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-\overline{y})^2}\geq k_3\\
=\ & \frac{\frac{nm}{n+m}(\overline{x}-\overline{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+\sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-\overline{y})^2}\geq k_2
\end{aligned}$$

Si se multiplica en los dos miembros de esta desigualdad por $n+m-2$ con esto se llega a que la región crítica es

$$\frac{\frac{\frac{nm}{n+m}(\overline{x}-\overline{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\overline{y})^2}}{n+m-2}\geq k_1$$

la que tiene un función de densidad de $\chi^2_{(n+m-2)}$, pero es necesario tener valores negativos y positivos ya que se desea probar el valor promedio de la μ, así que se obtiene la raíz cuadrada en ambos lados.

Lo anterior indica que la región crítica denitiva es:

$$C^{*}=\left\{x,y/\left|\frac{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}(\overline{x}-\overline{y})}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+\sum_{i=1}^{m}(y_i-\overline{y})^2}{n+m-2}}}\right|\geq k\right\}.$$

El valor de k es el cuantil con probabilidad acumulada de una distribución[8] $t^{1-\frac{\alpha}{2}}_{(n+m-2)}$.

[8]Consultar la tabla 2 del Anexo.

Estadístico de Prueba.

$$T = \left| \frac{\sqrt{\frac{nm}{n+m}}\,(\overline{x} - \overline{y})}{\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 + \sum\limits_{i=1}^{m}(y_i-\overline{y})^2}{n+m-2}}} \right| .$$

Regla de Decisión. Rechazar H_0, si $|T| > t_{(n+m-2)}^{1-\alpha/2}$.

Capítulo 3

PRUEBAS NO PARAMÉTRICAS

En este capítulo se presentan algunas de las pruebas no paramétricas que se utilizan para comparar medias.

Algunas de las ventajas al utilizar estas pruebas no paramétricas son: se requieren menos supuestos, no se toma en cuenta la distribución de la población, pueden aplicarse en aquellas situaciones para las que las observaciones se definan, por lo menos, en una escala ordinal y nominal.

Una desventaja de las pruebas no paramétricas es que resultan ser menos potentes si se cumplen todos los supuestos de una prueba paramétrica.

A continuación se presentan las pruebas para dos poblaciones: Signos, Wilcoxon y Mann-Whitney, posteriormente las pruebas para k poblaciones: Friedman y Kruskal-Wallis.

3.1. Pruebas de dos poblaciones

3.1.1. Prueba de Signos

Datos.

Los datos consisten en observaciones de una m.a. bivariada $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots (x_n, y_n)$, donde n son el total de las parejas de observaciones en la muestra.

Se comparan los elementos de las parejas y se clasifican con signo "+" si $x_i < y_i$, con signo "-" si $x_i > y_i$ y con "0" si $x_i = y_i$. Por lo que se requieren variables ordinales.

Supuestos.

1. Las variables bivariadas (x_i, y_i) con $i = 1, 2, \dots, n$, sean mutuamente independientes.

2. La escala de medición debe ser al menos ordinal en cada pareja. Esto es, cada pareja (x_i, y_i) puede ser clasificada con un "+", "-" o "0".

3. Las parejas (x_i, y_i) son internamente consistentes, esto es, si la $P(+) > P(-)$ para una pareja, entonces $P(+) > P(-)$ para todas las parejas. La misma afirmación será valida en los casos: $P(+) < P(-)$ y $P(+) = P(-)$.

Hipótesis.

A. $H_0 : P(+) = P(-) \quad vs. \quad H_1 : P(+) \neq P(-)$

B. $H_0 : P(+) \leq P(-) \quad vs. \quad H_1 : P(+) > P(-)$

C. $H_0 : P(+) \geq P(-) \quad vs. \quad H_1 : P(+) < P(-)$

Estadístico de Prueba.

Sea T el estadístico de prueba que es igual a el número de signos "+", es decir, el número de parejas (x_i, y_i), en donde $x_i < y_i$.

$$T = \text{número total de "+"}.$$

Regla de Decisión.

A. Para $n \leq 20$,

Rechazar H_0 si $T < W^{\alpha/2}$,$T > W^{1-\alpha/2}$ o $T > n - W$ donde $W \sim B(n, p)$, se usa la tabla de la distribución Binomial[1]con:

$n =$ al número de pares "+" y "-".

$p = 1/2$.

Para $n > 20$ se usa la siguiente aproximación y la tabla de la distribución normal[2]

$$W = \frac{1}{2}(n + Z\sqrt{n}),$$

donde $Z^{\alpha/2}$ y $Z^{1-\alpha/2} \sim N_{(0,1)}$.

[1]Consultar tabla 5 del Anexo.
[2]Consultar la tabla 1 del Anexo.

B. Para $n \leq 20$,

Rechazar H_0 si $T > W^{1-\alpha}$ o $T > n - W^{1-\alpha}$, $W \sim B(n,p)$

Para $n > 20$ se usa la siguiente aproximación

$$W = \frac{1}{2}(n + Z^{1-\alpha}\sqrt{n}),$$

donde $Z^{1-\alpha} \sim N_{(0,1)}$.

C. Para $n \leq 20$,

Rechazar H_0 si $T < W^{\alpha}$, donde $W \sim B(n,p)$

Para $n > 20$ se usa la siguiente aproximación

$$W = \frac{1}{2}(n + Z^{\alpha}\sqrt{n}),$$

donde $Z^{\alpha} \sim N_{(0,1)}$.

3.1.2. Prueba de Wilcoxon

Datos.

Los datos consisten de n' observaciones $(x_1, y_1), \ldots, (x_{n'}, x_{n'})$ de una variable aleatoria bivariada (X, Y). Se tienen que tomar las n' diferencias $D_i = Y_i - X_i$ y $|D_i|$ $i = 1, ..., n'$. Son calculadas para cada uno de los n' pares $(X_i - Y_i)$, se omiten aquellos pares cuya diferencia es igual a cero, es decir, $X_i = Y_i$, al conjunto restante sin empates es la muestra con n pares.

Después se procede a asignar rangos[3] de la siguiente forma:

1. Uno para el par (X_i, Y_i) con $|D_i|$ más pequeña y n para el más grande;

2. si los pares tienen diferencias absolutas iguales entre ellos (empates), se asigna a cada uno el promedio de los rangos que les hubieran sido asignados si no hubiera habido empates.

Supuestos.

1. La distribución de D_i es simétrica.

2. Las D_i son mutuamente independientes.

[3]Número de orden que le corresponde a cada observación, si el conjunto de observaciones se ordenan de menor a mayor.

3. Todas las D_i tienen la misma media.

4. La escala de medida de D_i es al menos intervalar.

Hipótesis.

Sean $E(X_i)$ y $E(Y_i)$ las funciones de distribución correspondientes a las variables X y Y. Las hipótesis que se pueden plantear son las siguientes:

A. $H_0 : E(D) = 0 \quad vs. \quad H_1 : E(D) \neq 0$

$H_0 : E(Y_i) = E(X_i) \quad vs. \quad H_1 : E(Y_i) \neq E(X_i)$ siempre y cuando el par (X_i, Y_i) tenga la misma distribución $\forall\ D$.

B. $H_0 : E(D) \leq 0 \quad vs. \quad H_1 : E(D) > 0$

$H_0 : E(Y_i) \leq E(X_i) \quad vs. \quad H_1 : E(Y_i) > E(X_i)$ siempre y cuando el par (X_i, Y_i) tenga la misma distribución $\forall\ D$.

C. $H_0 : E(D) \geq 0 \quad vs. \quad H_1 : E(D) < 0$

$H_0 : E(Y_i) \geq E(X_i) \quad vs. \quad H_1 : E(Y_i) < E(X_i)$ siempre y cuando el par (X_i, Y_i) tenga la misma distribución $\forall\ D$.

Estadístico de Prueba.

Sea R_i, el rango asignado definido para cada par (X_i, Y_i) de la siguiente manera:

R_i se define como el rango positivo asignado a (X_i, Y_i) si D_i es positiva $(Y_i > X_i)$.

R_i se define como el rango negativo asignado a (X_i, Y_i) si D_i es negativa $(Y_i < X_i)$.

Hay tres estadísticos de acuerdo a:

1. Para el caso en que $n \leq 50$ y no hay empates, el estadístico de prueba es la suma de los rangos positivos

$$T^+ = \sum (R_i \text{ donde } D_i > 0).$$

2. Si se tienen muchos empates o $n > 50$, se toma una aproximación normal. El estadístico correspondiente (tomando positivos y negativos) es:

$$T = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} R_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} R_i^2}}.$$

3. Si no hay empates el estadístico se simplifica como

$$T = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}}.$$

Regla de Decisión.

- Si se utiliza el estadístico T^+, W usara los cuantiles de la tabla de Wilcoxon[4].
- Para el caso en que se T, W toma los cuantiles de la distribución normal[5].

A. Rechazar H_0 si $(T^+ o\, T) < W^{\alpha/2}$ o $(T^+ o\, T) > W^{1-\alpha/2}$

B. Rechazar H_0 si$(T^+ o\, T) > W^{1-\alpha}$

C. Rechazar H_0 si$(T^+ o\, T) < W^{\alpha}$

Distribución del Estadístico de Prueba.

Para probar la distribución verdadera del estadístico T^+ se considera una prueba de dos colas y se analizará un ejemplo con fichas.

Se toman n fichas numeradas del 1 al n, correspondientes a los rangos si no hay empates. Se supone que cada ficha tiene en una cara el número positivo del rango y en su anverso el mismo número pero negativo. Cada ficha es lanzada al aire y se tiene igual probabilidad de obtener cualquier lado de la ficha, correspondiente al rango de (X_i, Y_i).

El estadístico considerado es

$$T^+ = \sum \text{Números positivos.}$$

Los lanzamientos de las fichas son independientes uno del otro y el total de casos es $\#\,\Omega = 2^n$. Por lo que la probabilidad de cada número será $\frac{1}{2^n}$ es

$$P\left(T^+\right) = \frac{\text{No. de casos favorables}}{\#\,\Omega}.$$

[4]Consultar la tabla 6 del Anexo.

[5]Consultar la tabla 1 del Anexo.

Por ejemplo, $n = 7$, $T^+ = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, etc

$T^+ = 0$,	ningún número positivo salió	$P(T^+) = \frac{1}{2^7} = 0.0078$
$T^+ = 1$,	sólo salió el 1	$P(T^+) = \frac{1}{2^7} = 0.0078$
$T^+ = 2$,	salió el 2	$P(T^+) = \frac{1}{2^7} = 0.0078$
$T^+ = 3$,	salió 3;1,2	$P(T^+) = \frac{2}{2^7} = 0.0156$
$T^+ = 4$,	salió 4;1,3	$P(T^+) = \frac{2}{2^7} = 0.0156$
etc.		

Está sería la exacta función de distribución acumulada de T^+.

$$F(T^+) = \begin{cases} 0 & si \quad t < 0 \\ 0.0078 & si \quad t < 1 \\ 0.0156 & si \quad t < 2 \\ 0.0234 & si \quad t < 3 \\ 0.0390 & si \quad t < 4 \\ 0.0546 & si \quad t < 5 \\ 0.0858 & si \quad t < 6 \\ & \quad etc. \end{cases}$$

ahora para encontrar la aproximación normal se hace lo siguiente:

$$S = \sum R_i; \text{donde } R_i \text{ se define como el rango}$$

Para poder aplicar el teorema de límite central se necesita obtener la media y la varianza de S cuando H_0 es verdadera.

Notese que bajo H_0 la función de probabilidad es:

$$f(R_i) = \begin{cases} \frac{1}{2} & si \quad R_i = a_i \\ \frac{1}{2} & si \quad R_i = -a_i \\ 0 & \quad e.o.c. \end{cases}.$$

Entonces la esperanza R_i es:

$$\begin{aligned} E(R_i) &= \frac{1}{2}a_i - \frac{1}{2}a_i \\ &= 0; \end{aligned}$$

y la varianza es:

$$\begin{aligned} Var(R_i) &= \frac{1}{2}a_i^2 + \frac{1}{2}(-a_i)^2 \\ &= a_i^2. \end{aligned}$$

Una vez obtenida la $E(R_i)$ y $Var(R_i)$ se puede obtener la media y la varianza de S

$$\begin{aligned} E(S) &= E\left(\sum_{i=1}^{n} R_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E(R_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Var(S) &= Var\left(\sum_{i=1}^{n} R_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} Var(R_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2. \end{aligned}$$

Como $a_i^2 = R_i^2$, ya que mide signos positivos esto implica que

$$Var(S) = \sum_{i=1}^{n} R_i^2.$$

Ahora se aplica el teorema de límite central para obtener el estadístico

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sum_{i}^{n} R_i - E\left(\sum R_i\right)}{\sqrt{\sum Var(R_i)}} \\ &= \frac{\sum_{i}^{n} R - 0}{\sqrt{\sum_{i} R_i^2}} \\ &= \frac{\sum_{i}^{n} R_i}{\sqrt{\sum_{i} R_i^2}} \sim N(0,1). \end{aligned}$$

3.1.3. Prueba de Mann-Whitney

Datos.

Los datos consisten de dos muestras aleatorias. Sea $x_1, \ldots, x_n$ muestras aleatorias de tamaño n de la población 1 y sea $y_1, \ldots, y_m$ la muestra aleatoria de tamaño m de la población 2. Se asigna los rangos1 a $n+m$ a las observaciones de las más pequeña a la más grande. Sea $R(x_i)$ y $R(y_i)$ los rangos asignados a x_i y y_i para toda i y j. Por conveniencia sea $N = n + m$.

Si varios valores muestrales son exactamente iguales entre ellos (empates), se asigna a cada uno el promedio de los rangos que les hubieran sido asignados si no hubiera habido empates.

Supuestos.

1. Las muestras son aleatorias con respecto a cada población.

2. Además de la independencia dentro de cada muestra, hay independencia mutua entre las dos muestras.

3. La escala de medida es al menos ordinal.

Hipótesis.

Sean $E(x)$ y $E(y)$ las funciones de distribución correspondientes a las variables X y Y. Las hipótesis que se pueden plantear son las siguientes:

A. $H_0 : E(x) = E(y) \quad vs. \quad H_1 : E(x) \neq E(y)$

B. $H_0 : E(x) \leq E(y) \quad vs. \quad H_1 : E(x) > E(y)$

C. $H_0 : E(x) \geq E(y) \quad vs. \quad H_1 : E(x) < E(y)$

Estadístico de Prueba.

Se tienen dos que son los siguientes:

1. Si no hay empates o muy pocos empates, la suma de los rangos asignada a la muestra de la población 1 puede usarse como un estadístico de prueba

$$T = \sum_{i=1}^{n} R(x_i).$$

2. Si hay muchos empates, entonces se resta la media de T y se le divide con su desviación estándar de T, obteniendo el siguiente estadístico:

$$T_1 = \frac{T - \frac{n(N+1)}{2}}{\sqrt{\frac{nm}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N} Ri^2 - \frac{nm(N+1)^2}{4(N-1)}}} \sim N(0,1),$$

donde $\sum_{i=1}^{N} Ri^2$ se refiere a la suma de todos los rangos al cuadrado de ambas muestras.

Regla de Decisión.

- Si se usa el estadístico T,. W toma los cuantiles de la tabla de Mann-Whitney[6].
- En el caso de utilizar el estadístico T_1, W utiliza la tabla de la distribución normal[7].
- Para $n \leq 20$ y $m \leq 20$. En caso de que el cuantil superior no este dado puede ser calculado de la siguiente manera:

  $$W = n\,(N+1) - W^{1-p},$$

  donde W^{1-p} se obtiene con la tabla de Mann-Whitney.
- Para el caso en que no hay empates y $n, m > 20$, se puede encontrar una aproximación para los cuantiles con la siguiente expresión normal,

  $$W \cong \frac{n\,(N+1)}{2} + Z^p\sqrt{\frac{nm(N+1)}{12}},$$

  donde el cuantil Z^p se obtiene con la tabla de la Normal.

A. Rechazar H_0 si $T < W^{\frac{\alpha}{2}}$ o $T > W^{\frac{1-\alpha}{2}}$

B. Rechazar H_0 si $T > W^{1-\alpha}$

C. Rechazar H_0 si $T < W^{\alpha}$

[6]Consultar la tabla 7 del Anexo.

[7]Consultar la tabla 1 del Anexo.

Distribución del Estadístico de Prueba.

Para encontrar la distribución de T se asume que x_i y y_i son idénticamente distribuidas. Si x_i y y_i son independientes e idénticamente distribuidas, cada arreglo de las X y Y en la muestra ordenada son igualmente probables. Éste es el principio básico que hay detrás de muchas pruebas de rango. La demostración formal de este enunciado requiere cálculos más avanzados que están fuera del alcance de esta tesis.

Si las x_i y y_i son independientes e idénticamente distribuidas los rangos asignados a las x_i en la muestra combinada deberían ser como una selección aleatoria de n enteros de 1 a $n+m$. En otras palabras, no hay razón por la que un rango en particular deba tener más posibilidad de ser asignado a x_i que a cualquier otro rango. Dado que cada número de 1 a $n+m$ tiene las mismas posibilidades de ser asignado a x_i como su rango, además de que n diferentes números son seleccionados como rangos para las X. La distribución de probabilidad de T de la suma de los rangos puede ser obtenida considerando la distribución de probabilidad de la suma de n enteros seleccionados al azar, sin reemplazo, de entre los enteros de 1 a $n+m$.

El número de formas de seleccionar n enteros de un total de $n+m$ es $\binom{n+m}{n}$, y cada forma tiene igual probabilidad de acuerdo con la proposición básica enunciada anteriormente. De aquí, la probabilidad de que $T=k$ puede ser encontrada contando el número de diferentes conjuntos de n enteros de 1 a $n+m$ que suman el valor de k y dividiendo este número por $\binom{n+m}{n}$.

Por ejemplo, si el tamaño de la muestra son $n=3$ y $m=4$, el número de formas que se puede seleccionar tres de siete rangos es

$$\binom{n+m}{n} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7(6)(5)}{3(2)} = 35$$

los casos que se pueden tener serían

x	y
1	
2	
3	
	4
	5
	6
	7

x	y
1	
	2
3	
4	
	5
	6
	7

etc.

El valor más pequeño que T puede tomar es 6, lo cual ocurre si los tres rangos 1, 2, 3 son seleccionados. El siguiente valor que T puede tomar es 7, lo cual ocurre de una sola manera: 1, 2, 4. El valor $T = 18$ se obtiene sólo si se toman a los tres rangos más grandes.

$$\begin{aligned}
P(T &= 6) = P(1+2+3) = \frac{1}{35} \\
P(T &= 7) = P(1+2+4) = \frac{1}{35} \\
P(T &= 8) = P(1+2+5, 1+3+4) = \frac{2}{35} \\
P(T &= 9) = P(1+2+6, 1+3+5) = \frac{2}{35}, \; etc.
\end{aligned}$$

Entonces la verdadera función de distribución acumulada de T sería la siguiente

$$\begin{aligned}
P(T &\leq 6) = \frac{1}{35} \\
P(T &\leq 7) = \frac{2}{35} \\
P(T &\leq 8) = \frac{4}{35} \\
P(T &\leq 9) = \frac{6}{35}, \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Dado que T es la suma de los rangos de las nX, para n y m grandes se puede aplicar el teorema de límite central para obtener una distribución aproximada para el estadístico T, obteniendo como resultado el siguiente

$$T_1 = \frac{T - \frac{n(N+1)}{2}}{\sqrt{\frac{nm}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N} Ri^2 - \frac{nm(N+1)^2}{4(N-1)}}},$$

que es equivalente a

$$T_2 = \frac{T - \frac{n(N+1)}{2}}{\sqrt{\frac{n(N+1)(N-n)}{12}}},$$

ambos estadísticos se aproximan a una distribución $N(0,1)$.

Para encontrar la aproximación se necesita obtener la $E(T)$ y la $Var(T)$.

Primero se define a $R(x_i)$ como el rango que se le asina al valor x_i de la muestra, que tiene una distribución Uniforme discreta $U(N)$.

Se obtiene su esperanza que es

$$\begin{aligned} E\left(R\left(x_i\right)\right) &= \sum_{i=1}^{N} \frac{i}{N} \\ &= \frac{N\left(N+1\right)}{2N} \\ &= \frac{N+1}{2}, \end{aligned}$$

y se obtiene su varianza que es

$$\begin{aligned} Var\left(R\left(x_i\right)\right) &= E\left(\left(R\left(x_i\right)\right)^2\right) - \left(E\left(R\left(x_i\right)\right)\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{i^2}{N} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{N\left(N+1\right)\left(2N+1\right)}{6N} - \frac{\left(N+1\right)^2}{4} \\ &= \frac{2\left(N+1\right)\left(2N+1\right) - 3(N+1)^2}{12} \\ &= \frac{\left(N+1\right)\left(4N+2-3N-3\right)}{12} \\ &= \frac{\left(N+1\right)\left(N-1\right)}{12} \\ &= \frac{N^2-1}{12}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Se define a T en terminos de $R\left(x_i\right)$ de la siguiente manera

$$T = \sum_{i=1}^{n} R\left(x_i\right).$$

Esto implica que la esperanza de T, usando la $E\left(R\left(x_i\right)\right)$ es

$$\begin{aligned} E(T) &= E\left(\sum_{i=1}^{n} R\left(x_i\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} E\left(R\left(x_i\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{N+1}{2} \\ &= \frac{n\left(N+1\right)}{2}. \end{aligned}$$

Para calcular la $Var(T)$ se requiere del resultado obtenido en la ecuación (3.1)

$$
\begin{aligned}
Var(T) &= Var\left(\sum_{i=1}^{n} R(x_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Var\left(R(x_i)\right) + \sum_{i}^{n}\sum_{\substack{j \\ i\neq j}}^{n} Cov\left(R(x_i), R(x_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{N^2-1}{12}\right) + \sum_{i}^{n}\sum_{\substack{j \\ i\neq j}}^{n} Cov\left(R(x_i), R(x_j)\right).
\end{aligned}
$$

Donde se desconoce el valor de la $Cov\left(R(x_i), R(x_j)\right)$, los pasos para calcularla son:

Se considera que se quieren ahora dar 2 rangos $R(x_i), R(x_j)$, donde la función de probabilidad conjunta es

$$
\begin{aligned}
f\left(R(x_i), R(x_j)\right) &= P\left(R(x_i) = i, R(x_j) = j\right) \\
&= P\left(R(x_i) = i \;/\; R(x_j) = j\right) P\left(R(x_j) = j\right) \\
&= \frac{1}{N-1}\left(\frac{1}{N}\right) \\
&= \frac{1}{(N-1)N} \text{ para } i, j = 1, 2, \ldots, N;\; i \neq j,
\end{aligned}
$$

ahora por definición de covarianza[8] y aplicando el resultado anterior se tiene que

$$
\begin{aligned}
Cov\left(R(x_i), R(x_j)\right) &= E\left\{\left[R(x_i) - E(R(x_i))\right]\left[R(x_j) - E\left(R(x_j)\right)\right]\right\} \\
&= E\left[\left(R(x_i) - \frac{N+1}{2}\right)\left(R(x_j) - \frac{N+1}{2}\right)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{s=1 \\ k\neq s}}^{N}\left(k - \frac{N+1}{2}\right)\left(s - \frac{N+1}{2}\right)\frac{1}{N(N-1)},
\end{aligned}
$$

donde la suma toma todos los valores sobre todo k y s de 1 a N, sólo que k no es igual a s porque x_i y x_j no pueden igualar el mismo número al mismo tiempo. Si al mismo tiempo, se agrega y se substraen esas condiciones para $k = s$ la covarianza llega

[8]Conover, W. J. Practical Nonparametric Statistics, Wiley & Sons, 1980. Pag. 41-49.

a ser

$$\begin{aligned} Cov\left(R\left(x_i\right), R\left(x_j\right)\right) &= \frac{1}{N\left(N-1\right)}\sum_{k=1}^{N}\left(k-\frac{N+1}{2}\right)\sum_{s=1}^{N}\left(s-\frac{N+1}{2}\right) \\ &\quad -\frac{1}{N\left(N-1\right)}\sum_{k=1}^{N}\left(k-\frac{N+1}{2}\right)^2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

para simplificar la ecuación (3.2) se nota que

$$\sum_{i=1}^{n}\left(i-\frac{N+1}{2}\right)=0 \tag{3.3}$$

y por la definición de varianza dada en la ecuación (3.1) se tiene

$$\begin{aligned} Var\left(R\left(x_i\right)\right) &= \sum_{k=1}^{N}\left(k-\frac{N+1}{2}\right)^2\frac{1}{N} \\ &= \frac{\left(N+1\right)\left(N-1\right)}{12}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Si se sustituyen los resultados de las ecuaciones (3.3) y (3.4) se obtiene como resultado

$$\begin{aligned} Cov\left(R\left(x_i\right), R\left(x_j\right)\right) &= \frac{1}{N\left(N-1\right)}\left(\frac{N\left(N+1\right)}{2}-\frac{N\left(N+1\right)}{2}\right) \\ &\quad \left(\frac{N\left(N+1\right)}{2}-\frac{N\left(N+1\right)}{2}\right)-\frac{1}{N(N-1)}\sum_{k=1}^{N}\left(k-\frac{N+1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{N}\left(k-\frac{N+1}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{N-1}Var(R\left(x_i\right)) \\ &= -\frac{\left(N+1\right)\left(N-1\right)}{\left(N-1\right)\left(12\right)} \\ &= -\frac{\left(N+1\right)}{12}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ahora el valor obtenido en la ecuación (3.5) se sustituye para encontrar la $Var(T)$.

$$\begin{aligned} Var(T) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{N^2-1}{12}\right)+\sum_{\substack{i \\ i\neq j}}^{n}\sum_{j}^{n} Cov\left(R\left(x_i\right), R\left(x_j\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{N^2-1}{12}\right)+\sum_{\substack{i \\ i\neq j}}^{n}\sum_{j}^{n}\left(-\frac{N+1}{12}\right) \\ &= \frac{n\left(N^2-1\right)}{12}-\left(\frac{N+1}{12}\right)n\left(n-1\right) \\ &= \frac{n\left(N+1\right)\left(N-1-n+1\right)}{12}, \end{aligned}$$

sustituyendo $N = n + m$

$$\begin{aligned} Var(T) &= \frac{n\left(N+1\right)\left(n+m-1-n+1\right)}{12} \\ &= \frac{n\left(N+1\right)m}{12} \\ &= \frac{nm\left(n+m+1\right)}{12} \\ &= \frac{n\left(N+1\right)\left(N-n\right)}{12}. \end{aligned}$$

Una vez que se obtuvo la $E(T)$ y la $Var(T)$ se aplica el teorema de límite central y se obtiene el estadístico siguiente

$$T_2 = \frac{T-\frac{n(N+1)}{2}}{\sqrt{\frac{n(N+1)(N-n)}{12}}} \sim N(0,1).$$

Que es equivalente al estadístico T_1

$$T_1 = \frac{T-\frac{n(N+1)}{2}}{\sqrt{\frac{nm}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}Ri^2-\frac{nm(N+1)^2}{4(N-1)}}}.$$

Como se puede observar la única diferencia que hay entre ellos es el denominador por lo que se mostrará que ambos denominadores son iguales.

$$\begin{aligned}
\frac{nm}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}Ri^2 - \frac{nm(N+1)^2}{4(N-1)} &= \frac{nm}{N-1}\left(\frac{\sum Ri^2}{N} - \frac{(N+1)^2}{4}\right) \\
&= \frac{nm}{N-1}\left(\frac{N(N+1)(2N+1)}{6N} - \frac{(N+1)^2}{4}\right) \\
&= \frac{nm(N+1)}{2(N-1)}\left(\frac{(2N+1)}{3} - \frac{(N+1)}{2}\right) \\
&= \frac{nm(N+1)}{2(N-1)}\left(\frac{2(2N+1)-3(N+1)}{6}\right) \\
&= \frac{n(N-n)(N+1)}{12(N-1)}(4N+2-3N-3) \\
&= \frac{n(N-n)(N+1)}{12}.
\end{aligned}$$

Con lo anterior queda demostrado que los dos estadísticos son iguales, con distribución $N_{(0,1)}$. La ventaja del estadístico T_2 es que hace más fácil su cálculo.

