UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"LA CONJETURA DE MOORE"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

CARLOS AZAREL MARTINEZ RANERO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA

2004

La Conjetura de Moore.

Carlos Azarel Martínez Ranero.

Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM

Director de Tesis: Angel Tamariz Mascarúa

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: "LA CONJETURA DE MOORE"

realizado por CARLOS AZAREL MARTINEZ RANERO

con número de cuenta 9632061-3, quien cubrió los créditos de la carrera de: MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA

Propietario DR. SALVADOR GARCIA FERREIRA

Propietario DR. MICHAEL HRUSAK

Suplente DR. AGUSTIN CONTRERAS CARRETO

Suplente M. en C. CARLOS GERARDO PANIAGUA RAMIREZ

Consejo Departamental de

M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA

Contenido

Prefacio.

1. Introducción.

El objetivo de esta tesis es dar algunos ejemplos de la interacción entre las técnicas de la teoria de conjuntos para resolver problemas en topología general. Como este terreno es muy amplio nos enfocaremos únicamente en la conjetura de Moore, un problema que fué por más de 50 años considerado como el problema más importante en topología general.

En el primer capítulo introduciremos el axioma de Martin y diamante dos axiomas adicionales a ZFC, el axioma de Martín y diamante $\diamondsuit$ los cuales formarán nuestras herramientas principales para resolver el problema de Moore. En este primer capítulo veremos algunas equivalencias de estos axiomas y los utilizaremos para resolver la hipótesis de Suslin.

En el segundo capítulo conoceremos un poco de la historia de la conjetura de Moore y desarrollaremos algunos de los resultados fundamentales. En este capítulo trataremos exclusivamente con resultados en ZFC y probaremos dos de los teoremas más importantes relacionados con la conjetura de Moore en ZFC. Como son el teorema de Reed-Zenor y el teorema de Chaber-Zenor.

Finalmente, en el último capítulo aplicaremos finalmente todas las técnicas conjuntistas desarrolladas en el primer capítulo y algunas otras técnicas nuevas para poder probar la independencia de la conjetura de Moore.

2. Convenciones.

Símbolos Lógicos.

Los símbolos $\rightarrow$, $\neg$, $\vee$ $\wedge$ denotan implicación, negación, disjunción y conjunción respectivamente. El cuantificador universal (para cada) es denotado por $\forall$ y el existencial (existe) por $\exists$.

Operaciones sobre conjuntos.

Si R es una familia de conjuntos, entonces $\bigcup R$ denota la unión y $\bigcap R$ denota la intersección de la familia R, respectivamente. ESto es, para un x arbitrario, las siguientes equivalencias se cumplen:

$$x \in \bigcup R \leftrightarrow \exists A \in R(x \in A)$$

y

$$x \in \bigcap R \leftrightarrow \forall A \in R(x \in A).$$

Si $R = \{A, B\}$ entonces $\bigcup R = A \cup B$ y $\bigcap R = A \cap B$. La unión de una familia indexada $\{A_i : i \in I\}$ es denotada por $\bigcup\{A_i : i \in I\}$ ó por $\bigcup_{i \in I} A_i$, (de manera similar para la intersección). La diferencia de los conjuntos A, B es denotada por $A \setminus B$. El simbolo $\emptyset$ denota al conjunto vacio.

Decimos que una familia R es *ajena*, si $R \neq \emptyset$ y se cumplen las siguientes condiciones:

si $A \in R$, entonces $A \neq \emptyset$,

si $A, B \in R$ y $A \neq B$, entonces $A \cap B = \emptyset$.

El símbolo $\mathcal{P}(X)$ denota el conjunto potencia de X, i.e. $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$.

Funciones.

El símbolo $domf$ denota el dominio y $ranf$ el rango de una función f respectivamente. La imagen de un subconjunto $A \subset domf$ bajo f es denotada por $f[A]$, generalmente la imagen es denotada por $f(A)$ pero en muchos casos un conjunto será un elemento de $domf$ y un subconjunto al mismo tiempo por lo que haremos este pequeño cambio intentando evitar confuciones. Similarmente, la preimagen de un subconjunto B bajo f es dnotada por $f^{-1}[B]$.

Como es usual, $f \restriction A$ es la restricción de f a un subconjunto $A \subset domf$.

Números ordinales. Siguiendo a Von Neumann un conjunto α es un ordinal si satisface las siguientes condiciones:

si $x \in \alpha$, entonces $x \subset \alpha$,

si $x, y \in \alpha$, entonces $x \in y \ \vee \ x = y \ \vee \ y \in x$.

La clase de los ordinales ON está bien ordenada por la inclusión y generalmente escribiremos $\alpha \leqslant \beta$ para $\alpha \subset \beta$. El orden estricto es sólo la pertenencia. Por lo tanto cada ordinal es igual al conjunto de los ordinales más pequeños que él: $\alpha = \{\beta \in ON : \beta < \alpha\}$. Todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal.

Para cada $\alpha \in ON$ el conjunto $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ es un ordinal y es el sucesor inmediato de α. Ordinales β que no son de la forma $\alpha + 1$ son llamados *limites*. El ordinal infinito más pequeño es denotado por ω y es conocido como el conjunto de los numeros naturales. Ya que los elementos consecutivos de ω son $0 = \emptyset,\ 1 = \{\emptyset\},\ 2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, ...$

Cada subconjunto $A \subset ON$ tiene un supremo $supA = \bigcup A$ y también tiene un infimo $infA = \bigcap A$.

Números cardinales.

Un ordinal $\kappa \in ON$ es llamado un *cardinal* si para cada $\alpha < \kappa$ no existe una función uno a uno de α sobre κ. Para cada conjunto A existe un único cardinal κ tal que existe una biyección $f : A \rightarrow \kappa$, escribimos $\kappa = |A|$. Los números $i \in \omega$ son las cardinalidades de los conjuntos finitos y ω es la cardinalidad de los conjuntos numerables. Cardinales infinitos consecutivos son denotados por símbolos

$$\omega = \omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < ...$$

Esto es, ω_1 denota al cardinal no numerable más pequeño. Para un ordinal limite definimos la noción de cofinalidad

$$cof(\alpha) = min\{|A| : A \subset \alpha \ \wedge \ supA = \alpha\}.$$

Cardinales que satisfacen que $\kappa = cof(\kappa)$ son llamados regulares. Por ejemplo ω y todos los cardinales no límites (i.e., de la forma $\kappa = \omega_{\alpha+1}$) son cardinales regulares.

Para conjuntos arbitrarios A, B el conjunto A^B consiste del conjunto de todas las funciones de B en A, cardinalidad de A^B es denotada por κ^λ donde $|A| = \kappa$ y $|B| = \lambda$. Para $\lambda \geqslant \omega$ sea $\kappa^{<\lambda} = sup\{\kappa^\alpha : \alpha < \lambda\}$.

A continuación veremos una técnica muy útil para verificar que ciertos espacios tienen la ccc (ver definición en el siguiente capítulo).

0.1. DEFINICIÓN. Una familia $\mathcal{A}$ de conjuntos es llamada un Δ-sistema si existe un conjunto fijo r, llamado la ráiz del Δ-sistema, tal que $a \cap b = r$ cada vez que a, b son elementos distintos de $\aleph_0$.

El principal resultado sobre Δ-sistemas es el llamado Δ-lema el cual enunciaremos a continuación.

0.2. LEMA. (Δ-lema) Si $\mathcal{A}$ es una familia no numerable de conjuntos finitos, existe un subconjunto no numerable $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ que forma un Δ-sistema.

DEMOSTRACIÓN. Sin perdida de generalidad podemos suponer que todos los elementos de $\mathcal{A}$ tiene la misma cardinalidad. Ahora probaremos el problema por inducción sobre n (donde n es la cardinalidad de los elementos de $\mathcal{A}$). Si $n = 1$ entonces $\mathcal{A}$ es un Δ-sistema con ráiz $\emptyset$. Supongamos que el lema se sigue para n y que $|X| = n + 1$ para todo $X \in \mathcal{A}$. Si existe un elemento a que pertenece a una cantidad no numarable de $X \in \mathcal{A}$, aplicamos la hipotesis de inducción a la colección $\{X \setminus \{a\} : X \in \mathcal{A} \ \wedge \ a \in X\}$, y obtenemos un $\mathcal{B}$ con las propiedades requeridas. De otro modo, cada a pertenece a una cantidad numerable de $X \in \mathcal{A}$, y construimos una colección ajena $\mathcal{B} = \{X_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$, como sigue, por inducción sobre α. Dado X_ξ, $\xi < \alpha$, encontramos $X = X_\alpha \mathcal{A}$ que es ajeno de todos los X_ξ, $\xi < \alpha$. □

A continuación probaremos una versión del teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski de teoría de modelos, la siguiente versión puramente combinatoria del teorema es aplicada frecuentemente en teoría de conjuntos.

0.3. DEFINICIÓN. Una función n-aria sobre A es una función $f : A^n \to A$ si $n > 0$ y un elemento de A si $n = 0$. Si $B \subset A$, decimos que B es cerrado bajo f si y sólo si $f[B^n] \subset B$ (o $f \in B$ cuando $n = 0$). Una función *finitaria* es una función n-aria para algun $n \in \omega$. Si $\mathcal{J}$ es una familia de funciones finitarias y $B \subset A$, la *clausura* de B con respecto a $\mathcal{J}$ es el minimo $C \subset A$ tal que $B \subset C$ y C es cerrado bajo todas las funciones en $\mathcal{J}$.

0.4. Teorema. Sea κ un cardinal infinito. Supongamos que $B \subset A$, $|B| \leqslant \kappa$, y $\mathcal{J}$ es una familia de $\leqslant \kappa$ funciones finitarias sobre A. Entonces la clausura de B bajo $\mathcal{J}$ tiene cardinalidad menor κ.

Demostración. Si $f \in \mathcal{J}$ y $D \subset A$, sea $f * D = f[D^n]$ si f es n-aria, o $\{f\}$ si $n = 0$. Note que $|D| \leqslant \kappa$ implica que $|f * D| \leqslant \kappa$. Sea $C_0 = B$ y $C_{n+1} = C_n \cup \bigcup\{f * C_n : f \in \mathcal{J}\}$. Entonces C_ω es la clausura de B bajo $\mathcal{J}$ y la cardinalidad de C_ω es $\leqslant \kappa$. $\square$

CAPITULO 1

Diamante y el axioma de Martin.

1. Introducción

En este capítulo veremos el axioma de Martin y el axioma de diamante, que son dos de los axiomas que más aplicaciones tienen en la topología general. Veremos algunas equivalencias de estos axiomas y desarrollaremos las herramientas conjuntistas necesarias para probar la independencia de la conjetura de Moore en el capítulo 3.

2. Axioma de Martin

En esta sección introduciremos uno de los temas centrales de este trabajo, el axioma de Martin (MA). Contrario a los axiomas básicos de ZFC, el axioma de Martin no pretende ser un principio "intuitivamente" evidente, de hecho a primera vista luce bastante extraño y carente de motivación. Su motivación original nació de algunos detalles técnicos de ciertos argumentos de *forcing*.
El axioma de Martin puede ser fácilmente definido topológicamente como la siguiente aserción: ningún espacio compacto T_2 con la c.c.c. es la unión de $< 2^\omega$ cerrados densos en ninguna parte. Aunque esta versión de MA es muy accesible, tiene la desventaja de ser difícil de aplicar directamente. Así que vamos a dar una versión de MA en términos de ordenes parciales. Esta forma es un poco más difícil de comprender, pero más fácil de aplicar una vez entendida. Después probaremos que las dos versiones son equivalentes.

1.1. **Definición.** Un espacio topológico X cumple la *condición de la cadena contable* (c.c.c.) si cualquier familia de abiertos no vacíos ajenos por pares tiene cardinalidad $< \omega_1$.

Empezaremos por fijar nuestra notación para ordenes parciales. Para empezar será más conveniente tomar $\leqslant$ como nuestro símbolo básico y definir $<$ en terminos de $\leqslant$.

1.2. DEFINICIÓN. (a) Un *pre-orden parcial* es un par $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ tal que $\mathbb{P} \neq \emptyset$ y $\leqslant$ es una relación sobre $\mathbb{P}$ que es transitiva y reflexiva. Los elementos de $\mathbb{P}$ son llamados *condiciones*.

(b) $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ es un orden parcial si y sólo si es un pre-orden parcial y

$$\forall p, q \in \mathbb{P}\ (p \leqslant q\ \wedge\ q \leqslant p\ \rightarrow p = q).$$

En este caso, definimos $p < q$ si y sólo si $p \leqslant q$ y $p \neq q$.

1.3. DEFINICIÓN. Sea $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un pre-orden parcial. Una *cadena* en $\mathbb{P}$ es un subconjunto $C \subset \mathbb{P}$ tal que:

$\forall p, q \in C\ (p \leqslant q\ \vee\ q \leqslant p)$. Y decimos que p y q son compatibles si existe $r \in \mathbb{P}$ ($r \leqslant p$ y $r \leqslant q$); y son *incompatibles* ($p \perp q$) si no son compatibles. Una *anticadena* es un subconjunto $A \subset \mathbb{P}$ tal que para todo $p, q \in A((p \neq q) \ \rightarrow p \perp q)$.

1.4. DEFINICIÓN. Un pre-orden parcial $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ tiene la condición de la cadena contable (c.c.c.) si cada anticadena en $\mathbb{P}$ es numerable.

1.5. DEFINICIÓN. Sea $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ un pre-orden parcial.

1. $D \subset \mathbb{P}$ es un *denso* en $\mathbb{P}$ si para todo $p \in \mathbb{P}$ existe un $q \leqslant p$ ($q \in D$).
2. $G \subset \mathbb{P}$ es un *filtro* sobre $\mathbb{P}$ si:

(a) $\forall p, q \in G\ \exists r \in G\ (r \leqslant p\ \wedge\ r \leqslant q)$, y

(b) $\forall p \in G\ \forall q \in \mathbb{P}(p \leqslant q \rightarrow\ q \in G)$.

1.6. DEFINICIÓN. MA(κ) es la siguiente aserción: Si $\langle \mathbb{P}, \leqslant \rangle$ es un pre-orden parcial no vacío con la c.c.c., y $\mathcal{D}$ es una familia de $\leqslant \kappa$ subconjuntos densos de $\mathbb{P}$, entonces existe un filtro G en $\mathbb{P}$ tal que para todo $D \in \mathcal{D}$ ($G \cap D \neq \emptyset$). Y MA es la siguiente afirmación: para todo $\kappa < 2^\omega (MA(\kappa))$.

1.7. LEMA. (a) Si $\kappa < \kappa'$, entonces MA(κ') implica MA(κ).

(b) MA(2^ω) es falso.

(c) MA(ω) siempre se cumple.

DEMOSTRACIÓN.

(a) La prueba de (a) es clara.

(b) Sea $\mathbb{P} = \{p : p \subset \omega \times 2 \ \wedge \ |p| < \omega \ \wedge \ p \text{ es función}\}$.

Decimos que $p \leqslant q$ si y sólo si $q \subset p$ i.e. (si y sólo si p extiende a q como función). $\mathbb{P}$ tiene claramente la c.c.c. ya que $|\mathbb{P}| = \omega$. Para cada $n \in \omega$, sea $D_n := \{p \in \mathbb{P} : n \in dom(p)\}$. Dado $p \in \mathbb{P}$, $p \in D_n$ o $q \leqslant p$ donde $q := p \cup (n, 0) \in D_n$; por lo tanto D_n es denso en $\mathbb{P}$ para todo $n \in \omega$. Para cada $h \in 2^\omega$ definimos $E_h := \{p \in \mathbb{P} : \exists n \in dom(p)\ (p(n) \neq h(n))\}$. Claramente E_h es denso para toda $h \in 2^\omega$. Sea $\mathcal{D} := \{D_n : n \in \omega\} \cup \{E_h : h \in 2^\omega\}$. La cardinalidad de $\mathcal{D}$ es $\mathfrak{c}$. Ahora, si existiera un filtro G $\mathcal{D}$-genérico, entonces $f_G := \bigcup G$ sería una función de ω en 2 distinta de cualquier función de ω en 2, lo cual es imposible.

(c) Dada una familia $\mathcal{D} = \{D_n : n \in \omega\}$ de conjuntos densos, definimos por inducción sobre n una sucesión de puntos en $\mathbb{P}$ como sigue: Sea p_0 un elemento cualquiera de $\mathbb{P}$ (ya que $\mathbb{P} \neq \emptyset$). Supongamos que tenemos elegidos $\{p_k : k \leqslant n\}$; entonces escogemos p_{n+1} como una extensión de p_n en D_n. Esto es posible ya que D_n es denso. Sea G el filtro generado por $\{p_n : n \in \omega\}$; i.e., $G := \{q \in \mathbb{P} : \exists n\ (q \geqslant p_n\}$; entonces G es un filtro y para todo n $(G \cap D_n \neq \emptyset)$. □

Ahora veremos algunas aplicaciones del Axioma de Martin en la topología general. La siguiente consecuencia de $MA(\kappa)$ es de hecho equivalente a $MA(\kappa)$.

1.8. Teorema. Supongamos que $MA(\kappa)$ se cumple. Sea X un espacio compacto, Hausdorff con la c.c.c. y sea U_α un subconjunto abierto denso de X para cada $\alpha < \kappa$. Entonces $\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $\mathbb{P} := \{p \subset X : p \text{ es abierto} \wedge p \neq \emptyset\}$, con $p \leqslant q$ si y sólo si $p \subset q$; entonces, $p \perp q$ si sólo si $p \cap q = \emptyset$. Así que $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c. ya que X la tiene. Para cada $\alpha < \kappa$, sea $D_\alpha := \{p \in \mathbb{P} : cl(p) \subset U_\alpha\}$; D_α es denso en el orden de $\mathbb{P}$ ya que U_α es denso en el espacio X y X es un espacio regular. Si tomamos un filtro G tal que $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \kappa$, entonces $\{cl(p) : p \in G\}$ tiene la p.i.f. (propiedad de la intersección finita). Pero X es compacto, entonces $\bigcap\{cl(p) : p \in G\} \neq \emptyset$. Por lo tanto $\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha \neq \emptyset$. □

Si $\kappa = \omega$, el teorema anterior es sólo el Teorema de Baire y no requiere que X tenga la c.c.c., como en la prueba en ZFC de $MA(\omega)$ la cual tampoco requiere la c.c.c. Consideraremos un ejemplo para ver que la hipotesis de tener la c.c.c. no es superflua.

Sea $\mathbb{P} := \{p : p \subset \omega \times \omega_1 \ \wedge \ |p| < \omega \ \wedge \ p$ es función$\}$. Para cada $\alpha < \omega_1$ definimos $D_\alpha := \{p \in \mathbb{P} : \alpha \in ran(p)\}$; claramente cada D_α es denso. No puede existir un filtro G tal que $G \cap D_\alpha \neq \emptyset$ para todo $\alpha < \omega_1$ ya que esto implicaría que $ran(\bigcup G) = \omega_1$; i.e., existe una función de ω sobre ω_1 lo cual es una contradicción. Por supuesto $\mathbb{P}$ no tiene la c.c.c. ya que $\{\langle 0, \alpha\rangle : \alpha < \omega_1\}$ es una anticadena no numerable.

1.9. Lema. $MA(\kappa)$ es equivalente a $MA(\kappa)$ restringido a conjuntos parcialmente ordenados de cardinalidad $\leqslant \kappa$.

Demostración. Asumimos la forma restringida de $MA(\kappa)$, y sea $\langle \mathbb{Q}, <\rangle$ un parcialmente ordenado con la c.c.c. de cardinalidad arbitraria, y $\mathcal{D}$ una familia de $\leqslant \kappa$ subconjuntos densos de $\mathbb{Q}$. Encontraremos un filtro H en $\mathbb{Q}$ que intersecte a cada $D \in \mathcal{D}$ aplicando la forma restringida de $MA(\kappa)$ a un sub-orden $\mathbb{P} \subset \mathbb{Q}$ con $|\mathbb{P}| \leqslant \kappa$.

Mostraremos que podemos encontrar un $\mathbb{P} \subset \mathbb{Q}$ tal que:

1. $|\mathbb{P}| \leqslant \kappa$
2. $D \cap \mathbb{P}$ es denso en $\mathbb{P}$ para cada $D \in \mathcal{D}$.
3. Para cada $p, q \in \mathbb{P}$, p, q son compatibles en $\mathbb{P}$ si y sólo si son compatibles en $\mathbb{Q}$.

Para $D \in \mathcal{D}$, sea $f_D : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tal que:

$\forall p \in \mathbb{Q}\ (f_D(p) \in D \ \wedge \ f_D(p) \leqslant p)$,

y sea $g : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tal que

$\forall p, q \in \mathbb{Q}\ (p, q \text{ compatibles } \to \ g(p,q) \leqslant p \ \wedge \ g(p,q) \leqslant q)$.

Sea $\mathbb{P} \subset \mathbb{Q}$ tal que $|\mathbb{P}| \leqslant \kappa$ y $\mathbb{P}$ es cerrado bajo g y cada f_D (ver los preliminares). $\mathbb{P}$ satisface (3) por ser la clausura bajo g y (2) por ser la clausura bajo f_D. (3) implica que $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c., así que aplicando $MA(\kappa)$ restringido a $\mathbb{P}$, obtenemos un filtro G sobre $\mathbb{P}$ tal que para toda $D \in \mathcal{D}$ $(G \cap D \cap \mathbb{P} \neq \emptyset)$. Si H es el filtro generado por G, i.e., $H = \{q \in \mathbb{Q} : \exists\, p \in G(p \leqslant q)\}$, entonces H es un filtro en $\mathbb{Q}$ que intersecta a cada $D \in \mathcal{D}$ □

Ahora vamos a probar que la conclusión del teorema 1.8 implica $MA(\kappa)$, la demostración la haremos en el contexto de las álgebras booleanas, por lo que revisaremos algunas nociones básicas. Si $\mathcal{B}$ es una álgebra booleana, denotaremos generalmente por $<$ el orden de $\mathcal{B}$. Si $a, b \in \mathcal{B}$, $a \vee b$ es la mínima cota superior de $\{a, b\}$, y $a \wedge b$ es la máxima cota inferior. a' es el complemento de a. $1, 0$ son el máximo y el mínimo de $\mathcal{B}$, respectivamente.

