UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"INTRODUCCION AL CONCEPTO DE VOLUMEN EN LA ENSEÑANZA BASICA"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A:

MARIA FERNANDA RUIZ BELTRAN

DIRECTORA DE TESIS: DRA. MARIA DE LA PAZ ALVAREZ SCHERER

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

2004

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
" Introducción al concepto de volumen en la enseñanza básica"

realizado por María Fernanda Ruiz Beltrán

con número de cuenta 9850201-3 **, quien cubrió los créditos de la carrera de:**
Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis		
Propietario	Dra. María de la Paz Alvarez Scherer	
Propietario	Mat. Concepción Ruiz Ruiz-Funes	Concepción Ruiz
Propietario	Dra. Mariana Luisa Sáiz Roldán	
Suplente	Mat. Claudia Hernández García	Claudia
Suplente	Mat. Edna González Quiza	Edna G. Q.

Consejo Departamental de

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

Agradecimientos

Quiero agradecer a las siguientes personas por haberme ayudado a terminar este trabajo y por haberme tenido tanta paciencia durante esta difícil etapa de mi vida.

¡¡Muchas gracias por ayudarme a cumplir una meta tan difícil !!

O	G	I	R	D	O	R	F	S	N	M
I	H	Y	G	P	H	S	I	W	S	A
M	A	R	U	E	A	N	K	E	Z	M
J	E	D	Y	P	O	H	D	C	R	A
M	N	G	A	D	D	R	V	O	C	S
X	Y	P	A	H	U	H	V	R	U	A
N	J	L	N	O	P	A	Z	X	N	Q
D	E	A	L	E	C	Z	G	A	G	P
S	U	N	Y	I	V	K	T	U	B	A
J	E	G	M	A	F	E	R	B	N	R
S	O	G	I	M	A	A	F	V	O	A

INDICE

PRÓLOGO

Mi tesis es una propuesta de actividades didácticas para introducir el concepto de volumen en la enseñanza básica y facilitar su comprensión. Está dirigida a personas interesadas en la enseñanza de este tema, a nivel primaria e inicios de secundaria.

Estas actividades están pensadas principalmente para niños de entre 9 y 12 años.

Decidí hacer esto para brindar una herramienta a los maestros que deseen abordar este tema desde un enfoque más divertido. Contiene actividades manuales que facilitan la comprensión del concepto y no tanto cálculos matemáticos. También contiene actividades en grupo que fomentan discusiones, las cuales suelen ser muy formativas. Creo que estas actividades pueden servir como complemento a los programas oficiales.

Considero, además, que el concepto de volumen es sumamente difícil de entender porque es de los primeros temas que tratan tres dimensiones y ya no basta un esquema o un dibujo para poder comprenderlo. Entre los objetivos de esta tesis está el de ayudar a desarrollar la percepción espacial en los niños.

Este trabajo consta de cuatro capítulos:

El primer capítulo es una parte teórica respecto a la enseñanza, y su importancia.

En el segundo capítulo hago un rápido recorrido por la historia del concepto de volumen, esto para darnos cuenta que la dificultad para comprender el concepto viene desde hace mucho y no es fácil de entender ya que el volumen es un concepto relacionado con conceptos físicos.

En el tercer capítulo hablo de la problemática en la enseñanza del concepto de volumen, considerando las principales dificultades para su aprendizaje y los errores más comunes al tratar de medirlo.

En el cuarto y último capítulo propongo una serie de actividades para facilitar el aprendizaje del volumen en la enseñanza básica.

Además éste trabajo consta de dos anexos:

En el anexo 1 encontrarán las fórmulas para calcular el volumen de las principales figuras y una pequeña deducción de las mismas. Al final de éste anexo encontrarán figuras para armar.

En el anexo 2 amplío un poco lo que son o pueden ser las confusiones con algunos conceptos físicos y el volumen.

1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas son una de las áreas que contribuyen más a la formación intelectual, al uso del pensamiento deductivo. Son una forma de pensar, y de conocer, por ello su uso no se limita a los salones de clases, sino que puede ayudar al niño a resolver problemas aparentemente alejados de las mismas. Existe rechazo social a las matemáticas porque se consideran complicadas, inútiles y hasta aburridas. En ocasiones su enseñanza muestra el uso de fórmulas que parecen carecer de significado y no fomenta el razonamiento deductivo. Es por esta razón que es recomendable utilizar una manera más interesante de abordar los temas de esta disciplina, para que el alumno no la "padezca", ni "sufra" y pueda disfrutarla y aprovecharla.

La meta de quien enseña matemáticas no es, que sus alumnos, adquieran numerosos conocimientos, sino que aprendan a razonar, a desarrollar la capacidad de abstracción, a deducir, a establecer conexiones y a tomar decisiones propias. El maestro puede asesorar al niño si éste afronta dificultades.

La geometría es una rama de las matemáticas que puede ser lúdica y constructiva, enriquece la formación del niño. Las actividades de la enseñanza de la geometría realizadas a nivel primaria fomentan principalmente cuatro habilidades:

- Describir: ayuda al alumno a expresar con palabras lo que ve y lo que hace. También a explicar los criterios que utilizó para identificar el objeto.

- Reproducir: promueve en el niño la capacidad de observar la figura y de manipular instrumentos para realizarla (papel, cartón, moldes, etc.)

- Representar: fomenta en el niño el poder de abstracción, es decir, pasar de un objeto real a un símbolo representativo de ese objeto. Una reproducción es una representación, pero representar no implica necesariamente reproducir. Por ejemplo, dibujar un cubo en una hoja de papel no es una reproducción de un objeto. El niño aprende a omitir algunas propiedades presentes en el objeto, dando a entender a què objeto se refiere. Por ejemplo, el cubo tiene tres dimensiones y una representación en papel tiene sólo dos dimensiones.

- Construir: incita al niño a crear imágenes mentales y materializar la representación, lo que lo ayuda a entender y resolver problemas. El alumno debe poder elegir las herramientas para llevar a cabo esa construcción.

Estas cuatro habilidades desarrollan en el niño la destreza, la expresión, la capacidad de elección, la creatividad, entre otras.

En la enseñanza básica la geometría es, además, una rama diferente a otras de las matemáticas como el álgebra y la aritmética porque es más cercana a la realidad del niño. En general, para un niño la geometría es más intuitiva, porque desde temprana edad está rodeado de objetos geométricos.

Una parte esencial de la geometría es la medida de un objeto, ya sea su longitud, su área o su volumen.

Lo que me motivò a escoger este tema de tesis es que en general creo que la enseñanza de los conceptos de área y volumen no ha evolucionado mucho y por lo general se limita a contar el número de unidades cuadradas o cúbicas de las figuras o cuerpos, y al aprendizaje.

2. *ENSEÑANZA*

Proverbio Chino

"Lo oigo y lo olvido. Lo veo y lo recuerdo. Lo hago y lo comprendo"

El presente capítulo se enfoca a una pequeña pero importante área de la actividad humana que se relaciona con la habilidad de aprender. El concepto de aprender se encuentra estrechamente relacionado a su vez con el concepto de enseñar. Ambos en una relación de permanente movimiento hacen posible que se dé el desarrollo intelectual de los humanos.

Durante las primeras etapas del desarrollo del niño se verifican una serie de aprendizajes que pasan de habilidades psicomotrices a habilidades de pensamiento, las cuales permiten al individuo entender y manejar símbolos y conceptos abstractos.

Por otra parte, para llegar a ese nivel de pensamiento se requiere que el individuo en cuestión, haya sido enseñado y por lo tanto haya aprendido ciertos patrones o esquemas que le permitan adquirir nuevos conocimientos.

Empezaremos por tratar de responder a la pregunta ¿Qué es la enseñanza?

Estrictamente la enseñanza es acción y efecto de enseñar, pero ¿qué es enseñar? Enseñar es lograr que alguien aprenda algo, indicar, dar señas de alguna cosa. Siguiendo estas definiciones podemos decir que la enseñanza es un sistema y método de dar instrucciones para que alguien aprenda algo. Para poder comprender perfectamente lo que es la enseñanza no podemos olvidar el significado de la palabra aprender.

Aprender es adquirir el conocimiento de una cosa (cuerpo físico, idea, concepto, etc.) por medio del estudio, ejercicio o experiencia, o bien tomar o grabar algo en la memoria.

Para poder enseñar algo (ciencia, deporte, juego, etc.) no debemos perder de vista dos puntos muy importantes:

- Tener el suficiente conocimiento de lo que se quiere enseñar, para poder abordarlo desde diferentes puntos de vista y poderlo explicar de muchas maneras.

- Conocer a la persona, al niño en este caso, que se le quiere enseñar, para facilitar su aprendizaje.

En referencia al primer punto daré por hecho que la persona encargada de enseñar algo posee el dominio suficiente sobre el tema.

Con relación al segundo punto es conveniente revisar brevemente la teoría de Piaget sobre el desarrollo cognoscitivo o de habilidades mentales.

¿Quién es Piaget?

Piaget nació en Neuchâtel, Suiza en 1896. Murió en Génova en 1980. Él estudió biología y se especializó en malacología, esto es, el estudio de moluscos.

Se interesó principalmente por los caracoles y las almejas. Publicó varios artículos en este campo. Estudió ciencias naturales en la universidad de

Neuchâtel donde obtuvo el grado de doctor en ciencias (Ph.D.) Durante este periodo publicó dos ensayos de filosofía los cuales él consideraba como "el trabajo adolescente". Se empezó a interesar por la naturaleza del pensamiento humano, principalmente por el desarrollo del conocimiento, a lo que él le llamó epistemología genética. (Epistemología es la teoría del conocimiento del saber científico.) Realizó su primer estudio experimental sobre el crecimiento de la mente cuando estandarizó el examen de inteligencia "Burt's".

Estudió el desarrollo mental de sus hijos durante toda su infancia. Simultáneamente Piaget ocupó varios cargos: historiador de la ciencia en Neuchâtel, historiador del pensamiento científico en Génova y psicólogo y sociólogo de Lausanne. Formó parte del departamento internacional de la educación. En 1955 creó el Centro Internacional de la Epistemología Genética del cual fue director hasta su muerte.

A continuación se expone una breve explicación de la teoría de Piaget sobre el desarrollo cognoscitivo:

Su única meta fue poder contestar la siguiente pregunta: ¿Cómo crece el conocimiento? Su respuesta fue: es una construcción progresiva de estructuras lógicas reemplazando una a otra por un proceso de inclusión de un medio lógico menos poderoso a otros más altos hasta la edad adulta.

Con esta preocupación Piaget desarrolló su teoría. La cual explica el desarrollo cognoscitivo del niño, haciendo énfasis en la formación de estructuras mentales. La idea central es comprender la formación de los mecanismos mentales en el niño para conocer su naturaleza y funcionamiento en el adulto.

Piaget piensa que la formación del pensamiento es un desarrollo progresivo cuya finalidad es alcanzar cierto equilibrio en la edad adulta. A este desarrollo progresivo le llama Equilibración. Esa equilibración progresiva se modifica debido a las actividades del sujeto y sé amplía de acuerdo a la edad.

Toda actividad desarrollada por un sujeto es respuesta a un impulso por una necesidad, y esa necesidad es un desequilibrio; la finalidad de la actividad es recuperar el equilibrio por medio de factores afectivos, psicológicos o bien por cuestiones orgánicas.

Mediante los procesos de asimilación y adaptación se construye el equilibrio. Por asimilación se entiende la incorporación de percepciones de nuevas experiencias dentro de nuestro marco de referencia actual. Esto genera una resistencia al cambio. Por adaptación, se entiende a la modificación y enriquecimiento de las estructuras de nuestro marco de referencia como resultado de nuevas percepciones que demandan los cambios. A la compensación entre ambas de manera que las interacciones del niño con el ambiente conducen progresivamente a niveles superiores de entendimiento. Piaget le llamó Equilibrio.

El desarrollo intelectual se obtiene mediante las interacciones entre cierta maduración, experiencias físicas, interacción social y equilibración.

En un estado de desequilibrio, lo que decimos no siempre concuerda con lo que hacemos. Durante este estado se producen conductas impredecibles como juicios vacilantes, lógicos e ilógicos. Los niños que experimentan más confusión durante el desequilibrio son los que logran el máximo nivel de entendimiento. El sentir la presencia de contradicciones (lo que predecimos es totalmente diferente a lo que verdaderamente ocurre) en el pensamiento es un índice de desequilibrio. El aprendizaje empieza con el reconocimiento de un problema, con un desequilibrio.

Los errores infantiles constituyen en realidad pasos naturales para el conocimiento. Los errores son cambios de un tipo de razonamiento a otro.

La enseñanza requiere algo más que hablarle a los niños. Según Piaget la base para un aprendizaje verdadero son los procesos de equilibración de experiencias discordantes entre ideas, predicciones y resultados sintetizados y ordenados; o bien experimentados ocasionalmente en la vida real. Experimentados en el sentido de que un experimento es una exploración de algo.

Piaget clasifica el pensamiento infantil en cuatro etapas. Las primeras dos las consideró como periodos preoperatorios y prelógicos, las últimas dos como periodos avanzados y del pensamiento lógico. En los siguientes párrafos se explica, cada una, brevemente.

1. **Sensorio-motriz** que abarca desde el nacimiento hasta los 2 años. En esta etapa se desarrollan los movimientos innatos (reflejos) que pasan a movimientos voluntarios; esto es, que el niño dirige sus actividades hacia objetos determinados. El niño actúa sobre el medio y viceversa. Esta relación influye en el desarrollo social y afectivo del niño. Existe coordinación de movimientos preverbales.

2. **Preoperacional** que abarca de los 2 años hasta los 7 años. Aquí se desarrolla la habilidad para representar la acción mediante el pensamiento prelógico y el lenguaje. Con la adquisición del lenguaje se modifican las estructuras mentales y su relación con las demás personas:

a) Existe mayor relación entre los individuos y el niño, esto se genera principalmente con el juego que es su actividad principal y sirve como instrumento de adaptación.

b) Aparece el pensamiento tratando de dar una explicación lógica a sus experiencias; pero no logra ver el todo.

c) Estimula la formación del pensamiento intuitivo que es una interiorización de las percepciones y los movimientos en forma de imágenes representativas y de experiencias mentales que prolongan los esquemas sensorio motores sin coordinación propiamente racional.

Piaget divide a la etapa preoperacional en dos fases: **preoperacional o de representación** que abarca de 2 – 4 años de edad. En esta fase, el niño mantiene una postura egocéntrica, que le incapacita para adoptar el mismo punto de vista de los demás. También en esta fase la manera de categorizar los objetos se efectúa globalmente, basándose en una exagerada generalización de los caracteres más sobresalientes. La **fase instintiva** que se prolonga hasta los 7 años, y se caracteriza porque el niño es capaz de pensar las cosas a través del establecimiento de clases y relaciones, y del uso de números, pero todo de forma intuitiva, sin tener conciencia del procedimiento empleado. En este periodo, el niño desarrolla primero la capacidad de conservación de la sustancia, luego desarrolla la capacidad de conservación de la masa, posteriormente la del peso y finalmente la del volumen. Piaget señala que el paso del periodo sensorio motriz a este segundo periodo o etapa se produce fundamentalmente a través de la imitación, que de forma individualizada el niño asume y que produce la llamada imagen mental, en la que tiene un gran papel el lenguaje.

3. **Operaciones concretas** Abarca de los 7 a los 11 años. Aparece el pensamiento lógico, pero limitado a la realidad física. Se desarrolla la capacidad de reversibilidad que es la habilidad que tiene el niño para analizar una situación desde el principio hasta el final y regresar al punto de inicio. También la capacidad de analizar un acontecimiento desde diferentes puntos de vista y volver al original.

   Presupone el concepto de permanencia. Puede clasificar y seriar con los objetos presentes por medio de la manipulación. No es sino hasta el final de esta etapa que obtendrá la capacidad de clasificar o seriar con respecto al volumen. Cambian factores afectivos, se modifican y se desarrolla el respeto y la voluntad.

4. **Operaciones formales** Abarca desde los 11 hasta los 15 años. Aparece el pensamiento lógico abstracto e ilimitado. Coincide con la adolescencia lo que implica cambios físicos fundamentales. En esta etapa se tiene la capacidad de formular hipótesis, de hacer proposiciones mentales que es el paso de operaciones concretas a formales. Desarrolla su inteligencia. El niño piensa que su punto de vista es el único, es decir, existe un egocentrismo intelectual. En la medida que ejercita su habilidad de reflexión y toma en cuenta a los demás su punto de vista se amplia y va desapareciendo el egocentrismo intelectual.

Dentro de la teoría de Piaget encontramos que hasta los 6 años entienden el concepto de espacio como un lugar vacío, por lo que no les es fácil entender el concepto de superficie, lo que trae como consecuencia un conflicto en el entendimiento de área, perímetro y volumen. Por lo tanto es hasta después de los 6 años de edad que es buen momento empezar a tratar el concepto de número y variación del mismo, al igual que el ordenamiento en serie y la correspondencia biunívoca, ya que el niño tiene la capacidad de conservación de conjuntos y empieza a adquirir la habilidad de reversibilidad. El niño puede entender que números más pequeños están contenidos en los más grandes.

A partir de los 7 años, el niño es capaz de construir explicaciones propiamente atomísticas y ello en la época que comienza a saber contar. Una experiencia sencilla al respecto consiste en presentar al niño dos vasos de agua de formas parecidas y dimensiones iguales, llenos hasta tres cuartas partes. En uno de los dos, echamos dos terrones de azúcar y preguntamos al niño si cree que el agua va ha subir. Una vez echado el azúcar, se observa el nuevo nivel y se pesan los vasos, con el fin de hacer notar que el agua que contiene azúcar pesa más que la otra. Entonces mientras el azúcar se disuelve, preguntamos: 1° si, una vez disuelto, quedará algo de azúcar en el agua; 2° si el peso seguirá siendo mayor o si volverá a ser igual al del agua clara y pura; 3° si el nivel del agua azucarada bajará de nuevo hasta igualar el del otro vaso o si permanecerá tal y como está. Preguntemos el por qué de todas las afirmaciones que hace el niño y luego, una vez terminada la disolución, reanudamos la conversación sobre la permanencia del peso y volumen (nivel) del agua azucarada.

Las reacciones observadas en las distintas edades resultan extremadamente claras. En primer lugar, los pequeños (de menos de 7 años) niegan en general toda conservación del azúcar disuelta, y forzosamente la del peso y el volumen que éste implica. Para ellos, el hecho de que el azúcar se disuelva supone su completa aniquilación y su desaparición del mundo de lo real. Es cierto que permanece el sabor del agua azucarada, pero según los mismos sujetos, este sabor habrá de desaparecer al cabo de varias horas o días, igual que el olor y el color.

Hacia los 7 años, en cambio, el azúcar disuelto permanece en el agua, es decir, que hay conservación de la sustancia. Pero, ¿bajo que forma? Para ciertos sujetos, el azúcar se convierte en agua o se licua transformándose en un jarabe que finalmente se mezcla con el agua. Mas para los más avanzados, ocurre otra cosa. Según el niño, vemos cómo el terrón de azúcar se va convirtiendo en "pequeñas migajas" durante la disolución: pues bien basta admitir que estos pequeños "trozos"se hacen cada vez más pequeños, y entonces comprenderemos que existen siempre en el agua en forma de "bolitas" invisibles. "Esto es lo que le da el sabor azucarado", añaden dichos sujetos. El atomismo ha nacido, pero se trata de un atomismo que no pasa de ser cualitativo, ya que esas "bolitas" no tienen peso ni volumen y el niño espera, en el fondo, la desaparición del primero y el descenso del nivel del agua después de la disolución.

En el curso de una etapa siguiente, cuya aparición se observa alrededor de los 9 años, el niño hace el mismo razonamiento por lo que respecta a la sustancia, pero añade un proceso esencial: las bolitas tienen cada una su peso y si se suman estos pesos parciales, se obtiene el nuevo peso de los terrones que se han echado. En cambio, siendo capaces de dar una explicación tan sutil para afirmar a priori la conservación del peso, no aciertan a captar la del volumen y esperan todavía que el nivel del agua azucarada descienda después de la disolución. Por último, hacia los 11 o 12 años, el niño generaliza su esquema explicativo al volumen mismo y declara que, puesto que las bolitas ocupan cada una un pequeño espacio, la suma de dichos espacios es igual a la de los terrones iniciales, de tal manera que el nivel del agua no debe descender.

Éste es, el atomismo infantil. Piaget asegura que se obtienen las mismas explicaciones, aunque en sentido inverso, cuando, se hace dilatar delante de un niño un grano de maíz americano puesto encima de una placa caliente: para los pequeños la sustancia aumenta; para los de 7 años, se conserva sin aumento, pero se hincha y el peso varía; para los de 9 - 10 años, el peso se conserva, pero no el volumen, todavía y hacia los 12 años dado que la harina se compone de granos invisibles de volumen constante, éstos se separan, simplemente ¡por aire caliente que llena los intersticios!

El atomismo es notable como función del proceso deductivo de composición que revela que el todo es explicado por la composición de las partes y ello supone una serie de operaciones reales de segmentación o partición, por una parte y de reunión o adición, por otra parte; así como desplazamientos por concentración o separación. Supone además verdaderos principios de conservación, lo cual pone realmente de manifiesto que las operaciones en juego están agrupadas por sistemas cerrados y coherentes, de los que estas conservaciones representan los "invariantes".

Las nociones de permanencia de las que acabamos de ver una primera manifestación son las de la sustancia, peso y el volumen. Pero es fácil encontrarlas en otras (conservación de masa y correspondencia biunívoca).

Piaget decía que, cuanto más tiempo sea empleado para preparar el concepto de número y la medida mediante la construcción de razonamiento cualitativo, tanto mejor lo comprenderá el niño. Esto es, que cuanto más tiempo dedique el niño al estudio de lo concreto, y a la observación, más fácilmente podrá llegar a la comprensión de las formas abstractas.

Podemos preguntarnos ¿cómo se construye el número en sí mismo y las operaciones aritméticas? Sabemos, por los estudios de Piaget, que durante la primera infancia sólo los primeros números son accesibles al sujeto porque son números intuitivos que corresponden a figuras perceptibles. La serie indefinida de los números y, sobre todo, las operaciones de suma (y su inversa la resta) y de multiplicación (con su inversa la división) no son, en cambio, accesibles por término medio hasta después de los 7 años. El motivo de ello es sencillo: el número es, en realidad, un compuesto de las operaciones anteriormente dichas y supone, su construcción previa. Un número entero es, una colección de unidades iguales entre sí; pero es al mismo tiempo una sucesión ordenada, y por ende una seriación de las relaciones de orden. Su doble naturaleza de cardinalidad y ordinalidad resulta de una fusión de los sistemas de encajamiento y de seriación lógica, y esto es lo que explica que aparezca al mismo tiempo que las operaciones cualitativas. Se comprende por qué las correspondencias término a término son intuitivas durante la primera infancia: no se convierte en operatorias y susceptibles de construir operaciones numéricas, hasta que el niño es capaz de manejar simultáneamente las operaciones de seriación y de encajamiento de las partes en los todos.