3.2. Pruebas para k poblaciones

3.2.1. Prueba de Kruskall-Wallis

Datos.

Los datos consisten de k muestras aleatorias de diferentes tamaños. Se denotará como la i-ésima muestra de tamaño n_i por $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ini}$. Los datos se pueden arreglar en columnas.

Muestra 1	**Muestra 2**	$\cdots$	**Muestra K**
$x_{1,1}$	$x_{2,1}$		$x_{k,1}$
$x_{1,2}$	$x_{2,2}$		$x_{k,2}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_{1,n_1}	x_{2,n_2}	$\cdots$	x_{k,n_k}

Sea N el número total de observaciones

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i. \tag{3.6}$$

Se asigna el rango 1 al dato más pequeño de la totalidad de N observaciones, el rango 2 al siguiente más pequeño, y así para todas las N observaciones de tal manera que la mayor de todas recibirá el rango N. Sea $R(x_{ij})$ la variable que representa el rango asignado por x_{ij}. Sea R_i la suma de los rangos asignados a la i-ésima muestra calculándose R_i para cada muestra.

$$R_i = \sum_{j=1}^{n_i} R(x_{ij}) \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{3.7}$$

Si varios valores muestrales son exactamente iguales entre ellos (empates), se asigna a cada uno el promedio de los rangos que les hubieran sido asignados si no hubiera habido empates.

Supuestos.

1. Todas las muestras son aleatorias con respecto a sus poblaciones.
2. Existe independencia dentro de cada una de las muestras y mutua entre las diferentes muestras.
3. La escala de medida es al menos ordinal.
4. Las k poblaciones son idénticas en sus funciones o algunas de las poblaciones tienden a valores más grandes que otras.

Hipótesis.

H_0 : Todas las k poblaciones tienen idéntica media *vs.* H_1 : Al menos una de las medias es distinta de las k poblaciones

Estadístico de prueba

El estadístico de prueba se define como

$$T = \frac{1}{S^2}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - \frac{N(N+1)^2}{4}\right), \tag{3.8}$$

donde N y R_i son definidas en las ecuaciones (3.6) y (3.7) respectivamente. Además

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N} R(x_{ij})^2 - \frac{N(N+1)^2}{4}\right). \tag{3.9}$$

Si no hay empates S^2 se simplifica como $N(N+1)/12$. y el estadístico se reduce a

$$T = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1). \tag{3.10}$$

Si el número de empates es moderado es recomendable usar el estadístico de la ecuación (3.10).

Regla de Decisión.

- Si $k = 3$ y todas las muestras son de tamaño $n_i \leq 5$ y si no hay empates entonces se utiliza el cuantil exacto de $W^{1-\alpha}$ que se obtiene con la tabla de Kruskal-Wallis[9].

Rechazar H_0 si $T > W^{1-\alpha}$

- Cuando hay empates o cuando la tablas no están disponibles, los cuantiles aproximados pueden obtenerse usando la distribución[10] χ^2.

Rechazar H_0 si $T > \chi^{2(1-\alpha)}_{(k-1)}$

Múltiples Comparaciones.

Esta se usa sólo si la hipótesis nula es rechazada para determinar cuales poblaciones son las diferentes. Se puede decir que las poblaciones i, j son diferentes si la siguiente desigualdad se satisface

$$\left| \frac{R_i}{n_i} - \frac{Rj}{nj} \right| > t^{1-\alpha/2} \left(S^2 \frac{N-1-T}{N-k} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{nj} \right)^{1/2},$$

donde

- R_i y Rj son la suma de los rangos de dos muestras
- $t^{(1-\alpha/2)}_{(N-k)}$es el cuantil de una distribución t
- S^2 es como se mencionó en la ecuación (3.9) con empates
- T puede ser cualquiera de las ecuaciones (3.8) ó (3.10).

Distribución del Estadístico de Prueba.

Para encontrar la distribución de T se tiene el supuesto de que todas las observaciones se obtienen de las mismas o idénticas poblaciones. El método es aleatorio, el cual también se usó para encontrar la distribución de la prueba de Mann-Whitney. Es decir, bajo el supuesto anterior, cada arreglo de rangos 1 a N en los grupos de tamaño $n_1, n_2, \ldots, n_k$, respectivamente, es igualmente probable, y ocurre con probabilidad $\frac{n_1!}{N!}, \frac{n_2!}{N!}, \ldots, \frac{n_k!}{N!}$, que es el recíproco del número de maneras en que los rangos de N pueden ser divididos en grupos de tamaño $n_1, n_2, \ldots, n_k$. El valor de T es calculado

[9]Consultar la tabla 8 del Anexo.

[10]Consultar la tabla 3 del Anexo.

para cada arreglo. Las probabilidades asociadas con valores iguales de T se suman y dan la distribución de probabilidad de T.

Por ejemplo, si $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, y $n_3 = 1$ en el caso de las tres muestras, hay 12 arreglos igualmente probables de los cuatro rangos; de manera que cada arreglo tiene probabilidad de 1/12. Los 12 arreglos, con valores asociados a T son los siguientes

	Muestras			
Arreglos	1	2	3	T
1	1,2	3	4	2.7
2	1,2	4	3	2.7
3	1,3	2	4	1.8
4	1,3	4	2	1.8
5	1,4	2	3	0.3
6	1,4	3	2	0.3
7	2,3	1	4	2.7
8	2,3	4	1	2.7
9	2,4	1	3	1.8
10	2,4	3	1	1.8
11	3,4	1	2	2.7
12	3,4	2	1	2.7

Por lo tanto, la función de probabilidad $f(x)$ y la función de distribución $F(x)$ para $n_1 = 2$, $n_2 = 1$ y $n_3 = 1$ están dadas como sigue:

x	$f(x) = P(T = x)$	$F(x) = P(T \leq x)$
0.3	2/12=1/6	1/6
1.8	4/12=1/3	1/2
2.7	6/12=1/2	1.0

La aproximación para la distribución de T para muestras grandes está basada en el hecho de que R_i en la ecuación (3.7), es la suma de n_i variables aleatorias, y que para n_i grandes el teorema del límite central puede ser usado de la siguiente manera

$$\frac{R_i - E(R_i)}{\sqrt{Var(R_i)}},$$

que se distribuye aproximadamente como una normal estándar cuando H_0 es verdadera.

Para poder encontrar la aproximación, se tiene que calcular la media y la varianza de R_i, para esto, el primer paso es calcular la $E(x_i)$.

$$\begin{aligned} E(x_i) &= \sum_{k=1}^{N} k \frac{1}{N} \\ &= \frac{N(N+1)}{2N} \\ &= \frac{N+1}{2}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Una vez obtenida la ecuación (3.11), se calcula la $E(R_i)$

$$\begin{aligned} E(R_i) &= E(x_{11} + \dots + x_{ni}) \\ &= \sum_{i=1}^{n_i} E(x_i) \\ &= \frac{n_i(N+1)}{2}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

ahora se calcula la $Var(x_i)$

$$\begin{aligned} Var(x_i) &= E(x_i^2) - (E(x_i))^2 \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{k^2}{N} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6N} - \frac{(N+1)^2}{4} \\ &= \frac{2(N+1)(2N+1) - 3(N+1)^2}{12} \\ &= \frac{(N+1)(4N+2-3N-3)}{12} \\ &= \frac{(N+1)(N-1)}{12}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Para obtener la $Var(R_i)$ se utiliza la covarianza de dos variables aleatorias X_i y X_j, donde $i \neq j$. Como primer paso se obtiene su función de probabilidad conjunta

$$\begin{aligned} f(R(x_i), R(x_j)) &= P(X_i = x_i, X_j = x_j) \\ &= P(X_i = x_i \;/\; X_j = x_j) P(X_j = x_j) \\ &= \frac{1}{N-1}\left(\frac{1}{N}\right) \\ &= \frac{1}{(N-1)N} \quad \text{para } x_i, x_j = 1, 2, \dots, N; x_i \neq x_j. \end{aligned}$$

Por definición la covarianza[11] de x_i y x_j, es

$$\begin{aligned} Cov\left(x_i, x_j\right) &= E\left\{\left[x_i - E\left(x_i\right)\right]\left[x_j - E\left(Rx_j\right)\right]\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\left(k - \frac{N+1}{2}\right)\underset{k\neq s}{\left(s - \frac{N+1}{2}\right)}\frac{1}{N\left(N-1\right)}, \end{aligned}$$

donde la suma toma todos los valores sobre todo k y s de 1 a N, sólo que k no es igual a s porque x_i y x_j no pueden igualar el mismo número al mismo tiempo. Si al mismo tiempo, se agrega y se substrae esas condiciones para $k = s$ la covarianza llega a ser

$$\begin{aligned} Cov\left(x_i, x_j\right) &= \frac{1}{N\left(N-1\right)}\sum_{k=1}^{N}\left(k - \frac{N+1}{2}\right)\sum_{s=1}^{N}\left(s - \frac{N+1}{2}\right) \\ &\quad -\frac{1}{N\left(N-1\right)}\sum_{k=1}^{N}\left(k - \frac{N+1}{2}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Se simplifica la ecuación (3.14) utilizando que

$$\sum_{i=1}^{N}\left(i - \frac{N+1}{2}\right) = 0 \tag{3.15}$$

y por la definición de varianza dada en la ecuación (3.13) se tiene

$$\begin{aligned} Var(x_i) &= \sum_{k=1}^{N}\left(k - \frac{N+1}{2}\right)^2 \frac{1}{N} \\ &= \frac{\left(N+1\right)\left(N-1\right)}{12}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Al sustituir las ecuaciones (3.15) y (3.16) en la ecuación (3.14), se obtiene como resultado que

$$Cov\left(x_i, x_j\right) = -\frac{\left(N+1\right)}{12}. \tag{3.17}$$

El siguiente paso es calcular la $Var(R_i)$, si se sustituyen los resultados de las ecua-

[11]Conover, W. J. Practical Nonparametric Statistics, Wiley & Sons, 1980. Pag. 41-49.

ciones (3.13) y (3.17) se obtiene

$$\begin{aligned}
Var(R_i) &= Var\left(\sum_{i=1}^{n_i}(x_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n_i} Var\,(x_i) + \sum_{i}^{n_i}\sum_{\substack{j \\ i\neq j}}^{n_j} Cov\,(x_i, x_j) \\
&= \frac{n_i\,(N+1)\,(N-1)}{12} - \frac{n_i\,(n_i-1)\,(N+1)}{12} \\
&= \frac{n_i\,(N+1)}{12}\,(N-1-n_i+1) \\
&= \frac{n_i\,(N+1)\,(N-n_i)}{12}. \qquad (3.18)
\end{aligned}$$

Al aplicar el teorema de límite central se obtiene la siguiente aproximación normal

$$\frac{R_i - \frac{n_i(N+1)}{2}}{\sqrt{\frac{n_i(N+1)(N-n_i)}{12}}} \sim N(0,1), \qquad (3.19)$$

si se eleva al cuadrado la ecuación (3.19), se obtiene una aproximación de la distribución χ^2con un grado de libertad.

$$\left(\frac{R_i - \frac{n_i(N+1)}{2}}{\sqrt{\frac{n_i(N+1)(N-n_i)}{12}}}\right)^2 = \frac{\left(R_i - \frac{n_i(N+1)}{2}\right)^2}{\frac{n_i(N+1)(N-n_i)}{12}} \sim \chi^2_{(1)}. \qquad (3.20)$$

Si las Ri son independientes se suman todas las posibles muestras y se obtiene el siguiente estadístico

$$T' = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(R_i - \frac{n_i(N+1)}{2}\right)^2}{\frac{n_i(N+1)(N-n_i)}{12}} \sim \chi^2_{(k)}, \qquad (3.21)$$

que tiene una aproximación $\chi^2_{(k)}$ con k grados de libertad. Sin embargo, la suma de los R_i son $N(N+1)/2$, entonces hay una dependencia entre los R_i. Kruskal (1952)[12] demostró que si se multiplica T'por $N - n_i/N$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, se llega al resultado

[12]Kruskal, W. H. A nonparametric test for the several sample problem. The Annals of the Mathematical Statistics, 1952, Pag. 71, 420-422.

siguiente

$$
\begin{aligned}
T &= T'\left(\frac{N-n_i}{N}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\frac{\left(R_i-\frac{n_i(N+1)}{2}\right)^2}{\frac{n_i(N+1)(N-n_i)}{12}}\left(\frac{N-n_i}{N}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k}\frac{\left(R_i-\frac{n_i(N+1)}{2}\right)^2}{\frac{n_i(N+1)N}{12}} \sim \chi^2_{(k-1)},
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

ahora se mostrará que el estadístico de la ecuación (3.10) es igual al obtenido en la ecuación (3.22)

$$
\begin{aligned}
T &= \sum_{i=1}^{k}\frac{\left(R_i-\frac{n_i(N+1)}{2}\right)^2}{\frac{n_i(N+1)N}{12}} \\
&= \frac{12}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(R_i-\frac{n_i(N+1)}{2}\right)^2}{n_i} \\
&= \frac{12}{N(N+1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2-\frac{2R_in_i(N+1)}{2}+\frac{n_i^2(N+1)^2}{4}}{n_i}\right] \\
&= \frac{12}{N(N+1)}\left[\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_i}-R_i(N+1)+\frac{n_i(N+1)^2}{4}\right] \\
&= \frac{12}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_i}-\frac{12(N+1)}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{k}R_i+\frac{12(N+1)^2}{4N(N+1)}\sum_{i=1}^{k}n_i \\
&= \frac{12}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_i}-\frac{12}{N}\sum_{i=1}^{k}R_i+3(N+1) \\
&= \frac{12}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_i}-\frac{12}{N}\frac{N(N+1)}{2}+3(N+1) \\
&= \frac{12}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_i}-6(N+1)+3(N+1) \\
&= \frac{12}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_i}-3(N+1).
\end{aligned}
$$

Falta verificar que

$$T = \frac{1}{S^2}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_i} - \frac{N(N+1)^2}{4}\right),$$

es igual a

$$T = \frac{12}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1).$$

Se sabe que

$$S^2 = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N}R(x_{ij})^2 - \frac{N(N+1)^2}{4}\right),$$

entonces

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{\sum R_i^2}{N-1} - \frac{N(N+1)^2}{4(N-1)} \\ &= \frac{N(N+1)(2N+1)}{6(N-1)} - \frac{N(N+1)^2}{4(N-1)} \\ &= \frac{4N(N+1)(2N+1) - 6N(N+1)^2}{24(N-1)} \\ &= \frac{2N(N+1)(2(2N+1) - 3(N+1))}{24(N-1)} \\ &= \frac{N(N+1)(4N+2-3N-3)}{12(N-1)} \\ &= \frac{N(N+1)(N-1)}{12(N-1)} \\ &= \frac{N(N+1)}{12}. \end{aligned}$$

Por lo tanto los estadísticos de las ecuaciones (3.8) y (3.10) son iguales.

3.2.2. Prueba de Friedman

Datos.

Consiste de las variables aleatorias independientes k ontenidas de una muesta aleatoria $(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik})$ con $i = 1, ..., b$, donde b es la variable bloque.

Bloque	**1**	**2**	$\cdots$	**k**
1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1k}
2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2k}
$\vdots$				$\vdots$
b	x_{b1}	x_{b2}	$\cdots$	x_{bk}

$R(x_{ij})$ es el rango asignado a x_{ij} de 1 a k dentro del bloque i.

Supuestos.

1. Las b variables y las k-variadas son mutuamente independientes.
2. Dentro de cada bloque las observaciones pueden ser ranqueadas de acuerdo a algún criterio de interés.

Hipótesis.

H_0 : Los tratamientos tienen igual efecto *vs.* H_1 : Al menos un tratamiento tiene distinto efecto

Estadístico de Prueba.

1. Si no hay empates se usa

$$T_1 = \frac{12}{bk(k+1)} \left(\sum_{j=1}^{k} \left(R_j - \frac{b(k+1)}{2} \right)^2 \right).$$

2. Si hay empates se necesita hacer los siguientes ajustes:

$$A_1 = \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{k} (R(x_{ij}))^2.$$

$$C_1 = \frac{bk\,(k+1)^2}{4}.$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{(k-1)\left(\sum_{i=1}^{k} R_j^2 - bC_1\right)}{A_1 - C_1} \\ &= \frac{(k-1)\left(\sum_{i=1}^{k} R_j - \frac{b(k+1)}{2}\right)^2}{A_1 - C_1}, \end{aligned}$$

entonces el estadístico es

$$T_2 = \frac{(b-1)\,T_1}{b\,(k-1) - T_1}.$$

Regla de Decisión.

- Cuando se utiliza el estadístico T_1 se debe usar los cuantiles de una distribución[13] $\chi^2_{(k-1)}$.
- Para el estadístico T_2 se utiliza una distribución[14] $F_{(k-1),((b-1)(k-1))}$.

W depende del tipo de estadístico que se utilice.
Rechazar H_0 si $(T_1 \ o \ T_2) > W^{1-\alpha}$

Comparaciones Múltiples

Si la hipótesis nula es rechazada se usa el siguiente método para determinar cuales tratamientos son diferentes.

1. Se puede decir que los tratamientos i, j son diferentes si la siguiente desigualdad se satisface
$$|R_i - R_j| > t^{1-\alpha/2}\left(\frac{2\left(bA_1 - \sum R_j^2\right)}{(b-1)\,(k-1)}\right)^{1/2},$$

[13]Consulta la tabla 3 del Anexo.
[14]Consulta la tabla 4 del Anexo.

donde R_i, R_j, y A_1 se dan previamente y donde $t^{1-\alpha/2}_{(b-1)(k-1)}$ es el cuantil de la distribución

Si no hay empates entonces

$$A_1 = bk(k+1)(2k+1)/6.$$

2. También se puede utilizar el siguiente procedimiento en función de T_1

$$|R_i - R_j| > t_{1-\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{(A_1 - C_1)\, 2b}{(b-1)\,(k-1)} \left(1 - \frac{T_1}{b\,(k-1)} \right) \right]^{1/2}.$$

Si no hay empates

$$A_1 - C_1 = bk(k+1)(k-1)/12.$$

Distribución del Estadístico de Prueba.

ahora se explicará con un ejemplo la manera en que se puede encontrar el estadístico de la prueba y posteriormente usar la aproximación que tiene éste.

Dentro de cada bloque hay $k!$ arreglos de rangos, considerando que hay b bloques, entonces hay $(k!)^b$ arreglos en total de rangos.

Si $k = 3$ y $b = 3$ hay $(3!)^3$ arreglos, esto es $6^3 = 216$, si fueran 2 bloques y 3 tratamientos, sería $(3!)^2 = 6^2 = 36$ arreglos.

Arreglos	**Bloques**	
	I	II
1	$\{1,2,3\}$	$\{1,2,3\}$
2	$\{1,2,3\}$	$\{1,3,2\}$
3	$\{1,2,3\}$	$\{2,1,3\}$
4	$\{1,2,3\}$	$\{2,3,1\}$
5	$\{1,2,3\}$	$\{3,1,2\}$
6	$\{1,2,3\}$	$\{3,2,1\}$
7	$\{1,3,2\}$	$\{1,2,3\}$
8	$\{1,3,2\}$	$\{1,3,2\}$
9	$\{1,3,2\}$	$\{2,1,3\}$
10	$\{1,3,2\}$	$\{2,3,1\}$
11	$\{1,3,2\}$	$\{3,1,2\}$
12	$\{1,3,2\}$	$\{3,2,1\}$
13-18	$\{2,1,3\}$	*
19-24	$\{2,3,1\}$	*
25-30	$\{3,1,2\}$	*
31-36	$\{3,2,1\}$	*

*Para los casos de 13-18, 19-24, 25-30, 31-36, se hace lo mismo como en el bloque II para 1-6 y 6-12.

$P(arreglo_i) = \frac{1}{36}$ con $i = 1, 2, ..., 36$

Se usará la notación T_{1i} indica que el estadístico T_1 y el arreglo i-ésimo. .

$$T_1 = \frac{12}{bk\,(k+1)} \sum_{j=1}^{k} \left(R_j - \frac{b\,(k+1)}{2} \right)^2,$$

donde

$$Rj = \sum_{j=1}^{b} R\,(x_{ij})\,.$$

Utilizando que $b = 2$ y que $k = 3$ se obtiene lo siguiente:

$$T_{11} = \frac{12}{2(3)\,(4)} \left[\left(2 - \frac{2\,(4)}{2} \right)^2 + \left(4 - \frac{2\,(4)}{2} \right)^2 + \left(6 - \frac{2\,(4)}{2} \right)^2 \right] = 4$$

$$T_{12} = \frac{12}{2(3)\,(4)} \left[\left(2 - \frac{2\,(4)}{2} \right)^2 + \left(5 - \frac{2\,(4)}{2} \right)^2 + \left(5 - \frac{2\,(4)}{2} \right)^2 \right] = 3$$

$$T_{13} = \frac{12}{2(3)\,(4)} \left[\left(3 - \frac{2\,(4)}{2} \right)^2 + \left(3 - \frac{2\,(4)}{2} \right)^2 + \left(6 - \frac{2\,(4)}{2} \right)^2 \right] = 3$$

$$T_{14} = \frac{12}{2(3)\,(4)} \left[\left(3 - \frac{2\,(4)}{2} \right)^2 + \left(5 - \frac{2\,(4)}{2} \right)^2 + \left(4 - \frac{2\,(4)}{2} \right)^2 \right] = 1$$

$$T_{15} = \frac{12}{2(3)\,(4)} \left[\left(4 - \frac{2\,(4)}{2} \right)^2 + \left(3 - \frac{2\,(4)}{2} \right)^2 + \left(5 - \frac{2\,(4)}{2} \right)^2 \right] = 1$$

$$T_{16} = \frac{12}{2(3)\,(4)} \left[\left(4 - \frac{2\,(4)}{2} \right)^2 + \left(4 - \frac{2\,(4)}{2} \right)^2 + \left(4 - \frac{2\,(4)}{2} \right)^2 \right] = 0$$

Para encontrar la exacta distribución de T_1, hay que analizarla:

$$P(T_1 = 0) = \frac{\text{No. de combinaciones de las 36 que dan 0}}{36}$$

$$P(T_1 = 1) = \frac{\text{No. de combinaciones de las 36 que dan 1}}{36}$$

$$\vdots$$

También acumularla y así se encuentra la distribución del estadístico T_1.

Ahora usando la aproximación, se obtendrá el estadístico. El primer paso es obtener la esperanza y la varianza de $R(x_{ij})$, para después usar el teorema de límite central.

$R(x_{ij})$ se define como un rango de 1 al k.

$$E(R(x_{ij})) = \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k} = \frac{k(k+1)}{2k} = \frac{k+1}{2}.$$

$$\begin{aligned} Var(R(x_{ij})) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{k} - \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6k} - \frac{(k+1)^2}{4} \\ &= \frac{(k+1)(2k+1)}{6} - \frac{(k+1)^2}{4} \\ &= \frac{(k+1)}{2}\left[\frac{2k+1}{3} - \frac{k+1}{2}\right] \\ &= \frac{k+1}{2}\left(\frac{4k+2-3k-3}{6}\right) \\ &= \frac{(k+1)(k-1)}{12}. \end{aligned}$$

$$Rj = \sum_{j=1}^{b} R(x_{ij}) \Longrightarrow E(Rj) = \sum_{j=1}^{b} E(R(x_{ij})) = \frac{b(k+1)}{2}.$$

$$\begin{aligned} Var(R_j) &= \sum_{j=1}^{b} Var(R(x_{ij})) \\ &= \frac{b(k+1)(k-1)}{12}. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de límite central se llega a:

$$\frac{R_j - E(Rj)}{\sqrt{Var(R_j)}} \sim N(0,1),$$

cuando se eleva al cuadrado la ecuación anterior, se obtiene una aproximación de la distribución $\chi^2_{(1)}$ con un grado de libertad.

$$\left(\frac{R_j - E(Rj)}{\sqrt{Var(R_j)}}\right)^2 \sim \chi^2_{(1)},$$

si se sustituye $E\left(Rj\right)$ y $Var\left(R_j\right)$ se obtiene

$$\frac{\left(R_j - \frac{b(k+1)}{2}\right)^2}{\frac{b(k+1)(k-1)}{12}} \sim \chi^2_{(1)}.$$

Al sumar sobre todos los tratamientos $1, 2, ..., k$ la suma no da una distribución $\chi^2_{(k)}$, ya que el rango para cada tratamiento depende de lo que ya se haya asignado, entonces el resultado queda de la siguiente manera.

