



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

"ANÁLISIS ESPACIAL DE UNA SUSPENSIÓN
CON TRACCIÓN DELANTERA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
INGENIERO MECÁNICO
P R E S E N T A :
GONZALEZ ALMANZA JORGE ENRIQUE



DIRECTOR DE TESIS
DR. ANGEL A. ROJAS SALGADO

MEXICO, D. F.

ABRIL, 2004



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO.**

FACULTAD DE INGENIERÍA.

*"Análisis Espacial de una Suspensión
con Tracción Delantera"*

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
INGENIERO MECÁNICO

P R E S E N T A:

González Almanza Jorge Enrique

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Ángel A. Rojas Salgado

MÉXICO, D. F.

Abril 2004

A mis padres Enrique y Guadalupe por el eterno amor manifiesto en sus consejos, cariños y regaños, en sus deseos de hacer de sus hijos gente de provecho para este país que nos lo ha dado todo. A ustedes mi amor y mi respeto.

A mi Universidad que es Nacional necesita ser Autónoma y es de MÉXICO, mi alma mater, el proyecto cultural más importante que se ha gestado en este país, que sin ella no se podría entender el país del pasado, el del presente, pero sobretodo el país del futuro. Contigo hasta el final.

A la Facultad de Ingeniería la escuela que me dio a los amigos de toda la vida, que desde su acogida nos enseñó que en el problema está la solución y por ende el conocimiento trascendente. A ti mi gratitud eterna.

A mis profesores que dejaron todo su entusiasmo y enseñanza con gran dignidad y entrega, en especial al Dr. Ángel Rojas por su paciencia en dirigir este trabajo de tesis. A Francisco Cuenca y Eusebio Jiménez por sus consejos y puntos de vista que sirvieron para sacar adelante este trabajo.

A toda la banda eriza mecánica, que tiempos nos ha tocado vivir, a Robert Lama (por su serenidad y paciencia querido saltamontes), al Lencho (porque cuando las cosas no son como digo ni como se dice resultan ser como deben ser), al Campeón (la barbie condechi más intelectual de la facultad), al Huevo y EbbE III por su gran acogimiento. Todos ustedes están en mi

A mis cuates de la huelga Laura, Liber, Tere, Iñaki, Yusen, Cesar, Tahir, Chepe, Robert Compay III y tantos otros, cuantas aventuras juntos, cuántos sueños y angustias compartidas, con los que aprendí que cuando se justifica un No puede ser una respuesta valida.

A Claudia, que aunque fue corto el tiempo, has sido el mejor de mis regalos, porque aprendí contigo y fui feliz. gracias Flaca.

Índice

Introducción	2
Capítulo 1	4
Capítulo 2	17
Capítulo 3	28
Capítulo 4	38
Conclusiones	53
Bibliografía	71
Apéndice	

Introducción

Objetivo

Este trabajo de tesis fue elaborado para realizar el estudio de un sistema de suspensión delantera de doble horquilla con tracción. Pero la diferencia es que esta se aborda desde el punto de vista de los sistemas de multicuerpos rígidos. En anteriores trabajos sobre el tema se abordaba desde el punto de vista de las vibraciones pero no se realizaba el estudio del movimiento de los mismos cuerpos que integran a dicho sistema de suspensión. En éste trabajo únicamente se aborda el estudio cinemático ya que es muy extenso realizar un estudio mecánico completo en tan poco tiempo, debido a las dificultades que se presentan en el análisis, desde la concepción del movimiento hasta los errores propios de la programación.

Sin embargo este trabajo podrá servir como base para que posteriormente se pueda realizar la parte dinámica del mecanismo ya que se han superado las dificultades propias del análisis, como es el de plantearse cómo es que se lleva a cabo el movimiento del mecanismo, cuales son sus restricciones, que impide la convergencia de la solución etc.

Este trabajo tiene por objetivo principal el llevar a cabo el análisis espacial del mecanismo de la suspensión delantera ya que es el que presenta mayor dificultad para el análisis así como en su programación; por lo que éste será el que se reporte en las conclusiones.

Panorama

El trabajo de lo que es la tesis empezó por plantear cuál es la forma en que se empezará el análisis, esto es, las hipótesis necesarias para desarrollar para cada capítulo, en el primer capítulo se realizó el análisis plano del mecanismo con una

sola llanta, en el segundo capítulo se plantea el análisis para estudiar el movimiento del vehículo con las 2 llantas, ésto para poder realizar un estudio posteriormente de estabilidad del vehículo en función de las dimensiones del mismo. Después en el tercer capítulo se plantea el análisis espacial del mecanismo y se desarrolla el programa el cual se puso en el apéndice. Al final se presentan los resultados del análisis efectuado con Mathematica, que fue el software utilizado para realizarlo.

Ya que interesaba más el análisis espacial solo se muestran los resultados del capítulo 3 que es donde se aborda éste análisis. Aunque se realizó el análisis plano con una sola llanta con el fin de probar el funcionamiento de las estructuras creadas para realizar la tesis, únicamente se efectuó la parte de posición, después que se revisó que funcionaran adecuadamente ya se pudo hacer completo el análisis espacial.

Capítulo 1

Conceptos Básicos

Definición de la Transmisión

El empuje que los pistones ejercen al cigüeñal es el generador del momento de rotación que es capaz de desarrollar un motor; si el par es lo suficientemente grande podrá vencer las fuerzas que se oponen al movimiento pero si es inferior, entonces, el vehículo perderá velocidad hasta detenerse. El par motor multiplicado por el número de revoluciones nos dará la potencia desarrollada; de esto la potencia de un motor varía fundamentalmente en función del régimen de baja velocidad angular, correspondiendo los mayores valores de los pares de arranque a los regímenes más altos de velocidad angular, pues a pesar de que el par disminuye en estos márgenes, el número de revoluciones por minuto aumenta grandemente, incrementando el consumo de combustible y por tanto la potencia del motor. Esto es lo que describe el funcionamiento del motor.

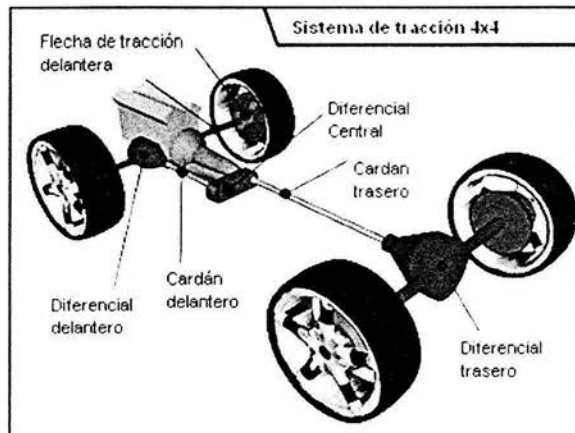


Ilustración 1 Sistema de Tracción 4x4

1.1 Conceptos

- Par de torsión

“El par de torsión está asociado al par que produce el motor, este es el que mueve el coche. Los distintos engranes en la transmisión y el diferencial multiplican el par de torsión y lo comparten entre las ruedas. Mayor par se puede enviar a las ruedas en el primer engranaje que en el quinto engranaje porque el primer engranaje tiene una relación mayor por el cual multiplicar el par de torsión.

El coche que arranca bien nunca excede el par de torsión, así que los neumáticos no se deslizan; si el coche arranca mal, excede este par de torsión, así que los neumáticos deslizan. Tan pronto comienzan a deslizarse, el par cae a casi cero.

Lo interesante sobre el par de torsión está en situaciones de baja tracción, la cantidad máxima de par de torsión que se puede crear está determinada por la cantidad de tracción, no por el motor. Si los neumáticos no se pegan al piso no hay manera de utilizar esa energía.”¹

- Tracción

“Definiremos la tracción como la fuerza máxima que el neumático debe aplicar contra el piso. Éstos son los factores que afectan la tracción:

El peso en el neumático – entre más peso tenga un neumático, más tracción tiene. El peso puede cambiar de posición mientras se conduce. Por ejemplo, cuando un coche da vuelta, el peso cambia de lugar a las ruedas exteriores. Cuando acelera, el peso cambia a las ruedas posteriores.

El coeficiente de la fricción - este factor relaciona la cantidad de fuerza de fricción entre dos superficies. En nuestro caso, relaciona la cantidad de tracción entre los neumáticos y el camino con el peso que se ejerce sobre cada neumático. El coeficiente de la fricción es sobre todo una función del tipo de neumáticos del vehículo y del tipo de superficie que el vehículo recorre.”²

- Patinaje de la rueda

“Hay dos clases de contacto que los neumáticos pueden hacer con el camino: estático y dinámico.

contacto estático - El coeficiente de la fricción para el contacto estático es más alto que para el contacto dinámico, así que el contacto estático proporciona una mejor tracción.

contacto dinámico - El coeficiente de la fricción para el contacto dinámico es más bajo, así que se tiene menos tracción.

El patinaje de la rueda ocurre cuando el par aplicado a un neumático excede la tracción disponible para ese neumático”³

Funcionamiento y Tipos de Transmisión

En la siguiente cita se describe puntualmente las configuraciones y el funcionamiento de los vehículos con doble tracción

“Los vehículos 4x4 tienen 3 configuraciones básicas, tracción en 2 ruedas (2 wheel drive, 2WD), tracción en las 4 ruedas (4 wheel drive, 4WD), y los todo terreno (all wheel drive, AWD); todas estas con sus variantes respectivamente.

Los 2WD, generalmente vienen con la máquina, el embrague y la caja de transmisión en la parte delantera. El movimiento rotatorio producido por el cigüeñal es transmitido ya sea al eje trasero o al delantero según convenga. Los vehículos 4WD o 4x4 pueden tener el torque simultáneamente en los ejes trasero y delantero. Estos usualmente tienen un eje activado automáticamente y el conductor puede activar o desactivar el segundo eje motriz según convenga al conductor. Los vehículos AWD o todo terreno tienen tracción simultánea en los dos ejes. Cuando el eje delantero recibe la potencia de la caja de transmisión junto con el trasero, el vehículo puede funcionar adecuadamente en todo tipo de terreno. Un 4x4 tiene un eje activado automáticamente y el conductor puede activar o desactivar el segundo eje. Un vehículo todo terreno tiene los dos ejes motrices conectados todo el tiempo, estos no se pueden desactivar manualmente.

La caja de cambios puede tener cualquier colocación, ya sea que se forme como motor-embrague-caja en la parte delantera del auto con algunas variantes. La caja de cambios elemental está formada por un par de ejes paralelos, uno de los cuales es el árbol primario (P) y otro el secundario (S); el primario recibe el movimiento del embrague y dispone de piñones de arrastre, el otro eje (S) está formado por los piñones receptores mediante los cuales se transmite el movimiento de este eje a las ruedas. Ambos se apoyan en las cajas mediante los rodamientos (R). Los piñones del árbol secundario son solidarios con el eje; es decir, forman un conjunto, de manera que el giro de uno de ellos implica el arrastre del eje y del resto de los piñones. Sin embargo, en el árbol primario, los piñones van montados libres sobre el eje, de manera que puedan girar sobre él, quedando engranados de

forma constante con los correspondientes del secundario y frenados lateralmente para impedir su desplazamiento.

En el árbol primario se monta también un dispositivo llamado acoplador estriado sobre el eje; este permite solidarizar cada uno de los piñones de éste árbol con el giro del mismo. Para ello el acoplador puede deslizarse suavemente sobre el estriado del árbol, de manera que su dentado frontal encaje con el otro igual en el piñón, en cuyo caso, éste se hace solidario con el eje girando junto con él.

Los piñones utilizados en las cajas de cambios actuales son del tipo helicoidal ya que éstos presentan la ventaja de ser más silenciosos en su funcionamiento, transmitiéndose el esfuerzo con mayor suavidad. En el interior de la caja se deposita una cierta cantidad de aceite que es proyectada en todas direcciones por los piñones en su giro; en las cajas de transmisión se utilizan aceites denominados de alta presión con el fin de evitar la rotura de la película por la transmisión de los grandes esfuerzos transmitidos por los dientes. La graduación del aceite es generalmente la EP-80 o bien la EP-90. Estos tipos de aceites soportan presiones elevadas al tiempo que tienen una fluidez adecuada para asegurar el engrase de todos los componentes de la caja, como piñones, acopladores y rodamientos.

El selector de par en los vehículos 2WD y en los 4x4 funciona con los mismos elementos de una caja de cambios, el par motriz viene del motor a través del embrague, de este pasa a la caja de cambios y de esta pasa al selector de par, es aquí donde se selecciona hacia donde se manda el par motriz por medio del sincronizador con el que se elige a que eje o si a ambos se manda el par motriz.⁴

Suspensión

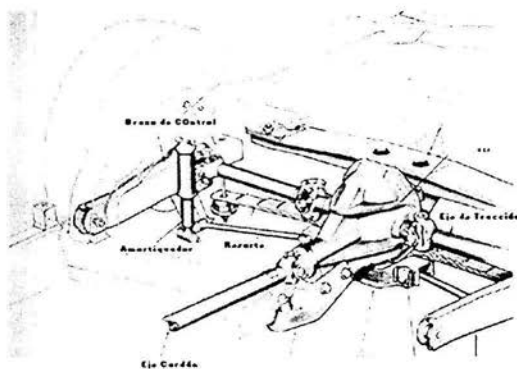


Ilustración 2 Sistema de suspensión de brazo arrastrado

La suspensión de un automóvil se refiere al sistema compuesto por varios elementos mecánicos que soportan el peso del vehículo. Estos son los resortes o muelles, los amortiguadores y los brazos de control; pueden también emplearse barras transversales. Los resortes de los vehículos son de diferentes tipos y capacidades, pueden ser helicoidales, de ballesta, neumáticos o inclusive barras torsión. Son usados en conjuntos pudiéndose utilizar en parejas por eje. Las principales funciones de la suspensión son mantener en contacto con el terreno a las ruedas así como brindar un mayor confort a los pasajeros. La mayor parte del desempeño de una suspensión se encuentran en los resortes, los cuales en condiciones normales son los que soporten el peso del vehículo. Estos al actuar generan que el automóvil rebote; el cual es absorbido por los amortiguadores, que es donde se disipa la energía producto de las oscilaciones del vehículo.

Tipos de suspensiones

En los automóviles se maneja diferentes configuraciones de la suspensión, aunque podemos clasificarlas en dos grandes grupos, rígidas o independientes.

En las suspensiones rígidas; el par del motor llega al diferencial que forma parte del conjunto del eje motriz, éste lo transmite a las llantas a través de flechas que se encuentran dentro de un tubo que las recubre por completo a lo largo de éstas. Todo el conjunto de ruedas - flechas - diferencial están agrupadas de manera colineal, por lo que no se permite algún desplazamiento angular de las flechas respecto al diferencial. Este sistema se suele utilizar mucho en automóviles utilitarios como las camionetas y en la mayoría de los casos se utilizan en la parte trasera del vehículo. Principalmente en vehículos cuyas capacidades de carga son elevadas.

Las suspensiones flexibles se emplean generalmente en vehículos tipo turismo o de competencia. Estas permiten una mayor movilidad e independencia de la rueda; y a diferencia de las suspensiones rígidas, existe desplazamiento angular entre las ruedas y el diferencial. Esto permite una mejor adaptación al terreno, brindando un mejor manejo en general; sus formatos son variados. Existen las suspensiones de doble horquilla o paralelogramo (cuatro barras), la tipo McPherson y la de brazos arrastrados.

La suspensión de doble horquilla se utiliza en vehículos de altas prestaciones dinámicas (deportivos y de competencia). Visto lateralmente es un mecanismo de cuatro barras, 2 de ellas son las horquillas superior e inferior, las otras dos son la mangueta de las llantas y la última la de tierra o el chasis. Este tipo de suspensión brinda una muy buena estabilidad al vehículo en curvas. Puede soportar fuertes impactos y permite que la llanta se adapte bien al terreno. Puede utilizarse tanto en el eje trasero como en el delantero. La única desventaja es que si requiere de mucho espacio dentro de la carrocería.

La suspensión tipo McPherson es de las más sencillas, consiste únicamente de una horquilla inferior, la mangueta de la llanta y del amortiguador que se une directamente a la mangueta y al chasis en su parte superior. Generalmente se utilizan en vehículos tipo turismo ya que no requiere mucho espacio; es ideal para automóviles pequeños y si un mayor control del vehículo es requerido, se puede hacer uso de una barra de torsión que conecta ambas llantas.

La suspensión de brazos arrastrados es tradicionalmente utilizada para las ruedas traseras de los vehículos consiste de un brazo unido mediante la junta rotacional al chasis del vehículo teniendo un movimiento oscilatorio paralelo al plano lateral del vehículo. Este tipo de suspensión no requiere de tanto espacio, y para mejor comportamiento del vehículo se pueden colocar los brazos con un ángulo respecto al plano central longitudinal del vehículo.

Muelles Helicoidales

Estos son elementos flexibles que se utilizan para ejercer una fuerza o un par de torsión, y al mismo tiempo para almacenar energía. La energía se almacena en el sólido que se ha deformado. Los muelles deben tener la capacidad de soportar grandes deflexiones elásticas. Generalmente los resortes trabajan con capacidades elevadas de carga y con cargas cíclicas que varían continuamente.

Los materiales de los resortes tienen alta resistencia y bajo coeficiente de pérdida de energía entre los que destacan aceros al alto carbono; el acero inoxidable laminado en frío endurecido por precipitación, las aleaciones no ferrosas y algunos no metálicos.

Los resortes se fabrican por medio de procesos de trabajo en frío o en caliente, dependiendo del tamaño del material, del índice del resorte y de las propiedades deseadas. Al enrollar el resorte se inducen esfuerzos residuales por medio de la flexión pero éstos son normales a la dirección de los esfuerzos de trabajo de torsión en un resorte arrollado. Cuando un resorte se manufactura, muy frecuentemente se le deben aliviar los esfuerzos por medio de tratamientos térmicos.

En el diseño de resortes el esfuerzo permisible es la resistencia a la fluencia por torsión en vez de la resistencia a la rotura.⁵

Amortiguadores

La función de los amortiguadores es controlar los movimientos oscilatorios de la suspensión y del chasis originados por la compresión de los muelles al atravesar las imperfecciones del pavimento.

“Actualmente se utilizan amortiguadores hidráulicos cuyo principio consiste en forzar el paso de un fluido hidráulico a través de válvulas restrictivas. Esta restricción del fluido permite al amortiguador disminuir y controlar rápidamente las reacciones generadas por los resortes debidas al camino. El amortiguador se adapta al impacto por medio de sus válvulas de restricción. Si el eje se mueve lentamente la resistencia en el flujo será baja, no así con los impactos violentos; el fluido pasa más lentamente a través de las válvulas restrictivas. Los amortiguadores permitirán un manejo suave cuando se trate de irregularidades pequeñas del terreno y incrementarán el control de los resortes en irregularidades mayores, ya que su reacción es más lenta que la reacción de los resortes. El funcionamiento de los amortiguadores deberá ser adecuada al subir como al bajar la llanta ya que la reacción del resorte puede ser tan violenta como la acción que sobre éste se ejerce.

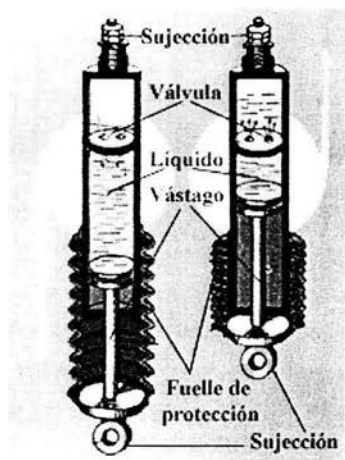


Ilustración 3 Amortiguadores Telescópicos

“TIPOS DE AMORTIGADORES USUALES:

- A- Hidráulicos fijos
- B- Hidráulicos regulables
- C- de gas fijos
- D- de gas regulables
- E- de gas regulables con botella exterior

A- Hidráulicos fijos: son los más usuales, (se montan habitualmente como equipo de origen)

- Ventajas: son baratos
- Inconvenientes: duración limitada y pérdida acusada de eficacia con trabajo excesivo, debido al aumento de temperatura .
- Uso deportivo: poco utilizado, en alguna ocasión se aplicó en copas monomarca de circuito (tipo Iniciación)

B- Hidráulicos regulables: típico amortiguador hidráulico deportivo de tarados variables, fácilmente reparables y transformables, variando válvulas.

- Ventajas: buena relación precio - prestaciones.
- Inconvenientes: pierden eficacia progresivamente por temperatura de trabajo.
- Uso deportivo: usuales en competencias deportivas o para manejo en calle. Hace algunos años se usaban en competición, ahora han quedado relativamente obsoletos.
- Marcas usuales: Koni estándar, Selex sport.

C- de gas fijos: típico amortiguador de botella invertida (monotubo), muy resistente a golpes y de alta duración y muy buena eficacia.

- Ventajas: alta resistencia a pérdida de eficacia por temperatura. Buena relación precio - duración - eficacia. Buenos para conducción deportiva o de calle.

- Inconvenientes: precio medio - alto.

- Uso deportivo: se han impuesto actualmente sobre los hidráulicos, se utiliza en formulas profesionales y promocionales, en los vehículos gran turismo y/o rallies de montaña y en las actuales copas monomarca de circuito.

- Marcas usuales: Bilstein, Rolling, de Carbon, etc.

D y E - de gas regulables: amortiguador monotubo, con o sin botella exterior, con posibilidad de variación de tarados. Amortiguador de alta tecnología, con precio alto pero proporcional a su eficacia. Es el amortiguador de altas prestaciones.

- Marcas usuales: Proflex, Spax, Leda, etc.

- La marca KONI comercializa un modelo de Amortiguador de gas regulable de bajo costo, aunque no de botella invertida y generalmente utilizable en conducción deportiva de calle y regulable fácilmente por el usuario.”⁶

Bujes

Son cilindros concéntricos separados por una capa de hule; se utilizan en las uniones de los brazos de control con la carrocería y aquí es donde los brazos pivotan. También sirven para disipar parte de la energía de los impactos que sufre la suspensión durante su funcionamiento disminuyendo la transmisión del golpe al vehículo.

Horquillas o Brazos de Control

La horquilla (brazo de control) es una pieza que sirve para guiar a la llanta en su trayectoria de doble efecto en el sentido vertical (giro y desplazamiento), esta puede ser solamente un brazo mecánico. En un extremo gira con centro en el buje que se aloja en la carrocería y en el otro extremo se une a la mangueta(soporte en donde se articula el amortiguador o bien la otra horquilla son la que se establece la configuración de paralelogramo) sobre la que gira la llanta. Se pueden utilizar uno o dos brazos

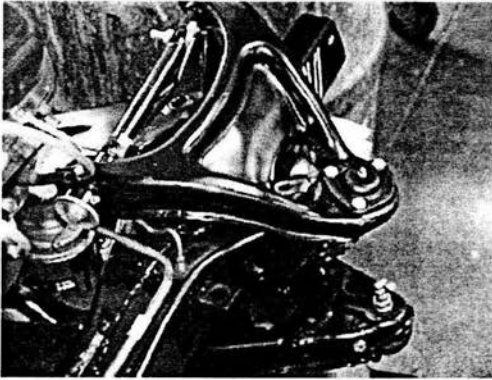


Ilustración 4 Sistema de suspensión de doble horquilla

Rótulas (juntas homocinéticas)

“Introducidas por primera vez en la mecánica de los vehículos de los años 50, estas piezas metálicas tienen la función de ser puntos de unión entre las horquillas de la suspensión y las masas o manguetas. Por su forma, permiten el movimiento angular en diferentes direcciones entre las piezas con las que están unidas, absorbiendo la de vibración en la dirección, tanto en alta como en baja velocidad.

Las rotulas son esferas macizas ubicadas dentro una esfera hueca (llamada asiento), que establece movimientos en todas las direcciones posibles, aunque limitados por las partes vinculadas.

Estos elementos soportan grandes esfuerzos, por lo que el tamaño y el material deben ser acordes al tipo de vehículo, y a su uso. Por ejemplo, durante el frenado la rotula puede soportar alrededor de una tonelada y media de peso.

Como muchas partes mecánicas, las rótulas han ido evolucionando desde las flotantes, donde un resorte sujetaba la esfera, hasta la actualidad, donde los asientos están fabricados con nylon recubierto de un material llamado bisulfuro de molibdeno, de propiedades autolubrificantes, lo que permite un perfecto estado de este componente mientras dure su vida útil.

La forma en que se maneje un auto influye directamente en la vida útil de las rótulas, ya que absorben golpes bruscos en las ruedas. el uso intensivo en todo terreno aumenta el juego entre el asiento y la esfera, traduciéndose como una pérdida de estabilidad, también conocido como efecto "shimmy"⁷

1.2 Breve Estado del Arte

Electrónica Avanzada

En muchos vehículos 4x4 modernos y AWD, la electrónica tiene un papel dominante. Algunos coches utilizan el sistema ABS para aplicar selectivamente los frenos a las ruedas que comienzan a patinarse; a esto se llama control de tracción. Otros han sofisticado, los embragues controlados electrónicamente, que pueden mejorar el control la transmisión del par de torsión entre las ruedas.