Una conclusión general se impone: el pensamiento del niño se convierte en lógico únicamente por la organización de sistemas de operaciones que obedecen a leyes de conjunto comunes:

1° composición: dos operaciones de un conjunto pueden componerse entre sí y su resultado ser una operación perteneciente a ese mismo conjunto.

Ejemplo: $1 + 1 = 2$

2° reversibilidad: toda operación puede ser invertida.

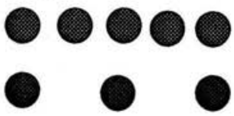
Ejemplo: 1 se invierte como -1

3° la operación directa y su inversa tiene como resultado una operación nula o idéntica.

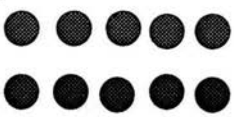
Ejemplo: $1 - 1 = 0$

4° las operaciones pueden asociarse entre sí de todas maneras. Esta estructura general que los matemáticos llaman “grupos”, caracteriza a todos los sistemas de operaciones que antes hemos descrito, con la salvedad de que, en los terrenos lógicos las condiciones 3 y 4 presentan ciertas particularidades debidas al hecho de que una relación añadida a sí misma no se modifica; puede hablarse entonces de agrupamiento, noción más elemental que la de grupo. Hay que admitir que el paso de la intuición a la lógica o a las operaciones matemáticas se efectúa durante la segunda infancia por la construcción de agrupamientos y grupos, es decir, que las nociones y relaciones no pueden construirse aisladamente.

Un ejemplo de cómo se desarrolla la correspondencia biunívoca hasta llegar a la comprensión del concepto de número es el siguiente:
Se tienen fichas rojas y fichas azules. Se colocan tres azules y cinco rojas, espaciadas de diferente manera de tal forma que ocupen la misma longitud.



Después se colocan cinco rojas y cinco azules una debajo de otra de tal manera que a simple vista se vea que hay el mismo número de fichas rojas y fichas azules.



Finalmente se colocan cinco fichas rojas en forma de círculo y cinco fichas azules en una línea. Aquí podrá darse cuenta el niño de que son el mismo número de fichas azules y rojas siempre y cuando las cuente.

Cuando los sentidos se enfrentan al sistema de pensamiento lógico en niños pequeños (6,7 años) los sentidos ganan. Esta forma de interpretar al mundo físico es característico en niños de esa edad. Ellos creen que la cantidad neta de algo cambia cuando su apariencia se modifica; hasta que desarrollan la capacidad de entender la conservación de la materia.

Ejemplo de conservación de la materia:
Se tienen dos barras de plastilina del mismo tamaño.

Una de las barras de plastilina la hacemos bola y le preguntamos al niño ¿cuál tiene más plastilina?

El niño menor a 6,7 años responde que la bola. Un niño un poco más grande si observa cómo la barra la hacemos bola, tal vez contestará que tienen la misma cantidad, esto depende de la edad del niño y de su desarrollo intelectual. Y un niño mayor seguro dirá que tienen la misma cantidad y hasta le parecerá tonta la pregunta.

El niño primero obtiene estructuras topológicas, después de tipo algebraico y posteriormente las de orden (10 años). Las facultades analíticas y sintéticas las tiene hasta los 14 ò 15 años.

Piaget asegura que el aprendizaje se logra cuando el niño realiza actividades significativas para él, y cuando actúa de acuerdo a sus intereses y aptitudes. Además cree necesario que para enseñar algo se debe tomar en cuenta la diferencia entre el pensamiento del niño y el del adolescente, la cual radica en que el niño hace referencia a "leyes" conocidas, reales según su experiencia y el adolescente a lo hipotético deductivo, esto es, a lo desconocido, a lo que no ha visto realizado.

Otra pregunta difícil de contestar pero que los que enseñan creo que deben de considerar es ¿Qué se va a enseñar? Según Piaget lo que se tiene que enseñar es el contenido de la materia de acuerdo a los intereses del niño y sobre todo a sus habilidades. En ocasiones es difícil llamar su atención y lograr que se concentre, y algo que puede facilitarlo es buscar la forma de interesarlo con alguna actividad o algún material, es decir, buscar un método de enseñanza y si es posible jugar con la didáctica para poder facilitarle el aprendizaje al niño.

De acuerdo con Piaget un método de enseñanza es:
"El conjunto de momentos y técnicas lógicamente coordinados para dirigir el aprendizaje del alumno hacia determinados objetivos."
Fuente: "Teoría de Piaget acerca del desarrollo cognoscitivo del niño y su relación con el aprendizaje". www.bibliodgsca.unam.mx/tesis.

Le da el nombre de método didáctico al conjunto lógico y unitario de procedimientos didácticos que tienden a dirigir el aprendizaje, incluyendo en él desde la presentación y elaboración del material hasta la verificación del aprendizaje.

He hablado de la didáctica, pero ¿sabemos lo que es? Busqué en varios libros pero ninguna definición de didáctica me convenció, hasta que encontré ésta, en el libro de "Didáctica de las matemáticas" de Emma Castelnuovo:

Didáctica es el arte de enseñar. ¿Por qué ésta? Por corta quizá . . . .
No, simplemente porque la palabra arte abarca la existencia de muchas maneras de hacerlo, cada quien tiene su propia manera, su propio método y no existe ninguna técnica ni ningún manual que nos diga cómo hacerlo. Depende de cada uno, de su imaginación y de su propia creatividad. Cada quien aprende a enseñar por sí solo, tal vez con base a sus experiencias sabrá qué es mejor y qué es peor, pero sigue siendo relativo.

Conocemos algunos métodos didácticos de enseñanza de los cuales podemos empezar a crear nuestra propia didáctica.

Los primeros en preocuparse por esto fueron Comenius (1640) y Pestalozzi (1760).

Comenius fue húngaro (1592 – 1670), hijo de un molinero. Él decía que el conocimiento comienza necesariamente a través de los sentidos. Que nada puede ser objeto de comprensión si no ha sido objeto de sensación. Esto es que el alumno debe tener contacto con lo que está aprendiendo y debe estar activo, no sólo sentado y escuchando lo que dice el maestro. Dice también que el maestro debe tener la capacidad de explicar los mismos temas de maneras diversas en la medida de la posibilidad de comprensión de los alumnos. Esto porque cada alumno es diferente y por lo mismo aprende de manera diferente.

Habla de los "Métodos Cíclicos":
"... que aquello que se ha aprendido hoy, refuerce aquello que se aprendió ayer y abra el camino para lo que se aprenderá mañana."
Fuente: "Didáctica de las matemáticas", Emma Castelnuovo.

Pestalozzi fue sueco (1746 – 1827), hijo de un médico. Él apoyaba y estaba de acuerdo con las ideas de Comenius, es decir, que la mejor educación es la educación basada en el método cíclico. Además Pestalozzi creía que era necesaria una educación intuitiva-constructiva, en donde el alumno necesita estar activo. El método de Pestalozzi se funda en la acción de que el niño encuentre por sí solo los diversos elementos del saber al igual que los desarrollos sucesivos, y el por qué se ve obligado, a través de signos representativos o construcciones, a hacer visible y sensible lo que ha conseguido. Este principio en virtud del cual el niño sustituye el libro con su experiencia personal, las imágenes con la naturaleza y los objetos, los razonamientos y las abstracciones con ejercicios ya hechos, se aplica en cada momento de la instrucción y en todas las ramas del saber. Se recurre a la acción en todas las modalidades y formas. El niño observa, investiga, recoge materiales para sus colecciones, experimenta más que estudiar y actúa más que aprender...

La palabra intuición viene del griego intueri que significa mirar dentro, mirar con atención. Pestalozzi habla de un ABC de la intuición que consta de tres elementos: la forma, el número y la palabra, aspectos con los que ofrece la posibilidad de conocer lo esencial de las cosas y, a la vez, cualidades intrínsecas a las mismas cosas. De aquí las tres materias fundamentales en la escuela elemental: el dibujo (del que derivan la geometría y caligrafía), la aritmética y el lenguaje. El conocimiento procede de la intuición a las cosas, para llegar finalmente a los juicios, es decir, a la capacidad de evaluación crítica. El orden de la intuición sitúa a la palabra en último lugar, de manera que resulta erróneo comenzar por la educación lingüística; ésta tiene la necesidad de basarse en la capacidad de observar, para evitar memorismos y formalismos gramaticales.

Tiempo después se desarrolló lo que sería hoy una pedagogía científica que surge a partir de las ideas de Comenius y Pestalozzi. Sus más grandes representantes, a principios del siglo XX, fueron María Montessori y Ovide Decroly, quienes desarrollaron sus propios métodos con algunas diferencias.

María Montessori fue una pedagoga italiana (1870 – 1952), creadora de un sistema de enseñanza que empezó a aplicar en 1907 en Roma; con el cual intenta desarrollar en los niños, mediante ejercicios atractivos y de marcado cariz práctico, la educación de los sentidos.
Fuente: http://www.webster.edu/~woolflm/montessori.html

Método Montessori consiste en darle al niño el material necesario para adquirir cierto conocimiento. Este método hace trabajar al niño mediante un procedimiento en donde no sólo hay percepción pasiva de imagen, hay también construcción y se opera. "Método activo-sintético" porque pasa de los elementos a lo global. Este método educativo o de enseñanza se basa en la concepción biológica o vital de la infancia, según la cual, durante el proceso educativo, el niño se autodirige hacia su meta personal, mientras que el maestro observa los períodos sensitivos del niño, los cuales conllevan manifestaciones nuevas, exigencias y desarrollo infantil. De ahí que los educadores deban respetar el interés del niño y abstenerse de toda imposición directa o indirecta. El material consiste en fomentar el auto desarrollo del niño y autoeducación.

Los principios fundamentales de éste método son:

- El material adquiere una gran importancia al brindarle al niño una enseñanza individual e interna.
- Importancia de la educación de los sentidos, desarrollo racional a través del conocimiento de lo natural.
- La educación es concebida como proceso de autocreación.
- Resalta la necesidad de contar con material didáctico adecuado y obligatorio.

Como todo en esta vida, la pedagogía montessoriana tiene cosas buenas y cosas malas desde un punto de vista crítico: el método Montessori puede llegar a ignorar el mundo social, su educación no tiene un fin u objetivo concreto determinado, ofrece un dualismo entre naturalidad y libertad, que no llega a resolverse, su psicología se mantiene, en muchas ocasiones, en puro atomismo, que impide ir más allá de las asociaciones.

Ejemplo:
Concepto de número.

Se tienen reglillas de madera de varias medidas: 1cm, 2cm, 3cm,..., 10cm y cada una de diferente color. Se toma una de 5cm. La tarea del niño es ver con cuáles y cuántas de las reglillas se puede tener otra del mismo tamaño que la de 5cm.

Con esto el niño se da cuenta que el número 5 es:

5 = 1+1+1+1+1 = 3+2 = 4+1

Ovide Decroly fue un médico, sociólogo y filósofo belga (1871 - 1932). Se dedicó a la psicología pedagógica y fundó una escuela en Uccle en la que investigó la lectura global y los centros de interés. Su pedagogía se basa en los intereses del niño con sus necesidades y los objetos que forman parte de su ambiente natural y social.

Método Decroly es operativo, pero a diferencia del montessori no proporciona el material, pero sugiere por los puntos que se tratan, los fenómenos naturales más adecuados que conducen al niño a la observación analítica. "Método activo-analítico" de la observación global pasa a la descomposición del fenómeno y al análisis. De lo complejo a lo simple. En este método se maneja mucho el concepto de continuidad en su acepción de cambio. Este método parte de lo real y concreto, de experiencias vividas, a la vez que tiene en cuenta la necesidad de la adaptación educativa a las nuevas exigencias externas y sociales. Señala que la escuela debe resaltar la necesidad de trabajar en colaboración con las aptitudes motrices, facilitándole al niño un material adecuado para lograr tal desarrollo psico-físico. La escuela debe ser hecha a medida, basándose en la educación de cada uno de sus alumnos y en sus particularidades personales.

Los pensamientos básicos del pensamiento decroliano son: la escuela tiene la necesidad de adaptarse al niño, un ser en continuo proceso de evolución. Su método esta basado en las actividades espontáneas del niño, sugeridas por las necesidades esenciales de su vida. La escuela se dedica a la formación, desarrollo y perfeccionamiento de las tendencias sociales latentes en el niño. Necesidad de un ambiente natural, a través del cual se proporciona un mejor desarrollo infantil. El proceso perceptivo va de lo general y lo complejo a lo particular y simple.

Ejemplos:
Números naturales
Crecimiento de una planta
Cantidad de lluvia recogida
Estos fenómenos conducen al niño a medir o a contar.

La enseñanza de la lectura es a través de frases y mediante el proceso de la descomposición espontánea, pasa al aprendizaje de palabras, sílabas y letras.

Decroly dentro de su método trata de unificar la enseñanza de las matemáticas con las otras materias científicas y la actividad propia del alumno. Esta didáctica exige por parte del docente una seria preparación y una larga visión de la ciencia, junto con un profundo conocimiento de la psicología infantil.

La finalidad de los métodos Montessori y Decroly es el paso de lo concreto a lo abstracto.

La función formadora de las matemáticas y de las disciplinas científicas es la base de la metodología de M. Montessori y O. Decroly.

A diferencia de Montessori y Decroly, Piaget dice que la función del material es exclusivamente operativa, esto es, debe servir para el desarrollo de ciertas "leyes" que serán necesarias para la formación de algunos conceptos, como el de número; tomando en cuenta la edad del niño para elegir el material y para la explicación de dichas leyes y que corresponde al educador o maestro conocer el mecanismo de desarrollo intelectual, observar las capacidades de sus alumnos y proponer ejercicios manuales a ciertos niños, mientras que otros pueden comprenderlo sin el soporte de manipulación de objetos.

En mi opinión no creo que estas ideas estén peleadas, porque pueden servir de complemento una de otra, en caso de que el alumno no comprenda con un método o con una primera explicación.

2.1. Enseñanza de las Matemáticas

En sí mismas las matemáticas son importantes en la educación de un niño porque son una materia que le ayuda a aprender a pensar y razonar.

Sabemos que es importante enseñar matemáticas ya que una característica de las matemáticas en la actualidad es su uso prácticamente en todas las áreas del quehacer humano, desde actividades cotidianas hasta la investigación científica, la producción y prestación de servicios.

Se consideran una herramienta fundamental para el desarrollo de la Física (como ciencia), actualmente lo son también para otras disciplinas científicas y técnicas que hasta hace poco se creía que estaban completamente alejadas de ellas como Biología y Economía, (por mencionar dos ejemplos). Asimismo, la prestación de servicios a gran escala y la industria recurren día a día y cada vez más a las matemáticas.

Emma Castelnuovo menciona en su libro "Didáctica de las matemáticas" (1995), algunos puntos importantes a considerar para alguien que quiera enseñar matemáticas, los cuales son:

a) Las matemáticas se consideran aburridas y difíciles por lo que a muchos les dan miedo.

b) Las matemáticas consisten en un mecanismo y no en la posible innovación o descubrimiento en esta disciplina, por lo menos a nivel de primaria y secundaria.

Considerando estos puntos y según mi experiencia con las matemáticas puedo decir que son un hábito mental, una capacidad de abstracción.

Las matemáticas son hoy en día una de las ciencias más activas y dinámicas; ya que a partir de problemas que surgen en otras disciplinas, nuevas teorías son creadas para encontrar solución. También aparecen dentro de su seno nuevas formas de ver y atacar viejos problemas, desarrollándose así tanto las matemáticas puras como las matemáticas aplicadas. No es posible trazar una línea que separe ambos tipos de matemáticas, ya que los problemas prácticos conducen con frecuencia a teorías que parecen completamente alejadas de sus aplicaciones, mientras que las matemáticas puras modifican nuestra visión de la realidad y nos hacen descubrir nuevas aplicaciones y problemas donde antes no los veíamos.

Castelnuovo, dice en su libro "Didáctica de las matemáticas" que no basta el conocimiento de las matemáticas para saber enseñarlas. Y ¿quién es Emma Castelnuovo?

Emma Castelnuovo estudió en el Instituto Matemático de la Universidad de Roma, donde obtuvo la licenciatura en Matemáticas en el año 1936 con un trabajo sobre Geometría Algebraica. Trabajó como profesora en la Escuela Israelita de Roma. En 1944 organizó un ciclo de conferencias sobre la enseñanza de las Matemáticas. En 1950 nace la C.I.E.A.E.M. (Comisión Internacional para el Estudio y Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas) y es nombrada miembro de dicha Comisión. Con este motivo conoce y trabaja con Piaget y otros. En 1963 se publica su libro "Didáctica del la Matemática" y a partir de ese año da muchos cursos y conferencias tanto en Italia como en otros países y participa en casi todos los congresos y comisiones nacionales e internacionales sobre educación matemática. Mantiene una constante relación con la Ecole Decroly y con el matemático Paul Libois de la Universidad Libre de Bruselas, que dirigía la enseñanza de las matemáticas en dicha escuela. En 1984 colabora en libros de Matemáticas para el segundo ciclo de la enseñanza secundaria italiana (alumnos de 14 a 18 años). Actualmente continúa siendo miembro activo de la CIEAEM.

Para ella las matemáticas son una construcción de conocimientos de sus diversas ramas como son el álgebra, análisis y la geometría, las cuales no están aisladas, sino que se ayudan una a la otra y sirven como puente para pasar de una teoria a otra.

Según Castelnuovo la enseñanza de las matemáticas debe partir de lo concreto para tomar ideas generales y conducir al alumno a la abstracción. Pero ¿qué entendemos por estos dos conceptos tan importantes?

Concreto: Dícese de cualquier objeto considerado en sí mismo. Real, preciso, que expresa alguna cosa material o individual.

Abstraer: Aislar mentalmente o considerar por separado las cualidades de un objeto. Considerar un objeto por su esencia, separando lo universal de lo individual o accidental.

Nunca hay que separar estos dos procesos:

-De lo concreto a lo abstracto -De lo abstracto a lo concreto.

La maduración intelectual acelera el paso de lo concreto a lo abstracto lo cual se obtiene en la preadolescencia.

En el libro "Didáctica de las matemáticas" (1995), Castelnuovo dice que para poder lograr la abstracción de algo se tiene que pasar por cuatro periodos:

I. Coleccionismo, entre 10 y 11 años, momento sensible. Saber observar, analizar, construir, sintetizar o integrar a un conjunto, reagrupar.

II. Medir, pasando de lo cualitativo a lo cuantitativo mediante las observaciones.

III. Usar el sistema hipotético-deductivo. Así el niño tiene la concepción y la capacidad de usar los instrumentos matemáticos (material más pensamiento lógico).

IV. Encontrar la base de una clasificación. En grupos desiguales cosas iguales, la idea de concebir a la igualdad desde un punto de vista más amplio.

La mente preadolescente (11-14 años) se abre fácilmente a la abstracción. El paso de lo concreto a lo abstracto se da en este periodo, es decir, el paso de la percepción a la representación abstracta.

Para el niño medir equivale a demostrar. Basa sus resultados en "cómo se ve" de modo que su manera de demostrar es viéndolo, principalmente en un dibujo el cual ayuda a la intuición, y después midiendo. Aquí debemos tener cuidado con las ilusiones ópticas.

El factor ambiente influye mucho en el desarrollo intelectual del niño.

Sabemos que para enseñar matemáticas no nos podemos saltar las definiciones que muchas veces pueden ser complicadas. Para Pestalozzi las descripciones deben preceder a las definiciones, "si cualquier cosa es clara para mí esto no significa que yo pueda definirla sino que pueda describirla, puedo decir con precisión cómo está hecha pero no qué es".
Fuente: "Didáctica de las matemáticas", Emma Castelnuovo.

El maestro ilustra y explica antes de dar la definición, pero para Pestalozzi esto no sirve si no proviene de la actividad de los alumnos. La tarea del maestro es que el alumno se de cuenta y asimile de qué le están hablando, "Si un concepto es claro para mí, esto no significa que con palabras yo pueda hacerlo claro para ti".
Fuente: "Didáctica de las matemáticas", Emma Castelnuovo.

Para facilitar la comunicación entre el alumno y el maestro, el maestro debe partir de las ideas que tengan los niños. Él está ahí para ordenar sus ideas y llevarlos a la comprensión correcta del concepto. Lograr que el alumno asimile el concepto no es rápido, necesita varias lecciones desde diferentes perspectivas.

Debido a lo anteriormente explicado, para facilitar el aprendizaje de un niño se requiere de material didáctico o material operativo. Éste material operativo puede ser de carácter individual o colectivo. La diferencia entre el material individual y el colectivo es que el individual desarrolla las facultades sintéticas del alumno y el colectivo las facultades analíticas. Ambos requieren del trabajo individual de cada alumno para sacar sus conclusiones sin ser influenciados por palabras de otro compañero. Sin embargo, a veces ayuda escuchar las conclusiones de los demás alumnos porque pueden explicarlo al mismo nivel, en caso de que no este muy claro.

Otra ventaja del material es que no sólo revela facultades de razonamiento ligadas todavía a la manipulación del mismo, sino también desarrolla una fantasía y una amplitud mental.

Si el material es manipulable, puesto en las manos del alumno llama su atención y lo conduce a salir del campo de las matemáticas elementales. Haciendo trabajar a los niños con estas figuras móviles fijamos su atención en la transformación, no sólo sobre el objeto mismo, de tal manera que se forme un sistema operativo.

Castelnuovo en su libro (1995), antes mencionado, dice que existen tres periodos para lograr la abstracción de un concepto:

1. El concepto matemático debe tener una imagen concreta, para lo que nos sirve el material.
2. Basta una imagen gráfica.
3. La imagen queda visualizada idealmente en la mente del niño.

No hay que olvidar que la geometría, la aritmética y el álgebra se funden ayudándose una a la otra. Al estudiar ó enseñar una rama de las matemáticas no debemos perder de vista las otras, las cuales nos pueden ayudar a comprenderla mejor.

Para poder enseñar matemáticas hay que tomar en cuenta el aspecto pedagógico, psicológico y matemático principalmente. En lo que respecta a pedagogía hay que cambiar el significado de intuición como contemplación a construcción para una enseñanza activa. En el aspecto psicológico el interés del niño no debe ser atraído sobre el objeto, sino por las operaciones sobre el objeto, es decir, no fijar la atención en los entes, sino en la relación que liga a esos entes. Las estructuras mentales se desarrollan operativamente. Y con respecto a las matemáticas las operaciones sobre el ente deben sustituir a la consideración del ente en sí. La estructura de las matemáticas es esencialmente operativa.