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\left(R_j - \frac{b(k+1)}{2}\right)^2}{\frac{b(k+1)(k-1)}{12}} \left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{12}{bk\left(k+1\right)} \sum_{j=1}^{k} \left(R_j - \frac{b\left(k+1\right)}{2}\right)^2 \sim \chi^2_{(k-1)}.$$

Capítulo 4

PRUEBAS DE DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Un problema en común que se pueden enfrentar en cualquier investigación es querer comparar más de dos grupos de datos para detectar posibles diferencias entre ellos. La utilización de modelos de ANOVA (Análisis de Varianza) puede permitir detectar éstas diferencias, a nivel global, entre las medias involucradas. Pero en muchas ocasiones se desea conocer las diferencias entre grupos concretos lo que sólo es posible por medio de los procedimientos de **comparaciones múltiples**.

En este capítulo sólo se analizarán las pruebas: Método de la Mínima Diferencia Significativa (MDS), Tukey, Duncan, Newman-Keuls y Scheffé.

4.1. Método de la Mínima Diferencia Significativa (MDS)

Este método fue sugerido por Fisher en 1935 y es la técnica más antigua para efectuar las comparaciones múltiples. Dicho método se basa en una prueba de hipótesis por parejas basada en la distribución t. Este procedimiento sirve cuando se desea comparar por parejas los efectos de "a" tratamientos. Es decir, contrastar cualquier hipótesis de la forma

$$H_0 \colon \mu_i = \mu_j \; vs. H_1 : \mu_i \neq \mu_j$$

Para realizar la prueba se utiliza el siguiente estadístico

$$t = \frac{\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j.}}{\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}},$$

que sigue una distribución $t_{(N-a)}^{1-\alpha/2}$ de Student.

Por lo que se concluye que la regla de decisión entre las parejas de medias μ_i y μ_j son estadísticamente diferentes si

$$|\overline{y_i}. - \overline{y_j}.| > MDS,$$

donde

- $\overline{y_i}$ es el promedio de las observaciones bajo el i-ésimo tratamiento,
- $\overline{y_j}$.es el promedio de las observaciones bajo el j-ésimo tratamiento,
- MDS es la mínima diferencia significativa, donde

$$MDS = t_{(N-a)}^{1-\alpha/2}\sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)},$$

- MSE el cuadrado medio del error que se obtiene de la tabla ANOVA,
- n_i y n_j el número de observaciones correspondiente a cada media,
- $t_{(N-a)}^{1-\alpha/2}$ el valor crítico de la distribución t con $N - a$ grados de libertad, donde N es el número total de las observaciones y a el número de los tratamientos.

Si el diseño es balanceado, entonces $n_1 = n_2 = \cdots n_a = n$, el valor de MDS se reduce a

$$MDS = t_{(N-a)}^{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{2MSE}{n}}.$$

4.2. Prueba de Intervalos Múltiples de Duncan

Este procedimiento fue desarrollado por Duncan en 1955. Su aplicación es de tipo secuencial en el sentido de no utilizar un único valor crítico para todas las diferencias de medias, sino un valor crítico que depende del número de medias que se comparan habiendo ordenado previamente las medias en orden creciente.

Se dice que hay diferencia significativa entre la media mayor y la media menor de "p" medias, $\overline{y_i}$.e $\overline{y_j}$., si se cumple con

$$|\overline{y_i}. - \overline{y_j}.| > R_p.$$

El valor R_p esta dado por

$$R_p = q_{(p,N-a)}^{\alpha p}\sqrt{\frac{MSE}{n}} \qquad p = 2, 3, \cdots, a,$$

donde

- $q^{\alpha p}_{(p,N-a)}$ es el punto crítico del rango estudentizado basado en la comparación de la media mayor y la menor de "p" medias[1].
- MSE el cuadrado medio del error que se obtiene de la tabla ANOVA.

En seguida se prueban las diferencias observadas entre las medias, comenzando desde el valor más alto al más pequeño. Se compara esta diferencia con el intervalo mínimo significativo R_a, después se calcula la diferencia entre el valor más alto y el segundo más pequeño y se compara con el intervalo significativo mínimo R_{a-1}. Este procedimiento continúa hasta que todas las medias han sido comparadas con la media más grande. A continuación, la diferencia entre la segunda media más grande y la más pequeña se calcula y compara contra el intervalo mínimo significativo R_{a-1}. Este proceso se sigue hasta que han sido consideradas las diferencias entre todos los $a\,(a-1)\,/2$ posibles pares. En el caso en que una diferencia observada es mayor que el intervalo mínimo significativo correspondiente, se concluye que la pareja de medias es significativamente diferente.

En el caso en que las muestras sean de diferentes tamaños, n se debe reemplazar por la media armónica, n_h, de los tamaños de los grupos, es decir,

$$n_h = \frac{a}{\sum\limits_{i=1}^{a} (1/n_i)}, \tag{4.1}$$

entonces la expresión R_p es

$$R_p = q^{\alpha p}_{(p,N-a)}\sqrt{\frac{MSE}{n_h}} \qquad p = 2, 3, \cdots, a.$$

4.3. Prueba de Newman-Keuls

Este procedimiento fue desarrollado por Newman en 1939 y ampliado por Keuls en 1952, es por eso que suele denominarse como la prueba de Newman-Keuls. El procedimiento es similar a la prueba de intervalos múltiples de Duncan, excepto que las diferencias críticas entre las medias son calculadas de una manera diferente.

Se acepta que hay diferencia significativa entre la media mayor y la media menor de "p" medias, $\overline{y_i}.$e $\overline{y_j}.$,

$$|\overline{y_i}. - \overline{y_j}.| > K_p.$$

[1]Para encontrar estos valores se utiliza la tabla 10 del Anexo para los niveles de significación de comparaciones individuales $\alpha = 0.01$ y $\alpha = 0.05$.

El valor K_p esta dado por

$$K_p = q^{\alpha}_{(p,N-a)}\sqrt{\frac{MSE}{n}} \qquad p = 2, 3, \cdots, a,$$

donde

- $q^{\alpha}_{(p,N-a)}$ es el punto crítico del rango estudentizado para grupos de medias de tamaño "p" y $N - a$ grados de libertad del error. El rango estudentizado[2] se define mediante
$$q = \frac{\bar{y}_{\text{máx}} - \bar{y}_{\text{mín}}}{\sqrt{MSE/n}},$$
- $\bar{y}_{\text{máx}}$ y $\bar{y}_{\text{mín}}$ corresponden a las medias muestrales máxima y mínima, respectivamente, en el grupo de "p" medias muestrales[3].
- MSE el cuadrado medio del error que se obtiene de la tabla ANOVA.

El procedimiento para calcular esta prueba se hace de la misma forma que en la prueba de intervalos múltiples de Duncan.

En el caso en que las muestras sean de diferentes tamaños, n se debe reemplazar por la media armónica (n_h), de los tamaños de los grupos, como se muestra en la ecuación (4.1).

4.4. Prueba de Tukey

El procedimiento de comparación múltiple que propuso Tukey (1953) también está basado en los intervalos.

Para decir que hay diferencias significativas entre dos medias se debe cumplir lo siguiente:

$$|\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{j\cdot}| > T_{\alpha},$$

donde

$$T_{\alpha} = q^{\alpha}_{(p,N-a)}\sqrt{\frac{MSE}{n}} \qquad p = 2, 3, \cdots, a,$$

[2]Montgomery Douglas. Diseño y Análisis de Experimentos, Grupo Editorial Iberoamericana, México,1991. Pag. 70-71.

[3]En la tabla 9 del anexo se encuentran los valores críticos para los niveles de significancia de comparaciones individuales $\alpha = 0.01$ y $\alpha = 0.05$.

- $q^{\alpha}_{(p,N-a)}$ es el punto crítico del rango estudentizado para grupos de medias de tamaño "p" y $N-a$ grados de libertad del error. Este se utiliza para determinar el valor crítico de todas las comparaciones por pares, independientemente de cuántas medias estén en un grupo[4].

- MSE el cuadrado medio del error que se obtiene de la tabla ANOVA.

Se debe tomar en cuenta que en todas las comparaciones sólo se usa un valor crítico.

En el caso en que las muestras sean de diferentes tamaños, n se debe reemplazar por la media armónica (n_h), de los tamaños de los grupos, como se muestra en la ecuación (4.1).

4.5. Método Scheffé para comparar todos los contrastes

Scheffé (1953) propuso esté método para realizar cualquier contraste[5] entre medias de tratamientos usando una F con un nivel de significancia α fijo.

Sea un determinado conjunto de m contrastes de las medias de los tratamientos de interés de la forma

$$\Gamma_u = C_{1u}\mu_1 + C_{2u}\mu_2 + \cdots + C_{au}\mu_a = \sum_{i=1}^{a} C_{iu}\mu_i \qquad u = 1, 2, \ldots, m,$$

con C_{iu} constantes tal que $\sum\limits_{i=1}^{a} C_{iu} = 0$.

Se considera que Γ_u es un contraste.

Con el Método Scheffé es posible probar la siguiente hipótesis:

$$H_0 : \Gamma_u = 0 \qquad vs. \qquad H_1 : \Gamma_u \neq 0$$

Para la realización de dicho método se debe considerar lo siguiente:

1. Se tiene que estimar los contrastes correspondientes usando los promedios de tratamiento $\overline{y_i}$.

$$C_u = C_{1u}\overline{y_1}. + C_{2u}\overline{y_2}. + \cdots + C_{au}\overline{y_a}. = \sum_{i=1}^{a} C_{iu}\overline{y_i}. \qquad u = 1, 2, \ldots, m$$

[4]En la tabla 9 del anexo se encuentran los valores críticos para los niveles de significancia de comparaciones individuales $\alpha = 0.01$ y $\alpha = 0.05$.

[5]Es una combinación lineal de los efectos de los tratamientos tal que la suma de los coeficientes sea cero, es decir, $\sum\limits_{i=1}^{a} C_{iu} = 0$.

2. Calcular el error estándar de los contrastes mediante la siguiente fórmula:

$$S_{C_u} = \sqrt{MSE \sum_{i=1}^{a} (C_{iu}^2 / n_i)},$$

donde

- MSE es el cuadro medio del error y se obtiene de la tabla ANOVA
- n_i es el número de observaciones del i-ésimos tratamiento.

3. Mediante la siguiente fórmula se calcula S_u^α que es el valor crítico con el que va a ser comparado cada uno de los contrastes

$$S_u^\alpha = S_{C_u} \sqrt{(a-1)\, F_{(a-1,N-a)}^\alpha},$$

donde $F_{(a-1,N-a)}^\alpha$ se obtiene con la tabla F de Snedecor, con $(a-1, N-a)$ grados de libertad a un nivel α.

Regla de Decisión.

Rechazar H_0 si

$$|C_u| > S_u^\alpha.$$

Capítulo 5

RESULTADOS

En los capítulos anteriores se presentaron los diferentes tipos de pruebas que existen para determinar la diferencia de medias, en éste se analizarán todas las pruebas para saber si hay alguna diferencia en cuanto a la regla de decisión que tiene cada una de éstas, pues se puede dar el caso que con alguna prueba se rechace y con otra se acepte. Para hacer este análisis se hizo lo siguiente:

1. Con el programa de Excel y dentro de la opción herramientas se encuentra la de análisis de datos, la cual tiene la opción de generación de números aleatorios, se ocupó para generar a las poblaciones normales con diferente media y varianza con un tamaño de 100, 200, 300 y 500.

2. Una vez que ya se tienen las poblaciones, con el paquete de "*Statistica 6*", se hicieron las pruebas, para la rama paramétrica, su ubicación está dentro de la opción "*Basic Statistics*", para las no paramétricas con la opción de "*Nonparametric*" y para las de diseño de experimentos se localizan en "*one-Anova*" y dentro de ésta la opción de "*All effects*" y posteriormente la de "*Post-Hoc*".

5.1. Comparación de pruebas con 2 poblaciones.

A continuación se presenta el análisis de los cuadros de resultados, que se obtuvieron con el paquete de "*Statistica 6*", de la prueba paramétrica (Prueba t) y de las no paramétricas (Signos, Wilcoxon y Mann-Whitney). Lo que se quiere analizar al aplicar las diferentes pruebas es si hay alguna diferencia significativa entre cada una de ellas.

La hipótesis para las diferentes pruebas es

$$H_0\text{: Pob.1} = \text{Pob.2} \quad vs. \quad H_1\text{: Pob.1} \neq \text{Pob.2}$$

para saber si la prueba se rechaza o se acepta, se hace con base al nivel p que se da por automático en el cuadro de resultados del paquete, es decir,

$$\textbf{Rechazar } H_0 \textbf{ si } \alpha \geq \textbf{Nivel p}$$

donde $\alpha = 0.05$.

1. Resultado.

$\mu_1 = -145 \quad \sigma_1 = 72 \quad \mu_2 = -175 \quad \sigma_2 = 85$

En los cuadros siguientes se puede notar que en todas las pruebas se rechaza H_0, y se concluye que las medias de las poblaciones son distintas.

N = 100

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	-139.106	-177.808	3.384	198	0.000861
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	100		3.100		0.001935
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	100	1617.000	3.121		0.001796
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	11377.00	8723.000	3673.000	3.2423	0.001185

N = 200

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	-150.268	-173.624	3.015	398	0.002728
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	200		2.757		0.005821
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	200	7570.000	3.026		0.002478
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	43525.00	36675.00	16575.00	2.962	0.003052

N = 300

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	-140.663	-177.063	5.574	598	$3.76e^{-8}$
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	300		3.983		$6.8e^{-5}$
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	300	14523.00	5.354		$8.58e^{-8}$
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	101435.0	78865.00	33715.00	5.315	$1.065e^{-7}$

N = 500

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	-148.881	-171.579	4.803	998	$2e^{-6}$
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	500		4.606		$4e^{-6}$
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	500	47297.00	4.742		$2e^{-6}$
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	272369.0	228131.0	102881.0	4.843	$1e^{-6}$

En general, todas las pruebas dan valores muy significativos, donde se presenta mayor signficancia es cuando N = 300. Los niveles p en la prueba de Signos son siempre más grandes en todos los casos, en comparación a las otras pruebas

2. Resultado.

$$\mu_1 = 270 \quad \sigma_1 = 93 \quad \mu_2 = 230 \quad \sigma_2 = 79$$

Los resultados que se obtuvieron en los siguientes cuadros, muestran que los niveles p, para todas las pruebas son menores del valor $\alpha = 0.05$, por lo que se rechaza H_0, entonces se concluye que si hay diferencias entre las medias de las poblaciones.

N = 100

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	262.276	232.753	2.520	198	0.012516
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	100		2.300		0.021448
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	100	1788.000	2.534		0.011276
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	11109.00	8991.000	3941.000	2.587	0.009667

N = 200

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	268.529	227.463	4.451	398	$1.1e^{-5}$
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	200		3.040		$2.361e^{-4}$
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	200	6599.000	4.210		$2.5e^{-5}$
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	45004.00	35196.00	15096.00	4.241	$2.2e^{-5}$

Cuando se incrementó la población a partir de N = 200, las pruebas dieron resultados más significativos. La prueba t y la prueba Mann-Whitney resultaron ser pruebas más potentes, en todos los casos.

N = 300

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	265.715	227.102	5.561	598	$4.03e^{-8}$
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	300		4.792		$2e^{-6}$
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	300	14448.00	5.404		$6.50e^{-7}$
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	101761.0	78539.00	33389.00	5.468	$4.53e^{-8}$

N = 500

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	273.130	224.659	8.745	998	$1e^{-17}$
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	500		6.663		$2e^{-11}$
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	500	36160.00	8.187		$3e^{-16}$
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	286779.0	213721.0	88471.00	7.999	$1.2e^{-15}$

Cuando N = 500 las pruebas en general resultan ser muy potentes.

3. Resultado.

$\mu_1 = 210 \quad \sigma_1 = 57 \quad \mu_2 = 199 \quad \sigma_2 = 62$

N = 100

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	201.634	202.140	-0.057	198	0.953912
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	100		0.100		0.920344
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	100	2438.000	0.299		0.764838
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	10088.00	10012.00	4962.000	0.092	0.926024

En este cuadro se puede ver que no se rechaza H_0, esto es, que las medias de las poblaciones son iguales, ya que todo los niveles p son muy grandes. En este caso la más pequeña sería la prueba Wilcoxon, pero para el caso de las prueba t, Signos, Mann-Whitney resulta que son pruebas casi 100 % aceptables.

N = 200

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	209.175	198.534	1.908	398	0.057002
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	200		2.192		0.028377
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	200	8359.000	2.063		0.039084
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	42248.00	37952.00	17852.00	1.857	0.063184

Al incrementar el tamaño de la población la regla de decisión cambia en algunas pruebas, como es el caso de la prueba de Signos y Wilcoxon donde se rechaza H_0, pues los niveles p son más pequeños del valor de $\alpha = 0.05$, entonces las medias de las poblaciones son distintas. Sólo en la de Prueba t y Mann-Whitney se tiene que no se rechaza H_0 y que las medias son iguales, pero con valores muy cercanos a la α predeterminada.

N = 300

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	207.071	202.008	1.015	598	0.310381
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	300		0.288		0.772830
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	300	21496.00	0.717540		0.473042
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	91527.00	88773.00	43623.00	0.648584	0.516608

Uno pensaría que al incrementarse nuevamente el número de la población en todas las pruebas, se rechazaría H_0, pero en este caso se repite el mismo problema que cuando N = 100, esto es, no se rechaza H_0 y que las medias de las poblaciones son iguales.

N = 500

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	208.767	195.587	3.431	998	0.000625
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	500		2.817		0.004841
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	500	51294.00	3.505		0.000456
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	265131.0	235369.0	110119.0	3.258	0.001120

Cuando se tiene que la población es de 500, hay un cambio en todas las pruebas, pues en todas se rechaza H_0, es decir, las medias son distintas y todas las pruebas son confiables.

4. Resultado.

$\mu_1 = 270 \quad \sigma_1 = 93 \quad \mu_2 = 350 \quad \sigma_2 = 120$

N = 100

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	258.405	351.868	-6.232	198	$2.7e^{-9}$
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	100		4.300		$1.7e^{-5}$
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	100	1058.000	5.044		$4.5e^{-7}$
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	7695.000	12405.00	2645.000	-5.754	$8.7e^{-9}$

N = 200

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	268.243	353.809	-7.476	398	$4.9e^{-13}$
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	200		5.586		$2.3e^{-8}$
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	200	4466.000	6.813		$1.0e^{-11}$
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	32496.00	47704.00	12396.00	-6.577	$4.8e^{-11}$

En todos los casos, se muestra que la regla de decisión se rechaza, esto es, que las medias de las poblaciones son distintas, ya que los niveles p son muy pequeños y que se encuentran en la zona de rechazo con 100 % de seguridad.

N = 300

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	264.784	351.224	-10.0167	598	0.000000
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	300		7.909		$2.5e^{-15}$
	VALID	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	300	9016.000	9.016		0.000000
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	70606.00	109694.0	25456.00	-9.205	0.000000

N = 500

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	272.157	344.865	-10.763	998	0.000000
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	500		8.810		0.000000
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	500	29912.00	10.120		0.000000
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	203915.0	296585.0	78665.0	-10.1464	0.000000

En este análisis al incrementar la población los resultados de los niveles p, resultaron cada vez mejores y cuando N = 300 y 500, los niveles p se vuelven ya cero, esto indica que las medias son totalmente distintas y además todas las pruebas son altamente potentes, pero en particular por el tamaño del nivel p la prueba t es la más potente.

5. Resultado.

$\mu_1 = 390 \quad \sigma_1 = 90 \quad \mu_2 = 430 \quad \sigma_2 = 72$

Nuevamente se en todos los casos y pruebas, se rechaza H_0, y se nota que al incrementa el número de la población, los niveles p se van decrementando y las pruebas cada vez da resultados mejores. Pues, los niveles p son muy pequeños en comparación con la $\alpha = 0.05$.

N = 100

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	389.583	427.288	-3.191	198	0.001649
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	100		2.500		0.012419
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	100	1698.000	2.843		0.004462
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	8773.000	11327.00	3723.000	-3.120	0.001807

N = 200

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	385.313	427.386	-4.914	398	$1e^{-6}$
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	200		3.606		$3.11e^{-4}$
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	200	6221.000	4.672		$3e^{-6}$
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	34116.00	46084.00	14016.00	-5.175	$2.2e^{-7}$

N = 300

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	390.975	427.397	-5.603	598	$3.2e^{-8}$
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	300		5.253		$1.4e^{-7}$
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	300	14566.00	5.326		$1.0e^{-7}$
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	78492.00	101808.0	33342.00	-5.491	$3.9e^{-8}$

N = 500

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	394.323	434.237	-7.318	998	$5.1e^{-13}$
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	500		6.574		$4.8e^{-11}$
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	500	39860.00	7.042		$1.9e^{-12}$
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	218396.0	282104.0	93146.0	-6.975	$3e^{-12}$

Todas la pruebas son significativas, pero en donde se arrojan mejores valores de p, es en la prueba t y en la prueba de Mann-Whitney. Y en la prueba de Signos siempre los niveles p son menores en comparación con las demás pruebas.

6. Resultado.

$$\mu_1 = \mu_2 = 10 \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 8$$

Al observar todos los niveles p, se puede concluir que la regla de decisión no se rechaza, entonces por consiguiente las medias de las poblaciones son iguales.

N = 100

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	11.057	10.040	0.867	198	0.386620
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	100		0.700		0.483927
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	100	2299.00	0.777		0.437123
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	103334	9766	4716	0.693	0.487731

En este caso todos los niveles p de las pruebas son muy parecidos, no una diferencia significativa entre las diferentes pruebas.

N = 200

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	10.349	9.989	0.445	398	0.655905
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	200		0.494		0.620618
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	200	9490	0.683		0.494421
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	40618	39582	19482	0.448	0.654124

Cuando N = 200 los niveles p de todas las pruebas aumentan en comparación del caso N = 100.

N = 300

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	9.974	9.496	0.735	598	0.462228
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	300		0.981		0.326348
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	300	21770	0.535		0.593423
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	91027.5	89272.5	44122	0.4133	0.679377

N = 500

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	10.927	10.109	1.586	998	0.112886
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	500		0.491		0.622765
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	500	58395	1.308		0.190652
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	255025	245474	120224	1.045	0.295683

Al aumentar la población uno pensaría que los niveles de p van ir aumentando, en el caso de N = 200, si aumentó, pero cuando N = 300, 500, los niveles p decrecen.

7. Resultado.

$\mu_1 = \mu_2 = 99 \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 38$

N = 100

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	92.177	102.51	-2.024	198	0.044273
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	100		1.500		0.133614
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	100	2018	1.743		0.081294
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	9246	10854	4196	-1.964	0.049475

Para la prueba t y la prueba Mann-Whitney los niveles de p, son muy parecidos, entre ellos hay una diferencia mínima, como estos, son menores del valor $\alpha = 0.05$, por lo tanto se rechaza H_0, esto es hay diferencia entre las medias de las poblaciones. Para la prueba de Signos y Wilcoxon no se rechaza H_0, entonces las medias son iguales. La prueba de Signos, en este caso, sería la mejor para afirmar que las medias son iguales.

N = 200

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	97.191	99.678	-0.634	398	0.525943
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	200		-0.070		0.943628
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	200	9817	0.284		0.776181
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	39579	40621	19479	-0.450	0.652252

ahora que se incrementó la población, los niveles de p aumentan significativamente, pues con todas las pruebas resulta que no se rechaza H_0, por consiguiente las medias de las poblaciones son iguales. La prueba de Signos sería la que resulta casi un 100 % aceptable.

N = 300

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	99.603	95.989	1.167	598	0.243388
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	300		1.21		0.225346
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	300	21083	0.992		0.321107
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	92224	88076	42926	0.976	0.328630

Los niveles de p, en este caso disminuyeron, pero de todas formas no se rechaza H_0, entonces las medias son iguales.

N = 500

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	101.584	97.404	1.701	998	0.089109
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	500		0.939		0.347655
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	500	57423	1.609		0.107537
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	256905	243594	118344	1.457	0.145002

En este caso, el nivel p de la prueba t es menor a diferencia de las otras pruebas, aunque para las pruebas de Wilcoxon y Mann-Whitney también disminuyeron en comparación con N = 200 y 300. De todas maneras la regla de decisión no cambia, es decir, no se rechazó, por lo tanto las medias de las poblaciones son iguales.

8. Resultado.

$$\mu_1 = \mu_2 = 210 \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 90$$

En general, para todas las pruebas no se rechaza H_0, decir que las medias de las poblaciones son iguales, pero si hay una variabilidad en cuanto a los niveles p, para los diferentes casos. Pues, cuando N = 100, la mejor prueba sería la prueba de Signos, cuando N = 200 sería la prueba Mann-Whitney y para los casos N = 300 y 500 la mejor es la prueba t.

N = 100

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	213.863	206.647	0.540	198	0.589265
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	100		0.50		0.920344
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	100	2085	1.512		0.570495
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	10578	9522	4472	0.693	0.487731

N = 200

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	209.769	200.078	1.053	398	0.292921
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	200		0.919		0.357971
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	200	9458	0.722		0.290108
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	40759	39441	19341	1.102	0.568679

N = 300

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	210.392	208.091	0.319	598	0.749511
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	300		0.981		0.326348
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	300	21244	0.885		0.376092
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	915566	88734	43584	0.666	0.504802

N = 500

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	208.104	208.317	-0.037	998	0.970374
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	500		0.581		0.560986
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	500	59796	0.875		0.661333
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	249615	250884	124365	-0.138	0.889496

9. Resultado.

$\mu_1 = \mu_2 = -20 \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 12$

Para todos los casos no se rechaza H_0, por lo tanto las medias de las poblaciones son iguales.

N = 100

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	-18.030	-20.665	1.634	198	0.103690
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	100		0.500		0.130315
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	100	2085	1.512		0.130315
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	10578	9522	4475	1.29	0.617075

N = 200

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	-20.663	-21.256	0.492	398	0.622818
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	200		1.484		0.137564
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	200	9458	0.722		0.470086
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	40759	39441	19341	0.569	0.568679

N = 300

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	-20.541	-20.19	-0.334	598	0.737836
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	300		0.866		0.386476
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	300	22121	0.301		0.762719
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	88730	91569	43580	-0.668	0.503750

Al incrementar la población cuando N = 200 y 300 casi en todos los niveles p de las pruebas aumentaron, sólo para la prueba de Mann-Whitney disminuyó para el caso de N = 300.