El Hummer

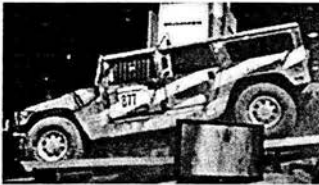


Ilustración 5 Vehículo HUMMER

El vehículo militar Hummer y su similar comercial combinan tecnología mecánica avanzada con electrónica sofisticada para crear el mejor 4x4 disponible. Tiene un sistema con las características adicionales que se pueden activar o apagar en el camino. En este sistema, un eje motor se conecta con el árbol de transmisión y de esta al delantero y trasero. Sin embargo, contiene un sistema de engranajes en el diferencial que pueden ser trabados por el conductor. En el modo abierto (no trabado), los ejes traseros y delanteros pueden moverse a diversas velocidades, por lo que el vehículo puede conducirse en los caminos secos sin problema. Cuando el diferencial es bloqueado, los ejes trasero y delantero tienen acceso al par de torsión del motor. Si las ruedas delanteras están en arena movediza, las ruedas posteriores consiguen todo el par de torsión que pueden manejar.

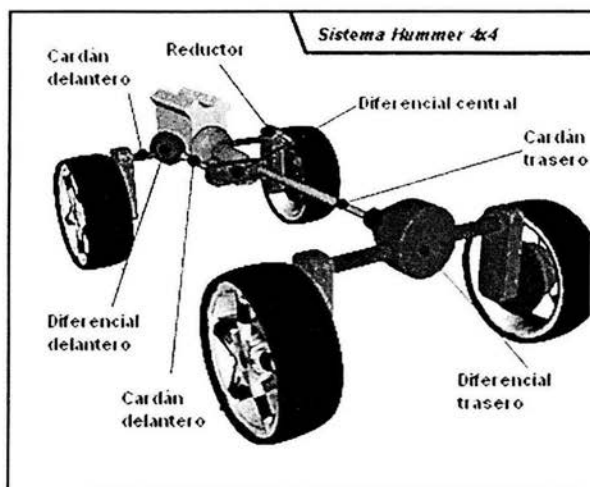


Diagrama del sistema del Hummer, una característica del Hummer son sus reductores en cada rueda. Éstos levantan la línea de conducción entera, dando al Hummer 16 pulgadas (40,64 centímetros) de separación de tierra, más del doble que la mayoría de los 4x4 tienen.

Ilustración 6 Sistema de tracción del Hummer

Los diferenciales delanteros y posteriores son Torsen. Estos diferenciales tienen un tren de engranes único: Tan pronto como detecte una disminución del par de torsión en una rueda (que ocurra cuando un neumático está a punto de deslizarse), el reductor transfiere el par de torsión a la otra rueda. Los diferenciales Torsen pueden transferir a partir de dos a cuatro veces el par de torsión de una rueda a la otra; el Hummer se equipa con un sistema de control de tracción al freno. Cuando un neumático comienza a deslizarse, el control de tracción al freno aplica los frenos a esa rueda. Esto logra dos cosas:

- Impide que ese neumático deslice, permitiendo que haga uso máximo de su tracción disponible.
- Permite que la otra rueda aplique mayor par de torsión.

El sistema de control en la tracción al freno aplica un par significativo a la rueda que desea deslizarse, permitiendo que el diferencial de Torsen aplique de dos a cuatro veces ese par de torsión creciente a la otra rueda.

El sistema Torsen en el Hummer es capaz de enviar una cantidad grande de par de torsión a cualesquiera de los neumáticos, incluso si esto significa enviarla toda a un solo neumático. Esto hace que el Hummer sea un 4x4 ideal ya que su sistema provee a cada neumático de la cantidad máxima de par de torsión que se le puede proporcionar.

Hay algunas maneras de llevar a cabo mejoras a un sistema como este; substituyendo el diferencial por un diferencial limitador de deslizamiento, el cual es uno de los más comunes; éste se asegura de que ambas ruedas posteriores puedan aplicar un cierto par de torsión.

Otra opción es un diferencial de fijación, que traba las ruedas posteriores juntas para asegurarse de que cada una tiene acceso a todo el par de torsión que proporciona el árbol de giro, esto mejora el funcionamiento en condiciones bastante difíciles.⁸

¹ Niza, Karim. How Stuff Works [online]. Julio 2002. Disponible en <http://www.hosstuffworks.com>

² Ibid

³ Ibid

⁴ Varios. Inner Auto [online]. Mayo-Junio 2002. Disponible en <http://www.innerauto.com>

⁵ Ibid, p 735-760

⁶ Sesmero, Angel. Divulgación Técnica [online]. Julio 2002. Disponible en <http://teleline.terra.es/personal/adeptc/page7.htm>

⁷ Nicolás Bednarz. Un vistazo a las rotulas [online]. Julio 2002. Disponible en <http://www.parque4x4.com.ar/mecanica/rotulas.html>

⁸ Karim, Niza. Op. Cit.

Capítulo 2

Análisis Cinemático plano con una sola llanta

2.1 Descripción del Mecanismo

El mecanismo de la suspensión está compuesto de los cuerpos que se muestran en la figura siguiente:

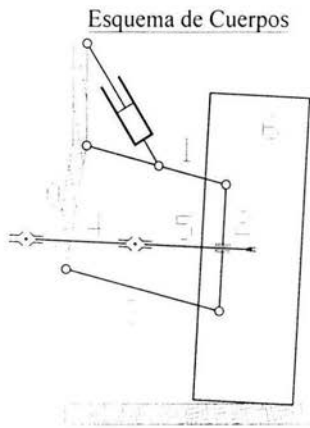


Ilustración 8 Esquema de Suspensión delantera con tracción

El diagrama describe los cuerpos que se analizarán en esta parte, por un lado se tiene al **cuerpo 0** que es la parte del mecanismo de 4 barras que corresponde al eslabón de la estructura, el cual está fijo. Se identifica en la gráfica por ser el único eslabón asciurado. Existe el **cuerpo 1** formado por la horquilla superior del mecanismo de 4 barras el cual cuenta con 3 juntas rotacionales, 2 en sus extremos para el caso del análisis en el plano y otra a una distancia a cualesquiera medida a partir de la junta que une a la horquilla con la estructura y donde irá unido el actuador; este en realidad será el conjunto de amortiguador y muelle helicoidal al cual también será necesario estudiar dentro del análisis Cinemático para poder obtener sus valores de posición y velocidad. El **cuerpo 2** es el acoplador del mecanismo de 4 barras, este cuenta con 2 juntas rotacionales en sus extremos que lo unen a las 2 horquillas y una junta prismática por la que se supone deslizará el eje de tracción 5.

El último eslabón del sistema de la suspensión es el **cuerpo 3** el cual, al igual que la horquilla superior, tendrá 2 juntas de tipo rotacional.

El eje de tracción estará dividido en 2 partes, la primera será el **cuerpo 4** y tendrá una junta universal en el extremo izquierdo y es donde se supone se conectará la flecha de tracción del reductor; la junta podrá deslizarse a lo largo de este, en el otro extremo irá unido a otra junta universal por medio de un estriado al cual será capaz de entregarle el par al eje que saldrá a la llanta, el cual será el **cuerpo 5**.

Finalmente se tiene al **cuerpo 6** que es la llanta del automóvil. Es en la llanta donde el sistema recibirá la excitación del piso y que hará que el mecanismo se mueva con la fuerza que le imprima el piso a la llanta de acuerdo a las condiciones del camino y se modelará por medio de una función adecuada.

La ecuación de grados de libertad de Kutzbach la cual nos dice que:

$$M=3(n-1) - 2J_1 - J_2$$

Tomando en cuenta el mecanismo completo, es decir, las 2 horquillas, los ejes, y el amortiguador. Siendo M los grados de libertad del sistema, n el número de cuerpos incluyendo la tierra, J₁ las juntas de acoplamiento que restringen 2 grados de libertad y J₂ el número de juntas de acoplamiento que sólo restringen 1 grado de libertad. Si tenemos 9 cuerpos (2 horquillas, el acoplador, los 2 ejes, el vástago estriado, el cartucho del amortiguador, su cubierta y la tierra), tenemos que J₁ = 10 y J₂ = 2 (J₁ son las 8 juntas rotacionales y 2 prismáticas, J₂ será igual a 2 por el número de juntas universales)

$$M = 3(9-1) - 2(10) - 2$$

$$M=2$$

Esto querrá decir que la llanta podrá desplazarse verticalmente, así como rotar.

2.2 Posición

Con la configuración descrita anteriormente se procede a identificar los puntos de interés para realizar el análisis de posición correspondiente. Con los puntos definidos, se asocian vectores para realizar el análisis cinemático, además de que se establecen ciertas hipótesis que ayudarán a la solución.

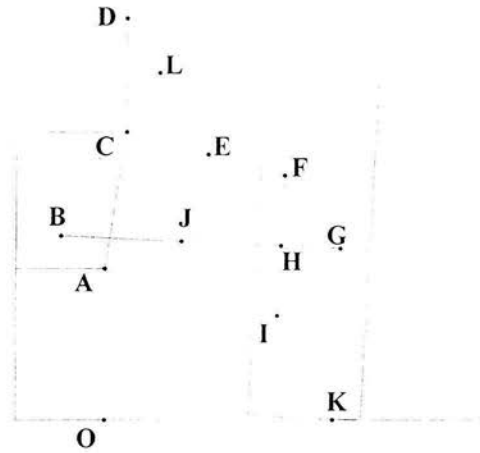


Ilustración 9 Puntos de estudio de las suspensión

Por medio de la siguiente tabla se hará una descripción del diagrama siguiente:

<i>Punto</i>	<i>Descripción</i>
A	Junta rotacional de la horquilla inf.
B	Junta universal del eje del reductor.
C	Junta rotacional de la horquilla sup.
D	Junta rotacional sup. Del amortiguador.
E	Junta rotacional inf. del amortiguador.
F	Junta rotacional de la mangueta
G	Junta prismática entre la llanta y el eje.
H	Junta prismática entre la mangueta y el eje
I	Junta rotacional de la horquilla inf.
J	Junta universal del eje de la rueda
K	Punto de contacto entre la llanta y el piso.
L	Junta prismática del amortiguador
O	Origen del sistema inercial.

Tabla 1 Descripción de los puntos de referencia

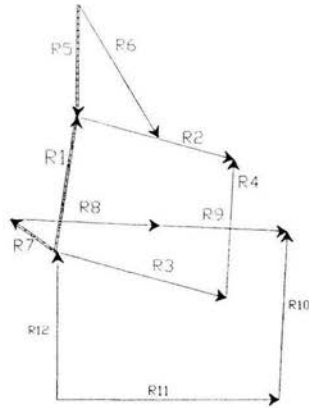


Ilustración 10 Vectores Inerciales

Ya identificados cada punto relevante del mecanismo se detectan cómo es que se pueden plantear los segmentos que darán origen a los vectores que se utilizarán para formar las ecuaciones de lazo vectorial. De esta forma tenemos la siguiente tabla:

<i>Vector</i>	<i>Segmento</i>
R1	AC
R2	CF
R3	AI
R4	IF
R5	DC
R6	DE
R7	AB
R8	BJ
R9	JG
R10	KG
R11	OK
R12	OA

Tabla 2 Vectores y puntos de referencia

Aquí se debe seguir la convención de que los vectores en mayúscula están siendo medidos en la base inercial o mejor dicho respecto al origen y los vectores en minúscula están precisamente en la base móvil que es la

del cuerpo en movimiento. Definidos los vectores a continuación se presentan las ecuaciones de los distintos lazos vectoriales.

Hipótesis del Análisis

Las hipótesis que utilizaremos para el análisis del mecanismo serán:

- Todos los eslabones son rígidos
- El vector R8 rotará e incrementará su magnitud en su base local,
- El vector R9 rotará y aunque conservará su magnitud se mantendrá ortogonal respecto a R4
- El vector R10 seguirá el movimiento del vector R9, estará medido en la misma base 9 pero su magnitud se mantendrá constante y estará medida como componente vertical de la base 9.

Lazo Principal (LP)

Es el mecanismo de 4 barras que se forma entre la estructura, las 2 horquillas y la mangueta por medio de los vectores R1, R2, R3, R4, los cuales forman la siguiente ecuación de lazo vectorial:

$$\bar{R}_1 + \bar{R}_2 - \bar{R}_3 - \bar{R}_4 = 0 \quad \text{II.i}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \bar{R}_1 &= (c_{1X}, c_{1Y}) \\ \bar{R}_2 &= [\mathbf{R}_{\theta_2}] \cdot \bar{r}_2 & \bar{r}_2 &= (c_{2x}, 0) \\ \bar{R}_3 &= [\mathbf{R}_{\theta_3}] \cdot \bar{r}_3 & \bar{r}_3 &= (c_{3x}, 0) \\ \bar{R}_4 &= [\mathbf{R}_{\theta_4}] \cdot \bar{r}_4 & \bar{r}_4 &= (c_{4x}, 0) \end{aligned}$$

Con C_{1X} , C_{1Y} las magnitudes constantes del vector R1 medidas en la **base inercial**, Q_2 como el ángulo de la horquilla superior Q_3 el ángulo de la horquilla inferior, Q_4 el ángulo de la mangueta, C_{2X} magnitud de la horquilla en su **base local 2**, C_{3X} magnitud de la horquilla inferior en su **base local 3**, C_{4X} magnitud de la mangueta en su **base local 4**. Se nota que en éste primer lazo vectorial ningún elemento cambia su magnitud, tan sólo su posición medida a través de sus ángulos respecto al eje X inercial.

Lazo Amortiguador (LA)

Este lazo es el que se forma entre los vectores **R5**, **R6** y **aR2**, sus ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}\bar{R}_5 + a \cdot \bar{R}_2 - \bar{R}_6 &= 0 & \text{II.ii} \\ \bar{R}_5 &= (c_{5x}, c_{5y}) \\ \bar{R}_6 &= [\mathbf{R}_{\Theta_6}] \cdot \bar{r}_6 & \bar{r}_6 = (x_6, 0)\end{aligned}$$

Con C_{5x} y C_{5y} las magnitudes constantes horizontales y verticales del vector **R5** medidas en la base inercial, Q_6 el ángulo del amortiguador, x_6 magnitud variable del vector **r6** medida en su **base local 6**, y **a** constante que indica que tan lejos del buje de la horquilla superior está el buje inferior del amortiguador.

Lazo Eje - Horquilla Superior (LEHS)

Este es el lazo que se forma con los vectores **R7**, **R8**, **R9**, **R4**, **R1** y **R2**, en el se analizarán los movimientos del eje de tracción respecto a los elementos superiores que conforman la suspensión. Su ecuación es la siguiente:

$$\begin{aligned}\bar{R}_7 + \bar{R}_8 + c \cdot \bar{R}_9 + b\bar{R}_4 - \bar{R}_1 - \bar{R}_2 &= 0 & \text{II.iii} \\ \bar{R}_7 &= (c_{7x}, c_{7y}) \\ \bar{R}_8 &= [\mathbf{R}_{\Theta_8}] \cdot \bar{r}_8 & \bar{r}_8 = (x_8, 0) \\ \bar{R}_9 &= [\mathbf{R}_{\Theta_9}] \cdot \bar{r}_9 & \bar{r}_9 = (c_{9x}, 0)\end{aligned}$$

R7 es el vector que va del buje de la horquilla inferior a la junta universal entre el eje y la flecha del reductor, éste es un vector medido en la base inercial sus magnitudes son C_{7x} y C_{7y} . El **R8** es el vector del primer eje de tracción que se mueve y desliza sobre su **base local 8**, esto es, que incrementa su magnitud x_8 dependiendo del ángulo de rotación Q_8 de su base respecto a la base inercial. El **R9** es el vector del eje de tracción que se mueve y desliza sobre su **base local 9**, esto es, que conserva su magnitud C_{9x} aunque variará un ángulo de rotación Q_9 de su base respecto a la base inercial. La constante **b** es una constante de proporcionalidad que nos indica a qué altura de la mangueta se encuentra empotrado la junta prismática o balero en donde se deslizará el eje de tracción y en el cual se recargará sobre la propia mangueta. De igual manera **c** es una constante que nos indica la proporción del eje o vector **R8** que se encuentra interactuando con este lazo, es decir, qué parte del eje se encuentra de la junta universal hasta él balero de la mangueta

Lazo Eje – Horquilla Inferior (LEHI)

Este es el lazo que se forma con los vectores **R7, R8, R9, R4, R3**, en el se analizarán los movimientos del eje de tracción respecto a los elementos inferiores de la suspensión. Su ecuación vectorial es la siguiente:

$$\bar{R}_7 + \bar{R}_8 + c\bar{R}_9 - b\bar{R}_4 - \bar{R}_3 = 0 \quad \text{II.iv}$$

Aquí el vector **R4** va en sentido contrario a su descripción natural.

Lazo Eje – Punto de Contacto (LEPC)

Esta ecuación nos describe la relación que existe entre el punto de contacto del piso con la llanta y esta relación a su vez determina el movimiento del eje de tracción, para el cual se plantea la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \bar{R}_{12} + \bar{R}_7 + \bar{R}_8 + \bar{R}_9 - \bar{R}_{10} - \bar{R}_{11} &= 0 & \text{II.v} \\ \bar{R}_{10} &= [\mathbf{R}_{\Theta_9}] \cdot \bar{r}_{10} & \bar{r}_{10} = (0, c_{10,y}) \\ \bar{R}_{11} &= (x_{11}, y_{11}) \\ \bar{R}_{12} &= (c_{12,x}, c_{12,y}) \end{aligned}$$

R10 es el vector que va del centro del balero de la llanta hasta el punto de contacto en el piso y es perpendicular a R9 el cual tendrá el mismo de ángulo de rotación Θ_9 del eje de tracción y su magnitud (radio promedio de la llanta) será medida con una coordenada vertical C_{10y} . R11 será un vector inercial que va del origen O hasta el punto de contacto en el piso K cuyas componentes serán x_{11}, y_{11} . Finalmente tendremos el vector R12 que nos dará la altura de la estructura del carro al piso, este vector tiene un parámetro C_{12y} .

2.3 Análisis de Velocidad

Las ecuaciones de velocidad se obtienen derivando respecto al tiempo cada una de las ecuaciones matriciales de posición. Con esto se obtienen las variables de velocidad lineal y angular para los eslabones que le corresponden a cada elemento del mecanismo. A continuación se mostrarán dichas ecuaciones para cada lazo vectorial.

Velocidad Lazo Principal

$$\begin{aligned} \bar{V}_2 - \bar{V}_3 - \bar{V}_4 &= 0 & \text{II.vi} \\ \bar{V}_2 &= [\Omega_2] \cdot \bar{R}_2 \\ \bar{V}_3 &= [\Omega_3] \cdot \bar{R}_3 \\ \bar{V}_4 &= [\Omega_4] \cdot \bar{R}_4 \end{aligned}$$

Aquí sólo existen 3 vectores de velocidad ya que el eslabón que corresponde a la estructura permanece fijo, quedando solamente las velocidades angulares de los eslabones ω_2 ω_3 ω_4 respectivamente.

Velocidad Lazo Amortiguador

$$\begin{aligned}
 a\bar{V}_2 - \bar{V}_6 &= 0 && \text{II.vii} \\
 \bar{V}_6 &= [\Omega_6] \cdot \bar{R}_6 + [\mathbf{R}_{\Theta 6}] \cdot \bar{v}_6 && \bar{v}_6 = (v_{x6}, 0)
 \end{aligned}$$

Aquí también no existe velocidad en el eslabón **R5** que es parte de la estructura. En cambio tenemos que el vector de velocidad del eslabón **R6** ya está compuesto por 2 partes, la primera es la velocidad angular que sufre el amortiguador y la segunda es debido al cambio de magnitud del mismo en donde aparece el vector local **v6** el cual indica la velocidad local del amortiguador.

Velocidad Lazo Eje - Horquilla Superior

$$\begin{aligned}
 \bar{V}_8 + c\bar{V}_9 + b\bar{V}_4 - \bar{V}_2 &= 0 && \text{II.viii} \\
 \bar{V}_8 &= [\Omega_8] \cdot \bar{R}_8 + [\mathbf{R}_{\Theta 8}] \cdot \bar{v}_8 && \bar{v}_8 = (v_{x8}, 0) \\
 \bar{V}_9 &= [\Omega_9] \cdot \bar{R}_9
 \end{aligned}$$

En este lazo el eje tiene la parte rotacional de la velocidad y también velocidad en el sentido axial, esto debido a que al existir deslizamiento del eje sobre la flecha del reductor y sobre el eje de salida de la llanta, el vector **R8** perteneciente al eje aumenta de tamaño; esto se mide a través del vector de velocidad local **v8**.

Velocidad Lazo Eje – Horquilla Inferior

$$\bar{V}_8 + c\bar{V}_9 - b\bar{V}_4 - \bar{V}_3 = 0 \quad \text{II.ix}$$

Velocidad Lazo Eje – Punto de Contacto

$$\begin{aligned}
 \bar{V}_8 + \bar{V}_9 - \bar{V}_{10} - \bar{V}_{11} &= 0 && \text{II.x} \\
 \bar{V}_{10} &= [\Omega_9] \cdot \bar{R}_{10} \\
 \bar{V}_{11} &= (v_{x11}, v_{y11})
 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son interesantes ya que por un lado el vector **V10** nos dará la velocidad de rotación con la que se mueve el eslabón **R10** de la llanta (la misma que la del eje de tracción) y por otro lado tenemos la velocidad con la que se traslada la llanta respecto al piso por medio de **V10** con componentes x,y.

2.4 Análisis de Aceleración

Las ecuaciones de aceleración se obtienen derivando respecto al tiempo cada una de las ecuaciones matriciales de velocidad. Con esto se obtienen las variables de aceleración normal y tangencial para los cada elemento del mecanismo. A continuación se mostrarán dichas ecuaciones para cada lazo vectorial.

Aceleración Lazo Principal

$$\begin{aligned}\bar{A}_2 - \bar{A}_3 - \bar{A}_4 &= 0 && \text{II. xi} \\ \bar{A}_2 &= [\mathbf{A}_2] \cdot \bar{R}_2 \\ \bar{A}_3 &= [\mathbf{A}_3] \cdot \bar{R}_3 \\ \bar{A}_4 &= [\mathbf{A}_4] \cdot \bar{R}_4\end{aligned}$$

En este lazo sólo existen aceleraciones tangenciales por lo que solamente sobreviven las aceleraciones angulares de los eslabones móviles las cuales son las siguientes: a_2, a_3, a_4 .

Aceleración Lazo Amortiguador

$$\begin{aligned}a\bar{A}_2 - \bar{A}_6 &= 0 && \text{II. xii} \\ \bar{A}_6 &= [\mathbf{A}_6] \cdot \bar{R}_6 + 2[\Omega_2] \cdot [\mathbf{R}_{\Theta 2}] \cdot \bar{v}_6 + [\mathbf{R}_{\Theta 6}] \cdot \bar{a}_6 && \bar{a}_6 = (ax_6, 0)\end{aligned}$$

En el lazo del amortiguador aparece ya el vector del eslabón **R6** completo, debido a que existe rotación y desplazamiento del mismo. Su aceleración será con componentes angulares y normales dando una aceleración angular a_6 y normal ax_6 .

Aceleración Lazo Eje - Horquilla Superior

$$\begin{aligned}\bar{A}_8 + c\bar{A}_9 + b\bar{A}_4 - \bar{A}_2 &= 0 && \text{II. xiii} \\ \bar{A}_8 &= [\mathbf{A}_8] \cdot \bar{R}_8 + 2[\Omega_8] \cdot [\mathbf{R}_{\Theta 8}] \cdot \bar{v}_8 + [\mathbf{R}_{\Theta 8}] \cdot \bar{a}_8 && \bar{a}_8 = (ax_8, 0) \\ \bar{A}_9 &= [\mathbf{A}_9] \cdot \bar{R}_9\end{aligned}$$

El vector de aceleración correspondiente al eje eslabón de tracción también tiene la forma completa de la ecuación matricial de la aceleración debido al cambio de magnitud y traslación del mismo. Por lo tanto tendrá su aceleración angular $\bar{\mathbf{a}}_8$ y normal $\bar{\mathbf{a}}\mathbf{x}_8$ por ende también la de Coriolis.

