UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGUNOS CARDINALES PEQUEÑOS NO NUMERABLES Y SU RELACION CON LA TOPOLOGIA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A

ULISES ARIET RAMOS GARCIA

DIRECTOR DE TESIS: DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2004

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Ulises Ariet Ramos García
FECHA: 17-05-04
FIRMA: Ramos G Ariet.

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: "ALGUNOS CARDINALES PEQUEÑOS NO NUMERABLES Y SU RELACION CON LA TOPOLOGIA"

realizado por ULISES ARIET RAMOS GARCIA

con número de cuenta 09950539-2 , quien cubrió los créditos de la carrera de: MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

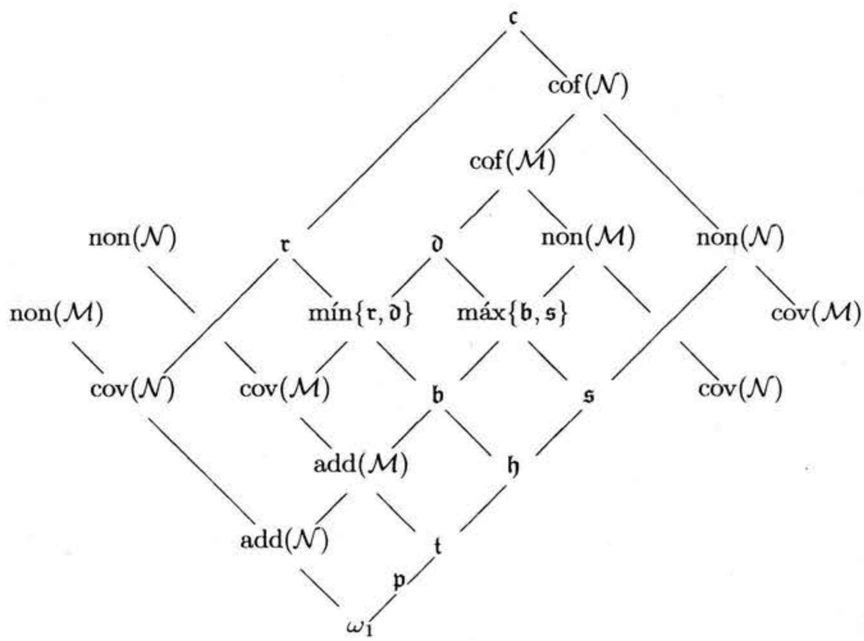
Director de Tesis Propietario	DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA	
Propietario	DR. MICHAEL HRUSAK	
Propietario	M. en C. MANUEL IBARRA CONTRERAS	
Suplente	DR. FIDEL CASARRUBIAS SEGURA	
Suplente	M. en C. ROBERTO PICHARDO MENDOZA	

Consejo Departamental de

M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA

ALGUNOS CARDINALES PEQUEÑOS NO NUMERABLES Y SU RELACIÓN CON LA TOPOLOGÍA

Ulises Ariet RAMOS GARCÍA
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias, UNAM
ariet@ciencias.unam.mx



Director de Tesis: Ángel TAMARIZ MASCARÚA

A mis padres
A mis hermanos
A Martha
A mis hijos: Arieth y Danae

Introducción

Muchas estructuras combinatorias y topológicas tienen asociados a ellas, cada una de manera natural, ciertos cardinales de los cuales se puede probar que son no numerables pero no más grandes que $\mathfrak{c} = 2^\omega$. Por ejemplo, del análisis real tenemos algunos ejemplos familiares:

- El número de conjuntos densos en ninguna parte que se necesitan para cubrir a la recta real es, por el teorema de categorías de Baire, no numerable, y dado que cada singulete es denso en ninguna parte, este número es menor o igual que $\mathfrak{c}$.
- El número de conjuntos en $\mathbb{R}$ de medida de Lebesgue cero que se necesitan para que su unión no tenga medida de Lesbesgue cero es, no numerable, ya que la unión numerable de conjuntos de medida de Lesbesgue cero tiene medida de Lesbesgue cero, y dado que cada singulete tiene medida de Lebesgue cero, este número es menor o igual que $\mathfrak{c}$.
- El número de sucesiones en $\mathbb{R}$ que se necesitan para que ninguna de estas sucesiones este eventualmente dominada por alguna sucesión en $\mathbb{R}$ es no numerable, ya que cualquier colección numerable de funciones $f_n \colon \omega \to \mathbb{R}$ está eventualmente dominada por una $f \colon \omega \to \mathbb{R}$ (por ejemplo $f(m) = \text{máx}_{n \leqslant m} f_n(m)$), y dado que $|{}^\omega\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$, este número es menor o igual que $\mathfrak{c}$.

Asumiendo la hipótesis del continuo (**CH**), estos cardinales no presentan problemas: todos ellos son iguales a ω_1, ya que $\mathfrak{c} = \omega_1$. Sin embargo, es consistente con **ZFC** que $\mathfrak{c} > \omega_1$ (P. J. Cohen [**1963**]) y que $\mathfrak{c} = \omega_1$ (K. Gödel [**1940**]). Por lo que uno puede preguntarse qué pasaría si **CH** es falsa. Entonces tendríamos cardinales estrictamente entre ω y $\mathfrak{c}$ (*i.e.* cardinales κ con $\omega < \kappa < \mathfrak{c}$). Así, es natural preguntarse qué posición tendrán estos tres cardinales en el intervalo $[\omega_1, \mathfrak{c}]$. Pues bien, no existe una respuesta a esta pregunta, ya que esto no es decidible en **ZFC**. Por ejemplo, es consistente con **ZFC** que $\mathfrak{c} = \omega_2$ y que los tres cardinales citados anteriormente sean iguales a ω_1, pero también es consistente con **ZFC** que $\mathfrak{c} = \omega_2$ y que estos tres cardinales sean iguales a $\mathfrak{c}$.

Los cardinales más pequeños definidos por los tres enunciados citados más arriba, son llamados $\text{cov}(\mathcal{M})$, $\text{add}(\mathcal{N})$, y $\mathfrak{b}$ respectivamente. Las relaciones que se pueden probar en **ZFC** entre estos tres cardinales son: $\text{add}(\mathcal{N}) \leqslant \text{cov}(\mathcal{M})$ y $\text{add}(\mathcal{N}) \leqslant \mathfrak{b}$ (véase Capítulo 5).

Por otro lado, existen cardinales κ no numerables asociados con ω que son definidos combinatoriamente como la mínima cardinalidad de cierta familia en $\mathcal{P}(\omega)$ o en ${}^\omega\omega$, y como $|\mathcal{P}(\omega)| = |{}^\omega\omega| = \mathfrak{c}$, entonces $\omega < \kappa \leqslant \mathfrak{c}$, los cardinales κ que satisfagan esta última propiedad son a los que llamaremos *cardinales pequeños no numerables*. Así, cuando asociemos a una estructura topológica un cardinal pequeño no numerable, estaremos siempre interesados en poder definirlo combinatoriamente. Esto último con el propósito de poder ubicar la posición de este cardinal en el intervalo $[\omega_1, \mathfrak{c}]$ en varias extensiones del universo.

En esta tesis se tratará el papel que juegan en la topología algunos cardinales pequeños no numerables asociados con ω, así como algunas relaciones entre ellos.

La tesis está dividida en cinco capítulos. En el Capítulo 1 se dan las definiciones, convenciones y notaciones, así como algunos resultados que se usarán a lo largo de este trabajo.

En el Capítulo 2 nos dedicaremos al estudio de algunos cardinales pequeños no numerables relacionados con los conceptos de compacidad, asi como algunas relaciones entre estos cardinales usando sus definiciones topológicas. Por ejemplo, el cardinal $\mathfrak{h}$ contestará a la pregunta ¿cuándo el producto de espacios secuencialmente compactos es secuencialmente compacto? y como consecuencia de un resultado asociado al cardinal $\mathfrak{t}$ para dar una cota inferior a la cardinalidad de un espacio compacto que no sea secuencialmente compacto obtendremos una propiedad importante del cardinal $\mathfrak{t}$ que se puede probar en **ZFC**: si $\omega \leqslant \kappa < \mathfrak{t}$, entonces $2^\kappa = \mathfrak{c}$. Siendo $\mathfrak{t}$ el cardinal óptimo para esta propiedad, ya que es consistente con **ZFC** que $2^\mathfrak{t} > \mathfrak{c}$.

En el Capítulo 3 calcularemos algunos invariantes cardinales asociados con $\mathcal{K}(X)$ (la familia de todos los subconjuntos compactos de X). Por ejemplo el número de cubierta compacta $\mathrm{kc}(X)$ es invariante para la clase de los espacios X que son completamente metrizables pero no σ-compactos, de aquí el nombre de *invariante cardinal*. Finalmente estableceremos las relaciones que hay entre los conceptos de real-compacidad y ω-compacidad.

En el Capítulo 4 nos dedicaremos a mostrar la influencia de algunos cardinales pequeños no numerables en un viejo problema formulado por E. A. MICHAEL en [**1963**]: ¿existe un espacio Lindelöf cuyo producto con el espacio de los números irracionales no sea normal? llamando a los espacios que respondan a la pregunta en el sentido positivo *espacios de Michael*. Comenzamos el capítulo con situar a esta pregunta en el también viejo problema de la normalidad en el producto topológico. Luego se analizan algunas relaciones entre el cardinal $\mathfrak{b}$ y algunos subconjuntos especiales de la recta real. Con la ayuda de esto se probará la existencia de un espacio de Michael bajo $\mathfrak{b} = \omega_1$. Después se muestra que $\min\{\mathfrak{b}, \omega_\omega\}$ es una cota inferior para el peso y la cardinalidad de un espacio de Michael. Finalmente se darán algunos aspectos combinatorios para la existencia de ciertas clases de espacios de Michael, y como consecuencia de esto se probará la existencia de un espacio de Michael bajo $\mathfrak{d} = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$.

En el Capítulo 5 trataremos algunas características combinatorias de los invariantes cardinales que se trataron en los capítulos anteriores asi como también otras características combinatorias de otros invariantes cardinales que se introducirán en este capítulo. En este capítulo se introduce una maquinaria que es usada frecuentemente para la descripción de muchos (aunque no todos) invariantes cardinales y sus relaciones entre ellos. Esta maquinaria fue presentada por P. VOJTÁŠ en [**1993**] bajo el nombre de "Conecciones generalizadas de Galois-Tukey"; las ideas básicas de esta maquinaria habián sido ya manejadas con anterioridad en el trabajo de D. FREMLIN de [**1984**] y en el trabajo de Miller (no publicado). Las definiciones de muchos invariantes cardinales tienen la forma "la mínima cardinalidad de cualquier conjunto Y (de objetos de una clase específica) tal que cada objeto x (posiblemente de una clase diferente) está relacionado con algún $y \in Y$ en un sentido específico". Y muchas demostraciones de desigualdades entre estos cardinales involucran la construcción de mapeos entre varias clases de objetos que están involucradas en las definiciones de estos cardinales. Esto se formaliza en la Sección 4 de este capítulo en el lenguaje de categorías. Con la ayuda de esto analizamos los invariantes cardinales clásicos asociados al σ-ideal formado por los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de primera categoría (a saber $\mathrm{add}(\mathcal{M})$, $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$, $\mathrm{non}(\mathcal{M})$ y $\mathrm{cof}(\mathcal{M})$) y al σ-ideal formado por los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de medida de Lebesgue cero (a saber $\mathrm{add}(\mathcal{N})$, $\mathrm{cov}(\mathcal{N})$, $\mathrm{non}(\mathcal{N})$ y $\mathrm{cof}(\mathcal{N})$), en compañia de los cardinales $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$. Por último mostramos que bajo el axioma de Martin (**MA**) todos los cardinales pequeños no numerables (o invariantes cardinales) que se tratarán en este trabajo son todos iguales a $\mathfrak{c}$. Sin embargo estos cardinales pueden tomar distintos valores en varios modelos generados con forcing iterado, como se mostrará en una tabla que se encuentra al final de este capítulo.

ULISES ARIET RAMOS GARCÍA

Mayo 2004

Índice general

CAPíTULO 1

Preliminares

1. Convenciones y notaciones

1.1. ***Teoría de conjuntos.*** Un *ordinal* es el conjunto de todos los ordinales menores que él (sin embargo, ocasionalmente escribiremos $[0,\eta)$ en vez de η para evitar confusiones), y un *cardinal* es un ordinal inicial. ω_0 es ω (el cuál, también es denotado por $\aleph_0$), y $\mathfrak{c}$ es 2^ω. Dos conjuntos A y B tienen la misma *cardinalidad* o son *equipotentes* si y sólo si existe una función biyectiva $f\colon A \to B$. Intuitivamente, dos conjuntos con la misma cardinalidad tienen el mismo número de elementos. El cardinal que es equipotente con el conjunto A será llamado el *número cardinal* de A o la *cardinalidad* de A, el cual será denotado por $|A|$. Un conjunto A es *finito* si $|A| = n$ para algún $n \in \omega$. Si A es finito o tiene cardinalidad ω, entonces diremos que A es *contable.* Y si A tiene cardinalidad ω, diremos que A es *numerable.* Usaremos κ y λ para denotar cardinales, ξ, η, ζ para denotar ordinales e i, j, k, n para denotar enteros.

Para un conjunto X frecuentemente usaremos las subcolecciones

$$[X]^\omega = \{A \in \mathcal{P}(X)\colon |A| = \omega\}$$

y

$$[X]^{<\omega} = \{A \in \mathcal{P}(X)\colon |A| < \omega\}$$

del conjunto potencia $\mathcal{P}(X)$ del conjunto X.

Si A es un conjunto, entonces $\mathcal{F} \restriction A$ denotará $\{F \cap A\colon F \in \mathcal{F}\}$, donde $\mathcal{F}$ es una colección de conjuntos, y $f \restriction A$ denotará la restricción de f en A, si f es una función. Usamos el símbolo '$\restriction$' en dos sentidos diferentes, esperando que esto no se preste a confusión.

Para conjuntos A y B, el conjunto de funciones $f\colon A \to B$ es denotado por ${}^A B$, y el dominio y rango de una función f son denotados por $\mathrm{dom}(f)$ y $\mathrm{ran}(f)$. También, la preimagen y la imagen de un conjunto X bajo una función f será denotado por $f^{-1}(X)$ y $f(X)$ respectivamente. (Así, $f(X) = \mathrm{ran}(f \restriction X)$.) Como es usual, una función es en sí una gráfica. En particular, $D \times \{d\}$ es la función (constante) con dominio D y rango $\{d\}$. Frecuentemente escribiremos f_x en vez de $f(x)$.

Un *pre-orden* es una pareja $\langle D, \leqslant\rangle$, de un conjunto D y una relación reflexiva y transitiva $\leqslant$ sobre D. Como es usual escribiremos D en vez de $\langle D, \leqslant\rangle$ si $\leqslant$ es clara en el contexto. Escribimos $x < y$ si $x \leqslant y$ e $y \nleqslant x$. (Entonces $x < y$ es al menos tan fuerte como $x \leqslant y$ y $x \neq y$; sin embargo, esto último es más fuerte si y sólo si $\exists\, x, y \in D\ [x \neq y$ y $x \leqslant y$ e $y \leqslant x]$.) (En particular, $\subset$ denotará la contención *estricta.*) Un conjunto $L \subseteq D$ es llamado *cofinal* en $\langle D, \leqslant\rangle$ si $\forall\, x \in D\ \exists\, y \in L\ [x \leqslant y]$; y $\mathrm{cof}(D)$ denotará la cardinalidad más pequeña de un subconjunto cofinal en D.

Si a cada elemento x de algún conjunto $X \neq \emptyset$, corresponde un conjunto A_x, entonces la colección $\langle A_x \colon x \in X\rangle$ recibirá el nombre de *familia indicada* de *conjuntos* con *conjunto* de *índices* X.

1.2. ***Topología.*** Todos los espacios considerados son al menos regulares T_1, y ocasionalmente completamente regulares; esto será claro por el contexto.

Usamos $\mathbb{P}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{I}$ para denotar a los irracionales, racionales, reales y al intervalo $[0, 1]$ respectivamente, con su topología euclideana.

Para un (sub)espacio X usamos X' para denotar el conjunto derivado de X, *i.e.* el conjunto de puntos no aislados de X.

Todos los ordinales siempre tendrán la topología del orden. En particular, κ es el espacio discreto con κ puntos si $\kappa \leqslant \omega$.

Si A es un conjunto y X es un espacio, entonces ${}^{A}X$ tendrá la topología producto.

Una familia indicada $\langle A_x \colon x \in D\rangle$ de subconjuntos de un espacio X será llamada una *familia indicada discreta* si cada punto de X tiene una vecindad que intersecta a A_x para a lo más una $x \in D$, y es llamada una *familia indicada ajena por pares* si $\forall\, x, y \in D\ [x \neq y \rightarrow A_x \cap A_y = \emptyset]$.

Una *función cardinal* es una función ϕ de alguna subclase de los espacios topológicos en la clase de los cardinales infinitos, tal que $\phi(X) = \phi(Y)$ cuando X y Y son homeomorfos. La exigencia de pedir que una función cardinal sólo tome valores en cardinales infinitos simplifica los enunciados de los teoremas y pone énfasis en la aritmética cardinal infinita. Un ejemplo obvio de una función cardinal es sin duda la cardinalidad. Quizá una de las funciones cardinales más usadas es el *peso*, que se define como

$$w(X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| \colon \mathcal{B} \text{ es una base para } X\} + \omega.$$

Introduciremos ahora varias funciones cardinales importantes que están basadas en propiedades topológicas locales. Sean X un espacio topológico, $\mathcal{V}$ una colección de conjuntos abiertos no vacíos en X, y p un punto en X. Entonces $\mathcal{V}$ es una *π-base local* para p, si para cada vecindad abierta R de p tenemos que $V \subseteq R$ para alguna $V \in \mathcal{V}$. Si además tenemos que $p \in V$ para toda $V \in \mathcal{V}$, entonces $\mathcal{V}$ es una *base local* para p. Finalmente, si $p \in V$ para toda $V \in \mathcal{V}$, y $\bigcap\{V \colon V \in \mathcal{V}\} = \{p\}$, entonces $\mathcal{V}$ es una *pseudo-base* para p. Las funciones cardinales locales estarán definidas en términos de los siguientes números cardinales:

$$\begin{aligned}
\chi(p, X) &= \text{mín}\{|\mathcal{V}| \colon \mathcal{V} \text{ es una base local para } p\};\\
\pi\chi(p, X) &= \text{mín}\{|\mathcal{V}| \colon \mathcal{V} \text{ es una } \pi\text{-base local para } p\};\\
\psi(p, X) &= \text{mín}\{|\mathcal{V}| \colon \mathcal{V} \text{ es una pseudo-base para } p\};\\
t(p, X) &= \text{mín}\{\kappa \colon \text{para toda } Y \subseteq X \text{ con } p \in \overline{Y}, \text{ existe}\\
&\qquad\qquad A \subseteq Y \text{ con } |A| \leqslant \kappa \text{ y } p \in \overline{A}\}.
\end{aligned}$$

El *carácter*, el *π-carácter*, el *pseudo-carácter*, y la *estrechez* de X son definidos ahora como:

$$\chi(X) = \sup\{\chi(p, X) : p \in X\} + \omega;$$
$$\pi\chi(X) = \sup\{\pi\chi(p, X) : p \in X\} + \omega;$$
$$\psi(X) = \sup\{\psi(p, X) : p \in X\} + \omega;$$
$$t(X) = \sup\{t(p, X) : p \in X\} + \omega.$$

Entonces, X es primero numerable si y sólo si $\chi(X) = \omega$; también, decimos que X tiene *π-carácter numerable* si $\pi\chi(X) = \omega$, *pseudo-carácter numerable* si $\psi(X) = \omega$, y *estrechez numerable* si $t(X) = \omega$. Notemos que el pseudo-carácter sólo esta definido para espacios T_1.

2. El conjunto de Cantor y los números irracionales

Para el desarrollo de nuestro trabajo será muy importante poder representar al conjunto de Cantor C y al espacio $\mathbb{P}$ de los números irracionales como productos cartesianos numerables. A saber ${}^{\omega}2$ y ${}^{\omega}\omega$ respectivamente. Como consecuencia de esto probaremos que el conjunto de Cantor C y el espacio $\mathbb{P}$ de los números irracionales, son espacios universales para la clase de los espacios métricos separables 0-dimensionales. Finalmente con ayuda de esto último probaremos una importante caracterización de los números irracionales así como una relación importante que tiene este espacio con el conjunto de Cantor.

2.1. TEOREMA. *El conjunto de Cantor C es homeomorfo a ${}^{\omega}2$.*

DEMOSTRACIÓN. Se verifica fácilmente que para cada $x \in C$ la representación de x en la forma $x = \sum_{n\in\omega} \frac{2x_n}{3^{n+1}}$, donde $x_n \in \{0, 1\}$, es única. Así, poniendo

$$f(\langle x_n \rangle) = \sum_{n\in\omega} \frac{2x_n}{3^{n+1}} \text{ para } \langle x_n \rangle \in {}^{\omega}2,$$

definimos un mapeo biyectivo de ${}^{\omega}2$ en C. Dado que la función $f_m : {}^{\omega}2 \to \mathbb{I}$ definida por $f_m(\langle x_n \rangle) = \frac{2x_m}{3^{m+1}}$ es continua para cada $m \in \omega$ y la sucesión $f_0, f_0 + f_1, f_0 + f_1 + f_2, \ldots$ converge uniformemente a f, f es una función continua. De la compacidad de ${}^{\omega}2$ se sigue que f es un homeomorfismo. □

La demostración de la contraparte del Teorema 2.1 para el espacio de los números irracionales requerirá de algunos cálculos para remediar la falta de compacidad. Recordemos que si X es un espacio métrico, entonces por una *métrica compatible sobre el espacio X* entendemos cualquier métrica sobre el conjunto X que sea equivalente a la métrica original sobre X, *i.e.* que genere la misma topología que la métrica original.

2.2. LEMA. *Sea ρ cualquier métrica sobre el espacio $\mathbb{P}$ de los números irracionales que sea compatible con la métrica euclideana, y sea ε un número real positivo. Para cada abierto no vacío $U \subseteq \mathbb{P}$ existe una sucesión infinita $F_0, F_1, \ldots,$ de subconjuntos cerrados-y-abiertos no vacíos de $\mathbb{P}$, ajena por pares, tal que $U = \bigcup_{n\in\omega} F_n$ y los diámetros con respecto a ρ de todos los $F_{n's}$ son menores que ε.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ con extremos racionales tal que $(a, b) \cap \mathbb{P} \subseteq U$, y lo dividimos en ω intervalos no vacíos ajenos por pares $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots,$ con extremos racionales.[1] Así, obtenemos $(a, b) \cap \mathbb{P} = \bigcup_{0<n<\omega} A_n$,

[1] Una división sería tomando intervalos de la forma $(b - \frac{b-a}{2^{n-1}}, b - \frac{b-a}{2^n})$ con $0 < n < \omega$.

donde $A_n = (a_n, b_n) \cap \mathbb{P} \neq \emptyset$, $a_n, b_n \in \mathbb{Q}$ y $A_n \cap A_m = \emptyset$ cuando $n \neq m$; Añadimos $A_0 = U \setminus (a, b)$. Los conjuntos $A_0, A_1, A_2, \ldots$, son abiertos en $\mathbb{P}$, y en virtud de que $\mathbb{P}$ es un espacio métrico separable 0-dimensional,[2] existen en $\mathbb{P}$ conjuntos cerrados-y-abiertos $A_{n,0}, A_{n,1}, \ldots$, todos de diámetro menor que ε tales que $A_n = \bigcup_{m\in\omega} A_{n,m}$; Haciendo $B_{n,m} = A_{n,m} \setminus \bigcup_{k<m} A_{n,k}$ para $m \in \omega$, obtenemos subconjuntos cerrados-y-abiertos ajenos por pares de $\mathbb{P}$ cuya unión es A_n.

Para completar la demostración es suficiente con arreglar todos los conjuntos no vacíos $B_{n,m}$ dentro de una simple sucesión $F_0, F_1, \ldots$. □

El siguiente lema es un importante teorema sobre espacios completos debido a F. Hausdorff. Por sus futuras aplicaciones que tendrá en nuestro trabajo lo formularemos en toda su generalidad y no simplemente para el subespacio $\mathbb{P}$ de la recta real.

2.3. LEMA (HAUSDORFF [**1924**]). *Todo conjunto G_δ, X, en un espacio completamente metrizable X_0 es completamente metrizable.*

DEMOSTRACIÓN. Sea ρ una métrica completa sobre el espacio X_0 y sea $X_0 \setminus X = \bigcup_{0<n<\omega} F_n$, donde F_n es cerrado en X_0 para $0 < n < \omega$. Sea

$$f_n(x) = \rho(x, F_n) \text{ para } x \in X \text{ y } 0 < n < \omega;$$

las funciones $f_1, f_2, \ldots$ que van de X al subespacio $R_0 = (0, \infty)$ de la recta real son continuas. Obsérvese que la fórmula $f(x) = \langle x, f_1(x), f_2(x), \ldots \rangle$ define un encaje $f : X \to \prod_{n\in\omega} X_n$, donde $X_n = R_0$ para $n \geqslant 1$. Dado que el producto cartesiano de una familia contable de espacios completamente metrizables es completamente metrizable, y los subespacios cerrados de un completamente metrizable son completamente metrizables, resta ver que $f(X)$ es un subconjunto cerrado de $\prod_{n\in\omega} X_n$. Para ello probemos que cada punto $x = \langle x_n \rangle \in \prod_{n\in\omega} X_n \setminus f(X)$ tiene una vecindad V contenida en el complemento de $f(X)$.

Primero consideramos el caso cuando $x_0 \in X$. Como $x \notin f(X)$, existe un $k > 0$ tal que $x_k \neq f_k(x_0)$. Sean U_1 y U_2 vecindades ajenas en R_0 de x_k y $f_k(x_0)$ respectivamente. Por ser f_k continua, existe una vecindad $U_0 \subset X_0$ del punto x_0 tal que $f_k(U_0 \cap X) \subset U_2$. Se verifica fácilmente que

$$x = \langle x_n \rangle \in V = \pi_o^{-1}(U_0) \cap \pi_k^{-1}(U_1) \subset \prod_{n\in\omega} X_n \setminus f(X), \tag{1}$$

donde π_n denota la proyección de $\prod_{n\in\omega} X_n$ sobre X_n.

Ahora, consideramos el caso cuando $x_0 \notin X$; entonces tenemos que $x_0 \in F_k$ para alguna $k > 0$. Tomamos un número positivo r tal que $x_k > r$ y consideramos $U_0 = B(x_0, r)$ y $U_1 = (r, \infty)$. Se sigue fácilmente que la fórmula (1) se tiene también para este caso. □

Ahora tenemos los elementos para probar una importante caracterización de los números irracionales debida a R. Baire.

2.4. TEOREMA (BAIRE [**1909**]). *El espacio $\mathbb{P}$ de los números irracionales es homeomorfo a ${}^\omega\omega$.*

[2] $\sqrt{2} + \mathbb{Q} = \{ \sqrt{2} + r \mid r \in \mathbb{Q} \}$ es denso en $\mathbb{P}$ por lo que $\mathbb{P}$ es separable. Por otro lado un espacio métrico separable X es 0-dimensional si y sólo si X es no vacío y tiene una base numerable constituida de conjuntos cerrados-y-abiertos.

DEMOSTRACIÓN. En virtud del Lema 2.3, existe una métrica completa ρ sobre el espacio $\mathbb{P}$.[3] Aplicando el Lema 2.2, para cada sucesión finita $n_0, n_1, \ldots, n_k$ de elementos de ω, definimos un subconjunto cerrado-y-abierto $F_{n_0 n_1 \ldots n_k}$ de $\mathbb{P}$ tal que[4]

$$\mathbb{P} = \bigcup_{n\in\omega} F_n \qquad \text{y} \qquad F_{n_0 n_1 \ldots n_k} = \bigcup_{n\in\omega} F_{n_0 n_1 \ldots n_k n}, \tag{2}$$

$$F_{n_0 n_1 \ldots n_k} \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad \delta(F_{n_0 n_1 \ldots n_k}) < \frac{1}{k+1}, \tag{3}$$

$$F_{n_0 n_1 \ldots n_k} \cap F_{m_0 m_1 \ldots m_k} = \emptyset \quad \text{cuando} \quad (n_0, n_1, \ldots, n_k) \neq (m_0, m_1, \ldots, m_k) \tag{4}$$

De (2) y (3) se sigue que para cada $\langle n_k \rangle \in {}^{\omega}\omega$ los subconjuntos $F_{n_0}, F_{n_0 n_1}, F_{n_0 n_1 n_2}, \ldots$ del espacio $\mathbb{P}$ forman una sucesión decreciente de conjuntos cerrados no vacíos cuyos diámetros convergen a cero. Así, por el Teorema de Cantor (véase por ejemplo el Teorema 4.3.9 en R. ENGELKING [**1989**]), el conjunto $\bigcap_{k\in\omega} F_{n_0 n_1 \ldots n_k}$ contiene exactamente un punto, al que denotaremos por $f(\langle n_k \rangle)$. Las condiciones (2)–(4) implican que la asignación $f(\langle n_k \rangle)$ para $\langle n_k \rangle \in {}^{\omega}\omega$ define una aplicación biyectiva de ${}^{\omega}\omega$ en $\mathbb{P}$.

Por otro lado es fácil ver que

$$f(\pi_0^{-1}(\{n_0\}) \cap \pi_1^{-1}(\{n_1\}) \cap \cdots \cap \pi_k^{-1}(\{n_k\})) = F_{n_0 n_1 \ldots n_k},$$

entonces f es un homeomorfismo, ya que los conjuntos que están dentro del paréntesis forman una base para ${}^{\omega}\omega$ y los conjuntos del lado derecho de la igualdad forman una base para $\mathbb{P}$. □

De los Teoremas 2.1 y 2.4 tenemos el siguiente corolario.

2.5. COROLARIO. *El conjunto de Cantor es homeomorfo a un subespacio del espacio de los números irracionales.* □

2.6. Decimos que un espacio topológico X es *universal* para una clase de espacios topológicos $\mathcal{K}$, si X pertenece a $\mathcal{K}$ y cada espacio K en la clase $\mathcal{K}$ se encaja en X, *i.e.* K es homeomorfo a un subespacio de X.

Ahora tenemos ya los elementos para probar la universalidad de C y $\mathbb{P}$ la cual fue dada por W. SIERPIŃSKI en [**1921**].

2.7. TEOREMA (SIERPIŃSKI [**1921**]). *El conjunto de Cantor y el espacio de los números irracionales son espacios universales para la clase de los espacios métricos separables 0-dimensionales.*

DEMOSTRACIÓN. En virtud de que C es homeomorfo a ${}^{\omega}2$ y este a su vez es un subespacio de ${}^{\omega}\omega$ es suficiente con probar que para cada espacio métrico X separable 0-dimensional existe un encaje $f\colon X \to {}^{\omega}2$.

Por ser X un espacio métrico separable 0-dimensional, X admite una base numerable $\mathcal{B} = \{U_n : n \in \omega\}$ formada por conjuntos cerrados-y-abiertos. Para cada $n \in \omega$ definimos $f_n\colon X \to 2$ como

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in U_n, \\ 0 & \text{para } x \in X \setminus U_n. \end{cases}$$

[3]Recordemos que $\mathbb{P} = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}}(\mathbb{R} \setminus \{q\})$, *i.e* $\mathbb{P}$ es un conjunto G_δ en $\mathbb{R}$.

[4]δ denota el diámetro del conjunto.

Consideramos $f: X \to {}^{\omega}2$ definida por la fórmula $f(x) = \langle f_n(x): n \in \omega\rangle$. Dado que para cada $m \in \omega$ tenemos

$$f(U_m) = f(X) \cap \{\langle x_n\rangle \in {}^{\omega}2: x_m = 1\} \text{ y } f_m = \pi_m \circ f \text{ con } f_m \text{ continua,}$$

se tiene que f es un encaje. □

2.8. COROLARIO. *Todo espacio métrico separable 0-dimensional se encaja en la recta real* $\mathbb{R}$. □

Este último corolario nos será útil para la siguiente caracterización de los números irracionales dada por S. MAZURKIEWICZ en [**1917**].

2.9. TEOREMA (MAZURKIEWICZ [**1917**]). *Todo conjunto G_δ, X, que sea denso y cuyo complemento también sea denso, en un espacio X_0 completamente metrizable separable 0-dimensional es homeomorfo al espacio de los números irracionales.*

DEMOSTRACIÓN. Procedamos de una manera análoga a la demostración de que $\mathbb{P}$ es homeomorfo a ${}^{\omega}\omega$, sustituyendo a $\mathbb{P}$ por X. Empezando entonces por mostrar que el Lema 2.2 es válido también para el espacio X. Para ello consideremos un abierto no vacío $U \subseteq X$. Por el Corolario 2.8 podemos pensar tanto a X_0 como a X como subespacios de la recta real $\mathbb{R}$. Así, usando la densidad de X y de $X_0 \setminus X$ en X_0 podemos encontrar un punto a y una sucesión $\langle a_n\rangle$ estrictamente monótona en $X_0 \setminus X$ tal que la sucesión $\langle a_n\rangle$ converja al punto a y $(a_n, a_{n+1}) \cap X \subset U$ con $(a_n, a_{n+1}) \cap X \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$. Si hacemos $I = (a_0, a)$ ó $I = (a, a_0)$ (dependiendo si la sucesión $\langle a_n\rangle$ es estrictamente creciente ó estrictamente decreciente) entonces $I \cap X = \bigcup_{0<n<\omega} A_n$, donde $A_n = (a_{n-1}, a_n) \cap X$ y $A_n \cap A_m = \emptyset$ cuando $n \neq m$; Añadimos $A_0 = U \setminus I$. Entonces hemos construido una sucesión de conjuntos abiertos no vacíos $A_0, A_1, A_2, \ldots$ de X ajenos por pares tales que $U = \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Ahora como X hereda de X_0 la separabilidad y la propiedad de ser 0-dimensional entonces lo que resta de la demostración del Lema 2.2 para el espacio X es una simple calca de lo hecho ya en la demostración del Lema 2.2 para el espacio $\mathbb{P}$.

Por otro lado, por ser X un conjunto G_δ de X_0 entonces del Lema 2.3 se sigue que X es completamente metrizable. Entonces la demostración del Teorema 2.4 se adapta perfectamente al espacio X. Por lo tanto X es homeomorfo a ${}^{\omega}\omega$. □

2.10. OBSERVACIÓN. Notemos que del Teorema 2.9 se sigue que el subespacio del conjunto de Cantor formado por todos los puntos que no son extremos de los intervalos que fueron removidos de $\mathbb{I}$ para formar a C es homeomorfo al espacio de los números irracionales. Así, al conjunto de Cantor C lo podemos ver como una compactación de $\mathbb{P}$ que resultó de agregarle a $\mathbb{P}$ un conjunto numerable $\mathbb{Q}_C$. Aquí $\mathbb{Q}_C$ representa al subespacio del conjunto de Cantor formado por los extremos de los intervalos que fueron removidos de $\mathbb{I}$ para formar a C. Hemos denotado por $\mathbb{Q}_C$ a este subespacio ya que W. SIERPIŃSKI en [**1920**] (anunciado en [**1915**]) probó que todo espacio métrico numerable denso en sí mismo es homeomorfo al espacio de los números racionales.

CAPÍTULO 2

Cardinales pequeños no numerables relacionados con la compacidad numerable y la compacidad secuencial

1. Introducción

Indudablemente uno de los conceptos más importante en la topología de conjuntos es el de compacidad. El concepto de compacidad se conocía en el análisis incluso antes de la fundación de la topología general.

F. HAUSDORFF en **[1914]** utiliza compacidad de acuerdo a la definición dada por M. FRÉCHET en **[1906]**: un espacio es compacto si toda cubierta abierta numerable del espacio contiene una subcubierta finita. Es lo que actualmente se conoce como espacio *numerablemente compacto.*

Tradicionalmente la compacidad se definía como: un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ (el espacio euclideano de n dimensiones) es compacto, si es cerrado y acotado. Esta definición se debía extender a espacios topológicos generales, donde no necesariamente tiene sentido el concepto de acotación. Sin embargo, del análisis se sabe que en $\mathbb{R}^n$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado.
(2) Toda sucesión de puntos en A contiene una subsucesión que converge a un punto de A (el teorema de Bolzano–Weierstraß, en su forma débil).
(3) Todo subconjunto infinito de A posee un punto de acumulación en A (el teorema de Bolzano–Weierstraß, en su forma fuerte).
(4) Si A está contenido en la unión de una familia de conjuntos abiertos entonces, de hecho, A está contenido en la unión de una cantidad finita de algunos de estos conjuntos abiertos (teorema de Heine–Borel–Lebesgue).
(5) A es cerrado y toda sucesión decreciente de conjuntos cerrados no vacíos tiene intersección no vacía (teorema de Cantor).

Las investigaciones de P. ALEXANDROFF y P. URYSOHN en **[1923]**, **[1924]** y **[1929]** mostraron, sin embargo, que (4) encierra la idea fundamental del concepto de compacidad. Puesto que la definición de M. Fréchet de compacidad se había popularizado en la literatura, y esta no era equivalente con (4) en espacios topológicos generales, P. ALEXANDROFF y P. URYSOHN introducen en **[1924]** el nombre de espacio *bicompacto* para designar su noción de compacidad. Posteriormente, algunos autores propusieron el término de *compacto completo* para bicompacto. No obstante, N. Bourbaki propuso llamar espacio compacto a los espacios bicompactos Hausdorff y para aquellos solamente bicompactos los llamó *casi compactos.* Años después se impuso el nombre de compactos para designar a los espacios bicompactos.

Desde los primeros años de la topología general no era claro el cómo deberían extenderse los conceptos propios de $\mathbb{R}$ (el conjunto de los números reales) o $\mathbb{I}$ (el intervalo unitario), primero para espacios métricos, y despues para espacios topológicos. En este sentido vale la pena citar a R. ENGELKING **[1989]**, págs. 132–133, cuando se refiere al tema de la compacidad:

> *... En la infancia de la topología general, era común definir nuevas clases de espacios mediante generalización de propiedades en el intervalo unitario o en el conjunto de los números reales; las clases de espacios separables, compactos, completos y conexos se originaron mediante este proceder. Primero se usó este método para definir algunas clases de espacios métricos, después se extendió a espacios topológicos. Algunas veces, las propiedades equivalentes en la clase de los espacios métricos no lo eran en las clases más generales de espacios, y no era claro cuál era la clase adecuada para generalizar. Esto ocurrió con la compacidad, y por mucho tiempo permaneció la inquietud de si la extensión propia de la clase de los espacios compactos métricos era la clase de los espacios compactos, o la clase de los espacios numerablemente compactos, o la clase de los espacios secuencialmente compactos. Ahora es claro que la correcta es la clase de los espacios compactos; esta clase se comporta correctamente con respecto a las operaciones más usuales entre espacios topológicos, se encuentra con mayor frecuencia en las aplicaciones y da lugar a una gran cantidad de interesantes problemas.*

Compacidad numerable es más débil que compacidad. Para espacios topológicos segundo numerables ambas nociones son equivalentes. Ahora, dado que, en particular, todo espacio métrico compacto es segundo numerable, entonces ambas nociones son equivalentes en espacios métricos.

Es F. HAUSDORFF en **[1914]**, quién introduce por primera vez, los conceptos de primero y segundo numerable. En **[1927]** F. HAUSDORFF formula compacidad como compacidad por sucesiones: toda sucesión en el espacio contiene una subsucesión convergente. Es lo que actualmente se conoce como *compacidad secuencial*. Puesto que F. Hausdorff se restringía a espacios métricos, compacidad por sucesiones es equivalente a compacidad. En general ambas nociones son equivalentes en espacios primero numerables (véase por ejemplo el Teorema 3.10.31 en R. ENGELKING **[1989]**).

La mayor parte de las propiedades fundamentales de los espacios compactos fueron demostradas por P. ALEXANDROFF y P. URYSOHN en **[1923]**, **[1924]** y **[1929]**.

Por otro lado, quizá el factor decisivo de mayor peso en la balanza, a favor de la compacidad (sobre *e.g.* compacidad numerable o compacidad secuencial) fue el hecho de que ésta se preserva bajo el producto arbitrario de espacios de la misma índole.

1.1. TEOREMA (TYCHONOFF **[1935]**). *El producto Cartesiano $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ (donde cada $X_\alpha \neq \emptyset$) es compacto si y sólo si cada X_α es compacto.* $\square$

Este importante resultado, uno de los más importantes teoremas en topología general, fue dado explícitamente por primera vez por A. TYCHONOFF en **[1935]**.

Aunque puede ser deducido de un teorema del mismo A. TYCHONOFF de **[1930]**, que asegura que todos los cubos ${}^{P}\mathbb{I}$ son compactos.

Ahora bien, si no es válido un teorema análogo al teorema de Tychonoff para los conceptos de compacidad numerable y compacidad secuencial, entonces ¿cuándo el producto de espacios numerablemente compactos es numerablemente compacto? asi como también ¿cuándo el producto de espacios secuencialmente compactos es secuencialmente compacto? Pues bien, a lo que respecta a la primera pregunta J. NOVÁK en **[1953]** y H. TERASAKA en **[1952]**, probaron que existen espacios numerablemente compactos X e Y tales que

(i) $\omega \subset X \subset \beta\omega$ y $\omega \subset Y \subset \beta\omega$,
(ii) $X \cap Y = \omega$.

Ahora, no es difícil ver que de (i) y (ii) se sigue que $X \times Y$ no es numerablemente compacto, por lo que en general no podemos garantizar ni siquiera que el producto de dos espacios numerablemente compactos sea numerablemente compacto. Sin embargo, para el concepto de compacidad secuencial, la segunda pregunta así como otras análogas para conceptos afines al de compacidad, nos conducirán en este capítulo a los cardinales pequeños no numerables.

2. Definiciones y propiedades básicas

Comencemos con recordar algunas definiciones básicas.

2.1. Una *sucesión* en un conjunto X es una función $f\colon \omega \to X$. Usualmente uno puede identificar a una sucesión con su imagen y denotar a la sucesión por $\langle f_n\colon n \in \omega\rangle$, sin embargo cuando hay consideraciones conjuntistas es mejor tratar a una sucesión como una función. Si A es un subconjunto infinito de ω y f una sucesión, entonces a la restricción de f en A, que denotaremos por $f \restriction A$, es llamada una *subsucesión* de f. Si existe un punto x en X tal que $f_n = x$ para toda n en A, decimos que f es *constante* en A, y si $f_n = x$ para todo n en A salvo una cantidad finita, diremos que f es *eventualmente constante* en A.

2.2. Una sucesión $f\colon \omega \to X$ *converge* a un punto $x \in X$ (resp., se *acumula* en x), si para cada conjunto abierto U en X con x en U tenemos que $f^{-1}(U)$ es un segmento final (resp., es infinito) en ω. Frecuentemente, escribiremos $\{n \in \omega\colon f_n \in U\}$ en lugar de $f^{-1}(U)$.

Ahora demos los tres conceptos básicos de este capítulo.

2.3. Un espacio X es llamado *numerablemente compacto* si toda sucesión en X tiene un punto de acumulación, y es llamado *secuencialmente compacto* si toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente. Finalmente, un espacio X es llamado *subsecuencial* si para cada sucesión f en X y para cada punto de acumulación x de f, existe una subsucesión de f que converge a x. Claramente: compacto implica numerablemente compacto, subsecuencial + numerablemente compacto implica secuencialmente compacto, y secuencialmente compacto implica numerablemente compacto.

En muchos casos es más fácil trabajar con subconjuntos infinitos de un espacio X que con sucesiones en X, por ello daremos las siguientes versiones de los conceptos tratados.

2.4. Un conjunto numerable E de un espacio X se *acumula* en $x \in X$ si cada vecindad de x contiene una infinidad de puntos de E, y *convergente* a $x \in X$ si cada vecindad de x contiene todos los puntos de E salvo una cantidad finita. Un punto x es un *punto de acumulación* de un conjunto E, si para cada abierto U, con x en U, $U \cap (E - \{x\}) \neq \emptyset$.[1]

2.5. Reformulemos ahora las definiciones dadas en 2.3 como sigue. *Secuencialmente compacto*: cada subconjunto numerable en X contiene un subconjunto infinito con exactamente un punto de acumulación. *Numerablemente compacto*: cada subconjunto numerable en X tiene al menos un punto de acumulación. *Subsecuencial*: para cada subconjunto numerable E de X y para cada punto de acumulación x de E existe un subconjunto infinito en E que converge a x.

Para la construcción de espacios que muestren las diferencias que hay entre el concepto de compacidad y los conceptos de compacidad numerable y compacidad secuencial, el espacio $\beta\omega$, la compactación de Stone–Čech del espacio ω, juega un papel muy importante. Por lo que a continuación se darán algunas propiedades de $\beta\omega$.

2.6. ***Hechos acerca de*** $\beta\omega$. Fue E. Čech en **[1937]** quien empieza a interesarse en $\beta\omega$, aunque R. Engelking en **[1989]**, pág 179, observa que realmente A. Tychonoff en **[1935]** hace una construcción que genera a $\beta\omega$. La pregunta inicial de E. Čech (¿cuál es la cardinalidad de $\beta\omega$?) fue contestada rápidamente por B. Pospíšil en **[1937]**; esto fue la génesis de un tópico que finalmente se convertiría en uno de los más importantes en topología conjuntista abstracta: el espacio $\beta\omega$.

Pasemos ahora a enunciar las propiedades de $\beta\omega$ que necesitaremos.

(1) (Pospíšil **[1937]**) El espacio $\beta\omega$ tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$ y peso $\mathfrak{c}$.
(2) (Čech 1939, no publicado) Cada conjunto cerrado infinito $F \subset \beta\omega$ contiene un subconjunto homeomorfo a $\beta\omega$; en particular F tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$ y peso $\mathfrak{c}$.
(3) (Pospíšil **[1937]**, Tychonoff **[1930]**) El espacio $\beta\omega$ se encaja en el cubo de Cantor ${}^{\mathfrak{c}}2$.

2.7. Ejemplo. El espacio $\beta\omega$ es un espacio compacto, el cual no es secuencialmente compacto. En efecto, de 2.6 (2) se sigue que cualquier subconjunto infinito de $\beta\omega$ tiene $2^{\mathfrak{c}}$ puntos de acumulación, luego entonces $\beta\omega$ no es secuencialmente compacto.