$\mathcal{B}$ es llamada completa sí cada subconjunto $S \subset \mathcal{B}$ tiene ambos un supremo y un ínfimo, denotados por $\bigvee S$, $\bigwedge S$ respectivamente.

Una anticadena en $\mathcal{B}$ es un conjunto $A \subset \mathcal{B} \setminus \{0\}$ tal que $\forall\, a, b \in A\ (a \neq b \ \rightarrow\ a \wedge b = 0)$. Observemos que A es realmente una anticadena en $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ en el sentido de ordenes parciales. Decimos que $\mathcal{B}$ tiene la c.c.c. si toda anticadena es numerable. Por un filtro sobre $\mathcal{B}$, entendemos un filtro sobre el parcialmente ordenado $\mathcal{B} \setminus \{0\}$. Por MA restringido a álgebras booleanas completas, nos referimos a MA restringido a parcialmente ordenados de la forma $\mathcal{B} \setminus \{0\}$ para alguna álgebra booleana completa $\mathcal{B}$ con la c.c.c. Vamos a describir un procedimiento general para asociarle a cada parcialmente ordenado un álgebra booleana completa.

1.10. LEMA. Sea $\mathbb{P}$ un conjunto parcialmente ordenado. Entonces existe un álgebra booleana completa $\mathcal{B}$ y una función $\imath : \mathbb{P} \rightarrow \mathcal{B} \setminus \{0\}$ tal que:

1. $\imath[\mathbb{P}]$ es denso en $\mathcal{B} \setminus \{0\}$.
2. $\forall\, p, q \in \mathbb{P}\ (p \leqslant q \ \rightarrow\ \imath(p) \leqslant \imath(q))$.
3. $\forall\, p, q \in \mathbb{P}\ (p \perp q \ \leftrightarrow\ \imath(p) \wedge \imath(q) = 0)$.

En la mayoria de los casos de interés, $\imath$ será uno a uno y $\forall\, p, q \in \mathbb{P}\ (p \leqslant q \ \leftrightarrow\ \imath(p) \leqslant \imath(q))$, así que podemos identificar a $\mathbb{P}$ con un suborden de $\mathcal{B}$. Sin embargo, si por ejemplo, todos los elementos de $\mathbb{P}$ son compatibles, entonces $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ e $\imath(p) = 1$ para todo $p \in \mathbb{P}$. $\mathcal{B}$ es llamada la completación de $\mathbb{P}$; la cual es única salvo isomorfismos. Podemos pensar a los elementos de $\mathcal{B}$ como supremos formales de subcojuntos de $\mathbb{P}$, aunque nuestra prueba será topológica. Recalcamos que si X es un espacio topológico, podemos definir el álgebra de los regularmente abiertos de X, ro(X). Los elementos de ro(X) son los subconjuntos regularmente abiertos $b \subset X$ y $b \leqslant c \ \leftrightarrow\ b \subset c$. Las operaciones algebraicas en ro(X) son como sigue: $b \wedge c = b \cap c$; $b \vee c = int(cl(b \cup c))$; $b' = int(X \setminus b)$. ro(X) es completa, y si $S \subset ro(X)$, $\bigvee S = int(cl(\bigcup S))$ y $\bigwedge S = int(\bigcap S)$. Ahora empezaremos la prueba del Lema 1.10.

DEMOSTRACIÓN. Definimos una topología sobre $\mathbb{P}$ como sigue. Si $p \in \mathbb{P}$ sea $N_p := \{q \in \mathbb{P} : q \leqslant p\}$. Le damos a $\mathbb{P}$ la topología cuya base es $\{N_p : p \in \mathbb{P}\}$. Los N_p forman una base ya que $q \in N_p \ \rightarrow\ N_q \subset N_p$. Esta topología no es generalmente Hausdorff, ni si quiera T_1. Para p, N_p es el abierto más pequeño que contiene a p. Sea $\mathcal{B} := ro(\mathbb{P})$ y sea $\imath(p) := int(cl(N_p))$. Para verificar (1), sea b cualquier conjunto regularmente abierto no vacío. Fijemos $p \in b$, entonces $N_p \subset b$, así que $\imath(p) = int(cl(N_p)) \subset int(cl(b)) = b$. (2) es obvio. Para (3), supongamos primero que p, q son compatibles, y fijamos $r \leqslant p$ y $r \leqslant q$. Por (2), $\imath(r) \leqslant \imath(p)$ y $\imath(r) \leqslant \imath(q)$, así que $\imath(p) \wedge \imath(q) \neq \emptyset$. Reciprocamente, supongamos que $p \perp q$; entonces $N_p \cap N_q = \emptyset$. Como N_q es abierto,

$cl(N_p) \cap N_q = \emptyset$, así que $\imath(p) \cap N_q = int(cl(N_p) \cap N_q = \emptyset$. Debido a que $\imath(p)$ es abierto, el mismo argumento aplicado a q nos lleva a que $\imath(p) \wedge \imath(q) = \emptyset$. □

1.11. Teorema. Para cada $\kappa \geqslant \omega$, $MA(\kappa)$ es equivalente a $MA(\kappa)$ restringido a álgebras booleanas completas.

Demostración. Supongamos que $MA(\kappa)$ se cumple restringido a álgebras booleanas completas. Sea $\mathbb{P}$ un conjunto parcialmente ordenado arbitrario con la c.c.c. y $\mathcal{D}$ una familia de $\leqslant \kappa$ subconjuntos densos de $\mathbb{P}$. Sean $\mathcal{B}$ e $\imath$ como en el lema anterior. $\mathcal{B}$ tiene la c.c.c., ya que si $\{b_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ fuera una anticadena en $\mathcal{B}$, entonces podríamos, por (1) del lema anterior, encontrar p_α tal que $\imath(p_\alpha) \leqslant b_\alpha$; entonces por (2), del lema anterior, $\{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ sería una anticadena en $\mathbb{P}$. También, si $D \in \mathcal{D}$, entonces $\imath[D]$ es denso, ya que si $b \in \mathcal{B} \setminus \{0\}$. existe $p \in \mathbb{P}$ con $\imath(p) \leqslant b$ y $q \in D(q \leqslant p)$; esto implica que $\imath(q) \leqslant b$ $(\imath(q) \in \imath[D])$. Ahora, por MA restringido a álgebras booleanas completas, existe un filtro G en $\mathcal{B}$ tal que $G \cap \imath[D] \neq \emptyset$ para todo $D \in \mathcal{D}$. Sea $H := \imath^{-1}[G]$; entonces $H \cap D \neq \emptyset$ $\forall D \in \mathcal{D}$. Desafortunadamente, H puede que no sea un filtro. Es claro por (2) que H satisface:

(b) $\forall p \in H\ \forall q \in \mathbb{P}\ (q \geqslant p \ \rightarrow\ q \in H)$. La dificultad es con:

(a) $\forall p, q \in H\ \exists r \in H(r \leqslant p\ \wedge\ r \leqslant q)$

Si $p, q \in H$, entonces p y q son compatibles por (3), pero puede que no tengan una extensión común en H. Para remediar esto, definimos:

$D_{pq} := \{r \in \mathbb{P} : (r \leqslant p\ \wedge\ r \leqslant q)\ \vee\ r \perp q\ \vee r \perp p\}$.

D_{pq} es denso para cada $p, q \in \mathbb{P}$. Para ver esto, fijemos $r_0 \in \mathbb{P}$. Si r_0 tiene una extensión incompatible con p o con q, entonces tal extensión está en D_{pq}. Si no, entonces, en particular, r_0 es compatible con p, así que fijemos r_1, tal que $r_1 \leqslant r_0$ y $r_1 \leqslant p$. Como r_1 es compatible con q, fijamos r_2 tal que $r_2 \leqslant r_1$ y $r_2 \leqslant q$. En vista de que $r_2 \leqslant p, r_2$ es una extensión de r_0 en D_{pq}. Ahora, si $|\mathbb{P}| \leqslant \kappa$, podemos suponer que cada $D_{pq} \in \mathcal{D}$ ya que $|\mathcal{D} \cup \{D_{pq} : p, q \in \mathbb{P}\}| \leqslant \kappa$. En este caso si $p, q \in H$, fijamos $r \in H \cap D_{pq}$. Debido a que los elemetos de H son compatibles dos a dos, no podemos tener que $r \perp q\ \vee\ r \perp p$, así que $r \leqslant q$ y $r \leqslant p$. Entonces (a) se satisface y por lo tanto H es un filtro. Hemos probado que $MA(\kappa)$ restringido a álgebras booleanas completas implica $MA(\kappa)$ restringido a ordenes parciales de cardinalidad $\leqslant \kappa$, pero esto implica $MA(\kappa)$, por el lema 1.9. □

Finalmente, mostraremos que MA es equivalente a una proposición puramente topológica.

1.12. **Teorema**. Para cada $\kappa \geqslant \omega$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) $MA(\kappa)$.
b) $MA(\kappa)$ restringido a parcialmente ordenados de cardinalidad $\leqslant \kappa$.
c) $MA(\kappa)$ restringido a álgebras booleanas completas.
d) Si X es un espacio compacto, Hausdorff con la c.c.c. y $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ es una familia de abiertos densos entonces $\bigcap_{\alpha<\kappa} U_\alpha \neq \emptyset$.

Demostración. (a), (b) ,(c) son equivalentes por 1.9 y por 1.11, y (a) $\rightarrow$ (d) es el contenido del teorema 1.8. Sólo falta probar, digamos, (d) $\rightarrow$ (c). Sea $\mathcal{B}$ un álgebra booleana y $\mathcal{D}$ una familia de $\leqslant \kappa$ subconjuntos densos de $\mathcal{B}\setminus\{0\}$. Sea X el espacio de Stone de $\mathcal{B}$. Esto es, los elementos de X son todos los ultrafiltros sobre $\mathcal{B}$, y si $b \in \mathcal{B}$ un abierto básico está dado por

$$N_b := \{G \in X : b \in G\}.$$

X es un espacio compacto Hausdorff. Además $N_b \cap N_c = \emptyset \leftrightarrow b \wedge c = 0$, así que X tiene la c.c.c. Para cada $D \in \mathcal{D}$ sea

$$W_D := \bigcup\{N_b : b \in D\}.$$

Cada W_D es abierto por ser unión de abiertos. W_D es denso (en el sentido topológico), ya que si N_c fuera ajeno de W_D, entonces $c\wedge b = 0$ para todo $b \in D$, lo cual se debe a que D es denso (en el sentido del orden) entonces contiene una extensión de c. Por (d) podemos elegir un $G \in \bigcap\{W_D : D \in \mathcal{D}\}$. Entonces G es un filtro (de hecho un ultrafiltro) y para cada $D \in \mathcal{D}$, $G \in W_D$ implica que existe $b \in D(G \in N_b)$ o que existe $b \in D(b \in G)$, o $G \cap D \neq \emptyset$. □

3. El problema de Suslin

Recordemos que un espacio X tiene la c.c.c. si toda familia de abiertos ajenos no vacíos es numerable. Si X es numerable, entonces, trivialmente X tiene la c.c.c. Si X es no numerable, entonces X puede que no tenga la c.c.c.; por ejemplo, si X tiene la topología discreta, entonces los singuletes forman una familia no numerable de abiertos ajenos no vacíos. Un ejemplo no trivial de un espacio con la c.c.c. es $\mathbb{R}$ con la topología usual, esto se sigue de que $\mathbb{R}$ es separable.

1.13. **Lema**. Si X es separable, entonces X tiene la c.c.c.

DEMOSTRACIÓN. Sea $D \subset X$ un denso numerable. Si $U_\alpha(\alpha < \omega_1)$ son abiertos ajenos no vacíos, entonces podemos elegir $d_\alpha \in D \cap U_\alpha$. Pero todos los $d_{\alpha'}s$ son distintos lo cual deja una contradicción. $\square$

Más adelante veremos que el recíproco no es necesariamente cierto. Sin embargo, si consideramos esta propiedad para espacios ordenados, la respuesta de si estas condiciones son equivalentes es independiente de ZFC, como veremos más adelante en los teoremas 1.18 y 1.54.

1.14. DEFINICIÓN. Una *línea de Suslin* es un conjunto totalmente ordenado $\langle X, < \rangle$ tal que, en la topología del orden, X es c.c.c. pero no es separable. La hipótesis de Suslin (SH) es la afirmación: no existen lineas de Suslin.

SH se origina, naturalmente, en un intento de caracterizar el tipo de orden de los números reales $\langle \mathbb{R}, < \rangle$. Es bien conocido que cualquier conjunto totalmente ordenado $\langle X, < \rangle$ satisfaciendo:

(a) X no tiene primer ni último elemento,
(b) X es conexo en la topología del orden, y
(c) X es separable en la topología del orden,

es isomorfo a $\langle \mathbb{R}, < \rangle$. En 1970 Suslin (ver, [Suslin 1970]) se preguntó si la condición (c) de la lista anterior podía ser reemplazado por:

c') X es c.c.c. en la topología del orden.

Claramente, bajo SH (c) y (c') son equivalentes, y uno puede mostrar que si hay una línea de Suslin, entonces hay una línea satisfaciendo (a) y (b). Esto es, SH es equivalente a que (a), (b) y (c') caracterizen el orden de $\langle \mathbb{R}, < \rangle$.

Una pregunta natural acerca de una propiedad topológica es si ella es preservada bajo productos. Por ejemplo el producto de dos espacios separables es separable ya que si D es denso en X y E es denso en Y, entonces $D \times E$ es denso en $X \times Y$. Sin embargo, la separabilidad no se preserva bajo productos arbitrarios (de hecho se preserva para $\mathfrak{c}$ factores pero no para $\mathfrak{c}^+$ factores, ver [Eng 1980]).

La pregunta de si el producto de dos espacios con la c.c.c. tiene la c.c.c. es (como veremos) independiente de ZFC; esta es cierta si suponemos $MA + \neg CH$ pero falla si suponemos $\diamondsuit$. La c.c.c. tiene la extraña propiedad de que si es preservada bajo productos con dos factores, es preservada bajo productos arbitrarios. Para ver esto notemos que si el producto de dos espacios c.c.c. es c.c.c. entonces por inducción esto se cumple para un número finito de factores. Ahora pasemos a productos arbitrarios.

1.15. TEOREMA. Supongamos que $X_i (i \in I)$ son espacios tales que para cada $r \subset I$ finito, $\prod_{i\in r} X_i$ es c.c.c. Entonces $\prod_{i\in I} X_i$ tiene la c.c.c.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que U_α $(\alpha < \omega_1)$ son abiertos ajenos no vacíos en $\prod_{i\in I} X_i$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los U_α son abiertos básicos canónicos. Entonces cada U_α depende de un conjunto finito de coordenadas, $a_\alpha \subset I$. Por el lema de la raíz (vease la sección de preliminares) existe un $A \subset \omega_1$ no numerable tal que $\{a_\alpha : \alpha \in A\}$ forma un Δ-sistema con raíz r. r es no vacío, ya que $a_\alpha \cap a_\beta = \emptyset$ implica que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Sea $\pi(U_\alpha)$ la proyección de U_α en $\prod_{i\in r} X_i$. Pero entonces $\pi(U_\alpha)$ $(\alpha \in A)$ forman una familia ajena no numerable en $\prod_{i\in r} X_i$. □

Como un simple ejemplo de este teorema vemos que 2^κ tiene la c.c.c. para todo κ donde $2 = \{0,1\}$ con la topología discreta. Es un fácil ejercicio ver que si $\kappa > \mathfrak{c}$, este espacio es un ejemplo de un espacio c.c.c. no separable.

Ahora veremos que bajo $MA+\neg CH$, cualquier producto de espacios c.c.c. es c.c.c.

1.16. LEMA. Suponiendo $MA + \neg CH$. Sean X un espacio c.c.c. y $\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una familia de subconjuntos abiertos no vacios de X, entonces existe $A \subset \omega_1$ no numerable, tal que $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ tiene la p.i.f.

DEMOSTRACIÓN. Sea $V_\alpha = \bigcup_{\gamma>\alpha} U_\gamma$. Entonces $\alpha < \beta$ implica $V_\beta \subset V_\alpha$. Veamos primero que existe α, tal que

$$\forall\beta > \alpha(\overline{V_\beta} = \overline{V_\alpha}). \quad (*)$$

Si no existiera tal α, podríamos encontrar una sucesión creciente de ordinales $\alpha_\xi (\xi < \omega_1)$ tal que para cada ξ $\overline{V_{\alpha_{\xi+1}}} \neq \overline{V_{\alpha_\xi}}$, por lo cual $V_{\alpha_\xi} \setminus \overline{V_{\alpha_{\xi+1}}} \neq \emptyset$. Estos conjuntos son abiertos y ajenos por pares, lo cual contradice que X tiene la c.c.c.

Fijemos α tal que α cumple $(*)$, y sea $\mathbb{P} = \{p \subset V_\alpha : p = int(p) \wedge p \neq \emptyset\}$. $\mathbb{P}$ tiene la c.c.c. ya que X la tiene. Si G es un filtro en $\mathbb{P}$, entonces G tiene la pif, así definimos

$$A = \{\gamma < \omega_1 : \exists p \in G\ (p \subset U_\gamma)\}.$$

Entonces $\{U_\gamma : \gamma \in A\}$ tiene la pif. Veamos que $|A| = \omega_1$. Para eso basta ver que A es no acotado en ω_1. Sea

$$D_\beta = \{p \in \mathbb{P} : \exists \gamma > \beta (p \subset U_\gamma)\}.$$

Para ver que D_β es denso, notemos que por (*), $\overline{V}_\alpha \subset \overline{V}_\beta$, si $p \in \mathbb{P}$, entonces $p \cap V_\beta \neq \emptyset$, entonces $p \cap U_\gamma \neq \emptyset$ para algún $\gamma > \beta$; es decir, $p \cap U_\gamma$ es una extensión de p en D_β. Ahora, si $G \cap D_\beta \neq \emptyset$, entonces existe $\gamma \in A$ tal que $\gamma > \beta$. Por lo tanto, si G intersecta a D_β para todo $\beta < \omega_1$ entonces A es no acotado en ω_1. □

1.17. TEOREMA. Suponiendo $MA(\omega_1)$, cualquier producto de espacios c.c.c. es c.c.c.

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema 1.15 es suficiente probar el resultado para un producto de dos espacios. Sean X, Y dos espacios con la c.c.c., y supongamos que $X \times Y$ no tiene la c.c.c. Sea $\{W_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una familia de abiertos ajenos no vacíos de $X \times Y$. Podemos suponer que $W_\alpha = U_\alpha \times V_\alpha$. Por el lema anterior, sea $A \subset \omega_1$ no numerable tal que $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ tiene la pif. Esto es si $\alpha, \beta \in A$ entonces $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ pero $(U_\alpha \times V_\alpha) \cap (U_\beta \times V_\beta) = \emptyset$, así que $V_\beta \cap V_\alpha = \emptyset$. Entonces $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ contradice que Y tiene la c.c.c. □

1.18. TEOREMA. $MA(\omega_1) \rightarrow SH$.

DEMOSTRACIÓN. Es inmediata del teorema anterior y el siguiente lema. □

1.19. LEMA. Si X es una línea de Suslin, X^2 no es c.c.c.

DEMOSTRACIÓN. Si $a, b \in X$ y $a < b$, por (a, b) denotaremos al intervalo abierto, $\{x \in X : a < x < b\}$. Por inducción sobre $\alpha < \omega_1$, encontraremos $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \in X$ tales que:

(1) $a_\alpha < b_\alpha < c_\alpha$.
(2) $(a_\alpha, b_\alpha) \neq \emptyset$ y $(b_\alpha, c_\alpha) \neq \emptyset$.
(3) $(a_\alpha, c_\alpha) \cap \{b_\xi : \xi < \alpha\} = \emptyset$.

Suponiendo que podemos lograr esto, sea $U_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha) \times (b_\alpha, c_\alpha)$. Por (2) U_α es no vacío. Si $\xi < \alpha$, entonces $U_\xi \cap U_\alpha = \emptyset$, ya que por (3) $b_\xi \leqslant a_\alpha$ en cuyo caso $(a_\xi, b_\xi) \cap (a_\alpha, b_\alpha) = \emptyset$, ó $b_\xi \geqslant c_\alpha$, y en este caso $(b_\xi, c_\xi) \cap (b_\alpha, c_\alpha) = \emptyset$. Por lo tanto X^2 no tiene la c.c.c.
Para encontrar $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha$, sea W igual al conjunto de todos los puntos aislados de X. Como un punto aislado es abierto y X tiene la c.c.c., W es numerable. Ahora supogamos que hemos elegido a_ξ, b_ξ, c_ξ para

$\xi < \alpha$. Como X no es separable $X \setminus \overline{(W \cup \{b_\xi : \xi < \alpha\})}$ es un abierto no vacío, y entonces contiene un intervalo abierto no vacio (a_α, c_α). Como (a_α, c_α) no contiene puntos aislados, es infinito; así que podemos escojer $b_\alpha \in (a_\alpha, c_\alpha)$ tal que $(a_\alpha, b_\alpha) \neq \emptyset$ y $(b_\alpha, c_\alpha) \neq \emptyset$. □

Nuestra definición de línea de Suslin, permite a una línea de Suslin tener hoyos o puntos aislados. Mostraremos que la podemos manipular para conseguir una línea de Suslin con mejores propiedades.

1.20. Teorema. Si hay una línea de Suslin, entonces hay una línea de Suslin X tal que

1. X es denso en sí mismo (i.e. $a < b \to (a, b) \neq \emptyset$), y
2. ningún subconjunto abierto no vacío de X es separable.