Aceleración Lazo Eje – Horquilla Inferior

$$\bar{A}_8 + c \cdot \bar{A}_9 - b\bar{A}_4 - \bar{A}_3 = 0 \quad \text{II.xiv}$$

Aceleración Lazo Eje – Punto de Contacto

$$\begin{aligned} \bar{A}_8 + \bar{A}_9 - \bar{A}_{10} - \bar{A}_{11} &= 0 & \text{II.xv} \\ \bar{A}_{10} &= [\mathbf{A}_9] \cdot \bar{\mathbf{R}}_{10} \\ \bar{A}_{11} &= (ax_{11}, ay_{11}) \end{aligned}$$

Esta última ecuación de lazo existirá de nuevo la relación perpendicular entre el vector del eje **A9** y el vector **A10** de la llanta tendrán ambos la misma velocidad angular y la aceleración de traslación de la llanta será dada por el vector **A11** que describe el punto de contacto de la llanta con el piso por medio de sus componentes inerciales \mathbf{ax}_{11} y \mathbf{ay}_{11} .

A continuación se muestra un cuadro donde se ponen las variables que se deberán encontrar para cada caso Cinemático; con la finalidad de tener una referencia rápida para el desarrollo del análisis.

<i>Lazo Cinemático</i>	<i>Posición</i>	<i>Velocidad</i>	<i>Aceleración</i>	<i>No. Ecuaciones</i>
<i>L.P.</i>	Q_{2r}, Q_{3r}, Q_{4r}	w_{2r}, w_{3r}, w_{4r}	$\bar{\mathbf{a}}_{2r}, \bar{\mathbf{a}}_{3r}, \bar{\mathbf{a}}_{4r}$	2
<i>L.A.</i>	Q_{5r}, x_6	w_{6r}, vx_6	$\bar{\mathbf{a}}_{6r}, \bar{\mathbf{a}}\mathbf{x}_6$	2
<i>L.E.H.S.</i>	Q_{8r}, Q_{9r}, x_8	w_{8r}, w_{9r}, vx_8	$\bar{\mathbf{a}}_{8r}, \bar{\mathbf{a}}_{9r}, \bar{\mathbf{a}}\mathbf{x}_8$	2
<i>L.E.H.I.</i>				2
<i>L.E.P.C</i>	x_{10r}, y_{10r}	vx_{10r}, vy_{10r}	$\bar{\mathbf{a}}\mathbf{x}_{10r}, \bar{\mathbf{a}}\mathbf{y}_{10r}$	2
<i>Parámetros</i>	y_{10}	vy_{10}	$\bar{\mathbf{a}}\mathbf{y}_{10}$	
<i>No. Variables</i>	9	9	9	10

Tabla 3 Variables Cinemáticas

Con esto se observa que son suficientes 5 ecuaciones de lazo vectorial para resolver cada una de las variables cinemáticas donde tendremos como dato de entrada los valores de posición, velocidad, aceleración del punto de contacto entre la llanta y el suelo.

Capítulo 3

Análisis Cinemático con doble llanta

En este capítulo se presenta el sistema con amabas llantas frontales, incluyendo la carrocería, mostrándose la dificultad que se presenta cuando una llanta se mueve en forma diferente de la otra, principalmente en caminos de terracería o muy irregulares.

3.1 Descripción de los Multicuerpos

El sistema de las suspensiones (multicuerpos) tendrá la configuración que se muestra a continuación en la que el subíndice **i** indica la referencia izquierda y **d** la derecha viendo hacia el observador .

Esquema de Cuerpos

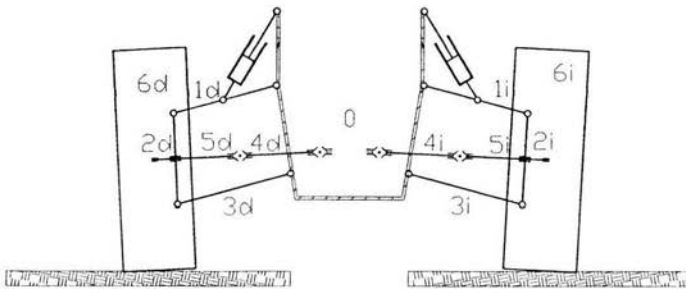


Ilustración 11 Esquema cuerpos integrantes de las suspensiones i (izquierda) y d (derecha)

Se supone en este caso, que esta en una condición de equilibrio vista desde el frente, donde el cuerpo 0 es la estructura del carro y a la cual irán sujetas las horquillas superiores (cuerpos 1i y 1d) y las inferiores (cuerpo 3i y 3d), a estas irán unidas las manguetas (cuerpos 2i y 2d); de la estructura se conectarán los ejes de tracción (cuerpos 4i y 4d) que irán a las de las llantas (cuerpos 5i y 5d), éstas darán la tracción a las dos ruedas (cuerpos 6i y 6d). En la parte superior de la estructura estarán conectados los amortiguadores que no se designarán como cuerpos pero a los que se les estudiará cinemáticamente. Las juntas serán las mismas que las del capítulo 2.

3.2 Posición

Primero se describirán los puntos de estudio de los multicuerpos de la misma forma que en el capítulo 2, únicamente que aquí también se acomodarán de tal forma que se logre visualizar el movimiento de la estructura como un cuerpo

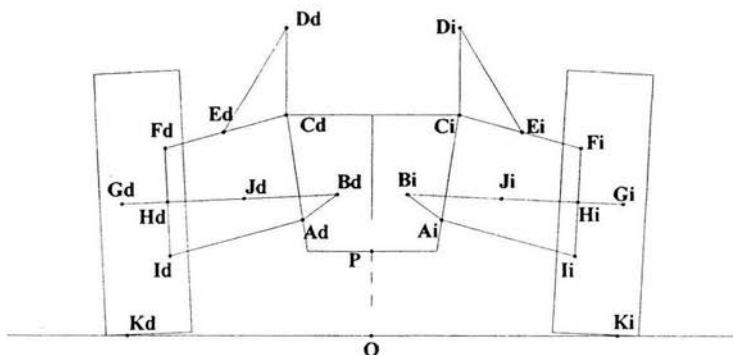


Ilustración 12 Puntos de estudio cinemático

rígido, pero dependiente al movimiento de los mecanismos de las suspensiones y transmisión, esto no hará necesario

plantear las ecuaciones de Kutzbach para obtener los grados de libertad del conjunto de multicuerpos ya que en teoría deberán estar libres, esto es, que la estructura y los mecanismos de suspensión y tracción podrán desplazarse verticalmente así como rotar.

A continuación se muestran los nodos del sistema de multicuerpos:

<i>Punto</i>	<i>Descripción</i>
Ai Ad	Juntas rotacionales de la horquilla inf.
Bi Bd	Juntas universales del eje del reductor.
Ci Cd	Juntas rotacionales de la horquilla sup.
Di Dd	Juntas rotacionales sup. del amortiguador.
Ei Ed	Juntas rotacionales inf. del amortiguador.
Fi Fd	Juntas rotacionales de la mangueta
Gi Gd	Juntas prismáticas entre la llanta y el eje.
Hi Hd	Juntas prismáticas entre la mangueta y el eje
Ii Id	Juntas rotacionales de la horquilla inf.

Ji Jd	Juntas universales del eje de la rueda
Ki Kd	Puntos de contacto entre la llanta y el piso.
O	Origen del sistema inercial.
P	Origen de la estructura

Tabla 4 Descripción de puntos cinemáticos

Nuevamente todos estos puntos se unirán vectorialmente resultando la misma nomenclatura del lado izquierdo y derecho distinguiéndose entre ellos por los subíndices **i** y **d** respectivamente, aunque habrá un vector común a ambos lados que será el R0, ya que éste nos dará la ubicación de la estructura respecto al origen; esto lo podremos revisar en la siguiente tabla:

<i>Vector</i>	<i>Segmento</i>
R0	OP
R1	PA
R2	AC
R3	CF
R4	AI
R5	IF
R6	DC
R7	DE
R8	AB
R9	BJ
R10	JG
R11	OK
R12	KG

Tabla 5 Descripción de puntos cinemáticos

Hipótesis del Análisis

Las hipótesis que se utilizan para el análisis del mecanismo son:

- Todos los eslabones son rígidos
- La estructura variará de posición con el vector R0 además rotará sobre su base local Q_E .
- El vector R9 rotará e incrementará su magnitud en su base local.
- El vector R10 rotará y aunque conservará su magnitud se mantendrá ortogonal respecto a R5
- El vector R11 seguirá el movimiento del vector R10, estará medido en la misma base 10 pero su magnitud se mantendrá constante y estará medida como componente vertical de la base 10.

- El vector R11 seguirá el movimiento del vector R10, estará medido en la misma base 10 pero su magnitud se mantendrá constante y estará medida como componente vertical de la base 10.

A continuación se muestra el sistema de lazos vectoriales utilizados para realizar el estudio cinemático:

Lazos Vectoriales

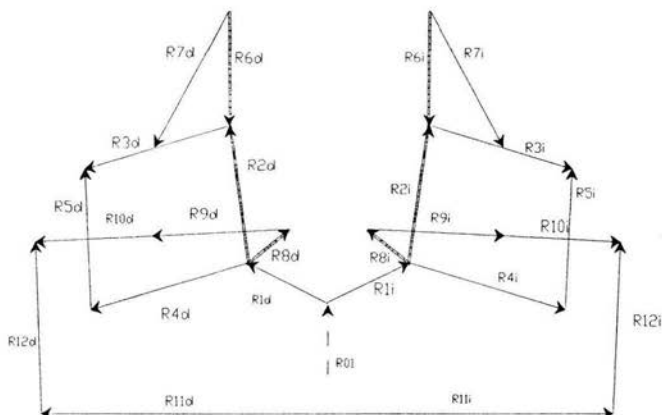


Ilustración 13 Esquema de vectores

Lazo Principal (LP)

Es el mecanismo de 4 barras que se forma entre la estructura, las 2 horquillas y la mangueta por medio de los vectores R1, R2, R3, R4, los cuales forman la siguiente ecuación de lazo vectorial:

$$\bar{R}_2 + \bar{R}_3 - \bar{R}_4 - \bar{R}_5 = 0 \quad \text{III.i}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= [R_{\Theta E}] \cdot r_2 & r_2 &= (c_{2x}, c_{2y}) \\ R_3 &= [R_{\Theta 3}] \cdot r_3 & r_3 &= (c_{3x}, 0) \\ R_4 &= [R_{\Theta 4}] \cdot r_4 & r_4 &= (c_{4x}, 0) \\ R_5 &= [R_{\Theta 5}] \cdot r_5 & r_5 &= (c_{5x}, 0) \end{aligned}$$

magnitud de la horquilla en su **base local 3**, C_{4x} magnitud de la horquilla inferior en su **base local 4**, C_{5x} magnitud de la mangueta en su **base local 5**. Se nota que en éste primer lazo vectorial ningún elemento cambia su magnitud, tan sólo su posición medida a través de sus ángulos respecto al **eje X inercial**.

Lazo Amortiguador (LA)

Este lazo es el que se forma entre los vectores **R6**, **R7** y **aR3**, sus ecuaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned} \bar{R}_6 + a \cdot \bar{R}_3 - \bar{R}_7 &= 0 & \text{III.ii} \\ \bar{R}_6 &= [\mathbf{R}_{\Theta 6}] \cdot \bar{r}_6 & \bar{r}_6 &= (c_{6x}, c_{6y}) \\ \bar{R}_7 &= [\mathbf{R}_{\Theta 7}] \cdot \bar{r}_7 & \bar{r}_7 &= (x_7, 0) \end{aligned}$$

Con C_{6x} y C_{6y} las magnitudes constantes horizontales y verticales del vector **R6** medidas en la base local Q_6 , el ángulo Q_7 del amortiguador, x_7 magnitud variable del vector **r7** medida en su **base local 7**, y **a** constante que indica que tan lejos del buje de la horquilla superior está el buje inferior del amortiguador que es igual a la constante utilizada en el capítulo anterior.

Lazo Eje - Horquilla Superior (LEHS)

Este es el lazo que se forma con los vectores **R8**, **R9**, **cR10**, **bR5**, **R1** y **R2**, en él se analizarán los movimientos del eje de tracción respecto a los elementos superiores que conforman la suspensión. Su ecuación es la siguiente:

$$\begin{aligned} \bar{R}_8 + \bar{R}_9 + c \cdot \bar{R}_{10} + b\bar{R}_5 - \bar{R}_2 - \bar{R}_3 &= 0 & \text{III.iii} \\ \bar{R}_8 &= [\mathbf{R}_{\Theta 8}] \cdot \bar{r}_8 & \bar{r}_8 &= (c_{8x}, c_{8y}) \\ \bar{R}_9 &= [\mathbf{R}_{\Theta 9}] \cdot \bar{r}_9 & \bar{r}_9 &= (x_9, 0) \\ \bar{R}_{10} &= [\mathbf{R}_{\Theta 10}] \cdot \bar{r}_{10} & \bar{r}_{10} &= (c_{10x}, 0) \end{aligned}$$

R8 es el vector que va del buje de la horquilla inferior a la junta universal, éste es un vector medido en la base local sus magnitudes son C_{8x} , C_{8y} . El **R9** es el vector del primer eje de tracción que se mueve y desliza sobre su **base local 9**, esto es, que incrementa su magnitud x_9 dependiendo del ángulo de rotación Q_9 de su base respecto a la base inercial. El **R10** es el vector del eje de tracción que se mueve y desliza sobre su **base local 10**, esto es, que conserva su magnitud C_{10x} aunque variará un ángulo de rotación Q_{10} de su base respecto a la base inercial. La constante **b** es una constante de proporcionalidad. De igual manera **c** es una constante que indica la proporción del eje o vector **R8** que se encuentra interactuando con este lazo, es decir, qué parte del eje se encuentra de la junta universal hasta el balero de la mangueta.

Lazo Eje – Horquilla Inferior (LEHI)

Este es el lazo que se forma con los vectores **R8**, **R9**, **cR10**, **bR5**, **R4**, en el se analizarán los movimientos del eje de tracción respecto a los elementos inferiores de la suspensión. Su ecuación vectorial es la siguiente:

$$\bar{R}_8 + \bar{R}_9 + c\bar{R}_{10} - b\bar{R}_5 - \bar{R}_4 = 0 \quad \text{III.iv}$$

Aquí el vector **R5** va en sentido contrario a su descripción natural.

Lazo Eje – Punto de Contacto (LEPC)

Esta ecuación describe la relación que existe entre el punto de contacto del piso con la llanta y esta a su vez determina el movimiento del eje, para el cual se plantea la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \bar{R}_0 + \bar{R}_1 + \bar{R}_8 + \bar{R}_9 + \bar{R}_{10} - \bar{R}_{11} - \bar{R}_{12} &= 0 & \text{III.v} \\ \bar{R}_0 &= (x_0, y_0) \\ \bar{R}_{11} &= (x_{11}, y_{11}) \\ \bar{R}_{12} &= [\mathbf{R}_{\theta_{10}}] \cdot \bar{r}_{12} & \bar{r}_{12} = (0, c_{12y}) \end{aligned}$$

R12 es el vector que va del centro del balero de la llanta hasta el punto de contacto en el piso y el cual tendrá el mismo de ángulo de rotación Q_{10} del eje de tracción y su magnitud (radio promedio de la llanta) será medida con una coordenada vertical C_{12y} . R11 será un vector inercial que va del origen O hasta el punto de contacto en el piso K cuyas componentes serán x_{11} , y_{11} . Finalmente tendremos el vector R0 que nos dará la altura de la estructura del carro al piso, este vector tiene una distancia x_0 , y_0 .

Lazo Horquilla-Mangueta- Punto de Contacto (LHMPC)

Aquí se relacionan el movimiento de la horquilla inferior con la llanta para finalmente incluir las coordenadas del punto de contacto

$$\bar{R}_0 + \bar{R}_1 + \bar{R}_4 + b \cdot \bar{R}_5 + (1-c) \cdot \bar{R}_{10} - \bar{R}_{11} - \bar{R}_{12} = 0 \quad \text{III.vi}$$

3.3 Análisis de Velocidad

Velocidad Lazo Principal (VLP)

$$\begin{aligned}\bar{V}_2 + \bar{V}_3 - \bar{V}_4 - \bar{V}_5 &= 0 && \text{III.vii} \\ \bar{V}_2 &= [\Omega_2] \cdot \bar{R}_2 \\ \bar{V}_3 &= [\Omega_3] \cdot \bar{R}_3 \\ \bar{V}_4 &= [\Omega_4] \cdot \bar{R}_4 \\ \bar{V}_5 &= [\Omega_5] \cdot \bar{R}_5\end{aligned}$$

Las variables de este lazo serán las velocidades angulares de los eslabones w_E, w_3, w_4, w_5 respectivamente.

Velocidad Lazo Amortiguador (VLA)

$$\begin{aligned}\bar{V}_6 + a \cdot \bar{V}_3 - \bar{V}_7 &= 0 && \text{III.viii} \\ \bar{V}_6 &= [\Omega_6] \cdot \bar{R}_6 \\ \bar{V}_7 &= [\Omega_7] \cdot \bar{R}_7 + [\mathbf{R}_{\Theta 7}] \cdot \bar{v}_7 && \bar{v}_7 = (v_{x7}, 0)\end{aligned}$$

La velocidad en el eslabón **R6** es la de la estructura. En cambio se tiene que el vector de velocidad del eslabón **R7** ya está compuesto por 2 partes, la primera es la velocidad angular que sufre el amortiguador y la segunda es debido al cambio de magnitud del mismo en donde aparece el vector local v_7 el cual indica la velocidad local del amortiguador.

Velocidad Lazo Eje - Horquilla Superior (VLEHS)

$$\begin{aligned}\bar{V}_8 + \bar{V}_9 + c \cdot \bar{V}_{10} + b \bar{V}_5 - \bar{V}_2 - \bar{V}_3 &= 0 && \text{III.ix} \\ \bar{V}_9 &= [\Omega_9] \cdot \bar{R}_9 \\ \bar{V}_9 &= [\Omega_9] \cdot \bar{R}_9 + [\mathbf{R}_{\Theta 9}] \cdot \bar{v}_9 && \bar{v}_9 = (v_{x9}, 0) \\ \bar{V}_{10} &= [\Omega_{10}] \cdot \bar{R}_{10}\end{aligned}$$

En este lazo el eje tiene la parte rotacional de la velocidad y también velocidad en el sentido axial, el vector **V9** perteneciente al eje aumenta de tamaño; esto se mide a través del vector de velocidad local v_9 .

Velocidad Lazo Eje - Horquilla Inferior (VLEHI)

$$\bar{V}_8 + \bar{V}_9 + c \bar{V}_{10} - b \bar{V}_5 - \bar{V}_4 = 0 \quad \text{III.x}$$

Velocidad Lazo Eje – Punto de Contacto (VLEPdeC)

$$\begin{aligned}\bar{V}_0 + \bar{V}_1 + \bar{V}_8 + \bar{V}_9 + \bar{V}_{10} - \bar{V}_{11} - \bar{V}_{12} &= 0 & \text{III.xi} \\ \bar{V}_0 &= (v_{x0}, v_{y0}) \\ \bar{V}_1 &= [\Omega_E] \cdot \bar{R}_1 \\ \bar{V}_{11} &= (v_{x11}, v_{y11}) \\ \bar{V}_{12} &= [\Omega_{10}] \cdot \bar{R}_{12}\end{aligned}$$

El vector \bar{V}_{12} da la velocidad de rotación con la que se mueve el eslabón R_{10} de la llanta (la misma que la del eje de tracción) y por otro lado se tiene la velocidad con la que se traslada la llanta respecto al piso por medio de \bar{V}_{11} con componentes x,y.

Velocidad Lazo Horquilla-Mangueta – Punto de Contacto (VLHMPdeC)

$$\bar{V}_0 + \bar{V}_1 + \bar{V}_4 + b \cdot \bar{V}_5 + (1-c) \cdot \bar{V}_{10} - \bar{V}_{11} - \bar{V}_{12} = 0 \quad \text{III.xii}$$

3.4 Análisis de Aceleración

Las ecuaciones de aceleración se obtienen derivando respecto al tiempo cada una de las ecuaciones matriciales de velocidad. Con esto se obtienen las variables de aceleración normal y tangencial para los de cada elemento del mecanismo. A continuación se mostrarán dichas ecuaciones para cada lazo vectorial.

Aceleración Lazo Principal

$$\begin{aligned}\bar{A}_2 + \bar{A}_3 - \bar{A}_4 - \bar{A}_5 &= 0 & \text{III. xiii} \\ \bar{A}_2 &= [\mathbf{A}_E] \cdot \bar{R}_2 \\ \bar{A}_3 &= [\mathbf{A}_3] \cdot \bar{R}_3 \\ \bar{A}_4 &= [\mathbf{A}_4] \cdot \bar{R}_4 \\ \bar{A}_5 &= [\mathbf{A}_5] \cdot \bar{R}_5\end{aligned}$$

En este lazo sólo existen aceleraciones tangenciales por lo que solamente sobreviven las aceleraciones angulares de los eslabones móviles las cuales son las siguientes: a_E, a_3, a_4, a_5 .

Aceleración Lazo Amortiguador

$$\begin{aligned}\bar{A}_6 + a\bar{A}_3 - \bar{A}_7 &= 0 & \text{III. xiv} \\ \bar{A}_6 &= [\mathbf{A}_6] \cdot \bar{R}_6 \\ \bar{A}_7 &= [\mathbf{A}_7] \cdot \bar{R}_7 + 2[\Omega_7] \cdot [\mathbf{R}_{\Theta 7}] \cdot \bar{v}_7 + [\mathbf{R}_{\Theta 7}] \cdot \bar{a}_7 & \bar{a}_7 = (a_{x7}, 0)\end{aligned}$$

En lazo del amortiguador aparece ya el vector del eslabón **R7** completo, debido a que existe rotación y desplazamiento del mismo. Su aceleración será con componentes angulares y normales dando una aceleración angular \mathbf{a}_7 y normal \mathbf{ax}_7 . En este lazo existirá la aceleración angular de la estructura \mathbf{a}_e considerándola como cuerpo rígido.

Aceleración Lazo Eje - Horquilla Superior

$$\begin{aligned}\bar{A}_8 + \bar{A}_9 + c\bar{A}_{10} + b\bar{A}_5 - \bar{A}_2 - \bar{A}_3 &= 0 & \text{III. xv} \\ \bar{A}_8 &= [\mathbf{A}_8] \cdot \bar{R}_8 \\ \bar{A}_9 &= [\mathbf{A}_9] \cdot \bar{R}_9 + 2[\Omega_9] \cdot [\mathbf{R}_{\Theta 9}] \cdot \bar{v}_9 + [\mathbf{R}_{\Theta 9}] \cdot \bar{a}_9 & \bar{a}_9 = (ax_9, 0) \\ \bar{A}_{10} &= [\mathbf{A}_{10}] \cdot \bar{R}_{10}\end{aligned}$$

El vector de aceleración correspondiente al eje eslabón de tracción también tiene la forma completa de la ecuación matricial de la aceleración debido al cambio de magnitud y traslación del mismo. Por lo tanto tendrá su aceleración angular \mathbf{a}_7 y normal \mathbf{ax}_7 .

Aceleración Lazo Eje – Horquilla Inferior

$$\bar{A}_8 + \bar{A}_9 + c \cdot \bar{A}_{10} - b \cdot \bar{A}_5 - \bar{A}_2 - \bar{A}_4 = 0 \quad \text{III.xvi}$$

Aceleración Lazo Eje – Punto de Contacto

$$\begin{aligned}\bar{A}_0 + \bar{A}_1 + \bar{A}_8 + \bar{A}_9 + \bar{A}_{10} - \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} &= 0 & \text{III.xvii} \\ \bar{A}_0 &= (a_{x0}, a_{y0}) \\ \bar{A}_1 &= [\mathbf{A}_1] \cdot \bar{R}_1 \\ \bar{A}_{11} &= (ax_{11}, ay_{11}) \\ \bar{A}_{12} &= [\mathbf{A}_{12}] \cdot \bar{R}_{12}\end{aligned}$$

Aceleración Lazo-Horquilla-Mangueta – Punto de Contacto (ALHMPdeC)

$$\bar{A}_0 + \bar{A}_1 + \bar{A}_4 + b\bar{A}_5 + (1-c)\bar{A}_{10} - \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} = 0 \quad \text{III.xviii}$$

A continuación se muestra un cuadro donde se ponen las variables que se deberán de encontrar para cada caso Cinemático; con la finalidad de tener una referencia rápida para el desarrollo del análisis.

