



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

“FORMULACION CANONICA DE Dp-BRANAS CONFORMES”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

FISICO

PRESENTA:

ADRIAN VAZQUEZ MARQUEZ



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS
DR. JOSE DAVID VERGARA OLIVER



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

2004



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Formulación Canónica de Dp-branas Conformes"

realizado por Vázquez Márquez Adrián

con número de cuenta 09315046-8 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de Tesis
Propietario

Dr. José David Vergara Oliver

Propietario

Dr. Rodolfo Patricio Martínez y Romero

Propietario

Dr. Michio Durdevich Lucich


Suplente

Dr. José Antonio García Zenteno

Suplente

Dr. Merced Montesinos Velásquez

Consejo Departamental de Física


DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE
Coordinadora de Licenciatura

SECRETARÍA DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres, Félix Vázquez y Amanda Márquez por todo el apoyo incondicional que me han dado hasta el día de hoy, y por el cual ha sido posible, además de innumerables cosas, el llevar a cabo esta tesis, y la completación de mi carrera. Y a mis hermanos Félix Octavio y Gabriel.

A mis abuelos paternos Félix y Virginia, así como también a mis abuelos maternos Tomas y Juana, que en paz descanse (siempre se te recordará). Además de todos mis tíos y primos a los cuales los quiero mucho.

También quiero agradecer a todos mis amigos, en especial a Gabriela Camacho, quienes directa o indirectamente me apoyaron en el desarrollo de este trabajo, ya sea con su apoyo moral o alguna discusión sobre el tema.

A todos mis sinodales, empezando por el Dr. David Vergara quien me orientó y me apoyo bastante durante todo este tiempo, y a los Dres. Micho Durdevich, José Antonio García, Rodolfo Martínez y Merced Montesinos, cuyos comentarios y correcciones ayudaron a mejorar este trabajo y dieron pauta para presentes y futuras indagaciones bibliotecarias.

A la Universidad Nacional Autónoma de México que me proporcionó facilidades y servicios indispensables para el desarrollo de toda mi carrera, además de reunir bajo una misma institución amigos y maestros entrañables, quienes por un lado me brindaron su amistad y por otro inspiración para continuar mis estudios y llegar a ser un profesionista de buen nivel.

Por último agradezco al Proyecto CONACyT 40745-F por cuyo apoyo se solventó el costo de impresión de esta tesis.

Índice General

| | |
|---|----------|
| Agradecimientos | i |
| Lista de figuras | v |
| Introducción | vii |
| 1 Sistemas Hamiltonianos con constricciones | 1 |
| 1.1 Introducción | 1 |
| 1.2 Dinámica para sistemas con un número finito de grados de libertad | 2 |
| 1.3 Teoría clásica de campos | 7 |
| 1.3.1 Formalismo Lagrangiano | 7 |
| 1.3.2 Formalismo Hamiltoniano | 10 |
| 1.4 Sistemas Hamiltonianos con Constricciones | 13 |
| 1.4.1 Condiciones de Regularidad | 14 |
| 1.4.2 El Hamiltoniano Canónico | 16 |
| 1.4.3 Ecuaciones de movimiento en forma Hamiltoniana | 18 |
| 1.4.4 Constricciones Secundarias | 19 |
| 1.4.5 Ecuaciones débiles y fuertes | 21 |
| 1.4.6 Restricciones sobre los multiplicadores de Lagrange | 21 |
| 1.4.7 Hamiltoniano Total | 22 |
| 1.4.8 Funciones de primera y segunda clase | 23 |
| 1.5 Constricciones de primera clase | 24 |
| 1.5.1 Transformaciones de norma | 24 |
| 1.5.2 El Hamiltoniano Extendido | 25 |
| 1.6 Constricciones de segunda clase | 26 |
| 1.6.1 Separación de las constricciones | 26 |
| 1.6.2 El Paréntesis de Dirac | 26 |
| 1.7 Fijación de la norma | 28 |
| 1.7.1 Normas Canónicas | 28 |
| 1.7.2 Conteo de los grados de libertad | 29 |
| 1.8 Ejemplos | 30 |
| 1.8.1 Partícula Relativista | 30 |
| 1.8.2 Campo Electromagnético | 35 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 2 | La Cuerda Relativista | 41 |
| 2.1 | Introducción | 41 |
| 2.2 | La Cuerda Relativista Clásica | 42 |
| 2.3 | Formulación Canónica | 51 |
| 2.4 | Reducción de Norma y Quantización | 57 |
| 3 | Acciones de p-branas bosónicas | 65 |
| 3.1 | Introducción | 65 |
| 3.2 | Acción de Nambu-Goto | 66 |
| 3.3 | Acción tipo Schild | 69 |
| 3.4 | Acción de Polyakov | 72 |
| 3.5 | Acción Conforme I | 75 |
| 3.6 | Acción Conforme II | 79 |
| 3.7 | Método Parent Action | 83 |
| 3.7.1 | Acción S_{parent}^I | 84 |
| 3.7.2 | Acción S_{parent}^{II} | 85 |
| 3.7.3 | Acción S_{parent}^{III} | 87 |
| 3.7.4 | Acción S_{parent}^{IV} | 88 |
| 3.8 | Formulación Canónica de p -branas | 90 |
| 3.8.1 | Acción de Nambu-Goto | 90 |
| 4 | D-branas | 93 |
| 4.1 | Introducción | 93 |
| 4.2 | Acción de Dirac-Born-Infeld | 94 |
| 4.3 | Acción de Abou-Hull | 97 |
| 4.4 | Acción Conforme I | 103 |
| 4.5 | Acción Conforme II | 104 |
| 5 | Soluciones para la acción Conforme II | 109 |
| 5.1 | Introducción | 109 |
| 5.2 | Acción Conforme II | 109 |
| 5.3 | Límite de bajas energías | 114 |
| | Apéndice A | 117 |
| | Conclusiones | 123 |
| | Bibliografía | 125 |

Índice de Figuras

| | | |
|-----|----------------------|----|
| 1.1 | Condiciones de norma | 30 |
| 2.1 | Cuerda Relativista | 43 |

Introducción

El modelo estándar es una de las teorías más prolíficas y exitosas en toda la historia de la Física, esta teoría describe tres de las cuatro interacciones fundamentales en la naturaleza, a saber, las interacciones electromagnética, débil y fuerte, bajo el grupo de norma $U(1) \otimes SU(2) \otimes SU(3)$; pero, a pesar de esto, el modelo estándar presenta algunas debilidades como por ejemplo la de presentar diversos parámetros arbitrarios, diecinueve para ser exactos, y la incapacidad para explicar la existencia de tres generaciones de fermiones, de aquí que esta teoría solo se considere como una teoría efectiva de otra teoría más fundamental, la cual, además, incluiría a la interacción faltante, la gravedad, descrita por la relatividad general, la cual, a su vez, es la teoría por excelencia del macrocosmos. La unificación de estas dos teorías, teoría cuántica de campos y relatividad general, es uno de los principales problemas teóricos a resolver de la Física moderna. Hasta hace poco tiempo se creía que la solución experimental de este problema no iba a tener cabida en mucho tiempo, pero un fenómeno relacionado con rayos cósmicos pone en duda este hecho.¹

En la búsqueda de una solución para este problema, se ha incorporado la supersimetría, simetría bajo intercambio de bosones por fermiones, en teorías cuánticas de campo. Con esta simetría implementada la gravedad se incorpora una vez que la supersimetría se hace local, construyéndose así una teoría de supergravedad. Otro ejemplo de una teoría con supersimetría local es la teoría de supercuerdas, en la cual todas las partículas se consideran como los modos vibracionales de éstas. Entre otras ventajas que presenta esta teoría con respecto a otras, se tiene que explica el origen de las partículas, unifica la gravedad con la materia, explica como remover las divergencias encontradas en gravedad cuántica, y, finalmente, incorpora las simetrías del modelo estándar, aunque el modelo no se puede derivar con todo detalle de esta teoría; asimismo, y para ser imparciales existen otras desventajas, como por ejemplo esta teoría reemplaza el problema de la determinación de los 19 parámetros del modelo estándar por el de determinar un solo parámetro, pero no se podrían calcular los anteriores parámetros a partir de éste; para una discusión más extensa véase [40]. A pesar de lo anterior, esta teoría es una de las más prometedoras para resolver la unificación de las interacciones fundamentales.

Dentro de este rubro, es decir, teorías potencialmente resolutivas se encuentra también la geometría no conmutativa, a grosso modo esta teoría estudia espacios no como un conjunto de puntos,

¹Los datos experimentales encontrados en rayos cósmicos de alta energía están en contradicción con las predicciones de la relatividad especial, lo que llevó a proponer a algunos autores una segunda escala absoluta en la teoría de la relatividad especial, la cual impone, simultáneamente, una cota sobre la energía y el momento de las partículas fundamentales. Aunque no se ha dicho la última palabra en el tema, las consecuencias sobre las interacciones fundamentales serían revolucionarias, obligando a replantear el esquema de cuantización de la relatividad general [4].

dotado de una estructura adicional, v.g. una topología sobre él, sino a través de un álgebra no conmutativa de funciones sobre el espacio, en donde se puede prescindir del concepto de punto [14, 25].

Es precisamente esta característica, la que relaciona a la física de altas energías con geometría no conmutativa, debido a que muchos de los problemas que aparecen en teoría cuántica de campos tienen que ver con la suposición de que el espacio-tiempo es una variedad suave. De hecho, si se encontrará una descripción coherente del espacio-tiempo, la cual no tuviera puntos sobre escalas muy pequeñas, del orden de la longitud de Planck, entonces las divergencias ultravioletas de la teoría cuántica de campos se podrían eliminar [32]. En el contexto de física de altas energías se encuentra uno de los mayores logros de la geometría no conmutativa, la formulación del modelo estandar de interacciones fundamentales hecha por Connes, la cual dota de un principio geométrico natural e inherente al modelo [25].

Retomando el contexto de la teoría de cuerdas, se tienen dos áreas importantes para estudiar la esta teoría, una de ellas es el régimen perturbativo y la segunda es el no perturbativo. El régimen perturbativo de la teoría de cuerdas se puede formular en términos de la teoría de campos conforme, y a pesar de los resultados obtenidos con esta teoría, se tienen todavía varios problemas, ya que ésta no describe cabalmente nuestra realidad física de bajas energías, aparte de que esta teoría es inestable a escalas de Planck; lo anterior tiene por resultado el considerar efectos no perturbativos.

Debido a que el contexto en donde el presente trabajo tiene lugar es el régimen no perturbativo, se dará una breve introducción, lo anterior llevará irremediablemente a definiciones y conceptos preconcebidos, para los cuales se necesita un conocimiento previo por parte del lector. No obstante, este conocimiento no tiene que ser exhaustivo. Además, varios de estos conceptos no se usaran a lo largo del presente trabajo, debido a que solo servirán para establecer el contexto en el cual esta inmerso el desarrollo del trabajo.

En el régimen no perturbativo se buscan soluciones solitónicas ² de la teoría de cuerdas, las cuales sirven para entender mejor esta teoría. Para ser precisos, estas soluciones se buscan en una teoría de campo efectiva de bajas energías que describa a las cuerdas en una escala de longitud grande comparada con longitud fundamental de la teoría de cuerdas $l_s = \sqrt{\alpha'}$. En el caso de la teoría de cuerdas tipo IIA y IIB, la teoría de campo efectiva es una teoría de supergravedad en $D = 10$ del tipo IIA y IIB. Respecto a las simplificaciones, se toman algunos campos de supergravedad distintos de cero, a saber, la métrica, el dilatón, y uno de los campos de Ramond-Ramond (RR). Las ecuaciones de campo se obtienen de una acción truncada que involucre estos campos. Se impone después la máxima condición de simetría compatible con las ecuaciones de campo, es decir, se impone la invarianza de Poincaré en el volumen de mundo e invarianza rotacional en las direcciones transversas de la solución. Esto lleva al llamado *p-brane ansatz* para los campos [8], [43].

Con este método se encuentran soluciones, las más simples, en forma de hiperplanos $(p + 1)$ -dimensionales de Poincaré encajados en el espacio D -dimensional de la acción truncada, estos hiperplanos pueden ser vistos a su vez como volúmenes de mundo de superficies p -dimensionales.

²Un solitón es una solución independiente del tiempo, con energía finita, localizada, de las ecuaciones de movimiento clásicas de una teoría de campo no lineal.

Por lo anterior, a estas soluciones se les llama p -branas.

Dependiendo del *ansatz* para los campos RR, se tienen dos tipos de soluciones, las eléctricas y las magnéticas; la anterior denominación esta en analogía con los conceptos de la teoría electromagnética de Maxwell. Por ejemplo, los potenciales de norma expresados como $(p+1)$ -formas se acoplan con volúmenes de mundo $(p+1)$ -dimensionales, éste último será un objeto cargado vía integración de Gauss, involucrando el campo de fuerza, derivado del respectivo potencial y expresado como una $(p+2)$ -forma; el volumen de mundo así encontrado se denomina "eléctrico". Por otro lado, el campo de fuerza visto como una $(p+2)$ -forma tiene asociado una $(D-p-2)$ -forma dual, involucrando a la métrica en su definición, y una carga magnética; de esta manera al volumen de mundo asociado con el campo de fuerza dual se le denomina "magnético", [8].

De hecho la diferencia entre estas dos soluciones estriba también en el término fuente que aparece debido al *ansatz* para cada tipo de solución, por ejemplo, para una solución "eléctrica", la p -brana actúa como una fuente del tipo delta y en este caso se puede ver a estos objetos como fuentes de "materia"; por cierto, esta es una característica importante, debido a que existe una imposibilidad para acoplar, en teorías de supergravedad, campos externos de "materia", lo cual, como se observó, no implica que haya acoplamientos con otros objetos que actúen como tales. No obstante, ambos tipos de soluciones en teoría de cuerdas son solitónicas [31], [43].

Por otro lado, estas p -branas son "extremas" en el sentido de que la densidad de masa de la solución satura una cota del tipo Bogomol'ny con respecto a su densidad de carga, a estas soluciones se les llama estados BPS. La saturación de la cota indica que estos objetos son ciertos multipletes especiales del álgebra supersimétrica, y todas estas soluciones comparten la propiedad de dejar parte de la supersimetría preservada. Si la teoría tiene una extensión de la supersimetría, la masa y el número de multipletes en el espectro no cambia por correcciones cuánticas, incluso en el acoplamiento fuerte. Por lo tanto, los estados BPS juegan un papel muy importante en el estudio de la dualidad acoplamiento fuerte-débil en teoría de cuerdas, [46].

Estas soluciones tienen otra característica importante, el comportamiento de la tensión tiene la forma $T_p \sim g_s^{-1} l_s^{-p-1}$. Es necesario resaltar que la dependencia en la constante de acoplamiento difiere del comportamiento estándar de los efectos solitónicos en teorías de campo, en los cuales el comportamiento es proporcional a g^{-2} . Este comportamiento de RR p -branas es completamente cuerdista, por llamarlo de alguna forma. Debido a que las contribuciones de cuerdas abiertas son de la forma g^{-1} para diagramas de disco, se sospecha que estas soluciones están relacionadas con cuerdas abiertas, a pesar de que la teoría de supergravedad del tipo II aparece como un límite a bajas energías de una teoría de cuerdas cerradas, [8].

Existe, a partir de este comportamiento, un límite simple pero interesante; aún cuando la densidad de masa de una p -brana tiende a infinito cuando el acoplamiento tiende a cero, $g_s \rightarrow 0$, su interacción gravitacional de la forma $G_N T_p \sim g_s$ tiende a cero. Lo anterior sugiere que deben existir descripciones planas de estos objetos involucrando cuerdas abiertas, de hecho estas cuerdas tienen la restricción de que sus extremidades se muevan sobre esta superficie, y debido a que la tensión tiende a infinito si $g_s \rightarrow 0$, su dinámica se detiene. Estos objetos límite reciben el nombre de D -branas. Es difícil pensar que estos objetos son totalmente rígidos, y de hecho no lo son, de

bido a que las cuerdas que se mueven sobre la superficie inducen campos de norma en ésta, y éstos a su vez inducen curvatura; por otra parte la cuantización de estos campos de norma inducen fluctuaciones en la D -brana, por lo anterior, la hipersuperficie mencionada es un objeto dinámico, [39].

La importancia de las D -branas apareció, en cambio, en el contexto de dualidad, en donde ésta propiedad mapea cuerdas cerradas en una teoría en estados correspondientes a D -branas en la teoría dual. Y desde entonces se han encontrado muchas aplicaciones para estos objetos. Por su parte, la asociación de D -branas con hiperplanos en el espacio-tiempo sucedió después en el contexto de compactificación de la teoría de cuerdas abiertas [39], [42].

A continuación se enumeran las propiedades más sobresalientes de las p -branas:

1. Por construcción estas soluciones están cargadas eléctrica o magnéticamente bajo los apropiados campos RR.
2. También por construcción, estas configuraciones preservan una fracción de la supersimetría la cual, por el *ansatz*, resulta ser la mitad, esta supersimetría restante (16 supercargas) es el equivalente de $N = 1$ en $D = 10$ o $N = 4$ en $D = 4$.
3. Su masa (tensión) tiene el comportamiento peculiar g^{-1} .
4. Dualidad T relaciona p -branas con $(p \pm 1)$ -branas.
5. Existen descripciones de tipo hiperplano "rígido" involucrando cuerdas abiertas (D -branas).

Es en este contexto donde el presente trabajo tiene lugar, es decir, se analizarán las propiedades de estas soluciones solitónicas, aunque no en el sentido supersimétrico, sino más bien en el bosónico, lo cual, apesar de ser más simple, no deja de perder importancia debido a que los resultados obtenidos se pueden extender al caso supersimétrico.

A continuación se explica brevemente³ el contenido, por capítulos, del presente trabajo:

En el capítulo 1, se desarrollará la teoría de Dirac para hamiltonianos con constricciones, así como la resolución, utilizando la metodología respectiva, de ejemplos sencillos.

En el capítulo 2, se estudiará la cuerda relativista bosónica de Nambu-Goto, realizando su formulación canónica además de su respectiva cuantización, lo anterior desde el punto de vista de un sistema con constricciones.

En el capítulo 3, se expondrán y demostrarán las características de algunas acciones de p -branas bosónicas. Asimismo, se demostrará la equivalencia clásica entre estas acciones, y calcularán la

³En cada capítulo, y de manera individual, se dará una introducción y una exposición, de forma exhaustiva, del contenido respectivo de cada capítulo.

ecuaciones de movimiento de sus campos bosonicos. Después de la presentación de las acciones de p -branas, se utiliza el método "parent action", el cual genera nuevas acciones de p -branas a partir de acciones conocidas de antemano. Con este método, se generará la acción de Polyakov y la acción Conforme I. Por último, se desarrollará el formalismo Hamiltoniano de la acción de Nambu-Goto para p -branas.

En el capítulo 4, se estudiarán las características de acciones de D -branas bosonicas, partiendo de la acción de Dirac-Born-Infeld para llegar a una acción, llamada acción Conforme II, la cual es, con la introducción de un campo escalar auxiliar, invariante de Weyl para toda p y también cuadrática en $F_{\mu\nu}$. Por último, se realizó un acoplamiento conforme del campo escalar auxiliar con los campos de norma sobre la D -brana.

En el capítulo 5, se encuentran soluciones a la acción Conforme II reduciendo esta acción de D -branas bosonicas a una acción, para toda p , de p -brana bosonica, pero con el campo escalar auxiliar, para ser precisos su logaritmo, promovido a una variable dinámica y jugando un papel de dimensión extra en el espacio donde esta encajada la p -brana. Además para $p = 3$ se analiza una solución de la D -brana, en donde los campos de norma se toman como las componentes del potencial electromagnético. Por otro lado, mediante una aproximación de la acción de Dirac-Born-Infeld, pero con la métrica inducida por el acoplamiento conforme, se pone de manifiesto la propiedad de dimensión transversal de la dimensión extra encontrada, además de simplificar la acción considerablemente.

Capítulo 1

Sistemas Hamiltonianos con constricciones

1.1 Introducción

Las teorías físicas de relevancia fundamental tienden a ser teorías de norma. Estas son teorías en las cuales el sistema físico a tratar, es descrito por más variables que los grados de libertad independientes. Los grados de libertad con significado físico aparecen, por lo tanto, como aquellos invariantes ante una transformación conectando las variables, llamada transformación de norma.

Una teoría de norma se distingue por tener un lagrangiano L singular¹, lo cual tiene por consecuencia que al pasar al formalismo hamiltoniano de la teoría, aparezcan constricciones, es decir, relaciones entre las variables canónicas.

Intentos por manipular teorías de norma datan de los años treinta. Se debe a P.G. Bergmann y colaboradores el esclarecimiento de la conexión entre constricciones y las propiedades de invarianza de una teoría, particularmente interesante en teorías de campo.

El análisis clásico y las ideas básicas de cuantización de estos sistemas se deben a Dirac (1950). En 1969, Faddeev sugirió el método de cuantización y construcción de la integral funcional para teorías con constricciones lineales y de primera clase en los momentos, en normas canónicas. Después, Fradkin, en 1977, consideró la cuantización de teorías con constricciones de primera y segunda clase en dichas normas así como su extensión al caso de variables de Grassman.

A pesar de que el método de cuantización canónica tiene ventajas esenciales, este no es manifiestamente covariante. Las formulaciones que mantienen la covariancia manifiesta en la descripción cuántica son más convenientes, debido a que la simetría de norma puede usarse para probar la renormabilizabilidad y/o la unitariedad de la teoría. De esta forma, Fradkin, Vilkovisky, Batalin y Vasiliev trataron la cuantización de sistemas hamiltonianos con constricciones en normas relativistas.

Un método alternativo de cuantización de teorías de norma es la cuantización lagrangiana,

¹Un lagrangiano singular es aquel para el cual $\det(\partial^2 L / \partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j) = 0$.

formulación manifiestamente covariante. Para teorías invariantes bajo grupos de Lie, las reglas de cuantización lagrangiana fueron formuladas por De Witt, Faddeev, Popov y Mandelstam. En la literatura estas reglas se conocen por el nombre de reglas de Faddeev y Popov.

En este capítulo, se comienza introduciendo la dinámica para sistemas con un número finito de grados de libertad, mediante la formulación lagrangiana y hamiltoniana de tales sistemas. Posteriormente, se extienden estas formulaciones al caso infinito, es decir, a la teoría clásica de campos.

Después se desarrollará la teoría de Dirac para hamiltonianos con constricciones, lo anterior debido a que una teoría de norma es un sistema hamiltoniano con tales características, dando definiciones esenciales de la teoría, como por ejemplo las definiciones de constricciones de primera y segunda clase, así como la manipulación de estas estructuras para obtener la dinámica de tales sistemas. A pesar de que el desarrollo de esta teoría se realizará para sistemas con grados de libertad finitos, se aplicará esta teoría, más bien, para campos, sin exponer los problemas y sutilezas que se presentan al momento de realizar la extensión respectiva, lo anterior se debe al hecho de que para las teorías de campo aquí presentadas esta extensión es trivial.

Para finalizar, se ilustrará la metodología mencionada con ejemplos sencillos, a saber, la partícula relativista, y el campo electromagnético.

1.2 Dinámica para sistemas con un número finito de grados de libertad

Supóngase que se tiene un sistema con un número finito de grados de libertad cuya dinámica puede ser derivada de un acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^k, \dot{q}^k, t), \quad (1.1)$$

donde L es el Lagrangiano, el cual depende de las coordenadas generalizadas q^k , ($k = 1, \dots, N$), de las velocidades generalizadas $\dot{q}^k = \frac{d}{dt}q^k$ y del tiempo t . El Lagrangiano es llamado regular, si el determinante del Hessiano

$$W_{ij} := \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}, \quad (1.2)$$

no es idénticamente cero, como función de las q^k , \dot{q}^k y t . La regularidad es una propiedad del Lagrangiano y no del sistema descrito por él.

La acción es una funcional de las q^k y las trayectorias clásicas q_c^k son puntos estacionarios de S . Una condición necesaria para su existencia es que la variación de la acción sea cero $\delta S = 0$, con lo cual, se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange (E-L) (para $t_1 < t < t_2$)

1.2. DINÁMICA PARA SISTEMAS CON UN NÚMERO FINITO DE GRADOS DE LIBERTAD 3

$$L_k = \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = 0 \quad \text{en} \quad q^k = q_c^k, \quad (1.3)$$

las L_k son llamadas las derivadas de Euler de L con respecto de q^k . Además se obtiene una condición en la frontera

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta q^k \right|_{t_1} - \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \delta q^k \right|_{t_2} = 0, \quad (1.4)$$

esta condición se cumple si se mantiene fijos los puntos inicial y final, *i.e.*, $\delta q^k(t_1) = \delta q^k(t_2) = 0$. Las ecuaciones de E-L se pueden escribir como

$$L_k = V_k(q, \dot{q}, t) - W_{kj}(q, \dot{q}, t) \dot{q}^j = 0, \quad (1.5)$$

donde W es el Hessiano (1.2) y

$$V_k = \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial t} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial q^j} \dot{q}^j = 0. \quad (1.6)$$

En el caso regular, donde $\det W \neq 0$, todas las ecuaciones de E-L son de segundo orden y funcionalmente independientes. Bajo ciertas condiciones existen soluciones en el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$; y estas son únicas después de que $2N$ constantes de integración se fijan, por ejemplo, por los valores iniciales $q^k(t_1)$ y $\dot{q}^k(t_1)$. También, estas constantes pueden fijarse por $q^k(t_1)$ y $q^k(t_2)$, las cuales se mantienen en la variación de S .

Junto con la formulación de Lagrange existe otra formulación debida a Hamilton, la cual se obtiene, primero, tomando la diferencial total del Lagrangiano L

$$\begin{aligned} dL &= \frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} d\dot{q}^k \\ &= \frac{\partial L}{\partial t} dt + \frac{\partial L}{\partial q^k} dq^k + d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k\right) - \dot{q}^k d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right), \end{aligned}$$

después se reescribe ésta como

$$d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \dot{q}^k - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \frac{\partial L}{\partial q^k} dq^k + \dot{q}^k d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}\right), \quad (1.7)$$

y se define

$$p_k := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}, \quad (1.8)$$

llamado momento generalizado; así como

$$H := p_k \dot{q}^k - L, \quad (1.9)$$

llamado Hamiltoniano Canónico; por lo tanto, de estas definiciones (1.7) se transforma en

$$dH = -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \frac{\partial L}{\partial q^k} dq^k + \dot{q}^k dp_k, \quad (1.10)$$

la anterior expresión sugiere el considerar al Hamiltoniano como una función de (q, p, t) en vez de (q, \dot{q}, t) . Sin embargo, solo en el caso regular la ecuación que define el momento generalizado (1.8) puede resolverse unívocamente para las \dot{q}^k . Esto resulta al considerar que

$$W_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j}, \quad (1.11)$$

y si $\det W \neq 0$, el teorema de la función inversa garantiza que existe una única solución $\dot{q}^k = \dot{q}^k(q, p, t)$. Solo en este caso se puede cambiar del conjunto de variables (q, \dot{q}, t) al conjunto (q, p, t) de una forma biyectiva. Los espacios en los cuales estas diferentes variables sirven como coordenadas, tienen los siguientes nombres: al espacio generado por las q^k es el espacio de configuración, y (q^k, \dot{q}^k) describe el espacio-fase de velocidades, y por último (q^k, p_k) describe el espacio-fase de momentos (o simplemente espacio-fase); (q^k, \dot{q}^k, t) y (q^k, p_k, t) son coordenadas locales en el espacio-estado de velocidades y espacio-estado de momentos, respectivamente. Comparando $dH(q, p, t)$ con (1.10) se encuentra que

$$\left(\dot{q}^k - \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) dp_k - \left(\frac{\partial L}{\partial q^k} + \frac{\partial H}{\partial q^k} \right) dq^k - \left(\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) \equiv 0. \quad (1.12)$$

Debido a que en el caso regular las coordenadas y los momentos son variables independientes, se concluye que si esta identidad se cumple entonces los coeficientes de las diferenciales también tienen que ser cero, es decir:

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad (1.13a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q^k} = -\frac{\partial H}{\partial q^k}, \quad (1.13b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1.13c)$$

Para las soluciones de las ecuaciones de E-L se tiene

$$\frac{\partial L}{\partial q^k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = \dot{p}_k, \quad (1.14)$$

con lo cual, (1.13b) se convierte en

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k}. \quad (1.15)$$

Las ecuaciones (1.13a, c, 1.15) se llaman ecuaciones Hamiltonianas de movimiento. Estas forman un conjunto de $2N$ ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden, las cuales tienen una única solución después de que N coordenadas y N momentos, para $t = t_1$, se han dado. Las ecuaciones de Hamilton se pueden derivar directamente de la siguiente acción:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt (p_k \dot{q}^k - H(q, p, t)), \quad (1.16)$$

variando a S como funcional de q^k y p_k .

Para una función $A(q, p, t)$, definida sobre el espacio-fase, su evolución en el tiempo puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} A &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial A}{\partial p_k} \dot{p}_k \\ &= \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q^k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q^k} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

donde se utilizó (1.13a) y (1.15). El último término es el llamado paréntesis de Poisson. Para dos funciones sobre en el espacio-fase, se define éste como

$$\{A(q, p, t), B(q, p, t)\} := \frac{\partial A}{\partial q^k} \frac{\partial B}{\partial p_k} - \frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial B}{\partial q^k}. \quad (1.18)$$

Este paréntesis es el objeto central por excelencia de la mecánica analítica. De su definición (1.18), se derivan las siguientes propiedades:

1. antisimetría:

$$\{A, B\} = -\{B, A\}, \quad (1.19)$$

2. linealidad:

$$\{c_1 A + c_2 B, C\} = c_1 \{A, C\} + c_2 \{B, C\}, \quad \forall c_1, c_2 \text{ constantes}, \quad (1.20)$$

3. existencia de elementos nulos:

$$\{c, A\} = 0, \quad \forall c \text{ constante}, \quad (1.21)$$

4. identidad de Jacobi:

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0, \quad (1.22)$$

5. regla del producto:

$$\{AB, C\} = A\{B, C\} + \{A, C\}B, \quad (1.23)$$

6. los paréntesis fundamentales son:

$$\{q^i, p_k\} = \delta_k^i, \quad \{q^i, q^k\} = \{p_i, p_k\} = 0. \quad (1.24)$$

Si se cumple solo 1 – 4, el paréntesis se denomina generalizado, posteriormente se encontrará uno de tales paréntesis en §1.6.2 (paréntesis de Dirac).

1.3 Teoría clásica de campos

1.3.1 Formalismo Lagrangiano para campos

Hasta este momento, se ha hablado de sistemas con masas puntuales, caracterizadas por un conjunto discreto de coordenadas q_i . Pero ahora se estudiarán los *campos*. Cada punto de una región (acotada o no) del espacio se asociará con alguna variable de campo continua, la cual se denotará con $\phi(\mathbf{x}, t)$. El anterior sistema constituye un sistema con un infinito número de grados de libertad. Las variables dinámicas de la teoría serán los valores del campo $\phi(\mathbf{x})$ en cada punto del espacio, en vez de un conjunto discreto de coordenadas q_i . El espacio coordenado \mathbf{x} juega el papel de un índice continuo.

La función de Lagrange será una *funcional* del campo. Se denotará a esta dependencia funcional con paréntesis cuadrados, *i.e.*:

$$L(t) = L[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)]. \quad (1.25)$$

Debido a que $L(t)$ es una funcional, ésta depende simultáneamente de los valores ϕ y $\dot{\phi}$ en todos los puntos del espacio. Nótese que la funcional no depende sobre la coordenada \mathbf{x} directamente.

Con el fin de aplicar el principio Hamiltoniano, se define la *variación de una funcional* $F[\phi(\mathbf{x})]$ como

$$\delta F[\phi] = F[\phi + \delta\phi] - F[\phi] := \int d^3x \frac{\delta F[\phi]}{\delta\phi(\mathbf{x})} \delta\phi(\mathbf{x}). \quad (1.26)$$

En la anterior definición se introdujo la *derivada funcional* $\delta F/\delta\phi(\mathbf{x})$ de la funcional $F[\phi]$ con respecto a la función ϕ en el punto \mathbf{x} . Esto nos dice como el valor de la funcional cambia cuando el valor de la función ϕ varía en el punto \mathbf{x} .

Si se aplica (1.26) al Lagrangiano (1.25), el cual depende sobre las funciones ϕ y $\dot{\phi}$,

$$\delta L[\phi, \dot{\phi}] = \int d^3x \left(\frac{\delta L}{\delta\phi(\mathbf{x})} \delta\phi(\mathbf{x}) + \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}(\mathbf{x})} \delta\dot{\phi}(\mathbf{x}) \right). \quad (1.27)$$

Ambos lados de la ecuación tienen una dependencia sobre el tiempo, la cual no se señala. La integración del Lagrangiano resulta en la acción $S[\phi, \dot{\phi}]$, la cual es una funcional sobre las

funciones ϕ y $\dot{\phi}$. Dada la integración sobre un intervalo de tiempo $t_1 \leq t \leq t_2$ (frecuentemente se utiliza $t_1 = \infty$ y $t_2 = -\infty$), la variación de la acción es

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L[\phi, \dot{\phi}] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt d^3x \left(\frac{\delta L}{\delta \phi(\mathbf{x})} \delta \phi(\mathbf{x}) + \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{x})} \delta \dot{\phi}(\mathbf{x}) \right) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt d^3x \left(\frac{\delta L}{\delta \phi(\mathbf{x})} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{x})} \right) \delta \phi(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Donde se realizó una integración por partes y, además, se utilizaron las condiciones de frontera $\delta \phi(\mathbf{x}, t_1) = \delta \phi(\mathbf{x}, t_2) = 0$, junto con la relación $\delta \dot{\phi} = \partial \delta \phi / \partial t$. Así, el principio Hamiltoniano de la acción estacionaria

$$\delta S[\phi, \dot{\phi}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L[\phi, \dot{\phi}] = 0, \quad (1.29)$$

trae como consecuencia

$$\frac{\delta L}{\delta \phi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = 0, \quad (1.30)$$

la cual, es solo la generalización de la ecuación de Euler-Lagrange (1.3), a la teoría de campos.