Demostración. Sea Y una línea de Suslin. Definimos una relación de equivalencia $\sim$ sobre Y como sigue:
$x \sim y \leftrightarrow$ el intervalo entre ellos ((x, y) si $x < y$ o (y, x) si $y < x$) es separable. Sea X el conjunto de clases de equivalencia. Si $I \in X$, entonces I es convexo i.e., $x, y \in I$ y $x < y$ implican que $(x, y) \in I$. Ordenemos totalmente a X por la siguiente relación $I < J \leftrightarrow \exists x \in I$ y $\exists y \in J(x < y)$.
Note que cada $I \in X$ es separable. Para constatar esto, sea $\mathcal{M}$ una colección maximal de intervalos abiertos ajenos no vacíos de la forma (x, y) con $x, y \in I$. $\mathcal{M}$ es numerable ya que Y tiene la c.c.c., así que $\mathcal{M} = \{(x_n, y_n) : n \in \omega\}$. Ya que $x_n \sim y_n$, podemos tomar un denso numerable D_n de (x_n, y_n). Sea $D = \bigcup_{n\in\omega} D_n$; entonces D es denso en $\bigcup_{n\in\omega}(x_n, y_n)$. Si $z \in I$ y $z \in (x, y) \subset I$, entonces (x, y) intersecta a algún (x_n, y_n) por la maximalidad de $\mathcal{M}$; esto implica que $z \in cl(D)$, a menos que z sea el primer o el último elemento de I. Esto es, D junto con el primer y último elemento (si I tiene primer o último elemento) forman un denso numerable de I.
Para ver que X es denso en sí mismo, supongamos que $I < J$ pero que $(I, J) = \emptyset$. Elijamos $x \in I$ y $y \in J$, entonces $(x, y) \subset I \cup J$, el cual es separable , asi que $x \sim y$, una contradicción.
Para verificar (2), es suficiente ver que (I, J) no es separable si $I < J$. Supongamos que (I, J) es separable. Sea $\{K_n : 2 \leqslant n < \omega\}$ un denso en (I, J), y sean $K_0 = I$, $K_1 = J$. En Y, sea D_n un subconjunto denso numerable de K_n, entonces $\bigcup_{n<\omega} D_n$ es denso en $\bigcup\{L : I \leqslant L \leqslant J\}$, así los puntos de I son equivalentes a los puntos de J, una contradicción.
Finalmente, nos falta verificar que X tiene la c.c.c.. Supongamos que (I_α, J_α) $(\alpha < \omega_1)$ es una colección de intervalos abiertos ajenos en X.

Sean $x_\alpha \in I_\alpha$ y $y_\alpha \in J_\alpha$, entonces los intervalos (x_α, y_α) serían ajenos y no vacíos en Y. $\square$

4. Árboles.

En está sección estudiaremos a los árboles los cuales nos permitirán relacionar el axioma de diamante con la hipotesis de Suslin y posteriormente nos serviaran para construir uno de los principales ejemplos de espacios de Moore.

1.21. Definición. Un *árbol* es un conjunto parcialmente ordenado $\langle T, \leqslant\rangle$ tal que para toda $x \in T$, $\{y \in T : y < x\}$ está bien ordenado por $\leqslant$.

1.22. Definición. Sea T un árbol

(a) Si $x \in T$, la *altura* de x en T, la cual denotamos por $ht(x, T)$, es igual al tipo de orden del conjunto $\{y \in T : y < x\}$.
(b) Para todo ordinal α, definimos el α-esimo *nivel* de T, el cual denotamos por $Lev_\alpha(T)$, como $\{x \in T : ht(x, T) = \alpha\}$.
(c) La *altura* de T, la cual denotamos por $ht(T)$, es igual al $min\{\alpha : Lev_\alpha(T) = \emptyset\}$.
(d) Un *subárbol* de T es un subconjunto $T' \subset T$ con el orden de T inducido tal que:
$\forall x \in T' \forall y \in T(y < x \;\rightarrow\; y \in T')$.

1.23. Definición. Sea T un árbol. Una *cadena* en T es un subconjunto $C \subset T$ el cual es totalmente ordenado por $\leqslant$. Una *anticadena* en T es un subconjunto $A \subset T$, tal que:
$\forall\, x, y \in A(x \neq y \;\rightarrow\; (x \nleq y \;\wedge\; y \nleq x))$.

1.24. Definición. Para cualquier cardinal infinito κ, un κ-árbol de Suslin es un árbol T, tal que $|T| = \kappa$ y cada cadena y anticadena tiene cardinalidad $< \kappa$.

Los árboles de Suslin fueron introducidos por Kurepa (ver, [Kurepa 1936]) quien mostró que existe un ω_1-árbol de Suslin si y sólo si existe una línea de Suslin. Si κ es un cardinal singular entonces fácilmente se puede construir un κ-árbol de Suslin, por lo que sólamente nos interesará el caso en que κ sea un cardinal regular.

1.25. DEFINICIÓN. Para cualquier cardinal regular κ, un κ-árbol es un árbol T de altura κ tal que para todo $\alpha < \kappa(|Lev_\alpha(T)| < \kappa)$.

1.26. LEMA. Si κ es un cardinal regular, entonces cada κ-árbol de Suslin es un κ-árbol.

DEMOSTRACIÓN. $Lev_\kappa(T) = \emptyset$, ya que si $x \in Lev_\kappa(T)$, $\{y : y < x\}$ sería una cadena de cardinalidad κ. Lo cual implica que $ht(T) \leqslant \kappa$. Como cada nivel $Lev_\alpha(T)$ es una anticadena, $|Lev_\alpha(T)| < \kappa$, ya que $|T| = \kappa$ y $T = \bigcup\{Lev_\alpha(T) : \alpha < ht(T)\}$. La regularidad de κ implica que $ht(T) = \kappa$. □

1.27. LEMA. (König) Si T es un ω-árbol, entonces T tiene una cadena infinita.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_0 \in Lev_0(T)$ tal que $\{y \in T : y \geqslant x_0\}$ es infinito. Esto es posible ya que la altura de T es ω y $|Lev_0(T)| < \omega$. Por un argumento similar, podemos escoger inductivamente $x_n \in Lev_n(T)$ tal que para todo $n \in \omega$, $x_{n+1} > x_n$ y tal que el $\{y \in T : y \geqslant x_{n+1}\}$ es infinito. Entonces $\{x_n : n \in \omega\}$ es una cadena infinita de T. □

1.28. DEFINICIÓN. Para cualquier cardinal regular κ, un κ-árbol de Aronszajn es un κ-árbol tal que cada cadena en T es de cardinalidad $< \kappa$.

Esto es, cada κ-árbol de Suslin es un κ-árbol de Aronszajn y el Lema 1.27 nos dice que no existen ω-árboles de Aronszajn. En ω_1 la situación es diferente ya que la existencia de un ω_1-árbol de Suslin es independiente de ZFC, mientras siempre existen ω_1-árboles de Aronszajn. **De aquí en adelante, por un árbol de Aronszajn y un árbol de Suslin entenderemos un ω_1-árbol de Aronszajn y de Suslin respectivamente.** Ahora procederemos a probar la existencia de árboles de Aronszajn.

1.29. TEOREMA. (Aronszajn). Existe un árbol de Aronszajn.

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$T = \{s \in^{<\omega_1} \omega : s \text{ } es \text{ } inyectiva \text{ } \}.$$

Esto es, T es un subárbol de ${}^{<\omega_1}\omega$. Además, $ht(T) = \omega_1$, ya que para cada $\alpha < \omega_1$, existe una función uno a uno de α en ω. Si C es una cadena no numerable en T, entonces $\bigcup C$ sería una función uno a uno de ω_1 en ω; por lo tanto cada cadena es numerable. Desafortunadamente, T no es de Aronszajn, ya que $Lev_\alpha(T)$ es no numerable para $\omega \leqslant \alpha < \omega_1$. Sin embargo, definiremos un subárbol de T el cual es Aronszajn. Si $s, t \in {}^\alpha\omega$ definimos $s \sim t$ si y sólo si $\{\xi < \alpha : s(\xi) \neq t(\xi)\}$ es finito. Encontraremos s_α para $\alpha < \omega_1$ tal que:

(i) $s_\alpha \in {}^\alpha\omega$ y s_α es uno a uno.
(ii) $\alpha < \beta \rightarrow s_b\restriction_\alpha \sim s_\alpha$, y
(iii) $\omega \setminus ran(s_\alpha)$ es infinito.

Supongamos que podemos construir a los s_α. Sea

$$T^* = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \{t \in Lev_\alpha(T) : t \sim s_\alpha\}.$$

Por (ii), T^* es un subárbol de T. Por (i) $s_\alpha \in T^*$, así que $Lev_\alpha(T^*) \neq \emptyset$. Por otro lado T^* es un ω_1-árbol, ya que $\{t \in^\alpha \omega : t \sim S_\alpha\}$ es numerable. Es decir, T^* es un árbol de Aronszajn.

Escojamos a los s_α por inducción. Dado s_α, tomemos cualquier $n \in \omega \setminus ran(s_\alpha)$ y sea $s_{\alpha+1} = s_\alpha \cup \{\langle\alpha, n\rangle\}$; aquí es donde usamos (iii). Ahora supongamos que hemos construido s_α para cada $\alpha < \gamma$ donde γ es limite. Fijemos α_n para $n < \omega$ tal que $\alpha_0 < \alpha_1 < ...$ y $sup\alpha_n = \gamma$. Sea $t_0 = s_{\alpha_0}$ e inductivamente definimos $t_n : \alpha_n \rightarrow \omega$ tal que t_n es uno a uno, $t_n \sim s_{\alpha_n}$, y $t_{n+1}\restriction_{\alpha_n} = t_n$. Sea $t = \bigcup t_n$. Tenemos que $t \in {}^\gamma\omega$ y t es uno a uno; si ponemos $s_\gamma = t$ entonces (i) y (ii) se cumplen claramente, pero (iii) puede no cumplirse. Para arreglar esto, definimos $s_\gamma(\alpha_n) = t_{\alpha_{2n}}$ y $s_\gamma(\xi) = t(\xi)$ para $\xi \notin \{\alpha_n : n \in \omega\}$. Entonces

$$\{t(a_{2n+1}) : n \in \omega\} \subset (\omega \setminus ran(s_\gamma)),$$

por lo tanto (iii) también se sigue. □

Ahora probaremos que hay una línea de Suslin si y sólo si hay un árbol de Suslin. Pero primero haremos unas observaciones necesarias.

1.30. DEFINICIÓN. Un κ-árbol *bien podado* es un κ-árbol T, tal que $|Lev_0(T)| = 1$ y

$$\forall x \in T \forall \alpha (ht(x, T) < \alpha < \kappa \rightarrow \exists y \in Lev_\alpha(T))(x < y). \quad (*)$$

1.31. LEMA. Si κ es un cardinal regular y T es un κ-árbol, entonces T tiene un κ-subárbol bien podado.

DEMOSTRACIÓN. Sea $T' = \{x \in T : |\{z \in T : z > x\}| = \kappa\}$. T' es claramente un subárbol de T. Para verificar (*) de la definición 1.30 T', fijamos $x \in T'$ y α tal que $ht(x,T) < \alpha < \kappa$. Sea $Y = \{y \in Lev_\alpha(T) : x < y\}$. Por definición de T' y el hecho de que $|Lev_\beta(T)| < \kappa$, $\{z \in T : z > x \ \wedge \ ht(z,T) > \alpha\}$ tiene cardinalidad κ, y cada elemento de este conjunto está por encima de algún elemento de Y. Como $|Y| < \kappa$, existe $y \in Y$, tal que $|\{z \in T : z > y\}| = \kappa$, y este y está en T'. Un argumento similar muestra que $Lev_0(T') \neq \emptyset$, así que $T' \neq \emptyset$. Ahora para cada $x \in Lev_0(T')$, $\{y \in T' : y \geqslant x\}$ es un subárbol bien podado de T. □

1.32. LEMA. Si κ es regular, T un κ-árbol de Aronszajn bien podado y $x \in T$, entonces

$$\forall n < \omega \exists \alpha > ht(x,T)(|\{y \in Lev_\alpha(T) : y > x\}| \geqslant n).$$

DEMOSTRACIÓN. Para $n = 2$, esto se sigue del hecho que $\{y : y > x\}$ intersecta a todos los niveles arriba de x y no puede formar una cadena. Para $n > 2$, procedamos por inducción. Supongamos que el lema se sigue para n, fijemos $\alpha > ht(x,T)$ y $y_1, ..., y_n$ distintos elementos de $Lev_\alpha(T)$ con $y_i > x$. Ahora, sea $\beta > \alpha$ tal que existen $z_n, z_{n+1} \in Lev_\beta(T)$ distintos con $z_n, z_{n+1} > y_n$. Para $i < n$, existe $z_i \in Lev_\beta(T)(z_i > y_i)$. Entonces el conjunto $\{z_1, ..., z_{n+1}\}$ prueba el lema. □

Ahora podemos probar que SH es equivalente a la no existencia de un árbol de Suslin.

1.33. TEOREMA. Existe un árbol de Suslin si y sólo si existe una línea de Suslin.

DEMOSTRACIÓN. Primero, sea T un árbol de Suslin. Por uno de los lemas anteriores podemos suponer que T está bien podado. Sea
$L = \{C \subset T : C$ es una cadena maximal en $T\}$.
Si $C \in L$, entonces existe un ordinal $h(C)$ tal que C contiene exactamente un elemento de $Lev_\alpha(T)$ para $\alpha < h(C)$ y ningún elemento de $Lev_\alpha(T)$ para $\alpha \geqslant h(C)$. Como T es de Aronszajn, $h(C) < \omega_1$ y como está bien podado, una cadena maximal no puede tener un elemento máximo, así que cada $h(C)$ es un ordinal limite. Para $\alpha < h(C)$, sea $C(\alpha)$ el elemento de C en el nivel α.
Ordenemos L como sigue. Fijemos un orden total arbitrario $\prec$ de T.

Si $C, D \in L, C \neq D$, sea $d(C, D)$ el mínimo α tal que $C(\alpha) \neq D(\alpha)$. Observemos que $d(C, D) < min(h(c), h(d))$. Decimos que $C \lhd D \leftrightarrow C(d(C, D)) \prec D(d(C, D))$. Hemos usado $\prec$ para definir un tipo de orden lexicográfico en L. Es fácil verificar que $\lhd$ es un orden total en L. Ahora, vamos a demostrar que $\langle L, \lhd \rangle$ es una línea de Suslin.
Primero, para mostrar que L tiene la c.c.c., supongamos que $\{C_\xi, D_\xi) : \xi < \omega_1\}$ es una familia de intervalos abiertos ajenos no vacíos. Escojamos $E_\xi \in (C_\xi, D_\xi)$, y escojamos α_ξ, tal que

$$max(d(C_\xi, E_\xi), d(E_\xi, D_\xi)) < \alpha_\xi < h(E_\xi);$$

entonces $\{E_\xi(\alpha_\xi) : \alpha_\xi < \omega_1\}$ forman una anticadena en T, lo cual contradice que T es de Suslin.
Para mostrar que L no es separable, es suficiente ver que para cada $\delta < \omega_1$, $\{C : h(C) < \delta\}$ no es denso en L. Fijemos $x \in Lev_\delta(T)$. Por el lema anterior existe $\alpha > \delta$ con tres elementos distintos $y, z, w \in Lev_\alpha(T)$ arriba de x. Sean D, E, F elementos conteniendo a y, z, w respectivamente. Digamos que ellos están ordenados, $D \lhd E \lhd F$, entonces (D, F) es un intervalo no vacío, pero como $x \in D \cap F$, (D, F) no contiene a ningún $C \in L$ con $h(C) < \delta$.
Reciprocamente, supongamos que tenemos una línea de Suslin $\langle L, \lhd \rangle$. Por el teorema 1.20 podemos suponer que L es densa en sí misma y que no tiene subconjuntos abiertos no vacíos separables. Sea $\mathcal{J}$ el conjunto de todos los intervalos abiertos no vacíos de L; así los elementos de $\mathcal{J}$ son de la forma (a, b) con $a \lhd b$. $\mathcal{J}$ está parcialmente ordenado por la inclusión inversa i.e. $I \leqslant J \leftrightarrow J \subset I$. Definiremos un subconjunto $T \subset \mathcal{J}$ tal que $\langle T, \leqslant \rangle$ es un árbol de Suslin. Para encontrar T, primero encontraremos $\mathcal{J}_\beta \subset \mathcal{J}$ para cada $\beta < \omega_1$ tal que:

1. los elementos de $\mathcal{J}_\beta$ son ajenos dos a dos.
2. $\bigcup \mathcal{J}_\beta$ es denso en L, y
3. si $\alpha < \beta$, $I \in \mathcal{J}_\alpha$ y $J \in \mathcal{J}_\beta$, entonces
   [(a)] $I \cap J = \emptyset$, ó
   [(b)] $J \subset I \ \wedge \ I \setminus \overline{J} \neq \emptyset$.

Supongamos que hemos construido tales subconjuntos. Sea $T = \bigcup_\beta \mathcal{J}_\beta$. Por (1)-(3), T es un árbol y cada $\mathcal{J}_\beta$ es igual al $Lev_\beta(T)$. Si $A \subset T$ es una anticadena, entonces los elementos de A son ajenos dos a dos, así que $|A| \leqslant \omega$. T no puede tener cadenas no numerables, ya que si $\{I_\xi : \xi < \omega_1\}$ fuera una cadena, con $\xi < \eta \ \rightarrow \ I_\xi \leqslant I_\eta$, entonces, por (3b),

$$\xi < \eta \ \rightarrow \ (I_\eta \subset I_\xi \ \wedge \ I \setminus \overline{J} \neq \emptyset,$$

pero entonces $\{I_\xi \setminus \overline{I_{\xi+1}} : \xi < \omega_1\}$ contradice que L tiene la c.c.c.. Finalmente, $|T| = \omega_1$, ya que (2) implica en particular que cada $\mathcal{J}_\beta \neq \emptyset$.

Esto es, T es un árbol de Suslin.
Ahora contruiremos $\mathcal{J}_\beta$ por inducción sobre β. Sea $\mathcal{J}_0$ cualquier subfamilia ajena maximal de $\mathcal{J}$; observemos que $\bigcup \mathcal{J}_0$ es denso por la maximalidad. Dado $\mathcal{J}_\alpha$, definimos $\mathcal{J}_{\alpha+1}$ como sigue: Para $I \in \mathcal{J}_\alpha$, sea $\overline{K}_I$ una subfamilia ajena maximal de

$$\{K \in \mathcal{J} : K \subset I \ \wedge \ I \setminus \overline{J} \neq \emptyset\}.$$

Sea $\mathcal{J}_{\alpha+1} = \bigcup\{\mathcal{K}_I : I \in \mathcal{J}_\alpha\}$.
Finalmente, supongamos que γ es un ordinal limite y que hemos definido $\mathcal{J}_\alpha$ para cada $\alpha < \gamma$ cumpliendo (1)-(3) para $\alpha < \beta < \gamma$. Sea

$$\mathcal{K} = \{K \in \mathcal{J} : \forall\alpha < \gamma \forall I \in \mathcal{J}_\alpha[I \cap K = \emptyset \ \vee \ (K \subset I \ \wedge \ I \setminus \overline{K} \neq \emptyset)]\},$$

y sea $\mathcal{J}_\gamma$ una subfamilia ajena maximal de $\mathcal{K}$. Entonces (1) y (3) se cumplen para todo $\alpha < \beta \leqslant \gamma$. (2) para $\beta = \gamma$ dice que ningun $J \in \mathcal{J}$ es ajeno de todos los elementos de $\mathcal{J}_\gamma$; esto último se sigue de la maximalidad de $\mathcal{J}_\gamma$ si podemos mostrar que para cada $J \in \mathcal{J}, \exists K \in \mathcal{K}(K \subset J)$. Sea E el conjunto de todos los extremos de todos los intervalos en $\bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{J}_\alpha$. E es numerable y J no es separable, así que si fijamos $K_1 \in \mathcal{J}$ con $K_1 \subset J$ y $K_1 \cap E = \emptyset$. Si $I \in \bigcup_{\alpha<\gamma} \mathcal{J}_\alpha$, entonces K_1 no contiene a los extremos de I, así que $I \cap K_1 = \emptyset$ ó $K_1 \subset I$. Ahora tomemos $K \in \mathcal{J}$ con $K \subset K_1$ y $K_1 \setminus \overline{K} \neq \emptyset$; entonces $K \subset \mathcal{J}$ y $K \in \mathcal{K}$. □

5. El filtro de los cerrados y no acotados.

En esta sección vamos a desarrollar el material básico acerca de este tema.

1.34. Definición. Para cualquier conjunto no vacío A, un *filtro* sobre A es un conjunto $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(A)$ tal que:

(a) $A \in \mathcal{F} \ \wedge \ \emptyset \notin \mathcal{F}$.
(b) $\forall X, Y \in \mathcal{F} \ (X \cap Y \in \mathcal{F})$.
(c) $\forall X \in \mathcal{F} \ \forall Y \subset A \ (X \subset Y \to Y \in \mathcal{F})$.

Para cualquier conjunto no vacio A, un *ideal* sobre A es un conjunto $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(A)$ tal que:

(a) $\emptyset \in \mathcal{I} \ \wedge \ A \notin \mathcal{I}$.
(b) $\forall X, Y \in \mathcal{I} \ (X \cup Y \in \mathcal{I})$.
(c) $\forall X \in \mathcal{I} \ \forall Y \subset A \ (X \supset Y \to Y \in \mathcal{I})$.

1.35. DEFINICIÓN. Si $\mathcal{I}$ es un ideal sobre A, el *filtro dual* de I, al cual denotamos por $\mathcal{I}^*$ es $\{X \subset A : A \setminus X \in \mathcal{I}\}$. Si $\mathcal{F}$ es un filtro sobre A, el *ideal dual* de F al cual denotamos por $\mathcal{F}^*$ es $\{X \subset A : A \setminus X \in \mathcal{F}\}$.

1.36. OBSERVACIÓN. Si $\mathcal{I}$ es un ideal sobre A entonces $\mathcal{I}^*$ es en efecto un filtro sobre A,

(a) $A \in \mathcal{I}^*$ ya que $\emptyset = A \setminus A \in \mathcal{I}$ por ser un ideal, si $\emptyset \in \mathcal{I}^*$ entonces A estaría en $\mathcal{I}$, contradiciendo el hecho de que $\mathcal{I}$ es un ideal.
(b) Sea $X \in \mathcal{I}^*$ y $X \subset Y$ entonces $A \setminus Y \subset A \setminus X$, pero $A \setminus X \in \mathcal{I}$. Esto implica que $A \setminus Y \in \mathcal{I}$, por lo tanto $Y \in \mathcal{I}^*$.
(c) Sean $X, Y \in \mathcal{I}^*$. Entonces $A \setminus X, A \setminus Y \in \mathcal{I}$. Como $\mathcal{I}$ es un ideal, entonces $(A \setminus Y) \cup (A \setminus X) = A \setminus (X \cap Y) \in \mathcal{I}$, y esto implica que $X \cap Y \in \mathcal{I}^*$, por lo tanto $\mathcal{I}^*$ es un filtro. De manera análoga podemos probar que el ideal dual es en efecto un ideal.