2.8. ***Los cardinales*** $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{t}$ y $\mathfrak{h}$. Existen cuatro cardinales asociados a ω que jugarán un papel decisivo en este capítulo; el cardinal $\mathfrak{s}$, introducido por D. Booth en **[1974]**, los cardinales $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{t}$ introducidos por F. Rothberger en **[1948]**, y el cardinal $\mathfrak{h}$ introducido por B. Balcar, J. Pelant y P. Simon en **[1980]**. Para poder definir estos cardinales necesitaremos de algunas definiciones previas.

Definimos el pre–orden $\subseteq^*$ sobre $\mathcal{P}(\omega)$ (y ocasionalmente sobre $\mathcal{P}(X)$, para X un conjunto numerable), como

$$F \subseteq^* G \text{ si } F \setminus G \text{ es finito }.$$

Diremos que A es una *pseudo–intersección* de la familia $\mathcal{F}$, si $A \subseteq^* F$ para cada $F \in \mathcal{F}$; notemos que cualquier conjunto es una pseudo–intersección de la familia vacía. Llamaremos a una familia $\mathcal{T} \subseteq [\omega]^\omega$ una *torre* (decreciente) si $\mathcal{T}$ es bien–ordenado por ${}^*\supseteq$ y no tiene pseudo–intersección infinita. Diremos que una familia $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ tiene la *propiedad fuerte de la intersección finita* (que abreviaremos por *pfif*), si cada subfamilia finita tiene intersección infinita. Finalmente, llamaremos

[1]En espacios T_1, si x es un punto de acumulación de E, entonces para cada vecindad U de x, $U \cap E$ es infinito.

a una familia $\mathcal{S} \subseteq [\omega]^\omega$ una *familia separadora*, si $\neg\exists\, A \in [\omega]^\omega\ \forall S \in \mathcal{S}\ [A \subseteq^* S$ ó $A \subseteq^* \omega \setminus S]$ o, equivalentemente, si

$$\forall\, A \in [\omega]^\omega\ \exists S \in \mathcal{S}\ [|A \cap S| = |A \setminus S| = \omega].$$

Con estas definiciones en mente, daremos a continuación las definiciones canónicas de los cardinales $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{s}$ y $\mathfrak{t}$.

$$\mathfrak{p} = \text{mín}\{|\mathcal{F}|\colon \mathcal{F} \text{ es una subfamilia de } [\omega]^\omega \text{ con la } pfif\text{, la cual no tiene pseudo–intersección infinita}\},$$

$$\mathfrak{s} = \text{mín}\{|\mathcal{S}|\colon \mathcal{S} \text{ es una familia separadora en } [\omega]^\omega\},$$

$$\mathfrak{t} = \text{mín}\{|\mathcal{T}|\colon \mathcal{T} \text{ es una torre sobre } \omega\}.$$

Un interesante cardinal que fue descubierto en diferentes contextos es el cardinal $\mathfrak{h}$, llamado el *número de distributividad* (la razón de la letra '$\mathfrak{h}$' se da más adelante). Una familia $\mathcal{D} \subseteq [\omega]^\omega$ es llamada una familia *densa* si para $X \in [\omega]^\omega$ existe $Y \in \mathcal{D}$ tal que $Y \subseteq^* X$, y $\mathcal{D}$ es llamada una familia *abierta* si para cada $Y \in \mathcal{D}$ y para cada $X \in [\omega]^\omega$, si $X \subseteq^* Y$ entonces $X \in \mathcal{D}$. El conjunto ordenado $\langle [\omega]^\omega, \subseteq^* \rangle$ es llamado *κ–distributivo* si cada conjunto de cardinalidad menor que κ de familias densas y abiertas en $[\omega]^\omega$ tiene intersección no vacía. El número de distributividad es definido por

$$\mathfrak{h} = \text{mín}\{|\mathbb{D}|\colon \mathbb{D} \text{ es un conjunto de familias densas y abiertas en } [\omega]^\omega \text{ con } \bigcap \mathbb{D} = \emptyset\}.$$

B. Balcar, J. Pelant y P. Simon demostraron en **[1980]** que $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{b}$ (para la definición de $\mathfrak{b}$, véase sección 2 del Capítulo 3), y $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{s}$. La letra $\mathfrak{h}$ proviene de la palabra en inglés 'height' (altura) del interesante resultado (probado por estos mismos autores) que en **ZFC** existe un árbol π–base para ω^*, y además

$$\mathfrak{h} = \text{mín}\{\kappa\colon \text{existe un árbol } \pi\text{–base para } \omega^* \text{ de altura ('}\mathfrak{h}\text{eight') } \kappa\}$$

en donde, como es usual $\omega^* = \beta\omega \setminus \omega$. Un *árbol π–base* T es una π–base la cual también es un árbol cuando la consideramos como un conjunto parcialmente ordenado bajo la contención inversa (*i.e.*, para cada $t \in T$ el conjunto $\{s \in T\colon t \subseteq s\}$ es bien–ordenable por '$\supseteq$'). La altura de un elemento $t \in T$ es el ordinal η para el cual el conjunto $\{s \in T\colon t \subseteq s \text{ y } s \neq t\}$ tiene el tipo de orden de η, y la *altura* de un árbol T es el ordinal más pequeño η para el cual ningún elemento de T tiene altura η.

3. Compacidad secuencial en el producto topológico. Los cardinales $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{t}$ y $\mathfrak{h}$.

3.1. En esta sección nos ocuparemos en responder a la pregunta ¿cuándo el producto de espacios secuencialmente compactos es secuencialmente compacto? Y como se ha mencionado antes, esta pregunta nos conducirá a los cardinales pequeños no numerables.

Un resultado inmediato con relación a esta pregunta, es el siguiente.

3.2. Teorema. *El producto de una cantidad contable de espacios secuencialmente compactos es secuencialmente compacto.*

Demostración. Sea $\langle X_n\colon n \in \omega\rangle$ una familia contable de espacios secuencialmente compactos, y sea $\langle z_m\colon m \in \omega\rangle$, donde $z_m = \langle x_n^m\colon n \in \omega\rangle$, una sucesión de puntos en el producto $\prod_{n\in\omega} X_n$. La sucesión $\langle x_0^m : m \in \omega\rangle$ de puntos de X_0, tiene una subsucesión convergente $\langle x_0^{m_k^0} : k \in \omega\rangle$; sea x_0 el límite en X_0 de esta subsucesión. Similarmente, la sucesión $\langle x_1^{m_k^0} : k \in \omega\rangle$ de puntos de X_1 tiene una subsucesión convergente $\langle x_1^{m_k^1} : k \in \omega\rangle$; sea x_1 el límite de esta subsucesión en X_1. Inductivamente podemos definir para $n = 2, 3, \ldots$ una subsucesión $\langle x_n^{m_k^n} : k \in \omega\rangle$ de la sucesión $\langle x_n^{m_k^{n-1}} : k \in \omega\rangle$, convergente a un punto $x_n \in X_n$. Ahora bien, observemos que después de los primeros $n-1$ términos de la sucesión $\langle m_k^k : k \in \omega\rangle$, ésta se convierte en una subsucesión de $\langle m_k^n : k \in \omega\rangle$, entonces si consideramos la subsucesión $\langle z_{m_k^k} : k \in \omega\rangle$ de $\langle z_m : m \in \omega\rangle$ obtenemos que $\langle \pi_n(z_{m_k^k}) : k \in \omega\rangle$ converge a x_n, para $n \in \omega$, luego entonces $\langle z_{m_n^n} : n \in \omega\rangle$ converge a $\langle x_n : n \in \omega\rangle \in \prod_{n\in\omega} X_n$. □

Por otro lado, desafortunadamente, a diferencia del teorema de A. TYCHONOFF de [**1935**], el producto arbitrario de espacios secuencialmente compactos no necesariamente es secuencialmente compacto, como lo muestra el siguiente ejemplo.

3.3. EJEMPLO. El espacio ${}^{\mathfrak{c}}2$ no es secuencialmente compacto. En efecto, de 2.6 (3) y del hecho de que $\beta\omega$ es compacto y 0-dimensional, se tiene que $\beta\omega$ es homeomorfo a un subespacio cerrado de ${}^{\mathfrak{c}}2$. Ahora, como cualquier subespacio cerrado de un espacio secuencialmente compacto es secuencialmente compacto, se sigue que ${}^{\mathfrak{c}}2$ no es secuencialmente compacto.

Como el producto de $\mathfrak{c}$ espacios T_1 con más de un punto, contiene una copia cerrada de ${}^{\mathfrak{c}}2$, entonces obteńemos el siguiente resultado como consecuencia del Ejemplo 3.3.

3.4. COROLARIO. *El producto de una familia de espacios T_1 (que contengan mas de un punto) de cardinalidad al menos $\mathfrak{c}$, nunca es secuencialmente compacto.* □

Como consecuencia del Teorema 3.2 y del Ejemplo 3.3 se tiene, que si consideramos el cardinal

$$\mathfrak{s}_{\mathrm{p}} = \text{mín}\{\kappa\colon \text{la potencia } {}^{\kappa}2 \text{ no es secuencialmente compacta}\},$$

entonces

$$\omega < \mathfrak{s}_{\mathrm{p}} \leqslant \mathfrak{c}.$$

Esto nos plantea que para poder responder a la pregunta hecha en 3.1, será necesario involucrar algunos cardinales pequeños no numerables.

3.5. ¿Es posible expresar al cardinal $\mathfrak{s}_{\mathrm{p}}$ en términos combinatorios? Pues bien, esto fué contestado por D. BOOTH en [**1974**], en donde también da otras definiciones alternativas para $\mathfrak{s}_{\mathrm{p}}$.

3.6. TEOREMA (BOOTH [**1974**]).[2] $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_{\mathrm{p}} = \mathfrak{s}_{\mathrm{c}} = \mathfrak{s}_{\mathrm{nc}}$, *donde*

$$\mathfrak{s}_{\mathrm{c}} = \text{mín}\{\kappa\colon \textit{existe un espacio } X \textit{ compacto con } w(X) = \kappa\textit{, el cual no es secuencialmente compacto}\},$$

$$\mathfrak{s}_{\mathrm{nc}} = \text{mín}\{\kappa\colon \textit{existe un espacio } X \textit{ numerablemente compacto con } w(X) = \kappa\textit{, el cual no es secuencialmente compacto}\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Claramente $\mathfrak{s}_{\mathrm{p}} \geqslant \mathfrak{s}_{\mathrm{c}} \geqslant \mathfrak{s}_{\mathrm{nc}}$.

[2] De este teorema, es claro que podemos sustituir al cardinal $\mathfrak{c}$ por el cardinal $\mathfrak{s}$ en el corolario 3.4.

Demostración de $\mathfrak{s}_{\mathrm{nc}} \geqslant \mathfrak{s}$. Sea X un espacio numerablemente compacto con $w(X) < \mathfrak{s}$. Probemos que X es secuencialmente compacto. Para ello consideremos cualquier subconjunto numerable N de X. Sea $\mathcal{B}$ una base para X con $|\mathcal{B}| < \mathfrak{s}$, y definamos $\mathcal{B}' = \{B \in \mathcal{B}: |B \cap N| = \omega\}$. Entonces $|\mathcal{B}' \restriction N| \leqslant |\mathcal{B}| < \mathfrak{s}$, y por consiguiente $\mathcal{B}' \restriction N$ no es una familia separadora en $[N]^\omega$. Entonces existe $A \in [N]^\omega$ tal que $\forall\, B \in \mathcal{B}'\ [A \subseteq^* B \cap N$ o $A \subseteq^* N \setminus B]$. Por la compacidad numerable, A tiene un punto de acumulación x. Pues bien, A converge a x. En efecto, consideremos cualquier $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$. Entones, claramente $B \in \mathcal{B}'$ pero $A \not\subseteq^* N \setminus B$, ya que $|B \cap A| = \omega$. Ahora, de la elección de A se sigue que $A \subseteq^* B \cap N$, *i.e.* B contiene a todos los puntos de A salvo una cantidad finita.

Demostración de $\mathfrak{s} \geqslant \mathfrak{s}_{\mathrm{p}}$. Consideremos cualquier familia separadora $\mathcal{S}$. Probaremos que la potencia ${}^{\mathcal{S}}2$ no es secuencialmente compacta. Para ello definamos $\sigma\colon \omega \to {}^{\mathcal{S}}2$ por $\sigma(n)_S = 1 \Leftrightarrow n \in S$, donde $S \in \mathcal{S}$ y $n \in \omega$. Afirmamos que $\mathrm{ran}(\sigma)$ es (necesariamente numerable) infinito, pero no tiene subconjuntos convergentes. Si no, existiría un $I \in [\omega]^\omega$ tal que

$$\forall\, S \in \mathcal{S} \quad \exists\, k \in 2 \quad [|\{i \in I\colon \sigma(i)_S = k\}| < \omega]$$

(si $|\mathrm{ran}(\sigma \restriction I)| = 1$, podemos tener también que $\forall\, S \in \mathcal{S}\ \exists k \in 2\ \forall\, i \in I\ [\sigma(i)_S = k]$), *i.e.* $\forall\, S \in \mathcal{S}\ [|I \cap S| < \omega \vee |I \setminus S| < \omega]$, lo cual contradice el hecho de que $\mathcal{S}$ es separadora. □

Para el concepto de subsecuencialidad, tenemos un resultado análogo al anterior.

3.7. Teorema (Booth [**1974**], Malyhin y Šapirovskiĭ [**1973**]). $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_{\mathrm{p}} = \mathfrak{p}_{\mathrm{c}} = \mathfrak{p}_{\mathrm{nc}} = \mathfrak{p}_{\chi}$, *donde*

$\mathfrak{p}_{\mathrm{p}} = \mathrm{mín}\{\kappa\colon$ *la potencia* ${}^{\kappa}2$ *no es subsecuencial*$\}$,

$\mathfrak{p}_{\mathrm{c}} = \mathrm{mín}\{\kappa\colon$ *existe un espacio* X *compacto con* $\chi(X) = \kappa$*, el cual no es subsecuencial*$\}$,

$\mathfrak{p}_{\mathrm{nc}} = \mathrm{mín}\{\kappa\colon$ *existe un espacio* X *numerablemente compacto con* $\chi(X) = \kappa$*, el cual no es subsecuencial*$\}$,

$\mathfrak{p}_{\chi} = \mathrm{mín}\{\kappa\colon$ *existe un espacio* X *con* $\chi(X) = \kappa$*, el cual no es subsecuencial*$\}$.

Demostración. Claramente $\mathfrak{p}_{\mathrm{p}} \geqslant \mathfrak{p}_{\mathrm{c}} \geqslant \mathfrak{p}_{\mathrm{nc}} \geqslant \mathfrak{p}_{\chi}$.

Demostración de $\mathfrak{p}_{\chi} \geqslant \mathfrak{p}$. Consideremos cualquier subconjunto numerable N del espacio X, y cualquier punto de acumulación x de N tal que $\chi(x, X) < \mathfrak{p}$. Sea $\mathcal{B}$ cualquier base de vecindades de x con $|\mathcal{B}| < \mathfrak{p}$. Claramente $\mathcal{B} \restriction N$ (véase 1.1 del Capítulo 1) tiene la *pfif*, entonces existe $A \subseteq N$ infinito, el cual es una pseudo–intersección de $\mathcal{B} \restriction N$. Trivialmente A converge a x.

Demostración de $\mathfrak{p} \geqslant \mathfrak{p}_{\mathrm{p}}$. Dado que cada espacio 0-dimensional X con $w(X) \leqslant \kappa$, se encaja en ${}^{\kappa}2$, es suficiente con encontrar un espacio 0-dimensional X con $w(X) = \mathfrak{p}$, el cual no sea subsecuencial: consideremos cualquier $\mathcal{U} \subseteq [\omega]^\omega$ con $|\mathcal{U}| = \mathfrak{p}$, la cual tenga la *pfif* pero no tenga pseudo–intersección infinita. Podemos suponer que $\mathcal{U}$ es cerrada bajo intersecciones finitas, y que $\bigcap \mathcal{U} = \emptyset$. Ahora bien, consideremos $X = \omega \cup \{\mathcal{U}\}$ con la siguiente topología: los puntos de ω son aislados, y las vecindades básicas de $\mathcal{U}$ tienen la forma $\{\mathcal{U}\} \cup U$, con $U \in \mathcal{U}$. Ahora, es claro que X es el espacio deseado. □

Por otro lado, con el propósito de mejorar el Teorema 3.2 notemos lo siguiente.

3.8. OBSERVACIÓN. Denotemos al conjunto $\{z_\eta\colon \eta \in \omega\}$ por N (véase la demostración del Teorema 3.2). En la demostración del Teorema 3.2 se construyeron $T_\eta \in [N]^\omega$ y $x_\eta \in X_\eta$ para cada $\eta \in \omega$, y $T \in [N]^\omega$, tales que[3]

(1) $\forall\, \eta, \xi \in \omega\ [\eta < \xi \to T_\xi \subseteq T_\eta]$.
(2) $\forall\, \eta \in \omega\ [T \subseteq^* T_\eta]$.
(3) $\pi_\eta(T_\eta) = \{x_\eta\}$ ó $\pi_\eta(T_\eta)$ es infinito y convergente a x_η.

Pues bien, con base en esto se dará a continuación una mejora al Teorema 3.2, la cual fue dada esencialmente por C. T. SCARBOROUGH y A. H. STONE en [**1966**].

3.9. TEOREMA (SCARBOROUGH y STONE [**1966**]).

(a) *El producto de una cantidad menor que* $\mathfrak{t}$ *de espacios secuencialmente compactos es secuencialmente compacto.*
(b) *El producto de a lo más* $\mathfrak{t}$ *espacios secuencialmente compactos es numerablemente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $\kappa \leqslant \mathfrak{t}$, X_η un espacio secuencialmente compacto para cada $\eta \in \kappa$, Π el producto $\prod_{\eta\in\kappa} X_\eta$, y para cada $\eta \in \kappa$ sea $\pi_\eta\colon \Pi \to X_\eta$ la proyección. Sea N cualquier subconjunto numerable de Π. Construyamos, por inducción transfinita sobre η, un conjunto $T_\eta \in [N]^\omega$ y un punto $x_\eta \in X_\eta$ para cada $\eta \in \kappa$, y $T \in [N]^\omega$ si $\kappa < \mathfrak{t}$, tales que

(1) $\forall\, \xi \in \eta\ [T_\eta \subseteq^* T_\xi]$, y si $\kappa < \mathfrak{t}$, entonces $\forall\, \eta \in \kappa\ [T \subseteq^* T_\eta]$.
(2) $\pi_\eta(T_\eta) = \{x_\eta\}$ ó $\pi_\eta(T_\eta)$ es infinito y convergente a x_η.

Supongamos que las construcciones anunciadas ya fueron hechas para toda $\xi < \eta$. Construimos ahora T_η y x_η con las propiedades deseadas. Hay que considerar tres casos.

Caso 1. $\eta = 0$. Tomamos cualquier $T_0 \in [N]^\omega$ para el cual $\pi_0(T_0)$ es convergente a x_0, para algún $x_o \in X_0$.

Caso 2. *η es un ordinal sucesor, digamos* $\eta = \xi + 1$. Si nos fijamos en $\pi_\eta(T_\xi)$, entonces existe $T_\eta \subseteq T_\xi$ infinito y $x_\eta \in X_\eta$ tal que

$$\pi_\eta(T_\eta) = \{x_\eta\} \text{ ó } \pi_\eta(T_\eta) \text{ es infinito y convergente a } x_\eta.$$

Por otro lado, notemos que si $\gamma < \xi$ entonces $T_\eta \setminus T_\gamma \subseteq T_\xi \setminus T_\gamma$, el cual es finito.

Caso 3. *η es un ordinal límite.* Notemos que para este caso ya se ha construido una familia $\mathcal{T}_\eta = \langle T_\xi\colon \xi \in \eta\rangle \subseteq [N]^\omega$ bien–ordenada por ${}^*\!\supseteq$. Ahora, como $\eta < \mathfrak{t}$, entonces existe $T^*_\eta \in [N]^\omega$ tal que $\forall\, \xi \in \eta\ [T^*_\eta \subseteq^* T_\xi]$. Ahora bien, si nos fijamos en $\pi_\eta(T^*_\eta)$, entonces existe $T_\eta \subseteq T^*_\eta$ infinito y $x_\eta \in X_\eta$ tales que

$$\pi_\eta(T_\eta) = \{x_\eta\} \text{ ó } \pi_\eta(T_\eta) \text{ es infinito y convergente a } x_\eta.$$

Finalmente, es claro que $\forall\, \xi \in \eta\ [T_\eta \subseteq^* T_\xi]$, y que si $\kappa < \mathfrak{t}$, entonces existe $T \in [N]^\omega$ tal que $\forall\, \eta \in \kappa\ [T \subseteq^* T_\eta]$.

Por otro lado, consideremos cualquier conjunto abierto básico B en Π que contenga al punto $x = \langle x_\eta\colon \eta \in \kappa\rangle$, *i.e.* B es un conjunto de la forma $\bigcap_{\eta\in F} \pi_\eta^{-1}(B_\eta)$, con $F \in [\omega]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}$ y B_η abierto que contenga a x_η para $\eta \in F$. Por (2), para cada $\eta \in F$, todos salvo una cantidad finita de puntos de T_η pertenecen a $\pi_\eta^{-1}(B_\eta)$. Ahora, se sigue de (1) que B contiene a todos los puntos de $T_{\text{máx}(F)}$ salvo una cantidad finita (por lo que $|B \cap N| = \omega$), y por lo tanto B contiene a todos los de T salvo una cantidad finita, si $\kappa < \mathfrak{t}$. Esto prueba tanto (a) como (b). $\square$

[3]Aquí $T_\eta = \{z_{k^\eta_\xi}\colon \xi \in \omega\}$ y $T = \{z_{k^\eta_\eta}\colon \eta \in \omega\}$.

3.10. Por el Teorema 3.6, nunca el producto de $\mathfrak{s}$ espacios no degenerados es secuencialmente compacto, de aqui que $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{h}_{sc} \leqslant \mathfrak{s}$, donde

$$\mathfrak{h}_{sc} = \text{mín}\{\kappa\colon \text{algún producto de } \kappa \text{ espacios secuencialmente compactos no es secuencialmente compacto}\}.$$

Una pregunta inmediata es, ¿puede $\mathfrak{h}_{sc}$ expresarse como un cardinal definido combinatoriamente? Pues bien, esto fue contestado por R. Frič y P. Vojtáš en **[1985]** donde demuestran que $\mathfrak{h}_{sc} = \mathfrak{h}$.[4] Antes de proceder a demostrar esta igualdad, analicemos con más detalle el cardinal $\mathfrak{h}$, dando primero una alternativa a la manera en que se ha definido el cardinal $\mathfrak{h}$.

3.11. Una familia de conjuntos infinitos es llamada *casi ajena* (AD por sus siglas en inglés), si cada par de elementos de la familia tiene intersección finita. Una familia *casi ajena maximal* (MAD por sus siglas en inglés) es una familia casi ajena de subconjuntos de ω, maximal con respecto a la inclusión.

3.12. Observación. Notemos que en la definición de familia MAD se requiere que la familia sea infinita; ya que en ausencia de este requerimiento, cualquier partición de ω en una cantidad finita de conjuntos infinitos podría considerarse como una familia MAD. Notemos también que, si $\mathcal{A}$ es una familia MAD y X es cualquier subconjunto infinito de ω, entonces $X \cap A$ es infinito para al menos una $A \in \mathcal{A}$.

3.13. Proposición. *Si $\mathcal{A}$ es una familia MAD, entonces $\mathcal{A}\downarrow = \{X \in [\omega]^\omega\colon \exists A \in \mathcal{A}\,[X \subseteq^* A]\}$ es una familia densa y abierta. Y cada familia densa y abierta contiene una familia de esta forma.*

Demostración. La primera afirmación se prueba fácilmente checando las definiciones. Para la segunda afirmación, sea $\mathcal{D}$ una familia densa y abierta, y sea $\mathcal{A}_0$ una subfamilia infinita casi ajena de $\mathcal{D}$; por ejemplo, tomemos una $X \in \mathcal{D}$ y una partición de esta en una cantidad infinita de piezas infinitas. Por el Lema de Zorn, sea $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}_0$ una familia casi ajena contenida en $\mathcal{D}$ y maximal entre tales familias. Afirmamos que $\mathcal{A}$ es maximal entre todas las familias casi ajenas, no asegurando que $\mathcal{A}$ esté contenida en $\mathcal{D}$. Una vez estableciendo esta afirmación, tendríamos que $\mathcal{A}$ es MAD y que $\mathcal{A}\downarrow \subseteq \mathcal{D}$ como se requiere.

Para establecer la maximalidad, consideremos cualquier $X \in [\omega]^\omega$. Como $\mathcal{D}$ es densa, $\mathcal{D}$ contiene un (casi) subconjunto Y de X. Como $\mathcal{A}$ es maximal entre todas las subfamilias casi ajenas de $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ debe contener un conjunto A que tenga intersección infinita con Y y por consiguiente también intersección infinita con X. □

3.14. Corolario. *$\mathfrak{h}$ es el mínimo número de familias MAD tales que, para cada $X \in [\omega]^\omega$, una de estas familias contiene al menos dos conjuntos que tienen intersección infinita con X.*

Demostración. X tiene intersección infinita con al menos dos conjuntos de una familia MAD $\mathcal{A}$ si y sólo si $X \notin \mathcal{A}\downarrow$. Con esta observación, el corolario se sigue inmediatamente de la Proposición 3.13 y de la definición de $\mathfrak{h}$. □

Teniendo en mente este último corolario, probemos el siguiente teorema.

3.15. Teorema. $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_{sc}$.

[4] Esta igualdad también fue obtenida independientemente por P. Nyicos, J. Pelant y P. Simon (no publicado).

DEMOSTRACIÓN.[5] *Demostración de* $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{h}_{sc}$. Supongamos que $\kappa < \mathfrak{h}$. Sea X_η un espacio secuencialmente compacto para cada $\eta \in \kappa$ y Π su producto topológico. Para cada $\eta \in \kappa$ sea $\pi_\eta \colon \Pi \to X_\eta$ la proyección. Sea N cualquier subconjunto numerable de Π. Para cada $\eta \in \kappa$ sea $\mathcal{D}_\eta = \{T \in [N]^\omega \colon \pi_\eta(T)$ converge en $X_\eta\}$. Es fácil ver que cada $\mathcal{D}_\eta$ forma una familia densa y abierta en $[N]^\omega$. Ahora bien, como $\kappa < \mathfrak{h}$, entonces existe $T \in \bigcap_{\eta\in\kappa} \mathcal{D}_\eta$. Así, si x_η representa el punto en X_η al que converge $\pi_\eta(T)$, entonces, T converge al punto $x = \langle x_\eta \colon \eta \in \kappa\rangle$.

Demostración de $\mathfrak{h} \geqslant \mathfrak{h}_{sc}$. Para esta desigualdad, los Ψ-espacios introducidos por S. Mrówka y J. Isbell, juegan un papel importante.

3.16. Sea $\mathcal{A}$ una familia AD. Definimos un espacio $\Psi(\mathcal{A})$ como sigue: el conjunto base es $\omega \cup \mathcal{A}$, los elementos de ω son aislados y las vecindades básicas de $A \in \mathcal{A}$ son de la forma $\{A\} \cup (A \setminus F)$, con F finito.

Se sigue inmediatamente de la definición que $\Psi(\mathcal{A})$ no es compacto ni secuencialmente compacto. Sin embargo, es fácil ver que $\omega\Psi(\mathcal{A})$, la compactación de Alexandroff de $\Psi(\mathcal{A})$, si es secuencialmente compacta.

Sea $\mathbb{A}$ un conjunto conformado por familias MAD tales que, para cada $X \in [\omega]^\omega$, una de estas familias contiene al menos dos conjuntos que tienen intersección infinita con X. Sea Π el producto $\Pi_{\mathcal{A}\in\mathbb{A}}\omega\Psi(\mathcal{A})$. Si probamos que Π no es secuencialmente compacto, entonces por el Corolario 3.14 tendríamos que $\mathfrak{h} \geqslant \mathfrak{h}_{sc}$.

Para probar que Π no es secuencialmente compacto, consideremos el conjunto $\Delta_\omega = \{x \in \Pi \colon$ existe $n \in \omega$ tal que $x(\mathcal{A}) = n$ para toda $\mathcal{A} \in \mathbb{A}\}$. Afirmamos que en Δ_ω ningún subconjunto infinito es convergente. En efecto, si $X \in [\omega]^\omega$, entonces por la elección de $\mathbb{A}$, existe $\mathcal{A}_X \in \mathbb{A}$ tal que en $\mathcal{A}_X$ existen conjuntos A y A' que tienen intersección infinita con X. Así, si denotamos por $\infty_\mathcal{A}$ al punto que agregamos a $\Psi(\mathcal{A})$ para formar a $\omega\Psi(\mathcal{A})$, entonces los puntos x_A y $x_{A'}$ en Π, definidos por

$$x_A(\mathcal{A}) = \begin{cases} A, & \text{si } \mathcal{A} = \mathcal{A}_X; \\ \infty_\mathcal{A}, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad \text{y} \quad x_{A'}(\mathcal{A}) = \begin{cases} A', & \text{si } \mathcal{A} = \mathcal{A}_X; \\ \infty_\mathcal{A}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

serán puntos de acumulación de Δ_X. Por lo que Δ_X no es convergente. □

4. Otras relaciones entre cardinales pequeños no numerables y los conceptos de compacidad

Los Teoremas 3.6 y 3.7 nos dan la mejor cota inferior sobre el peso (ó el carácter) de espacios (numerablemente) compactos, los cuales no son secuencialmete compactos. Ahora, toca el turno a la cardinalidad.

4.1. TEOREMA (MALYHIN y ŠAPIROVSKIĬ **[1973]** para $2^{\mathfrak{p}}$). *Si X es un espacio compacto el cual no es secuencialmente compacto, entonces* $|X| \geqslant 2^{\mathfrak{t}}$.

DEMOSTRACIÓN. Para $A \subseteq X$, sea A' el conjunto de puntos de acumulación de A. Notemos que

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(X)\ [A \subseteq^* B \text{ entonces } A' \subseteq B']. \tag{5}$$

Sea N un subconjunto numerable de X, el cual no tiene subconjuntos infinitos que converjan, o equivalentemente, que satisfaga

$$\forall T \in [N]^\omega\ \exists T_0, T_1 \in [T]^\omega\ [T_0' \cap T_1' = \emptyset]. \tag{6}$$

[5] La demostración que aquí presentamos, tal véz sea muy parecida a la obtenida por P. Nyicos, J. Pelant y P. Simon.

Usando (5) y (6) probaremos que para cada $\eta \in \mathfrak{t}$, existe $T_f \in [N]^\omega$ para toda $f \in {}^\eta 2$, tal que

$$\forall f \in {}^\eta 2\, \forall \xi \in \eta\, [T_f \subseteq^* T_{f\restriction\xi}], \quad \text{y} \tag{7}$$

$$\forall f, g \in {}^\eta 2\, [f \neq g \Rightarrow T'_f \cap T'_g = \emptyset]. \tag{8}$$

Construyamos, por inducción transfinita sobre η, todos los $T_f \in [N]^\omega$ para $f \in {}^\eta 2$ simultáneamente.

Caso 1. $\eta = 0$. Entonces ${}^0 2 = \{\emptyset\}$; sea $T_\emptyset = N$.

Ahora, sea $0 < \eta < \mathfrak{t}$, y supongamos que T_f es conocido para $f \in {}^\xi 2$, si $\xi \in \eta$.

Caso 2. *η es un ordinal límite.* Para $f \in {}^\eta 2$, elegimos una pseudo–intersección infinita T_f de $\langle T_{f\restriction\xi} \colon \xi \in \eta \rangle$.

Caso 3. *η es un ordinal sucesor, digamos $\eta = \xi + 1$.* Por (6), existen subconjuntos infinitos $T_{f,0}$ y $T_{f,1}$ de T_f para $f \in {}^\xi 2$, tales que $T'_{f,0} \cap T'_{f,1} = \emptyset$. Entonces definimos $T_f = T_{f\restriction\xi, f(\xi)}$ para $f \in {}^\eta 2$.

Ahora, para verificar (8), consideremos $f, g \in {}^\eta 2$ distintos. Definimos $\gamma = \min\{\xi \in \eta \colon f(\xi) \neq g(\xi)\}$. Si $\eta = \gamma + 1$, entonces bajo la construcción del Caso 2, se tiene que $T'_f \cap T'_g = \emptyset$, y si $\eta > \gamma + 1$, entonces notemos que de (5) se sigue que $T'_f \subseteq \bigcap_{\xi \in \eta} T'_{f\restriction\xi}$. Así, si existiera $t \in T'_f \cap T'_g$, entonces tendríamos en particular que $t \in T'_{f\restriction\gamma+1} \cap T'_{g\restriction\gamma+1}$, lo cual contradeciría la hipótesis de inducción. Por lo tanto, $T'_f \cap T'_g = \emptyset$.

Ahora bien, dado que X es compacto, y dado que para cada $T \subseteq X$ infinito, T' es un subconjunto cerrado no vacío de X, entoces por (5) y (7), podemos definir $S \colon {}^\mathfrak{t} 2 \to \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ como $S(f) = \bigcap_{\eta \in \mathfrak{t}} T'_{f\restriction\eta}$. Ahora, de (7) y (8) se sigue que $\forall f, g \in {}^\mathfrak{t} 2\, [f \neq g \Rightarrow S(f) \cap S(g) = \emptyset]$. Por lo que $|X| \geqslant {}^\mathfrak{t} 2$. □

4.2. Observación. Haciendo una pequeña modificación a la construcción hecha en la demostración anterior, podemos probar que si $\omega \leqslant \kappa < \mathfrak{t}$, entonces para cada $\eta \in \kappa + 1$ existe $T_f \in [\omega]^\omega$ para toda $f \in {}^\eta 2$, tal que

$$\forall f \in {}^\eta 2\, \forall \xi \in \eta\, [T_f \subseteq^* T_{f\restriction\xi}], \quad \text{y} \tag{9}$$

$$\forall f, g \in {}^\eta 2\, [f \neq g \Rightarrow |T_f \cap T_g| < \omega]. \tag{10}$$

Ahora, para el caso $\eta = \kappa$ en (10) tenemos que $2^\kappa \leqslant |[\omega]^\omega| = \mathfrak{c}$. Pero claramente $2^\kappa \geqslant \mathfrak{c}$, de donde $2^\kappa = \mathfrak{c}$, *i.e.* si $\omega \leqslant \kappa < \mathfrak{t}$, entonces $2^\kappa = \mathfrak{c}$.

Por otro lado, es consistente con **ZFC** que $2^\mathfrak{t} > \mathfrak{c}$. En este sentido, tenemos el siguiente resultado dado por M. Ismail y P. Nyikos en [**1980**] para $2^{\omega_1} > \mathfrak{c}$ o **AM**, en lugar de $2^\mathfrak{t} > \mathfrak{c}$.

4.3. Corolario ($2^\mathfrak{t} > \mathfrak{c}$). *Las siguientes condiciones sobre un espacio compacto X, son equivalentes:*

(a) *Cada subespacio numerablemente compacto es cerrado.*

(b) *X es secuencial, i.e. para cada $A \subseteq X$, si A no es cerrado, entonces algún subconjunto numerable de A converge a un punto de $X \setminus A$.*

Demostración. (b) $\Rightarrow$ (a). Si $A \subseteq X$ no es cerrado, entonces algún subconjunto numerable de A converge a un punto de $X \setminus A$, por lo que A no puede ser un subespacio numerablemente compacto de X.

(a) $\Rightarrow$ (b). Supongamos que $A \subseteq X$ no es cerrado. Entonces A no es numerablemente compacto, por lo que contiene un conjunto numerable N sin puntos de acumulación en A. Así, N es un conjunto cerrado y discreto en A. Ahora, necesariamente, algún subconjunto infinito de N debe converger a un punto de $X \setminus A$. Si este no es el caso, entonces el subespacio compacto $\overline{N}$ de X no sería secuencialmente compacto, de donde $|\overline{N}| > \mathfrak{c}$, ya que estamos suponiendo que $2^{\mathfrak{t}} > \mathfrak{c}$. Sin embargo, $|\overline{N}| \leqslant \mathfrak{c}$ (con lo cual obtendríamos una contradicción). Para poder verificar esto necesitaremos de la siguiente afirmación.

4.4. AFIRMACIÓN. *Si Z es numerablemente compacto, entonces para cada $S \subseteq Z$, existe un conjunto numerablemente compacto T con $S \subseteq T$ y $|T| \leqslant |S|^\omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $|S| < \omega$, se sigue trivialmente la Afirmación. Así, supongamos que $|S| \geqslant \omega$. Escogemos un punto de acumulación $c(N)$ de N para cada $N \in [Z]^\omega$. Después, con recursión definimos S_η para $\eta \in \omega_1$ como sigue: $S_0 = S$, y

$$S_\eta = \bigcup_{\xi \in \eta} S_\xi \;\cup\; \{c(N)\colon N \in [\bigcup_{\xi\in\eta} S_\xi]^\omega\}, \qquad \text{si } 0 < \eta < \omega_1.$$

Finalmente, sea $T = \bigcup_{\eta \in \omega_1} S_\eta$. Para verificar que T es un conjunto numerablemente compacto, nótese que para cualquier $N \in [T]^\omega$ existe $\eta \in \omega_1$ tal que $N \in [\bigcup_{\xi \in \eta} S_\xi]^\omega$. Por último, notemos que $|S_\eta| \leqslant |S|^\omega$ para cada $\eta \in \omega_1$, de donde $|T| \leqslant \omega_1 \cdot |S|^\omega = |S|^\omega$. □

Ahora bien, de esta última Afirmación se tiene que existe un conjunto numerablemente compacto Y (y por lo tanto cerrado), tal que $N \subseteq Y$ ($\overline{N} \subseteq Y$) y $|Y| \leqslant |N|^\omega = \mathfrak{c}$. Así $\overline{N} \leqslant \mathfrak{c}$. □

4.5. PREGUNTA. ¿Se puede mejorar el Teorema 4.1? *i.e.* ¿existe un espacio compacto de cardinalidad $2^{\mathfrak{t}}$, el cual no sea secuencialmente compacto? Notemos que por el Teorema 3.6 existe un espacio compacto de cardinalidad $2^{\mathfrak{s}}$, el cual no es secuencialmente compacto. Sin embargo, es consistente con **ZFC** que $2^{\mathfrak{s}} > 2^{\mathfrak{t}}$.

4.6. PREGUNTA. En [**1980**] M. ISMAIL y P. NYIKOS, hacen la siguiente pregunta, ¿es posible demostrar el Corolario 4.3 en **ZFC**?

Existe una clase especial de espacios compactos para la cual el problema de Nyikos 4.6, tiene una solución en el sentido positivo. Decimos que un espacio X es *χ-disperso*, si cada subconjunto cerrado $F \subseteq X$ tiene un punto de carácter numerable (en F). El siguiente teorema, se le puede atribuir a D. V. Rančin y M. G. Tkačenko (véase, las demostraciones del Teorema 2 en D. V. RANČIN [**1977**] y Teorema 3.2 en M. G. TKAČENKO [**1984**]).

4.7. TEOREMA (RANČIN [**1977**] y TKAČENKO [**1984**]). *Sea X un espacio compacto, tal que todos sus subespacios numerablemente compactos son cerrados. Si X es χ-disperso, entonces X es secuencial.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $A \subseteq X$ no es cerrado. Entonces A no es numerablemente compacto, por lo que contiene un conjunto cerrado discreto numerable N. Como X es χ-disperso, existe un punto $x \in \overline{N}$ con $\chi(x, \overline{N}) = \omega$, y por lo tanto existe $T \in [N]^\omega$ convergente a $x \in \overline{N} \setminus N \subset \overline{A} \setminus A \subset X \setminus A$. □

Por otro lado, para espacios numerablemente compactos, tenemos una versión exacta del Teorema 4.1.

4.8. TEOREMA. $\mathfrak{c} = \min\{|X|\colon$ *X es numerablemente compacto pero no es secuencialmente compacto*$\}$.

DEMOSTRACIÓN. *Demostración de '$\leqslant$'.* Hacemos los primeros pasos contables del Teorema 4.1.

Demostración de '$\geqslant$'. Usamos la Afirmación 4.4, y el hecho de que existe un espacio compacto el cual no es secuencialmente compacto, *e.g.* ${}^{\mathfrak{s}}2$. $\square$

CAPÍTULO 3

Cálculo de algunos invariantes cardinales en espacios métricos separables

1. Introducción

Para un conjunto X, $\mathcal{K}(X)$ denotará la familia de todos los subconjuntos compactos de X. En este capítulo consideraremos tres invariantes cardinales sobre X asociados con $\mathcal{K}(X)$, los cuales nos dicen qué tan lejos está X de ser compacto. Calcularemos estos invariantes cardinales para $\mathbb{P}$, los números irracionales, y $\mathbb{Q}$, los números racionales, y deduciremos valores para estos invariantes cardinales para otros espacios métricos separables. También estableceremos las relaciones que hay entre los conceptos de real-compacidad y ω-compacidad.

2. Definiciones y propiedades básicas: El número de hemicompacidad cof($\mathcal{K}(X)$), el número de cubierta compacta kc(X), y el k-determinador $k(X)$.

Nuestro primer invariante cardinal es cof($\mathcal{K}(X)$) (véase 1.1 del Capítulo 1), donde $\mathcal{K}(X)$ es un conjunto parcialmente ordenado bajo la contención. El segundo invariante es

$$\mathrm{kc}(X) = \min\{|\mathcal{L}| : \mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}(X) \text{ y } \bigcup \mathcal{L} = X\},$$

que llamaremos el *número de cubierta compacta* de X. Para definir nuestro tercer invariante necesitaremos una terminología adicional. Si $\mathcal{D}$ es la colección de subconjuntos cerrados de un espacio X, decimos que $\mathcal{D}$ *determina* a X si $\forall F \subseteq X$ [F es cerrado $\Leftrightarrow \forall D \in \mathcal{D}$ [$F \cap D$ es cerrado en D]]. Un espacio X es llamado *k-espacio* si $\mathcal{K}(X)$ determina a X. Los espacios primero numerables, en particular los espacios métricos, son k-espacios (véase por ejemplo el Teorema 3.3.20 en R. ENGELKING [**1989**]). Para un espacio X definimos el *k-determinador* de X como

$$k(X) = \min\{|\mathcal{L}| : \mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}(X) \text{ determina a } X \text{ y } \bigcup \mathcal{L} = X\}.$$

Por convención $\min(\emptyset) = \infty$, el cual es más grande que cualquier cardinal. (Requerimos que $\bigcup \mathcal{L} = X$ en la definición de $k(X)$ ya que de lo contrario $k(X) = 0$ para espacios discretos.)

Existen dos cardinales asociados con ω que juegan un papel decisivo en el cálculo de invariantes cardinales; los cardinales $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$, introducidos por F. ROTHBERGER en [**1939B**] y M. KATĚTOV en [**1960A**] respectivamente. Para poder definir estos cardinales necesitaremos de algunas definiciones previas.

Definimos el pre-orden $\leqslant^*$ sobre ${}^\omega\omega$ como

$$f \leqslant^* g \text{ si } f(n) \leqslant g(n) \text{ para toda } n \in \omega \text{ salvo una cantidad finita.}$$

Nótese que $\langle {}^\omega\omega, \leqslant^* \rangle$ no tiene elementos maximales. Diremos que un subconjunto de ${}^\omega\omega$ es *no acotado* si este no es acotado en $\langle {}^\omega\omega, \leqslant^* \rangle$. Los subconjuntos de ${}^\omega\omega$

que son cofinales en $\langle {}^{\omega}\omega, \leqslant^* \rangle$ son llamados *dominantes*, y los que son dominantes y bien ordenados por $\leqslant^*$ son llamados *escalonados.*

Con estas definiciones en mente, daremos a continuación las definiciones canónicas de los cardinales $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$.

$$\mathfrak{b} = \text{mín}\{|B|\colon B \text{ es un subconjunto no acotado ('non bornée') de } {}^{\omega}\omega\},$$

$$\mathfrak{d} = \text{mín}\{|D|\colon D \text{ es un subconjunto dominante de } {}^{\omega}\omega\}.$$

El cardinal $\mathfrak{b}$ es llamado el *número de (no)acotación.* La letra $\mathfrak{b}$ proviene de la palabra en francés 'non bornée' (no acotado). El cardinal $\mathfrak{d}$ es llamado el *número de* $\mathfrak{d}$*ominación.*

Frecuentemente la información conjuntista de estos cardinales es muy usada en topología. Por lo que entonces en lo que resta de esta sección nos dedicaremos a dar información conjuntista de los cardinales $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$.

2.1. Para nuestro siguiente resultado necesitaremos de una terminología adicional. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son familias de conjuntos numerables, escribiremos $\mathcal{F}\perp\mathcal{G}$ si $\forall F \in \mathcal{F}\, \forall G \in \mathcal{G}\ [|F \cap G| < \omega]$, y diremos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ se pueden *separar* si existe un conjunto S para el cual $\forall F \in \mathcal{F}\ [F \subseteq^* S]$ y $\forall G \in \mathcal{G}\ [|G \cap S| < \omega]$; nótese que si S separa a $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, entonces $(\bigcup(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})) \setminus S$ separa a $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$, de aquí que 'se pueden separar' es una relación simétrica. Escribirémos $F\perp\mathcal{G}$ si $\{F\}\perp\mathcal{G}$. Finalmente, si $B \subseteq {}^{\omega}\omega$ e $I \in [\omega]^{\omega}$, diremos que B es *no acotado en* I si

$$\forall f \in {}^{\omega}\omega \quad \exists g \in B \quad [|\{n \in I\colon f(n) < g(n)\}| = \omega],$$

i.e. si $\{f \restriction I\colon f \in B\}$ es no acotado en $\langle {}^{I}\omega, \leqslant^* \rangle$.