En lo subsiguiente, se considerarán *teorías de campo locales*, en las cuales el Lagrangiano L se puede escribir como una integral de volumen sobre una función de densidad \mathcal{L} :

$$L(t) = \int d^3x \mathcal{L}(\phi(\mathbf{x}, t), \nabla \phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)). \quad (1.31)$$

En principio, el Lagrangiano puede depender sobre derivadas de grado más elevado, pero ese caso no se considerará, tampoco se tendrán en cuenta teorías *no locales* en las cuales la densidad Lagrangiana en \mathbf{x} tiene una dependencia adicional sobre el valor del campo en otros puntos $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$. La restricción sobre Lagrangianos con densidad local que contienen derivadas de primer orden, es suficientemente general para formar la base de todas las teorías de campo conocidas hasta ahora.

Cuando se construye un Lagrangiano, se comienza con una considerable libertad de elección. Las elecciones se reducen imponiendo simetría y propiedades de invarianza, que se espera la teoría en cuestión satisfaga. Así, el requerimiento básico para cualquier teoría de campo relativista, es

que la densidad Lagrangiana sea un *escalar de Lorentz*.

Usando la densidad de Lagrange \mathcal{L} , la variación de $L(t)$ se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \delta L(t) &= \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(\mathbf{x}, t)} \delta \phi(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi(\mathbf{x}, t))} \delta \nabla \phi(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)} \delta \dot{\phi}(\mathbf{x}, t) \right) \\ &= \int d^3x \left(\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(\mathbf{x}, t)} - \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi(\mathbf{x}, t))} \right) \delta \phi(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)} \delta \dot{\phi}(\mathbf{x}, t) \right). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Donde la relación $\delta \nabla \phi = \nabla \delta \phi$ fue usada, seguida de una integración por partes. Para justificar este procedimiento tanto los campos como las derivadas sobre la superficie se tienen que aproximar a cero bastante rápido. Comparando esta ecuación con (1.27), se llega a las expresiones para las derivadas funcionales:

$$\frac{\delta L(t)}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(\mathbf{x}, t)} - \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi(\mathbf{x}, t))}, \quad (1.33a)$$

$$\frac{\delta L(t)}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)}. \quad (1.33b)$$

Expresada en términos de la densidad Lagrangiana, la ecuación de Euler-Lagrange (1.30), se lee como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(\mathbf{x}, t)} - \nabla \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla \phi(\mathbf{x}, t))} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)} = 0, \quad (1.34)$$

ó, usando notación relativista, covariante, y con unidades relativistas ($[c] = 1$), $x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x})$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi(x)} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi(x))} = 0, \quad (1.35)$$

Donde el gradiente cuatridimensional fue escrito como $\partial \phi / \partial x^\mu := \partial_\mu \phi = (\partial_t, \nabla) \phi$. Si la función de Lagrange depende sobre varios campos independientes ϕ_r , $1 \leq r \leq N$, entonces, (1.35) puede generalizarse como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} = 0. \quad (1.36)$$

Para finalizar, se puede remarcar que las ecuaciones de campo se pueden deducir directamente, sin la introducción formal de la derivada funcional, del principio variacional

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_r \phi(x)) = 0, \quad (1.37)$$

y usando integración por partes en cuatro dimensiones.

1.3.2 Formalismo Hamiltoniano para campos

Para aplicar el formalismo Hamiltoniano a la teoría de campo, se tiene que definir un "momento" que sea el conjugado canónico a la variable de campo. En analogía con (1.8), se define el *campo conjugado canónico*, por la derivada funcional

$$\pi(\mathbf{x}, t) := \frac{\delta L(t)}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)}. \quad (1.38)$$

La derivada temporal de π se sigue de la ecuación de Euler-Lagrange (1.30)

$$\dot{\pi}(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta L}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)}. \quad (1.39)$$

Ahora se introduce el *Hamiltoniano* a través de la transformación de Legendre:

$$H(t) = \int d^3x \pi(\mathbf{x}, t) \dot{\phi}(\mathbf{x}, t) - L(t). \quad (1.40)$$

Lo anterior se puede escribir como una integral sobre la densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}(\mathbf{x}, t)$

$$H(t) = \int d^3x \mathcal{H}(x), \quad (1.41)$$

con $\mathcal{H}(x) = \pi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L}(x)$, y las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas toman una forma similar a aquellas de la mecánica puntual, (1.13a, 1.15):

$$\dot{\phi} = \frac{\delta H}{\delta \pi}, \quad \dot{\pi} = -\frac{\delta H}{\delta \phi}. \quad (1.42)$$

Estas ecuaciones se derivan tomando la variación de H , y haciendo la transformación de Legendre (1.40)

$$\delta H = \int d^3x (\dot{\phi}\delta\pi + \pi\delta\dot{\phi}) - \delta L = \int d^3x (\dot{\phi}\delta\pi - \dot{\pi}\delta\phi), \quad (1.43)$$

debido a que

$$\delta L = \int d^3x \left(\frac{\delta L}{\delta\phi} \delta\phi + \frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}} \delta\dot{\phi} \right) = \int d^3x (\dot{\pi}\delta\phi + \pi\delta\dot{\phi}), \quad (1.44)$$

con lo cual se sigue (1.42). Debido a que el funcional $H[\phi, \pi]$ puede depender sobre ϕ, π y sus gradientes $\nabla\phi, \nabla\pi$, las derivadas funcionales en (1.42), se pueden expresar explícitamente en términos de la densidad Hamiltoniana \mathcal{H} como

$$\frac{\delta H}{\delta\phi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi} - \nabla \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi)}, \quad (1.45a)$$

$$\frac{\delta H}{\delta\pi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi} - \nabla \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\pi)}. \quad (1.45b)$$

Para finalizar, se observará el papel del paréntesis de Poisson en teoría de campos. Dados dos campos $F[\phi, \pi]$ y $G[\phi, \pi]$, se define

$$\{F, G\} := \int d^3x \left(\frac{\delta F}{\delta\phi(x)} \frac{\delta G}{\delta\pi(x)} - \frac{\delta F}{\delta\pi(x)} \frac{\delta G}{\delta\phi(x)} \right). \quad (1.46)$$

Debido a las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas (1.42), la evolución temporal de un funcional satisface :

$$\dot{F}(t) = \int d^3x \left(\frac{\delta F}{\delta\phi(x)} \dot{\phi}(x) - \frac{\delta F}{\delta\pi(x)} \dot{\pi}(x) \right) = \{F, H\}, \quad (1.47)$$

si no hay dependencia explícita sobre el tiempo. A continuación se presentan ciertas derivadas funcionales

$$\frac{\delta\phi(\mathbf{x}, t)}{\delta\phi(\mathbf{x}', t)} = \frac{\delta\pi(\mathbf{x}, t)}{\delta\pi(\mathbf{x}', t)} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (1.48)$$

$$\frac{\delta\pi(\mathbf{x}, t)}{\delta\phi(\mathbf{x}', t)} = \frac{\delta\phi(\mathbf{x}, t)}{\delta\pi(\mathbf{x}', t)} = 0, \quad (1.49)$$

con las cuales se pueden evaluar los siguientes paréntesis de Poisson:

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = \{\phi(\mathbf{x}, t), H(t)\} = \int d^3 x' \frac{\delta\phi(\mathbf{x}, t)}{\delta\phi(\mathbf{x}', t)} \frac{\delta H(t)}{\delta\pi(\mathbf{x}', t)} = \frac{\delta H(t)}{\delta\pi(\mathbf{x}, t)}, \quad (1.50)$$

asimismo

$$\dot{\pi}(\mathbf{x}, t) = \{\pi(\mathbf{x}, t), H(t)\} = -\int d^3 x' \frac{\delta\pi(\mathbf{x}, t)}{\delta\pi(\mathbf{x}', t)} \frac{\delta H(t)}{\delta\phi(\mathbf{x}', t)} = -\frac{\delta H(t)}{\delta\phi(\mathbf{x}, t)}, \quad (1.51)$$

lo que resulta en las ecuaciones de movimiento de Hamilton (1.42). Los paréntesis de Poisson de los campos son de especial interés, para los cuales se encuentra

$$\begin{aligned} \{\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)\} &= \int d^3 x'' \frac{\delta\phi(\mathbf{x}, t)}{\delta\phi(\mathbf{x}'', t)} \frac{\delta\pi(\mathbf{x}', t)}{\delta\pi(\mathbf{x}'', t)} \\ &= \int d^3 x'' \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'') \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}'') \\ &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \end{aligned} \quad (1.52)$$

y debido a (1.49),

$$\{\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)\} = \{\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)\} = 0. \quad (1.53)$$

Estas relaciones resultan si los campos se toman sobre el mismo tiempo $t = t'$.

1.4 Sistemas Hamiltonianos con Constricciones

Arriba se comentó sobre la existencia de soluciones únicas cuando el Hessiano era regular, pero si por el momento se considera que el Hessiano es singular, *i.e.*, $\det W = 0$, las aceleraciones no estarán determinadas unívocamente por las posiciones y las velocidades, y la solución de las ecuaciones de movimiento contendrán funciones arbitrarias en el tiempo. Los sistemas de interés en este trabajo serán precisamente aquellos que tienen grados de libertad de norma, es decir, aquellos que tienen un Hessiano W no invertible.

En §1.2 se señaló la relación del Hessiano con el momento canónico a través de

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} = \frac{\partial p_j}{\partial \dot{q}^i},$$

de donde se observa que la igualdad a cero del Hessiano implica la no invertibilidad de las velocidades como funciones de los momentos y coordenadas. Es decir, los momentos no son todos independientes, sino que existen algunas relaciones entre ellos

$$\phi_m(q, p) = 0 \quad m = 1, \dots, M; \quad (1.54)$$

las cuales se siguen de la definición de momento canónico. Así, cuando los momentos p 's se sustituyen en (1.54) por su definición (1.8), en términos de q 's y \dot{q} 's, la ecuación (1.54) se reduce a una identidad. Las condiciones (1.54) son llamadas *constricciones primarias* enfatizando el hecho de que las ecuaciones de movimiento no son usadas para obtener estas relaciones.

Se supondrá por simplicidad que, (i) el rango del Hessiano W es constante a través del espacio-fase de velocidades (q, \dot{q}) , (ii) las constricciones (1.54) son independientes entre sí, y por último, (iii) las ecuaciones (1.54) definen una subvariedad suavemente encajada² en el espacio-fase. Esta subvariedad se conoce como *superficie de restricción primaria* [22].

Debido a que las constricciones (1.54) son independientes, el rango R de W es $N - M = R$, y la superficie de restricción primaria será una subvariedad del espacio-fase de dimensión $2N - M$.

Por lo tanto, se tiene que la transformación inversa de las p 's en las \dot{q} 's es multivaluada. Es decir, dado un punto (q, p) en la superficie de restricción primaria, su imagen inversa (q, \dot{q}) , la cual cumple con (1.8), no es un solo punto, ya que (1.8) define un mapeo de una variedad de dimensión $2N$ del espacio-fase de velocidades (q, \dot{q}) a una variedad de dimensión $2N - M$ encajada en el espacio-fase (q, p) . Por lo tanto, la inversa de un punto forma una variedad de dimensión M en el espacio (q, \dot{q}) .

²Un encaje se define como una transformación entre dos variedades, cuya derivada y ella misma son inyectivas en todo punto, además de que la transformación es propia (cf.[21])

Con el fin de que la transformación (1.8) sea biyectiva, uno necesita introducir parámetros extra, al menos M , para indicar la localización de \dot{q} en la variedad inversa. Los parámetros mencionados aparecerán como multiplicadores de Lagrange en el Hamiltoniano.

1.4.1 Condiciones de Regularidad

Existen varias formas equivalentes para representar una superficie de restricción primaria, dada por las ecuaciones (1.54). Tómese como ejemplo la superficie

$$p_1 = 0, \quad (1.55)$$

la cual también puede representarse por

$$p_1^2 = 0, \quad (1.56)$$

ó se puede representar de otras formas muy diversas, incluso de manera redundante. Por lo anterior, será necesario, para pasar al formalismo Hamiltoniano, imponer algunas restricciones sobre la elección de las funciones ϕ_m , que representan a la superficie de restricción primaria, estas se llaman *condiciones de regularidad* [22].

Estas restricciones se establecen como sigue. La superficie de restricción de dimensión $2N - M$ dada por $\phi_m = 0$, debe tener una cubierta abierta, tal que en cada abierto de la cubierta, la matriz Jacobiana

$$\frac{\partial(\phi_m(q, p))}{\partial(q^k, p_k)}, \quad (1.57)$$

es de rango constante M . Por lo tanto, las funciones ϕ_m se pueden tomar localmente, como M coordenadas de un nuevo sistema coordenado regular en la vecindad de la superficie de restricción [22].

Existen otras condiciones equivalentes a la de la matriz Jacobiana [22], pero para el propósito a seguir, esta condición y sus consecuencias serán suficientes.

La matriz jacobiana de (1.55) es

$$\frac{\partial(p_1)}{\partial(q^1, p_1)} = (0 \ 1), \quad (1.58)$$

la cual tiene rango 1 en toda la superficie de restricción, por otra parte la matriz jacobiana de (1.56) es

$$\frac{\partial(p_1^2)}{\partial(q^1, p_1)} = (0 \ 2p_1), \quad (1.59)$$

la cual, sobre la superficie de constricción descrita por esta, tiene rango $0 \neq 1$, por lo tanto, la descripción admisible, como se esperaba, es (1.55).

Cuando las funciones de constricción ϕ_m cumplen con las condiciones de regularidad, satisfacen dos propiedades importantes para el desarrollo de la teoría:

Teorema 1.4.1 *Si una función suave G del espacio fase se anula sobre la superficie $\phi_m = 0$, entonces $G = g^m \phi_m$ para algunas funciones g^m .*

Dem.[†]

Se escoge a las funciones de constricción ϕ_m como las coordenadas de un sistema coordenado regular (y_m, x_α) con $y_m := \phi_m$. En estas coordenadas se tiene que $G(0, x) = 0$

$$\begin{aligned} G(y, x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} G(ty, x) dt \\ &= y_m \int_0^1 G_{,m}(ty, x) dt, \end{aligned} \quad (1.60)$$

por lo tanto,

$$G = g^m \phi_m, \quad (1.61)$$

con $g^m = \int_0^1 G_{,m}(ty, x) dt$.

□

Teorema 1.4.2 *Si $\lambda_k \delta q^k + \mu^k \delta p_k = 0$ para variaciones arbitrarias $\delta q^k, \delta p_k$ tangentes a la superficie de constricción, entonces*

$$\begin{aligned} \lambda_k &= u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^k}, \\ \mu^k &= u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_k}, \end{aligned}$$

[†]El ambiente para demostraciones no solo se usará para demostraciones de teoremas, sino que también se utilizará para ciertas cálculos que no requieren de un rigor matemático, lo anterior, con el fin de estructurar mejor estos cálculos y hacer más legible este trabajo.

para algunas funciones u^m . Las igualdades anteriores, son igualdades sobre la superficie de constricción (1.54).

Dem.

La superficie de constricción tiene dimensión $2N - M$, por lo tanto, las variaciones δq^k , δp_k en un punto forman un espacio vectorial de dimensión $2N - M$. Con lo cual, existen M soluciones independientes de $\lambda_k \delta q^k + \mu^k \delta p_k = 0$. Por otro lado, dado que se cumplen las condiciones de regularidad, los M gradientes

$$\left(\frac{\partial \phi_m}{\partial q^k}, \frac{\partial \phi_m}{\partial p_k} \right),$$

son linealmente independientes. Y dado que estos gradientes son una solución de $\lambda_k \delta q^k + \mu^k \delta p_k = 0$, para variaciones tangentes, constituyen, de hecho, una base de soluciones y la conclusión del teorema se sigue automáticamente. □

1.4.2 El Hamiltoniano Canónico

Si se toma la variación del Hamiltoniano Canónico, (1.9)

$$\delta H = \dot{q}^k \delta p_k - \frac{\partial L}{\partial q^k} \delta q^k, \quad (1.62)$$

se observa que este Hamiltoniano no está unívocamente determinado como una función de las p 's y de las q 's, ya que en (1.62) las variaciones δp_k no son todas independientes, sino que están restringidas a conservar las constricciones primarias ϕ_m . Por lo tanto, se concluye que el Hamiltoniano canónico está bien definido sólo sobre la subvariedad definida por las constricciones primarias y puede ser extendido arbitrariamente fuera de esa variedad.

La ecuación (1.62) se puede reescribir como

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q^k} + \frac{\partial L}{\partial q^k} \right) \delta q^k + \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} - \dot{q}^k \right) \delta p_k = 0,$$

pero dada la afirmación del Teorema 1.4.2, se tiene

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_k}, \quad (1.63a)$$

$$-\frac{\partial L}{\partial q^k} \Big|_{\dot{q}} = \frac{\partial H}{\partial q^k} \Big|_p + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^k}. \quad (1.63b)$$

La ecuación (1.63a) es particularmente importante porque muestra que las velocidades \dot{q}_k se pueden recobrar si se conocen los momentos p_k , los cuales obedecen (1.54), y los parámetros extras u^m . Por lo tanto, se pueden considerar como variables dinámicas básicas las coordenadas, los momentos, y los parámetros u^m , en el formalismo Hamiltoniano. Estos parámetros pueden ser considerados como coordenadas sobre la superficie de las imágenes inversas de una p_k dada.

Debido a que las constricciones son independientes, los vectores $\partial \phi_m / \partial p_k$ son también independientes sobre $\phi_m = 0$ debido, a su vez, a la condición de regularidad. Con lo cual, sólo debe existir un conjunto de u 's que cumpla con (1.63a). Lo anterior significa que las u 's pueden ser expresadas, en principio, como funciones de las coordenadas y velocidades resolviendo las ecuaciones:

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k}(q, p(q, \dot{q})) + u^m(q, \dot{q}) \frac{\partial \phi_m}{\partial p_k}(q, p(q, \dot{q})). \quad (1.64)$$

Si se define la transformación de Legendre del espacio (q, \dot{q}) , a la superficie de restricción $\phi_m = 0$ del espacio (q, p, u) , por medio de

$$q^k = q^k, \quad (1.65a)$$

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}(q, \dot{q}), \quad (1.65b)$$

$$u^m = u^m(q, \dot{q}), \quad (1.65c)$$

se observa que esta transformación entre espacios de la misma dimensión $2N$, es invertible, ya que se tiene

$$q^k = q^k, \quad (1.66a)$$

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_k}, \quad (1.66b)$$

$$0 = \phi_m(q, p). \quad (1.66c)$$

Por lo que las ecuaciones anteriores son equivalentes; de esta forma la inversión de la transformación de Legendre, cuando $\det W = 0$, se obtiene por la adición de variables extra.

Se debe mencionar que el resultado es solamente local, debido a que la ecuaciones (1.63) se obtienen del Teorema 1.4.2. A partir de este momento, se supondrá que la transformación (1.63) tienen validez global, lo cual implica, en particular, que el Hamiltoniano H puede ser globalmente definido como una función de las coordenadas y de los momentos por medio de (1.9), sin estar multivaluado.

1.4.3 Ecuaciones de movimiento en forma Hamiltoniana

Debido a las relaciones (1.63), se pueden escribir las ecuaciones de Euler-Lagrange (1.3) en la forma hamiltoniana equivalente

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_k}, \quad (1.67a)$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^k}, \quad (1.67b)$$

$$0 = \phi_m(q^k, p_k). \quad (1.67c)$$

La ecuación (1.67b) se obtiene al sustituir en (1.63b) la definición de momento cuando se cumple la ecuación de Euler-Lagrange, *i.e.*,

$$\frac{\partial L}{\partial q^k} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = \frac{d}{dt} p_k.$$

Por otro lado, las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen considerando primero (1.67a) y (1.67c), las cuales, debido a la invertibilidad de la transformación de Legendre, son equivalentes a $p_k = \partial L / \partial \dot{q}^k$; después, se sustituye en (1.67b)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = -\frac{\partial H}{\partial q^k} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^k} \stackrel{(1.63b)}{=} \frac{\partial L}{\partial q^k} \dagger.$$

Las ecuaciones de Hamilton (1.67) pueden ser derivadas del principio variacional

[†]La referencia, como subíndice, a la ecuación (1.63b) significa que la igualdad solo es válida con la aplicación del resultado citado, en este caso se utilizó una referencia a una ecuación pero se trabajará indiscriminadamente con transformaciones, funciones, teoremas, etc.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^k p_k - H - u^m \phi_m) dt = 0, \quad (1.68)$$

para variaciones arbitrarias δq^k , δp_k , δu_m sujetas a las restricciones $\delta q^k(t_1) = \delta q^k(t_2) = 0$.

Las nuevas variables u_m , las cuales fueron introducidas para que la transformación de Legendre fuera invertible, aparecen como multiplicadores de Lagrange, que hacen cumplir las constricciones primarias (1.67c).

Para el posterior desarrollo de la teoría es necesario expresar las ecuaciones de movimiento en forma hamiltoniana, en términos de los paréntesis de Poisson.

Sea $F = F(q, p)$, entonces

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q^k} \dot{q}^k + \frac{\partial F}{\partial p_k} \dot{p}_k. \quad (1.69)$$

Si se sustituyen las ecuaciones de movimiento (1.67a, 1.67b), se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \frac{\partial F}{\partial q^k} \left(\frac{\partial H}{\partial p_k} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_k} \right) + \frac{\partial F}{\partial p_k} \left(-\frac{\partial H}{\partial q^k} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^k} \right) \\ &= \{F, H\} + u^m \{F, \phi_m\}. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Por lo tanto, se obtienen las ecuaciones de movimiento hamiltonianas escritas en términos del formalismo de los paréntesis de Poisson.

$$\dot{p}_k = \{p_k, H\} + u^m \{p_k, \phi_m\}, \quad (1.71)$$

$$\dot{q}^k = \{q^k, H\} + u^m \{q^k, \phi_m\}. \quad (1.72)$$

1.4.4 Constricciones Secundarias

Un condición de consistencia sobre las constricciones primarias es que se preserven en el tiempo, por lo tanto, si se da una constricción ϕ_m , se pide que $\dot{\phi}_m \stackrel{!}{=} 0$, i.e.

$$\{\phi_m, H\} + u^k \{\phi_m, \phi_k\} \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.73)$$

La ecuación (1.73) se puede reducir a una relación independiente de las u 's, es decir, una relación entre las q 's y las p 's; ó a una restricción entre las u 's. Si se presenta el primer caso y la relación entre las q 's y las p 's es independiente de las constricciones primarias, entonces esta nueva relación se llama *constricción secundaria*. La diferencia entre las constricciones secundarias y las primarias, es que las segundas son consecuencia de la definición (1.8), mientras que para las primeras, también se tienen que usar las ecuaciones de movimiento.

Si existe una constricción secundaria, por ejemplo $\zeta(q, p)$, entonces se impone, a su vez, una condición de consistencia sobre ésta:

$$\{\zeta, H\} + u^m \{\zeta, \phi_m\} \stackrel{!}{=} 0. \quad (1.74)$$

El resultado de esta condición puede resultar en una restricción sobre las u 's, ó en una nueva constricción, módulo las anteriores constricciones, a la cual se le puede nombrar constricción terciaria ⁴; el anterior proceso termina cuando la evolución de todas las constricciones sean cero, módulo las constricciones previas.

Después de que el proceso se haya terminado, se obtendrá un conjunto de constricciones secundarias

$$\phi_k = 0 \quad k = M + 1, \dots, M + K; \quad (1.75)$$

donde K es el número total de constricciones secundarias; la anterior notación es motivada por la poca distinción entre constricciones primarias y secundarias para el desarrollo final de la teoría, por lo que es de utilidad denotar todas las constricciones en la siguiente forma:

$$\phi_j = 0 \quad j = 1, \dots, M + K (= J). \quad (1.76)$$

La condición de regularidad se debe cumplir sobre todas las constricciones, de la misma forma que se hizo para las primarias, es decir, no sólo se supone la suavidad de la subvariedad descrita por (1.76), sino que también se supone que las funciones de constricción obedecen la condición de regularidad. En lo subsiguiente, se supondrá que el rango de la matriz $\{\phi_j, \phi_{j'}\}$ es constante en toda la subvariedad descrita por (1.76), donde las constricciones son válidas.

⁴Se utilizará el nombre de constricción secundaria para todas las constricciones que resulten de este procedimiento

1.4.5 Ecuaciones débiles y fuertes

Al momento de evaluar un paréntesis de Poisson involucrando las ecuaciones de restricción (1.76), por ejemplo $\{F, \phi_k\}$, no se tiene que hacer la sustitución de las funciones, ya que de otro modo, el anterior paréntesis es cero; sino que, el paréntesis se evaluará sin tomar en cuenta las constricciones, para lo cual se introducirá la notación \approx , la cual se lee como *igualmente débil*. Con la anterior notación, (1.76) se escribe como

$$\phi_j \approx 0. \quad (1.77)$$

Para enfatizar que la cantidad ϕ_j es numéricamente restringida a ser cero, pero no es idénticamente cero en todo el espacio-fase.

Generalizando, sean F y G dos funciones, las cuales coinciden en la subvariedad definida por las constricciones $\phi_j \approx 0$, se dice entonces que las funciones son *débilmente iguales*, y se escribe esta relación como $F \approx G$. Por otra parte, si una ecuación es válida en todo el espacio-fase y no sólo sobre la subvariedad $\phi_j \approx 0$, se dice que ésta es válida *fuertemente*, y se utiliza el símbolo usual de igualdad $=$. De esta forma, por el Teorema 1.4.1

$$F \approx G \Leftrightarrow F - G = \mu^j(q, p) \phi_j. \quad (1.78)$$

1.4.6 Restricciones sobre los multiplicadores de Lagrange

Si se tiene un conjunto completo de constricciones como (1.76), las restricciones sobre los multiplicadores de Lagrange u^m son

$$\{\phi_j, H\} + u^m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0, \quad (1.79)$$

donde $m = 1, \dots, M$ y $j = 1, \dots, J$.

Se puede considerar que las ecuaciones (1.79), constituyen un conjunto de J ecuaciones lineales no homogéneas en las M variables u^m , con coeficientes que son funciones de las q 's y de las p 's. Estas ecuaciones deben tener soluciones, de otra forma el Lagrangiano (1.1) sería inconsistente.

La solución general de (1.79) es de la forma

$$u^m = U^m + V^m, \quad (1.80)$$

donde U^m es una solución particular de la ecuación no homogénea (1.79) y V^m es la solución más general del sistema homogéneo asociado

$$V^m\{\phi_j, \phi_m\} \approx 0. \quad (1.81)$$

La solución V^m más general es una combinación lineal de las soluciones independientes V_a^m , $a = 1, \dots, A$ de (1.81). El número A de soluciones independientes es el mismo para todo (q, p) sobre la superficie de constricción, ya que se supuso que la matriz $\{\phi_j, \phi_m\}$ tiene rango constante en ésta. Por lo tanto, la solución general de (1.79) es

$$u^m \approx U^m + v^a V_a^m, \quad (1.82)$$

con términos v^a totalmente arbitrarios. Por lo tanto, se ha separado la parte de u^m que permanece arbitraria de la parte que se fija por las condiciones de consistencia.

1.4.7 Hamiltoniano Total

Dadas las ecuaciones de movimiento (1.70), éstas se pueden describir utilizando (1.82), como

$$\dot{F} \approx \{F, H' + v^a \phi_a\}, \quad (1.83)$$

donde

$$H' = H + U^m \phi_m, \quad (1.84)$$

$$\phi_a = V_a^m \phi_m. \quad (1.85)$$

Para calcular el resultado (1.83), se utilizó

$$\{F, U^m \phi_m\} = U^m \{F, \phi_m\} + \{F, U^m\} \phi_m \approx U^m \{F, \phi_m\}, \quad (1.86)$$

lo mismo para $\{F, V_a^m \phi_m\}$. La función

$$H_T = H' + v^a \phi_a, \quad (1.87)$$

que aparece en (1.83), se llama *Hamiltoniano Total*. Por lo tanto, en términos del Hamiltoniano Total, las ecuaciones de movimiento son

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\}. \quad (1.88)$$

Estas ecuaciones contienen A funciones arbitrarias v^a y son equivalentes, por construcción, a las ecuaciones de movimiento de Lagrange (1.3).

1.4.8 Funciones de primera y segunda clase

Se ha mencionado antes que la distinción entre constricciones primarias y secundarias es de poca importancia para la forma final de la formulación Hamiltoniana, por lo tanto, a continuación se da la definición de funciones de primera y segunda clase, la cual clasificará a las constricciones.

Una función $F(q, p)$ se dice que es de *primera clase* si su paréntesis de Poisson con cada constricción es nulo débilmente

$$\{F, \phi_j\} \approx 0 \quad j = 1, \dots, J. \quad (1.89)$$

Una función de las variables canónicas que no es de primera clase se dice que es de *segunda clase*. Una característica importante de ser función de primera clase, es que esta propiedad se preserva bajo la operación del paréntesis de Poisson. Es decir, si dos funciones son de primera clase, su paréntesis de Poisson es de primera clase. Esto se prueba como sigue, si F y G son de primera clase, entonces

$$\{F, \phi_j\} = f_j^k \phi_k, \quad \{G, \phi_j\} = g_j^k \phi_k. \quad (1.90)$$

Ahora, por la identidad de Jacobi (1.22), se tiene

$$\begin{aligned} \{\{F, G\}, \phi_j\} &= \{F, \{G, \phi_j\}\} - \{G, \{F, \phi_j\}\} \\ &= \{F, g_j^k \phi_k\} - \{G, f_j^k \phi_k\} \\ &= \{F, g_j^k\} \phi_k - g_j^k f_k^l \phi_l - \{G, f_j^k\} \phi_k - f_j^k g_k^l \phi_l \approx 0. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Como una primera aplicación del concepto de primera clase, se nota que H' y ϕ_a , definidas respectivamente por (1.84) y (1.85), son de primera clase. Es más, las ϕ_a son un conjunto completo de constricciones primarias de primera clase, es decir, cualquier constricción primaria de primera clase es una combinación lineal de las ϕ_a (con coeficientes que son funciones de las q 's y de los p 's y módulo cuadrados de las constricciones de segunda clase). Esto es así debido a que

$v^a V_a^m$ es la solución más general sobre la superficie $\phi_j = 0$.

Por lo tanto, el Hamiltoniano total (1.87) es la suma del Hamiltoniano de primera clase H' y las constricciones primarias de primera clase multiplicadas por coeficientes arbitrarios.

1.5 Constricciones de primera clase

1.5.1 Transformaciones de norma

La presencia de funciones arbitrarias v^a en el Hamiltoniano total expone el hecho de que no todas las q 's y los p 's son observables. Es decir, aunque el estado físico está unívocamente definido si el conjunto de las q 's y los p 's está dado, el inverso no es cierto, es decir, hay más de un conjunto de valores de las variables canónicas representando el mismo estado físico.

Para llegar a esta conclusión se observa que, si se da un conjunto inicial de variables canónicas en el tiempo t_1 , y por lo tanto, el estado físico completamente definido en ese tiempo, se espera que las ecuaciones de movimiento *determinen completamente el estado físico en otros tiempos*. Así, por definición, cualquier ambigüedad en el valor de las variables canónicas en $t_1 \neq t_2$ será una ambigüedad físicamente irrelevante.

Los coeficientes v^a son funciones arbitrarias del tiempo, con lo cual el valor de las variables canónicas en t_2 dependerá de la elección de la función v^a en el intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$. Considérese, en particular, $t_2 = t_1 + \delta t$. La diferencia entre los valores de la variable dinámica F en el tiempo t_2 , correspondientes a las elecciones de las funciones arbitrarias v^a y \tilde{v}^a , en el tiempo t_1 , toma la forma:

$$\delta F = \delta v^a \{F, \phi_a\}, \quad (1.92)$$

donde $\delta v^a = (v^a - \tilde{v}^a)\delta t$. Por lo tanto, la transformación (1.92) no altera el estado físico en el tiempo t_2 . Se dice entonces que, *las constricciones primarias de primera clase generan transformaciones de norma*. Las transformaciones de norma (1.92) son independientes, debido a que se consideró desde el principio que las constricciones ϕ_a son irreducibles (el recíproco de la afirmación también es cierto). Cuando estas constricciones son reducibles, algunas de las transformaciones (1.92) resultan en $\delta F \approx 0$.

En general, las transformaciones (1.92) no son las únicas que dejan inalterado el estado físico. De hecho, los siguientes resultados son válidos³:

1. El paréntesis de Poisson $\{\phi_a, \phi_{a'}\}$ de dos cualesquiera constricciones primarias de primera clase genera una transformación de norma.

³Para una demostración de estos resultados véase [26]

2. El paréntesis de Poisson $\{\phi_a, H'\}$, de cualquier constricción primaria de primera clase ϕ_a con el hamiltoniano de primera clase H' , genera una transformación de norma.

Estos resultados indican que, en general, se esperan que al menos algunas constricciones secundarias de primera clase puedan generar transformaciones de norma. Debido al hecho de que ϕ_a y H' son de primera clase, los paréntesis $\{\phi_a, \phi_{a'}\}$ y $\{\phi_a, H'\}$ también tienen esta propiedad, lo cual significa que estos serán combinaciones lineales de constricciones de primera clase. No hay, sin embargo, razón para esperar que esta combinación contenga solo constricciones primarias, y en la práctica las constricciones secundarias de primera clase aparecen en estas combinaciones lineales.

De estas consideraciones no es posible inferir que cada constricción secundaria de primera clase sea un generador de transformaciones de norma ("Conjetura de Dirac"). No obstante, *se postula, en general, que todas las constricciones de primera clase generan transformaciones de norma.* Este es el punto de vista que se adoptará en este trabajo.

1.5.2 El Hamiltoniano Extendido

Arriba ya se había mencionado la importancia sobre la clasificación de las constricciones en primera y segunda clase; por lo tanto, será de utilidad la introducción de una nueva notación que permita distinguir entre estos dos tipos de constricciones. Se denotarán a las constricciones de primera clase con la letra γ , y las constricciones de segunda clase por la letra χ . El conjunto de todas las constricciones (de primera y segunda clase) se denotará con $\{\phi_j\}$, como antes.