1.37. DEFINICIÓN. Un ideal $\mathcal{I}$ es κ-completo si $\forall \mathcal{A} \subset \mathcal{I}\ (|\mathcal{A}| < \kappa \to \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{I})$. Y decimos que un filtro $\mathcal{F}$ es κ -completo si su ideal dual es κ-completo.

Para el caso de un filtro (ideal) que sea ω_1-completo es costumbre llamarlo σ-completo. Ahora introduciremos el filtro de los cerrados no acotados.

1.38. DEFINICIÓN. Para un ordinal limite μ, decimos que un conjunto $C \subset \mu$ es cerrado si para todo ordinal limite δ, si $C \cap \delta$ es no acotado en δ entonces $\delta \in C$. C es no acotado en μ si para toda $\delta < \mu$ existe $\xi \in C (\delta < \xi)$. Decimos que C es un *c.u.b.* si C es cerrado y no acotado.

Se ve fácilmente que ser cerrado es equivalente a ser cerrado en la topología del orden. En lo siguiente, $\mathrm{cf}(\mu)$ denotará la cofinalidad de μ para cualquier ordinal limite μ.

1.39. DEFINICIÓN. Si $\mathrm{cf}(\mu) > \omega$, el filtro de los *c.u.b.*'s sobre μ, $Cub(\mu)$, es $\{X \subset \mu : \exists C \subset X (C \text{ es un } c.u.b. \text{ en } \mu)\}$.

Tenemos que verificar que en efecto $Cub(\mu)$ es un filtro sobre μ. Las condiciones (a) y (c) de la definición de filtro son claramente satisfechas por $Cub(\mu)$. La condición (b) requiere un poco más de trabajo. Pero probaremos algo un poco más fuerte, probaremos que $Cub(\mu)$ es $\mathrm{cf}(\mu)$-completo. Para lo cual utilizaremos el siguiente lema.

1.40. LEMA. Si $\mathrm{cf}(\mu) > \omega$, entonces

(a) la intersección de cualquier familia de menos de $\mathrm{cf}(\mu)$ suconjuntos *c.u.b.* de μ es un *c.u.b.*
(b) $Cub(\mu)$ es un filtro $\mathrm{cf}(\mu)$-completo.

DEMOSTRACIÓN.

(a) Sea C_α un *c.u.b.* en μ para $\alpha < \lambda$, donde $\lambda < cf(\mu)$, y sea $C = \bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha$. Primero veamos que C es un cerrado. Sea δ como en la definición 1.38, entonces tenemos que probar que $sup(\delta \cap C) \in C$. Sea $\beta = sup(\delta \cap C)$; probaremos que $\beta = sup(\beta \cap C_\alpha)$. Claramente β es una cota superior. Supongamos que $\xi < \beta$ entonces por definición de supremo, debe existir un $\gamma \in (C \cap \delta)$ tal que $\xi < \gamma \leqslant \beta$. Si $\beta = \gamma$ entonces $\beta \in C$. Si no, entonces $\gamma < \beta$ y esto implica que $\gamma \in \beta$ y $\gamma \in C_\alpha$ para todo $\alpha < \lambda$ entonces $\beta = sup(\beta \cap C_\alpha)$ y como cada C_α es cerrado entonces $\beta \in C$ por lo tanto C es cerrado. Para mostrar que C es no acotado, consideremos las siguientes funciones: Sea $f_\alpha(\xi) := min\{\gamma \in C_\alpha : \xi < \gamma\}$ para cada $\alpha < \lambda$ y $\xi \in \mu$. Definimos $g(\xi) := sup\{f_\alpha(\xi) : \alpha < \lambda\}$; entonces $\xi < g(\xi) < \mu$ (la última desigualdad se sigue del hecho que $\mathrm{cf}(\mu) < \lambda$). Definimos $g^0(\xi) := \xi$, $g^{n+1}(\xi) := g(g^n(\xi))$ y $g^\omega(\xi) := sup\{g^n(\xi) : n < \omega\}$; entonces $\xi < g^\omega(\xi) < \mu$ (ya que $\mathrm{cf}(\mu) > \omega$). Para cada α, tenemos que C_α es no acotado en $g^\omega(\xi)$ lo cual implica que $g^\omega(\xi) \in C_\alpha$ y entonces que $g^\omega(\xi) \in \bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha = C$. Esto es, para toda $\xi \in \mu$, $g^\omega(\xi)$ es un elemento de C mayor que ξ. Por lo tanto C es un *c.u.b.*

(b) Sea $X_\alpha \in Cub(\mu)$ para cada $\alpha < \lambda$ donde $\lambda < cf(\mu)$. Escojamos para cada $\alpha < \lambda$, un *c.u.b.* $C_\alpha \subset X_\alpha$; entonces $\bigcap_{\alpha<\lambda} C_\alpha \subset \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha$. Por lo tanto $\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in Cub(\mu)$ por (a). □

1.41. OBSERVACIÓN. Si μ es un cardinal regular entonces $Cub(\mu)$ será un filtro μ-completo y en este caso $\{X \subset \mu : |X| < \mu\} \subset Cub^*(\mu)$. Presentaremos ahora una notación auxiliar.

1.42. DEFINICIÓN. Si $\mathrm{cf}(\mu) > \omega$, decimos que $X \subset \mu$ es *estacionario si* $X \notin Cub^*(\mu)$ y X es no estacionario (o delgado) si $X \in Cub^*(\mu)$.

Equivalentemente, X es estacionario si $X \cap C \neq \emptyset$ para todo subconjunto X cerrado y no acotado. Decimos que una función f es finitaria sobre A si $f : A^n \to A$ para alguna n. Si $B \subset A$, entonces decimos que B es cerrado bajo la función finitaria f sí $f[B^n] \subset B$.

1.43. LEMA. Sea κ un cardinal regular mayor que ω. Supongamos que $B \subset A, (|B| < \kappa)$, y que $\mathbb{P}$ es un conjunto de menos de κ funciones finitarias sobre A. Entonces la clausura de B bajo $\mathbb{P}$ tiene cardinalidad menor que κ (la clausura de B es el mínimo conjunto que es cerrado bajo $\mathbb{P}$ que contiene a B).

DEMOSTRACIÓN. Sea $C_0 = B$ y $C_{n+1} = C_n \cup \bigcup\{f[C_n] : f \in \mathbb{P}\}$ observemos que $|C_n| < \kappa$ para toda $n \in \omega$ y además, claramente, $C_\omega = \bigcup_{n<\omega} C_n$ es cerrado bajo $\mathbb{P}$ y la cardinalidad de $|C_\omega| < \kappa$. □

Ahora probaremos una versión del teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski.

1.44. TEOREMA. Sea $\kappa > \omega$ un cardinal regular y sea $\mathcal{A}$ un conjunto de menos de κ funciones finitarias sobre κ; entonces $C = \{\gamma < \mu : \gamma$ es cerrado bajo $\mathcal{A}\}$ es un *c.u.b.*

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que C es un cerrado. Para ver que es no acotado, sea $\xi < \kappa$ y $G(\xi)$ la cerradura bajo $\mathcal{A}$ de ξ entonces $\xi \subset G(\xi)$, y $|G(\xi)| < \kappa$ (esto es una consecuencia directa del lema anterior). Como κ es regular podemos elegir $g(\xi)$ tal que $\xi < g(\xi) < \kappa$ y $G(\xi) \subset g(\xi)$. Como en el lema 1.40, sea g^n la n-sima iteración de g y $g^\omega(\xi) = sup_{n\in\omega} g^n(\xi)$, entonces $g^\omega(\xi)$ es un elemento de C mayor que ξ. □

1.45. LEMA. Sea κ un cardinal regular, y sea C_α un *c.u.b.* en κ para cada $\alpha < \kappa$. Entonces $D = \{\gamma : \forall\ \alpha < \gamma(\gamma \in C_\alpha)\}$ es un *c.u.b.* en κ (D es llamada la intersección diagonal de $\{C_\alpha : \alpha \in \kappa\}$).

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver que D es cerrado. Para ver que es no acotado, sea $\xi < \kappa$ y $g(\xi)$ algún elemento de $\bigcap_{\alpha<\xi} C_\alpha$ mayor que ξ (note que $\bigcap_{\alpha<\xi} C_\alpha$ es no acotada por el lema 1.7) entonces $g^\omega(\xi)$ (definida como en el teorema anterior) es un elemeto de D mayor que ξ. □

Decimos que un filtro es *normal* si es cerrado bajo intersecciones diagonales. Y un ideal es *normal* si su filtro dual es normal. De los resultados obtenidos hasta ahora podemos concluir, que $Cub(\omega_1)$ es un filtro normal y σ-completo.

Concluiremos esta sección con un último lema el cual será crucial en capítulos posteriores.

1.46. LEMA. (Lema de Fodor) Sea $\kappa > \omega$ un cardinal regular, S un subconjunto estacionario de κ y $f : S \to \kappa$ tal que para todo $\gamma \in S(f(\gamma) < \gamma)$, entonces para algún $\alpha < \kappa$, $f^{-1}[\alpha]$ es estacionario.

Demostración. Si no fuera esto cierto, entonces, para todo $\alpha < \kappa$ existiría un *c.u.b.* C_α tal que $C_\alpha \cap f^{-1}[\alpha] = \emptyset$. Entonces $D = \{\gamma : \forall\, \alpha < \gamma\ (\gamma \in C_\alpha)\}$ es un *c.u.b.* Pero $D \cap S = \emptyset$, ya que si $\gamma \in D \cap S$, $f(\gamma) \neq \alpha$ para toda $\alpha < \gamma$ lo cual es una contradicción. □

6. Diamante

1.47. **Definición.** Diamante, $\diamondsuit$, es la siguiente aserción: Existe una sucesión $\langle A_\alpha : \alpha \in \omega_1 \rangle$ de subconjuntos de ω_1 tal que:

$$\forall A \subset \omega_1(\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha = A_\alpha\} \textit{ es estacionario}).$$

La sucesión $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ es llamada una $\diamondsuit$-sucesión.

1.48. **Lema.** $\diamondsuit \rightarrow CH$.

Demostración. Si $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ es una $\diamondsuit$-sucesión, entonces $\forall A \subset \omega\ \exists\, \alpha > \omega (A_\alpha = \alpha \cap A)$, asi que $\{A_\alpha : \alpha < \omega_1\} = \mathcal{P}(\omega)$. □

$\diamondsuit$ puede ser visto como una mejora de CH. De una $\diamondsuit$-sucesión podemos hacer una lista de $\mathcal{P}(\omega)$, pero una $\diamondsuit$-sucesión "captura" todos los subconjuntos de ω_1 también. $\diamondsuit$ puede ser usado para construir varios objetos de tamaño ω_1 los cuales tienen alguna propiedad que envuelva a todos sus subconjuntos. Ilustraremos esto mostrando que $\diamondsuit \rightarrow \neg SH$ i.e. usaremos $\diamondsuit$ para construir un ω_1-árbol de Suslin.
Recordemos que un árbol de Suslin es un ω_1-árbol en el cual todas las cadenas y anticadenas son numerables. Si nosotros evitamos ciertas trivialidades en nuetra construcción del árbol, necesitaremos preocuparnos unicamente de las anticadenas, de hecho sólo de las maximales.

1.49. **Definición.** Un árbol $\langle T, \leqslant \rangle$ está ramificado si para todo $x \in T$, $\{y \in T : y > x\}$ no está totalmente ordenado.

1.50. **Lema.** Supongamos que $\langle T, \leqslant \rangle$ es un ω_1-árbol ramificado en el cual cada anticadena maximal es numerable; entonces T es un árbol de Suslin.

DEMOSTRACIÓN. Por el lema de Zorn cada anticadena está contenida en una maximal, así que cada anticadena es numerable. Supogamos que B es una cadena no numerable. Podemos suponer que B es maximal; así que B intersecta a cada nivel de T. Como T es ramificado, existe, para cada $x \in T$, un $f(x) > x$ tal que $f(x) \notin B$. Ahora elijamos inductivamente $x_\alpha \in B$ para $\alpha < \omega_1$ tal que $ht(x_\alpha, T) > sup\{ht(f(x_\beta), T) : \beta < \alpha\}$; entonces $\{f(x_\alpha) : \alpha < \omega_1\}$ es una anticadena no numerable.. □

Como $\diamondsuit$ habla acerca de subconjuntos de ω_1, es natural intentar construir un árbol de Suslin de la forma $\langle \omega_1, \lhd \rangle$. Notemos que por argumentos de Löwenheim-Skolem, propiedades elementales de nuestro árbol se reflejaran a un c.u.b. de ordinales numerables. De manera más especifica se cumple lo siguiente:

1.51. DEFINICIÓN. Para cualquier árbol T, sea $T_\alpha = \bigcup\{Lev_\beta(T) : \beta < \alpha\}$.

Esto es T_α es el subárbol de T abajo de α.

1.52. LEMA. Sea $T = \langle \omega_1, \lhd \rangle$ un ω_1-árbol. Entonces

(a) $\{\alpha < \omega_1 : T_\alpha = \alpha\}$ es un c.u.b. en ω_1.
(b) Si $A \subset \omega_1$ es una anticadena maximal en T, entonces $\{\alpha < \omega_1 : T_\alpha = \alpha \wedge A \cap T_\alpha$ es una anticadena maximal en $T_\alpha\}$ es un c.u.b. en ω_1.

DEMOSTRACIÓN.

(a) El conjunto es claramente cerrado. Para ver que es no acotado, definimos $f(\xi) = ht_T(\xi)$ y $g(\xi) = \sup\{\eta : \eta \in Lev_\xi(T)$. Por el lema 1.44 el conjunto de los α que es cerrado bajo las funciones f y g forma un c.u.b. C, y claramente $T_\alpha = \alpha$ para todo $\alpha \in C$.
(b) Notemos que A es maximal en T si y sólo si toda $x \in T \setminus A$ es comparable con algún elemento de A. Es fácil ver que este conjunto es cerrado. Para ver que es no acotado, sea $h(\xi)$ algún elemento de A comparable con ξ(así que $\xi \in A \rightarrow h(\xi) = \xi$). Si α es cerrado bajo f, g y h, entonces $T_\alpha = \alpha$ y $A \cap T_\alpha$ es maximal en T_α. □

Ahora veremos de manera precisa como usaremos $\diamondsuit$ para construir un árbol de Suslin.

1.53. **Lema**. Sea $\langle \omega_1, \lhd \rangle$ un ω_1-árbol ramificado, y $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ una $\Diamond$-sucesión. Supongamos que para todo limite $\alpha < \omega_1$,

$(T_\alpha = \alpha \ \wedge \ A_\alpha$ es una anticadena maximal en $\alpha) \ \rightarrow \ \forall x \in Lev_\alpha(T) \exists y \in A_\alpha (y \lhd x)$. $(*)$

Entonces T es un árbol de Suslin.

Demostración. Por el lema 1.50 es suficiente verificar que toda anticadena maximal es numerable. Por el lema anterior,

$$C = \{\alpha < \omega_1 : lim(\alpha) \ \wedge \ T_\alpha = \alpha \ \wedge \ A \cap T_\alpha \text{ es maxiamal en } T_\alpha\}$$

es un c.u.b. en ω_1. Como $\{\alpha : A \cap \alpha = A_\alpha\}$ es estacionario, podemos escoger $\alpha \in C$, tal que $A \cap \alpha = A_\alpha$. Por (*), si $z \in T$ y $ht_T(z) \geqslant \alpha$, entonces z está por encima de algún elemento de $A_\alpha = A \cap \alpha$, así que $z \notin A$. Es decir, $A = A_\alpha$, por lo tanto A es numerable. □

Ahora es fácil construir T por inducción transfinita haciendo que (*) se cumpla.

1.54. **Teorema**. $\Diamond$ implica la existencia de un árbol de Suslin.

Demostración. T sera $\langle \omega_1, \lhd \rangle$. Sea $I_\beta = \{\omega \cdot \beta + n : n \in \omega\}$. Dada una $\Diamond$-sucesión $\langle A_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$. Construiremos $\lhd$ inductivamente tal que:

(1) Δ es el orden para un árbol en ω_1 y para cada $\beta < \omega_1$. $Lev_\beta(T) = I_\beta$.
(2) Para cada $\beta < \omega_1$ y $n < \omega$, $(\omega \cdot \beta + n) \lhd (\omega \cdot (\beta + 1) + 2n)$, y $(\omega \cdot \beta + n) \lhd (\omega \cdot (\beta + 1) + 2n + 1)$.
(3) Si $\beta < \alpha < \omega_1$ y $x \in I_\beta$, entonces $\exists y \in I_\alpha (x \lhd y)$.
(4) (*) del lema anterior se sigue.

Si $\lhd$ puede ser construido, (1) y (2) garantizan que T es un ω_1-árbol ramificado, así que (4) implica que es un árbol de Suslin. La condición (3) facilitará la construcción de T. Notemos que $T_\alpha = \omega \cdot \alpha$.

Para construir $\lhd$ inductivamente, supongamos que $\lhd$ ha sido definido sobre los elementos de $\omega \cdot \alpha$ cumpliendo (1)-(4), veamos como extender $\lhd$ a los elementos de $\omega \cdot \alpha \cup I_\alpha$. Si $\alpha = \beta + 1$, entonces la condición (2) especifica la construcción: si $x \in \omega \cdot \alpha$, entonces $x \lhd (\omega \cdot \alpha + 2n)$ si y sólo si $x = (\omega \cdot b + n)$ ó $x \lhd (\omega \cdot \beta + n)$; de manera análoga para $x \lhd (\omega \cdot \alpha + 2n + 1)$. Esto preserva (1) y (3) y (4) no dicen nada para ordinales sucesores.

Ahora supogamos que α es limite. Para cada $x \in T_\alpha = \omega \cdot \alpha$, sea $B(x)$ una cadena en T_α, tal que $x \in B(x)$ y $B(x)$ intersecta a $I_\eta = Lev_\eta(T_\alpha)$ para cada $\eta < \alpha$. Para encontrar tal $B(x)$, primero escogemos $\xi_m = \xi_m(x)$ para $m < \omega$, tal que $ht(x) < \xi_0 < \xi_1 < ...$ y $sup\{\xi_m : m \in \omega\} = \alpha$; entonces inductivamente escogemos $y_m = y_m(x) \in I_{\xi_n}$ tal que $x \lhd y_0 \lhd ...$ (esto es posible por la condición (3)); entonces definimos

$$B(x) = \{z \in T_\alpha : \exists n(z \lhd y_n(x))\}.$$

Ahora, sea $\omega \cdot \alpha = \{x_n : n \in \omega\}$, y definimos, para $z \in \omega \cdot \alpha, \quad z \lhd (\omega \cdot \alpha + n)$ si y sólo si $z \in B(x_n)$. Que $B(x_n)$ intersecta a cada nivel de T_α implica que $\omega \cdot \alpha + n$ tiene altura α en T; se ve fácilmente que el resto de (1)-(3) se preserva.

Finalmente, la condición (4) en el nivel α es problematica sólo si $\omega^\alpha = \alpha$ y A_α es una anticadena maximal en T_α, así que supongamos que este es el caso. Entonces modificando la construción de $B(x)$ para $x \in T_\alpha$ primero escogiendo $y_0(x)$ de tal forma que $x \lhd y_0(x)$ y $\exists z \in A_\alpha(z \lhd y_0(x))$; esto es posible debido a que x es comparable con algún elemento de A_α. Entonces $\xi_0(x) = ht(y_0(x))$. Ahora escogemos $\xi_m(x)(1 \leqslant m < \omega)$ y $y_m(x)(1 \leqslant m < \omega)$ como antes. Entonces cada $B(x)$ intersecta A_α, por lo tanto (*) se cumple. $\square$

CAPITULO 2

La Conjetura de Moore

1. INTRODUCCIÓN.

En este capítulo introduciremos el tópico central de este trabajo, la conjetura de Moore. El objetivo de este capítulo será principalmente presentar los teoremas de Reed-Zenor (teorema 2.18) y de Chaber - Zenor (teorema 2.19) que son dos de los teoremas más importantes relacionados con la conjetura de Moore que se pueden probar en ZFC.

2. EL PROBLEMA GENERAL

El problema de Moore, fué considerado por muchos años como el problema más importante en topología general. Esto se debió principalmente al dominio de la escuela de R. L. Moore en topología general, y en parte al hecho de que estaba entrelazada con la teoria de conjuntos desde el principio, y dio surgimiento a un área completa de la topología que ha sido, en palabras de F. Tall[1984] "la frontera de la topología conjuntista, siendo frecuentemente el primer consumidor topológico de las nuevas tecnicas conjuntistas."

Los espacios de Moore son una generalización de los espacios metrizables en los cuales la distancia es explicitamente reemplazada por una medida de tamaño más abstracta, dada en el siguiente concepto.

2.1. DEFINICIÓN. Un *desarrollo* para un espacio X es una familia $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\omega}$ donde cada $\mathcal{U}_n$ es una cubierta abierta de X, tal que si $x \in X$ entonces $\{St(x,\mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$ es una base local en x. Un espacio de *Moore* es un espacio regular con un desarrollo.

En un espacio métrico podemos definir $\mathcal{U}_n$ como el conjunto de todas las bolas abiertas de radio $\frac{1}{n}$, y es un fácil ejercicio verificar que $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ produce un desarrollo. Los espacios de Moore fueron llamados así en honor a R.L. Moore, el fundador de lo que fué conocido como la escuela de Texas de topología. Estos son los espacios dados por la primeras tres partes de su Axioma 1 en [Moore 1932]. El axioma completo da la definición de un espacio de Moore completo, y era uno del conjunto de axiomas en [Moore 1935] que caracterizaban al plano de manera intrinseca.

Es natural preguntarse. ¿Qué propiedad extra es necesaría para hacer a un espacio de Moore metrizable?

O, usando las palabras de Jones [Jones 1966], ¿Cuál es exactamente la razón por la cual los espacios de Moore no metrizables no son metrizables? Lo que se buscaba era una propiedad suficientemente general que se aplicara a todos los espacios de Moore, no sólo a ciertas clases, tales como espacios de Moore separables o localmente compactos. Debería ser una propiedad tan general y simple como fuerá posible, suficientemente fuerte para hacer a todos los espacios de Moore metrizables y por otro lado, digamos, sin hacer metrizables a todos los espacios regulares. Fué sólo cuestión de tiempo antes de que alguién se preguntará sobre el axioma de separación de normalidad.