N = 500

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	-20.672	-19.601	-1.437	998	0.150839
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	500		0.313		0.754243
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	500	59796	0.875		0.381454
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	245466	255034	120216	-1.047	0.294825

ahora sólo en la prueba de Signos, fue donde el nivel p arrojo un mejor resultado, ya que en las demás pruebas los niveles disminuyeron nuevamente

10. Resultado.

$\mu_1 = \mu_2 = -300 \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 110$

N = 100

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	-295.570	-297.365	0.114	198	0.909077
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	100		0.100		0.920344
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	100	2479	0.158		0.874329
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	10105	9995	4945	0.134	0.893097

En este caso, no se rechaza H_0, ya que todos los niveles de p son muy grandes. Por lo tanto las medias de las poblacones son iguales. Lo que indica que son pruebas casi 100 % aceptables.

N = 200

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	-281.527	-296.430	1.281	398	0.200880
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	200		0.494		0.620612
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	200	9090	1.171		0.241454
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	41213	38987	18887	0.962	0.335707

N = 300

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	-302.913	-307.690	0.536	598	0.591782
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	300		0.635		0.525373
	VALID	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	300	21771	0.534		0.592883
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	90999	89301	44151	0.399	0.689238

N = 500

PRUEBAS	MEDIA1	MEDIA2	VALOR t	GL	NIVEL p
PRUEBA t	-304.899	-296.901	-1.115	998	0.264989
	No.POB		Z		NIVEL p
SIGNOS	500		1.654		0.097987
	No.POB	T	Z		NIVEL p
WILCOXON	500	58657	1.22		0.219599
MANN	SUM-RAN	SUM-RAN	U	Z	NIVEL p
WHITNEY	244524	255976	119274	-1.25	0.20988

Para los casos de N = 200, 300 y 500, no se rechaza H_0, es decir, que la medias de las poblaciones son iguales. En estos casos, también hay variabilidad en cuanto a los niveles de p, ya que en algunas pruebas disminuye su valor, aunque la población se incremente. Por ejemplo, cuando N = 200 la prueba de Signos resultó ser la mejor prueba con un nivel p = 0.620612, pero cuando N = 500, el nivel p es 0.097987, por lo tanto si hay una diferencia significativa entre estos resultados.

En el siguiente cuadro se muestran las medias y varianzas que se utilizaron para hacer las comparaciones.

RESULTADOS	μ_1	σ_1	μ_2	σ_2
1	-145	72	-175	85
2	270	93	230	79
3	210	57	199	62
4	270	93	350	120
5	390	90	430	72
6	10	8	10	8
7	99	38	99	38
8	210	90	210	90
9	-20	12	-20	12
10	-300	110	-300	110

A conticuación se presenta un resumen de lo analizado anteriormente. Donde se puede observa cual fue la mejor o peor prueba.

1. Resultado.

No. DATOS	MEJOR PRUEBA	p-LEVEL	PEOR PRUEBA	p-LEVEL
100	PRUEBA t	$8.61e^{-4}$	SIGNOS	$1.935e^{-3}$
200	WILCOXON	$2.478e^{-3}$	SIGNOS	$5.821e^{-3}$
300	PRUEBA t	$3.76e^{-8}$	SIGNOS	$6.8e^{-5}$
500	MANN-WHITNEY	$1e^{-6}$	SIGNOS	$4e^{-6}$

2. Resultado.

No. DATOS	MEJOR PRUEBA	p-LEVEL	PEOR PRUEBA	p-LEVEL
100	MANN-WHITNEY	$9.667e^{-3}$	SIGNOS	$2.144e^{-2}$
200	PRUEBA t	$1.1e^{-5}$	SIGNOS	$2.361e^{-4}$
300	PRUEBA t	$4.03e^{-8}$	SIGNOS	$2e^{-6}$
500	PRUEBA t	$1e^{-17}$	SIGNOS	$2e^{-11}$

3. Resultado.

No. DATOS	MEJOR PRUEBA	p-LEVEL	PEOR PRUEBA	p-LEVEL
100	WILCOXON	0.764838	PRUEBA T	0.953912
200	SIGNOS	0.028377	MANN-WHITNEY	0.063184
300	PRUEBA t	0.310381	SIGNOS	0.772830
500	WILCOXON	$4.56e^{-4}$	SIGNOS	$4.841e^{-3}$

4. Resultado.

No. DATOS	MEJOR PRUEBA	p-LEVEL	PEOR PRUEBA	p-LEVEL
100	PRUEBA t	$2.7e^{-9}$	SIGNOS	$1.7e^{-5}$
200	PRUEBA t	$4.9e^{-13}$	SIGNOS	$2.3e^{-8}$
300	PRUEBA t-WILCOXON	0.000	SIGNOS	$2.5e^{-16}$
	MANN			
500	TODAS	0.000	NINGUNA	

5. Resultado.

No. DATOS	MEJOR PRUEBA	p-LEVEL	PEOR PRUEBA	p-LEVEL
100	PRUEBA t	$1.649e^{-3}$	SIGNOS	e^{-2}
200	MANN-WHITNEY	$2.2e^{-7}$	SIGNOS	$3.11e^{-4}$
300	PRUEBA t	$3.2e^{-8}$	SIGNOS	$1.4e^{-7}$
500	PRUEBA t	$5.1e^{-13}$	SIGNOS	$4.8e^{-11}$

6. Resultado.

No. DATOS	MEJOR PRUEBA	p-LEVEL	PEOR PRUEBA	p-LEVEL
100	PRUEBA t	0.386620	MANN-WHITNEY	0.487731
200	WILCOXON	0.494421	PRUEBA t	0.655905
300	SIGNOS	0.326348	MANN-WHITNEY	0.679377
500	PRUEBA t	0.112886	SIGNOS	0.622765

7. Resultado.

No. DATOS	MEJOR PRUEBA	p-LEVEL	PEOR PRUEBA	p-LEVEL
100	PRUEBA t	0.044273	SIGNOS	0.133614
200	PRUEBA t	0.525943	SIGNOS	0.943628
300	SIGNOS	0.225346	MANN-WHITNEY	0.328630
500	PRUEBA t	0.089109	SIGNOS	0.347655

8. Resultado.

No. DATOS	MEJOR PRUEBA	p-LEVEL	PEOR PRUEBA	p-LEVEL
100	MANN-WHITNEY	0.487731	SIGNOS	0.920344
200	WILCOXON	0.290108	MANN-WHITNEY	0.568679
300	SIGNOS	0.326348	PRUEBA t	0.749511
500	PRUEBA t	0.970374	SIGNOS	0.560986

9. Resultado.

No. DATOS	MEJOR PRUEBA	p-LEVEL	PEOR PRUEBA	p-LEVEL
100	PRUEBA t	0.103690	MANN-WHITNEY	0.617075
200	SIGNOS	0.137564	PRUEBA t	0.622818
300	SIGNOS	0.386476	WILCOXON	0.762719
500	PRUEBA t	0.150839	SIGNOS	0.754243

10. Resultado.

No. DATOS	MEJOR PRUEBA	p-LEVEL	PEOR PRUEBA	p-LEVEL
100	WILCOXON	0.874329	SIGNOS	0.920344
200	PRUEBA t	0.200880	SIGNOS	0.620612
300	SIGNOS	0.525373	MANN-WHITNEY	0.689238
500	SIGNOS	0.097987	PRUEBA t	0.264989

Al revisar cada uno de los cuadros se nota que en la mayoría de los casos, la prueba t resulta ser la mejor y la prueba de Signos la peor.

5.2. Comparaciones de pruebas con 4 poblaciones.

En esta sección se analizarán primero las pruebas no paramétricas: Friedman y Kruskal-Wallis, para ver si hay diferencia entre las cuatro poblaciones. Teniendo la siguiente hipótesis:

H_0 : Todas las poblaciones son iguales vs H_1 : Al menos un población es distinta

La regla de decisión es la misma que se ocupó para el caso de 2 poblaciones, esto es

$$\textbf{Rechazar } H_0 \textbf{ si } \boldsymbol{\alpha} \geq \textbf{Nivel p}$$

donde $\alpha = 0.05$.

Una vez que se hicieron las pruebas anteriormente mencionadas y que la regla de decisión haya sido rechazada, sólo se sabe que al menos una de las medias de las poblaciones es distinta a las demás, pero otro análisis que muchas veces le interesa al investigador hacer es determinar cuál o cuáles poblaciones o tratamientos son diferentes entre sí, para ello como ya se mencionó en el capítulo 4, se utilizan las comparaciones múltiples.

Dado que con estos métodos la comparación se hace dos a dos, la hipótesis sería la siguiente dependiendo del par a comparar, por ejemplo:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad vs \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

En cuanto a la regla decisión se ocupará la misma que en los análisis anteriores.

En los siguientes análisis, se presentará primero la comparación que se hizo con la prueba de Kruskal-Wallis y la prueba de Friedman. Posteriormente se aplican los métodos de comparaciones múltiples: Scheffé, MDS, Duncan, Newman-Keuls y Tukey, aunque no se rechace H_0, es decir, que las medias sean iguales, esto con el fin de saber si hay algún cambio, al aplicar los métodos de comparaciones múltiples.

11. Resultado.

$\mu_1 = 515 \quad \mu_2 = 540 \quad \mu_3 = 502 \quad \mu_4 = 470$
$\sigma_1 = 320 \quad \sigma_2 = 380 \quad \sigma_3 = 289 \quad \sigma_4 = 180$

N.DATOS	PRUEBA	ESTADISTICO	NIVEL p
100	FRIEDMAN	6.6900	0.0731
	KRUSKAL-WALLIS	10.9412	0.0120
200	FRIEDMAN	9.9300	0.0191
	KRUSKAL-WALLIS	19.4377	0.0002
300	FRIEDMAN	12.5080	0.0058
	KRUSKAL-WALLIS	15.5283	0.0020
500	FRIEDMAN	6.4752	0.0906
	KRUSKAL-WALLIS	12.5008	0.0059

Primero se aplican las pruebas de Friedman y Kruskal-Wallis para ver si hay alguna diferencia entre medias de las poblaciones, para posteriormente aplicar las pruebas de comparaciones múltiples.

En todos los casos se rechaza H_0 en la prueba de Kruskal-Wallis, es decir, que hay diferencia entre las medias de las poblaciones.

En la prueba de Friedman varían los resultados por ejemplo para N = 100 y 500 la regla de decisión no se rechaza, esto es, que las medias son iguales, pero con valores muy cercanos a la α predeterminado.

Para los casos en que N = 200 y 300 se rechaza H_0, por lo tanto las medias son distintas.

Se observa que cuando el tamaño de la población es N = 200, con las dos pruebas se obtienen mejores resultados que en los demás tamaños.

N=100	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.332907	0.933293	0.067527	0.376313	0.005318	0.055966
SCHEFFE	0.815783	0.999844	0.340667	0.853126	0.050610	0.300316
TUKEY	0.766857	0.999790	0.257675	0.812307	0.026094	0.220827
NEWMAN-KEULS	0.596226	0.933258	0.066780	0.375788	0.026094	0.133874
DUNCAN	0.364568	0.933258	0.066780	0.375788	0.008775	0.069341

Al comparar la muestra 1 con la muestra 2, la muestra 1 con la muestra 3, la muestra 1 con la muestra 4, la muestra 2 con la muestra 3 y la muestra 3 con la muestra 4, se obtiene que todos los niveles p son mayores que $\alpha = 0.05$, por lo tanto no hay diferencia en las parejas de medias. Pero, los niveles p de la muestra 1 con la muestra 4 y la muestra 3 con la muestra 4, en las pruebas MDS, Newman-Keuls y Duncan los valores son muy cercanos al α predeterminado.

En el caso de la muestra 2 con la muestra 4, casi en todas las comparaciones se rechaza H_0, lo cual se encuentran diferencias significativas entre las parejas de medias, sólo la prueba de Scheffé muestra que no hay diferencia significativa

N=200	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.293667	0.002773	0.017597	0.000056	0.000635	0.533974
SCHEFFE	0.776080	0.029800	0.130338	0.001002	0.008546	0.942851
TUKEY	0.719436	0.014308	0.081134	0.000301	0.003393	0.925007
NEWMAN-KEULS	0.293351	0.007585	0.017371	0.000301	0.001759	0.533801
DUNCAN	0.293351	0.003800	0.017371	0.000100	0.000880	0.533801

Cuando se incrementa la población N = 200 se puede ver en la tabla que cambia la regla de decisión, por ejemplo: para la muestra 1 con la muestra 2 y la muestra 3 con la muestra 4, no hay diferencia significativa. Al comparar la muestra 1 con la muestra 3, la muestra 2 con la muestra 3 y la muestra 2 con la muestra 4, se tiene que los niveles de p son menores al α determinado, lo cual indica que si hay diferencias significativas entre estas parejas. Para la muestra 1 con la muestra 4, con la prueba de Scheffé y la prueba de Tukey no se encuentran diferencias entres la μ_1 y μ_4,con el resto de las pruebas si hay diferencias significativas.

N=300	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.968217	0.066879	0.002280	0.061172	0.001996	0.221355
SCHEFFE	0.999983	0.339267	0.025357	0.319695	0.022694	0.683005
TUKEY	0.999977	0.257220	0.011964	0.239251	0.010526	0.611814
NEWMAN-KEULS	0.968214	0.066634	0.006318	0.146250	0.010526	0.221118
DUNCAN	0.968214	0.066634	0.003164	0.076014	0.003521	0.221118

N=500	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.115085	0.671658	0.017055	0.045596	0.000076	0.049717
SCHEFFE	0.478151	0.980789	0.127510	0.261630	0.001334	0.277792
TUKEY	0.392129	0.974411	0.079452	0.187778	0.000451	0.201898
NEWMAN-KEULS	0.114938	0.671615	0.044714	0.112106	0.000451	0.049583
DUNCAN	0.114938	0.671615	0.022613	0.057719	0.000150	0.049583

En los casos N = 300 y 500, es análogo como para N = 200. Pero, las pruebas que son más sensibles al detectar si hay diferencias entre las medias son la prueba MDS, posteriormente la prueba Duncan y Newman-Keuls.

12. Resultado.

$\mu_1 = 14 \quad \mu_2 = 123 \quad \mu_3 = 92 \quad \mu_4 = 220$
$\sigma_1 = 8 \quad \sigma_2 = 29 \quad \sigma_3 = 45 \quad \sigma_4 = 85$

N.DATOS	PRUEBA	ESTADISTICO	NIVEL p
100	FRIEDMAN	247.4280	0.0000
	KRUSKAL-WALLIS	306.5435	0.0000
200	FRIEDMAN	468.8700	0.0000
	KRUSKAL-WALLIS	564.4348	0.0000
300	FRIEDMAN	663.2080	0.0000
	KRUSKAL-WALLIS	715.2351	0.0000
500	FRIEDMAN	1168.313	0.0000
	KRUSKAL-WALLIS	1355.659	0.0000

En este análisis, se muestra que en todos los casos los estadísticos son demasiado grandes, por lo tanto se rechaza H_0, lo cual indica que las medias de las poblaciones son distintas. Si se observa las medias de las poblaciones entre cada una de ellas si hay un separación muy amplia, lo cual hace que H_0 sea 100 % rechazable.

N=100	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.00	0.00	0.00	$6.9e^{-5}$	0.00	0.00
SCHEFFE	0.00	0.00	0.00	$1.9e^{-3}$	0.00	0.00
TUKEY	$8e^{-6}$	$8e^{-6}$	$8e^{-6}$	$3.39e^{-4}$	$8e^{-6}$	$8e^{-6}$
NEWMAN-KEULS	$2.2e^{-5}$	$9e^{-6}$	$8e^{-6}$	$6.5e^{-5}$	$9e^{-6}$	$2.2e^{-5}$
DUNCAN	$1.1e^{-5}$	$9e^{-6}$	$3e^{-6}$	$6.5e^{-5}$	$9e^{-6}$	$1.1e^{-5}$
DUNNETT	$2.7e^{-5}$	$2.7e^{-5}$	$2.7e^{-5}$	$2.7e^{-5}$	$2.7e^{-5}$	$2.7e^{-5}$

N=200	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.00	0.00	0.00	$1.55e^{-15}$	0.00	0.00
SCHEFFE	0.00	0.00	0.00	$9.55e^{-14}$	0.00	0.00
TUKEY	$8e^{-6}$	$8e^{-6}$	$8e^{-6}$	$8e^{-6}$	$8e^{-6}$	$8e^{-6}$
NEWMAN-KEULS	$2.2e^{-5}$	$9e^{-6}$	$8e^{-6}$	$9e^{-6}$	$9e^{-6}$	$2.2e^{-5}$
DUNCAN	$1.1e^{-5}$	$9e^{-6}$	$3e^{-6}$	$9e^{-6}$	$9e^{-6}$	$1.1e^{-5}$
DUNNETT	$3.6e^{-5}$	$3.6e^{-5}$	$3.6e^{-5}$	$3.6e^{-5}$	$3.6e^{-5}$	$3.6e^{-5}$

N=300	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.00	0.00	0.00	$1.17e^{-10}$	0.00	0.00
SCHEFFE	0.00	0.00	0.00	$5.02e^{-9}$	0.00	0.00
TUKEY	$8e^{-6}$	$8e^{-6}$	$8e^{-6}$	$8e^{-6}$	$8e^{-6}$	$8e^{-6}$
NEWMAN-KEULS	$2.2e^{-5}$	$9e^{-6}$	$8e^{-6}$	$9e^{-6}$	$9e^{-6}$	$2.2e^{-5}$
DUNCAN	$1.1e^{-5}$	$9e^{-6}$	$3e^{-6}$	$9e^{-6}$	$9e^{-6}$	$1.1e^{-5}$
DUNNETT	$3.9e^{-5}$	$3.9e^{-5}$	$3.9e^{-5}$	$3.9e^{-5}$	$3.9e^{-5}$	$3.9e^{-5}$

N=500	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
SCHEFFE	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
TUKEY	$8e^{-6}$	$8e^{-6}$	$8e^{-6}$	$8e^{-6}$	$8e^{-6}$	$8e^{-6}$
NEWMAN-KEULS	$2.2e^{-5}$	$9e^{-6}$	$8e^{-6}$	$9e^{-6}$	$9e^{-6}$	$2.2e^{-5}$
DUNCAN	$1.1e^{-5}$	$9e^{-6}$	$3e^{-6}$	$9e^{-6}$	$9e^{-6}$	$1.1e^{-5}$
DUNNETT	$4.2e^{-5}$	$4.2e^{-5}$	$4.2e^{-5}$	$4.2e^{-5}$	$4.2e^{-5}$	$4.2e^{-5}$

Dado que con las pruebas no paraméticas se rechazó H_0 y la separación entre las medias es amplia, se espera que si hubiera diferencia entre algunas parejas de medias. Pero en este análisis se muestra que todas las medias son distintas entre sí

La prueba de MDS y Scheffé son más potentes que el resto de las pruebas. Con las pruebas de Newman-Keuls y Duncan se obtienen resultados muy parecidos pero la prueba de Duncan se manifiesta ser más eficaz.

Con la prueba de Tukey se nota que en todos los casos, los niveles p son iguales, esto es, que para todas las parejas de medias se rechaza H_0 con el mismo nivel p.

Cuando N = 500, la prueba de MDS y la prueba de Scheffé muestra que la hipótesis es 100 % rechazable, lo cual indica que son totalmente distintas.

13. Resultado.

$$\mu_1 = 220 \quad \mu_2 = 190 \quad \mu_3 = 235 \quad \mu_4 = 201$$
$$\sigma_1 = 85 \quad \sigma_2 = 77 \quad \sigma_3 = 79 \quad \sigma_4 = 111$$

N.DATOS	PRUEBA	ESTADISTICO	NIVEL p
100	FRIEDMAN	10.95600	0.0119
	KRUSKAL-WALLIS	6.64000	0.0843
200	FRIEDMAN	32.49000	0.0000
	KRUSKAL-WALLIS	22.36000	0.0010
300	FRIEDMAN	30.79200	0.0000
	KRUSKAL-WALLIS	20.96000	0.0001
500	FRIEDMAN	51.85920	0.0000
	KRUSKAL-WALLIS	61.84000	0.0000

En la mayoría de los casos la prueba de Friedman y la prueba de Kruskal-Wallis rechazan H_0, indica que al menos una de las medias es distinta a las demás.

Sólo cuando N = 100, para la prueba de Kruskal-Wallis resultó que no se rechaza H_0, es decir, que no hay diferencias entre las medias.

N=100	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.018731	0.153300	0.147495	0.000173	0.363755	0.004167
SCHEFFE	0.136244	0.563273	0.551252	0.002725	0.843006	0.041484
TUKEY	0.082836	0.480054	0.467286	0.000881	0.799908	0.020624
NEWMAN-KEULS	0.047911	0.152519	0.146711	0.000881	0.363214	0.011030
DUNCAN	0.024250	0.152519	0.146711	0.000294	0.363214	0.005531

Al analizar la tabla cuando N = 100, se observa que sólo con las pruebas de MDS, Newman-Keuls y Duncan detecta diferencias significativas en las siguientes parejas de medias de la muestra 1 con la muestra 2, la muestra 2 con la muestra 3 y la muestra 3 con la muestra 4, mientras que con las pruebas de Scheffé y Tukey sólo encuentran en la muestra 2 con la muestra 3 y la muestra 3 con la muestra 4.

En todas los métodos de comparaciones múltiples se muestra que las parejas de medias de la muestra 1 con la muestra 3, la muestra 1 con la muestra 4, la muestra 2 con la muestra 4 no hay diferencia significativa entre ellas.

N=200	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.000292	0.034581	0.181844	0.000000	0.021584	0.000583
SCHEFFE	0.004349	0.214858	0.618264	0.000000	0.152036	0.007940
TUKEY	0.001578	0.147674	0.539723	0.000008	0.097501	0.003120
NEWMAN-KEULS	0.000814	0.034276	0.181468	0.000008	0.021334	0.001616
DUNCAN	0.000407	0.034276	0.181468	0.000003	0.021334	0.000808

Cuando se aumenta la población, las pruebas de MDS, Newman-Keuls y Duncan muestran que hay diferencias significativas también en las parejas de la muestra 1 con la muestra 3 y la muestra 2 con la muestra 4 y las pruebas de Scheffé y Tukey sólo lo detecta en la comparación de la muestra 1 con la muestra 2, que anteriormente no lo hacía.

N=300	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.000193	0.040026	0.055157	0.000000	0.068964	0.000075
SCHEFFE	0.003029	0.238636	0.298107	0.000000	0.346214	0.001303
TUKEY	0.001074	0.167857	0.219749	0.000008	0.263663	0.000432
NEWMAN-KEULS	0.000554	0.039814	0.054923	0.000008	0.068717	0.000224
DUNCAN	0.000277	0.039814	0.054923	0.000003	0.068717	0.000112

Cuando N = 300, una diferencia que se encuentra en comparación con N = 200, es que ahora se muestra que no hay diferencias significativas en la comparación de la muestra 2 con la muestra 4, con las pruebas de MDS, Newman-Keuls y Duncan.

N=500	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.000000	0.002003	0.004460	0.000000	0.004431	0.000000
SCHEFFE	0.000000	0.022785	0.044183	0.000000	0.043947	0.000000
TUKEY	0.000008	0.010650	0.022903	0.000008	0.022761	0.000008
NEWMAN-KEULS	0.000022	0.001979	0.004433	0.000008	0.004404	0.000022
DUNCAN	0.000011	0.001979	0.004433	0.000003	0.004404	0.000011

Cuando N = 500, en todas las pruebas de comparaciones múltiples indican que los niveles p son menores al α = 0.05, por consiguiente hay diferencia significativa entre todas las medias de las poblaciones.

En todos los casos se puede notar que las pruebas de MDS, Newman-Keuls y Duncan siempre coinciden en los mismos resultados, ya sea para aceptar H_0 o rechazar H_0. Y las pruebas de Scheffé y Tukey coinciden también en sus resultados.

14. Resultado.

$$\mu_1 = 283 \quad \mu_2 = 235 \quad \mu_3 = 281 \quad \mu_4 = 299$$
$$\sigma_1 = 84 \quad \sigma_2 = 79 \quad \sigma_3 = 189 \quad \sigma_4 = 75$$

N.DATOS	PRUEBA	ESTADISTICO	NIVEL p
100	FRIEDMAN	21.3720	0.00009
	KRUSKAL-WALLIS	19.2800	0.00002
200	FRIEDMAN	42.1620	0.00000
	KRUSKAL-WALLIS	49.7200	0.00000
300	FRIEDMAN	50.9720	0.00000
	KRUSKAL-WALLIS	67.9733	0.00000
500	FRIEDMAN	71.6976	0.00000
	KRUSKAL-WALLIS	84.0160	0.00000

Como se puede observar en todos los casos y en ambas pruebas resulta que se rechaza H_0, es decir, que si hay diferencias entre las medias.

N=100	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.190629	0.047210	0.018751	0.001049	0.000275	0.711915
SCHEFFE	0.633145	0.267154	0.136352	0.013057	0.004088	0.987094
TUKEY	0.555886	0.191453	0.084916	0.005322	0.001395	0.982778
NEWMAN-KEULS	0.189875	0.046528	0.047959	0.002773	0.001395	0.711731
DUNCAN	0.189875	0.046528	0.024274	0.001387	0.000465	0.711731

Al analizar el caso de N = 100, se encuentra que todas las pruebas detectan diferencias entre las parejas de la muestra 2 con la muestra 3 y la muestra 2 con la muestra 4. Pero sólo las pruebas de MDS, Newman- Keuls y Duncan, encuentran diferencias entre la muestra 1 con la muestra 3 y la muestra 1 con la muestra 4.

N=200	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.000000	0.527838	0.843635	0.000000	0.000000	0.664205
SCHEFFE	0.000005	0.940438	0.997979	0.000000	0.000002	0.979394
TUKEY	0.000008	0.921903	0.997282	0.000008	0.000008	0.972582
NEWMAN-KEULS	0.000009	0.802729	0.843600	0.000008	0.000022	0.664090
DUNCAN	0.000009	0.555848	0.843600	0.000003	0.000011	0.664090

Para los casos de la muestra 1 con la muestra 3 y la muestra 1 con la muestra 4, todas las pruebas.muestran que no hay diferencias significativas ahora es todo lo contrario que en el caso N = 100.

En este caso también cambió el resultado, pues la muestra 1 con la muestra 2 resultó que en todas las pruebas afirman que si hay diferencias significativas entre ellas.

N=300	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.000000	0.601910	0.232154	0.000004	0.000000	0.086196
SCHEFFE	0.000007	0.965141	0.698796	0.000008	0.000000	0.399950
TUKEY	0.000009	0.953881	0.629733	0.000026	0.000008	0.314602
NEWMAN-KEULS	0.000022	0.601817	0.231921	0.000012	0.000008	0.198687
DUNCAN	0.000011	0.601817	0.231921	0.000012	0.000003	0.104839

Este caso es muy parecido al anterior, sólo que en algunas pruebas los niveles p disminuyen y en otras incrementan en comparación con N = 200.