<i>Lazo Cinemático</i>	<i>Posición</i>	<i>Velocidad</i>	<i>Aceleración</i>	<i>No. Ecuaciones.</i>
<i>L.P.</i>	Q_{3d}, Q_{4d}, Q_{5d}	W_{3d}, W_{4d}, W_{5d}	a_{3d}, a_{4d}, a_{5d}	2 der.
	Q_{3i}, Q_{4i}, Q_{5i}	W_{3i}, W_{4i}, W_{5i}	a_{3i}, a_{4i}, a_{5i}	2 izqs.
<i>L.A.</i>	Q_{7d}, X_{7d}	W_{7d}, VX_{7d}	a_{7d}, aX_{7d}	2 der.
	Q_{7i}, X_{7i}	W_{7i}, VX_{7i}	a_{7i}, aX_{7i}	2 izqs.
<i>L.E.H.S.</i>	Q_{9d}, Q_{10d}, X_{10d}	W_{9d}, W_{10d}, VX_{9d}	a_{9d}, a_{10d}, aX_{9d}	2 der.
	Q_{9i}, Q_{10i}, X_{10i}	W_{9i}, W_{10i}, VX_{9i}	a_{9i}, a_{10i}, aX_{9i}	2 izqs.
<i>L.E.H.I.</i>				2 der.
				2 izqs.
<i>L.E.P.C</i>	X_{0}, y_{0}, X_{11d}	VX_{0}, VY_{0}, VX_{11d}	aX_{0}, ay_{0}, aX_{11d}	2 der.
	X_{11i}	VX_{11i}	aX_{11i}	2 izqs.
<i>LH.M.P.C</i>				2 der.
				2 izqs.
<i>Parámetros</i>	y_{10d}, y_{10i}	VY_{10d}, VY_{10i}	ay_{10d}, ay_{10i}	
<i>No. Variables</i>	21	21	21	24

Tabla 6 Variables cinemáticas

Aquí vemos que es necesario tomar 12 ecuaciones vectoriales, con 2 componentes cada una, ya que al ser 21 incógnitas el sistema se contempla si de las 24 ecuaciones escogemos 21 con las cuales trabajar. Inclusive es posible probar tan solo con un parámetro de entrada y no con 2, siendo ahora 22 incógnitas para cada caso cinemático (posición, velocidad y aceleración) y ver de que forma se comporta el sistema de ecuaciones.

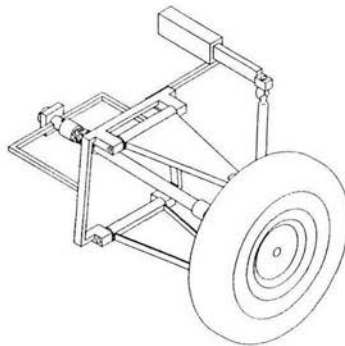
Capítulo 4

Análisis Cinemático en 3D

En este capítulo se presenta la suspensión considerando vectores en el espacio, su transformación a un mismo sistema de referencia para ubicar las variables de acuerdo al movimiento.

4.1 Descripción del Sistema de Multicuerpos

El sistema de la suspensión en su configuración inicial es el que se muestra en la figura siguiente, se presenta la parte izquierda de la suspensión (llanta izquierda) mostrándose parte del chasis, este será un análisis semejante al presentado en el capítulo 1



I **Ilustración 13 Esquema de Suspensión con tracción delantera llanta izquierda**

Esta es una figura isométrica y se observa el sistema de multicuerpos para el caso de la llanta izquierda delantera, donde la cremallera se encuentra atrás respecto al sentido o avance del auto. A manera de ver a detalle el sistema de tracción se muestra a continuación retirando de la vista la llanta, esto brinda una mejor descripción del mecanismo.

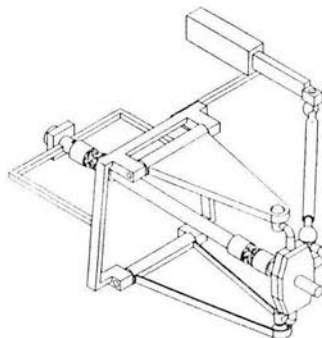


Ilustración 14 Esquema de Suspensión con tracción delantera llanta izquierda

Básicamente es el mecanismo con que se trabajó en el capítulo 2 pero con una representación más detallada; se puede ver que el sistema se puede descomponer básicamente en 3 partes principales, la primera sería la parte de la suspensión que se compone por la estructura (la cual se representa como si estuviera armada con perfiles PTR rectangulares), las horquillas superior e inferior que se unen a la estructura por medio de un buje y perno respectivamente, y la mangueta que sirve como acoplador de las 2 horquillas mediante dos rótulas en sus extensiones. A su vez se observa el sistema de la dirección que está colocado atrás respecto del mecanismo de la suspensión, este se compone fundamentalmente de la cremallera y su estuche (el cual se encuentra fijo a la estructura) y la barra de la dirección que por un extremo se une a la cremallera y por el otro a la mangueta mediante juntas esféricas; este mecanismo es un sistema de manivela-acoplador-corredera espacial.

La última parte es la parte de tracción donde tenemos una flecha de entrada que es la que entrega el giro al sistema desde el diferencial, esta lo transmite a una flecha mediante una junta de Hooke o junta homocinética, para finalmente entregarle el giro a la flecha de la llanta que se conecta a la anterior igualmente por medio de una junta de Hooke.

Esta tercera parte va a estar supeditada a las restricciones de movimiento de los mecanismos anteriores, siendo de 2 grados de libertad el sistema en su conjunto, los cuales serían: la posición de la llanta respecto al suelo y su giro respecto al desplazamiento de la cremallera.

De la misma manera que en los capítulos anteriores se nombran los cuerpos para identificarlos y posteriormente plantear la cinemática del sistema de multicuerpos. La figura siguiente nos muestra los cuerpos del sistema y se identifican en la tabla siguiente.

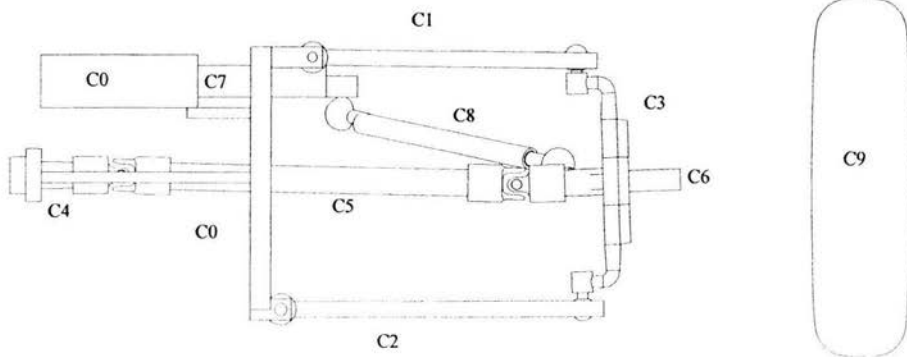


Ilustración 15 Sistema de multicuerpos de la suspensión

Número de Cuerpo	Identificación
0	Estructura
1	Horquilla superior
2	Horquilla inferior
3	Mangueta
4	Flecha de entrada
5	Flecha de tracción
6	Flecha de tracción llanta
7	Cremallera
8	Barra de la dirección
9	Llanta

Tabla 7 Descripción de cuerpos

4.2 Posición

Se describirán los puntos del sistema de multicuerpos de forma análoga que en los capítulos anteriores.

A continuación se identifican los nodos del sistema de multicuerpos:

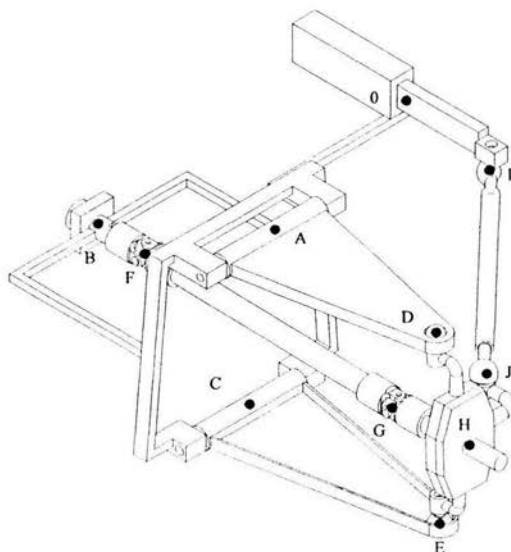


Ilustración 16 Ubicación de los puntos cinemáticos

<i>Punto</i>	<i>Descripción</i>
O	Origen de referencia
A	Buje de horquilla superior
B	Balero flecha entrada.
C	Buje de horquilla inferior
D	Junta esférica horquilla superior
E	Junta esférica horquilla inferior
F	Centro de la cruceta de junta hooke
G	Centro de la cruceta de junta hooke
H	Punto de contacto. de la flecha llanta con mangueta.
I	Rótula cremallera-barra dirección
J	Rótula barra dirección-mangueta
O	Origen del sistema inercial.

Tabla 8 Descripción de puntos cinemáticos

<i>Vector</i>	<i>Segmento</i>
R0	OA
R1	OB
R2	OC
R3	CA
R4	AD
R5	CE
R6	ED
R7	BF
R8	FG
R9	GH
R10	OI
R11	IJ
R12	HJ

Tabla 9 Vectores y puntos cinemáticos

A continuación se establece el sistema de lazos vectoriales que permitirán formar las mallas para el análisis de posición, para posteriormente determinar las respectivas ecuaciones de velocidad y aceleración, derivadas a partir de la primera.

Las constantes c_{xi} , c_{yi} , c_{zi} son las coordenadas constantes de los vectores de cada punto de referencia respecto a un origen establecido ya sea en la **base inercial o local**, lo mismo pasa con las coordenadas variables x_i , y_i , z_i , que estarán indicando la variación de dicha coordenada en su sistema de referencia, en este caso sólo se variará x_i , ya que se elegirán las bases de manera que únicamente se midan desplazamientos de la coordenada x en su base local. Q_a^b es la matriz de transformación de la base **b** a la **a** por medio de las matrices ortogonales de rotación $Rot [eje_i, ángulo_i]^\circ$ que serán matrices de transformación lineal que estarán en función del eje de rotación y el ángulo correspondiente, si las rotaciones son sobre el eje z_i entonces se medirá un ángulo θ_i variable, de otra forma si las rotaciones se llevan a cabo sobre el eje x_i local donde los giros serán constantes y su valor será de 90° , esto con el fin de hacer coincidir el eje de rotación con su respectivo eje z local.

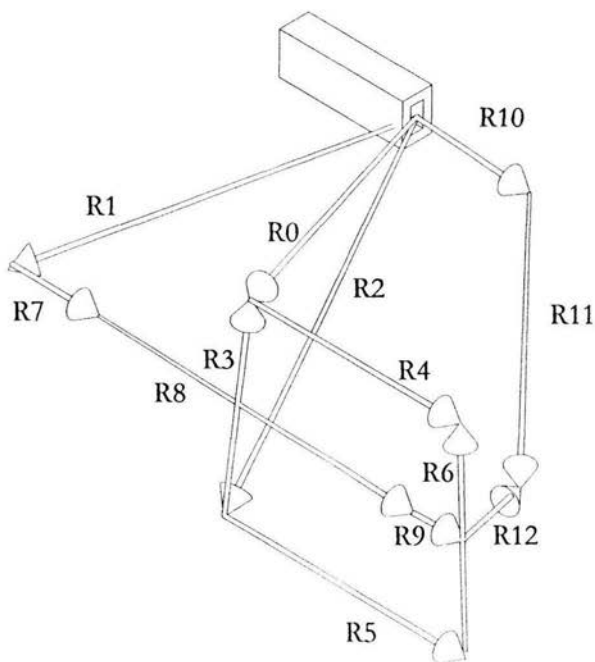


Ilustración 17 Ubicación de los vectores en el sistema de multicuerpos

Hipótesis del Análisis

Las hipótesis que utilizaremos para el análisis del mecanismo serán:

- Todos los eslabones son rígidos
- El vector R7 incrementará su magnitud la cual se medirá en la base inercial del mecanismo.
- El vector R8 únicamente rotará con las matrices de rotación de su junta de Hooke, manteniendo su magnitud constante.
- El vector R9 girará con las transformaciones de las 2 juntas de Hooke del eje de tracción, e incrementará su magnitud en su base local, además será ortogonal a R6
- El vector R12 se moverá con las transformaciones del vector R6 y la rotación sobre el mismo R6 que será causada por el funcionamiento de la cremallera.

Lazo Principal (LP)

Este lazo se forma entre la estructura, las 2 horquillas y la mangueta por medio de los vectores R0, R2, R4, R5, R6 los cuales forman la siguiente ecuación de lazo vectorial:

$$\vec{R}_0 + \vec{R}_1 - \vec{R}_2 - \vec{R}_3 - \vec{R}_4 - \vec{R}_5 = \vec{0} \quad \text{IV.i}$$

donde

$$\begin{aligned} \vec{R}_0 &= (c_{x0}, c_{y0}, c_{z0}) \\ \vec{R}_1 &= (c_{x1}, c_{y1}, c_{z1}) \\ \vec{R}_2 &= \vec{Q} \cdot \vec{r}_2 \quad \vec{r}_2 = (c_{x2}, 0, 0) \\ \vec{Q} &= \text{Rot}[\underline{z}_1, \psi_1] \\ \vec{R}_3 &= \vec{Q} \cdot \vec{r}_3 \quad \vec{r}_3 = (c_{x3}, 0, 0) \\ \vec{Q} &= \text{Rot}[\underline{z}_1, \psi_1] \\ \vec{R}_4 &= \vec{Q} \cdot \vec{Q} \cdot \vec{r}_4 \quad \vec{r}_4 = (c_{x4}, 0, 0) \\ \vec{Q} &= \text{Rot}[\underline{z}_5, \psi_4] \end{aligned}$$

En este caso \mathbf{R}_i^0 es el vector de posición que va del origen O al pto. A, \mathbf{R}_i^2 vector de posición que va del origen O al pto. C, \mathbf{R}_i^4 vector inercial que describe la rotación de la horquilla superior va del pto. A al D, \mathbf{R}_i^5 vector inercial que describe la rotación de la horquilla inferior va del pto. C al E, y finalmente, \mathbf{R}_i^6 vector inercial que describe la rotación de la mangueta (acoplador) de la llanta en el plano formado por el mecanismo de 4 barras de la suspensión va del pto. E al D.

Lazo Horquilla Inferior-Dirección (LHI-D)

Este lazo es el que se forma entre los vectores \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_5 , \mathbf{R}_6 , \mathbf{R}_{10} , \mathbf{R}_{11} y \mathbf{R}_{12} , sus ecuaciones son las siguientes:

$$\overline{\overline{\mathbf{R}_i^2}} + \overline{\overline{\mathbf{R}_i^5}} + b \cdot \overline{\overline{\mathbf{R}_i^6}} + \overline{\overline{\mathbf{R}_i^{12}}} - \overline{\overline{\mathbf{R}_i^{10}}} - \overline{\overline{\mathbf{R}_i^{11}}} = \vec{0} \quad \text{IV.ii}$$

donde

$$\begin{aligned} \overline{\overline{\mathbf{R}_i^{10}}} &= (x_{10}, c_{y10}, c_{z10}) \\ \overline{\overline{\mathbf{R}_i^{11}}} &= \underset{i}{\mathbf{Q}} \cdot \underset{11}{\mathbf{Q}} \cdot \underset{11p}{\mathbf{Q}} \cdot \underset{11p}{\mathbf{r}}^{11} & \overline{\overline{\mathbf{r}_{11p}^{11}}} &= (c_{x11}, 0, 0) \\ \underset{i}{\mathbf{Q}} &= \text{Rot}[z_{10}, \psi_{11}] & \underset{11}{\mathbf{Q}} &= \text{Rot}[x_{11}, -90^\circ] & \underset{11p}{\mathbf{Q}} &= \text{Rot}[z_{11p}, \psi_{11pp}] \\ \overline{\overline{\mathbf{R}_i^{12}}} &= \underset{i}{\mathbf{Q}} \cdot \underset{5}{\mathbf{Q}} \cdot \underset{6}{\mathbf{Q}} \cdot \underset{6p}{\mathbf{Q}} \cdot \underset{6pp}{\mathbf{Q}} \cdot \underset{6pp}{\mathbf{r}}^{12} & \overline{\overline{\mathbf{r}_{6pp}^{12}}} &= (c_{x12}, 0, 0) \\ \underset{6}{\mathbf{Q}} &= \text{Rot}[x_6, -90^\circ] & \underset{6p}{\mathbf{Q}} &= \text{Rot}[z_{6p}, \psi_{6pp}] \end{aligned}$$

El vector de posición \mathbf{R}_i^{10} es el que va del origen O al pto. I, que corresponde a la cremallera de la dirección \mathbf{R}_i^{11} vector inercial que representa la barra de acoplamiento entre la dirección y la mangueta, que va de I al pto. J, \mathbf{R}_i^{12} vector inercial que describe la rotación de la mangueta pero ahora respecto al ángulo medido sobre su eje de rotación (entre los puntos ED que definen las horquillas superior e inferior) este ángulo es perpendicular al anterior que era medido en el plano del mecanismo de 4 barras.

Por medio de esta ecuación se relaciona el movimiento de la suspensión con el de la barra de la dirección, esto para definir la relación entre ambos al subir y bajar la llanta.

Lazo Eje-Horquilla Superior (LE-HS)

Este lazo es el que se forma entre los vectores \mathbf{R}_0 , \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_4 , \mathbf{R}_6 , \mathbf{R}_7 , \mathbf{R}_8 , \mathbf{R}_9 sus ecuaciones son las siguientes:

$$\overline{\overline{R}}_i^1 + \overline{\overline{R}}_i^7 + \overline{\overline{R}}_i^8 + \overline{\overline{R}}_i^9 + b \cdot \overline{\overline{R}}_i^6 - \overline{\overline{R}}_i^0 - \overline{\overline{R}}_i^4 = 0 \quad \text{IV.iii}$$

donde

$$\begin{aligned} \overline{\overline{R}}_i^7 &= (x_7, 0, 0) \\ \overline{\overline{R}}_i^8 &= \underset{i}{\underline{\underline{Q}}} \underset{s}{\underline{\underline{Q}}} \underset{s_p}{\underline{\underline{Q}}} \cdot \overline{\overline{r}}_{s_p}^8 & \overline{\overline{r}}_{s_p}^8 &= (c_{vs}, 0, 0) \\ \underset{i}{\underline{\underline{Q}}} &= \text{Rot}[z_i, \psi_8] & \underset{s}{\underline{\underline{Q}}} &= \text{Rot}[x_s, -90^\circ] & \underset{s_p}{\underline{\underline{Q}}} &= \text{Rot}[z_{s_p}, \psi_{s_p}] \\ \overline{\overline{R}}_{ic}^9 &= \underset{i}{\underline{\underline{Q}}} \underset{s}{\underline{\underline{Q}}} \underset{s_p}{\underline{\underline{Q}}} \underset{s_{pp}}{\underline{\underline{Q}}} \underset{9}{\underline{\underline{Q}}} \underset{9_p}{\underline{\underline{Q}}} \cdot \overline{\overline{r}}_{9_{pp}}^9 & \overline{\overline{r}}_{9_{pp}}^9 &= (x_9, 0, 0) \\ \underset{s_{pp}}{\underline{\underline{Q}}} &= \text{Rot}[z_{s_{pp}}, \psi_9] & \underset{9}{\underline{\underline{Q}}} &= \text{Rot}[x_9, 90^\circ] & \underset{9_p}{\underline{\underline{Q}}} &= \text{Rot}[z_{9_p}, \psi_{9_{pp}}] \end{aligned}$$

\mathbf{R}_i^7 es el vector de la flecha del reductor que va de B al pto. F, \mathbf{R}_i^8 vector inercial de la flecha intermedia que se encuentra entre las 2 juntas de Hooke va del pto. F al pto. G, \mathbf{R}_{ic}^9 vector inercial que describe el movimiento de la flecha de salida de la llanta, el vector va del pto G al H que se encuentra en el centro de la mangueta, este vector tiene las rotaciones de ambas juntas de Hooke.

Se plantea este lazo para ver cómo es que se comporta el eje de tracción con el vaivén de la suspensión, y analizar el comportamiento de las juntas de Hooke debido a la acción de la suspensión.

Lazo Eje-Dirección (LE-D)

Este lazo es el que se forma entre los vectores $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_7, \mathbf{R}_8, \mathbf{R}_9, \mathbf{R}_{10}, \mathbf{R}_{11}, \mathbf{R}_{12}$ sus ecuaciones son las siguientes:

$$\overline{\overline{R}}_i^1 + \overline{\overline{R}}_i^7 + \overline{\overline{R}}_i^8 + \overline{\overline{R}}_{im}^9 + \overline{\overline{R}}_i^{12} - \overline{\overline{R}}_i^{10} - \overline{\overline{R}}_i^{11} = 0 \quad \text{IV.iv}$$

Con este último lazo se relaciona el movimiento del eje de tracción debido al movimiento realizado por la dirección además de que es necesario para completar el número de ecuaciones con el de incógnitas.

Condición de Perpendicularidad (Producto Punto)

Esta condición se estableció para que se pudiera obtener la solución propia del mecanismo, esta se propone entre los

vectores de la flecha de la llanta **R9** y el vector que representa la mangueta **R6**, ambos medidos en la misma base, por lo que el vector **R9** se transformará a la base de la mangueta incluyendo las rotaciones debidas a la cremallera, los vectores son los siguientes:

$$\begin{aligned} \overline{R_{6pp}^6} &= (0,0, C_{\alpha 12}) \\ \overline{R_{im}^9} &= \underset{i}{\underline{T}} \cdot \underset{i}{\underline{A}} \cdot \underset{i}{\underline{T}} \cdot \overline{R_i^9} \\ \underset{i}{\underline{T}} &= \underset{i}{\underline{Q}} \cdot \underset{s}{\underline{Q}} \cdot \underset{o}{\underline{Q}} \cdot \underset{pp}{\underline{Q}} \\ \underset{i}{\underline{A}} &= \underset{i}{\underline{Q}} \cdot \underset{s}{\underline{Q}} \cdot \underset{pp}{\underline{Q}} \cdot \underset{9}{\underline{Q}} \cdot \underset{9pp}{\underline{Q}} \\ \overline{R_i^9} \cdot \overline{R_{6pp}^6} &= 0 \end{aligned}$$

4.3 Análisis de Velocidad

El análisis de la velocidad se obtiene al derivar las ecuaciones de posición utilizando la regla de la cadena para el caso de que se tenga multiplicación de rotaciones.

$$\begin{aligned} \overline{V} &= \underline{\underline{\Omega}} \cdot \overline{P} + \underline{\underline{Q}} \cdot \overline{v} \\ \underline{\underline{\Omega}} &= \begin{pmatrix} 0 & -eg_1 & eg_2 \\ eg_1 & 0 & -eg_1 \\ -eg_2 & eg_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \omega \\ \overline{v}^T &= (v_x, 0, 0) \end{aligned}$$

Aquí la matriz **W** es la matriz de velocidad angular expresada en su forma general con las componentes del vector de rotación, **w** es el valor de la velocidad angular sobre el eje, y **v_x** es el valor de la velocidad lineal expresada en su base local de referencia, para nuestro caso de estudio la velocidad únicamente tendrá componente en la coordenada x de nuestro sistema de referencia.¹⁰

Velocidad del Lazo Principal (VLP)

Aquí los vectores de velocidad son V4, V5, V6 los cuales forman la siguiente ecuación de lazo vectorial:

$$\overline{V_i^4} - \overline{V_i^5} - \overline{V_i^6} = \overline{0} \quad IV.v$$

donde

$$\begin{aligned} \overline{V}_i^4 &= \overline{\Omega}_i^4 \cdot \overline{R}_i^4 & \overline{\Omega}_i^4 &= \Omega_{[Z_0, \omega_4]} \\ \overline{V}_i^5 &= \overline{\Omega}_i^5 \cdot \overline{R}_i^5 & \overline{\Omega}_i^5 &= \Omega_{[Z_0, \omega_5]} \\ \overline{V}_i^6 &= \left[\overline{\Omega}_i^6 + \overline{Q}_i^6 \cdot \overline{\Omega}_i^6 \cdot \overline{Q}_i^6 \right] \cdot \overline{R}_i^6 & \overline{\Omega}_i^6 &= \Omega_{[Z_5, \omega_6]} \end{aligned}$$

Velocidad del Lazo Horquilla Inferior-Dirección (VLHI-D)

Este lazo es el que se forma entre los vectores **V2**, **V5**, **b*V6**, **V10**, **V11** y **V12**, sus ecuaciones son las siguientes:

$$\overline{V}_i^5 + b \cdot \overline{V}_i^6 + \overline{V}_i^{12} - \overline{V}_i^{10} - \overline{V}_i^{11} = \overline{0} \quad \text{IV.vi}$$

donde

$$\begin{aligned} \overline{V}_i^{10} &= (v_{v10}, 0, 0) \\ \overline{V}_i^{11} &= \left[\overline{\Omega}_i^{11} + \overline{Q}_i^{11} \cdot \overline{\Omega}_i^{11} \cdot \overline{Q}_i^{11} \right] \cdot \overline{R}_i^{11} \\ \overline{V}_i^{12} &= \left[\overline{\Omega}_i^{12} + \overline{Q}_i^{12} \cdot \overline{\Omega}_i^{12} \cdot \overline{Q}_i^{12} + \overline{Q}_i^{12} \cdot \overline{Q}_i^{12} \cdot \overline{\Omega}_i^{12} \cdot \overline{Q}_i^{12} \cdot \overline{Q}_i^{12} \cdot \overline{\Omega}_i^{12} \right] \cdot \overline{R}_i^{12} \\ \overline{\Omega}_i^{11} &= \Omega_{[Z_i, \omega_{11}]} & \overline{\Omega}_i^{12} &= \Omega_{[Z_{11p}, \omega_{11pp}]} & \overline{\Omega}_i^{12} &= \Omega_{[Z_{6pr}, \omega_{6ppr}]} \end{aligned}$$

