



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**AUTOSEMEJANZA Y LEYES DE
POTENCIAS**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

MARIA TERESA RUIZ DE LA TORRE



**FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM**

DIRECTOR DE TESIS: DR. PEDRO EDUARDO MIRAMONTES VIDAL

2004



**FACULTAD DE CIENCIAS
SECCIÓN ESCOLAR**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Autosemejanza y leyes de potencias"

realizado por María Teresa Ruíz de la Torre

con número de cuenta 09850852-7 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Dr. Pedro Eduardo Miramontes Vidal

Propietario M. en C. José Luis Gutiérrez Sánchez

Propietario Dr. Faustino Sánchez Garduño

Suplente Dr. Germinal Cocho Gil

Suplente Dr. Ricardo Mansilla Corona

Miramontes
J. L. Gutiérrez

F. S. Garduño

R. Mansilla

Consejo Departamental de Matemáticas



JAG
M. en C. José Antonio Gómez Ortega
FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMÁTICAS

*A mi familia
(de sangre y
de espíritu.)
Por todo lo que
representan ...*

Agradecimientos

Gracias a mi familia, a mis amigos y a mis profesores por apoyarme incondicionalmente. Gracias por aportar un granito de arena en mi formación personal y profesional, y por ayudarme en la realización de esta tesis. Gracias por su paciencia, su ingenio, su apoyo, su tiempo, su ayuda, su AMISTAD.

Contenido

Introducción	ix
1 Sistemas complejos	1
1.1 Sistemas complejos	1
1.2 Ruptura de simetría	5
1.3 Criticalidad auto-organizada	7
1.4 Leyes de potencias	11
1.5 Autosemejanza	21
2 Fractalidad	25
2.1 Fractales	25
2.1.1 Historia	26
2.1.2 Algunas investigaciones y descubrimientos clave	28
2.1.3 Dimensión fractal	35
2.2 Fractales temporales	46
3 Autocorrelación y espectro de potencias	49
3.1 Autocorrelación	49
3.2 Series de Fourier	52
3.2.1 Forma compleja de las series de Fourier	62
3.3 Transformada de Fourier	64
3.3.1 Propiedades de la transformada de Fourier	64
3.3.2 Transformada discreta	67
3.3.3 Espectro de potencias	71
4 Ruido $1/f$	73
4.1 Ruido de colores	73
4.1.1 El color del ruido y el parámetro α	74

4.2	Aspectos estadísticos de $1/f$. ¿Cómo se detecta?	78
4.2.1	<i>Método 1</i> Regresión lineal por medio de la transformada rápida de Fourier	79
4.2.2	<i>Método 2</i> Regresión lineal integrando sobre bandas logarítmicamente espaciadas	80
4.2.3	<i>Método 3</i> Exponente de Hurst	81
4.2.4	<i>Método 4</i> DFA	83
4.2.5	<i>Método 5</i> Estimador de máxima verosimilitud	85
4.3	Comparación de estimadores	86
4.3.1	Formación de señales de prueba	86
4.3.2	Resultados	88
5	Leyes de potencia en la naturaleza	91
5.1	Impulso cardíaco	91
5.2	Sistema respiratorio	95
5.3	DNA	97
5.4	Migración y extinciones	99
5.5	¿Qué tienen en común?	102
6	Conclusiones	103
A	Funciones ortogonales	105
B	Funciones pares e impares	109
B.1	-	109
B.2	-	110
C	Dimensión topológica	113

*Se han concedido muchos
premios nobel por mostrar
que el universo no es tan
simple como podíamos
haberlo pensado.*
Stephen Hawking

Introducción

El hombre a lo largo de la historia se ha interesado en conocer e intentar explicar los fenómenos que percibe a su alrededor. Para ello, ha hecho uso de las herramientas científicas y tecnológicas a su alcance que le permiten representar dichos fenómenos y procesos. En este estudio científico de la naturaleza, el papel de la matemática ha sido central. Con base en ella, se estableció un lenguaje (matemático) que permitió establecer muchos de los conceptos, leyes y teorías que constituyen, por ejemplo, la física y química de nuestros días.

Durante siglos, la *representación matemática del mundo* sirvió al desarrollo de una concepción *mecanicista y lineal* de la naturaleza basada en el principio de superposición, según el cual sería posible explicar el comportamiento del todo como la suma del comportamiento de sus partes. Esta visión dejaba fuera del alcance de la ciencia a todos los procesos, en cierto sentido, más interesantes. Sin embargo, uno de los hechos más significativos en la historia reciente de la ciencia es el descubrimiento de que aun mecanismos sencillos, descritos mediante ecuaciones deterministas simples, implican conductas extremadamente complicadas. En estos casos suele suceder que los efectos *no* son proporcionales a las causas, de manera que las interacciones entre los elementos del sistema son *no lineales*. El estudio de procesos con esta propiedad, que presentan *autosemejanza, fractalidad y propiedades emergentes*, ha dado origen a la teoría de los *sistemas complejos*.

La no linealidad de los procesos se puede representar en los modelos matemáticos de distintas maneras. Una de ellas es la presencia de *leyes de potencias*. En este trabajo se pretende dar a conocer ejemplos de procesos en la naturaleza cuya representación matemática exhibe un comportamiento con ley de potencias. Para ello, primeramente se realiza una descripción de los sistemas complejos en el capítulo 1, en la que destacan algunas características como que:

- Son sistemas no lineales que generalmente presentan interacción de fuerzas antagónicas o en conflicto.
- Obedecen a dinámicas locales con restricciones globales que restringen lo que es viable en el universo de lo imaginable.
- Implican ruptura de simetría (bifurcaciones).
- Presentan patrones emergentes (frecuentemente *fractales*).

La característica común de la emergencia de patrones autosemejantes es la presencia de *leyes de escalamiento* o *leyes de potencias*, que analizaremos en el capítulo 1. La razón por la que estas leyes son características en los objetos llamados fractales descritos en el capítulo 2, es que son las únicas funciones que muestran invariancia bajo cambio de escalas, es decir, que un cambio de escala no afecta el comportamiento básico.

Además de los fractales, que son autosemejantes espacialmente a todas las escalas, hay fenómenos en la naturaleza que son invariantes bajo cambio de escala temporal. Por ello, es necesario utilizar una herramienta conocida como *análisis de Fourier*, descrita en el capítulo 3, con la cual se facilita el estudio de fractales temporales. Dada una serie de tiempo, ésta se puede interpretar como la suma de varias componentes (o funciones) periódicas representadas por medio de senos y cosenos, cada uno con distinta frecuencia y amplitud. Una vez definida esta *transformada de Fourier*, para facilitar su comprensión y su interpretación se recurre a la gráfica del *espectro de potencias*, la cual consiste en graficar frecuencia contra amplitud de cada una de las componentes periódicas obtenidas. La presencia de autosemejanza y leyes de potencias en esta gráfica es de gran interés e importancia para el estudio de los sistemas complejos y de la auto-organización hacia el estado crítico. Como se verá en el capítulo 4, la autosemejanza implica, en este caso, correlaciones en el tiempo que siguen una ley de potencia conocida como *ruido 1/f*.

Las leyes de potencias en las fluctuaciones espaciales y temporales de un sistema complejo implican que el fenómeno se manifiesta y es válido en todas las escalas del sistema conservando las mismas propiedades que lo caracterizan. Algo que se observa es que si los eventos o fluctuaciones en un sistema complejo están distribuidos bajo una ley de potencia, los eventos de grandes magnitudes ocurren con muy poca frecuencia; mientras que eventos de magnitudes pequeñas ocurren más frecuentemente y la proporción de unos y otros está relacionada por una ley de potencia con exponentes característicos. Cuando en la gráfica del espectro de potencias vemos que ésta *escala*

como una potencia del inverso de la frecuencia, se dice que la serie temporal presenta *ruido* $1/f$. Según la potencia a la que escale, el ruido puede llamarse color de blanco ($1/f^0$), rosa ($1/f^1$), café ($1/f^2$), etcétera.

La aparente ubicuidad de las estructuras fractales y las fluctuaciones auto-semejantes que aparecen en procesos de muy distinta procedencia, sugieren la existencia de una dinámica común, una misma forma de interrelación de sus componentes que dan como resultado el mismo tipo de comportamiento espacial y temporal. La identificación de esta propiedad genérica (dependiente de la interacción) dio lugar al concepto de *auto-organización* hacia el *estado crítico*, llamado comúnmente en la literatura *criticalidad auto-organizada*. Esta teoría, comentada en el capítulo 1, fue dada a conocer en 1987 por Per Bak, Kurt Wiesenfeld y Chao Tang, y propone que:

sistemas complejos fuera del equilibrio y formados por muchos elementos, tienden espontáneamente a un punto crítico.

En los últimos años, se ha dicho que la criticalidad auto-organizada es una manera de dar una explicación de la presencia de fractales en la naturaleza, debido a que es invariante bajo cambios de escalas espaciales y temporales. En él, por tanto, es posible encontrar fractales y leyes de potencia.

En el capítulo 5, analizaremos algunos ejemplos en la naturaleza en cuyos modelos matemáticos se ha encontrado la presencia de fractales espaciales y de ruido $1/f$.

Muchos han sido los sistemas a los que este concepto se ha aplicado: terremotos, fuegos forestales, economía, tráfico, redes eléctricas y de información, avalanchas, explosiones solares, la evolución biológica, por mencionar algunos. Esta aparente ubicuidad del ruido $1/f$ y el desarrollo de nuevas teorías, hacen de éste un amplio campo abierto para futuras investigaciones.

Capítulo 1

Sistemas complejos

1.1 Sistemas complejos

El estudio de la dinámica celeste y en especial, el querer determinar la posición y velocidad de los planetas del sistema solar en todo momento, ha sido objeto de múltiples investigaciones desde hace muchos años. Después del siglo XVII, época en la que vivió Newton, y gracias al descubrimiento de nuevas leyes que permitieron un entendimiento más amplio del universo, se ha logrado predecir la reaparición de cometas e incluso se llegó a revelar la existencia de un planeta - que se llamó Neptuno - a partir de perturbaciones observadas en la órbita de Urano [8]. En un intento de conocer más a nuestro sistema solar y de demostrar que “era estable”, el rey Oscar II de Suecia instituyó en 1887 para conmemorar su cumpleaños, un concurso en el cual otorgaría un premio de 2500 coronas a la persona que lograra resolver el problema de los tres cuerpos.¹

Aunque Henri Poincaré no resolvió el problema en su totalidad, el premio le fue otorgado en 1889 por un tribunal compuesto por Karl Weierstrass, Charles Hermite y Gösta Mittag-Leffler, como recompensa a su estudio de las ecuaciones diferenciales de la dinámica en el problema de los tres cuerpos. Para su sorpresa, Poincaré encontró órbitas que a largo plazo eran extremadamente complicadas e impredecibles; esto inquietó mucho a los investigadores de su época, pues es una conducta completamente diferente a lo que pasa en

¹En el problema de los tres cuerpos se estudia el movimiento que han de seguir 3 cuerpos de masas arbitrarias, que interactúan de acuerdo a la ley newtoniana de la gravitación universal.

un sistema con dos cuerpos, además de que era un comportamiento nunca antes visto. Las trayectorias eran aperiódicas, irregulares e impredecibles, a pesar de estar sujetas a leyes deterministas.

Edward Lorenz, por otra parte, quiso modelar la convección térmica de la atmósfera, y para ello utilizó un sistema de 3 ecuaciones diferenciales de primer orden acopladas. Después de hacer un análisis cualitativo exhaustivo y de hacer una gráfica que mostrara las distintas trayectorias y curvas solución de su sistema, encontró que éste presenta sensibilidad a condiciones iniciales (que llamó *efecto mariposa*) y que a pesar de ello, era de alguna manera organizado. Las soluciones acababan siempre en una superficie, ejemplo de las que se denominan *atractores extraños*. (Véase la figura 1.1)

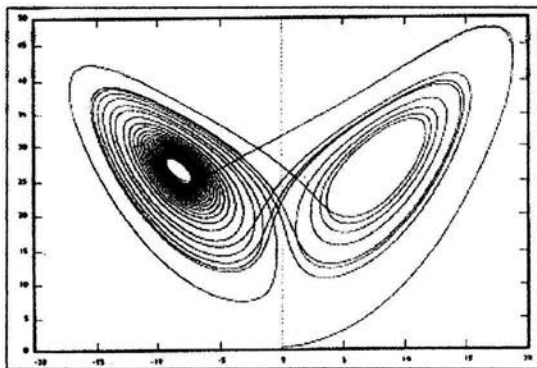


Figura 1.1: Atractor extraño encontrado por Lorenz en 1961 en su modelo de convección atmosférica.

Otro investigador que se encontró con comportamientos extraños de este tipo fue Robert May, mientras realizaba en 1976 un análisis del modelo logístico discreto de crecimiento de poblaciones. Se dio cuenta de que variando por centésimas un parámetro de su modelo, el comportamiento originado difería completamente de cualquier otro. Y a pesar de que los mecanismos y las ecuaciones en su modelo eran simples, observó comportamientos extremadamente complicados.

Todos estos sistemas tienen una característica común: son sistemas *no lineales*.

En un sistema lineal la suma de las partes es el todo y por ende vale el inverso del mecanismo reduccionista; es decir, al descomponer un sistema en partes y estudiar cada una por separado, se obtiene la misma información que al estudiar el sistema en conjunto. En un sistema no-lineal, esto no es posible. Tratar de encontrar un camino de regreso da lugar al estudio de *sistemas complejos*.

Al decir no lineal, me refiero a mecanismos y procesos en los cuales, los efectos *no* son proporcionales a las causas. Es decir, un pequeño error de medición no necesariamente da lugar a trayectorias cercanas en el modelo matemático asociado; una pequeña variación produce errores enormes. Se dice que los modelos de fenómenos con estas características presentan *sensibilidad a condiciones iniciales*, una de las manifestaciones principales del *caos*. Son modelos en los que, trayectorias con condiciones iniciales "casi" iguales, comienzan su comportamiento de manera "más o menos" parecida; pero conforme avanza el tiempo, las conductas se separan cada vez más, hasta que llega un momento en que "olvidan su pasado" y son completamente diferentes. A pesar de ello, si sabemos hasta cuándo se comportan de manera parecida, podemos entonces saber el estado del sistema en ese intervalo de tiempo. Se dice entonces que tienen un horizonte de predictibilidad finito. Son predicciones limitadas que dependen de parámetros intrínsecos del fenómeno o modelo y de la escala temporal de los mismos.

Un ejemplo es el clima, mismo que está determinado por una serie de variables físicas como la temperatura, la humedad y la presión atmosférica. Estas variables no son independientes y los cambios de una pueden provocar modificaciones en las otras afectando lo que en conjunto denominamos clima. El sistema tiene muchos elementos cuyas interacciones modifican constantemente el comportamiento del sistema, lo que permite sólo una "predicción" limitada e imprecisa.

La dinámica de los sistemas complejos da lugar a patrones globales que surgen a través de interacciones locales de tal manera que, donde antes había un espacio desordenado o completamente homogéneo, ahora surgen orden y estructuras que emergen de manera espontánea debido a que el sistema se encuentra fuera del equilibrio. Estos sistemas son entonces capaces de generar orden espacial en donde no lo había anteriormente, la homogeneidad del sistema se pierde para dar lugar a estructuras discernibles. Este proceso se denomina *ruptura de simetría*.

Pero indirectamente, se produce un comportamiento global difícil de predecir. Estas son las *propiedades emergentes* del sistema complejo. Son propiedades espacio temporales de los sistemas complejos que surgen espontáneamente a partir de interacciones entre los elementos del sistema en escalas de tiempo y longitud considerablemente mayores que las escalas en las que ocurren dichas interacciones. Estas propiedades han comenzado a ser estudiadas con herramientas y conceptos nuevos originados de la interacción de varios campos de la ciencia, desde la física, la biología, la química, las matemáticas, la economía, la sociología, etcétera.

Por ejemplo, consideremos el desarrollo embrionario en los animales. Al tener un óvulo fecundado, éste se divide en 2 células idénticas; al pasar un determinado tiempo, estas 2 células se dividen en 4, luego en 8, y así sucesivamente, cada una de las células se divide a su vez en otras 2 células idénticas. Después de aproximadamente 12 divisiones, se tiene una estructura simétrica de forma esférica llamada blástula. En ella, no se pueden distinguir las células unas de otras y se observa en conjunto una estructura regular con muchas simetrías. (Véase la figura 1.2)



Figura 1.2: Formación de la blástula en la que se puede observar simetría esférica.

De repente, esta simetría se rompe dando lugar a estructuras más complicadas en las que cada célula toma una función diferente (unas pueden formar órganos, otras tejidos, neuronas, etcétera) y las múltiples simetrías dejan de existir. Un conjunto de células se transforma en un organismo coherente multicelular cuando se rompe la simetría tanto espacial como funcional.

A lo largo de los años se han dado diversas descripciones de lo que es un sistema complejo, pero no hay una definición "universal". Octavio Miramontes [29] los caracteriza así:

Los sistemas complejos están formados por un conjunto grande de elementos que interactúan entre sí de manera no lineal, y que

pueden modificar sus estados internos como resultado de sus interacciones. Este proceso puede generar comportamientos colectivos, que no están definidos en los componentes individuales y que no pueden ser reducidos ni explicadas tomando aisladamente a cada uno de los elementos.

Lo anterior puede ejemplificarse como sigue. En el caso de las colonias de animales, están formadas por un conjunto de muchos individuos más o menos idénticos. Cada uno interactúa con los individuos que tiene a su alrededor, intercambia con ellos información, y desconoce lo que hacen los más alejados. A pesar de lo limitado que es un solo individuo, cuando cooperan y cambian su estado como resultado de la interacción, son capaces de realizar tareas inalcanzables para un solo individuo.

Algunas características de los sistemas complejos es que:

- Son sistemas no lineales que generalmente presentan interacción de fuerzas antagónicas o en conflicto.
- Obedecen a dinámicas locales con restricciones globales que restringen lo que es viable en el universo de lo imaginable.
- Implican ruptura de simetría (bifurcaciones).
- Presentan patrones emergentes (frecuentemente fractales).

Como se puede observar en los ejemplos citados anteriormente, la ruptura de simetría da paso a una amplia gama de comportamientos posibles donde la riqueza de la dinámica es digna de ser estudiada. Presentaremos en la siguiente sección otro ejemplo que exhibe ruptura de simetría para entender mejor este concepto.

1.2 Ruptura de simetría

Veamos ahora qué pasa en la convección térmica en los fluidos donde las diferencias de temperatura dan lugar a la formación de estructuras espaciales compartimentalizadas, llamadas también celdas de convección.

Cuando tenemos un fluido distribuido uniformemente entre dos placas, en el cual hay una diferencia de temperaturas de modo que la parte inferior está más caliente que la superior, estamos en la presencia de fuerzas en conflicto: el fluido con menor temperatura, el que está en la parte de arriba, es más

denso y tiende a bajar; mientras que el fluido con mayor temperatura, que está en la parte inferior, tiende a subir.

Si la diferencia entre la temperatura superior y la temperatura inferior es pequeña, el calor se transmite por medio del choque molecular en un fenómeno llamado conducción. Por el contrario, si la diferencia de las temperaturas sobrepasa un valor umbral, hay una emergencia de patrones en los cuales el fluido comienza a moverse subiendo y bajando según lo ilustra la figura 1.3.

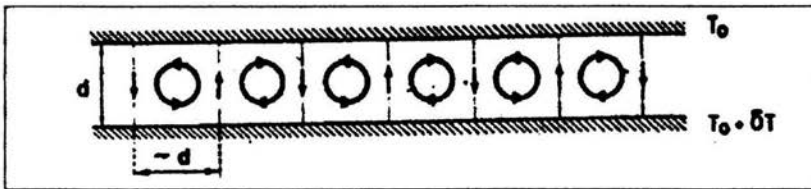


Figura 1.3: Rollos de convección que se forman cuando la diferencia de temperatura entre las capas superior e inferior sobrepasa cierto umbral.

Se forman una especie de “rollos”, técnicamente llamadas líneas de flujo, que giran alternativamente en direcciones opuestas. Esto es, dos rollos contiguos giran en sentidos opuestos.

La distancia entre dos líneas de flujo (el diámetro de un rollo) es igual a la distancia que separa a las dos placas.

Esta es la convección térmica en los fluidos (transporte macroscópico de la masa).

Este tipo de estructuras fueron vistas por primera vez por Henri Bénard (figura 1.5) alrededor de 1900, mientras hacía un experimento con aceite de ballenas y lo que observó fue un conjunto de formas hexagonales como las de la figura 1.4, las estructuras formadas son llamadas celdas de Bénard [19].

Antes de que el agua sea calentada, las estructuras no existen y el medio acuoso es uniforme, pero cuando la diferencia de temperaturas alcanza un punto crítico, surge un orden emergente y aparecen las celdas de Bénard. Lord Rayleigh (John William Strutt) encontró el valor umbral de la diferencia de temperaturas en 1916.

Un punto crítico es aquel en el que el sistema cambia radicalmente su comportamiento o estructura debido al cambio en las condiciones de dicho

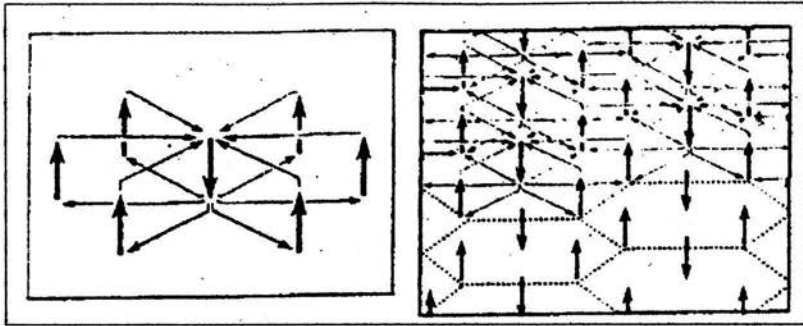


Figura 1.4: Estructuras hexagonales que descubrió Bénard mientras estudiaba un aceite de ballena.

sistema. Los sistemas complejos pueden situarse en regímenes críticos caracterizados por la presencia de fluctuaciones espaciales y temporales en todas las escalas posibles. Esta situación de criticalidad puede alcanzarse de manera espontánea y sin la intervención de factores o fuerzas externas al sistema, se habla entonces de un proceso auto-organizado. De otra manera, la dinámica ocasionada es debida al cambio en los parámetros que definen el sistema.

Materiales granulares, terremotos, fracturas, redes de ríos, sistemas biológicos complejos (cerebro, pulmones, especies en competencia, etcétera), modelos de evolución y sistemas económicos son algunos ejemplos de sistemas que se pueden considerar tanto auto-organizados como críticos. (Véase [9])

1.3 Criticalidad auto-organizada

En 1987, Per Bak, Chao Tang y Kurt Weisenfeld desarrollaron el concepto de lo que ahora se conoce como criticalidad auto-organizada. Estudiaron sistemas con la propiedad de que, sin ninguna intervención externa, se acercan a un estado crítico en el cual un evento por más pequeño que sea, puede dar lugar a una dinámica que involucre a muchos elementos del sistema. (reacciones en cadena de todos los tamaños que son parte integral de la dinámica [3])

Uno de los modelos más sencillos que muestra este tipo de compor-

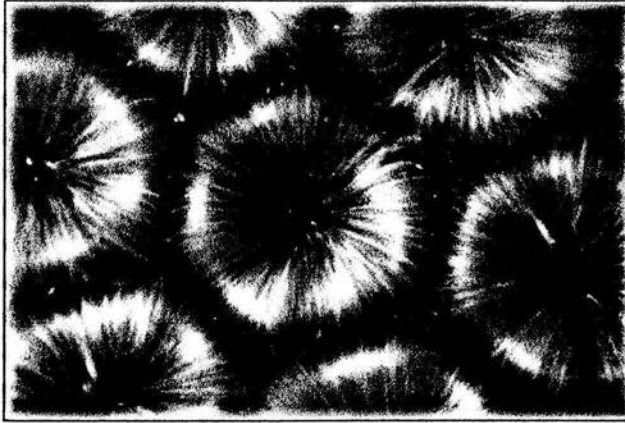


Figura 1.5: Estructuras convectivas llamadas celdas de Bénard.

tamiento es el del montón de arena. Este modelo lo introdujeron Bak, Tang y Weisenfeld para describir al ruido $1/f$, caracterizado por la presencia de leyes de potencias y fluctuaciones a todas las escalas (conceptos que definiremos más adelante). Imaginemos que sobre una superficie plana se colocan granos de arena de uno en uno (ver figura 1.6). Primeramente los granos caerán y se quedarán cerca del lugar donde cayeron, pero poco a poco, los granos empezarán a formar un montoncito cuya pendiente irá haciéndose cada vez más grande. Cuando la pendiente llegue a un punto crítico, algunos de los granos caerán del montoncito llegando a lugares en los que a su vez, pueden provocar la caída de más granos de arena, creando así una avalancha. Para medir el tamaño de una avalancha, se cuenta el número de granos que se movieron.

Una manera de representar dicho sistema en dos dimensiones, es por medio de autómatas celulares. Se procede de la siguiente manera: dada una rejilla o red cuadrada, se asignará a cada una de las celdas una altura dada $h(x, y)$ que tomará uno de los valores presentados a continuación

$$h(x, y) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Cada uno de estos valores representa el número de “granos de arena” que hay en la celda correspondiente.

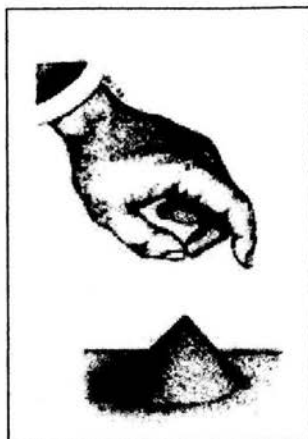


Figura 1.6: El experimento del montón de arena.

En cada unidad de tiempo, se deposita al azar un grano de arena, aumentando en uno el valor de la celda escogida. Cuando una celda alcanza el valor crítico ($h(x, y) = 4$), reparte su carga entre sus cuatro vecinos cercanos de acuerdo a la figura 1.7.

Cuando el montón de arena se encuentra en estado crítico², la caída de un solo grano de arena puede producir avalanchas de todos los tamaños, generadas por pendientes locales por encima de un umbral. Esto es, un solo grano se resbala al llegar a un lugar donde la pendiente del montón alcanza su valor crítico; si dicho grano de arena cae en otro lugar con pendiente crítica, seguirá resbalando y en su camino podrá hacer caer a más granos de arena, los cuales a su vez seguirán cayendo y provocando una avalancha de mayor tamaño, hasta que todos los granos en movimiento dejen de moverse o se salgan del sistema al descargarse una celda de la frontera.