Las transformaciones de norma sugieren generalizar las ecuaciones de movimiento (1.88), de tal manera que permitan realizar una transformación de norma arbitraria mientras el sistema está evolucionando dinámicamente en el tiempo. El movimiento generado por el Hamiltoniano total H_T contiene tantas funciones arbitrarias de norma como constricciones primarias de primera clase. Por lo que, se debe añadir a H_T las constricciones secundarias de primera clase multiplicadas por funciones arbitrarias adicionales. La función de primera clase obtenida de esta manera tiene la forma

$$H_E = H' + u^a \gamma_a^{\dagger}, \quad (1.93)$$

el cual tiene por nombre *Hamiltoniano extendido* y el índice a corre sobre un conjunto completo de constricciones de primera clase.

Para variables dinámicas invariantes de norma, es decir, variables para las cuales su paréntesis de Poisson con los generadores de norma γ se anula débilmente, la evolución predicha por H' , H_T y H_E es la misma. Para cualquier otro tipo de variable se debe usar H_E , con el fin de tomar en cuenta toda la libertad de norma.

^{††} Las ecuaciones de movimiento para el formalismo extendido pueden ser derivadas del "principio de acción extendido" $S_E = \int (p_n \dot{q}^n - H' - u^k \phi_k) dt$ donde la suma contiene todas las constricciones, no solamente las primarias.

1.6 Constricciones de segunda clase

1.6.1 Separación de las constricciones de primera y segunda clase

Regresando a las constricciones de segunda clase, las cuales están presentes siempre que la matriz $C_{jk} = \{\phi_j, \phi_k\}$ no sea cero sobre la superficie de restricción. Se supondrá, en este desarrollo, que el rango de la matriz C_{jk} , de los paréntesis de todas las constricciones, es constante sobre la superficie de restricción.

Teorema 1.6.1 *Si $\det C_{jk} \approx 0$, existe (al menos) una restricción de primera clase entre las ϕ_j 's.*

Dem.

Si $\det C_{jk} \approx 0$, entonces se puede encontrar una solución distinta de cero λ^j , de $\lambda^j C_{jk} \approx 0$. Dado lo anterior, la restricción $\lambda^j C_{jk}$ será entonces de primera clase, lo cual prueba el teorema. □

Si se redefinen las constricciones como $\phi_j \rightarrow a_j^k \phi_k$, con una matriz apropiada a , que sea invertible, entonces se puede usar la restricción $\lambda^k \phi_k$ como la primera restricción de una representación equivalente de la superficie de restricción. En tal representación, $C_{1j} = -C_{j1} \approx 0$.

Aplicando repetidamente el Teorema (1.6.1), se llega a una descripción equivalente de la superficie de restricción en términos de las constricciones $\gamma_a \approx 0$, $\chi_\alpha \approx 0$, cuya matriz de paréntesis de Poisson se lee débilmente como

$$\begin{matrix} \gamma_b \\ \chi_\beta \end{matrix} \begin{pmatrix} \gamma_a & \chi_\alpha \\ 0 & 0 \\ 0 & C_{\beta\alpha} \end{pmatrix}, \quad (1.94)$$

donde $C_{\beta\alpha}$ es una matriz antisimétrica, la cual es invertible en todo punto de la superficie de restricción.

En esta representación, las constricciones se separan completamente en primera y segunda clase. Ninguna combinación de las χ_α es de primera clase y las γ_a 's completan a las constricciones de primera clase, mientras que cualquier restricción de segunda clase debe tener una componente a lo largo de χ_α .

1.6.2 El Paréntesis de Dirac

Cabe resaltar que las constricciones de segunda clase no son de interés para la teoría, por lo que pueden descartarse y definirse de esta forma un paréntesis modificado de Poisson, el cual toma

en cuenta solo a las constricciones de primera clase (cf.[22]). Debido a que la matriz $C_{\alpha\beta}$ es invertible, posee una matriz inversa $C^{\alpha\beta}$

$$C^{\alpha\beta}C_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}_{\gamma}. \quad (1.95)$$

Por lo tanto, se define el paréntesis de Dirac como:

$$\{F, G\}^* := \{F, G\} - \{F, \chi_{\alpha}\}C^{\alpha\beta}\{\chi_{\beta}, G\}. \quad (1.96)$$

El paréntesis anterior satisface las propiedades (1.19, 1.22, 1.23) del paréntesis de Poisson, además de las siguientes:

$$\{\chi_{\alpha}, F\}^* = 0, \quad (1.97)$$

para cualquier F ,

$$\{F, G\}^* \approx \{F, G\}, \quad (1.98)$$

con G de primera clase, y F arbitraria,

$$\{R, \{F, G\}^*\}^* \approx \{R, \{F, G\}\}, \quad (1.99)$$

con F y G de primera clase, y R arbitraria.

Se sigue de (1.97) que las constricciones de segunda clase se pueden poner igual a cero antes ó después de evaluar el paréntesis de Dirac. Más aún, debido a que el Hamiltoniano extendido (1.93) es de primera clase, se observa de (1.98) que este Hamiltoniano sigue generando correctamente las ecuaciones de movimiento en términos del paréntesis de Dirac, *i.e.*,

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\} \approx \{F, H_E\}^* \quad \text{para cualquier } F. \quad (1.100)$$

En particular, el efecto de la transformación de norma se puede evaluar también por medio del paréntesis de Dirac

$$\{F, \gamma_a\} \approx \{F, \gamma_a\}^* \quad \text{para cualquier } F. \quad (1.101)$$

En este momento, todas las ecuaciones se pueden formular en términos del paréntesis de Dirac, y las constricciones de segunda clase solo serán identidades que expresan algunas variables canónicas en términos de otras.

1.7 Fijación de la norma

1.7.1 Normas Canónicas

Como se ha visto, la presencia de constricciones de primera clase y la libertad de norma asociada indican que hay más de un conjunto de variables canónicas que corresponden a un estado físico dado. En la práctica es deseable eliminar esta ambigüedad, imponiendo condiciones extra sobre las variables canónicas, llamadas *condiciones de norma canónicas*, tal que exista una correspondencia biunívoca entre los estados físicos y los valores de aquellas variables independientes que resultan de la imposición de las condiciones adicionales mencionadas. Las condiciones de norma no son, por lo tanto, una consecuencia de la teoría, más bien, son ecuaciones ad-hoc impuestas con el fin de evitar un "conteo múltiple de estados". Se permite imponer estas condiciones adicionales debido a que estas solamente remueven los elementos no observables arbitrarios de la teoría, y no afectan las propiedades (invariantes de norma) observables.

Existen dos propiedades que un conjunto adecuado

$$C_b(q, p) \approx 0, \quad (1.102)$$

de condiciones de norma debe de satisfacer:

1. La norma escogida debe ser accesible. Es decir, dado un conjunto de variables canónicas, debe existir una transformación de norma que mapee el conjunto dado de q 's y p 's sobre un conjunto que satisface (1.102). Esta transformación debe ser obtenida por iteración de transformaciones infinitesimales de la forma $\delta u^a \{F, \gamma_a\}$.

Esta condición garantiza que (1.102) no afecta las propiedades (invariantes de norma) físicas relevantes del sistema, sino que solo restringe la libertad de norma. Debido a que el número de parámetros independientes δu^a es igual al número de constricciones independientes de primera clase γ_a , se concluye que el número de condiciones de norma independientes (1.102) no puede ser más grande que el número de independientes γ_a 's.

2. Las condiciones (1.102) deben fijar la norma completamente. Esto significa que no debe existir ninguna otra transformación de norma que la identidad, tal que preserve (1.102). Es decir, las ecuaciones

$$\delta u^a \{C_b, \gamma_a\} \approx 0, \quad (1.103)$$

deben implicar que

$$\delta u^a = 0. \quad (1.104)$$

El resultado (1.104) será una consecuencia de (1.103), solo si el número de ecuaciones independientes es igual o mayor que el número de incógnitas δu^a . Por lo tanto, de estas propiedades se concluye que para fijar completamente la norma, *el número de condiciones de norma independientes debe ser igual al número de constricciones independientes de primera clase*. Los paréntesis de Poisson $\{C_b, \gamma_a\}$ forman, entonces, una matriz cuadrada. Con el fin de que (1.103) implique (1.104), esta matriz debe ser invertible. Por lo que se tiene la siguiente condición:

$$\det\{C_b, \gamma_a\} \neq 0. \quad (1.105)$$

Pero esta condición expresa que las constricciones C_b, γ_a forman ellas juntas, un conjunto de segunda clase. Así, se observa que después de fijar completamente la norma solo quedan constricciones de segunda clase. De hecho, si todavía existiera alguna constricción de primera clase, se tendría una libertad de norma sobrante, correspondiente a las transformaciones generadas por esa constricción.

Después de fijar la norma, se pasa al paréntesis de Dirac. Se tiene entonces una teoría que es libre de constricciones, en el sentido de que todas las constricciones se pueden considerar en este punto como identidades expresando algunas variables dinámicas en términos de otras.

Se puede dar una descripción geométrica del proceso de fijar la norma. La superficie $C_a = 0$ de las condiciones de norma debe intersectar las orbitas de norma, las cuales se localizan sobre la superficie de constricción, una y solo una vez (véase Fig. 1.1). La condición (1.105) garantiza esta propiedad localmente.

1.7.2 Conteo de los grados de libertad

En una teoría que solo cuenta con constricciones de segunda clase, no aparecerán funciones arbitrarias en el Hamiltoniano. En este caso, un conjunto de variables canónicas que satisfacen las ecuaciones de constricción determinan un único estado físico. Debido a que después de fijar la norma solo quedan constricciones de segunda clase, se llega al siguiente conteo de grados físicos de libertad:

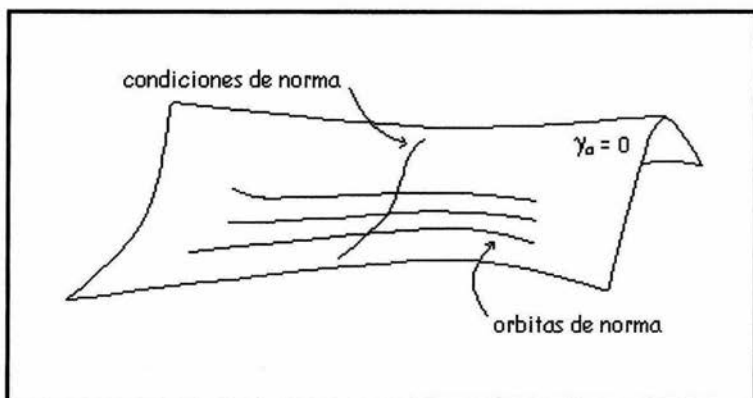


Figura 1.1: Condiciones de norma

$$\begin{aligned}
 2 \times \left(\begin{array}{c} \text{Número de grados} \\ \text{de libertad} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{c} \text{Número de variables} \\ \text{canónicas independientes} \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{c} \text{Número total de} \\ \text{variables canónicas} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Número de constricciones} \\ \text{originales de segunda clase} \end{array} \right) \\
 &\quad - \left(\begin{array}{c} \text{Número de constricciones} \\ \text{de primera clase} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Número de condiciones} \\ \text{de norma} \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{c} \text{Número total de} \\ \text{variables canónicas} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{Número de constricciones} \\ \text{originales de segunda clase} \end{array} \right) \\
 &\quad - 2 \times \left(\begin{array}{c} \text{Número de constricciones} \\ \text{de primera clase} \end{array} \right). \quad (1.106)
 \end{aligned}$$

Como el número de constricciones de segunda clase es siempre par, se observa de (1.106), que el número de variables canónicas independientes es también par, lo que corresponde a un número entero de grados de libertad.

1.8 Ejemplos

1.8.1 Partícula Relativista

La acción para la partícula libre relativista en un espacio de Minkowski de dimensión D , está dada por

$$S = -m \int_{s_1}^{s_2} ds = -m \int_{s_1}^{s_2} (-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.107)$$

con la signatura $(-, +, +, +)$.

Se elige un parámetro monótono τ , el cual etiqueta la posición de la partícula sobre su línea de mundo, y se define

$$\dot{x}^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau}.$$

Se supondrá además que \dot{x} es temporal ($\dot{x}^2 \leq 0$) y futurista ($\dot{x}^0 > 0$). Con las condiciones anteriores, la acción se lee como

$$S = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{-\dot{x}^2}. \quad (1.108)$$

El Hessiano para este sistema es

$$W_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^\mu \partial \dot{x}^\nu} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\mu} \left(\frac{m \dot{x}^\nu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \right) = \frac{-m}{(-\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} (g_{\mu\nu} \dot{x}^\rho \dot{x}_\rho - \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu), \quad (1.109)$$

el cual tiene rango $D - 1$, y el eigenvector no nulo de W es \dot{x} , debido a que

$$\dot{x}^\mu W_{\mu\nu} = -\frac{m}{(-\dot{x}^2)^{\frac{3}{2}}} (\dot{x}^\mu g_{\mu\nu} \dot{x}^2 - \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu \dot{x}_\nu) = 0. \quad (1.110)$$

La expresión para los momentos canónicos es

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m \dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}, \quad (1.111)$$

de donde se obtiene una restricción primaria, la cual, de hecho, ya se esperaba debido al rango de $W_{\mu\nu}$,

$$p_\mu p^\mu = \frac{m^2 \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{-\dot{x}^2} = -m^2, \quad (1.112)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi := p^\mu p_\mu + m^2 \approx 0. \quad (1.113)$$

El Hamiltoniano canónico es:

$$\begin{aligned} H &= p_\mu \dot{x}^\mu - L \\ &= \frac{m\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} + m\sqrt{-\dot{x}^2} = 0. \end{aligned} \quad (1.114)$$

Este tipo de comportamiento (Hamiltoniano canónico nulo) se presenta siempre que la acción es invariante bajo reparametrizaciones generales (cf.[44]). Por otra parte, debido a que

$$\dot{\varphi} = u\{\varphi, \varphi\} \approx 0, \quad (1.115)$$

con u como multiplicador; φ es la única constricción y es de primera clase. Las ecuaciones de movimiento son:

$$\dot{x}^\mu = u\{x^\mu, \varphi\} = u \frac{\partial \varphi}{\partial p_\mu} = u \frac{\partial}{\partial p_\mu} (p^2 + m^2) = 2u p^\mu, \quad (1.116)$$

$$\dot{p}_\mu = u\{p_\mu, \varphi\} = 0, \quad (1.117)$$

con lo anterior, la constricción φ constituye el generador de la evolución dinámica. Si se pretende fijar la norma introduciendo una condición de norma Ω , entonces Ω tiene que depender sobre τ explícitamente, debido a que:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + u\{\Omega, \varphi\} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + 2u p^\nu \frac{\partial \Omega}{\partial x^\nu}, \quad (1.118)$$

da una solución no nula para u si

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} \neq 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x^\mu} \neq 0,$$

para al menos una μ . Si se elige la condición de norma como

$$\Omega = x^0 - \tau, \quad (1.119)$$

llamada de forma instantánea (cf.[44]), entonces se determina el multiplicador u , de acuerdo a (1.118), como

$$u = \frac{1}{2p^0}.$$

Con lo cual,

$$H = \frac{1}{2p^0}(p^2 + m^2), \quad (1.120)$$

y las ecuaciones hamiltonianas son:

$$\frac{dx^0}{d\tau} = \frac{2p^0}{2p^0} = 1, \quad (1.121)$$

$$\frac{dx^i}{d\tau} = \frac{p^i}{p^0}, \quad (1.122)$$

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0. \quad (1.123)$$

La matriz \mathbf{C} , construida a partir de los paréntesis de Poisson entre las constricciones Ω y φ , usando

$$\{\varphi, \varphi\} = 0, \quad (1.124)$$

$$\{\varphi, \Omega\} = -2p^0 = 2p_0, \quad (1.125)$$

$$\{\Omega, \Omega\} = 0, \quad (1.126)$$

es:

$$\mathbf{C} = 2p_0 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.127)$$

De aquí que, el paréntesis de Dirac entre las funciones A y B , dado por las constricciones de segunda clase Ω y φ , es

$$\begin{aligned} \{A, B\}^* &= \{A, B\} - \left(\{A, \Omega\}, \{A, \varphi\} \right) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2p_0} \\ -\frac{1}{2p_0} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{B, \Omega\} \\ \{B, \varphi\} \end{pmatrix} \\ &= \{A, B\} + \frac{1}{2p^0} \{A, x^0\} \{p^2, B\} - \frac{1}{2p^0} \{A, p^2\} \{x^0, B\}. \end{aligned} \quad (1.128)$$

Por lo tanto, los paréntesis de Dirac fundamentales son:

$$\{x^\mu, x^\nu\}^* = 0, \quad (1.129)$$

$$\{p_\mu, p_\nu\}^* = 0, \quad (1.130)$$

$$\{x^\mu, p_\nu\}^* = \delta^\mu_\nu - \frac{1}{2p^0} 2p^\sigma \{x^\mu, p_\sigma\} \{x^0, p_\nu\} = \delta^\mu_\nu - \frac{p^\mu}{p^0} \delta^0_\nu, \quad (1.131)$$

los cuales son compatibles con las constricciones φ, Ω .

Como ejemplo adicional, se acoplará una partícula puntual a un campo externo. El termino de interacción no es completamente arbitrario; ya que debe tener la propiedad de invarianza bajo reparametrizaciones, la acción completa se escribe como:

$$S = S_{\text{libre}} + g S_{\text{int}}, \quad (1.132)$$

en donde el término S_{int} puede tener las siguientes formas:

$$S_{\text{int}} = \int d\tau \phi(-\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.133a)$$

$$S_{\text{int}} = -\int d\tau \phi_\mu \dot{x}^\mu, \quad (1.133b)$$

$$S_{\text{int}} = \int d\tau (\phi_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.133c)$$

con $\phi, \phi_\mu, \phi_{\mu\nu}$, un escalar, un campo vectorial, y un campo tensorial, respectivamente.

El caso que se analizará es el acoplamiento a un campo electromagnético ($\phi_\mu = A_\mu$), con el Lagrangiano dado por

$$L = -m(-\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}} - e\dot{x}^\mu A_\mu, \quad (1.134)$$

donde la constante de acoplamiento e , es la carga eléctrica de la partícula. El momento canónico conjugado de x^μ es

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = m \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} - e A_\mu, \quad (1.135)$$

del cual aparece una constricción, debido a que

$$(p_\mu + eA_\mu)(p^\mu + eA^\mu) = m^2 \frac{\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{-\dot{x}^2} = -m^2,$$

se tiene entonces

$$\varphi_e = (p_\mu + eA_\mu)^2 + m^2 \approx 0, \quad (1.136)$$

cuando $e = 0$ la conricción se reduce, como ya se esperaba, a la del caso libre (1.113). Por otro lado, el Hamiltoniano canónico es cero,

$$H = m \frac{\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \dot{x}^\mu - eA_\mu \dot{x}^\mu + m(-\dot{x}^2)^{\frac{1}{2}} - e\dot{x}^\alpha A_\alpha = 0. \quad (1.137)$$

En vez de fijar el multiplicador de Lagrange v , escogiendo una condición de norma, se observará el comportamiento del multiplicador en las ecuaciones de movimiento.

$$\dot{x}^\mu = v \{x^\mu, \varphi_e\} = 2v (p^\mu + eA^\mu), \quad (1.138)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_\mu &= v \{p_\mu, \varphi_e\} = -2ve(p^\sigma + eA^\sigma) \partial_\mu A_\sigma \\ &\stackrel{(1.138)}{=} -e\dot{x}^\nu \partial_\mu A_\nu, \end{aligned} \quad (1.139)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \ddot{x}^\mu &= 2\dot{v}(p^\mu + eA^\mu) + 2v(\dot{p}^\mu + e\dot{A}^\mu) \\ &\stackrel{(1.139)}{=} 2\dot{v}(p^\mu + eA^\mu) + 2v\dot{x}_\nu F^{\nu\mu}, \end{aligned} \quad (1.140)$$

para esta última igualdad se usó también la regla de la cadena sobre \dot{A}^μ . Si v es una constante, se obtienen las ecuaciones de movimiento de una partícula bajo la influencia de una fuerza de Lorentz.

1.8.2 Campo Electromagnético

La acción para el campo electromagnético es

$$L = -\frac{1}{4} \int d^3x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.141)$$

con $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ el tensor del campo electromagnético (tensor de Faraday), y A_μ el 4-potencial del campo, y la expresión para $F_{\mu\nu}$ dada por

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.142)$$

asimismo,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.143)$$

Para calcular el Hessiano, se necesita primero

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4} \frac{\partial(F_{\rho\lambda} F^{\rho\lambda})}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}, \quad (1.144)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} W^{\nu\lambda} &= \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu) \partial(\partial_\mu A_\lambda)} \\ &=_{(1.144)} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} (-F^{\mu\lambda}) \\ &= -g^{\mu\rho} g^{\lambda\tau} (g_\rho^\mu g_\tau^\nu - g_\rho^\nu g_\tau^\mu) = g^{\mu\nu} g^{\mu\lambda} - g^{\nu\lambda} g^{\mu\mu}, \end{aligned} \quad (1.145)$$

sin suma sobre μ ; se observa que W tiene rango tres, por lo que se espera una restricción. De la definición de momento

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} =_{(1.144)} -F^{0\mu}, \quad (1.146)$$

$$\Pi_\mu = F^0{}_\mu, \quad (1.147)$$

se tiene entonces que $\Pi_\mu = \Pi^\mu$. Por otro lado, debido a que $F_{00} = 0$, existe entonces una constricción primaria

$$\varphi_1 = \Pi_0 = \Pi^0 \approx 0. \quad (1.148)$$

Por otra parte el Hamiltoniano canónico es:

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x (\Pi^\mu \partial_0 A_\mu - \mathcal{L}) \\ &= \int d^3x \left(\Pi^\mu \partial_0 A_\mu + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \\ &= \int d^3x \left(\Pi^\mu \partial_0 A_\mu + \frac{1}{2} \Pi_i \Pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right), \end{aligned}$$

pero,

$$\partial_0 A_i = F_{0i} + \partial_i A_0 = -\Pi_i + \partial_i A_0,$$

luego entonces

$$H = \int d^3x \left(\Pi_i \partial_i A_0 - \frac{1}{2} \Pi_i \Pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right), \quad (1.149)$$

en el cual no aparecen velocidades. Rescribiendo este Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left(\partial_i (\Pi_i A_0) - \partial_i \Pi_i A_0 - \frac{1}{2} \Pi_i \Pi_i + \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} \right) \\ &= \int d^3x \left(\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} \Pi_i \Pi_i - A_0 \partial_i \Pi_i \right). \end{aligned} \quad (1.150)$$

Por otra parte, el paréntesis fundamental de Poisson entre A_μ y Π^μ es:

$$\begin{aligned}
\{A_\mu(x), \Pi^\nu(y)\}_{x^0=y^0} &= \int d^3z \frac{\delta A_\mu(x)}{\delta A_\sigma(z)} \frac{\delta \Pi^\nu(y)}{\delta \Pi^\sigma(z)} \\
&= \int d^3z \delta_\mu^\sigma \delta_\sigma^\nu \delta^3(x-z) \delta^3(y-z) \\
&= \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y) \tag{1.151}
\end{aligned}$$

$$= \delta_\mu^\nu \delta^3(y-x), \tag{1.152}$$

y los restantes paréntesis son cero. Por la condición de consistencia, se debe cumplir

$$\begin{aligned}
0 \stackrel{!}{\approx} \{\Pi^0, H\} &= -\{\Pi^0, \int d^3x A_0 \partial_i \Pi_i\} \\
&= -\int d^3x \{\Pi^0(y), A_0(x)\} \partial_i \Pi_i \\
&= \int d^3x \delta^3(y-x) \partial_i \Pi_i(x) \\
&= \partial_i \Pi_i(y), \tag{1.153}
\end{aligned}$$

la cual es una constricción secundaria, conocida como *Ley de Gauss*. La condición sobre esta constricción no resulta en constricciones adicionales, debido a que:

$$\begin{aligned}
\{\partial_i \Pi_i(y), H\} &= \{\partial_i \Pi_i, \int d^3x \left(\frac{1}{4} F_{jk} F^{jk} - A_0 \partial_j \Pi_j - \frac{1}{2} \Pi_j \Pi_j \right)\} \\
&= \frac{1}{2} \int d^3x \{\partial_i \Pi_i, \partial_j A_k - \partial_k A_j\} F_{jk} - \int d^3x \{\partial_i \Pi_i, A_0\} \partial_j \Pi_j = 0,
\end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned}
\{\partial_i \Pi_i(y), \partial_j A_k(x)\} &= -\int d^3z \frac{\delta \partial_i \Pi_i(y)}{\delta \Pi_r(z)} \frac{\delta \partial_j A_k(x)}{\delta A^r(z)} = -\int d^3z \partial_k \delta(y-z) \partial_j \delta(x-z) \\
&= -\partial_k \partial_j \delta(x-y),
\end{aligned}$$

$$\{\partial_i \Pi_i(y), A_0(x)\} = -\int d^3z \frac{\delta \partial_i \Pi_i(y)}{\delta \Pi_r(z)} \frac{\delta A_0(x)}{\delta A^r(z)} = 0.$$

Por lo tanto, la teoría de Maxwell tiene dos constricciones

$$\varphi = \Pi^0 \approx 0,$$

como restricción primaria, y

$$\chi = \partial_i \Pi_i \approx 0,$$

como restricción secundaria. Si se calcula el paréntesis de estas dos constricciones

$$\{\varphi, \chi\} = \{\Pi^0(x), \partial_i \Pi_i(y)\} = 0, \quad (1.154)$$

se deduce entonces que las constricciones son de primera clase, por lo tanto se colocan en el Hamiltoniano extendido:

$$\begin{aligned} H_E &= H + \int d^3x (v_1 \varphi + v_2 \chi) \\ &= \int d^3x \left(\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \frac{1}{2} \Pi_i \Pi_i + v_1 \Pi^0 + (v_2 - A_0) \partial_i \Pi_i \right). \end{aligned} \quad (1.155)$$

El procedimiento continua estableciendo dos condiciones de norma, las cuales determinarían los multiplicadores de Lagrange v_1 y $\tilde{v}_2 = v_2 - A_0$, y posteriormente se calcularía la evolución del sistema bajo estas condiciones.

Capítulo 2

La Cuerda Relativista

2.1 Introducción

Todo empezó al final de la década de los 60's. Se había encontrado que la masa de los hadrones seguía un patrón sugestivo, las trayectorias de Regge, el cual se pensó podría explicarse si los hadrones estuvieran constituidos por cuerdas. Sin embargo, la abundancia de anomalías en espacio- tiempo de cuatro dimensiones, la existencia de estados no masivos en el espectro de la cuerda sin correspondencia en el mundo hadrónico y el surgimiento de la cromodinámica cuántica, llevaron al abandono de este modelo. Pero fue precisamente el espectro de la cuerda, conteniendo partículas de espín 2, el mediador de la interacción gravitacional, el que dio la pauta para considerar a ésta, en vez de una teoría de interacción fuerte, como una teoría unificadora [11].

A principios de los 80's se encontró que las teorías de cuerdas relevantes deben incluir supersimetría en el espacio- tiempo y que para evitar patologías, como anomalías ó pérdida de covariancia, este espacio- tiempo debe ser de diez dimensiones. Existen, con las características anteriores, cinco teorías de cuerdas supersimetrías las cuales se conocen como la teoría IIA, IIB, heterótica $E_8 \times E_8$, heterótica $SO(32)$ y tipo I [27]. No obstante, es esta consistencia la que dota a la teoría de cuerdas de problemas, es decir, si se espera que esta teoría describa el mundo en el que vivimos, un espacio- tiempo de cuatro dimensiones, la cuerda debe estar en este espacio; asimismo, se espera que exista solo una teoría de cuerdas en vez de las cinco ya presentadas.

Sin embargo, el primer problema se resuelve mediante compactificación. Es decir, se toman seis de las nueve direcciones espaciales pequeñas y compactas, y debido a que el tamaño de las direcciones compactas son más pequeñas que el alcance de los presentes aceleradores, el mundo aparece como un espacio- tiempo de cuatro dimensiones. Así cada teoría de cuerdas en diez dimensiones da lugar a diferentes teorías en cuatro dimensiones después de la compactificación. Algunas de esta teorías se parecen bastante al universo observado. En particular, se tiene [42]:

1. Grupo de norma conteniendo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$.
2. Fermiones quirales.
3. Tres generaciones de quarks y leptones.

4. Supersimetría $N = 1$.

Por otro lado, el segundo problema se resuelve parcialmente debido a una propiedad de la teoría de cuerdas llamada dualidad. Con esta propiedad se tienen los siguientes ejemplos de dualidad [42]:

1. La cuerda heterótica $SO(32)$ es dual a la cuerda tipo I en diez dimensiones.
2. La cuerda heterótica $SO(32)$, así como $E_8 \times E_8$, compactificada sobre un toro cuatridimensional T^4 es dual a la cuerda tipo IIA compactificada sobre una variedad cuatridimensional compacta no trivial, conocida como K3.
3. La cuerda tipo IIB es auto-dual, es decir, esta teoría con constante de acoplamiento g es equivalente a la misma teoría con constante de acoplamiento g^{-1} .
4. La cuerda heterótica $SO(32)$, así como $E_8 \times E_8$, compactificada sobre un toro de seis dimensiones T^6 es auto-dual en el mismo sentido.

De lo anterior, se observa que se podrían combinar todas las teorías de cuerdas en una sola teoría con un espacio como parámetro. La meta será pues, después de comprender totalmente la dinámica de la teoría de cuerdas, encontrar un principio dinámico para determinar un solo punto en este espacio, y que este punto describa totalmente la naturaleza que se observa [11], [42].

En este capítulo se desarrolla el formalismo hamiltoniano de la cuerda relativista, descrita por la acción de Nambu-Goto, comenzando por obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange de esta acción, las cuales son invariantes bajo reparametrizaciones del volumen de mundo, debido a que la acción misma lo es, por lo tanto, eligiendo una reparametrización adecuada estas ecuaciones de campo se simplificarán dando lugar a ecuaciones de onda en los campos bosónicos. Estas ecuaciones tendrán una solución en términos de series de Fourier.

Después se realiza la formulación canónica de la cuerda, obteniéndose así dos constricciones de primera clase, y por consiguiente el Hamiltoniano de la cuerda relativista. Posteriormente, se aplica la reducción de norma de la teoría y la correspondiente cuantización. La necesidad de esta reducción de norma se muestra cuantizando el sistema imponiendo solamente la norma ortogonal, lo cual llevará un espacio de Fock inconsistente, por ello se introducen dos condiciones de norma, dando lugar a los verdaderos grados de libertad del sistema, construyéndose así un espacio de Fock consistente y por ende la cuantización de la cuerda relativista. A lo largo del presente capítulo se realizan otros cálculos paralelos, que si bien no son indispensables para la formulación Hamiltoniana, dan una introspección útil de la dinámica de la cuerda relativista.

2.2 La Cuerda Relativista Clásica

En vez de una línea de mundo x^μ trazada por una partícula, una cuerda genera una hoja mundo en el espacio-tiempo, esta superficie debe tener las siguientes propiedades [27]:

1. La superficie es de tipo tiempo, es decir posee en todo punto direcciones tipo tiempo, y tipo espacio posiblemente en la frontera.
2. Esta superficie tiene área extrema.

Al igual que la partícula es conveniente usar una descripción paramétrica de la cuerda, la cual tiene la propiedad de producir un formalismo explícitamente covariante. Las ecuaciones paramétricas de la cuerda son $x^\mu = x^\mu(\xi^i)$, con ξ^i , e $i = 0, 1$, como coordenadas de la hoja mundo de la cuerda y x^μ , con $\mu = 0, \dots, D - 1$ como las coordenadas del espacio-tiempo.

Se supondrá que $\xi = (\tau, \sigma)$ es una buena parametrización en el sentido que los vectores tangentes $\partial x^\mu / \partial \tau$ y $\partial x^\mu / \partial \sigma$ son linealmente independientes en toda la hoja mundo y no nulos. Es más, se supondrá que $\partial x^\mu / \partial \tau$ es de tipo tiempo y que $\partial x^\mu / \partial \sigma$ es de tipo espacio. Además se considerará una superficie que no se interseca con ella misma, por lo cual se considerarán dos tipos de cuerda: la cuerda abierta y cerrada.