N=500	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.000000	0.106495	0.049711	0.000043	0.000000	0.000354
SCHEFFE	0.000000	0.453603	0.277768	0.000802	0.000000	0.005166
TUKEY	0.000008	0.370130	0.201876	0.000247	0.000008	0.001973
NEWMAN-KEULS	0.000022	0.106350	0.049576	0.000049	0.000008	0.001019
DUNCAN	0.000011	0.106350	0.049576	0.000049	0.000003	0.000509
DUNNETT	0.000042	0.250103	0.124743	0.000162	0.000042	0.001053

En general, se puede notar que en todos los casos siempre las pruebas MDS, Newman-Keuls y Duncan coninciden con sus resultados y estás se muestran más sensibles, esto es, se detectan más diferencias signidicativas entre las parejas de medias.

15. Resultado.

$\mu_1 = 320 \quad \mu_2 = 290 \quad \mu_3 = 320 \quad \mu_4 = 370$
$\sigma_1 = 180 \quad \sigma_2 = 84 \quad \sigma_3 = 180 \quad \sigma_4 = 215$

N.DATOS	PRUEBA	ESTADISTICO	p-LEVEL
100	FRIEDMAN	2.58000	0.4610
	KRUSKAL-WALLIS	3.84938	0.2782
200	FRIEDMAN	8.86200	0.0311
	KRUSKAL-WALLIS	14.38070	0.0024
300	FRIEDMAN	16.81200	0.0007
	KRUSKAL-WALLIS	24.13000	0.0000
500	FRIEDMAN	58.29840	0.0000
	KRUSKAL-WALLIS	59.21860	0.0000

Sólo cuando se comparan con N = 100, la prueba Friedman y la prueba Kruskal-Wallis no se rechaza H_0, entonces, esto quiere decir, que todas las medias de las poblaciones son iguales. A partir de N = 200, se obtiene que los niveles de p van decrementando hasta que se hacen cero, por lo tanto las medias de la de las poblaciones son distintas.

N=100	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.341784	0.552032	0.425712	0.721609	0.081037	0.164522
SCHEFFE	0.823977	0.949456	0.888121	0.988374	0.383729	0.585576
TUKEY	0.776759	0.933561	0.855658	0.984476	0.298263	0.503961
NEWMAN-KEULS	0.607447	0.551696	0.425243	0.721431	0.298263	0.344758
DUNCAN	0.373459	0.551696	0.425243	0.721431	0.111362	0.190530

Al analizar N = 100, se observa que ninguna de las pruebas de comparaciones múltiples detecto que hubiera alguna diferencia entre las medias.

N=200	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.032332	0.434857	0.250236	0.173350	0.001029	0.053724
SCHEFFE	0.204697	0.894005	0.723525	0.602812	0.012928	0.292621
TUKEY	0.292621	0.862978	0.658050	0.522863	0.005451	0.214621
NEWMAN-KEULS	0.081172	0.434633	0.249894	0.172971	0.005451	0.129743
DUNCAN	0.041445	0.434633	0.249894	0.172971	0.001820	0.067125

Cuando se incrementa la población resulta que todas las pruebas muestran que hay diferencia significativa en la muestra 2 con la muestra 4.

Con las pruebas de MDS, Newman-Keuls y Duncan, se encuentran diferencias significativas entre la comparación de la muestra 1 con la muestra 2.

Sólo la prueba de MDS, muestra que hay diferencia significativa entre la muestra 3 con la muestra 4. Por lo tanto para este caso está prueba resulta detectar más diferencias verdaderas entre las medias.

N=300	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.958759	0.076901	0.000002	0.085917	0.000002	0.002540
SCHEFFE	0.999963	0.371745	0.000045	0.399128	0.000056	0.027746
TUKEY	0.999950	0.287622	0.000017	0.313808	0.000019	0.013277
NEWMAN-KEULS	0.958755	0.179573	0.000017	0.085661	0.000027	0.958755
DUNCAN	0.958755	0.094226	0.000006	0.085661	0.000014	0.002491

Mientras en el caso de N = 200, se mostró que había diferencias entre la muestra 1 con la muestra 2, ahora resulta que las medias son iguales.

Para la muestra 1 con la muestra 4, al aumentar el tamaño, se obtiene que si hay diferencia significativa entre ellas, esto lo indican todas las pruebas de comparaciones múltiples.

En el caso en que se compara la muestra 3 con la muestra 4, se muestra que sólo la prueba de Newman-Keuls no encuentra diferencias entre ambas medias.

N=500	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.000905	0.771346	0.000009	0.000309	0.000000	0.000033
SCHEFFE	0.011626	0.993630	0.000192	0.004586	0.000000	0.000625
TUKEY	0.004932	0.991458	0.000056	0.001727	0.000008	0.000189
NEWMAN-KEULS	0.000894	0.771325	0.000045	0.000891	0.000008	0.000039
DUNCAN	0.000894	0.771325	0.000023	0.000446	0.000003	0.000039

Cuando se tiene que N = 500, en todas las pruebas se observa que si hay diferencias significativas entre las parejas de medias. Sólo en todos los casos se presento que no hay diferencia entre la muestra 1 con la muestra 3, esto es que las medias de las poblaciones son iguales, lo cual es cierto, ya que ambas tiene $\mu = 320$.

16. Resultado.

$\mu_{1,2,3,4} = -40$
$\sigma_{1,2,3,4} = 15$

N.DATOS	PRUEBA	ESTADISTICO	NIVEL p
100	FRIEDMAN	1.236000	0.7443
	KRUSKAL-WALLIS	1.040000	0.7916
200	FRIEDMAN	2.922000	0.4068
	KRUSKAL-WALLIS	1.240000	0.7434
300	FRIEDMAN	7.860000	0.0490
	KRUSKAL-WALLIS	6.480000	0.0905
500	FRIEDMAN	2.109600	0.5499
	KRUSKAL-WALLIS	2.688000	0.4423

En todos los casos se tiene que no se rechaza H_0, cuando se utiliza la prueba de Kruskall-Wallis, lo que indica que las medias son iguales, cuando N = 300 se tiene que el nivel p es muy cercano al α predeterminado. En la prueba de Friedman cuando N = 100, 200 y 500 no se rechaza H_0, por consiguiente las medias son iguales, pero para N = 300 se rechaza H_0, lo cual muestra que al menos una de las medias, es diferente a las demás.

N=100	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.887780	0.816100	0.666594	0.0708662	0.567407	0.842809
SCHEFFE	0.999254	0.996696	0.979804	0.986643	0.954705	0.997943
TUKEY	0.998997	0.995566	0.973143	0.982180	0.940352	0.997236
NEWMAN-KEULS	0.887720	0.815998	0.902628	0.925833	0.940352	0.842723
DUNCAN	0.887720	0.815998	0.687956	0.727664	0.609281	0.842723

Cuando N = 100, indican lo métodos de comparación múltiple que no hay diferencia entre las medias, pero al observar los niveles p, la prueba Scheffé y la prueba Tukey indican que son pruebas 100 % aceptables.

Con la prueba de Newman-Keuls y la prueba de Duncan al comparar las parejas de medias de la muestra 1 con la muestra 2, la muestra 1 con la muestra 3 y la muestra 3 con la muestra 4, se obtienen los mismos resultados, pero para los casos de la muestra 1 con la muestra 4, la muestra 2 con la muestra 3 y la muestra 2 con la muestra 4, los niveles p son mayores con la prueba de Newman-Keuls.

Los resultados de la prueba de Duncan son muy similares a los de la prueba MDS.

N=200	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.249945	0.832619	0.391666	0.173351	0.768639	0.285628
SCHEFFE	0.723141	0.997518	0.865017	0.602815	0.993391	0.767055
TUKEY	0.657607	0.996664	0.826917	0.522865	0.991143	0.708785
NEWMAN-KEULS	0.482493	0.832581	0.391419	0.522865	0.768571	0.533701
DUNCAN	0.280621	0.832581	0.391419	0.218587	0.768571	0.317139

Al aumentar el número de la población se sigue conservando la misma regla de decisión como en el caso de N = 100. También las diferencias entre las pruebas son similares que en el caso anterior.

N=300	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.135272	0.015636	0.005564	0.354572	0.199798	0.721364
SCHEFFE	0.525518	0.119234	0.052806	0.835612	0.649179	0.988372
TUKEY	0.440704	0.073199	0.028069	0.790858	0.573893	0.984456
NEWMAN-KEULS	0.135018	0.041022	0.028069	0.354399	0.404865	0.721313
DUNCAN	0.135018	0.020726	0.009445	0.354399	0.228550	0.721313

Cuando N = 300, al comparar las parejas de medias de la muestra 1 con la muestra 2, la muestra 2 con la muestra 3, la muestra 2 con la muestra 4 y la muestra 3 con la muestra 4 resulta que los niveles p en todas las pruebas son mayores al $\alpha = 0.05$, por lo tanto se concluye que no son significativamente distintas.

ahora al comparar la muestra 1 con la muestra 3 resulta que sólo en las pruebas de Scheffé y Tukey no hay diferencias significativas y en las pruebas MDS, Newman-Keuls y Duncan se rechaza H_0, esto es, que si hay diferencias significativas entre las medias μ_1 y μ_3.

Para el caso de la muestra 1 con la muestra 4 sólo la prueba de Scheffé arroja que no hay diferencias significativas, aunque el nivel p es muy cercano al α predeterminado. En las demás pruebas se rechaza H_0, lo cual hay diferencias significativas entre las medias μ_1 y μ_4.

N=500	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.226016	0.994548	0.536865	0.223408	0.067590	0.541380
SCHEFFE	0.690025	1.00000	0.944023	0.686180	0.341801	0.945726
TUKEY	0.619793	1.00000	0.926491	0.615436	0.259733	0.926867
NEWMAN-KEULS	0.225877	0.994552	0.810450	0.442533	0.259733	0.541315
DUNCAN	0.225877	0.994552	0.564626	0.253363	0.095387	0.541315

En general, en todas las pruebas se rechaza H_0, es decir que no hay diferencias significativas entre las parejas de medias. Al observar la tabla, se puede notar que los resultados de la prueba Scheffé y la prueba Tukey son muy similares. Y la prueba MDS con la prueba de Duncan también son similares. La prueba de Newman-Keuls en algunos casos concuerda con los resultados de la prueba MDS y de la prueba Duncan.

17. Resultado.

$\mu_{1,2,3,4} = -99$
$\sigma_{1,2,3,4} = 23$

N.DATOS	PRUEBA	ESTADISTICO	NIVEL p
100	FRIEDMAN	1.27200	0.7357
	KRUSKAL-WALLIS	0.76451	0.8599
200	FRIEDMAN	0.48174	0.9228
	KRUSKAL-WALLIS	0.91675	0.8214
300	FRIEDMAN	0.30000	0.9600
	KRUSKAL-WALLIS	0.72792	0.8666
500	FRIEDMAN	3.80416	0.2834
	KRUSKAL-WALLIS	2.97088	0.3961

En este análisis, la prueba de Friedman y la prueba de Kruskal-Wallis coinciden en que no se rechaza H_0, es decir, que las medias de las poblaciones son iguales.

Se puede notar que cuando se incrementó la población para N = 200 y 300, el nivel p también aumento, pero para N = 500 el nivel p fue menor que en los demás casos.

Se realizarán las pruebas de comparaciones múltiples para saber si hay alguna variación en cuanto a los resultados obtenidos con las pruebas no paramétricas.

N=100	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.787268	0.560786	0.768011	0.755110	0.572242	0.380830
SCHEFFE	0.994867	0.952495	0.993324	0.992132	0.956272	0.856638
TUKEY	0.993120	0.937490	0.991061	0.989472	0.942384	0.816623
NEWMAN-KEULS	0.787148	0.829677	0.767865	0.754956	0.838605	0.816623
DUNCAN	0.787148	0.587298	0.767865	0.754956	0.598260	0.431870

N=200	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.210250	0.753984	0.727684	0.347302	0.365443	0.972222
SCHEFFE	0.665829	0.992036	0.989151	0.829191	0.844647	0.99999
TUKEY	0.592431	0.989336	0.985496	0.783063	0.801887	0.999985
NEWMAN-KEULS	0.592431	0.753912	0.935311	0.614686	0.365182	0.972217
DUNCAN	0.258575	0.753912	0.745660	0.379263	0.365182	0.972217

N=300	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.802630	0.849423	0.544360	0.660092	0.721599	0.426014
SCHEFFE	0.995919	0.998197	0.946806	0.978620	0.988402	0.888562
TUKEY	0.994520	0.997575	0.930030	0.971556	0.984496	0.856152
NEWMAN-KEULS	0.802606	0.849406	0.816622	0.898848	0.721549	0.856152
DUNCAN	0.802606	0.849406	0.571773	0.681956	0.721549	0.476036

N=500	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.633199	0.106316	0.185854	0.255088	0.397600	0.770082
SCHEFFE	0.971971	0.455834	0.625643	0.730114	0.869451	0.993523
TUKEY	0.964121	0.369661	0.547937	0.665702	0.832376	0.991314
NEWMAN-KEULS	0.633150	0.369661	0.382099	0.490383	0.397609	0.770060
DUNCAN	0.633150	0.142584	0.213933	0.286125	0.397509	0.770060

En todos los casos y en todas las pruebas de comparaciones múltiples no se rechaza H_0, lo cual se concluye que no hay diferencias significativas entre las parejas de medias

En la prueba Scheffé y la prueba Tukey sus resultados de los niveles p son muy parecidos, en la mayoría de los casos son mayores a los de las pruebas restantes. En los resultados de los niveles p de las restantes pruebas también son similares.

18. Resultado.

$$\mu_{1,2,3,4} = -150$$
$$\sigma_{1,2,3,4} = 38$$

N.DATOS	PRUEBA	ESTADISTICO	NIVEL p
100	FRIEDMAN	1.52400	0.6767
	KRUSKAL-WALLIS	1.49795	0.6827
200	FRIEDMAN	1.94400	0.5841
	KRUSKAL-WALLIS	1.50603	0.6809
300	FRIEDMAN	2.42000	0.4899
	KRUSKAL-WALLIS	6.24103	0.0100
500	FRIEDMAN	0.218400	0.9745
	KRUSKAL-WALLIS	0.293519	0.9612

En este análisis en la mayoría de los casos, se acepta que las medias de las poblaciones son iguales, sólo para el caso de N = 300, la prueba de Kruskal-Wallis rechaza H_0, entonces al menos una de las medias es distinta a las demás.

Cuando se tiene N = 500, indica que ambas pruebas son casi 100 % aceptables.

N=100	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.282296	0.302146	0.561991	0.965363	0.619982	0.650931
SCHEFFE	0.762872	0.784952	0.952903	0.999978	0.969753	0.976738
TUKEY	0.703830	0.729939	0.938018	0.999971	0.959945	0.969107
NEWMAN-KEULS	0.703830	0.555873	0.561666	0.965345	0.873098	0.650686
DUNCAN	0333428	0.333571	0.561666	0.965345	0.643766	0.650686

N=200	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.656428	0.330158	0.993883	0.596695	0.661976	0.333976
SCHEFFE	0.977889	0.813477	1.000000	0.963679	0.978970	0.817073
TUKEY	0.970599	0.764067	1.000000	0.951983	0.972024	0.768402
NEWMAN-KEULS	0.896607	0.764067	0.993886	0.596551	0.661861	0.597965
DUNCAN	0.678452	0.382084	0.993886	0.596551	0.661861	0.365938

Para los casos de N = 100, 200 y 500 se acepta H_0, esto es, que no hay diferencia significativa entre las distintas medias.

N=300	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.142396	0.150592	0.445502	0.976448	0.025861	0.027887
SCHEFFE	0.541131	0.558419	0.900414	0.999993	0.174046	0.183968
TUKEY	0.457040	0.475293	0.871008	0.999991	0.114884	0.122768
NEWMAN-KEULS	0.306465	0.150338	0.445359	0.976462	0.114884	0.070901
DUNCAN	0.167212	0.150338	0.445359	0.976462	0.039863	0.036102

Cuando aumenta la población resulta que al comparar la muestra 2 con la muestra 4 y la muestra 3 con la muestra 4, con la prueba de MDS y la prueba Duncan se obtiene que hay diferencias significativas, lo cual se concluiría que la μ_4, es diferente a las demás. Sólo con la prueba Scheffé, Tukey y Newman-Keuls se muestra que las medias de las poblacione son iguales.

Con todos los métodos resulta que la muestra 1 con la muestra 2, la muestra 1 con la muestra 3, la muestra 1 con la muestra 4 y la muestra 2 con la muestra 3, son iguales.

N=500	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.683135	0.588041	0.763084	0.893798	0.914979	0.810130
SCHEFFE	0.982777	0.961235	0.992906	0.999370	0.999677	0.996372
TUKEY	0.977038	0.948780	0.990490	0.999151	0.999565	0.995125
NEWMAN-KEULS	0.912239	0.948780	0.763062	0.893796	0.914977	0.968684
DUNCAN	0.703755	0.628625	0.763062	0.893796	0.914977	0.823037

En este caso las pruebas de Scheffé y Tukey muestran que son pruebas casi 100 % aceptables.

19. Resultado.

$\mu_{1,2,3,4} = 188$
$\sigma_{1,2,3,4} = 12$

N.DATOS	PRUEBA	ESTADISTICO	NIVEL p
100	FRIEDMAN	1.76400	0.6228
	KRUSKAL-WALLIS	2.40855	0.4920
200	FRIEDMAN	2.87400	0.4114
	KRUSKAL-WALLIS	7.75462	0.0514
300	FRIEDMAN	8.42400	0.0380
	KRUSKAL-WALLIS	4.28214	0.2326
500	FRIEDMAN	0.87600	0.8312
	KRUSKAL-WALLIS	0.85388	0.8365

Como en el análisis anterior en la mayoría de los casos, se acepta que las medias de las poblaciones son iguales, sólo para el caso de N = 300, la prueba de Friedman rechaza H_0, lo cual al menos una de las medias es distinta a las demás.

Cuando se tiene N = 500, los niveles p de ambas pruebas son mayores en comparación cuando N = 100, 200 y 300.

N=100	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.151143	0.624123	0.991948	0.343766	0.154027	0.631279
SCHEFFE	0.558847	0.970762	1.000000	0.825766	0.564754	0.972451
TUKEY	0.475344	0.961266	1.000000	0.778927	0.481633	0.963479
NEWMAN-KEULS	0.475344	0.875885	0.991949	0.343191	0.326345	0.631017
DUNCAN	0.193462	0.647701	0.991949	0.343191	0.179235	0.631017

Para N = 100 y 500, en todos los métodos de comparaciones múltiples resulta que no se rechaza H_0, esto es, que no hay diferencia significativa entre las medias de las poblaciones.

Nuevamente como en los análisis anteriores los niveles p de las pruebas de Scheffé y de Tukey son mayores que las demás y en ambas los resultados son muy parecidos.

N=200	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.669011	0.159644	0.022401	0.327423	0.063213	0.378924
SCHEFFE	0.980287	0.576552	0.156320	0.810864	0.326599	0.855398
TUKEY	0.973761	0.494529	0.100795	0.760924	0.245344	0.815067
NEWMAN-KEULS	0.668898	0.336937	0.100795	0.327128	0.150381	0.378670
DUNCAN	0.668898	0.185713	0.034795	0.327128	0.078252	0.378670

N=300	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.257829	0.109254	0.045281	0.637959	0.383351	0.688208
SCHEFFE	0.733543	0.463282	0.260224	0.974028	0.858874	0.983600
TUKEY	0.669654	0.377006	0.186371	0.965515	0.819332	0.978131
NEWMAN-KEULS	0.257606	0.244436	0.186371	0.637877	0.657966	0.688139
DUNCAN	0.257606	0.130768	0.066440	0.637877	0.415164	0.688139

En caso de N = 200 y 300 al hacer las comparaciones se obtiene que para casi todos los métodos no se rechaza H_0, entonces se concluye que no hay diferencias significativas entre las parejas de medias. Sólo donde se encontró que hay diferencia significativa, es cuando se compara la muestra 1 con la muestra 4, en la prueba MDS y en la prueba Duncan, para N = 200 y para N = 300 en la prueba MDS.

N=500	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.647193	0.415819	0.417471	0.721780	0.723938	0.997702
SCHEFFE	0.976031	0.882002	0.883093	0.988430	0.988702	1.000000
TUKEY	0.968141	0.847957	0.849316	0.984531	0.984892	1.000000
NEWMAN-KEULS	0.647146	0.847957	0.696213	0.932483	0.723913	0.997704
DUNCAN	0.647146	0.466270	0.448831	0.740160	0.723913	0.997704

20. Resultado.

$\mu_{1,2,3,4} = 233$
$\sigma_{1,2,3,4} = 90$

N.DATOS	PRUEBA	ESTADISTICO	NIVEL p
100	FRIEDMAN	3.49200	0.3218
	KRUSKAL-WALLIS	2.69222	0.4416
200	FRIEDMAN	3.97200	0.2645
	KRUSKAL-WALLIS	3.54971	0.3144
300	FRIEDMAN	2.05200	0.5616
	KRUSKAL-WALLIS	2.41549	0.4908
500	FRIEDMAN	0.59760	0.8969
	KRUSKAL-WALLIS	0.83365	0.8414

En ambas pruebas se acepta H_0, por lo tanto no hay diferencias entre las medias de las poblaciones.

N=100	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.465494	0.125279	0.158923	0.420901	0.496379	0.900689
SCHEFFE	0.911361	0.501882	0.574597	0.885028	0.926761	0.999484
TUKEY	0.884871	0.415720	0.492158	0.851795	0.904428	0.999305
NEWMAN-KEULS	0.465069	0.415720	0.334981	0.699493	0.495987	0.900636
DUNCAN	0.465069	0.163999	0.184513	0.451815	0.495987	0.900636

N=200	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.918578	0.305508	0.401615	0.356236	0.346762	0.062613
SCHEFFE	0.999716	0.788837	0.872176	0.836948	0.828712	0.324526
TUKEY	0.999618	0.734571	0.835773	0.792493	0.782482	0.243445
NEWMAN-KEULS	0.918561	0.560815	0.401373	0.355970	0.614015	0.243445
DUNCAN	0.918561	0.337290	0.401373	0.355970	0.378723	0.088801

N=300	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.150142	0.744667	0.914359	0.265417	0.122003	0.664861
SCHEFFE	0.557488	0.991089	0.999670	0.743113	0.499861	0.979530
TUKEY	0.474306	0.988070	0.999555	0.680767	0.409040	0.972755
NEWMAN-KEULS	0.320379	0.744621	0.914350	0.265197	0.409040	0.901696
DUNCAN	0.175609	0.744621	0.914350	0.265197	0.160825	0.686466

N=500	COMPARACIONES-MEDIAS					
PRUEBAS	1 Vs. 2	1 Vs. 3	1 Vs. 4	2 Vs. 3	2 Vs. 4	3 Vs. 4
MDS	0.988807	0.665427	0.599285	0.655264	0.589572	0.925901
SCHEFFE	0.999999	0.979646	0.964438	0.977682	0.961683	0.999786
TUKEY	0.999999	0.972902	0.952955	0.970314	0.949363	0.999712
NEWMAN-KEULS	0.988814	0.665383	0.858846	0.895942	0.949363	0.925899
DUNCAN	0.988814	0.665383	0.624295	0.677420	0.630040	0.925899

En este resultado, se presenta la misma situación que en el resultado 17, esto es, que en todos los casos y en todas las pruebas de comparaciones múltiples no se rechaza H_0, lo cual se concluye que no hay diferencias significativas entre las parejas de medias

Nuevamente se puede observar en todas los casos que la prueba Scheffé y la prueba Tukey muestran resultados muy parecidos en sus niveles p, en la mayoría de los casos son mayores a los de las pruebas restantes. En los resultados de los niveles p de las restantes pruebas también son similares.

Conclusiones

El objetivo de este trabajo fue determinar cuáles pruebas son más potentes para ser usadas cuando se quiere probar algún supuesto sobre las medias, al hacer la simulación y comparar las pruebas estadísticas se llegó a lo siguiente:

Al aplicar las pruebas de medias para 2 poblaciones (Prueba "t", Signos, Wilcoxon y Mann-Whitney), se pudo notar que en general todas las pruebas resultaron ser significativas y confiables.

En la mayoría de los casos resultó que la prueba "t", fue la más potente entre el resto, esto puede ser, porque se utilizaron poblaciones normales, que es uno de los supuestos que se debe cumplir al aplicar las pruebas paramétricas. En el caso en que no se tenga información acerca del cumplimiento de los supuestos, es preferible utilizar las pruebas no paramétricas pues en este caso los supuestos son menos rigurosos y a final de cuentas tienen resultados muy aceptables. En este campo resultó que las pruebas de Wilcoxon y Mann-Whitney fueron mejores que la prueba de Signos.

Los resultados que se obtuvieron al comparar las pruebas de medias para 4 poblaciones: pruebas Kruskal-Wallis y Friedman fueron muy variados, pues en algunos casos la prueba Kruskal- Wallis fue más potente que la prueba Friedman y vicerversa. Pero ambas pruebas son significativas, para obtener un mejor resultado, se recomienda que se utilicen correctamente los supuestos de cada una de ellas.

Después de aplicar las pruebas de medias para 4 poblaciones, se utilizaron las pruebas de comparaciones múltiples: MDS, Duncan, Newman-Keuls, Tukey, y Scheffé donde se encontraron algunas diferencias que a continuación se mencionan.

El método de Mínima Diferencia Significativa es el que proporcionó más diferencias significativas, y como se sabe su estadístico proviene de una distribución "F" de Snedecor, por lo tanto a partir de lo obtenido se concluye que este método sería el más eficiente en comparación a los otros.

Los métodos Duncan y Newman-Keuls fueron los que a continuación presentaron mejores resultados, aunque son muy similares entre éstos el mejor es la prueba Duncan, en orden le sigue el método de Tukey y por último Scheffé.

Existe diversos textos en los cuales se pueden encontrar comentarios sobre las comparaciones de estos métodos; en García Leal (1998) se presenta un resumen de los distintos estudios que se han hecho. Algunos de estos son:

- "El método de Mínima Diferencia Significativa es una prueba muy eficiente para detectar diferencias verdaderas entre las medias si se aplica después que la prueba F del análisis de varianza resultó significativa al 5 %".