De modo que escogida una celda (x, y) al azar, la altura de dicha celda tomará el nuevo valor

$$h(x, y) \mapsto h(x, y) + 1$$

²El sistema se considera en estado crítico cuando el número de granos que entran al sistema es, en promedio, el mismo número de granos que caen de la superficie plana y salen del sistema. De este modo, el montón deja de crecer y se producen avalanchas de todos los tamaños. [3]

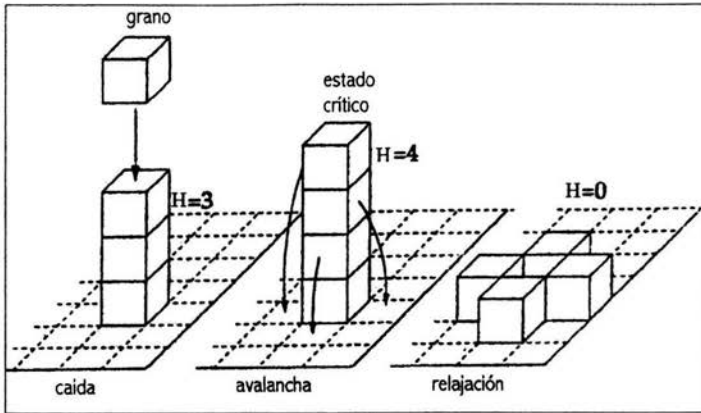


Figura 1.7: Modelo para representar avalanchas con la caída de granos de arena.

y si la celda alcanza el punto crítico

$$\begin{aligned} h(x, y) &\mapsto h(x, y) - 4 & (1.1) \\ h(x \pm 1, y) &\mapsto h(x \pm 1, y) + 1 \\ h(x, y \pm 1) &\mapsto h(x, y \pm 1) + 1 \end{aligned}$$

este procedimiento puede ocasionar que otra celda alcance el valor crítico, en tal caso se repite este procedimiento para dicha celda, y así sucesivamente hasta que el valor en cada una de las celdas sea menor que el valor crítico. Se puede observar un ejemplo de una avalancha en la figura 1.8.

En el primer cuadro se observan las condiciones iniciales del sistema. En la figura 1.8b, se agrega al azar un grano de arena el cual hace que una celda alcance el valor crítico, de modo que en el siguiente paso (1.8c) ésta se descarga de acuerdo a (1.1). Este proceso provoca a su vez que dos celdas más tomen el valor crítico y cambien de acuerdo a (1.1) como se ve en la figura 1.8d. El algoritmo produce una reacción en cadena en la que la descarga de celdas que alcanzan un valor crítico, provocan a su vez descargas en otras celdas, hasta la figura 1.8i, en la que todas las celdas tienen valores $h(x, y) < 4$. La figura 1.8j muestra el número de celdas que alcanzaron en algún momento el valor crítico y que provocaron la avalancha.

Se ha encontrado que la distribución del tamaño de las avalanchas sigue un ley de potencias, concepto que describiremos a continuación.

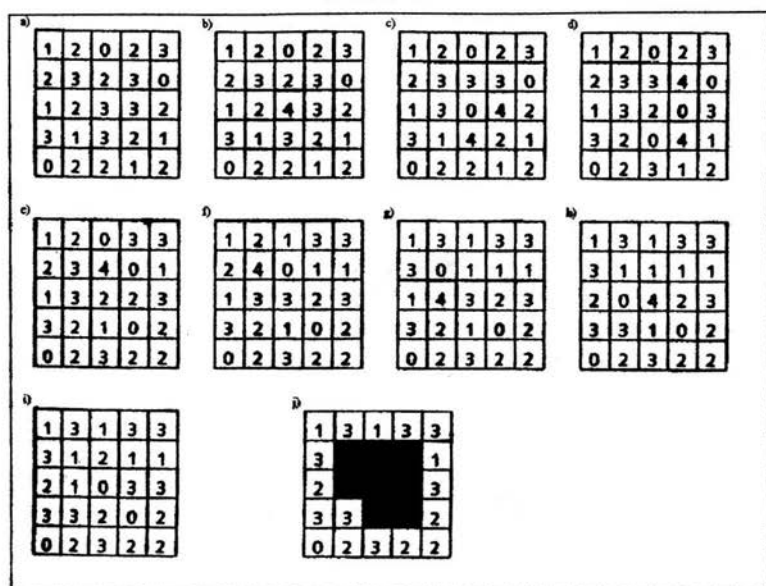


Figura 1.8: Modelo de autómatas celulares que representa una avalancha de tamaño 9.

1.4 Leyes de potencias

Según la ley newtoniana de la gravitación universal, el tamaño de la fuerza de atracción entre los cuerpos depende inversamente de la distancia entre ellos: esto es, entre mayor sea la distancia entre los cuerpos, menor será la magnitud de la fuerza con la que se atraigan recíprocamente.

De hecho: la fuerza de gravedad ejercida por un cuerpo es *inversamente proporcional al cuadrado de la distancia*.

Esta ley se representa en términos matemáticos por medio de la fórmula

$$F(r) \propto r^{-2} \quad (1.2)$$

donde F es la magnitud de la fuerza de atracción y r , la distancia entre los cuerpos.

Veamos gráficamente, el comportamiento de dicha fórmula.

Supongamos que la constante de proporcionalidad es 1. Es decir,

$$F(r) = r^{-2}$$

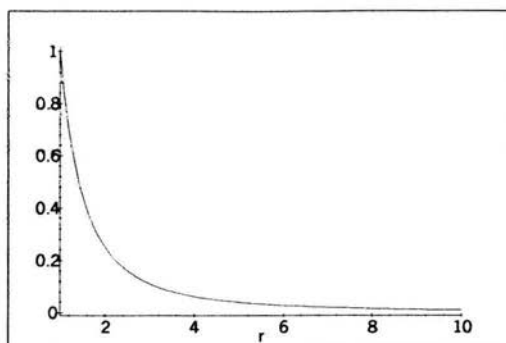


Figura 1.9: $F(r) = r^{-2}$

En la figura 1.9 se puede observar que conforme aumenta la distancia r entre dos objetos, disminuye la fuerza de atracción $F(r)$ entre ellos y conforme disminuye la distancia r entre dos objetos, aumenta la magnitud de la fuerza de atracción.

La fórmula 1.2 también describe la forma en que disminuye de la potencia de un radar con la distancia (a mayor distancia, menor potencia del radar). Este hecho fue utilizado durante la Segunda Guerra Mundial por los submarinos alemanes: midiendo el cambio en la intensidad del radar podían saber la velocidad de aproximación de un avión enemigo para así sumergirse antes de que el avión los pudiera atacar. Los británicos y estadounidenses, preocupados por no poder destruir los submarinos idearon, con la ayuda del físico Luis Álvarez, una estrategia que dio resultado. Lo que se le ocurrió a Álvarez fue generar desde los aviones una señal cuya intensidad, en lugar de ser inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, fuera directamente proporcional al cubo de la distancia.

De este modo,

$$F(r) \propto r^3 \quad (1.3)$$

Así que mientras el avión enemigo se acercaba al submarino alemán, la señal que recibían los alemanes disminuía considerablemente. Los alemanes creían que el avión se alejaba (pues creían que la señal era inversamente proporcional al cuadrado de la distancia) y permanecían en la superficie. Y de esta manera, los aviones pudieron destruir a los submarinos alemanes. (Véase [37])

Existen otros fenómenos en la naturaleza en los que la dependencia de la distancia no es como el cuadrado o al cubo, que acabamos de considerar, sino que dependen de otra potencia γ y se pueden expresar matemáticamente como

$$F(r) = Cr^\gamma \quad (1.4)$$

donde C es una constante dada.

Además, puede ocurrir que F no disminuya al aumentar la distancia, sino que aumente (dependiendo del signo de γ). Por ejemplo, podemos considerar un resorte: si éste se estira sabemos entonces que ejerce una fuerza que trata de regresarlo a su posición original (se dice de equilibrio). Mientras mayor sea la distancia que se estire, mayor será la fuerza que el resorte ejerza. Lo mismo ocurre cuando se comprime, mientras mayor sea la distancia que se le comprima, mayor será la fuerza.

Supóngase ahora que, en (1.4), $F(r)$ es una distribución de frecuencias de la variable r . Entonces, F es proporcional a una potencia (γ) de r . Lo que nos lleva a la siguiente definición. (Tomada de [39])

Definición 1 Dada la distribución de frecuencias $N(s)$ de una cantidad s , se dice que N sigue una ley de potencia si $N(s) = Cs^\gamma$, γ es llamado exponente crítico.

Se dice entonces que N escala como s^γ .

Las propiedades elementales de los logaritmos permiten ver que si C y s son positivos, y tenemos una ley de potencias $N(s) = Cs^\gamma$, entonces:

al aplicar la función logaritmo de ambos lados de esta ecuación obtenemos $\log N(s) = \log Cs^\gamma$, es decir, $\log N(s) = \gamma \log s + \log C$, y haciendo $y' = \log N(s)$, $x' = \log s$, y $c' = \log C$, entonces

$$y' = \alpha x' + c' \quad (1.5)$$

que nos dice que entre $y' = \log N(s)$ y $x' = \log s$ hay una dependencia lineal cuya gráfica es una recta con pendiente α y ordenada el origen $c' = \log C$.

Esto provee una forma directa de descubrir leyes de potencias a partir de un registro de datos experimentales, pues su gráfica en escala $\log - \log$ será aproximadamente una recta.

De modo que si al graficar en una escala de ejes logarítmicos tenemos una recta, esto quiere decir que las variables originales dependen entre sí según una ley de potencia.

Es importante decir que no importa la base logarítmica considerada, (siempre y cuando sea la misma base aplicada en ambos lados de la igualdad) la dependencia entre las variables transformadas será lineal.

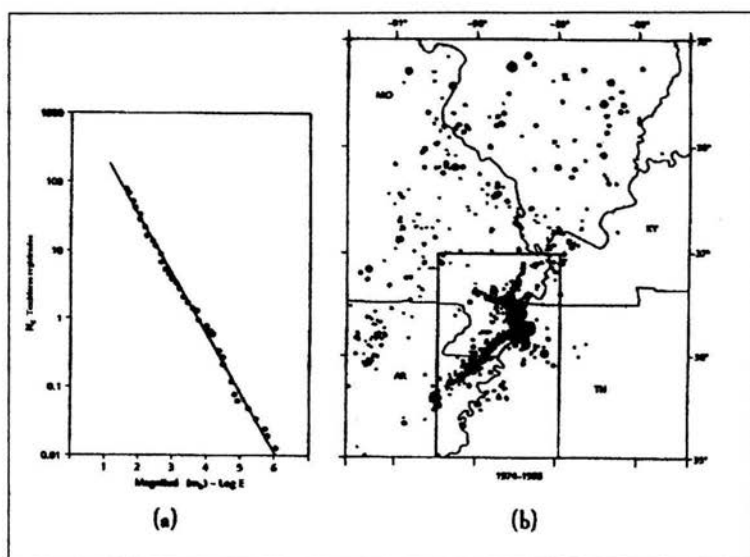


Figura 1.10: La ley de Gutenberg-Richter establece que la frecuencia o número N de temblores de una magnitud m dada (registrados en una zona determinada) está relacionada con la magnitud m de acuerdo a una ley de potencias.

Por ejemplo, la ley de Gutenberg-Richter, que describe la frecuencia $f(r)$ con la que ocurren los sismos de magnitud r , es una ley de potencia con exponente crítico negativo. Lo que implica que haya muchos temblores de magnitud muy pequeña y muy pocos de magnitud muy grande y esto concuerda con la explicación de los sismos como consecuencia de la dinámica de las placas tectónicas: la superficie de la Tierra es una costra sólida que flota en el magma del interior, la costra está rota en pedazos llamados placas que se encuentran en movimiento debido a las corrientes de magma y ello provoca choques y acumulación de *tensión* entre ellas. La tensión puede liberarse de manera súbita y propagarse, es entonces cuando ocurren los temblores.

Es más o menos directo identificar que el sistema de placas tectónicas es en realidad un sistema complejo formado por elementos individuales (las

placas) que interactúan entre sí dispersando energía (temblores).

Si se grafica, en una escala de ejes logarítmicos (ver figura 1.10(a)), el tamaño de los temblores registrados contra el número de temblores que se registran, se obtiene una línea recta decreciente que indica que el proceso obedece una ley de potencias.

Como se ha dicho, la ley de Gutenberg-Richter implica que temblores de magnitudes pequeñas ocurren con una frecuencia mucho mayor que los temblores con magnitudes catastróficas, y la relación entre magnitud y frecuencia no es azarosa, obedece una ley específica³. Esto se ve claramente en la figura 1.10. En ella, la base de los ejes logarítmicos es 10 y esto significa que por cada 1000 temblores de magnitud 4, hay (aproximadamente) 100 temblores de magnitud 5, y 10 de magnitud 6. Como la escala del eje horizontal también es logarítmica, un temblor de magnitud 6 es diez veces menos intenso que un temblor de magnitud 7 el cual, a su vez, tiene una intensidad diez veces menor que uno de 8. Así que un temblor de magnitud 8 es 100 veces más fuerte que uno de magnitud 6. [5]

Además, esta *ley de temblores* lo mismo es válida para el planeta entero como para una región específica; es decir, es válida en todas las escalas.

Las leyes de escalamiento (leyes de potencias) en las fluctuaciones espaciales y temporales de un sistema complejo implican la inexistencia de escalas específicas de validez de la ley, es decir, el fenómeno se manifiesta y es válido en todas las escalas del sistema conservando las mismas propiedades que lo caracterizan. Esto se debe a que estas funciones tienen gráficas autosemejantes bajo cambios de escala y, por consiguiente, la cualidad relacionada con la rareza o la abundancia relativa, no depende del rango en que se mida r .

No obstante, la invariancia respecto a cambios de escala tiene límites. Es decir, puede ya no presentar el mismo comportamiento a partir de un valor dado tanto en cosas muy pequeñas (constante de Planck para objetos muy pequeños) o en cosas extremadamente grandes (velocidad de la luz).

Para entender mejor las características de las leyes de potencias, veamos el siguiente ejemplo. Si tenemos una fotografía y la llevamos a ampliar, resulta que obtenemos otra fotografía de mayor tamaño pero que se ve igual a la anterior. La imagen sigue siendo la misma sólo que más grande.

³Este es un ejemplo clásico en la literatura de un fenómeno en la naturaleza cuyo comportamiento exhibe ruido $1/f$, concepto que definiremos más adelante. Decidí describirlo en este capítulo ya que es un ejemplo útil para caracterizar las leyes de potencias.

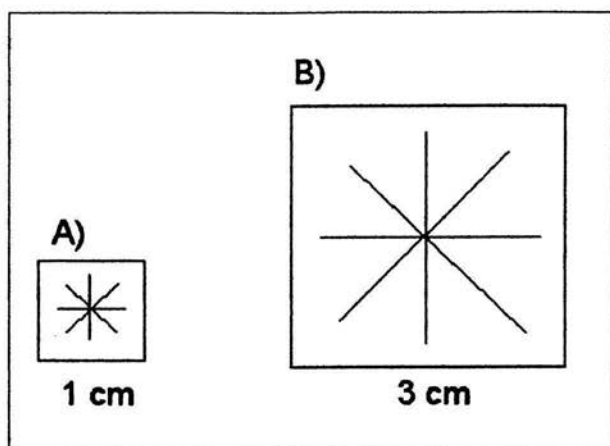


Figura 1.11: El objeto ampliado (B) se ve igual al anterior (A), sólo que de distinto tamaño.

¿Qué pasa si tenemos un cuadrado de lado 1 y uno de lado 3? ¿Qué podemos decir de ellos? Al verlos podemos decir que el lado del cuadrado B (L_B) es tres veces más grande que el lado del cuadrado A (L_A). Pero también podemos decir que si ampliamos 3 veces el tamaño del cuadrado A, obtenemos al cuadrado B; es decir, el cuadrado B es una ampliación o rescalamiento del cuadrado A.

$$L_A = 1$$

$$L_B = 3L_A = 3$$

$$L_B = 3L_A \quad (1.6)$$

Ya vimos que el lado del cuadrado B es 3 veces mayor al del cuadrado A pero, ¿Y su área?

El área del cuadrado A se obtiene calculando:

$$Area_A = L_A^2 = 1$$

Mientras que el área del cuadrado B se calcula mediante la fórmula:

$$Area_B = L_B^2$$

Utilizando el hecho de que el lado del cuadrado B es 3 veces mayor al del cuadrado A (1.6) obtenemos:

$$Area_B = (3L_A)^2 = 3^2 L_A^2$$

De modo que:

$$Area_B = 3^2 Area_A = 9$$

$$Area_B = 3^2 Area_A \quad (1.7)$$

Y por lo tanto, el área del cuadrado B es proporcional al área del cuadrado A , con constante de proporcionalidad 3^2 . O bien, al rescalar el lado del cuadrado A (ampliándolo 3 unidades), su área se modifica (se rescala) siendo ahora 3^2 veces más grande.

Veamos cómo se formalizan estos conceptos: para ello, diremos que un *rescalamiento* es un cambio de escala en la variable independiente de una función $y = y(x)$

De este modo, si $k > 0$, $x \mapsto kx$ hace que el eje horizontal se recorra k veces más (o menos rápido) y se dice que la función $y_k = y(kx)$ ha sido rescalada por el factor k .

Consideremos la recta $y = x$ de la figura 1.12, componiendo dicha función con $g(z) = z^3$ obtenemos la gráfica de la figura 1.13.

Ahora, si tomamos $y = 3x$ como se ve en la figura 1.14, componiendo dicha función con $g(z) = z^3$ obtenemos la gráfica de la figura 1.15.

Podemos ver que $y_3 = 3y_1$ y que $y_4 = 3^3 y_2$

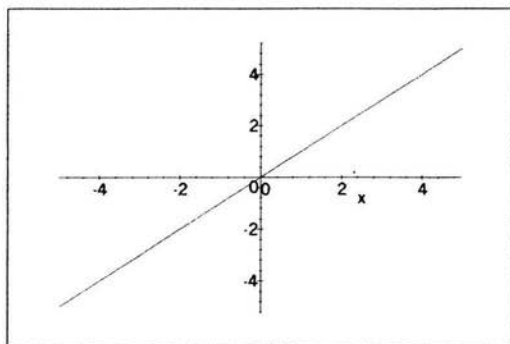
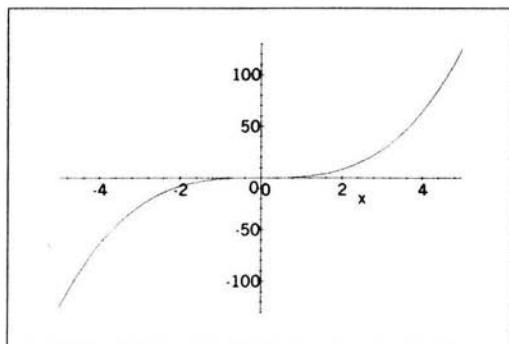
Hagamos ahora un rescalamiento en las 2 últimas gráficas de la siguiente manera:

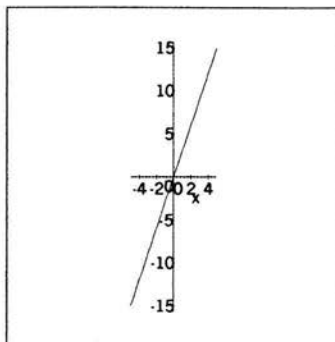
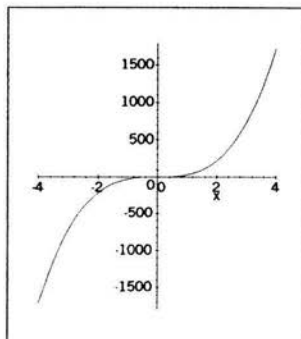
En lugar de considerar x en el eje de las abscisas consideremos $3x$

En lugar de considerar y en el eje de las ordenadas consideremos $3y_1$ para la primera y $3^3 y_2$ para la segunda.

Obtenemos así las gráficas de las figuras 1.16 y 1.17 respectivamente.

Y como podemos notar, estas gráficas se ven iguales a las primeras dos.

Figura 1.12: $y_1 = x$ Figura 1.13: $y_2 = x^3$

Figura 1.14: $y_3 = 3x$ Figura 1.15: $y_4 = (3x)^3$

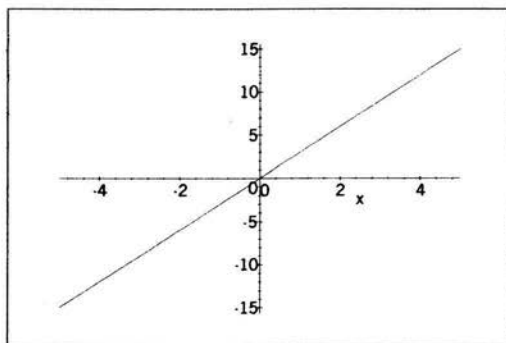


Figura 1.16: Rescalamiento de $y_3 = 3x$. Esta gráfica se ve igual que la gráfica de $y_1 = x$

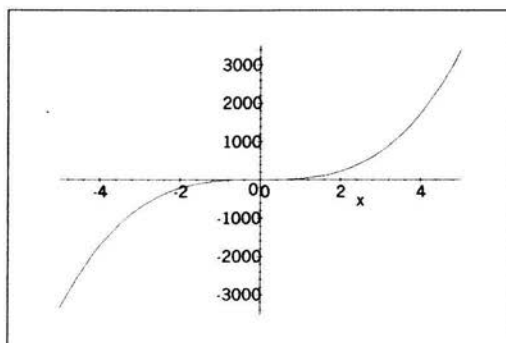


Figura 1.17: Rescalamiento de $y_4 = (3x)^3$. Esta gráfica se ve igual que la gráfica de $y_2 = x^3$

En general, si tenemos $f(x) = cx^\alpha$, y hacemos un rescalamiento $x \rightarrow kx$, entonces $f(kx) = ck^\alpha x^\alpha = k^\alpha f(x)$; es decir, si ampliamos el eje de las abscisas por un factor k , y hacemos un rescalamiento en el eje de las ordenadas por un factor k^α , entonces la nueva gráfica se ve igual a la gráfica $f(x)$.

Además de que $\frac{f(kx)}{f(x)} = k^\alpha$, que siempre es constante.

Proposición 1 Sea $f(x) = cx^\alpha$ una función con ley de potencias, entonces f es invariante bajo cambios de escala, es decir, $f(x)$ sigue siendo proporcional a x^α .

Demostración Sea $f(x) = cx^\alpha$ una función con ley de potencias, y sea $g(x) = kx$ un rescalamiento.

Por demostrar que $(f \circ g)(x) = qx^\alpha$, donde q es una constante.

$$(f \circ g)(x) = f(kx) = c(kx)^\alpha = ck^\alpha x^\alpha = qx^\alpha \text{ con } q = ck^\alpha \blacksquare$$

Los objetos que se ven como la figura original después de un cambio de escala, se llaman *autosemejantes* y abundan en la naturaleza. Varios investigadores han propuesto modelos en economía, psicología, ciencias políticas y sociología, que se expresan también mediante leyes de potencias. (Veáanse [1], [5], [37] y [43])

1.5 Autosemejanza

¿Quién no ha notado alguna vez que una pequeña parte del brócoli (figura 1.18) o de la coliflor (figura 1.19) se ve igual que una parte más grande, o incluso que todo el vegetal?

Lo mismo ocurre al observar una nube, un río, o tal vez una parte de alguna hoja, como se puede observar en las figuras 1.20, 1.21 y 1.22.

Innumerables fenómenos en el mundo que nos rodea presentan autosemejanza e *invariancia* respecto al cambio de escala o tamaño; es un atributo de muchas leyes en la naturaleza el ser independientes (o casi) del escalamiento.

En ecología, las fluctuaciones de los sistemas complejos incluyen una gran variedad de escalas espaciales y temporales, que en su mayoría muestran propiedades de autosemejanza. Una pregunta que surge inmediatamente es: ¿Qué es lo que los origina? o bien ¿Cuándo se presentan estas características?



Figura 1.18: El brócoli es considerado por algunos estudiosos como una figura autosemejante.

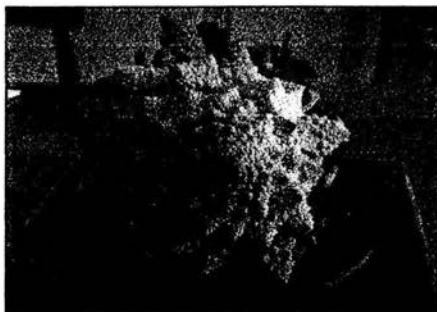


Figura 1.19: Coliflor autosemejante en diversas escalas.

Una consecuencia de la autosemejanza en un sistema complejo, aunada a ciertas características que veremos más adelante, es la aparición de estructuras geométricas llamadas *fractales* (por Benoît Mandelbrot). Estructuras de las que hablaremos en el siguiente capítulo.



Figura 1.20: Se puede observar que un pedazo de la hoja tiene la misma forma que la hoja en su conjunto, sólo que es más pequeño.

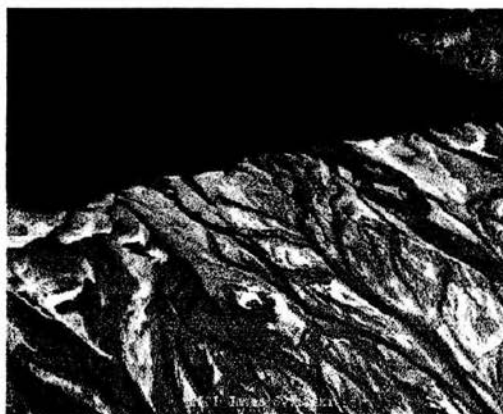


Figura 1.21: Río caracterizado por tener estructura semejante en todas las escalas.

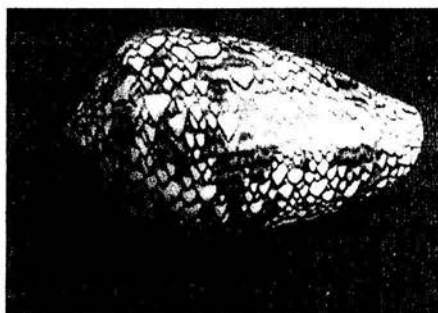


Figura 1.22: Concha marina con estructura que parece ser autosemejante. (Parecida al triángulo de Sierpinski que describiremos en el siguiente capítulo)

Capítulo 2

Fractalidad

2.1 Fractales

En la naturaleza hay muchos objetos cuyas irregularidades toman formas peculiares: las cadenas montañosas, la ribera del mar, los sistemas hidrográficos, las nubes, las hojas, los árboles, los vegetales, los copos de nieve, etcétera, que se ven iguales después de un cambio de escala y por ello, se sugiere la idea de que son fractales.