2.2. TEOREMA (ROTHBERGER [**1939B**], [**1941**] y [**1948**], HECHLER [**1970**], BURKE y VAN DOUWEN [**1977**]). *Sea $\mathcal{V}$ la colección formada por las líneas verticales de $\omega \times \omega$, i.e. $\mathcal{V} = \{\{k\} \times \omega\colon k \in \omega\}$. Entonces $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_i$ para $i \in \{1, \ldots, 7\}$, donde*

$\mathfrak{b}_1 = \text{mín}\{|B|\colon$ *B es un subconjunto no acotado de ${}^{\omega}\omega$ formado por funciones estrictamente crecientes, el cual es bien-ordenado por $<^*$*$\}$,

$\mathfrak{b}_2 = \text{mín}\{|B|\colon$ *$B \subseteq {}^{\omega}\omega$, y B es no acotado sobre cada subconjunto infinito de ω*$\}$,

$\mathfrak{b}_3 = \text{mín}\{|\mathcal{B}|\colon$ *$\mathcal{B} \subseteq [\omega \times \omega]^{\omega}$ es bien-ordenado por $\subset^*$, $\mathcal{B}\perp\mathcal{V}$, y $\forall X \in [\omega \times \omega]^{\omega}$ $[X\perp\mathcal{V} \Rightarrow \exists B \in \mathcal{B}\ [|X \cap B| = \omega]]$*$\}$,

$\mathfrak{b}_4$: *es como $\mathfrak{b}_3$ pero sin el "bien-ordenado por $\subset^*$",*

$\mathfrak{b}_5 = \text{mín}\{|\mathcal{B}|\colon$ *$\mathcal{B} \subseteq [\omega]^{\omega}$, $\exists \mathcal{C} \subseteq [\omega]^{\omega}$ $[|\mathcal{C}| = \omega$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$, $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ es casi ajena, y y $\forall \mathcal{D} \in [\mathcal{C}]^{\omega}$ $[\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ no se pueden separar$]]$*$\}$,

$\mathfrak{b}_6 = \text{mín}\{|\mathcal{B}|\colon$ *$\mathcal{B} \subseteq [\omega]^{\omega}$, y$\exists \mathcal{C} \subseteq [\omega]^{\omega}$ $[|\mathcal{C}| = \omega$, $\mathcal{B}\perp\mathcal{C}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bien-ordenados por $\subseteq^*$, y $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ no se pueden separar$]$*$\}$,

$\mathfrak{b}_7$: *es como $\mathfrak{b}_6$ pero sin el "$\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bien-ordenados por $\subseteq^*$".*

DEMOSTRACIÓN. Las desigualdades $\mathfrak{b}_2 \geqslant \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}_3 \geqslant \mathfrak{b}_4$, y $\mathfrak{b}_6 \geqslant \mathfrak{b}_7$ son obvias, entonces es suficiente con probar que $\mathfrak{b} \geqslant \mathfrak{b}_1 \geqslant \mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{b}_1 \geqslant \mathfrak{b}_3 \geqslant \mathfrak{b}_6$, y $\mathfrak{b}_4 \geqslant \mathfrak{b}_7 \geqslant \mathfrak{b}$.

Para $f \in {}^{\omega}\omega$ definimos L_f como $\{\langle k, n\rangle \in \omega \times \omega\colon n \leqslant f(k)\}$, y notemos que

$$\forall f, g \in {}^{\omega}\omega \quad [f <^* g \Leftrightarrow L_f \subset^* L_g]. \tag{11}$$

También, para $X \in [\omega\times\omega]^\omega$ definimos $K_X = \{k \in \omega\colon X \cap \{k\}\times\omega \neq \emptyset\}$, y si $X \perp \mathcal{V}$ definimos $f_X \in {}^\omega\omega$ como $f_X(k) = \max\{n \in \omega\colon n = 0 \text{ o } \langle k,n\rangle \in X\}$, y nótese que

$$X \subseteq L_{f_X} \cap K_X \times \omega. \tag{12}$$

Demostración de $\mathfrak{b} \geqslant \mathfrak{b}_1$. Sea $F = \{f_\xi\colon \xi \in \mathfrak{b}\}$ un conjunto no acotado de ${}^\omega\omega$. Dado que el conjunto S de funciones estrictamente crecientes es un conjunto dominante, podemos elegir por recursión $\mathfrak{b}_\eta \in S$ para $\eta \in \mathfrak{b}$, tal que $\forall f \in \{\mathfrak{b}_\xi\colon \xi \in \eta\} \cup \{f_\eta\}\ [f <^* \mathfrak{b}_\eta]$. Entonces $B = \{\mathfrak{b}_\eta\colon \eta \in \mathfrak{b}\}$ demuestra que $\mathfrak{b} \geqslant \mathfrak{b}_1$.

Demostración de $\mathfrak{b}_1 \geqslant \mathfrak{b}_2$. Es suficiente con probar la siguiente afirmación.

2.3. AFIRMACIÓN. *Si $B \subseteq {}^\omega\omega$ es un conjunto no acotado formado por funciones no decrecientes, entonces B no es acotado en ningún subconjunto infinito de ω.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto, consideremos cualquier $f \in {}^\omega\omega$ e $I \in [\omega]^\omega$. Podemos definir $\widehat{f} \in {}^\omega\omega$ como

$$\widehat{f}(k) = \max\{f(n)\colon n \leqslant \min\{i \in I\colon i \geqslant k\}\}.$$

Ahora, existe $g \in B$ tal que $g \nleq^* \widehat{f}$, *i.e.* $J = \{j \in \omega\colon \widehat{f}(j) < g(j)\}$ es infinito. Para cada $j \in J$, si $i = \min\{k \in I\colon k \geqslant j\}$, entonces $g(i) \geqslant g(j) > \widehat{f}(j) \geqslant f(i)$, ya que g es no decreciente, de donde $\{i \in I\colon f(i) < g(i)\}$ es infinito. □

Demostración de $\mathfrak{b}_1 \geqslant \mathfrak{b}_3$. Sea B como en la definición de $\mathfrak{b}_1$, y pongamos $\mathcal{B} = \{L_f\colon f \in B\}$. De (11) se sigue que $\mathcal{B}$ es bien ordenado por $\subset^*$, y claramente $\mathcal{B} \perp \mathcal{V}$. Consideremos cualquier $X \in [\omega\times\omega]^\omega$ con $X \perp \mathcal{V}$. Claramente K_X es infinito. Entonces, por la Afirmación 2.3 existe $g \in B$ tal que $J = \{k \in K_X\colon f_X(k) \leqslant g(k)\}$ es infinito. Entonces $f_X \restriction J$ es un subconjunto infinito tanto de X como de L_g.

Demostración de $\mathfrak{b}_1 \geqslant \mathfrak{b}_5$. Definimos $\mathfrak{b}_5'$ como $\mathfrak{b}_5$, pero con '$[\omega\times\omega]^\omega$' en lugar de '$[\omega]^\omega$'. Entonces $\mathfrak{b}_5' = \mathfrak{b}_5$, por lo que es suficiente con probar $\mathfrak{b}_1 \geqslant \mathfrak{b}_5'$. Sea B como en la definición de $\mathfrak{b}_1$, y pongamos $\mathcal{B} = B$ y $\mathcal{C} = \mathcal{V}$. Obviamente $|\mathcal{C}| = \omega$, $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$, y $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ es casi ajena. (Aquí es donde usaremos el hecho de que $\mathcal{B}$ es bien-ordenado por $<^*$.) Consideremos cualquier conjunto S tal que $\forall C \in \mathcal{C}\ [C \subseteq^* S]$ y cualquier $\mathcal{D} \in [\mathcal{V}]^\omega$. Sea $D = \{k \in \omega\colon \{k\}\times\omega \in \mathcal{D}\}$. Claramente, existe $f \in {}^\omega\omega$ tal que $\forall k,n \in \omega\ [n \geqslant f(k) \Rightarrow \langle k,n\rangle \in S]$, *e.g.* definamos f como $f(k) = \max\{n \in \omega\colon n = 0 \text{ ó } (n \geqslant 1 \text{ y } \langle k, n-1\rangle \notin S)\}$, para $k \in \omega$. Por la Afirmación 2.3 existe $g \in B$ tal que $I = \{k \in D\colon g(k) \geqslant f(k)\}$ es infinito. Claramente, $g \restriction I \subseteq S$, de donde $S \cap B$ es infinito. Por lo tanto $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$ no se pueden separar.

Demostración de $\mathfrak{b}_3 \geqslant \mathfrak{b}_6$. Ésta es semejante a la demostración de $\mathfrak{b}_1 \geqslant \mathfrak{b}_5$, pero con $\mathcal{C} = \{k \times \omega\colon 1 \leqslant k \in \omega\}$. (Recordemos que $k = \{0,\dots,k-1\}$ si $1 \leqslant k \in \omega$.)

Demostración de $\mathfrak{b}_4 \geqslant \mathfrak{b}_7$. Ésta es semejante a la demostración de $\mathfrak{b}_3 \geqslant \mathfrak{b}_6$.

Demostración de $\mathfrak{b}_5 \geqslant \mathfrak{b}_7$. Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son como en la definición de $\mathfrak{b}_5$, entonces $\mathcal{B} \perp \mathcal{C}$.

Demostración de $\mathfrak{b}_7 \geqslant \mathfrak{b}$. Definimos $\mathfrak{b}_7'$ como $\mathfrak{b}_7$, pero con '$[\omega\times\omega]^\omega$' en lugar de '$[\omega]^\omega$'. Pongamos $\mathcal{A} = \{\cup\mathcal{F}\colon \mathcal{F} \in [\mathcal{C}]^{<\omega} \setminus \{\emptyset\}\}$. Ahora bien, ningún miembro de $\mathcal{A}$ separa a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{B}$, entonces existe $\alpha\colon \omega \to \mathcal{A}$ tal que

$$\forall k \in \omega\ [\alpha(k) \subset \alpha(k+1) \text{ y } |\alpha(k+1) \setminus \alpha(k)| = \omega],$$

y

$$\forall C \in \mathcal{C}\ \exists k \in \omega\ [C \subseteq \alpha(k)].$$

Entonces es claro que el $\mathrm{ran}(\alpha)\perp\mathcal{B}$, y que el $\mathrm{ran}(\alpha)$ y $\mathcal{B}$ no se pueden separar, por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{C} = \mathrm{ran}(\alpha)$. También podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\alpha(k) = (k+1) \times \omega$, para $k \in \omega$. Bajo estas suposiciones, $\mathcal{V}\perp\mathcal{B}$ y $\mathcal{V}$ y $\mathcal{B}$ no se pueden separar. Entonces f_X está bien definida para toda $X \in \mathcal{B}$; luego entonces podemos definir $B = \{f_X \colon X \in \mathcal{B}\}$. Si hacemos $\mathcal{B}' = \{L_f \colon f \in B\}$ obtenemos trivialmente que $\mathcal{B}'\perp\mathcal{V}$, y por (12) se obtiene que $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{C}$ no se pueden separar.

Probemos ahora que B es no acotado: consideremos cualquier $f \in {}^{\omega}\omega$. Entonces $L_f\perp\mathcal{V}$. Dado que $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{V}$ no se pueden separar, debe existir una $g \in B$ tal que $L_g \not\subseteq^* L_f$. Así, por (11), se tiene que $g \not\leqslant^* f$. □

2.4. Corolario de la Demostración (de $\mathfrak{b} \geqslant \mathfrak{b}_1$). $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ *si y sólo si* ${}^{\omega}\omega$ *tiene una escala.* □

En el siguiente teorema, diremos que $D \subseteq {}^{\omega}\omega$ es *cofinal sobre* $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$ si

$$\forall f \in {}^{\omega}\omega \quad \exists g \in D\, \exists A \in \mathcal{A}\, [f \leqslant g \text{ sobre } A, \textit{i.e.}\ \forall a \in A\, [f(a) \leqslant g(a)]].$$

2.5. Teorema (Katětov **[1960A]** y Roitman). $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1 = \mathfrak{d}_2$, *donde*

$$\mathfrak{d}_1 = \min\{|D| \colon D \textit{ es cofinal en } \langle {}^{\omega}\omega, \leqslant\rangle\,\};$$

$$\mathfrak{d}_2 = \min\{|D| + |\mathcal{A}| \colon D \subseteq {}^{\omega}\omega,\ \mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\omega} \text{ y } D \textit{ es cofinal sobre } \mathcal{A}\}.$$

Demostración. La desigualdad $\mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{d}_1$ es inmediata, y la desigualdad $\mathfrak{d}_2 \leqslant \mathfrak{d}$ se sigue del hecho de que $D \subseteq {}^{\omega}\omega$ es dominante si y sólo si es cofinal sobre $\{A \subseteq \omega \colon \omega \setminus A \text{ es finito}\}$. (En este contexto notemos que D es cofinal en $\langle {}^{\omega}\omega, \leqslant\rangle$ si y sólo si D es cofinal sobre $\{\omega\}$.)

Demostración de $\mathfrak{d}_1 \leqslant \mathfrak{d}_2$. Sea $D \subseteq {}^{\omega}\omega$ cofinal sobre $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^{\omega}$, con $|D| + |\mathcal{A}| = \mathfrak{d}_2$. Para $d \in D$ y $A \in \mathcal{A}$ definimos $d_A \in {}^{\omega}\omega$ como: $d_A(k) = d(\min\{a \in A \colon k \leqslant a\})$, para $k \in \omega$. Claramente el conjunto $\{d_A \colon d \in D,\ A \in \mathcal{A}\}$ tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{d}_2$. Probemos que este conjunto es cofinal en $\langle {}^{\omega}\omega, \leqslant\rangle$: consideremos cualquier $f \in {}^{\omega}\omega$, y para esta función sea g una función no decreciente con $f \leqslant g$. Por otro lado existe $d \in D$ y $A \in \mathcal{A}$ tal que $g \leqslant d$ sobre A. Entonces $f \leqslant d_A$; en efecto, si $k \in \omega$ y $n = \min\{a \in A \colon k \leqslant a\}$, entonces, dado que g es no decreciente, se obtiene que $d_A(k) = d(n) \geqslant g(n) \geqslant g(k) \geqslant f(k)$. □

3. Cálculo de $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(X))$, $\mathrm{kc}(X)$ y $k(X)$ en espacios métricos separables

Antes de empezar nuestros cálculos notemos lo siguiente.

3.1. Afirmación.

(a) X *no es compacto* $\Leftrightarrow \mathrm{kc}(X) \geqslant \omega \Leftrightarrow k(X) \geqslant \omega \Leftrightarrow \mathrm{cof}(\mathcal{K}(X)) \geqslant \omega$.
(b) *Si* X *es un* k*-espacio, entonces* $\mathrm{kc}(X) \leqslant k(X) \leqslant \mathrm{cof}(\mathcal{K}(X))$.
(c) *Si* X *es cerrado en* Y*, entonces* $\mathrm{kc}(X) \leqslant \mathrm{kc}(Y)$, $k(X) \leqslant k(Y)$ *y* $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(X)) \leqslant \mathrm{cof}(\mathcal{K}(Y))$.
(d) *Si* $k(X) = \omega$*, entonces* $\mathrm{kc}(X) = \mathrm{cof}(\mathcal{K}(X)) = \omega$.

Demostración. Los incisos (a), (b) y (c) se siguen fácilmente. Para probar (d), consideremos cualquier familia numerable $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}(X)$ que determine a X y $\bigcup\mathcal{L} = X$. Es claro que la subcolección numerable $\mathcal{C} = \{\bigcup\mathcal{F} \colon \mathcal{F} \subseteq [\mathcal{L}]^{<\omega}\}$ de $\mathcal{K}(X)$ es cofinal en $\mathcal{K}(X)$. Consideremos cualquier $K \subseteq X$ tal que $\forall C \in \mathcal{C}\ [K \not\subseteq C]$. Dado que $X \notin \mathcal{C}$ (ya que de lo contrario $k(X) = 1$ ó 0) podemos encontrar un conjunto numerable

$I \subseteq K$ tal que $\forall L \in \mathcal{L}$ $[|I \cap L| < \omega]$. Este I es un subconjunto cerrado discreto infinito de X ya que $\mathcal{L}$ determina a X. De esto se sigue que K no es compacto. □

Hagamos ahora nuestros cálculos.

3.2. TEOREMA (KATĚTOV [**1960A**]). $\mathrm{kc}(\mathbb{P}) = k(\mathbb{P}) = \mathrm{cof}(\mathcal{K}(\mathbb{P})) = \mathfrak{d}$.

DEMOSTRACIÓN. Por la Afirmación 3.1 (b) es suficiente con probar que $\mathfrak{d} \leqslant \mathrm{kc}(\mathbb{P})$ y $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(\mathbb{P})) \leqslant \mathfrak{d}$. Recordemos que $\mathbb{P}$ lo podemos identificar con la potencia ${}^{\omega}\omega$, y que $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}_1 = \mathrm{cof}(\langle {}^{\omega}\omega, \leqslant\rangle)$.

Para $K \in \mathcal{K}(\mathbb{P}) \setminus \{\emptyset\}$ podemos definir $f_K \in {}^{\omega}\omega$ como $f_K(n) = \max\{\pi_n(K) \colon n \in \omega\}$, ya que para cada $n \in \omega$ la proyección $\pi_n(K)$ de K en el n–ésimo factor es compacto, luego entonces es finito. Ahora, nótese que

$$\forall K \in \mathcal{K}(\mathbb{P}) \left[K \subseteq \prod_{n\in\omega}[0, f_K(n)]\right]. \tag{13}$$

Demostración de $\mathfrak{d}_1 \leqslant \mathrm{kc}(\mathbb{P})$. Consideremos $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}(\mathbb{P})$ con $\bigcup \mathcal{L} = \mathbb{P}$. Entonces $\{f_L \colon L \in \mathcal{L}\}$ es cofinal en $\langle {}^{\omega}\omega, \leqslant\rangle$; en efecto, consideremos cualquier $f \in {}^{\omega}\omega$, entonces existe $L \in \mathcal{L}$ con $f \in L$, y por (13) se tiene que $f \leqslant f_L$.

Demostración de $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(\mathbb{P})) \leqslant \mathfrak{d}$. De (13), es claro que si D es cofinal en $\langle {}^{\omega}\omega, \leqslant\rangle$, entonces $\{\prod_{n\in\omega}[0, d_n] \colon d \in D\}$ es cofinal en $\mathcal{K}(\mathbb{P})$. □

Introduciremos ahora un espacio auxiliar $\mathbb{L}$. El espacio $\mathbb{L}$ estará formado por el conjunto $\omega\times\omega\cup\{\infty\}$, donde $\infty \notin \omega\times\omega$, con la topología para la cual: los puntos de $\omega\times\omega$ son aislados, y las vecindades básicas de ∞ son de la forma $\{\infty\}\cup(\omega\setminus k)\times\omega$, donde $k \in \omega$. El Lema 3.4 nos mostrará la utilidad que tiene este espacio. Para ver esto necesitaremos de una definición previa.

3.3. Un espacio X es llamado *localmente numerablemente compacto* si para cada $x \in X$ existe una vecindad U de x tal que $\overline{U}$ es numerablemente compacto.

3.4. LEMA. *Para un espacio X primero numerable, X no es localmente numerablemente compacto si y sólo si X tiene un subespacio cerrado homeomorfo a $\mathbb{L}$.*

DEMOSTRACIÓN. Si X no es localmente numerablemente compacto, entonces existe un punto $\infty \in X$ tal que para cada vecindad U de ∞, $\overline{U}$ no es numerablemente compacto, *i.e.* existe $N_U \in \left[\overline{U}\right]^{\omega}$ cerrado y discreto en $\overline{U}$, y por ser $\overline{U}$ un conjunto cerrado en X, se tiene también que N_U es cerrado y discreto en X.

Por otro lado, como X es un espacio regular primero numerable, existe una base $\langle F_n \colon n \in \omega\rangle$ de ∞, formada por vecindades cerradas. Ahora, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $F_{n+1} \subset F_n$, para $n \in \omega$. Para F_0, existe $N_0 \in [F_0]^{\omega}$ cerrado y discreto en X, para el cual podemos suponer que $\infty \notin N_0$. Entonces existe F_{n_1}, tal que $F_{n_1} \cap N_0 = \emptyset$. Ahora bien, para F_{n_1}, existe $N_1 \in [F_{n_1}]^{\omega}$ cerrado y discreto en X, para el cual también podemos suponer que $\infty \notin N_1$. Continuando con este proceso, podemos construir una familia ajena $\mathcal{N} = \{N_k \colon k \in \omega\}$ de conjuntos cerrados y discretos en X, y un sistema de vecindades $\langle F_{n_k} \colon k \in \omega\rangle$ de ∞ (el cual, también forma una base para ∞), tales que

$$\left(\bigcup \mathcal{N}\right) \bigcap F_{n_k} = \bigcup_{m\in\omega\setminus k} N_m, \quad \text{para } k \in \omega.$$

Por construcción, el conjunto $\{\infty\} \bigcup (\bigcup \mathcal{N})$ es un subespacio cerrado de X, el cual es homeomorfo a $\mathbb{L}$.

Por último, si X tiene un subespacio cerrado homeomorfo a $\mathbb{L}$, entonces, para cada vecindad U de ∞ en X existe una vecindad V de ∞ en X, tal que

$$V \subseteq U, \text{ y } V \cap \mathbb{L} = \{\infty\} \cup (\omega \setminus k) \times \omega, \text{ para alguna } k \in \omega.$$

Ahora, notemos que $\{k\} \times \omega \subseteq U$, el cual es un conjunto cerrado y discreto en U, luego entonces $\overline{U}$ no es numerablemente compacto. □

Calculemos ahora nuestros invariantes cardinales para el espacio $\mathbb{L}$.

3.5. LEMA. *$k(\mathbb{L}) = \mathfrak{b}$, $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(\mathbb{L})) = \mathfrak{d}$, y (trivialmente) $\mathrm{kc}(\mathbb{L}) = \omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos

$$\mathcal{A} = \{A \in [\omega \times \omega]^\omega \colon \forall\, k \in \omega\ [|A \cap \{k\} \times \omega| < \omega]\}.$$

Notemos que

$$\forall\, K \subseteq \mathbb{L} \quad [K \text{ es compacto } \Leftrightarrow |K| < \omega \text{ ó } (\infty \in K \text{ y } K \setminus \{\infty\} \in \mathcal{A})]. \tag{14}$$

Demostración de $k(\mathbb{L}) = \mathfrak{b}$. Es fácil ver que

$$\forall\, F \subseteq \mathbb{L} \quad [F \text{ no es cerrado } \Leftrightarrow \infty \notin F \text{ y } \exists\, A \in \mathcal{A}\ [A \subseteq F]]. \tag{15}$$

De (14) y (15) se observa que

$$k(\mathbb{L}) = \min\{|\mathcal{B}| \colon \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}, \text{ y } \forall\, A \in \mathcal{A}\ \exists\, B \in \mathcal{B}\ [|A \cap B| = \omega]\}.$$

El lado derecho de la igualdad es $\mathfrak{b}_4$, el cual es igual a $\mathfrak{b}$ por el Teorema 2.2.

Demostración de $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(\mathbb{L})) = \mathfrak{d}$. Para $f \in {}^\omega\omega$ definimos L_f como $L_f = \{\langle k, n\rangle \in \omega \times \omega \colon n \leqslant f(k)\}$. De (14) se sigue que $\{L_f \cup \{\infty\} \colon f \in {}^\omega\omega\}$ es cofinal en $\mathcal{K}(X)$. Ahora bien, es claro que

$$\mathrm{cof}(\langle\{L_f \cup \{\infty\} \colon f \in {}^\omega\omega\}, \subseteq\rangle) = \mathrm{cof}(\langle\{L_f \colon f \in {}^\omega\omega\}, \subseteq\rangle) = \mathrm{cof}(\langle{}^\omega\omega, \leqslant\rangle).$$

El lado derecho de la igualdad es $\mathfrak{d}_1$, el cual es igual a $\mathfrak{d}$ por el Teorema 2.5.

La siguiente proposición es una simple consecuencia de 3.1 (c), 3.4 y 3.5.

3.6. PROPOSICIÓN (ARENS [**1946**] y KATĚTOV [**1960A**]). *Sea X un espacio métrico. (Más en general, sea X primero numerable e isocompacto, i.e. los subconjuntos cerrados numerablemente compactos, son compactos.) Entonces $k(X) \leqslant \omega$ si y sólo si $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(X)) \leqslant \omega$, si y sólo si X es σ-compacto y localmente compacto.* □

Pasemos ahora a calcular nuestros invariantes cardinales para el espacio de los números racionales $\mathbb{Q}$.

3.7. TEOREMA. *$k(\mathbb{Q}) = \mathfrak{b}$.*

DEMOSTRACIÓN. De 3.1 (c), 3.4 y 3.5 se sigue que $k(\mathbb{Q}) \geqslant \mathfrak{b}$. Probemos que $k(\mathbb{Q}) \leqslant \mathfrak{b}$ haciendo una pequeña modificación a la demostración de $k(\mathbb{L}) \leqslant \mathfrak{b}$.

Dado que $|\mathbb{Q}| = \omega$, para probar que $k(\mathbb{Q}) \leqslant \mathfrak{b}$ es suficiente con encontrar para cada $q \in \mathbb{Q}$ una familia $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{K}(\mathbb{Q})$ con $|\mathcal{D}| \leqslant \mathfrak{b}$ tal que

$$\forall\, F \subseteq X\ [q \in \overline{F} \setminus F \Rightarrow \exists\, D \in \mathcal{D}\ [F \cap D \text{ no es cerrado}]]. \tag{16}$$

Sea $\langle B_n \colon n \in \omega\rangle$ una base de vecindades para q tal que

$$\forall\, n \in \omega\ [B_{n+1} \subset B_n] \quad (\text{de aquí que } \forall\, n \in \omega[|B_n \setminus B_{n+1}| = \omega]). \tag{17}$$

Definimos

$$\mathcal{A} = \{A \in [B_0]^\omega \colon \forall\, n \in \omega\ [|A \cap (B_n \setminus B_{n+1})| < \omega]\}.$$

Entonces, por (17) $\forall\, A \in \mathcal{A}$ [A no es compacto pero $A \cup \{q\}$ sí lo es]. También,

$$\forall\, F \subseteq X\ [q \in \overline{F} \setminus F \Leftrightarrow q \notin F \text{ y } \exists\, A \in \mathcal{A}\ [A \subseteq F]],$$

por lo tanto, existe $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{K}(\mathbb{Q})$ que satisface (16) con

$$|\mathcal{D}| = \text{mín}\{|\mathcal{B}| \colon \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A},\ \text{y}\ \forall A \in \mathcal{A}\, \exists B \in \mathcal{B}\, [|A \cap B| = \omega]\}.$$

De (17) se sigue que el lado derecho de la igualdad es $\mathfrak{b}_4$, el cual es igual a $\mathfrak{b}$. □

3.8. TEOREMA (KATĚTOV **[1960B]**). $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(\mathbb{Q})) = \mathfrak{d}$.

DEMOSTRACIÓN. De 3.1 (c), 3.4 y 3.5 se sigue que $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(\mathbb{Q})) \geqslant \mathfrak{d}$. La demostración de que $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(\mathbb{Q})) \leqslant \mathfrak{d}$ será algo tediosa.

Intermedio. Revisaremos algunos hechos acerca de los espacios dispersos que necesitaremos para la demostración. Un espacio es llamado *disperso*, si cada subespacio (o, equivalentemente, cada subespacio cerrado) tiene un punto aislado. La importancia de esta noción reside en el hecho de que los subespacios compactos de $\mathbb{Q}$ son dispersos, ya que los espacios compactos contables son dispersos. [La manera más rápida de probar esto es observando que para un espacio contable sin puntos aislados uno puede encontrar una sucesión $\langle U_n \colon n \in \omega\rangle$ de conjuntos abiertos no vacíos tales que $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \emptyset$ y $\forall n \in \omega[U_n \supseteq \overline{U}_{n+1}]$.]

Para un espacio X, X' denotará el conjunto de puntos de acumulación de X, y recursivamente definimos $X^{(\eta)}$ para un ordinal η como

$$X^{(0)} = X, \quad X^{(\eta+1)} = (X^{(\eta)})' \quad \text{y} \quad X^{(\eta)} = \bigcap_{\xi\in\eta} X^{(\xi)} \quad \text{si } \eta \text{ es un ordinal límite,}$$

o, brevemente,

$$X^{(0)} = X, \quad \text{y} \quad X^{(\eta)} = \bigcap_{\xi\in\eta} (X^{(\xi)})' \quad \text{si } \eta > 0.$$

Claramente cada $X^{(\eta)}$ es cerrado en X. Es fácil ver que X es disperso si y sólo si existe η, necesariamente con $\eta < |X|^+$, tal que $X^{(\eta)} = \emptyset$. Si X es compacto, entonces esta η no puede ser un ordinal límite. Así, para un espacio disperso no vacío X existe $h(X) < |X|^+$, la altura de X, tal que $X^{(h(X))}$ es un conjunto finito no vacío. Por convención $h(\emptyset) = -1$.

Continuación de la demostración. Construiremos por inducción transfinita sobre $\eta \in \omega_1$ un espacio compacto $L(\eta, f)$ en $\mathbb{Q}$ para cada $f \in {}^{\omega}\omega$ de tal manera que

$$\forall f, g \in {}^{\omega}\omega\ [f \leqslant g \Rightarrow L(\alpha, f) \subseteq L(\alpha, g)]; \tag{18}$$

$$\forall K \in \mathcal{K}(\mathbb{Q})\ [h(K) < \alpha \Rightarrow \exists f \in {}^{\omega}\omega\ [K \subseteq L(\alpha, f)]]. \tag{19}$$

Entonces $\{L(\eta, f) \colon \eta \in \omega_1, f \in D\}$ sería cofinal en $\mathcal{K}(\mathbb{Q})$ para cada conjunto cofinal D en $\langle {}^{\omega}\omega, \leqslant\rangle$, ya que $\forall K \in \mathcal{K}(\mathbb{Q})\ [h(K) < \omega_1]$. Ahora bien, como $\mathrm{cof}(\langle {}^{\omega}\omega, \leqslant\rangle) = \mathfrak{d} \geqslant \omega_1$ tendríamos entonces que $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(\mathbb{Q})) \leqslant \mathfrak{d}$.

Para $\eta = 0$, hacemos $L(\eta, f) = \emptyset$ para $f \in {}^{\omega}\omega$.

Ahora, sea $0 < \eta < \omega_1$, y supongamos que $L(\xi, f)$ es conocido para $\xi \in \eta$ y $f \in {}^{\omega}\omega$. Al conjunto $\omega \times {}^{\omega}\omega \times {}^{\omega}({}^{\omega}\omega)$ le damos el siguiente orden parcial:

$$\langle m, f, \langle g_n\rangle_n\rangle \leqslant \langle m', f', \langle g'_n\rangle_n\rangle \quad \text{si} \quad m \leqslant m',\ f \leqslant f',\ \text{y}\ \forall n \in \omega\ [g_n \leqslant g'_n].$$

Entonces $\langle \omega \times {}^{\omega}\omega \times {}^{\omega}({}^{\omega}\omega), \leqslant\rangle$ es isomorfo a $\langle {}^{\omega}\omega, \leqslant\rangle$ (ya que $\omega \times {}^{\omega}\omega \times {}^{\omega}({}^{\omega}\omega) \sim {}^{1+\omega+\omega\cdot\omega}\omega$ y $1 + \omega + \omega \cdot \omega = \omega$). De esta forma, para construir $L(\eta, f)$ para $f \in {}^{\omega}\omega$ es suficiente construir $L(\eta; m, f, \langle g_n\rangle_n)$ para $\langle m, f, \langle g_n\rangle_n\rangle \in \omega \times {}^{\omega}\omega \times {}^{\omega}({}^{\omega}\omega)$ de tal manera que tengamos los análogos para (18) y (19).

Sea $q \colon \omega \to \mathbb{Q}$ una función biyectiva. Para $i \in \omega$, sea $\langle B_{i,k} \colon k \in \omega\rangle$ una base decreciente de vecindades de b_i formada por conjuntos cerrados-y-abiertos con $B_{i,0} =$

$\mathbb{Q}$. Sea $e\colon \omega \to \eta$ una función suprayectiva. Para $\langle m, f, \langle g_n \rangle_n \rangle \in \omega \times {}^\omega\omega \times {}^\omega({}^\omega\omega)$ definimos

$$L(\eta; m, f, \langle g_n \rangle_n) = \bigcup_{i \in m} \Big(\{q_i\} \cup \bigcup_{k \in \omega} \bigcup_{j \leqslant f(k)} [L(e(j), g_k) \cap (B_{i,k} \setminus B_{i,k+1})] \Big).$$

Para verificar que este conjunto es compacto, notemos que para cada $i \leqslant m$ el i-ésimo sumando es compacto, ya que estamos intersectando el conjunto cerrado $B_{i,k} \setminus B_{i.k+1}$ con el conjunto compacto $L(e(j), g_k)$. [Aquí estamos usando el hecho de que si C_k es un subconjunto compacto de $B_{i,k}$ para $k \in \omega$, entonces $\{q_i\} \cup \bigcup_{k \in \omega} C_k$ es un conjunto compacto ya que $\langle B_{i,k} \colon k \in \omega \rangle$ es una base decreciente de vecindades de q_i.]

Es claro ahora que se tiene el análogo a (18). (Usamos a q y a e para obtener este hecho ya que en general no podemos tener que $L(\xi, f) \subseteq L(\xi', f)$ cuando $\xi \leqslant \xi'$.)

Para concluir la demostración, resta probar que el análogo a (19) también se tiene, por tanto consideremos cualquier $K \in \mathcal{K}(\mathbb{Q})$ con $h(K) < \eta$. Así, tenemos que encontrar $m \in \omega$, $f \in {}^\omega\omega$ y $g_n \in {}^\omega\omega$ para $n \in \omega$ de tal manera que $K \subseteq L(\eta; m, f, \langle g_n \rangle_n)$. Dado que $K^{(h(K))}$ es finito podemos escoger $m \in \omega$ tal que $K^{(h(K))} \subseteq \{q_i \colon i \in m\}$. Escogemos $l \in \omega$ tan grande para que $B_{i,l} \cap B_{j,l} = \emptyset$ para cualesquiera $i, j \in \omega$ con $i \neq j$, y definimos

$$H = \mathbb{Q} \setminus \bigcup_{i \in m} B_{i,l}, \quad \text{y} \quad \mathcal{F} = \{H\} \cup \{ \bigcup_{i \in m} (B_{i,k} \setminus B_{i,k+1}) \colon l \leqslant k \in \omega \}.$$

Entonces $\bigcup \mathcal{F} = \mathbb{Q} \setminus \{q_i \colon i \in m\}$ ya que $\langle B_{i,k} \colon k \in \omega \rangle$ es decreciente. Como $\{q_i \colon i \in m\} \subseteq L(\eta; m, f, \langle g_n \rangle_n))$ para cualquier elección de f y de $\langle g_n \rangle_n$, entonces resta escoger f y $\langle g_n \rangle_n$ de tal manera que para cada $F \in \mathcal{F}$ tengamos que

$$K \cap F \subseteq L(\eta; m, f, \langle g_n \rangle_n). \tag{20}$$

Para cada $F \in \mathcal{F}$, tenemos que F es cerrado en $\mathbb{Q}$ (ya que los $B_{i,k}$'s son cerrados-y-abiertos). De aquí que $K \cap F$ es compacto y $h(K \cap F) < h(K)$. [Pues claramente $(K \cap F)^{(\xi)} \subseteq K^{(\xi)} \cap F$ para cada ordinal ξ, luego entonces $(K \cap F)^{(h(K))} \subseteq K^{(h(K))} \cap F = \emptyset$.] Entonces existen $\phi(F) \in \omega$ y $\gamma(F) \in {}^\omega\omega$ tales que $h(K \cap F) < e(\phi(F))$ y

$$K \cap F \subseteq L(e(\phi(F)), \gamma(F)) \quad (\text{de aquí que } K \cap F \subseteq L(e(\phi(F)), \gamma(F)) \cap F). \tag{21}$$

Usemos ahora ϕ y γ para construir f y $\langle g_n \rangle_n$.

Para $k < l$ hagamos $f(k) = \phi(H)$ y $g_k = \gamma(H)$. Pues bien, (20) es verdadero para $F = H$. Para ver esto consideremos cualquier $i \in m$. Entonces $H \subseteq \mathbb{Q} \setminus B_{i,l} = \bigcup_{k \in l} (B_{i,k} \setminus B_{i,k+1})$ ya que $\langle B_{i,k} \colon k \in \omega \rangle$ es decreciente y dado que $B_{i,0} = \mathbb{Q}$. Ahora, de (21),

$$\begin{aligned} K \cap H &\subseteq L(e(\phi(H)), \gamma(H)) \cap H \subseteq L(e(\phi(H)), \gamma(H)) \cap \bigcup_{k \in l} (B_{i,k} \setminus B_{i,k+1}) \\ &= \bigcup_{k \in l} [L(e(\phi(H)), \gamma(H)) \cap (B_{i,k} \setminus B_{i,k+1})] \\ &= \bigcup_{k \in l} [L(f(k), g_k) \cap (B_{i,k} \setminus B_{i,k+1})] \subseteq L(\eta; m, f, \langle g_k \rangle_k). \end{aligned}$$

Finalmente, para $k \geqslant l$, si $F = \bigcup_{i \in m} (B_{i,k} \setminus B_{i,k+1})$, pongamos $f(k) = \phi(F)$ y $g_k = \gamma(F)$; esto prueba claramente que (20) se tiene también para esta F. □

Los resultados anteriores jugarán un papel muy importante en el cálculo de nuestros invariantes cardinales para espacios más generales. Para esto, necesitaremos de lo siguiente.

3.9. LEMA (HUREWICZ). *Sea Y un espacio métrico el cual es imagen continua de un espacio separable completamente metrizable. Entonces Y tiene un subespacio cerrado homeomorfo a $\mathbb{P}$ si (y, trivialmente, sólo si) Y no es σ-compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea X un espacio separable completamente metrizable tal que admita un mapeo continuo f sobre Y. Definimos

$$\Sigma = \{A \subseteq Y \colon \text{existe un espacio } \sigma\text{-compacto } S \subseteq Y \text{ con } A \subseteq S\}.$$

Paso 1. Construyamos para cada $n \in \omega$ una familia $\langle A_s \colon s \in {}^n\omega\rangle$ de conjuntos cerrados en X tales que

(1) $\forall\, s \in {}^n\omega\, [\mathrm{diam}(A_s) < 2^{-n}]$, si $n \geqslant 1$;
(2) $\forall\, s \in {}^n\omega\, [\mathrm{diam}(f(A_s)) < 2^{-n}]$, si $n \geqslant 1$;
(3) $\langle A_s \colon s \in {}^n\omega\rangle$ es una familia indicada discreta en X;
(4) $\langle f(A_s) \colon s \in {}^n\omega\rangle$ es una familia indicada discreta en Y;
(5) $\forall\, s \in {}^n\omega\, \forall\, t \in {}^{n+1}\omega\, [s \subseteq t \Rightarrow A_s \supseteq A_t]$; y
(6) $\forall\, s \in {}^n\omega\, [f(A_s) \notin \Sigma]$.

Sea $A_\emptyset = X$. Entonces, esto define A_s para $s \in {}^0\omega = \{\emptyset\}$. Ahora, sea $m \in \omega$ y supongamos que A_s es conocido para $s \in {}^m\omega$. Para $s \in {}^m\omega$ definimos

$$B_s = \{x \in A_s \colon \forall \text{ vecindad } U \text{ de } x \text{ en } A_s\ [f(U) \notin \Sigma]\}.$$

Entonces $A_s \setminus B_s$ es Lindelöf, por ser un espacio métrico separable, entonces $f(A_s \setminus B_s) \in \Sigma$. Dado que $f(A_s) \notin \Sigma$ entonces el superconjunto $f(B_s)$ de $f(A_s) \setminus f(A_s \setminus B_s)$ no puede tener cerradura compacta en Y. Entonces $f(B_s)$ tiene un subconjunto numerable D el cual es cerrado y discreto en Y. Consideremos cualquier función $\phi_s \colon \omega \to B_s$ tal que $f \circ \phi_s$ es una biyección de ω en D. No es difícil encontrar vecindades cerradas $A_{s,k}$ de $\phi_s(k)$ para $k \in \omega$ de tal manera que tengamos los análogos de (1) hasta (4) para $\langle A_{s,k} \colon k \in \omega\rangle$ con $n = m+1$. Ahora, para $t \in {}^{m+1}\omega$ definimos $A_t = A_{t\restriction m, t(m)}$. Entonces tenemos (1) hasta (6) para $n = m+1$.

Paso 2. Construyamos un conjunto cerrado en Y homeomorfo a $\mathbb{P}$. Dado que A_s's son conjuntos cerrados, se sigue de (1) y (2) que $\forall\, x \in {}^\omega\omega\, [|\bigcap_{n\in\omega} A_{s\restriction n}| = 1]$. Entonces podemos definir una función $h \colon \mathbb{P} = {}^\omega\omega \to Y$ como

$$h = \{\langle x, y\rangle \colon y \in \bigcap_{n\in\omega} f(A_{x\restriction n})\}.$$

Para cada $n \in \omega$ y $s \in {}^n\omega$ tenemos que $h(\{x \in {}^\omega\omega \colon x \supseteq s\}) = h(\mathbb{P}) \cap f(A_s)$. Dado que $\langle h(\mathbb{P}) \cap f(A_s) \colon s \in {}^n\omega\rangle$ es una familia *abierta* indicada ajena por pares en $h(\mathbb{P})$ (ya que por (4), $\forall\, s \in {}^n\omega\, [f(A_s)$ tiene complemento cerrado en $\bigcup\{f(A_t) \colon t \in {}^n\omega \setminus \{s\}\}])$ cuyos miembros tienen diámetro menor que 2^{-n}, para $n \in \omega$, se sigue entonces que h es un encaje de $\mathbb{P}$ en Y.

Para probar que $h(\mathbb{P})$ es cerrado en Y, consideremos cualquier $y \in \overline{h(\mathbb{P})}$. Entonces existe un conjunto infinito $D \subseteq h(\mathbb{P})$ que converge a y (*i.e.* cada vecindad de y contiene a todos los puntos de D salvo una cantidad finita de ellos). Por (2) evidentemente $\forall\, n \in \omega\, [\{s \in {}^n\omega \colon D \cap f(A_s) \neq \emptyset\}$ es finito$]$. Entonces existe $x \in {}^\omega\omega$ tal que $\forall\, n \in \omega\, [|D \cap f(A_{x\restriction n})| = \omega]$. Así, $y = h(x)$, ya que cada vecindad de y contiene alguna $A_{x\restriction n}$, luego entonces contiene puntos de D. $\square$

También necesitaremos del siguiente hecho acerca de mapeos perfectos. (Recordemos que un mapeo f de un espacio X en un espacio Y es llamado *perfecto* si este es continuo y cerrado, y sus fibras son compactas.)

3.10. LEMA. *Sea Y la imagen de X bajo un mapeo perfecto. Entonces* $\mathrm{kc}(Y) = \mathrm{kc}(X)$, $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(Y)) = \mathrm{cof}(\mathcal{K}(X))$ *y* $k(Y) = k(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea f un mapeo perfecto de X sobre Y. Es bien conocido que, bajo esta condición, $\forall\, K \in \mathcal{K}(Y)\ [f^{-1}(K) \in \mathcal{K}(X)]$ (véase por ejemplo Teorema 3.7.2 en R. ENGELKING [**1989**]). De esto se siguen fácilmente las dos primeras igualdades. La demostración de que $k(Y) = k(X)$ es una extensión directa de la demostración de que Y es un k-espacio si y sólo si X es un k-espacio. (La demostración del "si" se puede encontrar en A. V. ARHANGEL'SKIĬ [**1965**] Teorema 2.5, y para demostrar el "sólo si" sólo se necesita que f sea cociente (*i.e.* $\forall\, F \subseteq Y$ [F es cerrado $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(F)$ es cerrado]).) □

Calculemos ahora nuestros invariantes cardinales para otros espacios métricos separables. Para ello necesitaremos de la siguiente terminología. Llamaremos a un espacio métrico separable X *absulutamente F_σ* (G_δ, ..., Borel) si X es un subconjunto F_σ (G_δ, ..., Borel) en cada una de sus compactaciones metrizables, o, equivalentemente, de alguna de sus compactaciones metrizables. Un espacio métrico separable X es absulutamente F_σ si y sólo si X es σ-compacto, y X es absulutamente G_δ si y sólo si X es completamente metrizable. Decimos que un espacio X es *analítico* si X es la imagen continua de $\mathbb{P}$. Se sabe que todo espacio métrico separable que sea absolutamente Borel es analítico, pero no a la inversa (véase por ejemplo A. KURATOWSKI y A. MOSTOWSKI [**1976**] Capítulo XIII Teoremas 6 y 11).

3.11. TEOREMA. *Sea X un espacio métrico separable.*

(a) *Si X es localmente compacto pero no compacto, entonces* $\mathrm{kc}(X) = k(X) = \mathrm{cof}(\mathcal{K}(X)) = \omega$.
(b) *Si X es σ-compacto pero no localmente compacto, entonces* $k(X) = \mathfrak{b}$ *y* $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(X)) = \mathfrak{d}$.
(c) *Si X es completamente metrizable pero no σ-compacto, entonces* $\mathrm{kc}(X) = k(X) = \mathrm{cof}(\mathcal{K}(X)) = \mathfrak{d}$.
(d) *Si X es absulutamente $F_{\sigma\delta}$ pero no σ-compacto, entonces* $\mathrm{kc}(X) = k(X) = \mathrm{cof}(\mathcal{K}(X)) = \mathfrak{d}$.
(e) *Si X es analítico pero no σ-compacto, entonces* $\mathrm{kc}(X) = \mathfrak{d}$.

DEMOSTRACIÓN. (a) X es σ-compacto, por ser localmente compacto y segundo numerable, por lo tanto el resultado se sigue de la Proposición 3.6.

(e) Dado que X es la imagen continua de $\mathbb{P}$, se tiene que $\mathrm{kc}(X) \leqslant \mathrm{kc}(\mathbb{P})$, y dado que X tiene un subespacio cerrado homeomorfo a $\mathbb{P}$, por el Lema 3.9, observemos que de la Afirmación 3.1 (c) se tiene que $\mathrm{kc}(X) \geqslant \mathrm{kc}(\mathbb{P})$. Entonces por el Teorema 3.2 $\mathrm{kc}(X) = \mathfrak{d}$.

(b), (c) y (d). Notemos que (c) se sigue de (d) ya que si X es absulutamente G_δ, entonces este es absulutamente $F_{\sigma\delta}$. Sin embargo, incluiremos una demostración de (c).

Por la Afirmación 3.1 (c) y los Lemas 3.4 y 3.5 obtenemos para (b) que $k(X) \geqslant \mathfrak{b}$ y $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(X)) \geqslant \mathfrak{d}$, y por la Afirmación 3.1 (c), el Teorema 3.2 y el Lema 3.9 obtenemos para (c) y (d) que $\mathrm{kc}(X) \geqslant \mathfrak{d}$.