El maestro debe ser capaz de darse cuenta que en la forma de trabajo de cada niño se pueden detectar errores e incomprensiones fuera de lo normal. Para quien enseña este trabajo es fuente de investigación al formularse preguntas como: por qué se equivoca, cómo se equivoca e incomprensiones imprevistas. No hay que olvidar que los errores ayudan a comprender el nacimiento y el desarrollo del preadolescente y tendremos motivos de estudio sobre cuestiones muy poco conocidas.

La acción "maestro-alumno" se invierte, son las intuiciones y descubrimientos del alumno los que sugieren al maestro temas de investigación y estudio. El maestro no debe cerrarse a que sólo él puede enseñar, debe considerar la posibilidad de que cada alumno le pueda enseñar algo nuevo.

Para los alumnos siempre es difícil pensar en dos cosas simultáneamente; para ello se necesita una facultad de coordinación, de síntesis y un particular tipo de memoria, las cuales se tienen aproximadamente a los 13 años.

Habrá casos en donde haya un alumno "superdotado", menciona Castelnuovo (1995). A éste alumno es bueno no separarlo del grupo y asignarle tareas especiales como la de ayudar a sus compañeros, confiándole a los más débiles o a los que han estado ausentes algunos días.

Si queremos suscitar el interés por la investigación matemática, aún en los niños, no se debe enunciar la propiedad y pasar después a la demostración porque se corta la parte más sugestiva, más significativa. Es preciso poner a los alumnos en tal actitud intelectual para hacerles nacer la idea de aquella propiedad, a lo que se le llama descubrimiento matemático. De esta forma primero se intuye la necesidad del "teorema" y después se conoce la demostración.

No puedo terminar esta sección sin mencionar a Freudenthal, un matemático alemán que tiene su teoría de la fenomenología o análisis fenomenológico.

En su libro "Fenomenología didáctica de estructuras matemáticas" (1983), dedica un apartado a la didáctica del concepto de área, sin dejar de mencionar la del volumen. Este apartado muestra la diferencia que existe entre el objeto mental (área y volumen) y el concepto matemático. Piensa que la formación del objeto mental precede a la asimilación del concepto. Entendiendo por objeto mental la intuición o las primeras ideas del sujeto en relación con un objeto.

La intuición geométrica empieza a temprana edad ya que la naturaleza presenta objetos geométricos.

Freudenthal (1983) remarca en su trabajo el hecho de que el área y el volumen están muy cerca de la realidad como objetos mentales, pero que su concepto matemático requiere de un profundo conocimiento y abstracción, por lo que piensa que deben ser presentados en la educación básica (primaria y secundaria) como objetos mentales, sin entrar en preguntas filosóficas. Dice que si se presentan únicamente las fórmulas (de área y volumen) el tema se empobrece, porque se distancian el área o el volumen que se esta enseñando con el objeto mental del cual el niño tiene más idea por su vida diaria.

Concluye su trabajo presentando algunos consejos didácticos para la instrucción:

- Realizar comparaciones entre áreas y volúmenes, para adquirirlos como objeto mental.
- Presentar actividades que hagan diferenciar el perímetro, el área y el volumen, ayudándose de casos extremos para ilustrar diferencias.
- Mostrar figuras de perímetro igual y área diferente. De áreas iguales y volúmenes diferentes.
- Mostrar figuras de perímetro diferentes y áreas iguales. De áreas diferentes y volúmenes iguales.

Dentro de las matemáticas no podemos olvidarnos de la geometría, por lo que si nos basamos en la hipótesis de que el ente geométrico se forma en la mente humana por abstracción, a partir de observaciones de objetos reales y de experiencias sobre éstos, debemos hacer de un curso racional un curso de carácter experimental.

Para Castelnuovo (1995), "en un curso de geometría no basta un dibujo porque:

a) El dibujo no sugiere los problemas debido a que ofrece un número determinado de casos y compromete así la libertad de pensamiento del niño.

b) No conduce a la observación, por lo tanto no puede llevar a la intuición de la verdad por el hecho de ser estático.

c) No puede suministrar una imagen real de una situación espacial".

Por lo que el dibujo no basta, es necesario el material operativo, el cual tiene la ventaja de ser un elemento móvil.
El dibujo no beneficia sino hasta que el niño tenga una concepción abstracta del elemento, y cada niño puede darle la representación gráfica que mejor le parezca.

En general para enseñar geometría es necesario no separar la geometría de las matemáticas en la enseñanza primaria. Hay que fomentar un trabajo geométrico de carácter cualitativo, que asegure la formación de conceptos y la imaginación espacial.

Los estudios de la geometría deben ser continuos, uniformes, esto es, sin pasar por alto ningún nivel de razonamiento; y diversificados, con lo que quiero decir que hay que familiarizar a los alumnos con la geometría bi y tridimensional.

El maestro procurará que formen estructuras geométricas, a partir de la experiencia previa de cada alumno, también diseñará actividades de enseñanza y aprendizaje en el salón, tomando en cuenta el nivel lingüístico y de razonamiento de los alumnos. Ejemplo: pico = vértice. Esto para permitir al alumno construir estructuras visuales y finalmente el razonamiento abstracto.

No hay que olvidar que el diálogo es clave de la enseñanza, respetando en un primer momento las propias expresiones y lenguaje del alumno, para introducir progresivamente el leguaje geométrico.

En muchos cursos de matemáticas la enseñanza de ciertos temas quedan localizados en unos cuantos momentos, de tal manera que el maestro no tiene más adelante la oportunidad de revisarlos y enriquecerlos, mientras que los alumnos se ven obligados a asimilar gran cantidad de información en tiempos muy reducidos.

Las investigaciones en educación matemática muestran, por el contrario, que la apropiación de las nociones y procedimientos matemáticos es un proceso gradual, que toma tiempo para completarse, y que conviene ser realistas respecto a lo que un alumno progresa de un año a otro.

Entonces es importante que la enseñanza de las matemáticas tome en cuenta la duración y las etapas por las que pasan ciertos aprendizajes y ofrezca a los alumnos la oportunidad de estar en contacto frecuente con las nociones y procedimientos básicos, en situaciones que les permitan utilizar los conocimientos vistos con anterioridad, a medida que se progrese gradualmente hacia conocimientos más avanzados.

En 1950 nace la Comisión Internacional para el Estudio y Mejoramiento de la Enseñanza de las Matemáticas, fundada por G. Choquet (matemático), J. Piaget (psicólogo) y C. Gattegno (pedagogo). Algunos temas de discusión en esta comisión eran:

-Las relaciones entre programas (nivel secundaria) y desarrollo de las capacidades intelectuales de los alumnos.
-Las estructuras matemáticas y mentales.
-El alumno frente a las matemáticas.
-Una pedagogía que libera.
-La Función de lo concreto en las matemáticas.
-Actitudes experimentales y axiomáticas en la enseñanza de las matemáticas.
-Reconstrucción de las matemáticas en la enseñanza de los 10 a18 años.

Los programas de todas las materias tienen que estar en paralelo, deben los maestros ir al parejo para que el alumno pueda entender mejor los conceptos y pueda así aplicarlos al igual que ver sus aplicaciones en otros campos.
Fuente: Didáctica de las matemáticas", Emma Castelnuovo.

Ejemplo:
Las matemáticas al parejo que la geografía para el estudio de mapas a escala.

2.2. *Enseñanza a través de problemas*

Para la apreciación de las matemáticas no basta con contemplar sus resultados, sino que hay que involucrarse con ellas, hacerse preguntas e intentar responderlas. Así, un aprendizaje significativo de las matemáticas no puede reducirse a la memorización de hechos, definiciones y teoremas; tampoco a la aplicación mecánica de ciertas técnicas y procedimientos. Por el contrario, es necesario que los alumnos aprendan a plantearse y resolver problemas en situaciones que tengan sentido para ellos y les permita generar y comunicar conjeturas.

Una de las razones por la que los alumnos experimentan dificultades para aprender matemáticas, es que con frecuencia se intenta enseñarles procedimientos que sirven para resolver problemas que todavía no conocen o comprenden y, por lo tanto, es poco probable que les interesen. Los problemas no deben aparecer como aplicaciones de procedimientos previamente aprendidos, es conveniente que estén presentes en todas las fases del aprendizaje, como el contexto natural donde los conocimientos adquieren sentido y se comprende su utilidad, se introducen nuevas nociones y procedimientos y se aprende a distinguir lo esencial de lo menos importante.

Un problema es algo más que una ocasión para ejercitar los procedimientos aprendidos, o que una situación interesante, pero sin relación precisa con los propósitos de la enseñanza. Un problema debe dar a los alumnos la oportunidad de explorar las relaciones entre nociones conocidas y utilizarlas para descubrir o asimilar nuevos conocimientos, los cuales a su vez servirán como infraestructura para resolver nuevos problemas y problemas más complejos. Ésta es, esencialmente, la naturaleza de la actividad matemática.

Los alumnos deberán involucrarse activamente en todas las fases por las que pasa la solución de un problema, desde el planteamiento del mismo, la producción de las primeras conjeturas y su discusión, hasta la redacción de la solución.

Bueno con esto puedo dar por terminado éste primer capitulo en donde el tema central es cómo y cuándo es el mejor momento para empezar a enseñar matemáticas a un niño, tomando en cuenta su desarrollo intelectual. Respecto a cómo es la mejor manera de enseñar yo creo que no es necesario tener que seguir un método, de los ya mencionados, como única forma de hacerlo. Podemos tomar un poco de cada uno de tal forma que formemos nuestro propio método, sin que el niño deje de estar activo, porque creo que la mejor manera de que aprenda un niño es cuando está en contacto directo con lo que se le está explicando y cuando él puede comprobarlo y experimentarlo.

3. *Historia del concepto de Volumen*

En este capítulo se verá un poco de historia en relación con el concepto de volumen. Esto para darnos cuenta que, desde la antigüedad, es un concepto difícil de entender y, sin embargo, es algo necesario para la vida cotidiana y muy utilizado por todos nosotros sin darnos cuenta.

Un Poco de Historia

Existen dos maneras de rastrear el concepto de volumen a través de la historia:

1. Historia del cálculo
2. Desarrollo de la geometría

Es difícil separarlos y en ocasiones estos dos caminos se entrelazan. El cálculo se desarrolló en el siglo XVII d.C. y los problemas en el campo de la geometría aparecieron dieciocho siglos antes de nuestra era.

Desde la antigüedad los hombres tenían problemas para medir el volumen pero paralelamente tenían la necesidad de medirlo. Se las ingeniaban con recipientes hechos por ellos mismos.

Se tienen registros en tablas babilónicas en las cuales está escrito la preocupación de encontrar el volumen de sólidos geométricos sencillos.

Tenían sus propias medidas de capacidades:
10 sila = 1 ban (donde cada sila es de .82 de litro)
6 ban = 1 nigida = 49.2 lts.
5 nigidas = 1 gur = 246 lts.

En los papiros egipcios se encontró la fórmula para obtener el volumen de una pirámide truncada y el cálculo del volumen de cilindros como el producto del área de base por la altura, como una solución a un problema real: Obtener la capacidad de un contenedor de granos. Sin embargo, el volumen de la pirámide es calculado sin ningún contexto.
Fuente: "Superficie y volumen ¿algo mas que trabajo con fórmulas?", Del Olmo, Moreno y Gil.

También, en Egipto, se han encontrado papiros donde se ve la preocupación de problemas provocados por la necesidad de almacenamiento (granos principalmente):

-Cantidad de granos contenida en receptáculos de diferentes formas.
-Superficies de terrenos de formas variadas.

Tenían además sus propias unidades de medida para las capacidades:
32 ro (.015 lt.) = 1 hin (.489 lt.)
10 hennu (plural de hin) = 1 hekat (4.89 lt)
20 hekat = 1 khan (97.8 lt.)

Los Egipcios calculaban el volumen del cilindro de dos maneras:

a) Con una fórmula que permite obtener el resultado directamente en unidades de granos. Consiste en un conteo de unidades de la misma naturaleza de aquello que se pretende medir. (Unidimensional).

b) Usando la fórmula del área de la base por la altura y hacían al final la transformación de unidades obtenidas a capacidades. Estos cálculos involucran comparaciones entre unidades de distinta naturaleza a la que se está midiendo, como longitudes (alturas) y áreas (base). Bidimensional.

Se conoce que los chinos tenían conocimiento del cálculo de áreas; sus fórmulas para calcular el área del triángulo, rectángulo y del trapecio son correctas, pero la del círculo no tenía una clara relación entre el arco, área y radio. Conocían bien la fórmula para encontrar el volumen de una pirámide truncada y la de una pirámide cuadrada la cual habían demostrado. Ellos tenían unidades de volumen:

ch'ih cúbico = ch'ih

mon = 240 ch'ih

Dentro del gran conocimiento matemático de los griegos también conocían formas de calcular los volúmenes y tenían sus propios métodos. Demostraron que el volumen del cono es igual a un tercio del volumen del cilindro de la misma base y la misma altura.

En 409-356 a.C. Eudoxo tenía su método, llamado de exhaución, para calcular el volumen mediante cálculos de áreas y volúmenes. Esto consistía en descomponer las figuras o cuerpos en regiones o partes más sencillas o ya conocidos. Se encontraron resultados importantes como: que el volumen de una esfera es cuatro veces el del cono que tiene como base un gran círculo de la esfera y altura igual al radio, obtenido por Arquímedes (250 a.C.).

Arquímedes desarrolla "El Método", con el cual calculaba volúmenes de cuerpos utilizando otros dos cuerpos B y C, de los cuales se conoce el volumen y también se conoce el centro de gravedad de uno de esos cuerpos (B), es decir, calculaba volúmenes desconocidos en términos de los volúmenes de otros cuerpos ya conocidos.

Las unidades de capacidades que manejaban los griegos son de dos tipos:

Para medir líquidos:

6 kyathoi (.045 lt. c/u) = 1 kotyle (.27 lt.)

2 kotylai = 1 xestes (.54 lt.)

6 xestai = 1 khous (3.24 lt.)

12 khoes = 1 metreles (38.88lt.)

Para medir áridos (o granos):

6 kyathoi = 1 kotyle (.27 lt.)

4 kotylai 0 1 khoinix (1.08 lt.)

8 khoinikes 0 1 hekteus (8.64 lt.)

6 hekteis = 1 medimnos (51.84 lt.)

Los Romanos también tenían unidades para medir líquidos y para medir áridos:

Para líquidos:

4 cochlearia (cucharada llena) = 1 cyathus (.0455 lt.)

3 cyathi = 1 quartiarius (.137 lt.)

2 quartani = 1 hermina (.273 lt.)

2 heminae = 1 sextaruis (.546 lt.)

6 sextarii = 1 congius (3.275 lt.)

8 congii = 1 amphora (26.2 lt.)

20 amphorae = 1 culleus (524 lt.)

Para áridos (o granos):

4 cochlearia = 1 cyathus

3 cyathi = 1 quartaruis

3 quartarii = 1 hemina

2 heminae = 1 sextarius

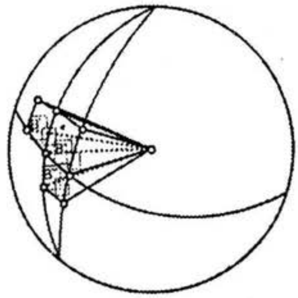
16 sextarii = 1 modius (8.736 lt.)

No podemos pasar por alto que en la construcción de las teorías matemáticas en la Grecia Antigua, muy temprano se específico una clase de problemas para la solución de los cuales, era necesario investigar los pasos al límite, los procesos infinitos, la continuidad, etc.

Algunos científicos de la época buscaban la salida a estas dificultades en la aplicación de la matemática y de las ideas filosóficas atomicistas. Igualmente florecieron teorías totalmente contrarias a esta concepción. Tengamos en cuenta, por ejemplo, las paradojas de Zenón. Otro de los métodos más antiguos de este género es el método de exhaución, que como ya vimos es aplicable al cálculo de áreas de figuras, volúmenes de cuerpos, longitud de curvas y búsqueda de subtangentes. Con el método se demuestra la unicidad del límite, pero no se soluciona el problema sobre la existencia de límite; aún así se considera la primera forma del método de límites.

Los métodos infinitesimales en la Antigua Grecia, sirvieron de punto de partida para muchas investigaciones de los matemáticos de los siglos XVI y XVII. Particularmente se estudiaban los métodos de Arquímedes, en especial aquellos referidos al cálculo de volúmenes.

Al popularizarse los escritos de Arquímedes, gracias a la edición en griego con una traducción al latín alrededor de 1544, inspiraron a autores de la época como Kepler y Galileo a realizar estudios sobre el cálculo del volumen de una esfera. Kepler pensó en la esfera como si estuviera compuesta por pirámides con vértices en el centro de la esfera y bases B, B', B'', B''', . . . infinitesimalmente cercanas a la superficie.



$$\begin{aligned}\text{Volumen} &= \frac{1}{3}rB' + \frac{1}{3}rB'' + \frac{1}{3}rB''' + \cdots \\ &= \frac{1}{3}r\left(B' + B'' + B''' + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{3}r \text{ (superficie del área)}\end{aligned}$$

Fig. Mariana Sáiz Roldán

Kepler se dedicó a una "Nueva geometría sólida de barriles de vino", esto es al cálculo de volúmenes de sólidos de rotación de superficies, por intereses meramente comerciales. La importancia del cálculo de volúmenes en las transacciones comerciales de todos los tiempos, es para evitar trampas entre los vendedores y los compradores, lo cual no es un asunto superfluo.

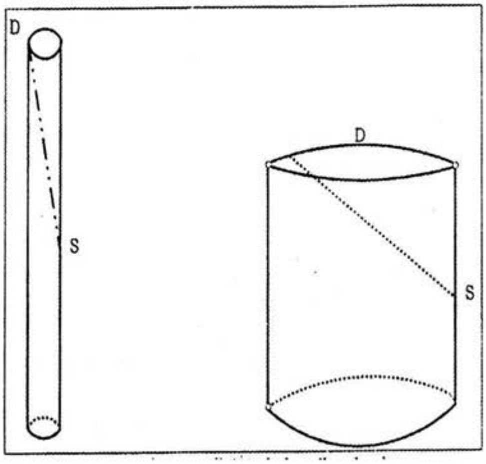


Fig. Mariana Sáiz Roldán

"La medición de barriles de vino"

En el siglo XVII los matemáticos perdieron el miedo a los infinitos que los griegos habían tenido: Kepler y Cavalieri fueron los primeros en usarlos, empezaron a andar un camino que llevaría medio siglo para llegar al descubrimiento del cálculo infinitesimal.

En 1635 Cavalieri, alumno de Galileo, publicó "Geometría indivisibilibus continuorum", considerado el primer libro sobre lo que ahora se conoce como métodos de integración. Desarrolló su propio método, llamado método de Cavalieri, el cual consiste en medir mediante comparaciones de lo que él llama los indivisibles; son los sólidos que se forman al cortar un cuerpo con planos paralelos a su base. La idea de Cavalieri era considerar todos los planos paralelos a la base que cortan el cuerpo, en consecuencia se forman sólidos infinitamente delgados.

El teorema de Cavalieri para volúmenes puede enunciarse así:
Si entre dos planos paralelos cualesquiera se encuentran dos cuerpos sólidos y si secciones paralelas a la base y a distancias iguales de ellas están siempre en una razón dada, entonces los volúmenes de los sólidos están también en la misma razón. En particular, si se tienen dos o más cuerpos con la misma altura (h) tales que al ser intersectados por cualquier plano paralelo a sus bases las figuras que determinan tales intersecciones tienen la misma área (A, A'), entonces los sólidos tienen el mismo volumen.

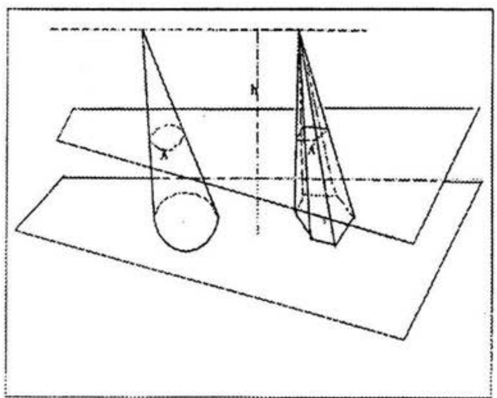


Fig. Mariana Sáiz Roldán

A mediados del siglo XVII vivieron Fermat, Roberval y Torricelli. Quienes tuvieron que ver con la teoría de los infinitésimos, precursora del cálculo. Esta teoría se concentra en cálculos para obtener áreas, volúmenes y centros de gravedad.

Los métodos infinitesimales están relacionados con el cálculo de tangentes, que junto al de áreas constituyeron la base del cálculo. En la parte central del siglo XVII, las cantidades infinitesimales, (los fantasmas de cantidades desaparecidas, como alguien las llamó en el siglo XVIII), fueron cada vez más usadas para resolver problemas de cálculos de tangentes, áreas, volúmenes, etc.; los primeros darían origen al cálculo diferencial, los otros al integral.

Saint Vincent, Pascal y Wallis siguieron los pasos de Kepler y Cavalieri; además de los infinitésimos cada vez usaban más fórmulas y menos dibujos: la geometría analítica cumplía su función de puente entre la geometría y el análisis. En efecto, la geometría analítica amplió considerablemente el horizonte de las curvas geométricas. Un ejemplo de tales fue el logaritmo. Surgidos de la necesidad de ahorrar tiempo y evitar errores en los engorrosos cálculos usados por los astrónomos. Fermat hizo trabajos sobre cuadraturas, los cuales lo hacen merecedor de un puesto de honor como precursor del cálculo.

Newton y Leibniz "inventaron" el cálculo, al darse cuenta de que el concepto de volumen está enredado con el concepto de integral. Fueron los primeros en reconocer la importancia de que obtener la cuadratura de curvas y encontrar tangentes son procesos inversos.

Relacionado con los problemas de tangentes surgió a mediados del XVII el llamado problema inverso de tangentes, es decir, deducir una curva a partir de las propiedades de sus tangentes.

El primero en plantear un problema de este tipo fue Florimond de Beaune, discípulo de Descartes, quien planteó, entre otros, el problema de encontrar la curva con subtangente constante. El propio Descartes lo intentó sin éxito siendo Leibniz el primero en resolverlo en la primera publicación de la historia sobre el cálculo infinitesimal. De hecho un elemento esencial para el descubrimiento del cálculo era el reconocimiento de que el problema de las tangentes y las cuadraturas eran problemas inversos, de hecho es por eso que la relación inversa entre la derivación y la integración es lo que hoy, llamamos Teorema fundamental del cálculo.