Velocidad del Lazo Eje- Horquilla Superior (VLE-HS)

Este lazo es el que se forma entre los vectores **V6**, **V7**, **V8**, **V9** sus ecuaciones son las siguientes:

$$\overline{V}_i^7 + \overline{V}_i^8 + \overline{V}_i^9 + \overline{V}_i^{12} - \overline{V}_i^{10} - \overline{V}_i^{11} = \overline{0} \quad \text{IV.vii}$$

donde

4.4 Análisis de Aceleración

El análisis se obtiene al derivar las ecuaciones de velocidad utilizando la regla de la cadena para el caso de que se tenga multiplicación de las rotaciones y velocidades de cada vector.

$$\overline{AL} = \underline{\underline{A}} \cdot \overline{P} + 2 * \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \overline{v} + \underline{\underline{Q}} \cdot \overline{a}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & -eg_3 & eg_2 \\ eg_3 & 0 & -eg_1 \\ -eg_2 & eg_1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (\omega^2 + \alpha)$$

$$\overline{a} = (\alpha_x, 0, 0)$$

Aquí la matriz A (alfa) es la matriz de aceleración angular expresada en su forma general con las componentes del vector de rotación, esta matriz es multiplicada por la velocidad angular al cuadrado OMEGA MINÚSCULA AL CUADRADO y la aceleración angular ALFA MINÚSCULA, siendo estas dos cantidades escalares, y α_x es el valor de la aceleración lineal expresada en su base local de referencia, al igual que la velocidad y el desplazamiento la aceleración tendrá solamente una componente en la coordenada x del sistema de referencia. ¹¹

Aceleración del Lazo Principal (ALP)

Los vectores de aceleración son A4, A5, A6 los cuales forman la siguiente ecuación de lazo vectorial:

$$AL_i^4 - AL_i^5 - AL_i^6 = 0 \quad \text{IV.ix}$$

donde

$$\overline{AL}_i^4 = \underline{\underline{A}}_i^4 \cdot \overline{R}_i^4$$

$$\overline{AL}_i^5 = \underline{\underline{A}}_i^5 \cdot \overline{R}_i^5$$

$$\overline{AL}_i^6 = \left[\text{MtzAccel}_{R_i^6} \right] \cdot \overline{R}_i^6$$

$$\text{MtzAccel}_{R_i^6} = \underline{\underline{A}}_i^5 + \underline{\underline{\Omega}}_i^5 \cdot \underline{\underline{Q}}_i^5 \cdot \underline{\underline{\Omega}}_i^6 \cdot \underline{\underline{Q}}_i^6 + \underline{\underline{Q}}_i^5 \cdot \underline{\underline{A}}_i^6 \cdot \underline{\underline{Q}}_i^6 - \underline{\underline{Q}}_i^5 \cdot \underline{\underline{\Omega}}_i^6 \cdot \underline{\underline{Q}}_i^5 + \left[\underline{\underline{\Omega}}_i^5 + \underline{\underline{Q}}_i^5 \cdot \underline{\underline{\Omega}}_i^6 \cdot \underline{\underline{Q}}_i^5 \right]^2$$

$$\underline{\underline{A}}_i^4 = \underline{\underline{A}}[\underline{Z}_i^4, \omega_4, \alpha_4] \quad \underline{\underline{A}}_i^5 = \underline{\underline{A}}[\underline{Z}_i^5, \omega_5, \alpha_5] \quad \underline{\underline{A}}_i^6 = \underline{\underline{A}}[\underline{Z}_i^6, \omega_6, \alpha_6]$$

Aceleración del Lazo Horquilla Inferior-Dirección (ALHI-D)

Este lazo es el que se forma entre los vectores **AL2**, **AL5**, **b*AL6**, **AL10**, **AL11** y **AL12**, sus ecuaciones son las siguientes:

$$\overline{AL}_i^5 + b \cdot \overline{AL}_i^6 + \overline{AL}_i^{12} - \overline{AL}_i^{10} - \overline{AL}_i^{11} = 0 \quad \text{IV.x}$$

donde

$$\begin{aligned} \overline{AL}_i^{10} &= (\omega_{310}, 0, 0) \\ \overline{AL}_i^{11} &= \begin{bmatrix} \text{MtzAcel}_{R_i^{11}} \end{bmatrix} \cdot \overline{R}_i^{11} \\ \overline{AL}_i^{12} &= \begin{bmatrix} \text{MtzAcel}_{R_i^{12}} \end{bmatrix} \cdot \overline{R}_i^{12} \\ \underline{\underline{\text{MtzAcel}_{R_i^{11}}}} &= \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} - \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} + \\ & \quad \left[\underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \right]^2 \\ \underline{\underline{\text{MtzAcel}_{R_i^{12}}}} &= \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{Q}} - \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} + \\ & \quad \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} - \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} - \\ & \quad \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} + \left[\underline{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \right]^2 \\ \underline{\underline{A}} &= \underline{\underline{A}} \left[\underline{\underline{z}}_i, \omega_{11}, a_{11} \right] \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \left[\underline{\underline{z}}_{11p}, \omega_{11pp}, a_{11pp} \right] \quad \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} \left[\underline{\underline{z}}_{6pp}, \omega_{6pp}, a_{6pp} \right] \end{aligned}$$

Aceleración del Lazo Eje- Horquilla Superior (VLE-HS)

Este lazo es el que se forma entre los vectores **V6**, **V7**, **V8**, **V9** sus ecuaciones son las siguientes:

$$\overline{AL}_i^7 + \overline{AL}_i^8 + \overline{AL}_i^9 + \overline{AL}_i^{12} - \overline{AL}_i^{10} - \overline{AL}_i^{11} = \vec{0} \quad \text{IV.xi}$$

donde

Aceleración de la Condición de Perpendicularidad (Aceleración del Producto Punto)

$$\overline{AL}_{m}^u = \left(\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{6}} & \underline{\underline{5T}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{6}} & \underline{\underline{5T}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{6}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{5T}} \\ \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{i}} \end{array} \\ \mathbf{A} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{Q}} - \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} + \left[\begin{array}{cccc} \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{6}} & \underline{\underline{5}} \\ \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{i}} \end{array} \right]^2 \end{array} \right)^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{R}}^u +$$

$$\underline{\underline{T}} \cdot \left(\underline{\underline{MtzAcel}} \right) \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{R}}^u +$$

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \left(\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{6}} & \underline{\underline{5T}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{6}} & \underline{\underline{5T}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{6}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{5T}} \\ \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{i}} \end{array} \\ \mathbf{A} + \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{Q}} - \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{\Omega}} + \left[\begin{array}{cccc} \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{6}} & \underline{\underline{5}} \\ \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{i}} & \underline{\underline{5}} & \underline{\underline{i}} \end{array} \right]^2 \end{array} \right) \cdot \underline{\underline{R}}^u + \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{AL}}^u$$

$$\overline{AL}_{m}^u \cdot \overline{R}_{0,pygm}^n + 2 * \overline{V}_m^u \cdot \overline{V}_{6,pygm}^n + \overline{R}_m^u \cdot \overline{AL}_{6,pygm}^n = 0$$

A continuación se muestra un cuadro donde las variables que deberán ser obtenidas para cada caso Cinemático; con la finalidad de tener una referencia rápida para el desarrollo del análisis.

Lazo Cinemático	Posición	Velocidad	Aceleración	No. Ecuaciones
<u>L.P.</u>	Y_{4r}, Y_{5r}, Y_{6r}	w_{4r}, w_{5r}, w_{6r}	$\underline{\underline{a}}_{4r}, \underline{\underline{a}}_{5r}, \underline{\underline{a}}_{6r}$	2 der.
<u>LHI-D</u>	$Y_{6pp}, Y_{11}, Y_{11pp}$ X_{10}	$w_{6pp}, w_{11}, w_{11pp}$ v_{X10}	$\underline{\underline{a}}_{6pp}, \underline{\underline{a}}_{11}, \underline{\underline{a}}_{11pp}$ $\underline{\underline{a}}_{X10}$	3 der.
<u>LE-IIS</u>	X_{7r}, Y_{5r}, Y_{5pp} X_{9r}, Y_{7r}, Y_{9pp}	v_{X7r}, w_{8r}, w_{8pp} v_{X7r}, w_{9r}, w_{9pp}	$\underline{\underline{a}}_{X7r}, \underline{\underline{a}}_{8r}, \underline{\underline{a}}_{8pp}$ $\underline{\underline{a}}_{X9r}, \underline{\underline{a}}_{9r}, \underline{\underline{a}}_{9pp}$	3 der.
<u>LE-D</u>				3
<u>Producto Punto</u>				1
<u>Parámetros</u>	Y_3, X_{10}	w_4, v_{X10}	$\underline{\underline{a}}_4, \underline{\underline{a}}_{X10}$	
<u>No. Variables</u>	11	11	11	11

Tabla 10 variables cinemáticas

Claramente se nota que es necesario tomar 4 ecuaciones vectoriales, con 3 componentes cada una, además se utilizará la condición del producto punto (de perpendicularidad) para obtener la solución idónea.

En el apéndice se muestra el programa que se desarrolló en el Mathematica donde se metieron las ecuaciones del análisis cinemático (posición, velocidad, aceleración).

⁹ Angeles Jorge, Spatial Kinematics Chains, Springer Verlag, Alemania 1982

¹⁰ Ibid

¹¹ Ibid

Conclusiones

A continuación se enunciarán los resultados obtenidos del análisis del mecanismo que se realizó en el programa Mathematica, el cual es una herramienta muy útil para llevar a cabo este tipo de análisis, debido a su posibilidad de ser programado con la ventaja de poder utilizar las funciones que trae programadas.

Se trabajó principalmente en el análisis espacial de la suspensión que es el que mayor dificultad ofrecía, y aunque se desarrolló el movimiento plano del mecanismo sólo se obtuvieron los resultados de la posición. Por esta razón en este trabajo de tesis solo se presentan los resultados de la cinemática espacial

Resultados del Análisis de Posición

Esta parte del análisis fue básica ya que además de ser fundamental para la cinemática y ser la que permite seguir con el análisis, fue la que hizo que se realizaran modificaciones en parte del análisis que ya se tenía. Los resultados iniciales que arrojaba no convergían en un inicio y después los resultados obtenidos eran configuraciones incorrectas. Al ocurrir esto, lo que se hizo fue establecer una condición de perpendicularidad del mecanismo y eliminar arbitrariamente la ecuación que ocasionaba que el programa se comportara de la manera no deseada, el sistema que se utilizó en el programa se muestra a continuación:

```
LPrinc[[1]] == 0,  
LPrinc[[2]] == 0,  
LDirHI[[1]] == 0,  
LDirHI[[2]] == 0,  
LDirHI[[3]] == 0,  
LEjeDir[[1]] == 0,  
LEjeDir[[2]] == 0,  
LEjeDir[[3]] == 0,  
LEjeHS[[2]] == 0,  
LEjeHS[[1]] == 0,  
PdtoPto == 0
```

Ilustración 18 Sistema de ecuaciones programado

Aquí se observa que se eliminó la componente 3 de lazo vectorial LE-HS (Lazo eje - horquilla superior) que era el que impedía que el sistema convergiera en la forma esperada. Ya superado este problema lo que se hizo fue mostrar al mecanismo en su configuración inicial el cual se reproduce a continuación:

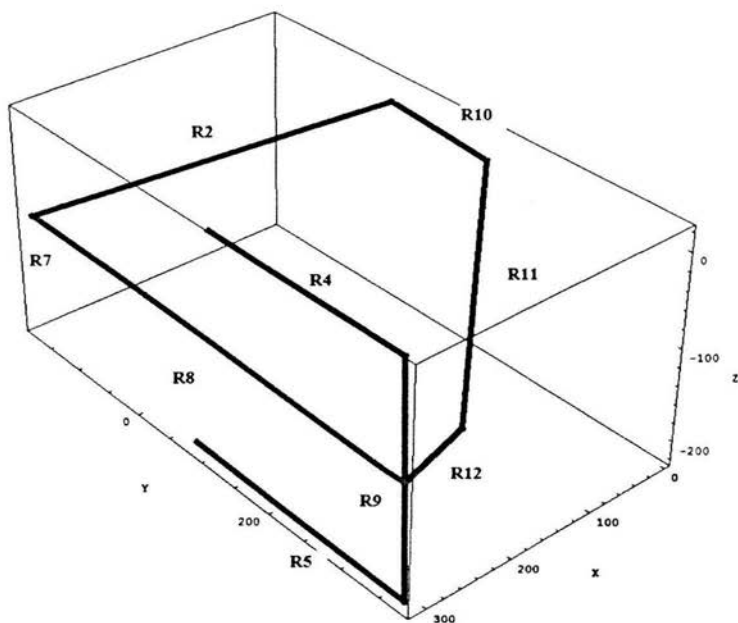


Ilustración 19 Solución vectorial en posición inicial

En esta parte del análisis sucedió que a pesar de que se trató de modificar los parámetros iniciales, la solución inicial no se modificó lo que se podía interpretar como una solución única a la que podía converger el sistema de ecuaciones, este sistema se acopló de mejor manera con la condición de perpendicularidad. En esta solución se utilizó el siguiente conjunto de ecuaciones de lazos vectoriales:

$$\begin{aligned}
 LPrinc &= R0 + R4 - R2 - R5 - R6; \\
 LDirHI &= R2 + R5 + b * R6 + R12 - R10 - R11; \\
 LEjeHS &= R1 + R7 + R8 + R9e + b * R6 - R0 - R4; \\
 LEjeDir &= R1 + R7 + R8 - R9e - R12 - R10 - R11; \\
 PdtoPto &= R9m . r6m;
 \end{aligned}$$

Ilustración 20 Sistema de ecuaciones de lazos vectoriales

En la ecuación LEjeDir (LE-D, Lazo Eje - Dirección) se realizó la suma vectorial sin seguir de manera ortodoxa el método de D-H (Denavit y Hartenberg) ya que por un lado se hizo la suma de vectores para llegar a la 2ª junta de Hooke del eje de tracción, y por otro lado se llega a la misma junta pero aunque todos los vectores están medidos en la misma base; estos están definidos de la forma expuesta en el capítulo 3. Cuando en realidad se tuvieron que tomar en cuenta las rotaciones de la rótula de la mangueta. Y aunque matemáticamente no es incorrecto se omitió establecer las rotaciones de esta junta esférica y por ende esta información.

Con la posición inicial obtenida se prosiguió para ejecutar un ciclo de movimiento del mecanismo variando el ángulo de la horquilla inferior y manteniendo la longitud constante de la cremallera. Con este tipo de movimiento se vio que el ángulo de la mangueta ψ_{6pp} se varía a pesar de mantenerse constante la longitud de la cremallera lo que se traduce que si sube o baja la suspensión la llanta tiende a dar vuelta. Ya con este listado de posiciones lo que se hizo fue mostrar las gráficas de los desplazamientos que se muestran a continuación:

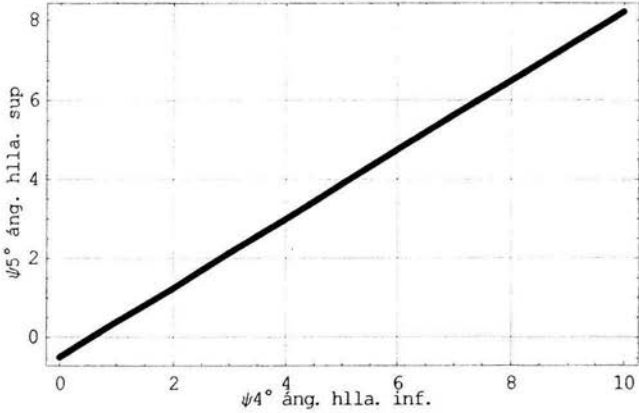


Ilustración 21 ángulo ψ_4/ψ_5

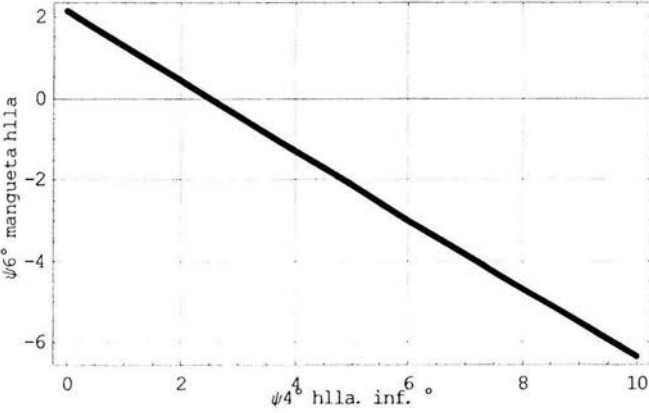


Ilustración 22 ángulo ψ_4/ψ_6

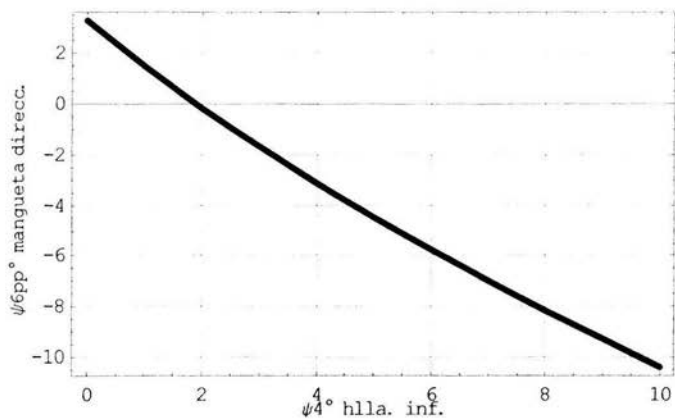


Ilustración 23 ángulo ψ_4/ψ_{6pp}

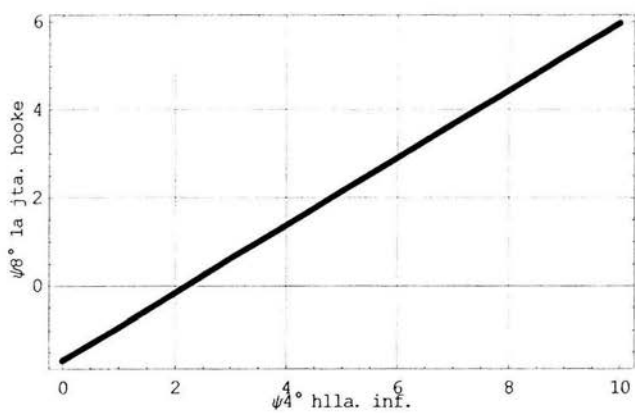


Ilustración 24 ángulo ψ_4/ψ_8

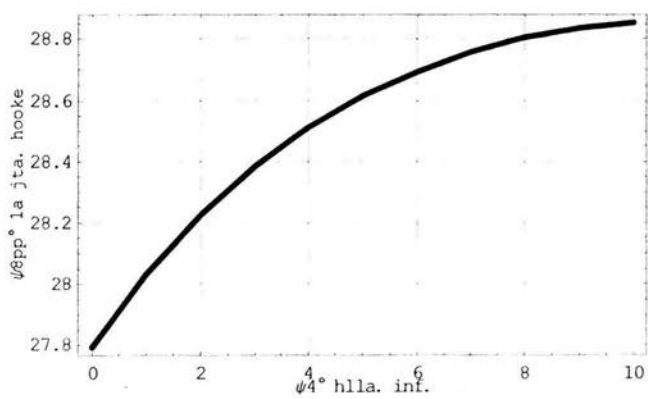


Ilustración 25 ángulo ψ_4/ψ_{6pp}

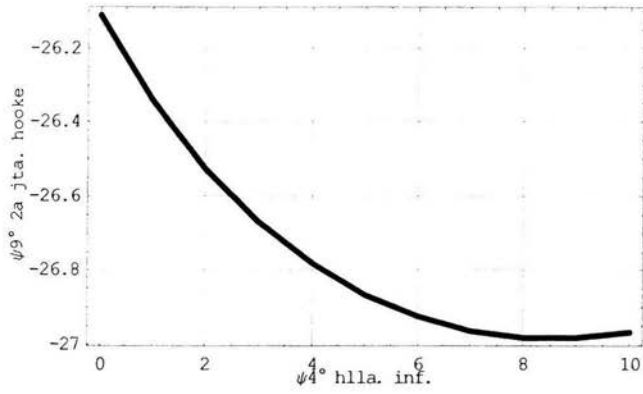


Ilustración 26 ángulo ψ_4/ψ_9

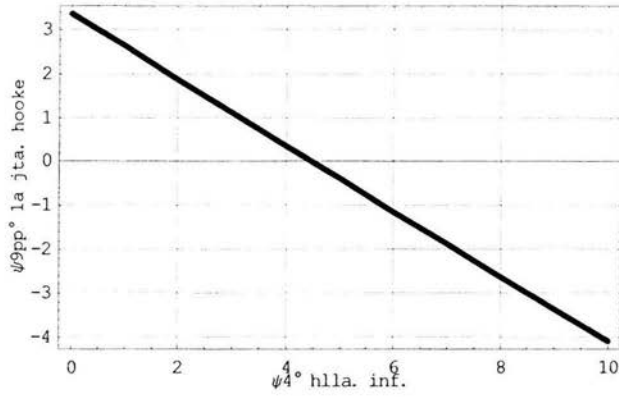


Ilustración 27 ángulo ψ_4/ψ_{9pp}

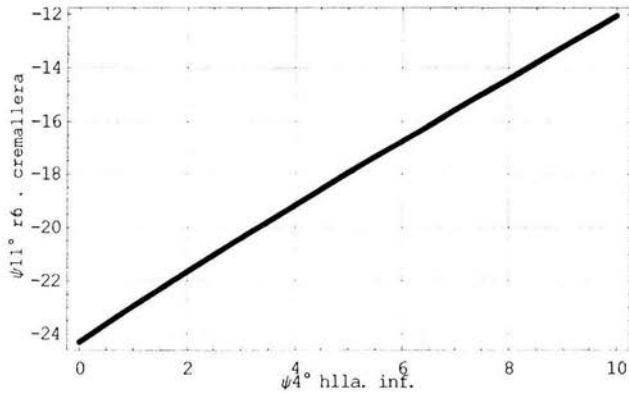


Ilustración 28 ángulo ψ_4/ψ_{11}

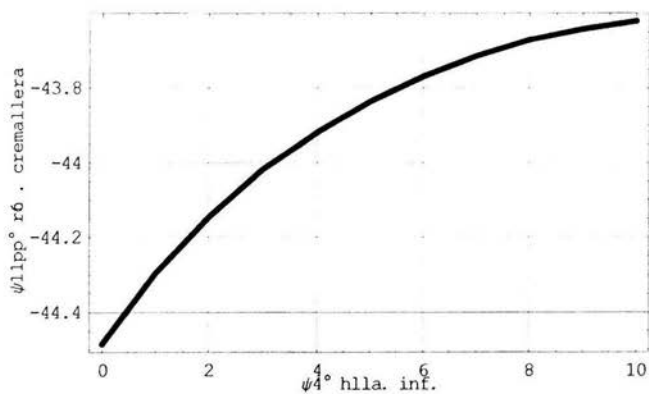


Ilustración 29 ángulo ψ_4 / ψ_{11pp}

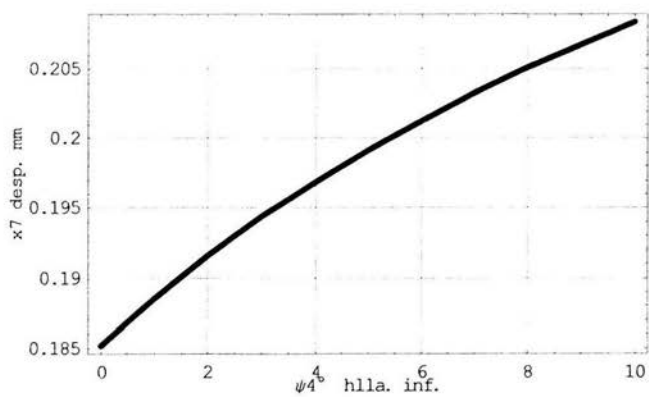


Ilustración 30 ángulo ψ_4 / x_7

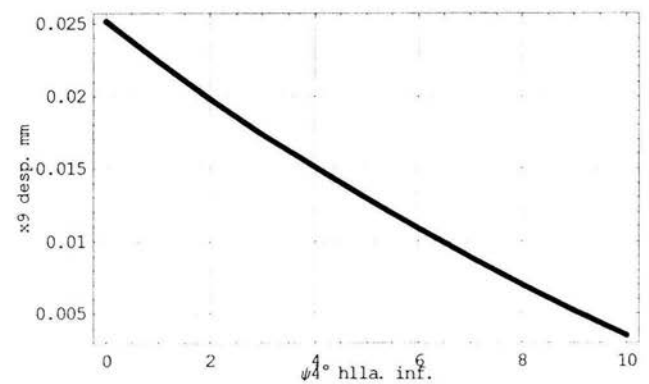


Ilustración 31 ángulo ψ_4 / x_9

De las gráficas se ve que son funciones bastante regulares y continuas, se pueden corroborar algunas hipótesis, como el comportamiento de los ángulos así como los desplazamientos que sufre el eje de tracción, en todas estas gráficas si bien no tienen un comportamiento lineal si se muestran un comportamiento exponencial moderado. Las magnitudes tanto de los ángulos (grados) y los desplazamientos lineales (metros) son coherentes.