Para probar las desigualdades contrarias, primero notemos lo siguiente

(1) $k({}^{\omega}2 \times \mathbb{Q}) = \mathfrak{b}$, $\mathrm{cof}(\mathcal{K}({}^{\omega}2 \times \mathbb{Q})) = \mathfrak{d}$, y

(2) $\mathrm{cof}(\mathcal{K}({}^{\omega}\mathbb{Q})) = \mathfrak{d}$.

En efecto, la proyección ${}^{\omega}2 \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, por ser una proyección y tener un factor compacto, es perfecta, entonces (1) se sigue de los Teoremas 3.7, 3.8 y el Lema 3.9. Por otro lado, de la demostración del Teorema 3.8 se sigue que para $X = \mathbb{Q}$ existe $L\colon \omega_1 \times {}^{\omega}\omega \to \mathcal{K}(X)$ tal que

$$\begin{aligned} &\forall \eta \in \omega_1\, \forall f, g \in {}^{\omega}\omega\, [f \leqslant g \Rightarrow L(\eta, f) \subseteq L(\eta, g)] \text{ y} \\ &\forall K \in \mathcal{K}(X)\, \exists \eta \in \omega_1\, \forall \xi \in \omega_1 \setminus \eta\, \exists f \in {}^{\omega}\omega\, [K \subseteq L(\xi, f)]. \end{aligned} \tag{22}$$

Ahora, es fácil ver que el producto numerable de espacios que satisfagan (22) también satisfacen (22), ya que $\langle {}^{\omega}({}^{\omega}\omega), \leqslant\rangle$ y $\langle {}^{\omega}\omega, \leqslant\rangle$ son isomorfos. Pero claramente cualquier espacio X que safisfaga (22) tiene $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(X)) \leqslant \mathfrak{d}$.

(1), el Teorema 3.2 y (2), cuando los combinamos con la Afirmación 3.1 (c), el Lema 3.10 y la Afirmación 3.1 (b) nos hacen ver que las desigualdades contrarias en (b), (c) y (d) se siguen de los siguientes hechos:

(A) si X es σ-compacto, entonces X es imagen perfecta de algún subespacio cerrado de ${}^{\omega}2 \times \mathbb{Q}$,

(B) si X es completamente metrizable, entonces X es imagen perfecta de algún subespacio cerrado de $\mathbb{P}$,

(C) si X es absolutamente $F_{\sigma\delta}$, entonces X es imagen perfecta de algún subespacio cerrado de ${}^{\omega}\mathbb{Q}$,

suponiendo que X es un espacio métrico separable.(Notemos que los recíprocos de estos hechos también se tienen.) Para probar esto podemos suponer que X es un subespacio del cubo de Hilbert ${}^{\omega}\mathbb{I}$. Ahora, ${}^{\omega}2$ admite un mapeo continuo sobre ${}^{\omega}\mathbb{I}$, por lo que X admite un mapeo continuo f sobre ${}^{\omega}\mathbb{I}$. Entonces f es un mapeo perfecto, y $f^{-1}(X)$ admite a $f \restriction f^{-1}(X)$ como mapeo perfecto sobre X, y $f^{-1}(X)$ es un F_σ (o G_δ o $F_{\sigma\delta}$) en ${}^{\omega}2$ si (y sólo si) X es un F_σ (o G_δ o $F_{\sigma\delta}$) en ${}^{\omega}\mathbb{I}$. Esto reduce nuestra demostración a probar

(A′) si X es σ-compacto, entonces X se encaja en ${}^{\omega}2 \times \mathbb{Q}$ como subespacio cerrado,

(B′) si X es completamente metrizable, entonces X se encaja en $\mathbb{P}$ como subespacio cerrado,

(C′) si X es absolutamente $F_{\sigma\delta}$, entonces X se encaja en ${}^{\omega}\mathbb{Q}$ como subespacio cerrado,

suponiendo que X es un espacio métrico separable 0-dimensional. Si $X \approx Y$ denota que X e Y son homeomorfos. Entonces (A′) y (B′) se siguen de

(A″) si X es σ-compacto, entonces $X \times {}^{\omega}2 \times \mathbb{Q} \approx {}^{\omega}2 \times \mathbb{Q}$,

(B″) si X es completamente metrizable, entonces $X \times \mathbb{P} \approx \mathbb{P}$,

suponiendo que X es un espacio métrico separable 0-dimensional. Esto se sigue del hecho de que cada espacio métrico separable 0-dimensional X que no sea localmente compacto en ningún punto es homeomorfo a ${}^{\omega}2 \times \mathbb{Q}$ si este es σ-compacto y no numerable, y es homeomorfo a $\mathbb{P}$ si este es completamente metrizable.

Finalmente, dado que $2 \times \mathbb{Q} \approx \mathbb{Q}$, entonces ${}^{\omega}({}^{\omega}2 \times \mathbb{Q}) \approx {}^{\omega}2 \times {}^{\omega}\mathbb{Q} \approx {}^{\omega}(2 \times \mathbb{Q}) \approx {}^{\omega}\mathbb{Q}$, ahora la afirmación C′ es una consecuencia de A′ ya que si $\mathcal{F}$ es una familia de espacios entonces $\bigcap \mathcal{F}$ es homeomorfo a un subespacio cerrado del producto $\Pi\mathcal{F}$, a saber la diagonal $\{x \in \Pi\mathcal{F} \colon \forall F, G \in \mathcal{F}\, [x_F = x_G]\}$. □

3.12. Una pregunta inmediata con relación al inciso (e) del teorema anterior es sin duda la siguiente, ¿si X es un espacio métrico separable, es $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(X)) = k(X) = \mathfrak{d}$ si X es analítico, o al menos si X es absolutamente Borel? Observemos que por la Proposición 3.6, se esta considerando implícitamente en la pregunta que X no sea σ-compacto. Ahora bien, la condición de que X sea analítico es esencial: es bien conocido que existe un espacio métrico separable X con $|X| = \mathfrak{c}$ en el que cada subconjunto compacto es contable (*e.g* un conjunto de Bernstein), obteniendo como consecuencia que $\mathrm{kc}(X) = k(X) = \mathrm{cof}(\mathcal{K}(X)) = \mathfrak{c}$, no importando el tamaño de $\mathfrak{d}$ que se tenga.

Por otro lado, de la Afirmación 3.1 y del Teorema 3.11 (e) obtenemos que $\mathfrak{d} \leqslant k(X) \leqslant \mathrm{cof}(\mathcal{K}(X))$ si X es un espacio métrico separable que es analítico pero no σ-compacto. Así, nuestra pregunta se reduce a: ¿si X es un espacio métrico separable que no es σ-compacto, es $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(X)) \leqslant \mathfrak{d}$ si X es analítico, o al menos si X es absolutamente Borel? Pues bien, a lo que respecta al caso en que X sea analítico, H. Becker en **[1989]** construyó un modelo de **ZFC** en el que existe un espacio analítico $X \subset {}^{\omega}2$ con $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(X)) > \mathfrak{d}$. En el otro sentido, bajo **CH**, $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(X)) = \mathfrak{d} = \omega_1$. Así, la respuesta al caso en que X sea analítico, es independiente de **ZFC**. Sin embargo, en el caso que X sea absolutamente Borel, tenemos una respuesta en el sentido positivo, F. van Engelen en **[1988]** demostró que si X es co-analítico (los conjuntos absolutamente Borel son analíticos asi como co-analíticos), entonces $\mathrm{cof}(\mathcal{K}(X)) \leqslant \mathfrak{d}$.

Para probar el resultado de F. van Engelen, necesitaremos de algunos resultados previos asi como de una terminología adicional.

3.13. ***Conjuntos de Borel.*** Recordemos que X es un *espacio polaco*, si X es homeomorfo a un espacio completamente metrizable sin puntos aislados. Sea X un espacio polaco. Una familia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ es llamada una σ-álgebra si

1. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$,
2. si $A \in \mathcal{A}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{A}$, y
3. si $\{A_n : n \in \omega\} \subseteq \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n\in\omega} A_n \in \mathcal{A}$.

Sea $\mathbb{B}_X$ la mínima σ-álgebra en X que contenga a todos los subconjuntos abiertos de X.

Frecuentemente, es muy útil tener una definición más explícita de $\mathbb{B}_X$. Sea Σ^0_1 la colección de todos los subconjuntos abiertos de X y Π^0_1 la colección de todos los subconjuntos cerrados de X.

Para $\alpha > 1$, sea

$$\Sigma^0_\alpha = \left\{ \bigcup_{n\in\omega} A_n : \forall n\, \exists \beta < \alpha\ A_n \in \Pi^0_\beta \right\} \quad \text{y} \quad \Pi^0_\alpha = \{X \setminus A : A \in \Sigma^0_\alpha\}.$$

Tradicionalmente los conjuntos Σ^0_2 son llamados conjuntos F_σ y los conjuntos Π^0_2 son llamados conjuntos G_δ. Usando el axioma de elección es fácil probar que

$$\mathbb{B}_X = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Sigma^0_\alpha = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \Pi^0_\alpha.$$

3.14. ***Conjuntos proyectivos.*** Para $k > 1$ sea $\pi\colon X^k \to X$ la proyección en la última coordenada. Definimos la *jerarquía de subconjuntos proyectivos* de X^m como sigue:

$$\Sigma_1^1(X^m) = \{\pi(A)\colon A \in \mathbb{B}_{X^{m+1}}\} \quad \text{y}$$
$$\Pi_1^1(X^m) = \{A \subseteq X^m\colon \exists B \in \Sigma_1^1(X^m)\ A = X^m \setminus B\}.$$

Las clases restantes son definidas inductivamente:

$$\Sigma_{n+1}^1(X^m) = \{\pi(A)\colon A \in \Pi_n^1(X^{m+1})\} \quad \text{y}$$
$$\Pi_{n+1}^1(X^m) = \{A \subseteq X^m\colon \exists B \in \Sigma_{n+1}^1(X^{m+1})\ A = X^m \setminus B\}.$$

Finalmente, sea

$$\Delta_n^1(X^m) = \Sigma_n^1(X^m) \bigcap \Pi_n^1(X^m).$$

Escribiremos Σ_n^1 en lugar de $\Sigma_n^1(X)$, cuando quede claro en el contexto con que espacio estamos trabajando.

Un conjunto $A \subseteq X$ es llamado *proyectivo* si $A \in \Sigma_n^1$ para algún $n \in \omega$.

El siguiente diagrama describe las relaciones que hay entre las diferentes clases de conjuntos proyectivos,

$$\begin{tikzcd}
 & \Delta_{n+1}^1 & \\
\Sigma_n^1 \arrow[ur, dash] & & \Pi_n^1 \arrow[ul, dash] \\
 & \Delta_n^1 \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

Diagrama 1.

con $n \geqslant 1$, y en donde las líneas rectas denotan contención propia cuando son recorridas de abajo hacia arriba.

3.15. TEOREMA (SUSLIN).[1] *Para cada espacio polaco X, $\mathbb{B}_X = \Delta_1^1(X)$.* □

En esta nueva terminología, los conjuntos analíticos son precisamente los conjuntos Σ_1^1, los conjuntos absolutamente Borel son los conjuntos Δ_1^1 y los conjuntos co-analíticos son los conjuntos Π_1^1. Con esto en mente, pasemos ahora a formular y desde luego a probar, los resultados que necesitaremos para poder probar el resultado de F. van Engelen.

3.16. PROPOSICIÓN.[2] *Para cada espacio métrico separable, cof($\mathcal{K}(X)$) = kc($\mathcal{K}(X)$).*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{L}$ un conjunto cofinal en $\mathcal{K}(X)$. Entonces cada elemento de $\mathcal{K}(X)$ está contenido en algún $L \in \mathcal{L}$; luego entonces $\mathcal{K}(X) = \bigcup_{L\in\mathcal{L}} \mathcal{K}(L)$, donde $\mathcal{K}(L)$ es compacto. Por lo que $\mathrm{kc}(\mathcal{K}(X)) = \mathrm{cof}(\mathcal{K}(X))$.

Recíprocamente, sea $\mathcal{C}$ una cubierta por compactos de $\mathcal{K}(X)$. Entonces para cada $C \in \mathcal{C}$, $\bigcup C$ es compacto. Sea $\mathcal{L} = \{\bigcup C\colon C \in \mathcal{C}\}$; afirmamos que $\mathcal{L}$ es un

[1] Para una prueba de este teorema véase A. S. KECHRIS [**1995**].

[2] Aquí, se esta considerando a $K(X)$ con la topología de Vietoris (véase por ejemplo el Problema 2.7.20 en R. ENGELKING [**1989**] para la definición de topología de Vietoris).

conjunto cofinal en $\mathcal{K}(X)$. En efecto, si $\emptyset \neq K \subseteq X$, entonces $K \in C$ para algún $C \in \mathcal{C}$; de donde, $K \subseteq \bigcup C$. □

Recordemos que para los cálculos de kc, k y cof, podemos restringirnos a los subconjuntos del conjunto de Cantor ${}^{\omega}2$, ya que cada subconjunto del cubo de Hilbert ${}^{\omega}\mathbb{I}$ que sea Π^1_n, Σ^1_n o Δ^1_n es la imagen perfecta de un subconjunto de ${}^{\omega}2$ de la misma clase.

3.17. LEMA. *Sea X un subconjunto del conjunto de Cantor ${}^{\omega}2$. Si $n \in \omega$, y X es Π^1_n, entonces también $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{K}({}^{\omega}2) \approx {}^{\omega}2$.*

DEMOSTRACIÓN. $\{\langle x, K\rangle : x \in K\}$ es cerrado en ${}^{\omega}2 \times \mathcal{K}({}^{\omega}2)$. Entonces $\{\langle x, K\rangle : x \in K\} \cap ({}^{\omega}2 \setminus X) \times \mathcal{K}({}^{\omega}2)$ es Σ^1_n, por lo que la proyección de $\{K \in \mathcal{K}({}^{\omega}2)\colon$ para alguna $x \in {}^{\omega}2 \setminus X,\ x \in K\}$ sobre $\mathcal{K}({}^{\omega}2)$ es también Σ^1_n. Pero el complemento de la proyección es justamente $\{K \in \mathcal{K}(X) \colon K \cap ({}^{\omega}2 \setminus X) = \emptyset\} = \mathcal{K}(X)$, por lo tanto $\mathcal{K}(X)$ es Π^1_n. □

3.18. TEOREMA (VAN ENGELEN [**1988**]). *Sea X cualquier conjunto Π^1_1. Entonces cof$(\mathcal{K}(X)) \leqslant \mathfrak{d}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por lo observado anteriormente, sea $X \subseteq {}^{\omega}2$. Por el Lema 3.17, $\mathcal{K}(X)$ es Π^1_1, y por la Proposición 3.16 $\operatorname{cof}(\mathcal{K}(X)) = \operatorname{kc}(\mathcal{K}(X))$. Ahora bien, N. LUZIN y W. SIERPIŃSKI en [**1918**] demostraron que un conjunto Π^1_1 es la unión de ω_1 conjuntos de Borel, así $\mathcal{K}(X) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B_\alpha$. Ahora, dado que B_α es la imagen continua de ${}^{\omega}\omega$, se tiene que $\operatorname{kc}(X) \leqslant \operatorname{kc}({}^{\omega}\omega) = \mathfrak{d}$; de modo que $\operatorname{kc}(\mathcal{K}(X)) \leqslant \mathfrak{d}\cdot\omega_1 = \mathfrak{d}$. □

3.19. COROLARIO. (a) *Sea X un espacio métrico separable absolutamente Borel pero no σ-compacto, entonces kc$(X) = k(X) =$ cof$(\mathcal{K}(X)) = \mathfrak{d}$.*

(b) *Sea X un espacio métrico separable co-analítico pero no localmente compacto, entonces cof$(\mathcal{K}(X)) = \mathfrak{d}$.*

DEMOSTRACIÓN. el inciso (a) se sigue inmediatamente del teorema anterior y de lo que se notó en 3.12, y el inciso (b) se sigue del teorema anterior asi como de la Afirmación 3.1 (c), Lemas 3.4 y 3.5. □

4. Cálculo de los Exponentes fuertes $\mathrm{Exp}_{\omega}(X)$ y $\mathrm{Exp}_{\mathbb{R}}(X)$, de algunos espacios ω-compactos y $\mathbb{R}$-compactos

Existen dos problemas naturalmente asociados al producto topológico:

(1) Dado un espacio E, encontrar todos los espacios que son homeomorfos a subespacios de potencias de E.
(2) Dado un espacio E, encontrar todos los espacios que son homeomorfos a subespacios cerrados de potencias de E.

El problema (1) fue resuelto por S. MRÓWKA en [**1956**] en el siguiente sentido.

4.1. TEOREMA (MRÓWKA [**1956**]). *Un espacio topológico X es homeomorfo a un subespacio de alguna potencia de E, si y sólo si, las siguientes dos condiciones se satisfacen:*

(a) *Para cualesquiera $p, q \in X$, $p \neq q$, existe una función continua $f\colon X \to E$ con $f(p) \neq f(q)$.*
(b) *Para cada subconjunto cerrado F de X y para cada $p \in X \setminus F$ existe un número finito n y una función continua $f\colon X \to {}^{n}E$ tal que $f(p) \notin \overline{f(F)}$.*

□

Para resolver el problema (2), el mismo S. MRÓWKA introduce en **[1958]** el concepto de espacio E-*compacto* y el de *exponente fuerte* relativo a E. Los cuales se definen a continuación.

4.2. Un espacio topológico X es llamado E-*compacto* si X es homeomorfo a un subespacio cerrado de ${}^\kappa E$ para algún cardinal κ. Al cardinal infinito κ más pequeño para el cual X es homeomorfo a un subespacio cerrado de ${}^\kappa E$ se le llama el *exponente fuerte* de X relativo a E y es denotado por $\mathrm{Exp}_E(X)$.

Ahora si nos restringimos al caso cuando $E = \omega$, tenemos ya un primer ejemplo de un espacio ω-compacto. En efecto, del Teorema 2.4 del Capítulo 1 se sigue que $\mathbb{P}$ es ω-compacto y $\mathrm{Exp}_\omega(\mathbb{P}) = \omega$. Por otro lado un espacio muy ligado a $\mathbb{P}$ es, sin duda, el espacio $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Por lo que es inmediato preguntarnos ¿es $\mathbb{Q}$ un espacio ω-compacto?; si la respuesta es afirmativa, ¿qué podemos decir de $\mathrm{Exp}_\omega(\mathbb{Q})$? Pues bien estas preguntas nos llevan al involucramiento de algunos cardinales pequeños no numerables en la estimación de exponentes.

Por otro lado, por el Teorema 2.7 del Capítulo 1 todo espacio métrico separable 0-dimensional es homeomorfo a un subespacio de $\mathbb{P}$. Así, es natural preguntarnos ¿bajo qué condiciones un subespacio de un espacio ω-compacto es también un espacio ω-compacto? Pues bien una condición suficiente es que el subespacio sea G_δ-*cerrado*.

4.3. Un subespacio S de un espacio topológico X es llamado G_δ-*cerrado* en X, si para cada $x \in X \setminus S$ existe un conjunto G_δ, G, tal que $x \in G$ y $G \cap S = \emptyset$.

4.4. LEMA. *Un subespacio G_δ-cerrado S de un espacio ω-compacto X es ω-compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $Y = X \setminus S$ y $y \in Y$. Dado que S es G_δ-cerrado en X y X es 0-dimensional, existe una sucesión decreciente $\langle U_n \colon \in \omega\rangle$ de conjuntos cerrados-y-abiertos tal que $y \in \bigcap_{n\in\omega} U_n \subset Y$. Haciendo $N_y = X \setminus \bigcap_{n\in\omega} U_n$, N_y es ω-compacto, ya que es homeomorfo al subespacio cerrado $\bigcup_{0<n<\omega}((U_{n-1} - U_n) \times \{n\})$ de $X \times \omega$, donde $U_0 = X$. Si elegimos tal subespacio N_y para cada $y \in Y$, entonces S es igual a $\bigcap_{y\in Y} N_y$, el cual es homeomorfo al subespacio cerrado

$$\{\, x \colon x_y = x_{y'} \text{ para cada } y, y' \in Y \,\}$$

de $\prod_{y\in Y} N_y$. Por lo tanto S es ω-compacto. □

4.5. OBSERVACIÓN. De la demostración anterior obtenemos también que:

$$\mathrm{Exp}_\omega(S) \leqslant |Y| \cdot \mathrm{Exp}_\omega(X) \leqslant |X| \cdot \mathrm{Exp}_\omega(X).$$

Del Teorema 2.7 del Capítulo 1 y el Lema 4.4 se tiene el siguiente teorema.

4.6. TEOREMA. *Si X es un espacio métrico separable 0-dimensional, entonces X es ω-compacto y $\omega \leqslant \mathrm{Exp}_\omega(X) \leqslant \mathfrak{c}$; y si además X no es completamente metrizable, entonces $\omega < \mathrm{Exp}_\omega(X) \leqslant \mathfrak{c}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 2.7 del Capítulo 1, podemos pensar a X como un subespacio de $\mathbb{P}$. Así, sea $Y = \mathbb{P} \setminus X$ y $y \in Y$. Ahora, para cada $x \in X$, existen abiertos U_x y V_x en $\mathbb{P}$ tales que $y \in U_x$, $x \in V_x$ y $U_x \cap V_x = \emptyset$; resulta que la familia $\{V_x \colon x \in X\}$ es una cubierta abierta de X. Ahora bien, X es de Lindelöf (ya que X es un espacio métrico separable), entonces $\{V_x \colon x \in X\}$ admite una subcubierta numerable $\{V_{x_n} : n \in \omega\}$. Sea $G = \bigcap_{n\in\omega} U_{x_n}$; G es un conjunto G_δ tal que $y \in G$ y $G \cap X = \emptyset$, *i.e.* X es G_δ-cerrado en $\mathbb{P}$. Así, aplicando el Lema 4.4, obtenemos que X es ω-compacto.

Por otro lado, la desigualdad $\omega \leqslant \mathrm{Exp}_\omega(X)$ es una consecuencia de la definición de $\mathrm{Exp}_\omega(X)$. Ahora, de la Observación 4.5 se tiene que

$$\mathrm{Exp}_\omega(X) \leqslant |\mathbb{P}| \cdot \mathrm{Exp}_\omega(\mathbb{P}) = \mathfrak{c} \cdot \omega = \mathfrak{c}.$$

Por lo tanto $\omega \leqslant \mathrm{Exp}_\omega(X) \leqslant \mathfrak{c}$.

Por último, si X no es completamente metrizable, $\mathrm{Exp}_\omega(X)$ no es ω (ya que los subespacios cerrados de un copletamente metrizable son completamente metrizables). Por consiguiente $\omega < \mathrm{Exp}_\omega(X) \leqslant \mathfrak{c}$. □

4.7. OBSERVACIÓN. Del hecho de que $\mathbb{Q}$ es un espacio métrico separable 0-dimensional que no es completamente metrizable, se sigue, del Teorema 4.6, que $\mathbb{Q}$ es ω-compacto y $\omega < \mathrm{Exp}_\omega(\mathbb{Q}) \leqslant \mathfrak{c}$.[3] Más aun, $\mathrm{Exp}_\omega(\mathbb{Q}) = \mathfrak{d}$,[4] como se verá en el Teorema 4.8 (c).

Pasemos ahora a calcular los exponentes fuertes $\mathrm{Exp}_\omega(X)$ y $\mathrm{Exp}_{\mathbb{R}}(X)$, para ciertos espacios métricos separables.

4.8. TEOREMA. *Sea X un espacio métrico separable. Entonces*

(a) *Si X es localmente compacto, entonces* $\mathrm{Exp}_{\mathbb{R}}(X) \leqslant \omega$.
(b) *Si X es completamente metrizable pero no localmente compacto, entonces* $\mathrm{Exp}_{\mathbb{R}}(X) = \omega$.
(c) *Si X es absolutamente Borel pero no completamente metrizable, entonces* $\mathrm{Exp}_{\mathbb{R}}(X) = \mathfrak{d}$.

4.9. TEOREMA. *Si X es un espacio métrico separable, entonces* $\mathrm{Exp}_\omega(X) = \mathrm{Exp}_{\mathbb{R}}(X)$ *si (y, trivialmente, sólo si) X es 0-dimensional.*

Para la demostración de estos dos últimos teoremas, necesitaremos de los siguientes tres lemas.

4.10. LEMA. *Sea X un espacio.*

(a) $\mathrm{Exp}_{\mathbb{R}}(X) + \omega = w(X) + \min\{\kappa\colon$ *X tiene una compactación bX tal que $bX \setminus X$ es cubierto por κ conjuntos G_δ-cerrados en bX*$\}$.
(b) *Si X es 0-dimensional, entonces* $\mathrm{Exp}_\omega(X) + \omega = w(X) + \min\{\kappa\colon$ *X tiene una compactación 0-dimensional bX tal que $bX \setminus X$ es cubierto por κ conjuntos G_δ-cerrados en bX*$\}$.

DEMOSTRACIÓN. Solo probaremos el inciso (a), ya que la prueba del inciso (b) es completamente similar. LLamemos μ al mínimo que aparece en el lado derecho de la igualdad. Sea $\omega\mathbb{R} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ la compactación de Alexandroff de $\mathbb{R}$.

Demostración de $\mathrm{Exp}_{\mathbb{R}}(X) \leqslant w(X) + \mu$. Sea bX una compactación de X como en la definición de μ. Ahora, existen conjuntos F_0 y F_1 de funciones continuas de $bX \to \omega\mathbb{R}$ con $|F_0| = w(X)$ y $|F_1| = \mu$ tales que

(1) $\forall x \in X\ [\{f^{-1}(-1,1)\colon x \in f^{-1}(-1,1) \text{ y } f \in F_0\}$ es una base de vecindades de x en $bX]$,
(2) $\forall f \in F_0\ [\mathrm{ran}(f) \subseteq [0,1]]$,
(3) $bX \setminus X = \cup\{f^{-1}(\{\infty\})\colon f \in F_1\}$.

[3] Esto último fue observado por primera vez por S. MRÓWKA en **[1958]**, págs. 184–185

[4] Esta igualdad fue obtenida por primera vez por S. H. HECHLER en **[1974]**, **[1975A]** y **[1975B]**.

(Para el inciso (3) usemos funciones de $bX \to [0,\infty]$.) Sea $F = F_0 \cup F_1$. Definimos el mapeo diagonal $\Delta\colon bX \to {}^F\omega\mathbb{R}$ como $\Delta(x)_f = f(x)$, para $x \in X$ y $f \in F$. Entonces por (1) $\Delta \restriction X$ es un encaje de X en ${}^F\omega\mathbb{R}$, y por (2) y (3) $\Delta(X) = {}^F\mathbb{R} \cap \Delta(bX)$. Esta ecuación implica que $\Delta(X)$ es cerrado en ${}^F\mathbb{R}$ ya que $\Delta(bX)$, por ser compacto, es cerrado en ${}^F\omega\mathbb{R}$. Finalmente, $\omega \leqslant w(X)$ ya que X es infinito.

Demostración de $w(X) + \mu \leqslant \mathrm{Exp}_\mathbb{R}(X)$. Podemos suponer que X es un subespacio cerrado de ${}^\kappa\mathbb{R}$ para algún κ. Claramente $w(X) \leqslant w({}^\kappa\mathbb{R}) = \kappa + \omega$. También, si bX denota la cerradura de X en ${}^\kappa\omega\mathbb{R}$, entonces bX es una compactación de X tal que

$$bX \setminus X \subseteq {}^\kappa\omega\mathbb{R} \setminus \mathbb{R} = \bigcup_{\eta\in\kappa} \{x \in {}^\kappa\omega\mathbb{R} \colon x_\eta = \infty\}$$

ya que X es cerrado en ${}^\kappa\mathbb{R}$. Dado que $\{x \in {}^\kappa\omega\mathbb{R} \colon x_\eta = \infty\}$ es claramente un conjunto G_δ-cerrado en ${}^\kappa\omega\mathbb{R}$, para $\eta \in \kappa$, se sigue entonces que $\mu \leqslant \kappa$. □

4.11. LEMA. *Sea X un espacio métrico separable (o, más en general, un espacio que tenga una compactación perfectamente normal) que no es localmente compacto. Entonces* $\mathrm{Exp}_\mathbb{R}(X) = \mathrm{kc}(bX \setminus X)$ *para cada compactación bX de X.*

DEMOSTRACIÓN. Si cX es cualquier compactación de X definimos

$$\mu_c = \min\{|\mathcal{G}| \colon \mathcal{G} \text{ es una familia de conjuntos } G_\delta\text{-cerrados en } bX$$
$$\text{con } \bigcup \mathcal{G} = bX \setminus X\},$$

y definimos

$$\mu = \min\{\mu_c \colon cX \text{ es una compactación de } X\}.$$

Dado que X no es localmente compacto, obtenemos que $\mathrm{Exp}_\mathbb{R}(X) \geqslant \omega$ y $\mu \geqslant \omega$. Ahora, por el Lema 4.10 (a) resta probar que $\mu = \mathrm{kc}(bX \setminus X)$.

Si cX es cualquier compactación de X, f_c denotará el (único) mapeo continuo de βX en cX que extiende a id_X. Como es bien conocido, $f_c \restriction \beta X \setminus X$ es un mapeo de $\beta X \setminus X$ en $cX \setminus X$ que es perfecto. Usando esto y el Lema 3.10 notemos que

$$\mu_\beta \leqslant \mu_c, \text{ por lo que } \mu = \mu_\beta; \quad \text{y} \quad \mathrm{kc}(cX \setminus X) = \mathrm{kc}(\beta X \setminus X).$$

Entonces probamos que $\mu = \mathrm{kc}(bX \setminus X)$ si probamos que $\mu_\beta = \mathrm{kc}(\beta X \setminus X)$.

Claramente, si cX es cualquier compactación de X, entonces $\mathrm{kc}(cX \setminus X) \leqslant \mu_c$, y $\mathrm{kc}(cX \setminus X) = \mu_c$ si cX es perfectamente normal. Dado que X tiene una compactación perfectamente normal cX notemos que

$$\mathrm{kc}(\beta X \setminus X) \leqslant \mu_\beta \leqslant \mu_c = \mathrm{kc}(cX \setminus X) = \mathrm{kc}(\beta X \setminus X).$$

Esto prueba que $\mu_\beta = \mathrm{kc}(\beta X \setminus X)$.

observación. Si X es un espacio métrico separable, entonces $\mu_c = \mu$ para cada compactación cX de X. □

4.12. LEMA. *Sea X un espacio fuertemente 0-dimensional, i.e. βX es 0-dimensional. Entonces* $\mathrm{Exp}_\omega(X) = \mathrm{Exp}_\mathbb{R}(X)$ *si X no es localmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Si μ_c es definido como anteriormente, encontramos que

$$\mu_\beta = \min\{\mu_c \colon cX \text{es una compactación 0-dimensional de } X\}.$$

El resultado se sigue ahora del Lema 4.10 (b). □

4.13. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.8. *Demostración de* (a). Usemos simplemente el Lema 4.10.

Demostración de (b) *y* (c). Sea bX cualquier compactación métrica de X. Entonces por el Lema 4.11 $\mathrm{Exp}_{\mathbb{R}}(X) = \mathrm{kc}(bX \setminus X)$, y por supuesto $bX \setminus X$ es absolutamente Borel, luego entonces el resultado se sigue del Teorema 3.11.

Observación. Los argumentos prueban realmente que es suficiente con que X sea co-analítico, *i.e.* $bX \setminus X$ es analítico para alguna (o, equivalentemente, para cada) compactación de X. □

4.14. Demostración del Teorema 4.10. Los espacios Lindelöf 0-dimensionales son fuertemente 0-dimensionales (véase por ejemplo el Teorema 6.2.7 en R. Engelking [**1989**]). Ahora usemos simplemente el Lema 4.12. □

4.15. Observación. Por último nos gustaría señalar que el Teorema 4.6 tiene en cierto sentido un inverso, *i.e.* para cada cardinal κ con $\omega \leqslant \kappa \leqslant \mathfrak{c}$, existe X espacio métrico separable 0-dimensional tal que $\mathrm{Exp}_{\mathbb{R}}(X) = \kappa$. Esto lo podemos garantizar ya que $\mathbb{I}$ tiene un subconjunto denso B con $|B| = \mathfrak{c}$ en el que cada subconjunto compacto es contable.

CAPíTULO 4

La influencia de algunos cardinales pequeños no numerables en el producto de un espacio Lindelöf con los irracionales

1. Introducción

Con varios problemas en topología, no es inmediato ver si están involucrados ó no algunos cardinales pequeños no numerables. Como ejemplo de esto, en este capítulo nos dedicaremos en mostrar la influencia de algunos cardinales pequeños no numerables en un viejo problema formulado por E. A. MICHAEL en [**1963**]: ¿existe un espacio Lindelöf cuyo producto con el espacio de los números irracionales no sea normal? Para ello, empecemos por situar a nuestra pregunta en el también viejo problema de la normalidad en el producto topológico.

El producto de espacios Hausdorff, regulares o completamente regulares es siempre Hausdorff, regular o completamente regular, respectivamente. Sin embargo, el producto de espacios *normales, paracompactos o Lindelöf's* no siempre es normal, paracompacto o Lindelöf, respectivamente.

1.1. EJEMPLO (SORGENFREY [**1947**]). *El cuadrado de un espacio Lindelöf no necesariamente es normal: el cuadrado de la línea de Sorgenfrey no es normal.*

Para la demostración de esto, necesitaremos del siguiente resultado.

1.2. LEMMA (JONES [**1937**]). *Si un espacio normal separable X contiene un subespacio cerrado discreto F de cardinalidad κ, entonces $2^\kappa \leqslant 2^\omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Para cada subconjunto K de F debe existir un conjunto abierto U_K tal que $K \subset U_K$ y $\overline{U}_K \cap (F \setminus K) = \emptyset$. Dado que X es separable, la cantidad de subconjuntos abiertos diferentes de X es $\mathfrak{c}$, lo cual claramente implica que $2^\kappa \leqslant 2^\omega$. □

DEMOSTRACIÓN DEL EJEMPLO 1.1. La línea de Sorgenfrey S es la recta real $\mathbb{R}$ con la topología generada por los intervalos semi–abiertos de la forma $[a, b)$, donde $a < b$. El espacio S es hereditariamente Lindelöf: en efecto, si $\{[a_s, b_s)\}_{s\in S}$ es una familia de intervalos semi–abiertos, entonces podemos encontrar un subconjunto contable $S_0 \subset S$ tal que $\bigcup\{(a_s, b_s) \colon s \in S\} = \bigcup\{(a_s, b_s) \colon s \in S_0\}$ y esto se reduce tan sólo en observar en que el conjunto

$$\bigcup\{[a_s, b_s) \colon s \in S\} \setminus \{(a_s, b_s) \colon s \in S\}$$

es numerable. También, notemos que la menos–diagonal $\nabla = \{\langle x, -x\rangle \colon s \in S\}$ es un subconjunto cerrado discreto de S^2.

La no–normalidad de S^2 se puede probar de dos maneras distintas, aplicando el Lema 1.2 de Jones o el Teorema de Categorías de Baire.

(A) *Aplicando el Lema de Jones.* El espacio S^2 es separable y contiene un subconjunto cerrado discreto de cardinalidad $\mathfrak{c}$, por lo que este no puede ser normal.

(B) *Aplicando el Teorema de Categorías de Baire.* Sea $K_0 = \{\langle q, -q\rangle : q \in \mathbb{Q}\}$ y $K_1 = \{\langle p, -p\rangle : p \in \mathbb{P}\}$. Los conjuntos K_0 y K_1 son subconjuntos cerrados ajenos de S^2. Supongamos que U_0 y U_1 son subconjuntos abiertos ajenos de S^2 tales que $K_i \subset U_i$, $i = 0, 1$. Para cada $p \in \mathbb{P}$ elegimos una $\epsilon(p) > 0$ tal que

$$[p, p + \epsilon(p)) \times [-p, -p + \epsilon(p)) \subset U_1,$$

y sea $P_n = \{p \in \mathbb{P}: \epsilon(P) \geqslant 1/n\}$. Claramente, $\mathbb{P} = \bigcup_{n\in\omega} P_n$ y dado que $\mathbb{P}$ no es subconjunto F_σ de $\mathbb{R}$, existe una n y una $q \in \mathbb{Q}$ tal que q está en la cerradura euclideana del conjunto P_n. Uno verifica fácilmente que el punto $\langle q, -q\rangle$ está en la cerradura de U_1 en S^2 y por lo tanto U_0 y U_1 no son ajenos. □

Observemos que en realidad el argumento de categoría exhibe una pareja de conjuntos cerrados ajenos que no pueden separarse, mientras que el Lema de Jones sólo asegura la existencia de estos.

El producto de espacios compactos es por supuesto compacto y por lo tanto normal, pero el producto de un espacio normal con un espacio compacto no necesariamente es normal.

1.3. Ejemplo (Dieudonné [**1939**]). *El producto de un espacio normal con un espacio compacto no necesariamente es normal: el espacio $\omega_1 \times \overline{\omega}_1$ no es normal.*

Demostración. Sean $K_0 = \{\langle \alpha, \alpha\rangle : \alpha < \omega_1\}$ y $K_1 = \{\langle \alpha, \omega_1\rangle : \alpha < \omega_1\}$. Los conjuntos K_0 y K_1 son conjuntos cerrados y ajenos en $\omega_1 \times \overline{\omega}_1$. Supongamos que U_0 y U_1 son subconjuntos abiertos de $\omega_1 \times \overline{\omega}_1$ tales que $K_i \subset U_i$ para $i = 0, 1$. Para cada $\alpha < \omega_1$ existe una $f(\alpha) < \alpha$ tal que $(f(\alpha), \alpha] \times (f(\alpha), \alpha] \subset U_0$ y por lo tanto por el Lema de Fodor (véase por ejemplo el Lema 6.15 del Capítulo II en K. Kunen [**1980**]) existe una $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $f(\alpha) = \alpha_0$ para un conjunto no numerable de α's en ω_1. Se verifica fácilmente que el punto $\langle \alpha_0 + 1, \omega_1\rangle$ pertenece a la cerradura de U_0 y dado que este punto también pertenece a K_1, los conjuntos U_0 y U_1 no son ajenos. □

Esencialmente, la misma demostración prueba que el espacio $\kappa \times \overline{\kappa}$ no es normal para cualquier cardinal κ de cofinalidad no numerable.

El producto contable de espacios métricos es por supuesto métrico y por lo tanto normal, pero el producto de un espacio métrico con un espacio normal puede no ser normal.

1.4. Ejemplo (Michael [**1963**]). *El producto de un espacio normal con un espacio métrico puede no ser normal:*

(1) *Existe un espacio paracompacto X tal que el producto $X \times \mathbb{P}$ de X con el espacio de los números irracionales $\mathbb{P}$ no es normal.*

(2) *Existe un espacio Lindelöf X y un espacio métrico M tal que el producto $X \times M$ no es normal.*

Demostración. (1) Sea X la recta real $\mathbb{R}$ con una nueva topología generada por la base $\mathcal{B} = \{U : U$ es un abierto en $\mathbb{R}$ o U es un subconjunto de $\mathbb{P}\}$. Este espacio es conocido como la *línea de Michael* (la cual es denotada frecuentemente por $\mathbb{M}$). Observemos primero que el espacio X es paracompacto. En efecto, si $\mathcal{U}$ es una cubierta de X por conjuntos abiertos básicos y $\mathcal{V}$ es la subfamilia de $\mathcal{U}$ formada por todos los conjuntos abiertos euclideanos, entonces podemos elegir un subconjunto contable $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$ tal que $\bigcup\mathcal{V} = \bigcup\mathcal{V}_0$, y observemos que $F = X \setminus \bigcup\mathcal{V}$ es un subconjunto cerrado-y-abierto discreto de X.

Es fácil ver que los conjuntos $K_0 = \mathbb{Q}\times\mathbb{P}$ y $K_1 = \{\langle p,p\rangle : p \in \mathbb{P}\}$ son cerrados y ajenos en $X\times\mathbb{P}$. Supongamos que U_0 y U_1 son conjuntos abiertos ajenos en $X\times\mathbb{P}$ tales que $K_i \subset U_i$ para $i = 0, 1$. Tomamos un subconjunto denso numerable T de $\mathbb{P}$. Para cada $p \in \mathbb{P}$ existe un punto $t(p) \in T$ tal que $\langle p, t(p)\rangle \in U_1$. Definimos $P_t = \{p \in \mathbb{P}: t(p) = t\}$ para $t \in T$. Dado que $\mathbb{P} = \bigcup_{t\in T} P_t$ y $\mathbb{P}$ no es subconjunto F_σ de $\mathbb{R}$, existe un racional q y una $t \in T$ tales que q pertenece a la cerradura euclideana de P_t. Se verifica fácilmente que el punto $\langle q, t\rangle$ pertenece a la cerradura de U_1 y dado que este punto también pertenece a K_0, los conjuntos U_0 y U_1 no son ajenos.

(2) Esta parte es similar a la parte (1) excepto que en lugar de usar $\mathbb{P}$ usamos un subconjunto *totalmente imperfecto* P' de la recta real, *i.e.* un subconjunto tal que ningún subconjunto cerrado no numerable de la recta real está contenido en P' ni en $\mathbb{R}\setminus P'$.[1] El espacio X es la recta real con la toplogía generada por la base $\mathcal{B}' = \{U : U$ es abierto en $\mathbb{R}$ o U está contenido en $P'\}$ y M es el subespacio P' de la recta real.

La demostración de que $X \times M$ no es normal es completamente análoga a la demostración de que $\mathbb{M}\times\mathbb{P}$ no es normal (por supuesto, P' debe ser no numerable, y por lo tanto no es F_σ en $\mathbb{R}$). Para ver que el espacio X es Lindelöf observemos que en el argumento dado arriba, el conjunto $F = X \setminus \bigcup\mathcal{V}$ es un subconjunto cerrado de P' y por lo tanto debe ser numerable. □

Quizá el ejemplo más sorprendente de un producto de espacios que no es normal es el siguiente ejemplo famoso dado por M. E. Rudin.

1.5*. EJEMPLO (RUDIN [**1971**]). *El producto de un espacio normal con un espacio métrico compacto no necesariamente es normal: existe un espacio normal X tal que su producto con el intervalo unitario $X\times\mathbb{I}$ no es normal.* □

De hecho el Ejemplo 1.5 se puede generalizar.

1.6. EJEMPLO (RUDIN [**1975**], ATSUJI [**1977**]). *Para cada espacio no discreto Y existe un espacio normal X tal que $X\times Y$ no es normal.* □

A los espacios cuyo producto con el intervalo unitario no es normal son llamados *espacios de Dowker.*

El espacio métrico M del Ejemplo 1.4 no es completo; usando **CH**, E. A. Michael construyó un espacio Lindelöf X tal que $X\times\mathbb{P}$ no es normal (véase problema 7 en E. A. MICHAEL [**1971**]).

1.7. Definimos un *espacio de Michael* como un espacio Lindelöf cuyo producto con el espacio de los números irracionales no es normal.

Así, bajo **CH** existe un espacio de Michael. Sin embargo, como veremos en la Sección 3 no es necesario todo **CH**, bajo $\mathfrak{b} = \omega_1$ existe un espacio de Michael. Cabe mencionar que ya en [**1984**] D. K. BURKE y S. DAVIS habían construido un espacio de Michael usando una ω_1-escala (equivalentemente, $\mathfrak{d} = \omega_1$). Sin embargo, $\mathfrak{d} = \omega_1$ es más débil que $\mathfrak{b} = \omega_1$, *i.e.* si $\mathfrak{d} = \omega_1$ entonces $\mathfrak{b} = \omega_1$ (ya que $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{d}$), pero es consistente con **ZFC** que $\mathfrak{b} = \omega_1 < \mathfrak{d}$. Por ejemplo, en el modelo original de P.

[1] A estos subconjuntos también se les conoce como conjuntos de Bernstein

J. COHEN [**1963**] para probar la consistencia de **ZFC** con la negación de **CH**, se tiene que $\mathfrak{b} = \omega_1$ y que $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$.

Para ver que $\mathfrak{b} = \omega_1$ es suficiente para la existencia de un espacio de Michael, necesitaremos de algunas relaciones entre el cardinal $\mathfrak{b}$ y algunos subconjuntos especiales de la recta real. Estas relaciones las encontraremos en nuestra siguiente sección.

2. λ, λ' y σ-conjuntos, y el cardinal $\mathfrak{b}$

Un espacio X es llamado un λ-*conjunto* si cada subconjunto contable de X es un conjunto G_δ, y es llamado un σ-*conjunto* si cada subconjunto F_σ de X es un G_δ. Es claro que cada σ-conjunto es un λ-conjunto, y que cada σ-conjunto es *perfecto* (= los conjuntos cerrados son G_δ's), mientras que cada λ-conjunto satisface $\psi(X) \leqslant \omega$ (*i.e.* los puntos son G_δ's). Un subconjunto X de $\mathbb{R}$ es llamado λ'-*conjunto* si para cada conjunto contable $A \subset \mathbb{R}$, el subespacio $X \cup A$ de $\mathbb{R}$ es un λ-conjunto.

Recordemos que $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ representan a los números irracionales y a los números racionales respectivamente, y que $\mathbb{P}$ lo podemos identificar con la potencia ${}^\omega\omega$.

2.1. TEOREMA (ROTHBERGER [**1939B**] y [**1941**]). $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{\sigma c} = \mathfrak{b}_\lambda = \mathfrak{b}'_\lambda = \mathfrak{b}_{\lambda'} = \mathfrak{b}_\sigma = \mathfrak{b}'_\sigma = \mathfrak{b}_G$, *donde*

$$\mathfrak{b}_{\sigma c} = \text{mín}\{|A|\colon A \subseteq \mathbb{P},\ \textit{y existe } S \subseteq \mathbb{P} \textit{ no } \sigma\textit{-compacto con } A \subseteq S\},$$
$$\mathfrak{b}_\lambda = \text{mín}\{|X|\colon X \textit{ es un espacio métrico separable que no es un } \lambda\textit{-conjunto}\},$$
$$\mathfrak{b}'_\lambda = \text{mín}\{|X|\colon \psi(X) = \omega \textit{ pero } X \textit{ no es un } \lambda\textit{-conjunto}\},$$
$$\mathfrak{b}_{\lambda'} = \text{mín}\{|X|\colon X \subseteq \mathbb{R} \textit{ es un } \lambda\textit{-conjunto pero no un } \lambda'\textit{-conjunto}\},$$
$$\mathfrak{b}_\sigma = \text{mín}\{|X|\colon X \textit{ es un espacio métrico separable que no es un } \sigma\textit{-conjunto}\},$$
$$\mathfrak{b}'_\sigma = \text{mín}\{|X|\colon X \textit{ es perfecto pero no es un } \sigma\textit{-conjunto}\},$$
$$\mathfrak{b}_G = \text{mín}\{|X|\colon \textit{existe una colección contable } \mathcal{G} \textit{ de subconjuntos } G_\delta \textit{ de } X \textit{ tal que } \textstyle\bigcup\mathcal{G} \textit{ no es un subconjunto } G_\delta \textit{ de } X\}.$$

2.2. COROLARIO. *Existe un subespacio de* $\mathbb{R}$ *que es un* λ-*conjunto pero no es un* λ'-*conjunto.* □

Para la demostración del Teorema 2.1 necesitaremos lo siguiente.