El cálculo se fundamenta en dos conceptos: la derivada y la integral, este último está ligado con varios problemas de obtención de superficies de áreas de regiones en superficies y volúmenes de cuerpos. El concepto de volumen siguió pegado al cálculo.

En el último cuarto del siglo XVII, Newton y Leibniz, de manera independiente, sintetizaron, de la "maraña" de métodos infinitesimales usados por sus predecesores, dos conceptos, los que hoy llamamos la derivada y la integral, desarrollaron unas reglas para manipular la derivada (reglas de derivación) y mostraron que ambos conceptos eran inversos (teorema fundamental del cálculo). Para resolver todos los problemas de cuadraturas, máximos y mínimos, tangentes, centros de gravedad, etc.

En el siglo XVIII Lagrange, Cauchy y Bolzano mostraron mucho interés en los fundamentos de esta rama de las matemáticas.

Weierstrass en el siglo XIX basa sus teorías en distancias o valores absolutos representados por épsilon y delta (como ahora) y utiliza las expresiones "tan cerca como se quiera". Durante este siglo se formalizó matemáticamente el cálculo.

En el siglo XX se desarrolla y formaliza la teoría de funciones de varias variables, así como la teoría de contenidos (Peano, Jordan) hasta llegar a lo que hoy se conoce como la teoría de la medida (Lebesgue). Sin olvidar la teoría de conjuntos (Borel, Cantor), la integral de Riemann-Stieltjes y la integral de Lebesgue.

El trabajo de Lebesgue puede considerarse como el último eslabón de la cadena que representa el desarrollo histórico del concepto matemático de volumen:

"El volumen es un ejemplo de una medida en un espacio mensurable de dimensión tres."

Desde este punto de vista el volumen pierde su identidad al grado de que es posible estudiarlo como una medida, sin distinguirlo de la longitud o área. Este estudio es de un nivel superior y de mayor abstracción que el que se maneja en este trabajo, por lo que solamente se comenta. Para alguna referencia se puede consultar alguno de los siguientes libros:

ROYDEN H.L., Real analysis, Nueva York 1968.
PHILLIPS R. Esther, An introduction to analysis and integration theory, 1971,Dover Publications.
KLINE M, Mathematical thought from ancient to modern times, Nueva York 1990, Estados Unidos, Oxford University Press.
TAYLOR S.J, Introduction to measure and integration, Cambridge 1966.
MUNROE M.E, Measure and integration, 1971, addison-wesley publishing company.

3.1. Principio de Arquímedes

Conociendo un poco de la historia acerca del concepto de volumen sabemos que Arquímedes fue uno de los primeros en interesarse en cómo medir el volumen de un cuerpo. Después de varios estudios y experimentos desarrolló "El Principio de Arquímedes" que a continuación explicaré brevemente.

Todo cuerpo que se sumerge en un fluido ó un líquido experimenta un empuje vertical ascendente. Si este empuje es mayor que el peso del cuerpo (u objeto), éste flota en la superficie. Si el empuje es igual al peso del cuerpo, el objeto permanece en donde es colocado sin hundirse ni elevarse. Si el empuje es menor al peso del cuerpo, éste se hundirá por completo.

El empuje vertical ascendente es igual al peso del fluido (gas ó liquido) desplazado por el cuerpo sumergido, lo que es igual al peso del volumen de fluido desplazado.

Este principio permite medir el volumen de un cuerpo de manera indirecta al sumergirlo en agua, el líquido lo empuja hacia arriba con fuerza cuyo valor en gramos (unidades de fuerza) representa al mismo tiempo el volumen en centímetros cúbicos que dicho cuerpo tiene.

Sabiendo que un centímetro cúbico de agua pesa un gramo aproximadamente, entonces si pesamos el agua desalojada por un cuerpo al sumergirlo, o lo que es lo mismo medimos cuanta agua se derramó al sumergir el cuerpo (convirtiendo litros a centímetros cúbicos) y la pesamos (convirtiendo centímetros cúbicos a gramos), esto corresponde al volumen del cuerpo sumergido (en centímetros cúbicos).

Al proceso de sumergir un cuerpo (u objeto) en el agua (o en algún fluido) para medir su volumen se le llama proceso o principio de inmersión. Al usar el principio de inmersión lo que en realidad estamos midiendo es el volumen del agua desplazada por el cuerpo sumergido, lo que es equivalente al volumen del cuerpo sumergido, basándonos en el principio de Arquímedes y en el principio de impenetrabilidad del cuerpo.

El principio de Arquímedes no es fácil de entender y menos para un niño, porque existe una gran confusión entre la relación que puede existir con el peso del cuerpo y el cambio en el nivel del líquido; lo que sabemos que no tiene nada que ver. (Más adelante se explicará por qué).

4. *Problemática en la enseñanza del concepto de Volumen*

Para poder enseñar lo que es el volumen tenemos que comprender muy bien el concepto y poderlo diferenciar fácilmente de otras propiedades físicas de la materia y de los cuerpos.

Matemáticamente hablando el volumen se refiere a cuerpos o espacios, los cuales pueden ser generados por superficies que giran (revolucionan) llamados de revolución, o estar delimitados por diferentes tipos de superficies. En algunos casos los volúmenes pueden ser expresados mediante fórmulas.

Para el volumen la matemática hace una primera aproximación sobre los prismas, en los que se distinguen tres dimensiones: largo, alto y ancho. Generalizando después a otros cuerpos geométricos y regiones espaciales (o espacios geométricos).

Según el profesor Gerard Vergnaud, doctorado en educación matemática y aprendizaje de las matemáticas y Director Nacional de Investigación Científica en Francia, el volumen es un concepto difícil de captar por parte de los alumnos y no es hasta que tienen 14 ó 15 años que pueden comprenderlo claramente, lo que coincide con los estudios de Piaget. Hace una división importante con respecto al volumen como una magnitud, dice que puede ser una magnitud unidimensional al medirla, compararla o aproximarla; o bien una magnitud tridimensional lo que permite medirla a través de la longitud.

Para la finalidad de este trabajo, que es lograr que el alumno forme un objeto mental correcto del concepto de volumen y el aprendizaje del mismo (a nivel primaria), basta con la siguiente definición:

Volumen es el lugar que ocupa un cuerpo en el espacio.

No podemos pasar por alto que para medir el volumen de un cuerpo, muchas veces, recurrimos a medir la capacidad de ese cuerpo, por lo que es posible que empiecen los problemas para el niño si no se tiene claro este concepto; por lo que entenderemos por capacidad de un cuerpo: lo que le cabe a un cuerpo (esto puede ser agua, objetos más pequeños, etc.).

Siempre le va a caber más volumen de agua que la suma de todos los volúmenes de los cuerpos introducidos debido al desperdicio de espacio en el interior por la forma no perfectamente acomodable de los sólidos introducidos en el contenedor. Hay que dejarle bien claro al niño que se están cometiendo estos errores.

El concepto de capacidad no es el único que puede traer problemas para entender el de volumen, pero sí el más común. Por lo que revisaremos en el anexo 2 algunos conceptos, que son propiedades físicas de la materia, que pueden causar confusiones y dificultar el aprendizaje del volumen.

Esto lo pongo en un apartado especial porque no todos los niños presentan confusión con éstos conceptos físicos y si no existe confusión no es bueno que el maestro le genere o provoque dicha confusión difícil de aclarar. En caso de que el maestro detecte que existe confusión con alguno de los conceptos físicos como: peso, masa, fuerza y densidad, en algún alumno entonces será necesario revisarlos pero no profundamente, sino tratar de darle al niño una idea para que pueda diferenciarlos aunque no sea capaz de definirlos. (Ver anexo 2).

Vergnaud afirma (1990) que el concepto de volumen esta formado por diferentes propiedades y esta relacionado con conceptos físicos como la cantidad de materia, la naturaleza de la materia y el peso. Esta complejidad explica la diversidad de conceptos expresados por los niños. Fuente: "El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto del volumen y su enseñanza", Mariana Sáiz.

A continuación voy a definir lo que es la capacidad.

Capacidad es el espacio vacío con posibilidad de ser llenado.

Capacidad y Volumen

El concepto volumen – capacidad se trata de forma conjunta. La capacidad de un recipiente es igual al volumen del objeto moldeable que llena al recipiente. Lo que le cabe y lo que puede contener un recipiente es la capacidad. (Puede contener algo que no lo llene en su totalidad, por ejemplo medio vaso de agua).

El término "capacidad" sugiere un barril o un recipiente para poner cosas en él, mientras que "volumen" sugiere una cosa que reclama espacio. Debemos entender, identificar y si es necesario distinguir entre capacidad como espacio creado (espacio vacío), y volumen como espacio reclamado (espacio ocupado); y hemos de tratar el volumen – capacidad de forma conjunta.

Mediciones y Unidades de Medida

Otro de los problemas más frecuentes en los niños con respecto al aprendizaje del volumen, es la dificultad que tienen al medirlo y el por qué de las diferentes unidades de medida.

En ocasiones es preciso medir con exactitud, en otras basta una aproximación y en otras más se requiere únicamente una comparación.

Esto es básico en la Metrología, por ejemplo, no tiene caso utilizar milésimas de centímetro en mediciones astronómicas

Es importante dejarles claro a los niños que vivimos en un mundo en el cual siempre hay errores al medir. Existe una rama de la ciencia que se llama Metrología que trata de estas cuestiones y lo que trata es de convivir con "errores aceptables" o con los menos posibles. Por ejemplo en los planos de piezas de precisión existe lo que se llama "tolerancia" es decir esta pieza mide 4.042 cm., más o menos 0.002cm. Estas 2 milésimas de centímetro son lo que se llama tolerancia. Creo que es importante familiarizar a los niños con estas cuestiones y que no se imaginen que el mundo es perfecto.

Lo mismo que para el área, en el caso del volumen debe realizarse un estudio, que permita aislarlo, compararlo; plantear la necesidad de una unidad de medida, reconocer y usar las diferentes medidas y aplicar todos estos conocimientos en situaciones problemáticas de la vida cotidiana.

La Metrología dice que medir es comparar. ¿Comparar contra qué? Contra los estándares que se encuentran en el museo de pesas y medidas en Paris que son las unidades mundialmente aceptadas. Los ingleses hicieron sus estándares como la pulgada, el pié, la libra, etc. (Sistema Inglés) pero el resto del mundo usa el sistema métrico decimal. (Kilo, Metro, Newton, etc.).

El volumen es una magnitud física susceptible de ser medida, ocasionalmente de manera directa, es decir, usando distintas unidades de volumen: centímetros cúbicos (cm^3) y capacidades en litros (L).

Al mismo tiempo el volumen puede ser obtenido indirectamente por medio de información acerca de magnitudes de otro tipo, como longitudes y áreas, lo que les da un carácter que se denomina tridimensional.

Las medidas de volumen en **centímetros cúbicos** se utilizan para medir objetos de tres dimensiones que permiten medir linealmente cada una de ellas, por ejemplo la madera que se necesita para hacer algo, tierra que hay que remover para hacer un túnel, mármol que contiene un bloque, etc. Es común utilizar medidas de volumen para medir capacidades o contenidos como el **litro**, por ejemplo cantidad de gas acumulado en un depósito, cantidad de agua en una alberca, capacidad de una jeringa

La relación que conecta a estas dos unidades de medida para el volumen es:

1 litro = 1 decímetro cúbico = 1000 centímetros cúbicos.

Carpenter (1971) en sus experimentos, relacionados con este tema, concluye: algunos niños son capaces de comprender que al medir con distintas unidades una misma cantidad de líquido, o un mismo objeto (caja), las mediciones serán diferentes, lo cual es un punto importante para comprender el significado de unidad de medida y que existe equivalencia entre ellas.

Es importante comprender, también, la equivalencia entre las distintas unidades, por eso se tienen estándares internacionales para tener un solo punto de referencia y siempre poder hacer una equivalencia entre la unidad utilizada y el estándar, por ejemplo 1 pulgada = 2.54 cm.

Las fórmulas sirven para obtener magnitudes calculadas generalmente de orden superior a partir de mediciones simples. Por ejemplo, el producto de tres longitudes genera un volumen, aunque ya en matemáticas avanzadas es la doble integral de una longitud la que genera un volumen. Como dije antes la longitud, en este caso, la obtienes de comparar la longitud que quieres medir contra el estándar internacional o contra un estándar previamente definido y entonces sí puedes decir L = 3m. Esta expresión matemática puede considerarse una fórmula para expresar que la longitud de lo que hayas medido es tres veces más larga que el metro estándar.

Confusiones y Errores al Medir el Volumen

Las confusiones empiezan con la falta de comprensión de dos conceptos básicos que se enseñan antes que el volumen, los cuales son perímetro y área. Además de la falta de comprensión de la capacidad y de la forma de los cuerpos asociadas con el concepto de volumen, entre otros. Entonces tenemos que enseñar al menos los siguientes conceptos: forma, capacidad, área y perímetro; que considero básicos para enseñar el concepto de volumen. De ser necesario, en algunos casos, se tendrá que enseñar conceptos físicos como masa, peso y densidad para lograr un mejor aprendizaje con respecto al volumen. (Ver anexo 2)

El área igual que el volumen está considerada como una función y no como un objeto, una cosa cualquiera inmutable o un ente. Creo que la confusión que nace entre el perímetro y el área se debe al hecho de que la atención del niño delante de una figura se fija en el contorno, sobre aquello que está dibujado y no en el interior.

Es más difícil darse cuenta del concepto de volumen. Piaget dice, en el libro "Didáctica de las matemáticas" de Castelnuovo, que son varias las causas, una de ellas es la confusión entre la cantidad de materia y el volumen físico con el espacio ocupado (densidad), porque la cantidad de materia es algo concreto y el volumen físico o el espacio ocupado es algo abstracto.

Castelnuovo dice en su libro que a una intuición geométrica no equivocada se llega aplicando los sentidos sobre un objeto material (sentido – objeto – material) o por un razonamiento abstracto conducido sobre el ente ideal (razonamiento abstracto – ente ideal). Este continuo alternar entre razonamientos concretos y abstractos es formativo, así se evita que el niño se entregue a la fácil fórmula que puede conducirlo a la "pereza mental", a la desconfianza en lo concreto y al valor de los sentidos propios. Por esto se le da tanta importancia a que el niño tiene que estar activo y en contacto con lo que se le está tratando de enseñar; y con esto facilitar la abstracción.

Algunas dificultades para medir el volumen pueden ser originadas por el hecho de que los alumnos son forzados a leer y visualizar información sobre objetos sólidos a partir de gráficos, sin haber manipulado previamente dichos objetos. La carencia de manipulaciones físicas de los objetos limita la visualización espacial, ya que un objeto representado gráficamente no se puede mover, rotar, doblar, invertir, etc.

De acuerdo con Vergnaud (1990) la dificultad matemática del concepto de volumen para el niño se debe a que es un concepto multiplicativo por lo que existen problemas de multiplicación y de división.

Multiplicación: Sabemos que para calcular el volumen de un cuerpo regular es equivalente multiplicar (largo X alto) X ancho, (ancho X alto) X largo y (largo X ancho) X alto. Este último consiste en calcular el área de la base y aplicar un operador de altura lo que equivale a la fórmula del volumen. Aquí Vergnaud menciona los errores más comunes al calcular el volumen de un cuerpo regular, conociendo las dimensiones lineales o el número de cubos requeridos para cubrir el largo, ancho y alto.

El primero de **tipo perímetro**: sumar las dimensiones lineales (largo, alto y ancho).

El de **tipo superficie**: calcular el área de las caras y sumarlas. Esto provoca confusión entre área y perímetro.

El de **tipo mixto**: consiste en mezclar las dos anteriores. Puede ser porque cuentan sólo los cubos visibles en el dibujo, o cuentan dos veces los mismos. También en sumar aristas con áreas. Estos son consecuencia de un mal trato a la tercera dimensión, es decir, manipular las dos primeras y sumar la tercera.

Con modelos concretos algunos prefieren deshacer la estructura y contar los cubos uno por uno y muy pocos utilizan espontáneamente la fórmula.

División: Se conocen dos dimensiones (largo y ancho, porque se supone que el concepto de área esta entendido) y se preguntan por la tercera (altura).

La reconstrucción de una cara y división junto con la reconstrucción de una cara y la aplicación de un operador multiplicativo son usados por los niños de sexto año a tercero de secundaria y consisten en la descomposición del volumen en capas, es decir, cuantos largos caben en el ancho (de la base) y cuantas bases caben en lo alto (altura del cuerpo).

Deben tratarse paralelamente estrategias multiplicativas, con ello las de tipo proporcional: producto de razones, suma de razones y considerar las razones en una sola dimensión.

Otra cosa importante, que menciona Vergnaud (1990) y que estoy totalmente de acuerdo, y que dificulta mucho el cálculo del volumen de una "caja", por mencionar un ejemplo, es el **cubo de la esquina**: "No se puede contar dos veces" o en ocasiones "No se puede contar tres veces". El problema aquí es cuando los niños ven que para calcular el volumen de la "caja" se multiplica las veces que cabe la unidad de medida en el largo, en el ancho y en el alto; con esto creen que un mismo cubo (el de la esquina) lo estamos contando dos ó tres veces, sin poder diferenciar que lo que contamos es lo que miden sus caras y no el cubo en sí.

Es aquí en donde aparece una contradicción en la concepción unidimensional del volumen, en la que no se cuenta evidentemente dos veces la misma unidad porque un volumen es una suma de pequeños volúmenes unidad. Y la concepción tridimensional del volumen, en la que el volumen es el producto de tres longitudes. (Los números que se multiplican no son longitudes sino escalares: número de veces que se puede estar ó que cabe un cubo en una columna, en una capa o bien en toda la caja).

4.1. *Algunas posibles soluciones*

Freudenthal sugiere, en el libro "Superficie y volumen ¿algo mas que trabajo con fórmulas?" de Del Olmo, Moreno y Gil (1989), la siguiente secuencia para la construcción del objeto mental con respecto al volumen:

1. Transformaciones de romper y rehacer: hacer construcciones con cubos congruentes, reorganizarlas para formar otras diferentes. Analizando, reflexionando sobre el volumen de cada una y diferenciando entre área y volumen.

2. Equivalencia entre volumen y capacidad: Tratar de meter un sólido (cuerpo maleable con una cierta forma) en una vasija, si no cabe torcerlo o moldearlo para que quepa. Comparar el volumen de una barra de plastilina y la capacidad de una cajita; intentando meterla y si no cabe moldearla hasta que quepa o partirla en pedacitos más pequeños. Comparar el nivel de agua (o fluido) al introducir un sólido en el recipiente con agua. Aquí es muy importante entender que el volumen de un cuerpo se representa por el espacio que ocupa (volumen de cuerpos sólidos) o bien por su capacidad (capacidad de recipientes abiertos).

3. Transformaciones de vaciar: (para comparar contenidos). Comparar capacidad de cajas por el número de bloques que caben en cada una. Llenar dos recipientes con liquido, vaciar en recipientes iguales (también distintos), marcando los niveles. De ser necesario podemos mencionar a los niños que el líquido si llena completamente al recipiente y los bloques no, ya que los bloques están hechos de algún material que a su vez, éste

material, ocupa espacio dentro de la caja, que no "consideramos" en el volumen total. Los bloques dejan espacio entre ellos.

4. Transformaciones que conservan el volumen: y que no lo conservan también. Modelado pero no sólo con plastilina, también con arcilla, migas de pan, etc. Comparar el volumen de un balón, según su estado (ponchado, caliente y en buen estado), ¿tiene el mismo volumen?. Mover una jarra llena de agua, ¿ocupa el mismo espacio? y ¿tiene la misma capacidad aquí y allá?. Reorganizar una construcción. Quitarle a una salchicha una rodaja. Comparar el volumen de un vaso con sustancias que se evaporan, etc.

La actividad de empaquetar, llenar, vaciar recipientes con varios materiales (distintos) es una contribución importante al concepto de volumen.

Para facilitar el cálculo del volumen de un cuerpo podemos recurrir a las siguientes actividades:

-Empaquetado o rellenado que les hace notar cuantas veces cabe la unidad de medida en el largo, cuantas en el ancho y cuantas en el alto, es decir, cuantas veces cabe la unidad de medida en el cuerpo que estamos rellenando.

-Llenado, que nos acerca a medir capacidades.

-Transformaciones de romper y rehacer, con esto podemos comparar volúmenes de diferentes figuras.

El experimento de inmersión es más adecuado para medir volumen que para adquirir el concepto. Es aquí donde es mejor para el alumno realizar este tipo de actividades y no conformarse sólo con el dibujo (ya que hay cosas que no se ven) o un relato. Y después revisar las fórmulas. Las fórmulas no son más que la expresión matemática de un fenómeno, es decir, generalmente están asociadas a algo físico.

En el siguiente capítulo se presentan varias actividades que pueden ayudar al maestro a facilitar la comprensión del concepto de volumen en sus alumnos.

5. *ACTIVIDADES PROPUESTAS*

Las siguientes actividades son de varios tipos, para facilitar el aprendizaje del concepto de volumen. Muchas de estas actividades presentan dificultades para el alumno y requieren de la asesoría del maestro. Además se pueden realizar de manera individual o en grupos, ya que ambas formas de trabajo contribuyen a la formación del alumno y no se deben descuidar ninguna de ellas.

Las actividades que se mencionan a continuación están dedicadas a los niños de quinto y sexto año de primaria; probablemente para los inicios de secundaria, ya que tienen la madurez necesaria para sacarle provecho en su totalidad. Pero casi todas están dirigidas a los maestros.

Para abordar el concepto de volumen es importante que el niño ya haya visto y comprendido el concepto de área y perímetro, sin olvidar los conceptos físicos, de ser necesario, que se mencionan en el capítulo anterior y en el anexo 2; así mismo saber la diferencia entre ellos. Es bueno proponer ejercicios en donde intervengan área y volumen, para recalcar las diferencias entre ellas. Es importante jugar con estos conceptos sin haber introducido las fórmulas. No se debe tener prisa por enseñar las fórmulas si los conceptos no están claros, ya que el niño necesita un entendimiento adecuado para lograr hacer la generalización.

Actividades (generales) para lograr la percepción del volumen

Actividades **táctiles**: tocar sólidos, interiores de algo (cajas) diferentes materiales, colores y texturas.

Actividades de **llenado**: llenar objetos ó recipientes de diferentes formas con diferentes materiales como agua, granos, harina, cosas pequeñas y cosas grandes. Cambiarlo de recipiente y predecir el nivel, ¿hasta donde se llenará?

Actividades de **empaquetado**: empaquetar cajas o recipientes de variadas formas con diferentes objetos, poniendo atención en qué y con qué se empaqueta mejor, por ejemplo:

- Una caja de zapatos, una bolsa de plástico, recipientes de forma cilíndrica (macetas), cucuruchos de helados, cajetillas de cigarros, botes de cristal, peceras, etc.
- Cubos multibase, tacos de madera, regletas, gises, canicas, etc.