- "En el método de Newman-Keuls el nivel de significancia es α, en cambio en el método de Duncan es αp, cuyo valor cambia dependiendo del número de medias comprendidas entre las que se comparan. Por lo tanto, la potencia de la prueba Newman-Keuls es menor que la prueba de Duncan porque generalmente la α es menor que αp. Se pueden comparar los valores de las tablas 9 y 10 del anexo, para comprobar que el procedimiento de Newman-Keuls es menos eficaz que el procedimiento de Duncan. Se observa que para $p > 2$, siempre

  $$p^{\alpha}_{(p,N-a)} > p^{\alpha p}_{(p,N-a)},$$

  por lo tanto es más difícil que dos medias sean significativamente diferentes al utilizar la método de Newman-Keuls que cuando se usa el método de Duncan (éste también es un buen método para detectar diferencias reales)".

- "Cuando sólo se hacen comparaciones por parejas, el método de Tukey conduce a límites de confianza más estrechos que el método de Scheffé, por lo que el método Tukey encontrará más diferencias significativas".

En este trabajo no se hicieron tantas finezas para las pruebas de diseño de experimentos, pero se mencionan estos resultados para que se pueda tomar una decisión más certera sobre cual prueba usar.

Lo interesante de este trabajo es que al final de cuentas cualquier prueba sobre medias es buena, lo importante es entonces usar la que mejor conozca el investigador o el aplicador de la prueba y que no viole los supuestos que requiere la prueba de hipótesis, sobre todo la escala de medida a la que se hace referencia en la prueba.

Anexos

Tabla 1. Distribución Normal

Tabla 2. Distribución t de Student

Tabla 3. Distribución ji Cuadrada

Tabla 4. Distribución F con grados de libertad k_1 y k_2

Tabla 5. Disribución Binomial

Tabla 6. Valores críticos para el estadístico Wilcoxon

Tabla 7. Valores críticos para el estadístico Mann-Whitney

Tabla 8. Valores críticos para el estadístico Kruskal-Wallis

Tabla 9. Percentiles del rango estudentizado

Tabla 10. Valores críticos para la prueba de rango múltiple de Duncan

Las tablas fueron obtenidas:

- Conover, W. J. Practical Nonparametric Statistics, Wiley & Sons, 1980.
- García Leal Julia. Diseño Estadístico de Experimentos, Grupo Editorial Universitario, Granada, 1998.

Tabla 1. Distribución Normal

p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.00		-3.0902	-2.8782	-2.7478	-2.6521	-2.5758	-2.5121	-2.4573	-2.4089	-2.3656
0.01	-2.3263	-2.2904	-2.2571	-2.2262	-2.1973	-2.1701	-2.1444	-2.1201	-2.0969	-2.0749
0.02	-2.0537	-2.0335	-2.0141	-1.9954	-1.9774	-1.9600	-1.9431	-1.9268	-1.9110	-1.8957
0.03	-1.8808	-1.8663	-1.8522	-1.8384	-1.8250	-1.8119	-1.7991	-1.7866	-1.7744	-1.7624
0.04	-1.7507	-1.7392	-1.7279	-1.7169	-1.7060	-1.6954	-1.6849	-1.6747	-1.6646	-1.6546
0.05	-1.6449	-1.6352	-1.6258	-1.6164	-1.6072	-1.5982	-1.5893	-1.5805	-1.5718	-1.5632
0.06	-1.5548	-1.5464	-1.5382	-1.5301	-1.5220	-1.5141	-1.5063	-1.4985	-1.4909	-1.4833
0.07	-1.4758	-1.4684	-1.4611	-1.4538	-1.4466	-1.4395	-1.4325	-1.4255	-1.4187	-1.4118
0.08	-1.4051	-1.3984	-1.3917	-1.3852	-1.3787	-1.3722	-1.3658	-1.3595	-1.3532	-1.3469
0.09	-1.3408	-1.3346	-1.3285	-1.3225	-1.3165	-1.3106	-1.3047	-1.2988	-1.2930	-1.2873
0.10	-1.2816	-1.2759	-1.2702	-1.2646	-1.2591	-1.2536	-1.2481	-1.2426	-1.2372	-1.2319
0.11	-1.2265	-1.2212	-1.2160	-1.2107	-1.2055	-1.2004	-1.1952	-1.1901	-1.1850	-1.1800
0.12	-1.1750	-1.1700	-1.1650	-1.1601	-1.1552	-1.1503	-1.1455	-1.1407	-1.1359	-1.1311
0.13	-1.1264	-1.1217	-1.1170	-1.1123	-1.1077	-1.1031	-1.0985	-1.0939	-1.0893	-1.0848
0.14	-1.0803	-1.0758	-1.0714	-1.0669	-1.0625	-1.0581	-1.0537	-1.0494	-1.0450	-1.0407
0.15	-1.0364	-1.0322	-1.0279	-1.0237	-1.0194	-1.0152	-1.0110	-1.0069	-1.0027	-0.9986
0.16	-0.9945	-0.9904	-0.9863	-0.9822	-0.9782	-0.9741	-0.9701	-0.9661	-0.9621	-0.9581
0.17	-0.9542	-0.9502	-0.9463	-0.9424	-0.9385	-0.9346	-0.9307	-0.9269	-0.9230	-0.9192
0.18	-0.9154	-0.9116	-0.9078	-0.9040	-0.9002	-0.8965	-0.8927	-0.8890	-0.8853	-0.8816
0.19	-0.8779	-0.8742	-0.8705	-0.8669	-0.8633	-0.8596	-0.8560	-0.8524	-0.8488	-0.8452
0.20	-0.8416	-0.8381	-0.8345	-0.8310	-0.8274	-0.8239	-0.8204	-0.8169	-0.8134	-0.8099
0.21	-0.8064	-0.8030	-0.7995	-0.7961	-0.7926	-0.7892	-0.7858	-0.7824	-0.7790	-0.7756
0.22	-0.7722	-0.7688	-0.7655	-0.7621	-0.7588	-0.7554	-0.7521	-0.7488	-0.7454	-0.7421
0.23	-0.7388	-0.7356	-0.7323	-0.7290	-0.7257	-0.7225	-0.7192	-0.7160	-0.7128	-0.7095
0.24	-0.7063	-0.7031	-0.6999	-0.6967	-0.6935	-0.6903	-0.6871	-0.6840	-0.6808	-0.6776

Tabla 1. (Continuación)

p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.25	-0.6745	-0.6713	-0.6682	-0.6651	-0.6620	-0.6588	-0.6557	-0.6526	-0.6495	-0.6464
0.26	-0.6433	-0.6403	-0.6372	-0.6341	-0.6311	-0.6280	-0.6250	-0.6219	-0.6189	-0.6158
0.27	-0.6128	-0.6098	-0.6068	-0.6038	-0.6008	-0.5978	-0.5948	-0.5918	-0.5888	-0.5858
0.28	-0.5828	-0.5799	-0.5769	-0.5740	-0.5710	-0.5681	-0.5651	-0.5622	-0.5592	-0.5563
0.29	-0.5534	-0.5505	-0.5476	-0.5446	-0.5417	-0.5388	-0.5359	-0.5330	-0.5302	-0.5273
0.30	-0.5244	-0.5215	-0.5187	-0.5158	-0.5129	-0.5101	-0.5072	-0.5044	-0.5015	-0.4987
0.31	-0.4959	-0.4930	-0.4902	-0.4874	-0.4845	-0.4817	-0.4789	-0.4761	-0.4733	-0.4705
0.32	-0.4677	-0.4649	-0.4621	-0.4593	-0.4565	-0.4538	-0.4510	-0.4482	-0.4454	-0.4427
0.33	-0.4399	-0.4372	-0.4344	-0.4316	-0.4289	-0.4261	-0.4234	-0.4207	-0.4179	-0.4152
0.34	-0.4125	-0.4097	-0.4070	-0.4043	-0.4016	-0.3989	-0.3961	-0.3934	-0.3907	-0.3880
0.35	-0.3853	-0.3826	-0.3799	-0.3772	-0.3745	-0.3719	-0.3692	-0.3665	-0.3638	-0.3611
0.36	-0.3585	-0.3558	-0.3531	-0.3505	-0.3478	-0.3451	-0.3425	-0.3398	-0.3372	-0.3345
0.37	-0.3319	-0.3292	-0.3266	-0.3239	-0.3213	-0.3186	-0.3160	-0.3134	-0.3107	-0.3081
0.38	-0.3055	-0.3029	-0.3002	-0.2976	-0.2950	-0.2924	-0.2898	-0.2871	-0.2845	-0.2819
0.39	-0.2793	-0.2767	-0.2741	-0.2715	-0.2689	-0.2663	-0.2637	-0.2611	-0.2585	-0.2559
0.40	-0.2533	-0.2508	-0.2482	-0.2456	-0.2430	-0.2404	-0.2378	-0.2353	-0.2327	-0.2301
0.41	-0.2275	-0.2250	-0.2224	-0.2198	-0.2173	-0.2147	-0.2121	-0.2096	-0.2070	-0.2045
0.42	-0.2019	-0.1993	-0.1968	-0.1942	-0.1917	-0.1891	-0.1866	-0.1840	-0.1815	-0.1789
0.43	-0.1764	-0.1738	-0.1713	-0.1687	-0.1662	-0.1637	-0.1611	-0.1586	-0.1560	-0.1535
0.44	-0.1510	-0.1484	-0.1459	-0.1434	-0.1408	-0.1383	-0.1358	-0.1332	-0.1307	-0.1282
0.45	-0.1257	-0.1231	-0.1206	-0.1181	-0.1156	-0.1130	-0.1105	-0.1080	-0.1055	-0.1030
0.46	-0.1004	-0.0979	-0.0954	-0.0929	-0.0904	-0.0878	-0.0853	-0.0828	-0.0803	-0.0778
0.47	-0.0753	-0.0728	-0.0702	-0.0677	-0.0652	-0.0627	-0.0602	-0.0577	-0.0552	-0.0527
0.48	-0.0502	-0.0476	-0.0451	-0.0426	-0.0401	-0.0376	-0.0351	-0.0326	-0.0301	-0.0276
0.49	-0.0251	-0.0226	-0.0201	-0.0175	-0.0150	-0.0125	-0.0100	-0.0075	-0.0050	-0.0025
0.50	0.0000	0.0025	0.0050	0.0075	0.0100	0.0125	0.0150	0.0175	0.0201	0.0226
0.51	0.0251	0.0276	0.0301	0.0326	0.0351	0.0376	0.0401	0.0426	0.0451	0.0476
0.52	0.0502	0.0527	0.0552	0.0577	0.0602	0.0627	0.0652	0.0677	0.0702	0.0728
0.53	0.0753	0.0778	0.0803	0.0828	0.0853	0.0878	0.0904	0.0929	0.0954	0.0979
0.54	0.1004	0.1030	0.1055	0.1080	0.1105	0.1130	0.1156	0.1181	0.1206	0.1231

Tabla 1. (Continuación)

p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.55	0.1257	0.1282	0.1307	0.1332	0.1358	0.1383	0.1408	0.1434	0.1459	0.1484
0.56	0.1510	0.1535	0.1560	0.1586	0.1611	0.1637	0.1662	0.1687	0.1713	0.1738
0.57	0.1764	0.1789	0.1815	0.1840	0.1866	0.1891	0.1917	0.1942	0.1968	0.1993
0.58	0.2019	0.2045	0.2070	0.2096	0.2121	0.2147	0.2173	0.2198	0.2224	0.2250
0.59	0.2275	0.2301	0.2327	0.2353	0.2378	0.2404	0.2430	0.2456	0.2482	0.2508
0.60	0.2533	0.2559	0.2585	0.2611	0.2637	0.2663	0.2689	0.2715	0.2741	0.2767
0.61	0.2793	0.2819	0.2845	0.2871	0.2898	0.2924	0.2950	0.2976	0.3002	0.3029
0.62	0.3055	0.3081	0.3107	0.3134	0.3160	0.3186	0.3213	0.3239	0.3266	0.3292
0.63	0.3319	0.3345	0.3372	0.3398	0.3425	0.3451	0.3478	0.3505	0.3531	0.3558
0.64	0.3585	0.3611	0.3638	0.3665	0.3692	0.3719	0.3745	0.3772	0.3799	0.3826
0.65	0.3853	0.3880	0.3907	0.3934	0.3961	0.3989	0.4016	0.4043	0.4070	0.4097
0.66	0.4125	0.4152	0.4179	0.4207	0.4234	0.4261	0.4289	0.4316	0.4344	0.4372
0.67	0.4399	0.4427	0.4454	0.4482	0.4510	0.4538	0.4565	0.4593	0.4621	0.4649
0.68	0.4677	0.4705	0.4733	0.4761	0.4789	0.4817	0.4845	0.4874	0.4902	0.4930
0.69	0.4959	0.4987	0.5015	0.5044	0.5072	0.5101	0.5129	0.5158	0.5187	0.5215
0.70	0.5244	0.5273	0.5302	0.5330	0.5359	0.5388	0.5417	0.5446	0.5476	0.5505
0.71	0.5534	0.5563	0.5592	0.5622	0.5651	0.5681	0.5710	0.5740	0.5769	0.5799
0.72	0.5828	0.5858	0.5888	0.5918	0.5948	0.5978	0.6008	0.6038	0.6068	0.6098
0.73	0.6128	0.6158	0.6189	0.6219	0.6250	0.6280	0.6311	0.6341	0.6372	0.6403
0.74	0.6433	0.6464	0.6495	0.6526	0.6557	0.6588	0.6620	0.6651	0.6682	0.6713
0.75	0.6745	0.6776	0.6808	0.6840	0.6871	0.6903	0.6935	0.6967	0.6999	0.7031
0.76	0.7063	0.7095	0.7128	0.7160	0.7192	0.7225	0.7257	0.7290	0.7323	0.7356
0.77	0.7388	0.7421	0.7454	0.7488	0.7521	0.7554	0.7588	0.7621	0.7655	0.7688
0.78	0.7722	0.7756	0.7790	0.7824	0.7858	0.7892	0.7926	0.7961	0.7995	0.8030
0.79	0.8064	0.8099	0.8134	0.8169	0.8204	0.8239	0.8274	0.8310	0.8345	0.8381
0.80	0.8416	0.8452	0.8488	0.8524	0.8560	0.8596	0.8633	0.8669	0.8705	0.8742
0.81	0.8779	0.8816	0.8853	0.8890	0.8927	0.8965	0.9002	0.9040	0.9078	0.9116
0.82	0.9154	0.9192	0.9230	0.9269	0.9307	0.9346	0.9385	0.9424	0.9463	0.9502

Tabla 1. (Continuación)

p	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.83	0.9542	0.9581	0.9621	0.9661	0.9701	0.9741	0.9782	0.9822	0.9863	0.9904
0.84	0.9945	0.9986	1.0027	1.0069	1.0110	1.0152	1.0194	1.0237	1.0279	1.0322
0.85	1.0364	1.0407	1.0450	1.0494	1.0537	1.0581	1.0625	1.0669	1.0714	1.0758
0.86	1.0803	1.0848	1.0893	1.0939	1.0985	1.1031	1.1077	1.1123	1.1170	1.1217
0.87	1.1264	1.1311	1.1359	1.1407	1.1455	1.1503	1.1552	1.1601	1.1650	1.1700
0.88	1.1750	1.1800	1.1850	1.1901	1.1952	1.2004	1.2055	1.2107	1.2160	1.2212
0.89	1.2265	1.2319	1.2372	1.2426	1.2481	1.2536	1.2591	1.2646	1.2702	1.2759
0.90	1.2816	1.2873	1.2930	1.2988	1.3047	1.3106	1.3165	1.3225	1.3285	1.3346
0.91	1.3408	1.3469	1.3532	1.3595	1.3658	1.3722	1.3787	1.3852	1.3917	1.3984
0.92	1.4051	1.4118	1.4187	1.4255	1.4325	1.4395	1.4466	1.4538	1.4611	1.4684
0.93	1.4758	1.4833	1.4909	1.4985	1.5063	1.5141	1.5220	1.5301	1.5382	1.5464
0.94	1.5548	1.5632	1.5718	1.5805	1.5893	1.5982	1.6072	1.6164	1.6258	1.6352
0.95	1.6449	1.6546	1.6646	1.6747	1.6849	1.6954	1.7060	1.7169	1.7279	1.7392
0.96	1.7507	1.7624	1.7744	1.7866	1.7991	1.8119	1.8250	1.8384	1.8522	1.8663
0.97	1.8808	1.8957	1.9110	1.9268	1.9431	1.9600	1.9774	1.9954	2.0141	2.0335
0.98	2.0537	2.0749	2.0969	2.1201	2.1444	2.1701	2.1973	2.2262	2.2571	2.2904
0.99	2.3263	2.3656	2.4089	2.4573	2.5121	2.5758	2.6521	2.7478	2.8782	3.0902

Tabla 2. Distribución t de Student

Grados de libertad	p = 0.6	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9975	0.999	0.9995
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	318.31	636.62
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.598
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.214	12.924
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
I6	0.258	0.690	1.377	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408.	3.674
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.255	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
60	0.254	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
120	0.254	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
Infinito	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

Tabla 3. Distribución ji Cuadrada

	p = 0.75	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
k = 1	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.83
2	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60	13.82
3	4.108	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84	16.27
4	5.385	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86	18.47
5	6.626	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75	20.51
6	7.841	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	9.037	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96	26.13
9	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59
11	13.70	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76	31.26
12	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79
18	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.32
21	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80
22	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27
23	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73
24	28.24	33.20	36.42	39.37	42.98	45.56	51.18
25	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62
26	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05
27	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48
28	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89
29	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30
30	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70
40	45.62	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40
50	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66
60	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61
70	77.58	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2	112.3
80	88.13	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3	124.8
90	98.65	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	137.2
100	109.10	118.50	124.30	129.60	135.8	140.2	149.4
zp	0.675	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

Tabla 4. Distribución F con grados de libertad k_1 y k_2

k2 \ k1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	39.86	49.50	53.59	55.83	57.24	58.20	58.91	59.44	59.86
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00
19	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88
27	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87
29	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68
Infinito	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63

Tabla 4. (Continuación)

10	12	15	20	24	30	40	60	120	Infinito
60.19	60.71	61.22	61.74	62.00	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
9.39	9.41	9.42	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
5.23	5.22	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
3.92	3.90	3.87	3.84	3.83	3.82	3.80	3.79	3.78	3.76
3.30	3.27	3.24	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.10
2.94	2.90	2.87	2.84	2.82	2.80	2.78	2.76	2.74	2.72
2.70	2.67	2.63	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
2.54	2.50	2.46	2.42	2.40	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
2.42	2.38	2.34	2.30	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
2.32	2.28	2.24	2.20	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
2.25	2.21	2.17	2.12	2.10	2.08	2.05	2.03	2.00	1.97
2.19	2.15	2.10	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.90
2.14	2.10	2.05	2.01	1.98	1.96	1.93	1.90	1.88	1.85
2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.80
2.06	2.02	1.97	1.92	1.90	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
2.03	1.99	1.94	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
2.00	1.96	1.91	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
1.98	1.93	1.89	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.68
1.96	1.91	1.86	1.81	1.79	1.76	1.73	1.70	1.67	1.63
1.94	1.89	1.84	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
1.92	1.87	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
1.90	1.86	1.81	1.76	1.73	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57
1.89	1.84	1.80	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
1.88	1.83	1.78	1.73	1.70	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
1.87	1.82	1.77	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
1.86	1.81	1.76	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.50
1.85	1.80	1.75	1.70	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.49
1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
1.82	1.77	1.72	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46
1.76	1.71	1.66	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
1.71	1.66	1.60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.29
1.65	1.60	1.55	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
1.60	1.55	1.49	1.42	1.38	1.34	1.30	1.24	1.17	1.00

Tabla 4. (Continuación)

k1 / k2	I	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.30
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96
Infinito	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

Tabla 4. (Continuación)

10	12	15	20	24	30	40	60	120	Infinito
241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Tabla 4. (Continuación)

k2 \ k1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39
3	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47
4	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
6	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59
12	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44
13	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31
14	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21
15	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93
19	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61
29	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33
120	5.15	3.80	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22
Infinito	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11

Tabla 4. (Continuación)

10	12	15	20	24	30	40	60	120	Infinito
968.6	976.7	984.9	993.1	997.2	1001	1006	1010	1014	1018
39.40	39.41	39.43	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.49	39.50
14.42	14.34	14.25	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.90
8.84	8.75	8.66	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
6.62	6.52	6.43	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
5.46	5.37	5.27	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
4.76	4.67	4.57	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
4.30	4.20	4.10	4.00	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
3.96	3.87	3.77	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
3.72	3.62	3.52	3.42	3.37	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
3.53	3.43	3.33	3.23	3.17	3.12	3.06	3.00	2.94	2.88
3.37	3.28	3.18	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
3.25	3.15	3.05	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.60
3.15	3.05	2.95	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
3.06	2.96	2.80	2.76	2.70	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
2.99	2.89	2.79	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
2.92	2.82	2.72	2.62	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.25
2.87	2.77	2.67	2.56	2.50	2.44	2.38	2.32	2.26	2.19
2.82	2.72	2.62	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.20	2.13
2.77	2.68	2.57	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
2.73	2.64	2.53	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
2.70	2.60	2.50	2.39	2.33	2.27	2.21	2.14	2.08	2.00
2.67	2.57	2.47	2.36	2.30	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
2.64	2.54	2.44	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
2.61	2.51	2.41	2.30	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
2.59	2.49	2.39	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
2.57	2.47	2.36	2.25	2.19	2.13	2.07	2.00	1.93	1.85
2.55	2.45	2.34	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
2.53	2.43	2.32	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
2.51	2.41	2.31	2.20	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
2.39	2.29	2.18	2.07	2.01	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
2.27	2.17	2.06	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
2.16	2.05	1.94	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
2.05	1.94	1.83	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

Tabla 5. Disribución Binomial

n	y	p = 0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
1	0	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500
	1	1.0000	I .0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025
	1	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664
	1	0.9928	0.9720	0.9392	0.8960	0.8438	0.7840	0.7182	0.6480	0.5748
	2	0.9999	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915
	1	0.9860	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910
	2	0.9995	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585
	3	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503
	1	0.9774	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562
	2	0.9988	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931
	3	1.0000	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277
	1	0.9672	0.8857	0.7765	0.6554	0.5339	0.4202	0.3191	0.2333	0.1636
	2	0.9978	0.9842	0.9527	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.441 S
	3	0.9999	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447
	4	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9959	0.9917
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152
	1	0.9556	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024
	2	0.9962	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164
	3	0.9998	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083
	4	1.0000	0.9998	0.9988	0.9953	0.9371	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 5. (Continuación)

n	y	p = 0.5	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
1	0	0.5000	0.4500	0.4000	0.3500	0.3000	0.2500	0.2000	0.1500	0.1000	0.0500
	1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	0	0.2500	0.2025	0.1600	0.1225	0.0900	0.0625	0.0400	0.0225	0.0100	0.0025
	1	0.7500	0.6975	0.6400	0.5775	0.5100	0.4375	0.3600	0.2775	0.1900	0.0975
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	0.1250	0.0911	0.0640	0.0429	0.0270	0.0156	0.0080	0.0034	0.0010	0.0001
	1	0.5000	0.4252	0.3520	0.2818	0.2160	0.1562	0.1040	0.0608	0.0280	0.0072
	2	0.8750	0.8336	0.7840	0.7254	0.6570	0.5781	0.4880	0.3859	0.2710	0.1426
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4	0	0.0625	0.0410	0.0256	0.0150	0.0081	0.0039	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.3125	0.2415	0.1792	0.1265	0.0837	0.0508	0.0272	0.0120	0.0037	0.0005
	2	0.6875	0.6090	0.5248	0.4370	0.3483	0.2617	0.1808	0.1095	0.0523	0.0140
	3	0.9375	0.9085	0.8704	0.8215	0.7599	0.6836	0.5904	0.4780	0.3439	0.1855
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5	0	0.0312	0.0185	0.0102	0.0053	0.0024	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.1875	0.1312	0.0870	0.0540	0.0308	0.0156	0.0067	0.0022	0.0005	0.0000
	2	0.5000	0.4069	0.3174	0.2352	0.1631	0.1035	0.0579	0.0266	0.0086	0.0012
	3	0.8125	0.7438	0.6630	0.5716	0.4718	0.3672	0.2627	0.1648	0.0815	0.0226
	4	0.9688	0.9497	0.9222	0.8840	0.8319	0.7627	0.6723	0.5563	0.4095	0.2262
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	0	0.0156	0.0083	0.0041	0.0018	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.1094	0.0692	0.0410	0.0223	0.0109	0.0046	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000
	2	0.3438	0.2553	0.1792	0.1174	0.0705	0.0376	0.0170	0.0059	0.0013	0.0001
	3	0.6562	0.5585	0.4557	0.3529	0.2557	0.1694	0.0989	0.0473	0.0158	0.0022
	4	0.8906	0.8364	0.7667	0.6809	0.5789	0.4661	0.3446	0.2235	0.1143	0.0328
	5	0.9844	0.9723	0.9533	0.9246	0.8824	0.8220	0.7379	0.6229	0.4686	0.2649
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	0	0.0078	0.0037	0.0016	0.0006	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.0625	0.0357	0.0188	0.0090	0.0038	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.2266	0.1529	0.0963	0.0556	0.0288	0.0129	0.0047	0.0012	0.0002	0.0000
	3	0.5000	0.3917	0.2898	0.1998	0.1260	0.0706	0.0333	0.0121	0.0027	0.0002
	4	0.7734	0.6836	0.5801	0.4677	0.3529	0.2436	0.1480	0.0738	0.0257	0.0038
	5	0.9375	0.8976	0.8414	0.7662	0.6706	0.5551	0.4233	0.2834	0.1497	0.0444
	6	0.9922	0.9848	0.9720	0.9510	0.9176	0.8665	0.7903	0.6794	0.5217	0.3017
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 5. (Continuación)