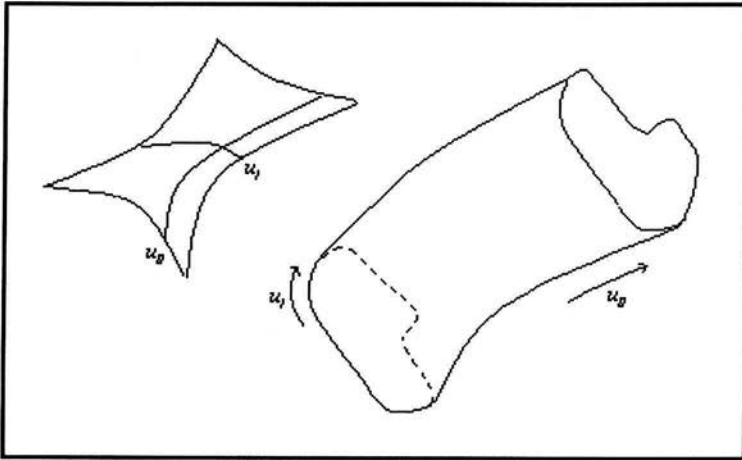


Figura 2.1: Cuerda Relativista

El encajamiento de la hoja mundo induce una métrica sobre la superficie $x^\mu(\xi)$ dada por

$$g_{ij} = G_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^j}. \quad (2.1)$$

La acción invariante bajo reparametrizaciones más simple es la llamada acción de Nambu-Goto, la cual es proporcional al área de la hoja mundo

$$S = -T \int d^2 \xi \sqrt{-\det g}, \quad (2.2)$$

con T la tensión de la cuerda, y con unidades de $[T] = [\text{masa}]^2$. No obstante, se expresará esta acción de una forma más explícita. Es decir, τ tomará valores en $[\tau_1, \tau_2]$ y σ en $[0, \sigma_2]$, con $\sigma_2 = \pi, 2\pi$ para la cuerda abierta y cerrada, respectivamente; y $T = 1/2\pi\alpha'$, donde α' es la pendiente de Regge. Calculando las componentes de la métrica, por ejemplo,

$$g_{\tau\sigma} = \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu := \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x_\mu}{\partial \sigma}, \quad (2.3)$$

la acción se leerá como,

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^{\sigma_2} d\tau d\sigma \sqrt{-\dot{x}^2 \dot{x}^2 + (\dot{x} \cdot \dot{x})^2}. \quad (2.4)$$

Para obtener las ecuaciones de campo se calcula primero la variación de la acción,

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^{\sigma_2} d\tau d\sigma \left(\frac{\delta S}{\delta \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu + \frac{\delta S}{\delta \dot{x}^\mu} \delta \dot{x}^\mu \right). \quad (2.5)$$

Dos cosas se deben tener en cuenta en esta expresión. Una de ellas, es mantener las variaciones de la superficie restringidas, de tal forma que en la superficie no haya puntos del tipo -espacial. Y la segunda, suponer que en la variación δS , las derivadas

$$\Pi_\mu^{(\tau)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} (-g)^{-\frac{1}{2}} [(\dot{x} \cdot \dot{x}) \dot{x}_\mu - \dot{x}^2 \dot{x}_\mu], \quad (2.6)$$

$$\Pi_\mu^{(\sigma)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} (-g)^{-\frac{1}{2}} [(\dot{x} \cdot \dot{x}) \dot{x}_\mu - \dot{x}^2 \dot{x}_\mu], \quad (2.7)$$

estén definidas en toda la superficie, aunque esto no siempre sucede así, cf.[44]. Se integra por partes la ecuación (2.5):

$$0 = \delta S = - \iint d\tau d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \Pi_\mu^{(\tau)} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \Pi_\mu^{(\sigma)} \right) \delta x^\mu + \int_0^{\sigma_2} d\sigma \Pi_\mu^{(\tau)} \delta x^\mu \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \Pi_\mu^{(\sigma)} \delta x^\mu \Big|_0^{\sigma_2}.$$

En el interior de la superficie las variaciones son arbitrarias e independientes, entonces del primer término se obtendrán las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$L_\mu = -\frac{\partial}{\partial \tau} \Pi_\mu^{(\tau)} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \Pi_\mu^{(\sigma)} = 0. \quad (2.8)$$

Por otro lado, las posiciones fijas de la cuerda, tanto inicial como final, permiten concluir que $\delta x^\mu = 0$ para τ_1 y τ_2 , entonces el segundo término es cero. Para la cuerda cerrada las variaciones en $\sigma = 0$ y $\sigma = 2\pi$ son iguales, *i.e.*

$$\begin{aligned}\delta x^\mu(0, \tau) &= \delta x^\mu(2\pi, \tau), \\ \Pi_\mu^{(\sigma)}(0, \tau) &= \Pi_\mu^{(\sigma)}(2\pi, \tau),\end{aligned}$$

por lo tanto, el último término también es cero.

Para la cuerda abierta se supone que $\delta x^\mu(0)$ y $\delta x^\mu(\pi)$ son arbitrarias, con lo cual, se obtendrían las condiciones de frontera siguientes

$$\Pi_\mu^{(\sigma)} = 0 \quad \text{para } \sigma = 0, \pi. \quad (2.9)$$

Las ecuaciones de campo (2.8) son no-lineales pero, por construcción, estas son invariantes bajo reparametrización, *i.e.*, el área de la hoja mundo es invariante bajo reparametrizaciones, y por ende, también las ecuaciones de campo.

A continuación se escogerá, debido a la libertad mencionada, una reparametrización que simplifique las ecuaciones de campo. Por geometría diferencial se sabe que existen coordenadas en las cuales la métrica de la cuerda es la siguiente:

$$g = \dot{\tilde{x}}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Por lo tanto, se tendrá que determinar una transformación, la cual mapee una parametrización arbitraria a otra, donde en esta última se cumpla:

$$\begin{aligned}0 &= \dot{\tilde{x}} \cdot \dot{\tilde{x}}, \\ 0 &= \dot{\tilde{x}}^2 + \ddot{\tilde{x}}^2.\end{aligned}$$

Para cualquier reparametrización se tiene:

$$\dot{x}^\mu = \dot{x}^\mu \frac{\partial \tau}{\partial \bar{\tau}} + \dot{x}^\mu \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\tau}} \quad \left(\dot{\tilde{x}}^\mu = \frac{\partial}{\partial \bar{\tau}} \tilde{x}^\mu \right), \quad (2.11)$$

$$\dot{\tilde{x}}^\mu = \dot{x}^\mu \frac{\partial \tau}{\partial \bar{\sigma}} + \dot{x}^\mu \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\sigma}} \quad \left(\dot{\tilde{x}}^\mu = \frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}} \tilde{x}^\mu \right). \quad (2.12)$$

Si se etiquetan los siguientes términos:

$$\begin{aligned} E &= \dot{x}^2, \quad G = \dot{\tilde{x}}^2, \\ F &= \dot{x} \cdot \dot{\tilde{x}}, \quad D^2 = F^2 - EG, \end{aligned}$$

y se define

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\sigma}} & \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\tau}} \\ \frac{\partial \tau}{\partial \bar{\sigma}} & \frac{\partial \tau}{\partial \bar{\tau}} \end{pmatrix}.$$

Resulta entonces que las restricciones

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \dot{\tilde{x}} \cdot \dot{\tilde{x}} = 0, \\ \tilde{E} + \tilde{G} &= \dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{x}}^2 = 0, \end{aligned}$$

se expresan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= \left(\frac{\partial \tau}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} \right) \left(\frac{\partial \tau}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial x_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial x_\mu}{\partial \sigma} \right) \\ &= (J_{22} \dot{x}^\mu + J_{12} \dot{\tilde{x}}^\mu) (J_{21} \dot{x}_\mu + J_{11} \dot{\tilde{x}}_\mu) \\ &= J_{22} J_{21} \dot{x}^2 + (J_{12} J_{21} + J_{22} J_{11}) \dot{x} \cdot \dot{\tilde{x}} + J_{12} J_{11} \dot{\tilde{x}}^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

asimismo

$$\tilde{E} + \tilde{G} = (J_{22}^2 + J_{21}^2) \dot{x}^2 + 2(J_{22} J_{12} + J_{11} J_{21}) \dot{x} \cdot \dot{\tilde{x}} + (J_{12}^2 + J_{11}^2) \dot{\tilde{x}}^2 = 0. \quad (2.14)$$

Se puede usar la ecuación (2.13) para completar los cuadrados de la ecuación (2.14); el resultado será entonces:

$$(J_{22} \pm J_{21})^2 E + 2(J_{22} \pm J_{21})(J_{12} \pm J_{11})F + (J_{12} \pm J_{11})^2 G = 0. \quad (2.15)$$

Si se resuelve la ecuación cuadrática para $(J_{12} \pm J_{11})$ se obtiene:

$$J_{11} = -\frac{1}{G}(J_{21}F - J_{22}D), \quad (2.16)$$

$$J_{12} = -\frac{1}{G}(J_{22}F - J_{21}D). \quad (2.17)$$

Por último, se obtiene una relación entre las componentes de la matriz inversa J^{-1} :

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \sigma} = -\frac{1}{D} \left(F \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \sigma} - G \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \tau} \right) =: \alpha(\sigma, \tau), \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tau} = -\frac{1}{D} \left(E \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \sigma} - F \frac{\partial \tilde{\tau}}{\partial \tau} \right) =: \beta(\sigma, \tau). \quad (2.19)$$

Por lo tanto, se puede tomar una solución $\tilde{\tau}(\tau, \sigma)$, de la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \alpha = \frac{\partial}{\partial \sigma} \beta,$$

la cual existe como ya se había comentado. Entonces se puede calcular (2.18, 2.19) a partir de esta solución. Por construcción la reparametrización (\sim) será ortogonal:

$$\dot{\tilde{x}} \cdot \dot{\tilde{x}} = 0, \quad \dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{x}}^{\prime 2} = 0. \quad (2.20)$$

En la anterior reparametrización las ecuaciones (2.6, 2.7) se expresan como:

$$\tilde{\Pi}_\mu^{(\tilde{\tau})} = \frac{1}{2\pi \alpha'} \dot{\tilde{x}}_\mu, \quad (2.21)$$

$$\tilde{\Pi}_\mu^{(\tilde{\sigma})} = -\frac{1}{2\pi \alpha'} \dot{\tilde{x}}_\mu', \quad (2.22)$$

respectivamente; por lo tanto, las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.8), se leen como ecuaciones de onda:

$$\ddot{\tilde{x}}^\mu - \overset{\parallel}{\tilde{x}}^\mu = 0. \quad (2.23)$$

Obviamente esta ecuación tiene que resolverse con la restricción dada por (2.20), además de ciertas condiciones en x^μ ; la condición de periodicidad :

$$x^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) = x^\mu(\tau, \sigma), \quad (2.24)$$

para la cuerda cerrada, y la condición de frontera

$$\Pi_\mu^{(\sigma)} \Big|_{0, \pi} = 0, \quad (2.25)$$

para la cuerda abierta. Estas condiciones son invariantes sólo bajo aquellas reparametrizaciones que cumplen con $\tilde{\sigma}(\tau, \sigma_i) = \sigma_i$, por lo tanto las condiciones de frontera para la cuerda abierta serán

$$\overset{\perp}{\tilde{x}}^\mu \Big|_{\tilde{\sigma}=0, \pi} = 0. \quad (2.26)$$

De aquí en adelante se omitirán las tildes en las variables, por obvias razones. La solución de (2.23), en términos de una expansión de Fourier, es:

$$x^\mu(\tau, \sigma) = q^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau + i \sum_{\substack{-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-in\tau} [\alpha_n^\mu \cos n\sigma + \bar{\alpha}_n^\mu \sin n\sigma], \quad (2.27)$$

con los coeficientes $\bar{\alpha}_n^\mu \equiv 0$ para la cuerda abierta.

Expresando las condiciones de ortonormalidad dadas por (2.20), en términos de la solución anterior para la cuerda abierta se tiene:

$$\dot{x}^\mu \overset{\perp}{x}_\mu = \left(\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-in\tau} \alpha_n^\mu \cos n\sigma \right) \left(-i \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-im\tau} \alpha_{\mu m} \sin m\sigma \right)^\dagger.$$

[†]Nótese que las sumatorias toman en este momento cualquier valor, en la primera sumatoria, debido a que el término con $n = 0$ se absorbió definiendo $\alpha_0^\mu := 2\alpha' p^\mu$, y en la segunda, porque el término con $m = 0$ es cero.

Si se realiza el cálculo:

$$\begin{aligned}\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu &= -i \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-i(n+m)\tau} \alpha_n^\mu \alpha_{\mu m} \cos n\sigma \sin m\sigma \\ &= -\frac{i}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-i(n+m)\tau} \alpha_n^\mu \alpha_{\mu m} \sin(n+m)\sigma,\end{aligned}$$

puesto que hay simetría en n y m . Si se cambia el índice mudo para $n+m=l$, con n fija, se tiene que

$$\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = -\frac{i}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-il\tau} \alpha_n^\mu \alpha_{\mu(l-n)} \sin l\sigma.$$

Asimismo, para la segunda condición de ortogonalidad se tiene:

$$\begin{aligned}\dot{x}^2 + \dot{x}^2 &= \left(\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-in\tau} \alpha_n^\mu \cos n\sigma \right) \left(\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-im\tau} \alpha_{\mu m} \cos m\sigma \right) - \left(\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-in\tau} \alpha_n^\mu \sin n\sigma \right) \left(\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-im\tau} \alpha_{\mu m} \sin m\sigma \right) \\ &= \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-il\tau} \alpha_n^\mu \alpha_{\mu(l-n)} \cos l\sigma.\end{aligned}$$

Por lo tanto, las condiciones de ortogonalidad (2.20), para la cuerda abierta, se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n^\mu \alpha_{\mu(l-n)} = 0 \quad \text{con } l \text{ fija.} \quad (2.28)$$

En forma análoga, para la cuerda cerrada, se tiene que las condiciones de ortogonalidad se expresan como

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n^\mu \alpha_{\mu(l-n)} = 0, \quad \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_n^\mu \bar{\alpha}_{\mu(l-n)} = 0 \quad \text{con } l \text{ fija.} \quad (2.29)$$

Por lo tanto, las condiciones de ortogonalidad (2.20), se pueden formular como un conjunto infinito de restricciones sobre los modos de la cuerda:

$$L_n = -\frac{1}{4\alpha'} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{n-m} \cdot \alpha_m = 0, \quad (2.30)$$

$$\bar{L}_n = -\frac{1}{4\alpha'} \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{\alpha}_{n-m} \cdot \bar{\alpha}_m = 0, \quad (2.31)$$

con

$$\alpha_0^\mu = 2\alpha' p^\mu, \quad (2.32)$$

para la cuerda abierta, y

$$\alpha_0^\mu = \bar{\alpha}_0^\mu = \alpha' p^\mu, \quad (2.33)$$

para la cuerda cerrada. Las condiciones para las L_n y \bar{L}_n , se llaman condiciones de Virasoro y Virasoro-Shapiro, respectivamente.

Las condiciones de ortogonalidad (2.20) no determinan la parametrización completamente. Es decir, aún cuando se haya escogido una parametrización ortogonal ($F = 0$, $E + G = 0$, $D = -E$), queda la libertad de escoger una reparametrización como la siguiente:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \tau} = \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \sigma},$$

la cual representa a una transformación conforme. Si se resuelven estas ecuaciones, con las condiciones $\bar{\sigma}(\sigma_i, \tau) = \sigma_i$, estas tendrán la forma:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= h(\tau + \sigma) - h(\tau - \sigma) + \sigma, \\ \bar{\tau} &= h(\tau + \sigma) + h(\tau - \sigma) + \tau + \tau_0, \end{aligned}$$

Con h una función periódica, de período $2\sigma_2$, y τ_0 una constante arbitraria. A continuación se fijará la parametrización ortogonal hasta traslaciones en τ escogiendo un vector n independiente de τ y σ , y pidiendo además que:

$$n \cdot \dot{\bar{x}} = 0, \quad (2.34)$$

lo cual, debido a (2.12) se lee como:

$$n \cdot \dot{\bar{x}} = (n \cdot \dot{x}) \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\sigma}} + (n \cdot \dot{x}) \frac{\partial \tau}{\partial \bar{\sigma}} = 0.$$

Entonces, si

$$n \cdot \dot{x} \neq 0,$$

$\partial\tau/\partial\tilde{\sigma}$ se determina como función de $\partial\sigma/\partial\tilde{\sigma}$. Lo anterior restringe a n a ser nulo o espacial, este último excluido para reparametrizaciones regulares.

Además, si $n \cdot \dot{x} = 0$, entonces $\partial\tau/\partial\tilde{\sigma} = 0$, *i.e.*

$$\tau = f(\tilde{\tau}),$$

y de esto se concluye que la función periódica es idénticamente cero. Por lo tanto,

$$\tilde{\sigma} = \sigma, \quad \tilde{\tau} = \tau + \tau_0.$$

Por otro lado, debido a que $n \cdot \dot{x} = 0$, entonces $n \cdot x = \lambda(\tau)$, y por la ecuación (2.23),

$$n \cdot \ddot{x} = n \cdot \ddot{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\lambda}(\tau) = 0.$$

Por lo tanto, una parametrización con $n \cdot \dot{x} = 0$ es equivalente a $n \cdot x = a + b\tau$, con a y b constantes.

2.3 Formulación Canónica

El momento conjugado de x^μ es:

$$\Pi_\mu = \frac{\delta S}{\delta \dot{x}^\mu} \quad (= \Pi_\mu^{(\tau)}). \quad (2.35)$$

Para calcular los paréntesis de Poisson se extenderá el dominio de σ , de $[0, \sigma_2]$ a $(-\infty, \infty)$, además de imponer en x^μ la condición de periodicidad con período 2π en σ , tanto para la cuerda cerrada como para la cuerda abierta, obviamente se puede usar la extensión trivial para la cuerda abierta en el intervalo $[\pi, 2\pi]$. De lo anterior, los paréntesis fundamentales de Poisson serán:

$$\{x^\mu(\sigma, \tau), \Pi_\nu(\sigma', \tau)\} = \delta_\nu^\mu \delta(\sigma, \sigma'), \quad (2.36)$$

$$\{x^\mu(\sigma, \tau), x^\nu(\sigma', \tau)\} = \{\Pi_\mu(\sigma, \tau), \Pi_\nu(\sigma', \tau)\} = 0, \quad (2.37)$$

con $\delta(\sigma, \sigma')$ una función delta periódica:

$$\begin{aligned} \delta(\sigma, \sigma') &= \sum_{-\infty}^{\infty} (\delta(\sigma - \sigma' + 2n\pi) + \delta(\sigma + \sigma' + 2n\pi)) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} (e^{in(\sigma - \sigma')} + e^{in(\sigma + \sigma')}). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Esta definición asegura que los paréntesis de Poisson son consistentes con la condición de periodicidad de la cuerda cerrada y las condiciones de frontera de la cuerda abierta, debido a que

$$\frac{\partial \delta(\sigma, \sigma')}{\partial \sigma} = 0 \quad \text{en } \sigma = 0, \pi.$$

Debido a la invarianza de la acción bajo reparametrizaciones, la densidad Hamiltoniana es idénticamente cero:

$$\mathcal{H} = \Pi_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu - \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = 0.$$

Con lo que se esperan constricciones, las cuales son:

$$\varphi_1 = \Pi^2 + \left(\frac{1}{2\pi\alpha'}\right)^2 \dot{x}^2 \approx 0, \quad (2.39)$$

$$\varphi_2 = \Pi \cdot \dot{x} \approx 0. \quad (2.40)$$

Las anteriores no son más que las condiciones de ortogonalidad (2.20), expresadas débilmente. Estas constricciones son de primera clase. Primero, se define:

$$\varphi_i[f] := \int d\sigma f(\sigma) \varphi_i(\sigma). \quad (2.41)$$

Con lo cual, un paréntesis de Poisson cualquiera se calcula como:

$$\begin{aligned} \{\varphi_i[f], \varphi_j[g]\} &= \left\{ \int d\sigma f(\sigma) \varphi_i(\sigma), \int d\sigma' g(\sigma') \varphi_j(\sigma') \right\} \\ &= \iint d\sigma d\sigma' f(\sigma) g(\sigma') \{\varphi_i(\sigma), \varphi_j(\sigma')\}, \end{aligned}$$

en este último término se aplicó la propiedad (1.23) del paréntesis de Poisson. Para mostrar la propiedad de primera clase solo se calculará un paréntesis de Poisson, a saber $\{\varphi_1[f], \varphi_1[g]\}$, para lo cual se realizarán dos cálculos previos:

$$\begin{aligned} \{\Pi^2(\sigma) + \left(\frac{1}{2\pi\alpha'}\right)^2 \dot{x}^2(\sigma), \Pi^2(\sigma') + \left(\frac{1}{2\pi\alpha'}\right)^2 \dot{x}^2(\sigma')\} &= \frac{1}{(\pi\alpha')^2} \left(\Pi^\nu(\sigma) \dot{x}_\beta(\sigma') \{\Pi_\nu(\sigma), \dot{x}^\beta(\sigma')\} \right. \\ &\quad \left. + \Pi^\mu(\sigma') \dot{x}_\rho(\sigma) \{\dot{x}^\rho(\sigma), \Pi_\mu(\sigma')\} \right), \end{aligned} \quad (2.42)$$

en donde se utilizaron los paréntesis fundamentales (2.36, 2.37); por otro lado

$$\begin{aligned} \iint d\sigma d\sigma' h^\nu(\sigma) k_\beta(\sigma') \{\Pi_\nu(\sigma), \dot{x}^\beta(\sigma')\} &= \iint d\sigma d\sigma' h^\nu(\sigma) k_\beta(\sigma') \left(-\delta_\nu^\beta \frac{\partial}{\partial \sigma'} \delta(\sigma, \sigma') \right) \\ &= -h^\nu(\sigma) k_\nu(\sigma) + \int d\sigma h^\nu(\sigma) \frac{\partial k_\nu(\sigma)}{\partial \sigma}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

en la última igualdad se integró por partes. Por lo tanto, utilizando (2.42, 2.43), se tiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} (\pi\alpha')^2 \{\varphi_1[f], \varphi_1[g]\} &= \int d\sigma (f(\sigma)g'(\sigma)\Pi^\nu(\sigma)\dot{x}_\nu(\sigma) - f'(\sigma)g(\sigma)\Pi^\mu(\sigma)\dot{x}_\mu(\sigma)) \\ &= \int d\sigma (f(\sigma)g'(\sigma) - f'(\sigma)g(\sigma))\varphi_2(\sigma) \\ &= \varphi_2[fg' - f'g], \end{aligned}$$

si el anterior procedimiento se aplica a los paréntesis $\{\varphi_2[f], \varphi_2[g]\}$, $\{\varphi_1[f], \varphi_2[g]\}$, se obtiene:

$$\{\varphi_1[f], \varphi_1[g]\} = \frac{1}{(\pi\alpha')^2} \varphi_2[fg' - f'g], \quad (2.44a)$$

$$\{\varphi_1[f], \varphi_2[g]\} = \varphi_1[fg' - f'g], \quad (2.44b)$$

$$\{\varphi_2[f], \varphi_2[g]\} = \varphi_2[fg' - f'g] \quad (2.44c)$$

Otra forma de expresar la misma álgebra, sin utilizar funcionales, es la siguiente:

$$\{\varphi_1(\sigma), \varphi_1(\sigma')\} = \frac{1}{(\pi\alpha')^2} [\varphi_2(\sigma) + \varphi_2(\sigma')] \frac{\partial}{\partial\sigma} \delta(\sigma, \sigma'), \quad (2.45a)$$

$$\{\varphi_2(\sigma), \varphi_1(\sigma')\} = [\varphi_1(\sigma) + \varphi_1(\sigma')] \frac{\partial}{\partial\sigma} \delta(\sigma, \sigma'), \quad (2.45b)$$

$$\{\varphi_2(\sigma), \varphi_2(\sigma')\} = [\varphi_2(\sigma) + \varphi_2(\sigma')] \frac{\partial}{\partial\sigma} \delta(\sigma, \sigma'). \quad (2.45c)$$

Con los resultados previos se termina la demostración sobre la clasificación de las constricciones. También se pueden calcular los paréntesis siguientes:

$$\{x^\mu(\sigma), \varphi_1(\sigma')\} = \{x^\mu(\sigma), \Pi^\nu(\sigma')\Pi_\nu(\sigma')\} = 2\Pi^\mu(\sigma') \delta(\sigma, \sigma'), \quad (2.46)$$

$$\{x^\mu(\sigma), \varphi_2(\sigma')\} = \{x^\mu(\sigma), \Pi_\nu(\sigma')\dot{x}^\nu(\sigma')\} = \dot{x}^\mu(\sigma') \delta(\sigma, \sigma'). \quad (2.47)$$

Por lo tanto, φ_2 se puede interpretar como el generador de las σ -reparametrizaciones y φ_1 como el generador de la evolución dinámica de la cuerda. El álgebra de los paréntesis de Poisson de las constricciones (2.45) tiene casi la misma forma que el álgebra de los generadores \mathcal{H}_i y \mathcal{H}_\perp , correspondientes a una acción invariante bajo reparametrizaciones (c.f.[44], apéndice D), *i.e.*:

$$\{\mathcal{H}_\perp(u), \mathcal{H}_\perp(u')\} = [\mathcal{H}^r(u) + \mathcal{H}^r(u')] \partial_r \delta^D(u, u'), \quad (2.48a)$$

$$\{\mathcal{H}_r(u), \mathcal{H}_\perp(u')\} = \mathcal{H}_\perp(u) \partial_r \delta^D(u, u'), \quad (2.48b)$$

$$\{\mathcal{H}_r(u), \mathcal{H}_s(u')\} = [\mathcal{H}_r(u') \partial_s + \mathcal{H}_s(u') \partial_r] \delta^D(u, u'). \quad (2.48c)$$

Por lo tanto, se define:

$$\mathcal{H}_1 := \varphi_2, \quad (2.49)$$

$$\mathcal{H}_\perp := (\pi\alpha')v\varphi_1, \quad v = (\dot{x}^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.50)$$

y se obtienen los siguientes resultados:

$$\{\mathcal{H}_1(\sigma), \mathcal{H}_1(\sigma')\} = [\mathcal{H}_1(\sigma) + \mathcal{H}_1(\sigma')] \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma, \sigma'), \quad (2.51)$$

$$\{\mathcal{H}_1(\sigma), \mathcal{H}_\perp(\sigma')\} = \mathcal{H}_\perp(\sigma) \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma, \sigma'), \quad (2.52)$$

$$\{\mathcal{H}_\perp(\sigma), \mathcal{H}_\perp(\sigma')\} = [v^2\mathcal{H}_1(\sigma) + v^2\mathcal{H}_1(\sigma')] \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma, \sigma') - \tilde{\mathcal{H}}(\sigma, \sigma'), \quad (2.53)$$

con

$$\tilde{\mathcal{H}}(\sigma, \sigma') = 2\pi\alpha' [v^3\mathcal{H}_1\mathcal{H}_\perp(\sigma) + v^3\mathcal{H}_1\mathcal{H}_\perp(\sigma')] \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma, \sigma'). \quad (2.54)$$

Los dos primeros paréntesis tienen la forma de los términos (2.48b, 2.48c) del álgebra de los generadores; pero, debido a que el tensor métrico a lo largo de la cuerda tiene sólo una componente, $g_{11} = (v^2)^{-1}$, el tercer paréntesis tiene también la forma esperada, sin contar con $\tilde{\mathcal{H}}$; no obstante este término es cero fuertemente, ya que es cuadrático en las constricciones.

Por lo tanto, el hamiltoniano de la cuerda es la suma de las constricciones:

$$H = \int d\sigma (v_\perp \mathcal{H}_\perp + v_1 \mathcal{H}_1), \quad (2.55)$$

con multiplicadores $v_\perp(\tau, \sigma)$ y $v_1(\tau, \sigma)$.

En este momento, se expresarán las constricciones continuas φ_j como un conjunto infinito de constricciones continuas. Para esto, se necesita suponer (además de la extensión del dominio de la cuerda) que:

$$\dot{x}^\mu(-\sigma, \tau) = -\dot{x}^\mu(\sigma, \tau), \quad (2.56)$$

$$\Pi_\mu(-\sigma, \tau) = \Pi_\mu(\sigma, \tau), \quad (2.57)$$

esta última expresión no viola la condición de frontera de la cuerda abierta. Utilizando nuevamente funcionales, se definen las constricciones en estos términos:

$$L'_f = \frac{\pi\alpha'}{2} \int_{-\sigma_2}^{\sigma_2} d\sigma f(\sigma) \left(\Pi_\mu + \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{x}_\mu \right)^2. \quad (2.58)$$

Estas funcionales, L'_f , forman un álgebra cerrada, como previamente se demostró en (2.44):

$$\{L'_f, L'_g\} = L'_{f \otimes g}, \quad (2.59)$$

con

$$f \otimes g = f \frac{\partial}{\partial \sigma} g - g \frac{\partial}{\partial \sigma} f.$$

Si se elige un conjunto de funciones completas en el intervalo $[-\sigma_2, \sigma_2]$, entonces el conjunto L'_f tendrá la misma información que las constricciones originales. Para lo cual, se escoge $f_n = e^{in\sigma}$ para la cuerda abierta y se define $L'_n = L'_{f_n}$. Se verifica fácilmente que este conjunto obedece el álgebra:

$$\{L'_n, L'_m\} = -i(n-m)L'_{n+m}. \quad (2.60)$$

En cambio, para la cuerda cerrada se escoge un conjunto completo en $[-2\pi, 2\pi]$, dado por $f_{\frac{n}{2}} = e^{i\frac{n}{2}\sigma}$, con lo anterior se obtiene un álgebra similar a (2.60), pero en esta ocasión, con semienteros como añadidura.

El Hamiltoniano se puede escribir, para la cuerda abierta, como:

$$H = \sum_{-\infty}^{\infty} v_n L'_n, \quad (2.61)$$

donde los v_n son multiplicadores. Por otro lado, si se define:

$$P^\mu := \int_0^{\sigma_2} d\sigma \Pi^\mu, \quad (2.62)$$

$$M^{\mu\nu} := \int_0^{\sigma_2} d\sigma (x^\mu \Pi^\nu - x^\nu \Pi^\mu). \quad (2.63)$$

Se obtiene la siguiente álgebra:

$$\{P^\mu, x^\nu(\sigma)\} = -g^{\mu\nu}, \quad (2.64a)$$

$$\{M^{\mu\nu}, x^\lambda(\sigma)\} = g^{\mu\lambda}x^\nu(\sigma) - g^{\nu\lambda}x^\mu(\sigma), \quad (2.64b)$$

$$\{P^\mu, P^\nu\} = 0, \quad (2.64c)$$

$$\{P^\mu, M^{\lambda\nu}\} = g^{\mu\nu}P^\lambda - g^{\mu\lambda}P^\nu, \quad (2.64d)$$

$$\{M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\} = g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} - g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho}. \quad (2.64e)$$

Se concluye de los paréntesis (2.64a, 2.64b), que P^μ y $M^{\mu\nu}$ generan transformaciones de Poincaré infinitesimales, y (2.64c, 2.64d, 2.64e) cumplen con el álgebra de Poincaré.

Se tiene además que P^μ y $M^{\mu\nu}$ son independientes de τ . Por ejemplo, la derivada de P^μ con respecto de τ es:

$$\frac{\partial P^\mu}{\partial \tau} = \int_0^{\sigma_2} d\sigma \frac{\partial \Pi^\mu}{\partial \tau} = - \int_0^{\sigma_2} d\sigma \frac{\partial \Pi^{(\sigma)\mu}}{\partial \sigma} = \Pi^{(\sigma)\mu}(0, \tau) - \Pi^{(\sigma)\mu}(\sigma_2, \tau). \quad (2.65)$$

El resultado es cero, para la cuerda abierta debido a las condiciones de frontera (2.9) y también para la cuerda cerrada debido a la periodicidad.

2.4 Reducción de Norma y Quantización

Considérese el Hamiltoniano para la cuerda abierta:

$$H = \int_0^\pi d\sigma \left(u \left(\Pi^2 + \left(\frac{1}{2\pi\alpha'} \right)^2 \dot{x}^2 \right) + v \left(\Pi \cdot \dot{x} \right) \right), \quad (2.66)$$

con multiplicadores u y v . Las ecuaciones de movimiento son:

$$\dot{x}^\mu = \{x^\mu, H\} = 2u\Pi^\mu + v\dot{x}^\mu, \quad (2.67)$$

$$\dot{\Pi}_\mu = \{\Pi_\mu, H\} = 2 \left(\frac{1}{2\pi\alpha'} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \sigma} (u\dot{x}_\mu) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (v\Pi_\mu). \quad (2.68)$$

Si $v \equiv 0$, entonces

$$\ddot{x}^\mu = 2\dot{u}\Pi^\mu + 2u\dot{\Pi}^\mu,$$

si además se tiene que $\dot{u} \equiv 0$:

$$\ddot{x}^\mu - \left(\frac{1}{\pi\alpha'}\right)^2 u^2 \ddot{x}^\mu - \left(\frac{1}{\pi\alpha'}\right)^2 u \frac{\partial u}{\partial \sigma} \dot{x}^\mu = 0,$$

por último, si $u = \pi\alpha'$, se obtiene la ecuación de onda (2.23). Por lo tanto, estas condiciones sobre los multiplicadores implican la parametrización ortogonal, pero todavía existe la reparametrización conforme; es decir, las anteriores condiciones no fijan la norma completamente. También en (2.61) se puede observar este hecho, si se hace $v_i = \delta_{0i}$.