Observar como una caja de zapatos se puede llenar con arena o adoquinar con tacos de madera.

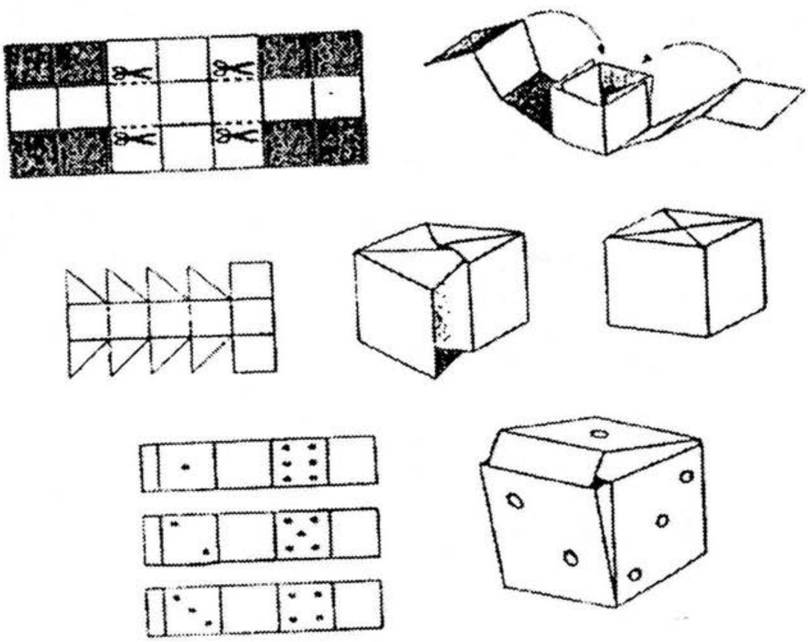
Actividades para observar el **comportamiento del volumen**: llenar sacos de diferentes formas (alargados, esféricos, etc.) con canicas y con arena. Preguntar con que material se empaqueta mejor.

Prensar o apretar ovillos de lana, migas de pan, plastilina y plantear al alumno hasta donde se puede llenar una maleta con ropa.

Actividades de **inmersión**: sumergir cuerpos de diferentes materiales en diferentes fluidos. (Densidad de líquidos). Esto es práctico para comparar volúmenes de cuerpos.

Actividades para comprender el concepto de volumen

Como el cubo se usa para varias actividades, se deben tener varios de ellos. Con el objetivo de que no falten cubos proporciono varias maneras de construirlo fácilmente con cartulina o cartón y plegado. Se puede usar pegamento para facilitar su armado.



"¿Se Parecen? (1° parte)"

(7 – 10 años)

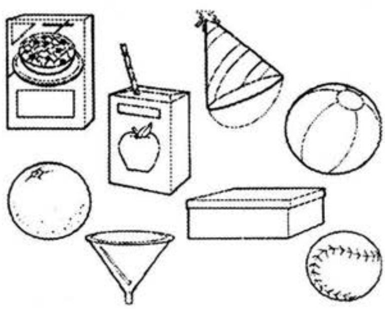
> **Material:**

- Sólidos geométricos: esfera, cono y prisma.
- Objetos reales (como los que se muestran a continuación).

> **Estrategia:**

Primero mostrarles, a los alumnos, los sólidos geométricos y presentárselos, dejando que los toquen y jueguen con ellos un rato.

Después pedirles a los niños que separen primero los objetos que tengan una forma cónica, luego los de forma esférica y finalmente los que sean como un prisma.



¿Qué objetos tienen forma cónica? ______________________________

¿Cuáles objetos son como un prisma? ___________________________

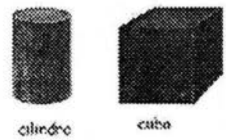
¿Qué objetos tienen forma esférica? ____________________________

"¿Se parecen? (2° Parte)"

(7-10 años)

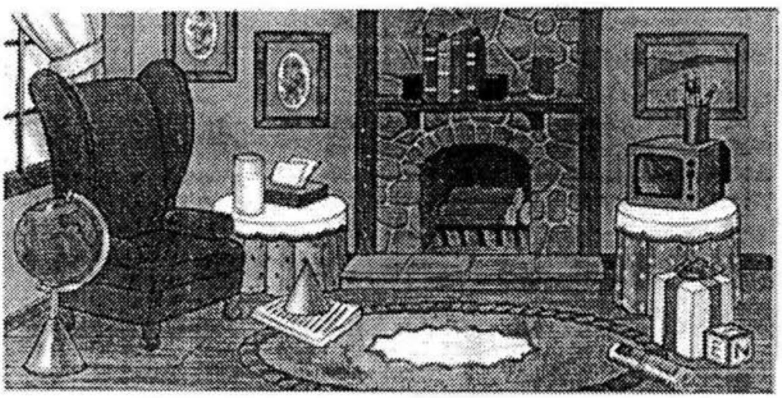
- **Material:**

- Sólidos geométricos: cilindro y cubo.
- Crayolas de colores: rojo y azul.
- Dibujos, recortes de revista u objetos reales (como los que se muestran a continuación).



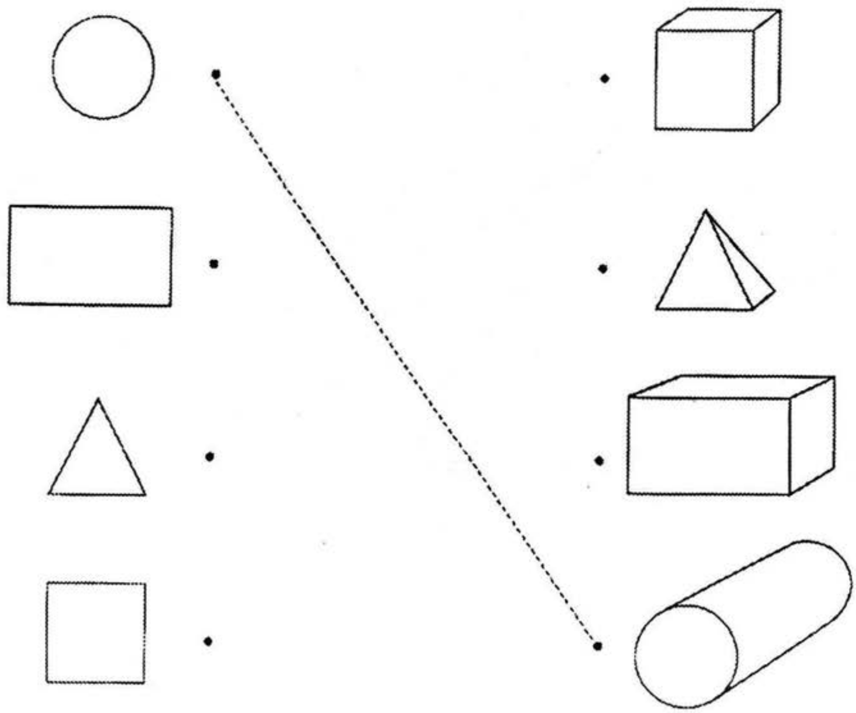
- **Estrategia:**

Primero mostrarles los sólidos geométricos y presentárselos, dejando que los toquen y jueguen con ellos un rato.
Con los objetos pedirles a los alumnos que los separen según su forma y con el dibujo o recorte pedirles que tachen con la crayola roja todos los objetos que sean cilíndricos y con la crayola azul todos los objetos de forma cúbica.



"Caras"
(7-10 años)

➢ **Material:**



➢ **Estrategia:**

Para identificar las caras de los diferentes sólidos, unir la figura plana con el sólido correspondiente.

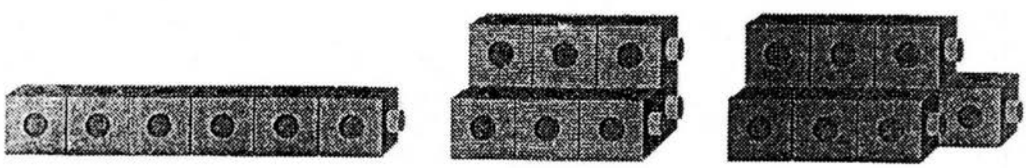
"¿Cuántos hay?"
(7-10 años)

➤ **Material:**
- 10 cubos
- Lápiz
- Papel

➤ **Estrategia:**

Primero presentarles a los niños las construcciones con cubos, sin que las toquen.
Después presentarles a los niños dibujos de las mismas construcciones con cubos y pedirles que escriban con cuantos cubos está hecha cada construcción.

Finalmente para comprobar acercarlos a las construcciones y contar cuantos cubos usaron.

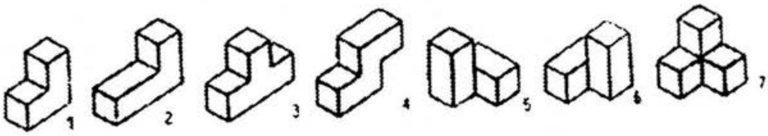


_____ _____ _____

"Observa, construye y dibuja"
(10-12 años)

➢ **Material:**
- Cuatro cubos (dados o armados)
- Lápiz y hojas de papel.

➢ **Estrategia:**
Cada alumno o cada grupo debe tener cuatro cubos.
Observar las construcciones dadas a continuación y que los alumnos contesten la siguiente pregunta.



¿Necesitamos los cuatro cubos para realizar todas las construcciones anteriores?___________

Realizar las diferentes construcciones anteriores, y contestar:

¿Necesitas más o menos cubos para realizar alguna de las siguientes construcciones?_________

¿Para cual?________

¿Cuántos cubos necesitas?_________

Comprueba:

Nótese que para la construcción de uno, solo se necesitan tres cubos.

¿Te diste cuenta con el dibujo solamente o cuando la trataste de construir? ___________

¡¡ O simplemente no lo habías notado!!

Una vez construidas, dibujarlas, desde varias perspectivas (cuatro esquinas, frontal, lateral).

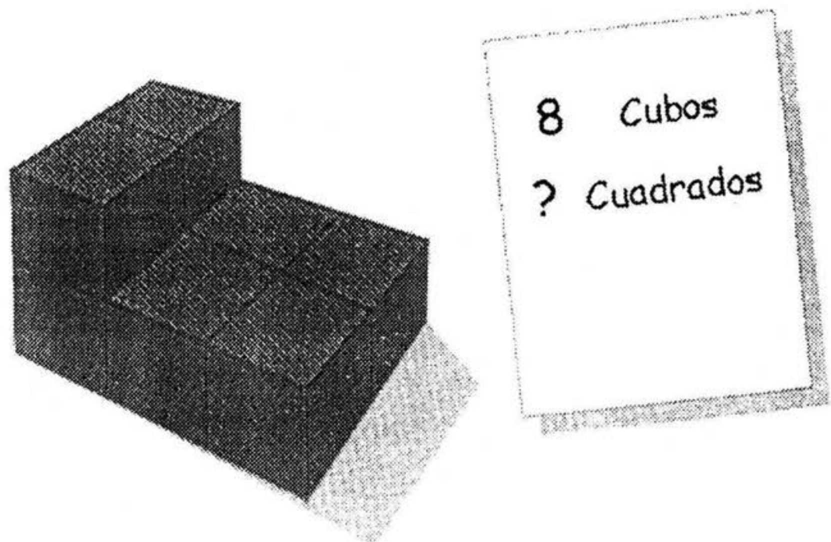
"¿Cubo = Cuadrado?"
(10-12 años)

➢ **Material:**

- Cubos, por lo menos 8 (por equipo)
- Lápices de colores: rojo, azul y verde
- Papel

➢ **Estrategia:**

Dividir al grupo en pequeños equipos. Darle a cada equipo los cubos. Un niño deberá hacer una construcción con los cubos y se la mostrará a todos. Otro anotará en una hoja de papel con color rojo cuantos cubos cree que uso su compañero para hacer la construcción (sin tocar la construcción, solo de vista). Otro anotará con color azul en el papel cuantos cuadrados ve. Finalmente entre todos contarán los cubos usados y los cuadrados que se ven para anotarlos en el papel con el color verde. Comparar los resultados.



"Conservación del volumen"
(10-12 años)

➢ **Material:**
- Dos barras de plastilina del mismo tamaño.
- Una balanza
- Dos vasos transparentes iguales (mismo volumen)
- Agua

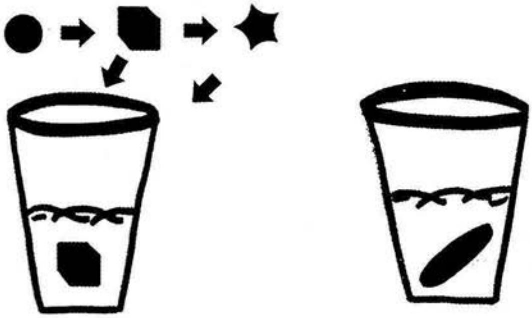
➢ **Estrategia:**
Se tienen las barras de plastilina, ambas se hacen bolita, por separado para obtener dos bolitas del mismo tamaño y peso. Se sumergen en los vasos transparentes con la misma cantidad de agua y se observa en nivel del agua. Y preguntar a los alumnos:

¿Subió hasta el mismo nivel el agua cuando sumergiste las bolitas de plastilina en los vasos con agua?_______

¿Por qué?_______________________________________

Después con una de las bolitas se hace otra figura, utilizando toda la plastilina de la bolita, se vuelven a sumergir en los vasos con la misma cantidad de agua y se observa el nivel del agua.

¿Con cuál subió más el nivel del agua? ____________
¿Pesa lo mismo la bolita que la otra figura que hiciste? ___________
¿Qué figura tiene más volumen? _________
¿Qué figura ocupa más espacio?__________



“Compara capacidades”
(10-12 años)

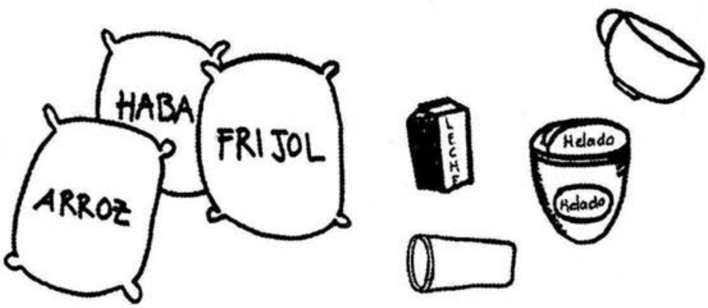
- **Material:**

- Varias botellas o recipientes de algunos productos como leche, helado, mermelada, refresco, etc. de diferentes capacidades.

- Arena o algún tipo de grano como frijoles, arroz o lentejas.

- **Estrategia:**

Pedirles a los niños que ordenen los recipientes y las botellas de mayor a menor capacidad. Respetando el orden que los alumnos hayan dado, decirles que llenen las botellas y recipientes con arena o algún tipo de grano, vaciarlas, sin revolver el arena de cada botella o recipiente y contestar las siguientes preguntas.



¿A cuál recipiente o botella le cabe más arena o granos? _______

Al vaciarlos, ¿Qué montón de arena o granos es más grande?______

Finalmente, comparar en cual botella había más arena o granos.

A la botella o recipiente de ______ le cabe más arena.

Por lo tanto ___________ tienen mayor capacidad.

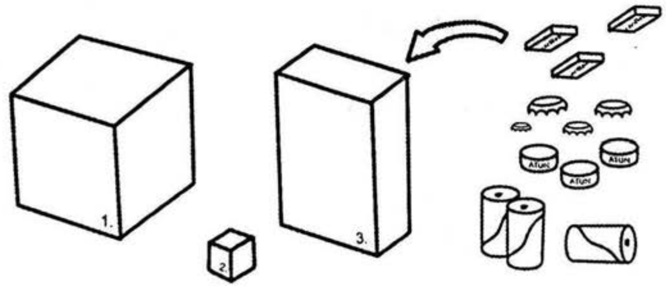
"¿A Cuál le cabe más?"
(10-12 años)

➢ **Material:**

- Muchas corcholatas, taparroscas.
- Latas de atún o refresco.
- Cajetillas de cigarros y de cerrillos (vacías).
- Cajas de varios tamaños.

➢ **Estrategia:**

Dejar que los alumnos llenen las diferentes cajas con los diferentes objetos y contestar:



¿En que caja hay más corcholatas?______

¿En que caja hay más cajas de cerillos?_______

¿En cuál caja hay más latas de atún?________

¿En cuál caja hay más latas de refresco?________

¿Qué caja es más grande?_________

¿A cuál caja le cabe más, es decir, cuál tiene mayor capacidad?________

Por lo tanto, la caja _____ tiene mayor volumen.

Por lo que podemos ver que a mayor volumen mayor capacidad.

"¿Cuántas cucharadas?"

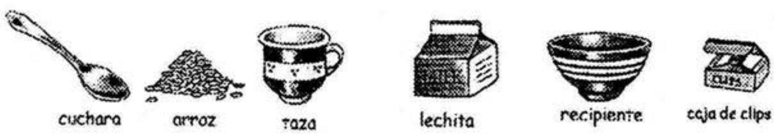
(10-12 años)

➢ **Material:**

- Una cuchara
- Arroz
- Una taza
- Envase de una lechita
- Un recipiente
- Una caja de clips

➢ **Estrategia:**

Primero decirles a los niños que adivinen o estimen con cuantas cucharadas de arroz se llena cada uno de los objetos y anotarlo en la tabla (que se muestra a continuación). Después llenar cada uno de los recipientes a cucharadas de arroz y contarlas, sin olvidar anotar el resultado en la tabla.



	Objetos	Estimación	Medida
1.		______ cucharadas	______ cucharadas
2.		______ cucharadas	______ cucharadas
3.		______ cucharadas	______ cucharadas
4.		______ cucharadas	______ cucharadas

“Llena y compara”
(10-12 años)

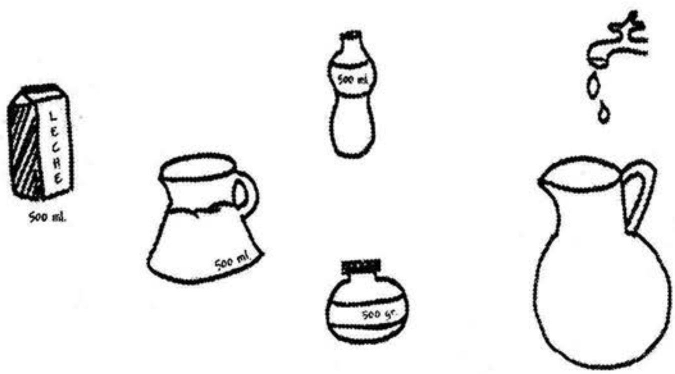
> **Material:**

- Envases de la misma capacidad pero con diferentes formas.(latas, tetrapak, botellas, etc.)
- Una jarra transparente de mayor capacidad.
- Agua.

> **Estrategia:**

Primero pedirles a los alumnos que contesten la siguiente pregunta:
¿A que envase le cabe más agua?__________

Después llenar los envases con agua. Vaciar el contenido del primer envase en la jarra y hacer una pequeña marca para saber hasta donde llega el nivel del agua. Vaciar la jarra y repetir lo anterior con cada uno de los diferentes envases. Comparar los niveles del agua marcados en la jarra (deben ser iguales).



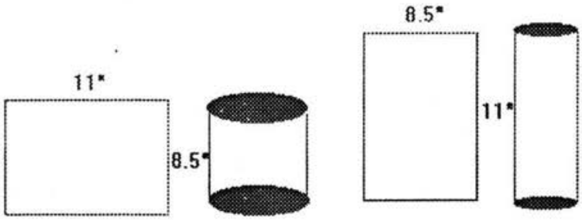
¿Por qué crees que todas las marcas en la jarra grande están al mismo nivel?__________________

Hacerles notar que la misma capacidad puede representarse de varias formas.

Por lo tanto todos los recipientes tienen la misma __________ pero diferente __________.

"Experimento con volumen"

(10 - 12 años)



El Problema: Toma dos hoja de papel, recórtalas para obtener las medidas que se muestran arriba (en centímetros). Enróllalas formando dos cilindros de diferentes bases, es decir, enróllalas en diferentes direcciones. Piensa acerca del volumen de éstos dos cilindros y haz alguna predicción al respecto.

Predicción :

- ¿Son iguales los volúmenes?
- ¿Crees que el cilindro menos alto tiene mayor volumen?
- ¿Crees que el cilindro más alto tiene mayor volumen?

¿Por qué?

Demostración: Toma las hojas de papel y forma tus cilindros, (de preferencia con cartulina, para que estén más firmes). Colócalos de tal manera que puedas llenarlos con arroz. Ahora levanta los cilindros y compara los montones de arroz.
¿Tu predicción fue correcta?

" Unidad de medida (1° parte)"

(10-12años)

➢ **Material:**

- Cubos
- Tetraedros (empaques de "triangulito" de Boing)
- Cajetillas de cigarros (vacías)
- Una caja
- Esferas (pelotas de tenis o ping-pong)

➢ **Estrategia:**

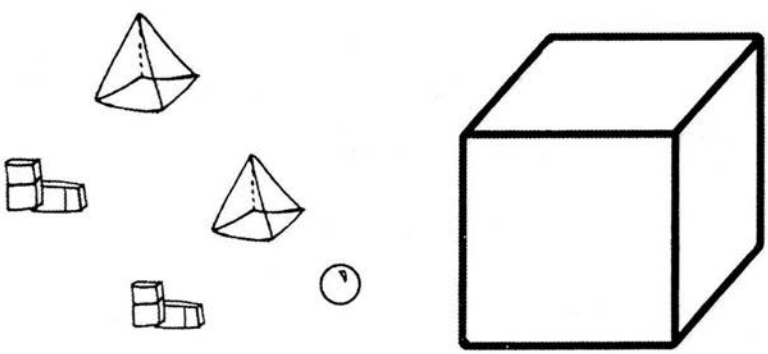
Medir el volumen de una caja con las diferentes figuras y objetos.
¿Cómo crees que lo podemos medir?________________________

Una manera de hacerlo es llenándola con los cubos y las diferentes figuras.
¿Con cuál se puede medir mejor? __________________
¿Cuál es más exacta? __________________

Discutir ¿por qué los cubos son una unidad de medida razonable para el volumen?

____

Comúnmente se usan bloques de madera como unidad de volumen para desarrollar actividades. Discutir por qué creen que se usen éstos y tratar de desarrollar actividades ya realizadas usando objetos esféricos como unidades de volumen.