2.3. LEMA (ROTHBERGER [**1939B**]). *Las siguientes condiciones sobre* $B \subseteq \mathbb{P}$ *son equivalentes:*

(a) B, *cuando lo vemos como un subconjunto de* ${}^\omega\omega$, *está acotado;*
(b) *existe un* σ-*compacto* $S \subseteq {}^\omega\omega$ *con* $B \subseteq S$;
(c) $\mathbb{Q}$ *es un* G_δ *en el subespacio* $B \cup \mathbb{Q}$ *de* $\mathbb{R}$.

DEMOSTRACIÓN. (a) $\Rightarrow$ (b). Si $\forall f \in B\ [f \leqslant^* g]$ definimos un conjunto contable $H \subseteq {}^\omega\omega$ como

$$H = \{h \in {}^\omega\omega\colon h(n) = g(n) \text{ para todo } n \in \omega \text{ salvo una cantidad finita}\}.$$

Entonces $\forall f \in B\ \exists h \in H\ [f \leqslant h]$. Por lo tanto $S = \bigcup_{h\in H} \prod_{n\in\omega}[0, h_n]$ es el espacio requerido.

(b) $\Rightarrow$ (a). Recordemos que de la demostración del Teorema 3.2 del Capítulo 3, para cada compacto $K \subseteq \mathbb{P}$ existe una $g \in {}^\omega\omega$ tal que $K \subseteq \prod_{n\in\omega}[0, g_n]$. Por lo tanto existe un conjunto contable $G \subseteq {}^\omega\omega$ tal que $\forall f \in B\ \exists g \in G\ [f \leqslant g]$. Como G es acotado, por ser contable, se sigue que B es acotado también.

(b) $\Leftrightarrow$ (c). Dado que un subconjunto de $\mathbb{R}$ es un F_σ de $\mathbb{R}$ si y sólo si este es σ-compacto, se tiene que: (b) $\Leftrightarrow$ B es un F_σ en $B \cup \mathbb{Q}$ $\Leftrightarrow$ existe un F_σ S en $\mathbb{R}$ con $S \cap (B \cup \mathbb{Q}) = B$ $\Leftrightarrow$ existe un σ-compacto S en $\mathbb{R}$ con $B \subseteq S$ y $S \cap \mathbb{Q} = \emptyset$ $\Leftrightarrow$ (c).$\square$

2.4. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.1. Del Lema 2.3 observemos que $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{\sigma c} \geqslant \mathfrak{b}_\lambda$. Es claro que $\mathfrak{b}_{\lambda'} \geqslant \mathfrak{b}_\lambda \geqslant \mathfrak{b}'_\lambda \geqslant \mathfrak{b}_{\mathrm{G}}$ y que $\mathfrak{b}_\lambda \geqslant \mathfrak{b}_\sigma \geqslant \mathfrak{b}'_\sigma \geqslant \mathfrak{b}_{\mathrm{G}}$. Por lo que es suficiente con probar que $\mathfrak{b}_{\mathrm{G}} \geqslant \mathfrak{b}$ y que $\mathfrak{b} \geqslant \mathfrak{b}_{\lambda'}$.

Demostración de $\mathfrak{b}_{\mathrm{G}} \geqslant \mathfrak{b}$. Para $k \in \omega$ sea G_k un subconjunto G_δ de un espacio X. Probemos que si $G = \bigcup_{k\in\omega} G_k$ y $|X \setminus G| < \mathfrak{b}$, entonces G es un subconjunto G_δ de X. Para $k \in \omega$ elegimos una sucesión $\langle G_{k,n} \colon n \in \omega \rangle$ de subconjuntos abiertos de X tal que

(1) $\bigcap_{n\in\omega} G_{k,n} = G_k$, y
(2) $\forall\, n \in \omega\ [G_{k,n} \supseteq G_{k,n+1}]$.

Para cada $f \in {}^\omega\omega$ definimos $U(f) = \bigcup_{k\in\omega} G_{k,f(k)}$. Es claro de (1) que para cada $y \in X \setminus G$ podemos elegir $f_y \in {}^\omega\omega$ tal que $y \notin U(f_y)$. Dado que $|X \setminus G| < \mathfrak{b}$, existe $g \in {}^\omega\omega$ tal que $\forall\, y \in X \setminus G\ [f_y \leqslant^* g]$. Definimos un conjunto contable $H \subseteq {}^\omega\omega$ como

$$H = \{h \in {}^\omega\omega \colon h(n) = g(n) \text{ para todo } n \in \omega \text{ salvo una cantidad finita}\}.$$

Para cada $y \in X \setminus G$ existe $h \in H$ con $f_y \leqslant h$, y por (2) $y \notin U(h)$. Por lo tanto $G = \bigcap_{h\in H} U(h)$.

Demostración de $\mathfrak{b} \geqslant \mathfrak{b}_{\lambda'}$. Dado que $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1$, por el Teorema 2.2 del Capítulo 3, existe un conjunto no acotado $X \subseteq {}^\omega\omega$ formado por funciones estrictamente crecientes que es bien-ordenado por $<^*$ con $|X| = \mathfrak{b}$. Esta X, cuando la vemos como un subconjunto de $\mathbb{P}$, por consiguiente de $\mathbb{R}$, no es un λ'-conjunto, por el Lema 4.3. Probemos que esta X es un λ-conjunto. Para $g \in X$ definimos $X_g = \{f \in X \colon f <^* g\}$. Dado que $<^*$ es un buen-orden para X, y $\mathfrak{b}$ es un cardinal regular no numerable, se tiene que

$$\forall\, A \in [X]^\omega\ \exists\, g \in X\ [A \subseteq X_g].$$

Y como hasta el momento conocemos que $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{b}_{\mathrm{G}} \leqslant \mathfrak{b}_\lambda$, también se tiene que

$$\forall\, g \in X\ [X_g \text{ es un } \lambda\text{-conjunto}]$$

Así, para probar que X es un λ-conjunto es suficiente con probar que $\forall\, g \in X\ [X_g$ es un G_δ en $X]$. Por tanto consideremos cualquier $g \in X$; entonces

$$\begin{aligned} X_g = \{f \in X \colon f <^* g\} &= X \setminus \{f \in {}^\omega\omega \colon g \leqslant^* f\} \\ &= X \setminus \{f \in {}^\omega\omega \colon \exists\, k \in \omega\ \forall\, n > k\ [f(n) \geqslant g(k)]\} \\ &= X \setminus \bigcup_{n\in\omega} \bigcap_{k \geqslant n} \{f \in {}^\omega\omega \colon f(n) \geqslant g(k)\} \end{aligned}$$

ya que $<^*$ es un orden lineal en X. Esto demuestra entonces que $X \setminus X_g$ es un $F_{\delta\sigma}$, *i.e.* un F_σ. $\square$

3. Propiedades cubrientes y la línea de Michael

Recordemos que la línea de Michael $\mathbb{M}$ es el conjunto $\mathbb{R}$ con la topología generada por la base

$$\{U \subseteq \mathbb{M} \colon U \text{ es abierto en } \mathbb{R}\} \cup \{\{x\} \colon x \in \mathbb{P}\}.$$

Un espacio es llamado *κ-compacto* si este no tiene subconjuntos cerrados discretos de cardinalidad κ. Recordemos que un espacio es llamado analítico si este es imagen continua de $\mathbb{P}$, y que todos los espacios métricos separables absolutamente Borel son analíticos.

3.1. TEOREMA (VAN DOUWEN [**1976**]). $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{\mathrm{p}} = \mathfrak{b}_{\mathrm{a}}$, *donde*

$$\mathfrak{b}_{\mathrm{p}} = \text{mín}\{\kappa\colon \text{cf}(\kappa) \geqslant \omega_1 \textit{ y existe un espacio } \kappa\textit{-compacto cuyo producto con } \mathbb{P} \textit{ no es } \kappa\textit{-compacto}\}$$

$$\mathfrak{b}_{\mathrm{a}} = \text{mín}\{\kappa\colon \text{cf}(\kappa) \geqslant \omega_1 \textit{ y existe un espacio } \kappa\textit{-compacto y un espacio analítico cuyo producto no es } \kappa\textit{-compacto}\}.$$

DEMOSTRACIÓN. *Demostración de* $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{b}_{\mathrm{p}}$. Consideremos κ con $\text{cof}(\kappa) \geqslant \omega_1$ y $\kappa < \mathfrak{b}$, y un espacio X κ-compacto y cualquier $A \in [X \times \mathbb{P}]^{\kappa}$. Sea π_2 la proyección $X \times \mathbb{P} \to \mathbb{P}$. Como $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{\sigma c}$, por el Teorema 2.1, existe un conjunto σ-compacto $S \subseteq \mathbb{P}$ con $\pi_2(A) \subseteq S$. Dado que $\text{cof}(|A|) > \omega$ se sigue entonces que existe un $B \in [A]^{\kappa}$ tal que $\overline{\pi_2(B)}$ es compacto. Ahora, no es difícil probar que el producto de un espacio κ-compacto con un espacio compacto es κ-compacto. De esto se sigue que A no es conjunto cerrado discreto en $X \times \mathbb{P}$ ya que su subconjunto B no es cerrado discreto en $X \times \overline{\pi_2(B)}$.

Demostración de $\mathfrak{b}_{\mathrm{p}} \leqslant \mathfrak{b}_{\mathrm{a}}$. La κ-compacidad se preserva bajo mapeos continuos.

Demostración de $\mathfrak{b}_{\mathrm{a}} \leqslant \mathfrak{b}_{\mathrm{p}}$. $\mathbb{P}$ es analítico.

Demostración de $\mathfrak{b}_{\mathrm{p}} \leqslant \mathfrak{b}$. Consideremos cualquier conjunto no acotado $B \subseteq {}^{\omega}\omega$ formado por funciones estrictamente crecientes tal que sea bien-ordenado por $<^*$ con $|B| = \mathfrak{b}$. Entonces $\forall\, A \subseteq B\ [|A| = \mathfrak{b} \Rightarrow A$ es no acotada$]$. Sea X igual a $B \cup \mathbb{Q}$, donde esta última unión la vemos como un subespacio de la línea de Michael $\mathbb{M}$.

Probemos que X es $\mathfrak{b}$-compacto: Consideremos cualquier $A \subseteq X$ con $|A| = \mathfrak{b}$. Dado que $\mathfrak{b} > \omega$ podemos suponer que $A \subseteq B$. Entonces A es no acotada, por consiguiente A no es un F_σ en el subespacio $A \cup \mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$, por el Lema 2.3. Claramente cada racional está en la $\mathbb{M}$-cerradura de A si (y sólo si) esta en la $\mathbb{R}$-cerradura de A. Por lo tanto A no es un cerrado discreto en X.

Probemos que $X \times \mathbb{P}$ no es $\mathfrak{b}$-compacto: Es claro que el conjunto $D = \{\langle x, x\rangle\colon x \in B\}$ es un discreto relativo. Ahora consideremos $\Delta = \{\langle x, x\rangle\colon x \in \mathbb{R}\}$. Este conjunto es cerrado en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, luego entonces en $\mathbb{M} \times \mathbb{R}$. Evidentemente $\Delta \cap X \times \mathbb{P} = D$ ya que $X \cap \mathbb{P} = B$. De esto se sigue que D es cerrado discreto. Y por supuesto $|D| = |B| = \mathfrak{b}$. $\square$

Para nuestro siguiente resultado necesitaremos de una terminología. Un espacio X es llamado *concentrado alrededor de* $A \subseteq X$ si cada vecindad de A contiene a todos los puntos de X salvo una cantidad contable, y es llamado *concentrado* si es concentrado alrededor de algún conjunto contable. Como es usual, si X es un espacio entonces X' denota el conjunto de puntos de acumulación.

3.2. TEOREMA (BESICOVITCH [**1934**], MICHAEL [**1971**], BELL y GINSBURG [**1980**]). *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $\mathfrak{b} = \omega_1$;
(b) *existe un subespacio* $X \subseteq \mathbb{R}$ *no numerable con* $\mathbb{Q} \subseteq X$ *tal que* X *está concentrado alrededor de* $\mathbb{Q}$;
(c) $\mathbb{M}$ *tiene un subespacio Lindelöf no numerable*;
(d) *exsite un espacio* X *concentrado no numerable con* $\psi(X) = \omega$; *y*

(e) *existe un espacio X Lindelöf no numerable con $\psi(X) = \omega$ tal que $|X'| = \omega$.*

DEMOSTRACIÓN. (a) $\Rightarrow$ (b). Consideremos un conjunto no acotado $B \subseteq {}^{\omega}\omega$ formado por funciones estrictamente crecientes tal que sea bien-ordenado por $<^*$ con $|B| = \omega_1$. Si $A \subseteq B$ y A es no numerable, entonces A es no acotada, por consiguiente A no es un F_σ en el subespacio $A \cup \mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$, por el Lema 2.3. Esto es, $B \cup \mathbb{Q}$ está concentrado alrededor de $\mathbb{Q}$.

(b) $\Rightarrow$ (c). Es fácil ver que el espacio X proporcionado por (b) es Lindelöf.

Es claro que (c) $\Rightarrow$ (e).

(e) $\Rightarrow$ (d). Es claro que X está concentrado alrededor de X'.

(d) $\Rightarrow$ (e). Sea $A \subseteq X$ tal que A sea contable y X esté concentrado alrededor de A. $|A \cap X'| = \omega$ ya que de lo contrario A sería un conjunto G_δ, y entonces $|X| \leqslant \omega$. Sea X_A el conjunto X con la topología generada por la base

$$\{U \subseteq X_A \colon U \text{ es abierto en } X\} \cup \{\{x\} \colon x \in X' \setminus A\}.$$

Entonces X_A esta concentrado alrededor de $A \cap X' = X'_A$, luego entonces X_A es Lindelöf, $|X'_A| = \omega$ y $\psi(X_A) = \omega$.

(e) $\Rightarrow$ (b). Primero mostremos que cada espacio contable Y admite una inyección continua sobre $\mathbb{Q}$. En efecto, si Y es finito el resultado es inmediato, así que podemos suponer que Y es numerable, sea $y \colon \omega \to Y$ una biyección. Dado que Y es 0-dimensional (véase por ejemplo el Corolario 6.2.8 en R. ENGELKING [**1989**]) podemos encontrar fácilmente funciones continuas $f_n \colon Y \to \mathbb{R}$ para $n \in \omega$ tales que

$$\sum_{k \leqslant n} f_k(y_n) \in \mathbb{Q} \setminus \left\{ \sum_{k \leqslant i} f_k(y_i) \colon i \in n \right\},$$

$\forall i \in n\ [f_n(y_i) = 0]$, y $\|f_n\| \leqslant 2^{-n}$. Entonces $\sum_{n \in \omega} f_n$ es una inyección continua $Y \to \mathbb{Q}$. (De hecho si Y es numerable existe una suprayección continua.)

Por otro lado, como X es normal, por ser Lindelöf, se sigue del Teorema de Extención de Tietze–Urysohn (véase por ejemplo el Teorema 2.1.8 en R. ENGELKING [**1989**]) que existe una función continua $f \colon X \to \mathbb{R}$ tal que $f \restriction X'$ es una inyección de X' en $\mathbb{Q}$. Esto prueba claramente que $f(X)$ está concentrado alrededor de $\mathbb{Q}$, de hecho, alrededor de $f(X')$. Para probar que $f(X)$ es no numerable, es suficiente con probar que f es contable-a-uno. Así, consideremos cualquier $y \in \mathbb{R}$. Entonces $f^{-1}(\{y\})$ es Lindelöf, por ser un cerrado en X, entonces tiene a lo más una cantidad contable de puntos aislados, y a lo más un punto de acumulación. Por lo que $|f^{-1}(\{y\})| \leqslant \omega$.

(b) $\Rightarrow$ (a). Consideremos cualquier $B \subseteq X \setminus \mathbb{Q}$ no numerable. Afirmamos que B es no acotado, cuando lo vemos como subconjunto de ${}^{\omega}\omega$. En efecto, si no, entonces B es un subconjunto F_σ del subespacio $B \cup \mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$. Como B es no numerable, se sigue entonces que $B \cup \mathbb{Q}$ tiene un subconjunto cerrado no numerable el cual es ajeno a $\mathbb{Q}$. Esto contradice el hecho de que X está concentrado alrededor de $\mathbb{Q}$. □

3.3. COROLARIO DE LA DEMOSTRACIÓN. *Sea* $(\mathrm{a})_\kappa$ *la siguiente afirmación: existe un miembro B_κ de $[{}^{\omega}\omega]^\kappa$ tal que cada subconjnto no numerable de B_κ es no acotado. Para $i \in \{\mathrm{b,c,d,e}\}$ sea $(i)_\kappa$ como (i) con 'de cardinalidad κ' en lugar de 'no numerable'. Entonces* $(\mathrm{a})_\kappa$, $(\mathrm{b})_\kappa$, $(\mathrm{c})_\kappa$, $(\mathrm{d})_\kappa$ *y* $(\mathrm{e})_\kappa$ *son equivalentes.* □

3.4. COROLARIO DE 3.1 Y 3.2. *El producto de un espacio analítico con un espacio ω_1-compacto es ω_1-compacto ó existe un espacio Lindelöf no numerable y primero numerable con sólo una cantidad contable de puntos de acumulación.* □

3.5. OBSERVACIÓN. $\mathbb{M}$ y $\mathbb{P}$ son los primeros ejemplos de un espacio (hereditariamente) paracompacto y un espacio métrico (separable) cuyo producto no es normal (véase el Ejemplo 1.4 (1)). Estos ejemplos fueron dados por E. A. MICHAEL en [**1963**], en el cuál menciona en una nota a pie de página que si $\mathfrak{c} = \omega_1$, entonces "uno puede encontrar un espacio Lindelöf hereditariamente paracompacto cuyo producto con el espacio de los números irracionales no es normal." También, él menciona en [**1971**], pág 203, que tal espacio Lindelöf es cualquier subespacio Lindelöf de $\mathbb{M}$ que contenga a $\mathbb{Q}$. Del Teorema 3.2 observemos que este espacio Lindelöf existe si y sólo si $\mathfrak{b} = \omega_1$. Notemos además que por el Teorema 3.2 si existiera en **ZFC** un espacio X Lindelöf tal que $X \times \mathbb{P}$ no es normal, y $\mathfrak{b} > \omega_1$ entonces $|X'| > \omega$ o $\psi(X) > \omega$. (Sin embargo, como se ha demostrado en E. A. MICHAEL [**1963**], existen en **ZFC** un espacio Lindelöf y un espacio métrico separable cuyo producto no es normal (véase el Ejemplo 1.4 (2)); este espacio métrico está muy lejos de ser $\mathbb{P}$: este ni siquiera es analítico.)

3.6. OBSERVACIÓN. Con relación a la observación anterior nos gustaría señalar además que $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_{\mathrm{n}} = \mathfrak{b}_{\mathrm{P}}$, donde

$$\mathfrak{b}_{\mathrm{n}} = \text{mín}\{|X|\colon X \subseteq \mathbb{M},\ \text{y } X \times \mathbb{P} \text{ no es normal }\};$$

$$\mathfrak{b}_{\mathrm{P}} = \text{mín}\{|X|\colon |X'| \leqslant \omega, \psi(X) \leqslant \omega \text{ y existe un espacio paracompacto cuyo producto con } X \text{ no es normal}\}.$$

Demostración de $\mathfrak{b}_{\mathrm{n}} \leqslant \mathfrak{b}$. Si $B \subseteq {}^{\omega}\omega$ es no acotada, entonces por el Lema 2.3 B no es un subconjunto F_σ del subespacio $B \cup \mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}$. La demostración de E. A. MICHAEL [**1963**] de que $\mathbb{M} \times \mathbb{P}$ no es normal demuestra que $X = B \cup \mathbb{Q}$(como subespacio de $\mathbb{M}$)$\times\mathbb{P}$ no es normal.

Demostración de $\mathfrak{b}_{\mathrm{P}} \leqslant \mathfrak{b}_{\mathrm{n}}$. Los espacios paracompactos son normales, y $\mathbb{P}$ es paracompacto.

Demostración de $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{b}_{\mathrm{P}}$. Sea X tal que $|X| \leqslant \mathfrak{b}$, $|X'| \leqslant \omega$ y $\psi(X) \leqslant \omega$, sea Y un espacio paracompacto y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $X \times Y$. Observemos que del Teorema 2.1 tenemos que $|X| < \mathfrak{b}'_\lambda$, por lo que $X \setminus X'$ es un conjunto F_σ formado por puntos aislados. De esto se sigue fácilmente que existe una familia abierta σ-localmente finita $\mathcal{V}$ en X con $\bigcup \mathcal{V} = X \setminus X'$ la cual sea un refinamiento de $\mathcal{U}$. Ahora, para cada $x \in X'$ el subespacio $\{x\} \times Y$ de $X \times Y$ es un retracto de $X \times Y$; usando esto no es difícil encontrar una familia abierta localmente finita $\mathcal{V}_x$ en X con $\bigcup \mathcal{V}_x \supset \{x\} \times Y$ la cual sea un refinamiento de $\mathcal{U}$. Entonces $\mathcal{V} \cup \bigcup_{x \in X'} \mathcal{V}_x$ es una cubierta abierta σ-localmente finita de $X \times Y$ la cual sea un refinamiento de $\mathcal{U}$. □

4. La cardinalidad y el peso de un espacio de Michael

Hasta ahora nos ha preocupado bajo qué condiciones podemos garantizar la existencia de un espacio de Michael, pero sí de entrada suponemos ya la existencia de un espacio de Michael X, ¿qué información a cerca de X podemos saber? Pues bien, en esta sección probaremos que tanto $|X|$ como $w(X)$ son $\geqslant$ mín$\{\mathfrak{b}, \omega_\omega\}$. Para ver esto, la modificación en la definición de un espacio de Michael que nos da el siguiente teorema será fundamental.

4.1 TEOREMA (RUDIN y STARBIRD [**1975**]). *El producto de un espacio Lindelöf con un espacio métrico separable es normal si y sólo si este producto es Lindelöf.*□

Así, un espacio es de Michael si este es Lindelöf y su producto con el espacio de los números irracionales no es Lindelöf.

Para nuestro teorema principal necesitaremos de una terminología asi como de un resultado previo.

4.2. Si X es un espacio topológico que no es Lindeöf, entonces por $L(X)$ denotaremos a la mínima cardinalidad de una cubierta abierta de X que no admita una subcubierta contable. Notemos que $L(X)$ es regular ó tiene cofinalidad contable.

4.3. LEMA.*Supongamos que X es un espacio Lindelöf. Entonces para cada $f \in {}^{\omega}\omega$, $X \times C_f$ es un subespacio Lindelöf de $X \times \mathbb{P}$, donde $C_f = \{g \in {}^{\omega}\omega\colon g \leqslant^* f\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Este resultado se sigue inmediatamente de los siguientes dos hechos: (1) el producto de un espacio Lindelöf con un espacio compacto es Lindelöf, y (2) C_f es σ-compacto. □

4.4. TEOREMA (LAWRENCE **[1990]**). *Si existe un espacio de Michael X, entonces $|X| \geqslant \text{mín}\{\mathfrak{b}, \omega_\omega\}$ y $w(X) \geqslant \text{mín}\{\mathfrak{b}, \omega_\omega\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Afirmación. $L(X \times \mathbb{P}) \geqslant \text{mín}\{\mathfrak{b}, \omega_\omega\}$. Antes de proceder a la prueba de la afirmación, notemos que el teorema es una consecuencia inmediata de esta afirmación, ya que $L(X \times \mathbb{P}) \leqslant \text{mín}\{|X|, w(X)\}$, la cual se sigue de $w(X \times \mathbb{P}) = w(X)$ y del hecho de que cada sección vertical de $X \times \mathbb{P}$ es un subespacio Lindelöf.

Demostración de la afirmación. Fijemos una enumeración $\langle U_\xi\rangle_{\xi<\theta}$ de una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de $X \times \mathbb{P}$ que atestigüe $L(X \times \mathbb{P})$. Probaremos que θ tiene cofinalidad numerable ó $\theta \geqslant \mathfrak{b}$. Entonces tendremos que $L(X \times \mathbb{P}) \geqslant \text{mín}\{\mathfrak{b}, \omega_\omega\}$.

Supongamos que θ tiene cofinalidad no numerable. Por inducción transfinita definamos sucesiones estrictamente crecientes $\sigma\colon \mathfrak{b} \to {}^{\omega}\omega$ y $\tau\colon \mathfrak{b} \to \theta$ (donde ω^ω está parcialmente ordenado por $\leqslant^*$) tales que para cada $\kappa \in \mathfrak{b}$, $X \times C_{\sigma_\kappa}$ no está enteramente cubierto por $\{U_\xi\colon \xi < \sup(\text{ran}(\tau \restriction \kappa))\}$, pero esté cubierto por $\{U_\xi\colon \xi < \tau_\kappa\}$.

Supongamos que para $\kappa \in \mathfrak{b}$ tenemos ya definido $\sigma \restriction \kappa$ y $\tau \restriction \kappa$ tales que se satisfacen las condiciones antes mencionadas. Para la extensión de σ consideremos dos casos. Sea $\delta = \sup(\text{ran}(\tau \restriction \kappa))$. Si κ tiene cofinalidad contable, $\delta < \theta$, ya que por hipótesis θ tiene cofinalidad no numerable. Así, usando el hecho de que $\mathfrak{b} \geqslant \omega_1$ y el hecho de la minimalidad en la elección de $\mathcal{U}$, podemos elegir para σ_κ una apropiada función de ω^ω. Ahora, si κ no tine cofinalidad contable, sea σ_κ una $\leqslant^*$-cota superior para $\sigma \restriction \kappa$. Si $X \times C_{\sigma_\kappa}$ está cubierto por $\{U_\xi\colon \xi < \delta\}$, entonces por el Lema 4.3 existe una subcubierta contable, lo cual por nuestra suposición sobre κ implica la existencia de $\eta < \kappa$ tal que $X \times C_{\sigma_\kappa}$ está cubierto por $\{U_\xi\colon \xi < \tau_\eta\}$; esto contradice nuestras hipótesis ya que $C_{\sigma_{\eta+1}} \subseteq C_{\sigma_\kappa}$. Para extender a τ, usamos simplemente el Lema 4.3 y la cofinalidad no numerable de θ. □

Una pregunta natural que se nos puede venir a la mente es ¿podemos sustituir en el teorema anterior $\text{mín}\{\mathfrak{b}, \omega_\omega\}$ por $\mathfrak{b}$? Pues bien, a lo que respecta al peso J. T. MOORE en **[1999]** ha demostrado que bajo $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \text{cov}(\mathcal{M}) = \omega_{\omega+1}$ existe un espacio de Michael X tal que $w(X) = L(X \times \mathbb{P}) = \omega_\omega < \mathfrak{b}$.

5. θ-Sucesiones de Michael y su relación con la existencia de un espacio de Michael

En esta sección presentamos un nuevo método para la construcción de un espacio Michael. El resultado central es una afirmación combinatoria a cerca de los números irracionales, la cual es una condición suficiente y necesaria para la existencia de ciertas clases de espacios de Michael. Más precisamente, probaremos que si existe un espacio de Michael M y $L(M \times \mathbb{P})$ es un cardinal regular, entonces existe un espacio de Michael el cual es un subespacio de $(\mathfrak{d}+1) \times C$.

Para ello, la noción de una θ-sucesión de Michael introducida por J. T. MOORE en [**1999**] será fundamental.

5.1. Una sucesión de subconjuntos distintos $\langle X_\xi \rangle_{\xi \leqslant \theta}$ de C es llamada una *θ-sucesión de Michael*, si se satisfacen las siguientes condiciones:[2]

(i) $C \supseteq X_\eta \supseteq X_\xi \supseteq X_\theta = \mathbb{Q}_C$ para cada $\eta < \xi < \theta$.

(ii) Para cada subconjunto compacto K de $\mathbb{P}$ el ordinal $\delta = \min\{\xi \leqslant \theta \colon X_\xi \cap K = \emptyset\}$ no tiene cofinalidad no numerable.

Una θ-sucesión de Michael es llamada *reducida* si también se satisface la siguiente condición:

(iii) Para cada subconjunto A de $\mathbb{P}$ el cual sea analítico (una imagen continua de $\mathbb{P}$) el ordinal $\delta = \min\{\xi \leqslant \theta \colon X_\xi \cap A = \emptyset\}$ es θ o bien no tiene cofinalidad no numerable.

Lo que es algo sorprendente es que muy poca información a cerca de un espacio de Michael es realmente necesaria para la construcción de un espacio de Michael dentro de $(\mathfrak{d}+1) \times C$. Esto se hará evidente en la demostración de nuestro siguiente teorema (véase Corolarios 5.4 y 5.5). Notemos que ningún axioma de separación es necesario suponer para el espacio X.

5.2. TEOREMA (MOORE [**1999**]). *Las siguientes condiciones son equivalentes para cualquier cardinal regular θ:*

(a) *Existe un espacio Lindelöf X tal que $X \times \mathbb{P}$ no es Lindelöf y $L(X \times \mathbb{P}) = \theta$.*

(b) *Existe una θ-sucesión de Michael reducida $\langle X_\xi \rangle_{\xi \leqslant \theta}$.*

(c) *Existe un subespacio M de $(\theta+1) \times C$ el cual es un espacio de Michael y $\omega(M \times \mathbb{P}) = L(M \times \mathbb{P}) = \theta$.*

DEMOSTRACIÓN. (a) $\Rightarrow$ (b). Fijemos una enumeración $\langle U_\xi \rangle_{\xi < \theta}$ de una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de $X \times \mathbb{P}$ que atestigüe $L(X \times \mathbb{P})$. Si $\xi \leqslant \theta$ sea $X_\xi = \mathbb{Q}_C \cup \{p \in \mathbb{P} \colon X \times \{p\} \nsubseteq \bigcup_{\eta < \xi} U_\eta\}$. Podemos suponer, tomando una subsucesión si es necesario, que $X_\eta \neq X_\xi$. Supongamos que K es un subconjunto compacto de $\mathbb{P}$. Notemos que si $\delta = \min\{\xi \leqslant \theta \colon X_\xi \cap K = \emptyset\}$ tiene cofinalidad no numerable, $\langle U_\eta \rangle_{\eta < \delta}$ sería una cubierta abierta no numerable de $X \times K$ sin subcubierta contable. Pero esto es imposible ya que el producto de un espacio Lindelöf con un espacio compacto es Lindelöf. Entonces $\langle X_\xi \rangle_{\xi < \theta}$ es una θ-sucesión de Michael.

Para ver que $\langle X_\xi \rangle_{\xi < \theta}$ es reducida, sea $A \subseteq \mathbb{P}$ analítico. Podemos encontrar fácilmente un subconjunto cerrado E de $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ tal que A sea igual a $\pi_1[E]$ y E sea homeomorfo a $\mathbb{P}$. Notemos que $\langle U_\eta \rangle_{\eta < \xi}$ cubre a $X \times A$ si y sólo si $\langle U_\eta \times \mathbb{P} \rangle_{\eta < \xi}$ cubre a $X \times E$. Así, si $\delta = \min\{\xi \leqslant \theta \colon X_\xi \cap A = \emptyset\}$ tiene cofinalidad no numerable, $\langle U_\eta \times \mathbb{P} \rangle_{\eta < \delta}$ sería una cubierta abierta no numerable de $X \times E$ sin subcubierta contable. Pero $L(X \times E) = L(X \times \mathbb{P}) = \theta$, entonces δ tendría que ser igual a θ.

(b) $\Rightarrow$ (c). Para cualquier $\xi \leqslant \theta$, definamos $M_\xi = \bigcup_{\eta \leqslant \xi} \{\eta\} \times X_\eta$. Usando inducción sobre ξ, probaremos que M_ξ es Lindelöf. Los pasos no triviales de la inducción son sólo cuando ξ tiene cofinalidad no numerable. En este caso fijemos una

[2] Aquí, estamos pensando al conjunto de Cantor C como una compactación de $\mathbb{P}$ que resultó de agregarle a $\mathbb{P}$ un conjunto numerable $\mathbb{Q}_C$ (véase Observación 2.10 del Capítulo 1).

cubierta abierta $\mathcal{U}$ de M_ξ. Podemos encontrar un abierto rectangular $V = (\xi+1)\times H$ el cual contenga a $(\xi + 1) \times X_\xi$, y que este cubierto por una cantidad contable $\mathcal{U}_0$ de elementos de $\mathcal{U}$. Para verificar esto último notemos que $(\xi + 1) \times X_\xi$ puede ser cubierto por una cantidad contable $\mathcal{U}_0$ de elementos de $\mathcal{U}$, y que $H = \{x \in C\colon (\xi+1)\times\{x\} \subset \bigcup\mathcal{U}_0\}$ es un abierto en C con $X_\xi \subseteq H$. Notemos que $K = C\setminus H$ es ajeno a X_ξ y que $E = M_\xi \setminus V$ está contenido en $(\xi + 1) \times K$. Dado que la cofinalidad de ξ es no numerable, existe una $\delta < \xi$ tal que $K \cap X_\delta = \emptyset$. De esto, se sigue que E está contenido en M_δ. Por hipótesis de inducción podemos encontrar una cantidad contable $\mathcal{U}_1$ de elementos de $\mathcal{U}$ la cual cubra a M_δ. Ahora, tenemos que $\mathcal{U}_0 \bigcup \mathcal{U}_1$ es una subcubierta contable de M_ξ, y por lo tanto M_ξ es Lindelöf para toda $\xi \leqslant \theta$.

Ahora bien, sea $M = M_\theta$. Se verifica fácilmente que $\omega(M \times \mathbb{P}) = \theta$. Para ver que $M \times \mathbb{P}$ no es Lindelöf, notemos que $\Delta = \{\langle\xi, p, p\rangle\colon \langle\xi, p\rangle \in M\}$ es cerrado en $M \times \mathbb{P}$. Es fácil verificar que $\langle M_\xi \times \mathbb{P}\rangle_{\xi<\theta}$ es una cubierta abierta creciente de Δ la cual no tiene subcubiertas contables.

Para finalizar la demostración, resta probar que $L(M \times \mathbb{P}) = \theta$. Fijemos una cubierta abierta $\mathcal{U}$ de $M \times \mathbb{P}$ de cardinalidad menor que θ. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de $M\times\mathbb{P}$ formada por subconjuntos abiertos de $(\theta+1)\times C\times\mathbb{P}$ y que $\mathcal{U}$ es cerrada bajo uniones finitas. Debemos demostrar que $\mathcal{U}$ tiene una subcubierta contable de $M \times \mathbb{P}$.

Procedamos como antes, primero demostrando que $M_\xi\times\mathbb{P}$ es Lindelöf para toda $\xi < \theta$. La demostración la daremos por inducción sobre ξ. Nuevamente los pasos no triviales de la inducción son sólo cuando ξ tiene cofinalidad no numerable. Sea $\mathcal{V}$ una cubierta abierta de $M_\xi \times \mathbb{P}$. Primero tomemos un conjunto abierto rectangular $V = (\xi+1)\times H$ alrededor de $(\xi+1)\times X_\xi\times\mathbb{P}$ el cual este cubierto por una cantidad contable $\mathcal{V}_0$ de elementos de $\mathcal{V}$. Ahora, sea $A = \pi_C[C \times \mathbb{P} \setminus H]$ la proyección del complemento de H sobre C. Dado que A es analítico y $X_\xi \cap A = \emptyset$, se sigue de la condición (iii) de la definición de una sucesión de Michael reducida que existe una $\delta < \xi$ tal que $X_\delta \cap A = \emptyset$. Entonces, $(X_\xi \times \mathbb{P}) \setminus V$ está contenido en $M_\delta \times \mathbb{P}$ el cual es Lindelöf por nuestra hipótesis de inducción. Tomemos una colección contable $\mathcal{V}_1$ de elementos de $\mathcal{V}$ la cual cubra a $M_\delta \times \mathbb{P}$. Entonces $\mathcal{V}_0 \bigcup \mathcal{V}_1$ es una subcubierta contable de $M_\xi \times \mathbb{P}$; por lo que $M_\xi \times \mathbb{P}$ es Lindelöf para toda $\xi < \theta$.

Sea $\langle B_n\rangle_{n<\omega}$ una enumeración de una base numerable para $C \times \mathbb{P}$. Para cada $U \in \mathcal{U}$, definimos $U[B_n]$ como la unión de todos los subconjuntos abiertos rectangulares de U de la forma $\alpha \times B_n$, para algún ordinal α. Ahora nos gustaría demostrar que para cada $x = \langle\alpha, p_1, p_2\rangle$ en $M \times \mathbb{P}$ existe una U en $\mathcal{U}$ y una $n < \omega$ tal que x esté en $U[B_n]$. Dado que $A_x = (\alpha + 1) \times \{\langle p_1, p_2\rangle\}$ es compacto, existe una U en $\mathcal{U}$ tal que $A_x \subseteq U$. Aplicando un teorema estandar de topología (el Lema Tubular) existe una $n < \omega$ tal que $A_x \subseteq (\alpha + 1) \times B_n \subseteq U$. De esto se sigue que x está en $U[B_n]$.

Notemos que para cada n podemos elegir una $\xi_n \leqslant \theta + 1$ tal que $\xi_n \times B_n = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U[B_n]$. Si $\xi_n < \theta$, entonces $M_{\xi_n} \times \mathbb{P}$ es un espacio Lindelöf por lo hecho anteriormente, y entonces podemos elegir $\mathcal{U}_n$ una subcubierta contable de $(\xi_n \times B_n) \cap (M \times \mathbb{P}) \subseteq M_{\xi_n} \times \mathbb{P}$. Si $\xi_n \geqslant \theta$, entonces observemos que como $|\mathcal{U}| < \theta$, existe una U en $\mathcal{U}$ tal que $U[B_n] = \xi_n \times B_n$. En este caso sea $\mathcal{U}_n = \{U\}$. Dado que $M \times \mathbb{P} \subseteq \bigcup_{n<\omega} \xi_n \times B_n$, la colección $\bigcup_{n<\omega} \mathcal{U}_n$ es una subcubierta contable de $\mathcal{U}$ y por lo tanto $L(M \times \mathbb{P})$ debe ser θ.

(c) $\Rightarrow$ (a). Es clara. □

5.3. OBSERVACIÓN. Notemos que si M es un espacio de Michael, entonces cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de $M \times \mathbb{P}$ tiene una subcubierta $\mathcal{U}_0$ de cardinalidad a lo más $\mathfrak{d}$. La razón de esto es que $\mathbb{P}$ puede ser cubierto por una colección de subconjuntos compactos $\mathcal{K}$ de tamaño $\mathfrak{d}$ (véase por ejemplo el Teorema 3.2 del Capítulo 3). Ahora, para cada $K \in \mathcal{K}$, existe una subcolección contable $\mathcal{U}_K$ de $\mathcal{U}$ la cual cubre a $M \times K$. Así, si hacemos $\mathcal{U}_0 = \bigcup_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{U}_K$, entonces $\mathcal{U}_0$ tendrá las propiedades deseadas.

Notemos ahora que los siguientes corolarios estan esencialmente provados en el Teorema 5.2.

5.4. COROLARIO. *Si X es un espacio Lindelöf y $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de $X \times \mathbb{P}$ sin subcubiertas de cardinalidad más pequeña, entonces existe una $|\mathcal{U}|$-sucesión de Michael.* □

5.5. COROLARIO. *Si existe una θ-sucesión de Michael y la cofinalidad de θ es no numerable, entonces existe un espacio de Michael.* □

5.6. OBSERVACIÓN. Quizá un mérito importante del Teorema 5.2 que nos gustaría remarcar aquí es que la mayor parte de espacios de Michael que se han construido en la génesis del problema "viven" dentro de el producto de un ordinal con C. Por ejemplo, si $A = \{a_\xi \colon \xi < \omega_1\}$ es un conjunto que está concentrado alrededor de $\mathbb{Q}_C$, la construcción "usual" de un espacio de Michael aislando A (véase el Ejemplo 1.4 (2) y la Observación 3.6) es lo mismo que el espacio $[\{\omega_1\} \times \mathbb{Q}_C] \cup \{\langle \xi + 1, a_\xi \rangle \colon \xi < \omega_1\} \subseteq (\omega_1 + 1) \times C$. También, el ejemplo de K. ALSTER de [**1990**] puede ser encajado de una manera similar dentro de $(\mathfrak{c} + 1) \times Y$, donde Y es la compactación métrica de $\mathbb{P}$ usada en su construcción.

6. Construcción de un nuevo espacio de Michael

En esta sección veremos que $\mathfrak{d} = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ es suficiente para probar la existencia de un espacio de Michael. Donde $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ el mínima cantidad de conjuntos de primera categoría en $\mathbb{R}$ que se necesitan para cubrir a $\mathbb{R}$. No es difícil ver que $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ también coincide con la mínima cantidad de conjuntos de primera categoría en $\mathbb{P}$ que se necesitan para cubrir a $\mathbb{P}$.

6.1. TEOREMA (MOORE [**1999**]). *$\mathfrak{d} = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ implica la existencia de un espacio de Michael.*

DEMOSTRACIÓN. Primero notemos que existe una sucesión $\langle D_\xi \rangle_{\xi < \mathfrak{d}}$ de conjuntos compactos en $\mathbb{P}$ tal que para cada subconjunto compacto K de $\mathbb{P}$, existe una $\xi < \mathfrak{d}$ tal que K está contenido en D_ξ (véase por ejemplo el Teorema 3.2 del Capítulo 3). Sea $X_\xi = C \setminus \bigcup_{\eta < \xi} D_\eta$. Para ver que $\langle X_\xi \rangle_{\xi \leqslant \mathfrak{d}}$ es una $\mathfrak{d}$-sucesión de Michael, fijemos un subconjunto compacto K de $\mathbb{P}$. Supongamos que $K \cap X_\xi$ es vacío y que $\xi < \mathfrak{d}$ tiene cofinalidad no numerable. Entonces $\langle D_\eta \rangle_{\eta < \xi}$ es una cubierta de K de tamaño menor que $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ formada por conjuntos cerrados, por lo tanto debe tener una subcubierta contable. En efecto, como K es compacto, K tiene a lo más una cantidad contable de puntos aislados, por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad que K carece de puntos aislados. Consideremos $\mathcal{U} = \{\mathrm{Int}\ D_\eta \colon \eta < \xi\}$, si $\mathcal{U}$ cubre a K, la afirmación se sigue inmediatamente, en caso contrario $K' = K \setminus \bigcup \mathcal{U}$ sería un espacio métrico compacto 0-dimensional sin puntos aislados, luego entonces K' sería homeomorfo al conjunto de Cantor C. Así, como $\mathbb{P}$ se encaja en C y $K' \cap D_\eta$ es denso en ningúna parte para cada $\eta < \xi$, entonces $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leqslant \xi$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe una $\delta < \xi$ tal que $X_\delta \cap K$ es vacío. Por el Corolario 5.5 existe un espacio de Michael. $\square$

6.2. OBSERVACIÓN. Cabe mencionar que ya en **[1990]** K. ALSTER, usando **MA** (Axioma de Martin) construyó un espacio de Michael. Sin embargo, $\mathfrak{d} = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ es en cierto sentido más general que **MA**, ya que **MA** implica en particular que $\mathfrak{d} = \mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$ (véase Corolario 7.4 del Capítulo 5), pero es consistente con **ZFC** que falle **MA** y que $\mathfrak{d} = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$. Por ejemplo usando el forcing de Hechler, se puede construir un modelo de **ZFC**, llamado *el modelo de Hechler*, en donde $\mathfrak{s} = \omega_1 < \mathfrak{c} = \mathfrak{b} = \mathfrak{d} = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$.

Por otro lado, si quisieramos comparar $\mathfrak{d} = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ con $\mathfrak{b} = \omega_1$, veremos que uno no es más general que el otro, ya que por ejemplo usando el forcing de Miller, se puede construir un modelo de **ZFC**, llamado *el modelo de Miller*, en donde $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{b} = \omega_1 < \mathfrak{c} = \mathfrak{d}$, y como se ha mencionado antes puede suceder que $\mathfrak{d} = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ y que $\mathfrak{b} \neq \omega_1$, por ejemplo usando el modelo de Hechler o simplemente usando **MA**.

6.3. NOTA. Para finalizar esta sección queremos mencionar que J. T. MOORE en **[1999]** también ha demostrado que es consistente con **ZFC** que $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) < \mathfrak{b} < \mathfrak{d}$ y que exista un espacio de Michael.

CAPíTULO 5

Características combinatorias del Continuo

1. Introducción

En este capítulo trataremos algunas características combinatorias de los invariantes cardinales que se trataron en los capítulos anteriores asi como también otras características combinatorias de otros invariantes cardinales que se introducirán en este capítulo. Introduciremos una maquinaria que es usada frecuentemente para la descripción de muchos (aunque no todos) invariantes cardinales y sus relaciones entre ellos. Esta maquinaria fue presentada por P. VOJTÁŠ en **[1993]** bajo el nombre de "Conecciones generalizadas de Galois-Tukey"; las ideas básicas de esta maquinaria habián sido ya manejadas con anterioridad en el trabajo de D. FREMLIN de **[1984]** y en el trabajo de Miller (no publicado). Las definiciones de muchos invariantes cardinales tienen la forma "la mínima cardinalidad de cualquier conjunto Y (de objetos de una clase específica) tal que cada objeto x (posiblemente de una clase diferente) está relacionado con algún $y \in Y$ en un sentido específico". Y muchas demostraciones de desigualdades entre estos cardinales involucran la construcción de mapeos entre varias clases de objetos que están involucradas en las definiciones de estos cardinales. Esto se formaliza en la Sección 4 en el lenguaje de categorías. Con la ayuda de esto analizamos los invariantes cardinales clásicos asociados al σ-ideal formado por los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de primera categoría (a saber $\operatorname{add}(\mathcal{M})$, $\operatorname{cov}(\mathcal{M})$, $\operatorname{non}(\mathcal{M})$ y $\operatorname{cof}(\mathcal{M})$) y al σ-ideal formado por los subconjuntos de $\mathbb{R}$ de medida de Lebesgue cero (a saber $\operatorname{add}(\mathcal{N})$, $\operatorname{cov}(\mathcal{N})$, $\operatorname{non}(\mathcal{N})$ y $\operatorname{cof}(\mathcal{N})$), en compañia de los cardinales $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$. Por último mostramos que bajo el axioma de Martin (**MA**) todos los cardinales pequeños no numerables (o invariantes cardinales) que se tratarán a lo largo de todo este trabajo serán iguales a $\mathfrak{c}$. Sin embargo estos cardinales pueden tomar distintos valores en varios modelos generados con forcing iterado, como se muestra en la tabla que se encuentra al final de este capítulo. La manera de como abordamos los temas en este capítulo es como lo presenta A. BLASS en **[20∞]**.