En la norma ortogonal, definida por $u = \pi\alpha'$ y $v = 0$ en (2.66), ó $v_i = \delta_{0i}$ en (2.61), los L'_n son iguales a las condiciones de Virasoro (2.30), debido a que los dos dan la parametrización ortogonal sobre las funciones $e^{-in\sigma}$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, el Hamiltoniano es:

$$\begin{aligned} H &= L_0 \\ &= -\frac{1}{4\alpha'} \sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_{0-m} \cdot \alpha_m \\ &= -\frac{1}{4\alpha'} \alpha_0^2 - \frac{1}{2\alpha'} \sum_{m>0} \alpha_{-m} \cdot \alpha_m = \alpha' p^2 + \sum_{m>0} a_m^* \cdot a_m, \end{aligned} \quad (2.69)$$

con

$$\begin{aligned} a_n^\mu &= \left(\frac{1}{2n\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha_n^\mu, \\ a_n^{*\mu} &= \left(\frac{1}{2n\alpha'}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha_{-n}^\mu. \end{aligned}$$

Es decir, se obtiene un conjunto infinito de osciladores armónicos. Los paréntesis de Poisson, diferentes de cero, para los coeficientes de Fourier en (2.27), son:

$$\{a_m^\mu, a_n^{*\nu}\} = -i\delta_{mn}g^{\mu\nu}, \quad (2.70)$$

$$\{q^\mu, p^\nu\} = g^{\mu\nu}. \quad (2.71)$$

Por lo tanto, el sistema se podría cuantizar de inmediato si no existieran condiciones entre las a 's. En este caso, se interpretaría a las a 's como operadores, y se cambiaría el paréntesis de Poisson por el i -[conmutador], los a_n^μ como operadores de aniquilación y los $a_n^{\dagger\mu}$ como operadores de creación, pero el espacio de Fock creado con estos operadores no tendría norma positiva definida:

$$[a_n^0, a_m^{\dagger 0}] = -\delta_{mn}.$$

Lo anterior da la iniciativa para aislar los verdaderos grados de libertad de la cuerda relativista, introduciendo condiciones de norma; una manera de hacerlo es relacionar el parámetro τ de la evolución dinámica con una combinación lineal de las x^μ . Se escoge, por lo tanto, el vector n independiente de τ y σ , y se postula la condición de norma:

$$\bar{\Omega}_1 = n \cdot x - c\tau \approx 0, \quad (2.72)$$

con c constante y distinta de cero. Los paréntesis de Poisson de esta condición de norma con las constricciones de primera clase φ_i son:

$$\{\bar{\Omega}_1(\sigma), \varphi_1(\sigma')\} = 2n \cdot \Pi(\sigma') \delta(\sigma, \sigma'), \quad (2.73)$$

$$\{\bar{\Omega}_1(\sigma), \varphi_2(\sigma')\} = n \cdot \dot{x}(\sigma') \delta(\sigma, \sigma') \approx 0. \quad (2.74)$$

Los cuales muestran que la σ -reparametrización producida por φ_2 no se afecta por la condición de norma $\bar{\Omega}_1 = 0$, y además, que la invarianza representada por φ_1 desaparece si $n \cdot \Pi \neq 0$. De hecho $n \cdot \Pi$ no es cero, debido a que:

$$n \cdot \Pi = \frac{c\dot{x}^2}{2\pi\alpha'} (-g)^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.75)$$

Y como $\dot{x}^2 > 0$ y $c \neq 0$, entonces $n \cdot \Pi$ es distinto de cero. Con lo que se concluye que $\bar{\Omega}_1$ no es la única condición de norma, debe de haber otra que rompa la invarianza de $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}(\sigma, \tau)$. Se propone entonces una segunda condición de norma:

$$\bar{\Omega}_2 = n \cdot \Pi - \gamma \approx 0, \quad (2.76)$$

con γ independiente de σ y τ . En este caso, la ecuaciones de Euler-Lagrange (2.8), contraídas con n , son:

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} n \cdot \Pi^{(\tau)} = 0 = \frac{\partial}{\partial \sigma} n \cdot \Pi^{(\sigma)} =_{(2.75)} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(-\frac{\dot{x} \cdot \dot{x}}{\dot{x}^2} (n \cdot \Pi) \right).$$

Con lo anterior, $n \cdot \Pi^{(\sigma)} = f(\tau)$ y, debido a las condiciones de frontera (2.25) para la cuerda abierta, $f(\tau) = 0$; por lo tanto, $\dot{x} \cdot \dot{x} = 0$. Por otra parte,

$$n \cdot \Pi = \frac{c \dot{x}^2}{2\pi \alpha'} (-g)^{-\frac{1}{2}} = \frac{c}{2\pi \alpha'} \left(-\frac{\dot{x}^2}{\dot{x}^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.77)$$

de lo cual se deduce que, si $\gamma = \frac{c}{2\pi \alpha'}$, $\dot{x}^2 + \dot{x}^2 = 0$.

Algunos autores propusieron relacionar c y γ con el momento total P^μ , de aquí que

$$c := 2\alpha' (n \cdot P),$$

y las condiciones serán:

$$\bar{\Omega}_1 = n_\mu (x^\mu - 2\alpha' P^\mu \tau) \approx 0, \quad (2.78)$$

$$\bar{\Omega}_2 = n_\mu \left(\Pi^\mu - \frac{1}{\pi} P^\mu \right) \approx 0. \quad (2.79)$$

Como se demostró, estas condiciones implican las condiciones de ortonormalidad de la cuerda abierta (2.20). Por otro lado, $\bar{\Omega}_2 = 0$ es la forma integral de σ :

$$\begin{aligned} n_\mu \Pi^\mu &= \frac{1}{\pi} n_\mu P^\mu, \\ \Rightarrow \int_0^\sigma d\sigma' n_\mu \Pi^\mu &= \frac{n_\mu P^\mu}{\pi} \int_0^\sigma d\sigma', \\ \Rightarrow \sigma &= \pi (n_\mu P^\mu)^{-1} \int_0^\sigma d\sigma' (n_\mu \Pi^\mu). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la segunda condición nos dice que σ es proporcional a la proyección de la energía total de la cuerda sobre P^μ .

Siguiendo el procedimiento, se tiene que revisar si las condiciones de norma transforman las contricciones φ_i de primera clase en constricciones de segunda clase (aquí no se hará ese cálculo, pero el resultado es positivo para estas condiciones). Después, se tendría que calcular los paréntesis de Poisson entre las φ_i y Ω_i , y después calcular el paréntesis de Dirac para las Ω_i con n arbitrario.

El cálculo de los paréntesis de Dirac se simplifica si se considerará a n un vector tipo-luz. Sea

$$n_0 = n_{D-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (2.80)$$

$$n_i = 0, \quad i \neq 0, D-1 \quad (2.81)$$

ó, en la notación del cono de luz:

$$n^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(n^0 \pm n^{D-1}) = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases}, \quad (2.82)$$

con D la dimensión del espacio en el cual la cuerda esta encajada. Con esta notación, un producto punto se expresa como:

$$a^\mu b_\mu = -a^+ b^- - a^- b^+ + a^i b^i,$$

y en particular

$$n^\mu a_\mu = -n^- a^+.$$

De aquí que la primera condición de norma se exprese como:

$$\begin{aligned} n_\mu(x^\mu - 2\alpha' P^\mu \tau) &= -n^-(x^+ - 2\alpha' P^+ \tau) = 0 \\ \Rightarrow x^+ &= 2\alpha' P^+ \tau. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Asimismo (2.79) se escribe como

$$\Pi^+ = \frac{1}{\pi} P^+. \quad (2.84)$$

La constricción $\varphi_1 = 0$ es:

$$\Pi^\mu \Pi_\mu + \left(\frac{1}{2\pi\alpha'}\right)^2 \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = -2\Pi^+ \Pi^- + \Pi_i \Pi_i - \left(\frac{1}{2\pi\alpha'}\right)^2 \underbrace{(2\dot{x}^+ \dot{x}^- - \dot{x}_i \dot{x}_i)}_0 = 0,$$

entonces:

$$\Pi^- = \frac{\pi}{2P^+} (\Pi_i \Pi_i + \left(\frac{1}{2\pi\alpha'}\right)^2 \dot{x}_i \dot{x}_i). \quad (2.85)$$

Para $\varphi_2 = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \Pi^\mu \dot{x}_\mu &= -\Pi^+ \dot{x}^- - \underbrace{\Pi^- \dot{x}^+}_0 + \Pi_i \dot{x}_i = 0, \\ \Rightarrow \dot{x}^- &= \frac{\pi}{P^+} \Pi_i \dot{x}_i. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Por lo tanto, las componentes $(-)$ de la posición y momento son variables dependientes. Las independientes son: x_i , Π_i , y P^+ , además de la siguiente

$$Q^- = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\sigma x^-(\sigma), \quad (2.87)$$

esta última expresión se debe añadir debido a que en la ecuación (2.86) solo aparece la σ -derivada de x^- .

Con estas expresiones a la mano, se calcula el paréntesis de Dirac de las variables independientes:

$$\{x^i(\sigma), \Pi_j(\sigma')\}^* = \delta^i_j \delta(\sigma - \sigma'), \quad (2.88)$$

$$\{Q^-, P^+\}^* = -1. \quad (2.89)$$

Por otro lado, el Hamiltoniano H debe tener la siguiente propiedad:

$$\{f, H\} = \frac{d}{d\tau} f = 2\alpha' P^+ \frac{d}{dx^+} f.$$

Considérese ahora el siguiente paréntesis:

$$\begin{aligned}
\{f, P^-\} &= - \int_0^\pi d\sigma' \frac{\delta f}{\delta x^+} \frac{\delta P^-}{\delta \Pi^-} \\
&= - \frac{df}{dx^+}(\sigma),
\end{aligned} \tag{2.90}$$

Por lo tanto:

$$\{f, H\} = 2\alpha' P^+ \frac{d}{dx^+} f = 2\alpha' P^+ \{f, P^-\} = 2\alpha' \{f, P^+ P^-\},$$

debido a que P^+ se conserva; con lo anterior, se obtiene el Hamiltoniano:

$$\begin{aligned}
H &= 2\alpha' P^+ P^- = 2\alpha' P^+ \int_0^\pi d\sigma \Pi^- \\
&= \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma \left(\Pi_i \Pi_i + \left(\frac{1}{2\pi\alpha'} \right)^2 \dot{x}_i \dot{x}_i \right).
\end{aligned} \tag{2.91}$$

De este hamiltoniano se derivan las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} = 2\pi\alpha' \Pi_i. \tag{2.92}$$

Asimismo:

$$\dot{\Pi}_i = \{\Pi_i, H\} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \ddot{x}_i. \tag{2.93}$$

Eliminando Π_i de las anteriores ecuaciones, se obtiene

$$\ddot{x}_i - \ddot{x}_i = 0,$$

i.e., se obtienen las componentes transversales de las ecuaciones de onda. Para las componentes (+), se utilizan las condiciones de norma (2.83, 2.84):

$$\dot{x}^+ = 2\pi\alpha' \Pi^+, \tag{2.94}$$

$$\dot{\Pi}^+ = 0, \tag{2.95}$$

por lo tanto, $\ddot{x}^+ = 0$; lo anterior también es consistente con la ecuación de onda, ya que $\ddot{x}^+ = 0$.

Para la componente $(-)$ se utilizan las ecuaciones (2.85, 2.86), y las ecuaciones de movimiento (2.92, 2.93):

$$\dot{x}^- = 2\pi\alpha'\Pi^-, \quad (2.96)$$

$$\dot{\Pi}^- = \frac{1}{2\pi\alpha'}\ddot{x}^-, \quad (2.97)$$

en consecuencia,

$$\ddot{x}^- - \ddot{x}^- = 0. \quad (2.98)$$

Las variables independientes del sistema son a_n^i , a_n^{*i} , q^i , p^i , Q^- , P^+ . Las α_n^- se pueden escribir como

$$\alpha_n^- = \frac{1}{P^+}L_n^{\text{tr}} = \frac{1}{2P^+} \sum_m \alpha_{n-m}^i \alpha_m^i. \quad (2.99)$$

De acuerdo con la mecánica cuántica, un espacio de Fock se puede construir con los operadores independientes $a_n^{\dagger i}$, el cual consiste de los estados

$$a_{n_1}^{\dagger i_1} \dots a_{n_\alpha}^{\dagger i_\alpha} |0\rangle.$$

De esta forma, los estados de la cuerda se describen únicamente con osciladores transversales. Estos estados tienen norma positiva definida. Debido a la elección del vector n en esta norma, la cuantización no es covariante. Examinando el álgebra de Poincaré aparece una dificultad, ya que se necesita el conmutador entre los α_n^- . El análogo cuántico de la ecuación (2.99), es

$$\alpha_0^- = \frac{1}{P^+} \left\{ \frac{1}{2} \sum : \alpha_m^i \alpha_{-m}^i : - \alpha(0) \right\}, \quad (2.100)$$

donde ":" indica un orden normal y $\alpha(0)$ es una constante. Esto da lugar a un c-número dependiente de la dimensión en los conmutadores $[\alpha_n^-, \alpha_{-n}^-]$, y se obtiene el resultado inesperado de que el álgebra de Poincaré (2.64c, d, e) se cumple sólo para $\alpha(0) = 1$ y $D = 26$.

Capítulo 3

Acciones de p -branas bosónicas

3.1 Introducción

Se ha acumulado hasta ahora evidencia sobre la existencia de una teoría en 11 dimensiones, a partir de la cual se puede obtener, mediante diferentes procesos de compactificación, las cinco teorías de cuerdas. A esta teoría que todavía no se construye se le conoce como teoría M. Esta teoría tiene además a la supergravedad en 11 dimensiones como otro de sus límites, pero más aún, los diferentes límites de esta teoría no sólo contienen cuerdas y supergravedad, sino también una gran variedad de objetos extendidos de mayor dimensión, los cuales son no perturbativos.

Entre estos objetos se tiene una clase, la cual tiene por característica un rompimiento parcial de la supersimetría, además de saturar una cota de tipo Bogomolny'i o BPS, (masa) \geq (carga), y se conocen con el nombre de p -branas. Por otro lado, la clase más elemental de estas soluciones se obtiene de una acción simplificada obtenida de una teoría de supergravedad por medio de una truncación consistente¹.

Al igual que en la teoría de cuerdas, las teorías de p -branas relevantes son aquellas que incluyen supersimetría. Este tipo de branas juega un papel muy importante dentro de la teoría de cuerdas, ya que pueden ser vistas como soluciones solitónicas de teorías de campo supersimétricas. En la formulación de estas membranas se tiene además de los grados de libertad escalares en el volumen de mundo, multipletes de Maxwell (p -branas de Dirichlet) o multipletes tensoriales (super 5-brana en $D = 11$).

El impulso sobre la investigación de las p -branas comenzó cuando se mostró que la simetría κ^2 podía generalizarse y utilizarse para construir una 3-brana con supersimetría explícita en un espacio-tiempo de dimensión $D = 6$ e invarianza κ sobre el volumen de mundo, la cual es un solitón de la teoría de campo supersimétrica en $D = 6$. Después se realizó una clasificación completa de los valores de p y D para los cuales las super p -branas pueden existir y se mostró que la acción de GS para la supercuerda tipo IIA se puede obtener, mediante un proceso de doble reducción

¹Una truncación consistente es aquella para la cual las soluciones de la teoría truncada son soluciones de la teoría original, no truncada.

²La simetría κ existe en teorías con supersimetría local y permite reducir los grados de libertad fermiónicos con el fin de igualar estos en número a los bosónicos.

dimensional³, a partir de una supermembrana en $D = 11$. Asimismo, se puede demostrar que a partir de las cuatro super p -branas "fundamentales", $p = 2$ en $D = 11$, $p = 5$ en $D = 10$, $p = 3$ en $D = 6$ y $p = 2$ en $D = 4$, se obtienen, aplicando la reducción dimensional k veces, cuatro secuencias de super $(p - k)$ -branas en $(D - k)$ dimensiones, en donde se consideran todas las super p -branas posibles, a este conjunto se le conoce como "brane scan"[7], [27].

Después Townsend conjeturó que no sólo la super 3-brana en $D = 6$, sino que todas las super p -branas contenidas en el "brane scan" son soluciones solitónicas de alguna teoría de campo supersimétrica. Estos resultados quieren decir que la teoría de cuerdas contiene objetos extendidos solitónicos en su espectro, por lo tanto estos tienen una importancia indiscutible en el estudio no perturbativo de la teoría de cuerdas [27].

En este capítulo se exponen y se demuestran las características de algunas acciones de p -branas, a saber, la acción de Nambu-Goto, de Schild, de Polyakov, la acción Conforme I y II, esta última invariante de Weyl para toda p y polinomial en la métrica inducida. Como característica principal, estas acciones dependen sólo sobre campos bosónicos, lo anterior con el fin de simplificar los cálculos. Asimismo, se demostrará la equivalencia clásica entre estas acciones, y las ecuaciones de movimiento de sus campos bosónicos. Para aquellas acciones que dependan sobre la métrica intrínseca del volumen de mundo, se obtendrá su respectivo tensor de energía-momento, y se observará por lo tanto, que, debido a la invarianza de Weyl en estas acciones, estos tienen traza nula, la cual es una propiedad importante de la cuerda y que se ha extendido a p -branas.

Después de la presentación de las acciones de p -branas, se utiliza el método "parent action", el cual genera nuevas acciones de p -branas a partir de acciones conocidas de antemano. En esta sección, a partir de la acción de Nambu-Goto y con el método mencionado, se encuentran las acciones de Polyakov y la Conforme I, además se encuentra que la acción de Polyakov es dual, dualidad entendida en el contexto del método, a la acción de Nambu-Goto. De hecho las acciones mencionadas no se encontraron en primera instancia mediante un método sistemático, sino que fueron propuestas para su verificación como acciones equivalentes a la de Nambu-Goto.

Hacia el final del capítulo, se desarrolla de una forma sistemática, el formalismo Hamiltoniano de la acción de Nambu-Goto, encontrándose $p + 1$ constricciones de primera clase.

3.2 Acción de Nambu-Goto

Se considerará para la acción de una p -brana, un volumen de mundo que describa una superficie de $p + 1$ dimensiones encajada en el espacio-tiempo, este volumen tendrá las siguientes características:

- (i) ser de tipo tiempo
- (ii) extremal

³Este proceso consiste en compactificar simultáneamente una dimensión del espacio-tiempo y una dimensión del volumen de mundo

Las coordenadas de la superficie en el espacio-tiempo están parametrizadas por

$$x^\mu = x^\mu(\xi^i),$$

donde $\mu = 0, 1, \dots, D-1$, e $i = 0, 1, \dots, p$, y ξ^i como coordenadas del volumen de mundo.

Se supondrá que $\xi := (\tau, \sigma^r)$, $r = 1, \dots, p$, es una buena parametrización, *i.e.*, que los vectores

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma^r},$$

son, en toda la superficie, distintos de cero y linealmente independientes; además, se supondrá también que $\partial x^\mu / \partial \tau$ es de tipo tiempo o nulo, y los $\partial x^\mu / \partial \sigma^r$ son de tipo espacio.

El encaje del volumen de mundo en el espacio-tiempo induce una métrica sobre la superficie $x^\mu(\xi^i)$:

$$h_{ij} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^j}. \quad (3.1)$$

Donde la signatura de la métrica es $(-, +, \dots, +)$, y se está considerando además, un espacio-tiempo plano. Con las definiciones y suposiciones anteriores, se puede construir una acción, la más sencilla, que sea invariante bajo reparametrizaciones del volumen de mundo:

$$S[x^\mu(\xi^i)] = -T \int d^{p+1}\xi \sqrt{-h}, \quad (3.2)$$

donde $h := \det h_{ij}$. La constante T está dada por la tensión de la p -brana y tiene las unidades de $[T] = [\text{masa}]^{p+1}$, debido a que $[h] = 1$ y $[c] = 1$.

Las simetrías de la acción (3.2) son:

1. El grupo de Poincaré de D -dimensiones:

$$x'^\mu(\xi) = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu(\xi) + a^\mu, \quad (3.3)$$

con Λ una transformación de Lorentz y a una traslación.

2. Invarianza bajo difeomorfismos en el volumen de mundo, para nuevas coordenadas $\xi' = \xi'(\xi)$, esta transformación de simetría se expresa en la forma:

$$x'^{\mu}(\xi') = x^{\mu}(\xi), \quad (3.4)$$

infinitesimalmente esta transformación se lee

$$\delta x^{\mu} = \eta^i \partial_i x^{\mu}, \quad (3.5)$$

donde las η^i son $p + 1$ parámetros infinitesimales.

Dem.

1. Sea una transformación de Poincaré como en (3.3), entonces

$$\begin{aligned} h'_{ij} &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial \xi^i} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial \xi^j} \\ &= \eta_{\mu\nu} \frac{\partial(\Lambda^{\mu}_{\rho} x^{\rho} + a^{\mu})}{\partial \xi^i} \frac{\partial(\Lambda^{\nu}_{\gamma} x^{\gamma} + a^{\nu})}{\partial \xi^j} \\ &= \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\rho} \Lambda^{\nu}_{\gamma} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \xi^j} = \eta_{\rho\gamma} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \xi^j} = h_{ij}, \end{aligned}$$

y como $d^{p+1}\xi$ se queda invariante, se sigue entonces la invarianza de la acción.

2. Sea un difeomorfismo como en (3.4), entonces

$$S' = -T \int d^{p+1}\xi' \sqrt{-h'} = -T \int d^{p+1}\xi \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \xi'} \sqrt{-h} = -T \int d^{p+1}\xi \sqrt{-h} = S,$$

donde $\partial \xi' / \partial \xi$ es el jacobiano de la transformación $\xi' = \xi'(\xi)$, y $\partial \xi / \partial \xi'$ es el jacobiano de la transformación inversa. En el anterior cálculo se utilizó la siguiente relación

$$h'_{ij} = \frac{\partial \xi^k}{\partial \xi'^i} \frac{\partial \xi^l}{\partial \xi'^j} h_{kl}. \quad (3.6)$$

Para la expresión infinitesimal de la transformación (3.4)

$$\begin{aligned} x'^{\mu}(\xi + \eta) &= x^{\mu}(\xi) , \\ x'^{\mu}(\xi + \eta) &= x'^{\mu}(\xi) + \eta^k \partial_k x'^{\mu} , \\ \Rightarrow \quad \delta x^{\mu} &= \eta^i \partial_k x^{\mu} . \end{aligned}$$

□

Las ecuaciones de movimiento de las coordenadas x^{μ} , derivadas explícitamente de la acción, son

$$\begin{aligned} \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i x^{\mu})} \right) &= \partial_i \left(\frac{1}{2} (h)^{-\frac{1}{2}} (-1) \frac{\partial h}{\partial (\partial_i x^{\mu})} \right) \\ &= \partial_i (\sqrt{-h} h^{ij} \partial_j x_{\mu}) = 0 . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para obtener las ecuaciones de movimiento, se utilizó la relación siguiente:

$$\det A = e^{\text{tr}(\log A)} . \quad (3.8)$$

3.3 Acción tipo Schild

La acción de Schild para una p -brana es

$$S[x^{\mu}, \varphi] = \frac{1}{2} \int d^{p+1} \xi (\varphi^{-1} h - T^2 \varphi) . \quad (3.9)$$

La equivalencia clásica entre la acción de Nambu-Goto (3.2) y la anterior acción se obtiene al utilizar la ecuación de movimiento del campo auxiliar φ en la acción de Schild, para eliminar la dependencia sobre este campo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -\varphi^{-2} h - T^2 = 0 , \quad (3.10)$$

$$\Rightarrow \quad h + T^2 \varphi^2 = 0 , \quad (3.11)$$

entonces

$$\begin{aligned}
 S &=_{(3.11)} \frac{1}{2} \int d^{p+1}\xi \, T(T^{-1}\varphi^{-1}h - T\varphi) \\
 &= \frac{1}{2} \int d^{p+1}\xi \, T((-h)^{-\frac{1}{2}}h - (-h)^{\frac{1}{2}}) \\
 &= -T \int d^{p+1}\xi \, \sqrt{-h} = S_{\text{Nambu-Goto}} .
 \end{aligned}$$

Las simetrías de esta acción son las siguientes:

1. El grupo de Poincaré de D -dimensiones

$$x'^{\mu}(\xi) = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}(\xi) + a^{\mu} , \quad (3.12a)$$

$$\varphi'(\xi) = \varphi(\xi) . \quad (3.12b)$$

2. Invarianza de coordenadas en el volumen de mundo

$$x'^{\mu}(\xi') = x^{\mu}(\xi) , \quad (3.13a)$$

$$\varphi'(\xi') \, d^{p+1}\xi' = \varphi(\xi) \, d^{p+1}\xi . \quad (3.13b)$$

Infinitesimalmente, la anterior invarianza en el volumen de mundo se expresa como

$$\delta x^{\mu} = \eta^i \partial_i x^{\mu} , \quad (3.14a)$$

$$\delta \varphi = \partial_i (\eta^i \varphi) . \quad (3.14b)$$

Dem.

La demostración de la simetría de Poincaré es similar a la demostración hecha para la acción de Nambu-Goto.

Para la invarianza, se reexpresa (3.13b) como

$$\begin{aligned} \varphi'(\xi') \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} d^{p+1} \xi &= \varphi(\xi) d^{p+1} \xi, \\ \Rightarrow \quad \varphi'(\xi') \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} &= \varphi(\xi). \end{aligned}$$

De lo anterior,

$$\begin{aligned} S' &= \frac{1}{2} \int d^{p+1} \xi' (\varphi'^{-1} h' - T^2 \varphi') \\ &= \frac{1}{2} \int d^{p+1} \xi \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \varphi^{-1} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \xi'} \right)^2 h \right) - \frac{1}{2} \int d^{p+1} \xi T^2 \varphi \\ &= \frac{1}{2} \int d^{p+1} \xi (\varphi^{-1} h - T^2 \varphi) = S. \end{aligned}$$

Para las expresiones infinitesimales, la demostración de (3.14a) es idéntica a la de (3.5), pero para (3.14b) se tiene

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \varphi'(\xi + \eta) \frac{\partial(\xi + \eta)}{\partial \xi} \\ &\approx (\varphi'(\xi) + \eta^i \partial_i \varphi'(\xi)) (1 + \partial_j \eta^j) \\ &\approx \varphi'(\xi) + \partial_i (\eta^i \varphi'(\xi)), \\ \Rightarrow \quad \delta \varphi &= \partial_i (\eta^i \varphi), \end{aligned}$$

obviamente se tomo el jacobiano solo hasta primer orden. □

Por último, la ecuación de movimiento para las coordenadas es:

$$\begin{aligned} \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i x^\mu)} \right) &= \partial_i \left(\frac{1}{2} \varphi^{-1} \frac{\partial h}{\partial (\partial_i x^\mu)} \right) \\ &= \partial_i (\varphi^{-1} h h^{ij} \partial_j x_\mu) = 0, \end{aligned} \tag{3.15}$$

en donde se utilizó el mismo procedimiento para obtener las ecuaciones de movimiento (3.7).

Si se utiliza la anterior ecuación, junto con la ecuación (3.11), se obtiene (3.7).

3.4 Acción de Polyakov

La acción de Polyakov para p -branas es

$$S[x^\mu, g_{ij}] = -\frac{T}{2} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-g} (g^{ij} h_{ij} - (p-1)), \quad (3.16)$$

en esta acción se introduce un tensor auxiliar $g_{ij}(\xi)$, el cual representa la métrica intrínseca del volumen de mundo. Esta acción depende sobre

$$D + \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

campos, donde D es la dimensión del espacio-tiempo y el término restante es el número de campos independientes del tensor simétrico g . Para demostrar la equivalencia entre esta acción y la de Nambu-Goto, se calcula la ecuación de movimiento de la métrica g , la cual es

$$\begin{aligned} -\frac{2}{T} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \left(\sqrt{-g} (g^{rs} h_{rs} - (p-1)) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ij} (g^{rs} h_{rs} - (p-1)) - \sqrt{-g} h^{ij} = 0, \\ \Rightarrow \quad h_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} g^{rs} h_{rs} + \frac{1}{2} (p-1) g_{ij} &= 0, \end{aligned} \quad (3.17)$$

en el anterior desarrollo, se utilizaron las relaciones siguientes:

1.

$$\delta h^{rs} = -h^{rk} h^{st} \delta h_{ks}, \quad (3.18)$$

la cual relaciona la variación de un tensor doblemente contravariante con la variación del tensor covariante asociado.

2. Por otro lado, el tensor g es simétrico, entonces se tiene que definir la parcial con respecto de g_{ij} , de tal manera que ésta sea simétrica también

$$\frac{\partial}{\partial g_{ij}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial g_{ij}} + \frac{\partial}{\partial g_{ji}} \right). \quad (3.19)$$

Si en la ecuación (3.17) se toma la traza, para $p \neq 1$

$$\begin{aligned} g^{ij} \left(h_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} g^{rs} h_{rs} + \frac{1}{2} (p-1) g_{ij} \right) &= 0, \\ \Rightarrow \quad g^{ij} h_{ij} &= p+1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

de lo cual, se concluye que g es la métrica inducida

$$g_{ij}(\xi) = h_{ij}(\xi). \quad (3.21)$$

Para $p = 1$ se puede utilizar también la ecuación (3.17),

$$h_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} g^{rs} h_{rs} = 0, \quad (3.22)$$

pero debido a que la traza sólo es función de ξ , entonces se puede proponer una solución general de la anterior ecuación de la forma

$$g_{ij}(\xi) = \beta(\xi) h_{ij}(\xi), \quad (3.23)$$

con $\beta(\xi)$ una función arbitraria. Por lo tanto, si se sustituyen las métricas intrínsecas, (3.21, 3.23), para $p \neq 1$ y $p = 1$, respectivamente, en (3.16), se obtiene la acción dada por (3.2). El primer caso es trivial, en cambio para el segundo caso

$$\begin{aligned} S|_{p=1} &= -\frac{T}{2} \int d^2\xi \sqrt{-g} g^{rs} h_{rs} \\ &\stackrel{(3.23)}{=} -\frac{T}{2} \int d^2\xi \sqrt{-\beta^2 h} \beta^{-1} h^{rs} h_{rs} \\ &= -T \int d^2\xi \sqrt{-h} = S_{\text{Nambu-Goto}}|_{p=1}. \end{aligned}$$

Las simetrías de la acción de Polyakov para p -branas, con $p \neq 1$, son:

1. Invarianza de Poincaré de D -dimensiones

$$x'^{\mu}(\xi) = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}(\xi) + a^{\mu}, \quad (3.24a)$$

$$g'_{ij}(\xi) = g_{ij}(\xi). \quad (3.24b)$$

2. Invarianza bajo difeomorfismos en el volumen de mundo

$$x'^{\mu}(\xi') = x^{\mu}(\xi), \quad (3.25a)$$

$$\frac{\partial \xi'^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi'^l}{\partial \xi^j} g'_{kl}(\xi') = g_{ij}(\xi). \quad (3.25b)$$

Las simetrías del volumen de mundo se expresan de manera infinitesimal como

$$\delta x^{\mu} = \eta^k \partial_k x^{\mu}, \quad (3.26a)$$

$$\delta g_{ij} = \eta^k \partial_k g_{ij} + \partial_i \eta^k g_{kj} + \partial_j \eta^k g_{ik}. \quad (3.26b)$$

Dem.

La demostración para la invarianza de Poincaré es análoga a la respectiva de Nambu-Goto, por lo tanto, se omitirá.

Para la invarianza de difeomorfismos se tiene en cambio

$$\begin{aligned} S' &= -\frac{T}{2} \int d^{p+1} \xi' \sqrt{-g'} (g'^{ij} h'_{ij} - (p-1)) \\ &= -\frac{T}{2} \int d^{p+1} \xi \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} \sqrt{-\left(\frac{\partial \xi}{\partial \xi'}\right)^2} g \left(\frac{\partial \xi'^i}{\partial \xi^r} \frac{\partial \xi'^j}{\partial \xi^s} g'^{rs} \frac{\partial \xi'^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi'^n}{\partial \xi^j} h'_{mn} - (p-1) \right) \\ &= -\frac{T}{2} \int d^{p+1} \xi \sqrt{-g} (g^{ij} h_{ij} - (p-1)) = S. \end{aligned}$$

Respecto a las expresiones infinitesimales, solo se demostrará (3.26b), por tener esta una forma que no se había demostrado en este capítulo. Dada la transformación mencionada se tiene:

$$\begin{aligned}
 g_{ij}(\xi) &= \frac{\partial(\xi^k + \eta^k)}{\partial\xi^i} \frac{\partial(\xi^l + \eta^l)}{\partial\xi^j} g'_{kl}(\xi + \eta) \\
 &\approx (\delta_i^k + \partial_i\eta^k)(\delta_j^l + \partial_j\eta^l)(g'_{kl}(\xi) + \eta^r \partial_r g'_{kl}(\xi)) \\
 &\approx g'_{ij}(\xi) + g'_{il}(\xi)\partial_j\eta^l + g'_{kj}(\xi)\partial_i\eta^k + \eta^r \partial_r g'_{ij}(\xi), \\
 \Rightarrow \quad \delta g_{ij} &= \eta^k \partial_k g_{ij} + \partial_i \eta^k g_{kj} + \partial_j \eta^k g_{ik},
 \end{aligned}$$

que es lo que se quería mostrar. □

La variación de la acción con respecto a la métrica intrínseca define el tensor de energía-momento

$$\begin{aligned}
 T_{ij}(\xi) &:= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{ij}} \\
 &= T \left(h_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} g^{rs} h_{rs} + \frac{1}{2} (p-1) g_{ij} \right). \tag{3.27}
 \end{aligned}$$

Este tensor se conserva, $\nabla_i T^{ij} = 0$, debido a la invarianza bajo difeomorfismos usando el teorema de Nöether, cf. [34].

La ecuación de movimiento para el campo x^μ es:

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{1}{T} \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i x^\mu)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \partial_i \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_i x^\mu)} \left(\sqrt{-g} (g^{rs} h_{rs} - (p-1)) \right) \right) = \partial_i (\sqrt{-g} g^{ij} \partial_j x_\mu). \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

Si se utiliza la ecuación anterior junto con (3.21), se obtiene la ecuación de movimiento respectiva para la acción de Nambu-Goto, (3.7).

3.5 Acción Conforme I

Como en la cuantización de la cuerda es importante la simetría de Weyl, entonces se puede buscar una acción que tenga esta propiedad y que además sea equivalente a la acción de Nambu-Goto;

dicha acción es

$$S[x^\mu, g_{ij}] = -T \int d^{p+1}\xi \sqrt{-g} \left(\frac{1}{p+1} g^{ij} h_{ij} \right)^{\frac{p+1}{2}}. \quad (3.29)$$

Esta acción depende del mismo número de campos que la acción de Polyakov, y para $p = 1$, esta acción se reduce a la acción de Polyakov para cuerdas. La equivalencia entre la acción conforme I y la acción de Nambu-Goto, se realiza de la manera usual; primero se calcula la ecuación de movimiento de la métrica intrínseca

$$\begin{aligned} -\frac{2}{T\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{ij}} &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \left(\sqrt{-g} \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} h_{rs} \right)^{\frac{p+1}{2}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} h_{rs} \right)^{\frac{p-1}{2}} \left(g^{ij} \frac{1}{p+1} g^{rs} h_{rs} - h^{ij} \right) = 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$g_{ij} \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} h_{rs} \right) = h_{ij}, \quad (3.30)$$

esta última expresión tiene la misma forma que (3.22), por lo que la solución es la misma

$$g_{ij}(\xi) = \beta(\xi) h_{ij}(\xi), \quad (3.31)$$

por lo tanto, si se sustituye la anterior solución en la acción conforme I (3.29), se obtiene la equivalencia con Nambu-Goto:

$$\begin{aligned} S &= -T \int d^{p+1}\xi \sqrt{-g} \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} h_{rs} \right)^{\frac{p+1}{2}} \\ &\stackrel{(3.31)}{=} -T \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\beta^{(p+1)}h} \left(\frac{1}{p+1} \beta^{-1} h^{rs} h_{rs} \right)^{\frac{p+1}{2}} \\ &= -T \int d^{p+1}\xi \sqrt{-h} = S_{\text{Nambu-Goto}}. \end{aligned}$$

A continuación se presentan simetrías de esta acción:

1. Invarianza de Poincaré en D -dimensiones

$$x'^{\mu}(\xi) = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}(\xi) + a^{\mu}, \quad (3.32a)$$

$$g'_{ij}(\xi) = g_{ij}(\xi). \quad (3.32b)$$

2. Invarianza bajo difeomorfismos en el volumen de mundo

$$x'^{\mu}(\xi') = x^{\mu}(\xi), \quad (3.33a)$$

$$\frac{\partial \xi'^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi'^l}{\partial \xi^j} g'_{kl}(\xi') = g_{ij}(\xi), \quad (3.33b)$$

para una transformación $\xi' = \xi'(\xi)$.