"Unidad de medida (2° parte)"
(10-12 años)

➢ **Material:**
- Gises (o lápices de colores, plumones, etc.)
- Borradores
- Cuadernos
- Una caja

➢ **Estrategia:**

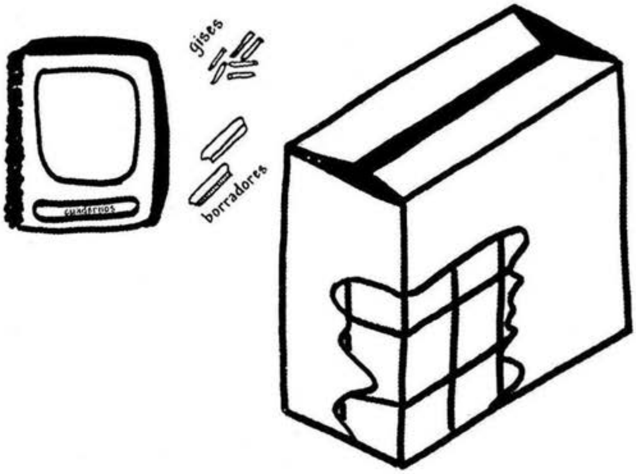
Llenar la caja primero con los gises
¿Cuántos necesitamos para llenarla? ______________

Después llenarla con los borradores
¿Cuántos necesitamos para llenarla? ______________

Y finalmente llenarla con los cuadernos
¿Cuántos necesitamos para llenarla? ______________

Luego contestar:
¿De qué unidad de medida (gises, borradores y cuadernos) necesitamos más para poder llenar la caja, es decir, para poder medir su volumen? ______________

¿Por qué? ______________________________________



“Cubos grandes y chiquitos”
(10-12 años)

➤ **Material:**

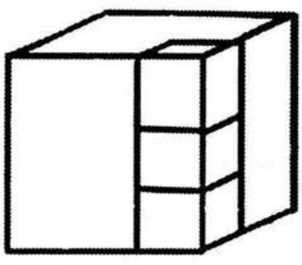
- Cubos de un centímetro cúbico.
- Cubos de nueve centímetros cúbicos.
- Una caja

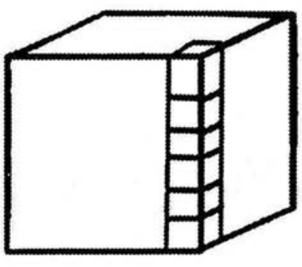
➤ **Estrategia:**

Llenar una caja con cubos de un centímetro cúbico, luego llenar la misma caja con cubos de nueve centímetros cúbicos.

¿Con cuáles cubos se lleno mejor la caja? __________

¿De cuáles necesitamos más para llenar la caja? __________





"Un metro cúbico"
(10-12 años)

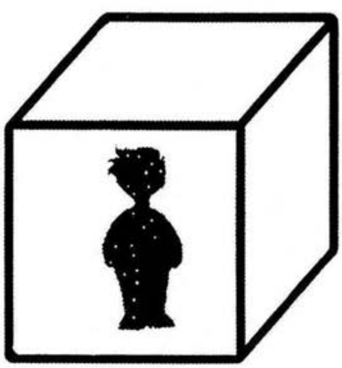
➢ **Material:**

- Seis pliegos de cartón en forma cuadrada de un metro por lado (ó una caja de un metro cúbico)
- Pegamento

➢ **Estrategia:**

Construir un cubo de un metro cúbico con el cartón y el pegamento. Dejar a los alumnos que se introduzcan en él, con esto lograremos que el niño tenga relación con un espacio en centímetros cúbicos y la noción del tamaño por adentro de la caja. Recordarles cuantos centímetros tiene un metro.

➢



“Llena y vacía”
(10-12 años)

➢ **Material:**
- Un cubo grande
- Arena o granos
- Vasitos
- Un vaso más grande

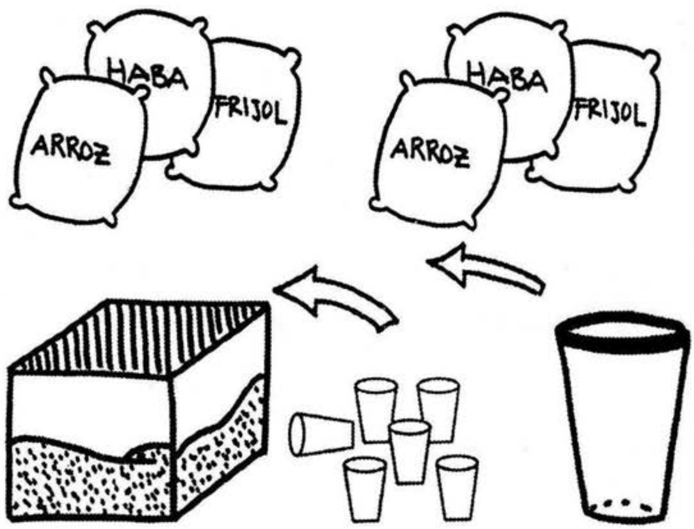
➢ **Estrategia:**

Decirles a los alumnos que llenen el cubo con arena, y preguntarles:
¿Qué estamos midiendo con esto? ______________
¿Se podrá medir su volumen con los vasitos (llenándolo con los vasos)? _____

¿Cómo podemos comparar el volumen del cubo con el del vaso grande? ____

¿Cuál crees que tiene mayor volumen el vaso o el cubo? _________

Después tomar el vaso grande y llenarlo de arena.
Volcar en el cubo vacío el arena del vaso.
Con esto podemos comparar sus __________
¿Cuántos vasitos caben en el vaso grande? _________
¿Cuántos vasitos caben en el cubo?__________
Por lo tanto el cubo tiene __________ volumen que el vaso.



"Escoge tu unidad de medida"
(10-12 años)

➢ **Material:**

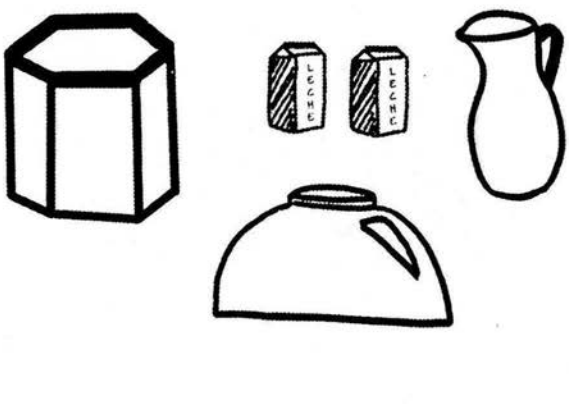
- Recipientes de diferentes formas (un cubo de plástico, un tetrabrik, uno cilíndrico, uno en forma de estrella, etc.)
- Arena o granos o tierra.

➢ **Estrategia:**

Se reparten los recipientes llenos de arena. Se les pide que los ordenen de mayor a menor volumen. Para comprobar que el orden sea el correcto necesitarán escoger uno de los recipientes como unidad de medida. Una vez que han escogido la unidad de medida medir el volumen de los diferentes recipientes con los granos o el arena, simplemente llenándolos de arena y ver cuántas veces podemos llenar nuestra unidad de medida con esa arena, o bien cuántas veces necesitamos llenar nuestra unidad de medida para llenar los demás recipientes.

¿Qué recipiente es tu unidad de medida? ____________
¿En todos tus recipientes cabe la unidad de medida que escogiste? ______
¿Cuántas veces cabe tu unidad de medida en el recipiente más grande? _____
¿Cuántas veces cabe tu unidad de medida en el recipiente más chico? ______

Cambia de recipiente para la unidad de medida y repite la actividad, contestando las mismas preguntas al final.



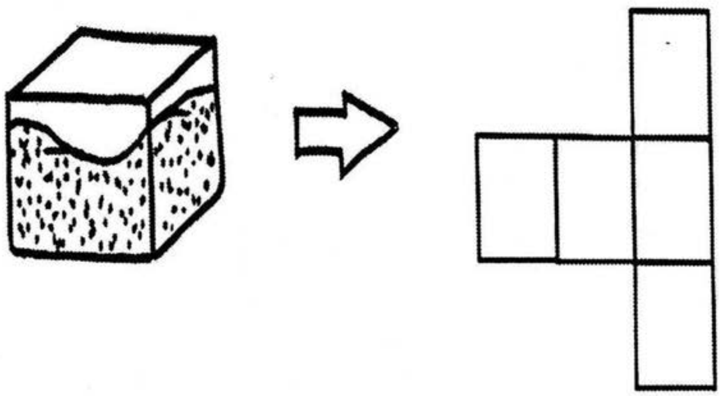
"Volumen y área"
(10-13 años)

➢ **Material:**
- Dos cajas iguales
- Pintura roja y azul.
- Pinceles o brochas.
- Arena, granos o tierra.

➢ **Estrategia:**
Pintar una caja (A) por dentro de color rojo y la otra por fuera de color azul (B). Llenarla con arena y hacerles ver que corresponde al volumen. Después desarmar ambas cajas y observar que la caja A tiene un lado rojo y la caja B tiene un lado azul. El lado rojo corresponde al área superficial de la caja A.

¿Es igual lo que esta de rojo en la caja A que lo que esta de azul en la caja B?________

¿El lado azul de la caja B será también el área superficial de la caja B?, acuérdate que las cajas son iguales __________



“Hay que ir al súper”

(10-12 años)

- En un viaje al súper fíjate en los costos de un mismo producto en relación con sus capacidades. Por ejemplo en los precios de algún refresco en sus diferentes presentaciones.

¿Cuál es más caro? ____________

¿Cuál es más barato? ___________

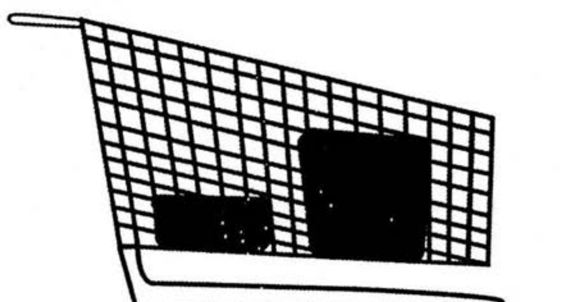
¿Por qué crees? ____

¿Qué presentación tiene más refresco?________________________

¿Qué presentación ocupa más espacio en el carrito? ____________________

¿Y en tu refrigerador qué presentación es más fácil de guardar?______________

¿Por qué crees?____



“Comparando Volúmenes”

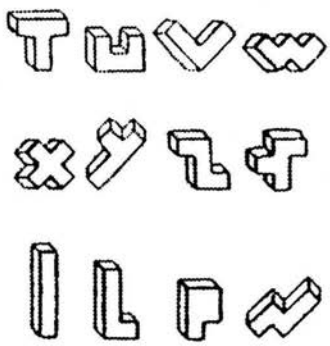
(11-13 años)

➢ **Material:**

- Varios cubos, por lo menos 27.
- Dibujos de construcciones con cubos en un papel.
- Pegamento

➢ **Estrategia:**

Teniendo un dibujo de alguna construcción con cubos (como las siguientes), determinar cuantos cubos se necesitan para construirla. Al alumno se le dan los cubos que pida, los que según él son necesarios para hacerla y que finalmente la construya.



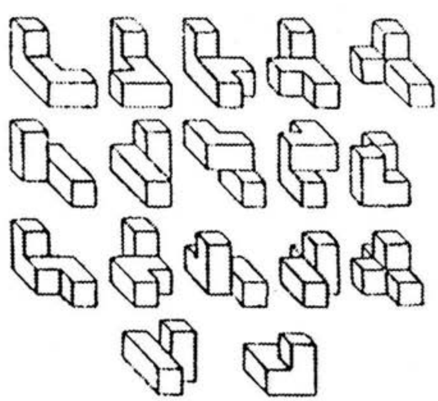
¿Cuántos cubos ocupaste para realizar las construcciones anteriores?______

¿Cuál de las construcciones anteriores tiene más volumen?______

¿Tienen todas el mismo número de cubos?______

Por lo tanto ¿Tienen todas el mismo volumen?______

Podemos repetir estas actividades variando el número de cubos.
Por ejemplo: construir las siguientes figuras con cinco cubos.



"Pintando azúcar"
(11-13 años)

- **Material:**

- Dibujos de construcciones rectangulares o cubos de diferentes tamaños.
- Cubos de azúcar o terrones de azúcar (prismas rectangulares, tabiques, etc.).
- Colorante artificial

- **Estrategia:**

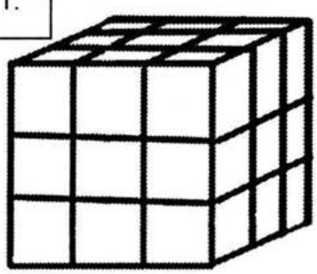
Consiste en proporcionar a los alumnos los dibujos, pueden ser como los que a continuación se muestran. Los alumnos tienen que construirlos con los cubos de azúcar. Después deben contar los cubos de azúcar que utilizaron para la construcción del dibujo, esto es el volumen.

¿Cuántos cubos ocupaste para la construcción uno? _______

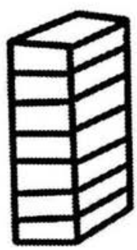
¿Cuántos terrones ocupaste para la construcción dos? _______

¿Cuántos terrones ocupaste para la construcción tres? _______

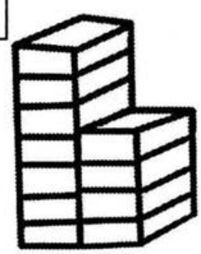
1.



2.



3.



Luego pintar con colorante artificial la construcción hecha (las caras de los cubos que se ven), esto es el área superficial de la construcción.

Nótese que no están pintados todas las caras de todos los cubitos de azúcar.

Finalmente que los alumnos completen la siguiente tabla:

	¿Cuántos cubos tienen **todas sus caras** pintadas?	¿Cuántos tienen pintada solamente **una cara**?	¿Cuántos tienen pintado **dos caras?**	¿Cuántos no tienen **ninguna cara** pintada?
Construcción 1.				
Construcción 2.				
Construcción 3.				

"Cubos escondidos"
(11-13 años)

➢ **Material:**

- Fotografías o dibujos de sólidos construidos con cubos.
- Cubos

➢ **Estrategia:**

Dar a los alumnos las fotografías o dibujos de sólidos.

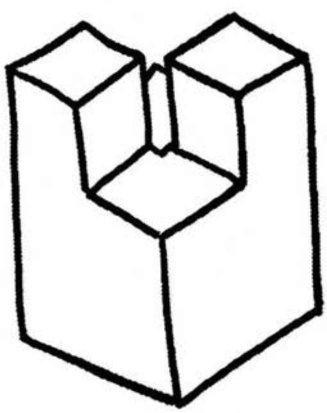
Tratar de representarlos y discutir sobre el o los cubos "escondidos".

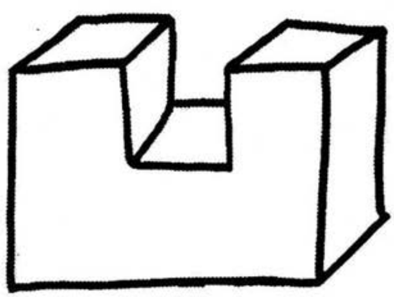
¿Cuántos son en la construcción uno? __________

¿Cuántos son en la construcción dos? __________

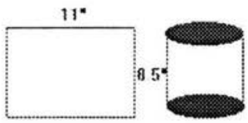
¿Por qué no se ven en la foto? __________

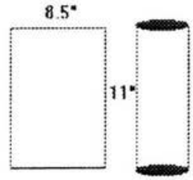
¿Dónde están? __________





"Experimento con volumen (2° Parte)"
(12 -14 años)





El Cálculo:

Calcula ambos volúmenes. (Necesitarás las fórmulas)

Volumen del cilindro = $\Pi r^2 h$

Volumen del más alto =

Volumen del menos alto =

El Problema:

Considera el perímetro de los dos rectángulos (39 cm.). Piensa en todos los cilindros formados por rectángulos que tengan 39 cm. de perímetro. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo que genera el cilindro de mayor volumen?

Explorando:

Tienes que recortar varios rectángulos de diferentes largos y anchos con el perímetro correcto, y enróllalos para formar los diferentes cilindros. Es divertido que predigas o trates de adivinar cuál será el cilindro de mayor volumen.

Volumen del cilindro = Πr^2

Método Tabulador

Completa la siguiente tabla

Altura del rectángulo	Ancho del rectángulo	Radio del cilindro	Volumen del cilindro
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

¿Dónde esta el mayor volumen? Trata de medir cada radio de los cilindros obtenidos. ¿Cómo es el radio del cilindro de mayor volumen?

"¿Qué ocupa más espacio?"

(11-14 años)

➢ **Material:**

- 100 gramos de algodón.
- 100gramos de chocolate.
- Una caja de zapatos.
- Plastilina
- Dos cajas de cerillos (una llena y una vacía).
- Una balanza o báscula.

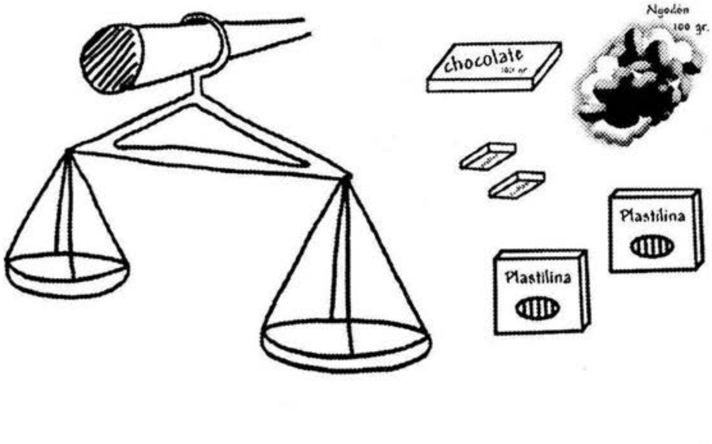
➢ **Estrategia:**

Comparar los objetos de peso igual pero volumen diferente, esto es pesar en la balanza (o báscula) el algodón y el chocolate. Guardar el algodón en la caja y observar el espacio que ocupa y el espacio que queda libre en la caja de zapatos, sacar el algodón de la caja y repetir lo mismo con el chocolate. Luego preguntar a los alumnos:

¿Ocupan el mismo espacio en la caja?________
¿Cuál deja más espacio libre en la caja? __________
¿Cuál ocupa más espacio en la caja?__________

También comparar dos objetos de igual volumen pero peso distinto, para esto vamos a usar las cajas de cerillos, una caja de cerillos (llena) y una caja de cerillos llena de plastilina (o vacía). De igual manera primero las pesamos, luego las metemos en la caja de zapatos y por último que contesten:

¿Ocupan el mismo espacio en la caja?________
¿Cuál deja más espacio libre en la caja? __________
¿Cuál ocupa más espacio en la caja?__________



“Algodón seco y algodón mojado”
(11-14 años)

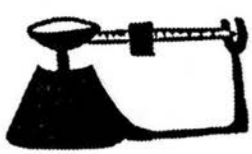
➢ **Material:**
- Dos vasos iguales (mismo volumen)
- Una balanza
- Algodón
- Plastilina
- Agua

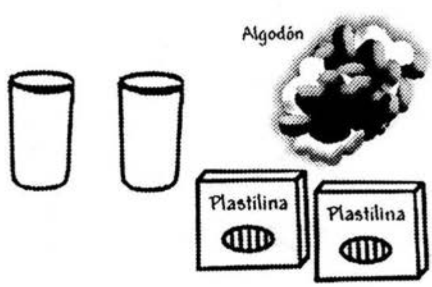
➢ **Estrategia:**

Llenar los vasos al mismo nivel, uno con algodón seco y el otro con algodón mojado.
¿Tienen la misma cantidad de algodón?_______
¿Algún vaso tiene algodón más denso, “apretado”?______
¿Cuál?_______
Pesar los vasos y comparar los pesos.
Peso del vaso con algodón seco: __________
Peso del vaso con algodón mojado: ________
¿Cuál pesa más?________

Después llenar uno con plastilina y el otro dejarlo con algodón seco y comparar los pesos.
Peso del vaso con algodón: _________
Peso del vaso con plastilina: ________
¿Cuál pesa más? ________
¿Cuál de los vasos tiene mayor cantidad de material (plastilina o algodón)?_________

¿Qué material es más denso, “está más apretado”?___________





“¿Hasta dónde subirá el agua?”
(11-14 años)

➢ **Material:**

- Dos recipientes cilíndricos
- Recipientes con tapa que quepan dentro del cilíndrico, dos del mismo tamaño (botecitos de rollo de fotos para cámara) y uno más grande.
- Agua
- Plastilina
- Una balanza

➢ **Estrategia:**

Se tienen los dos cilindros con la misma cantidad de agua y se preparan los pequeños recipientes para que cumplan con las siguientes características: **peso igual y volumen igual (1)**, para esto tenemos los botecitos de rollo de fotos para cámara llenos de plastilina hasta el mismo nivel. Luego los sumergimos en los recipientes cilíndricos con agua y predecir hasta dónde subirá el agua.

Después llenamos el otro recipiente (el más grande) con plastilina hasta que pese lo mismo, para eso necesitamos la balanza, así lograremos tener cuerpos con **peso igual y volumen distinto (2)**, con estos hay que realizar lo mismo, sumergirlos en los recipientes cilíndricos y marcar hasta donde subió el nivel del agua.

Ahora lo que queremos son cuerpos de **peso diferente y volumen igual (3)**, es decir a los botecitos de rollo de fotos uno lo dejamos lleno de plastilina y al otro le sacamos plastilina hasta la mitad del botecito, de tal manera que tengan pesos diferentes, repetimos la actividad.

Por último sumergiremos dos recipientes de **peso diferente y volumen diferente (4),** para lograr esto necesitamos un botecito de rollo de fotos y el más grande uno lleno de plastilina y el otro hasta la mitad o menos, logrando que pese menos. ¿Con cuál subió más el nivel del agua? ¿Importa el peso del envase para que suba más el nivel del agua? ¿Sube más el nivel del agua con el pesado o con el más grande (mayor volumen)?

Llena la siguiente tabla:

	Nivel del agua ¿Cuál subió más?		¿POR QUÉ?
1.peso igual volumen distinto	Foto 1	Foto 2	
2.peso igual volumen igual	Foto (1 ó 2)	Más grande	
3. peso distinto volumen igual	Foto 1	Foto 2	
4. peso distinto volumen distinto	Foto (1 ó 2)	Más grande	

"Un litro = ______ centímetros cúbicos"

(11-14 años)

➢ **Material:**

- Un recipiente en forma cuadrada o rectangular de cierta capacidad: 1000 centímetros cúbicos, esto es de 10 x 10 x 10 ó 10 x 5 x 20 centímetros cúbicos.
- Una jarra de un litro, marcada en mililitros (si es posible).
- Agua (o arena).