Por su aparente ubicuidad, en las últimas décadas los fractales han sido objeto de estudio sistemático, si bien hay antecedentes que se remontan a fines del siglo XIX y el primer tercio del XX, como las curvas de Peano, el conjunto de Cantor, la curva de von Koch y el triángulo de Sierpinski.

Citando a Dyson Freeman (Véase [16]):

Fractal es una palabra acuñada por Mandelbrot para reunir bajo un sólo nombre una gran familia de objetos que han [tenido][...] un papel histórico [...] en el desarrollo de la matemática pura. Una gran revolución en las ideas separa la matemática clásica del siglo XIX de la matemática moderna del XX. La matemática clásica está enraizada en las estructuras regulares de la geometría de Euclides y en la evolución continua característica de la dinámica de Newton. La matemática moderna empezó con la teoría de conjuntos de Cantor y la curva de Peano que llena el plano. Desde el punto de vista histórico, la revolución se produjo al descubrirse estructuras matemáticas que no encajaban en los patrones de

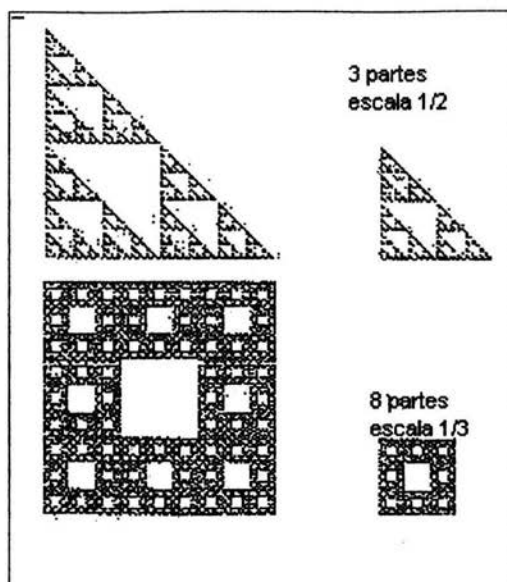


Figura 2.1: Objetos autosemejantes llamados fractales cuyas reglas iterativas de construcción se darán a conocer más adelante. (A) Triángulo de Sierpinski. Presenta 3 triángulos autosemejantes que miden la mitad del original. (B) Carpeta de Sierpinski. Se divide en 8 objetos que miden la tercera parte del original y que se ven iguales a él.

Euclides y Newton. Estas nuevas estructuras fueron consideradas [...] “patológicas”, [...] como “una galería de monstruos”, emparentadas con la pintura cubista y la música atonal, que por aquella época transtornaron las pautas establecidas en el gusto artístico.

Conozcamos un poco de los fractales antes de dar una definición.

2.1.1 Historia

Entre los antecedentes más importantes de la geometría fractal, se encuentran las investigaciones y los descubrimientos hechos por Augustin Louis Cauchy, Karl Weierstrass, Paul du Bois-Reymond y Henri Poincaré.

Después de que Cauchy publicara los primeros análisis rigurosos sobre funciones, y que formalizara los conceptos de funciones continuas, límites y derivabilidad, a mediados del siglo XIX, el matemático alemán Karl Weierstrass cambió el concepto que se tenía de función al construir curvas no diferenciables en punto alguno. En la figura 2.2 se observa una de las curvas que ahora lleva su nombre. Estas curvas se caracterizan por la presencia de “picos” o “rugosidades” a todas las escalas, que hacen que dichas funciones sean no-diferenciables en todos sus puntos.

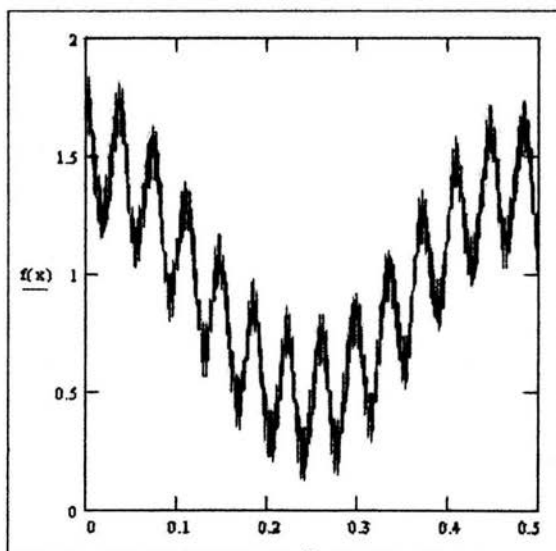


Figura 2.2: Gráfica de una de las funciones construidas por Weierstrass, caracterizada por ser no diferenciable en punto alguno.

La manera en la que Weierstrass construyó estas curvas fue definiendo una familia de funciones mediante la serie infinita:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \cos(\omega^n x) \quad \begin{array}{l} x \in R \\ \alpha < 1; \quad \alpha\omega > 1 + \frac{3\pi}{2} \end{array}$$

Una vez establecidas estas nuevas “reglas del juego” en las cuales no todas las funciones continuas eran diferenciables y, por ende, podían tener características muy diferentes, aproximadamente en 1890, Henri Poincaré hizo

múltiples descubrimientos que lo volvieron pionero en el estudio cualitativo de los fenómenos no lineales. Al trabajar en el problema de los 3 cuerpos (ver página 2), Poincaré encontró que las órbitas que siguen dichos cuerpos son muy irregulares y no podían estudiarse con las “herramientas” lineales existentes.

Algunas de sus ideas fueron extendidas tres décadas más tarde, fundamentalmente por los matemáticos franceses Gastón Julia y Pierre Fatou, hacia 1918. Julia publicó en 1918, cuando sólo tenía 25 años, su obra maestra titulada *Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles*, en el que trataba la iteración de una función racional f , que lo volvió famoso en el ámbito matemático. Sus descubrimientos le valieron ganar el *Grand Prix de l'Académie des Sciences*. A pesar de adquirir tanta fama, su trabajo fue esencialmente olvidado al paso de los años, hasta que Benoît Mandelbrot lo hizo resurgir en 1970 con sus experimentos computacionales.

Gracias al impulso dado por el desarrollo de la computadora digital, al cálculo numérico y a las facilidades de graficación asociadas, Mandelbrot, trabajando en la IBM's *Watson Research Center*, retomó el trabajo de Julia para estudiar el fractal que ahora lleva su nombre. Mandelbrot publicó sus resultados, primero en *Les objets fractals, forme, hasard et dimension* en 1975, y de manera más completa en *The Fractal Geometry of Nature* en 1982 ([27]).

Benoît Mandelbrot, con sus experimentos de computadora, es considerado como el padre de la geometría fractal. Él les da ese nombre en 1975 por el vocablo latín *frangere* que significa romper en pedazos. (Véase [38])

Por su parte, Pierre Fatou también estudiaba el comportamiento de las iteraciones de funciones de variable compleja y encontró muchas propiedades básicas de la iteración en el plano complejo que resultaron, a la postre, generadoras de fractales en \mathbb{C} .

2.1.2 Algunas investigaciones y descubrimientos clave

Movimiento Browniano A principios del siglo XIX, el botánico inglés Robert Brown estudiaba los mecanismos de fertilización en plantas. En una de sus investigaciones colocó en un vaso con agua un poco de polen, y lo que observó llamó considerablemente su atención. A partir de ese momento, se dedicó también a investigar el movimiento de partículas suspendidas en un líquido o en el aire, y observándolo al microscopio, descubrió que el



Figura 2.3: Benoit Mandelbrot, considerado el padre de la geometría fractal.

movimiento de partículas de polen suspendidas en agua se movían en forma desordenada y aparentemente azarosa.

Si se representa el estado de una partícula de polen como un punto en una gráfica cada cierto tiempo, uniendo los puntos con un segmento de recta, al cabo de mucho tiempo, lo que se observa es una línea que llena todo el plano; la partícula no se detiene y sigue una línea infinita dentro de un área finita (el recipiente que contiene el líquido).

En la figura 2.4 (a) se observa el movimiento descrito por las partículas de polen en un intervalo de tiempo. La figura 2.4 (b) es un acercamiento del segmento AB. Se puede observar que hay estructura en donde parecía haber una recta. Si se continúa haciendo este procedimiento, viendo con una lupa segmentos donde parece haber una recta, se seguirá encontrando más y más estructura; dicho de otra manera, hay autosemejanza en todas las escalas.

En 1900, Louis Bachelier estableció un primer modelo de dicho movimiento y dio a conocer algunas aplicaciones.

Conjunto de Cantor El conjunto de Cantor es un conjunto de puntos en el intervalo $[0, 1]$ que se obtiene de la siguiente manera:

Sea C_0 el intervalo $[0, 1]$. Se construye C_1 quitando a C_0 el tercio central. Ahora se construye C_2 quitando a cada pedazo de C_1 su tercio central, y así sucesivamente.

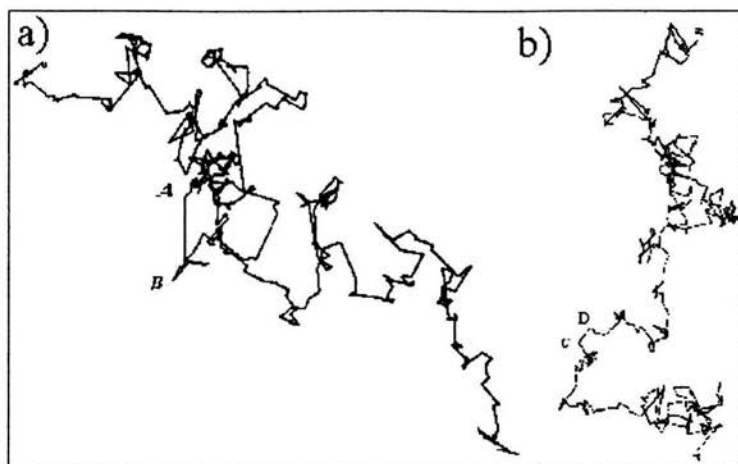


Figura 2.4: Movimiento descrito por partículas suspendidas en un líquido (conocido como movimiento Browniano). Se observa estructura a todas las escalas.

El conjunto que se obtiene al aplicar este procedimiento un número infinito de veces, es el conjunto de Cantor.

Se puede observar en la figura 2.5 que en primera instancia (Γ_0), se tiene un segmento de tamaño 1.

En el siguiente paso (Γ_1) hay 2 segmentos cuyo tamaño es $\frac{1}{3}$ del segmento anterior, de modo que todo Γ_1 tiene tamaño $\frac{2}{3}$.

En Γ_2 hay 2 nuevos segmentos por cada segmento anterior; esto es, hay 4 segmentos de tamaño $\frac{1}{9}$, y el tamaño total es $\frac{4}{9}$.

Poniendo esta información en una tabla:

	n° segmentos	tamaño de cada segmento	tamaño total
Γ_0	$1 = 2^0$	$1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^0$
Γ_1	$2 = 2^1$	$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1$	$\left(\frac{2}{3}\right)^1$
Γ_2	$4 = 2^2$	$\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$
Γ_3	$8 = 2^3$	$\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$
Γ_4	$16 = 2^4$	$\frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4$
Γ_n	2^n	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\left(\frac{2}{3}\right)^n$

De modo que el conjunto de Cantor (cuando $n \rightarrow \infty$) tiene

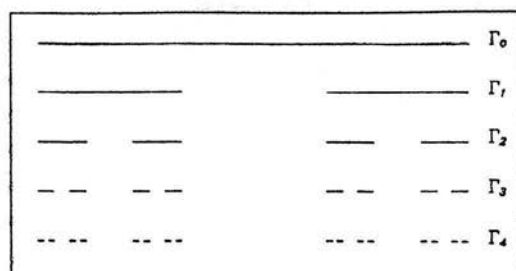


Figura 2.5: Procedimiento recursivo de la construcción del conjunto de Cantor, quitando el tercio medio de cada segmento en cada una de las iteraciones.

$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$ segmentos, y tamaño total es $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Curva de Peano En 1890, el matemático italiano Giuseppe Peano estudió algunas curvas planas continuas que cubren la superficie de un cuadrado y publicó un artículo titulado “Sur une courbe qui remplit toute une aire plane”.

Dado un punto cualquiera del cuadrado, la curva pasa por él al menos una vez.

Estas curvas se pueden construir mediante un proceso recurrente.

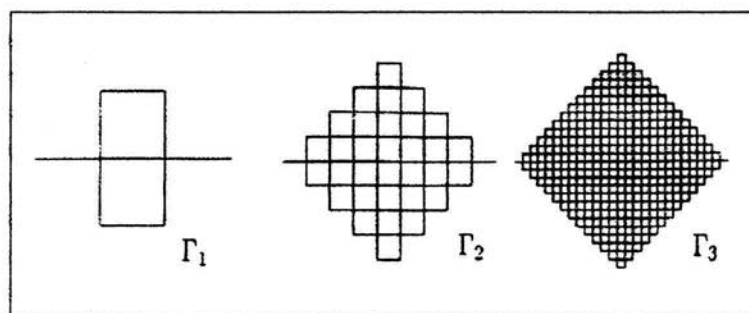


Figura 2.6: Procedimiento para construir la curva de Peano. Se puede observar que en cada iteración se cubre más un pedazo de plano.

Este tipo de curvas llamó mucho la atención a los investigadores, pues a

partir de una curva cuya *dimensión topológica*¹ es uno, se cubre la superficie de un cuadrado que tiene *dimensión topológica* dos .

Curva de Hilbert A partir de la curva de Peano, el matemático ruso-alemán David Hilbert mostró en 1891 otra curva con sus mismas características.

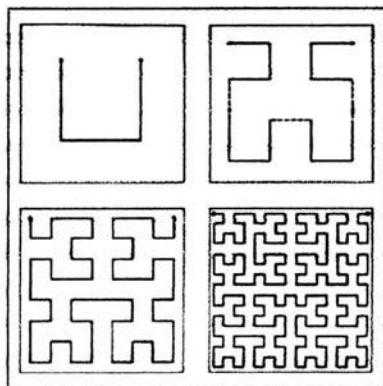


Figura 2.7: A partir de este procedimiento recursivo, cuando el número de iteraciones tiende a infinito, se obtiene otra curva que cubre una porción de plano conocida como curva de Hilbert.

Para construir la curva de Hilbert se procede así: partimos de un cuadrado dividido en cuatro partes iguales y unimos sus centros tal como indica la figura 2.7. Seguidamente, se divide cada uno de los cuadrados en cuatro partes y se repite el proceso; se conectan sus centros, comenzando siempre por el cuadrado superior izquierdo y terminando en el cuadrado superior derecho. Este proceso se repite indefinidamente y se obtiene la curva de Hilbert.

Este y otros ejemplos (dignos de la galería de monstruos, como los llamó Poincaré [27]) sugirieron la necesidad de complementar la definición de *dimensión topológica* para distinguir los “objetos geométricos bien portados” de los que llenaban más espacio que el correspondiente a su *dimensión topológica*.

¹Para ver más sobre la *dimensión topológica* de un objeto, ir al apéndice C

Curva de Takagi Esta curva fue descubierta en 1903 por Takagi que, como Weierstrass, también quería encontrar una curva continua no diferenciable en ninguno de sus puntos.

A partir de una función que mide la distancia entre un punto (el argumento) y el número entero más próximo, función que denotaremos $\psi(x) = \text{dist}(x, Z)$, Takagi definió la función:

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \psi(2^n x)$$

Las primeras iteraciones se muestran en la figura 2.8 y la figura en el límite, cuando $n \rightarrow \infty$, se ve en 2.9

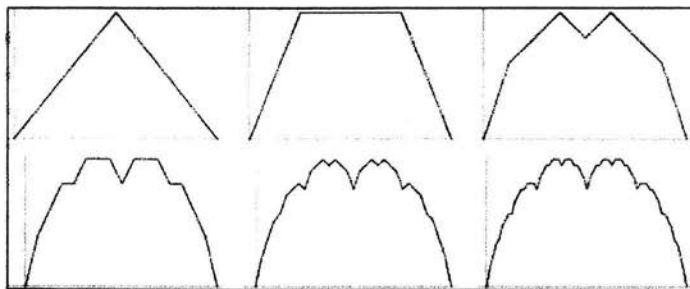


Figura 2.8: Primeras iteraciones para obtener la curva de Takagi.

La curva de von Koch Asimismo, en 1906, la matemática sueca Helge von Koch construyó por iteración, otra curva continua no diferenciable en punto alguno, y que además es autosemejante. Dado un segmento de recta, se divide en tres segmentos de igual longitud y se elimina el de en medio; poniendo en su lugar los dos lados que forman un triángulo equilátero con el eliminado.

En el límite, se obtiene la curva conocida como curva de von Koch². Si en lugar de comenzar con un segmento de recta, se tiene un triángulo equilátero, el fractal obtenido en el límite es llamado copo de von Koch.

²Cabe resaltar que si intersectamos un segmento de recta con la base de la curva de von Koch, lo que se tiene es el conjunto de Cantor.

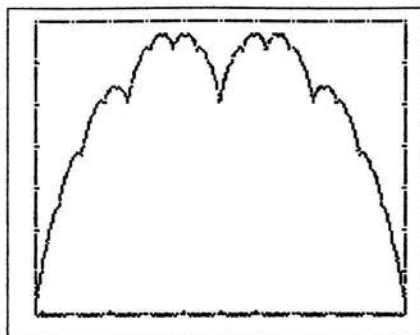


Figura 2.9: Curva de Takagi. Se caracteriza por ser continua pero no diferenciable en ninguno de sus puntos.

Helge von Koch publicó sus resultados en un artículo llamado “Une méthode géométrique élémentaire pour l’étude de certaines questions de la théorie des courbes planes”.

En la figura 2.10 se observa que en el primer paso (Γ_0) hay un segmento que para facilitar el cálculo lo consideraremos de longitud 1. En Γ_1 hay cuatro segmentos, cada uno de longitud $\frac{1}{3}$. En Γ_2 hay dieciseis segmentos cuya longitud es $\frac{1}{9}$ de la longitud del segmento anterior. En Γ_3 hay cuatro nuevos segmentos por cada segmento anterior; esto es, hay 4^3 segmentos de longitud $(\frac{1}{3})^3$, y así sucesivamente.

Poniendo esta información en una tabla:

	n° segmentos	tamaño de cada segmento	tamaño total
Γ_0	$1 = 4^0$	$1 = (\frac{1}{3})^0$	$(\frac{4}{3})^0$
Γ_1	$4 = 4^1$	$\frac{1}{3} = (\frac{1}{3})^1$	$(\frac{4}{3})^1$
Γ_2	$16 = 4^2$	$\frac{1}{9} = (\frac{1}{3})^2$	$(\frac{4}{3})^2$
Γ_3	$64 = 4^3$	$\frac{1}{27} = (\frac{1}{3})^3$	$(\frac{4}{3})^3$
Γ_4	$256 = 4^4$	$\frac{1}{81} = (\frac{1}{3})^4$	$(\frac{4}{3})^4$
Γ_n	4^n	$(\frac{1}{3})^n$	$(\frac{4}{3})^n$

De modo que en el límite (cuando $n \rightarrow \infty$) se obtiene la curva de von Koch cuya longitud es $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{4}{3})^n = \infty$

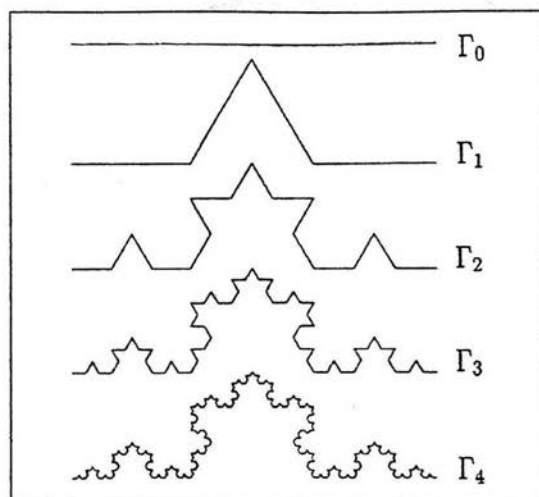


Figura 2.10: Iteraciones para construir la curva de von Koch

El triángulo de Sierpinski En 1915, el matemático polaco Waclaw Sierpinski construyó un ente geométrico que a la postre se volvería clásico. Dado un triángulo equilátero C_0 , se construye C_1 al eliminar el triángulo interior cuyos vértices son los puntos medios de cada lado. C_2 se obtiene al eliminar los triángulos medios de los tres triángulos de C_1 , y así sucesivamente. La figura obtenida en el límite es el fractal llamado triángulo de Sierpinski. (Este se muestra en la figura 2.11)

Todas las figuras descritas en esta sección son autosemejantes. Esta es una de las características fundamentales de los fractales, pero no es la única. Se necesita de otra propiedad que marque la diferencia entre fractales, y objetos autosemejantes que no lo son, como una recta, un plano, un cubo, las espirales logarítmicas y arquimedianas, etcétera. La clave que las distingue, es el tema de la siguiente subsección.

2.1.3 Dimensión fractal

Desde que Euclides estableció sus fundamentos y los resumió en su obra *Los elementos* el conocimiento matemático de los griegos, la geometría se ha ocupado de caracterizar conjuntos de puntos, curvas, figuras planas, superficies

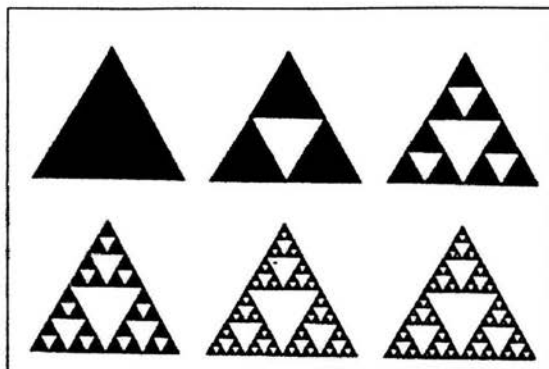


Figura 2.11: Primeras 6 iteraciones para contruir el triángulo de Sierpinski.

sólidas y generalizaciones de éstos que no caben en el espacio accesible a los sentidos del ser humano. Dependiendo del método que se emplee para ello, la geometría puede ser euclidea, analítica, proyectiva, algebraica, diferencial, etcétera. En particular, la última aplicó el método del límite para describir las propiedades de curvas y superficies “suaves” o, a lo más, con un número pequeño de puntos no diferenciables. Pero, los objetos geométricos irregulares que presentan estructura autosemejante a cualquier escala y tienen un número infinito de singularidades, no pueden analizarse con aquel método propio del cálculo diferencial e integral. De modo que para estudiarlos fue necesario desarrollar una nueva geometría.

La geometría fractal provee una descripción matemática de estas formas irregulares. Un primer problema consiste en construir una medida de su irregularidad. Es decir, de asignarle a cada fractal un valor característico asociado con su “rugosidad” o con qué tanto más espacio llena que los objetos euclidianos. Para ello se define la *dimensión fractal*, una extensión de la dimensión euclidea para objetos autosemejantes que determina el grado de rugosidad; entre más accidentada sea y presente más cambios, su complejidad es mayor.

Veamos primero, qué entendemos por dimensión. Consideremos un segmento de longitud 1, y partámoslo en $N(L)$ segmentos de longitud L , entonces

$$LN(L) = 1$$

para cualquier valor de L .

Si el objeto inicial es un cuadrado de superficie 1, y lo partimos en pequeños cuadrados cuyo lado sea L , el número $N(L)$ de éstos, cumple

$$L^2 N(L) = 1$$

De igual manera, en un cubo de volumen 1 partido en pequeños cubos de tamaño L , se cumple que

$$L^3 N(L) = 1$$

y dado que el segmento, el cuadrado y el cubo tienen dimensión euclidéa uno, dos y tres, respectivamente, esto sugiere definir la *dimensión* de cualquier objeto como el número D que satisface la relación:

$$L^D N(L) = 1$$

$$N(L) = \frac{1}{L^D}$$

$$\log N(L) = \log \left(\frac{1}{L} \right)^D = D \log \left(\frac{1}{L} \right)$$

$$D = \frac{\log N(L)}{\log(1/L)} \quad (2.1)$$

donde $N(L)$ es el número de unidades de tamaño L que se necesitan para cubrir el objeto y se ha supuesto que la medida total de éste es uno.

En el caso de los fractales, que no poseen una escala característica, el concepto de medida no está claramente definido: cuando se quiere medir una línea fractal con una unidad determinada, siempre hay detalles finos que se escapan a la escala; por tanto, a medida que aumenta la sensibilidad del instrumento, aumenta la longitud de la línea.

Para obtener una mejor aproximación, se hace el conteo de número de objetos, o de unidades, de tamaño L que se necesitan para cubrir al fractal siendo L muy pequeña ($L \rightarrow 0$). De modo que la fórmula (2.1) se ve como:

$$D = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\log N(L)}{\log(1/L)} \quad (2.2)$$

y considerando que dicho límite existe, se tiene la siguiente definición: (tomada de [7])

Definición 2 Dado un objeto autosemejante a todas las escalas, definimos su *dimensión fractal*, D , como

$$D = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\log N(L)}{\log(1/L)}$$

Haciendo $L = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ con $n \in \mathbb{N}$,

$$L \rightarrow 0 \iff \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0 \iff n \rightarrow \infty$$

De modo que la expresión (2.2) toma la forma

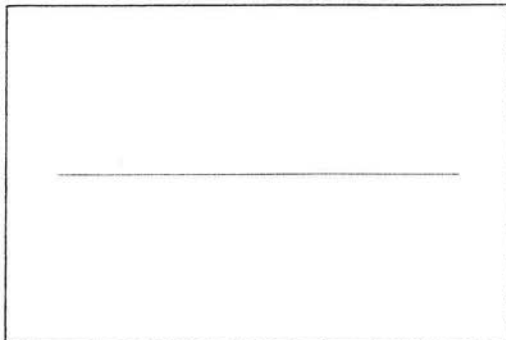
$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(L)}{\log 1/\frac{1}{2^n}}$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(L)}{\log 2^n} \tag{2.3}$$

Donde $N(L)$ es el número de objetos de longitud $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ que se necesitan para cubrir al fractal. Siendo ésta, una manera más sencilla de calcular la dimensión fractal D .

A partir de esta definición de dimensión fractal, es posible diferenciar los objetos fractales de otros objetos autosemejantes. Primero veamos que las dimensiones fractales de objetos como una recta o un pedazo de plano, coinciden con su dimensión topológica.