3. Invarianza de Weyl de $p + 1$ dimensiones

$$x'^{\mu}(\xi) = x^{\mu}(\xi), \quad (3.34a)$$

$$g'_{ij}(\xi) = e^{2\omega(\xi)} g_{ij}(\xi), \quad (3.34b)$$

para $\omega(\xi)$ arbitraria. Infinitesimalmente la simetría de Weyl se expresa como:

$$\delta g_{ij} = 2\omega g_{ij}. \quad (3.35)$$

Dem.

Las demostraciones de los puntos 1 y 2, es completamente análoga a la demostración de los puntos correspondientes en la acción de Polyakov, por lo que estas se omitirán, así como también la expresión infinitesimal (3.34b), por ser ésta muy simple. Para la invarianza de Weyl,

$$\begin{aligned} S' &= -T \int d^{p+1}\xi \sqrt{-g'} \left(\frac{1}{p+1} g'^{rs} h'_{rs} \right)^{\frac{p+1}{2}} \\ &\stackrel{(3.34)}{=} -T \int d^{p+1}\xi \sqrt{-e^{2\omega(p+1)}g} \left(\frac{1}{p+1} e^{-2\omega} g^{rs} h_{rs} \right)^{\frac{p+1}{2}} \\ &= -T \int d^{p+1}\xi \sqrt{-g} \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} h_{rs} \right)^{\frac{p+1}{2}} = S. \end{aligned}$$

□

Debido a que la acción es invariante bajo difeomorfismos del volumen de mundo, el tensor de energía-momento

$$T_{ij}(\xi) := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{ij}} = T \left(\left(\frac{1}{p+1} g^{rs} h_{rs} \right)^{\frac{p-1}{2}} h_{ij} - \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} h_{rs} \right)^{\frac{p+1}{2}} g_{ij} \right), \quad (3.36)$$

se conserva $\nabla_i T^{ij} = 0$. Además, por la invarianza de Weyl el anterior tensor es de traza nula, $g^{rs} T_{rs} = 0$

$$0 = \delta S = -T \int d^{p+1} \xi \frac{\delta S}{\delta g^{rs}} \delta g^{rs} \stackrel{(3.35)}{=} T \int d^{p+1} \xi \ 2\omega T_{rs} g^{rs},$$

de lo cual se concluye, por ser $\omega(\xi)$ arbitraria.

Por otro lado, la ecuación de movimiento para los campos x^μ es la siguiente

$$\begin{aligned} -\frac{1}{T} \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i x^\mu)} \right) &= \partial_i \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_i x^\mu)} \left(\sqrt{-g} \left(\frac{1}{p+1} g^{ij} h_{ij} \right)^{\frac{p+1}{2}} \right) \right) \\ &= \partial_i \left(\sqrt{-g} \left(\frac{1}{p+1} g^{ij} h_{ij} \right)^{\frac{p-1}{2}} g^{ij} \partial_j x_\mu \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.37)$$

si se utiliza la ecuación (3.30), y se sustituye en la anterior se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_i \left(\sqrt{-\beta^{(p+1)} h} \left(\frac{1}{p+1} \beta^{-1} h^{rs} h_{rs} \right)^{\frac{p-1}{2}} \beta^{-1} h^{ij} \partial_j x^\mu \right) \\ &= \partial_i \left(\sqrt{-h} h^{ij} \partial_j x^\mu \right), \end{aligned}$$

la cual, es la misma expresión que (3.7). El análisis canónico de esta acción no está bien definido debido a la potencia en ésta (cf.[27], [16]); lo cual lleva a proponer una acción que no presente este problema y además que sea equivalente a la anterior clásicamente. Por lo tanto, se analizará otra acción, con la característica requerida, en la siguiente sección.

3.6 Acción Conforme II

La acción de Schild da la pauta para introducir un campo auxiliar φ , y eliminar la potencia en la acción (3.29). La acción que resulta es

$$S[x^\mu, g_{ij}, \varphi] = -\frac{T}{2} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-g} \left(\varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{ij} h_{ij} - \varphi(p-1) \right), \quad (3.38)$$

la cual depende de

$$D + \frac{(p+1)(p+2)}{2} + 1$$

campos; el argumento es el mismo que se dio anteriormente para la acción de Polyakov, obviamente con la adición de un campo más. Para $\varphi = 1$ se obtiene la acción de Polyakov para p -branas. Si se utiliza la ecuación de movimiento para el campo φ , se puede obtener la equivalencia clásica entre esta acción y la acción conforme I

$$\begin{aligned} -\frac{2}{T\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{rs} h_{rs} - \varphi(p-1) \right) \\ &= \frac{p-1}{p+1} \varphi^{-\frac{2}{p+1}} g^{rs} h_{rs} - (p-1) = 0, \\ \Rightarrow \quad \varphi &= \left(\frac{1}{p+1} g^{ij} h_{ij} \right)^{\frac{p+1}{2}}, \quad p \neq 1, \end{aligned} \quad (3.39)$$

sustituyendo en (3.38) se obtiene:

$$\begin{aligned} S &=_{(3.39)} -\frac{T}{2} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-g} \left(\left(\frac{1}{p+1} g^{rs} h_{rs} \right)^{\frac{p+1}{2} \frac{p-1}{p+1}} \frac{p+1}{p+1} g^{rs} h_{rs} - \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} h_{rs} \right)^{\frac{p+1}{2}} (p-1) \right) \\ &= -T \int d^{p+1}\xi \sqrt{-g} \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} h_{rs} \right)^{\frac{p+1}{2}} = S_{\text{Conforme I}}, \end{aligned}$$

y la equivalencia para $p = 1$ es inmediata. Establecida la equivalencia entre las dos acciones conformes, se encontrará la equivalencia entre la acción conforme II y la acción de Nambu-Goto; como es usual, se calcula la ecuación de movimiento de g_{ij}

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{T} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \left(\sqrt{-g} \left(\varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{rs} h_{rs} - \varphi(p-1) \right) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{-g} \left(\varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{rs} h_{rs} - \varphi(p-1) \right) g^{ij} - \sqrt{-g} \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} h^{ij} = 0, \\
\Rightarrow \quad \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} h_{ij} - \frac{1}{2} \left(\varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{rs} h_{rs} - \varphi(p-1) \right) g_{ij} &= 0. \tag{3.40}
\end{aligned}$$

En este momento se podrían utilizar las ecuaciones (3.39) y (3.40), sustituyéndolas en la acción (3.38), para obtener la acción de Nambu-Goto; pero lo que se hará en cambio, es simplificar la ecuación anterior usando la ecuación (3.39) y obtener una expresión, que nos permita concluir de inmediato la equivalencia, es decir

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} h_{ij} - \frac{1}{2} \left((p+1) \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} \frac{1}{p+1} g^{rs} h_{rs} - \varphi(p-1) \right) g_{ij} \\
&=_{(3.39)} \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} h_{ij} - \varphi g_{ij},
\end{aligned}$$

entonces

$$g_{ij} = \varphi^{-\frac{2}{p+1}} h_{ij}, \tag{3.41}$$

pero previamente se había demostrado que la acción conforme I era equivalente a la acción de Nambu-Goto, si se cumplía (3.31), para una función β arbitraria, entonces, en particular, se cumplirá la equivalencia para $\beta = \varphi^{-\frac{2}{p+1}}$; por lo tanto, queda demostrada la equivalencia de las acciones.

A continuación se presentan las simetrías de esta acción:

1. Invarianza de Poincaré en D -dimensiones

$$x'^{\mu}(\xi) = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}(\xi) + a^{\mu}, \tag{3.42a}$$

$$\varphi'(\xi) = \varphi(\xi), \tag{3.42b}$$

$$g'_{ij}(\xi) = g_{ij}(\xi). \tag{3.42c}$$

2. Invarianza bajo difeomorfismos en el volumen de mundo

$$x'^{\mu}(\xi') = x^{\mu}(\xi), \quad (3.43a)$$

$$\varphi'(\xi') = \varphi(\xi), \quad (3.43b)$$

$$\frac{\partial \xi'^k}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi'^l}{\partial \xi^j} g'_{kl}(\xi') = g_{ij}(\xi), \quad (3.43c)$$

para una transformación $\xi' = \xi'(\xi)$.

3. Invarianza de Weyl de $p + 1$ dimensiones

$$x'^{\mu}(\xi) = x^{\mu}(\xi), \quad (3.44a)$$

$$\varphi'(\xi) = e^{-(p+1)\omega(\xi)} \varphi(\xi), \quad (3.44b)$$

$$g'_{ij}(\xi) = e^{2\omega(\xi)} g_{ij}(\xi), \quad (3.44c)$$

para $\omega(\xi)$ arbitraria. Infinitesimalmente la simetría de Weyl se expresa como:

$$\delta\varphi = -(p+1)\omega\varphi, \quad (3.45a)$$

$$\delta g_{ij} = 2\omega g_{ij}. \quad (3.45b)$$

Dem.

Debido a las semejanzas de estas simetrías con las respectivas de otras acciones, éstas no se demostrarán. En cambio, para la invarianza de Weyl se tiene:

$$\begin{aligned} S' &= -\frac{T}{2} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-g'} \left(\varphi'^{\frac{p-1}{p+1}} g'^{rs} h'_{rs} - \varphi'(p-1) \right) \\ &\stackrel{(3.44)}{=} -\frac{T}{2} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-g} e^{\omega(p+1)} \left(\varphi^{\frac{p-1}{p+1}} e^{-(p+1)\omega} g^{rs} h_{rs} - \varphi e^{-(p+1)\omega} (p-1) \right) \\ &= -\frac{T}{2} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-g} \left(\varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{rs} h_{rs} - \varphi(p-1) \right) = S. \end{aligned}$$

□

Para esta acción el tensor de energía-momento se puede definir, debido a la transformación conforme, como (cf. [16], [13]):

$$T_{ij} := -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\delta S}{\delta g^{ij}} + \frac{\varphi}{2} \frac{\delta S}{\delta \varphi} g_{ij} \right), \quad (3.46)$$

calculando el tensor con la anterior definición:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= -\frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\delta S}{\delta g^{ij}} + \frac{\varphi}{2} \frac{\delta S}{\delta \varphi} g_{ij} \right) \\ &= -\frac{T}{\sqrt{-g}} \left(\frac{1}{2} \sqrt{-g} \left(\varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{rs} h_{rs} - \varphi(p-1) \right) g_{ij} - \sqrt{-g} \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} h_{ij} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varphi}{2} \sqrt{-g} \left(\frac{p-1}{p+1} \varphi^{-\frac{2}{p+1}} g^{rs} h_{rs} - (p-1) \right) g_{ij} \right) \\ &= T \left(\varphi^{\frac{p-1}{p+1}} h_{ij} - \frac{1}{2} \left(\varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{rs} h_{rs} - \varphi(p-1) \right) g_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{p-1}{p+1} \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{rs} h_{rs} - \varphi(p-1) \right) g_{ij} \right) \\ &= T \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} \left(h_{ij} - \frac{1}{p+1} g^{rs} h_{rs} g_{ij} \right), \end{aligned} \quad (3.47)$$

el anterior tensor tiene traza cero, $g^{ij}T_{ij} = 0$, debido a la invarianza conforme, como se demuestra a continuación:

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int d^{p+1}\xi \left(\frac{\delta S}{\delta g_{rs}} \delta g_{rs} + \frac{\delta S}{\delta \varphi} \delta \varphi \right) \\ &=_{(3.45)} - \int d^{p+1}\xi \left(\frac{\delta S}{\delta g^{rs}} 2\omega g^{rs} + \frac{\delta S}{\delta \varphi} g_{rs} g^{rs} \omega \varphi \right) \\ &= \int d^{p+1}\xi \sqrt{-g} \omega T_{rs} g^{rs}, \end{aligned}$$

de donde, debido a la arbitrariedad de ω , se sigue el resultado. Se tiene, por último, la ecuación de movimiento para los campos x^μ :

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{2}{T} \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i x^\mu)} \right) \\
&= \partial_i \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_i x^\mu)} \left(\sqrt{-g} \left(\varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{rs} h_{rs} - \varphi(p-1) \right) \right) \right) \\
&= \partial_i \left(\sqrt{-g} \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{ij} \partial_j x^\mu \right), \tag{3.48}
\end{aligned}$$

por otro lado, si se sustituye (3.41) en la anterior ecuación

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_i \left(\sqrt{-g} \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} g^{ij} \partial_j x^\mu \right) \\
&=_{(3.41)} \partial_i \left(\sqrt{-\varphi^{-2} h} \varphi^{\frac{p-1}{p+1}} \varphi^{\frac{2}{p+1}} h^{ij} \partial_j x^\mu \right) \\
&= \partial_i \left(\sqrt{-h} h^{ij} \partial_j x^\mu \right),
\end{aligned}$$

se obtiene la ecuación del campo x^μ para la acción de Nambu-Goto.

3.7 Método Parent Action

El método "parent action" fue propuesto por Deser y Jackiw hace dos décadas. El propósito de éste fue el de establecer, a nivel de Lagrangianos en vez de las ecuaciones de movimiento, la equivalencia de la llamada dualidad entre el modelo autodual Abeliano y el modelo de Maxwell-Chern-Simons en un espacio-tiempo de $(2+1)$ dimensiones.

El proceso del método esta conformado por dos pasos, cf.[33], [28]:

- (1) Introducir campos auxiliares así como multiplicadores de Lagrange sobre una acción conocida y de esta forma construir una acción "parent".
- (2) Hacer la variación de la acción "parent" con respecto a cada campo auxiliar, obtener la expresión de un campo en términos de los restantes, y sustituir éste en la acción. A través de diversas variaciones, con respecto a diferentes campos auxiliares, se obtienen diferentes acciones.

Las acciones así obtenidas son, por construcción, clásicamente equivalentes, y la relación entre ellas se llama dualidad; si las acciones obtenidas resultan ser iguales, se habla entonces de una autodualidad.

3.7.1 Acción S_{parent}^I

Tómese por ejemplo la acción de Nambu-Goto para p -branas

$$S_{\text{Nambu-Goto}}[x^\mu] = -T \int d^{p+1}\xi \sqrt{-h}, \quad (3.49)$$

y se introduce una acción equivalente a la anterior

$$S[x^\mu] = -T \int d^{p+1}\xi \sqrt{-\tilde{g}}, \quad (3.50)$$

con $\tilde{g}_{ij} = h_{ij}$, después se introduce un nuevo campo g dependiente de h a través de un multiplicador de Lagrange

$$S_{\text{parent}}^I[x^\mu, g_{ij}, \Lambda^{ij}] = -T \int d^{p+1}\xi (\sqrt{-g} + \Lambda^{ij}(g_{ij} - h_{ij})). \quad (3.51)$$

Si se varia esta acción (3.51) con respecto a Λ^{ij} , e igualando el resultado a cero

$$\frac{\delta S_{\text{parent}}^I}{\delta \Lambda^{ij}} = \frac{\partial}{\partial \Lambda^{ij}} (\Lambda^{rs}(g_{rs} - h_{rs})) = g_{ij} - h_{ij} = 0,$$

se obtiene la relación

$$g_{ij} = h_{ij}, \quad (3.52)$$

la cual, junto con (3.51), dan la acción de Nambu-Goto (3.49). Esto da la equivalencia clásica entre la acción S_{parent}^I y Nambu-Goto. Por otro lado, si se varia la acción (3.51) con respecto a g_{ij}

$$\frac{\delta S_{\text{parent}}^I}{\delta g_{ij}} = \frac{\partial}{\partial g_{ij}} (\sqrt{-g} + \Lambda^{rs}(g_{rs} - h_{rs})) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ij} - \Lambda^{ij} = 0,$$

se obtiene una expresión de Λ^{ij} en términos de g_{ij}

$$\Lambda^{ij} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{ij}. \quad (3.53)$$

Sustituyendo (3.53) en (3.51), se obtiene la versión dual de la acción de Nambu-Goto

$$\begin{aligned} S_{\text{parent}}^I[x^\mu, g_{ij}, \Lambda_{ij}] &=_{(3.53)} -T \int d^{p+1}\xi \left(\sqrt{-g} - \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{rs} (g_{rs} - h_{rs}) \right) \\ &= -\frac{T_p}{2} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-g} (g^{ij} h_{ij} - (p-1)) = S_{\text{Polyakov}}[x^\mu, g_{ij}], \end{aligned} \quad (3.54)$$

la cual es la acción de Polyakov (3.16).

3.7.2 Acción S_{parent}^{II}

Las acciones "parent" no son únicas, por ejemplo, si se comienza con la acción de Polyakov, se obtiene la siguiente acción "parent".

$$S_{\text{parent}}^{II}[x^\mu, g_{ij}, G_{ij}, \Lambda_{ij}] = -\frac{T_p}{2} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-G} (G^{ij} h_{ij} - (p-1)) + \Lambda_{ij} (G^{ij} - g^{ij}), \quad (3.55)$$

donde Λ_{ij} es un multiplicador de Lagrange y G^{ij} es un tensor auxiliar de segundo rango, introducidos en el volumen-mundo. Se puede verificar que la acción de Nambu-Goto es dual a la acción de Polyakov con respecto a la inversa de la métrica del volumen-mundo g^{ij} . El procedimiento es el siguiente. Primero, se realiza la variación de la ecuación (3.55) con respecto a Λ_{ij}

$$\frac{\delta S_{\text{parent}}^{II}}{\delta \Lambda_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \Lambda_{ij}} (\Lambda_{rs} (G^{rs} - g^{rs})) = G^{ij} - g^{ij} = 0,$$

resultando en la relación

$$G^{ij} = g^{ij}, \quad (3.56)$$

la cual, si se sustituye en (3.55) ésta resulta ser, claramente, la acción de Polyakov (3.54). Lo anterior significa que la acción (3.55) es clásicamente equivalente a la acción de Polyakov. Segundo, al hacer la variación de (3.55) con respecto a G^{ij}

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{\text{parent}}^{II}}{\delta G^{ij}} &= \frac{\partial}{\partial G^{ij}} \left(\sqrt{-G} (G^{rs} h_{rs} - (p-1)) + \Lambda_{rs} (G^{rs} - g^{rs}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{-G} G_{ij} (G^{rs} h_{rs} - (p-1)) - \sqrt{-G} h_{ij} - \Lambda_{ij} = 0, \end{aligned}$$

se obtiene la relación

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{2}\sqrt{-G}G_{ij}(G^{rs}h_{rs} - (p-1)) - \sqrt{-G}h_{ij}. \quad (3.57)$$

Después de sustituir la ecuación (3.57) en (3.55), se obtiene

$$\begin{aligned} S_{\text{parent}}^{II}[x^\mu, g_{ij}, G_{ij}] &=_{(3.57)} -\frac{T_p}{2}\int d^{p+1}\xi \sqrt{-G}(G^{rs}h_{rs} - (p-1)) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\sqrt{-G}G_{ij}(G^{rs}h_{rs} - (p-1)) - \sqrt{-G}h_{ij}\right)(G^{ij} - g^{ij}), \end{aligned}$$

cuya variación con respecto a g^{ij} , la cual ahora se trata como un multiplicador de Lagrange, es

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{\text{parent}}^{II}}{\delta g^{ij}} \Big|_{(3.57)} &= -\frac{\partial}{\partial g^{ij}} \left(g^{kl} \left(\frac{1}{2}G_{kl}(G^{rs}h_{rs} - (p-1)) - h_{kl} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{2}G_{ij}(G^{rs}h_{rs} - (p-1)) + h_{ij} = 0, \end{aligned}$$

resultando en

$$h_{ij} = \frac{1}{2}G_{ij}(G^{rs}h_{rs} - (p-1)), \quad (3.58)$$

i.e., si se sustituye en (3.57),

$$\Lambda_{ij} = 0. \quad (3.59)$$

La solución de la ecuación (3.57) con $\Lambda_{ij} = 0$, para $p \neq 1$, calculada por un método previo, específicamente en § 4.3, es

$$G_{ij} = h_{ij}. \quad (3.60)$$

Usando ecuaciones (3.59), (3.60), se obtiene de la acción (3.55)

$$\begin{aligned} S_{\text{parent}}^{II}[x^\mu, G_{ij}] &=_{(3.59)} -\frac{T_p}{2}\int d^{p+1}\xi \sqrt{-G}(G^{ij}h_{ij} - (p-1)) \\ &=_{(3.60)} -T_p\int d^{p+1}\xi \sqrt{-h} = S_{\text{Nambu-Goto}}[x^\mu], \end{aligned}$$

la acción de Nambu-Goto. Para el caso $p = 1$, el caso de la cuerda, la ecuación (3.58) se simplifica como

$$h_{ij} = \frac{1}{2} G_{ij} G^{rs} h_{rs}, \quad (3.61)$$

con solución

$$G_{ij} = \beta(\xi) h_{ij}, \quad (3.62)$$

y además, se tiene todavía la validez de la ecuación (3.59), por lo tanto, si se sustituye este resultado y (3.62) en la acción (3.55), se obtiene

$$\begin{aligned} S_{\text{parent}}^{II}[x^\mu, G_{ij}] &=_{(3.59)} -\frac{T_p}{2} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-G} (G^{ij} h_{ij} - (p-1)) \\ &=_{(3.62)} -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-h} = S_{\text{Nambu-Goto}}[x^\mu], \end{aligned}$$

de nuevo la acción de Nambu-Goto. De aquí resulta la dualidad de la acción "parent" (3.55) con la acción de Nambu-Goto.

3.7.3 Acción S_{parent}^{III}

Si se introduce un campo escalar $\Phi(\xi)$, y un reescalamiento de la métrica del volumen-mundo, $g_{ij} \rightarrow \Phi g_{ij}$, en la acción S_{parent}^I , se puede escribir la tercera acción "parent"

$$S_{\text{parent}}^{III}[x^\mu, g_{ij}, \Phi, \Lambda_{ij}] = -T_p \int d^{p+1}\xi \left(\Phi^{\frac{p+1}{2}} \sqrt{-g} + \Lambda^{ij} (\Phi g_{ij} - h_{ij}) \right), \quad (3.63)$$

donde $\Phi(\xi)$ es una escalar en el volumen-mundo y en el espacio-tiempo, con el fin de que (3.63) sea invariante de bajo transformaciones Lorentz y reparametrizaciones. Si se varia esta acción con respecto a Λ^{ij} ,

$$\frac{\delta S_{\text{parent}}^{III}}{\delta \Lambda^{ij}} = \frac{\partial}{\partial \Lambda^{ij}} (\Lambda^{rs} (\Phi g_{rs} - h_{rs})) = \Phi g_{ij} - h_{ij} = 0,$$

se obtiene,

$$g_{ij} = \Phi^{-1} h_{ij}, \quad (3.64)$$

la cual, si se sustituye en (3.63),

$$S_{\text{parent}}^{III}[x^\mu, g_{ij}, \Phi, \Lambda_{ij}] =_{(3.64)} -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-h} = S_{\text{Nambu-Goto}}[x^\mu],$$

muestra la equivalencia entre las acciones. Por otro lado, variando la acción (3.63) con respecto a g_{ij}

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{\text{parent}}^{III}}{\delta g_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial g_{ij}} (\Phi^{\frac{p+1}{2}} \sqrt{-g} + \Lambda^{ij} (\Phi g_{ij} - h_{ij})) \\ &= \frac{1}{2} \Phi^{\frac{p+1}{2}} \sqrt{-g} g^{ij} + \Lambda^{ij} \Phi = 0, \end{aligned}$$

se obtiene Λ^{ij} como

$$\Lambda^{ij} = -\frac{1}{2} \Phi^{\frac{p+1}{2}} \sqrt{-g} g^{ij}. \quad (3.65)$$

Sustituyendo la ecuación (3.65) en la acción (3.63), se deriva la acción dual

$$\begin{aligned} S_{\text{parent}}^{III}[x^\mu, g_{ij}, \Phi, \Lambda_{ij}] &=_{(3.65)} -T_p \int d^{p+1}\xi (\Phi^{\frac{p+1}{2}} \sqrt{-g} - \frac{1}{2} \Phi^{\frac{p+1}{2}} \sqrt{-g} g^{ij} (\Phi g_{ij} - h_{ij})) \\ &= -\frac{T_p}{2} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-g} (\Phi^{\frac{p-1}{2}} g^{ij} h_{ij} - (p-1) \Phi^{\frac{p+1}{2}}) = S_W^I[x^\mu, g_{ij}, \Phi]. \quad (3.66) \end{aligned}$$

La acción anterior es similar a (3.38) pero no es invariante de Weyl para toda p . Sin embargo, para $p = 1$ la acción (3.66) es la acción de Polyakov.

3.7.4 Acción S_{parent}^{IV}

Se introduce de nueva cuenta dos campos escalares Λ y Ψ , y se construye la cuarta acción "parent", la cual corresponde a S_W^I

$$S_{\text{parent}}^{IV}[x^\mu, g_{ij}, \Phi, \Psi, \Lambda] = -\frac{T_p}{2} \int d^{p+1}\xi (\sqrt{-g} (\Psi^{\frac{p-1}{2}} g^{ij} h_{ij} - (p-1) \Psi^{\frac{p+1}{2}}) + \Lambda (\Psi - \Phi)), \quad (3.67)$$

cuya variación con respecto a Λ

$$\frac{\delta S_{\text{parent}}^{IV}}{\delta \Lambda} = \frac{\partial}{\partial \Lambda} (\Lambda (\Psi - \Phi)) = \Psi - \Phi = 0,$$

da la equivalencia, de una manera automática, entre esta acción y S_W^I . Por otro lado, su variación con respecto a Ψ ,

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{\text{parent}}^{IV}}{\delta \Psi} &= \frac{\partial}{\partial \Psi} (\sqrt{-g} (\Psi^{\frac{p-1}{2}} g^{ij} h_{ij} - (p-1) \Psi^{\frac{p+1}{2}}) + \Lambda (\Psi - \Phi)) \\ &= \sqrt{-g} \left(\frac{p-1}{2} \Psi^{\frac{p-3}{2}} g^{ij} h_{ij} - (p-1) \frac{p+1}{2} \Psi^{\frac{p-1}{2}} \right) + \Lambda = 0, \end{aligned}$$

da la relación

$$\Lambda = -\frac{p-1}{2} \sqrt{-g} \Psi^{\frac{p-3}{2}} (g^{ij} h_{ij} - (p+1) \Psi), \quad (3.68)$$

la cual si se sustituye en (3.67), se obtiene

$$\begin{aligned} S_{\text{parent}}^{IV}[x^\mu, g_{ij}, \Phi, \Psi] &=_{(3.68)} -\frac{T_p}{2} \int d^{p+1} \xi (\sqrt{-g} (\Psi^{\frac{p-1}{2}} g^{ij} h_{ij} - (p-1) \Psi^{\frac{p+1}{2}}) \\ &\quad - \left(\frac{p-1}{2} \sqrt{-g} \Psi^{\frac{p-3}{2}} (g^{ij} h_{ij} - (p+1) \Psi) \right) \Lambda (\Psi - \Phi)) \\ &= -\frac{T_p}{2} \int d^{p+1} \xi \sqrt{-g} \left(-\frac{p-3}{2} \Psi^{\frac{p-1}{2}} g^{rs} h_{rs} - \frac{(p-1)^2}{2} \Psi^{\frac{p+1}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{p-1}{2} \Psi^{\frac{p-3}{2}} (-g^{rs} h_{rs} + (p+1) \Psi) \Phi \right), \end{aligned}$$

tomando la variación de esta acción con respecto a Φ , tratado ahora como un multiplicador de Lagrange, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{\text{parent}}^{IV}}{\delta \Phi} &= \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(-\frac{p-1}{2} \sqrt{-g} \Psi^{\frac{p-3}{2}} (-g^{rs} h_{rs} + (p+1) \Psi) \Phi \right) \\ &= -\frac{p-1}{2} \sqrt{-g} \Psi^{\frac{p-3}{2}} (-g^{rs} h_{rs} + (p+1) \Psi) = 0, \end{aligned}$$

y tomando en cuenta (3.68), se encuentra

$$\Lambda = 0, \quad (3.69)$$

por lo tanto, para $p \neq 1$

$$\Psi = \frac{1}{p+1} g^{rs} h_{rs}. \quad (3.70)$$

Por último, se sustituyen las ecuaciones (3.69, 3.70) en S_{parent}^{IV} ,

$$\begin{aligned} S_p^{IV}[x^\mu, g_{ij}, \Phi, \Psi, \Lambda] &=_{(3.69, 3.70)} -\frac{T_p}{2} \int d^{p+1}\xi \sqrt{-g} \left(\left(\frac{1}{p+1} g^{rs} h_{rs} \right)^{\frac{p-1}{2}} g^{kl} h_{kl} - (p-1) \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} h_{rs} \right)^{\frac{p+1}{2}} \right) \\ &= -T_p \int d^{p+1}\xi \sqrt{-g} \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} h_{rs} \right)^{\frac{p+1}{2}} = S_W^{II}[x^\mu, g_{ij}]. \end{aligned} \quad (3.71)$$

La cual es la acción Conforme I de la sección §3.5, (3.29). Para $p = 1$, se tiene también que $\Lambda = 0$, y S_{parent}^{IV} se reduce a la acción de Polyakov para la teoría de cuerdas. Por lo tanto, se establece la dualidad entre S_W^I y S_W^{II} .

3.8 Formulaci3n Can3nica de p -branas

3.8.1 Acci3n de Nambu-Goto

Dada la acci3n en (3.2), el momento can3nico asociado a los campos x^μ es

$$\begin{aligned} P_\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \\ &=_{(3.7)} -T\sqrt{-h} h^{0j} \partial_j x_\mu, \end{aligned} \quad (3.72)$$

donde $\dot{x}^\mu = \partial_0 x^\mu = \partial_\tau x^\mu$. De la anterior expresi3n para el momento se puede calcular la densidad hamiltoniana:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= P_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} \\ &= -T\sqrt{-h} h^{0r} \partial_r x_\mu \dot{x}^\mu - \mathcal{L} \\ &= -T\sqrt{-h} h^{0r} h_{r0} - \mathcal{L} = 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

la cual se anula; por lo tanto, se tienen constricciones, las cuales, se demostrará, son las siguientes $p + 1$:

$$\mathcal{H}_r = P_\mu \partial_r x^\mu \approx 0 \quad , \quad r \neq 0, \quad (3.74)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T} P^\mu P_\mu + T \tilde{h} \right) \approx 0, \quad (3.75)$$

donde $\tilde{h} := h h^{00}$ es el determinante de la parte espacial de la métrica inducida, cf.[23] y la relación $A^{-1} = [\det(A)]^{-1}(\text{adj} A)$. Las constricciones anteriores se demuestran como sigue

Dem.

Para (3.74) se tiene:

$$P_\mu \partial_r x^\mu = -T \sqrt{-h} h^{0s} \partial_s x_\mu \partial_r x^\mu = -T \sqrt{-h} h^{0s} h_{sr} = 0,$$

y para (3.75)

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} P^\mu P_\mu &= T(-h) h^{0s} \partial_s x^\mu h^{0r} \partial_r x_\mu + T \tilde{h} \\ &= -T h h^{0s} h_{sr} h^{r0} + T \tilde{h} = 0. \end{aligned}$$

□

El hamiltoniano total para esta acción es

$$H_T[x^\mu, P_\mu, \lambda, \lambda^r] = \int d^p \xi (\lambda \mathcal{H} + \lambda^r \mathcal{H}_r). \quad (3.76)$$

Y se tiene que el álgebra de las constricciones es cerrada, *i.e.*,

$$\{H[f], H[g]\} = H_r[(f \partial_s g - g \partial_s f) \tilde{h}^{\tilde{r}s}], \quad (3.77a)$$

$$\{H[f], H_r[g]\} = H[f \partial_r g - g \partial_r f], \quad (3.77b)$$

$$\{H_r[f], H_s[g]\} = H_s[f \partial_r g] + H_r[-g \partial_s f]. \quad (3.77c)$$

Para la demostración se remite al lector al apéndice A. Dado que el álgebra es cerrada, no existen más contricciones; por lo tanto, para la acción de Nambu-Goto (3.2), el hamiltoniano extendido coincide con el total, *i.e.* $H_T = H_E$. El conteo de grados de libertad para la p -brana es el siguiente, $2D$ campos en el espacio fase y $p + 1$ contricciones de primera clase, por lo tanto el número de grados de libertad es

$$\frac{2D - 2(p + 1)}{2} = D - (p + 1).$$

Capítulo 4

D-branas

4.1 Introducción

Branas de Dirichlet, o en forma compacta D -branas, tienen en este momento un lugar preponderante en la teoría de cuerdas. Estas han pasado de ser objetos extendidos extraños, que existen en ciertas teorías de cuerdas, y por mucho tiempo ignorados, a jugar un papel principal en la comprensión de la dinámica no perturbativa y la dualidad de la teoría de cuerdas. Una de las principales características de estas D -branas es que tienen los atributos necesarios para asociarse con estados fundamentales de cuerdas bajo transformaciones de dualidad, asimismo éstas son más simples de describir que otros solitones y ofrecen cálculos explícitos en áreas donde sólo la especulación tenía lugar.

A grosso modo las D -branas se definen como hipersuperficies de $p + 1$ dimensiones en el espacio-tiempo en las cuales las cuerdas abiertas pueden terminar. Los campos bosónicos x^μ de estas cuerdas abiertas tienen condiciones de frontera las cuales pueden ser de Neumann o de Dirichlet para cada campo por separado. Cuando todas las condiciones de frontera son del tipo Neumann, los extremos de la cuerda son libres para moverse libremente en el espacio. Mientras que para $9 - p$ condiciones de frontera de Dirichlet, los extremos de la cuerda están sujetos a moverse sobre una hipersuperficie de p dimensiones, la cual corresponde a una D -brana.