Es un hecho bien conocido que todos los espacios metrizables son normales. Por otro lado, como si fuerá por accidente (pero como sabemos ahora, no era un accidente), todos los espacios de Moore no metrizables encontrados hasta 1933 (y un poco más alla) no eran normales.

Fué el 28 de Octubre de 1933, cuando F. Burton Jones, en ese entonces estudiante de R. L. Moore, anunció publicamente, en una reunión de la AMS, el siguiente problema y una tentativa solución parcial:

¿Es todo espacio de Moore normal metrizable?

La conjetura de Moore, es la respuesta afirmativa a este problema. Esta conjetura parecía a primera vista como las muchas otras preguntas que circulaban en las clases de R. L. Moore, y nadie sospecho por mucho tiempo que la conjetura estaba atada inextricablemente con resultados de independencia en teoria de conjuntos.

3. Ejemplos.

El siguiente resultado de Jones nos permitirá probar que nuestros siguientes ejemplos de espacios de Moore no metrizables no son normales.

2.2. Lema. (Jones) Si X es normal, entonces $2^{|D|} \leqslant 2^{d(X)}$ para cada subconjunto cerrado discreto D de X. En particular, si X es normal y separable, entonces X no puede contener un subconjunto cerrado y discreto de cardinalidad $\geqslant \mathfrak{c}$.

Demostración. Sea S un subconjunto denso de X con $|S| \leqslant d(X)$. Para cada subconjunto E de D, sea U_E un conjunto abierto tal que $E \subset U_E$ y $\overline{U_E} \cap (D \setminus E) = \emptyset$. Sea $V_E = U_E \cap S$. Se verifica fácilmente que $V_E \neq V_F$ si F, E son dos subconjuntos distintos de D. Esto es, $\{V_E : E \subset D\}$ es una colección de $2^{|D|}$ subconjuntos de S y por lo tanto $2^{|D|} \leqslant 2^{|S|} \leqslant 2^{d(X)}$. □

En adición al teorema anterior de normalidad, Jones [Jones 1937] dio, en efecto, el primer ejemplo de un espacio de Moore *pseudonormal* no metrizable.

2.3. Definición. Un espacio es *pseudonormal* si para cada par F_1, F_2 de cerrados ajenos, uno de los cuales es numerable, son separados por abiertos ajenos.

2.4. Definición. La *topología de intervalos* sobre un árbol T es aquella que tiene como base a todos los conjuntos de la forma $(s, t] = \{x \in T : s < x \leqslant t\}$, junto con todos los singuletes $\{t\}$ tales que t es minimal en T.

Sea $E \subset 2^\omega$, definimos $S_E := 2^{<\omega} \cup E$ y lo dotamos con la topología de intervalos, veamos que S_E es un espacio de Moore, separable y no metrizable, cuando $E = 2^\omega$. Claramente es separable, y se sigue del lema de Jones que no es normal ya que E es un subconjunto cerrado y discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Definimos $\mathcal{U}_n = \{\{s\} : s \in 2^{<\omega}\} \cup \{(f{\restriction}n, f] : f \in E\}$ entonces $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\omega}$ forman un desarrollo para el espacio S_E. Subespacios que intersectan a 2^ω en un subconjunto numerable son segundo numerables, y por lo tanto metrizables por el teorema de metrización de Uryshon; por otro lado, ya que cada espacio separable y metrizable es segundo numerable, ningún subespacio separable que intersecte a 2^ω en un conjunto no numerble puede ser metrizable.

Una mitad de la historia consiste en saber si algún subespacio puede ser normal; la otra mitad, es el espacio pseudonormal que Jones construyó. El consiguió esto con la ayuda de un λ-conjunto no numerable. Veamos ahora como construir el ejemplo de Jones.

2.5. DEFINICIÓN. Un subconjunto $L \subset \mathbb{R}$ es un λ-*conjunto* si cada subconjunto numerable de L es un G_δ en la topología relativa de L.

Una consecuencia familiar del teorema de categorias de Baire es que $\mathbb{Q}$ no es un G_δ en $\mathbb{R}$ y por lo tanto la línea real no es un λ-conjunto. El concepto de λ-conjunto fue introducido por Kuratowski [Kuratowski 1933], quien mostró que existen λ-subconjuntos de $\mathbb{R}$ no numerables. Empezaremos por construir un λ-conjunto.

2.6. TEOREMA. Existe un λ-conjunto no numerable.

DEMOSTRACIÓN. Sea $A = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ un buen orden para el intervalo $(0,1)$. Construiremos al λ-conjunto L por inducción transfinita sobre ω_1. Definimos por inducción dos sucesiones p_α y G_α tales que $p_\alpha \in G_\alpha$ y G_α es un subconjunto G_δ de $(0,1)$ con medida cero.

Sea $p_0 = x_0$ y $G_0 = \{x_0\}$, supongamos que p_α y G_α han sido definidos para todo $\alpha < \beta < \omega_1$. Sea $p_\beta = min\{x_\gamma : x_\gamma \in A \setminus \bigcup_{\alpha<\beta} G_\alpha\}$ (el minimo existe por que el conjunto $\bigcup_{\alpha<\beta} G_\alpha$ tiene medida cero) y sea G_β un subconjunto G_δ de medida cero con $\bigcup_{\alpha<\beta} G_\alpha \subset G_\beta$. Definimos $L = \{p_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ claramente $|L| = \omega_1$. Ahora veamos que L es un λ-conjunto. Sea K un subconjunto numerable de L. Sean $p_\beta = min(L \setminus K)$ y $H = \{p_\alpha : \alpha \leqslant \beta\}$. Entonces K es un subconjunto de H, H es claramente G_δ en L ($H = G_\beta \cap L$). Pero $H \setminus K$ es numerable, por lo tanto K es un G_δ en L. □

2.7. TEOREMA. Existe un espacio de Moore pseudo normal no metrizable.

DEMOSTRACIÓN. Sea L un λ-conjunto, podemos suponer que $L \subset 2^\omega$, ya que L es cero dimensional, y el conjunto de Cantor es universal para los espacios metricos separables y cero dimensionales. Entonces el espacio S_L es el espacio buscado. □

A continuación veremos otro ejemplo de un espacio de Moore no metrizable, el cual será de gran importancia en capítulos posteriores.

Una familia $\mathcal{A} \subset [\omega]^\omega$ se dice que es *casi ajena* si para cada $A, B \in \mathcal{A}$ distintos $|A \cap B| < \omega$. Para cada familia casi ajena definimos un espacio $\Psi(\mathcal{A})$ llamado el espacio de Isbel-Mrowka definido por: el conjunto soporte de $\Psi(\mathcal{A})$ es $\omega \cup \mathcal{A}$, los puntos de ω son aislados y una vecindad básica de $A \in \mathcal{A}$ tiene la forma $\{A\} \cup (A \setminus F)$, donde $F \in [\omega]^{<\omega}$.
A continuación veremos algunas de las propiedades más importantes de $\Psi(\mathcal{A})$. Es fácil verificar que $\Psi(\mathcal{A})$ es un espacio localmente compacto, Hausdorff y por lo tanto regular, el espacio es separable ya que ω es un denso numerable y $\mathcal{A}$ es un subconjunto cerrado y discreto. Por otro lado, la sucesión $(\mathcal{G}_n)$ donde $\mathcal{G}_n = \{\{n\} : n \in \omega\} \cup \{\{A\} \cup (A \setminus n) : A \in \mathcal{A}\}$ es un desarrollo para X, recordemos que $n = \{0, ..., n-1\}$. Es decir $\Psi(\mathcal{A})$ es un espacio de Moore separable y localmente compacto. Ahora veamos que podemos elegir $\mathcal{A}$ de forma que X no sea normal y por lo tanto no metrizable. Primero mostraremos que podemos construir una familia casi ajena de cardinalidad $\mathfrak{c}$: Sea $\mathbb{P}$ el conjunto de los números irracionales, para cada $\alpha \in \mathbb{P}$ sea $\{\alpha_n\}_{n\in\omega}$ una sucesión estrictamente creciente de racionales que converge a α, entonces $\mathcal{A} = \{\{\alpha_n\}_{n\in\omega} : \alpha \in \mathbb{P}\}$ es una familia casi ajena de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Usando el lema de Zorn podemos construir una familia casi ajena maximal de cardinalidad $\mathfrak{c}$. Si $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena con $|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$ entonces $\Psi(\mathcal{A})$ no es normal, por el lema de Jones.

4. ESPACIOS METACOMPACTOS Y COLECTIVAMENTE NORMALES.

Alrededor de 1950, el problema general de metrización, es decir, el problema de determinar condiciones necesarias y suficientes para que un espacio sea metrizable, fué resuelto de manera independiente por Bing[1951], Nagata[1950], y Smirnov[1951].

2.8. TEOREMA. Un espacio regular X es metrizable si y sólo si X tiene una base σ-localmente finita (Bing, σ-discreta).

Por medio del teorema anterior, Bing obtuvo el teorema de metrización definitivo para espacios de Moore, usando un concepto muy similar a la normalidad, lo cual veremos a continuación. Primero veremos algunas definiciones.

2.9. DEFINICIÓN. Sea $\mathcal{A}$ una colección de conjuntos ajenos no vacios. Una familia $\mathcal{U}$ *extiende* a $\mathcal{A}$ si para cada $A \in \mathcal{A}$ existe $U_A \in \mathcal{U}$ tal que $A \subset U_A$ y $B \cap U_A = \emptyset$ si $B \neq A$. En el caso en que $\mathcal{A}$ consiste de singuletes, también decimos que $\mathcal{U}$ extiende a $\bigcup \mathcal{A}$.

2.10. DEFINICIÓN. Una colección $\mathcal{D}$ de subconjuntos de un espacio X es discreta si para cada punto de X existe una vecindad del punto que intersecta a lo más a un elemento de la colección. Un espacio es *colectivamente Hausdorff* si cada subespacio cerrado discreto se extiende a una colección ajena de conjuntos abiertos. Un espacio es *colectivamente normal* si toda colección discreta de cerrados se extiende a una colección ajena de conjuntos abiertos.

2.11. TEOREMA. (Bing) Un espacio es metrizable si y sólo si es un espacio de Moore colectivamente normal.

DEMOSTRACIÓN. Sea $(\mathcal{G}_n)$ un desarrollo para X. Para cada $n \in \omega$, sea $\mathcal{F}_n = \bigcup_{m\in\omega} \mathcal{F}_{nm}$ un refinamiento de $\mathcal{G}_n$ tal que cada $\mathcal{F}_{nm}$ es cerrado y discreto. Lo anterior es posible debido a que los espacios de Moore son subparacompactos lo cual probaremos posteriormente. Sea $\mathcal{B}_{nm} = \{B_F : F \in \mathcal{F}_{nm}\}$ una colección discreta de subconjuntos abiertos tales que, para cada $F \in \mathcal{F}_{nm}$, $F \subset B_F \subset G$ para algún $G \in \mathcal{G}_n$. Entonces $\bigcup\{\mathcal{B}_{nm} : n, m \in \omega\}$ es una base σ-discreta para X, así que X es metrizable por el teorema de metrización de Nagata-Smirnov. □

A continuación daremos un ejemplo de un espacio normal extremadamente disconexo que no es colectivamente normal.

Sea $\{A_\alpha : \alpha \in 2^{\omega_1}\}$ una familia independiente maximal de subconjuntos de ω_1. (ver el capítulo de preliminares) Sea $\{H_\alpha : \alpha \in 2^{\omega_1}\}$ una enumeración de $\mathcal{P}(\omega_1)$. Definimos $U'_\xi \subset \mathcal{P}(\omega_1)$, $\xi \in \omega_1$, por $A_\alpha \in U'_\xi$ si $\xi \in H_\alpha$; $\omega_1 \setminus A_\alpha \in U'_\xi$ si $\xi \notin H_\alpha$. Entonces U'_ξ es una subbase para un filtro, sea U_ξ un ultrafiltro tal que $U'_\xi \subset U_\xi$. Los $U_{\xi's}$ son distintos. Consideremos al conjunto ω_1 con la topología discreta y a los $U_{\xi's}$ como puntos de $\beta\omega_1 \setminus \omega_1$. Entonces $X = \omega_1 \cup \{U_\xi : \xi \in \omega_1\}$ es un subespacio denso del espacio extremadamente disconexo $\beta\omega_1$ por lo cual es extremadamente disconexo. $\{U_\xi : \xi \in \omega_1\}$ es un subespacio cerrado discreto de X. X es normal, ya que si $H \subset \omega_1$, $H \cup \{U_\xi : \xi \in H\}$, $(\omega_1 \setminus H) \cup \{U_\xi : \xi \in)(\omega_1 \setminus H)\}$ son abiertos ajenos. Supongamos que los $U_{\xi's}$ son separados. Entonces existirían subconjuntos ajenos por pares $F_\xi \subset \omega_1$, $F_\xi \in U_\xi$. A lo más un F_ξ podría ser un A_α, así que sin perdida de generalidad podemos suponer que ninguno lo es. Por la maximalidad de la familia, para cada ξ existe existe un función parcial finita de 2^{ω_1} en 2 tal que, $F_\xi \supset \cap\{A_\alpha^{s_\xi(\alpha)} : \alpha \in doms_\xi\}$ donde $A_\alpha^0 = A_\alpha$ y $A_\alpha^1 = \omega_1 \setminus A_\alpha$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que los dominios de las s_ξ forman un Δ-sistema con raíz r, y tales que $s_\xi \restriction r = s_{\xi'} \restriction r$ para todo ξ, ξ'. Pero entonces los F_ξ tienen intersección no vacia (por la independencia de la familia), lo cual es una contradicción. □

2.12. OBSERVACIÓN. El teorema de Bing, reduce la conjetura de Moore a la pregunta de cuando normal implica colectivamente normal. Las propiedades más usuales de los espacios de Moore en conexión con la propiedad de ser colectivamente normal son: estos espacios son primero numerables, sus subconjuntos cerrados son G_δ, y son subparacompactos.

La primera propiedad es obvia; para probar la segunda observemos que si F es un subconjunto cerrado de un espacio de Moore X con un desarrollo $\{\mathcal{U}_n\}_{n\in\omega}$ entonces $F = \bigcap_{n\in\omega} St(F;\mathcal{U}_n)$. La tercera propiedad es el contenido del siguiente teorema. La subparacompacidad será una de las técnicas principales para probar el teorema de Chaber y Zenor.

2.13. DEFINICIÓN. Un espacio es *subparacompacto* si cada cubierta abierta tiene un refinamiento cerrado σ-discreto.

2.14. DEFINICIÓN. Una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ esta <u>*acotada*</u> con respecto a la cubierta $\mathcal{V} = \mathcal{V}_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ si para todo $A \subset \mathcal{A}$ $\overline{(\bigcup\{U_\alpha : \alpha \in A\})} \subset \bigcup\{\overline{V_\alpha} : \alpha \in A\}$.

2.15. TEOREMA. Para cualquier espacio X las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) X es subparacompacto.
(ii) Cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X tiene un refinamiento cerrado σ-localmente finito.
(iii) Cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X tiene un refinamiento cerrado $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$ donde cada $\mathcal{F}_n$ preserva clausuras.
(iv) Cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X tiene un refinamiento cerrado $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$ donde cada $\mathcal{F}_n$ es acotado.
(v) Para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X existe una sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\omega}$ de refinamientos abiertos tales que para cada $x \in X$ existe $n \in \omega$ tal que $St(x, \mathcal{G}_n) \subset U$ para algún $U \in \mathcal{U}$.

(vi) Para cada cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X existe una sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\omega}$ de refinamientos abiertos de $\mathcal{U}$ tal que para cada $x \in X$ existe algún $n \in \omega$ con $ord(x, \mathcal{G}_n) = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Es claro que $(i) \to (ii) \to (iii) \to (iv)$. Primero mostraremos que $(iv) \to (i)$. Será conveniente usar la siguiente notación. Para $n, k \in \omega$ y cualquier sucesión finita $s = (i_1, ..., i_k) \in \omega^k$ sea $s \oplus n = (i_1, ..., i_k, n)$. Ahora supogamos que (iv) se cumple y que $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ es una cubierta abierta de X donde κ es un cardinal. Para cada $k \in \omega$ y cada $s \in \omega^k$ definimos por inducción sobre k un refinamiento abierto $\mathcal{G}(s)$ de $\mathcal{U}$ y un refinamiento correspondiente $\mathcal{F}(s)$, σ-acotado con respecto a $\mathcal{G}(s)$ como sigue: Para $t \in \omega$ (una sucesión de longitud 1) sea $V_\alpha(t) = W_\alpha(t) = U_\alpha$ para cada $\alpha \in \kappa$ y sea

$$\mathcal{G}(t) = \{V_\alpha(t) : \alpha \in \kappa\} \cup \{W_\alpha(t) : \alpha \in \kappa\}.$$

Supongamos que $\mathcal{G}(s)$, un refinamiento abierto de $\mathcal{U}$, ha sido definido para $s \in \omega^k$ donde $\mathcal{G}(s)$ tiene la forma

$$\mathcal{G}(s) = \{V_\alpha(s) : \alpha \in \kappa\} \cup \{W_\alpha : \alpha \in \kappa\}.$$

Por conveniencia sea $G_\alpha(s) = V_\alpha(s) \cup W_\alpha(s)$. Sea $\mathcal{F}(s)$ un refinamiento σ-acotado con respecto a $\mathcal{G}(s)$, donde podemos suponer que $\mathcal{F}(s)$ tiene la forma

$$\mathcal{F}(s) = \{H_\alpha(s \oplus n) : \alpha \in \kappa,\ n \in \omega\} \cup \{K_\alpha(s \oplus n) : \alpha \in \kappa,\ n \in \omega\},$$

y para cada $n \in \omega$, $\{H_\alpha(s \oplus n) : \alpha \in \kappa\}$ es acotado con respecto a $\{V_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ y $\{K_\alpha(s \oplus n) : \alpha \in \kappa\}$ es acotado con respecto a $\{W_\alpha(s) : \alpha \in \kappa\}$. Para completar la inducción supongamos que $\mathcal{G}(s \oplus n)$ es definido como

$$V_\alpha(s \oplus n) = G_\alpha(s) \setminus \mathrm{cl}_X(\bigcup_{\beta\neq\alpha}(H_\beta(s \oplus n) \cup K_\beta(s \oplus n)))),$$

$$W_\alpha(s \oplus n) = G_\alpha(s) \cap (\bigcup_{\beta>\alpha} G_\beta(s)) \setminus \mathrm{cl}_X(\bigcup_{\beta<\alpha}(H_\beta(s \oplus n) \cup K_\beta(s \oplus n)))),$$

$$\mathcal{G}(s \oplus n) = \{V_\alpha(s \oplus n) : \alpha \in \kappa\} \cup \{W_\alpha(s \oplus n) : \alpha \in \kappa\}.$$

Para ver que $\mathcal{G}(s \oplus n)$ cubre a X supongamos que $x \in X$ pero que $x \notin \bigcup_\alpha V_\alpha(s \oplus n)$. Sea $\gamma = min\{\alpha \in \kappa : x \in G_\alpha(s)\}$. Entonces $x \in \mathrm{cl}_X(\bigcup_{\beta>\gamma}(H_\beta(s \oplus n) \cup K_\beta(s \oplus n))))$ y debe haber algún $\beta > \gamma$ tal que $x \in G_\beta(s)$. De esto se sigue que $x \in W_\gamma(s \oplus n)$. Por lo tanto $\mathcal{G}(s \oplus n)$ cubre a X. Ahora, para $s \in \omega^k$, $n \in \omega$, $\alpha \in \kappa$ sea

$$T_\alpha(s \oplus n) = \overline{H_\alpha(s \oplus n)} \setminus \bigcup_{\beta \neq \alpha} V_\beta(s).$$

Como $\{H_\alpha(s \oplus n) : \alpha \in \kappa\}$ es acotado con respecto a $\{V_\alpha(s) : \alpha \in \kappa\}$ es fácil mostrar que $\{T_\alpha(s \oplus n) : \alpha \in \kappa\}$ es una colección discreta (de conjuntos cerrados). Obviamente $T_\alpha(s \oplus n) \subset U_\alpha$, así que nos basta probar que

$$\{T_\alpha(s \oplus n) : \alpha \in \kappa,\ n \in \omega,\ s \in \omega^{<\omega}\}$$

cubre a X. Para esto, sea $z \in X$ y sea

$$\delta = min\{\beta : z \in H_\beta(r) \cup K_\beta(r),\ r \in \omega^{<\omega}\}.$$

Existe algún $t \in \omega^{<\omega}$ y $n \in \omega$ tal que $z \in H_\delta(t \oplus n) \cup K_\delta(t \oplus n)$. Sea $n \in \omega$, $\sigma \in \kappa$, tales que

$$z \in H_\sigma(t \oplus n \oplus m) \cup K_\sigma(t \oplus n \oplus m) \subset V_\sigma(t \oplus n) \cup W_\sigma(t \oplus n).$$

Se sigue de la definición de δ que $z \notin V_\alpha(t \oplus n)$ y $z \notin W_\alpha(t \oplus n)$ si $\alpha > \delta$ así que $\sigma = \delta$ y $z \notin \bigcup_{\beta > \delta} G_\beta(t \oplus n)$ implica que $z \notin W_\delta(t \oplus n \oplus m)$. Por lo tanto $z \in H_\delta(t \oplus n \oplus m)$. También, como $z \in H_\delta(t \oplus n) \cup K_\delta(t \oplus n)$ tenemos que $z \notin V_\beta(t \oplus n)$ si $\beta \neq \delta$. Esto nos da que

$$z \in H_\delta(t \oplus n \oplus m) \setminus \bigcup_{\beta \neq \delta} V_\beta(t \oplus n) \subset T_\delta(t \oplus nn \oplus m)$$

lo cual completa la prueba de $(iv) \rightarrow (i)$.

Ahora probaremos $(i) \rightarrow (vi)$. Supongamos (i) y sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X, y sea $\bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$ un refinamiento cerrado de $\mathcal{U}$ donde cada $\mathcal{F}_n$ es discreto. Para cada $F \in \mathcal{F}_n$ sea $U(F) \in \mathcal{U}$ tal que $F \subset U(F)$. Si $E_n = \bigcup \mathcal{F}_n$ y $G(F) = U(F) \setminus (E_n \setminus F)$ sea

$$\mathcal{G}_n = \{G(F) : F \in \mathcal{F}_N\} \cup \{U \setminus E_n : U \in \mathcal{U}\}.$$

Entonces $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \omega}$ es la sucesión de refinamientos abiertos requerida.