2. Crecimiento de funciones

Ya en la Sección 2 del Capítulo 3 introdujimos el número de (no)acotación $\mathfrak{b}$ y el número de $\mathfrak{d}$ominación $\mathfrak{d}$, en donde además se analizaron algunas propiedades combinatorias de estos cardinales. Ahora nos daremos a la tarea de dar algunas otras características combinatorias de estos cardinales. Así, empecemos por recordar las definiciones de estos dos cardinales.

2.1. Un conjunto $B \subseteq {}^{\omega}\omega$ es *no acotado* si no existe ninguna $f \in {}^{\omega}\omega$ tal que $g \leqslant^* f$ para toda $g \in B$. El *número de acotación* $\mathfrak{b}$ (algunas veces llamado el *número de (no)acotación*) es la mínima cardinalidad de cualquier conjunto no acotado, $\mathfrak{b} = \text{mín}\{|B|\colon B \text{ es no acotado}\}$.

2.2. Un conjunto $D \subseteq {}^{\omega}\omega$ es *dominante* si para cada $f \in {}^{\omega}\omega$ existe $g \in D$ con $f \leqslant^* g$, donde $f \leqslant^* g$ si $f(n) \leqslant g(n)$ para toda $n \in \omega$ salvo una cantidad finita. El *número de* $\mathfrak{d}$*ominación* $\mathfrak{d}$ es la mínima cardinalidad de cualquier conjunto dominante, $\mathfrak{d} = \text{mín}\{|D| : D \text{ es dominante}\}$.

2.3. Observación. Tanto $\mathfrak{b}$ como $\mathfrak{d}$ permanecen invariables si en las definiciones de estos sustituimos ${}^{\omega}\omega$ por ${}^{\omega}\mathbb{R}$ o por el conjunto de sucesiones de cualquier orden lineal de cofinalidad ω.

El siguiente teorema da todas las restricciones sobre $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$ que se pueden probar en **ZFC**.

2.4. Teorema. $\omega_1 \leqslant \text{cof}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b} \leqslant \text{cof}(\mathfrak{d}) \leqslant \mathfrak{d} \leqslant \mathfrak{c}$.

Demostración. $\omega_1 \leqslant \mathfrak{b}$ nos quiere decir que para cada colección numerable de funciones $g_n : \omega \to \omega$, existe alguna $f\ {}^*\!\geqslant$ que todas ellas. Y una de estas f viene dada por $f(m) = \text{máx}_{n \leqslant m}\, g_n(m)$.

Para probar que $\mathfrak{b} \leqslant \text{cof}(\mathfrak{d})$, sea D un conjunto cofinal de tamaño $\mathfrak{d}$, y supongamos que está descompuesto en la unión de $\text{cof}(\mathfrak{d})$ subconjuntos D_ξ de cardinalidad $< \mathfrak{d}$. Entonces para cada ξ existe una f_ξ que no está dominada por ninguna $g \in D_\xi$. Ahora, no puede existir una f que domine a todas las f_ξ ya que de lo contrario f no estaría dominada por ninguna $g \in D$, lo cual no es posible. Por lo que $\{f_\xi : \xi < \text{cof}(\mathfrak{d})\}$ es no acotado.

La prueba de que $\text{cof}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}$ es similar, y lo que resta del teorema es claro. □

S. H. Hechler en [**1974**] prueba que si P es un conjunto parcialmente ordenado en el cual cada subconjunto contable tiene una cota superior, entonces P puede ser consistentemente isomorfo a un subconjunto cofinal de $\langle {}^{\omega}\omega, \leqslant^* \rangle$. Más precisamente, dado tal P, S. H. Hechler construye, usando el método de forcing, una extensión del universo con la c.c.c. (condición de cadena contable) donde existe un encaje cofinal de P en $\langle {}^{\omega}\omega, \leqslant^* \rangle$ que preserva el orden estricto. (La demostración de S. H. Hechler, dada tempranamente después de la invención del forcing se retomó usando una formulación más moderna por D. Talayco en [**1993**] y por M. Burke en [**1997**].) El resultado de S. H. Hechler implica que el Teorema 2.4 es óptimo en el siguiente sentido.

2.5. Teorema (**GCH**). *Sean* $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{d}'$, *y* $\mathfrak{c}'$ *cualesquiera tres cardinales que satisfagan*

$$\omega_1 \leqslant \text{cof}(\mathfrak{b}') = \mathfrak{b}' \leqslant \text{cof}(\mathfrak{d}') \leqslant \mathfrak{d}' \leqslant \mathfrak{c}'$$

y $\text{cof}(\mathfrak{c}') > \omega$. *Entonces empleado el método de forcing, existe una extensión del universo con la c.c.c. que satisface* $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}'$, *y* $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'$.

Demostración. Apliquemos el teorema de Hechler al orden parcial $P = [\mathfrak{d}']^{<\mathfrak{b}'}$ el cual esta ordenado por la inclusión. La regularidad de $\mathfrak{b}'$ implica que cualquier subconjunto de P de cardinalidad $< \mathfrak{b}'$ tiene una cota superior. La restricción en la cardinalidad es esencial ya que algunos subconjuntos de cardinalidad $\mathfrak{b}'$ no tienen una cota superior (*e.g.* los formados por singuletes distintos). Dado que $\text{cof}(\mathfrak{d}') > \mathfrak{b}'$ y **GCH** se sigue, entonces obtenemos que $|P| = \mathfrak{d}'$. Ahora, observemos que un subconjunto de P de cardinalidad $< \mathfrak{d}'$ no puede ser cofinal, ya que su unión (como conjuntos) tiene cardinalidad $< \mathfrak{d}'$. Estas observaciones nos implican que $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}'$ y $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}'$ en la extensión que nos da el teorema de Hechler. Finalmente, para obtener $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}'$, agregémos $\mathfrak{c}'$ reales aleatorios; esto no alterará a $\mathfrak{b}$ o a $\mathfrak{d}$, ya que el modelo base ${}^{\omega}\omega$ es cofinal en el ${}^{\omega}\omega$ de cualquier extensión real aleatoria. □

Para ver que $\mathfrak{b} < \mathfrak{d}$ es consistente, no es necesario utilizar el teorema de Hechler. En el modelo original de P. J. COHEN **[1963]** para probar la consistencia de **ZFC** con la negación de **CH**, se tiene que $\mathfrak{b} = \omega_1$ y que $\mathfrak{d} = \mathfrak{c}$. En efecto, si agregamos $\kappa \geqslant \omega_1$ reales de Cohen (con el producto usual de forcing) a cualquier modelo de la teoría de conjuntos, entonces en el modelo resultante se tiene que $\mathfrak{b} = \omega_1$ mientras que $\mathfrak{d}$ se convierte en al menos κ.

Para la situación contraria, $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$, hemos observado ya en el Corolario 2.4 del Capítulo 3 la siguiente caracterización.

2.6. TEOREMA. $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ *si y sólo si existe una escala en* ${}^{\omega}\omega$, *i.e. un conjunto dominante bien ordenado por* $\leqslant^*$. □

Como hemos visto a lo largo de este trabajo, existen multiples maneras de ver a los cardinales $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$. Ahora retomaremos algunas de ellas reformuladas en un contexto más general. Para ello necesitaremos de los siguientes invariantes cardinales clásicos asociados a un ideal.

2.7. Sea $\mathcal{I}$ un ideal propio de subconjuntos de un conjunto X tal que contenga a todos los singuletes de X.

- La *aditividad* de $\mathcal{I}$, $\operatorname{add}(\mathcal{I})$, es el mínimo número de conjuntos en $\mathcal{I}$ cuya unión no esté en $\mathcal{I}$.
- El *número de cubierta* de $\mathcal{I}$, $\operatorname{cov}(\mathcal{I})$, es el mínimo número de conjuntos en $\mathcal{I}$ cuya unión sea X.
- La *uniformidad* de $\mathcal{I}$, $\operatorname{non}(\mathcal{I})$, es la mínima cardinalidad de cualquier subconjunto de X que no esté en $\mathcal{I}$.
- La *cofinalidad* de $\mathcal{I}$, $\operatorname{cof}(\mathcal{I})$, es la mínima cardinalidad de cualquier subconjunto $\mathcal{B}$ de $\mathcal{I}$ tal que cada elemento de $\mathcal{I}$ es un subconjunto de algún elemento de $\mathcal{B}$. Tal $\mathcal{B}$ es llamada una *base* para $\mathcal{I}$.

Es fácil verificar que tanto $\operatorname{cov}(\mathcal{I})$ como $\operatorname{non}(\mathcal{I})$ son $\geqslant \operatorname{add}(\mathcal{I})$ y $\leqslant \operatorname{cof}(\mathcal{I})$. De hecho, $\operatorname{add}(\mathcal{I})$ también es una cota inferior para las cofinalidades $\operatorname{cof}(\operatorname{non}(\mathcal{I}))$ y $\operatorname{cof}(\operatorname{cof}(\mathcal{I}))$. En este capítulo, $\mathcal{I}$ será siempre un σ-ideal, entonces su aditividad (y por lo tanto los otros tres invariantes cardinales) serán no numerables. Más aun, $\mathcal{I}$ tendrá una base formada por conjuntos de Borel; dado que existen sólo $\mathfrak{c}$ conjuntos de Borel, la cofinalidad de $\mathcal{I}$ (y por lo tanto los otros tres invariantes cardinales) serán $\leqslant \mathfrak{c}$.

El ideal relevante para la presente sección es el σ-ideal $\mathcal{K}_\sigma$ generado por los subconjuntos compactos de ${}^{\omega}\omega$, *i.e.* el ideal de los conjuntos que se cubren con una cantidad contable de conjuntos compactos. Ya en la Sección 3 del Capítulo 3 hemos tenido la oportunidad de analizar este ideal, en donde además se ha probado entre otras cosas parte del siguiente teorema.

2.8. TEOREMA. $\operatorname{add}(\mathcal{K}_\sigma) = \operatorname{non}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathfrak{b}$ *y* $\operatorname{cov}(\mathcal{K}_\sigma) = \operatorname{cof}(\mathcal{K}_\sigma) = \mathfrak{d}$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos que $X \subseteq {}^{\omega}\omega$ es σ-compacto si y sólo si existe una función $f \in {}^{\omega}\omega$ tal que $X \subseteq C_f = \{g \in {}^{\omega}\omega \colon g \leqslant^* f\}$.

Supongamos que $F \subseteq {}^{\omega}\omega$. Si F es un conjunto dominante, entonces $\{C_f \colon f \in F\}$ es una base para $\mathcal{K}_\sigma$. En el otro sentido, si $\bigcup_{f\in F} C_f = {}^{\omega}\omega$, entonces F es un conjunto dominante.

Similarmente, si F es no acotado en ${}^{\omega}\omega$, entonces $F \notin \mathcal{K}_\sigma$ y si $\bigcup_{f\in F} C_f \notin \mathcal{K}_\sigma$, entonces F es no acotado en ${}^{\omega}\omega$. □

Por otro lado, otra manera de ver al orden $\leqslant^*$ y a los cardinales $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$, es introduciendo particiones de ω en intervalos finitos. (Estas ideas fueron dadas por primera vez por R. C. SOLOMON en [**1977**])

2.9. Por una *partición en intervalos* entenderemos una partición de ω en (una cantidad infinita de) intervalos finitos I_n ($n \in \omega$). Supondremos siempre que los intervalos estan numerados en el orden natural, esto es, si i_n es el extremo izquierdo de I_n entonces $i_0 = 0$ e $I_n = [i_n, i_{n+1})$. Diremos que la partición en intervalos $\{I_n \colon n \in \omega\}$ *domina* a otra partición en intervalos $\{J_n \colon n \in \omega\}$ si para toda $n \in \omega$ (salvo una cantidad finita) existe $k \in \omega$ tal que $J_k \subseteq I_n$. Denotemos por PI al conjunto de todas las particiones en intervalos.

2.10. TEOREMA. *$\mathfrak{d}$ es la mínina cardinalidad de cualquier familia de particiones en intervalos que domine a todas las particiones en intervalos. $\mathfrak{b}$ es la mínima cardinalidad de cualquier familia de particiones en intervalos para la cual no exista una partición en intervalos que domine a todas las particiones en intervalos de la familia.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos solo la primera parte, ya que la segunda parte se puede probar de una manera similar o se puede deducir de la demostración de la primera parte usando la maquinaria de dualidad de la Sección 4.

Supongamos primero que tenemos una familia $\mathcal{F}$ de particiones en intervalos que domina a todas las particiones en intervalos. A cada una de las particiones $\{I_n = [i_n, i_{n+1}) \colon n \in \omega\}$ de $\mathcal{F}$, le asociamos una función $f \colon \omega \to \omega$ definida por $f(x)$ igual al extremo derecho del intervalo posterior al intervalo que contiene a x; de este modo si $x \in I_n$ entonces $f(x) = i_{n+2} - 1$. Probemos ahora que estas funciones f forman un conjunto dominante, así tendríamos que $\mathfrak{d} \leqslant |\mathcal{F}|$. Dada cualquier $g \in {}^\omega\omega$, la función f que domine a g se obtiene de la siguiente manera. Formemos una partición en intervalos $\{J_n = [j_n, j_{n+1}) \colon n \in \omega\}$ tal que cuando $x \leqslant j_n$ entonces $g(x) < j_{n+1}$; esto lo podemos hacer fácilmente eligiendo las j_n's recursivamente. Sea $\{I_n = [i_n, i_{n+1}) \colon n \in \omega\}$ en $\mathcal{F}$ que domine a esta $\{J_n \colon n \in \omega\}$, y sea f la función asociada a $\{I_n \colon n \in \omega\}$. Para ver que $g(x) \leqslant f(x)$ para todos los x suficientemente grandes, persigamos a estas x por medio de las definiciones como sigue. Sea n el índice para el cual $x \in I_n$ y sea (ya que x es suficientemente grande) k un índice para el cual $J_k \subseteq I_{n+1}$. Como $x \leqslant j_k$, entonces $g(x) \leqslant j_{k+1} - 1 \leqslant i_{n+2} - 1 = f(x)$. Con esto completamos la prueba de que $\mathfrak{d} \leqslant |\mathcal{F}|$.

Para construir una familia dominante de particiones en intervalos de cardinalidad $\mathfrak{d}$, empecemos por un conjunto dominante D en ${}^\omega\omega$ de cardinalidad $\mathfrak{d}$, y asociemos a cada $g \in D$ una partición en intervalos $\{J_n = [j_n, j_{n+1}) \colon n \in \omega\}$ exactamente como en el párrafo anterior. Para probar que la familia resultante de $\mathfrak{d}$ particiones en intervalos domine a todas las particiones en intervalos, sea $\{I_n = [i_n, i_{n+1}) \colon n \in \omega\}$ una partición en intervalos arbitraria, le asociamos una $f \in {}^\omega\omega$ como en el párrafo anterior, y sea $g \in D$ con $g \,{}^*\!\geqslant f$. Probemos ahora que la partición $\{J_n \colon n \in \omega\}$ asociada a esta g domina a la partición $\{I_n \colon n \in \omega\}$. Para cualquier n suficientemente grande, tenemos que $f(j_n) \leqslant g(j_n) \leqslant j_{n+1} - 1$. En virtud de la definición de f, esto quiere decir que el siguiente I_k después del que contenga a j_n está completamente contenido en J_n. $\square$

3. Separación y homogeneidad

En esta sección, trataremos varios invariantes cardinales relacionados con la "competencia" entre particiones a través de separación de conjuntos y particiones homogéneas de conjuntos. Para ello empecemos con recordar una definición combinatoria de un cardinal que sea ha mencionado ya desde el punto de vista topológico en la Sección 3 del Capítulo 2 (véase 2.8 y Teorema 3.6 de ese mismo capítulo).

3.1. Un conjunto $X \subseteq \omega$ *separa* a un conjunto infinito $Y \subseteq \omega$ si tanto $Y \cap X$ como $Y \setminus X$ son infinitos. Una *familia separadora* es una familia $\mathcal{S}$ de subconjuntos de ω tal que cada conjunto infinito $Y \subseteq \omega$ es separado por al menos una $X \in \mathcal{S}$. El *número de separación* $\mathfrak{s}$ es la mínima cardinalidad de cualquier familia separadora.

Daremos a continuación otra definición alternativa del cardinal $\mathfrak{s}$ a las ya dadas en el Teorema 3.6 del Capítulo 2.

3.2. TEOREMA. *$\mathfrak{s}$ es la mínima cardinalidad de cualquier familia de ω-sucesiones acotadas $S_\xi = \langle x_{\xi,n}\rangle_{n\in\omega}$ de números reales tal que para ningún conjunto infinito $Y \subseteq \omega$ se puede hacer que todas las subsucesiones correspondientes $S_\xi \restriction Y = \langle x_{\xi,n}\rangle_{n\in Y}$ converjan. Lo mismo es cierto si sólo consideramos sucesiones formadas por ceros y unos.*

DEMOSTRACIÓN. La segunda parte, donde todos los S_ξ están en ${}^{\omega}2$, es un simple traducción de la definición de $\mathfrak{s}$; podemos ver justamente a las sucesiones S_ξ como las funciones características de los conjuntos de una familia separadora. El punto clave radica en que, para la función característica de X, convergencia significa eventualmente constante, y entonces la convergencia de su restricción a Y significa que Y no está separada por X.

Por otra parte, la mitad de la primera afirmación se sigue fácilmente de la segunda afirmación. Para probar la otra mitad de la primera afirmación, consideremos cualquier familia de ω-sucesiones acotadas $S_\xi = \langle x_{\xi,n}\rangle_{n\in\omega}$ de números reales tal que para ningún conjunto infinito $Y \subseteq \omega$ se puede hacer que todas las subsucesiones correspondientes $S_\xi \restriction Y$ converjan. Para cada S_ξ y para cada par de números racionales q_1, q_2 formemos el conjunto $X_{\xi,q_1,q_2} = \{n \in \omega\colon x_{\xi,n}$ está entre q_1 y $q_2\}$. Sea $\mathcal{S}$ la familia formada por los conjuntos X_{ξ,q_1,q_2}, entonces $\mathcal{S}$ es una familia separadora. En efecto, si $Y \subseteq \omega$ con Y un conjunto infinito, entonces por la elección de la familia de ω-sucesiones acotadas, existe S_ξ tal que $S_\xi \restriction Y$ no converge, pero como $S_\xi \restriction Y$ está acotada, entonces $S_\xi \restriction Y$ tendrá al menos dos puntos límites. Por lo que si elegimos números racionales q_1, q_2 para los que un punto límite esté entre ellos dos y el otro punto límite no esté entre ellos, entonces el conjunto X_{ξ,q_1,q_2} separará al conjunto Y.

Finalmente, como la cardinalidad de $\mathcal{S}$ no excede a la cardinalidad de la familia de ω-sucesiones acotadas que se consideró, entonces la otra mitad de la primera afirmación que faltaba se sigue ahora. □

Del Teorema 2.10 obtenemos fácilmente la relación de $\mathfrak{s}$ con $\mathfrak{d}$.

3.3. TEOREMA. $\mathfrak{s} \leqslant \mathfrak{d}$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 2.10 , fijemos una familia de particiones en intervalos de tamaño $\mathfrak{d}$ que domine a todas las particiones en intervalos. Para cada partición $\Pi = \{I_n\colon n \in \omega\}$ en esta familia, asociemosle la unión de todos los intervalos con subíndice par $\varphi(\Pi) = \bigcup_n I_{2n}$. Probemos que estos $\mathfrak{d}$ conjuntos $\varphi(\Pi)$

constituyen una familia separadora. Para esto, consideremos cualquier subconjunto infinito X de ω. Asociemosle al conjunto X una partición en intervalos $\psi(X)$ en la cual cada intervalo contenga al menos un punto de X. Nuestra familia dominante de particiones en intervalos contiene una Π que domina a $\psi(X)$. Pero entonces cada intervalo de Π, salvo una cantidad finita, contiene un intervalo de $\psi(X)$ y por consiguiente contiene un punto de X. De esto se sigue inmediatamente que tanto $\varphi(\Pi)$ como su complemento (la unión de todos los intervalos con subíndice impar) contienen una cantidad infinita de puntos de X. Por lo tanto $\varphi(\Pi)$ separa al conjunto X. $\square$

Recordemos, para futuras referencias, la propiedad básica de las construcciones φ y ψ que se trabajó en la demostración anterior: Para cualquier partición en intervalos Π y cualquier conjunto infinito $X \subseteq \omega$,

$$\Pi \text{ domina a } \psi(X) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(\Pi) \text{ separa al conjunto } X.$$

La desigualdad en el teorema anterior puede consistentemente ser estricta. Por ejemplo, si agregamos $\kappa \geqslant \omega_1$ reales de Cohen a un modelo de la teoría de conjuntos, entonces (como se ha mencionado antes) en el modelo resultante $\mathfrak{d} \geqslant \kappa$, mientras que $\mathfrak{s} = \omega_1$ ya que cualquier conjunto formado por reales de Cohen (de los que se agregaron) de tamaño ω_1 constituye una familia separadora.

El número de separación es el más simple de una familia de invariantes cardinales que están definidos en términos de estructuras que no son simultáneamente homogéneas (módulo finito) sobre algún conjunto infinito. Para $\mathfrak{s}$, las "estructuras" son funciones que toman dos valores y "homogéneo" simplemente significa constante. Otras nociones de estructura y de homogeneidad son sugeridas por varios teoremas que se refieren a particiones. Caracterizaremos el análogo de $\mathfrak{s}$ que surge del teorema de Ramsey y después mencionaremos brevemente algunas otras caracterizaciones análogas.

3.4. Un conjunto $H \subseteq \omega$ es *homogéneo* para una función $f\colon [\omega]^n \to k$ (una partición de $[\omega]^n$ en k piezas) si f es constante sobre $[H]^n$. H es *casi homogénea* para f si existe un conjunto finito F tal que $H \setminus F$ es homogéneo para f. Definimos $\mathfrak{par}_n$ como la mínima cardinalidad de cualquier familia de particiones de $[\omega]^n$ en dos piezas tal que ningún conjunto infinito es casi homogéneo para todas ellas simultáneamente.

Notemos que $\mathfrak{par}_1$ es simplemente $\mathfrak{s}$ y que la definición de $\mathfrak{par}_n$ permanecería invariable si permitieramos particiones en cualquier número finito de piezas (cualquiera de estas particiones puede reemplazarse por una cantidad finita de particiones en dos piezas). Notemos también que el uso de la *casi* homogeneidad en la definición de $\mathfrak{par}_n$ es esencial; es fácil exhibir una cantidad numerable de particiones con ningún conjunto infinito homogéneo comun.

3.5. TEOREMA. *Para cualquier entero $n \geqslant 2$, $\mathfrak{par}_n = \min\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que $\mathfrak{par}_n \leqslant \mathfrak{par}_m$ si $n \geqslant m$, ya que cualquier partición $[\omega]^m \to 2$ la podemos ver como una partición de $[\omega]^n$ en la que hemos ignorado los últimos $n - m$ elementos que se encuentran dentro de esta. En particular, tenemos que $\mathfrak{par}_n \leqslant \mathfrak{s}$, y si probamos que $\mathfrak{par}_2 \leqslant \mathfrak{b}$ entonces la desigualdad del teorema en la dirección $\leqslant$ estará demostrada. Para la dirección $\geqslant$, debemos considerar n arbitraria, pero en los hechos limitaremos nuestra atención a $n = 2$, ya que el caso general es un poco más largo pero no más difícil.

Para probar $\mathfrak{par}_2 \leqslant \mathfrak{b}$, sea $B \subseteq {}^\omega\omega$ un conjunto no acotado de tamaño $\mathfrak{b}$, supongamos sin pérdida de generalidad que cada $g \in B$ es monótona creciente (véase por ejemplo el Teorema 2.2 del Capítulo 3), y asociemos a cada una de estas g la partición de $[\omega]^2$ que pone a la pareja $\{x < y\}$ en la clase 0 si $g(x) < y$ y en la clase 1 en otro caso. Probemos que ningún conjunto infinito $H \subseteq \omega$ es casi homogéneo para todas estas particiones simultáneamente. Notemos primero que un conjunto homogéneo de la clase 1 debe ser finito ya que, si x es el primer elemento, entonces todos los otros elementos están acotados por $g(x)$. Así, buscando una contradicción, supongamos que H es infinito y casi homogéneo de la clase 0 para todas las particiones asociadas a las funciones $g \in B$. Consideremos la función h que manda a cada número natural x al segundo miembro de H que se encuentra arriba de x, *i.e.* para cada x se tiene que $x < y < h(x)$ donde $y, h(x) \in H$. Por la casi homogéneidad de H, tenemos para cada $g \in B$ y para toda x suficientemente grande, $g(y) < h(x)$ y entonces, por la monotonía de g, $g(x) < g(y)$. Entonces, $g \leqslant^* h$ para toda $g \in B$, contradiciendo la manera en que elegimos al conjunto B.

Para probar que $\mathfrak{par}_2 \geqslant \text{mín}\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\}$, supongamos que tenemos una familia de particiones $f_\xi \colon [\omega]^2 \to 2$ de cardinalidad $\kappa < \text{mín}\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\}$; debemos encontrar un conjunto infinito casi homogéneo para todas estas particiones. Primero, consideremos las funciones

$$f_{\xi,n} \colon \omega \to 2 : x \mapsto f_\xi\{n, x\}.$$

(Estas funciones están indefinidas para $x = n$; ahí las definimos arbitrariamente.) Dado que el número de estas funciones es $\kappa \cdot \omega < \mathfrak{s}$, existe un conjunto infinito $A \subseteq \omega$ sobre el cual ellas son casi constantes; digamos $f_{\xi,n}(x) = j_\xi(n)$ para toda $x \geqslant g_\xi(n)$ en A. Además, dado que $\kappa < \mathfrak{s}$ podemos encontrar un conjunto infinito $B \subseteq A$ sobre el cual cada j_ξ es casi constante, digamos $j_\xi(n) = i_\xi$ para toda $n \geqslant b_\xi$ en B. Y dado que $\kappa < \mathfrak{b}$ entonces existe una función h que acota a cada g_ξ a partir de algún entero c_ξ. Sea $H = \{x_0 < x_1 < \dots\}$ un subconjunto infinito de B elegido de tal manera que $h(x_n) < x_{n+1}$ para toda n. Entonces esta H es casi homogénea para cada f_ξ. En efecto, si $x < y$ son elementos de H más grandes que b_ξ y c_ξ, entonces $y > h(x) \geqslant g_\xi(x)$ y entonces $f_\xi\{x, y\} = f_{\xi,x}(y) = j_\xi(x) = i_\xi$. □

Uno puede definir invariantes cardinales análogos a $\mathfrak{par}_n$ usando fuertes teoremas de particiones en lugar de usar el teorema de Ramsey, por ejemplo usando el teorema de sumas finitas de Hindman (N. Hindman [**1974**]) o usando el teorema de Galvin-Prikry (F. Galvin y K. Prikry [**1973**]) y su extensión a conjuntos analíticos dada por J. Silver en [**1970**]. No es difícil ver que estos invariantes cardinales están acotados superiormente por $\text{mín}\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\}$. También es fácil ver que las variantes de $\mathfrak{par}$ que nos dan los teoremas de Silver y Galvin-Prikry están acotadas inferiormente por el cardinal $\mathfrak{h}$ (véase 2.8 del Capítulo 2, para la definición de $\mathfrak{h}$). E. T. Eisworth también ha obtenido una cota inferior de la forma $\text{mín}\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}'\}$, donde $\mathfrak{s}'$ es la siguiente variante de $\mathfrak{s}$. Un cardinal κ es $< \mathfrak{s}'$ si, para cualesquiera κ reales, existe

1. un modelo transitivo N de **ZFC** lo suficiente para que contenga a los reales dados,
2. $\mathcal{U} \in N$ tal que N satisfaga "$\mathcal{U}$ no es ultrafiltro principal sobre ω", y
3. un conjunto infinito $a \subseteq \omega$ casi contenido en cada elemento de $\mathcal{U}$.

La demostración de Eisworth usa las técnicas de forcing de H. Judah y S. Shelah de [**1989**], sin embargo se puede dar una pueba directa puramente combinatoria usando el Teorema 4 de A. BLASS de [**1988**]. Notemos, que si debilitamos el requerimiento 2 en la definición de $\mathfrak{s}'$ a solo pedir que $\mathcal{U}$ no sea un ultrafiltro principal en el álgebra Boleana de subconjuntos de ω en N (pero que $\mathcal{U}$ no necesariamente esté en N), entonces el cardinal asi definido será simplemente $\mathfrak{s}$. Sin embargo, no se sabe sí $\mathfrak{s}' < \mathfrak{s}$ es consistente con **ZFC**.

Para la variante de $\mathfrak{par}$ basada en el teorema de Hindman, la mejor cota inferior que se conoce es el cardinal $\mathfrak{p}$. La demostración de que este cardinal es una cota inferior usa la construcción del axioma de Martin (**MA**) que se menciona en A. BLASS [**1987**] página 93, la observación de que el axioma de Martin es aplicado aquí a un orden parcial σ-centrado, y el Teorema de Bell.

También, podemos considerar formas débiles de homogeneidad. Por ejemplo, definamos $\mathfrak{par}_{1,c}$ como la mínima cardinalidad de una familia $\mathcal{F}$ de funciones $f\colon \omega \to \omega$ tal que para ningún conjunto infinito $A \subseteq \omega$ todas las funciones de $\mathcal{F}$ sean casi inyectivas o casi constantes, donde "casi" significa, como es usual, salvo una cantidad finita de puntos de A. (El subíndice $1, c$ hace referencia al teorema de particiones canónicas de conjuntos de tamaño 1.) Cada función f nos proporciona una partición $f'\colon [\omega]^2 \to 2$, donde $f'\{x, y\} = 0$ justamente cuando $f(x) = f(y)$. Los conjuntos donde f es inyectiva o constante son los conjuntos homogéneos de f', por lo que $\mathfrak{par}_{1,c} \geqslant \mathfrak{par}_2$. De hecho la igualdad se tiene, ya que $\mathfrak{par}_{1,c}$ es $\leqslant$ que $\mathfrak{s}$ y $\mathfrak{b}$. Para ver que $\mathfrak{par}_{1,c} \leqslant \mathfrak{s}$, asociemos a cada conjunto X de una familia separadora su función característica. Para ver que $\mathfrak{par}_{1,c} \leqslant \mathfrak{b}$, fijemos por el Teorema 2.10 una familia de $\mathfrak{b}$ particiones en intervalos que no esté dominada por ninguna partición en intervalos, y asociemos para cada una de estas particiones una función f que sea constante exactamente en los intervalos de la partición. Ahora, dado que tales funciones f no son constantes sobre cualquier conjunto infinito, entonces es suficiente con probar que no existe un conjunto infinito A sobre el cual cada f sea casi inyectiva. Pero si existiera tal A, entonces podríamos construir una partición en intervalos en la que cada intervalo contenga al menos tres elementos de A, y esta partición dominaría a todas las particiones de nuestra familia que elegimos, contradiciendo la no dominación de nuestra familia.

Ahora cambiemos nuestro enfoque para contar particiones por contar candidatos para conjuntos homogéneos.

3.6. Una familia $\mathcal{R}$ de subconjuntos infinitos de ω es *no-separada* si ningún conjunto separa a todos los miembros de $\mathcal{R}$. Es *σ-no-separada* si ninguna colección contable de conjuntos es suficiente para separar a todos los miembros de $\mathcal{R}$. El *número de no-separación* $\mathfrak{r}$, también llamado el *número de $\mathfrak{r}$efinación* o *número de $\mathfrak{r}$ecolección*, es la mínima cardinalidad de cualquier familia no-separada. El *número de σ-no-separación* $\mathfrak{r}_\sigma$ es la mínima cardinalidad de cualquier familia σ-no-separada.

Claramente, $\mathfrak{r} \leqslant \mathfrak{r}_\sigma$. Sin embargo, no se sabe sí la desigualdad estricta es consistente con **ZFC**.

Omitimos la demostración del siguiente teorema ya que esencialmente está contenida en la demostración del Teorema 3.2.

3.7. TEOREMA. *$\mathfrak{r}_\sigma$ es la mínima cardinalidad de cualquier familia de conjuntos infinitos $Y \subseteq \omega$ tal que para cada sucesión acotada de números reales $\langle x_n \rangle_{n\in\omega}$, la restricción de $\langle x_n \rangle_{n\in\omega}$ en alguna Y de la familia converge. Si sólo consideramos sucesiones formadas por ceros y unos, entonces la mínima cardinalidad correspondiente es $\mathfrak{r}$.* $\square$

Recalquemos sin embargo que en el Teorema 3.2 los cardinales fueron los mismos para sucesiones con valores reales que para sucesiones con dos valores, la igualdad análoga en el presente teorema es un problema abierto.

3.8. TEOREMA. $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{r}$.

DEMOSTRACIÓN. Como en la demostración del Teorema 3.3, sea φ la operación que manda a cualquier partición en intervalos a la unión de sus intervalos con subíndice par, y sea ψ la operación que manda a cualquier subconjunto infinito X de ω a una partición en intervalos en la que cada intervalo contiene al menos un punto de X. Sea $\mathcal{R}$ una familia no-separada de $\mathfrak{r}$ subconjuntos infinitos de ω; gracias al Teorema 2.10, nuestra demostración se reduce a probar que ninguna partición en intervalos Π domina a todas las particiones $\psi(X)$ para $X \in \mathcal{R}$. Pero, como se probó en la demostración del Teorema 3.3 y recordando la referencia que se encuentra inmediatamente después, si Π domina a todas las $\psi(X)$, entonces $\varphi(\Pi)$ debe separar a cada $X \in \mathcal{R}$, contradiciendo la elección de $\mathcal{R}$. □

Introduciremos ahora los cardinales relacionados con la propiedad de homogeneidad asociada al Teorema de Ramsey y al Teorema de tipo "inyectivo o constante".

3.9. $\mathfrak{hom}_n$ es el tamaño más pequeño de cualquier familia $\mathcal{H}$ de subconjuntos infinitos de ω tal que cada partición de $[\omega]^n$ en dos piezas tiene un conjunto casi homogéneo en $\mathcal{H}$. $\mathfrak{hom}_{1,c}$ es el tamaño más pequeño de cualquier familia $\mathcal{H}$ de subconjuntos infinitos de ω tal que cada función $f\colon \omega \to \omega$ es casi inyectiva o casi constante en algún conjunto en $\mathcal{H}$.

Notemos que $\mathfrak{hom}_1 = \mathfrak{r}$ y que $\mathfrak{hom}_n \geqslant \mathfrak{hom}_m$ si $n \geqslant m$ (lo contrario de la desigualdad correspondiente para $\mathfrak{par}$).

3.10. TEOREMA. *Para cualquier entero $n \geqslant 2$, $\mathfrak{hom}_n = \text{máx}\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}_\sigma\}$. Más aun, $\text{máx}\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}\} \leqslant \mathfrak{hom}_{1,c} \leqslant \text{máx}\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}_\sigma\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Para probar que $\text{máx}\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}\} \leqslant \mathfrak{hom}_{1,c}$, supongamos que $\mathcal{H}$ es como en la definición de $\mathfrak{hom}_{1,c}$, y probemos que su cardinalidad es $\geqslant$ que $\mathfrak{r}$ y $\mathfrak{d}$. Para la primera desigualdad, encontramos que $\mathcal{H}$ es no-separada ya que si X separa a H entonces la función característica de X no es ni casi inyectiva ni casi constante sobre H. Para la comparación con $\mathfrak{d}$, asociemos a cada $H \in \mathcal{H}$ una partición en intervalos Π_H tal que cada uno de sus intervalos contenga al menos tres elementos de H. Por el Teorema 2.10, necesitamos solo verificar que cada partición en intervalos Θ está dominada por alguna Π_H. Dada Θ, sea f constante sobre exactamente estos intervalos, y encontremos $H \in \mathcal{H}$ sobre la cual f sea casi inyectiva (ya que f no es constante sobre cualquier conjunto infinito). Pero entonces cualquier intervalo de Π_H (salvo por una cantidad finita) contiene tres puntos de H, todos de diferentes intervalos de Θ, por lo que debe de contener un intervalo completo de Θ. Por lo tanto tenemos la dominación requerida.

Ahora, probemos que $\mathfrak{hom}_2 \leqslant \text{máx}\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}_\sigma\}$ construyendo una $\mathcal{H}$ de tamaño $\text{máx}\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}_\sigma\}$ con la propiedad de homogeneidad requerida en la definición de $\mathfrak{hom}_2$. (Nótese la similaridad de esta construcción con los argumentos que se usaron para probar que $\mathfrak{par}_2 \geqslant \text{mín}\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\}$.) Sea $D \subseteq {}^\omega\omega$ un conjunto dominante de tamaño $\mathfrak{d}$. Sea $\mathcal{R}$ una familia σ-no-separada de tamaño $\mathfrak{r}_\sigma$. Para cada $A \in R$, sea $\mathcal{R}_A$ una familia no-separada de $\mathfrak{r}$ subconjuntos de A. Para cada $h \in D$, para cada $A \in \mathcal{R}$, y para cada $B \in \mathcal{R}_A$, sea $H = H(h, A, B)$ un subconjunto infinito de B tal que para cualesquiera $x < y$ en H, $h(x) < y$. La familia $\mathcal{H}$ de todos los conjuntos $H(h, A, B)$ tiene tamaño a lo más $\text{máx}\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}_\sigma\}$, y probemos ahora que esta familia contiene un conjunto casi homogéneo para cada partición $f\colon [\omega]^2 \to 2$. Dada f, definimos (como en la demostración del Teorema 3.5) $f_n\colon \omega \to 2\colon x \mapsto f\{n, x\}$. Como $\mathcal{R}$ es σ-no-separada, esta contiene una A sobre la cual cada f_n es casi constante, digamos que $f_n(x) = j(n)$ para toda $x \geqslant g(n)$ en A. La función $j\colon A \to 2$ es casi constante sobre algún B en la familia σ-no-separada $\mathcal{R}_A$, digamos que $j(n) = i$ para toda $n \geqslant b$ en B. Y D contiene una h que domina a g, digamos que $h(x) \geqslant g(x)$ para toda $x \geqslant c$. Es ahora una rutina (como en la demostración del Teorema 3.5) verificar que f es constante con valor i sobre todas las parejas de elementos mayores que b y c en $H(h, A, B)$.

La demostración de que $\mathfrak{hom}_n \leqslant \text{máx}\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}_\sigma\}$ para $n > 2$ es similar a lo hecho en el párrafo anterior solo que se usan n familias σ-no-separadas anidadas en lugar de usar dos. Omitiremos los detalles.

Los argumentos dados arriba, junto con la observación de que "inyectiva o constante" es un caso especial de homogeneidad para particiones de parejas, establecen que

$$\text{máx}\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}\} \leqslant \mathfrak{hom}_{1,c} \leqslant \mathfrak{hom}_2 \leqslant \mathfrak{hom}_3 \leqslant \cdots \leqslant \text{máx}\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}_\sigma\}.$$

Todo lo que resta probar es que $\mathfrak{r}_\sigma \leqslant \mathfrak{hom}_2$, y esto requiere de un método que no está involucrado en el Teorema 3.5. Los siguientes argumentos fueron dados por J. Brendle en [**1995**]. (Shelah había ya establecido con anterioridad el resultado correspondiente para $\mathfrak{hom}_3$.)

Sea $\mathcal{H}$ como en la definición de $\mathfrak{hom}_2$, y sean una cantidad contable de funciones $f_n\colon \omega \to 2$ dadas. Buscaremos un conjunto en $\mathcal{H}$ sobre el cual cada f_n sea casi constante. Definimos, para cada $x \in \omega$, la sucesión de ceros y unos $\widehat{x} = \langle f_n(x)\rangle_{n\in\omega}$, por lo que $\widehat{x}_n = f_n(x)$. Entonces definimos una partición de $[\omega]^2$ poniendo $\{x, y\}$ en la clase 0 si $\widehat{x}$ precede a $\widehat{y}$ en el orden lexicográfico y en la clase 1 en el otro caso. Sea $H \in \mathcal{H}$ un conjunto casi homogéneo para esta partición, sea H' un conjunto homogéneo obtenido por haber removido una cantidad finita de elementos de H. Supongamos que H' es homogéneo para la clase 0. (El caso de la clase 1 es análoga) Entonces como x aumenta, $\widehat{x}_0$ solo puede aumentar. Esto es, si el valor de $f_0(x)$ siempre cambia, entonces este valor cambia de 0 a 1 y después siempre permanece constante. Una vez que $\widehat{x}_0$ se ha estabilizado, $\widehat{x}_1$ solo puede aumentar y por eso debe estabilizarse. Continuando en este camino, observemos que, como x aumenta gracias a los valores en H', cada $\widehat{x}_n$ eventualmente se estabiliza. Esto quiere decir que cada $f_n(x)$ es casi constante sobre H' y por lo tanto sobre H, como se requiere. $\square$

3.11. Observación. El último párrafo de esta demostración es similar a la demostración de que los cardinales que satisfacen la relación de partición $\kappa \to (\kappa)^2_2$ son cardinales que son límites fuertes.

4. Conecciones de Galois-Tukey y dualidad

Interrumpimos las descripciones y discusiones de los invariantes cardinales que estamos tratando, por una maquinaria que es usada para la descripción de muchos (aunque no todos) invariantes cardinales y sus relaciones entre ellos. Esta maquinaria fue presentada por P. Vojtáš en [**1993**] bajo el nombre de "Conecciones generalizadas de Galois-Tukey"; las ideas básicas de esta maquinaria habián sido ya manejadas con anterioridad en el trabajo de D. Fremlin de [**1984**] y en el trabajo de Miller (no publicado). Las definiciones de muchos invariantes cardinales tienen la forma "la mínima cardinalidad de cualquier conjunto Y (de objetos de una clase específica) tal que cada objeto x (posiblemente de una clase diferente) está relacionado con algún $y \in Y$ en un sentido específico". Y muchas demostraciones de desigualdades entre estos cardinales involucran la construcción de mapeos entre varias clases de objetos que están involucradas en las definiciones de estos cardinales. Esto se formaliza como sigue.

4.1. Un terna $\mathbb{A} = \langle A_-, A_+, A\rangle$ formada por dos conjuntos $A_\pm$ y una relación binaria $A \subseteq A_- \times A_+$, la cual llamaremos simplemente una *relación*. Con relación a una de estas relaciones, llamemos a A_- el conjunto de *requerimientos* y A_+ el conjunto de *respuestas*; leemos xAy (esto es $\langle x, y\rangle \in A$) como "$y$ responde *satisfactoriamente* el requerimiento x".

4.2. La *norma* $\|\mathbb{A}\|$ de una relación $\mathbb{A} = \langle A_-, A_+, A\rangle$ es la mínima cardinalidad de cualquier subconjunto Y de A_+ tal que cada $x \in A_-$ está relacionado con al menos un $y \in Y$. Esto es, es el mínimo número de respuestas necesarias para satisfacer todos los requerimientos.

Las definiciones de los invariantes cardinales de las secciones anteriores (asi como muchos otros) son valores de normas de relaciones. Más aun, estos cardinales vienen en parejas, cuyas relaciones son duales una de la otra en el siguiente sentido.

4.3. Si $\mathbb{A} = \langle A_-, A_+, A\rangle$ entonces el *dual* de $\mathbb{A}$ es la relación $\mathbb{A}^\perp = \langle A_+, A_-, \neg\breve{A}\rangle$ donde $\neg$ quiere decir complemento y $\breve{A}$ es el inverso de A; esto es, $\langle x, y\rangle \in \neg\breve{A}$ si y sólo si $\langle y, x\rangle \notin A$.

4.4. EJEMPLOS. Sea $\mathfrak{D}$ la relación $\langle {}^\omega\omega, {}^\omega\omega, <^*\rangle$. Entonces $\|\mathfrak{D}\| = \mathfrak{d}$ y $\|\mathfrak{D}^\perp\| = \|\langle {}^\omega\omega, {}^\omega\omega, \not>^*\rangle\| = \mathfrak{b}$. Por el Teorema 2.10, las mismas igualdades se obtiene si reemplazamos $\mathfrak{D}$ por $\mathfrak{D}' = \langle IP, IP,$ está dominada por$\rangle$.

Sea $\mathfrak{R}$ la relación $\langle \mathcal{P}(\omega), [\omega]^\omega,$ no separa a$\rangle$. Entonces $\|\mathfrak{R}\| = \mathfrak{r}$ y $\|\mathfrak{R}^\perp\| = \mathfrak{s}$.

Sea $\mathfrak{Hom}_n$ la relación $\langle P, [\omega]^\omega, H\rangle$, donde P es el conjunto de particiones $f\colon [\omega]^n \to 2$ y donde fHX significa que X es casi homogéneo para f. Entonces $\|\mathfrak{Hom}_n = \mathfrak{hom}_n\|$ y $\|\mathfrak{Hom}_n^\perp = \mathfrak{par}_n\|$.

Sea $\mathcal{I}$ un ideal de subconjuntos de X. Sea $\mathrm{Cov}(\mathcal{I})$ la relación $\langle X, \mathcal{I}, \in\rangle$ y sea $\mathrm{Cof}(\mathcal{I})$ la relación $\langle \mathcal{I}, \mathcal{I}, \subseteq\rangle$. Entonces $\|\mathrm{Cov}(\mathcal{I})\| = \mathrm{cov}(\mathcal{I})$, $\|\mathrm{Cov}(\mathcal{I})^\perp\| = \mathrm{non}(\mathcal{I})$, $\|\mathrm{Cof}(\mathcal{I})\| = \mathrm{cof}(\mathcal{I})$, y $\|\mathrm{Cof}(\mathcal{I})^\perp\| = \mathrm{add}(\mathcal{I})$.