Verifiquemos que la dimensión fractal de un segmento de recta es 1:



El número $N(L)$ de cajas de tamaño $\frac{1}{2^n}$ que se necesitan para cubrir un segmento de recta, está dado de acuerdo a la siguiente tabla:

	tamaño caja L	número de cajas necesarias $N(L)$
Γ_0	1	1
Γ_1	$\frac{1}{2}$	2
Γ_2	$\frac{1}{4}$	4
.	.	.
Γ_n	$(\frac{1}{2})^n$	2^n

Por (2.3)

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(L)}{\log 2^n}$$

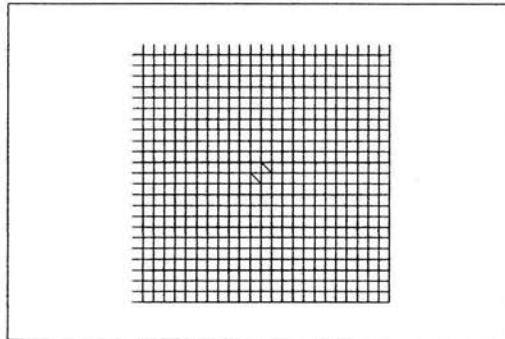
de modo que

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{\log 2^n} = 1$$

y

$$D = 1$$

Calculemos ahora la dimensión fractal de un cuadrado:



El número $N(L)$ de cajas de tamaño $\frac{1}{2^n}$ que se necesitan para cubrir un cuadrado, está dado de acuerdo a la siguiente tabla:

	tamaño L de la caja	número de cajas necesarias $N(L)$
Γ_0	1	1
Γ_1	$\frac{1}{2}$	4
Γ_2	$\frac{1}{4}$	16
.	.	.
Γ_n	$(\frac{1}{2})^n$	4^n

Por (2.3)

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(L)}{\log 2^n}$$

de modo que

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4^n}{\log 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^{2n}}{\log 2^n}$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \log 2^n}{\log 2^n} = 2$$

y

$$D = 2$$

Veamos ahora que ocurre con la dimensión de un ente geométrico de tipo *fractal*

¿Qué dimensión fractal tiene la figura 2.12?

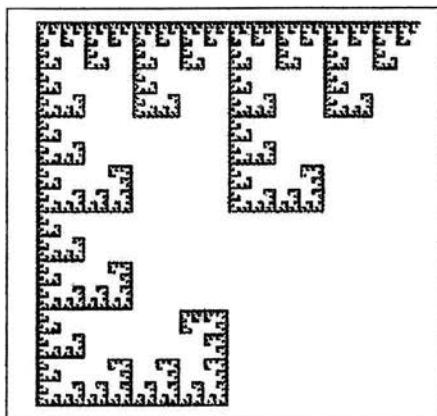


Figura 2.12: Otro ejemplo de fractal.

Si observamos la figura 2.12 podemos concluir que:

para $n = 0$, se necesita 1 caja de tamaño 1 para cubrirlo

para $n = 1$, se necesitan 3 cajas de tamaño $\frac{1}{2}$ para cubrirlo.

para $n = 2$, se necesitan 9 cajas de tamaño $\frac{1}{2^2}$ para cubrirlo.

para $n = 3$, se necesitan 27 cajas de tamaño $\frac{1}{2^3}$ para cubrirlo.

De modo que para n arbitrario, se necesitan 3^n cajas de tamaño $\frac{1}{2^n}$ para cubrirlo

	tamaño caja	número de cajas necesarias $N(L)$
$n = 0$	1	1
$n = 1$	$\frac{1}{2}$	3
$n = 2$	$(\frac{1}{2})^2$	9
.	.	.
n	$(\frac{1}{2})^n$	3^n

y 2.3

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(L)}{\log 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3^n}{\log 2^n}$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 3}{n \log 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.585$$

Por otra parte, para calcular la dimensión fractal del *triángulo de Sierpinski*, si analizamos la regla iterativa de su construcción podemos observar que el número $N(L)$ de cajas de tamaño $\frac{1}{2^n}$ que se necesitan para cubrirlo, está dado de acuerdo a la siguiente tabla::

	tamaño caja	número de cajas necesarias $N(L)$
$n = 0$	1	1
$n = 1$	$\frac{1}{2}$	3
$n = 2$	$(\frac{1}{2})^2$	9
.	.	.
n	$(\frac{1}{2})^n$	3^n

que es igual a la tabla del ejemplo anterior, de modo que la dimensión fractal del triángulo de Sierpinski es

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.585$$

Si realizamos un procedimiento análogo al arriba mencionado para cubrir el conjunto de Cantor discutido en la sección 2.1.2, se observa que se necesitan 2^n cajas de tamaño $(\frac{1}{3})^n$, de modo que:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(L)}{\log 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{\log 3^n}$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 2}{n \log 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2}{\log 3}$$

$$D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.63093$$

Para calcular la dimensión fractal de la curva de von Koch hay que notar que hacen falta 4^n cajas de tamaño $(\frac{1}{3})^n$ para cubrirlo (ver sección 2.1.2), y por lo tanto:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(L)}{\log 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4^n}{\log 3^n}$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 4}{n \log 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4}{\log 3}$$

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2619$$

Nótese que la definición de dimensión así construida, da un entero que coincide con la dimensión topológica (véase el apéndice C) de los objetos de “autosemejanza simple” como el segmento de recta, el cuadrado o el cubo y, o no es entera o es mayor que la dimensión topológica para los “picudos y arrugados”.

En la época en la que comenzó a desarrollarse la geometría fractal, muchos científicos la utilizaron como herramienta principal en sus investigaciones y querían encontrar fractales en todos lados. Es por eso que en todos los objetos en donde había muchos niveles de estructura, se calculaba la dimensión fractal. Tal es el caso de la costa de Noruega.

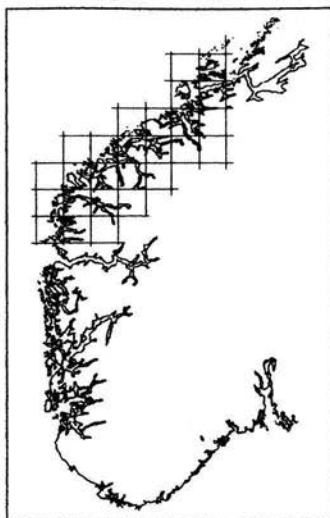


Figura 2.13: Se caracteriza por su complejidad al presentar muchos niveles de estructura. Mandelbrot sugirió en 1988 que este tipo de paisajes son fractales.

Calculemos su dimensión fractal:

Al medir la orilla de la costa L con “cajas” de distintos tamaños r y transformar logarítmicamente los datos, se obtiene la figura 2.14 que se ve como la gráfica de una recta con pendiente -0.52 . Ésto nos indica que la longitud L de la costa de Noruega se relaciona con r mediante una ley de potencias

$$L(r) \propto r^{\delta} \quad (2.4)$$

y $\delta = -0.52$ pues

$$L = ar^{\delta}$$

$$\log L = \log ar^{\delta}$$

$$\log L = \delta \log r + \log a$$

por lo que δ es la pendiente de la recta que se obtiene al graficar en escala logarítmica: $\log L$ como función de $\log r$.

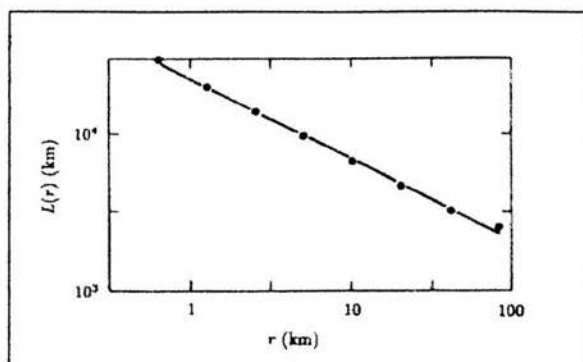


Figura 2.14: Gráfica del logaritmo de la longitud de la costa de Noruega como función del logaritmo de la unidad de longitud empleada. La pendiente de la recta obtenida es útil para calcular la dimensión fractal.

Ahora bien, para calcular la dimensión fractal de un objeto se utiliza $N(r)$, el mínimo número de cajas que se necesitan para cubrirlo y, en este caso ³:

$$N(r) = \frac{L(r)}{r} \quad (2.5)$$

o dicho de otra manera

$$N(r) = r^{\delta-1}$$

la dimensión fractal D de un objeto se obtiene calculando:

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log N(r)}{\log(1/r)}$$

de modo que

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log r^{\delta-1}}{\log r^{-1}} = \frac{\delta-1}{-1}$$

y

$$D = 1 - \delta \quad (2.6)$$

³Suponemos sin pérdida de generalidad que $a = 1$ pues el coeficiente a indica la ordenada al origen en la gráfica con ejes logarítmicos pero no influye en la pendiente de la recta obtenida y, por lo tanto, no influye en el cálculo de la dimensión fractal.

Como en las costas de Noruega $\delta = -0.52$, su dimensión fractal es $D = 1.52$ que tampoco es un número entero.

Como dijimos en la página 15, la invariancia respecto al cambio de escala puede tener un límite, y la costa de Noruega es un ejemplo de ello. Si seguimos buscando estructura y autosemejanza en pedazos cada vez más pequeños, llegará un momento en que tendremos sólo granos de arena. Así, la fractalidad en los objetos naturales se cumple en un número finito de escalas de magnitud.

Hemos encontrado una diferencia importante entre objetos autosemejantes como una línea o un plano (cuya dimensión fractal es un número entero) y los objetos fractales que presentan mayor estructura y complejidad (cuya dimensión fractal puede no ser un número entero). Demos ahora una definición: (Tomada de [7])

Definición 3 *Un fractal es una estructura formada por copias de sí misma a menor escala. Tiene una peculiar invariancia a través de las escalas que hace que cada fragmento del fractal sea semejante (autosemejante) a cualquier fragmento más grande e incluso al fractal en su conjunto, y su dimensión fractal no es un número entero, o es un número mayor que su dimensión topológica.*

La geometría fractal y la teoría de los sistemas dinámicos están íntimamente ligadas, pues un fractal puede generarse mediante un proceso dinámico que indica el estado del objeto en cada instante de tiempo (como las reglas de recurrencia utilizadas en los ejemplos presentados en la sección anterior).

Los cambios que presenta el objeto conforme transcurre el tiempo se pueden establecer como una función $f(t)$ que depende directamente del tiempo, o bien, de manera iterada. Es decir, a partir del estado X_t del objeto en el tiempo t , se obtiene el estado X_{t+1} (una unidad de tiempo después) aplicando una regla f , dada de acuerdo a una relación del tipo:

$$X_{t+1} = f(X_t)$$

Al graficar este tipo de dinámica se obtienen generalmente trayectorias complicadas. Tal es el caso de los *atractores extraños*, los cuales además de ser la región del espacio hacia la que tiende una órbita caótica, presentan estructura fractal.

2.2 Fractales temporales

Cuando hablamos de fractales, casi siempre pensamos en formas geométricas u objetos en el espacio con patrones particulares, de hecho decimos que los fractales se caracterizan por su invariancia al cambio de escala, su dimensión fractal fraccional o mayor a su dimensión topológica, etcétera, y las imaginamos como características meramente espaciales.

Las fluctuaciones temporales de algunos sistemas dinámicos muestran una estructura sobre distintas magnitudes en el tiempo, de la misma manera que los objetos fractales exhiben una estructura sobre distintas magnitudes espaciales.

¿Existen fenómenos que presenten fractalidad temporal? ¿Cómo se ven dichos fenómenos? Imaginemos un fenómeno en el que se detecta una señal producida durante un mes varias veces al año. Al analizar la señal de un mes, se detecta que ésta se produce durante un día varias veces al mes, y al analizar la señal a lo largo de un día, se observa que ésta se produce durante una hora varias veces al día, la cual a su vez, se produce durante un minuto varias veces en la hora, etcétera. Es decir, se presenta en todas las escalas temporales; y cada vez que se intenta dividirlo o analizarlo en una parte más pequeña, se observa la misma estructura.

A diferencia de los fractales matemáticos, los objetos en la naturaleza no exhiben una autosemejanza exacta. Sin embargo, muchos objetos naturales presentan un cierto grado de autosemejanza *estadística*, por lo menos sobre una gama limitada de escalas espaciales o temporales. Por ejemplo, las ramificaciones del pulmón muestran autosemejanza estadística sobre 14 dicotomías, y algunos árboles se ramifican sobre 8 dicotomías [26]. La autosemejanza estadística se refiere a repeticiones relacionadas con la complejidad total, pero no al patrón exacto. Específicamente, los detalles en una escala dada son similares, aunque no idénticos, a los mismos considerados en escalas más grandes o más pequeñas.

La gráfica de las series temporales presenta variables físicas diferentes en cada uno de los ejes, de modo que para determinar si ésta es autosemejante o autosimilar, es necesario rescalar con 2 distintos factores (uno en cada eje), y posteriormente comparar las propiedades estadísticas de la serie rescalada con la serie original. (Véase la figura 2.15)

Las variaciones autosemejantes en escalas temporales, muestran en la gráfica de amplitud como función de la frecuencia un comportamiento de ley

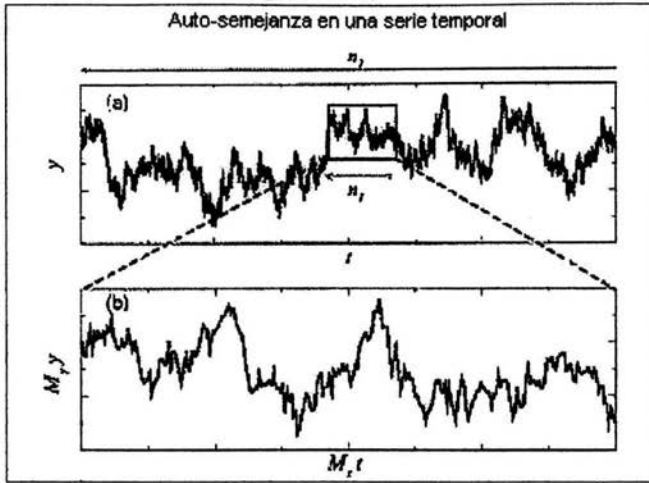


Figura 2.15: La auto-similitud en una serie temporal es una semejanza estadística.

de potencias de la forma $f^{-\beta}$.

Existen algoritmos computacionales para determinar la dimensión fractal de un fractal temporal. Como las series temporales de una sola variable (como la temperatura en flujos atmosféricos) pueden reflejar el efecto acumulativo de muchos otros factores, se cree que la dimensión fractal puede indicar el número de los parámetros de control de la evolución.

Las series de tiempo pueden ser útiles para describir la dinámica subyacente del fenómeno asociado. La evolución espaciotemporal de sistemas dinámicos no fue investigada de manera conjunta sino hasta 1987. Los sistemas dinámicos pueden ser ampliamente estudiados a través de las gráficas de las series temporales, que consisten en graficar una variable del sistema como función del tiempo $N(t)$.

Una manera de comenzar a analizar estos sistemas dinámicos, es averiguando si $N(t)$ influye en lo que se encontrará en $N(t + \tau)$. No en un específico t sino a lo largo de todo el tiempo. Dicho en otras palabras es importante conocer la relación establecida por la dinámica entre dos estados del sistema separados por τ unidades de tiempo.

Una estadística que mide el grado de relación entre $X(t)$ y $X(t + \tau)$ es la

autocorrelación, que describiremos en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Autocorrelación y espectro de potencias

El análisis de series temporales es una herramienta muy útil en el estudio de los sistemas dinámicos, ya que puede ayudar a entender de manera más amplia las características principales del sistema dinámico asociado. Los conceptos de autocorrelación y espectro de potencias, que veremos a lo largo de este capítulo, son instrumentos particularmente útiles para tal fin.

3.1 Autocorrelación

Algunas series temporales presentan en ocasiones patrones o comportamientos en los cuales los valores se relacionan. Una forma de medir el grado de relación entre un valor de una serie y otro valor τ unidades de tiempo después, es la *autocorrelación*.

Si consideramos el valor promedio \bar{f} de una función $f(t)$ definida en toda la recta real como:

$$\bar{f} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) dt$$

y dado que la función $X(t + \tau)$ describe el comportamiento de $X(t)$, τ unidades de tiempo después, entonces podemos definir la autocorrelación como:

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t + \tau) X(t) dt \quad (3.1)$$

50CAPÍTULO 3. AUTOCORRELACIÓN Y ESPECTRO DE POTENCIAS

y se denota

$$C(\tau) = \langle X(t)X(t + \tau) \rangle$$

Normalizando $\overline{C(\tau)} = C(\tau)/C(0)$ se tiene que $-1 \leq \overline{C(\tau)} \leq 1$.

Si no hay correlación en la serie temporal, se tiene $\overline{C(\tau)} = 0$. Si se tiene $\overline{C(\tau)} = 1$ se dice que la serie temporal está altamente (auto)correlacionada. Por el contrario, si $\overline{C(\tau)}$ toma valores cercanos a -1 , entonces la serie está anticorrelacionada.

Si consideramos una nueva variable $\eta = t + \tau$, tenemos que

$$X(t + \tau)X(t) = X(\eta)X(\eta - \tau) = X(\eta + \tau)X(\eta)$$

entonces

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t + \tau)X(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(\eta + \tau)X(\eta) d\eta = C(-\tau) \end{aligned}$$

Es decir

$$C(\tau) = C(-\tau)$$

por lo que con solo considerar valores $\tau \geq 0$, obtenemos el comportamiento $C(\tau)$ para todo τ .

En la práctica, primero medimos la autocorrelación entre la serie de tiempo original $X(t)$ y la serie de tiempo con retraso de una unidad de tiempo, comparando el valor de X en t_1 con el correspondiente a $t_{1+1} = t_2$, el valor de X en t_2 con el de X en $t_{2+1} = t_3$, el de $X(t_3)$ con $X(t_{3+1}) = X(t_4)$, etcétera. Posteriormente, comparamos la serie de tiempo original con la serie de tiempo con retraso de 2 unidades de tiempo, luego con la de 3 y así sucesivamente.

Cada uno de los valores $C(\tau)$ obtenidos se denomina *coeficiente de autocorrelación con retraso τ* . Todos juntos forman la función de autocorrelación y la gráfica del coeficiente de autocorrelación como función del retraso se llama *correlograma*.

Si consideramos una serie temporal $X(t)$ periódica con periodo T , se cumple que $X(t) = X(t + T)$ para todo tiempo t . Esto quiere decir que los valores están altamente correlacionados al analizar la serie original, y la

serie con T unidades de tiempo de retraso (son iguales). Lo mismo ocurre al correlacionar la serie original con la serie $2T$ unidades de tiempo después, y con las de $3T$, $4T$, ..., nT , ... Tenemos entonces que $C(\tau) = C(\tau + T)$ para todo tiempo t . Dicho de otra manera, el correlograma de una serie temporal periódica con periodo T es otra función periódica con el mismo periodo.

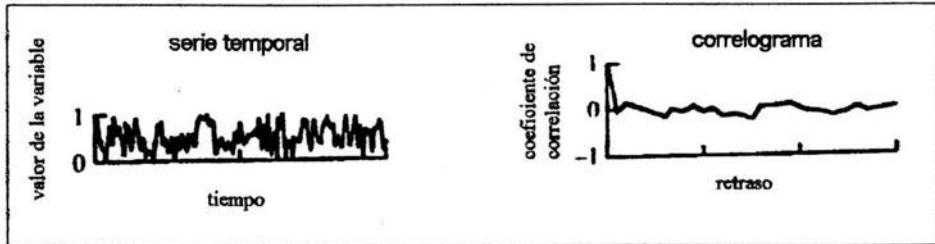


Figura 3.1: Datos sin correlación (ruido) y su respectivo correlograma

Si queremos hacer el correlograma de una serie de datos hecha al azar, tendremos que se correlaciona únicamente con ella misma. Esto es, el correlograma será una función cercana a cero, con un “pico” en $\tau = 0$. (ver figura 3.1)

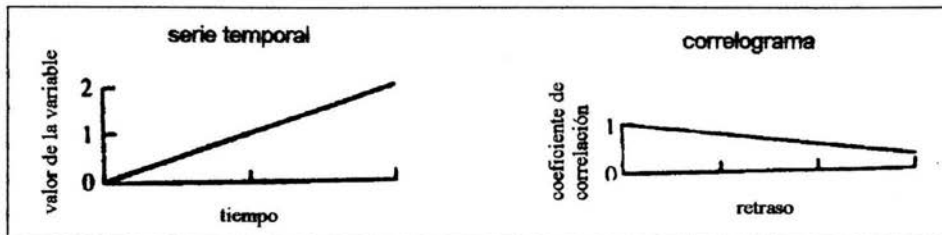


Figura 3.2: Gráfica de una recta y su respectivo correlograma

Si tenemos una serie temporal $x(t)$ que se puede escribir como suma de otras dos (es decir, $x(t) = a(t) + b(t)$), entonces se puede obtener su correlograma como la suma de los correlogramas de $a(t)$ y de $b(t)$ (ver figuras 3.3 y 3.4).

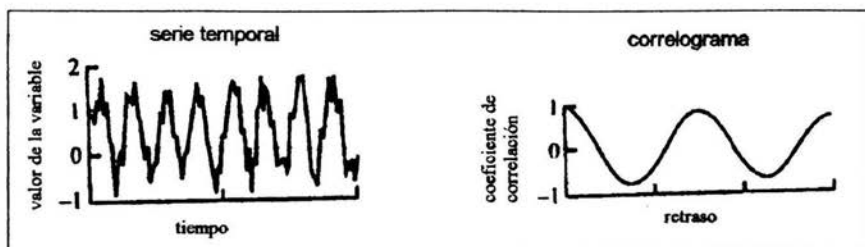


Figura 3.3: Función seno con ruido y su respectivo correlograma

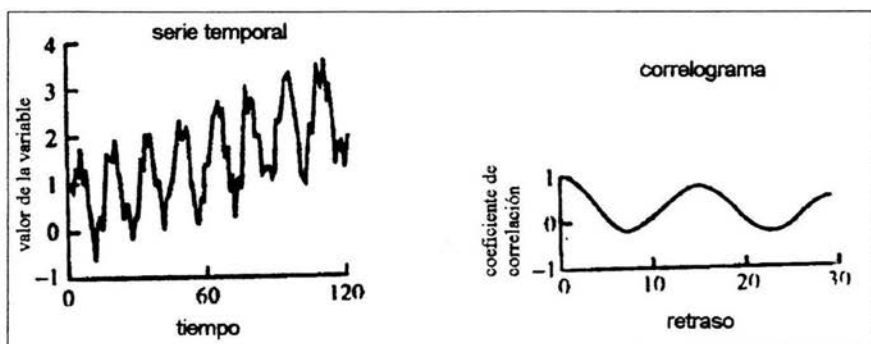


Figura 3.4: Suma de una función seno, una recta y datos no correlacionados, y su respectivo correlograma

El análisis de series autocorrelacionadas requiere de más cuidado. Algunas medidas estadísticas corresponden a datos independientes o no relacionados, y tal análisis puede dar resultados falsos e influir nuestra predicción en el tiempo.

3.2 Series de Fourier

Muchos fenómenos en la naturaleza se presentan periódicamente: los ciclos lunares, el movimiento de los astros, ritmos mensuales y circadianos, el canto de algunos animales (grillos o gallos), etcétera. En estos, hay una magnitud periódica asociada al proceso o fenómeno que permite representarlo como

una función (periódica). Pero ¿qué pasa con los fenómenos que no lo son? ¿Pueden interpretarse como una suma de funciones o una superposición de ondas que sí sean periódicas?

Si tenemos un rayo de luz blanca y lo apuntamos hacia un prisma, podemos observar cómo se descompone en los siete colores del espectro luminoso. Lo mismo se puede hacer con las funciones. Por medio de un método descubierto por el físico-matemático francés Joseph Fourier, la función pasa por un "filtro" y puede representarse como la suma de funciones (componentes) periódicas, cada una con distinta frecuencia y amplitud.

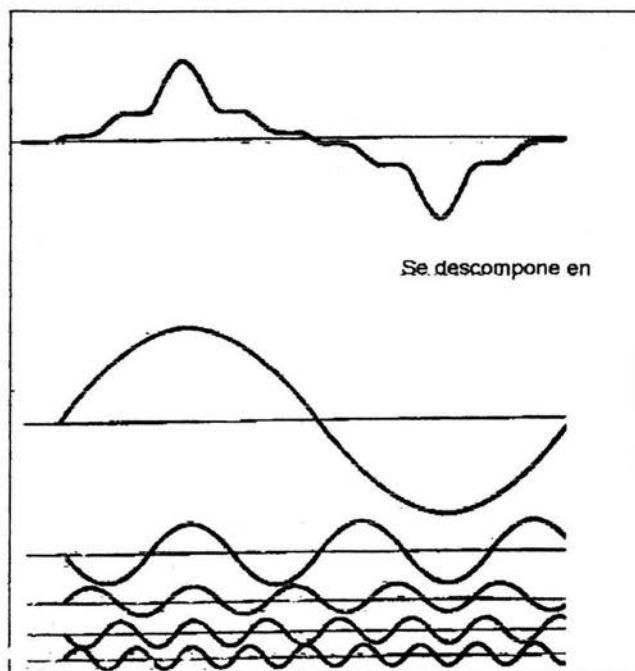


Figura 3.5: Gráfica de funciones periódicas cuya suma da origen a la función original.

Tomemos una función $f(t)$ periódica de periodo $T > 0$. Es decir, f satisface que:

$$f(t) = f(t + T) \quad \text{para todo } t$$

Ahora supongamos que es posible expresar a dicha función como una suma

54CAPÍTULO 3. AUTOCORRELACIÓN Y ESPECTRO DE POTENCIAS

infinita de senos y cosenos con frecuencia angular $\frac{2k\pi}{T}$ y $k = 0, 1, 2, \dots$. Esto es:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \quad (3.2)$$

Donde a_k y b_k , las amplitudes de cada componente armónica, son una medida de la importancia del término al que están asociadas. Es decir, nos dicen qué tanto “pesa” cada uno.

Determinemos los valores de a_k, b_k respectivamente. Empecemos por a_k .