Lo cual no sucedía si se planteaba el sistema de lazos vectoriales y se utilizaba el método de D-H de manera ortodoxa como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 LPrinc &= R0 + R4 - R2 - R5 - R6; \\
 LDirHI &= R2 + R5 + b * R6 + R12 - R10 - R11; \\
 LEjeHS &= R1 + R7 + R8 + R9e + b * R6 - R0 - R4; \\
 LEjeDir &= R1 + R7 + R8 + R9m + R12 - R10 - R11; \\
 PdtoPto &= R9m . r6m;
 \end{aligned}$$

Ilustración 32 sistema de ecuaciones vectoriales canónico

y aunque no es necesario toda la información de la rótula, se cumple perfectamente con los pasos del método, la configuración inicial obtenida se muestra a continuación:

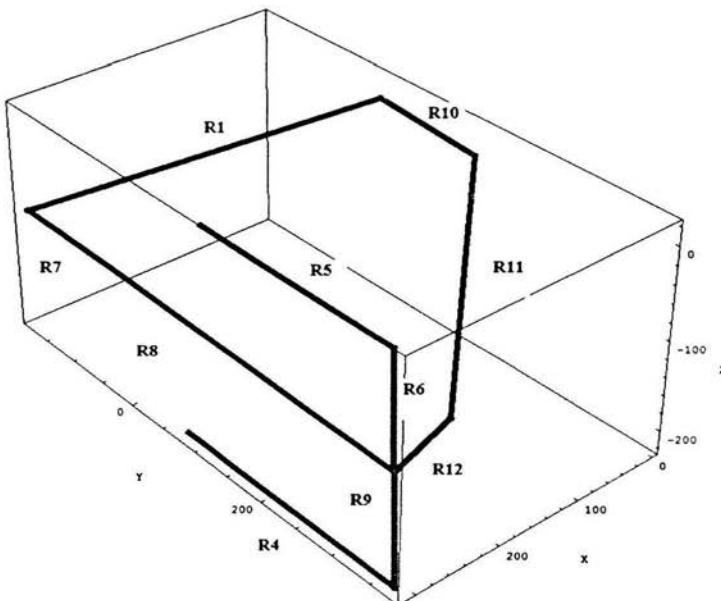


Ilustración 33 Solución disfuncional del sistema

La cual podría ser una configuración inicial del mecanismo, el problema es que se obtienen gráficas de desplazamientos muy irregulares como se muestran a continuación algunas:

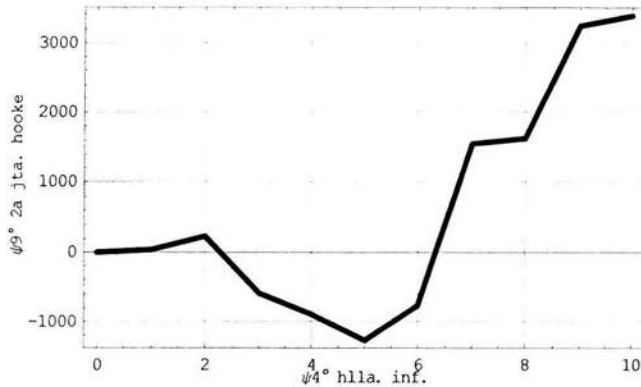


Ilustración 34 ángulo ψ_4 / ψ_9

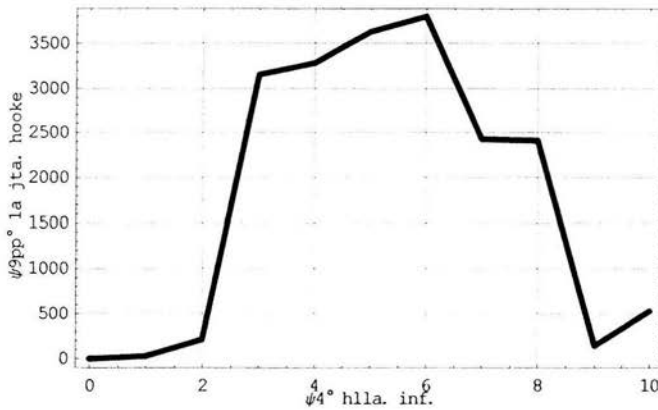


Ilustración 35 ángulo ψ_4 / ψ_{9pp}

Estos resultados son poco convincentes porque la variación que sufren los desplazamientos angulares son grandes e irregulares a pesar de que metodológicamente es correcto el desarrollo y la excitación del sistema es lineal y de un orden de magnitud menor. Por lo anterior se descarta para proseguir con el análisis; y es que además cuando se continúa con el análisis de la velocidad con este sistema de lazos vectoriales las gráficas son igual o más irregulares que estas, y en la aceleración el Mathematica no logra resolver el sistema de ecuaciones mostrado.

Resultados del Análisis de la Velocidad

En esta parte de la cinemática únicamente se tomaron las ecuaciones de la velocidad con los valores asignados de la posición al sistema de ecuaciones resultante. Se vio con anterioridad que estos lazos vectoriales se obtuvieron derivando las ecuaciones de posición por lo que el problema central fue el de corregir errores en la programación hecha en el Mathemática. El sistema de ecuaciones vectoriales resultante fue:

$$\begin{aligned} \text{VELPrinc} &= \mathbf{V4} - \mathbf{V5} - \mathbf{V6}; \\ \text{VELDirHI} &= \mathbf{V5} + b \cdot \mathbf{V6} + \mathbf{V12} - \mathbf{V10} - \mathbf{V11}; \\ \text{VELLEjeDir} &= \mathbf{V7} + \mathbf{V8} + \mathbf{V9e} + b \cdot \mathbf{V6} - \mathbf{V4}; \\ \text{VELLEjeHS} &= \mathbf{V7} + \mathbf{V8} - \mathbf{V9e} - \mathbf{V12} - \mathbf{V10} - \mathbf{V11}; \\ \text{VELPdtoPto} &= \mathbf{V9m} \cdot r6m + \mathbf{R9m} \cdot \mathbf{V6m}; \end{aligned}$$

Ilustración 36 Sistema de ecuaciones vectoriales de velocidad

quedando el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \text{VELPrinc}[1] &= 0, \\ \text{VELPrinc}[2] &= 0, \\ \text{VELDirHI}[1] &= 0, \\ \text{VELDirHI}[2] &= 0, \\ \text{VELDirHI}[3] &= 0, \\ \text{VELLEjeDir}[1] &= 0, \\ \text{VELLEjeDir}[2] &= 0, \\ \text{VELLEjeHS}[3] &= 0, \\ \text{VELLEjeHS}[2] &= 0, \\ \text{VELLEjeHS}[1] &= 0, \\ \text{VELPdtoPto} &= 0 \end{aligned}$$

Ilustración 36 Sistema de ecuaciones vectoriales de velocidad

Con esto se puede obtener directamente mediante un ciclo "for" las velocidades para cada una de las posiciones obtenidas anteriormente

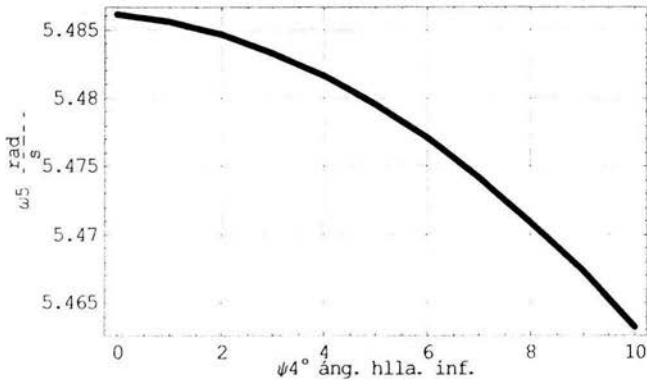


Ilustración 37 ángulo ψ_4 / ω_5

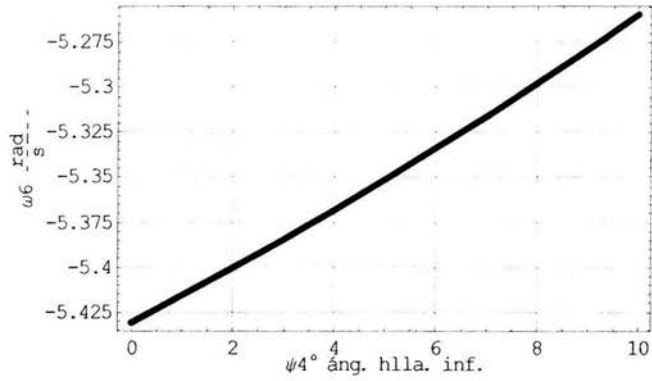


Ilustración 38 ángulo ψ_4 / ω_6

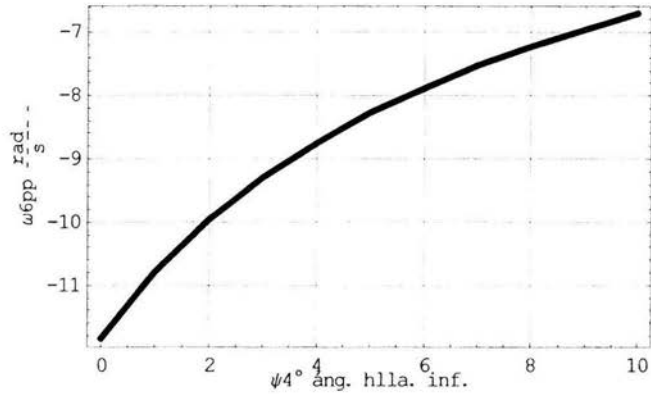


Ilustración 39 ángulo ψ_4 / ω_{6pp}

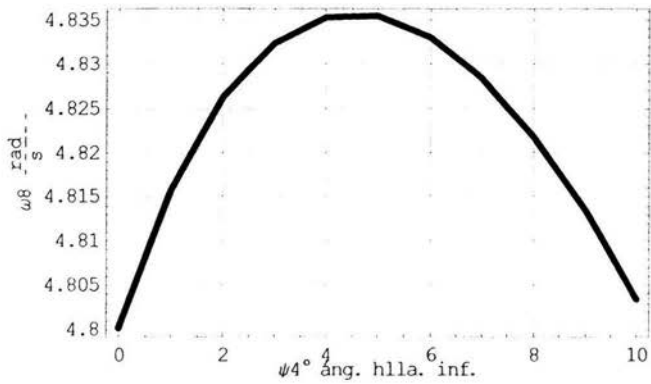


Ilustración 40 ángulo ψ_4 / ω_8

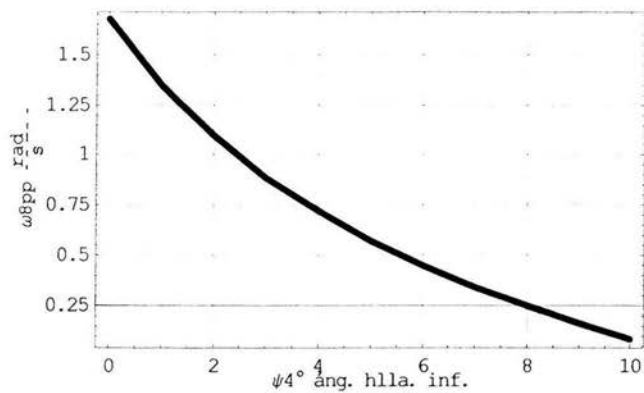


Ilustración 41 ángulo ψ_4 / ω_{8pp}

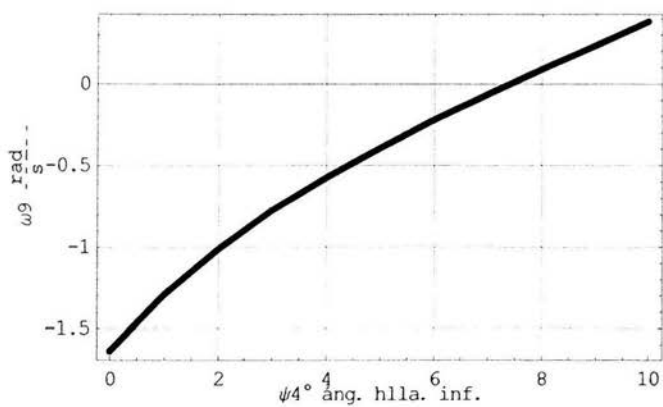


Ilustración 42 ángulo ψ_4 / ω_9

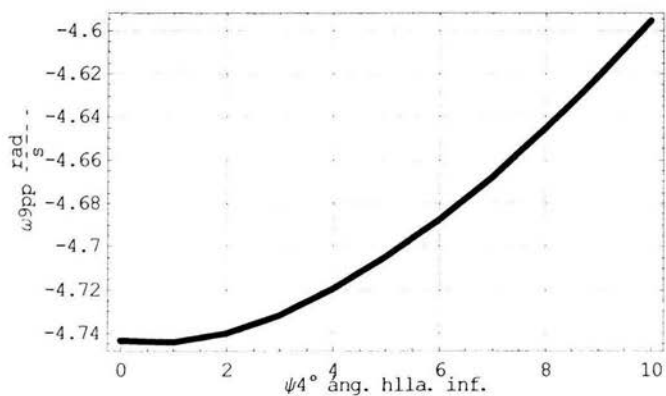


Ilustración 43 ángulo ψ_4 / ω_{9pp}

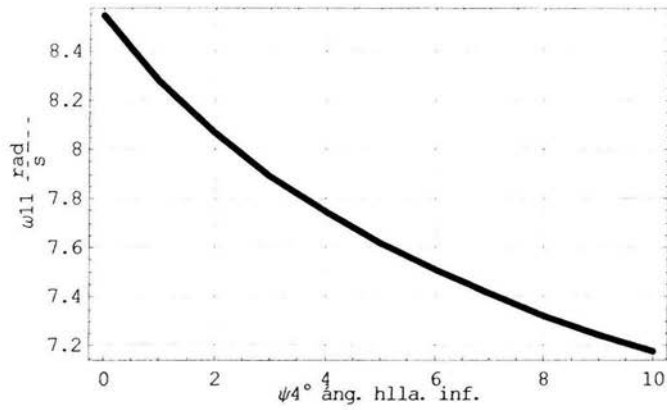


Ilustración 44 ángulo ψ_4 / ω_{11}

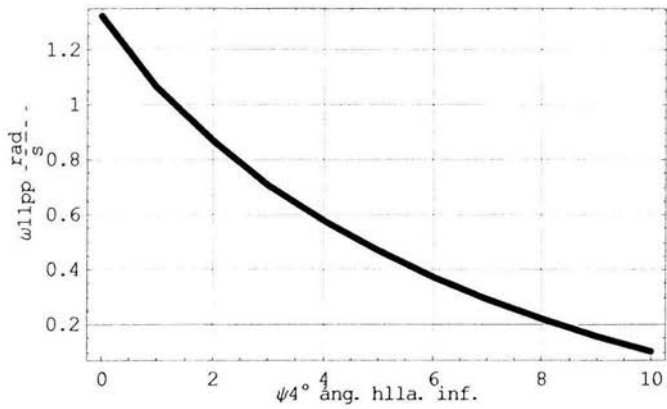


Ilustración 45 ángulo ψ_4 / ω_{11pp}

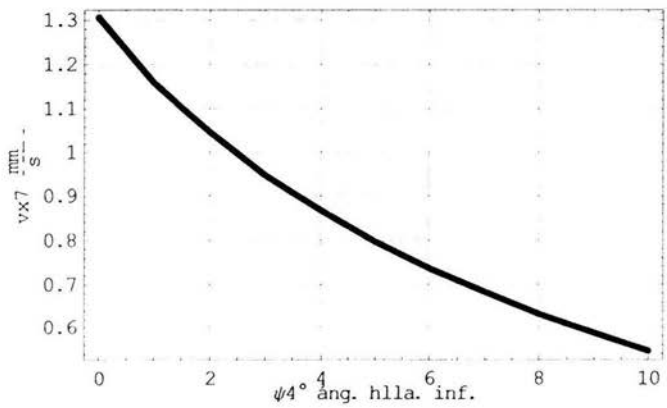


Ilustración 46 ángulo ψ_4 / v_{x7}

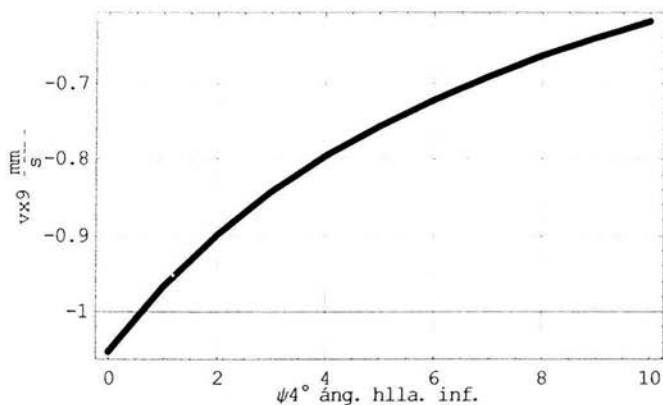


Ilustración 47 ángulo ψ_4 / ω_6

Las gráficas tienen un trazo bastante regular para las condiciones del movimiento establecido y las magnitudes de las velocidades son relativamente coherentes ya que las angulares están en rad/seg y las lineales en m/seg. Esto viene a corroborar el análisis hecho hasta el momento.

Resultados del Análisis de la Aceleración

A las ecuaciones de la aceleración se le asignan los valores de la posición y de la velocidad. Estas se obtuvieron al derivar las ecuaciones vectoriales de la aceleración. El sistema de ecuaciones vectoriales resultante es:

$$\begin{aligned}
 \text{AceLPrinc} &= \mathbf{A4} - \mathbf{A5} - \mathbf{A6}; \\
 \text{AceLDirHI} &= \mathbf{A5} + b \cdot \mathbf{A6} + \mathbf{A12} - \mathbf{A10} - \mathbf{A11}; \\
 \text{AceLEjeDir} &= \mathbf{A7} + \mathbf{A8} + \mathbf{A9e} + b \cdot \mathbf{A6} - \mathbf{A4}; \\
 \text{AceLEjeHS} &= \mathbf{A7} + \mathbf{A8} - \mathbf{A9e} - \mathbf{A12} - \mathbf{A10} - \mathbf{A11}; \\
 \text{AcePdtoPto} &= \mathbf{A9m} \cdot r_{6m} + 2 \cdot \mathbf{V9m} \cdot \mathbf{V6m} + \mathbf{R9m} \cdot \mathbf{A6m};
 \end{aligned}$$

Ilustración 48 Sistema de lazos vectoriales de aceleración

este sistema de lazos vectoriales más la condición de perpendicularidad entregan el siguiente sistema:

```

AceLPrinc[1] == 0,
  AceLPrinc[2] == 0,
  AceLDirHI[1] == 0,
  AceLDirHI[2] == 0,
  AceLDirHI[3] == 0,
  AceLEjeDir[1] == 0,
  AceLEjeDir[2] == 0,
  AceLEjeHS[3] == 0,
  AceLEjeHS[2] == 0,
  AceLEjeHS[1] == 0,
  AcePdtoPto = 0

```

Ilustración 48 Sistema de lazos vectoriales de aceleración

Todas estas ecuaciones son escalares, las cuales generan las siguientes gráficas:

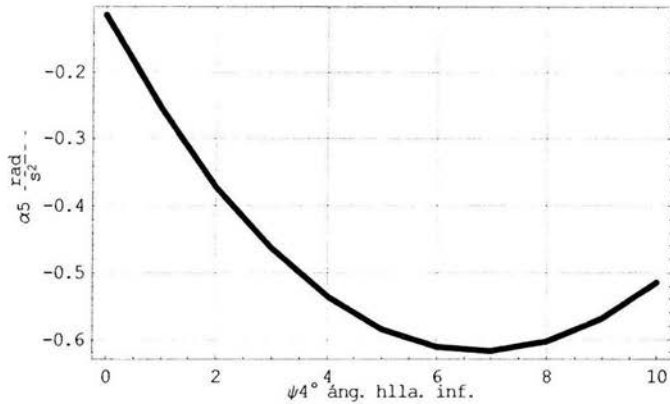


Ilustración 49 ángulo ψ_4 / α_5

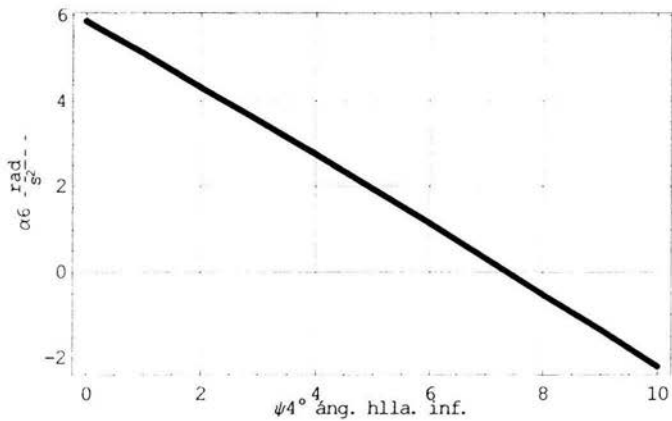


Ilustración 50 ángulo ψ_4 / α_6

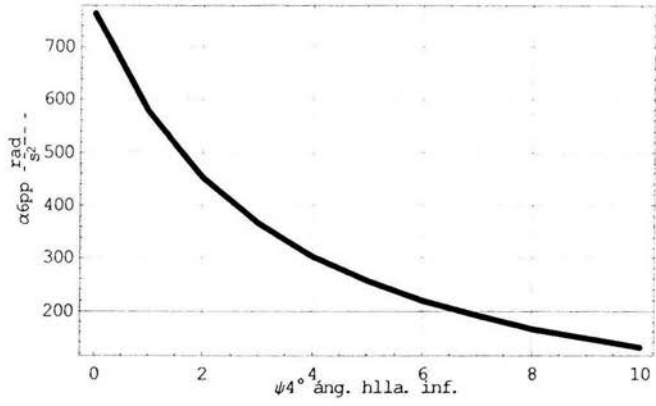


Ilustración 51 ángulo ψ_4 / α_{6pp}

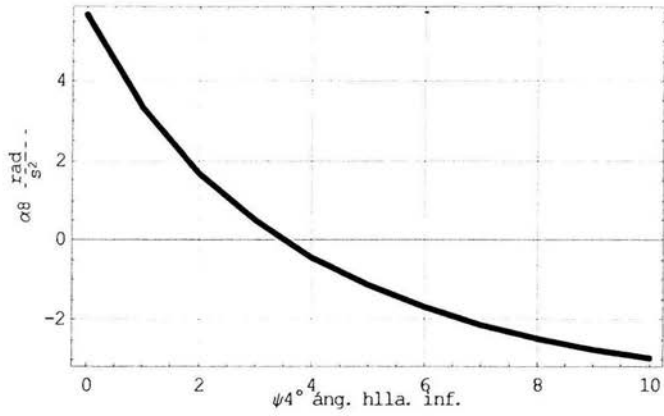


Ilustración 52 ángulo ψ_4 / α_8

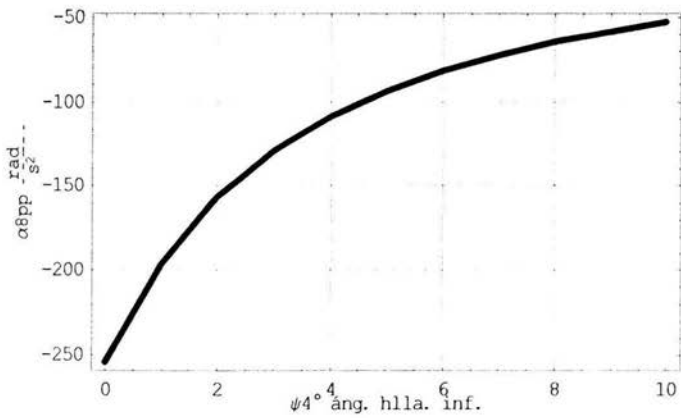


Ilustración 53 ángulo ψ_4 / α_{8pp}

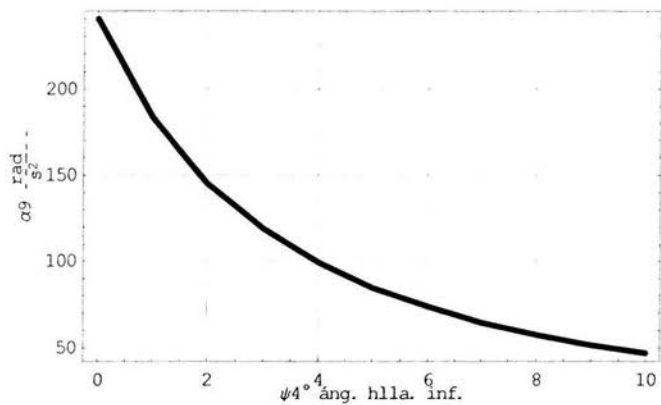


Ilustración 54 ángulo ψ_4 / α_9

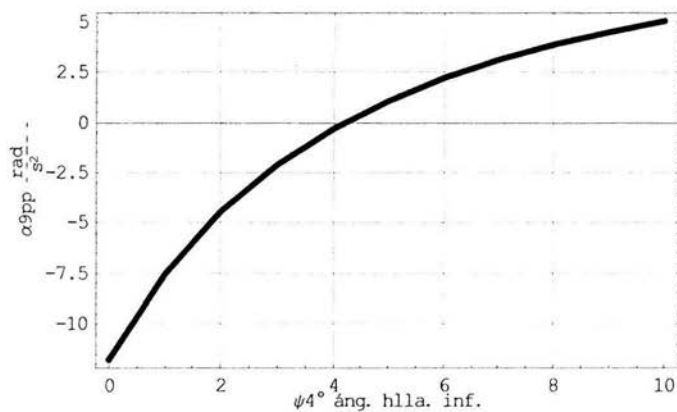


Ilustración 55 ángulo ψ_4 / α_{9pp}

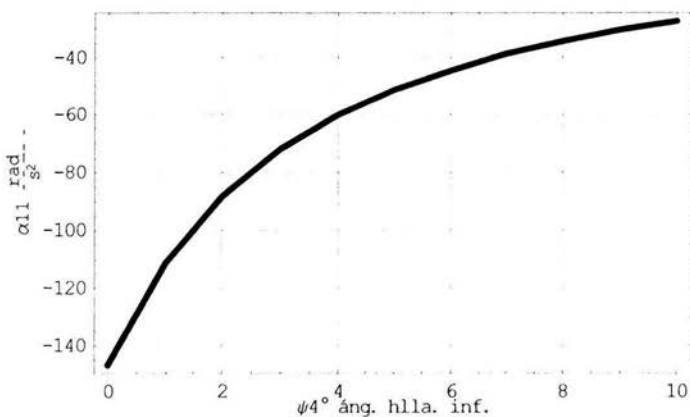


Ilustración 56 ángulo ψ_4 / α_{11}

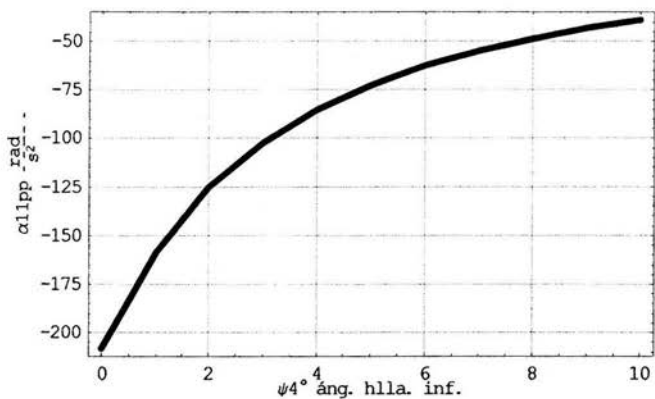


Ilustración 57 ángulo ψ_4 / α_{11pp}

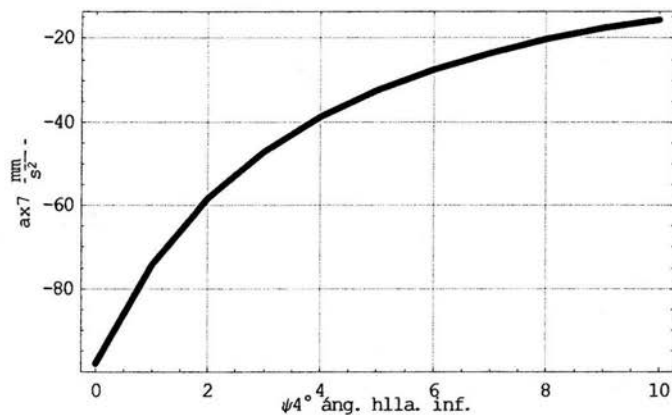


Ilustración 47 ángulo ψ_4 / ax_7

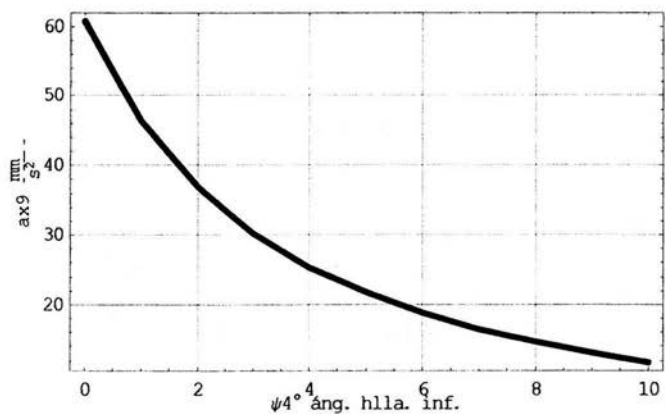


Ilustración 47 ángulo ψ_4 / ax_9

Las unidades son rad/s^2 para las aceleraciones angulares y de m/s^2 para las aceleraciones lineales.

Conclusión

Al obtener todas las gráficas se puede ver que el comportamiento del mecanismo es cómo se esperaba, con gráficas simples y con comportamiento regular. Quizás del que se puede tener mayor certidumbre es del análisis de la posición con valores (desplazamientos angulares y lineales) que dan una idea física de lo que ocurre con el mecanismo. Finalmente se puede decir que los resultados muestran coherencia, aunque será necesario corroborar, el que se obtengan los mismos resultados utilizando herramientas matemáticas alternativas (matrices homogéneas, cuaterniones) y así ponderar los resultados que se obtuvieron con el análisis vectorial. Y aunque pudiese existir cierto escepticismo, estos resultados se podrán utilizar para continuar con el análisis dinámico que se podrá desarrollar en una siguiente fase de este proyecto.

Bibliografía

¹ Niza, Karim. How Stuff Works [online]. Julio 2002. Disponible en <http://www.hosstuffworks.com>

² Ibid

³ Ibid

⁴ Varios. Inner Auto [online]. Mayo-Junio 2002. Disponible en <http://www.innerauto.com>

⁵ Ibid, p 735-760

⁶ Sesmero, Angel. Divulgación Técnica [online]. Julio 2002. Disponible en <http://teleline.terra.es/personal/adeptec/page7.htm>

⁷ Nicolás Bednarz. Un vistazo a las rotulas [online]. Julio 2002. Disponible en <http://www.parque4x4.com.ar/mecanica/rotulas.html>

⁸ Karim, Niza. Op. Cit.

⁹ Angeles Jorge, Spatial Kinematics Chains, Springer Verlag, Alemania 1982

¹⁰ Ibid

¹¹ Ibid

Proy. en Tesis

Funciones

```

Ex[e_] := {{0, -e[[3]], e[[2]]}, {e[[3]], 0, -e[[1]]}, {-e[[2]], e[[1]], 0}};
exeT[e_] := {{(e[[1]])^2, e[[1]]*e[[2]], e[[1]]*e[[3]]},
  {e[[1]]*e[[2]], (e[[2]])^2, e[[2]]*e[[3]]}, {e[[1]]*e[[2]], e[[2]]*e[[3]], (e[[3]])^2}};
Rot[e_, φ_] := exeT[e] + Cos[φ] * (IdentityMatrix[3] - exeT[e]) + Sin[φ] * Ex[e];
Omega[e_, ω_] := {{0, -e[[3]], e[[2]]}, {e[[3]], 0, -e[[1]]}, {-e[[2]], e[[1]], 0}} * ω;
Alfa[e_, ω_, α_] :=
  {{0, -e[[3]], e[[2]]}, {e[[3]], 0, -e[[1]]}, {-e[[2]], e[[1]], 0}} * α + Omega[e, ω].Omega[e, ω];
Grafical[nombre_] :=
  ListPlot[nombre,
    GridLines → Automatic,
    PlotJoined → True,
    AspectRatio → 1/1.7,
    Prolog → AbsoluteThickness[1],
    DisplayFunction → Identity
  ];

GraficaColor[nombre_, Rojo_, Verde_, Azul_] :=
  ListPlot[nombre,
    GridLines → Automatic,
    PlotStyle → RGBColor[Rojo, Verde, Azul],
    PlotJoined → True,
    AspectRatio → 1/1.7,
    Prolog → AbsoluteThickness[4],
    DisplayFunction → Identity
  ];

```

Vectores

■ Datos

$$d = 0.036;$$

$$b = 0.5;$$

$$c = 0.5;$$

$$c9 = \sqrt{0.154^2 + 0.005^2 + 0};$$

■ Ejes de Giro

$$egx = \{1, 0, 0\};$$

$$egy = \{0, 1, 0\};$$

$$egz = \{0, 0, 1\};$$

Ecuaciones

■ Vectores y Rotaciones Posición

```

Clear [ $\psi_4$ ,  $\psi_5$ ,  $\psi_6$ ,  $\psi_{6pp}$ ,  $\psi_8$ ,  $\psi_{8pp}$ ,  $\psi_9$ ,  $\psi_{9pp}$ ,  $\psi_{11}$ ,  $\psi_{11pp}$ , x7, x9];

Q[in, 4] = Rot[egz,  $\psi_4$ ];
Q[in, 5] = Rot[egz,  $\psi_5$ ];
Q[5, 6] = Rot[egz,  $\psi_6$ ];
Q[6, 6 p] = Rot[egx, -90 * Degree];
Q[6 p, 6 pp] = Rot[egz,  $\psi_{6pp}$ ];
Q[in, 8] = Rot[egz,  $\psi_8$ ];
Q[8, 8 p] = Rot[egx, -90 * Degree];
Q[8 p, 8 pp] = Rot[egz,  $\psi_{8pp}$ ];
Q[8 pp, 9] = Rot[egz,  $\psi_9$ ];
Q[9, 9 p] = Rot[egx, 90 * Degree];
Q[9 p, 9 pp] = Rot[egz,  $\psi_{9pp}$ ];
Q[in, 11] = Rot[egz,  $\psi_{11}$ ];
Q[11, 11 p] = Rot[egx, -90 * Degree];
Q[11 p, 11 pp] = Rot[egz,  $\psi_{11pp}$ ];
T[0, 6 pp] = Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6 p].Q[6 p, 6 pp];
T[0, 9 pp] = Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Q[8 pp, 9].Q[9, 9 p].Q[9 p, 9 pp];

r0 = {110.75, 21.61, 312.12};
r1 = {-178.99, -90.05, 312.12};
r2 = {80.74, -217.86, 312.12};
r3 = r0 - r2;
r4 = {254.79, 0, 0};
r5 = {291.89, 0, 0};
r6 = {0, 242, 0};
r6m = {0, 0, 242};
r7 = {x7, 0, 0};
r8 = {382.05, 0, 0};
r9 = {x9, 0, 0};
r9m = {x9, 0, 0};
r10 = {x10, -7.49, 2.5};
r11 = {315.25, 0, 0};
r12 = {-20, 90, 0};

R0 = r0;
R1 = r1;
R2 = r2;
R3 = r3;
R4 = Q[in, 4].r4;
R5 = Q[in, 5].r5;
R6 = Q[in, 5].Q[5, 6].r6;
R6m = Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6 p].Q[6 p, 6 pp].r6m;

```

```
R7 = r7;  
R8 = Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].r8;  
R9e = Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Q[8 pp, 9].Q[9, 9 p].Q[9 p, 9 pp].r9;  
R9m = Transpose[T[0, 6 pp]].T[0, 9 pp].T[0, 6 pp].R9e;  
R10 = r10;  
R11 = Q[in, 11].Q[11, 11 p].Q[11 p, 11 pp].r11;  
R12 = Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6 p].Q[6 p, 6 pp].r12;  
Go  
Off[General::"spell1"]  
  
Go
```


■ Vectores y Matrices de Velocidad

```

Clear[ω4, ω5, ω6, ω6pp, ω8, ω8pp, ω9, ω9pp, ω11, ω11pp, vx7, vx9];

QT[in, 4] = Transpose[Q[in, 4]];
QT[in, 5] = Transpose[Q[in, 5]];
QT[5, 6] = Transpose[Q[5, 6]];
QT[6, 6 p] = Transpose[Q[6, 6 p]];
QT[in, 8] = Transpose[Q[in, 8]];
QT[8, 8 p] = Transpose[Q[8, 8 p]];
QT[8 p, 8 pp] = Transpose[Q[8 p, 8 pp]];
QT[8 pp, 9] = Transpose[Q[8 pp, 9]];
QT[9, 9 p] = Transpose[Q[9, 9 p]];
QT[in, 11] = Transpose[Q[in, 11]];
QT[11, 11 p] = Transpose[Q[11, 11 p]];

T[0, 6 pp] = Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6 p].Q[6 p, 6 pp];
T[0, 9 pp] = Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Q[8 pp, 9].Q[9, 9 p].Q[9 p, 9 pp];

Ω[in, 4] = Omega[egz, ω4];
Ω[in, 5] = Omega[egz, ω5];
Ω[5, 6] = Omega[egz, ω6];
Ω[6 p, 6 pp] = Omega[egz, ω6pp];
Ω[in, 8] = Omega[egz, ω8];
Ω[8 p, 8 pp] = Omega[egz, ω8pp];
Ω[8 pp, 9] = Omega[egz, ω9];
Ω[9 p, 9 pp] = Omega[egz, ω9pp];
Ω[in, 11] = Omega[egz, ω11];
Ω[11 p, 11 pp] = Omega[egz, ω11pp];

v7 = {vx7, 0, 0};
v9 = {vx9, 0, 0};
v10 = {vx10, 0, 0};

V4 = Ω[in, 4].R4;
V5 = Ω[in, 5].R5;
V6 = (Ω[in, 5] + Q[in, 5].Ω[5, 6].QT[in, 5]).R6;
V6m = (Ω[in, 5] + Q[in, 5].Ω[5, 6].QT[in, 5] +
      Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6 p].Ω[6 p, 6 pp].QT[6, 6 p].QT[5, 6].QT[in, 5]).R6m;
V7 = v7;
V8 = (Ω[in, 8] + Q[in, 8].Q[8, 8 p].Ω[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8]).R8;
V9e = (Ω[in, 8] + Q[in, 8].Q[8, 8 p].Ω[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8] +
      Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Ω[8 pp, 9].QT[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8] +
      Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Q[8 pp, 9].Q[9, 9 p].Ω[9 p, 9 pp].
      QT[9, 9 p].QT[8 pp, 9].QT[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8]).R9e +
      (Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Q[8 pp, 9].Q[9, 9 p].Q[9 p, 9 pp]).v9;
V9m = (Transpose[(Ω[in, 5] + Q[in, 5].Ω[5, 6].QT[in, 5]).Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].
      Q[8 pp, 9].Q[9, 9 p].Q[9 p, 9 pp].Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6 p].Q[6 p, 6 pp] +
      Transpose[Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6 p].Q[6 p, 6 pp]]).

```

```

(Ω[in, 8] + Q[in, 8].Q[8, 8 p].Ω[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8] +
  Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Ω[8 pp, 9].QT[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8] +
  Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Q[8 pp, 9].Q[9, 9 p].Ω[9 p, 9 pp].QT[9, 9 p].QT[8 pp,
  9].QT[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8]).Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6 p].Q[6 p, 6 pp] +
  Transpose[Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6 p].Q[6 p, 6 pp]].Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].
  Q[8 pp, 9].Q[9, 9 p].Q[9 p, 9 pp].(Ω[in, 5] + Q[in, 5].Ω[5, 6].QT[5, 6])).R9e +
  (Transpose[Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6 p].Q[6 p, 6 pp]].Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].
  Q[8 pp, 9].Q[9, 9 p].Q[9 p, 9 pp].Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6 p].Q[6 p, 6 pp]).V9e;
V10 = v10;
V11 = (Ω[in, 11] + Q[in, 11].Q[11, 11 p].Ω[11 p, 11 pp].QT[11, 11 p].QT[in, 11]).R11;
V12 = (Ω[in, 5] + Q[in, 5].Ω[5, 6].QT[in, 5] +
  Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6 p].Ω[6 p, 6 pp].QT[6, 6 p].QT[5, 6].QT[in, 5]).R12;

Go

Go

```

■ Vectores y Matrices de Aceleración

```

Clear [a4, a5, a6, a6pp, a8, a8pp, a9, a9pp, a11, a11pp, ax7, ax9];

A[in, 4] = Alfa[egz, w4, a4];
A[in, 5] = Alfa[egz, w5, a5];
A[5, 6] = Alfa[egz, w6, a6];
A[6 p, 6 pp] = Alfa[egz, w6pp, a6pp];
A[in, 8] = Alfa[egz, w8, a8];
A[8 p, 8 pp] = Alfa[egz, w8pp, a8pp];
A[8 pp, 9] = Alfa[egz, w9, a9];
A[9 p, 9 pp] = Alfa[egz, w9pp, a9pp];
A[in, 11] = Alfa[egz, w11, a11];
A[11 p, 11 pp] = Alfa[egz, w11pp, a11pp];

MatrAcelR9e = (A[in, 8] + Ω[in, 8].Q[in, 8].Q[8, 8 p].Ω[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8] +
  Q[in, 8].Q[8, 8 p].A[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8] -
  Q[in, 8].Q[8, 8 p].Ω[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].Q[in, 8].Transpose[Ω[in, 8]] +
  Ω[in, 8].Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Ω[8 pp, 9].QT[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8] +
  Q[in, 8].Q[8, 8 p].Ω[8 p, 8 pp].Q[8 p, 8 pp].Ω[8 pp, 9].QT[8 p, 8 pp].
  QT[8, 8 p].QT[in, 8] + Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].A[8 pp, 9].
  QT[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8] - Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].
  Ω[8 pp, 9].Q[8 p, 8 pp].Transpose[Ω[8 p, 8 pp]].QT[8, 8 p].QT[in, 8] -
  Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Ω[8 pp, 9].QT[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].Q[in, 8].
  Transpose[Ω[in, 8]] + Ω[in, 8].Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Q[8 pp, 9].
  Q[9, 9 p].Ω[9 p, 9 pp].QT[9, 9 p].QT[8 pp, 9].QT[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8] +
  Q[in, 8].Q[8, 8 p].Ω[8 p, 8 pp].Q[8 p, 8 pp].Q[8 pp, 9].Q[9, 9 p].
  Ω[9 p, 9 pp].QT[9, 9 p].QT[8 pp, 9].QT[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8] +
  Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Ω[8 pp, 9].Q[8 pp, 9].Q[9, 9 p].
  Ω[9 p, 9 pp].QT[9, 9 p].QT[8 pp, 9].QT[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8] +
  Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Q[8 pp, 9].Q[9, 9 p].A[9 p, 9 pp].
  QT[9, 9 p].QT[8 pp, 9].QT[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8] -
  Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Q[8 pp, 9].Q[9, 9 p].Ω[9 p, 9 pp].QT[9, 9 p].
  Q[8 pp, 9].Transpose[Ω[8 pp, 9]].QT[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8] -
  Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Q[8 pp, 9].Q[9, 9 p].Ω[9 p, 9 pp].QT[9, 9 p].
  QT[8 pp, 9].Q[8 p, 8 pp].Transpose[Ω[8 p, 8 pp]].QT[8, 8 p].QT[in, 8] -
  Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Q[8 pp, 9].Q[9, 9 p].Ω[9 p, 9 pp].QT[9, 9 p].
  QT[8 pp, 9].QT[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].Q[in, 8].Transpose[Ω[in, 8]])
+ ((Ω[in, 8] + Q[in, 8].Q[8, 8 p].Ω[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8] +
  Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Ω[8 pp, 9].QT[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8] +
  Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Q[8 pp, 9].Q[9, 9 p].Ω[9 p, 9 pp].
  QT[9, 9 p].QT[8 pp, 9].QT[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8]).
(Ω[in, 8] + Q[in, 8].Q[8, 8 p].Ω[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8] +
  Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Ω[8 pp, 9].QT[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8] +
  Q[in, 8].Q[8, 8 p].Q[8 p, 8 pp].Q[8 pp, 9].Q[9, 9 p].Ω[9 p, 9 pp].
  QT[9, 9 p].QT[8 pp, 9].QT[8 p, 8 pp].QT[8, 8 p].QT[in, 8]));

a7 = {ax7, 0, 0};
a9 = {ax9, 0, 0};

```

```

a10 = {ax10, 0, 0};

A4 = A[in, 4].R4;
A5 = A[in, 5].R5;
A6 = (A[in, 5] + Ω[in, 5].Q[in, 5].Ω[5, 6].QT[in, 5] +
      Q[in, 5].A[5, 6].QT[in, 5] - Q[in, 5].Ω[5, 6].Q[in, 5].Transpose[Ω[in, 5]] +
      (Ω[in, 5] + Q[in, 5].Ω[5, 6].QT[in, 5])). (Ω[in, 5] + Q[in, 5].Ω[5, 6].QT[in, 5])).R6;

A6m = (A[in, 5] + Ω[in, 5].Q[in, 5].Ω[5, 6].QT[in, 5] +
      Q[in, 5].A[5, 6].QT[in, 5] - Q[in, 5].Ω[5, 6].Q[in, 5].Transpose[Ω[in, 5]] +
      Ω[in, 5].Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6p].Ω[6p, 6pp].QT[6, 6p].QT[5, 6].QT[in, 5] +
      Q[in, 5].Ω[5, 6].Q[5, 6].Q[6, 6p].Ω[6p, 6pp].QT[6, 6p].QT[5, 6].QT[in, 5] +
      Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6p].A[6p, 6pp].QT[6, 6p].QT[5, 6].QT[in, 5] -
      Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6p].Ω[6p, 6pp].QT[6, 6p].Q[5, 6].
      Transpose[Ω[5, 6]].Q[in, 5] - Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6p].
      Ω[6p, 6pp].QT[6, 6p].QT[5, 6].Q[in, 5].Transpose[Ω[in, 5]] +
      ((Ω[in, 5] + Q[in, 5].Ω[5, 6].QT[in, 5] + Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6p].Ω[6p, 6pp].
      QT[6, 6p].QT[5, 6].QT[in, 5]). (Ω[in, 5] + Q[in, 5].Ω[5, 6].QT[in, 5] +
      Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6p].Ω[6p, 6pp].QT[6, 6p].QT[5, 6].QT[in, 5])).R6m;

A7 = a7;
A8 = (A[in, 8] + Ω[in, 8].Q[in, 8].Q[8, 8p].Ω[8p, 8pp].QT[8, 8p].QT[in, 8] +
      Q[in, 8].Q[8, 8p].A[8p, 8pp].QT[8, 8p].QT[in, 8] -
      Q[in, 8].Q[8, 8p].Ω[8p, 8pp].QT[8, 8p].Q[in, 8].Transpose[Ω[in, 8]] +
      (Ω[in, 8] + Q[in, 8].Q[8, 8p].Ω[8p, 8pp].QT[8, 8p].QT[in, 8])).R8;
A9e = MatrAcelR9e.R9e + 2 * ((Ω[in, 8] + Q[in, 8].Q[8, 8p].Ω[8p, 8pp].QT[8, 8p].QT[in, 8] +
      Q[in, 8].Q[8, 8p].Q[8p, 8pp].Ω[8pp, 9].QT[8p, 8pp].QT[8, 8p].QT[in, 8] +
      Q[in, 8].Q[8, 8p].Q[8p, 8pp].Q[8pp, 9].Q[9, 9p].Ω[9p, 9pp].
      QT[9, 9p].QT[8pp, 9].QT[8p, 8pp].QT[8, 8p].QT[in, 8]).
      (Q[in, 8].Q[8, 8p].Q[8p, 8pp].Q[8pp, 9].Q[9, 9p].Q[9p, 9pp])).v9 +
      (Q[in, 8].Q[8, 8p].Q[8p, 8pp].Q[8pp, 9].Q[9, 9p].Q[9p, 9pp]).a9;

A9m =
      (Transpose[Ω[in, 5] + Q[in, 5].Ω[5, 6].QT[in, 5] + Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6p].Ω[6p, 6pp].
      QT[6, 6p].QT[5, 6].QT[in, 5]]. (Q[in, 8].Q[8, 8p].Q[8p, 8pp].
      Q[8pp, 9].Q[9, 9p].Q[9p, 9pp]). Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6p].Q[6p, 6pp] +
      Transpose[Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6p].Q[6p, 6pp]].MatrAcelR9e.
      Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6p].Q[6p, 6pp] +
      Transpose[Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6p].Q[6p, 6pp]]. Q[in, 8].Q[8, 8p].
      Q[8p, 8pp].Q[8pp, 9].Q[9, 9p].Q[9p, 9pp]). (Ω[in, 5] + Q[in, 5].Ω[5, 6].QT[in, 5] +
      Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6p].Ω[6p, 6pp].QT[6, 6p].QT[5, 6].QT[in, 5])).R9e +
      2 * (Transpose[(Ω[in, 5] + Q[in, 5].Ω[5, 6].QT[in, 5]). Q[in, 8].T[0, 9pp].T[0, 6pp] +
      Transpose[T[0, 6pp]]. (Ω[in, 8] + Q[in, 8].Q[8, 8p].Ω[8p, 8pp].QT[8, 8p].
      QT[in, 8] + Q[in, 8].Q[8, 8p].Q[8p, 8pp].Ω[8pp, 9].QT[8p, 8pp].QT[8, 8p].
      QT[in, 8] + Q[in, 8].Q[8, 8p].Q[8p, 8pp].Q[8pp, 9].Q[9, 9p].Ω[9p, 9pp].
      QT[9, 9p].QT[8pp, 9].QT[8p, 8pp].QT[8, 8p].QT[in, 8]). T[0, 6pp] +
      Transpose[T[0, 6pp]].T[0, 9pp]). (Ω[in, 5] + Q[in, 5].Ω[5, 6].QT[5, 6])).v9e +
      Transpose[Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6p].Q[6p, 6pp]].Q[in, 8].
      Q[8, 8p].Q[8p, 8pp].Q[8pp, 9].
      Q[9, 9p].Q[9p, 9pp].Q[in, 5].
      Q[5, 6].Q[6, 6p].Q[6p, 6pp].A9e;