4.5. OBSERVACIÓN. Anteriormente hemos hecho notar que en la definición de $\mathfrak{d}$ podemos remplazar $\leqslant^*$ por $\leqslant$ sin que $\mathfrak{d}$ sea afectado (véase Teorema 2.5 del Capítulo 3). Esto es, $\mathfrak{d}$ es la norma no solo de la relación $\mathfrak{D}$ definida arriba si no también de la relación $\langle {}^\omega\omega, {}^\omega\omega, \leqslant\rangle$. Sin embargo, el dual de esta relación, tiene norma ω, no $\mathfrak{b}$.

Similarmente, la observación se aplica a $\mathfrak{R}$ y a $\mathfrak{Hom}$.

El siguiente ejemplo muestra otra situación, donde un cambio en la relación no afecta a su norma pero si puede afectar a la norma del dual de la relación.

4.6. EJEMPLO. Sea $\mathfrak{R}_\sigma$ la relación $\langle {}^\omega\mathcal{P}(\omega), [\omega]^\omega,$ no separa a$\rangle$, donde se dice que una ω-sucesión de conjuntos separa a X, si al menos un término de la sucesión separa a X. Entonces $\|\mathfrak{R}_\sigma\| = \mathfrak{r}_\sigma$ y $\|\mathfrak{R}_\sigma^\perp\| = \mathfrak{s}$.

Entonces, tanto $\mathfrak{r}$ como $\mathfrak{r}_\sigma$ pueden considerarse como duales de $\mathfrak{s}$. La dualidad está bien definida en las relaciones pero en general no lo está en los invariantes cardinales.

La siguiente definición recoge la esencia de las construcciones usadas para demostrar muchas desigualdades entre invariantes cardinales.

4.7. Un *morfismo* de una relación $\mathbb{A} = \langle A_-, A_+, A\rangle$ en otra relación $\mathbb{B} = \langle B_-, B_+, B\rangle$ es una pareja $\varphi = \langle \varphi_-, \varphi_+\rangle$ de funciones tales que

- $\varphi_-: B_- \to A_-$
- $\varphi_+: A_+ \to B_+$
- Para toda $b \in B_-$ y $a \in A_+$, si $\varphi_-(b)Aa$ entonces $bB\varphi_+(a)$.

Usamos la terminología "morfismos" en lugar de "conecciones generalizadas de Galois-Tukey" que usa Vojtáš en parte para abreviar y en parte por que nuestra convención difiere de la suya en la dirección. Un morfismo de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$ es una conección generalizada de Galois-Tukey de $\mathbb{B}$ en $\mathbb{A}$.

Es claro de la definiciones que si $\varphi = \langle \varphi_-, \varphi_+\rangle$ es un morfismo de $\mathbb{A}$ en $\mathbb{B}$ entonces $\varphi^\perp = \langle \varphi_+, \varphi_-\rangle$ es un morfismo de $\mathbb{B}^\perp$ en $\mathbb{A}^\perp$.

Relaciones y morfismos forman (como el nombre "morfismo" lo sugiere) una categoría en un modo obvio. Usaremos la notación $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ para denotar los morfismos de la categoría. La categoría tiene productos y coproductos, pero estos parecen ser de poca relevancia para los invariantes cardinales. La dualidad es una involución contravariante.

4.8. TEOREMA. *Si existe un morfismo $\varphi\colon \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ entonces $\|\mathbb{A}\| \geqslant \|\mathbb{B}\|$ y $\|\mathbb{A}^\perp\| \leqslant \|\mathbb{B}^\perp\|$.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente con probar la primera desigualdad, ya que la segunda se sigue de aplicar la primera al morfismo dual $\varphi^\perp$.

Sea $X \subseteq A_+$ de cardinalidad $\mathbb{A}$ que contenga respuestas necesarias para satisfacer todos los requerimientos de A_-. Entonces $Y = \varphi_+(X) \subseteq B_+$ y tiene cardinalidad $\leqslant \|\mathbb{A}\|$, por lo que solo necesitamos verificar que esta contiene respuestas necesarias para satisfacer todos los requerimientos de B_-. Dado $b \in B$, encontramos en X una respuesta x que satisface a $\varphi_-(b)$. Entonces $\varphi_+(x)$ está en Y y satisface a b ya que, por definición de morfismo, $\varphi_-(b)Ax$ implica que $bB\varphi_+(x)$. $\square$

Los morfismos y el Teorema 4.8 estubieron implicitamente en muchas demostraciones de desigualdades de las secciones anteriores. Por ejemplo, la demostración del Teorema 2.10 exhibe morfismos en ambas direcciones entre $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{D}' = \langle IP, IP, \text{está dominada por}\rangle$, donde IP es el conjunto de todas las particiones en intervalos. Ambos morfismos consisten de los mismos dos mapeos (en orden opuesto). Un mapeo manda a cualquier partición en intervalos a una función que manda a cualquier número natural x al extremo derecho del intervalo posterior al intervalo que contiene a x. El otro manda a cualquier función $f \in {}^\omega\omega$ a una partición en intervalos $\{[j_n, j_{n+1}]\colon n \in \omega\}$ tal que $f(x) < j_{n+1}$ para toda $x \leqslant j_n$. La existencia de esta pareja de morfismos implica no solo que $\mathfrak{d} = \|\mathfrak{D}'\|$, si no también, por dualidad, que $\mathfrak{b} = \|\mathfrak{D}'^\perp\|$. Esta última igualdad es justamente la segunda afirmación del Teorema 2.10, cuya demostración habiamos amitido anteriormente.

Los ejemplos anteriores son algo anormales ya que los mismos mapeos nos dan morfismos en ambas direcciones entre las mismas relaciones. Usualmente, uno solo tiene un morfismo en una sola dirección, y por lo tanto una desigualdad más que una igualdad entre invariantes cardinales. Por ejemplo, el punto esencial en la demostración de $\mathfrak{s} \leqslant \mathfrak{d}$ (Teorema 3.3), puede ser expresado diciendo que las funciones φ y ψ definidas en la demostración, constituyen un morfismo $\langle \psi, \varphi\rangle\colon \mathfrak{D}' \to \mathfrak{R}^\perp$. Se sigue entonces que ellas también constituyen un morfismo $\langle \varphi, \psi\rangle\colon \mathfrak{R} \to$

$\mathfrak{D}'^{\perp}$, por lo que obtenemos que $\mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{r}$ (Teorema 3.8). Los morfismos, la dualidad, y el Teorema 4.8 codifican la observación de que los Teoremas 3.3 y 3.8 tienen "esencialmente la misma demostración".

Si $\mathcal{I}$ es un ideal sobre X que contenga a todos los singuletes, entonces por lo visto en los Ejemplos 4.4, las desigualdades $\text{add}(\mathcal{I}) \leqslant \text{cov}(\mathcal{I}) \leqslant \text{cof}(\mathcal{I})$ y $\text{add}(\mathcal{I}) \leqslant \text{non}(\mathcal{I}) \leqslant \text{cof}(\mathcal{I})$ se siguen de la existencia de morfismos de $\text{Cof}(\mathcal{I}) = \langle \mathcal{I}, \mathcal{I}, \subseteq \rangle$ en $\text{Cov}(\mathcal{I}) = \langle X, \mathcal{I}, \in \rangle$ asi como en su dual $\text{Cov}(\mathcal{I})^{\perp} = \langle \mathcal{I}, X, \not\ni \rangle$. El primero puede ser tomando la pareja $\langle S, \text{id} \rangle$, donde S es el mapeo $x \mapsto \{x\}$ y id es el mapeo identidad. El segundo puede ser tomando la pareja $\langle \text{id}, N \rangle$, donde N manda a cada $I \in \mathcal{I}$ a algún elemento de $X \setminus I$.

Las desigualdades $\mathfrak{par}_n \leqslant \mathfrak{b}$ y $\mathfrak{par}_n \leqslant \mathfrak{s}$ en el Teorema 3.5 y sus duales $\mathfrak{hom}_n \geqslant \mathfrak{d}$ y $\mathfrak{hom}_n \geqslant \mathfrak{r}$ en el Teorema 3.10 se obtienen también por morfismos, con una inspección de las demostraciones que las probaron. Lo mismo sucede para la mejora de Brendle de la última de estas desigualdades, con $\mathfrak{r}_\sigma$ en lugar de $\mathfrak{r}$, y lo mismo sucede para las desigualdades análogas para $\mathfrak{par}_{1,c}$ y $\mathfrak{hom}_{1,c}$.

Pero no podemos decir lo mismo (hasta ahora) para las desigualdades inversas, $\mathfrak{par}_n \geqslant \text{mín}\{\mathfrak{b}, \mathfrak{s}\}$ y su dual $\mathfrak{hom}_n \leqslant \text{máx}\{\mathfrak{d}, \mathfrak{r}_\sigma\}$, simplemente por que aquí el mínimo y el máximo no se realizan (hasta ahora) como las normas de relaciones naturales. Existen, afortunadamente, muchas maneras de combinar dos relaciones en una tercera cuya norma sea el máximo (o el mínimo) de las normas de las dos primeras.

Para evitar excepciones triviales, supondremos en lo que sigue que, en las relaciones $\langle A_-, A_+, A \rangle$ bajo consideración, los conjuntos $A_\pm$ son no vacíos. También adoptaremos la convención de usar letras con borde negro para denotar a una relación cuyas componentes son denotadas por las caorrespondientes letras delgadas; esto es $\mathbb{A} = \langle A_-, A_+, A \rangle$.

4.9. El *producto categórico* $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ es $\langle A_- \sqcup B_-, A_+ \times B_+, C \rangle$, donde $\sqcup$ significa unión ajena y donde $xC\langle a, b \rangle$ significa xAa si $x \in A_-$ y xBb si $x \in B_-$.

La *conjunción* $\mathbb{A} \wedge \mathbb{B}$ es $\langle A_- \times B_-, A_+ \times B_+, K \rangle$, donde $\langle x, y \rangle K \langle a, b \rangle$ significa xAa e yBb.

La *composición secuencial* $\mathbb{A}; \mathbb{B}$ es $\langle A_- \times {}^{A_+}B_-, A_+ \times B_+, S \rangle$, donde el superíndice significa un conjunto de funciones y donde $\langle x, f \rangle S \langle a, b \rangle$ significa xAa y $f(a)Bb$.

Las operaciones duales son el *coproducto* $\mathbb{A} + \mathbb{B} = (\mathbb{A}^{\perp} \times \mathbb{B}^{\perp})^{\perp}$, la *disyunción* $\mathbb{A} \vee \mathbb{B} = (\mathbb{A}^{\perp} \wedge \mathbb{B}^{\perp})^{\perp}$, y la *composición secuencial dual* $\mathbb{A} \check{;} \mathbb{B} = (\mathbb{A}^{\perp}; \mathbb{B}^{\perp})^{\perp}$.

Las dos operaciones categóricas son, como su nombre lo suguiere, el producto y el coproducto en la categoría de relaciones y morfismos.

La conjunción fue llamada el producto en una versión preliminar de P. Vojtáš de [**1993**] y por lo tanto algunas veces llamada el *viejo producto*.

El siguiente teorema describe el efecto de estas operaciones sobre las normas. Su demostración es completamente imediata y por lo tanto la omitiremos.

4.10. Teorema.

1. $\|\mathbb{A} \times \mathbb{B}\| = \text{máx}\{\|\mathbb{A}\|, \|\mathbb{B}\|\}$.
2. $\text{máx}\{\|\mathbb{A}\|, \|\mathbb{B}\|\} \leqslant \|\mathbb{A} \wedge \mathbb{B}\| \leqslant \|\mathbb{A}\| \cdot \|\mathbb{B}\|$.
3. $\|\mathbb{A}; \mathbb{B}\| = \|\mathbb{A}\| \cdot \|\mathbb{B}\|$.
4. $\|\mathbb{A} + \mathbb{B}\| = \text{mín}\{\|\mathbb{A}\|, \|\mathbb{B}\|\}$.
5. $\|\mathbb{A} \vee \mathbb{B}\| = \text{mín}\{\|\mathbb{A}\|, \|\mathbb{B}\|\}$.

6. $\|\mathbb{A};\mathbb{B}\| = \text{mín}\{\|\mathbb{A}\|, \|\mathbb{B}\|\}$. □

Cuando las normas son infinitas, máximos y productos son lo mismo, por lo que el segundo y el tercer punto en el teorema se simplifica a $\|\mathbb{A} \wedge \mathbb{B}\| = \|\mathbb{A};\mathbb{B}\| = \text{máx}\{\|\mathbb{A}\|, \|\mathbb{B}\|\}$. (En el caso finito no hay tal simplificación. Ambas desigualdades que involucran a $\|\mathbb{A} \wedge \mathbb{B}\|$ pueden ser estrictas; cosidere $\mathbb{A} = \mathbb{B} = \langle 3, 3, \neq \rangle$.)

4.11. Ejemplo. En la demostración del Teorema 3.10, la parte en la que se prueba que $\mathfrak{hom}_2 \leqslant \text{máx}\{\mathfrak{r}_\sigma, \mathfrak{d}\}$ realmente estamos dando un morfismo de $\mathfrak{R}_\sigma; (\mathfrak{R} \wedge \mathfrak{D})$ en $\mathfrak{Hom}_2$, como se describe a continuación. Por los Teoremas 4.8 y 4.10, la existencia de tal morfismo implica que tanto $\mathfrak{hom}_2 \leqslant \text{máx}\{\mathfrak{r}_\sigma, \mathfrak{r}, \mathfrak{d}\} = \text{máx}\{\mathfrak{r}_\sigma, \mathfrak{r}_\sigma\}$ como $\mathfrak{par}_2 \geqslant \text{mín}\{\mathfrak{s}, \mathfrak{b}\}$ (la parte del Teorema 3.5 que involucra a todos estos tres cardinales simultaneamente).

Para exhibir el morfismo implícito en la demostración del Teorema 3.10, primero describamos a $\mathfrak{R}_\sigma; (\mathfrak{R} \wedge \mathfrak{D})$. Siguiendo las definiciones, encontramos que un requerimiento que importa aquí es una terna $\langle S, F, G\rangle$ donde S es una ω-sucesión de subconjuntos S_n de ω, F es una función que asigna a cada $A \subseteq \omega$ infinito un subconjunto $F(A)$ de ω, y G es una función que asigna a cada una de estas A una función $G(A) \in {}^\omega\omega$. Una respuesta es una terna $\langle A, B, h\rangle$ donde A y B son subconjuntos infinitos de ω y $h \in {}^\omega\omega$. La respuesta $\langle A, B, h\rangle$ satisface el requerimiento $\langle S, F, G\rangle$ si (1) A no es separado por ninguna componente S_n de S, (2) B no es separado por $F(A)$, y (3) $G(A) <^* h$. Usando la notación (f_n, j, g, H) de la demostración del Teorema 3.10 y la notación e_A para la enumeración creciente de un conjunto infinito $A \subset \omega$, podemos describir el morfismo de $\mathfrak{R}_\sigma; (\mathfrak{R} \wedge \mathfrak{D})$ en $\mathfrak{Hom}_2$, como sigue. La parte que se refiere a los requerimientos manda a cualquier partición $f\colon [\omega]^2 \to 2$ a $\langle S, F, G\rangle$, donde S_n tiene como función característica a f_n, donde $F(A)$ tiene como función característica a je_A, y donde $G(A) = g$. (Las funciones j y g en la demostración del Teorema 3.10 dependen de A.) La parte que se refiere a las respuestas en el morfismo manda una terna $\langle A, B, h\rangle$ a $H(h, A, e_A(B))$. La comprobación de que estas dos operaciones constituyen un morfismo se hace como en los Teoremas 3.5 y 3.10.

Observemos que la estructura formal, $\mathfrak{R}_\sigma; (\mathfrak{R} \wedge \mathfrak{D})$, refleja la estructura intuitiva de la demostración del Teorema 3.5. La demostración invoca dos veces la hipótesis $\kappa < \mathfrak{s}$ (correspondientes a $\mathfrak{R}_\sigma$ y $\mathfrak{R}$) y una vez la hipótesis $\kappa < \mathfrak{b}$ (Correspondiente a $\mathfrak{D}$). La primera cosa que se usa de $\kappa < \mathfrak{s}$ es un hecho lógico para proceder con los otros dos pasos (correspondiente a la composición secuencial) ya que el conjunto no separado A obtenido en el primer paso es usado para generar las funciones j y g que se usarán en los otros dos pasos. La segunda cosa que se usa de $\kappa < \mathfrak{s}$ y lo que se usa de $\kappa < \mathfrak{b}$ es para proceder en paralelo, ya que niguno depende del otro (correspondiente a la conjunción).

4.12. Ejemplo. También la composición secuencial ocurre naturalmente en muchas situaciones simples. Consideremos, por ejemplo, la siguiente variante de no-separabilidad: $\mathfrak{R}_3 = \langle {}^\omega 3, [\omega]^\omega, \text{es casi constante sobre}\rangle$. Su norma $\mathfrak{r}_3$ es el mínimo número de subconjuntos infinitos de ω no todos separados por una simple partición de ω en tres piezas. Es fácil ver que este cardinal es igual $\mathfrak{r}$, pero un sentido de la demostración involucra una composición secuencial. Una familia "3-no-separada" se obtiene por principio de una familia no-separada y entonces formando, dentro de cada uno de estos conjuntos, una nueva familia no-separada. La unión de las últimas familias es entonces una familia 3-no-separada. En términos de morfismos, se obtiene un morfismo $\mathfrak{R}; \mathfrak{R} \to \mathfrak{R}_3$ (asi como trivialmente se obtiene que $\mathfrak{R}_3 \to \mathfrak{R}$).

5. Medida y Categoría

A pesar de sus orígenes en el análisis real, las nociones de categorías de Baire y de medida de Lebesgue son, en mayor amplitud, nociones combinatorias. Como tales, ellas tienen relación con algunos objetos que se han discutido en las secciones anteriores. Daremos aquí una concisa presentación de algunos de estos aspectos combinatorios de medida y categoría. Para un tratado más completo de esto, véase por ejemplo el libro de T. BARTOSZYŃSKI y H. JUDAH de [**1995**].

Recordemos la definición de los cuatro invariantes cardinales add,cov,non,cof definidos en 2.7 que están asociados a cualquier ideal propio (que contenga a todos los singuletes) sobre cualquier conjunto. Nos interesarán estos y sus correspondientes relaciones ($\mathrm{Cof}^{\perp}$,Cov, $\mathrm{Cov}^{\perp}$, y Cof, respectivamente, de los Ejemplos 4.4) cuando el ideal es el σ-ideal formado por los conjuntos magro (también llamados de primera categoría) o el σ-ideal formado por los conjuntos de medida de Lesbesgue cero (también llamados conjuntos nulos). Usaremos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$, respectivamente, para denotar a estos ideales. Hemos de indicar que no distinguiremos las nociones del ideal de primera categoría sobre las distintas versiones del continuo, $\mathbb{R}$, ${}^{\omega}2$, ${}^{\omega}\omega$, etc., y de una manera similar para la medida. Las diferentes versiones de cada invariante cardinal serán iguales; las diferentes versiones de cada relación admiten morfismos en ambas direcciones. Permitiremos algo más, esperando que no se preste a confusión, no distingiremos entre un ideal y una base de este. Esto es, queremos pretender que $\mathcal{M}$ consista de los conjuntos de primera categoría de tipo F_σ y que $\mathcal{N}$ consista de los conjuntos nulos de tipo G_δ.

Empecemos nuestro tratado de categorías de Baire por dar una conveniente descripción combinatoria de la noción de primera categoría en el espacio ${}^{\omega}2$. Esta idea fue introducida por M. TALAGRAND en [**1980**].

5.1. Un *real cortado* es una pareja $\langle x, \Pi\rangle$, donde $x \in {}^{\omega}2$ y Π es una partición en intervalos de ω. Denotemos por RC al conjunto de reales cortados ${}^{\omega}2 \times PI$. Un real $y \in {}^{\omega}2$ *iguala* a un real cortado $\langle x, \Pi\rangle$ si $x \restriction I = y \restriction I$ para una cantidad infinita de intervalos $I \in \Pi$.

5.2. TEOREMA. *Un subconjunto M de ${}^{\omega}2$ es de primera categoría si y sólo si existe un real cortado tal que ningún miembro de M lo iguala.*

DEMOSTRACIÓN. El conjunto de reales y que igualan a un real cortado dado $\langle x, \{I_n : n \in \omega\}\rangle$ es

$$\mathrm{Igual}\langle x, \{I_n : n \in \omega\}\rangle = \bigcap_k \bigcup_{n \geqslant k} \{y : x \restriction I_n = y \restriction I_n,$$

la intersección de una cantidad numerable de conjuntos densos abiertos. Por lo tanto $\mathrm{Igual}\langle x, \{I_n : n \in \omega\}\rangle$ es un conjunto comagro, luego entonces la parte "si" del teorema se sigue.

Para probar el "sólo si", supongamos que M es de primera categoría, y fijemos una sucesión $\langle F_n\rangle_{n\in\omega}$ de densos en ninguna parte que cubran a M. Notemos que por la topología canónica (producto) sobre ${}^{\omega}2$, decir que F es denso en ninguna parte significa que para cada sucesión finita $s \in {}^{<\omega}\omega$ existe una extensión $t \in {}^{<\omega}\omega$ tal que ningún $y \in F$ extiende a t. Notemos también que la unión finita de conjuntos densos en ninguna parte es densa en ninguna parte, por lo que podemos arreglar para que $F_n \subseteq F_{n+1}$ para toda $n \in \omega$. Entonces para completar la demostración construiremos un real cortado $\langle x, \{I_n : n \in \omega\}\rangle$ tal que, para cada n, ningún real en F_n concuerde con x en I_n. Esto es suficiente ya que entonces cualquier y que iguale a $\langle x, \{I_n : n \in \omega\}\rangle$ estará fuera de F_n para una cantidad infinita de n's, y por la monotonía fuera de todas ellas, luego fuera de M.

Para definir I_n y $x \restriction I_n$, supongamos que los I_k anteriores $(k < n)$ están ya definidos y son contiguos. Entonces conocemos el punto m en donde I_n empieza. I_n será la unión de 2^m subintervalos contiguos J_i $(i < 2^m)$ definidos como sigue. Enlistemos a todas las funciones de $m \to 2$ como u_i $(i < 2^m)$. Por inducción sobre i, elgimos J_i y $x \restriction J_i$ tales que ningún elemento de F_n es una extensión de $u_i \cup \bigcup_{j \leqslant i}(x \restriction J_j)$. Esta elección es posible ya que F_n es denso en ninguna parte. Finalmente, sea $I_n = \bigcup_{j<2^m} J_j$; teniendo ya definido cada $x \restriction J_j$, tendremos determinada a $x \restriction I_n$.

Si y concuerda con x en I_n, entonces y extiende a $u_i \cup \bigcup_{j \leqslant i}(x \restriction J_j)$ para alguna i, a saber, la i para la cual $u_i = y \restriction m$. Por lo tanto, $y \notin F_n$, como se requería. □

El Teorema prueba que los conjuntos Igual$\langle x, \Pi\rangle$ forman una base de filtro para el filtro de los conjuntos comagros y entonces sus complementos forman una base para el ideal $\mathcal{M}$. Limitaremos nuestra atención a estos complementos cuando discutamos los invariantes cardinales de $\mathcal{M}$ y las relaciones asociadas. Con relación a esto, es muy útil tener la siguiente formulación combinatoria de la contesión entre estos conjuntos; omitiremos la demostración de esta ya que es inmediata.

5.3. PROPOSICIÓN. Igual$\langle x, \Pi\rangle \subseteq$ Igual$\langle x', \Pi'\rangle$ *si y sólo si para todo intervalo* $I \in \Pi$ *(salvo una cantidad finita) existe un intervalo* $J \in \Pi'$ *tal que* $J \subseteq I$ *y* $x' \restriction J = x \restriction J$.
□

Diremos que $\langle x, \Pi\rangle$ *engulle* a $\langle x', \Pi'\rangle$ cuando las condiciones de equivalencia en la prosición anterior se sigan.

Entonces, tenemos morfismos en ambos sentidos entre Cof($\mathcal{M}$) y

$$\mathrm{Cof}'(\mathcal{M}) = \langle RC, RC, \text{es engullido por}\rangle,$$

asi como morfismos en ambos sentidos entre Cov($\mathcal{M}$) y

$$\mathrm{Cov}'(\mathcal{M}) = \langle {}^{\omega}2, RC, \text{no iguala a}\rangle.$$

Notemos que si $\langle x, \Pi\rangle$ engulle a $\langle x', \Pi'\rangle$ entonces Π domina Π'. Combinando esto con los cardinales $\mathfrak{d}$ y $\mathfrak{b}$ (como se ven en el Teorema 2.10) y las caracterizaciones de add($\mathcal{M}$) y cof($\mathcal{M}$) que se dan en Ejemplos 4.4, obtenemos las siguientes desigualdades.

5.4. COROLARIO. add$(\mathcal{M}) \leqslant \mathfrak{b}$ *y* $\mathfrak{d} \leqslant$ cof$(\mathcal{M})$. □

Otras relaciones entre los invariantes cardinales de la Sección 2 y los invariantes cardinales asociados a $\mathcal{M}$, se siguen del Teorema 2.8.

5.5. PROPOSICIÓN. $\mathfrak{b} \leqslant$ non$(\mathcal{M})$ *y* cov$(\mathcal{M}) \leqslant \mathfrak{d}$.

DEMOSTRACIÓN. En ${}^{\omega}\omega$, cualquier conjunto de la forma $\{f : f \leqslant g\}$ es claramente un conjunto denso en ninguna parte (ya que cada sucesión finita en ${}^{<\omega}\omega$ tiene una extensión en ${}^{<\omega}\omega$ con valores más grandes que los valores correspondientes de g). La demostración del Teorema 2.8 prueba, por consiguiente, que todos los conjuntos compactos de ${}^{\omega}\omega$ son densos en ninguna parte y por lo tanto $\mathcal{K}_\sigma \subseteq \mathcal{M}$. Lo cual inmediatamente implica que $\mathrm{cov}(\mathcal{K}_\sigma) \geqslant \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ y que $\mathrm{non}(\mathcal{K}_\sigma) \leqslant \mathrm{non}(\mathcal{M})$. (En efecto, cuando $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$ son ideales, tenemos un morfismo de $\mathrm{Cov}(\mathcal{I}) \to \mathrm{Cov}(\mathcal{J})$ dado por el mapeo identidad sobre los requerimientos y el por el mapeo inclusión sobre las respuestas.) Ahora el Teorema 2.8 completa la demostración. □

Todas las desigualdades que se pueden probar (en **ZFC**) entre los cardinales $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}$, y los cuatro invariantes cardinales asociados a $\mathcal{M}$, se obtienen por transitividad del corolario y la proposición anteriores y en general de los hechos add $\leqslant$ cov $\leqslant$ cof y add $\leqslant$ non $\leqslant$ cof que se tienen en cualquier ideal no trivial. Hay sin embargo dos relaciones más, dadas por A. MILLER en **[1981]** y por J. TRUSS en **[1977]**, cada una involucrando tres de estos cardinales.

5.6. TEOREMA.

1. *Existe un morfismo de* $(\mathrm{Cov}'(\mathcal{M}))^{\perp};\mathfrak{D}'$ *en* $\mathrm{Cof}'(\mathcal{M})$.
2. $\mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \mathrm{máx}\{\mathrm{non}(\mathcal{M}), \mathfrak{d}\}$.
3. $\mathrm{add}(\mathcal{M}) = \mathrm{mín}\{\mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathfrak{b}\}$.

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que para $\mathfrak{D}' = \langle PI, PI, \text{está dominada por}\rangle$, donde PI es el conjunto de particiones en intervalos de ω, se tiene que $\|\mathfrak{D}'\| = \mathfrak{d}$ y que $\|\mathfrak{D}'^{\perp}\| = \mathfrak{b}$. De este modo, si probamos la parte 1 del teorema, entonces las desigualdades $\leqslant$ en la parte 2 y $\geqslant$ en la parte 3 se seguirán de los Teoremas 4.8 y 4.10. Las otras desigualdades de las partes 2 y 3 estaban ya establecidas, así necesitamos solo probar la parte 1.

Un morfismo φ como el que se quiere en la parte 1 deberá consistir de una función φ_- del conjunto de los reales cortados RC en $RC \times {}^{^\omega 2}PI$ y de una función φ_+ de ${}^\omega 2 \times PI$ en RC. Como un mapeo sobre un producto, φ_- consiste de dos mapeos, $\alpha\colon RC \to RC$ y $\beta\colon RC \to {}^{^\omega 2}PI$. Tomaremos a α y φ_+ como los mapeos identidad. (Recordemos que $RC = {}^\omega 2 \times PI$, entonces esto hace tener sentido lo anterior.) Lo que resta es definir β de tal manera que se satisfaga lo requerido por el morfismo, el cual describimos ahora: Para toda $x \in RC$, para toda $y \in^\omega 2$, y para toda $\Pi \in PI$,

$$[y \text{ iguala a } x \text{ y } \Pi \text{ domina a } \beta(x)(y)] \quad \Longrightarrow \quad [\langle y, \Pi\rangle \text{ engulle a } x].$$

No nos importa como definimos $\beta(x)(y)$ cuando y no iguale a x. Si y iguala a x, *i.e.*, si existe una cantidad infinita de intervalos I en la partición que tiene el real cortado x (como una de sus componentes) en los cuales x e y concuerdan, entonces definimos $\beta(x)(y)$ como una partición en intervalos en la que cada intervalo de esta contenga al menos una de tales I. □

5.7. OBSERVACIÓN. En la última parte de la demostración es fácil especificar la β con más detalle de tal manera que $\beta(x)(y)$ sea una función de Borel de x e y; dado que las otras componentes de φ son triviales, podemos decir que la parte 1 del teorema es presenciado por un morfismo de Borel. A. BLASS en **[1996]** probó que no podemos obtener un morfismo de Borel en la parte 1 si reemplazamos aquí el producto secuencial por el producto categórico, o por la adjunción, o por el producto secuencial en el otro orden.

Antes de pasar de categoría a medida, demos una elegante descripción combinatoria de $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$, dada por T. BARTOSZYŃSKI en **[1987]**.

5.8. Dos funciones $x, y \in {}^{\omega}\omega$ son llamadas *infinitamente igual* si existe una infinidad de n's para las que $x(n) = y(n)$ y son llamadas *eventualmente diferentes* en caso contrario, *i.e.*, si $x(n) \neq y(n)$ para toda $n \in \omega$ salvo una cantidad finita.

5.9. TEOREMA.

1. $\operatorname{cov}(\mathcal{M}) = \|\langle {}^{\omega}\omega, {}^{\omega}\omega, \textit{eventualmente diferente a}\rangle\|$.
2. $\operatorname{non}(\mathcal{M}) = \|\langle {}^{\omega}\omega, {}^{\omega}\omega, \textit{infinitamente igual a}\rangle\|$.

DEMOSTRACIÓN. Probaremos solo la parte 1 ya que la parte 2 es el dual de esta. La desigualdad $\leqslant$ es clara una vez que observamos que, para cualquier $x \in {}^{\omega}\omega$, el conjunto de las $y \in {}^{\omega}\omega$ que son eventualmente diferentes a X es de primera categoría. (En efecto, mandando x a este conjunto definimos la mitad de un morfismo de la relación del lado derecho de la parte 1 en $\operatorname{Cov}(\mathcal{M})$ (cuando los reales están siendo tomados en ${}^{\omega}\omega$); la otra mitad del morfismo es el mapeo identidad.)

Para probar la desigualdad $\geqslant$ de la parte 1, probaremos que dada una familia de reales cortados $\{\langle x_\alpha, \Pi_\alpha\rangle : \alpha < \kappa\}$, donde

$$\kappa < \|\langle {}^{\omega}\omega, {}^{\omega}\omega, \text{ eventualmente diferente a}\rangle\|,$$

existe un real y que iguala a cada $\langle x_\alpha, \Pi_\alpha\rangle$.

Notemos que la norma aquí es trivialmente $\leqslant \mathfrak{d}$ (existe un morfismo desde $\mathfrak{D}$ formado por el mapeo identidad en ambas direcciones). Por lo tanto por el Teorema 2.10 existe una partición en intervalos Θ la cual no esta dominada por ninguna Π_α.

Fijemos temporalmente una $\alpha < \kappa$ arbitraria. La no dominación significa que Π_α tiene una cantidad infinita de intervalos que no contienen intervalos de Θ y por lo tanto están cubiertos por dos intervalos adyacentes de Θ. Llamemos a una pareja de intervalos adyacentes buena si estos intervalos cubren un intervalo de Π_α; por lo tanto hay una cantidad infinita de buenas parejas.

Definimos una función f_α sobre ω como sigue. $f_\alpha(n)$ es obtenida por tomar $2n+1$ buenas parejas ajenas, tomar la unión de los dos intervalos de cada pareja para obtener $2n+1$ intervalos $J_0, \ldots, J_{2n}$, y entonces formamos el conjunto de restricciones de x_α en estos intervalos:

$$f_\alpha(n) = \{x_\alpha \restriction J_0, \ldots, x_\alpha \restriction J_{2n}\}.$$

Notemos que, aunque los valores de f_α no son números naturales, ellos pueden ser codificados como números naturales.

Ahora no fijemos a α. Por nuestra hipótesis sobre κ, podemos encontrar una función g infinitamente igual a cada f_α. Sin dañar esta propiedad de g, podemos modificar a g de tal manera que, para cada n, $g(n)$ sea un conjunto de $2n+1$ funciones, cada una mapeando un intervalo de ω en 2. Más aun, podemos modificarla para que estos $2n+1$ intervalos sean ajenos y cada uno de estos sea la unión de dos intervalos adyacentes de Θ. (Cualquier n para el cual $g(n)$ no sea de esta forma no puede contribuir a la concordancia entre g y cualquier f_α, por lo que podemos modificar libremente a $g(n)$ arbitrariamente.)

Definamos por recursión una función $y \colon \omega \to 2$, donde en cada paso especificamos la restricción de y en una cierta pareja de intervalos adyacentes en Θ. Después de que los pasos entre 0 y $n-1$ estan completos, y está definida sobre solo $2n$ intervalos de Θ, entonces al menos uno de los $2n+1$ miembros de $g(n)$, digamos $z(n)$, tine su dominio J ajeno a donde y ya está definida. Extendemos a y para que concuerde con $z(n)$ en J. Esto completa la recursión; si existen lugares en donde y nunca se definio, en estos lugares la definimos arbitrariamente.

Para completar la demostración, probemos que y iguala a cada $\langle x_\alpha, \Pi_\alpha\rangle$. Consideremos cualquier α y una n de la contidad infinta de n's para las que $g(n) = f_\alpha(n)$. En el paso n de la construcción de y, aseguramos que y extiende alguna $z(n) \in g(n) = f_\alpha(n)$. Pero la construcción de $f_\alpha(n)$ asegura que $z(n)$ es la restricción de x_α en un intervalo (la unión de una buena pareja de Θ) que contenga un intervalo de Π_α. Así y concuerda con x_α en tal intervalo de Π_α. Dado que esto ocurre para una cantidad infinita de n's, entonces y iguala a $\langle x_\alpha, \Pi_\alpha\rangle$. $\square$

5.10. OBSERVACIÓN. La demostración anterior exhibe un morfismo de $\mathrm{Cov}'(\mathcal{M})$ en $\mathfrak{D}^{\curvearrowright}_{;}\langle {}^\omega\omega, {}^\omega\omega$, eventualmente diferente a$\rangle$. Ignorando la codificación necesaria para hacer que f_α y g sean funciones en ω, podemos decir que la parte del morfismo referente a los requerimientos es la construcción de y desde Θ y g, y la parte del morfismo referente a las respuestas manda cualquier $\langle x, \Pi\rangle$ (donde hemos omitido el subíndice α que es necesario en la demostración pero no aquí) en la pareja formada por Π y la función que mapea a cualquier Θ no dominado por Π en la función f como en la demostración.

Es un problema abierto sí uno puede omitir la parte "$\mathfrak{D}^{\curvearrowright}_{;}$", *i.e.*, sí existe un morfismo de Borel de $\mathrm{Cov}'(\mathcal{M})$ en $\langle {}^\omega\omega, {}^\omega\omega$, eventualmente diferente a$\rangle$.

Ahora toca el turno de tratar a la medida de Lebesgue (y equivalentemente medidas sobre ${}^\omega 2$, ${}^\omega\omega$,etc.) y sus relaciones con las categorías de Baire. La primera de tales relaciones fue dada por F. ROTHBERGER en [**1938**].

5.11. TEOREMA. *$\mathrm{cov}(\mathcal{M}) \leqslant \mathrm{non}(\mathcal{N})$ y $\mathrm{cov}(\mathcal{N}) \leqslant \mathrm{non}(\mathcal{M})$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea Π una partición en intervalos cuyo n-ésimo intervalo I_n tiene $n+1$ elementos para toda n. Definimos una relación binaria R sobre ${}^\omega 2$ en la que xRy significa que $x \restriction I_n = y \restriction I_n$ para una cantidad infinita de n's, *i.e.*, que y iguale al real cortado $\langle x, \Pi\rangle$. Nótese que R es simétrica y, para cada x, el conjunto $R_x = \{y \colon xRy\}$ es un conjunto comagro de medida cero. (Que sea comagro está probado en el Teorema 5.2. El cálculo para "medida cero" consiste de notar que, una vez que x está fija, las y's que concuerdan con el en I_n forman un conjunto de medida $2^{-(n+1)}$, entonces las y's que concuerdan con x en al menos una I_n más allá de I_k forman un conjunto de medida a lo más 2^{-k}, y por lo tanto las y's que hacen esto para toda k forman un conjunto de medida cero.)

Así, haciendo $\mathbb{R} = \langle {}^\omega 2, {}^\omega 2, R\rangle$, obtenemos morfismos $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathrm{Cov}(\mathcal{N})$ y $\psi \colon \mathbb{R}^\perp \to \mathrm{Cov}(\mathcal{M})$, donde φ_+ y ψ_+ mandan a x en R_x y a ${}^\omega 2 \setminus R_x$ respectivamente, y donde tanto φ_- como ψ_- son la identidad en ${}^\omega 2$. Componiendo cada uno de estos morfismos con el dual del otro, obtenemos morfismos $\mathrm{Cov}(\mathcal{M})^\perp \to \mathrm{Cov}(\mathcal{N})$ y $\mathrm{Cov}(\mathcal{L})^\perp \to \mathrm{Cov}(\mathcal{M})$. Dado que $\mathrm{cov} = \|\mathrm{Cov}\|$ y $\mathrm{non} = \|\mathrm{Cov}^\perp\|$ para ambos ideales, entonces el teorema se sigue. $\square$

5.12. OBSERVACIÓN. La relación R en la demostración anterior puede ser reemplazada por cualquier relación de la forma "$x \oplus y \in M$" donde $\oplus$ es la suma módulo 2 y M es cualquier conjunto comagro de medida cero. Por ejemplo, M puede ser el conjunto de sucesiones de 0's y 1's en las que la densidad de 1's en los segmentos iniciales no se acerca a $1/2$.

En esta forma, la demostración se generaliza a cualquier par de ideales invariantes bajo traslación (con respecto a $\oplus$) que concentran siempre conjuntos ajenos.

Lo que resta de nuestra discusión a cerca de los invariantes cardinales asociados a la medida está basada en una caracterización combinatoria de $\mathrm{add}(\mathcal{N})$, dada por

T. Bartoszyński en [**1984**]. Para formular esta caracterización, necesitamos de la siguiente terminología.

5.13. Una *elección en tamaño* es una función E que asigna a cada $n \in \omega$ un conjunto $E(n) \subset \omega$ de cardinalidad n. Decimos que un real $x \in^{\omega} \omega$ *está entre* una elección en tamaño E si $x(n) \in E(n)$ para una cantidad infinita de n's.

5.14. Teorema. $\operatorname{add}(\mathcal{N})$ *es la mínima cardinalidad de cualquier familia* $\mathcal{F} \subseteq {}^{\omega}\omega$ *tal que no existe ninguna elección en tamaño en la que todos los miembros de* $\mathcal{F}$ *estén entre ella.* □

Para una demostración de este teorema, referimos al lector al artículo original de T. Bartoszyński de [**1984**], al Teorema 2.3.9 del libro de T. Bartoszyński y H. Judah de [**1995**], o al artículo de D. Fremlin de [**1984**].

5.15. Observación. El teorema pemanecería siendo cierto si modificamos la definición de una "elección en tamaño" por pedirle a $E(n)$ que tenga cardinalidad $f(n)$ en lugar de n; aquí f puede ser cualquier función de $\omega \to \omega$ creciente que no sea eventualmente constante. Nos referiremos a esta noción modificada de una elección en tamaño como una f-elección en tamaño (o $f(n)$-elección en tamaño). Supongamos, por ejemplo, que κ es un cardinal tal que cada κ funciones en ${}^{\omega}\omega$ están entre una sola f-elección en tamaño. Para probar que cada κ funciones x_α están entre una sola elección en tamaño en el sentido original, partimos a ω en intervalos tal que el n-ésimo intervalo empiece en o después de $f(n)$. Sea $y_\alpha(n)$ la restricción de x_α en el n-ésimo intervalo. De una f-elección en tamaño en la cual todos los y_α estén entre ella, obtenemos fácilmente una elección en tamaño en el sentido original en la cual todos los x_α estén entre ella.

A pesar de esta observación, no podemos simplificar la definición de una elección en tamaño omitiendo la condición de que $E(n)$ tenga cardinalidad n o $f(n)$ por simplemente requerir que $E(n)$ sea finito. En efecto, con este debilitamiento, el cardinal descrito en el teorema será simplemente $\mathfrak{b}$, el cual puede ser estrictamente mayor que $\operatorname{add}(\mathcal{N})$.

5.16. Teorema. $\operatorname{add}(\mathcal{N}) \leqslant \operatorname{add}(\mathcal{M})$.

Demostración. En vista del Teorema 5.6, es suficiente con probar que $\operatorname{add}(\mathcal{N}) \leqslant \mathfrak{b}$ y que $\operatorname{add}(\mathcal{N}) \leqslant \operatorname{cov}(\mathcal{M})$. La primera desigualdad es inmediata, ya que por el Teorema 5.14, una familia de reales que estén entre una sola elección en tamaño claramente está acotada. (Cabe mencionar que la desigualdad $\operatorname{add}(\mathcal{N}) \leqslant \mathfrak{b}$ fue originalmente probada por A. Miller en [**1984**] antes de que el Teorema 5.14 se conociera.) Para la segunda desigualdad, usemos el Teorema 5.9.

Si $\kappa < \operatorname{add}(\mathcal{N})$ y si damos κ funciones $x_\alpha \in {}^{\omega}\omega$, debemos encontrar una sola función y que sea infinitamente igual a todas ellas. Fijemos una partición en intervalos Π cuyo n-ésimo intervalo I_n tenga cardinalidad $\geqslant n$. Para cada x_α le asociamos una función $x'_\alpha \in {}^{\omega}\omega$ donde x'_α codifica (en algún modo canónico) a $x'_\alpha \restriction I_n$. Sea E una elección en tamaño en la que todos x'_α estén entre ella. Podemos suponer que todos los n elementos de $E(n)$ codifican funciones de $I_n \to \omega$, para los otros elementos podemos reemplazarlos con estos códigos sin que se afecte el hecho de que todos los x'_α estén entre E. Para cada n, elegimos una función $y_n \colon I_n \to \omega$ que concuerde al menos una vez con cada uno de los n miembros de $E(n)$; esto es fácil de hacer, ya que $|I_n| \geqslant n$. Entonces la unión de todos los y_n's es la y deseada.

En efecto, cada x_α concuerda con y al menos una vez en cada I_n salvo una cantidad finita de n's. □

Dado que la demostración da un morfismo, también tenemos el resultado dual.

5.17. Corolario. $\mathrm{cof}(\mathcal{M}) \leqslant \mathrm{cof}(\mathcal{N})$. □

Nuestro análisis de los cuatro clásicos invariantes cardinales asociados a la medida y a categoría, en compañia de los cardinales $\mathfrak{b}$ y $\mathfrak{d}$, está ahora completo, en el siguiente estricto sentido. Si uno asigna a cada uno de estos diez cardinales uno de los valores entre ω_1 y ω_2, y si la asignación es consistente con las equaciones y desigualdades probadas durante toda esta sección, entonces la asignación es realizada en algún modelo de **ZFC**.

Las desigualdades entre estos diez cardinales están resumidas en la siguiente diagrama, conocido como el *diagrama de Cichoń*, en el que una línea que esté conectando dos cardinales indica que el cardinal inferior en el diagrama es $\leqslant$ que el cardinal superior en el diagrama (en **ZFC**).

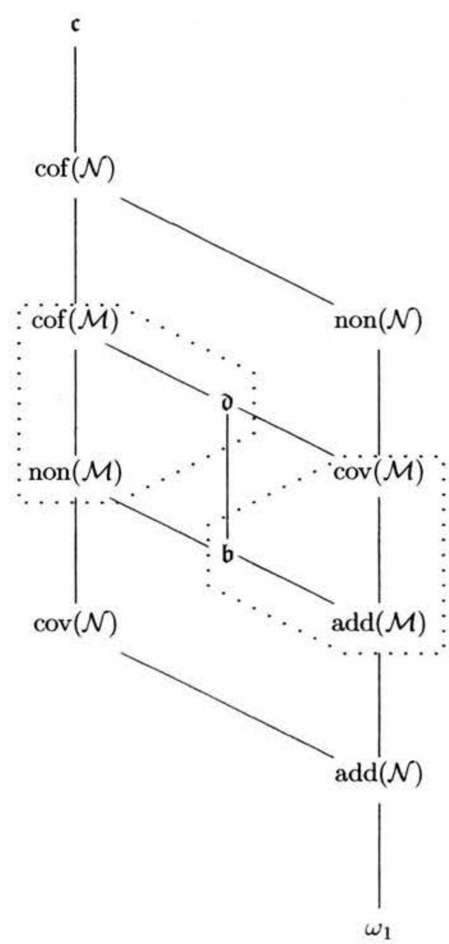


Diagrama 2.

Para concluir esta sección, mostraremos una conección elemental entre los números de cubierta y uniformidad estudiados aquí y los números de separación y refinación de la Sección 3.

5.18. TEOREMA. $\mathfrak{s} \leqslant \mathrm{non}(\mathcal{M}), \mathrm{non}(\mathcal{N})$ *y* $\mathfrak{r} \geqslant \mathrm{cov}(\mathcal{M}), \mathrm{cov}(\mathcal{N})$.