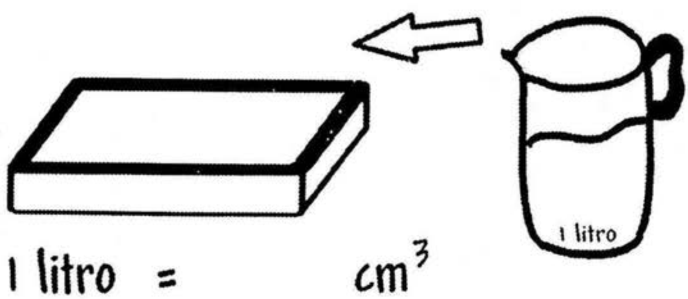
➢ **Estrategia:**

Para poder ver la relación entre centímetros cúbicos y mililitros necesitan conseguir todo el material. La actividad consiste en hacer que los alumnos midan el volumen de los recipientes, ya sea el rectangular o cuadrado, (ellos no deben conocer las medidas de éstos), aquí lo importante es no decirles como medirlo porque esto traerá una interesante discusión. Obviamente el resultado deberá ser en centímetros cúbicos. Habrá que recordarles cuantos centímetros cúbicos tiene un litro y cuantos mililitros tiene un litro. Después hacerles ver que la jarra es de un litro y finalmente, para comprobar que esté bien su cálculo del volumen del recipiente, llenar la jarra de agua y vaciarla en el recipiente.

¿Cómo mediste el volumen del recipiente? ______________________________

____

¿Cuál es el volumen del recipiente? ____cm^3.



"Para medir el volumen"
(12 - 14 años)

- **Objetivo:**

El alumno será capaz de estimar el volumen de un contenedor usando proporciones.

- **Material:**

Dos jarras trasparentes y limpias (vidrio o plástico), o bien contenedores de diferente tamaño.
Suficiente arena para llenar el contenedor.
Una taza medidora (de cocina) marcada en mililitros.
Velas y cerillos.
Cronómetros.

- **Estrategia:**

¿Qué esperas de la relación entre el quemado de oxígeno en la jarra y el volumen contenido en ella? Es una relación lineal por lo que puede ser predecible.

Los alumnos deberán tomar el tiempo que la vela está encendida cuando la jarra está encima de ella. Luego medir el volumen de la jarra usando arena y la taza medidora, para encontrar cuánta arena está en la jarra en términos del sistema métrico.

Los estudiantes deberán tomar el tiempo que la vela permanece encendida con un contenedor más largo. Conociendo los datos anteriores (el volumen de la jarra, el tiempo que permanece prendida la vela cuando tiene la jarra encima y el tiempo que está la vela encendida con la nueva jarra ó contenedor encima) el alumno deberá ser capaz de predecir el volumen de la segunda jarra o contenedor. La predicción debe ser desarrollada mediante proporciones. La razón de la proporcione es: el volumen es al tiempo como el segundo tiempo es al segundo volumen. La proporción la podemos ver como:

volumen en ml (1 jarra)/tiempo de extinción de la vela = volumen desconocido (2 jarra)/tiempo de extinción de la segunda vela.

Resolviendo las proporciones los alumnos podrán conocer el volumen del segundo contenedor o jarra. Para verificar la predicción, que puede tener errores los estudiantes deberán medir el volumen de la segunda jarra usando el arena. Así podrán darse cuenta de que tan cerca está la predicción del "verdadero" volumen.

Errores:
No hay que perder de vista que en este ejercicio puede haber grandes errores, al tomar el tiempo, por ejemplo. Además las velas no se queman igual, una flama larga consume más oxígeno. Errores al usar la taza medidora. La jarra necesita tiempo para volverse a llenar de oxígeno (4-5 segundos). Por lo que el resultado experimental puede variar con respecto al teórico.

Anexo 1

En este apartado encontrarán las fórmulas para calcular el volumen de las principales figuras. Además una pequeña deducción de éstas. Para lograr la formalidad de estas deducciones son necesarias algunas definiciones que también están contenidas en este apartado.

Las fórmulas las proporciono al final de éste trabajo porque como mencioné antes es más importante lograr que el niño tenga primero una buena noción de lo que es el volumen, para que finalmente pueda comprender con mayor facilidad las fórmulas. De esta manera lograr que el niño desarrolle, por lo menos un poco, su poder de deducción.

Al final de éste apartado encontrarán una sección de diferentes figuras para armar, de preferencia dejar a los niños que las armen solos, pero hay que estar presentes por si el niño necesita ayuda, ya que es necesario recortar y en ocasiones el armado de la figura no es muy fácil. Con estas figuras podemos cambiar fácilmente la "figura unidad", que generalmente es el cubo, para hacer alguna de las actividades ya mencionadas y así comparar y comprender el por qué del cubo como unidad de medida.

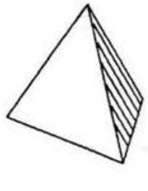
Podemos generar en el niño una visión espacial de las diferentes figuras que pueden existir, viéndolas planas en el papel y preguntarle como cree que podrían quedar armadas.

Voy a presentar las fórmulas para calcular el volumen de las principales figuras, pero primero algunas definiciones necesarias.

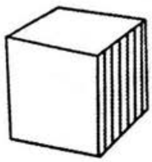
Empezaremos por definir que es un poliedro:
Un poliedro es un sólido limitado por planos. (Nótese que no se define como una superficie o un "cascarón").
Los planos que limitan al sólido se llaman caras.
La intersección de las caras, son rectas y se llaman aristas.
La intersección de las aristas, son puntos y se llaman vértices del poliedro.

Si todas las caras del poliedro son polígonos regulares y todos sus ángulos diedros son iguales, decimos que es un poliedro regular. (Ángulo diedro es el ángulo formado por las caras. Cada vértice del poliedro es un vértice del ángulo diedro).

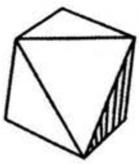
Existen solamente cinco poliedros regulares:



TETRAEDRO: 4 caras triangulares
4 vértices
6 aristas

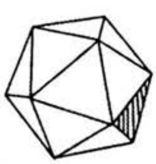


CUBO O HEXAEDRO: 6 caras cuadradas
8 vértices
12 aristas



OCTAEDRO: 8 caras triangulares
6 vértices
12 aristas

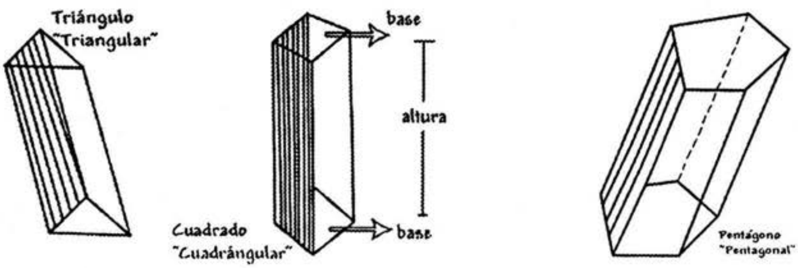
DODECAEDRO: 12 caras pentagonales
20 vértices
30 aristas



ICOSAEDRO: 20 caras triangulares
12 vértices
30 aristas

Seguimos con los prismas. Un prisma es un poliedro tal que está limitado por dos polígonos iguales y paralelos y unidos por paralelogramos dos a dos sus lados correspondientes.
Los polígonos iguales se llaman bases.

Los paralelogramos que unen las bases son las caras laterales. A las intersecciones de las caras laterales se les llaman aristas laterales.
La altura de un prisma es la distancia perpendicular entre las bases.
Los polígonos bases determinan la nomenclatura, por ejemplo:



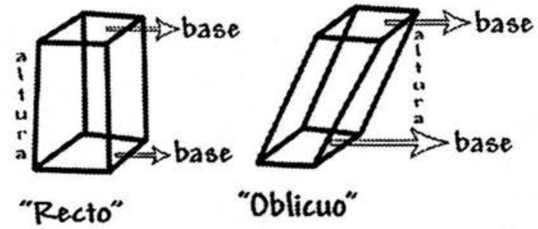
Los prismas pueden ser rectos u oblicuos, si sus caras laterales son o no perpendiculares a sus bases. También pueden ser regulares o irregulares dependiendo del polígono base si es o no regular.

Continuemos por definir que es un paralelepípedo. Un paralelepípedo es un prisma cuyas bases son paralelogramos. (Paralelogramos son cuadriláteros cuyos lados son paralelos dos a dos).

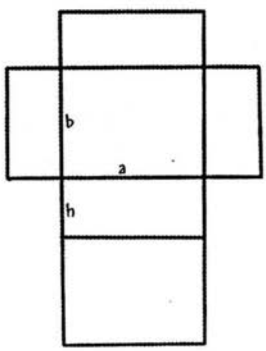
El paralelepípedo tiene 6 caras, 8 vértices, 12 aristas.
Todas las caras son paralelogramos iguales y paralelos dos a dos.
Las aristas son iguales (de igual longitud) y paralelas cuatro a cuatro.

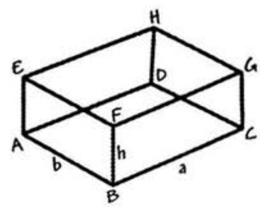
La altura de un paralelepípedo es la distancia perpendicular entre las dos bases.

Los paralelepípedos pueden ser rectos u oblicuos, según sus aristas laterales sean perpendiculares a las bases o no.



Un paralelepípedo rectangular es elemental dentro de la geometría de los sólidos, porque todas sus caras son rectángulos y todos sus ángulos diedros son rectos (90 °).

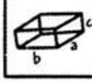




El volumen de un paralelepípedo es el producto **abh**. Nótese que el producto **ab** es equivalente al área del rectángulo base, por lo que de aquí tenemos que el volumen de un peralelepípedo es igual al producto del área de la base por su altura. Es decir, cuantas veces cabe en la altura la base, para así poder "llenar" el paralelepípedo.

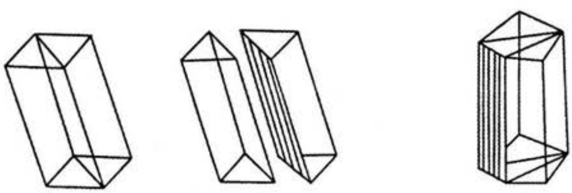
Con lo anterior tenemos que:

	**Cubo** $V = 1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1$

	Ortoedro $V = a \cdot b \cdot c$

Para el volumen de un prisma, cuadrangular en este caso, si pasamos un plano diagonalmente dividiendo el paralelepípedo en dos prismas triangulares equivalentes. La base del prisma es dividida en dos triángulos de base igual y de área igual, y las alturas de los prismas triangulares son iguales. De aquí seguimos que el volumen de un prisma triangular es igual a el área de la base a todo lo largo de la altura del prisma, esto es, el área de la base por la altura del prisma.

Sabemos que cualquier prisma puede ser dividido en prismas triangulares, porque sus bases son polígonos. Además los prismas triangulares resultantes tienen la misma altura que el prisma original, por lo tanto el volumen de cualquier prisma es igual al área de la base por su altura.



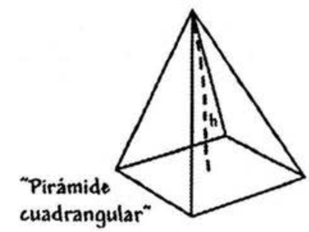
	**Prisma** $V = A_b \cdot h$

Ahora una pirámide es un sólido que tiene por base un polígono cualquiera, siendo sus caras triángulos que se juntan en un solo punto, llamado vértice y forman un ángulo diedro.

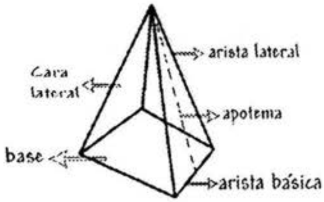
Los triángulos son sus caras laterales, el vértice es común de las caras laterales y es el vértice de la pirámide.

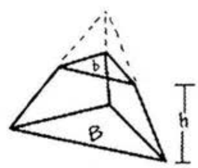
La altura de la pirámide es la distancia del vértice a la base, de manera perpendicular.

Dependiendo del polígono base la pirámide puede ser cuadrangular, pentagonal triangular, etc.



Si la base es un polígono regular y las caras laterales son triángulos isósceles, la pirámide se llama regular. En tales casos la proyección del vértice coincide con el centro del polígono (base) y se dice que la pirámide es recta. Cuando no se da ésta coincidencia se dice que la pirámide es oblicua. En las pirámides regulares se denomina apotema a la altura de

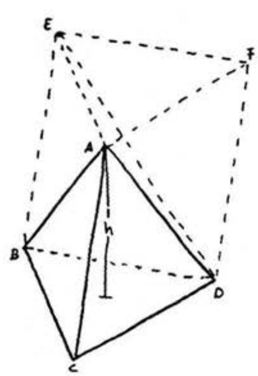


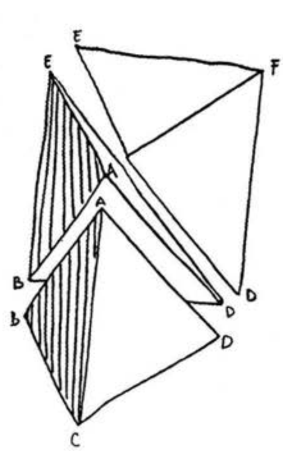


sus caras laterales.

Se llama pirámide truncada o tronco de pirámide a la porción de la pirámide comprendida entre su base y la sección practicada por un plano que corta todas las aristas laterales. Se denominan de bases paralelas cuando la base y la sección son paralelas. La altura de una pirámide truncada es la distancia perpendicular entre la base y la sección.

El volumen de una pirámide triangular es un tercio del producto del área de la base por su altura. Si tenemos una pirámide triangular A-BCD con altura h y base BCD, entonces el volumen de A-BCD es igual a h/3 veces





el área de BCD.

Construyamos el prisma BCD-E con sus aristas laterales iguales y paralelas a AC. Trazamos DE. Entonces el prisma BCD-E esta formado por tres pirámides triangulares: A-BCD, A-DEF, A-EBD. Por lo tanto

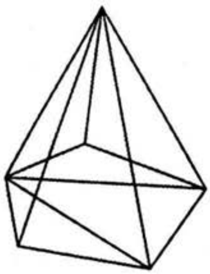
A-BCD = D-AEF = A-DEF y A-DEF = A-EBD

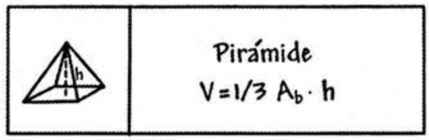
De aquí que cada pirámide es un tercio del prisma triangulas. Pero el volumen del prisma es igual al producto del área de la base por su altura.

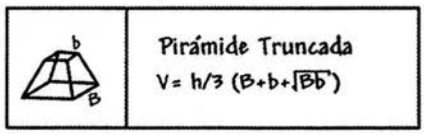
De acuerdo con esto el volumen de una pirámide es triangular es:

V= h/3 (área BCD) = 1/3 (área de la base (A_b)) (altura (h)).

Sabemos que cualquier pirámide se puede dividir en pirámides triangulares, por lo que es inmediato que el volumen de cualquier pirámide es un tercio del producto del área de la base por su altura.

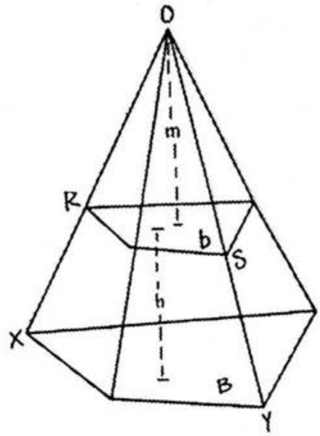






Si la pirámide es truncada su volumen es diferente, como podemos ver, esto porque si nos fijamos en la pirámide truncada XS y la completamos formando la pirámide O-XY con altura H=m+h de tal manera que h sea la altura de la pirámide truncada XS y m la altura restante de la pirámide O-RS.

El volumen de la pirámide truncada XS es la diferencia entre la pirámide O-XY y la O-RS. Entonces:



$V = 1/3\ (B\,(h+m)) - 1/3\ (b\,(m))$,

pero $b/B = m^2\ /\ (h+m)^2 \Longrightarrow \qquad (b/B)^{1/2} = m\ /(h+m)$

de donde $m = h\, b^{1/2}\ /\ B^{1/2} - b^{1/2}$

Sustituyendo el valor de m en la fórmula del volumen, tenemos:

$V = 1/3\ bh\ \{1 + (b^{1/2}\ /\ (B^{1/2} - b^{1/2}))\} - 1/3\ bh\ (b^{1/2}\ /\ (B^{1/2} - b^{1/2}))$

$V = h/3\ \{(B\,B^{1/2} - b\,b^{1/2})\ /\ (B^{1/2} - b^{1/2})\}$

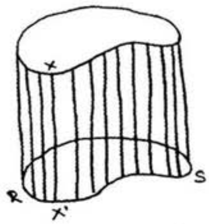
El numerador lo podemos escribir como una diferencia de cubos:

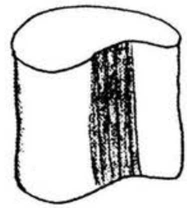
$(B^{3/2} - b^{3/2}) = (B^{1/2} - b^{1/2})\ (B^{2/2} + (Bb)^{1/2} + b^{2/2})$

y tenemos que el volumen de una pirámide truncada es:

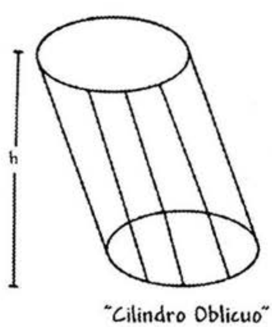
$V = h/3\ (B + (Bb)^{1/2} + b) = h/3\ (B + b + (Bb)^{1/2})$

Seguiremos con las superficies cilíndricas que son lugares geométricos generados por el movimiento de una línea o segmento XX' (generatriz), que se desplaza paralelamente a una dirección fija y apoyándose en una curva plana dada RS (directriz), cuyo plano corta a la dirección dada.

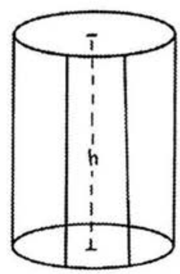




Un cilindro es un sólido formado por una superficie cilíndrica de directriz cerrada y dos planos que la cortan, que constituyen sus bases.
La distancia perpendicular entre los planos paralelos es la altura.
Un cilindro es recto cuando sus bases son perpendiculares a los elementos paralelos. Los cilindros se clasifican de acuerdo a la forma de su base: elíptico, circular, etc.
La línea que va del centro de una base al centro de la otra en un cilindro se llama eje.

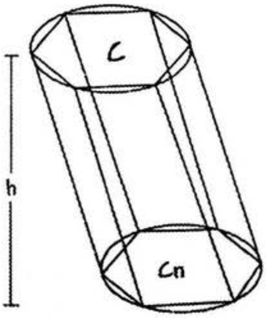


"Cilindro Oblicuo"



"Cilindro Recto"

El volumen de un cilindro circular es igual al producto del área de la base por la altura.

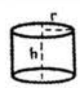


Si inscribimos en el cilindro circular C un prisma Cn, el cual tiene como base un polígono de n lados. La altura del prisma Cn es h, igual a la del cilindro circular. Sabemos que el volumen de un prisma es: V' = Bn h, donde Bn es el área del polígono base.

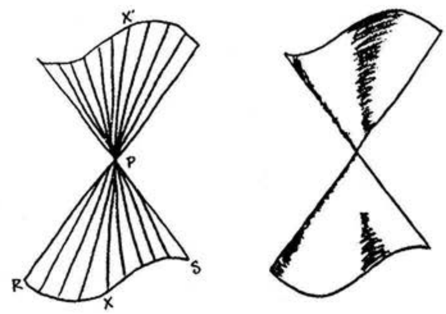
Si incrementamos el número de lados del polígono base, indefinidamente; la base Bn se aproxima a B como un límite y el volumen del prisma Cn inscrito se aproxima, cada vez más, al volumen del cilindro circular. Por lo tanto:

$$V = \lim_{n\to\infty} V' = \lim_{n\to\infty} Bn\ h = B\ h$$

De aquí que como la base tiende a ser un círculo, el volumen del cilindro circular sea: $V = \Pi\, r^2h$. Nótese que el área del círculo es $\Pi\, r^2$, en donde r es el radio del círculo base.

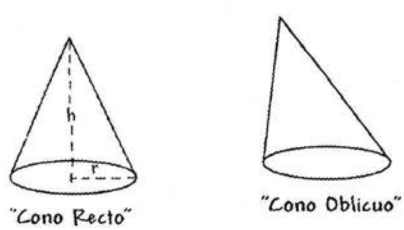
	Cilindro $V = \pi r^2 h$

Por último tenemos a las superficies cónicas que son lugares geométricos generados por una línea o segmento XX' (generatriz), la cual se mueve en dirección de una curva plana RS (directriz) y pasa por un punto P fijo (vértice) que no esta en el plano de RS.

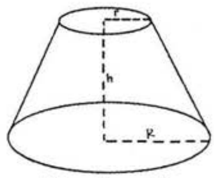


El sólido incluido dentro de la superficie cónica entre el vértice y el plano se llama cono. Los conos se forman cuando la directriz es una curva cerrada. La parte del plano incluida dentro del cono es la base del cono y la altura es la distancia perpendicular entre la base y el vértice.

El cono circular es aquel que tiene un círculo como base. El eje del cono circular es la línea que une el centro de la base con el vértice, si el eje es perpendicular a la base es cono es recto.



Si atravesamos al cono con un plano paralelo a la base, la parte del cono entre la base y ese plano es un cono truncado.



"Cono Truncado"

Los conos circulares guardan la misma relación con las pirámides que el cilindro circular con los prismas. Esto es, que un cono circular se puede considerar como un límite aproximado de la pirámide cuya base es un polígono regular inscrito de n lados, y n se va incrementando indefinidamente; por lo que el volumen de un cono circular es el producto del área de su base por la altura entre tres.