```

```

A10 = a10;
A11 =
  ((A[in, 11] + Ω[in, 11].Q[in, 11].Q[11, 11 p].Ω[11 p, 11 pp].QT[11, 11 p].QT[in, 11] +
    Q[in, 11].Q[11, 11 p].A[11 p, 11 pp].QT[11, 11 p].QT[in, 11] -
    Q[in, 11].Q[11, 11 p].Ω[11 p, 11 pp].QT[11, 11 p].Q[in, 11].Transpose[Ω[in, 11]]) +
  (Q[in, 11].Q[11, 11 p].Ω[11 p, 11 pp].QT[11, 11 p].QT[in, 11].Q[in, 11].
    Q[11, 11 p].Ω[11 p, 11 pp].QT[11, 11 p].QT[in, 11])).R11;

A12 = (A[in, 5] + Ω[in, 5].Q[in, 5].Ω[5, 6].QT[in, 5] +
  Q[in, 5].A[5, 6].QT[in, 5] - Q[in, 5].Ω[5, 6].Q[in, 5].Transpose[Ω[in, 5]] +
  Ω[in, 5].Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6 p].Ω[6 p, 6 pp].QT[6, 6 p].QT[5, 6].QT[in, 5] +
  Q[in, 5].Ω[5, 6].Q[5, 6].Q[6, 6 p].Ω[6 p, 6 pp].QT[6, 6 p].QT[5, 6].QT[in, 5] +
  Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6 p].A[6 p, 6 pp].QT[6, 6 p].QT[5, 6].QT[in, 5] - Q[in, 5].
  Q[5, 6].Q[6, 6 p].Ω[6 p, 6 pp].QT[6, 6 p].QT[5, 6].Q[in, 5].Transpose[Ω[in, 5]] +
  ((Ω[in, 5] + Q[in, 5].Ω[5, 6].QT[in, 5] + Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6 p].Ω[6 p, 6 pp].
    QT[6, 6 p].QT[5, 6].QT[in, 5]).(Ω[in, 5] + Q[in, 5].Ω[5, 6].QT[in, 5] +
    Q[in, 5].Q[5, 6].Q[6, 6 p].Ω[6 p, 6 pp].QT[6, 6 p].QT[5, 6].QT[in, 5])).R12;

```

Ecuaciones de Lazos

■ Ecuaciones de Posición

```

LPrinc = R0 + R4 - R2 - R5 - R6;
LDirHI = R2 + R5 + b * R6 + R12 - R10 - R11;
LEjeHS = R1 + R7 + R8 + R9e + b * R6 - R0 - R4;
LEjeDir = R1 + R7 + R8 - R9e - R12 - R10 - R11;
PdtoPto = R9m.r6m;

```

■ Ecuaciones de Velocidad

```

VELPrinc = V4 - V5 - V6;
VELDirHI = V5 + b * V6 + V12 - V10 - V11;
VELLEjeDir = V7 + V8 + V9e + b * V6 - V4;
VELLEjeHS = V7 + V8 - V9e - V12 - V10 - V11;
VELPdtoPto = V9m.r6m + R9m.V6m;

```

■ Ecuaciones de Aceleración

```

AceLPrinc = A4 - A5 - A6;
AceLDirHI = A5 + b * A6 + A12 - A10 - A11;
AceLEjeDir = A7 + A8 + A9e + b * A6 - A4;
AceLEjeHS = A7 + A8 - A9e - A12 - A10 - A11;
AcePdtoPto = A9m.r6m + 2 * V9m.V6m + R9m.A6m;

```

Solución Posición

■ Solución Lprin

```
 $\psi_4 = 0 \text{ * Degree};$ 
SolLP = FindRoot[{
  LPrinc[[1]] == 0,
  LPrinc[[2]] == 0
},
{ $\psi_5$ , 0 * Degree},
{ $\psi_6$ , 5 * Degree},

MaxIterations -> 15
}
{ $\psi_5 \rightarrow -0.00831286$ ,  $\psi_6 \rightarrow 0.0375729$ }
```

■ Solución HI_Dirección

```
 $\psi_4 = 0 \text{ * Degree};$ 
x10 = 139;
ec = {
  LDirHI[[1]] == 0,
  LDirHI[[2]] == 0,
  LDirHI[[3]] == 0
} /. SolLP;

SolLHI = FindRoot[ec,

{ $\psi_{6pp}$ , 12.52 * Degree},
{ $\psi_{11}$ , -23.52 * Degree},
{ $\psi_{11pp}$ , -46.30 * Degree},

MaxIterations -> 15
}
{ $\psi_{6pp} \rightarrow 0.0574657$ ,  $\psi_{11} \rightarrow -0.424289$ ,  $\psi_{11pp} \rightarrow -0.776474$ }
```

■ Solución Eje

```

ψ4 = 0 * Degree;
x10 = 139;

ec2 = {LEjeDir[[1]] == 0,
      LEjeDir[[2]] == 0,
      (*LEjeDir[[3]]==0,*)
      LEjeHS[[3]] == 0,
      LEjeHS[[1]] == 0,
      LEjeHS[[2]] == 0,
      PdtoPto == 0

      } /. SolLP /. SolLHI;
SolEje = FindRoot[ec2,
  {ψ8, -1.46 * Degree},
  {ψ8pp, 0 * Degree},
  {ψ9, -1.46 * Degree},
  {ψ9pp, 0 * Degree},
  {x7, 106},
  {x9, 154},

  MaxIterations → 15
]

{ψ8 → -0.0262394, ψ8pp → -0.00192768,
 ψ9 → 0.0312638, ψ9pp → 0.0554756, x7 → 141.027, x9 → 25.1468}

(ψ8 /. SolEje) / Degree
(ψ8pp /. SolEje) / Degree
(ψ9 /. SolEje) / Degree

-1.50341

-0.110448

1.79128

T3D[R_] := {R[[3]], R[[1]], R[[2]]};

```

```
cero = {0, 0, 0};

linea0 = Line[{T3D[cero], T3D[R1]}];
linea1 = Line[{T3D[R1], T3D[R1 + R7]}] /. SolEje;
linea2 = Line[{T3D[R1 + R7], T3D[R1 + R7 + R8]}] /. SolEje;
linea3 = Line[{T3D[R1 + R7 + R8], T3D[R1 + R7 + R8 + R9e]}] /. SolEje;
linea5 = Line[{T3D[R2], T3D[R2 + R5]}] /. SolLP;
linea6 = Line[{T3D[R2 + R5], T3D[R2 + R5 + R6]}] /. SolLP;
linea4 = Line[{T3D[R0], T3D[R0 + R4]}] /. SolLP;
linea10 = Line[{T3D[cero], T3D[R10]}] /. SolLP;
linea11 = Line[{T3D[R10], T3D[R10 + R11]}] /. SolLHI;
linea12 = Line[{T3D[R10 + R11], T3D[R10 + R11 - R12]}] /. SolLP /. SolLHI;

barra0 = Graphics3D[{AbsoluteThickness[6], RGBColor[0, 1, 1], linea0}];
barra1 = Graphics3D[{AbsoluteThickness[6], RGBColor[1, 0, 0], linea1}];
barra2 = Graphics3D[{AbsoluteThickness[6], RGBColor[1, 0.8, 0], linea2}];
barra3 = Graphics3D[{AbsoluteThickness[6], RGBColor[1, 0.5, 0.2], linea3}];
barra5 = Graphics3D[{AbsoluteThickness[6], RGBColor[1, 0, 0], linea5}];
barra6 = Graphics3D[{AbsoluteThickness[6], RGBColor[0, 0.7, 0], linea6}];
barra4 = Graphics3D[{AbsoluteThickness[6], RGBColor[0, 0, 1], linea4}];
barra10 = Graphics3D[{AbsoluteThickness[6], RGBColor[1, 0, 0], linea10}];
barra11 = Graphics3D[{AbsoluteThickness[6], RGBColor[0, 0.7, 0], linea11}];
barra12 = Graphics3D[{AbsoluteThickness[6], RGBColor[0, 0, 1], linea12}];

Show[barra0, barra1, barra2, barra3, barra5, barra6, barra4, barra10, barra11, barra12,

  Axes -> True,
  AxesLabel -> {"X", "Y", "Z"},
  ViewPoint -> {1.873, 2.189, 1.775} (*,
  PlotRange -> {{0, 450}, {0, 400}, {-250, 70}} *)
];
```


■ Solución Posición

```

Clear[ψ5, ψ6, ψ6p, ψ8, ψ8pp, ψ9, ψ9pp, ψ11, ψ11pp, x7, x9, SolPos, i];
ψ5i = ψ5 /. SolLP;
ψ6i = ψ6 /. SolLP;
ψ6ppi = ψ6pp /. SolLHI;
ψ8i = ψ8 /. SolEje;
ψ8ppi = ψ8pp /. SolEje;
ψ9i = ψ9 /. SolEje;
ψ9ppi = ψ9pp /. SolEje;
ψ11i = ψ11 /. SolLHI;
ψ11ppi = ψ11pp /. SolLHI;
x7i = x7 /. SolEje;
x9i = x9 /. SolEje;

x10 = 139;

For [i = 0, i ≤ 10, i += 1,
  ψ4 = i * Degree;

  SolPos[i] = FindRoot[{
    LPrinc[1] == 0,
    LPrinc[2] == 0,
    LDirHI[1] == 0,
    LDirHI[2] == 0,
    LDirHI[3] == 0,
    LEjeDir[1] == 0,
    LEjeDir[2] == 0,
    LEjeDir[3] == 0,
    LEjeHS[2] == 0,
    LEjeHS[1] == 0,
    PdtoPto == 0
  },
  {
    {ψ5, ψ5i},
    {ψ6, ψ6i},
    {ψ6pp, ψ6ppi},
    {ψ8, ψ8i},
    {ψ8pp, ψ8ppi},
    {ψ9, ψ9i},
    {ψ9pp, ψ9ppi},
    {ψ11, ψ11i},
    {ψ11pp, ψ11ppi},
    {x7, x7i},
    {x9, x9i},

    MaxIterations → 15
  }];

ψ5i = ψ5 /. SolPos[i];

```

```

ψ6i = ψ6 /. SolPos[i];
ψ6ppi = ψ6pp /. SolPos[i];
ψ8i = ψ8 /. SolPos[i];
ψ8ppi = ψ8pp /. SolPos[i];
ψ9i = ψ9 /. SolPos[i];
ψ9ppi = ψ9pp /. SolPos[i];
ψ11i = ψ11 /. SolPos[i];
ψ11ppi = ψ11pp /. SolPos[i];
x7i = x7 /. SolPos[i];
x9i = x9 /. SolPos[i];

]

```

■ Graficas Posición

```

tabla1 = Table[{i, ψ5/Degree /. SolPos[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla2 = Table[{i, ψ6/Degree /. SolPos[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla3 = Table[{i, ψ6pp/Degree /. SolPos[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla4 = Table[{i, ψ8/Degree /. SolPos[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla5 = Table[{i, ψ8pp/Degree /. SolPos[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla6 = Table[{i, ψ9/Degree /. SolPos[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla7 = Table[{i, ψ9pp/Degree /. SolPos[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla8 = Table[{i, ψ11/Degree /. SolPos[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla9 = Table[{i, ψ11pp/Degree /. SolPos[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla10 = Table[{i, (x7 /. SolPos[i]) / 1000}, {i, 0, 10, 1}];
tabla11 = Table[{i, (x9 /. SolPos[i]) / 1000}, {i, 0, 10, 1}];

fig1 = GraficaColor[tabla1, 1, 0, 0];
fig2 = GraficaColor[tabla2, 0, 1, 0.5];
fig3 = GraficaColor[tabla3, 0, 0, 1];
fig4 = GraficaColor[tabla4, 1, 0, 1];
fig5 = GraficaColor[tabla5, 0, 0, 0];
fig6 = GraficaColor[tabla6, 1, 1, 0.2];
fig7 = GraficaColor[tabla7, 1, 0.5, 0];
fig8 = GraficaColor[tabla8, 0.5, 0.5, 1];
fig9 = GraficaColor[tabla9, 0, 1, 0];
fig10 = GraficaColor[tabla10, 0, 1, 0.7];
fig11 = GraficaColor[tabla11, 0.1, 0.1, 1];
Show[fig1,
  Frame → True,
  FrameLabel → {"ψ4", "ψ5"},
  DisplayFunction → $DisplayFunction
];
Show[fig2,
  Frame → True,
  FrameLabel → {"ψ4", "ψ6"},
  DisplayFunction → $DisplayFunction
];
Show[fig3,
  Frame → True,

```

```
      FrameLabel → {"ψ4", "ψ6pp"},
      DisplayFunction → $DisplayFunction
    ];
Show[fig4,
      Frame → True,
      FrameLabel → {"ψ4", "ψ8"},
      DisplayFunction → $DisplayFunction
    ];
Show[fig5,
      Frame → True,
      FrameLabel → {"ψ4", "ψ8pp"},
      DisplayFunction → $DisplayFunction
    ];
Show[fig6,
      Frame → True,
      FrameLabel → {"ψ4", "ψ9"},
      DisplayFunction → $DisplayFunction
    ];
Show[fig7,
      Frame → True,
      FrameLabel → {"ψ4", "ψ9pp"},
      DisplayFunction → $DisplayFunction
    ];
Show[fig8,
      Frame → True,
      FrameLabel → {"ψ4", "ψ11"},
      DisplayFunction → $DisplayFunction
    ];
Show[fig9,
      Frame → True,
      FrameLabel → {"ψ4", "ψ11pp"},
      DisplayFunction → $DisplayFunction
    ];
Show[fig10,
      Frame → True,
      FrameLabel → {"ψ4", "x7"},
      DisplayFunction → $DisplayFunction
    ];
Show[fig11,
      Frame → True,
      FrameLabel → {"ψ4", "x9"},
      DisplayFunction → $DisplayFunction
    ];
];
```

```
Clear [ω4, ω5, ω6, ω6pp, ω8, ω8pp, ω9, ω9pp, ω11, ω11pp, vx7, vx9];
ω4 = 2 Pi;
vx10 = 0;
For[i = 0, i ≤ 10, i += 1,
  ψ4 = i * Degree;
  SolVel[i] = Solve[
    {
      VELPrinc[1] == 0,
      VELPrinc[2] == 0,
      VELDirHI[1] == 0,
      VELDirHI[2] == 0,
      VELDirHI[3] == 0,
      VELLEjeDir[1] == 0,
      VELLEjeDir[2] == 0,
      VELLEjeHS[3] == 0,
      VELLEjeHS[2] == 0,
      VELLEjeHS[1] == 0,
      VELPdtoPto == 0
    } /. SolPos[i],
    {ω5, ω6, ω6pp, ω8, ω8pp, ω9, ω9pp, ω11, ω11pp, vx7, vx9}] // Flatten;
]
?? SolVel
Global`SolVel
```

■ Graficas Velocidad

```

tabla12 = Table[{i,  $\omega_5$  /. SolVel[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla13 = Table[{i,  $\omega_6$  /. SolVel[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla14 = Table[{i,  $\omega_{6pp}$  /. SolVel[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla15 = Table[{i,  $\omega_8$  /. SolVel[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla16 = Table[{i,  $\omega_{8pp}$  /. SolVel[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla17 = Table[{i,  $\omega_9$  /. SolVel[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla18 = Table[{i,  $\omega_{9pp}$  /. SolVel[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla19 = Table[{i,  $\omega_{11}$  /. SolVel[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla20 = Table[{i,  $\omega_{11pp}$  /. SolVel[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla21 = Table[{i, ( $v_{x7}$  /. SolVel[i]) / 1000}, {i, 0, 10, 1}];
tabla22 = Table[{i, ( $v_{x9}$  /. SolVel[i]) / 1000}, {i, 0, 10, 1}];

fig12 = GraficaColor[tabla12, 1, 0, 0];
fig13 = GraficaColor[tabla13, 0, 1, 0.5];
fig14 = GraficaColor[tabla14, 0, 0, 1];
fig15 = GraficaColor[tabla15, 1, 0, 1];
fig16 = GraficaColor[tabla16, 0, 0, 0];
fig17 = GraficaColor[tabla17, 1, 1, 0.2];
fig18 = GraficaColor[tabla18, 1, 0.5, 0];
fig19 = GraficaColor[tabla19, 0.5, 0.5, 1];
fig20 = GraficaColor[tabla20, 0, 1, 0];
fig21 = GraficaColor[tabla21, 0, 1, 0.7];
fig22 = GraficaColor[tabla22, 0.1, 0.1, 1];
Show[fig12,
  Frame → True,
  FrameLabel → {" $\psi_4$ ", " $\omega_5$ "},
  DisplayFunction → $DisplayFunction
];
Show[fig13,
  Frame → True,
  FrameLabel → {" $\psi_4$ ", " $\omega_6$ "},
  DisplayFunction → $DisplayFunction
];
Show[fig14,
  Frame → True,
  FrameLabel → {" $\psi_4$ ", " $\omega_{6pp}$ "},
  DisplayFunction → $DisplayFunction
];
Show[fig15,
  Frame → True,
  FrameLabel → {" $\psi_4$ ", " $\omega_8$ "},
  DisplayFunction → $DisplayFunction
];
Show[fig16,
  Frame → True,
  FrameLabel → {" $\psi_4$ ", " $\omega_{8pp}$ "},
  DisplayFunction → $DisplayFunction
];

```

```
];  
Show[fig17,  
  Frame → True,  
  FrameLabel → {"ψ4", "ω9"},  
  DisplayFunction → $DisplayFunction  
];  
Show[fig18,  
  Frame → True,  
  FrameLabel → {"ψ4", "ω9pp"},  
  DisplayFunction → $DisplayFunction  
];  
Show[fig19,  
  Frame → True,  
  FrameLabel → {"ψ4", "ω11"},  
  DisplayFunction → $DisplayFunction  
];  
Show[fig20,  
  Frame → True,  
  FrameLabel → {"ψ4", "ω11pp"},  
  DisplayFunction → $DisplayFunction  
];  
Show[fig21,  
  Frame → True,  
  FrameLabel → {"ψ4", "vx7"},  
  DisplayFunction → $DisplayFunction  
];  
Show[fig22,  
  Frame → True,  
  FrameLabel → {"ψ4", "vx9"},  
  DisplayFunction → $DisplayFunction  
];
```

Solución Aceleración

```
Clear [α4, α5, α6, α6pp, α8, α8pp, α9, α9pp, α11, α11pp, ax7, ax9];

α4 = 0;
ax10 = 0;
For[i = 0, i ≤ 10, i += 1,
  ψ4 = i * Degree;
  SolAcel[i] = Solve[
    {
      AceLPrinc[1] == 0,
      AceLPrinc[2] == 0,
      AceLDirHI[1] == 0,
      AceLDirHI[2] == 0,
      AceLDirHI[3] == 0,
      AceLEjeDir[1] == 0,
      AceLEjeDir[2] == 0,
      AceLEjeHS[3] == 0,
      AceLEjeHS[2] == 0,
      AceLEjeHS[1] == 0,
      AcePdtoPto == 0
    } /. SolPos[i] /. SolVel[i],
    {α5, α6, α6pp, α8, α8pp, α9, α9pp, α11, α11pp, ax7, ax9}] // Flatten;
]
```

■ Graficas Aceleración

```
tabla23 = Table[{i,  $\alpha 5$  /. SolAcel[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla24 = Table[{i,  $\alpha 6$  /. SolAcel[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla25 = Table[{i,  $\alpha 6pp$  /. SolAcel[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla26 = Table[{i,  $\alpha 8$  /. SolAcel[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla27 = Table[{i,  $\alpha 8pp$  /. SolAcel[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla28 = Table[{i,  $\alpha 9$  /. SolAcel[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla29 = Table[{i,  $\alpha 9pp$  /. SolAcel[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla30 = Table[{i,  $\alpha 11$  /. SolAcel[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla31 = Table[{i,  $\alpha 11pp$  /. SolAcel[i]}, {i, 0, 10, 1}];
tabla32 = Table[{i, (ax7 /. SolAcel[i]) / 1000}, {i, 0, 10, 1}];
tabla33 = Table[{i, (ax9 /. SolAcel[i]) / 1000}, {i, 0, 10, 1}];
```

```
fig23 = GraficaColor[tabla23, 1, 0, 0];
fig24 = GraficaColor[tabla24, 0, 1, 0.5];
fig25 = GraficaColor[tabla25, 0, 0, 1];
fig26 = GraficaColor[tabla26, 1, 0, 1];
fig27 = GraficaColor[tabla27, 0, 0, 0];
fig28 = GraficaColor[tabla28, 1, 1, 0.2];
fig29 = GraficaColor[tabla29, 1, 0.5, 0];
fig30 = GraficaColor[tabla30, 0.5, 0.5, 1];
fig31 = GraficaColor[tabla31, 0, 1, 0];
fig32 = GraficaColor[tabla32, 0, 1, 0.7];
fig33 = GraficaColor[tabla33, 0.1, 0.1, 1];
Show[fig23,
  Frame → True,
  FrameLabel → {"ψ4", "α5"},
  DisplayFunction → $DisplayFunction
];
Show[fig24,
  Frame → True,
  FrameLabel → {"ψ4", "α6"},
  DisplayFunction → $DisplayFunction
];
Show[fig25,
  Frame → True,
  FrameLabel → {"ψ4", "α6pp"},
  DisplayFunction → $DisplayFunction
];
Show[fig26,
  Frame → True,
  FrameLabel → {"ψ4", "α8"},
  DisplayFunction → $DisplayFunction
];
Show[fig27,
  Frame → True,
  FrameLabel → {"ψ4", "α8pp"},
  DisplayFunction → $DisplayFunction
```



```
];
Show[fig28,
  Frame → True,
  FrameLabel → {"ψ4", "α9"},
  DisplayFunction → $DisplayFunction
];
Show[fig29,
  Frame → True,
  FrameLabel → {"ψ4", "α9pp"},
  DisplayFunction → $DisplayFunction
];
Show[fig30,
  Frame → True,
  FrameLabel → {"ψ4", "α11"},
  DisplayFunction → $DisplayFunction
];
Show[fig31,
  Frame → True,
  FrameLabel → {"ψ4", "α11pp"},
  DisplayFunction → $DisplayFunction
];
Show[fig32,
  Frame → True,
  FrameLabel → {"ψ4", "αx7"},
  DisplayFunction → $DisplayFunction
];
Show[fig33,
  Frame → True,
  FrameLabel → {"ψ4", "αx9"},
  DisplayFunction → $DisplayFunction
];
```