n	y	p = 0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084
	1	0.9428	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632
	2	0.9942	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201
	3	0.9996	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770
	4	1.0000	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396
	5	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046
	1	0.9288	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385
	2	0.9916	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495
	3	0.9994	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614
	4	1.0000	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214
	5	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025
	1	0.9139	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233
	2	0.9885	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996
	3	0.9990	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660
	4	0.9999	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044
	5	1.0000	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384
	6	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	0	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014
	1	0.8981	0.6974	0.4922	0.3221	0.1971	0.1130	0.0606	0.0302	0.0139
	2	0.9848	0.9104	0.7788	0.6174	0.4552	0.3127	0.2001	0.1189	0.0652
	3	0.9984	0.9815	0.9306	0.8389	0.7133	0.5696	0.4256	0.2963	0.1911
	4	0.9999	0.9972	0.9841	0.9496	0.8854	0.7897	0.6683	0.5328	0.3971
	5	1.0000	0.9997	0.9973	0.9883	0.9657	0.9218	0.8513	0.7535	0.6331
	6	1.0000	1.0000	0.9997	0.9980	0.9924	0.9784	0.9499	0.9006	0.8262
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9957	0.9878	0.9707	0.9390
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9980	0.9941	0.9852
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9978
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 5. (Continuación)

n	y	p = 0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
8	0	0.0039	0.0017	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.0352	0.0181	0.0085	0.0036	0.0013	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.1445	0.0885	0.0498	0.0253	0.0113	0.0042	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000
	3	0.3633	0.2604	0.1737	0.1061	0.0580	0.0273	0.0104	0.0029	0.0004	0.000
	4	0.6367	0.5230	0.4059	0.2936	0.1941	0.1138	0.0563	0.0214	0.0050	0.0004
	5	0.8555	0.7799	0.6846	0.5722	0.4482	0.3215	0.2031	0.1052	0.0381	0.0058
	6	0.9648	0.9368	0.8936	0.8309	0.7447	0.6329	0.4967	0.3428	0.1869	0.0572
	7	0.9961	0.9916	0.9832	0.9681	0.9424	0.8999	0.8322	0.7275	0.5695	0.3366
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	0	0.0020	0.0008	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.0195	0.0091	0.0038	0.0014	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0898	0.0498	0.0250	0.0112	0.0043	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.2539	0.1658	0.0994	0.0536	0.0253	0.0100	0.0031	0.0006	0.0001	0.0000
	4	0.5000	0.3786	0.2666	0.1717	0.0988	0.0489	0.0196	0.0056	0.0009	0.0000
	5	0.7461	0.6386	0.5174	0.3911	0.2703	0.1657	0.0856	0.0339	0.0083	0.0006
	6	0.9102	0.8505	0.7682	0.6627	0.5372	0.3993	0.2618	0.1409	0.0530	0.0084
	7	0.9805	0.9615	0.9295	0.8789	0.8040	0.6997	0.5638	0.4005	0.2252	0.0712
	8	0.9980	0.9954	0.9899	0.9793	0.9596	0.9249	0.8658	0.7684	0.6126	0.3698
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
10	0	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.0107	0.0045	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0547	0.0274	0.0123	0.0048	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.1719	0.1020	0.0548	0.0260	0.0106	0.0035	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000
	4	0.3770	0.2616	0.1662	0.0949	0.0473	0.0197	0.0064	0.0014	0.0001	0.0000
	5	0.6230	0.4956	0.3669	0.2485	0.1503	0.0781	0.0328	0.0099	0.0016	0.0001
	6	0.8281	0.7340	0.6177	0.4862	0.3504	0.2241	0.1209	0.0500	0.0128	0.0010
	7	0.9453	0.9004	0.8327	0.7384	0.6172	0.4744	0.3222	0.1798	0.0702	0.0115
	8	0.9893	0.9767	0.9536	0.9140	0.8507	0.7560	0.6242	0.4557	0.2639	0.0861
	9	0.9990	0.9975	0.9940	0.9865	0.9718	0.9437	0.8926	0.8031	0.6513	0.4013
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11	0	0.0005	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.0059	0.0022	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0327	0.0148	0.0059	0.0020	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.1133	0.0610	0.0293	0.0122	0.0043	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.2744	0.1738	0.0994	0.0501	0.0216	0.0076	0.0020	0.0003	0.0000	0.0000
	5	0.5000	0.3669	0.2465	0.1487	0.0782	0.0343	0.0117	0.0027	0.0003	0.0000
	6	0.7256	0.6029	0.4672	0.3317	0.2103	0.1146	0.0504	0.0159	0.0028	0.0001
	7	0.8867	0.8089	0.7037	0.5744	0.4304	0.2867	0.1611	0.0694	0.0185	0.0016
	8	0.9673	0.9348	0.8811	0.7999	0.6873	0.5448	0.3826	0.2212	0.0896	0.0152
	9	0.9941	0.9861	0.9698	0.9394	0.8870	0.8029	0.6779	0.5078	0.3026	0.1019
	10	0.9995	0.9986	0.9964	0.9912	0.9802	0.9578	0.9141	0.8327	0.6862	0.4312
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 5. (Continuación)

n	y	p = 0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
12	0	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008
	1	0.8816	0.6590	0.4435	0.2749	0.1584	0.0850	0.0424	0.0196	0.0083
	2	0.9804	0.8891	0.7358	0.5583	0.3907	0.2528	0.1513	0.0834	0.0421
	3	0.9978	0.9744	0.9078	0.7946	0.6488	0.4925	0.3467	0.2253	0.1345
	4	0.9998	0.9957	0.9761	0.9274	0.8424	0.7237	0.5833	0.4382	0.3044
	5	1.0000	0.9995	0.9954	0.9806	0.9456	0.8822	0.7873	0.6652	0.5269
	6	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961	0.9857	0.9614	0.9154	0.8418	0.7393
	7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9905	0.9745	0.9427	0.8883
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9983	0.9944	0.9847	0.9644
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9972	0.9921
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	0	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004
	1	0.8646	0.6213	0.3983	0.2336	0.1267	0.0637	0.0296	0.0126	0.0049
	2	0.9755	0.8661	0.6920	0.5017	0.3326	0.2025	0.1132	0.0579	0.0269
	3	0.9969	0.9658	0.8820	0.7473	0.5843	0.4206	0.2783	0.1686	0.0929
	4	0.9997	0.9935	0.9658	0.9009	0.7940	0.6543	0.5005	0.3530	0.2279
	5	1.0000	0.9991	0.9925	0.9700	0.9198	0.8346	0.7159	0.5744	0.4268
	6	1.0000	0.9999	0.9987	0.9930	0.9757	0.9376	0.8705	0.7712	0.6437
	7	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9944	0.9818	0.9538	0.9023	0.8212
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9960	0.9874	0.9679	0.9302
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9922	0.9797
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9959
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	10000	1.0000	10000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	0	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002
	1	0.8470	0.5846	0.3567	0.1979	0.1010	0.0475	0.0205	0.0081	0.0029
	2	0.9699	0.8416	0.6479	0.4481	0.2811	0.1608	0.0839	0.0398	0.0170
	3	0.9958	0.9559	0.8535	0.6982	0.5213	0.3552	0.2205	0.1243	0.0632
	4	0.9996	0.9908	0.9533	0.8702	0.7415	0.5842	0.4227	0.2793	0.1672
	5	1.0000	0.9985	0.9885	0.9561	0.8883	0.7805	0.6405	0.4859	0.3373
	6	1.0000	0.9998	0.9978	0.9884	0.9617	0.9067	0.8164	0.6925	0.5461
	7	1.0000	1.0000	0.9997	0.9976	0.9897	0.9685	0.9247	0.8499	0.7414
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9978	0.9917	0.9757	0.9417	0.8811
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9983	0.9940	0.9825	0.9574
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9961	0.9886
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9978
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 5. (Continuación)

n	y	p = 0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
12	0	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.0032	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0193	0.0079	0.0028	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.0730	0.0356	0.0153	0.0056	0.0017	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.1938	0.1117	0.0573	0.0255	0.0095	0.0028	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000
	5	0.3872	0.2607	0.1582	0.0846	0.0386	0.0143	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000
	6	0.6128	0.4731	0.3348	0.2127	0.1178	0.0544	0.0194	0.0046	0.0005	0.0000
	7	0.8062	0.6956	0.5618	0.4167	0.2763	0.1576	0.0726	0.0239	0.0043	0.0002
	8	0.9270	0.8655	0.7747	0.6533	0.5075	0.3512	0.2054	0.0922	0.0256	0.0022
	9	0.9807	0.9579	0.9166	0.8487	0.7472	0.6093	0.4417	0.2642	0.1109	0.196
	10	0.9968	0.9917	0.9804	0.9576	0.9150	0.8416	0.7251	0.5565	0.3410	0.1184
	11	0.9998	0.9992	0.9978	0.9943	0.9862	0.9683	0.9313	0.8578	0.7176	0.4596
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
13	0	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.0017	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0112	0.0041	0.0013	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.0461	0.0203	0.0078	0.0025	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.1334	0.0698	0.0321	0.0126	0.0040	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.2905	0.1788	0.0977	0.0462	0.0182	0.0056	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000
	6	0.5000	0.3563	0.2288	0.1295	0.0624	0.0243	0.0070	0.0013	0.0001	0.000.,
	7	0.7095	0.5732	0.4256	0.2841	0.1654	0.0802	0.0300	0.0075	0.0009	0.0000
	8	0.8666	0.7721	0.6470	0.4995	0.3457	0.2060	0.0991	0.0342	0.0065	0.000,
	9	0.9539	0.9071	0.8314	0.7217	0.5794	0.4157	0.2527	0.1180	0.0342	0.0031
	10	0.9888	0.9731	0.9421	0.8868	0.7975	0.6674	0.4983	0.3080	0.1339	0.0243
	11	0.9983	0.9951	0.9874	0.9704	0.9363	0.8733	0.7664	0.6017	0.3787	0.13
	12	11.9999	0.9996	0.9987	0.9963	0.9903	0.9762	0.9450	0.8791	0.7458	0.4863
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
14	0	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.0009	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0065	0.0022	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.0287	0.0114	0.0039	0.0011	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.0898	0.0426	0.0175	0.0060	0.0017	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.2120	0.1189	0.0583	0.0243	0.0083	0.0022	0.0004	0.0000	0.0000	0.000
	6	0.3953	0.2586	0.1501	0.0753	0.0315	0.0103	0.0024	0.0003	0.0000	0.0000
	7	0.6047	0.4539	0.3075	0.1836	0.0933	0.0383	0.0116	0.0022	0.0002	0.0000
	8	0.7880	0.6627	0.5141	0.3595	0.2195	0.1117	0.0439	0.0115	0.0015	0.0000
	9	0.9102	0.8328	0.7207	0.5773	0.4158	0.2585	0.1298	0.0467	0.0092	0.0004
	10	0.9713	0.9368	0.8757	0.7795	0.6448	0.4787	0.3018	0.1465	0.0441	0.0042
	11	0.9935	0.9830	0.9602	0.9161	0.8392	0.7189	0.5519	0.3521	0.1584	0.0302
	12	0.9991	0.9971	0.9919	0.9795	0.9525	0.8990	0.8021	0.6433	0.4154	0.1
	13	0.9999	9998	,..87.872	0.9476	0.9932	0.9822	0.9560	0.9972	7712	0.5123
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	

Tabla 5. (Continuación)

n	y	p = 0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
15	0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001
	1	0.8290	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017
	2	0.9638	0.8159	0.6042	0.3980	0.2.361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107
	3	0.9945	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424
	4	0.9994	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204
	5	0.9999	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608
	6	1.0000	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522
	7	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535
	8	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9961	0.9937
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	0	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001
	1	0.8108	0.5147	0.2839	0.1407	0.0635	0.0261	0.0098	0.0033	0.0010
	2	0.9571	0.7892	0.5614	0.3518	0.1971	0.0994	0.0451	0.0183	0.0066
	3	0.9930	0.9316	0.7899	0.5981	0.4050	0.2459	0.1339	0.0651	0.0281
	4	0.9991	0.9830	0.9209	0.7982	0.6302	0.4499	0.2892	0.1666	0.0853
	5	0.9999	0.9967	0.9765	0.9183	0.8103	0.6598	0.4900	0.3288	0.1976
	6	1.0000	0.9995	0.9944	0.9733	0.9204	0.8247	0.6881	0.5272	0.3660
	7	1.0000	0.9999	0.9989	0.9930	0.9729	0.9256	0.8406	0.7161	0.5629
	8	1.0000	1.0000	0.9998	0.9985	0.9925	0.9743	0.9329	0.8577	0.7441
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9929	0.9771	0.9417	0.8759
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9938	0.9809	0.9514
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951	0.9851
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9991	0.9965
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 5. (Continuación)

n	y	p = 0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
15	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0037	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.0176	0.0063	0.0019	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.0592	0.0255	0.0093	0.0028	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.1509	0.0769	0.0338	0.0124	0.0037	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	6	0.3036	0.1818	0.0950	0.0422	0.0152	0.0042	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000
	7	0.5000	0.3465	0.2131	0.1132	0.0500	0.0173	0.0042	0.0006	0.0000	0.0000
	8	0.6964	0.5478	0.3902	0.2452	0.1311	0.0566	0.0181	0.0036	0.0003	0.0000
	9	0.8491	0.7392	0.5968	0.4357	0.2784	0.1484	0.0611	0.0168	0.0022	0.0001
	10	0.9408	0.8796	0.7827	0.6481	0.4845	0.3135	0.1642	0.0617	0.0127	0.0006
	11	0.9824	0.9576	0.9095	0.8273	0.7031	0.5387	0.3518	0.1773	0.0556	0.0055
	12	0.9963	0.9893	0.9729	0.9383	0.8732	0.7639	0.6020	0.3958	0.1841	0.0362
	13	0.9995	0.9983	0.9948	0.9858	0.9647	0.9198	0.8329	0.6814	0.4510	0.1710
	14	1.0000	0.9999	0.9995	0.9984	0.9953	0.9866	0.9648	0.9126	0.7941	0.5367
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
16	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0021	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.0106	0.0035	0.0009	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.0384	0.0149	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.1051	0.0486	0.0191	0.0062	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	0.2272	0.1241	0.0583	0.0229	0.0071	0.0016	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	7	0.4018	0.2559	0.1423	0.0671	0.0257	0.0075	0.0015	0.0002	0.0000	0.0000
	8	0.5982	0.4371	0.2839	0.1594	0.0744	0.0271	0.0070	0.0011	0.0001	0.0000
	9	0.7728	0.6340	0.4728	0.3119	0.1753	0.0796	0.0267	0.0056	0.0005	0.0000
	10	0.8949	0.8024	0.6712	0.5100	0.3402	0.1897	0.0817	0.0235	0.0033	0.0001
	11	0.9616	0.9147	0.8334	0.7108	0.5501	0.3698	0.2018	0.0791	0.0170	0.0009
	12	0.9894	0.9719	0.9349	0.8661	0.7541	0.5950	0.4019	0.2101	0.0684	0.0070
	13	0.9979	0.9934	0.9817	0.9549	0.9006	0.8029	0.6482	0.4386	0.2108	0.0429
	14	0.9997	0.9990	0.9967	0.9902	0.9739	0.9365	0.8593	0.7161	0.4853	0.1892
	15	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9967	0.9900	0.9719	0.9257	0.8147	0.5599
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 5. (Continuación)

n	y	p = 0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
17	0	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000
	1	0.7922	0.4818	0.2525	0.1182	0.0501	0.0193	0.0067	0.0021	0.0006
	2	0.9497	0.7618	0.5198	0.3096	0.1637	0.0774	0.0327	0.0123	0.0041
	3	0.9912	0.9174	0.7556	0.5489	0.3530	0.2019	0.1028	0.0464	0.0184
	4	0.9988	0.9779	0.9013	0.7582	0.5739	0.3887	0.2348	0.1260	0.0596
	5	0.9999	0.9953	0.9681	0.8943	0.7653	0.5968	0.4197	0.2639	0.1471
	6	1.0000	0.9992	0.9917	0.9623	0.8929	0.7752	0.6188	0.4478	0.2902
	7	1.0000	0.9999	0.9983	0.9891	0.9598	0.8954	0.7872	0.6405	0.4743
	8	1.0000	1.0000	0.9997	0.9974	0.9876	0.9597	0.9006	0.8011	0.6626
	9	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9969	0.9873	0.9617	0.9081	0.8166
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9968	0.9880	0.9652	0.9174
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9970	0.9894	0.9699
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9975	0.9914
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	0	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000
	1	0.7735	0.4503	0.2241	0.0991	0.0395	0.0142	0.0046	0.0013	0.0003
	2	0.9419	0.7338	0.4797	0.2713	0.1353	0.0600	0.0236	0.0082	0.0025
	3	0.9891	0.9018	0.7202	0.5010	0.3057	0.1646	0.0783	0.0328	0.0120
	4	0.9985	0.9718	0.8794	0.7164	0.5187	0.3327	0.1886	0.0942	0.0411
	5	0.9998	0.9936	0.9581	0.8671	0.7175	0.5344	0.3550	0.2088	0.1077
	6	1.0000	0.9988	0.9882	0.9487	0.8610	0.7217	0.5491	0.3743	0.2258
	7	1.0000	0.9998	0.9973	0.9837	0.9431	0.8593	0.7283	0.5634	0.3915
	8	1.0000	1.0000	0.9995	0.9957	0.9807	0.9404	0.8609	0.7368	0.5778
	9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9946	0.9790	0.9403	0.8653	0.7473
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9939	0.9788	0.9424	0.8720
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9986	0.9938	0.9797	0.9463
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9986	0.9942	0.9817
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9951
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 5. (Continuación)

n	y	p = 0.5	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
17	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0012	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.0064	0.0019	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.0245	0.0086	0.0025	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.0717	0.0301	0.0106	0.0030	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	0.1662	0.0826	0.0348	0.0120	0.0032	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	7	0.3145	0.1834	0.0919	0.0383	0.0127	0.0031	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000
	8	0.5000	0.3374	0.1989	0.0994	0.0403	0.0124	0.0026	0.0003	0.0000	0.0000
	9	0.6855	0.5257	0.3595	0.2128	0.1046	0.0402	0.0109	0.0017	0.0001	0.0000
	10	0.8338	0.7098	0.5522	0.3812	0.2248	0.1071	0.0377	0.0083	0.0008	0.0000
	11	0.9283	0.8529	0.7361	0.5803	0.4032	0.2347	0.1057	0.0319	0.0047	0.0001
	12	0.9755	0.9404	0.8740	0.7652	0.6113	0.4261	0.2418	0.0987	0.0221	0.0012
	13	0.9936	0.9816	0.9536	0.8972	0.7981	0.6470	0.4511	0.2444	0.0826	0.0088
	14	0.9988	0.9959	0.9877	0.9673	0.9226	0.8363	0.6904	0.4802	0.2382	0.0503
	15	0.9999	0.9994	0.9979	0.9933	0.9807	0.9499	0.8818	0.7475	0.5182	0.2078
	16	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9977	0.9925	0.9775	0.9369	0.8332	0.5819
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
18	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.0038	0.0010	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.0154	0.0049	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.0481	0.0183	0.0058	0.0014	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	0.1189	0.0537	0.0203	0.0062	0.0014	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	7	0.2403	0.1280	0.0576	0.0212	0.0061	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	8	0.4073	0.2527	0.1347	0.0597	0.0210	0.0054	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000
	9	0.5927	0.4222	0.2632	0.1391	0.0596	0.0193	0.0043	0.0005	0.0000	0.0000
	10	0.7597	0.6085	0.4366	0.2717	0.1407	0.0569	0.0163	0.0027	0.0002	0.0000
	11	0.8811	0.7742	0.6257	0.4509	0.2783	0.1390	0.0513	0.0118	0.0012	0.0000
	12	0.9519	0.8923	0.7912	0.6450	0.4656	0.2825	0.1329	0.0419	0.0064	0.0002
	13	0.9846	0.9589	0.9058	0.8114	0.6673	0.4813	0.2836	0.1206	0.0282	0.0015
	14	0.9962	0.9880	0.9672	0.9217	0.8354	0.6943	0.4990	0.27,8	0.0982	0.0109
	15	0.9993	0.9975	0.9918	0.9764	0.9400	0.8647	0.7287	0.5203	0.2662	0.0581
	16	0.9999	0.9997	0.9987	0.9954	0.9858	0.9605	0.9009	0.7759	0.5497	0.2265
	17	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9944	0.9820	0.9464	0.8499	0.6028
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 5. (Continuación)

n	y	p = 0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45
19	0	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000
	1	0.7547	0.4203	0.1985	0.0829	0.0310	0.0104	0.0031	0.0008	0.0002
	2	0.9335	0.7054	0.4413	0.2369	0.1113	0.0462	0.0170	0.0055	0.0015
	3	0.9868	0.8850	0.6841	0.4551	0.2631	0.1332	0.0591	0.0230	0.0077
	4	0.9980	0.9648	0.8556	0.6733	0.4654	0.2822	0.1500	0.0696	0.0280
	5	0.9998	0.9914	0.9463	0.8369	0.6678	0.4739	0.2968	0.1629	0.0777
	6	1.0000	0.9983	0.9837	0.9324	0.8251	0.6655	0.4812	0.3081	0.1727
	7	1.0000	0.9997	0.9959	0.9767	0.9225	0.8180	0.6656	0.4878	0.3169
	8	1.0000	1.0000	0.9992	0.9933	0.9713	0.9161	0.8145	0.6675	0.4940
	9	1.0000	1.0000	0.9999	0.9984	0.9911	0.9674	0.9125	0.8139	0.6710
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9977	0.9895	0.9653	0.9115	0.8159
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9972	0.9886	0.9648	0.9129
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9884	0.9658
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9969	0.9891
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.7358	0.3917	0.1756	0.0692	0.0243	0.0076	0.0021	0.0005	0.0001
	2	0.9245	0.6769	0.4049	0.2061	0.0913	0.0355	0.0121	0.0036	0.0009
	3	0.9841	0.8670	0.6477	0.4114	0.2252	0.1071	0.0744	0.0160	0.0049
	4	0.9974	0.9568	0.8298	0.6296	0.4148	0.2375	0.1182	0.0510	0.0189
	5	0.9997	0.9887	0.9327	0.8042	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553
	6	1.0000	0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299
	7	1.0000	0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.4159	0.2520
	8	1.0000	0.9999	0.9987	0.9900	0.9591	0.8867	0.7624	0.5956	0.4143
	9	1.0000	1.0000	0.9998	0.9974	0.9861	0.9520	0.8782	0.7553	0.5914
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507
	11	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9804	0.9435	0.8692
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9940	0.9790	0.9420
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9935	0.9786
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9936
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	10000	1.0000	1.0000	1.0000
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 5. (Continuación)

n	y	p = 0.50	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
19	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.0022	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.0096	0.0028	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.0318	0.0109	0.0031	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	0.0835	0.0342	0.0116	0.0031	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	7	0.1796	0.0871	0.0352	0.0114	0.0028	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	8	0.3238	0.1841	0.0885	0.0347	0.0105	0.0023	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	9	0.5000	0.3290	0.1861	0.0875	0.0326	0.0089	0.0016	0.0001	0.0000	0.0000
	10	0.6762	0.5060	0.3325	0.1855	0.0839	0.0287	0.0067	0.0008	0.0000	0.0000
	11	0.8204	0.6831	0.5122	0.3344	0.1820	0.0775	0.0233	0.0041	0.0003	0.0000
	12	0.9165	0.8273	0.6919	0.5188	0.3345	0.1749	0.0676	0.0163	0.0017	0.0000
	13	0.9682	0.9223	0.8371	0.7032	0.5261	0.3322	0.1631	0.0537	0.0086	0.0002
	14	0.9904	0.9720	0.9304	0.8500	0.7178	0.5346	0.3267	0.1444	0.0352	0.0020
	15	0.9978	0.9923	0.9770	0.9409	0.8668	0.7369	0.5449	0.3159	0.1150	0.0132
	16	0.9996	0.9985	0.9945	0.9830	0.9538	0.8887	0.7631	0.5587	0.2946	0.0665
	17	1.0000	0.9998	0.9992	0.9969	0.9896	0.9690	0.9171	0.8015	0.5797	0.2453
	18	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9958	0.9856	0.9544	0.8649	0.6226
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.0013	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.0059	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	0.0207	0.0064	0.0016	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	6	0.0577	0.0214	0.0065	0.0015	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	7	0.1316	0.0580	0.0210	0.0060	0.0013	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	8	0.2517	0.1308	0.0565	0.0196	0.0051	0.0009	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	9	0.4119	0.2493	0.1275	0.0532	0.0171	0.0039	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000
	10	0.5881	0.4086	0.2447	0.1218	0.0480	0.0139	0.0026	0.0002	0.0000	0.0000
	11	0.7483	0.5857	0.4044	0.2376	0.1133	0.0409	0.0100	0.0013	0.0001	0.0000
	12	0.8684	0.7480	0.5841	0.3990	0.2277	0.1018	0.0321	0.0059	0.0004	0.0000
	13	0.9423	0.8701	0.7500	0.5834	0.3920	0.2142	0.0867	0.0219	0.0024	0.0000
	14	0.9793	0.9447	0.8744	0.7546	0.5836	0.3828	0.1958	0.0673	0.0113	0.0003
	15	0.9941	0.9811	0.9490	0.8818	0.7625	0.5852	0.3704	0.1702	0.0432	0.0026
	16	0.9987	0.9951	0.9840	0.9556	0.8929	0.7748	0.5886	0.3523	0.1330	0.0159
	17	0.9998	0.9991	0.9964	0.9879	0.9645	0.9087	0.7939	0.5951	0.3231	0.0755
	18	1.0000	0.9999	0.9995	0.9979	0.9924	0.9757	0.9308	0.8244	0.6083	0.2642
	19	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9968	0.9885	0.9612	0.8784	0.6415
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Tabla 6. Valores críticos para el estadístico Wilcoxon