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier conjunto infinito $A \subseteq \omega$, los conjuntos $X \subseteq \omega$ en los que falla la separación de A forman un conjunto U_A de primera de categoría de medida cero. Entonces la función $A \mapsto U_A$ y la función identidad sobre $\mathcal{P}(\omega)$ constituyen un morfismo de $\mathfrak{R}$ en $\mathrm{Cov}(\mathcal{M})$ y también uno en $\mathrm{Cov}(\mathcal{N})$). □

6. Conjuntos dispersos de enteros

Esta sección tratará primordialmente a cerca de dos invariantes, los cardinales $\mathfrak{t}$ y $\mathfrak{h}$, los cuales fueron ya introducidos en 2.8 del Capítulo 2. También trataremos brevemente el invariante cardinal p (también introducido en 2.8 del Capítulo 2) cuya definición se asemeja a las definiciones de $\mathfrak{t}$ y $\mathfrak{h}$.

Empezaremos con recordar la definición de $\mathfrak{t}$ asi como mostrar algunas de sus propiedades simples.

6.1. Una *pseudo-intersección* de una familia de conjuntos $\mathcal{F}$ es un conjunto infinito que está $\subseteq^*$ en cada miembro de $\mathcal{F}$.

6.2. Una *torre* es una sucesión $\langle T_\alpha \colon \alpha < \lambda \rangle$ indicada por un ordinal λ tal que:

1. Cada T_α es un subconjunto infinito de ω.
2. $T_\beta \subseteq^* T_\alpha$ cuando $\alpha < \beta < \lambda$.
3. $\{T_\alpha \colon \alpha < \beta\}$ no tiene pseudo-intersección.

El *número de torre* $\mathfrak{t}$ es la mínima longitud de una torre.

6.3. OBSERVACIÓN. S. H. HECHLER en **[1972]** construyó un modelo en donde ocurre que varios cardinales regulares son longitudes de torres.

Algunos autores definen "torre" usando solo las dos primeros requerimientos de la definición dada arriba, *i.e.*, una sucesión casi decreciente en $[\omega]^\omega$; a lo que nosotros llamamos una torre, ellos le llaman una torre no extendible. También, algunos autores toman como torres a sucesiones casi decrecientes de subconjuntos co-infinitos de ω contrario a las sucesiones casi decrecientes de conjuntos infinitos.

6.4. PROPOSICIÓN. $\mathfrak{t}$ *es un cardinal regular no numerable.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que cualquier subsucesión cofinal de torres es una torre entonces la regularidad de $\mathfrak{t}$ es clara. Para probar que no podemos tener una torre $\langle T_n \colon n \in \omega \rangle$ de longitud ω, notemos que podemos formar un conjunto infinito X tomando cualquier elemento de T_0, cualquier elemento de $T_0 \cap T_1$ diferente del anterior, cualquier elemento de $T_0 \cap T_1 \cap T_2$ diferente de los anteriores, etc., ya que todos estos conjuntos son infinitos. Así, X será una pseudo-intersección, contradiciendo el requerimiento 3 de la definición de una torre. □

Antes de continuar con más propiedades de $\mathfrak{t}$, recordemos a $\mathfrak{h}$ junto con sus propiedades básicas, asi como sus relaciones con $\mathfrak{t}$.

6.5. Una familia $\mathcal{D} \subseteq [\omega]^\omega$ es *abierta* si esta es cerrada bajo casi subconjuntos. Es *densa* si cada $X \in [\omega]^\omega$ tiene un subconjunto en $\mathcal{D}$. El *número de distributividad* $\mathfrak{h}$ es el mínimo número de familias densas abiertas con intersección vacía.

6.6. OBSERVACIÓN. Los conjuntos abiertos como se definieron aquí constituyen una topología sobre $[\omega]^\omega$, la cual llamaremos *topología débil.* Densidad como se definíó aquí concuerda con la densidad topológica en la topología débil. Se pueden hacer definiciones análogas a estas si en lugar de usar $\langle [\omega]^\omega, \subseteq^* \rangle$ usamos cualquier conjunto pre-ordenado.

El nombre de "número de distributividad" proviene de ver a $\langle [\omega]^\omega, \subseteq \rangle$ como una noción de forcing y preguntarse cómo está distribuida la álgebra Boleana completa asociada. Técnicas canónicas de la teoría de forcing prueban que la respuesta está dada por $\mathfrak{h}$.

6.7. PROPOSICIÓN. *La intersección de una cantidad menor que* $\mathfrak{h}$ *de familias densas abiertas es densa abierta.* $\mathfrak{h}$ *es un cardinal regular.*

DEMOSTRACIÓN. La segunda parte se sigue inmediatamente de la primera. Para probar que la intersección de una cantidad menor que $\mathfrak{h}$ de familias densas abiertas $\mathcal{D}_\alpha$ es densa abierta, notemos primero que esta es claramente abierta. Para verificar la densidad, sea X cualquier conjunto infinito de ω y consideremos las familias $\mathcal{D}'_\alpha = \{Y \in \mathcal{D}_\alpha : Y \subseteq X\}$. Estas son una colección de familias densas abiertas de cardinalidad menor que $\mathfrak{h}$, por lo que estas familias tienen un miembro en común Y. Esto es, $Y \subseteq X$ y $Y \subseteq \bigcap_\alpha \mathcal{D}_\alpha$. □

La siguiente proposición asi como parte del próximo teorema, fueron obtenidos ya de una manera indirecta en 3.10 del Capítulo 2. Sin embargo presentamos aquí las pruebas combinatorias de estos hechos.

6.8. PROPOSICIÓN. $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{h}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\kappa < \mathfrak{t}$, y que tenemos κ familias densas abiertas $\mathcal{D}_\alpha$ $(\alpha < \kappa)$ dadas; debemos encontrar un conjunto en su intersección. Definimos una sucesión casi decreciente $\langle T_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ por la siguiente recursión. $T_0 = \omega$. $T_{\alpha+1}$ es cualquier subconjunto de T_α que esté en $\mathcal{D}_\alpha$; este existe ya que $\mathcal{D}_\alpha$ es densa. Si $\lambda \leqslant \kappa$ es un ordinal límite, entonces T_λ es cualquier pseudo-intersección de $\{T_\alpha : \alpha < \lambda\}$; esta existe ya que $\kappa < \mathfrak{t}$ por lo que $\{T_\alpha : \alpha < \lambda\}$ no puede ser una torre, hasta aquí los pasos anteriores aseguran que se satisfacen los dos primeros requerimientos para una torre. Dado que $T_\kappa \subseteq^* T_{\alpha+1}$ para toda $\alpha < \kappa$, obtenemos, gracias al hecho de que $\mathcal{D}_\alpha$ es abierto, que T_κ está en todas las familias $\mathcal{D}_\alpha$. □

Es consistente con **ZFC** que tengamos que $\mathfrak{t} < \mathfrak{h}$. En efecto, P. DORDAL en [**1987**] construye un modelo en donde $\mathfrak{h} = \omega_2 = \mathfrak{c}$ pero en donde no hay torres de logintud ω_2.

Cotas superiores para $\mathfrak{h}$, y por lo tanto también para $\mathfrak{t}$, pueden ser obtenidas a partir de considerar ejemplos específicos de familias densas abiertas. Uno de estos ejemplos es considerar $\{X \in [\omega]^\omega : X \text{ no es separado por } Y\}$ para Y arbitrario. Otro es considerar $\{X \in [\omega]^\omega : \forall x \in X (\text{salvo una cantidad finita }) \forall y \in X\, [x < y \Rightarrow f(x) < y]\}$ para $f : \omega \to \omega$ arbitraria. Usando esto, podemos obtener fácilmente la siguiente proposición, sin embargo daremos otra prueba para indicar otra clase de ejemplos.

6.9. PROPOSICIÓN. $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{b}, \mathfrak{s}$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 3.5 es suficiente con probar que $\mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{par}_2$. Así, sean $\kappa < \mathfrak{h}$ particiones f_α de $[\omega]^2$ dadas; debemos encontrar un conjunto casi homogéneo para todas estas particiones. Para cada α, sea $\mathcal{D}_\alpha$ la familia de todos los subconjuntos infinitos de ω que son casi homogéneos para f_α. Gracias al teorema de Ramsey, $\mathcal{D}_\alpha$ es densa abierta. Por lo tanto existe un conjunto H común a todos estas $\mathcal{D}_\alpha$'s. □

Por el Teorema 6.8, las cotas superiores para $\mathfrak{h}$ también lo son para $\mathfrak{t}$, sin embargo para $\mathfrak{t}$ podemos mejorar la cota $\mathfrak{b}$ por la cota $\mathrm{add}(\mathcal{M})$. Para poder probar esto, necesitaremos del siguiente lema, en el cual $\mathbb{Q}$ denotará el conjunto de los números racionales y "densidad" tendrá el significado topológico usual para subconjuntos de $\mathbb{Q}$. Tanto el lema como el teorema subsecuente son presentados como en Z. PIOTROWSKI y A. SZYMAŃSKI [**1987**].

6.10. LEMA. *Supongamos que $\lambda < \mathfrak{t}$ y que $\langle T_\alpha \colon \alpha < \lambda\rangle$ es una sucesión casi decreciente de subconjuntos densos de $\mathbb{Q}$. Entonces existe un conjunto denso $X \subset \mathbb{Q}$ que está casi contenido en cada T_α.*

DEMOSTRACIÓN. En cada intervalo I con extremos racionales, consideramos la sucesión casi decreciente $\langle T_\alpha \cap I \colon \alpha < \lambda\rangle$ de subconjuntos infinitos de I. Como esta sucesión es en sí misma muy corta para ser una torre, entonces existe un conjunto infinito $Y_I \subset I$ que está casi contenido en todos los T_α's. (La unión de todos estos Y_I es densa, pero no necesariamente está $\subseteq^* T_\alpha$, por lo que trabajaremos un poco más para poder obtener a X.) Enumeremos cada Y_I como una ω-sucesión $\langle y_{I,n}\rangle$. Para cada α, sea $f_\alpha(I) \in \omega$ una cota superior para la cantidad finita de n's para las que $y_{I,n} \notin T_\alpha$. Dado que $\lambda < \mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{b}$ (y el conjunto de intervalos I es numerable), sea g una función del conjunto de intervalos con extremos racionales en ω tal que g domine a todas las f_α's. Entonces

$$X = \bigcup_I \{y_{I,n} \colon n > g(I)\}$$

es denso en $\mathbb{Q}$ (ya que está casi contenido en cada Y_I) y está casi contenido en cada T_α (ya que $X \setminus T_\alpha$ consiste de una cantidad finita de elementos de cada una de las cantidades finitas Y_I donde $g(I) < f_\alpha(I)$). □

6.11. TEOREMA. $\mathfrak{t} \leqslant \mathrm{add}(\mathcal{M})$.

DEMOSTRACIÓN. Debemos probar que si $\kappa < \mathfrak{t}$ entonces la intersección de cualesquiera κ subconjuntos G_α $(\alpha < \kappa)$ densos abiertos de $\mathbb{R}$ es un conjunto comagro. Empezaremos por definir una sucesión casi decreciente $\langle T_\alpha \colon \alpha \leqslant \kappa\rangle$ de subconjuntos densos en $\mathbb{Q}$. Empecemos con $T_0 = \mathbb{Q}$. Para los pasos límite, aplicamos simplemente el Lema 6.10. Para los pasos sucesores, sea $T_{\alpha+1} = T_\alpha \cap G_\alpha$; este es denso ya que es la intersección de dos conjuntos densos uno de los cuales es abierto. Notemos que T_κ está $\subseteq^*$ en cada $T_{\alpha+1}$ $(\alpha < \kappa)$ asi como también está $\subseteq^*$ en cada G_α.

Para $t \in T_\kappa$ y $\alpha < \kappa$, definimos $f_\alpha(t) \in \omega$ como una n para la que $(t - \frac{1}{n}, t + \frac{1}{n}) \subseteq G_\alpha$ si $t \in G_\alpha$, y 0 en otro caso. Dado que T_κ es numerable y $\kappa < \mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{b}$, entonces existe una $g \colon T_\kappa \to \omega$ que domina a todas las f_α's.

Para cada $F \subseteq T_\kappa$ finito, sea

$$U_F = \bigcup_{t \in T_\kappa \setminus F} (t - \frac{1}{g(n)}, t + \frac{1}{g(n)}).$$

Entonces U_F es denso, ya que está casi contenido en T_κ, y este es claramente un abierto; dado que solo hay una cantidad numerable de F's, entonces $\bigcap_F U_F$ es un conjunto comagro, por lo que solo resta probar que esta intersección está casi contenida en la intersección de los G_α's. En efecto, cada G_α contiene uno de los

U_F's; dada α tomamos justamente la F que contenga la cantidad finita de t's que están en $T_\kappa \setminus G_\alpha$ y la cantidad finita de t's en las que $g(t) < f_\alpha(t)$. □

6.12. Observación. Con una iteración con soporte contable del Mathias forcing sobre un modelo de **CH**, podemos obtener un modelo donde $\mathfrak{h} = \omega_2$ pero $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ y por lo tanto $\mathrm{add}(\mathcal{M})$ son solo ω_1 (ya que ningún real de Cohen es producido). Así, el teorema anterior no puede ser mejorado poniendo a $\mathfrak{h}$ en lugar de $\mathfrak{t}$.

El siguiente teorema puede ser visto como otra cota superior sobre $\mathfrak{t}$. Este teorema ha sido ya deducido en 4.2 del Capítulo 2.

6.13. Teorema. *Si $\omega \leqslant \kappa < \mathfrak{t}$ entonces $2^\kappa = \mathfrak{c}$.* □

6.14. Corolario. $\mathfrak{t} \leqslant \mathrm{cof}(\mathfrak{c})$. □

Concluimos esta sección con la reintroducción del cardinal $\mathfrak{p}$. Para esto empecemos con notar que tiene sentido preguntarse a cerca de pseudo-intersecciones de familias más generales que torres. Una clara condición necesaria para que una familia tenga una pseudo-intersección es que esta tenga la propiedad fuerte de la intersección finita la cual definimos más abajo; $\mathfrak{p}$ mide la amplitud para la cual esta condición necesaria es también suficiente.

6.15. Una familia $\mathcal{F}$ de conjuntos infinitos tiene la *propiedad fuerte de la intersección finita* (*pfif*) si cada subfamilia finita tiene intersección infinita. El *número de* $\mathfrak{p}$*seudo-intersección* $\mathfrak{p}$ es la mínima cardinalidad de cualquier familia $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ con la *pfif* sin pseudo-intersecciones.

Dado que una torre es una familia con la *pfif* sin pseudo-intersecciones, obtenemos inmediatamente parte de la siguiente proposición. La otra parte, que $\mathfrak{p}$ sea no numerable, se prueba exactamente como lo hicimos para el caso de $\mathfrak{t}$ (y una mejora de esta demostración viene dada en la Proposición 6.17 dada más abajo).

6.16. Proposición. $\omega_1 \leqslant \mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{t}$. □

No se conoce sí $\mathfrak{p}$ puede ser estrictamente menor que $\mathfrak{t}$, pero el próximo teorema nos muestra que, para que esto suceda, $\mathfrak{p}$ tendría que ser al menos ω_2 y (por lo tanto) $\mathfrak{t}$ tendría que ser al menos ω_3. Para probar dicho teorema, necesitaremos de la siguiente proposición. El teorema asi como una versión de la proposición fueron dados por F. Rothberger en [**1948**].

6.17. Proposición. *Supongamos que $\langle C_n \colon n \in \omega\rangle$ es una sucesión decreciente (o casi decreciente) de subconjuntos infinitos de ω, y que $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de ω de cardinalidad menor que $\mathfrak{d}$ tal que cada conjunto en $\mathcal{A}$ tiene intersección infinita con cada C_n. Entonces $\{C_n \colon n \in \omega\}$ tiene una pseudo-intersección B que tiene intersección infinita con cada conjunto en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Podemos suponer que $\langle C_n \colon n \in \omega\rangle$ es decreciente, por que si esta es casi decreciente entonces podemos reeplazar cada C_n por $\bigcap_{k \leqslant n} C_k$ sin que se afecten las otras hipótesis o la conclusión, ya que cada nuevo C_n difiere solo por una cantidad finita del viejo C_n.

Para cualquier $h \in {}^\omega\omega$, sea $B_h = \bigcup_{n\in\omega}(C_n \cap h(n))$. Cada C_n contiene a todos salvo los primeros n términos de esta unión, por lo tanto B_h es una pseudo-intersección de los C_n's. Lo que falta es elegir h de tal manera que $A \cap B_h$ sea infinito para toda $A \in \mathcal{A}$.

Para tales A, sea $f_A(n)$ el n-ésimo elemento del conjunto infinito $A \cap C_n$. Así, B_h nos puede servir como la B para la proposición si probamos que para toda $A \in \mathcal{A}$ existe una infinidad de n's para las que $h(n) < f_A(n)$. Pero hay una cantidad menor que $\mathfrak{d}$ de funciones f_A, entonces existe una h que no está dominada por ninguna de estas f_A. □

6.18. TEOREMA. *Si* $\mathfrak{p} = \omega_1$ *entonces* $\mathfrak{t} = \omega_1$.

DEMOSTRACIÓN. Dado que $\mathfrak{t} \leqslant \mathfrak{h} \leqslant \mathfrak{b} \leqslant \mathfrak{d}$, el resultado es inmediato si $\mathfrak{d} = \omega_1$. Por lo que supondremos en lo que resta de la demostración que $\mathfrak{d} > \omega_1$.

Por hipótesis tenemos una familia $\mathcal{A} = \{A_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ con la *pfif* pero sin pseudo-intersecciones, la cual podemos suponer que es cerrada bajo intersecciones finitas. Construimos por recursión una torre $\langle T_\alpha : \alpha < \omega_1 \rangle$ de longitud ω_1, asegurandonos en cada paso que T_α tenga intersección infinita con cada $A \in \mathcal{A}$ y que $T_{\alpha+1} \subseteq A_\alpha$. Empecemos con $T_0 = \omega$, y para los pasos límite λ continuamos la torre aplicando la proposición anterior (con $\langle C_n : n \in \omega \rangle$ siendo una subsucesión cofinal de $\langle T_\alpha : \alpha < \lambda \rangle$). Para los pasos sucesores hacemos $T_{\alpha+1} = T_\alpha \cap A_\alpha$. Es fácil verificar que esto nos define una sucesión casi decreciente con las propiedades deseadas. Esta es una torre, ya que cualquier pseudo-intersección de las T_α's también será una pseudo-intersección de las A_α's. □

Con esto concluimos las descripciones y relaciones de los invariantes cardinales que trataremos en este trabajo, no sin antes resumir las desigualdades entre estos cardinales en el siguiente diagrama, en el que una línea que esté conectando dos cardinales indica que el cardinal inferior en el diagrama es $\leqslant$ que el cardinal superior en el diagrama (en **ZFC**).

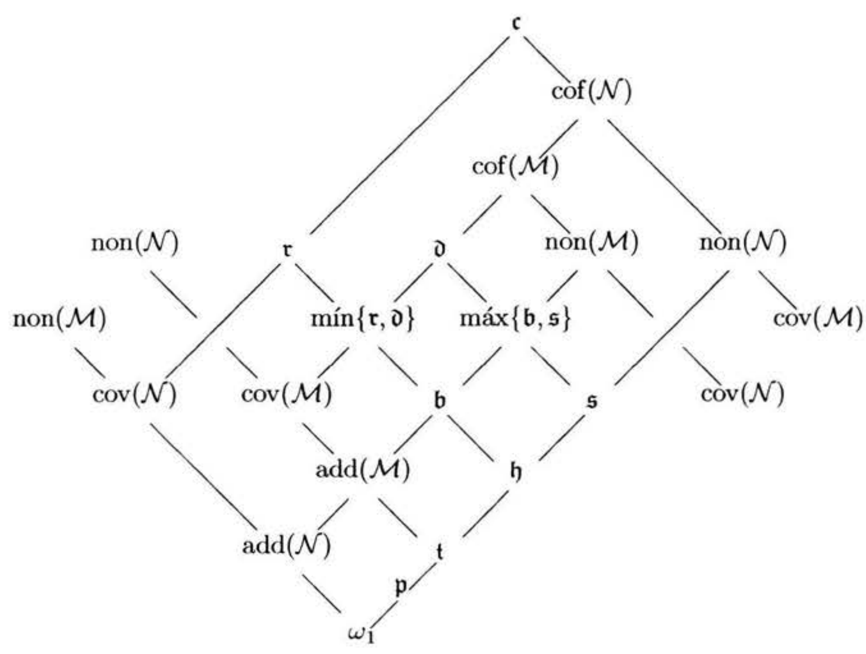


Diagrama 3.

7. Invariantes cardinales bajo axioma de Martin

En esta sección veremos a nuestros invariantes cardinales bajo un principio combinatorio llamado axioma de Martin (**MA** por sus siglas en inglés) el cual describimos a continuación.

7.1. Sea $\langle P, \leqslant \rangle$ un conjunto no vacío parcialmente ordenado. Dos elementos $p, q \in P$ son llamados *compatibles* si ellos tienen una cota inferior común y son llamados *incompatibles* en caso contrario. Una *anticadena* es un conjunto formado por elementos incompatibles por parejas. P satisface la *condición de cadena contable* (ccc) o *condición de anticadena contable* si todas sus anticadenas son contables.

Un subconjunto $D \subseteq P$ es *denso* si cada elemento de P es $\geqslant$ a un elemento de D. Si $\mathcal{D}$ es una familia de subconjuntos densos de P, entonces $G \subseteq P$ es llamado *$\mathcal{D}$-genérico* si este es cerrado superiormente, si cualesquiera dos elementos de este son compatibles, y si este intersecta a cada $D \in \mathcal{D}$.

7.2. El *axioma de Martin* (**MA**) afirma que si $\mathcal{D}$ es una familia de subconjuntos densos de un parcialmente ordenado P con la ccc y $|\mathcal{D}| < \mathfrak{c}$, entonces existe un filtro $\mathcal{D}$-genérico $G \subseteq P$. Más en general, si κ es un cardinal y $\mathcal{K}$ es la clase de los conjuntos no vacíos parcialmente ordenados, entonces escribimos $\mathbf{MA}_\kappa(\mathcal{K})$ para la afirmación que asegura que cada familia de κ subconjuntos densos en un miembro P de $\mathcal{K}$ admite un genérico $G \subseteq P$. $\mathbf{MA}_{<\kappa}(\mathcal{K})$ es definida de una manera análoga. Uno omite el subíndice cuando este es "$< \mathfrak{c}$" y uno omite la clase $\mathcal{K}$ cuando esta es la clase de los parcialmente ordenados con la ccc.

Así, **MA** es $\mathbf{MA}_{<\kappa}$(ccc). Algunos autores escriben $\mathbf{MA}_\kappa$ para entender lo que nosotros llamamos $\mathbf{MA}_{<\kappa}$.

7.3. TEOREMA. **MA** *implica que* $\operatorname{add}(\mathcal{N}) = \mathfrak{c}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $\kappa < \mathfrak{c}$ y que nos dan κ conjuntos $N_\alpha \subset \mathbb{R}$ $(\alpha < \kappa)$ de medida cero. Debemos probar, asumiendo **MA**, que su unión tiene medida 0. Para esto es suficiente con encontrar, para cada ε positiva, un conjunto de medida $\leqslant \varepsilon$ que contenga a todos los N_α como subconjuntos.

Dada ε, Sea P el conjunto de los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ que tengan medida $< \varepsilon$, y ordenemos a P por la contención inversa. En el orden para aplicar **MA** en este P, primero debemos verificar la ccc. Sea una cantidad no numerable de elementos p de P dados. Dentro de cada uno de estos abiertos, encontramos una unión finita $q(p)$ de intervalos abiertos con extremos racionales, lo suficientemente grande para que $\mu(p-q(p)) < \varepsilon - \mu(p)$. Nótese que esto implica que $\mu(p-q(p)) < \frac{1}{2}(\varepsilon - \mu(q(p)))$. Para $q(p)$ sólo hay una cantidad numerable de posibilidades, por lo que dos (de hecho una cantidad no numerable) de las $q(p)$'s deben ser la misma q. Pero entonces la unión de los dos correspondientes p's tine medida $< \varepsilon$ (ya que esta consiste de q mas los dos residuos $p - q$, y cada residuo tiene medida menor que la mitad de $\varepsilon - \mu(q)$), luego entonces está en P y es una cota inferior común para estas dos p's. Así, una familia no numerable de p's no puede ser una anticadena.

Para cada una de las N_α's, sea $D_\alpha = \{p \in P \colon N_\alpha \subseteq p\}$, y notemos que esto es un subconjunto denso de P (ya que un conjunto de medida cero está contenido en conjuntos abiertos de medida arbitrariamente pequeña). Dado que $\kappa < \mathfrak{c}$, **MA** nos provee de un filtro genérico G que intersecta a todos los D_α. Entonces $U_G = \bigcup G$ contiene a todos los N_α. Claramente U_G es abierto. Solo resta ver que $\mu(U_G) \leqslant \varepsilon$. Primero notemos que si $p, q \in G$, entonces ellos tienen una extensión común $r \in G$;

y dado que $r \leqslant p \cup q$, obtenemos que $p \cup q \in G$. Ahora, por inducción sobre n, si $p_1, \dots, p_n \in G$, entonces $p_1 \cup \dots \cup p_n$ está en G y por lo tanto en P, por lo que $\mu(p_1 \cup \dots \cup p_n) < \varepsilon$. Así, por la σ-aditividad de μ, cuando A es un subconjunto contable de G, $\mu(\bigcup A) \leqslant \varepsilon$. G es no numerable, pero probemos ahora que $\bigcup A = \bigcup G$ para un conjunto contable $A \subseteq G$; esto se siguirá del hecho de que la topología de $\mathbb{R}$ tiene una base numerable. Sea $\mathcal{B}$ el conjunto numerable de intervalos abiertos con extremos racionales. Si $x \in p$ para alguna $p \in G$, entonces existe una $q \in \mathcal{B}$ con $x \in q$ y $q \subset p$. Entonces $q \geqslant p$, por lo que $q \in G$ ya que G es un filtro. Así, si $A = G \cap \mathcal{B}$, entonces $\bigcup A = \bigcup G = U_G$, por lo tanto $\mu(U_G) \leqslant \varepsilon$. □

7.4. COROLARIO. **MA** *implica que todos los cardinales en el diagrama de Cichoń son iguales a* $\mathfrak{c}$ *y que* $\mathfrak{r} = \mathfrak{c}$. □

7.5. TEOREMA. **MA** *implica que* $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la familia $\mathcal{F} \subseteq [\omega]^\omega$ tiene la *pfif* y que $|\mathcal{F}| < \mathfrak{c}$. Para encontrar una pseudo-intersección X para $\mathcal{F}$, aplicamos **MA** al siguiente orden parcial P. Un miembro de P es una pareja $\langle s, F\rangle$ donde s es un subconjunto finito de ω y F es un subconjunto finito de $\mathcal{F}$. (El "significado" de la pareja $\langle s, F\rangle$ es que el conjunto deseado X deberá contener a s y deberá, excepto por s, estar contenido en cada $A \in F$.) Ponemos el orden $\langle s', F'\rangle \leqslant \langle s, F\rangle$ si

$$s \text{ es un segmento inicial de } s', \ F' \supseteq F, \ \text{ y } \ \forall A \in F \ [s' \setminus s \subseteq A].$$

Notemos que cualesquiera dos parejas con la misma primera componente son compatibles, ya que podemos tomar justamente la unión de las segundas componentes. Para cada $A \in \mathcal{F}$, el conjunto $D_A = \{\langle s, F\rangle \in P\colon A \in F\}$ es denso, y dado que $\mathcal{F}$ tiene la *pfif* entonces también tenemos que $D_n = \{\langle s, F\rangle \in P\colon |s| > n\}$ es denso. Así, **MA** nos provee de un filtro genérico G que intersecta a todos estos conjuntos densos. Sea $X = \bigcup_{\langle s,F\rangle \in G} s$. Este es un conjunto infinito ya que G intersecta a cada D_n. Para ver que está casi contenido en cada $A \in \mathcal{F}$, usemos que G y D_A tienen un miembro en común $\langle s_0, F_0\rangle$. Esto significa que $A \in F_0$, por lo que probaremos que $X \setminus s_0 \in A$. Cualquier miembro k de $X \setminus s_0$ está en $s \setminus s_0$ para algún $\langle s, F\rangle$ en G, y, como en G cualesquiera dos elementos son compatibles, G contiene un $\langle s', F'\rangle \leqslant$ que $\langle s, F\rangle$ y $\langle s_0, F_0\rangle$. Entonces $k \in s \setminus s_0 \subseteq s' \setminus s_0 \subseteq A$, como se requería. □

7.6. COROLARIO. **MA** *implica que* $\mathfrak{p} = \mathfrak{t} = \mathfrak{h} = \mathfrak{s} = \mathfrak{c}$. □

Por lo tanto todos los invariantes cardinales que discutimos a lo largo de todo este trabajo son iguales a $\mathfrak{c}$ si **MA** se sigue. Sin embargo, estos cardinales pueden tomar distintos valores en varios modelos generados con forcing iterado. La siguiente tabla muestra los valores que toman estos cardinales en varios de estos modelos. Para la descripción de estos forcing's remetimos al lector al artículo de A. BLASS de [**20**∞]. A manera de observación cabe mencionar que en las columnas de Sacks, Laver, Mathias, y Miller de la tabla, $\mathfrak{c}$ es justamente ω_2.

	MA	Cohen	Random	Sacks	Hechler	Laver	Mathias	Miller
$\mathfrak{b}$	$\mathfrak{c}$	ω_1	ω_1	ω_1	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	ω_1
$\mathfrak{d}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	ω_1	ω_1	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$
$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{c}$	ω_1	ω_1	ω_1	ω_1	ω_1	$\mathfrak{c}$	ω_1
$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{c}$	ω_1	ω_1	ω_1	ω_1	ω_1	ω_1	ω_1
$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	ω_1	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	ω_1
$\mathfrak{s}$	$\mathfrak{c}$	ω_1	ω_1	ω_1	ω_1	ω_1	$\mathfrak{c}$	ω_1
$\mathfrak{t}$	$\mathfrak{c}$	ω_1	ω_1	ω_1	ω_1	ω_1	ω_1	ω_1
$\mathrm{add}(\mathcal{N})$	$\mathfrak{c}$	ω_1	ω_1	ω_1	ω_1	ω_1	ω_1	ω_1
$\mathrm{cov}(\mathcal{N})$	$\mathfrak{c}$	ω_1	$\mathfrak{c}$	ω_1	ω_1	ω_1	ω_1	ω_1
$\mathrm{non}(\mathcal{N})$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	ω_1	ω_1	$\mathfrak{c}$	ω_1	$\mathfrak{c}$	ω_1
$\mathrm{cof}(\mathcal{N})$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	ω_1	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$
$\mathrm{add}(\mathcal{M})$	$\mathfrak{c}$	ω_1	ω_1	ω_1	$\mathfrak{c}$	ω_1	ω_1	ω_1
$\mathrm{cov}(\mathcal{M})$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	ω_1	ω_1	$\mathfrak{c}$	ω_1	ω_1	ω_1
$\mathrm{non}(\mathcal{M})$	$\mathfrak{c}$	ω_1	$\mathfrak{c}$	ω_1	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	ω_1
$\mathrm{cof}(\mathcal{M})$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	ω_1	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$	$\mathfrak{c}$

Bibliografía

[1923] ALEXANDROFF, P., URYSOHN, P., Sur les espaces topologiques compacts, *Bull. Intern. Acad. Pol. Sci. Sér.* **A** (1923), 5–8.

[1924] ALEXANDROFF, P., URYSOHN, P., Zur Theorie der topologischen Räume, *Math. Ann.* **92** (1924), 258–266.

[1929] ALEXANDROFF, P., URYSOHN, P., Mémoire sur les spaces topologiques compacts, *Verh. Akad. Wetensch. Amsterdam* **14** (1929).

[1990] ALSTER, K., The product of a Lindeöf space with the space of irrationals under Martin's Axiom, *Proc. Amer. Math. Soc.* **110** (1990), 543–547.

[1946] ARENS, R. F., A topology for spaces of transformations, *Ann. of Math.* **47** (1946), 480–495.

[1965] ARHANGEL'SKIĬ, A. V., Bicompact spaces and the topology of spaces, *Trud. Mosk. Mat. Obc.* **13** (1965), 3–53 ≡ *Trans. Mosk. Math. Soc.* **13** (1965), 1–62.

[1977] ATSUJI, M., On normality of the product of two spaces, *General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra,* Part B, IV, Proc. of the Fourth Prague Top. Symposium 1976, Prague 1977, 25–27.

[1909] BAIRE, R., Sur la représentation des fonctions discontinues (deuxième partie), *Acta Math.* **32** (1909), 97–176.

[1980] BALCAR, B., PELANT, J., SIMON, P., The space of ultrafilters on $\mathbb{N}$ covered by nowhere dense sets, *Fund. Math.* **110** (1980), 11–24.

[1984] BARTOSZYŃSKI, T., Additivity of measure implies additivity of category, *Trans. Amer. Math. Soc.* **281** (1984), 209–213.

[1987] BARTOSZYŃSKI, T., Combinatorial aspects of measure and category, *Fund.Math.* **127** (1987), 225–239.

[1995] BARTOSZYŃSKI, T., JUDAH, H., *Set theory, On the Structure of the Real Line,* A K Peters, 1995.

[1989] BECKER, H., Cofinal families of compact subsets of an analytic set, *Proc. Amer. Math. Soc.* **106** (1989), 853–856.

[1980] BELL, M. G., GINSBURG, J., First countable extensions of uncountable discrete spaces, *Canad. Math. Bull.* **23** (1980), 397–399.

[1934] BESICOVITCH, A. S., Concentrated and rarified sets of points, *Acta Math.* **62** (1934), 289–300.

[1987] BLASS, A., Ultrafilters related to Hindman's finite unions theorem and its extensions, In S. Simpson, editor, *Logic and Combinatorics,* volume **65** of *Contemp. Math.,* Amer. Math. Soc. (1987), 89–124.

[1988] BLASS, A., Selective ultrafilters and homogeneity, *Ann. Pure Appl. Logic.* **38** (1988), 215–255.

[1996] BLASS, A., Reductions between cardinal characteristics of the continuum, In T. Bartoszyński and M. Scheepers, editors, *Set Theory (Annual Boise Extravaganza in Set Theory conference, 1992–94),* volume **192** of *Contemp. Math.,* Amer. Math. Soc. (1996), 31–49.

[20∞] BLASS, A., Combinatorial Cardinal Characteristics of the Continuum, *to appear in Handbook of Set Theory.*

[1974] BOOTH, D., A Boolean view of sequential compactness, *Fund. Math.* **85** (1974), 99–102.

[1995] BRENDLE, J., Strolling through paradise, *Fund. Math.* **148** (1995), 1–25.

[1977] BURKE, D. K., VAN DOUWEN, E. K., On countably compact extensions of locally compact M-spaces, *Set-theoretic Topology* (G. M. Reed, ed.), Academic Press, New York 1977, 81–89.

[1984] BURKE, D. K., DAVIS, S., Subsets of ω^ω and generalized metric spaces, *Pacific J. Math.* **110** (1984), 273–281.

[1997] BURKE, M., A proof of Hechler's theorem on embendding $\aleph_1$-directed sets cofinally into $({}^\omega\omega, <^*)$, *Arch. Math. Logic.* **36** (1997), 399–403.

[1937] ČECH, E., On bicompact spaces, *Ann. Math.* **38** (1937), 823–844.

[1998] CHANDLER, R. E., FAULKNER, G. D., Hausdorff compactifications: a retrospective, *Handbook of the History of General Topology* (C. E. Aull and R. Lowen, eds.), Volume **2**, Kluwer Acadamic Publishers, Dordrecht 1998, 631–667.

[1963] COHEN, P. J., The independence of the continuum hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.* **50** (1963), 1143–1148.

[1939] DIEUDONNÉ, J., Sur les espaces topologiques susceptibles d'être munis d'une structure uniforme d'espace complet, *C. R. Acad. Paris.* **209** (1939), 666-668.

[1987] DORDAL, P., A model in with the base-matrix tree cannot have cofinal branches, *J. Symbolic Logic.* **52** (1987), 651–664.

[1976] VAN DOUWEN, E. K., Functions from the integers to integers and topology, invited talk, *Spring Topology Conferece*, Auburn, March 1976.

[1984] VAN DOUWEN, E. K., The integers and topology, *Handbook of Set-Theoretic Topology* (K. Kunen and J. E. Vaughan, eds.), North-Holland, Amsterdam 1984, 111–167.

[1988] VAN ENGELEN, F., Cofinal families of compacta in separable metric spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **104** (1988), 1271–1273.

[1989] ENGELKING, R., *General Topology,* Revised and completed edition, Sigma Series in Pure Mathematics, vol. **6**, Heldermann Verlag, Berlin 1989.

[1906] FRÉCHET, M., Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rend. del Circ. Mat. di Palermo* **22** (1906), 1–74.

[1984] FREMLIN, D., Cichoń's diagram, In G. Choquet, M. Rogalski, and J. Saint Raymond, editors, *Séminaire Initiation à l'Analyse*, Plublications Mathématiques de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris 1984, 501–513.

[1985] FRIČ, R., VOJTÁŠ, P., The space ${}^\omega\omega$ in sequential convergence, *Convergence Structures 1984, Proceeding of the Conference on Convergence, Bechyně Czechoslovakia* (J. Novák, W. Gähler, H. Herrlich, and J. Mikusiński, eds.), Akademie–Verlag, Berlin 1985, 95–106.

[1973] GALVIN, F., PRIKRY, K., Borel sets and Ramsey's theorem, *J. Symbolic Logic.* **38** (1973), 193–198.

[1940] GÖDEL, K., *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of the Set Theory*, Annals of Mathematical Studies, Volume **3**, Princeton University Press, Priceton, N.J., 1940.

[1914] HAUSDORFF, F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzing 1914.

[1924] HAUSDORFF, F., Die Mengen G_δ in vollständigen Räumen, *Fund. Math.* **6** (1924), 146–148.

[1927] HAUSDORFF, F., *Mengenlehre*, Berlin 1927.

[1970] HECHLER, S. H., Independence results concerning a problem of N. Lusin, *Math. Syst. Theory.* **4** (1970), 316–321.

[1972] HECHLER, S. H., Short complete nested sequences in $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ and small maximal almost-disjoint families, *Gen. Topology Appl.* **2** (1972), 139–149.

[1974] HECHLER, S. H., On the existence of certain cofinal subsets of ${}^\omega\omega$, *AMS Proc. Symp. Pure Math.* **13**. II. (1974), 155–173.

[1975A] HECHLER, S. H., On a ubiquitous cardinal, *Proc. Amer. Math. Soc.* **52** (1975), 348–352.

[1975B] HECHLER, S. H., On some weakly compact spaces and their generalizations, *Gen. Topology Appl.* **5** (1975), 83–93.

[1974] HINDMAN, N., Finite sums from sequences within cells of a patition of N, *J. Combin. Theory Ser. A.* **17** (1974), 1–11.

[1980] ISMAIL, M., NYIKOS, P., On spaces in which countably compact subsets are closed, and hereditary properties, *Top. Appl.* **11** (1980), 281–292.

[1937] JONES, F. B., Concerning normal and completely normal spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **43** (1937), 671–677.

[1989] JUDAH, H., SHELAH, S., Δ^1_2 sets of reals, *Ann. Pure Appl. Logic.* **42** (1989), 207–223.

[1960A] KATĚTOV, M., Remarks on characters and pseudocharacters, *Comm. Math. Univ. Car.* **1** (1) (1960), 20–25.

[1960B] KATĚTOV, M., On the space of irrational numbers, *Comm. Math. Univ. Car.* **1** (2) (1960), 38–42.

[1995] KECHRIS, A. S., *Classical Descriptive Set Theory*, volume **156** of *Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlang, 1995.

[1980] KUNEN, K., *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, Volume **102** of *Studies in Logic*, North–Holland, Amsterdam 1980.

[1976] KURATOWSKI, A., MOSTOWSKI, A., *Set Theory*, PWN, Warszawa, y North–Holland, Amsterdam 1976.

[1990] LAWRENCE, L. B., The influence of a small cardinal on the product of a Lindelöf space and the irrationals, *Proc. Amer. Math. Soc.* **110** (1990), 535–542.

[1918] LUZIN, N., SIERPIŃSKI, W., Sur quelques propriétés des ensembles, *Bull. Int. Acad. Sci. Cracovie Série* **A** *Sci. Math.* (1918), 35–48.

[1973] MALYHIN, V. I., ŠAPIROVSKIĬ, B. È., Martin's Axiom and properties of topological spaces, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **213** (1973), 531–535 $\equiv$ *Sov. Math. Dokl.* **14** (1973), 1746–1751.

[1917] MAZURKIEWICZ, S., Teoria zbiorów G_δ, *Wektor* **6** (1917–18), 129–185. (Theory of G_δ-sets)

[1963] MICHAEL, E. A., The product of a normal space and a metric space need not be normal, *Bull. Amer. Math. Soc.* **69** (1963), 375–376.

[1971] MICHAEL, E. A., Paracompactness and the Lindelöf property in finite and countable Cartesian products, *Compositio Math.* **23** (1971), 119–214.

[1983] VAN MILL, J., WILLIAMS, S. W., A compact F-space not coabsolute with $\beta\mathbb{N} - \mathbb{N}$, *Top. Appl.* **15** (1983), 59–64.

[1981] MILLER, A., Some properties of measure and category, *Trans. Amer. Math. Soc.* **78** (1981), 93–114.

[1984] MILLER, A., Additivity of measure implies dominating reals, *Proc. Amer. Math. Soc.* **91** (1984), 111–117.

[1999] MOORE, J. T., Some of the combinatorics related to Michael's problem, *Proc. Amer. Math. Soc.* **127** (1999), 2459–2467.

[1956] MRÓWKA, S., On universal spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III,* **4** (1956), 479–481.

[1958] MRÓWKA, S., A property of Hewitt extension νX of topological spaces, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astr. Phys.* **6** (1958), 95–96.

[1953] NOVÁK, J., On the cartesian product of two compact spaces, *Fund. Math.* **40** (1953), 106–112.

[2000] OLIVARES, J., SESTIER, A., VILLEGAS, L. M., *Lecturas Básicas en Topología General,* Aportaciones Matemáticas (Sociedad Matemática Mexicana), Serie Comunicaciones, Número **28**, México 2000.

[1987] PIOTROWSKI, Z., SZYMAŃSKI, A., Some remarks on category in topological spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **101** (1987), 156–160.

[1937] POSPÍŠIL, B., Remark on bicompact spaces, *Ann. Math.* **38** (1937), 845–846.

[1977] RANČIN, D. V., Tightness, sequentiality and closed coverings, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **232** (1977), 1015–1018 $\equiv$ *Sov. Math. Dokl.* **18** (1977), 196–200.

[1938] ROTHBERGER, F., Eine Äquivalenz zwischen der Kontinuumhypothese und der Existenz der Lusinschen und Sierpińskischen Megen, *Fund. Math.* **30** (1938), 215–217.

[1939A] ROTHBERGER, F., Une remarque concernant l'hypothèse du continu, *Fund. Math.* **31** (1939), 224–226.

[1939B] ROTHBERGER, F., Sur un ensemble toujours de première catégorie qui est dépourvu de la propriété λ, *Fund. Math.* **32** (1939), 294–300.

[1941] ROTHBERGER, F., Sur les familes indenombrables de suites de nombres naturels et les problèmes concernant la propriété C, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **37** (1941), 109–126.

[1948] ROTHBERGER, F., On some problems of Hausdorff and of Sierpiński, *Fund. Math.* **35** (1948), 29–46.

[1971] RUDIN, M. E., A normal space X for which $X \times I$ is not normal, *Fund. Math.* **73** (1971), 179–186.

[1975] RUDIN, M. E., The normality of products whith a compact factor, *Gen. Topology Appl.* **5** (1975), 45–59.

[1975] RUDIN, M. E., STARBIRD, M., Products with a metric factor, *Gen. Topology Appl.* **5** (1975), 235–248.

[1966] SCARBOROUGH, C. T., STONE, A. H., Products of nearly compact spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **124** (1966), 131–147.

[1915] SIERPIŃSKI, W., Hommeomorfizm przestrzeni wymiernych, *Wektor* **4** (1914–15), 215–221. (Homeomorphism of rational spaces)

[1920] SIERPIŃSKI, W., Sur une propriété topologique des ensembles dénombrables denses en soi, *Fund. Math.* **1** (1920), 11–16.

[1921] SIERPIŃSKI, W., Sur les ensembles connexes et non connexes, *Fund. Math.* **2** (1921), 81–95.

[1970] SILVER, J., Every analytic set is Ramsey, *J. Symbolic Logic.* **35** (1970), 60–64.

[1977] SOLOMON, R. C., Families of sets and functions, *Czech. Math. J.* **27** (102) (1977), 556–559.

[1947] SORGENFREY, R. H., On the topological product of paracompact spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947), 631–632.

[1980] TALAGRAM, M., Compacts de fonctions mesurables et filtres non mesurables, *Studia Math.* **67** (1980), 13–43.

[1993] TALAYCO, D., Applications of Homological Algebra to Questions in Set Theory: Gaps and Trees, PhD thesis, University of Michigan, 1993.

[1952] TERASAKA, H., On cartesian products of compact spaces, *Osaka Math. J.* **4** (1952), 11–15.

[1984] TKAČENKO, M. G., On compactness of countably compact spaces having additional structure, *Trudy Moskov. Mat. Obšč.* **46** (1983), 145–163 ≡ *Trans. Moscow Math. Soc.*, **Issue 2** (1984), 149–167.

[1977] TRUSS, J., Sets having calibre $\aleph_1$, In R. O. Gandy and J. M. E. Hyland, editors, *Logic Colloquium 76*, volume **87** of *Stud. Logic Found. Math.*, North-Holland, Amsterdam 1977, 595–612.

[1930] TYCHONOFF, A., Über die topologische Erweiterung von Räumen, *Math. Ann.* **102** (1930), 544–561.

[1935] TYCHONOFF, A., Ein Fixpunktsatz, *Math. Ann.* **111** (1935), 767–776.

[1993] VOJTÁŠ, P., Generalized Galois-Tukey connections between explicit relations on clasical objects of real analysis, In H. Judah, editor, *Set theory of the Reals*, volume **6** of *Israel Math. Conf. Proc.*, Amer. Math. Soc. 1993, 619–643.

[1984] VAUGHAN, J. E., Countably compact and sequentially compact spaces, *Handbook of Set Theoretic–Topology* (K. Kunen and J. E. Vaughan, eds.), North–Holland, Amsterdam 1984, 569–602.