Por otro lado, las teorías de cuerdas tipo IIA y tipo IIB contienen campos bosónicos y sus supercompañeros fermiónicos. Las supersimetrías tipo IIA y IIB tienen en común un tensor métrico simétrico $g_{\mu\nu}$, un tensor antisimétrico potencial $B_{\mu\nu}$, y un escalar, el dilatón ϕ . Estos campos están asociados con fermiones en la hoja mundo con condiciones de frontera antisimétricas, de Neveu-Schwarz, en ambos sectores de la cuerda cerrada, osciladores izquierdos y derechos, por lo tanto se les conoce como campos NS-NS. Los campos bosónicos restantes están asociados con fermiones periódicos, de Ramond, en la teoría tipo IIA los campos R-R son: $A_\mu^{(1)}$ y $A_{\mu\nu\rho}^{(3)}$; mientras que en el tipo IIB se tienen: $A^{(0)}$, $A_{\mu\nu}^{(2)}$ y $A_{\mu\nu\rho\sigma}^{(4)}$, [6, 7].

Hasta hace poco tiempo, el papel de los campos R-R en la teoría de cuerdas no era claro. Pero en uno de los artículos más importantes en la revolución de cuerdas, Polchinski señaló que las D -branas son los portadores de carga de estos campos. Más aún, se tiene que la carga μ_p es

la más pequeña permitida por la condición de cuantización de Dirac, lo cual sugiere que estas D -branas son las fuentes básicas a partir de las cuales cualquier objeto R-R cargado se puede construir, [27].

Los avances recientes en teoría de cuerdas, como por ejemplo, las relaciones de dualidad entre las diferentes teorías de cuerda, el cálculo de la entropía de un agujero negro y la conjetura de Maldacena, no podrían explicarse sin estas D -branas.

En este capítulo, y de manera similar al precedente, se exponen y se demuestran las características de acciones de D -branas bosónicas, como por ejemplo, la acción de Dirac-Born-Infeld, de Abou-Hull, acción Conforme I y II, esta última invariante de Weyl para toda p y cuadrática en el campo $F_{\mu\nu}$. Se demuestra asimismo la equivalencia clásica entre estas acciones, las ecuaciones de movimiento de los campos bosónicos y de norma, y se calculan los respectivos tensores de energía-momento. Por último, se construye un acoplamiento conforme del campo auxiliar escalar de la acción Conforme II, con los campos de norma sobre la D -brana.

4.2 Acción de Dirac-Born-Infeld

La acción para Dp -branas, análoga a la acción de Nambu-Goto (3.2), es la siguiente

$$S[x^\mu, A_i] = -T \int d^{p+1}\xi e^{-\phi} \sqrt{-\det(h + \mathcal{F})}, \quad (4.1)$$

donde

$$\mathcal{F}_{ij} := F_{ij} - B_{ij}, \quad (4.2)$$

son las componentes de un campo de fuerza "modificado", asimismo

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i,$$

por otra parte, ϕ , h , B , son, respectivamente, los pullbacks al volumen de mundo de los campos dilatón de fondo, la métrica y la 2-forma antisimétrica de Neveu-Schwarz

$$h_{ij}(\xi) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^j} \eta_{\mu\nu}(x(\xi)), \quad (4.3)$$

$$B_{ij}(\xi) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^j} B_{\mu\nu}(x(\xi)). \quad (4.4)$$

Las simetrías de la acción (4.1), son

1. Invarianza de Poincaré en D -dimensiones

$$x'^{\mu}(\xi) = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}(\xi) + a^{\mu}, \quad (4.5a)$$

$$A'_i(\xi) = A_i(\xi). \quad (4.5b)$$

2. Invarianza bajo difeomorfismos en el volumen de mundo

$$x'^{\mu}(\xi') = x^{\mu}(\xi), \quad (4.6a)$$

$$\frac{\partial \xi'^j}{\partial \xi^i} A'_j(\xi') = A_i(\xi). \quad (4.6b)$$

para nuevas coordenadas $\xi'(\xi)$.

3. Invarianza de norma

$$x'^{\mu}(\xi) = x^{\mu}(\xi), \quad (4.7a)$$

$$B'^i_{ij}(\xi) = B_{ij}(\xi) + \partial_i \chi_j(\xi) - \partial_j \chi_i(\xi), \quad (4.7b)$$

$$A'_i(\xi) = A_i(\xi) - \chi_i(\xi) + \partial_i \lambda(\xi). \quad (4.7c)$$

Dem.

1. La demostración de la invarianza de Poincaré es similar, a la demostración para la acción de Nambu-Goto; ya que el pullback de la 2-forma B se transforma de manera análoga al pullback de la métrica, y precisamente esa era la parte importante en la demostración.

2. Para la demostración de la invarianza bajo difeomorfismos, se comenzará por observar el comportamiento bajo transformaciones de los campos en el volumen de mundo

$$\begin{aligned}
h'_{ij}(\xi') &= \frac{\partial \xi^k}{\partial \xi'^i} \frac{\partial \xi^l}{\partial \xi'^j} h_{kl}(\xi), \\
B'_{ij}(\xi') &= \frac{\partial \xi^m}{\partial \xi'^i} \frac{\partial \xi^n}{\partial \xi'^j} B_{mn}(\xi), \\
F'_{ij}(\xi') &= \frac{\partial \xi^p}{\partial \xi'^i} \frac{\partial \xi^m}{\partial \xi'^j} F_{pm}(\xi), \\
\Rightarrow (h' + \mathcal{F}')_{ij}(\xi') &= \frac{\partial \xi^r}{\partial \xi'^i} \frac{\partial \xi^l}{\partial \xi'^j} (h + \mathcal{F})_{ij}(\xi),
\end{aligned}$$

con lo anterior

$$\begin{aligned}
S' &= -T \int d^{p+1} \xi' e^{-\phi} \sqrt{-\det(h' + \mathcal{F}')} \\
&= -T \int d^{p+1} \xi' \left(\frac{\partial \xi}{\partial \xi'^i} \right) e^{-\phi} \sqrt{-\det(h + \mathcal{F})} \\
&= -T \int d^{p+1} \xi e^{-\phi} \sqrt{-\det(h + \mathcal{F})} = S.
\end{aligned}$$

3. Para la invarianza de norma, sólo basta observar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
F'_{ij}(\xi) &= \partial_i A'_j(\xi) - \partial_j A'_i(\xi) \\
&= F_{ij}(\xi) + \partial_j \chi_i(\xi) - \partial_i \chi_j(\xi), \\
\Rightarrow \mathcal{F}'_{ij}(\xi) &= F'_{ij}(\xi) - B'_{ij}(\xi) = F_{ij}(\xi) + \partial_j \chi_i(\xi) - \partial_i \chi_j(\xi) - B_{ij}(\xi) - \partial_i \chi_j(\xi) + \partial_j \chi_i \\
&= F_{ij}(\xi) - B_{ij}(\xi) = \mathcal{F}_{ij}.
\end{aligned}$$

□

A continuación, se exponen las ecuaciones de movimiento de los campos x^μ y A_i :

$$\begin{aligned}
\partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i x^\mu)} \right) &= \partial_i \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_i x^\mu)} (e^{-\phi} \sqrt{-\det(h + \mathcal{F})}) \right) \\
&= \partial_i \left(\frac{e^{-\phi}}{2} \sqrt{-\det(h + \mathcal{F})} \operatorname{tr}((h + \mathcal{F})^{rt} \frac{\partial}{\partial (\partial_i x^\mu)} (h + \mathcal{F})_{ts}) \right) \\
&= \partial_i (e^{-\phi} \sqrt{-\det(h + \mathcal{F})} (h^{ij} \partial_j x_\mu + \mathcal{F}^{ij} B_{\mu\rho} \partial_j x^\rho)) = 0. \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Asimismo,

$$\begin{aligned}
\partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i A_j)} \right) &= \partial_i \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_i A_j)} (e^{-\phi} \sqrt{-\det(h + \mathcal{F})}) \right) \\
&= \partial_i \left(\frac{e^{-\phi}}{2} \sqrt{-\det(h + \mathcal{F})} \operatorname{tr}((h + \mathcal{F})^{rt} \frac{\partial}{\partial (\partial_i A_j)} (h + \mathcal{F})_{ts}) \right) \\
&= -\frac{1}{2} \partial_i \left(e^{-\phi} \sqrt{-\det(h + \mathcal{F})} ((h + \mathcal{F})^{ij} - (h - \mathcal{F})^{ij}) \right) = 0. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

4.3 Acción de Abou-Hull

Debido a la raíz cuadrada, la acción (4.1) es no-lineal y en consecuencia difícil de analizar. Por lo tanto, Abou y Hull propusieron otra acción (cf.[47]), cuya característica principal es ser cuadrática en el campo de fuerza \mathcal{F}

$$S[x^\mu, A_i, g_{ij}] = -\frac{T}{4} \int d^{p+1} \xi e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} (g^{ij} \mathcal{H}_{ij} - (p-3)), \tag{4.10}$$

en donde

$$\mathcal{H}_{ij} = h_{ij} - \mathcal{F}_{ik} h^{kl} \mathcal{F}_{lj}. \tag{4.11}$$

A continuación, se demostrará la equivalencia clásica con la acción (4.1); y como ya es usual, se calcula la ecuación de movimiento de la métrica intrínseca, para $p \neq 3$

$$\begin{aligned}
-\frac{4}{T} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \left(e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} (g^{rs} \mathcal{H}_{rs} - (p-3)) \right) \\
&= e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} \frac{\partial (-g)^{\frac{1}{4}}}{\partial g_{ij}} (g^{rs} \mathcal{H}_{rs} - (p-3)) - e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} \frac{\partial g^{rs}}{\partial g_{ij}} \mathcal{H}_{rs} \\
&= e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4} g^{ij} (g^{rs} \mathcal{H}_{rs} - (p-3)) - \mathcal{H}^{ij} \right) = 0, \\
\Rightarrow \quad \mathcal{H}_{ij} - \frac{1}{4} g_{ij} (g^{rs} \mathcal{H}_{rs} - (p-3)) &= 0. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Si se toma la traza de la anterior ecuación

$$\begin{aligned}
0 &= g^{rs} \mathcal{H}_{rs} - \frac{1}{4} g^{rs} g_{rs} (g^{kl} \mathcal{H}_{kl} - (p-3)) \\
&= -\frac{(p-3)}{4} (g^{rs} \mathcal{H}_{rs} - (p+1)),
\end{aligned}$$

es decir,

$$g^{rs} \mathcal{H}_{rs} = p+1,$$

por lo tanto, se tiene por solución

$$g_{ij}(\xi) = \mathcal{H}_{ij}(\xi). \tag{4.13}$$

Antes de hacer la demostración de la equivalencia respectiva, se realizará un cálculo previo, necesario para la misma:

$$\begin{aligned}
(-h)^{\frac{1}{4}} (-\mathcal{H})^{\frac{1}{4}} &= (-h)^{\frac{1}{4}} \left(-\det(h_{ij} - \mathcal{F}_{ik} h^{kl} \mathcal{F}_{lj}) \right)^{\frac{1}{4}} \\
&= (-h)^{\frac{1}{4}} \left(-\det(h_{ik} + \mathcal{F}_{ik}) h^{kl} (h_{lj} - \mathcal{F}_{lj}) \right)^{\frac{1}{4}} \\
&= (-h)^{\frac{1}{4}} \left(-\det(h^{-1}) \det(h_{ij} + \mathcal{F}_{ij}) \det(h_{ij} - \mathcal{F}_{ij}) \right)^{\frac{1}{4}} \\
&= \left(\det(h_{ij} + \mathcal{F}_{ij}) \det(h_{ij} + \mathcal{F}_{ij})^T \right)^{\frac{1}{4}} \\
&= \left(\det^2(h_{ij} + \mathcal{F}_{ij}) \right)^{\frac{1}{4}} = \left(-\det(h_{ij} + \mathcal{F}_{ij}) \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-(h + \mathcal{F})} \quad \forall p. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Si se sustituye (4.13, 4.14) en la acción (4.10),

$$\begin{aligned}
 S \Big|_{p \neq 3} &=_{(4.13)} -\frac{T}{4} \int d^{p+1} \xi \, e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-\mathcal{H})^{\frac{1}{4}} (\mathcal{H}^{rs} \mathcal{H}_{rs} - (p-3)) \\
 &= -T \int d^{p+1} \xi \, e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-\mathcal{H})^{\frac{1}{4}} \\
 &=_{(4.14)} -T \int d^{p+1} \xi \, e^{-\phi} \sqrt{-(h + \mathcal{F})} = S_{\text{Dirac}} ,
 \end{aligned}$$

se obtiene la acción de Dirac-Born-Infeld. Para $p = 3$, se puede usar la ecuación de movimiento (4.12), la cual se reduce a:

$$\mathcal{H}_{ij} - \frac{1}{4} g_{ij} g^{rs} \mathcal{H}_{rs} = 0 , \quad (4.15)$$

cuya solución general, como previamente se había puntualizado, en § 3.4, es de la forma:

$$g_{ij}(\xi) = \beta(\xi) \mathcal{H}_{ij}(\xi) , \quad (4.16)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
 S \Big|_{p=3} &=_{(4.16)} -\frac{T}{4} \int d^{p+1} \xi \, e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-\beta^4 \mathcal{H})^{\frac{1}{4}} \beta^{-1} \mathcal{H}^{rs} \mathcal{H}_{rs} \\
 &= -T \int d^{p+1} \xi \, e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-\mathcal{H})^{\frac{1}{4}} \\
 &=_{(4.14)} -T \int d^{p+1} \xi \, e^{-\phi} \sqrt{-(h + \mathcal{F})} = S_{\text{Dirac}} .
 \end{aligned}$$

La demostración anterior prueba la equivalencia entre la acción de Dirac-Born-Infeld y la acción de Abou-Hull para toda p .

A continuación se enumerarán las simetrías de la acción (4.10):

1. Invarianza de Poincaré de D -dimensiones

$$x'^{\mu}(\xi) = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}(\xi) + a^{\mu} , \quad (4.17a)$$

$$A'_i(\xi) = A_i(\xi) , \quad (4.17b)$$

$$g'_{ij}(\xi) = g_{ij}(\xi) . \quad (4.17c)$$

2. Invarianza bajo difeomorfismos en el volumen de mundo

$$x'^{\mu}(\xi') = x^{\mu}(\xi), \quad (4.18a)$$

$$\frac{\partial \xi'^j}{\partial \xi^i} A'_j(\xi') = A_i(\xi), \quad (4.18b)$$

$$\frac{\partial \xi'^r}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi'^s}{\partial \xi^j} g'_{rs}(\xi') = g_{ij}(\xi), \quad (4.18c)$$

para una transformación difeomorfa $\xi' = \xi'(\xi)$.

3. Invarianza de Weyl para $p = 3$

$$x'^{\mu}(\xi) = x^{\mu}(\xi), \quad (4.19a)$$

$$A'_i(\xi) = A_i(\xi), \quad (4.19b)$$

$$g'_{ij}(\xi) = e^{4\omega(\xi)} g_{ij}(\xi). \quad (4.19c)$$

4. Invarianza de norma

$$x'^{\mu}(\xi) = x^{\mu}(\xi), \quad (4.20a)$$

$$g'_{ij}(\xi) = g_{ij}(\xi), \quad (4.20b)$$

$$B'_{ij}(\xi) = B_{ij}(\xi) + \partial_i \chi_j(\xi) - \partial_j \chi_i(\xi), \quad (4.20c)$$

$$A'_i(\xi) = A_i(\xi) - \chi_i(\xi) + \partial_i \lambda(\xi). \quad (4.20d)$$

Dem.

Para esta acción, solamente se demostraran las invarianzas 2 y 3, debido a que en las restantes no se utilizará ningún procedimiento que no se haya visto para demostrar invarianzas anteriores. Previo a la demostración de 2, se observará la transformación de los campos en el volumen de mundo:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}'_{ij}(\xi') &= h'_{ij}(\xi') - \mathcal{F}'_{ir}(\xi') h'^{rs}(\xi') \mathcal{F}'_{sj}(\xi') \\ &= \frac{\partial \xi^r}{\partial \xi'^i} \frac{\partial \xi^s}{\partial \xi'^j} (h_{rs}(\xi) - \mathcal{F}_{rk}(\xi) h^{kl}(\xi) \mathcal{F}_{ls}(\xi)) = \frac{\partial \xi^r}{\partial \xi'^i} \frac{\partial \xi^s}{\partial \xi'^j} \mathcal{H}_{rs}(\xi),\end{aligned}$$

por otra parte, dado que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi'^r}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi'^s}{\partial \xi^j} g'_{rs}(\xi) &= g_{ij}(\xi), \\ \Rightarrow g'^{ij}(\xi') &= \frac{\partial \xi'^i}{\partial \xi^r} \frac{\partial \xi'^j}{\partial \xi^s} g^{rs}(\xi),\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$g'^{rs}(\xi') \mathcal{H}'_{rs}(\xi') = g^{rs}(\xi) \mathcal{H}_{rs}(\xi),$$

con los anteriores resultados, se procede a demostrar la invarianza bajo difeomorfismos

$$\begin{aligned}S' &= -\frac{T}{4} \int d^{p+1} \xi' e^{-\phi(-h')^{\frac{1}{4}}} (-g')^{\frac{1}{4}} (g'^{rs} \mathcal{H}'_{rs} - (p-3)) \\ &\stackrel{(4.18)}{=} -\frac{T}{4} \int d^{p+1} \xi \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} e^{-\phi(-h)^{\frac{1}{4}}} \frac{\partial \xi}{\partial \xi'} (-g)^{\frac{1}{4}} (g^{rs} \mathcal{H}_{rs} - (p-3)) \\ &= -\frac{T}{4} \int d^{p+1} \xi e^{-\phi(-h)^{\frac{1}{4}}} (-g)^{\frac{1}{4}} (g^{rs} \mathcal{H}_{rs} - (p-3)) = S.\end{aligned}$$

3. Por otra parte, para la invarianza de Weyl se tiene

$$\begin{aligned}S' \Big|_{p=3} &\stackrel{(4.19)}{=} -\frac{T}{4} \int d^{p+1} \xi e^{-\phi(-h)^{\frac{1}{4}}} (-e^{16\omega} g)^{\frac{1}{4}} e^{-4\omega} g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \\ &= -\frac{T}{4} \int d^{p+1} \xi e^{-\phi(-h)^{\frac{1}{4}}} (-g)^{\frac{1}{4}} g^{rs} \mathcal{H}_{rs} = S.\end{aligned}$$

La invarianza de Weyl se observa en la ecuación (4.16), en donde se relaciona g con \mathcal{H} , sólo hasta un reescalamiento local.

□

El tensor de energía-momento para esta acción es

$$\begin{aligned}
 T_{ij} &= -\frac{4}{(-g)^{\frac{1}{4}}} \frac{\delta S}{\delta g^{ij}} \\
 &= \frac{T}{(-g)^{\frac{1}{4}}} e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\partial(-g)^{\frac{1}{4}}}{\partial g^{ij}} (g^{rs} \mathcal{H}_{rs} - (p-3)) + (-g)^{\frac{1}{4}} \frac{\partial g^{rs}}{\partial g^{ij}} \mathcal{H}_{rs} \right) \\
 &= T e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} \left(\mathcal{H}_{ij} - \frac{1}{4} g_{ij} (g^{rs} \mathcal{H}_{rs} - (p-3)) \right). \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

Este tensor es de traza nula, para $p = 3$, debido a la invarianza de Weyl. La demostración es análoga a la del tensor de la acción Conforme I, § 3.5.

Las ecuaciones de movimiento para los campos x^μ , y A_i , son, respectivamente:

$$\begin{aligned}
 0 &= \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i x^\mu)} \right) \\
 &= \partial_i \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_i x^\mu)} \left(-\frac{T}{4} e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} (g^{rs} \mathcal{H}_{rs} - (p-3)) \right) \right) \\
 &= \partial_i \left(-\frac{T}{4} e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} h^{ik} \partial_k x_\mu (g^{rs} \mathcal{H}_{rs} - (p-3)) + 2 g^{ir} \partial_r x_\mu + 2 \partial_n x_\mu h^{nl} \mathcal{F}_{lr} g^{rs} \mathcal{F}_{sk} h^{ki} \right) \right), \tag{4.22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \partial_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i A_j)} \right) \\
 &= \partial_i \left(\frac{\partial}{\partial (\partial_i A_j)} \left(-\frac{T}{4} e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} (g^{rs} \mathcal{H}_{rs} - (p-3)) \right) \right) \\
 &= \partial_i \left(-\frac{T}{2} e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} (g^{ir} \mathcal{F}_{rk} h^{kj} - g^{jr} \mathcal{F}_{rk} h^{ki}) \right). \tag{4.23}
 \end{aligned}$$

Soluciones generales para estas ecuaciones de campo no existen, algunos casos particulares han sido analizados en [17].

4.4 Acción Conforme I

Como sucedió para las p -branas, existe una acción para Dp -branas que es invariante de Weyl para toda p ,

$$S[x^\mu, A_i, g_{ij}] = -T \int d^{p+1}\xi e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{p+1} \dot{g}^{ij} \mathcal{H}_{ij} \right)^{\frac{p+1}{4}}, \quad (4.24)$$

para $p = 3$, esta acción se reduce a la acción (4.10). Como es usual, se calcula la ecuación de movimiento de la métrica intrínseca para demostrar la equivalencia con la acción (4.1).

$$\begin{aligned} 4(-T e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}})^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{ij}} &= 4(-g)^{-\frac{1}{4}} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \left(\left((-g)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{p+1} g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \right)^{\frac{p+1}{4}} \right) \\ &= g^{ij} \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \right)^{\frac{p+1}{4}} - \mathcal{H}^{ij} \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \right)^{\frac{p-3}{4}} = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$g_{ij} \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \right) = \mathcal{H}_{ij}, \quad (4.25)$$

donde esta última expresión tiene por solución:

$$g_{ij}(\xi) = \beta(\xi) \mathcal{H}_{ij}(\xi) \quad \forall p, \quad (4.26)$$

con $\beta(\xi)$ una función arbitraria.

Si se sustituye la expresión anterior en (4.24) se obtiene

$$\begin{aligned} S &\stackrel{(4.26)}{=} -T \int d^{p+1}\xi e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-\beta^{p+1} \mathcal{H})^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\beta^{-1}}{p+1} \mathcal{H}^{rs} \mathcal{H}_{rs} \right)^{\frac{p+1}{4}} \\ &= -T \int d^{p+1}\xi e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-\mathcal{H})^{\frac{1}{4}} \\ &\stackrel{(4.14)}{=} -T \int d^{p+1}\xi e^{-\phi} \sqrt{-(h + \mathcal{F})} = S_{\text{Dirac}}. \end{aligned}$$

Esta acción tiene las simetrías 1, 2, y 4 de la acción de Abou-Hull (4.10), además tiene la invarianza de Weyl en el volumen de mundo para toda p :

$$x'^{\mu}(\xi) = x^{\mu}(\xi), \quad (4.27a)$$

$$A'_i(\xi) = A_i(\xi), \quad (4.27b)$$

$$g'_{ij}(\xi) = e^{2\omega(\xi)} g_{ij}(\xi), \quad (4.27c)$$

con $\omega(\xi)$ es arbitraria.

Las demostraciones de estas invarianzas, no se realizarán, por ser obvio el parecido con las demostraciones de (4.10). Debido a la invarianza de Weyl, el tensor de energía-momento

$$\begin{aligned} T_{ij} &= -\frac{4}{(-g)^{\frac{1}{4}}} \frac{\delta S}{\delta g^{ij}} \\ &= -\frac{4}{(-g)^{\frac{1}{4}}} \frac{\partial}{\partial g^{ij}} \left(-T e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \right)^{\frac{p+1}{4}} \right) \\ &= T e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \right)^{\frac{p-3}{4}} \left(\mathcal{H}_{ij} - g_{ij} \frac{1}{p+1} g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

es de traza nula $T^i_i = 0$, $\forall p$. Pero se tiene el problema de la no-linealidad y por consiguiente, dificultades en el formalismo. De aquí que se proponga otra acción como a continuación se muestra.

4.5 Acción Conforme II

Para resolver el problema de la no-linealidad en la acción (4.24) se introduce, similarmente como en el caso de las p -branas, un campo auxiliar φ , el cual elimina la potencia $\frac{p+1}{4}$ en la acción referida. La acción que tiene esta característica es

$$S[x^{\mu}, g_{ij}, A_i, \varphi] = -\frac{T}{4} \int d^{p+1} \xi e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} \left(g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \varphi^{\frac{p-3}{4}} - (p-3)\varphi \right). \quad (4.29)$$

Esta acción también tiene las simetrías 1, 2, y 4 de la acción (4.10); además tiene la invarianza de Weyl siguiente

$$x'^{\mu}(\xi) = x^{\mu}(\xi), \quad (4.30a)$$

$$A'_i(\xi) = A_i(\xi), \quad (4.30b)$$

$$\varphi'(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\omega(\xi)(p+1)} \varphi(\xi), \quad (4.30c)$$

$$g'_{ij}(\xi) = e^{2\omega(\xi)} g_{ij}(\xi). \quad (4.30d)$$

Dem.

La demostración de la invarianza de Weyl es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 S' &=_{(4.30)} -\frac{T}{4} \int d^{p+1} \xi \, e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-e^{2\omega(p+1)} g)^{\frac{1}{4}} \left(e^{-2\omega} g^{rs} \mathcal{H}_{rs} (e^{-\frac{1}{2}\omega(p+1)})^{\frac{p-3}{p+1}} \varphi^{\frac{p-3}{p+1}} - (p-3) e^{-\frac{1}{2}\omega(p+1)} \varphi \right) \\
 &= -\frac{T}{4} \int d^{p+1} \xi \, e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} \left(g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \varphi^{\frac{p-3}{p+1}} - (p-3) \varphi \right) = S.
 \end{aligned}$$

□

Para establecer la equivalencia entre esta acción y (4.1), se demostrará, más bien, la equivalencia con (4.24), con lo cual se puede concluir la equivalencia con la acción de Dirac-Born-Infeld.

Calculando la ecuación de movimiento del campo auxiliar φ

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{T}{4} e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} \left(g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \varphi^{\frac{p-3}{p+1}} - (p-3) \varphi \right) \right) \\
 &= -\frac{T}{4} e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} (p-3) \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \varphi^{-\frac{4}{p+1}} - 1 \right) = 0, \quad (4.31)
 \end{aligned}$$

se obtiene, para $p \neq 3$,

$$\varphi = \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \right)^{\frac{p+1}{4}}. \quad (4.32)$$

Si se sustituye el anterior resultado en (4.29)

$$\begin{aligned}
 S &=_{(4.32)} -\frac{T}{4} \int d^{p+1} \xi \, e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} \left(g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \right)^{\frac{p+1}{4} \frac{p-3}{p+1}} - (p-3) \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \right)^{\frac{p+1}{4}} \right) \\
 &= -T \int d^{p+1} \xi \, e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \right)^{\frac{p+1}{4}} = S_{\text{Conforme I}}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene la equivalencia para $p \neq 3$; la equivalencia para $p = 3$ es inmediata. Una característica de la acción (4.29), es la dependencia cuadrática en el campo \mathcal{F} para toda p ; mientras que en (4.24) esta dependencia existe solo para $p = 3$. Para esta acción se puede definir un tensor, equivalente a (4.28), y que también tiene traza nula

$$\begin{aligned}
T_{ij} &:= -\frac{4}{(-g)^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{\delta S}{\delta g^{ij}} + \frac{\varphi}{4} \frac{\delta S}{\delta \varphi} g_{ij} \right) \\
&= \frac{T}{(-g)^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{\partial}{\partial g^{ij}} + g_{ij} \frac{\varphi}{4} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left(e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} \left(g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \varphi^{\frac{p-3}{p+1}} - (p-3)\varphi \right) \right) \\
&= T e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} \varphi^{\frac{p-3}{p+1}} \left(\mathcal{H}_{ij} - \frac{1}{p+1} g_{ij} g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \right), \tag{4.33}
\end{aligned}$$

la equivalencia entre el anterior tensor y (4.28) es directa, considerando (4.32). La demostración de la anulaci3n de la traza es similar a la demostraci3n en § 3.6.

Con la acci3n (4.29), se puede hacer un acoplamiento conforme entre el campo escalar y los campos de norma sobre la brana. La transformaci3n del escalar (4.30c) sugiere que esta puede ser promovida a un campo dinámico. Esta misma transformaci3n es equivalente a una transformaci3n de norma $U(1)$ con parámetro imaginario, y un acoplamiento natural mínimo, entre el campo escalar φ y los campos de norma A_i , tiene lugar si se introduce la derivada covariante de Weyl (cf.[12], [16], [38]). Se podrí3a empezar con la definici3n usual de derivada direccional sobre $\psi(x)$:

$$n^r \partial_r \psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi(x + \epsilon n) - \psi(x)]. \tag{4.34}$$

Sin embargo, en una teorí3a con invarianza local, está definici3n no tiene sentido, debido a que $\psi(x + \epsilon n)$, $\psi(x)$ se transforman de manera diferente bajo la simetría (4.30c). Por lo tanto, se debe introducir un factor que compense la diferencia en la transformaci3n de dos puntos diferentes. De esta forma se introduce un cantidad escalar $U(y, x)$ la cual tiene una ley de transformaci3n dada por

$$U(y, x) \rightarrow e^{-\frac{1}{2}\omega(y)(p+1)} U(y, x) e^{\frac{1}{2}\omega(x)(p+1)}, \tag{4.35}$$

además $U(y, y) := 1$. Con la definici3n de esta cantidad escalar se puede calcular la siguiente derivada, a pesar de la simetría local, llamada derivada covariante:

$$n^r D_r \psi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [\psi(x + \epsilon n) - U(x + \epsilon n, x) \psi(x)]. \tag{4.36}$$

Si $U(y, x)$ es una funci3n continua, ésta se puede expandir sobre una separaci3n cercana,

$$U(x + \epsilon n, x) = 1 - \epsilon n^r A_r(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{4.37}$$

Por lo tanto, la derivada covariante se expresa como

$$D_i = \partial_i + A_i \quad (4.38)$$

Además, usando (4.37) en (4.35) se obtiene la transformación de A_i bajo esta transformación de norma local,

$$A_i \rightarrow A_i + \frac{p+1}{2} \partial_i \omega. \quad (4.39)$$

Asimismo, la transformación de D_i es

$$\begin{aligned} D_i \varphi &\rightarrow (\partial_i + A_i + \frac{p+1}{2} \partial_i \omega) e^{-\frac{1}{2}\omega(p+1)} \varphi \\ &= e^{-\frac{1}{2}\omega(p+1)} \left(-\frac{p+1}{2} \partial_i \omega \varphi + \partial_i \varphi + A_i \varphi + \frac{p+1}{2} \partial_i \omega \varphi \right) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\omega(p+1)} (\partial_i + A_i) \varphi = e^{-\frac{1}{2}\omega(p+1)} D_i \varphi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la transformación de $D_i \psi(x)$ es la misma que la transformación de $\psi(x)$. Con el desarrollo anterior, se tiene que la acción invariante de Weyl con el campo escalar φ , promovido a una variable dinámica es

$$S[x^\mu, g_{ij}, A_i, \varphi] = -\frac{T}{4} \int d^{p+1} \xi e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} \left(g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \varphi^{\frac{p-3}{p+1}} - (p-3) \varphi \right), \quad (4.40)$$

con

$$h_{ij} = \eta_{\mu\nu} \partial_i x^\mu \partial_j x^\nu + \varphi^{-2} D_i \varphi D_j \varphi. \quad (4.41)$$

Se observa que los campos de norma y el campo escalar modifican la métrica induciendo una curvatura sobre la D -brana. Si se calcula la ecuación de movimiento de la métrica intrínseca g se obtiene,

$$\begin{aligned} 4 \left(T e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{ij}} &= -(-g)^{-\frac{1}{4}} \frac{\partial}{\partial g_{ij}} \left((-g)^{\frac{1}{4}} \left(g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \varphi^{\frac{p-3}{p+1}} - (p-3) \varphi \right) \right) \\ &= \mathcal{H}^{ij} \varphi^{\frac{p-3}{p+1}} - \frac{1}{4} g^{ij} \left(g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \varphi^{\frac{p-3}{p+1}} - (p-3) \varphi \right) = 0, \end{aligned}$$

es decir,

$$\mathcal{H}_{ij} \varphi^{\frac{p-3}{p+1}} - \frac{1}{4} g_{ij} \left(g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \varphi^{\frac{p-3}{p+1}} - (p-3)\varphi \right) = 0, \quad (4.42)$$

tomando la traza,

$$0 = g^{kl} \mathcal{H}_{kl} \varphi^{\frac{p-3}{p+1}} - \frac{1}{4} g^{kl} g_{kl} \left(g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \varphi^{\frac{p-3}{p+1}} - (p-3)\varphi \right),$$

es decir,

$$\varphi = \left(\frac{1}{p+1} g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \right)^{\frac{p+1}{4}}, \quad (4.43)$$

por lo que (4.42) se transforma en

$$g_{ij} = \mathcal{H}_{ij} \varphi^{-\frac{4}{p+1}}. \quad (4.44)$$

Por lo tanto, si se sustituye en la acción (4.40)

$$\begin{aligned} S &=_{(4.44)} -\frac{T}{4} \int d^{p+1} \xi \, e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-\varphi^{-4} \mathcal{H})^{\frac{1}{4}} \left(\varphi^{\frac{4}{p+1}} \mathcal{H}^{rs} \mathcal{H}_{rs} \varphi^{\frac{p-3}{p+1}} - (p-3)\varphi \right) \\ &= -T \int d^{p+1} \xi \, e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-\mathcal{H})^{\frac{1}{4}} = -T \int d^{p+1} \xi \, e^{-\phi} \sqrt{-(h + \mathcal{F})} = S_{\text{Dirac}}, \end{aligned}$$

se obtiene una acción de Dirac-Born-Infeld, pero con la métrica inducida dada por (4.41).