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (3.2) por $\cos\left(\frac{2l\pi t}{T}\right)$ e integrando respecto a t en el intervalo $[-T/2, T/2]$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt \\ &+ \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right] \cos\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt \\ &+ \int_{-T/2}^{T/2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right] \cos\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt \end{aligned}$$

Intercambiando el orden de la sumatoria y la integración¹

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt \end{aligned}$$

Por las propiedades de ortogonalidad², se tiene que todos los términos de la expresión anterior se anulan, excepto el correspondiente a $k = l$. De modo

¹ Si la sucesión de sumas parciales converge uniformemente, entonces

$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n$

² Ver apéndice A

que:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt = a_l \int_{-T/2}^{T/2} \cos^2\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt = \frac{T}{2} a_l$$

es decir,

$$a_l = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt \quad l = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Si integramos (3.2) en el intervalo $[-T/2, T/2]$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} dt + \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt + \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt \\ \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} dt + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt \end{aligned}$$

por las propiedades de ortogonalidad, todos los términos excepto el primero se anulan y

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{T}{2} a_0,$$

de donde

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (3.4)$$

Además, como $\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) = 1$ para $k = 0$, las fórmulas (3.3) y (3.4) pueden resumirse en:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Determinemos ahora los coeficientes b_k . Si se multiplica (3.2) por $\operatorname{sen}\left(\frac{2l\pi t}{T}\right)$ y se integra respecto a t en el intervalo $[-T/2, T/2]$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen}\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt &= \frac{1}{2} a_0 \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt \end{aligned}$$

56CAPÍTULO 3. AUTOCORRELACIÓN Y ESPECTRO DE POTENCIAS

una aplicación más de las propiedades de ortogonalidad da,

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen} \left(\frac{2l\pi t}{T} \right) dt = \frac{T}{2} b_l$$

Es decir

$$b_l = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen} \left(\frac{2l\pi t}{T} \right) dt \quad l = 1, 2, 3, \dots$$

De modo que a_k, b_k están dadas por:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \left(\frac{2k\pi t}{T} \right) f(t) dt \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen} \left(\frac{2k\pi t}{T} \right) f(t) dt \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (3.6)$$

Ejemplo 1 Encontrar la serie de Fourier para la función cuya gráfica se muestra en la figura 3.6:

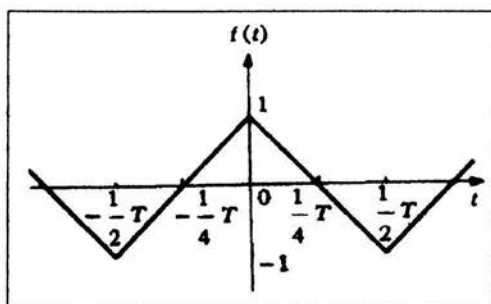


Figura 3.6:

Esta función se puede expresar como

$$f(t) = \begin{cases} 1 + \frac{4t}{T}, & -\frac{T}{2} < t \leq 0 \\ 1 - \frac{4t}{T}, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \end{cases}$$

Determinemos los valores a_k, b_k .

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2(0)\pi t}{T}\right) f(t) dt = 2 \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

de modo que

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 f(t) dt + 2 \frac{1}{T} \int_0^{T/2} f(t) dt \\ a_0 &= 2 \frac{1}{T} \int_{-T/2}^0 \left(1 + \frac{4t}{T}\right) dt + 2 \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \left(1 - \frac{4t}{T}\right) dt \end{aligned}$$

integrando

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \frac{1}{T} \left[t + \frac{2t^2}{T} \right]_{-T/2}^0 + 2 \frac{1}{T} \left[t - \frac{2t^2}{T} \right]_0^{T/2} \\ a_0 &= \frac{2}{T} \left[0 + \frac{T}{2} - \frac{T}{2} + \frac{T}{2} - \frac{T}{2} - 0 \right] = 0 \\ a_0 &= 0 \end{aligned}$$

ahora bien

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) f(t) dt$$

es decir

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \left[1 + \frac{4t}{T}\right] dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \left[1 - \frac{4t}{T}\right] dt \\ a_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt + \frac{8}{T^2} \int_{-T/2}^0 t \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt \\ &\quad - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt \end{aligned}$$

haciendo $\tau = -t$

$$a_k = 0 + \frac{8}{T^2} \int_{-T/2}^0 (-\tau) \cos\left(\frac{2k\pi(-\tau)}{T}\right) (-d\tau) - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt$$

58CAPÍTULO 3. AUTOCORRELACIÓN Y ESPECTRO DE POTENCIAS

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{8}{T^2} \int_{-T/2}^0 \tau \cos\left(\frac{2k\pi\tau}{T}\right) d\tau - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt \\
 a_k &= -\frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} \tau \cos\left(\frac{2k\pi\tau}{T}\right) d\tau - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt \\
 a_k &= -\frac{16}{T^2} \int_0^{T/2} \tau \cos\left(\frac{2k\pi\tau}{T}\right) d\tau
 \end{aligned}$$

De donde, si $v = \frac{2k\pi\tau}{T}$ se tiene que

$$\tau = \frac{T}{2k\pi} v, \quad d\tau = \frac{T}{2k\pi} dv$$

cuando $\tau = 0$, $v = 0$ y para $\tau = \frac{T}{2}$, $v = \frac{2k\pi}{T} \frac{T}{2} = k\pi$

de modo que

$$\begin{aligned}
 a_k &= -\frac{16}{T^2} \int_0^{k\pi} \frac{T}{2k\pi} (v \cos v) \frac{T}{2k\pi} dv = -\frac{16}{T^2} \int_0^{k\pi} \frac{T^2}{(2k\pi)^2} (v \cos v) dv \\
 a_k &= -\frac{4}{k^2\pi^2} \int_0^{k\pi} v \cos v dv = -\frac{4}{k^2\pi^2} [v \sin v + \cos v]_{v=0}^{k\pi} \\
 a_k &= -\frac{4}{k^2\pi^2} [\cos k\pi - \cos 0] = \frac{4}{k^2\pi^2} [1 - \cos k\pi]
 \end{aligned}$$

y

$$a_k = \begin{cases} 0 & k \text{ par} \\ \frac{8}{k^2\pi^2} & k \text{ impar} \end{cases}$$

Análogamente

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) f(t) dt \\
 b_k &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^0 \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \left[1 + \frac{4t}{T}\right] dt \\
 &\quad + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \left[1 - \frac{4t}{T}\right] dt \\
 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt + \frac{8}{T^2} \int_{-T/2}^0 t \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt \\
 &\quad - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt
 \end{aligned}$$

haciendo $\tau = -t$

$$\begin{aligned} b_k &= 0 + \frac{8}{T^2} \int_{-T/2}^0 (-\tau) \operatorname{sen} \left(\frac{2k\pi(-\tau)}{T} \right) (-d\tau) \\ &\quad - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \operatorname{sen} \left(\frac{2k\pi t}{T} \right) dt \\ &= -\frac{8}{T^2} \int_{-T/2}^0 \tau \operatorname{sen} \left(\frac{2k\pi\tau}{T} \right) d\tau - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \operatorname{sen} \left(\frac{2k\pi t}{T} \right) dt \\ &= \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} \tau \operatorname{sen} \left(\frac{2k\pi\tau}{T} \right) d\tau - \frac{8}{T^2} \int_0^{T/2} t \operatorname{sen} \left(\frac{2k\pi t}{T} \right) dt = 0 \\ b_k &= 0 \text{ para todos los valores de } k \end{aligned}$$

De modo que

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \frac{2\pi t}{T} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{2(3)\pi t}{T} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{2(5)\pi t}{T} + \dots \right)$$

Nótese que la función del ejemplo es una función par, y que su serie de Fourier tiene sólo términos pares. Esto admite la siguiente generalización.

Consideremos una función $f(t)$ par. Ésto es, $f(t) = f(-t)$ para todo t .

Su desarrollo en serie de Fourier es de la forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \left(\frac{2k\pi t}{T} \right) + b_k \operatorname{sen} \left(\frac{2k\pi t}{T} \right)$$

con

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \left(\frac{2k\pi t}{T} \right) f(t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen} \left(\frac{2k\pi t}{T} \right) f(t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ahora bien, como $f(t)$ y $\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)$ son funciones pares, su producto³ $f(t) \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)$ es también una función par y⁴

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \left(\frac{2k\pi t}{T} \right) f(t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \cos \left(\frac{2k\pi t}{T} \right) f(t) dt$$

³ver apéndice B.1

⁴ver apéndice B.2

60CAPÍTULO 3. AUTOCORRELACIÓN Y ESPECTRO DE POTENCIAS

Por otro lado, $\text{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)$ es una función impar, de modo que⁵ $f(t) \text{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)$ es una función impar y⁶

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) f(t) dt = 0$$

Por lo que hemos demostrado la siguiente:

Proposición 2 Si $f(t)$ es una función periódica par con periodo T , entonces su serie de Fourier se expresa como una suma de funciones coseno y una constante

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)$$

donde a_k es de la forma

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) f(t) dt$$

Consideremos ahora una función $f(t)$ impar. Ésto es, $f(t) = -f(-t)$ para todo t

Su desarrollo en serie de Fourier es de la forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) + b_k \text{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right)$$

con

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) f(t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

y

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \text{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) f(t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

⁵ver apéndice B.1

⁶ver apéndice B.2

como $f(t)$ y $\text{sen}(x)$ son funciones impares, su producto $f(t)\text{sen}(x)$ es una función par⁷ y

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \text{sen} \left(\frac{2k\pi t}{T} \right) f(t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \text{sen} \left(\frac{2k\pi t}{T} \right) f(t) dt$$

Por otro lado, $\cos(x)$ es una función par, de modo que $f(t)\cos(x)$ es una función impar y

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \left(\frac{2k\pi t}{T} \right) f(t) dt = 0$$

Por lo que hemos demostrado la siguiente:

Proposición 3 Si $f(t)$ es una función periódica impar con periodo T , entonces su serie de Fourier se expresa como una suma de funciones seno y una constante

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{sen} \left(\frac{2k\pi t}{T} \right)$$

donde b_k es de la forma

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \text{sen} \left(\frac{2k\pi t}{T} \right) f(t) dt$$

En esta sección hemos hablado solamente del desarrollo en series de Fourier de funciones periódicas con periodo T . Si tenemos una función $f(t)$ no periódica definida en un intervalo finito $(0, \alpha)$, se puede desarrollar en una serie de Fourier definida solamente en dicho intervalo.

Lo que se tiene que hacer es una extensión $g(t)$ de la función, de modo que $g(t)$ sea periódica con un periodo dado, y que tome los mismos valores que $f(t)$ en el intervalo $(0, \alpha)$.

Encontremos otra manera de expresar las series de Fourier.

⁷ver apéndice B.1

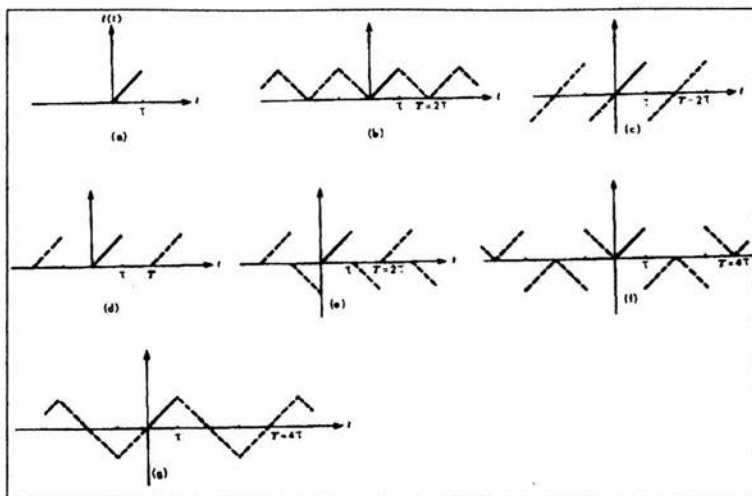


Figura 3.7: (a) Función definida en el intervalo $(0, \alpha)$. (b) - (g) Distintas extensiones periódicas de la función en (a) para obtener series de Fourier.

3.2.1 Forma compleja de las series de Fourier

Sabemos que:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x)$$

$$e^{-ix} = \cos(x) - i \operatorname{sen}(x)$$

De donde

$$\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos(x)$$

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \operatorname{sen}(x)$$

De modo que

$$a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) = a_k \left(\frac{e^{i\frac{2k\pi t}{T}} + e^{-i\frac{2k\pi t}{T}}}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
& + b_k \left(\frac{e^{i\frac{2k\pi t}{T}} - e^{-i\frac{2k\pi t}{T}}}{2i} \right) \\
& = \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i} \right) e^{i\frac{2k\pi t}{T}} + \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i} \right) e^{-i\frac{2k\pi t}{T}} \\
& = \left(\frac{a_k}{2} - \frac{ib_k}{2} \right) e^{i\frac{2k\pi t}{T}} + \left(\frac{a_k}{2} + \frac{ib_k}{2} \right) e^{-i\frac{2k\pi t}{T}} \\
& = \left(\frac{a_k - ib_k}{2} \right) e^{i\frac{2k\pi t}{T}} + \left(\frac{a_k + ib_k}{2} \right) e^{-i\frac{2k\pi t}{T}}
\end{aligned}$$

Haciendo

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$$

$$a_k \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) + b_k \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) = c_k e^{i\frac{2k\pi t}{T}} + c_{-k} e^{-i\frac{2k\pi t}{T}}$$

y

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) f(t) dt - i \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) f(t) dt \right] \\
c_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) f(t) dt - i \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) f(t) \right] dt \\
c_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \left[e^{-\frac{2ki\pi t}{T}} \right] dt
\end{aligned}$$

Ahora bien

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\frac{2k\pi t}{T}} + c_{-k} e^{-i\frac{2k\pi t}{T}}$$

De modo que

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{i\frac{2k\pi t}{T}} + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{i\frac{2k\pi t}{T}}$$

o bien,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2ki\pi t}{T}}$$

y los números $c_k \in \mathbb{C}$ se llaman *coeficientes de Fourier complejos*. Si $f(t)$ es real, entonces c_k y c_{-k} son complejos conjugados.

3.3 Transformada de Fourier

Hasta ahora hemos logrado representar, gracias al método que descubrió Fourier, funciones periódicas con periodo T , o funciones no periódicas definidas únicamente en un intervalo $(0, \alpha)$ en términos de series de senos y cosenos. Pero existen muchas otras funciones que no pertenecen a ninguna de estas categorías y nos gustaría poder caracterizarlas también como suma de funciones periódicas.

La manera de hacerlo es utilizando oscilaciones con todas las frecuencias (no solamente múltiplos de una frecuencia dada), formando un continuo en los coeficientes (que son las amplitudes) como función de ellas. En principio, podría decirse que son funciones periódicas de periodo infinito, y

$$T \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{T} \rightarrow 0$$

Este método se denomina transformada de Fourier, y es de la forma:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(f)e^{2\pi ift} df \quad (3.7)$$

$$a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi ift} dt \quad (3.8)$$

De esta manera, se tienen dos representaciones de la misma función: en la primera, depende del tiempo; en la otra, es función de la frecuencia. Y por medio de la transformada de Fourier se pasa de una a otra.

Se dice que la transformada de Fourier de $g(t)$ es $a(f)$, o bien, $\mathfrak{F}[g(t)] = a(f)$, y $g(t)$ resulta ser la transformada de Fourier inversa.

Demostremos algunas propiedades de la transformada de Fourier:

3.3.1 Propiedades de la transformada de Fourier

- Sean a, b dos números reales y supongamos que $\mathfrak{F}[f_1(t)] = F_1$
 $\mathfrak{F}[f_2(t)] = F_2$

La transformada de Fourier es un operador lineal en el espacio vectorial de las funciones reales de variable real. Esto es,

$$\mathfrak{F}[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1 + bF_2$$

Dado que,

$$\mathfrak{F}[af_1(t) + bf_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} [af_1(t) + bf_2(t)]e^{-2\pi ift} dt$$

O bien,

$$\mathfrak{F}[af_1(t) + bf_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} af_1(t)e^{-2\pi ift} dt + \int_{-\infty}^{\infty} bf_2(t)e^{-2\pi ift} dt$$

Es decir,

$$\mathfrak{F}[af_1(t) + bf_2(t)] = a \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-2\pi ift} dt + b \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-2\pi ift} dt$$

entonces

$$\mathfrak{F}[af_1(t) + bf_2(t)] = aF_1 + bF_2$$

Es la propiedad de linealidad.

► Supongamos que $a > 0$ y $\mathfrak{F}[f(t)] = F(f)$

Entonces

$$\mathfrak{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-2\pi ift} dt$$

sea $at = x$

$$\mathfrak{F}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\frac{2\pi ifx}{a}} dx = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{f}{a}\right)$$

Supongamos que $a < 0$ y $\mathfrak{F}[f(t)] = F(f)$

Entonces

$$\mathfrak{F}[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-2\pi ift} dt$$

sea $at = x$

$$\Im[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{-\infty} f(x) e^{-\frac{2\pi i f x}{a}} dx = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\frac{2\pi i f x}{a}} dx = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{f}{a}\right)$$

Entonces, para $a \in \mathfrak{R}$ y $\Im[f(t)] = F(f)$

$$\Im[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{f}{a}\right) \quad (3.9)$$

Es la propiedad de escalamiento.

Observando detenidamente esta propiedad, se puede ver que hacer un *cambio de escala* en el tiempo y contraerlo por un factor a , es equivalente a expandir las frecuencias por el mismo factor a

Hay otras maneras de representar a la transformada de Fourier.

Tomando la frecuencia angular, es decir, $w = 2\pi f$:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} a(w) e^{iwt} dw$$

$$a(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

o bien

$$f(t) = a_1 \int_{-\infty}^{\infty} a(w) e^{iwt} dw$$

$$a(w) = a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

donde $a_1 a_2 = \frac{1}{2\pi}$

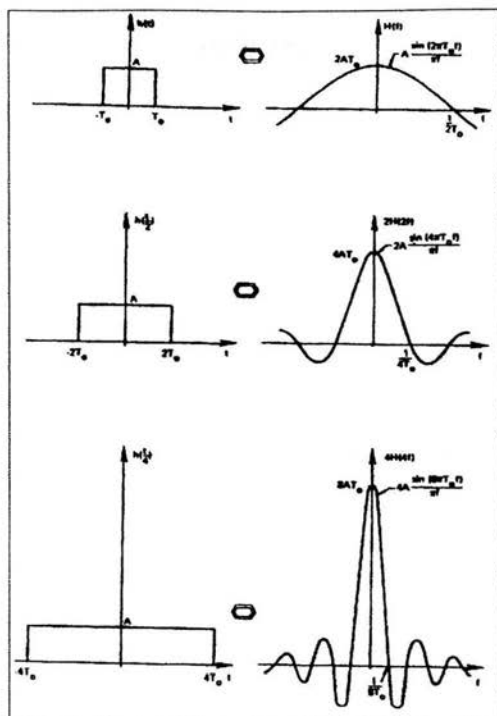


Figura 3.8: Al hacer un cambio de escala en el tiempo de la forma $t \mapsto at$, la transformada de Fourier se calcula como $\frac{1}{|a|}F\left(\frac{f}{a}\right)$

3.3.2 Transformada discreta

Tanto en el cálculo de las series de Fourier como en el de las transformadas se requiere de una expresión analítica de la serie temporal, o de una “fórmula” que describa su comportamiento en un tiempo dado. En la práctica, es más común querer obtener la transformada de Fourier (representar en términos de la frecuencia) de fenómenos en los que no es fácil encontrar una expresión analítica que los caracterice. La única información que se tiene de la serie temporal es una colección de datos o mediciones del estado en el que se encuentra en distintos momentos.

De modo que es necesario encontrar un método que nos permita obtener,

68CAPÍTULO 3. AUTOCORRELACIÓN Y ESPECTRO DE POTENCIAS

a partir de una colección de datos de una serie temporal, una representación de dicha serie en términos de la frecuencia.

Definición 4 Dada una sucesión acotada de orden N ,⁸ se define la transformada discreta de Fourier como

$$F(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-\frac{2k\pi i j}{N}}, \quad j \in [0, N-1] \quad (3.10)$$

$$f(k) = \sum_{j=0}^{N-1} F(j) e^{\frac{2k\pi i j}{N}}, \quad k \in [0, N-1]$$

Ejemplo 2 Dada la sucesión $\{f(k)\}_{k=0}^1 = \{1, 2\}$ su transformada discreta de Fourier está dada por:

$$F(0) = \frac{1}{2} [f(0) e^{-\frac{2(0)\pi i(0)}{2}} + f(1) e^{-\frac{2(1)\pi i(0)}{2}}]$$

$$F(1) = \frac{1}{2} [f(0) e^{-\frac{2(0)\pi i(1)}{2}} + f(1) e^{-\frac{2(1)\pi i(1)}{2}}]$$

de donde

$$F(0) = \frac{1}{2} [f(0) + f(1)]$$

$$F(1) = \frac{1}{2} [f(0) + f(1) e^{-\pi i}]$$

Como $f(0) = 1$, $f(1) = 2$ y $e^{-\pi i} = -1$

$$F(0) = \frac{1}{2} [1 + 2] = \frac{3}{2}$$

$$F(1) = \frac{1}{2} [1 - 2] = \frac{-1}{2}$$

⁸Dada una colección de N datos, definimos una sucesión de orden N como el conjunto

$$\{f(k)\} = \{[0, f(0)], [1, f(1)], \dots, [N-1, f(N-1)]\}$$

o bien

$$\{f(k)\}_{k=0}^{N-1} = \{f(0), f(1), \dots, f(N-1)\}$$

donde el término k de la sucesión se denota $f(k)$.

Se dice que una sucesión es acotada si todos los términos están acotados por un valor M .

y

$$F(j) = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{-1}{2} \right\}$$

De modo que la transformada discreta de Fourier es una operación que transforma una sucesión $\{f(k)\}$ de orden N en otra sucesión $\{F(j)\}$ del mismo orden, sólo que una está dada como función del tiempo y la otra como función de la frecuencia [45].

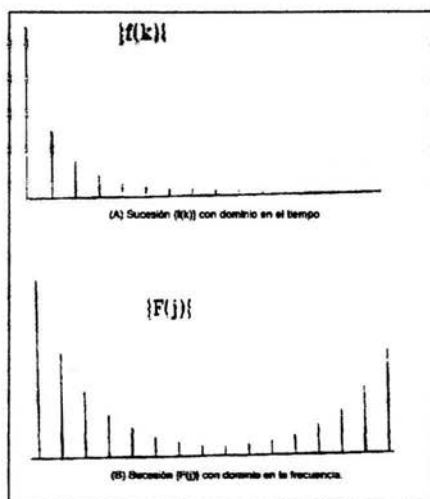


Figura 3.9: (A) Sucesión $\{f(k)\}$ dada en el dominio del tiempo. (B) Transformada discreta de Fourier de la sucesión en (A), dada en el dominio de la frecuencia.

Haciendo $W = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$, se tiene

$$F(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k)W^{kj}, \quad j \in [0, N-1] \quad (3.11)$$

$$f(k) = \sum_{j=0}^{N-1} F(j)e^{-kj}, \quad k \in [0, N-1]$$

70CAPÍTULO 3. AUTOCORRELACIÓN Y ESPECTRO DE POTENCIAS

Sea $F = (F(0), F(1), \dots, F(N - 1))$ $f = (f(0), f(1), \dots, f(N - 1))^T$

entonces (3.11) se puede expresar como:

$$F = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^1 & \dots & W^{N-1} \\ W^0 & W^2 & \dots & W^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W^0 & W^{N-1} & \dots & W^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} f \quad (3.12)$$

o bien

$$F = \frac{1}{N} \Omega f \quad (3.13)$$

donde $\Omega = (a_{N \times N})$ es una matriz simétrica de orden N , en donde $a_{mn} = a_{nm} = W^{mn}$.

Transformada rápida de Fourier

De acuerdo a (3.11), la transformada discreta de Fourier $\{F(j)\}$ de una sucesión $\{f(k)\}$ está dada por

$$F(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k)W^{kj}, \quad j \in [0, N - 1]$$

de donde se observa que cada término $F(j)$ se obtiene al sumar N términos, cada uno de ellos dado por una multiplicación de números complejos. Al ser N funciones las que determinan la transformada discreta de Fourier, podemos calcular $\{F(j)\}$ realizando N^2 sumas y N^2 multiplicaciones.

Si N es muy grande, los cálculos pueden llegar a complicarse mucho y es por eso que se recurre a la transformada rápida de Fourier.

En 1965, J. W. Tukey y J. W. Cooley idearon un algoritmo que simplifica, bajo ciertas condiciones, los cálculos para obtener la transformada discreta de Fourier de una sucesión $\{f(k)\}$. Todo algoritmo que facilite el cálculo de la transformada discreta de Fourier es llamado transformada rápida de Fourier (FFT).

Una manera de encontrar algoritmos es la siguiente:

Dada 3.12 se simplifica Ω por medio de operaciones matriciales, de modo que sea más sencillo calcular 3.13. Este tipo de algoritmos no reducen considerablemente el número de operaciones a realizar, pero sí reducen su dificultad. [14]

Hay otras maneras de encontrar algoritmos que determinen una transformada rápida de Fourier basados en teoría de números o transformaciones polinomiales. [45], [14]

3.3.3 Espectro de potencias

Como se puede apreciar, tanto la transformada de Fourier como la serie de Fourier y la transformada discreta, pertenecen a la teoría de variable compleja, de modo que para facilitar las cuentas se define el espectro de potencias como el cuadrado de la magnitud de dicha transformada

$$S(f) = |a(f)|^2$$

Se puede realizar así una gráfica cuyo eje de las abscisas está dado por las frecuencias f , y el eje de las ordenadas por $S(f)$

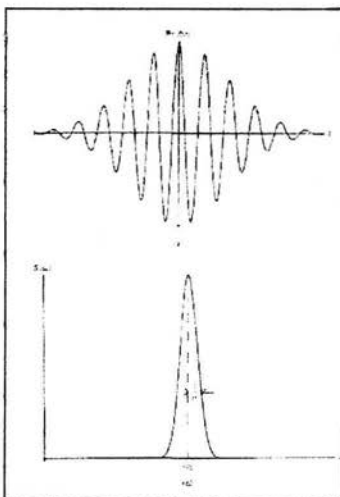


Figura 3.10: Función y su espectro de potencias

72CAPITULO 3. AUTOCORRELACIÓN Y ESPECTRO DE POTENCIAS

En caso de haber calculado la transformada discreta de Fourier, la gráfica del espectro de potencias $S(f)$ como función de las frecuencias, es también llamada peridograma . [47].

Norbert Wiener y Aleksandr Khintchine encontraron que el espectro de potencias $S(f)$ es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación $C(t)$, en el caso en el que $S(f)$ es el espectro de potencias de un proceso estacionario [35]. Esto es:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t)e^{-2\pi ift} dt \quad (3.14)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} C(t) [\cos(-2\pi ft) + i \operatorname{sen}(-2\pi ft)] dt \quad (3.15)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} C(t) [\cos(2\pi ft) - i \operatorname{sen}(2\pi ft)] dt \quad (3.16)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} C(t) \cos(2\pi ft) dt - i \int_{-\infty}^{\infty} C(t) \operatorname{sen}(2\pi ft) dt \quad (3.17)$$

y como $C(t)$ es una función par:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} C(t) \cos(2\pi ft) dt$$

o bien:

$$S(f) = 2 \int_0^{\infty} C(t) \cos(2\pi ft) dt \quad (3.18)$$

La ecuación (3.18) es importante porque nos permite relacionar al espectro de potencias y la autocorrelación. En ocasiones puede resultar muy difícil calcular directamente uno de ellos, de modo que conociendo el valor de uno de ellos podemos obtener, a partir de dicha ecuación, el valor del otro.