(vi)$\rightarrow$ (v). Es claro.

(v)$\rightarrow$ (iv). Supongamos que $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \kappa\}$ es una cubierta abierta de X y $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \omega}$ es una sucesión de refinamientos como en (v). Para cada $n \in \omega$, $\alpha \in \kappa$, sea

$$C(\alpha, n) = \{x \in X : St(x, \mathcal{G}_n) \subset U_\alpha\} \ \wedge\ \mathcal{C}_n = \{C(\alpha, n) : \alpha \in \kappa\}.$$

Claramente $\bigcup_{n\in\omega}\mathcal{C}_n$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Para ver que $\mathcal{C}_n$ es acotada con respecto a $\mathcal{U}$ supongamos que $\kappa' \subset \kappa$ y sea $z \in X \setminus \bigcup\{U_\alpha : \alpha \in \kappa'\}$. Para cada $y \in C(\alpha, n)$, y algún $\alpha \in \kappa$; sabemos que $St(y, \mathcal{G}_n) \subset C(\alpha, n)$ así que $z \notin St(y, \mathcal{G}_n)$ y $y \notin St(z, \mathcal{G}_n)$. Es decir, $z \notin \mathrm{cl}_X(\bigcup\{C(\alpha, n) : \alpha \in \kappa'\})$. Lo cual completa la prueba del teorema. □

Ahora veremos algunos resultados sobre funciones cardinales topológicas, con los que finalmente podremos demostrar el teorema de Reed y Zenor.

2.16. Lema. Sea κ un cardinal infinito, sea X un espacio topológico tal que (1) para cada $p \in X$ existe una colección $\mathcal{V}_p$ de vecindades abiertas de p tal que $|\mathcal{V}_p| \leqslant \kappa$ y $\bigcap\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}_p\} = \{p\}$; (2) existe un subconjunto S de X tal que $X = \bigcup\{\overline{A} : A \subset S,\ |A| \leqslant \kappa\}$. Entonces $|X| \leqslant |S|^\kappa$.

Demostración. Para cada $p \in X$, sea A_p un subconjunto de S con $p \in \overline{A_p}$ y $|A_p| \leqslant \kappa$. Notemos que para cualquier vecindad abierta V de p, $(A_p \cap V) \subset S$, $|A_p \cap V| \leqslant \kappa$, y $p \in (\overline{(A_p \cap V)})$. Definimos $\Phi : X \to [[S]^{<\kappa}]^{<\kappa}$ por $\Phi(p) = \{(A_p \cap V) : V \in \mathcal{V}_p\}$. Como $\bigcap\{(\overline{(A_p \cap V)}) : V \in V_p\} = \emptyset$, Φ es inyectiva. Por lo tanto $|X| \leqslant (|S|^\kappa)^\kappa = |S|^\kappa$. □

2.17. Teorema. (Pospisil). Sea X un espacio Hausdorff entonces $|X| \leqslant d(X)^{\chi(X)}$.

Demostración. Aplicar el lema anterior con $\kappa = \chi(X)$. □

2.18. Teorema. (Arhangelskii). Sea X un espacio Hausdorff, entonces $|X| \leqslant 2^{L(X)\chi(X)}$. En particular, todo espacio Lindelöf, Hausdorff y primero numerable tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$.

Demostración. Sea $L(X)\chi(X) = \kappa$, y para cada $p \in X$ sea $\mathcal{V}_p$ una base local para p con $|\mathcal{V}_p| \leqslant \kappa$. Construiremos una sucesión creciente $\{H_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ de conjuntos cerrados en X y una sucesión $\{V_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ de colecciones de conjuntos abiertos en X tales que:

1. $|H_\alpha| \leqslant 2^\kappa$, $\alpha < \kappa^+$;
2. $\mathcal{V}_\alpha = \{V \in \mathcal{V}_p : p \in \bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta\}$, $\alpha < \kappa^+$;
3. si W es la unión de $\leqslant \kappa$ elementos de $\mathcal{V}_\alpha$, y $W \neq X$, entonces $H_\alpha \setminus W \neq \emptyset$.

La construcción la haremos por inducción transfinita. Sea $\alpha < \kappa^+$, y supongamos que H_β ha sido construida para cada $\beta < \alpha$. Notemos que $\mathcal{V}_\alpha$ ha sido construida por (2) y $|\mathcal{V}_\alpha| \leqslant 2^\kappa$. Para cada W que es la unión de $\leqslant \kappa$ elementos de $\mathcal{V}_\alpha$ y tal que $W \neq X$, escogemos un punto de $X \setminus W$. Sea A_α el conjunto de puntos elegidos en esta forma ($|A_\alpha| \leqslant 2^\kappa$), y sea $H_\alpha = \overline{(A_\alpha \cup (\bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta))}$. Claramente H_α es cerrado y $H_\beta \subset H_\alpha$ para todo $\beta < \alpha$; además $|H_\alpha| \leqslant 2^\kappa$ por el teorema anterior. Esto completa la construcción de $\{H_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$.

Ahora sea $H = \bigcup_{\alpha<\kappa^+} H_\alpha$; H es cerrado ya que $\{H_\alpha : \alpha \in \kappa^+\}$ es una sucesión creciente de conjuntos cerrados y $\chi(X) \leqslant \kappa$. Para completar la prueba basta probar que $H = X$. Supongamos que este no es el caso, y sea $q \in X \setminus H$. Para cada $p \in H$ escogemos $V_p \in \mathcal{V}_p$ tal que $q \notin V_p$. Entonces $\{V_p : p \in H\}$, junto con $X \setminus H$, cubre a X, así que existe un subconjunto A de H con $|A| \leqslant \kappa$ tal que $\{V_p : p \in A\}$ cubre a H. Sea $W = \bigcup_{p\in A} V_p$, y notemos que $H \subset W$ y $q \notin W$. Escojamos $\alpha < \kappa^+$ tal que $A \subset \bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta$. Como $W \neq X$, se sigue de (3) que $H_\alpha \setminus W \neq \emptyset$. Lo cual contradice que $H \subset W$. □

Un año antes de los resultados de Bing, Arens y Dugundji[1950] habían introducido un concepto que jugaría de manera indirecta un papel significativo en la conjetura de Moore:

2.19. DEFINICIÓN. Un espacio es *metacompacto* si cada cubierta abierta de él tiene un refinamiento abierto punto finito.

Por supuesto, esta propiedad substituye "punto finita" por "localmente finita" en la definición de paracompacidad, pero esta condición es considerablemente más general que la paracompacidad. Michael[1955] mostró que un espacio es paracompacto si y sólo si es colectivamente normal y metacompacto. Michael también mostró en ese mismo artículo que la hipótesis de normalidad colectiva no podía ser debilitada a normalidad. Para esto mostró que el subespacio del espacio G de Bing consistente de todas las funciones con soporte finito era normal y metacompacto y no colectivamente Hausdorff. Para espacios separables tenemos el siguiente teorema en relación con la conjetura de Moore.

2.20. TEOREMA. (Traylor) Un espacio de Moore normal separable y metacompacto X es metrizable

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de Bing y el hecho de que un espacio de Lindelöf es paracompacto basta probar que X es Lindelöf. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X la cual podemos suponer que es punto finita (ya que X es metacompacto). Como X es separable, podemos elegir un denso numerable $A = \{a_n\}_{n\in\omega}$. Sea $\{W_{n,1}, ..., W_{n,n(k)}\}$ la colección de elementos de $\mathcal{U}$ tales que $a_n \in W_{n,i}$ y $\mathcal{W} = \{W_{k,i} : n \in \omega,\ 1 \leqslant i \leqslant n(k)\}$. Afirmamos que $\mathcal{W}$ es una cubierta de X. Sea $x \in X$ entonces existe $U \in \mathcal{U}$ con $x \in U$. Como A es denso en X, existe $a_n \in U$; entonces $U \in \mathcal{W}$, por lo tanto X es Lindelöf. $\square$

Ahora pasaremos a probar uno de los teoremas principales de este capítulo.

2.21. TEOREMA. (Reed-Zenor). Sea X un espacio de Moore normal localmente compacto, localmente conexo entonces X es metrizable.

DEMOSTRACIÓN. Como las componentes de un espacio localmente conexo son abiertas y ajenas, basta probar que cada componente es metrizable.

A cada $x \in X$ le asignamos una vecindad compacta $\overline{U}(x)$ y una vecindad conexa $V(x)$ tal que $V(x) \subset \overline{U}(x)$. Entonces, por el teorema de Arhangelskii tenemos que $|V(x)| \leqslant |\overline{U}(x)| \leqslant \mathfrak{c}$. Ahora definimos conjuntos abiertos V_α para cada $\alpha \in \omega_1$ como sigue:

Definimos $V_0 = V(x_0)$ para un punto fijo $x_0 \in X$

Supongamos que V_α ha sido definido para toda $\alpha < \beta$. Entonces definimos:

$$V_\beta = \bigcup\{V(x) : x \in \overline{\bigcup_{\alpha<\beta} V_\alpha}\}.$$

Ahora es obvio que $\{V_\beta : \beta \in \omega_1\}$ es una sucesión creciente consistente de conjuntos abiertos conexos. Del teorema de Pospisil y una fácil inducción sobre β obtenemos que $|V_\beta| \leqslant \mathfrak{c}$ para todo $\beta \in \omega_1$. Sea $V = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} V_\alpha$. Claramente V es abierto. Ahora, probaremos que V es cerrado como sigue. Supongamos que $x \in \overline{V}$. Sea $\{W_i\}_{i\in\omega}$ una base de x tal que si $n < m$ entonces $W_n \supset W_m$. Entonces $W_i \cap V_{\alpha_i} \neq \emptyset$, para alguna $\alpha_i \in \omega_1$. Por lo tanto si $\alpha = sup_{i\in\omega}\alpha_i$ obtenemos que $W_I \cap V_\alpha \neq \emptyset$ para todo $i \in \omega$. Por lo tanto, $x \in \overline{V_\alpha} \subset V$, es decir, V es cerrado. Como X es conexo tenemos que $V = X$. Por lo que $|X| = |\bigcup_{\alpha\in\beta} V_\alpha| \leqslant \mathfrak{c}$. Existe una cubierta abierta numerable $\mathcal{U}$ con la siguiente propiedad para cualesquiera $x, y \in X$ con $x \neq y$ existen $W, Z \in \mathcal{U}$ tales que $W \cup Z = X$

y $x \in W \setminus \overline{Z}$ y $y \in Z \setminus \overline{W}$. Sea $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\omega}$ un desarrollo para Y. Por (a), existe un subconjunto $\{U_{\alpha,n}\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$ de $\mathcal{G}_n$ que cubre a Y. Para $n, k \in \omega$ y $\alpha < \mathfrak{c}$, definimos $V_{\alpha,n,k} = U_{\alpha,n} \setminus \bigcup_{\beta<\alpha}\{p \in Y : St(p, \mathcal{G}_k) \subset U_\beta\}$. Observemos que $\{V_{\alpha,n,k}\}_{\alpha<\mathfrak{c}}$ es una cubierta abierta de Y. Definamos $f : \mathfrak{c} \to \omega^\omega$ a ser una biyección. Entonces, para cada, racional r, sea $W_{r,n,k} = \bigcup\{V_{\alpha,n,k} : f(\alpha) < r\}$ y $Z_{r,n,k} = \bigcup\{V_{\alpha,n,k} : f(\alpha) > r\}$. Entonces $\mathcal{G}$ igual al conjuto de todos los $W_{r,n,k}$ y $Z_{r,n,k}$ es una cubierta numerable de Y que tiene las propiedades requeridas. Sea $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un familia discreta de cerrados en Y probaremos que Y es metrizable usando el criterio de metrización de Bing encontrando conjuntos abiertos ajenos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ con $K_\alpha \subset U_\alpha$.

Supongamos que $\mathcal{G} = \{\mathcal{W}_n\}_{n\in\omega}$ es una cubierta con las propidades mencionadas en (b). Para cada $\alpha \in A$ y $n \in \omega$ y $x \in K_\alpha$, escojamos una vecindad abierta conexa $N_n(x)$ con clausura compacta, contenida en un elemento de $\mathcal{G}_n$, $\overline{N_n(x)} \cap K_\beta = \emptyset$ para $\beta \neq \alpha$, $N_n(x) \subset \bigcap\{W_i : i \leqslant n \wedge x \in W_i\}$, y $N_0(x) \supset N_1(x) \supset \ldots$ Afirmamos: Si $x \in K\alpha$ entonces existe $n \in \omega$ tal que para todo $y \in \bigcup_{\beta\neq\alpha} K_\beta$, $N_n(x) \cap N_n(y) = \emptyset$. Si tal n existe para cada x lo llamamos n_x y definimos $U_\alpha = \bigcup_{x\in K_\alpha} N_{n_x}(x)$. Claramente los U_α son ajenos y $K_\alpha \subset U_\alpha$, así que Y es colectivamente normal y por lo tanto metrico. Ahora basta probar nuestra afirmación, supogamos lo contrario, entonces para cada $n \in \omega$ existe $y_n \in \bigcup_{\beta\neq\alpha} K_\beta$ tal que $N_n(x) \cap N_n(y_n) \neq \emptyset$. Como $N_n(y_n)$ es conexo, para todo $n > 1$ existe un $z_n \in N_n(y_n) \cap (N_1(x) \setminus N_2(x))$ y como $\overline{N_1(x)}$ es compacto, existe un punto z tal que cada vecindad de z contiene a z_n para una infinidad de $n's$. Existen $i, j \in \omega$ tales que $W_i \cup W_j = Y$ y $x \in W_i \setminus \overline{W_j}$ y $z \in W_j \setminus \overline{W_i}$. Existe $m > i + j$ tal que $St(x, \mathcal{G}_m) \subset W_i \setminus W_j$ y existe $n > m$ con $N_n(y_n) \cap (W_j \setminus \overline{W_i} \neq \emptyset$. Por lo tanto $N_n(y_n) \subset W_j$ y $N_n(x) \subset (W_i \setminus W_j)$ así que $N_n(y_n) \cap N_n(x) = \emptyset$ contrario a nuestra hipotesis. □

El siguiente teorema es una mejora del teorema anterior. Por último probaremos que todo espacio perfectamente normal, localmente conexo, perifericamente compacto (i.e. tiene una base tal que todos sus elementos tienen fronteras compactas) y subparacompacto es paracompacto. Gruenhage demostró que en el siguiente teorema la hipótesis de ser perfectamente normal puede ser reducida a normalidad, pero como hemos visto (vease observación 2.11), un espacio de Moore es normal si y sólo si es perfectamente normal. Así que para nuestros propositos es suficiente probar el caso de la normalidad perfecta.

2.22. TEOREMA. (Chaber-Zenor) Todo espacio perfectamente normal, localmente conexo, periféricamente compacto, y subparacompacto es paracompacto.

DEMOSTRACIÓN. Sea X un espacio satisfaciendo las hipotesis del teorema y sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de X. Probaremos que $\mathcal{U}$ tiene un refinamiento abierto σ-discreto. Como X es perifericamente compacto, podemos suponer que todos los elementos de $\mathcal{U}$ tienen fronteras compactas. Más aun, podemos suponer que $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\kappa}$ esta bien ordenada. Sea $\mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}_n$ un refinamiento cerrado de $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{F}_n = \{F_\alpha^n\}_{\alpha\in\kappa}$ es discreta y $F_\alpha^n \subset U_\alpha \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} U_\beta$.
Como $\mathcal{F}$ refina a $\mathcal{U}$, es suficiente probar que cada $\mathcal{F}_n$ se puede extender a una familia abierta y σ-discreta. Lo cual probaremos en los siguientes dos lemas.

2.23. LEMA. Si F es un subconjunto cerrado de un espacio regular y perifericamente compacto X esta contenido en un abierto U, entonces existe un conjunto abierto V con frontera compacta tal que $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{W}$ una cubierta abierta finita de la frontera de U consistente de conjuntos con frontera compacta y tales que $F \cap \overline{\bigcup \mathcal{W}} = \emptyset$. Entonces el conjunto $V = U \setminus (\overline{\bigcup \mathcal{W}})$ tiene las propiedades deseadas. □

2.24. LEMA. Sea X un espacio perfectamente normal, localmente conexo y perifericamente compacto. Si $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ es una cubierta abierta de X, $\mathcal{F} = \{F_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ es una colección discreta de subconjuntos cerrados de X y, para $\alpha < \gamma$

(i) $F_\alpha \subset U_\alpha$ y la frontera de U_α es compacta,
(ii) $U_\alpha \cap (\bigcup_{\beta>\alpha} F_\beta) = \emptyset$,

entonces existe una colección de abiertos $\mathcal{W} = \{W_\alpha\}_{\alpha<\gamma}$ tal que $F_\alpha \subset W_\alpha$ y $\mathcal{W}$ es una unión numerable de colecciones discretas.

DEMOSTRACIÓN. Como X es perfectamente normal, podemos escoger una sucesión $\{G_n\}_{n\in\omega}$ de conjuntos abiertos tales que

$$(iii) \quad \bigcup \mathcal{F} = \bigcap_{n\in\omega} G_n \ \wedge \ \overline{G_{n+1}} \subset G_n, \ \forall n \in \omega$$

Sea $W_{\alpha,n}$ la unión de todas las componentes de G_n que intersectan a F_α. Como X es localmente conexo, cada $W_{\alpha,n}$ es abierto. Más aun, de la definición de $W_{\alpha,n}$ se sigue para $\alpha_1 < \alpha < \gamma$ que:

$$(iv) \quad W_{\alpha_1,n} \cap W_{\alpha,n} = \emptyset \ \rightarrow \ W_{\alpha_1,n} \cap F_\alpha \neq \emptyset.$$

Mostraremos que para cada $\alpha < \gamma$ existe $n \in \omega$ tal que:

$$(v) \quad W_{\alpha,n} \cap \{\bigcup_{\beta>\alpha} F_\beta\} \neq \emptyset \ \forall n \in \omega.$$

Por (i) y el lema anterior existe un conjunto abierto con frontera compacta tal que $F_\alpha \subset V \subset \overline{V} \subset U_\alpha$. De (ii) se sigue que la frontera C de V separa F_α de $\bigcup_{\beta>\alpha} F_\beta$. Como cada $W_{\alpha,n}$ intersecta a $\bigcup_{\beta>\alpha} F_\beta$ y es la unión de una colección de conjuntos conexos que intersectan a F_α, los conjuntos $W_{\alpha,n} \cap C$ son no vacios. De la compacidad de C y del hecho que $G_{n+1} \subset G_n$, tenemos $A = \bigcap_{n\in\omega} \overline{W_{\alpha,n}} \cap C \neq \emptyset$. Por (iii) y $W_{\alpha,n} \subset G_n$, $A \subset (\bigcup \mathcal{F}) \cap C$ pero $C \cap (\bigcup_{\beta\geqslant\alpha}) = \emptyset$. Por lo tanto existe $\alpha_1 < \alpha$ y un $x \in F_{\alpha_1} \cap \bigcap_{n\in\omega} \overline{W_{\alpha,n}}$.

Cada $W_{\alpha,n}$ es cerrado en G_n y $x \in G_n$, por lo tanto $x \in \overline{W_{\alpha,n}}$ implica $x \in W_{\alpha,n}$ y (iv) muestra que α_1 no cumple (v) para todo $n \in \omega$. Lo cual contradice nuestra elección de α_1.

Para cada $\alpha < \gamma$, sea $n(\alpha)$ el primer natural que satisface (v). De (iv), la familia $\mathcal{W}'_n = \{W_{\alpha,n} : n(\alpha) = n\}$ es ajena por pares. Como cada $W_{\alpha,n}$ es una suma de componentes de G_n, $\mathcal{W}'_n$ es también discreto en G_n y, por consecuencia, $\mathcal{W}_n = \{G_{n+1} \cap W : W \in \mathcal{W}'_n\}$ es discreto en X. Esto es $\mathcal{W} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{W}_n$ es una extensión abierta y σ-discreta de $\mathcal{F}$.

CAPITULO 3

La independencia de la conjetura de Moore

1. INTRODUCCIÓN.

En este último capitulo, utilizaremos las técnicas de la teoría de conjuntos desarrolladas en el capítulo 2 para probar que la conjetura de Moore es de hecho independiente de los axiomas usuales de ZFC.

2. LA CONJETURA DE MOORE PARA ESPACIOS SEPARABLES.

El primer uso de axiomas adicionales a ZFC, para intentar resolver la conjetura de Moore se dió en 1937. Jones en 1937 uso el natural axioma $2^{\omega} < 2^{\omega_1}$. En este artículo, Jones mostró como este axioma podría ser usado para probar que todo espacio de Moore normal y separable era metrizable. Una parte de la prueba era una mejora de un teorema de metrización de Moore que decía que todo espacio de Moore hereditariamente separable es metrizable. Jones mostró que era suficiente suponer que todo subespacio discreto cerrado era numerable. Lo cual, dió como resultado al conocido "Lema de Jones". Ahora los siguientes resultados dan una generalización de los resultados de Jones.

3.1. DEFINICIÓN. Un espacio es débilmente colectivamente Hausdorff si para cada cardinal κ y cualquier subespacio cerrado discreto Y de cardinalidad κ, existe un subconjunto $Z \subset Y$ separado de cardinalidad κ.

3.2. TEOREMA. Supongamos que para todo cardinal κ, $2^{k} < 2^{\kappa^+}$. Entonces todo espacio normal de carácter menor que $\mathfrak{c}$ es débilmente colectivamente Hausdorff.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que Y es un subespacio cerrado discreto de X. Para $|Y| \leqslant \omega$, es un resultado conocido. Para el caso $|Y| > \omega$ primero consideraremos cuando $|Y|$ es un cardinal sucesor

κ^+. Fijemos para cada $y \in Y$ una base de vecindades $\mathcal{B}_y$ de y, con $|\mathcal{B}_y| \leqslant \mathfrak{c}$. Por normalidad, para cada $Z \subset Y$existe una vecindad abierta $\mathcal{U}_Z \supset Z$, $\overline{\mathcal{U}_Z} \cap (Y \setminus Z) = \emptyset$. Para cada Z escojamos una familia ajena maximal $\mathcal{I}_Z$ de elementos de $\mathcal{B}_y$, $y \in Z$. $Z \neq Z_1$ implica que $\mathcal{I}_{Z_1} \neq \mathcal{I}_Z$. Si ningún subconjunto de Y de cardinalidad κ^+ es separado, cada $|\mathcal{I}_Z| \leqslant \kappa$, así que el mapeo $Z \mapsto \mathcal{I}_Z$ establece que $2^{\kappa^+} \leqslant (\mathfrak{c}\ \kappa^+)^\kappa = 2^\kappa$.