Capítulo 5

Soluciones para la acción Conforme II de Dp-branas

5.1 Introducción

En este capítulo se retoma la acción Conforme II para D -branas y se encuentran soluciones para este sistema, es decir, se reduce esta acción a una acción de p -brana bósónica. Para $p = 0$, se encuentra que el logaritmo del campo escalar φ , el cual se acopló de manera conforme a los campos de norma, juega ahora el papel de una dimensión extra en el espacio $D+1$ pero de una p -brana.

Para $p = 1$ se generaliza, utilizando la simetría de norma, la solución encontrada anteriormente, es decir, se obtiene una dimensión extra, pero ahora no solo con el campo escalar, sino con una adición de un campo escalar arbitrario. Mediante este mismo procedimiento, se generaliza a su vez este resultado para toda p .

5.2 Acción Conforme II

Retomando la acción conforme II (4.40):

$$S = -\frac{T}{4} \int d^{p+1}\xi \ e^{-\phi} (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} \left(g^{rs} \mathcal{H}_{rs} \varphi^{\frac{p-3}{p+1}} - (p-3)\varphi \right), \quad (5.1)$$

donde

$$\mathcal{H}_{ij} = h_{ij} - \mathcal{F}_{ik} h^{kl} \mathcal{F}_{lj}, \quad (5.2)$$

$$\mathcal{F}_{ij} = F_{ij} - B_{ij}, \quad (5.3)$$

y φ el campo auxiliar, además de ϕ , h , B , como los pullbacks al volumen de mundo de los campos dilatón de fondo, la métrica y la 2-forma antisimétrica de Neveu-Schwarz, respectivamente. En

este capítulo se hará el campo dilatón de fondo igual a cero, $\phi = 0$.

A continuación se estudiarán casos especiales de la acción (5.1):

a) Se hace $p = 0$ en la acción:

$$S = -\frac{T}{4} \int d\xi (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} (g^{-1} h \varphi^{-3} + 3\varphi), \quad (5.4)$$

donde $g_{00} := g$ y $h_{00} := h$. Si se calcula la ecuación de movimiento para la métrica auxiliar:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g} = -\frac{T}{4} (-h)^{\frac{1}{4}} \left((-g)^{-\frac{3}{4}} (-1) (g^{-1} h \varphi^{-3} + 3\varphi) - (-g)^{\frac{1}{4}} g^{-2} h \varphi^{-3} \right) = 0,$$

se tiene entonces como solución

$$g = h \varphi^{-4}, \quad (5.5)$$

si se sustituye el resultado anterior en (5.4), se tendrá la siguiente acción:

$$\begin{aligned} S &= -T \int d\xi (-h)^{\frac{1}{4}} (-h \varphi^{-4})^{\frac{1}{4}} \varphi \\ &= -T \int d\xi (-h)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Esta acción se puede describir como

$$\begin{aligned} S &= -T \int d\xi \sqrt{-h} \\ &= -T \int d\xi \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \partial_0 x^\mu \partial_0 x^\nu - \varphi^{-2} \partial_0 \varphi \partial_0 \varphi} \\ &= -T \int d\xi \sqrt{-\eta_{ab} \dot{x}^a \dot{x}^b}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} \eta_{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

y

$$x^a = (x^\mu, \log \varphi), \quad (5.9)$$

por lo tanto, se concluye que η_{ab} es la métrica de Minkowski en $D + 1$ dimensiones, y además se puede interpretar, notando el signo negativo del segundo término en la raíz, a $\log \varphi$ como una coordenada adicional del espacio-tiempo. Así se ve claramente que el campo escalar puede interpretarse como una coordenada espacial adicional.

b) Si en la acción (5.1) se imponen las siguientes restricciones:

$$p = 1, \quad (5.10a)$$

$$A_i = \partial_i \chi, \quad (5.10b)$$

$$B_{ij} = 0, \quad (5.10c)$$

con $i, j = 0, 1$, ésta se lee, después de observar que $\mathcal{F}_{ij} = 0$ y $\mathcal{H}_{ij} = h_{ij}$, como

$$S = -\frac{T}{4} \int d^2 \xi (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} (g^{rs} h_{rs} \varphi^{-1} + 2\varphi). \quad (5.11)$$

La ecuación de la métrica intrínseca se conoce de antemano (4.44), sólo hace falta incluir las restricciones (5.10),

$$g_{ij} = \varphi^{-2} h_{ij}, \quad (5.12)$$

si se sustituye esta expresión de la métrica g , en la acción original (5.11)

$$\begin{aligned} S &=_{(5.12)} -\frac{T}{4} \int d^2 \xi (-h)^{\frac{1}{4}} (-\varphi^{-4} h)^{\frac{1}{4}} (2\varphi^2 \varphi^{-1} + 2\varphi) \\ &= -T \int d^2 \xi (-h)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde h_{ij} se puede reexpresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 h_{ij} &= \eta_{\mu\nu} \partial_i x^\mu \partial_j x^\nu + \varphi^{-2} (\partial_i + \partial_i \chi) \varphi (\partial_j + \partial_j \chi) \varphi \\
 &= \eta_{\mu\nu} \partial_i x^\mu \partial_j x^\nu + (\varphi^{-1} \partial_i \varphi + \partial_i \chi) (\varphi^{-1} \partial_j \varphi + \partial_j \chi) \\
 &= \eta_{\mu\nu} \partial_i x^\mu \partial_j x^\nu + \partial_i (\log \varphi + \chi) \partial_j (\log \varphi + \chi) \\
 &= \eta_{ab} \partial_i x^a \partial_j x^b,
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

donde η_{ab} esta dada como (5.8), obviamente en $2 + 1$ dimensiones, y

$$x^a = (x^\mu, \log \varphi + \chi). \tag{5.15}$$

Las conclusiones son las mismas, con las alteraciones pertinentes, que el caso anterior. Pero aquí se observa que el valor de la norma afecta a la coordenada espacial adicional definida por el campo escalar.

- c) El caso anterior se puede generalizar para toda p . Para $p \neq 3$ se imponen las restricciones siguientes en la acción (5.1):

$$A_i = \partial_i \chi, \tag{5.16a}$$

$$B_{ij} = 0, \tag{5.16b}$$

con $i, j = 0, \dots, p + 1$. Por lo tanto, se tiene que $\mathcal{F}_{ij} = 0$ y $\mathcal{H}_{ij} = h_{ij}$.

Con las anteriores restricciones la acción es

$$S = -\frac{T}{4} \int d^{p+1} \xi \, (-h)^{\frac{1}{4}} (-g)^{\frac{1}{4}} (g^{rs} h_{rs} \varphi^{\frac{p-3}{p+1}} - (p-3)\varphi). \tag{5.17}$$

Para obtener una expresión para la métrica intrínseca, se sustituyen las restricciones (5.16) en la ecuación de movimiento de ésta, (4.44), lo cual resulta en:

$$g_{ij} = h_{ij} \varphi^{-\frac{4}{p+1}}. \quad (5.18)$$

Entonces, la acción (5.17) se reexpresará como

$$\begin{aligned} S &=_{(5.18)} -\frac{T}{4} \int d^{p+1} \xi (-h)^{\frac{1}{4}} (-h \varphi^{-4})^{\frac{1}{4}} ((p+1)\varphi - (p-3)\varphi) \\ &= -T \int d^{p+1} \xi (-h)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

donde

$$h_{ij} = \eta_{ab} \partial_i x^a \partial_j x^b,$$

y

$$x^a = (x^\mu, \log \varphi + \chi),$$

como antes. Para $p = 3$ se utiliza (4.42) con las restricciones (5.16), es decir,

$$h_{ij} - \frac{1}{4} g_{ij} g^{rs} h_{rs} = 0, \quad (5.20)$$

con solución

$$g_{ij}(\xi) = \beta(\xi) h_{ij}(\xi). \quad (5.21)$$

Si se sustituye esta solución en la acción (5.17), para $p = 3$,

$$\begin{aligned} S &=_{(5.21)} -\frac{T}{4} \int d^4 \xi (-h)^{\frac{1}{4}} (-\beta^4 h)^{\frac{1}{4}} \beta^{-1} h^{rs} h_{rs} \\ &= -T \int d^4 \xi (-h)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Con lo que se completa la demostración. Así se observa que el campo escalar que se acopló a la D -brana puede ser interpretado como una dimensión espacial extra del espacio-tiempo.

5.3 Límite de bajas energías

A continuación se demostrará que el campo escalar no solo se puede considerar como una dimensión extra en el espacio-tiempo en el cual esta encajada la D -brana, sino que además se puede considerar, haciendo algunas simplificaciones, como una coordenada transversal.

En § 4.5 se estableció la equivalencia clásica de la acción conforme II con la acción de Dirac-Born-Infeld pero esta última heredaba la métrica inducida de la primera, con lo cual en este cálculo se puede usar la acción de Dirac-Born-Infeld y el resultado se podrá extender, debido a la equivalencia mencionada, a la acción Conforme II. Considérese por lo tanto, la acción dada por (4.1):

$$S[x^\mu, \varphi, A_i] = -T \int d^{p+1} \xi \sqrt{-\det(h + \mathcal{F})}. \quad (5.23)$$

Esta teoría como se había demostrado es invariante bajo difeomorfismos del volumen de mundo, para tal sistema se puede escoger una condición de norma que elimine los grados de libertad innecesarios, además de que la acción resultante sea equivalente a la inicial, de entre muchas opciones para fijar la norma se puede escoger la norma estática, la cual simplifica bastante las ecuaciones de campo de la D -brana, cf.([1], [30]).

La norma estática consiste en identificar $p + 1$ coordenadas del espacio-tiempo con las correspondientes en el volumen de mundo. Es decir,

$$x^\mu = (\xi^i, x^a), \quad (5.24)$$

donde $i = 0, \dots, p$ y $a = p + 1, \dots, D$; y las coordenadas del segundo conjunto son transversales. Se tiene entonces que la métrica inducida sobre la D -brana es:

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \eta_{\mu\nu} \partial_i x^\mu \partial_j x^\nu + \varphi^{-2} D_i \varphi D_j \varphi \\ &\approx \eta_{ki} \partial_i \xi^k \partial_j \xi^l + \partial_i x^a \partial_j x^a + \varphi^{-2} D_i \varphi D_j \varphi \\ &= \eta_{ij} + \partial_i x^a \partial_j x^a + \varphi^{-2} D_i \varphi D_j \varphi. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Dentro de las simplificaciones se supondrá que el tensor antisimétrico de Neveu-Schwarz es cero. Por otro lado, si $\partial_i x^a$, $\partial_i \log \varphi$, y F_{ij} son pequeños y del mismo orden, la aproximación del determinante es:

$$\det(\eta + \beta) \approx \det(\eta) + \frac{\partial \det(\gamma)}{\partial(\partial_i x^a)} \Big|_{\gamma=\eta} \partial_i x^a + \frac{\partial \det(\gamma)}{\partial(\varphi^{-1} D_i \varphi)} \Big|_{\gamma=\eta} \varphi^{-1} D_i \varphi + \frac{\partial \det(\gamma)}{\partial F_{ij}} \Big|_{\gamma=\eta} F_{ij} \quad (5.26)$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \det(\gamma)}{\partial F_{rs} \partial F_{kl}} \Big|_{\gamma=\eta} F_{rs} F_{kl},$$

donde $\gamma = \eta + \beta$ y $[\beta]_{ij} = \partial_i x^a \partial_j x^a + \varphi^{-2} D_i \varphi D_j \varphi + F_{ij}$. Con lo anterior,

$$\det(\eta + \beta) \approx -1 - 2 \partial_i x^a \partial_i x^a - 2 \varphi^{-2} D_i \varphi D_i \varphi - \frac{1}{2} F_{rs} F^{rs} \dagger; \quad (5.27)$$

y la acción (5.23) se reduce a la siguiente,

$$S[x^\mu, \varphi, A_i] = -T \int d^{p+1} \xi \sqrt{1 + 2 \partial_i x^a \partial_i x^a + 2 \varphi^{-2} D_i \varphi D_i \varphi + \frac{1}{2} F_{rs} F^{rs}}. \quad (5.28)$$

En este momento se realiza otra aproximación, pero esta vez sobre la raíz cuadrada, la cual es esencialmente de la forma

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x, \quad (5.29)$$

de aquí que la acción resultante esté dada por

$$\begin{aligned} S &\approx \int d^{p+1} \xi \left(1 + 2 \partial_i x^a \partial_i x^a + 2 \varphi^{-2} D_i \varphi D_i \varphi + \frac{1}{2} F_{rs} F^{rs} \right) + \mathcal{O}(F^4) \\ &= -T V_p - 2T \int d^{p+1} \xi \left(\partial_i x^a \partial_i x^a + \varphi^{-2} D_i \varphi D_i \varphi + \frac{1}{4} F_{rs} F^{rs} \right) \\ &= -T V_p - 2T \int d^{p+1} \xi \left(\partial_i x^a \partial_i x^a + \partial_i \log \varphi \partial_i \log \varphi + 2A_i \partial_i \log \varphi + A_i A_i + \frac{1}{4} F_{rs} F^{rs} \right) \end{aligned} \quad (5.30)$$

con V_p el volumen de mundo de una p -brana. El resultado obtenido es el mismo, salvo constantes y notación, que el que aparece en [45]. Como se mencionó con anterioridad, tanto la acción como las ecuaciones de campo se simplifican bastante; observándose además un término de interacción entre los campos de norma y el campo escalar. Por otra parte, si se elige al campo de norma como una norma pura, la acción se simplifica aún más

[†]Se observa que en la expansión de $\det \gamma$ se tomó hasta segundo orden el desarrollo del tensor F_{rs} debido a que el primer término es cero y el segundo es del mismo orden que los otros términos.

$$S = -TV_p - 2T \int d^{p+1}\xi \partial_i x^b \partial_i x^b \quad (5.31)$$

donde $x^b = (x^a, \log \varphi + \chi)$. Obteniéndose de nueva cuenta una acción dependiente de la norma, aún cuando la dependencia sobre F_{rs} ya no exista.

Apéndice A

En la sección § 3.8.1 se planteó la formulación canónica de la acción de Nambu-Goto

$$S[x^\mu(\xi^i)] = -T \int d^{p+1}\xi \sqrt{-h}, \quad (5.32)$$

cuyos momentos asociados son

$$P_\mu = -T\sqrt{-h} h^{0j} \partial_j x_\mu, \quad (5.33)$$

y las constricciones derivadas de la formulación tienen la forma

$$\mathcal{H}_r = P_\mu \partial_r x^\mu \approx 0, \quad (5.34)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T} P^\mu P_\mu + T \tilde{h} \right) \approx 0. \quad (5.35)$$

La proposición de que el álgebra de las constricciones es cerrada

$$\{\mathcal{H}[f], \mathcal{H}[g]\} = \mathcal{H}_r[(f \partial_s g - g \partial_s f) \tilde{h} \tilde{h}^{rs}], \quad (5.36a)$$

$$\{\mathcal{H}[f], \mathcal{H}_r[g]\} = \mathcal{H}[f \partial_r g - g \partial_r f], \quad (5.36b)$$

$$\{\mathcal{H}_r[f], \mathcal{H}_s[g]\} = \mathcal{H}_s[f \partial_r g] + \mathcal{H}_r[-g \partial_s f], \quad (5.36c)$$

se demuestra en este apéndice.

Dem.

Para (5.36a), se necesita el siguiente paréntesis

$$\begin{aligned} \{P_\mu(\xi), \tilde{h}(\xi')\} &= - \int d^{p+1}z \frac{\delta P_\mu(\xi)}{\delta P_\nu(z)} \frac{\delta \tilde{h}(\xi')}{\delta x^\nu(z)} \\ &= -2 \tilde{h}(\xi') \tilde{h}^{rs}(\xi') \partial_r x_\mu(\xi') \partial_s \delta(\xi' - \xi), \end{aligned}$$

es necesario señalar dos puntos antes de continuar, el primero punto es la notación del tensor \tilde{h} , el cual es el tensor que se compone de las entradas espaciales del anterior tensor métrico h , y su representación matricial solo tiene p^2 entradas, a diferencia del otro, que tiene $(p+1)^2$ entradas; el segundo y último punto se refiere al abuso de notación para expresiones tales como $\partial_s x^\mu(\xi')$ y $\partial_r \delta(\xi' - \xi)$, en donde se sobreentiende que se ha omitido la tilde en los subíndices de las parciales; el objetivo de este abuso es obvio.

Después de las aclaraciones previas y con el resultado anterior, será posible calcular el siguiente paréntesis

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}[f], \mathcal{H}[g]\} &= \frac{1}{4} \iint d^p \xi d^p \xi' f(\xi) g(\xi') \left\{ \frac{1}{T} P^\mu P_\mu(\xi) + T \tilde{h}(\xi), \frac{1}{T} P^\mu P_\mu(\xi') + T \tilde{h}(\xi') \right\} \\ &= \frac{1}{2} \iint d^p \xi d^p \xi' f(\xi) g(\xi') \left(P^\mu(\xi) \{P_\mu(\xi), \tilde{h}(\xi')\} + P^\nu(\xi') \{\tilde{h}(\xi), P_\nu(\xi')\} \right). \end{aligned}$$

Para el primer término se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint d^p \xi d^p \xi' f(\xi) g(\xi') P^\mu(\xi) \{P_\mu(\xi), \tilde{h}(\xi')\} &= - \int d^p \xi d^p \xi' f(\xi) g(\xi') P^\mu(\xi) \tilde{h}(\xi') \tilde{h}^{rs}(\xi') \partial_r x_\mu(\xi') \partial_s \delta(\xi' - \xi) \\ &= - \int d_s^{p-1} \xi f(\xi) g(\xi) P^\mu \tilde{h} \tilde{h}^{rs} \partial_r x_\mu \\ &\quad + \int d^p \xi f(\xi) P^\mu \partial_s (g(\xi) \tilde{h} \tilde{h}^{rs} \partial_r x_\mu) \\ &= - \int d^p \xi \partial_s (f(\xi) P^\mu) g(\xi) \tilde{h} \tilde{h}^{rs} \partial_r x_\mu, \end{aligned}$$

el símbolo $d_s^{p-1} \xi$ representa, obviamente, una diferencial $(p-1)$ -ésima pero omitiendo la integración en el índice s . Por otro lado, como el segundo término es bastante "simétrico" con respecto al anterior se tiene

$$\frac{1}{2} \iint d^p \xi d^p \xi' f(\xi) g(\xi') P^\nu(\xi') \{\tilde{h}(\xi), P_\nu(\xi')\} = \int d^p \xi f(\xi) \tilde{h} \tilde{h}^{rs} \partial_r x_\mu \partial_s (g(\xi) P^\mu).$$

De aquí que

$$\{\mathcal{H}[f], \mathcal{H}[g]\} = \int d^p \xi (f(\xi) \partial_s g(\xi) - g(\xi) \partial_s f(\xi)) P^\mu \partial_r x_\mu \tilde{h} \tilde{h}^{rs} = \mathcal{H}_r [(f \partial_s g - g \partial_s f) \tilde{h} \tilde{h}^{rs}].$$

Para (5.36b):

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}[f], \mathcal{H}_r[g]\} &= \frac{1}{2} \iint d^p \xi d^p \xi' f(\xi) g(\xi') \left\{ \frac{1}{T} P^\mu P_\mu(\xi) + T \bar{h}(\xi), P_\nu \partial_r x^\nu(\xi') \right\} \\ &= \iint d^p \xi d^p \xi' f(\xi) g(\xi') \left(\frac{1}{T} P^\mu(\xi) P_\nu(\xi') \{P_\mu(\xi), \partial_r x^\nu(\xi')\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{T}{2} \{\bar{h}(\xi), P_\nu(\xi')\} \partial_r x^\nu(\xi') \right). \end{aligned}$$

El primer término es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \iint d^p \xi d^p \xi' f(\xi) g(\xi') \frac{1}{T} P^\mu(\xi) P_\nu(\xi') \{P_\mu(\xi), \partial_r x^\nu(\xi')\} &= -\frac{1}{T} \iint d^p \xi d^p \xi' f(\xi) g(\xi') P^\mu(\xi) P_\mu(\xi') \partial_r \delta(\xi' - \xi) \\ &= -\frac{1}{T} \int d_r^{p-1} \xi f(\xi) g(\xi') P^\mu P_\mu \\ &\quad + \frac{1}{T} \int d^p \xi f(\xi) P_\mu \partial_r (g(\xi) P^\mu) \\ &= -\frac{1}{T} \int d^p \xi \partial_r (f(\xi) P^\mu) g(\xi) P_\mu. \end{aligned}$$

En cuanto al segundo término

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} \iint d^p \xi d^p \xi' f(\xi) g(\xi') \{\bar{h}(\xi), P_\nu(\xi')\} \partial_r x^\nu(\xi') &= T \iint d^p \xi d^p \xi' f(\xi) g(\xi') \bar{h}(\xi) \bar{h}^{st}(\xi) \partial_s x_\nu(\xi) \partial_r x^\nu(\xi') \partial_t \delta(\xi - \xi') \\ &= T \int d_t^{p-1} \xi f(\xi) g(\xi) \bar{h} \bar{h}^{st} \partial_s x_\nu \partial_r x^\nu \\ &\quad - T \int d^p \xi \partial_t (f(\xi) \bar{h} \bar{h}^{st} \partial_s x_\nu) g(\xi) \partial_r x^\nu \\ &= T \int d^p \xi f(\xi) \bar{h} \bar{h}^{st} \partial_s x_\nu \partial_t (g(\xi) \partial_r x^\nu). \end{aligned}$$

Si se calcula de nueva cuenta el paréntesis de Poisson (5.36b), pero utilizando en esta ocasión la siguiente relación:

$$\partial_r \delta(\xi - \xi') = -\partial_r \delta(\xi' - \xi),$$

eventualmente se tendrá, *mutatis mutandis*

$$\{\mathcal{H}[f], \mathcal{H}_r[g]\} = \frac{1}{T} \int d^p \xi f(\xi) P^\mu \partial_r (g(\xi) P_\mu) - T \int d^p \xi g(\xi) \partial_r x^\nu \partial_t (f(\xi) \tilde{h} \tilde{h}^{st} \partial_s x_\nu).$$

Si se suman los dos paréntesis, tomando en cuenta la relación

$$\tilde{h} \tilde{h}^{st} \partial_s x_\nu \partial_t \partial_r x_\nu = \partial_t (\tilde{h} \tilde{h}^{st} \partial_s x_\nu) \partial_r x^\nu,$$

se tiene

$$\{\mathcal{H}[f], \mathcal{H}_r[g]\} = \int d^p \xi (f(\xi) \partial_r g(\xi) - g(\xi) \partial_r f(\xi)) \frac{1}{2} \left(\frac{1}{T} P^\mu P_\mu + T \tilde{h} \right) = \mathcal{H}[f \partial_r g - g \partial_r f].$$

Para (5.36c):

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}_r[f], \mathcal{H}_s[g]\} &= \iint d^p \xi d^p \xi' f(\xi) g(\xi') \{P_\mu(\xi) \partial_r x^\mu(\xi), P_\nu(\xi') \partial_s x^\nu(\xi')\} \\ &= \iint d^p \xi d^p \xi' f(\xi) g(\xi') \left(P_\mu(\xi) \{ \partial_r x^\mu(\xi), P_\nu(\xi') \} \partial_s x^\nu(\xi') \right. \\ &\quad \left. + \partial_r x^\mu(\xi) \{ P_\mu(\xi), \partial_s x^\nu(\xi') \} P_\nu(\xi') \right). \end{aligned}$$

El primer término de la anterior expresión se escribe como:

$$\begin{aligned} \iint d^p \xi d^p \xi' f(\xi) g(\xi') P_\mu(\xi) \{ \partial_r x^\mu(\xi), P_\nu(\xi') \} \partial_s x^\nu(\xi') &= \iint d^p \xi d^p \xi' f(\xi) g(\xi') P_\mu(\xi) \partial_s x^\mu(\xi') \partial_r \delta(\xi - \xi') \\ &= \int d^{p-1} \xi f(\xi) g(\xi) \partial_s x^\mu P_\mu \\ &\quad - \int d^p \xi g(\xi) \partial_s x^\mu \partial_r (f(\xi) P_\mu) \\ &= - \int d^p \xi \partial_r (g(\xi) \partial_s x^\mu) f(\xi) P_\mu. \end{aligned}$$

Asimismo para el segundo término, y por ser este simétrico con respecto al primero:

$$\int \int d^p \xi d^p \xi' f(\xi) g(\xi') \partial_r x^\mu(\xi) \{P_\mu(\xi), \partial_s x^\nu(\xi')\} P_\nu(\xi') = \int d^p \xi \partial_s (f(\xi) \partial_r x^\mu) g(\xi) P_\mu.$$

De los anteriores resultados se concluye que

$$\begin{aligned} \{\mathcal{H}_r[f], \mathcal{H}_s[g]\} &= \int d^p \xi g(\xi) \partial_s f(\xi) \partial_r x^\mu P_\mu - \int d^p \xi f(\xi) \partial_r g(\xi) \partial_s x^\mu P_\mu \\ &= \mathcal{H}_r[g \partial_s f] - \mathcal{H}_s[f \partial_r g]. \end{aligned}$$

□

Conclusiones

En el primer capítulo se desarrollo la dinámica de sistemas de norma, con su subsecuente aplicación a lo largo del presente trabajo, tanto para partículas como campos, y se comenzó resolviendo ejemplos clásicos como la partícula relativista, continuando con una revisión de sistemas en donde se realizan investigaciones hoy en día, y en donde la teoría se especializa aún más, por ejemplo, la cuerda relativista y los objetos extendidos que aparecen en teorías de supercuerdas. Es decir, este trabajo esquematiza el desarrollo y el aprendizaje por parte del autor en la teoría de sistemas de norma.

Las conclusiones de esta tesis son las siguientes, se encontró, mediante el método "parent" la acción, de p -branas, Conforme I, la cual, como ya se mencionó, se desarrolló en primera instancia sin utilizar método sistemático alguno. Por otro lado, pero en el mismo contexto de p -branas, se desarrollo la formulación canónica de la acción de Nambu-Goto para estos sistemas, encontrándose $p + 1$ constricciones de primera clase.

Para D -branas, se construyó un acoplamiento conforme, en la acción Conforme II, del campo escalar con los campos de norma, promoviendo de esta forma al campo escalar como una variable dinámica. Después para la acción resultante de este acoplamiento, y para toda p , se logra la reducción de ésta a una acción de p -brana bosónica, para ser precisos a una acción de Nambu-Goto, pero encajada, como resultado de este procedimiento, en un espacio de $D + 1$ dimensiones, y en donde la dimensión extra esta dada por la suma del logaritmo del campo escalar con un campo arbitrario, este último obtenido por la simetría de norma de la D -brana. Se debe aclarar que para $p = 0$ la simetría de norma desaparece, además de la arbitrariedad del campo escalar asociado a esta, como se esperaba. Por otro lado, se mostró que la dimensión extra que se encontró no es trivial, en el sentido que en la norma estática ésta no se reduce a una coordenada del volumen de mundo de la D -brana, sino que aparece como una coordenada transversal en la misma brana y por ende describiendo fluctuaciones en la D -brana.

Junto con la reducción de la acción Conforme II, se obtiene su formulación canónica de forma automática, al reducir esta a una acción de Nambu-Goto, para la cual ya se tenía dicha formulación.

Bibliografía

- [1] AGANAGIC, Mina; Popescu, Costin; Schwarz, John H. *Gauge-Invariant and gauge-fixed D-brane actions*. Nuclear Physics **B 495**, 1997.
- [2] ALVEAR, C.; Amorim, R.; Barcelos-Neto, J. *Hamiltonian formulation for conformal p-branes*. Physics Letters, **B273**, 415 (1991).
- [3] ALVES, M. S. ; Barcelos-Neto, J. *Strings from Weyl-invariant membranes*. Il Nuovo Cimento, **106**, 1045 (1991).
- [4] AMELINO-CAMELIA, Giovanni. *Special Treatment (Relativity)*. NATURE, vol. 418, Julio 2002.
- [5] AURILIA, A. ; Smailagic, A. ; Spallucci, E. *Conformal p-branes as a source of structure in spacetime*. Physics Review **D51**, 4410 (1995).
- [6] BACHAS, C. P. *Lectures on D-branes*. hep-th/9806199.
- [7] BERGSHOEFF, E. A. *Properties of p-Branes, D-Branes and M-Branes*. Nuclear Physics **B** (Proc. Suppl.) 61A (1998).
- [8] BLAU, Matthias. *Supergravity Solitons*. The ICTP Latin American string school. August, 2001.
- [9] BOYCE, William E.; DiPrima, Richard C. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. 4ta. Ed., Noriega Editores, México, 1998.
- [10] CLIFFORD, Johnson V. *D-Brane Primer*. hep-th/0007170.
- [11] DANIELSSON, Ulf. *Introduction to string theory*. Reports on Progress in Physics **64** (2001).
- [12] DESER, S. et.al. *Born-Infeld-Einstein actions?*. Classical and Quantum Gravity **15**, L35 (1998).
- [13] DI FRANCESCO, Philippe; Mathieu, Pierre; Sénéchal, David. *Conformal Field Theory*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [14] DURDEVICH, Micho. *Quantum Geometry and New Concept of Space*. Ed. Sociedad Matemática Mexicana. Aportaciones Matemáticas, Serie Comunicaciones 29 (2001), 113-131. México, D.F.

- [15] E.R.C., Abraham; P.S. Howe; P.K. Townsend *Spacetime versus world-surface conformal invariance for particles, strings, and membranes*. Classical and Quantum Gravity, **6**, 1541 (1989).
- [16] GARCIA, J. Antonio; Linares, Roman; Vergara, J. David. *Weyl invariant p-brane and Dp-brane actions*. Physics Letters **B503** (2001).
- [17] GIBBONS, G. W. *Born-Infeld particles and Dirichlet p-branes*. Nuclear Physics **B 514**, 1998.
- [18] GIBBONS, G. W. *Aspects of Born-Infeld Theory and String / M-Theory*. hep-th/0106059 (2001).
- [19] GOLDSTEIN, H. *Mecánica Clásica*. Ed. Reverté, España, 1988.
- [20] GREEN, M. B. ; Schwarz, J.H. ; Witten, E. *Superstring Theory*, Vol. I. Cambridge monographs on mathematical physics. Ed. Cambridge University Press, E.U.A., 1992.
- [21] GUILLEMIN, Victor; Pollack, Alan. *Differential Topology*. Ed. Prentice Hall. New Jersey, 1974.
- [22] HENNEAUX, Marc ; Teitelboim, Claudio. *Quantization of Gauge Systems*. Princenton University Press. New Jersey, 1992.
- [23] HOFFMAN, Keneth. et. al. *Álgebra lineal*. Ed. Prentice-Hall. México.
- [24] LEIGH, R. G. *Dirac-Born-Infeld action from Dirichlet σ -model*. Mod. Physics Letters, **A4**, 2762, (1989).
- [25] LESNIEWSKI, Andrew. *Noncommutative Geometry*. Notices of the AMS. Vol. 44, number 7. 1997.
- [26] LINARES, R. *Cuantización de sistemas covariantes: Una primera aproximación*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM ; 1995.
- [27] LINARES, R. *Métodos Hamiltonianos en campos y sistemas extendidos*. Tesis Doctoral, Posgrado en Ciencias Físicas, UNAM, 2001.
- [28] LINDSTRÖM, U. *First order actions for gravitational systems, strings and membranes*. International Journal of Modern Physics A, Vol. 3, No. 10 (1998); World Scientific Publishing Company.
- [29] LINDSTRÖM, U. ; Theodoridis, G. *Weyl-invariant super p-branes*. Physics Letters **B208**, 407 (1998).
- [30] LINDSTRÖM, U. ; Unge, Rikard von. *A picture of D-branes at strong coupling*. Physics Letters **B 403**, 1997.
- [31] LÜ, H. ; Pope, C.N. ; Sezgin, E. ; Stelle, K.S. *Stainless Super p-branes*. hep-th/9508042.
- [32] MADORE, J. *Noncommutative Geometry for Pedestrians*. gr-qc/9906059, 1999.

- [33] MIAO, Yan-Gang; Nobuyoshi, Ota. *Parent Actions, Dualities and New Weyl-Invariant Actions of Bosonic p -branes*. hep-th/0301233, 2003.
- [34] MOSEL, U. *Fields, Symmetries and Quarks*. 2da. Edición, Springer-Verlag, Berlín, 1999.
- [35] NABER, Gregory. *Topology, Geometry and Gauge Fields*. Ed. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [36] NIETO, J. A. ; Nunez, C. *Strings from Weyl-Invariant Membranes*. Il Nuovo Cimento, Vol. 106 B, No. 9 (1991).
- [37] NIETO, J. A. *Remarks on Weyl invariant p -branes and D_p -branes*. Modern Physics Letters A, Vol. 16, No. 40 (2001).
- [38] PESKIN, Michael E.; Schroeder, Daniel V. (*An introduction to*) *Quantum Field Theory*. Ed. Perseus Books Publishing, USA, 1995.
- [39] POLCHINSKI, Joseph. *TASI LECTURES ON D-BRANES*. Lectures at TASI 96, hep-th/9611050.
- [40] ROVELLI, Carlo. *A dialog on quantum gravity*. hep-th/0310077.
- [41] SEN, Ashoke. *An introduction to non-perturbative string theory*. hep-th/9802051.
- [42] SEN, Ashoke. *Recent Developments in Superstring Theory*. hep-th/0011073, 2000.
- [43] STELLE, K.S. *Lectures on Supergravity p -branes*. hep-th/9701088.
- [44] SUNDERMEYER, K. *Constrained Dynamics*. Springer-Verlag, 1982.
- [45] TAYLOR, W. *Lectures on D -branes, gauge theory and M (atrices)*. hep-th/9801182.
- [46] THORLACIUS, Lárus. *Introduction to D -branes*. hep-th/9708078, 1997.
- [47] ZEID, M. Abou.et. al. *Geometric actions for D -branes and M -branes*. Physics Letters **B428**, 277 (1998)