Capítulo 4

Ruido $1/f$

4.1 Ruido de colores

Al graficar el espectro de potencias de las series temporales y ver la potencia que caracteriza a cada una de las frecuencias, podemos saber algunas características del sistema dinámico al que corresponde. Analizando dicha gráfica y metaforizando con las ondas de luz visible, podemos relacionar los colores del espectro de luz con los tipos de ruido existentes [30].

Se dice que el ruido tiende al rojo si las frecuencias pequeñas predominan sobre las grandes. Este tipo de ruido se encuentra en el estudio de dinámica poblacional y en oceanografía.

En el ruido azul, en posición al rojo, las frecuencias altas predominan sobre las bajas.

Al graficar el espectro de potencias de algunos sistemas dinámicos y ver que las frecuencias bajas están más representadas que las altas, puede suceder de distintas maneras. En muchas ocasiones, se encuentra que la relación entre una frecuencia y su potencia es como la gráfica de $1/f$.

El ruido $1/f$ es un ejemplo de una ley de potencias y lo que dice es que la frecuencia con la que ocurre un evento es inversamente proporcional a su tamaño. Es decir, el tamaño es proporcional al inverso de la frecuencia f .

Este tipo de relación inversa entre el tamaño de un evento y la probabilidad de que ocurra es llamado ley $1/f$.

La ley $1/f$ se puede observar en muchos sistemas aparentemente diferentes, pero en ocasiones en lugar de ser proporcional a $1/f$, el tamaño varía de

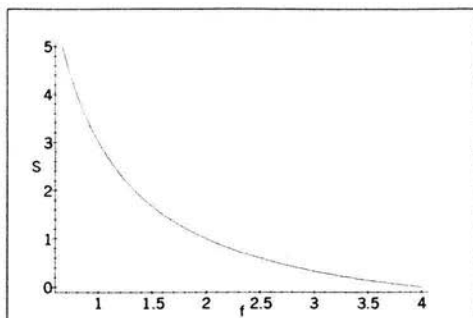


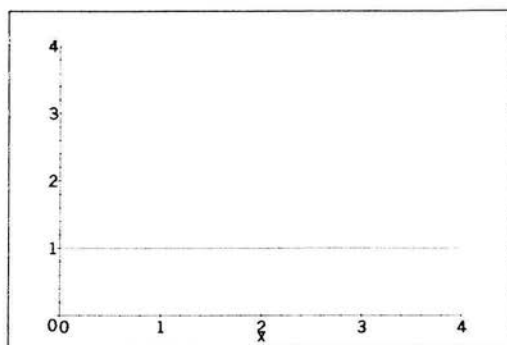
Figura 4.1: Espectro de potencias de ruido $1/f$.

manera directamente proporcional a $1/f^\alpha$ para $\alpha > 0$.

4.1.1 El color del ruido y el parámetro α

De acuerdo al valor de α , existen distintos tipos de ruido:

Si $\alpha = 0$, se dice que el ruido es *blanco*. Así como la luz blanca es la combinación de todos los colores del espectro, el ruido blanco es aquél en el que están representadas todas las frecuencias. Este tipo de ruido es independiente de la frecuencia (por ser $\alpha = 0$). En el ruido blanco, cada valor del proceso es “una sorpresa” independiente de su historia, de sus valores pasados. El proceso no tiene periodicidad ni patrones reconocibles. (La gráfica del espectro indica : “todas las frecuencias con la misma amplitud”)



$\alpha = 0$

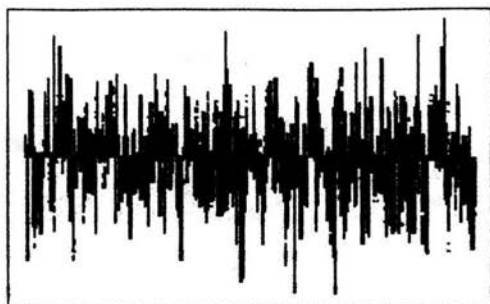
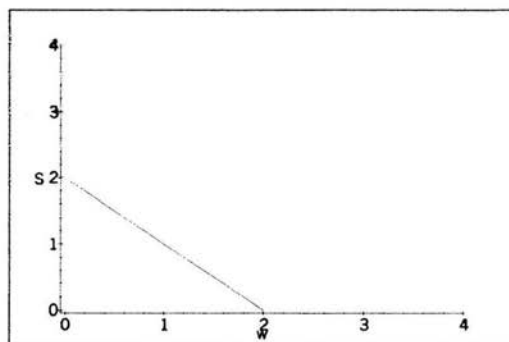


Figura 4.2: Gráfica y espectro de potencias del ruido blanco. Todas las frecuencias están igualmente representadas con la misma amplitud.

Si $\alpha = 1$, se dice que el ruido es color de *rosa*. El ruido rosa parece ser ubicuo en la naturaleza. Su estructura permite la alternancia de sorpresas (pero no demasiadas) con situaciones predecibles (tampoco excesivas, es decir, no es completamente previsible ni completamente independiente de su pasado). El ruido rosa está presente, por ejemplo, en la música clásica e incluso en alguna música moderna.

(La gráfica en ejes logarítmicos del espectro tiene pendiente -1 e indica : “A menor frecuencia mayor amplitud y a mayor frecuencia menor amplitud.”)



$$\alpha = 1$$

Si $\alpha = 2$, se dice que el ruido es *café* (la gráfica en ejes logarítmicos del espectro tiene pendiente -2)

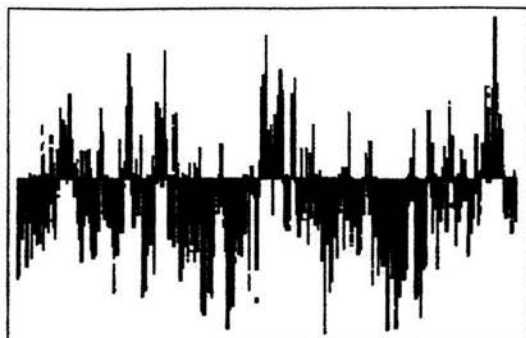
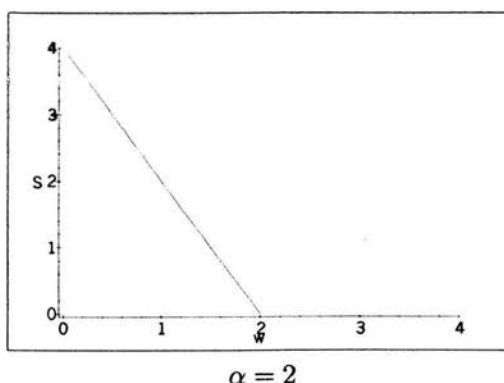


Figura 4.3: Gráfica y espectro de potencias del ruido rosa. Tienen todas las frecuencias representadas, pero influyen más las frecuencias pequeñas que las grandes. $\alpha = 1$



Si $\alpha > 2$, se dice que el ruido es *negro*. Su espectro de potencias desciende con la rapidez de una hipérbola cúbica, de modo que refleja un gran dominio de las frecuencias bajas sobre las altas. El ruido negro se asocia tanto a los desastres naturales (inundaciones), como a los artificiales (apagones y tendencia bajista de los mercados financieros.)

La combinación de una estabilidad dinámica mínima y de los escalamientos espaciales da origen a una ley de potencias para fluctuaciones temporales. El ruido se propaga en términos del *efecto dominó*¹ perturbando los estados mínimamente estables.

¹En los sistemas donde se presenta el efecto dominó, un evento pequeño puede provocar reacciones en cadena de todos los tamaños e incluso puede dar lugar a una "catástrofe".

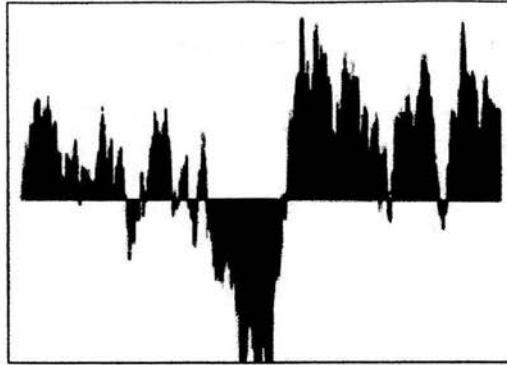


Figura 4.4: Serie temporal y espectro de potencias del ruido café. $\alpha = 2$

Veamos ahora qué pasa con la autocorrelación cuando estamos en presencia de ruido $1/f$. Dada una serie temporal cuyo espectro de potencias es de la forma

$$S(f) \sim f^{-\alpha}$$

y a partir de la fórmula obtenida en el capítulo anterior, que relaciona el espectro de potencias y la autocorrelación, tenemos que:

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{2\pi i f t} df$$

o bien

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{-\alpha} e^{2\pi i f t} df$$

Resolviendo ²

$$C(t) = \pi i \frac{(2\pi i)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} t^{\alpha-1}$$

²Un teorema de la variable compleja dice que [28]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{-\alpha} e^{2\pi i f t} df = \pi i \operatorname{Res}(f^{-\alpha} e^{2\pi i f t}, 0)$$

Haciendo la expansión de Laurent tenemos $f^{-\alpha} e^{2\pi i f t} = \frac{e^{2\pi i f t}}{f^{\alpha}} =$

$$1 + (2\pi i f t) + \frac{(2\pi i f t)^2}{2!} + \dots + \frac{(2\pi i f t)^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!} + \dots = \frac{1}{f^{\alpha}} + \frac{2\pi i t}{f^{\alpha-1}} + \frac{(2\pi i)^2 t^2}{f^{\alpha-2}} + \dots + \frac{(2\pi i)^{\alpha-1} t^{\alpha-1}}{f} + \dots$$

De donde $\operatorname{Res}(f^{-\alpha} e^{2\pi i f t}, 0) = \frac{(2\pi i)^{\alpha-1} t^{\alpha-1}}{(\alpha-1)!}$

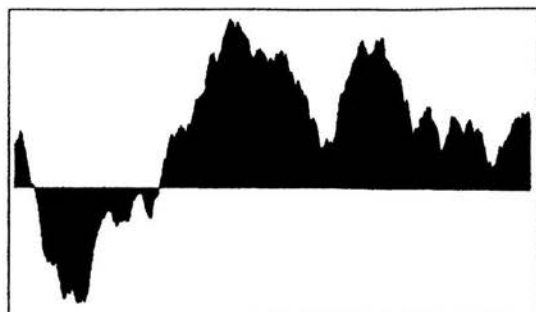


Figura 4.5: En el ruido negro $\alpha > 2$

Es decir,

$$C(t) \sim t^{\alpha-1} \quad (4.1)$$

De donde $S = f^{-\alpha}$ corresponde a correlaciones en el tiempo extremadamente grandes cuando $\alpha \rightarrow 1$

Las variaciones auto-semejantes en diversas escalas temporales producen un espectro de potencias que tiene una distribución $1/f$ y presentan correlaciones temporales de largo alcance implicando persistencia o memoria. El espectro de potencias de la forma $1/f$ fue introducido por Van Der Ziel en 1950 y es ubicuo en los sistemas dinámicos de la naturaleza; tiene una historia larga de más de 40 años de documentación de observación en todos los campos de la ciencia y del comportamiento de otras áreas.

Dentro de las investigaciones hechas al respecto, se ha encontrado que procesos estocásticos estacionarios que se encuentran en condiciones de auto-semejanza (como sucede con los de algunos seres vivos) generan ruido $1/f$, sin importar el tipo y número de variables.

4.2 Aspectos estadísticos de $1/f$. ¿Cómo se detecta?

Muchos fenómenos en la naturaleza que presentan correlaciones temporales a largo plazo, como son temblores, flujos de río, lluvias, ritmo cardiaco o presión sanguínea, presentan un espectro de potencias de la forma $1/f^\alpha$ con $\alpha > 0$.

Es muy difícil diseñar un modelo que encaje en todas las dinámicas de cada uno de los distintos fenómenos que presentan ruido $1/f$. Por ello, es importante encontrar (si es que existen) propiedades generales que caractericen a todas las dinámicas. Como parte de este interés por encontrar un perfil común o un mecanismo genérico, algunos investigadores intentaron identificar el ruido $1/f$ en términos del exponente α , considerando series en un lapso corto debido a que los sistemas en cuestión pueden presentar cambios frecuentes en su comportamiento [34].

Se han encontrado diversas maneras para obtener el valor de α . Veamos qué tan útiles resultan ser algunos de estos métodos de estimación en términos de su varianza y sesgo.

Los *estimadores* a analizar son:

(1)-Regresión lineal del espectro de potencias calculado por medio de la transformada rápida de Fourier (FFT), después de la transformación logarítmica de frecuencia y amplitud.

(2)-Regresión lineal del espectro de potencias integrado sobre bandas logarítmicamente espaciadas [34].

(3)-Exponente de Hurst [13].

(4)-DFA: Estadística propuesta por Peng motivada por el exponente de Hurst [33].

(5)-MLE: Estimador de máxima verosimilitud propuesta por Deriche y Tewfik [34].

El método a seguir es el método Monte-Carlo, que consiste en generar muchos procesos de la forma $1/f^\alpha$ con un α dado y posteriormente con ayuda de un estimador obtener un valor $\hat{\alpha}$ en cada proceso. La diferencia entre la media de las $\hat{\alpha}$ y el verdadero valor α indica el sesgo del estimador y la varianza de $\hat{\alpha}$ en cada proceso indica la varianza del estimador.

Se espera que ambos dependan de α por lo que hay que repetir el análisis para distintos valores de α .

4.2.1 *Método 1* Regresión lineal por medio de la transformada rápida de Fourier

Como el ruido $1/f$ recibe su nombre debido a la gráfica de su espectro de potencias, es natural caracterizar a α de acuerdo a dicha gráfica.

Para ello se hace uso de la transformada rápida de Fourier, a partir de la cual se calcula el espectro de potencias $S(f)$ de la serie temporal (o de los datos registrados). Una vez encontrado dicho valor, se estudia la dependencia entre los logaritmos naturales del espectro de potencias $S(f)$ y de la propia frecuencia f .

Si se tiene ruido $1/f$, es decir $S(f) = af^{-\alpha}$, entonces $\ln S(f)$ es aproximadamente una función lineal decreciente de $\ln f$ de la forma:

$$\ln S(f) = \ln a - \alpha \ln f$$

De manera que su gráfica en el plano $\log - \log$ es una recta de pendiente $-\alpha$, y este valor se obtiene mediante una regresión lineal.

4.2.2 Método 2 Regresión lineal integrando sobre bandas logarítmicamente espaciadas

Hay dos razones por las que el método 1 no es el óptimo.

-La transformada rápida de Fourier produce estimaciones que están uniformemente espaciadas en f , pero que están logarítmicamente espaciadas en $\ln f$. Es decir, hay muchas estimaciones con frecuencias altas y muy pocas con frecuencias bajas; por ésto, el método 1 refleja el patrón para frecuencias altas e ignora lo que sucede con las bajas.

-La transformación logarítmica no preserva estructura en la varianza de las estimaciones en cada frecuencia. Las estimaciones en frecuencias con mucha amplitud tienen varianzas menores a las de frecuencias con baja amplitud. Como en el ruido $1/f$ se asocia baja frecuencia con gran amplitud, el final de la serie presenta mayor varianza y por ende, se produce una estructura "triangular" en la que los valores máximos de las potencias varían más despacio que los valores mínimos (ver figura 4.10B).

Esto nos lleva a considerar otro estimador de α que se base en una estimación espectral cuyos intervalos dependan linealmente del logaritmo de la frecuencia.

Lo que se hace es integrar sobre las bandas $[w_0, \beta w_0]$, $[\beta w_0, \beta^2 w_0]$, $[\beta^2 w_0, \beta^3 w_0]$... calculando así:

$$S(k) = \sum_{f=\beta^k w_0}^{\beta^{k+1} w_0} S(f)$$

y la regresión se calcula en $\ln S(k)$ vs $\ln \beta^k$. Se encontró que la pendiente de la recta es $1 - \alpha$. [34]

4.2.3 Método 3 Exponente de Hurst

Hurst quería calcular el tamaño de una presa en el lago Alberta para tener los niveles más bajos de fluctuación. Consideremos una serie de tiempo $B(t)$ de longitud N donde se encuentran registrados los niveles de la presa en cada tiempo t . Hurst estudió las relaciones entre los valores máximo y mínimo de la presa considerando *ventanas temporales* de distintos tamaños (*subseries* de tamaño n de la serie de tiempo original). Observó que las fluctuaciones alrededor de la media causan que el volumen aumente o disminuya. De modo que calculó:

$$X(n) = \sum_{k=1}^n [B(k) - \bar{B}]$$

donde \bar{B} es el promedio de $B(t)$.

Posteriormente, Hurst analizó el rango de fluctuación en el volumen (de la presa), es decir, la diferencia entre los niveles máximo y mínimo.

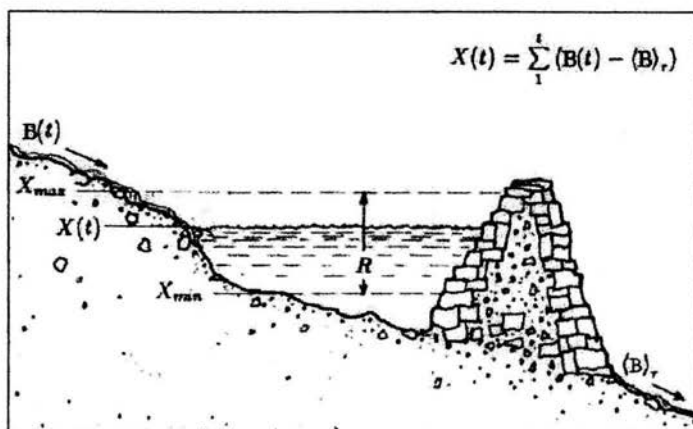


Figura 4.6: Presa cuyos niveles de agua están registrados en $B(t)$. La diferencia acumulada entre el flujo de entrada y salida está representada en $X(t)$ y el rango R es la diferencia entre los niveles máximo y mínimo de la presa.

Para ello, calculó el rango rescalado; es decir, el rango R dividido entre la desviación estándar STD de la integral del flujo del río, donde

$$R = \max_{1 \leq n \leq N} X(n) - \min_{1 \leq n \leq N} X(n)$$

es decir,

$$R = \max_{1 \leq n \leq N} \sum_{k=1}^n [B(k) - \bar{B}] - \min_{1 \leq n \leq N} \sum_{k=1}^n [B(k) - \bar{B}]$$

Encontró que el rango rescalado $\frac{R}{STD}$ depende de la escala temporal (el tamaño de la ventana). Entre más grande es la escala, más largo es el rango rescalado [13].

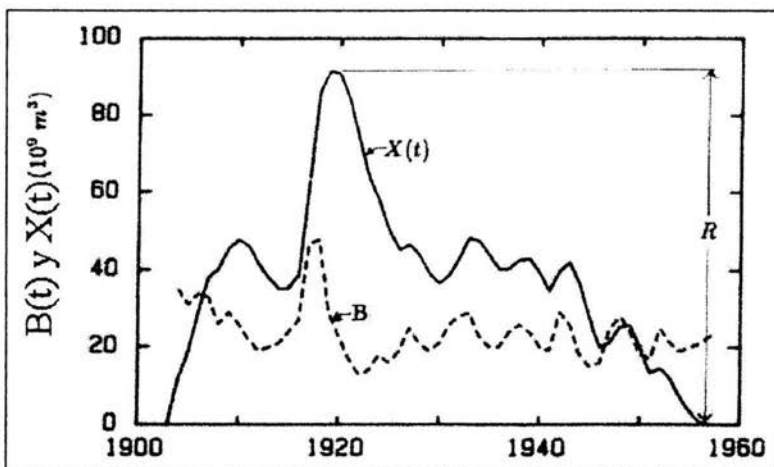


Figura 4.7: Niveles anuales de la presa en el Lago Alberta (línea punteada) y su diferencia acumulada con la media (acumulación al tiempo t calculada a partir de la diferencia entre el flujo de entrada y salida).

En muchas series temporales, como en el caso del flujo del lago Alberta, la relación tiene forma de ley de potencias cuantificada por el exponente H . Es decir,

$$\frac{R}{STD} \sim n^H$$

de donde

$$\ln \frac{R}{STD} \sim H \ln n$$

que en la gráfica $\frac{R}{STD}$ como función de n representa un segmento de recta con pendiente H .

Para series con ruido $1/f^\alpha$ se tiene³

$$\alpha = 2H + 1$$

4.2.4 Método 4 DFA

Peng y sus colaboradores introdujeron este método basado en el análisis de caminatas aleatorias.

Para calcular esta estadística (llamada DFA debido a las siglas de su nombre en inglés *Detrended Fluctuation Analysis*) [33], dada una serie temporal $B(t)$ de longitud N se define:

$$y(k) = \sum_{t=1}^k [B(t) - B_{prom}]$$

donde $B(t)$ es el estado de la serie en el tiempo t y B_{prom} es el promedio de los estados.

Posteriormente, se divide la serie obtenida en segmentos más pequeños de longitud n . En cada segmento se encuentra una recta que asemeje el comportamiento de la serie por medio de la técnica de mínimos cuadrados. Dicha recta representa la tendencia del segmento correspondiente.

Denotando la coordenada de la recta en el eje de las abscisas como $y_n(k)$, se elimina la tendencia en la serie integrada $y(k)$ restando $y_n(k)$ en cada uno de los segmentos.

Haciendo

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - y_n(k)]^2}$$

y calculándolo para distintos tamaños de n , se grafica $\ln F(n)$ vs $\ln n$ y el resultado es una recta con pendiente d .

³En la literatura $H = 1/2$ se asocia con ruido café por el paso de integración al principio del análisis.

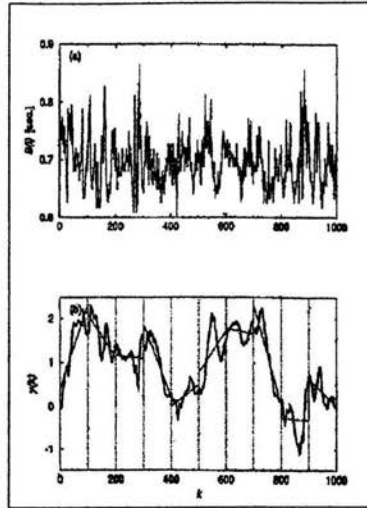


Figura 4.8: (a) Serie temporal de tamaño $N = 100$ (b) Serie integrada $y(k)$ correspondiente a (a). Las líneas verticales dividen a $y(k)$ en segmentos de longitud $n = 100$ y en cada uno de ellos, se aproxima $y(k)$ a una recta por el método de mínimos cuadrados.

Realizando diversas pruebas con series de tiempo con ruido $1/f^\alpha$ donde el valor de α es conocido, se encontró que:

- Las series que no presentan correlación alguna, es decir, series con ruido blanco, muestran en la gráfica de $\ln F(n)$ como función de $\ln n$ un segmento de recta con pendiente $d = 0.5$
- Las series de tiempo que presentan ruido rosa, exhiben un segmento de recta con pendiente $d = 1$ en la gráfica de $\ln F(n)$ como función de $\ln n$
- Las series temporales cuyo espectro de potencias es de la forma $1/f^2$ (ruido café) muestran en la gráfica de $\ln F(n)$ como función de $\ln n$ un segmento de recta con pendiente $d = 1.5$

De modo que se tiene

α	d
0	0.5
1	1
2	1.5

realizando más investigaciones y experimentos se llegó a que el valor encontrado d cumple

$$\alpha = 2d - 1$$

Este estimador permite detectar correlaciones a largo alcance en series temporales no estacionarias y es utilizado, por ejemplo, para analizar secuencias de DNA .

4.2.5 Método 5 Estimador de máxima verosimilitud

A pesar de que la descripción del ruido $1/f^\alpha$ está dada en términos del espectro de potencias, podemos establecer una correspondencia a la descripción en términos de la autocorrelación $C(k)$. Dado que la serie temporal corresponde a ruido $1/f^\alpha$, se tiene por 4.1 que $C(t) \sim t^{\alpha-1}$. De modo este método consiste en encontrar un valor de α para el cuál se maximiza la función $P_\alpha(B)$. Siendo $B = B(t)$ una serie temporal, y $P_\alpha(B)$ es la probabilidad de encontrar una serie temporal de tamaño N , con autocorrelación $C(t)$. Dicho de otra manera, Se obtiene la autocorrelación de la serie temporal $B(t)$ a partir de la fórmula 3.1 obtenida en el capítulo anterior, y se trata de encontrar un valor de α para el cuál $C(t) \sim t^{\alpha-1}$. El valor que maximice esta relación es el valor requerido.

Este método es llamado MLE debido a las siglas de su nombre en inglés *Maximum Likelihood Estimator*.

En la figura 4.9, se observa que el decaimiento de $\frac{C_\alpha(k)}{C_\alpha(0)}$ es cada vez más pequeño conforme α se acerca a 1; es decir, hay autocorrelación entre segmentos separados por retrasos grandes. Esto reafirma nuestro cálculo realizado en la sección anterior.

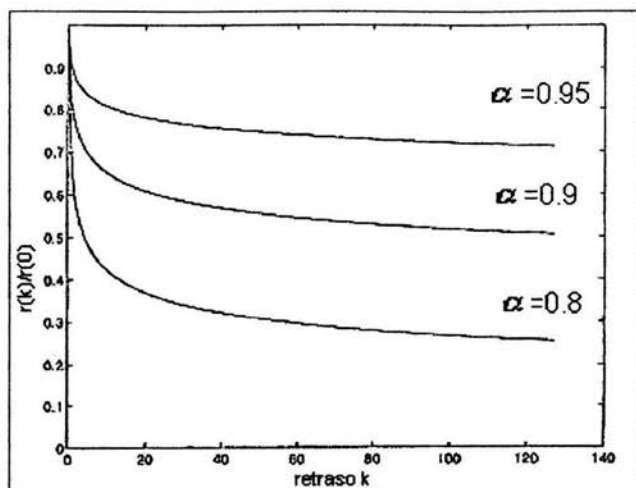


Figura 4.9: Gráfica de la función de autocorrelación $r(k)$ normalizada, para distintos valores de α cercanos a 1.