Para κ límite, la cofinalidad de $2^{<\kappa}$ es κ, así por el lema de Köning, $2^{<\kappa} < 2^\kappa$. Para κ límite y regular sirve la misma prueba que para el caso anterior. Para κ singular, tomemos de nuevo una familia ajena maximal $\mathcal{I}_Z$ para cada $Z \subset Y$. Podemos suponer también $|\mathcal{I}_Z| < \kappa$. Existen menos de $\mathfrak{c}^\kappa$ de esas colecciones. No es dificil construir una familia independiente de 2^κ subconjuntos de κ. Es suficiente observar que sobre esta familia, el mapeo $Z \mapsto \mathcal{I}_Z$ es uno a uno, lo cual contradice $2^{<\kappa} < 2^\kappa$. Para ver esto, notemos que $|Z \setminus \overline{\bigcup \mathcal{I}_Z}| < \kappa$, ya que de otro modo, como podemos suponer que X es $|\mathcal{I}_Z|^+$-debilmente colectivamente Hausdorff, $\mathcal{I}_Z$ no sería maximal. Esto es si $Z_1 \neq Z_2$, existe un $z \in Z_2 \setminus Z_1$ tal que $z \in \bigcup \mathcal{I}_{Z_2}$. Pero $z \notin \overline{\mathcal{U}_{Z_1}} \supset \bigcup \mathcal{I}_{Z_1}$, y así $\mathcal{I}_{Z_1} \neq \mathcal{I}_{Z_2}$. □

3.3. Corolario. $2^\omega < 2^{\omega_1}$ implica que todo espacio normal de carácter menor que $\mathfrak{c}$ que satisface la c.c.c. no tiene subconjuntos discretos cerrados no numerables.

La hipotesis de Jones $2^\omega < 2^{\omega_1}$ es una consecuencia de la venerable hipótesis del continuo, la cual fué el problema número uno en la lista de Hilbert en el 1900. Jones tiene el crédito de ser el primero en utilizar $2^\omega < 2^{\omega_1}$ en una prueba la cual (como sabemos ahora) no puede ser hecha usando sólo los axiomas usuales de ZFC.

Otro problema viejo, propuesto por Suslin [1920], estaba destinado a tener un indirecto y fascinante efecto sobre la conjetura de Moore. Ya que como vimos, SH es equivalente a la existencia de un árbol de Suslin, lo cual le dio vida a la teoría moderna completa de árboles. Además la solución a la hipótesis de Suslin dada por Solovay dió como resultado el axioma de Martin. Ahora utilizaremos el axioma de Martin para dar el primer ejemplo de un espacio de Moore normal no metrizable. Para esto utilizaremos una generalización de un λ-conjunto.

3.4. DEFINICIÓN. Un *Q-conjunto* es un subconjunto no numerable Y de $\mathbb{R}$ tal que cada subconjunto de Y es un G_δ relativo a Y.

A continuación veremos que $MA + \neg CH$ implica la existencia de un Q-conjunto. Para ello necesitaremos un lema previo.

3.5. LEMA. (Solovay) Supongamos $MA+\neg CH$. Supongamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son dos familias de subconjuntos infinitos de ω con cardinalidad κ y que $|a\cap b| < \omega$ para todo $a \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{B}$. Entonces existe $s \subset \omega$ tal que $s \cap b$ es finito para todo $b \in \mathcal{B}$ y $s \cap a$ es infinito para todo $a \in \mathcal{A}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathbb{P} = \{(f,F) : f \in [\omega]^{<\omega} \ \wedge \ F \in [\mathcal{B}]^{<\omega}\}$. Definimos $(f,F) \leqslant (g,G)$ en $\mathbb{P}$ si

$$f \subset g,\ F \subset G,\ \wedge\, b \cap g \subset f\ \forall b \in F.$$

Si $(f,F) \leqslant (g,G)$ y $(g,G) \leqslant (k,K)$, entonces $b \in F$ implica que $b \in G$ lo cual implica que $(b\cap k) \subset g$; pero $(b\cap g) \subset f$, asi $b\cap k \subset f$. Esto es, $\langle \mathbb{P}, \leqslant\rangle$ es un parcialmente ordenado.

Definimos $X_{a,n} = \{(f,F) \in \mathbb{P} : |f \cap a| > n\}$ para todo $a \in \mathcal{A}$ y $n \in \omega$.

Definimos $X_b = \{(f,F) \in \mathbb{P} : b \in F\}$ para todo $b \in \mathcal{B}$.

Si $a \in \mathcal{A}$, $n \in \omega$ y $(k,K) \in \mathbb{P}$, ya que $a \setminus \bigcup K$ es infinito, existe $f \subset (a\setminus \bigcup K)$ con $|f| > n$. Entonces $(k,K) \leqslant (f \cup k, K) \in X_{a,n}$ así que $X_{a,n}$ es denso (y abierto) en $\langle \mathbb{P}, \leqslant\rangle$. Si $b \in \mathcal{B}$ y $(k,K) \in \mathbb{P}$, entonces $(k,K) \leqslant (k, K \cup \{b\}) \in X_b$. Así cada X_b es también denso y abierto en $\langle \mathbb{P}, \leqslant\rangle$.

Supongamos que $(k_\alpha, K_\alpha)_{\alpha\in L}$ es una anticadena no numerable de $\mathbb{P}$. Existe un subconjunto no numerable Q de L y un subconjunto finito k de ω tal que $k_\alpha = k$ para todo $\alpha \in Q$. Para todo $\alpha, \beta \in Q$, $(k_\alpha, K_\alpha) \leqslant (k, K_\alpha \cup K_b)$. Esto muestra que $\langle \mathbb{P}, \leqslant\rangle$ tiene la c.c.c..

Sea $\mathcal{M} = (\mathcal{A} \times \omega) \cup \mathcal{B}$; entonces $|\mathcal{M}| = k$.

Por lo tanto, por el axioma de Martin implica que existe una familia compatible $\{(f_\alpha, F_\alpha)\}_{\alpha\in\mathcal{M}}$ en $\langle \mathbb{P}, \leqslant\rangle$ con $(f_\alpha, F_\alpha) \in X_\alpha$ para todo $\alpha \in \mathcal{M}$.

Definimos $s = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{M}} f_\alpha$. Supongamos que $a \in \mathcal{A}$. Para cada $n \in \omega$, $|f_{a,n} \cap a| > n$. Así que, para cada $n \in \omega$, $|s \cap \alpha| > n$; por lo tanto $s \cap \alpha$ es infinito para todo $\alpha \in \mathcal{A}$.

Supongamos que $b \in \mathcal{B}$. Si $x \in b \cap s$, entonces $x \in f_\alpha$ para algun $\alpha \in \mathcal{M}$. Como (f_α, F_α) y (f_b, F_b) son compatibles, existe $(g, G) \in \mathbb{P}$ con $(f_\alpha, F_\alpha) \leqslant (g, G)$ y $(f_b, F_b) \leqslant (g, G)$. Como $b \in F_b$, $(b \cap g) \subset f_b$. Pero $f_\alpha \subset g$ así que $x \in g$. Esto es $x \in f_b$. Como $b \cap s \subset f_b$, $b \cap s$ es finito. □

Frank Tall, Jack Silver observaron la siguiente consecuencia del lema de Solovay 4.8.

3.6. TEOREMA. Bajo $MA + \neg CH$. Todo subconjunto X de $\mathbb{R}$ con $\omega_1 \leqslant |X| < \mathfrak{c}$ es un Q-conjunto.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que X es un subconjunto no numerable de los numeros reales de cardinalidad $\kappa < \mathfrak{c}$, y $Y \subset X$. Existe una base numerable $\mathfrak{B} = \{U_i\}_{i \in \omega}$ para la topología de la linea real tal que, para cada $x, y \in \mathbb{R}$, sólo una cantidad finita de elementos de $\mathcal{B}$ contienen a x y a y. Para $x \in X$, sea $N_x = \{i \in \omega : x \in U_i\}$. Sean $\mathcal{A} = \{N_x\}_{x \in Y}$ y $\mathcal{B} = \{N_x\}_{x \in X \setminus Y}$. Por el teorema de Solovay (suponiendo MA_κ), existe $s \subset \omega$ tal que $s \cap N_x$ es infinito para todo $x \in \mathcal{A}$ y $s \cap N_x$ es finito para todo $x \in X \setminus Y$. Para $n \in \omega$ definimos $V_n = \bigcup\{U_i : i \in s \ \wedge \ i \geqslant n\}$. Entonces $Y \subset \bigcap_{n \in \omega} V_n$ pero $\bigcap_{n \in \omega} \cap (X \setminus Y) = \emptyset$; por lo tanto Y es un G_δ en X. □

3.7. OBSERVACIÓN. Sea X un subconjunto de los numeros reales de cardinalidad $\kappa < \mathfrak{c}$. El numero de subconjuntos de X es 2^κ. El número de subconjuntos G_δ relativos de X es $2^\omega = \mathfrak{c}$. Así que una consecuencia inmediata del teorema anterior es que si $MA + \neg CH$ se sigue entonces $2^\omega = 2^\kappa$.

El siguiente teorema da punto final a la conjetura de Moore para espacios separables.

3.8. TEOREMA. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. Existe un Q-conjunto de cardinalidad κ.
2. Existe $\mathcal{A}$ una familia casi ajena tal que $\Psi(\mathcal{A})$ es normal y $|\mathcal{A}| = \kappa$.
3. Existe un espacio de Moore normal separable X con un subespacio cerrado discreto de cardinalidad κ.

Demostración. (1) $\to$ (3). Sea E un Q-conjunto de cardinalidad κ, como $|E| < \mathfrak{c}$ E es un espacio metrizable, separable y 0-dimensional, así que podemos suponer que $E \subset 2^{\omega}$. Entonces tenemos que S_E es un espacio de Moore separable con E un subespacio discreto y cerrado. Sólo resta probar que S_E es normal. Sea $A \subset E$, veamos que podemos separar A de $E \setminus A$ (quitandole los puntos aislados, de ser necesario, podemos suponer que los cerrados estan contenidos en el nivel $\omega + 1$), como E es un Q-conjunto existen $\{U_n\}_{n\in\omega}$ y $\{V_n\}_{n\in\omega}$ abiertos en $\mathbb{R}$ tales que $A = \bigcap_{n\in\omega} U_n \cap E$ y $E \setminus A = \bigcap_{n\in\omega} V_n \cap E$. Sea $U = \{t \in S_E : \exists n \in \omega(t \in U_n \setminus V_n)\}$ entonces U es abierto y $A \subset U$, $\overline{U} \cap (E \setminus A) = \emptyset$. Por lo tanto S_E es normal.

(3) $\to$ (2). Sea X un espacio como en (3), y sean D un subconjunto denso numerable, y A un subespacio cerrado y discreto con $|A| = \kappa$, sin perdida de generalidad podemos suponer que $A \cap D = \emptyset$. Para cada $a \in A$ sea a_D una sucesión en D tal que a_D converge a a. Entonces $\mathcal{A} = \{a_D : a \in A\}$ es una familia casi ajena con $|\mathcal{A}| = \kappa$. Veamos que $\Psi(\mathcal{A})$ es un espacio normal, sean $K \subset \mathcal{A}$ y $H = \mathcal{A} \setminus K$. $K' = \{a \in A : a_D \in K\}$ y $H' = A \setminus K'$ son dos cerrados ajenos en X, así que existen U', V' abiertos ajenos tales que $k' \subset U'$ y $H' \subset V'$. Definimos $U = \bigcup\{\{a_D\} \cup (a_D \setminus n_a) : a \in K'\}$ donde n_a es un subconjunto finito de a_D tal que $(a_D \setminus n_a) \subset U'$ de manera analoga definimos un abierto V. Entonces U, V separan K de H. Por lo tanto $\Psi(\mathcal{A})$ es un espacio normal. □

3.9. **Teorema.** Existe un espacio de Moore que no es colectivamente normal con respecto a una colección discreta de espacios de Moore metacompactos, entonces existe un espacio de Moore normal metacompacto no metrizable.

Demostración. Sea $\{M_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una colección discreta no separada de espacios metacompactos en el espacio de Moore normal X_0. Sea $\bigcup_{\alpha<\lambda} M_\alpha = M$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $X_0 \setminus M$ esta compuesto por puntos aislados. El nuevo espacio X consistiría de los puntos de M más los elementos de $(X_0 \setminus M) \times [M]^2$. Tomemos a los elementos del último conjunto como aislados. Fijemos para cada punto $p \in M$ una base de vecindades $\{B(p,n)\}_{n\in\omega}$ en X_0 tal que $\{\{B(p,n) : p \in M\} \cup \{d\} : d \in X_0 \setminus M\}$ es un desarrollo de X_0. Definimos para $p \in M$,

$$N(p,n) = (B(p,n) \cap M) \cup \{\langle d, \{x,y\}\rangle \in X \setminus M :$$

$$d \in B(p,n) \ \wedge\ \{x,y\} \cap B(p,n) \neq \emptyset\}.$$

Los puntos aislados más los puntos de los $N(p,n)'s$, $p \in M$, $n \in \omega$, forman una base para una topología sobre X, ya que si $q \in M \cap N(p,n) \cap N(p',n')$, entonces $q \in B(p,n) \cap B(p',n')$, así que existe $k \in \omega$ tal que $q \in B(q,k) \subset B(p,n) \cap B(p',n')$. Entonces $q \in N(q,k) \subset N(p,n) \cap N(p',n')$. De hecho, si $\mathcal{G}_n = \{N(p,n) : p \in M\} \bigcup \{\{z\} : z \in X \setminus M\}$, entonces $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \omega}$ es claramente un desarrollo para X.

Como $N(p,n) \cap N(p',n') \neq \emptyset$ si y sólo si $B(p,n) \cap B(p',n') \neq \emptyset$, X es normal y no es colectivamente Hausdorff. X es T_1 ya que $d \notin B(p,n)$, $\langle d, \{x,y\}\rangle \notin N(p,n)$. Finalmente, para ver que X es metacompacto, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta. Sea $\mathcal{V}$ un refinamiento de $\mathcal{U}$ que refine a la cubierta canónica y que sea punto finita en M. Veamos que $\mathcal{V}$ es punto finita. Si $\langle d, \{x,y\}\rangle$ pertenece a una infinidad de elementos de $\mathcal{V}$, digamos $\{V_n\}_{n \in \omega}$, entonces para cada n, $x \in V_n$ o $y \in V_n$. Pero entonces x o y estan en una infinidad de $V_n's$ lo cual es una contradicción. □

3.10. COROLARIO. Existe un espacio de Moore normal metacompacto no metrizable si existe :

(a) Un espacio de Moore normal localmente metrizable no metrizable ó
(b) Un espacio normal primero numerable no colectivamente Hausdorff.

DEMOSTRACIÓN. La primera parte del corolario se sigue por que tal espacio no es colectivamente normal con respecto a alguna colección de conjuntos metrizables y por lo tanto metacompactos. La segunda mitad se puede considerar como un colario de la prueba más que del resultado: podemos suponer sin perdida de generalidad que para cada $p \in M$ la sucesión de los $B(p.n)'s$ es decreciente; existe un $k \in \omega$ tal que $d \notin B(x,k) \cup B(y,k)$, sí $\langle d, \{x,y\}\rangle \notin N(x,k) \cup N(y,k)$. Entonces $\{\langle d, \{x,y\}\rangle\}$ es el unico elemento de la k-esima cubierta abierta conteniendo a $\langle d\{x,y\}\rangle$. □

A continuación probaremos uno de los teoremas más importantes en relación con la conjetura de Moore.

3.11. TEOREMA. (Fleissner) $V = L$ implica que todo espacio normal X con $\chi(X) \leqslant \mathfrak{c}$ es colectivamente Hausdorff.

Probaremos el teorema por inducción sobre κ.

De aqui en adelante el conjunto $\{B(y,\gamma) : \gamma \in \omega_1\}$ denotara una base de vecindades en y.

Caso I. κ es finito, el resultado se sigue de que el espacio es Hausdorff.

Caso II. $\kappa = \omega$. Usamos la regularidad del espacio.

Caso III. κ es singular con cofinalidad numerable. Sea Y un subconjunto cerrado discreto de cardinalidad κ. Entonces $Y = \bigcup_{i\in\omega} Y_i$ donde $|Y_i| < \kappa$. Usando la normalidad podemos separar a cada Y_i, y posteriormente utilizando la hipotesis de inducción podemos separar a los puntos de cada Y_i.

Caso IV. κ es regular.

En lugar de proseguir con la demostración, primero probaremos un ejercicio para dar una idea de como probar el caso IV.

Supongamos que X es un espacio pseudonormal (definición 2.3); $Y = \{U_\gamma : \gamma < \omega_1\}$ es un subespacio cerrado discreto, y $\mathcal{F}$ es una familia de ω_1 cubiertas abiertas $\mathcal{U} = \{U_\gamma : \gamma < \omega_1\}$ de Y tales que $y_\gamma \in U_\gamma$. Entonces Y puede ser separada o existe un $H \subset Y$ que no puede ser separado de $Y \setminus H$ para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$ i.e. para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$, $\bigcup_{y_\gamma\in H} \mathcal{U}_\gamma \cap \bigcup_{y_g\notin H} U_\gamma \neq \emptyset$.

Demostración. Haremos la construcción por inducción transfinita, usando las siguientes reglas.

1. Hay que realizar ω_1 pasos-Y tiene ω_1 puntos.
2. Hay que realizar ω_1 tareas- $\mathcal{F}$ tiene ω_1 cubiertas.
3. Cada tarea puede ser realizada después de $< \omega_1$ pasos.

Demostración. Supongamos que Y no se puede separar. La idea es encontrar para cada cubierta $\mathcal{U}$ elementos y_β, y_γ distintos de tal forma que $U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$, y asignarle y_β a H y y_γ a su complemento. Sólo hay que verificar que la condición se satisface. Sea K un subconjunto numerable de Y, y $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$, necesitamos encontrar $y_\beta, y_\gamma \notin K$ tales que $U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$. Supongamos que este no es el caso, entonces $\mathcal{U}$ nos da una separación de $Y \setminus K$ y como X es regular y K es numerable también tenemos una separación de K. Pero X es pseudonormal así que también podemos separar a K de $Y \setminus K$. De lo cual se sigue que podemos separar a Y una contradicción. La idea detras del ejercicio anterior es que si $\mathcal{F}$ fuerá el conjunto de todas las cubiertas abiertas de Y y Y no se pudierá separar entonces X no sería normal.

Regresemos a la prueba del teorema. Para hacer la prueba más concreta, consideraremos el caso $\kappa = \omega_1$. (La prueba para κ arbitrario es la misma.) Supongamos que X tiene carácter ω_1, y $Y \subset X$ es cerrado, discreto y no se puede separar. Para mostrar que X no es normal, es suficiente, en el espiritu del ejercicio anterior, hacer todas las tareas $\mathcal{U}_f$, donde $f : \omega_1 \to \omega_1$, y $U_\gamma = B(y_\gamma, f(\gamma))$.

Cuando uno tiene el problema de realizar 2^{ω_1} tareas en sólo ω_1 pasos. Es frecuentemente usual utilizar la técnica de $\diamondsuit$. Sea $\sigma : \beta \to \omega_1$ donde β es un ordinal numerable diremos que la terea asignada a f puede ser realizada si después de los primeros β pasos, el β-ésimo paso puede ser realizado de tal forma que realize todas las tareas indicadas por g para toda función g que extienda a σ.

En el ejercicio, hizimos la tarea $\mathcal{U}$ asignando dos nuevos puntos y_β, y_γ con $U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$. Este metodo no es suficiente para hacer la tarea U_σ ya que σ no le asigna vecindades a puntos nuevos. De hecho, como el espacio es Hausdorff, si $\alpha, \beta \notin dom(\sigma)$, entonces existe g que extiende a σ tal que $B(y_\alpha, g(\alpha)) \cap B(y_\beta, g(\beta)) = \emptyset$. Así que para hacer la tarea $\mathcal{U}_\sigma$ debemos asignar un punto nuevo de tal forma que todas sus vecindades intersecten a las vecindades de los puntos ya asignados. Llamemos

$$\overline{\bigcup_{\beta<\gamma, y_\beta \in H} B(y_\beta, \sigma(\beta))} \cap \{y_\delta : \delta \geqslant \gamma\}$$

los H puntos limites de σ. Similarmente definimos los $Y \setminus H$ puntos limites de σ. La forma de de realizar la tarea $\mathcal{U}_\sigma$ es asignar un H punto limite y_δ a $Y \setminus H$ (o un $(Y \setminus H)$ punto limite a H). Ya que sin importar como g extienda a σ la tarea $\mathcal{U}_g$ esta realizada. Sea $\langle f_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ una $\diamondsuit$-sucesión. Si fuerá posible realizar en el α-ésimo paso la tarea $\mathcal{U}_{f_\alpha}$. Entonces por $\diamondsuit$, para cada f existe un estacionario S_f tal que para cada $\gamma \in S_f$, $f \restriction \gamma = f_\gamma$. Así que cada terea sería realizada en algun segmento inicial. Pero nos hemos encontrado con un problema técnico. Para poder hacer la tarea $\mathcal{U}_{f_\gamma}$, tenemos que asignar un y_δ, con $\delta > \gamma$. Y $\diamondsuit$ aunque una técnica poderosa no es suficiente para lograrlo. Así que necesitaremos una nueva técnica.

Técnica de $\diamondsuit_F$. Supongamos que una familia de tareas está indicada por las funciones de ω_1 en ω_1. Si *muchos* segmentos iniciales de tareas pueden ser realizados, entonces, suponiendo $V = L$, en ω_1 pasos podemos realizar todas las tareas.

3.12. DEFINICIÓN. *Muchos* en el parrafo anterior significa que para todo f existe un conjunto estacionario A_f, para el cual $\gamma \in A_f$ implica que la tarea $\mathcal{U}_{f\restriction\gamma}$ puede ser realizada.