	$W_{0.005}$	$W_{0.01}$	$W_{0.025}$	$W_{0.05}$	$W_{0.10}$	$W_{0.20}$	$W_{0.30}$	$W_{0.40}$	$W_{0.50}$	$\frac{n(n+1)}{2}$
n=4	0	0	0	0	1	3	3	4	5	10
5	0	0	0	1	3	4	5	6	7.5	15
6	0	0	1	3	4	6	8	9	10.5	21
7	0	1	3	4	6	9	11	12	14	28
8	1	2	4	6	9	12	14	16	18	36
9	2	4	6	9	11	15	18	20	22.5	45
10	4	6	9	11	15	19	22	25	27.5	55
11	6	8	11	14	18	23	27	30	33	66
12	8	10	14	18	22	28	32	36	39	78
13	10	13	18	22	27	33	38	42	45.5	91
14	13	16	22	26	32	39	44	48	52.5	105
15	16	20	26	31	37	45	51	55	60	120
16	20	24	30	36	43	51	58	63	68	136
17	24	28	35	42	49	58	65	71	76.5	153
18	28	33	41	48	56	66	73	80	85.5	171
19	33	38	47	54	63	74	82	89	95	190
20	38	44	53	61	70	83	91	98	105	210
21	44	50	59	68	78	91	100	108	115.5	231
22	49	56	67	76	87	100	110	119	126.5	253
23	55	63	74	84	95	110	120	130	138	276
24	62	70	82	92	105	120	131	141	150	300
25	69	77	90	101	114	131	143	153	162.5	325
26	76	85	99	111	125	142	155	165	175.5	351
27	84	94	108	120	135	154	167	178	189	378
28	92	102	117	131	146	166	180	192	203	406
29	101	111	127	141	158	178	193	206	217.5	435
30	110	121	138	152	170	191	207	220	232.5	465
31	119	131	148	164	182	205	221	235	248	496
32	129	141	160	176	195	219	236	250	264	528
33	139	152	171	188	208	233	251	266	280.5	561
34	149	163	183	201	222	248	266	282	297.5	595
35	160	175	196	214	236	263	283	299	315	630
36	172	187	209	228	251	279	299	317	333	666
37	184	199	222	242	266	295	316	335	351.5	703
38	196	212	236	257	282	312	334	353	370.5	741
39	208	225	250	272	298	329	352	372	390	780
40	221	239	265	287	314	347	371	391	410	820
41	235	253	280	303	331	365	390	411	430.5	861
42	248	267	295	320	349	384	409	431	451.5	903

Tabla 6. (Continuación)

	$W_{0.005}$	$W_{0.01}$	$W_{0.025}$	$W_{0.05}$	$W_{0.10}$	$W_{0.20}$	$W_{0.30}$	$W_{0.40}$	$W_{0.50}$	$\frac{n(n+1)}{2}$
43	263	282	311	337	366	403	429	452	473	946
44	277	297	328	354	385	422	450	473	495	990
45	292	313	344	372	403	442	471	495	517.5	1035
46	308	329	362	390	423	463	492	517	540.5	1081
47	324	346	379	408	442	484	514	540	564	1128
48	340	363	397	428	463	505	536	563	588	1176
49	357	381	416	447	483	527	559	587	612.5	1225
50	374	398	435	467	504	550	583	611	637.5	1275

Tabla 7. Valores críticos para el estadístico Mann-Whitney

n	p	m = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	I6	17	18	19	20
	0.001	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
	0.005	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4
2	**0.01**	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5
	0.025	3	3	3	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6
	0.05	3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6	6	7	7	7	7	8	8	8
	0.10	3	4	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8	8	9	9	10	10	11	11
	0.001	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7
	0.005	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	8	8	8	9	9	9	9	10	10
3	**0.01**	6	6	6	6	6	7	7	8	8	8	9	9	9	10	10	11	11	11	12
	0.025	6	6	6	7	8	8	9	9	10	10	11	11	12	12	13	13	14	14	15
	0.05	6	7	7	8	9	9	10	II	11	12	12	13	14	14	15	16	16	17	18
	0.10	7	8	8	9	10	11	12	12	13	14	15	I6	17	17	18	19	20	21	22
	0.001	10	10	10	10	10	10	10	10	11	11	II	12	12	12	13	13	14	14	14
	0.005	10	10	10	10	II	11	12	12	13	13	14	14	15	16	16	17	17	18	19
4	**0.01**	10	10	10	11	12	12	13	14	14	15	16	16	17	18	18	19	20	20	21
	0.025	10	10	11	12	13	14	15	15	I6	17	18	19	20	21	22	22	23	24	25
	0.05	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	25	26	27	28	29
	0.10	11	12	14	15	16	17	18	20	21	22	23	24	26	27	28	29	31	32	33
	0.001	15	15	15	15	15	15	16	17	17	18	18	19	19	20	21	21	22	23	23
	0.005	15	15	15	16	17	17	18	19	20	21	22	23	23	24	25	26	27	28	29
5	**0.01**	15	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
	0.025	15	I6	17	18	19	21	22	23	24	25	27	28	29	30	31	33	34	35	36
	0.05	16	17	18	20	21	22	24	25	27	28	29	31	32	34	35	36	38	39	41
	0.10	17	18	20	21	23	24	26	28	29	31	33	34	36	38	39	41	43	44	46
	0.001	21	21	21	21	21	21	23	24	25	26	26	27	28	29	30	31	32	33	34
	0.005	21	21	22	23	24	25	26	27	28	29	31	32	33	34	35	37	38	39	40
6	**0.01**	21	21	23	24	25	26	28	29	30	31	33	34	35	37	38	40	41	42	44
	0.025	21	23	24	25	27	28	30	32	33	35	36	38	39	41	43	44	46	47	49
	0.05	22	24	25	27	29	30	32	34	36	38	39	41	43	45	47	48	50	52	54
	0.10	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	56	58	60
	0.001	28	28	28	28	29	30	31	32	34	35	36	37	38	39	40	42	43	44	45
	0.005	28	28	29	30	32	33	35	36	38	39	41	42	44	45	47	48	50	51	53
7	**0.01**	28	29	30	32	33	35	36	38	40	41	43	45	46	48	50	52	53	55	57
	0.025	28	30	32	34	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63
	0.05	29	31	33	35	37	40	42	44	46	48	50	53	55	57	59	62	64	66	68
	0.10	30	33	35	37	40	42	45	47	50	52	55	57	60	62	65	67	70	72	75
	0.001	36	36	36	37	38	39	41	42	43	45	46	48	49	51	52	54	55	57	58
	0.005	36	36	38	39	41	43	44	46	48	50	52	54	55	57	59	61	63	65	67
8	**0.01**	36	37	39	41	43	44	46	48	50	52	54	56	59	61	63	65	67	69	71
	0.025	37	39	41	43	45	47	50	52	54	56	59	61	63	66	68	71	73	75	78
	0.05	38	40	42	45	47	50	52	55	57	60	63	65	68	70	73	76	78	81	84
	0.10	39	42	44	47	50	53	56	59	61	64	67	70	73	76	79	82	85	88	91

Tabla 7. (Continuación)

n	p	m = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	0.001	45	45	45	47	48	49	51	53	54	56	58	60	61	63	65	67	69	71	72
	0.005	45	46'	47	49	51	53	55	57	59	62	64	66	68	70	73	75	77	79	82
	0.01	45	47	49	51	53	55	57	60	62	64	67	69	72	74	77	79	82	84	86
	0.025	46	48	50	53	56	58	61	63	66	69	72	74	77	80	83	85	88	91	94
	0.05	47	50	52	55	58	61	64	67	70	73	76	79	82	85	88	91	94	97	100
	0.10	48	51	55	58	61	64	68	71	74	77	81	84	87	91	94	98	101	104	108
	0.001	55	55	56	57	59	61	62	64	66	68	70	73	75	77	79	81	83	85	88
	0.005	55	56	58	60	62	65	67	69	72	74	77	80	82	85	87	90	93	95	98
10	0.01	55	57	59	62	64	67	69	72	75	78	80	83	86	89	92	94	97	100	103
	0.025	56	59	61	64	67	70	73	76	79	82	85	89	92	95	98	101	104	108	111
	0.05	57	60	63	67	70	73	76	80	83	87	90	93	97	100	104	107	111	114	118
	0.10	59	62	66	69	73	77	80	84	88	92	95	99	103	107	110	114	118	122	126
	0.001	66	66	67	69	71	73	75	77	79	82	84	87	89	91	94	96	99	101	104
	0.005	66	67	69	72	74	77	80	83	85	88	91	94	97	100	103	106	109	112	115
11	0.01	66	68	71	74	76	79	82	85	89	92	95	98	101	104	108	111	114	117	120
	0.025	67	70	73	76	80	83	86	90	93	97	100	104	107	111	114	118	122	125	129
	0.05	68	72	75	79	83	86	90	94	98	101	105	109	113	117	121	124	128	132	136
	0.10	70	74	78	82	86	90	94	98	103	107	111	115	119	124	128	132	136	140	145
	0.001	78	78	79	81	83	86	88	91	93	96	98	102	104	106	110	113	116	118	121
	0.005	78	80	82	85	88	91	94	97	100	103	106	110	113	116	120	123	126	130	133
12	0.01	78	81	84	87	90	93	96	100	103	107	110	114	117	121	125	128	132	135	139
	0.025	80	83	86	90	93	97	101	105	108	112	116	120	124	128	132	136	140	144	148
	0.05	81	84	88	92	96	100	105	109	111	117	121	126	130	134	139	143	147	151	156
	0.10	83	87	91	96	100	105	109	114	118	123	128	132	137	142	146	151	156	160	165
	0.001	91	91	93	95	97	100	103	106	109	112	115	118	121	124	127	130	134	137	140
	0.005	91	93	95	99	102	105	109	112	116	119	123	126	130	134	137	141	145	149	152
13	0.01	92	94	97	101	104	108	112	115	119	123	127	131	135	139	143	147	151	155	159
	0.025	93	96	100	104	108	112	116	120	125	129	133	137	142	146	151	155	159	164	168
	0.05	94	98	102	107	111	116	120	125	129	134	139	143	148	153	157	162	167	172	176
	0.10	96	101	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	155	160	166	171	176	181	186
	0.001	105	105	107	109	112	115	118	121	125	128	131	135	138	142	145	149	152	156	160
	0.005	105	107	110	113	117	121	124	128	132	136	140	144	148	152	156	160	164	169	173
14	0.01	106	108	112	116	119	123	128	132	136	140	144	149	153	157	162	166	171	175	179
	0.025	107	III	115	119	123	128	132	137	142	146	151	156	161	165	170	175	180	184	189
	0.05	109	113	117	122	127	132	137	142	147	152	157	162	167	172	177	183	188	193	198
	0.10	110	116	121	126	131	137	142	147	153	158	164	169	175	180	186	191	197	203	208
	0.001	120	120	122	125	128	133	135	138	142	145	149	153	157	161	164	168	172	176	180
	0.005	120	123	126	129	133	137	141	145	150	154	158	163	167	172	176	181	185	190	194
15	0.01	121	124	128	132	136	140	145	149	154	158	163	168	172	177	182	187	191	196	201
	0.025	122	126	131	135	140	145	150	155	160	165	170	175	180	185	191	196	201	206	211
	0.05	124	128	133	139	144	149	154	160	165	171	176	182	187	193	198	204	209	215	221
	0.10	126	131	137	143	148	154	160	166	172	178	184	189	195	201	207	213	219	225	231
	0.001	136	136	139	142	145	148	152	156	160	164	168	172	176	180	185	189	193	197	202
	0.005	136	139	142	146	150	155	159	164	168	173	178	182	187	192	197	202	207	211	216
16	0.01	137	140	144	149	153	158	163	168	173	178	183	188	193	198	203	208	213	219	224
	0.025	138	143	148	152	158	163	168	174	179	184	190	196	201	207	212	218	223	229	235
	0.05	140	145	151	156	162	167	173	179	185	191	197	202	208	214	220	226	232	238	244
	0.10	142	148	154	160	166	173	179	185	191	198	204	211	217	223	230	236	243	249	256

Tabla 7. (Continuación)

n	p	m = 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
	0.001	153	154	156	159	163	167	171	175	179	183	188	192	197	201	206	211	215	220	224
	0.005	153	156	160	164	169	173	178	183	188	193	198	203	208	214	219	224	229	235	240
17	**0.01**	154	158	162	167	172	177	182	187	192	198	203	209	214	220	225	231	236	242	241
	0.025	156	160	165	171	176	182	188	193	199	205	211	217	223	229	235	241	247	253	259
	0.05	157	163	169	174	180	187	193	199	205	211	218	224	231	237	243	250	256	263	269
	0.10	160	166	172	179	185	192	199	206	212	219	226	233	239	246	253	260	267	274	281
	0.001	171	172	175	178	182	186	190	195	199	204	209	214	218	223	228	233	238	243	248
	0.005	171	174	178	183	188	193	198	203	209	214	219	225	230	236	242	247	253	259	264
18	**0.01**	172	176	181	186	191	196	202	208	213	219	225	231	237	242	248	254	260	266	272
	0.025	174	179	184	190	196	202	208	214	220	227	233	239	246	252	258	265	271	278	284
	0.05	176	181	188	194	200	207	213	220	227	233	240	247	254	260	267	274	281	288	295
	0.10	178	185	192	199	206	213	220	227	234	241	249	256	263	270	278	285	292	300	307
	0.001	190	191	194	198	202	206	211	216	220	225	231	236	241	246	251	257	262	268	273
	0.005	191	194	198	203	208	213	219	224	230	236	242	248	254	260	265	272	278	284	290
19	**0.01**	192	195	200	206	211	217	223	229	235	241	247	254	260	266	273	279	285	292	298
	0.025	193	198	204	210	216	223	229	236	243	249	256	263	269	276	283	290	297	304	310
	0.05	195	201	208	214	221	228	235	242	249	256	263	271	278	285	292	300	307	314	321
	0.10	198	205	212	219	227	234	242	249	257	264	272	280	288	295	303	311	319	326	334
	0.001	210	211	214	218	223	227	232	237	243	248	253	259	265	270	276	281	287	293	299
	0.005	211	214	219	224	229	235	241	247	253	259	265	271	278	284	290	297	303	310	316
20	**0.01**	212	216	221	227	233	239	245	251	258	264	271	278	284	291	298	304	311	318	325
	0.025	213	219	225	231	238	245	251	259	266	273	280	287	294	301	309	316	323	330	338
	0.05	215	222	229	236	243	250	258	265	273	280	288	295	303	311	318	326	334	341	349
	0.10	218	226	233	241	249	257	265	273	281	289	297	305	313	321	330	338	346	354	362

Tabla 8. Valores críticos para el estadístico Kruskal-Wallis

Tamaño de muestra	$W_{0.90}$	$W_{0.95}$	$W_{0.99}$
2, 2, 2	3.7143	4.5714	4.5714
3, 2, 1	3.8571	4.2857	4.2857
3, 2, 2	4.4643	4.5000	5.3571
3, 3, 1	4.0000	4.5714	5.1429
3, 3, 2	4.2500	5.1389	6.2500
3, 3, 3	4.6000	5.0667	6.4889
4, 2, 1	4.0179	4.8214	4.8214
4, 2, 2	4.1667	5.1250	6.0000
4, 3, 1	3.8889	5.0000	5.8333
4, 3, 2	4.4444	5.4000	6.3000
4, 3, 3	4.7000	5.7273	6.7091
4, 4, 1	4.0667	4.8667	6.1667
4, 4, 2	4.4455	5.2364	6.8727
4, 4, 3	4.7730	5.5758	7.1364
4, 4, 4	4.5000	5.6538	7.5385
5, 2, 1	4.0500	4.4500	5.2500
5, 2, 2	4.2933	5.0400	6.1333
5, 3, 1	3.8400	4.8711	6.4000
5, 3, 2	4.4946	5.1055	6.8218
5, 3, 3	4.4121	5.5152	6.9818
5, 4, 1	3.9600	4.8600	6.8400
5, 4, 2	4.5182	5.2682	7.1182
5, 4, 3	4.5231	5.6308	7.3949
5, 4, 4	4.6187	5.6176	7.7440
5, 5, 1	4.0364	4.9091	6.8364
5, 5, 2	4.5077	5.2462	7.2692
5, 5, 3	4.5363	5.6264	7.5429
5, 5, 4	4.5200	5.6429	7.7914
5, 5, 5	4.5000	5.6600	7.9800

Tabla 9. Percentiles del rango estudentizado

$q_{0.05;N,v}$

	p																		
v	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	18.1	26.7	32.8	37.2	40.5	43.1	45.4	47.3	49.1	50.6	51.9	53.2	54.3	55.4	56.3	57.2	58.0	58.8	59.6
2	6.09	8.28	9.80	10.89	11.73	12.43	13.03	13.54	13.99	14.39	14.75	15.08	15.38	15.65	15.91	16.14	16.36	16.57	16.77
3	4.50	5.88	6.83	7.51	8.04	8.47	8.85	9.18	9.46	9.72	9.95	10.16	10.35	10.52	10.69	10.81	10.98	11.12	11.24
4	3.93	5.00	5.76	6.31	6.73	7.06	7.35	7.60	7.83	8.03	8.21	8.37	8.52	8.67	8.80	8.92	9.03	9.11	9.24
5	3.61	4.54	5.18	5.64	5.99	6.28	6.52	6.74	6.93	7.1	7.25	7.39	7.52	7.64	7.75	7.36	7.95	8.04	8.13
6	3.46	4.34	4.90	5.31	5.63	5.89	6.12	6.32	6.49	6.65	6.79	6.92	7.04	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.35	5.59	5.80	5.99	6.15	6.29	6.42	6.54	6.65	6.75	6.84	6.93	7.01	7.08	7.16
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87
9	3.20	3.95	4.42	4.76	5.02	5.24	5.43	5.60	5.74	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.65
10	3.15	3.88	4.33	4.66	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	5.72	5.83	5.93	6.03	6.12	6.20	6.27	6.34	6.41	16.47
11	3.11	3.82	4.26	4.58	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98	6.06	6.14	6.20	6.27	6.33
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.40	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21
13	3.06	3.73	1.15	4.46	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	6.00	6.06	6.11
14	3.03	3.70	4.11	4.41	1.64	4.83	4.99	5.13	5.25	5.36	5.46	5.56	5.64	5.72	5.79	5.86	5.92	5.98	6.03
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	5.31	5.40	5.49	5.57	5.65	5.72	5.79	5.85	5.91	5.96
16	3.00	3.65	4.05	4.34	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90
17	2.98	3.62	4.02	4.31	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	5.21	5.31	5.39	5.47	5.55	5.61	5.68	5.74	5.79	5.84
18	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.83	4.96	5.07	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79
19	2.96	359	3.98	4.26	4.47	4.64	4.79	4.92	5.04	5.14	5.23	5.32	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75
20	2.95	3.58	3.96	4.24	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.50	5.56	5.61	5.66	5.71
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.50	5.55	5.59
30	2.49	3.48	3.84	4.11	4.30	4.46	4.60	4.72	4.83	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.48
40	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.74	4.82	4.90	4.98	5.05	5.11	5.17	5.22	5.27	5.32	5.36
60	2.83	3.40	3.74	3.913	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24
120	2.80	3.36	3.69	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56	4.64	4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13
Infinito	2.77	332	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.84	4.89	4.93	4.97	5.01

Tabla 9. (Continuación)

	$q_{0.01;N,v}$																		
	p																		
v	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
1	90.0	135	164	186	202	216	227	237	246	253	260	266	272	227	282	286	290	294	198
2	14.0	19.0	22.3	24.7	26.6	28.2	29.5	30.7	31.7	32.6	33.4	34.1	34.8	35.4	36.0	36.5	37.0	37.5	37.9
3	8.26	10.6	12.2	13.3	14.2	15.0	15.6	16.2	16.7	17.1	17.5	17.9	18.2	18.5	18.8	19.1	19.3	19.5	19.8
4	6.51	8.12	9.17	9.96	10.6	11.1	11.5	11.9	12.3	12.6	12.8	13.1	13.3	13.5	13.7	13.9	14.1	14.2	14.4
5	5.70	6.97	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	10.48	10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81	11.93
6	5.24	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	9.30	9.49	9.65	9.81	9.95	10.08	10.21	10.32	10.43	10.54
7	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	8.55	8.71	8.86	9.00	9.12	9.24	9.35	9.46	9.55	9.65
8	4.74	5.63	6.20	6.63	6.96	7.24	7.47	7.68	7.87	8.03	8.18	8.31	8.44	8.5.5	8.66	8.76	8.85	8.94	9.03
9	4.60	.5.43	5.69	6.35	6.66	6.91	7.13	7.32	7.49	7.65	7.78	7.91	8.03	8.13	8.23	9.32	8.41	8.49	8.57
10	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	7.36	7.48	7.60	7.71	7.81	7.91	7.99	8.07	8.15	8.22
11	4.39	5.14	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	7.13	7.25	7.36	7.46	7.56	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95
12	4.32	5.04	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	6.94	7.06	7.17	7.26	7.36	7.44	7.52	7.59	7.66	7.73
13	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	6.79	6.90	7.01	7.10	7.19	7.27	7.34	7.42	7.48	7.55
14	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	6.66	6.77	6.87	6.96	7.05	7.12	7.20	7.27	7.33	7.39
15	4.17	4.83	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	6.55	6.66	6.76	6.84	6.93	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26
16	4.13	4.78	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	6.46	6.56	6.66	6.74	6.82	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15
17	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	6.38	6.48	6.57	6.66	6.73	6.80	6.87	6.94	7.00	7.05
18	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.94	6.08	6.20	6.31	6.41	6.50	6.58	6.65	6.72	6.79	6.85	6.91	6.96
19	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14	6.25	6.34	6.43	6.51	6.58	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89
20	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09	6.19	6.29	6.37	6.45	6.52	6.59	6.65	6.71	6.76	6.82
24	3.96	4.54	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92	6.02	6.11	6.19	6.26	6.33	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61
30	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.5.4	5.65	5.76	5.85	5.93	6.01	6.08	6.14	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41
40	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.27	5.39	5.50	5.60	5.69	5.77	5.84	5.90	5.96	6.02	6.07	6.12	6.17	6.21
60	3.76	4.28	4.60	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45	5.53	5.60	5.67	5.73	5.79	5.84	5.89	5.93	5.98	6.02
120	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30	5.38	5.44	5.51	5.56	5.61	5.66	5.71	5.75	5.79	5.83
Infinito	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16	5.23	5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65

Tabla 10. Valores críticos para la prueba de rango múltiple de Duncan

$q_{0.05;p,v}$												
	p											
v	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**20**	**50**	**100**
1	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0	18.0
2	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09	6.09
3	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.5	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50	4.50
4	3.93	4.01	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02	4.02
5	3.64	3.74	3.79	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83	3.83
6	3.46	3.58	3.64	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68	3.68
7	3.35	3.47	3.54	3.58	3.60	3.61	3.61	3.01	3.61	3.61	3.61	3.61
8	3.26	3.39	3.47	3.52	3.55	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56	3.56
9	3.20	3.34	3.41	3.47	3.50	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52	3.52
10	3.15	3.30	3.37	3.43	3.46	3.47	3.47	3.47	3.47	3.48	3.48	3.48
11	3.11	3.27	3.35	3.39	3.43	3.44	3.45	3.46	3.46	3.48	3.48	3.48
12	3.08	3.23	3.33	3.36	3.40	3.42	3.44	3.44	3.46	3.48	3.48	3.48
13	3.06	3.21	3.30	3.35	3.38	3.41	3.42	3.44	3.45	3.47	3.47	3.47
14	3.03	3.18	3.27	3.33	3.37	3.39	3.41	3.42	3.44	3.47	3.47	3.47
15	3.01	3.16	3.25	3.31	3.36	3.38	3.40	3.42	3.43	3.47	3.47	3.47
16	3.00	3.15	3.23	3.30	3.34	3.37	3.39	3.41	3.43	3.47	3.47	3.47
17	2.98	3.13	3.22	3.28	3.33	3.36	3.38	3.40	3.42	3.47	3.47	3.47
18	2.97	3.12	3.21	3.27	3.32	3.35	3.37	3.39	3.41	3.47	3.17	3.47
19	2.96	3.11	3.19	3.26	3.31	3.35	3.37	3.39	3.41	3.47	3.47	3.47
20	2.95	3.10	3.18	3.25	3.30	3.34	3.36	3.38	3.40	3.47	3.47	3.47
30	2.89	3.04	3.12	3.20	3.25	3.29	3.32	3.35	3.37	3.47	3.47	3.47
40	2.86	3.01	3.10	3.17	3.22	3.27	3.30	3.33	3.35	3.47	3.47	3.47
60	2.83	2.98	3.08	3.14	3.20	3.24	3.28	3.31	3.33	3.47	3.48	3.48
100	2.80	2.95	3.05	3.12	3.18	3.22	3.26	3.29	3.32	3.47	3.53	3.53
Infinito	2.77	2.92	3.02	3.09	3.15	3.19	3.23	3.26	3.29	3.47	3.61	3.67

Bibliografía

1. Alexander M. Mood. Introduction to the Theory of Statistics, Mc Graw-Hill, 1985.

2. Box, Hunter. Introducción al Diseño de Experimentos, Reverté, España, 1993.

3. Canavos, W. J. Probabilidad y Estadística: Aplicaciones y Métodos, Mc Graw-Hill, 1987.

4. Casas Sánchez José. Inferencia Estadística, Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S.A.,1997.

5. Cochran, W. G. & G. Cox. Diseños Experimentales, Editorial Trillas, México, 1971.

6. Conover, W. J. Practical Nonparametric Statistics, Wiley & Sons, 1980.

7. Daniel, W. Applied Nonparametric Statistics, USA PWS Kent, 1990.

8. Fisher. The Design of Experiments, Hafner Publishing Company, Nueva York, 1966.

9. Freud, John E. Estadística Matemática con Aplicaciones, Prentice-Hall, Hispano-americana, México, 1990.

10. García Leal Julia. Diseño Estadístico de Experimentos, Grupo Editorial Universitario, Granada, 1998.

11. Kruskal, W. H. A nonparametri test for the several sample problem. The Annals of the Mathematical Statistics, 1952.

12. Mendenhall, William. Estadística Matemática con Aplicaciones, Grupo Editorial Iberoame-ricana, México, 1986.

13. Montgomery Douglas. Diseño y Análisis de Experimentos, Grupo Editorial Ibero-americana, México,1991.

14. Montgomery Douglas. Introduction to Statistical Quality Control, Wiley, 1997.

15. Mood Alexander. Introduction to the theory of statistics, Mc Graw-Hill, 1974.

16. Ruíz-Maya Pérez Luis. Estadística II: Inferencia, Editorial AC., Madrid, 1995.

17. Siegel, Sidney. Estadística No Paramétrica, Trillas, México, 1995.

18. Wayne W. Daniel. Estadística con aplicaciones a las ciencias sociales y a la educación, Mc Graw Hill.

Internet

1. http://www.ceniap.gov.ve/bdigital/ztzoo/zt1201/texto/valor.htm

2. http://www.atheneum.doyma.es/Socios/sala_l/lect_bt.htm

3. http://www.seh-lelha.org/noparame.htm#LIBRO

4. http://ftp.medprev.uma.es/libro/node157.htm

5. http://www.itch.edu.mx/academic/industrial/estadistical/cap01c.html #distribucionmuestraldiferenciamedias

6. http:www.edustatspr.com/documentos/lecciones/L3.3_Prueba_Hipotesis_2_pob95_.ppt

7. http://www.bio.puc.cl/cursos/bio242a/class11.doc

8. http://www.mty.itesm.mx/data/materias/estadistica/Cap7NAV.htm