4.3 Comparación de estimadores

4.3.1 Formación de señales de prueba

Para poder llevar a cabo el análisis de los distintos estimadores, es necesario construir series temporales que presenten un espectro de potencias específico.

Una manera de hacerlo es por medio del inverso de la transformada de Fourier. Dado un espectro de potencias, se obtiene el valor de la amplitud en cada frecuencia, y se calcula la inversa de la transformada de Fourier.

Como no están especificadas las fases, éstas se pueden escoger libremente (respetando la simetría compleja conjugada de la transformación de Fourier de series temporales reales) y por lo tanto existen muchas series temporales que presentan el mismo espectro de potencias.

Las series obtenidas experimentalmente no presentan una ley $1/f^\alpha$ exacta o perfecta. Una razón es que las medidas hechas experimentalmente son sólo una colección de datos; son sólo una muestra hecha en un lapso finito.

Para comparar los estimadores a analizar, Pilgram y Kaplan [34] crearon una serie temporal de tamaño $64K$ que presentaba ruido $1/f^\alpha$. Posterior-

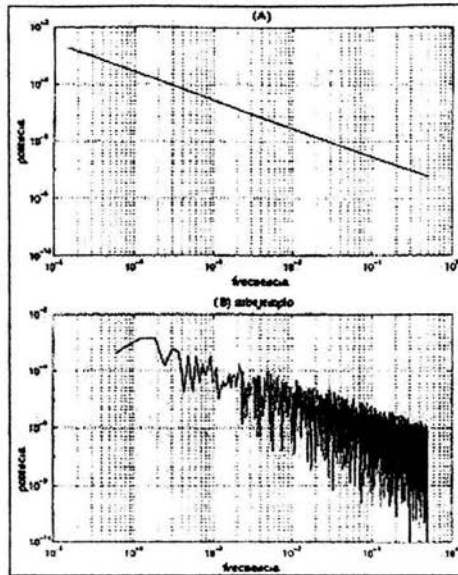


Figura 4.10: (A) Espectro de potencias de un proceso con perfecta ley de potencias de longitud 64K. (B) Espectro de potencias de un segmento de longitud 32K de la misma señal de (A).

mente dividieron la serie en segmentos no acoplados para su análisis. Para cada valor de α usaron 50 segmentos (para obtener así la varianza del estimador para un α dado) y analizaron 21 valores diferentes de α entre 0 y 2. (ver figura 4.10)

Los resultados para segmentos de longitud $N = 256$ se presentan en la figura 4.11

Dado $\hat{\alpha}$, ¿cuál es el rango en el que se puede encontrar el verdadero valor de α ? ¿Qué estimador nos da el rango más pequeño en donde se encuentra la verdadera α ?

Para resolver estas preguntas se traza en la gráfica una línea horizontal en el valor de $\hat{\alpha}$ y se mide el ancho de la banda donde se encuentran los valores de α que pudieron producir $\hat{\alpha}$. Por ejemplo, en el caso del estimador de Hurst (método 3) para $\hat{\alpha} = 1$ el rango de α es $[0.25, 1]$ mientras que $\hat{\alpha} = 1.6$ corresponde a valores de α en $[0.9, 2]$.

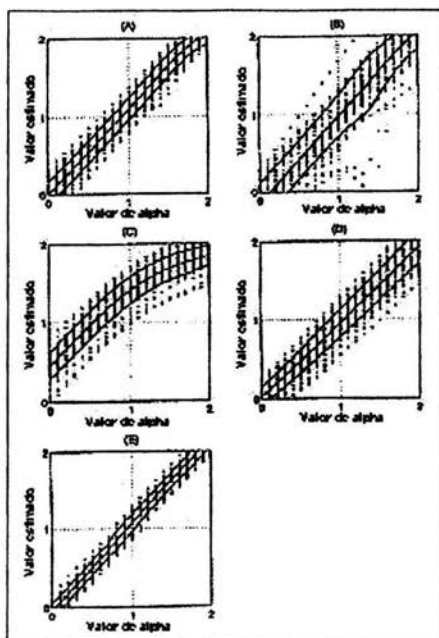


Figura 4.11: (A) Estimación de exponentes usando método 1 (B) utilizando método 2 (C) usando método 3 (D) A partir del método 4 (E) En base al método 5.

4.3.2 Resultados

Los segmentos son de longitud $n = 256$

Si tomamos $\hat{\alpha} = 1$, para el método MLE se tiene que $\alpha \in [0.75, 1.15]$ y para el método DFA $\alpha \in [0.75, 1.40]$. Por supuesto, asumiendo que hay ruido $1/f^\alpha$.

Todo esto indica que el método MLE es el más confiable.

Otra manera de obtener más información de la figura 4.11, es calcular la diferencia entre $\hat{\alpha}$ y α para cada serie temporal y calcular la desviación estándar y el promedio. Si obtenemos un promedio en las diferencias distinto de cero, entonces sabremos que el estimador es parcial. La desviación estándar indica la variabilidad entre un $\hat{\alpha}$ y otro, dadas series de tiempo distintas y α constante.

La siguiente tabla muestra la desviación estándar (STD) y la tenden-

cia o sesgo promediado sobre todos los valores de α para los 5 estimadores analizados.

Método	Sesgo	STD
Regresión de la FFT	0.08	0.14
Regresión de bandas integ.	0.03	0.26
Hurst	0.31	0.16
DFA	0.04	0.17
MLE	0.07	0.10

MLE tiene la menor desviación estándar pero no el sesgo más pequeño. El método de regresión lineal integrando en bandas logarítmicas tiene el menor sesgo, pero su desviación estándar es la más grande. De modo que el método MLE “parece” ser el que más se aproxima, en todos los sentidos, al verdadero valor de α .

¿Qué pasa con la longitud de la serie temporal? ¿Qué longitud es la adecuada para obtener una “precisión aceptable” en todos los métodos?

Analizando la desviación estándar de series con distintas longitudes entre $n = 256$ y $n = 8192$ se tienen los siguientes resultados:

En la figura 4.12 se pueden comparar las desviaciones estándar de los estimadores cuando $\alpha = 1$.

Se observa que entre más grande es el tamaño de la muestra, los estimadores encuentran valores de $\hat{\alpha}$ más cercanos a α . Los estimadores que tienen menor desviación estándar son el de regresión lineal de la transformada de Fourier y el MLE. [34]

En el siguiente capítulo utilizaremos algunos de estos estimadores para saber si algunas series de tiempo, obtenidas a partir de fenómenos en la naturaleza, exhiben ruido $1/f$.

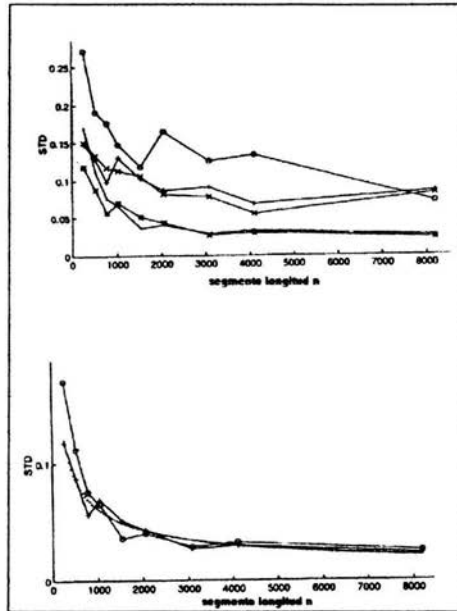


Figura 4.12: Desviación estándar de los distintos estimadores: regresión de la transformada de Fourier (.), regresión sobre bandas logarítmicamente espaciadas (°), método de Hurst (x), DFA (+), MLE (*).

Capítulo 5

Leyes de potencia en la naturaleza

El hecho de que los fractales y las leyes de potencias presenten autosemejanza y estructura a todas las escalas, ha provocado un gran interés, entre los estudiosos de las más distintas ramas del conocimiento, por buscar estas características en fenómenos que ocurren en la naturaleza.

De hecho, muchos fenómenos en la naturaleza presentan fractalidad espacial y un comportamiento de ley de potencias; su variedad es inmensa: resistencias, membranas celulares, variación anual del volumen de los ríos, intervalos del latido del corazón en mamíferos, y la geometría de los pulmones, por mencionar sólo algunos.

Veamos algunos ejemplos del comportamiento y la dinámica que se presenta en algunos de ellos.

5.1 Impulso cardiaco

El impulso cardiaco nace en la aurícula derecha del corazón, en el punto conocido como nodo senoatrial ubicado en la parte alta del corazón, en la aurícula derecha. Por medio de un sistema de conducción eléctrico, el impulso se distribuye por todo el corazón llegando primeramente al nodo auriculoventricular de donde se dirige al tabique interventricular ayudado de un sistema de conducción llamado haz de His.

El haz de His se divide en dos áreas (derecha e izquierda) que presen-

tan una ramificación en unas fibras llamadas Purkinje, formando lo que se denomina sistema His-Purkinje. Este sistema es el responsable de distribuir el impulso por ambos ventrículos transmitiéndolo a las paredes musculares y produciendo en ellos una contracción, lo que se manifiesta como latido cardiaco.

Goldberger y su equipo de investigación propusieron que dicha ramificación del sistema His-Purkinje es una estructura autosemejante que representa un conjunto fractal en el que cada generación presenta mayor detalle en el proceso. En cada vértice de dicha red, el impulso cardiaco activa un nuevo impulso a lo largo de cada rama o fibra del sistema de conducción dando lugar a dos impulsos. Es decir, un impulso que entra a una red con M ramas distales, generará M impulsos entre la frontera de la red y el miocardio.

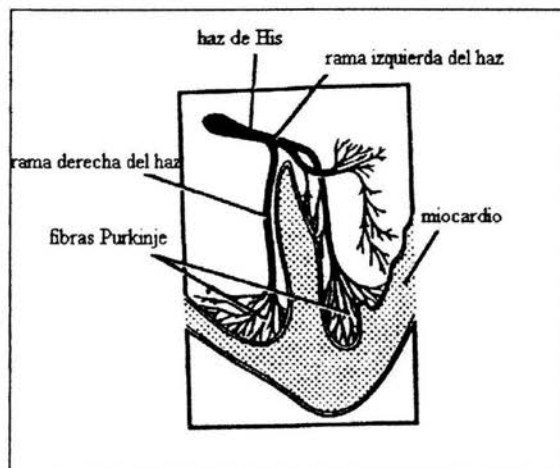


Figura 5.1: Sistema His-Purkinje

El impulso sale del nodo senoatrial y se convierte en varios impulsos con la misma amplitud. Cada nuevo impulso debe avanzar una longitud diferente para llegar al miocardio y ahí se sobreponen para formar el impulso *QRS*. La distribución en trayectorias con distinta longitud como resultado de la naturaleza fractal de las ramas, da lugar a una distribución de tiempos de correlación τ_c entre las distintas fibras que llegan al miocardio. La distribución $p(\tau_c)$ puede obtenerse con un argumento semejante al que utilizaremos

en el modelo del pulmón.

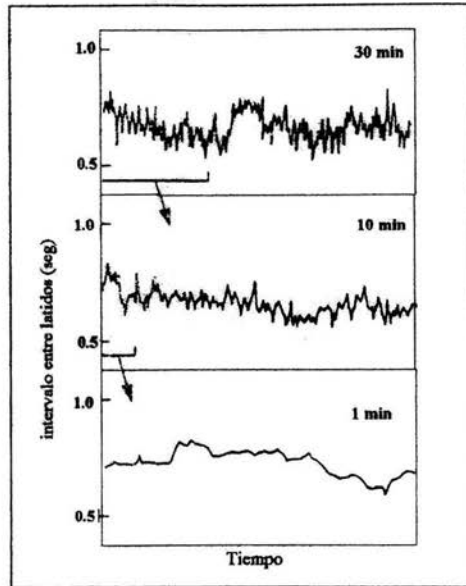


Figura 5.2: Esta gráfica muestra la presencia de invarianza de escalas y de ruido $1/f$ en los latidos del corazón.

Denotemos a la función de correlación construida a partir de la serie temporal QRS como $C(t)$ y descompongámosla en una distribución de exponenciales. Supongamos que la trayectoria más grande en el sistema His-Purkinje tiene como función de correlación a $c(t) = e^{-\frac{t}{\tau_c}}$, es decir, τ_c hace referencia al tiempo en que se atraviesa dicha trayectoria. τ_c por lo tanto, depende de la longitud de la trayectoria y de la velocidad con la que se recorre; la cual, a su vez, depende del diámetro de la rama.

Si la longitud de la trayectoria y el tiempo de recorrido se distribuyen de manera escalar con escasas longitudes de trayectorias y tiempos de recorrido pequeños, considerando una secuencia con tiempos de correlación menores cada uno con una pequeña probabilidad p . Amplifiquemos $c(t)$ de modo que el tiempo de correlación sea $N\tau_c$. De nuevo, en la segunda etapa de amplificación, que suponemos ocurre con probabilidad p^2 , el tiempo de correlación principal τ_c se vuelve $N^2\tau_c$. La nueva función de correlación $C(t)$

que contiene niveles de amplificación continuos es

$$C(t) = (1-p) \left\{ c(t) + \frac{p}{N} c\left(\frac{t}{N}\right) + \frac{p^2}{N^2} c\left(\frac{t}{N^2}\right) + \dots \right\}$$

de modo que

$$C(t) = \frac{p}{N} C\left(\frac{t}{N}\right) + (1-p) c(t)$$

y conforme $t \rightarrow \infty$, $C(t) = \frac{A(t)}{t^{1+\mu}}$, donde $\mu = \frac{\ln(1/p)}{\ln N}$. (Aunque para nuestro análisis τ_c , corresponde a tiempos de relajación más pequeños)

Esto significa que el factor de escalamiento cumple

$$N < 1 \text{ y } \mu < 0$$

Haciendo un cambio de variable (parámetro positivo) $v = -\mu$ tenemos $C(t) = A(t)t^{v-1}$, donde $A(t)$ es en general una función armónica en $\ln t$ con periodo $\ln \frac{1}{N}$.

El espectro de potencias $S(f)$ del impulso QRS es

$$S(f) = 2 \int_0^{\infty} A(t)t^{v-1} \cos(2\pi ft) dt$$

Si $A(t)$ cambia lentamente como función del tiempo o si permanece constante, como se vió anteriormente, se tiene que $S(f) \sim \frac{1}{f^v}$

En estudios generales, el exponente v puede depender de otros parámetros como temperatura o presión.

De modo que de acuerdo a estos análisis, la onda QRS debe presentar un espectro con ley de potencias inversa. Esto fue verificado por Goldberger y su equipo de investigadores graficando el espectro de potencias de la depolarización ventricular normal (QRS) de 21 personas saludables, obteniendo la figura 5.3

De modo que se generó ruido $1/f^\alpha$ mediante el mecanismo de amplificación.

La presencia de correlaciones a largo plazo en el ritmo cardiaco humano, implica que saber algo sobre un intervalo del latido de un corazón, da alguna información sobre otro intervalo en un tiempo posterior. Se encontró que $\alpha \approx 1$ (ruido rosa)

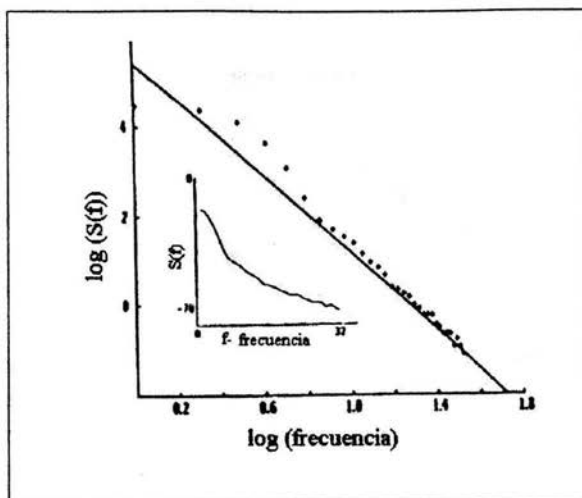


Figura 5.3: Espectro de potencias de la depolarización ventricular normal que muestra la existencia de ruido rosa.

El espectro de frecuencias del corazón presenta, en ciertas condiciones, un comportamiento caótico, que sigue leyes fractales. La única forma de explicar este comportamiento fue suponer que la red de His-Purkinje tiene una estructura fractal: un laberinto que se ramifica de tal forma que es autosimilar a escalas cada vez más y más pequeñas.

5.2 Sistema respiratorio

La observación directa de los pulmones (figura 5.4) muestra tanto una gran cantidad de irregularidades locales como una notable estructura, necesarias para llevar a cabo las funciones propias de recepción, intercambio y distribución en el torrente sanguíneo, del oxígeno del aire.

En la figura 5.4 se observa que la tráquea se divide en dos "ramas", que cada una de ellas se divide a su vez en otras dos y así sucesivamente. Si llamamos z el nivel en el que nos encontramos, el número de ramas que hay se puede calcular por medio de la fórmula $N(z) = 2^z$.

Weibel y Gómez querían determinar el tamaño de cada una de las ramas,

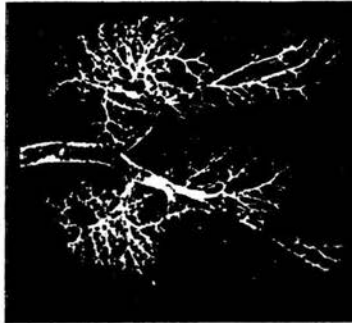


Figura 5.4: Estructura del pulmón que muchos investigadores consideran fractal.

y para ello hicieron la suposición de que el diámetro de las ramas sigue la ley de escalamiento

$$d_z = q d_{z-1}$$

donde $q < 1$, y d_z es el diámetro de la rama en el nivel z , (véase [46]). De esta manera

$$d_z = q^z d_0$$

o bien

$$\begin{aligned} d_z &= e^{z \ln q} d_0 \\ d_z &= e^{-z \ln q^{-1}} d_0 \\ d_z &= e^{-az} d_0 \end{aligned}$$

con $a = \ln q^{-1}$

Sin embargo, se dieron cuenta que estos resultados no concordaban del todo con las mediciones experimentales, sino solamente a lo largo de 10 niveles. (ver figura 5.5)

Si se propone una ley de escalamiento semejante a la utilizada en el ritmo cardiaco, esto es, hacer un escalamiento de la forma:

$$G(\xi) = \left(\frac{p}{N}\right) G\left(\frac{\xi}{N}\right) + (1-p)g(\xi),$$

se obtiene como resultado una fórmula de reducción en el promedio del diámetro, que sí concuerda con las observaciones experimentales.

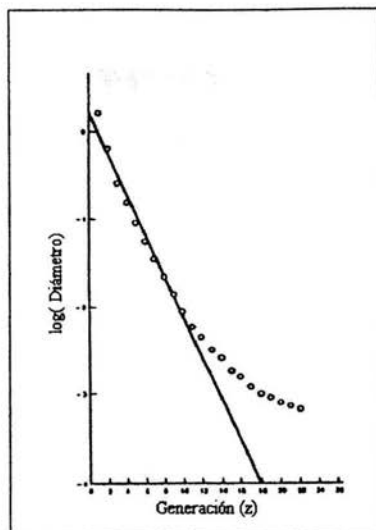


Figura 5.5: Weibel y Gómez graficaron datos obtenidos considerando 23 niveles. Se esperaba que una línea recta fuese una buena aproximación de los datos, pero esto solamente ocurrió hasta el décimo nivel.

5.3 DNA

Las secuencias de DNA poseen una gran cantidad de información genética que en ocasiones es útil representar matemáticamente. Una manera de hacerlo, es mediante la técnica de caminatas aleatorias. Esto es, dada la información del DNA, cada una de las bases A, T, G, C representa un paso en una dirección determinada.

En la caminata aleatoria obtenida, se pueden buscar correlaciones, e incluso se puede determinar si la secuencia analizada codifica o no una proteína (ya que las regiones codificadoras tienen distinta correlación a la de las que no codifican). Las moléculas de DNA presentan correlaciones en forma de leyes de potencia, donde las correlaciones de largo alcance corresponden a las zonas que no codifican una proteína.

Otra manera de representar a la secuencia de DNA es por medio de cuatro señales U_k (con $k = 1, 2, 3, 4$) o sucesiones binarias (con ceros y unos) cada una de las cuales asigna el valor 1 a uno de los cuatro símbolos {A,T,G,C} y

cero a los demás. De esta manera, la primera señal asigna 1 cuando encuentra una A, la segunda cuando encuentra una T, etcétera.

Denotando $S_k(w)$ como el espectro de la señal U_k , entonces

$$S(w) = \sum_{k=1}^4 S_k(w)$$

Este método fue aplicado para analizar el genoma con 229354 bases del cytomegalovirus AD 169. En la figura 5.6 se observan las 4 señales que representan al genoma, promediados sobre distintas escalas.

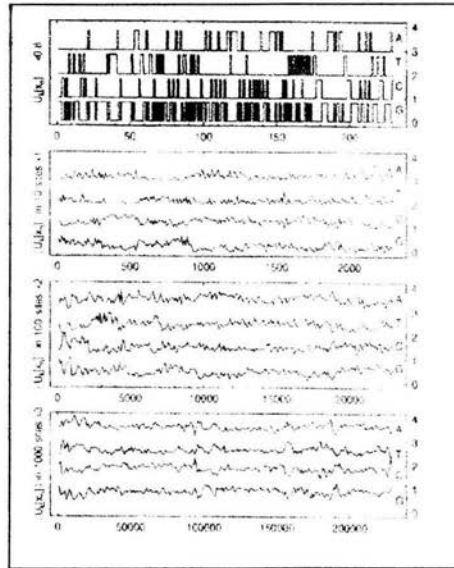


Figura 5.6:

Con esta gráfica se pueden observar las correlaciones entre distintas bases en diferentes escalas y posiciones. Por ejemplo, C y T están anti-correlacionadas cerca de 160000, tienen correlación cero cerca de 100000, y alrededor de 115000 tienen una correlación mayor. (Véase [44])

Posteriormente se grafica $S_k(f)$. Las gráficas de las cuatro series presentan un mismo comportamiento general, el de ruido $1/f$ que muestra *independencia de escala*.

En algunos casos se analiza el ruido $1/f$ en lapsos grandes de tiempo, eliminando la frecuencia a partir de la cual se presenta mayor ruido blanco $\Delta S(f) = S(f) - S(\infty)$ (asumiendo que el ruido blanco es independiente). Esto da lugar a la siguiente gráfica 5.7, que muestra también ruido $1/f$.

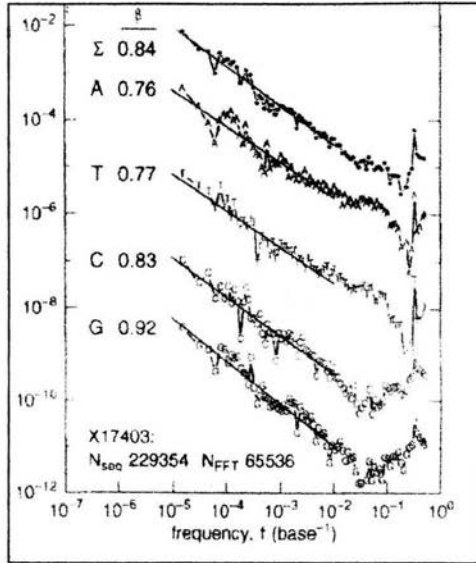


Figura 5.7:

En la gráfica 5.7 se observa que A tiene mayor correlación con T, y C tiene mayor correlación con G.

5.4 Migración y extinciones

En los últimos años, diversas especies de aves han arribado a las islas de Hawaii. Los datos indican que la cantidad de aves ha aumentado a tal grado, que ocurren *avalanchas de extinciones*.

Hay diversas maneras de interpretar los resultados obtenidos. Los estudios acerca de la dinámica que ocurre en todas las especies han dado indicios de que las extinciones ocurren de acuerdo a una ley $1/f$.

Moulton y Pimm [24] realizaron un registro sobre la llegada y la extinción de diversos tipos de aves a las islas de Hawaii. Los registros se realizaron de 1850 a 1984. Aunque este estudio no es del todo preciso, ya que algunas fechas se obtuvieron de citas y documentos históricos, los datos son muy aproximados y se tiene información muy importante sobre diversas especies.

Para estas investigaciones, supusieron que la llegada de las especies de aves a las islas se debía a su introducción intencional por parte de los habitantes, aunque se consideraron algunos casos en los que las aves cambiaron de hábitat de modo natural.

No se tomó en cuenta la interacción entre las especies de aves nativas y las que llegaron a las islas posteriormente. Esto es debido a que las especies nativas se extinguieron casi en su totalidad a causa primero de los colonos polinesios y posteriormente de los inmigrantes norteamericanos. Aún hay algunas aves nativas pero se encuentran en hábitats donde la mano del hombre aún no ha llegado. Debido a ello, los habitantes de las islas introdujeron nuevas especies de aves que casi no interactúan con las nativas.

Calculando la cantidad de extinciones que ocurren de un determinado tamaño, se encontró que hay más extinciones de tamaño pequeño que de gran tamaño. Hay más décadas en las que solamente una especie se extingue, que décadas en las que se extinguen más de 5 especies.

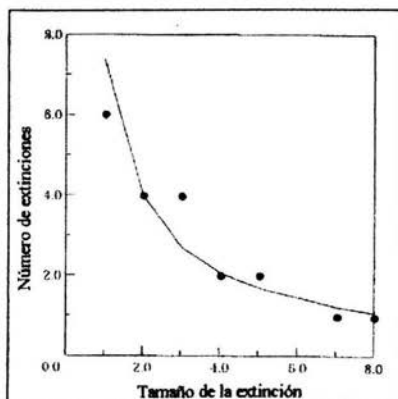


Figura 5.8:

El tamaño de una extinción se define como el número de especies que se extinguen en una década dada, en una isla determinada.

Los datos de la gráfica 5.8 muestran 59 extinciones de una sola especie, en 6 islas diferentes del archipiélago de Hawaii. Debido a que se registraron pocas extinciones durante la investigación, y debido a que hay una posible interacción entre las especies de cada una de las islas (debido a su dispersión), se hizo un análisis conjunto de todas las islas. Analizando lo ocurrido en las islas, se encontró que la función de distribución de las extinciones (la frecuencia f con la que ocurren) se aproximaba a una ley de potencias con exponente $\alpha = -0.91$, esto es:

$$f \approx s^{-0.91}$$

donde s es el tamaño de la extinción

$$s^{0.91} \approx f^{-1}$$

y

$$s \approx f^{-\frac{1}{0.91}} = \frac{1}{f^{1.09}}$$

Por lo que el tamaño de las *avalanchas de extinción* es inversamente proporcional a la potencia 1.09 de f .