La definición anterior ha sido bastante informal. Aunque esperamos que esto sea de ayuda para entender mejor la prueba. Al finalizar la prueba daremos una definición formal.

Ahora, regresemos a probar el teorema por inducción. Si *muchos* segmentos iniciales tienen puntos limites, entonces X no es normal. (Suponiendo $V = L$ y usando la técnica $\diamondsuit_F$.) Así que podemos suponer que este no es el caso y probar que Y puede ser separado. Explicitamente, "suponer que no" significa que existe una función $f : \omega_1 \to \omega_1$ y un conjunto cerrado no acotado C tal que para todo $\gamma \in C$, $f\restriction\gamma$ no tiene puntos limites.

Entonces, para cada $\gamma \in C$

$$V_\gamma = X \setminus \overline{\bigcup_{\beta<\gamma} B(y_\beta, f(\beta))}$$

es un conjunto abierto que contiene a $\{y_\delta : \delta \geqslant \gamma\}$. Como C es cerrado, $\gamma(\beta) = sup\{\gamma \in C : \gamma < \beta\}$ esta en C. Como C es no acotado, únicamente una cantidad numerable de $\beta's$ tienen el mismo $\gamma(\beta)$. Así que existen abiertos ajenos W_β tales que si $\beta < \beta'$, $\gamma(\beta) = \gamma(\beta')$, entonces $W_\beta \cap W_{\beta'} = \emptyset$.

Ahora Y puede ser separado, por que $\beta < \beta'$ implica

$$(B(y_\beta, f(\beta)) \cap V_{\gamma(\beta)} \cap W_\beta \cap (B(y_\beta, f(\beta')) \cap V_{\gamma(\beta')} \cap W_{\beta'} = \emptyset.$$

caso 1. $\gamma(\beta') \leqslant \beta < \beta'$. Entonces $\gamma(\beta) = \gamma(\beta')$, y $W_\beta \cap W_{\beta'} = \emptyset$.

caso 2. $\beta < \gamma(\beta') \leqslant \beta'$. $B(y_\beta, f(\beta)) \cap V_{\gamma(\beta')} = \emptyset$, ya que $V_{\gamma(\beta')} = X \setminus \overline{\bigcup_{\xi<\gamma(\beta')} B(y_\xi, f(\xi))}$.

Caso V. $\kappa > cof(\kappa) > \omega$. La idea básica es bastante similar al caso anterior. Podemos definir inductivamente un subconjunto H

mostrando que X no es normal si podemos encontrar una sucesión de tareas de segmentos iniciales que realizen todas las tareas. Si no existe tal sucesión, podemos usar este hecho para separar a Y.

H puede ser definido si existe un orden tal que cada función tiene al menos un segmento inicial con muchos puntos limites. Más que considerar ekl caso V en detalle, listaremos las diferencias entre los dos casos.

1. Consideraremos todos los posibles ordenes sobre Y.
2. Consideraremos únicamente $cof(\kappa)$ segementos iniciales de una función.
3. En la condición cuando H pude ser definido *mucho* se refiere a puntos limites más que a segmentos iniciales.
4. Los pasos son ordenados en superpasos. Donde un superpaso es una indicción que destruye todos los segmentos iniciales de una longitud dadad.
5. Si H no puede ser definido, nosostros no lo separamos en un paso. Separamos tantos puntos como podamos; y entonces re-ordenamos de tal forma que cada punto malo tenga un indice menor. Ahora, como no existen sucesiones decrecientes de ordinales, después de ω pasos, ya no existen puntos malos. Entonces separamos una cantidad numerable de separaciones como en el caso III.

Finilizaremos la prueba mostrando cuando H puede ser definido. Sea C un conjunto de tipo de orden $cof(\kappa)$ cofinal en κ. H puede ser definido si existe una permutación ϕ de κ tal que para cada función $f : \kappa \to \omega_1$ existe $\gamma \in C$ tal que

$$||\overline{[\bigcup_{\phi(\beta)<\gamma} B(y_\beta, f(\phi(\beta))}) \cap \{y_\delta : \phi(\delta \geqslant \gamma\}]|| > \gamma.$$

$\square$

Ahora pasaremos a formalizar la definición de $\diamondsuit_F$

3.13. DEFINICIÓN. $\mathcal{A} = \{A_f : f \in \kappa^\kappa\}$ es un sistema *estacionario* para κ si cada A_f es un subconjunto estacionario de κ, y para cada $\alpha \in \kappa$ y $f, g \in \kappa^\kappa$, si $f\restriction_\alpha = g\restriction_\alpha$, entonces $A_f \cap (\alpha+1) = A_g \cap (\alpha+1)$, $\diamondsuit$ para sistemas *estacionarios* (en κ) es la aserción de que para cada sistema estacionario $\mathcal{A}$ para κ, existe una sucesión $\{f_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, tal que $f_\alpha \in \alpha^\alpha$ y para cada $f \in \kappa^\kappa$ existe un conjunto estacionario $S \subset A_f$ tal que $\beta \in S$ implica que $f\restriction_\beta = f_\beta$.

El teorema anterior estuvo cerca de probar la independencia de la conjetura de Moore. Pero qué tan cerca estuvo, realmente será cierto que todo espacio normal y colectivamente Hausdorff es colectivamente normal. Desgraciadamente este no es el caso como lo muestra el siguiente ejemplo de Fleissner al cual llamo George.

(George de Fleissner) Sea

$$F = \{(\alpha, \beta) : \alpha \leqslant \beta < \omega_1\},$$

$$Y_\alpha = \{\alpha\} \times (\omega_1 \setminus \alpha) \subset F,\ Z_\beta = \{(\alpha, \gamma) \in F : \gamma \leqslant \beta\}.$$

Consideremos la siguiente topología sobre F, sea $\mathcal{Y} = \{Y_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ una colección discreta y para cada α, $Y_\alpha \cong (\omega_1 \setminus \alpha)$ via $(\alpha, \beta) \mapsto \beta$. En otras palabras, F es el triangulo superior de ω_1 con la topología discreta cruz ω_1 con la topología del orden.
Sea $\mathcal{U}$ la familia de subconjuntos cerroabiertos de F; definimos $\mathcal{U}_\beta = \{U \in \mathcal{U} : U \subset Z_\beta\}$; sea $\mathcal{W}^\beta = \{U \in \mathcal{U} : U \cap Z_\beta = \emptyset\}$; y sea $J = 2^{\mathcal{U}}$. Identificamos $(\alpha, \beta) \in F$ con el punto $y_{\alpha,\beta} \in J$ definido por $y_{\alpha,\beta}(U) = 1$ si y sólo si $(\alpha, \beta) \in F$. Puntos de $J \setminus F$ son aislados. Indexamos a las vecindades de $y_{\alpha,\beta} \in J$ por subconjuntos finitos de $\mathcal{U}_\beta$. Para $(\alpha, \beta) \in F$ y $a \in [\mathcal{U}_\beta]^{<\omega}$, definimos

$$B(\alpha, \beta, a) = \{g \in J : (\forall U \in \mathcal{W}_\beta)(g(U) = 0)$$

$$\wedge\ (\forall U \in a)(g(U) = y_{\alpha,\beta}(U))\}.$$

Es rutina verificar que hemos presentado una base para un espacio Hausdorff regular. Más aun, la topología de subespacio de F es la misma topología dada a F originalmente.

George es normal. Sean H y K cerrados ajenos. Usando el truco tipico podemos suponer que $H \cup K \subset F$. Sea A un subconjunto cerroabierto de F, $H \subset A \subset F \setminus K$. Sea $U = \bigcup\{B(\alpha, \beta, \{A\}) : (\alpha, \beta) \in A\}$. Ahora en J, U es un cerroabierto y $H \subset U \subset J \setminus K$.

George no es colectivamente normal Mostraremos que la familia discreta $\mathcal{Y} = \{Y_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ no puede ser separada. Para cada $\alpha < \omega_1$, sea W_α un subconjunto abierto de J que contenga a Y_α. Para cada $(\alpha, \beta) \in F$, escojamos $a(\alpha, \beta)$ tal que $y_{\alpha,\beta} \in B(\alpha, \beta, a(\alpha, \beta)) \subset W_\alpha$. Sea $\gamma(\alpha, \beta) = min\{\gamma : y_{\alpha,\gamma} \in B(\alpha, \beta, a(\alpha, \beta))\}$. Por el lema de Fodor, para cada $a \in \omega_1$, podemos encontrar $n_\alpha \in \omega$ y $\gamma_\alpha \in \omega_1$ tal que $\{\beta : |a(\alpha, \beta)| = n_\alpha\ \wedge\ \gamma(\alpha, \beta) = \gamma_\alpha\}$ es no numerable. Escojamos $m \in \omega$, $\zeta \in \omega_1$, y $r \subset \omega_1$ tal que $|r| = 2^m + 1$, y para $\alpha \in r$, $n_\alpha = m$, $\gamma_\alpha \leqslant \zeta$. Más aun, para $\alpha \in r$, escogemos $\beta_\alpha > \zeta$ tal que $n(\alpha, \beta_\alpha) = m$ y

$\gamma(\alpha,\beta_\alpha) = \gamma_\alpha$. Abreviemos $B(\alpha,\beta_\alpha,a(\alpha,\beta_\alpha))$ por B_α.

Sea $\mathcal{V} = \mathcal{U} \setminus \mathcal{W}^\varsigma$. El mapeo $\theta(g) = g\restriction\mathcal{V}$ de J en $2^\mathcal{V}$ envia a cada B_α, $\alpha \in r$, a un conjunto C_α de medida 2^{-m} en la medida producto sobre $2^\mathcal{V}$ ya que $a(\alpha,\beta_\alpha) \subset \mathcal{V}$. Como $|r| > 2^m$, existen $\alpha,\alpha' \in r$ distintos y $g_0 \in C_\alpha \cap C_{\alpha'}$. Definimos $g \in J$ por $g(U) = g_0(U)$ si $U \in \mathcal{V}$ y $g(U) = 0$ si $U \in \mathcal{W}^\varsigma$. Entonces $g \in B_\alpha \cap B_{\alpha'}$. Por lo tanto los $U'_\alpha s$ no son ajenos y J no es colectivamente normal.

J es colectivamente Hausdorff. Sea $D \subset J$ un conjunto discreto. Como es usual podemos suponer que $D \subset F$. Como Y_α es numerablemente compacto, $|D \cap Y_\alpha| < \omega$; por lo tanto

$$C = \{\gamma \in \omega_1 : (y_{\alpha,\beta} \in D \ \wedge\ \alpha < \gamma) \to \beta < \gamma\}$$

es un c.u.b. Para $\gamma \in C$, sea γ^s el sucesor de γ en C; i.e. $\gamma^s = min(C \setminus (\gamma+1))$. Para cada $\gamma \in C$, sea $F_\gamma = \{(\alpha,\beta) \in F : \gamma \leqslant \beta < \gamma^s\}$ y sea $D_\gamma = F_\gamma \cap D$. En espacios regulares colecciones discretas numerables de puntos son separadas. Así que para cada $\gamma \in C$, existe una colección $\{U_{\alpha,\beta} : y_{\alpha,\beta} \in D_\gamma\}$, de conjuntos abiertos que separan al conjunto discreto D_γ. Finalmente, $\bigcup_{\gamma\in C}\{U_{\alpha,\beta} \cap B(\alpha,\beta,\{F_\gamma\} : y_{\alpha,\beta} \in F_\gamma\}$ separa a D.

3. La conjetura de Moore y los grandes cardinales.

Finalmente veremos como probar la independencia de la conjetura de Moore. Pero necesitaremos primeramente algunas definiciones.

3.14. Definición. Una *medida*, (de probabilidad) μ, sobre un conjunto I es una función tal que:

(i) $dom(\mu)$ es una σ-álgebra de subconjuntos de I y $ran(\mu) \subset [0,1]$,
(ii) $\mu(\emptyset) = 0$ y $\mu(I) = 1$,
(iii) si $A \subset A' \subset I$, entonces $\mu(A) \leqslant \mu(A')$,
(iv) si $\{A_n : n \in \omega\}$ es una familia ajena de subconjuntos de I, entonces $\mu(\bigcup_{n\in\omega} A_n) = \sum_{n\in\omega} \mu(A_n)$.

La propiedad (iv) se llama σ-aditividad. Para κ, un cardinal, decimos que una medida es $\kappa -$ *aditiva* si satisface (i), (ii), (iii) y

$(iv)_\kappa$ Si $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$, donde $\beta < \kappa$, es una familia ajena de subconjuntos de I, entonces $\mu(\bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha) = \sum_{\alpha<\beta} \mu(A_\alpha)$.

Esto es, σ-aditiva significa ω_1-aditiva. La siguiente variante de $(iv)_\kappa$ sera conveniente posteriormente.

$(iv)'_\kappa$ Si $\{A_\alpha : \alpha < \beta\}$, donde $\beta < \kappa$, es una familia de subconjuntos de I cerrada bajo uniones finitas, y δ es un número real positivo, entonces existe $\gamma < \beta$ tal que $\mu(\bigcup_{\alpha<\beta} A_\alpha) < \mu(A_\gamma) + \delta$.

Decimos que un filtro $\mathcal{F}$ sobre I es κ-completo si la función caracteristica $\chi_\mathcal{F}$, definida por $\chi_\mathcal{F}(A) = 1$ si y sólo si $A \in \mathcal{F}$, es κ-aditiva. Cuando $\mathcal{F}$ es un filtro sobre un conjunto I, y f, g son funciones con dominio I, decimos que "$f < g \ mod\ \mathcal{F}$" si existe $F \in \mathcal{F}$ tal que para toda $i \in F$, $f(i) < g(i)$. Frases como f es constante $mod\mathcal{F}$ deben ser interpretadas de manera similar. La siguiente medida particular sera usada frecuentemente en este capitulo es la siguiente. La medida producto sobre 2^I. Sea H_I el conjunto de funciones de un subconjunto finito de I en $2 = \{0, 1\}$. Para cada $\eta \in H_I$, definimos $[\eta]_I = \{f \in 2^I : \eta \subset f\}$. La *medida producto*, μ_I, es definida sobre B_I, la σ-álgebra generada por $\{[\eta]_I : \eta \in H_I\}$, tal que $\mu([\eta]_I) = 2^{-k}$, donde $|\eta| = k$. Como es usual omitiremos la I si esta es clara del contexto.

3.15. DEFINICIÓN. El *Axioma de extensión de medida producto* ($PMEA$) es la siguiente ascersión. Para cada I existe una medida $\mathfrak{c}$-aditiva $\overline{\mu_I}$ definida sobre $\mathcal{P}(2^I)$ que extiende a la medida producto.

Kunen había escrito, pero nunca publicado, una prueba de que PMEA es consistente relativo a la existencia de un cardinal fuertemente compacto. La prueba puede ser encontrada en Kanamori[1997].

3.16. TEOREMA. (Nyikos). Supongamos $PMEA$. Entonces cada colección normalizada en un espacio de caracter menor que $\mathfrak{c}$ es separada. En particular, todo espacio de Moore normal es metrizable.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{Y} = \{Y_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos de un espacio X de caracter menor que $\mathfrak{c}$, normalizada por $\mathcal{U} = \{U_J : J \subset I\}$. Para cada $y \in \bigcup \mathcal{Y}$, fijemos una base de vecindades $\mathcal{N}_y$, donde $|\mathcal{N}_y| \leqslant \mathfrak{c}$. Para cada $y \in \bigcup \mathcal{Y}$ y $J \subset I$, escojemos $N(J, y) \in \mathcal{N}_y$ tal que $N(J, y) \subset U_J \ \vee \ N(J, y) \subset X \setminus \overline{U_J}$.

Identifiquemos a $\mathcal{P}(I)$ con 2^I via funciones caracteristicas; sea $\mu = \overline{\mu_I}$, la extensión de la medida producto sobre 2^I dada por $PMEA$. Para cada $y \in \bigcup \mathcal{Y}$ y cada $N \in \mathcal{N}_y$, sea $J(N, y) = \{J \in 2^I : N(J, y) = J\}$. Ahora, para cada $y \in \bigcup \mathcal{Y}$, 2^I es la unión de la familia ajena $\mathcal{J} = \{J(N, y) : N \in \mathcal{N}_y\}$. Ya que μ es c-aditiva existe un subconjunto finito $\mathcal{K}_y \subset \mathcal{J}_y$ tal que $\mu(\bigcup \mathcal{K}_y) > \frac{7}{8}$. Sea $W_y = \bigcap\{N \in \mathcal{N}_y : J(N, y) \in \mathcal{K}_y\}$. Sea $W_i = \bigcup\{W_y : y \in Y_i\}$.

Veamos que $\{W_i : i \in \mathcal{I}\}$ separa $\mathcal{Y}$. Si este no fuera el caso, entonces existirían $i \neq j$, $y \in Y_i$, y $z \in Y_j$ tales que $W_y \cap W_z \neq \emptyset$: Sea $[\eta] = \{f \in 2^I : f(i) = 1 \wedge f(j) = 0\}$. Como $\mu(\bigcup \mathcal{K}_y) > \frac{7}{8}$, y $\mu([\eta]) = \frac{1}{4}$, existe $J \in [\eta] \cap (\bigcup \mathcal{K}_y) \cap (\bigcup \mathcal{K}_z)$. Entonces $U_J \cap (X \setminus \overline{U_J} \supset W_y \cap W_z \neq \emptyset$. Lo cual es una contradicción. □

4. Espacios de Moore utilizando CH

¿Es necesaría la existencia de grandes cardinales para probar la consistencia de la conjetura de Moore ?

El primer paso en la busqueda de esta respuesta fué dado por Fleissner [1982] donde él construyo un espacio de Moore normal no metrizable utilizando CH *únicamente*.

El ejemplo bajo CH

El haber construido un espacio de Moore con hipótesis tan debiles dejó finalmente el siguiente teorema, el cual en palabras de G. M. Reed deja a la conjetura de Moore en las manos de Dios y de los grandes cardinales. A consecuencia de su complejidad omitiremos la demostración. Vease [Fleissner 1984]

3.17. Teorema. Las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) Ningún modelo interno tiene un cardinal medible.
(b) Existe un espacio de Moore normal no metrizable.

Bibliografía

BARWISE, J.

[1975] (editor) Handbook of Mathematical Logic (North- Holland, Amsterdam).

BING, R.H.
[1951] Metrization of topological spaces, Canad. J. Math 3, 175-186.
[1965] A traslation of the normal Moore space conjeture, Proc. Amer. Math. Soc., 16, 612-619.

BURKE , D.K.

[1984] Covering Properties, in Hand-Book of Set-theoretic Topology, K. Kunene and J. Vaughan, eds., NorthHolland, Amsterdam, 347-422.

CHABER, J. and ZENOR, P.

[1977] On perfect subparacompactness and a metrization theorem for Moore spaces, Topology Proc., 2,401-407.

COHEN, P.J.

[1963] The independence of the continuum hypothesis I, Procedings of the National Academy of Science USA, 50, 1143-1148

[1964] The independence of the continuum hypothesis II, Procedings of the National Academy of Science USA, 51, 105-110.

DEVLIN, K.J.

[1973] Aspects of Constructibility, Lectures Notes in Mathematics, Volume 354 (Springer, Berlin).

ENGELKIN R.

[1989] General topology, Berlin 1989

FLEISSNER W. G.

[1974] Normal Moore spaces in the constructible universe, Proc. Amer. Math. Soc., 46, 294-298.

[1975] When Jones' space normal?, Proc. Amer. Math. Soc., 50, 375-378.

[1976] A normal collectionwise Hausdorff not collectionwise normal space, Gen. Topology Appl., 6, 57-64.

[1982a] Normal nonmetrizable Moore space from the continuum hypothesis or nonexistence of inner models with measurables cardinals, Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 79, 1371-1372.

[1982b] If all normal Moore spaces are metrizable, then there is an inner model with a measurable cardinal, Trans. Amer. Math. Soc., 273, 365-373.

[1984] The normal Moore space conjecture and large cardinals, in Hand-Book of Set-theoretic Topology, K. Kunen and J. Vaughan, eds., North Holland, Amsterdam.

GRUENGHAGE G.

[1979] Paracompactness in normal, locally connected, locally compact spaces, Topology Proc., 4, 393-405.

[1980] Paracompactness and subparacompactness in perfectly normal locally compact spaces, Russian Math. Surveys, 35, 49-55.

HEATH, R. W.

[1964] Screenability, pointwise paracompactness and metrization of Moore spaces, Canad. J. Math., 16, 763-770.

KELLEY, J. L.

[1955] General Topology (Van Nostrand Reinhol, New York).

KUNEN, K.

[1980] Set Theory, An Introduction to Independence Proofs, North Holland, Amsterdam.

MARTIN, D. A. and SOLOVAY, R. M.

[1970] Internal Cohen extensions, Ann. Math. Logic, 2, 143-178.

MOORE, R. L.
[1932] Foundations of Point-set Theory, Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, 13. Revised 1962.

[1935] A set of axioms for analysis situs, Fun. Math., 25,13-28.

NYIKOS, P. J.

[1980] A provisional solution to the normal Moore space problem, Proc. Amer. Math. Soc., 78, 429-435.

REED, G.M. and ZENOR, P.L.

[1976] Metrization of Moore spaces and generalized manifolds, Fun. Math., 91, 203-209.

ROTHBERGER, F.

[1948] On some problems of Hausdorff and Sierpinski, Fun. Math., 35, 29-46.

RUDIN, M.E.

[1975] Lectures on Set Theoretic Topology, CBMS Lecture Notes vol. 23, Amer. Math. Soc.

SOLOVAY, R.M. and TENNENBAUM, S.

[1971] Itereted Cohen extensions and Souslin's problem, Ann. Math., 94, 201-245.

TALL, F.D.

[1984] Normality versus collectionwise normality, in Hand-Book of Set-theoretic Topology, K. Kunen and J. Vaughan, eds., North. Holland, Amsterdam, 685-732.

TODORCEVIC, S.

[1984] Trees and linearly ordered sets, in Hand-Book of Set-theoretic Topology, K. Kunen and J. Vaughan, eds., North Holland, Amsterdam, 235-293.

VAN DOUWEN, E.

[1984] The integers and topology, in Hand-Book of Set-theoretic Topology, K. Kunen and J. Vaughan, eds., North Holland, Amsterdam, 111-167.