En general, sucede que:

$$D(s) \approx s^{-\alpha}$$

con s el tamaño de la avalancha y $D(s)$, la frecuencia con la que ocurre; de donde como $D(s) = f$

$$s^\alpha \approx f^{-1} \text{ y } s \approx f^{-\frac{1}{\alpha}}$$

que se lee como *el tamaño en el que se presenta un evento disminuye como una potencia del inverso de la frecuencia con que ocurre* (El exponente es el inverso del encontrado en $D(s) \approx s^{-\alpha}$).

Y esto se interpreta como ruido $1/f$.

5.5 ¿Qué tienen en común?

Todos los sistemas biológicos son abiertos, termodinámicamente hablando, y disipativos, teniendo un equilibrio dinámico con el medio ambiente.

La relación entre el comportamiento espacial y temporal de las leyes de potencias fue reconocida mucho antes en la física condensada de la materia, donde las correlaciones espaciotemporales de largo alcance aparecen espontáneamente en el punto crítico para las transiciones continuas. La amplitud de fluctuación entre la escala grande y pequeña se obtiene de la misma función matemática usando el factor de escalamiento apropiado.

Cuando un sistema se contrapesa en un punto crítico entre dos fases macroscópicas, por ejemplo, la vaporización de un líquido, se exhiben estructuras dinámicas en todas las escalas espaciales disponibles, aunque las interacciones microscópicas subyacentes tienden a tener una escala característica de la longitud. Pero, para llegar al punto crítico, uno tiene que variar un parámetro externo de control, tal como temperatura, presión o el campo magnético, en contraste con los fenómenos descritos anteriormente sobre los cuales no hay variación externa. La explicación dada es que los sistemas dinámicos disipativos, es decir, sistemas que no están en el equilibrio termodinámico, tienden al punto crítico mientras varían lentamente y el estado crítico es auto-organizado (Tang y Bak, 1988; Bak y Chen, 1989, 1991).

En general, se trata de sistemas que viven al borde del colapso, pero muestran una enorme capacidad de recuperación después de cada catástrofe.

Per Bak sugirió que tal vez ésta podría ser la respuesta a las preguntas hechas anteriormente, la *criticalidad autoorganizada* (descrita en el capítulo 1 y más detalladamente en [39]).

Capítulo 6

Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos descrito diversas propiedades de los sistemas complejos. Estos sistemas están formados por muchos elementos individuales que interactúan entre sí y cambian su estado como consecuencia de sus interacciones. Al cambiar de estado, algunos de estos sistemas dinámicos no lineales llegan a presentar comportamientos muy interesantes. Tal es el caso de la ruptura de simetría, durante la cual se genera en el sistema un orden espacial en donde antes no lo había; y de los patrones emergentes, que surgen espontáneamente a causa de las interacciones de los elementos y que no pueden ser explicados tomando solamente un elemento del sistema.

Estos comportamientos se observan frecuentemente en fenómenos que ocurren en la naturaleza. Es por eso que muchos científicos se han dedicado a investigar a fondo los mecanismos y las características que presentan dichos fenómenos. Para ello, es necesario hacer un modelo matemático cuya dinámica esté lo más cercana posible al comportamiento del fenómeno, y posteriormente se debe hacer uso de algunas herramientas matemáticas.

A partir de la autosemejanza y de las propiedades que presentan las leyes de potencias, y con ayuda de la geometría fractal, es posible identificar y comprender diversos procesos de formación de patrones. Observamos que puede haber fractales tanto espaciales como temporales, destacando en ambos características específicas de su dimensión fractal y la presencia de autosemejanza (en algunos casos de manera estadística y en un cierto rango).

Para analizar series temporales y poder determinar si presentan o no fractalidad, se recurre, entre otras herramientas, al análisis de Fourier. Es necesario entonces, definir conceptos como autocorrelación, transformada de

Fourier (discreta y continua), transformada rápida de Fourier, espectro de potencias y ruido $1/f$.

Estos conceptos han sido utilizados a lo largo de la historia en distintos campos de la ciencia. Algunas áreas en donde se aplica el análisis es Fourier (por mencionar algunas) son óptica, física cuántica, probabilidad, ecuaciones diferenciales parciales, y en nuestro caso, análisis de series temporales.

A lo largo de este trabajo, presentamos distintas maneras de averiguar si una serie temporal presenta o no ruido $1/f$. Describimos y comparamos 5 métodos diferentes por medio de los cuales se puede detectar la presencia de ruido $1/f^\alpha$ y asimismo, conocer el valor de α .

Finalmente, analizamos diversos fenómenos que se presentan en la naturaleza, y observamos la existencia de algunos fractales en espacio y tiempo.

Es importante mencionar que muchos de los resultados obtenidos se dan bajo la suposición de que el modelo matemático describe correctamente la dinámica del fenómeno analizado. O en su defecto, los datos que indican el estado de un objeto o un fenómeno en un tiempo determinado, fueron medidos con suma precisión. Es por eso que se debe tener en cuenta que los resultados obtenidos pueden no coincidir exactamente con la realidad, pero sí se puede asegurar que estarán muy cercanos uno del otro (por lo menos en un lapso considerable de tiempo).

En el desarrollo de este trabajo, presentamos solamente algunos ejemplos en los que científicos han encontrado estructura fractal o ruido $1/f$. En realidad este tipo de comportamientos se consideran ubicuos en la naturaleza, es decir, se encuentran en todos lados. De modo que hay muchas otras investigaciones por hacer, de fenómenos en los que se puede demostrar la existencia de ruido $1/f$.

Otro campo interesante para futuras investigaciones puede ser el estudio de sistemas críticos auto-organizados. Per Bak propuso que muchos fenómenos naturales son sistemas complejos que se acercan al punto crítico sin la manipulación externa de parámetros y tienden a recuperarse fácilmente después de cada catástrofe. Ésta es una teoría muy interesante pero a la vez muy ambiciosa, pues originalmente pretendía dar una explicación a la presencia de propiedades (aparentemente) universales.

Como se puede observar, hay muchos caminos por los que se pueden seguir líneas nuevas de investigación que nos ayuden a entender el comportamiento de los fenómenos que nos rodean.

Apéndice A

Funciones ortogonales

Definición 5 Un conjunto de funciones $\phi_k(x)$ es ortogonal en un intervalo (a, b) si para dos funciones cualesquiera pertenecientes a ese conjunto se tiene que $\int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ p & m = n \end{cases}$

Ejemplo 3 Se puede observar que:



$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt &= \frac{T}{2k\pi} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{T}{2k\pi} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi T}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{-2k\pi T}{2}\right) \right] \\ &= \frac{T}{2k\pi} [\operatorname{sen}(k\pi) - \operatorname{sen}(-k\pi)] = 0 \end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt = 0 \quad \text{para todo } k \neq 0$$



$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt = \frac{T}{2k\pi} \left[-\cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{T}{2k\pi} \left[-\cos\left(\frac{2k\pi T}{T}\right) + \cos\left(\frac{-2k\pi T}{T}\right) \right] \\
&= \frac{T}{2k\pi} [-\cos(k\pi) + \cos(-k\pi)] \\
&= \frac{T}{2k\pi} [-\cos(k\pi) + \cos(k\pi)] = 0
\end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt = 0 \quad \text{para todo } k \neq 0$$

► con $k \neq l$

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt &= \frac{1}{1 - \frac{k^2}{l^2}} \left[\frac{T}{2l\pi} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{1}{1 - \frac{k^2}{l^2}} \left[\frac{2T}{2l\pi} \cos k\pi \operatorname{sen} k\pi \right. \\
&\quad \left. + \frac{-2kT}{2l^2\pi} \cos k\pi \operatorname{sen} k\pi \right] \\
&= \frac{1}{1 - \frac{k^2}{l^2}} (0) = 0
\end{aligned}$$

con $k = l$

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos^2\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt \\
&= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1 + \cos \frac{4k\pi t}{T}}{2} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt + \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{4k\pi t}{T} dt \\
&= \frac{T}{2} + \frac{T}{8k\pi} (2 \operatorname{sen} 2k\pi) \\
&= \frac{T}{2} + 0 = \frac{T}{2}
\end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ T/2 & k = l \neq 0 \end{cases}$$

► con $k \neq l$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt &= \frac{1}{1 - \frac{k}{l}} \left[\frac{-T}{2l^2\pi} \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T} \cos \frac{2l\pi t}{T} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{k}{l}} [0 + 0] = 0 \end{aligned}$$

con $k = l$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}^2\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt \\ &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1 - \cos \frac{4k\pi t}{T}}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt - \frac{1}{2} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \frac{4k\pi t}{T} dt \\ &= \frac{T}{2} - \frac{T}{8k\pi} \left[\operatorname{sen} \frac{4k\pi t}{T} \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{T}{2} - \frac{T}{8k\pi} [2 \operatorname{sen} 2k\pi] = \frac{T}{2} - 0 = \frac{T}{2} \end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ T/2 & k = l \neq 0 \end{cases}$$

► con $k \neq l$

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt &= \frac{1}{1 - \frac{k}{l}} \left[\frac{T}{2l^2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{k}{l}} \left[0 + \frac{kT}{2l^2\pi} (\cos k\pi \cos l\pi - \cos k\pi \cos l\pi) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

con $k = l$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{T}{4k\pi} \left[\operatorname{sen}^2\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{T}{4k\pi} [\operatorname{sen}^2(k\pi) - \operatorname{sen}^2(-k\pi)] = 0
 \end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{2k\pi t}{T}\right) \cos\left(\frac{2l\pi t}{T}\right) dt = 0 \text{ para todo } k \text{ y } l$$

De modo que

$$\left\{ \begin{array}{l} 1, \cos \frac{2\pi t}{T}, \cos \frac{4\pi t}{T}, \dots, \cos \frac{2k\pi t}{T}, \dots, \\ \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}, \operatorname{sen} \frac{4\pi t}{T}, \dots, \operatorname{sen} \frac{2k\pi t}{T}, \dots \end{array} \right\}$$

es un conjunto de funciones ortogonales en el intervalo $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$.

Apéndice B

Funciones pares e impares

B.1 -

Proposición 4 Si $f(t), g(t)$ son dos funciones pares, entonces $f(t)g(t)$ es también una función par.

Demostración 1 Sean $f(t), g(t)$ dos funciones pares, entonces cumplen $f(t) = f(-t)$ y $g(t) = g(-t)$ para todo valor de t .

Ahora bien, definiendo $h(t) = f(t)g(t)$ se tiene que

$$h(-t) = f(-t)g(-t) = f(t)g(t) = h(t)$$

por lo que $h(t)$ es también una función par. ■

Proposición 5 Si $f(t)$ es una función par, y $g(t)$ una función impar; entonces $f(t)g(t)$ es una función impar.

Demostración 2 Sean $f(t)$ una función par, y $g(t)$ una función impar; entonces cumplen $f(t) = f(-t)$ y $g(t) = -g(-t)$ para todo valor de t .

Sea $h(t) = f(t)g(t)$, se tiene que

$$h(-t) = f(-t)g(-t) = -f(t)g(t) = -h(t).$$

De modo que $h(t)$ es una función impar. ■

Proposición 6 Si $f(t), g(t)$ son dos funciones impares, entonces $f(t)g(t)$ es una función par.

Demostración 3 Sean $f(t), g(t)$ dos funciones impares, entonces cumplen $f(t) = -f(-t)$ y $g(t) = -g(-t)$ para todo valor de t .

Definiendo $h(t) = f(t)g(t)$ se tiene que

$$h(-t) = f(-t)g(-t) = (-)(-)f(t)g(t) = h(t).$$

Por lo que $h(t)$ es una función par. ■

B.2 -

Proposición 7 Si $g(t)$ es una función par, entonces $\int_{-a}^a g(t)dt = 2 \int_0^a g(t)dt$

Demostración 4 Sea $g(t)$ una función par.

$$\int_{-a}^a g(t)dt = \int_{-a}^0 g(t)dt + \int_0^a g(t)dt$$

Haciendo $t = -\tau$

$$\int_{-a}^a g(t)dt = \int_a^0 g(-\tau)d(-\tau) + \int_0^a g(t)dt$$

de donde

$$\int_{-a}^a g(t)dt = \int_0^a g(-\tau)d\tau + \int_0^a g(t)dt$$

y

$$\int_{-a}^a g(t)dt = \int_0^a g(\tau)d\tau + \int_0^a g(t)dt$$

es decir

$$\int_{-a}^a g(t)dt = 2 \int_0^a g(t)dt \quad \blacksquare$$

Proposición 8 Si $g(t)$ es una función impar, entonces $\int_{-a}^a g(t) dt = 0$

Demostración 5 Sea $g(t)$ una función impar.

$$\int_{-a}^a g(t) dt = \int_{-a}^0 g(t) dt + \int_0^a g(t) dt$$

Haciendo $t = -\tau$

$$\int_{-a}^a g(t) dt = \int_a^0 g(-\tau) d(-\tau) + \int_0^a g(t) dt$$

de donde

$$\int_{-a}^a g(t) dt = \int_0^a g(-\tau) d\tau + \int_0^a g(t) dt$$

y

$$\int_{-a}^a g(t) dt = - \int_0^a g(\tau) d\tau + \int_0^a g(t) dt$$

es decir

$$\int_{-a}^a g(t) dt = 0 \blacksquare$$

Apéndice C

Dimensión topológica

Para facilitar el estudio de diversos objetos y en especial de las figuras geométricas, los matemáticos a lo largo de la historia han hecho uso de distintas herramientas que les permiten conocer las principales características de dichas figuras y encontrar las semejanzas y diferencias que tienen unas con otras. Una de las herramientas más útiles es la dimensión topológica.

En los *Elementos* de Euclides ya se define, implícitamente y de forma inductiva, el concepto de dimensión. Se dice que una figura es unidimensional, si su frontera está compuesta de puntos; bidimensional, si su frontera está compuesta de curvas y tridimensional, si su frontera está compuesta de superficies.

Gerald A. Edgar intenta explicar la idea de dimensión de la siguiente manera [15]:

Si tenemos un punto en el espacio tridimensional, podemos usar un pequeño cubo como prisión. El cubo está constituido por 6 caras planas. Necesitamos saber que estas caras son bidimensionales. Un punto que vive en una de estas caras puede ser sometido a prisión haciendo uso de una pequeña circunferencia. Así, decir que las caras del cubo son bidimensionales, requiere saber que una circunferencia es unidimensional. Un punto que vive en una de las circunferencias, puede ser aprisionado haciendo uso de dos puntos como muros de la prisión. Necesitamos saber que un conjunto reducido a dos puntos es de dimensión cero. Finalmente, un punto que vive en el conjunto de dos puntos es ya

incapaz de moverse. No necesitamos muros para aprisionarlo. Estamos, por definición, ante un conjunto de dimensión 0.

La construcción de la dimensión topológica se puede basar en esta idea de caracterizar la dimensión de un conjunto X a partir de la dimensión de su frontera ∂X . Para ello, definamos primero algunos conceptos.

Definición 6 Dado un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, un punto $x_0 \in X$ y $\varepsilon > 0$, definimos una bola abierta con centro en x_0 y radio ε como:

$$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

Es decir, $B(x_0, \varepsilon)$ contiene a todos los puntos $x \in X$ que distan de x_0 menos que ε .

Definición 7 Sea $S \subset X$ un subconjunto tal que $x_0 \in S$. Se dice que S es una vecindad de x_0 , si para todo $x \in S$ existe una bola abierta $B(x, \varepsilon)$ totalmente contenida en S .

Definición 8 Dado $X \subset \mathbb{R}^n$, se dice que un punto v es un punto frontera de X si para toda bola abierta con centro en v , $B(v, \varepsilon)$ tiene puntos tanto de X como de su complemento. El conjunto de todos estos puntos se llama frontera de X y se denota ∂X .

Demos ahora la definición de dimensión topológica dada de forma inductiva.

Definición 9 Dado un conjunto X se dice que su dimensión topológica es:

- cero si todo punto tiene vecindades arbitrariamente cercanas cuyas fronteras no intersactan al conjunto.
- n , si cada punto en X tiene vecindades arbitrariamente cercanas cuyas fronteras intersectan a X en un conjunto de dimensión topológica $n - 1$, y n es el mínimo entero no negativo que cumple la condición.

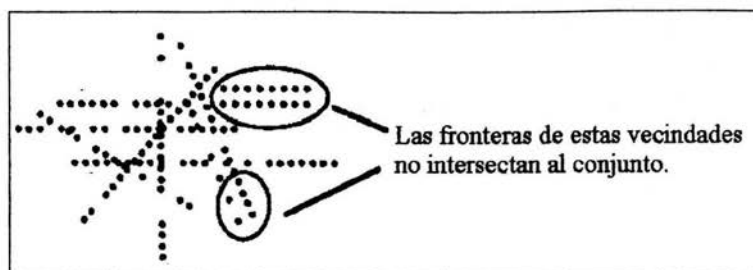


Figura C.1:

De esta manera, el conjunto de puntos aislados mostrado en la figura C.1, y el conjunto de Cantor mostrado en el capítulo 3, tienen dimensión topológica cero.

La dimensión topológica de un conjunto de líneas en el plano, representado en la figura C.2a es 1, ya que pequeños discos en el plano intersectan a las curvas en 1 o 2 puntos (cuya dimensión topológica es cero). Y la dimensión de una figura plana como la que se observa en C.2b es 2, pues las fronteras ilustradas intersectan a la figura en conjuntos de dimensión 1.

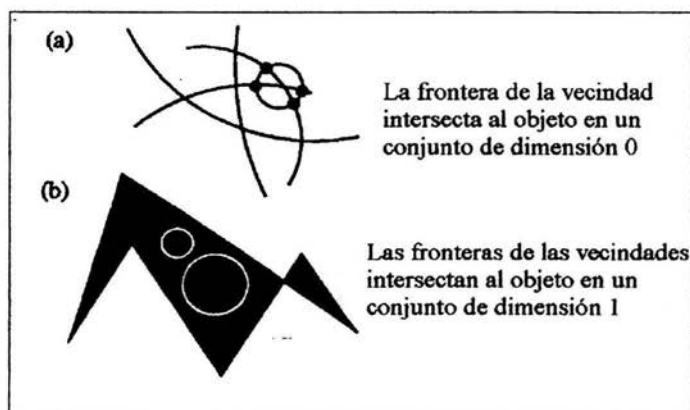


Figura C.2:

Dada esta definición, se puede observar en la figura C.3 que dado un

punto en él, existen vecindades que intersectan al triángulo de Sierpinski en un n^0 finito de puntos, es decir, el triángulo de Sierpinski tiene dimensión topológica 1.

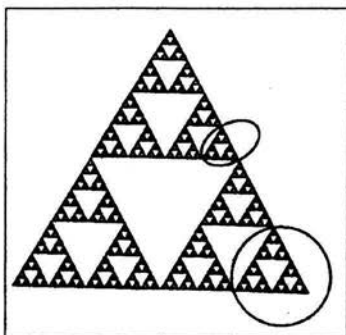


Figura C.3:

Por otra parte, un objeto fractal es, ante todo, un subconjunto de R^n . En este contexto, podemos dar una definición equivalente de dimensión topológica basada en la dimensión de recubrimiento, concepto que juega un papel importante en la definición de dimensión fractal.

Definición 10 *Un recubrimiento abierto de $S \subset R^n$, es una colección de conjuntos abiertos cuya unión contiene al conjunto S . Ver figura C.4*

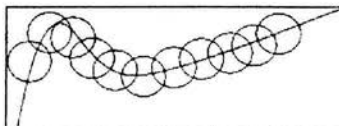


Figura C.4:

Definición 11 *Un refinamiento abierto S' del recubrimiento abierto S , es otro recubrimiento para el cual todo abierto $A' \in S'$ está incluido en algún abierto $A \in S$.*

En algún sentido, un refinamiento abierto de S , proporciona un recubrimiento “más detallado” de S que el anterior.

Definición 12 Decimos que R es un recubrimiento abierto de orden k del conjunto S , si para cualquier $x \in S$, x pertenece a un máximo de k abiertos del recubrimiento R .

Definición 13 Decimos que el conjunto S tiene dimensión de recubrimiento (dimensión topológica) n , si cualquier recubrimiento abierto de S admite un refinamiento abierto de orden $n + 1$, pero no de orden n .

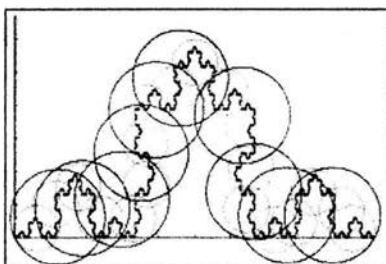


Figura C.5:

Para ejemplificar esta definición, veamos la curva de von Koch en la figura C.5. El conjunto de abiertos mostrado con un color obscuro, es un recubrimiento abierto de la curva que admite un refinamiento abierto de orden 2 (mostrado con un color más claro), pero no admite uno de orden 1. De modo que la curva de von Koch tiene dimensión topológica 1.

Bibliografía

- [1] Auyang, Sunny, *Foundations of Complex-System Theories "in Economics, Evolutionary Biology & Statistical Physics"*, (Cambridge University Press, 1998).
- [2] Baddi, Remo y Antonio Politi, *Complexity: Hierarchical Structures and Scaling in Physics*, Cambridge Nonlinear Science Serie 6 (Cambridge University Press, 1997).
- [3] Bak, Per y Kurt Wiesenfeld, *Physical Review Letters* **59** (1987) p. 381-384.
- [4] Bak, Per et al, *Physical Review A* **38** (1988) p. 364-374.
- [5] Bak, Per, *How Nature Works "The science of self-organized criticality"*, (Springer-Verlag, 1996).
- [6] Ball, Phillip, *The Self-Made Tapestry: Pattern Formation in Nature*, (Oxford University Press, 1999).
- [7] Barnsley, Michael, *Fractals Everywhere*, (Academic Press, 1988).
- [8] Chalmers, Alan, *¿Qué es esa cosa llamada ciencia?*, (Editorial Siglo XXI, 1990).
- [9] Cocho, Germinal y Gustavo Martínez, *Al borde del milenio: caos, crisis, complejidad*, en *Ciencias de la materia: génesis y evolución de sus conceptos fundamentales* (México Siglo XXI-CEIICH-UNAM, 1998).
- [10] Cocho, Germinal y Pedro Miramontes, *Ciencias* **59** (julio-septiembre, 2000).

- [11] Cowan, George y David Pines (Editores), *Complexity: Metaphors, Models & Reality*, A proceedings volume in the Santa Fe Institute Studies in the science of complexity (Addison-Wesley, 1994).
- [12] Devaney, Robert, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: "Theory and Experiment"*, (Addison-Wesley, 1992).
- [13] Devynck, Pascal et al, *Physics of Plasmas* **7** num 4, (2000) p.1181-1183.
- [14] Elliott, Douglas y Ramamohan Rao, *Fast Transforms "Algorithms, Analyses, Applications"*, (Academic Press, 1982).
- [15] Edgar, Gerald, *Measure, Topology and Fractal Geometry*, (Springer, 1990).
- [16] Freeman, Dyson, *Science* **200** num 4342, (1978) p.677-678.
- [17] Falconer, Kenneth, *Fractal Geometry "Mathematical Foundations & applications"*, (1990).
- [18] Golderberg, Ary y Bruce West, *Scientific American* **262** (1990) p. 42-49.
- [19] Goodwin, Brian y Ricard Solé, *Signs of Life: How Complexity Pervades Biology*, (Basic Books, 2000).
- [20] Gujarati, Damodar, *Basic Econometrics*, (Mc Graw Hill, 1995).
- [21] Gutiérrez, José Luis y Faustino Sánchez, *Matemáticas del crecimiento orgánico*, (Manuscrito, 2003).
- [22] Hausdorff, Jeffrey y Chung-Kang Peng, *Physical Review E* **54** num 2 (1996) p. 2154-2157.
- [23] Jensen, Henrik, *Self-Organized Criticality "Emergent Complex Behavior in Physical & Biological Systems"*, (Cambridge University Press, 1998).
- [24] Keitt, Timothy y Pablo Marquet, *Journal Theor. Biol.* **182** (1996) p. 161-167.
- [25] Koyré, Alexandre, *Estudios de historia del pensamiento científico*, (Editorial Siglo XXI, 1980).
- [26] Lorimer et al, *Nature* **369**, (1994) p. 127.

- [27] Mandelbrot, Benoît, *The Fractal Geometry of Nature*, Edición revisada de *Fractals*, 1977 (1982).
- [28] Marsden, Jerrold, *Basic Complex Analysis*, (Editorial Freeman, 1973)
- [29] Miramontes, Octavio, *Orden y caos en la organización social de las hormigas* (2000)
- [30] Miramontes, Pedro, *Ciencias* (abril-junio, 1999).
- [31] Nicolis, Grégoire e Ilya Prigogine, *Exploring Complexity: An Introduction*, (Freeman, 1989).
- [32] Peitgen, Heinz-Otto et al, *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*, (Springer-Verlag, 1992).
- [33] Peng, C.K. et al, *Physical Review E* **49** num 2 (1994) p. 1685-1689.
- [34] Pilgram, Berndt y Daniel Kaplan, *Physica D* **114** (1998) p. 108-122.
- [35] Robinson, Frank Neville Hosband, *Noise and Fluctuations in Electronic Devices and Circuits*, (Oxford: Clarendon, 1974)
- [36] Schlesinger, Michael, *Ann. NY Academy of Science* **504** (1987) p. 214-225.
- [37] Schroeder, Manfred, *Fractals, Chaos, Power Laws*, (Freeman, 1991).
- [38] Solé, Ricard y Susanna Manrubia, *Orden y caos en sistemas complejos*, (Politex, UPC, 1996).
- [39] Solé, Ricard et al, *TREE* **14** (1999) p. 156-160.
- [40] Sornette, Didier, *Physical Review Letters* **72** num 14 (1994) p. 2306.
- [41] Stein, Daniel (Editor), *Lectures in the sciences of Complexity*, A lecture volume in the SFIS in the science of complexity (Addison-Wesley, 1989).
- [42] Tolstov, Georgi, *Fourier Series*, (Dover Publications, 1962).
- [43] Vicsek, Tomas, *Fluctuations & Scaling in Biology*, (Oxford University Press, 2001).

- [44] Voss, Richard, *Physical Review Letters* **68** (1992) p. 3805-3808.
- [45] Weaver, Joseph, *Theory of Discrete and Continuous Fourier Analysis*, (Wiley-Interscience Publications, 1989).
- [46] West, Bruce y Michael Schlesinger, *International Journal of Modern Physics B* **3** (1989) p. 795-819.
- [47] Williams, Garnett, *Chaos Theory Tamed*, (Joseph Henry Press, 1997).