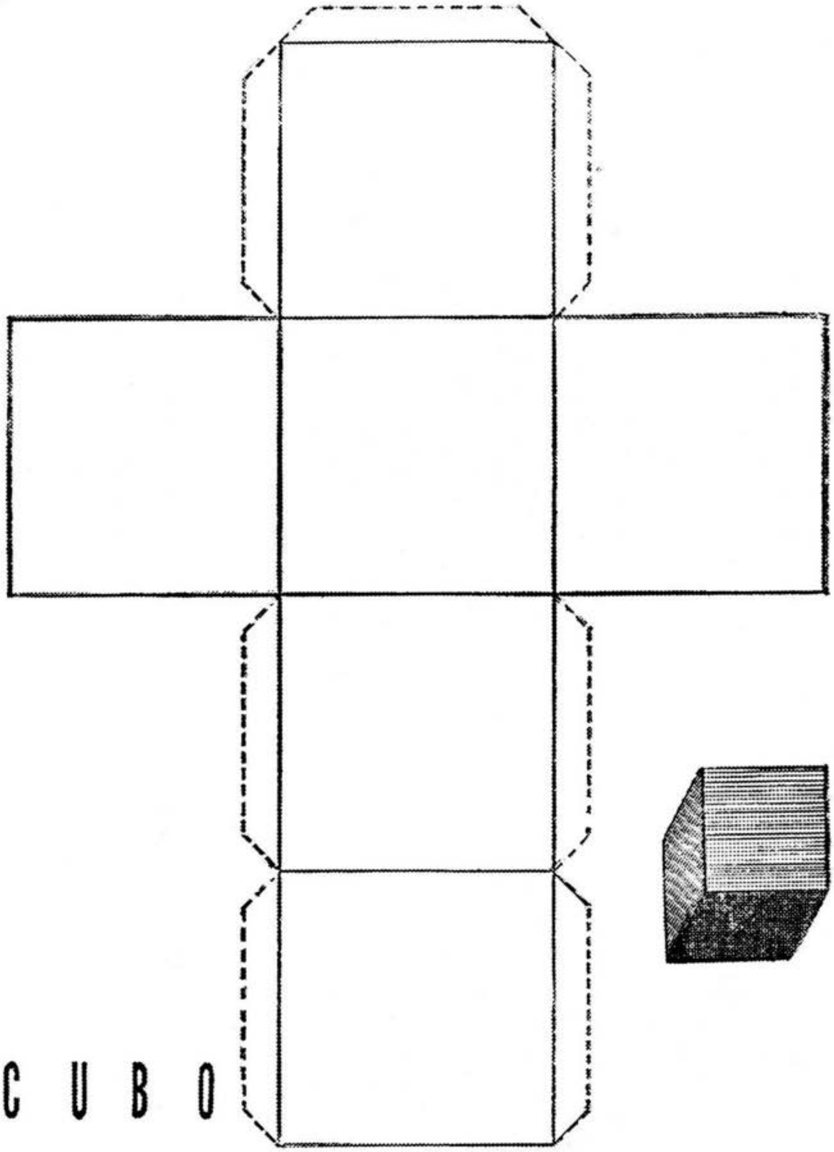
	Cono $V = 1/3 \pi r^2 \cdot h$

	Cono Truncado $V = 1/3\ (R^2 + r^2 + Rr)$

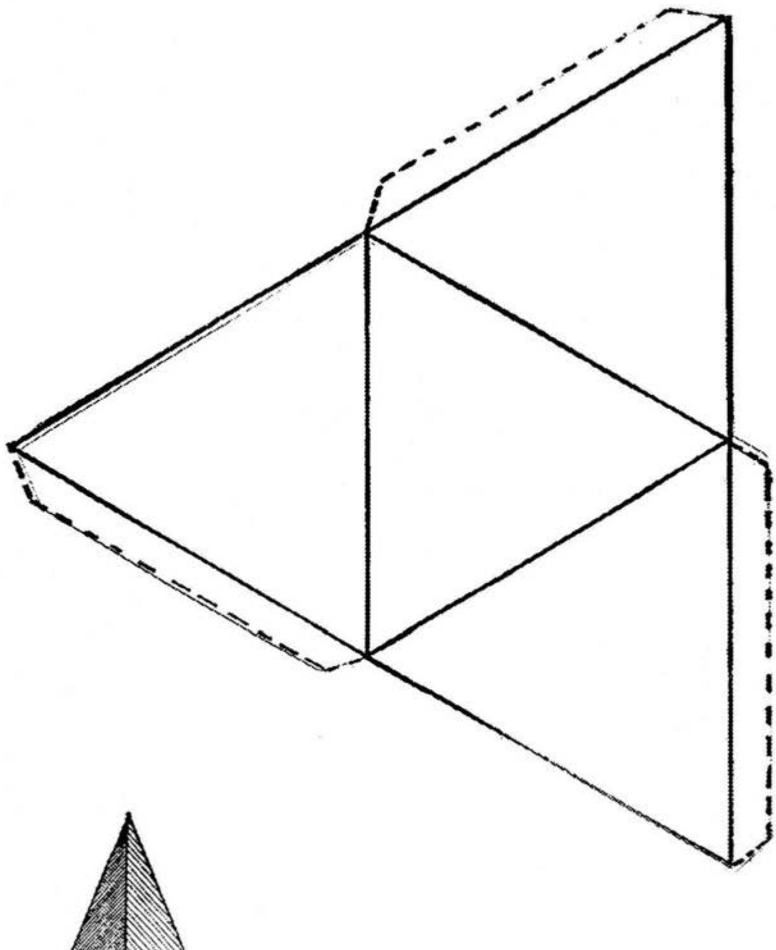
Recorta

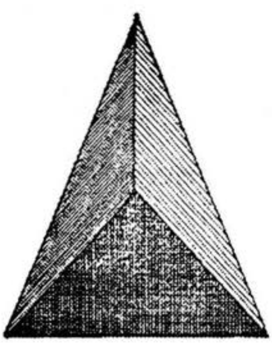
Y

Arma

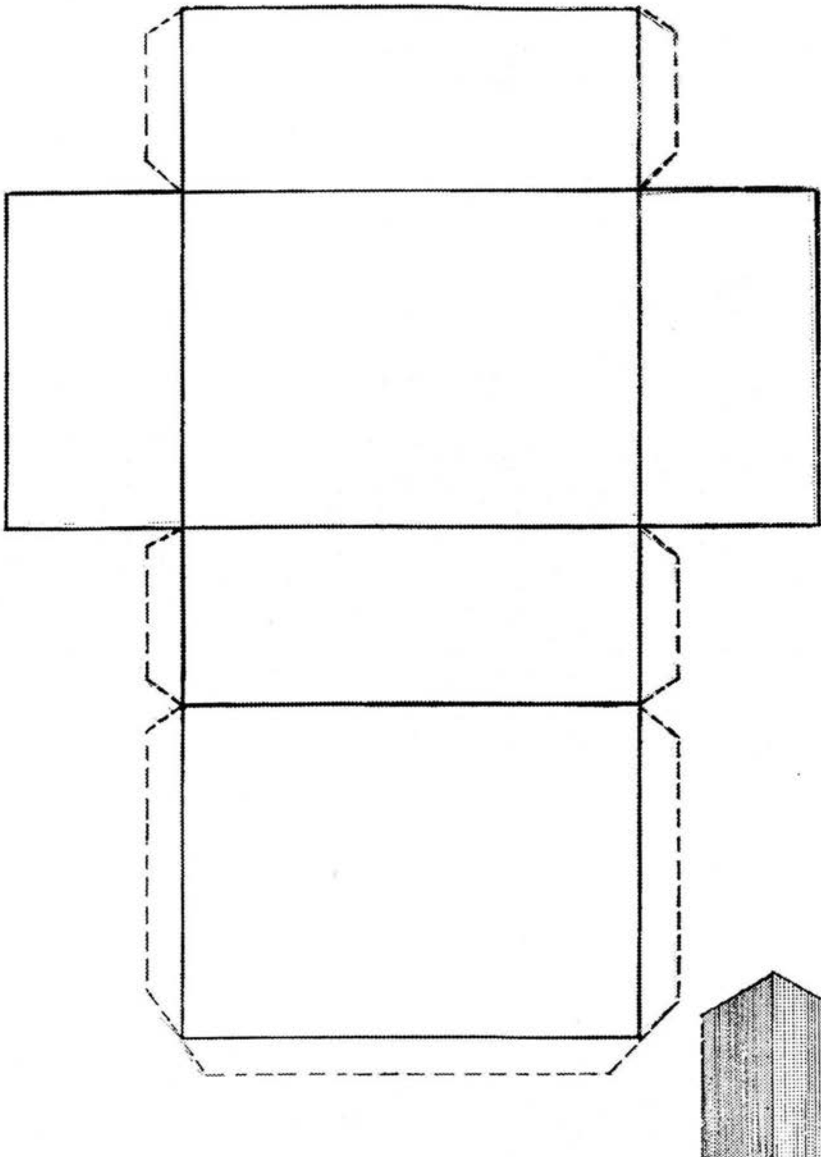


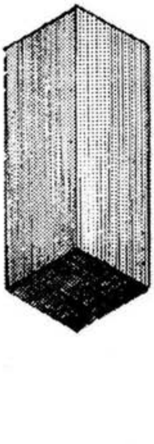
C U B O



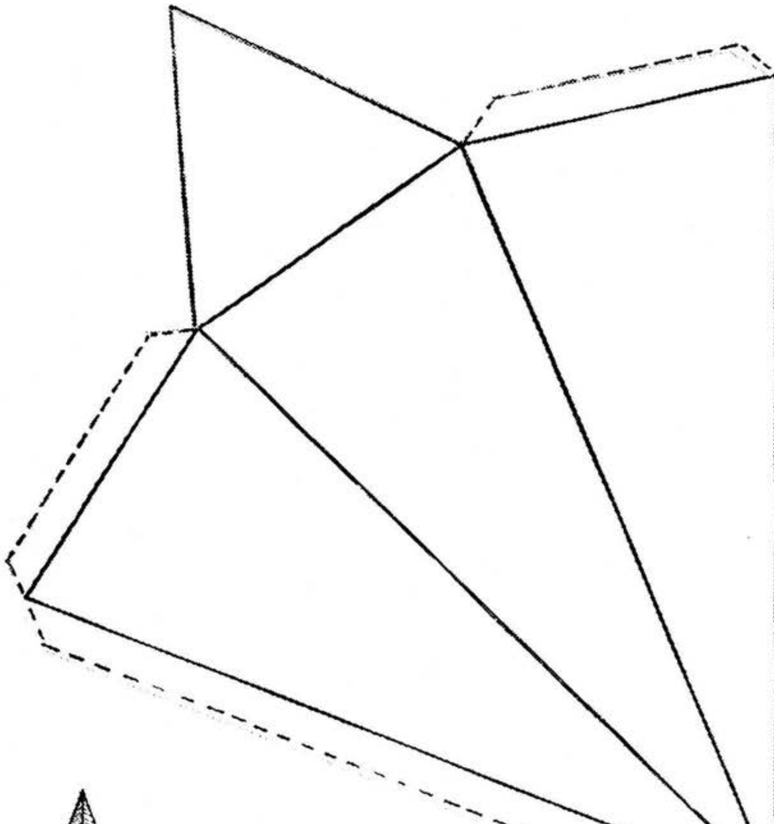


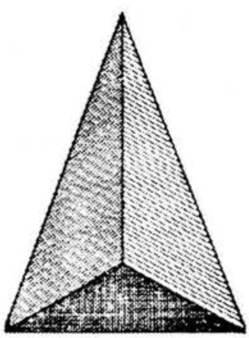
TETRAEDRO



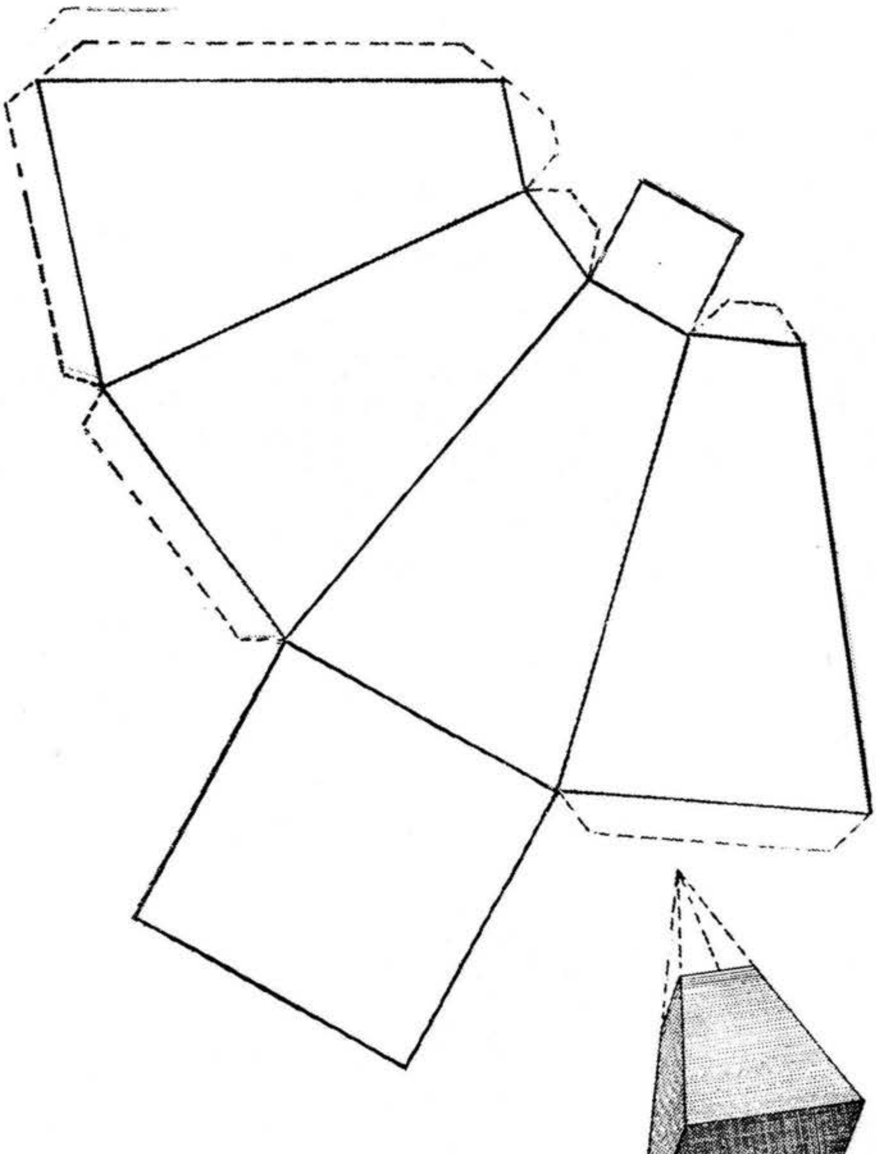


PARALELEPIPEDO

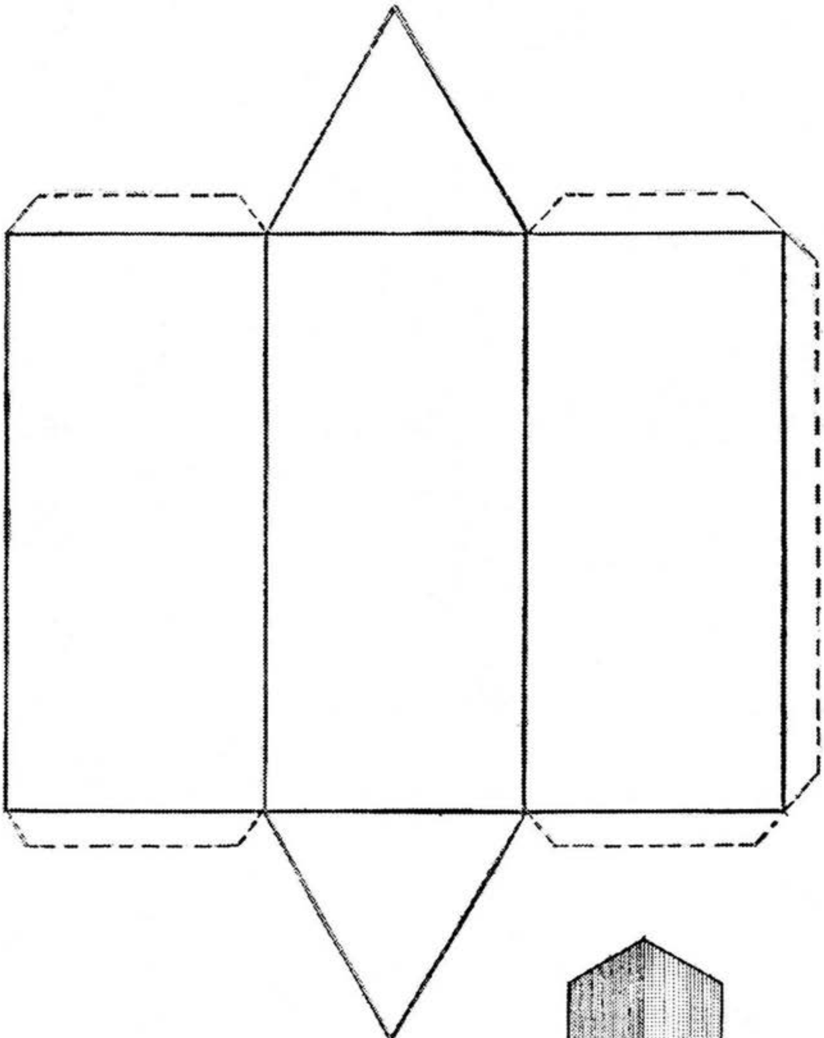




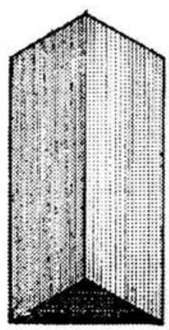
PIRAMIDE TRIANGULAR

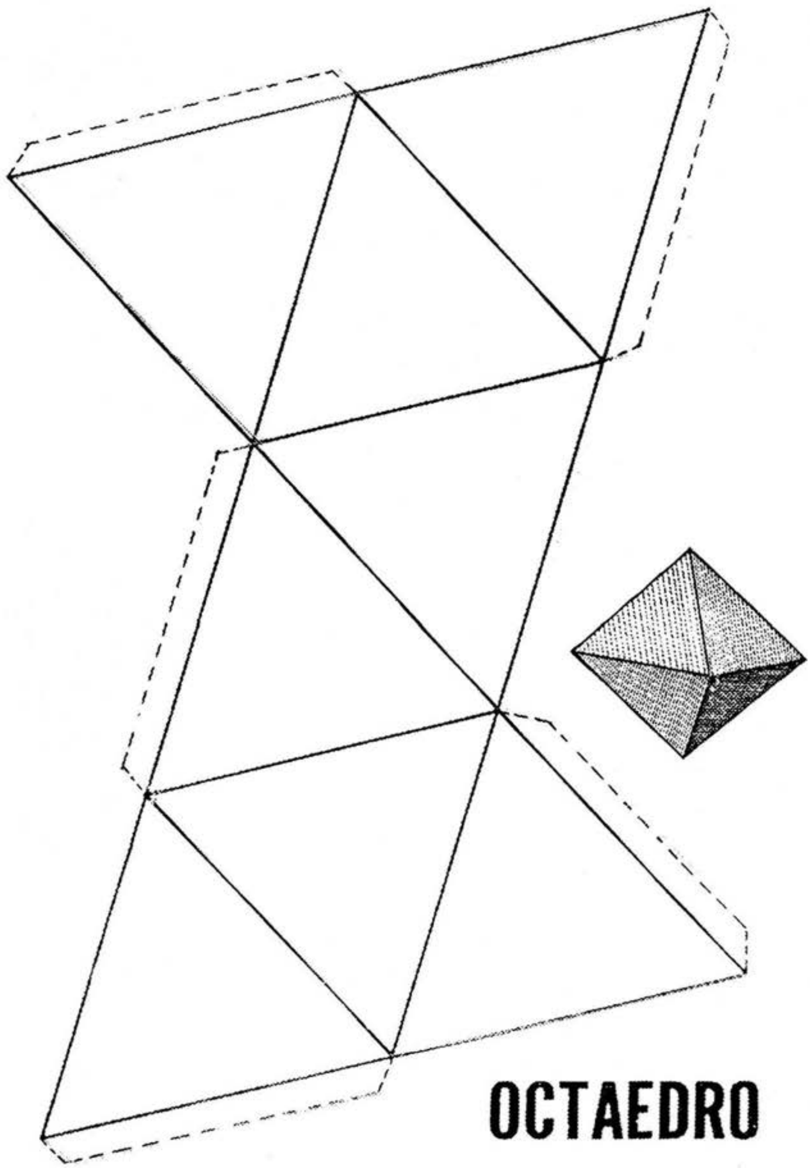


PIRAMIDE TRUNCADA

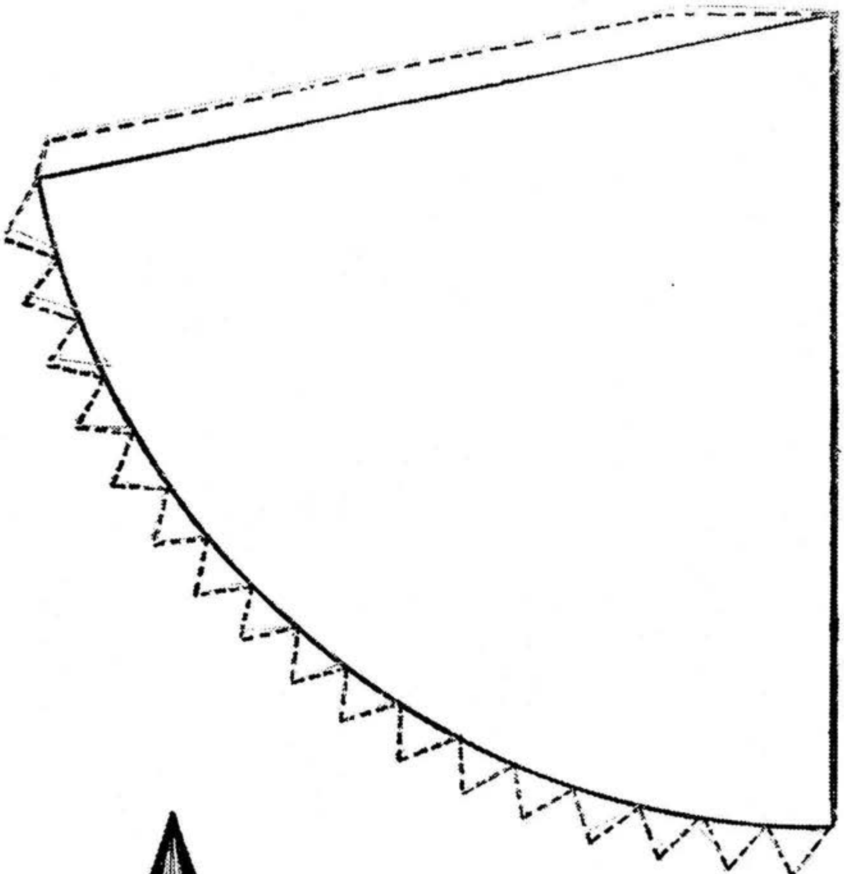


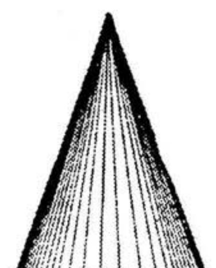
PRISMA TRIANGULAR

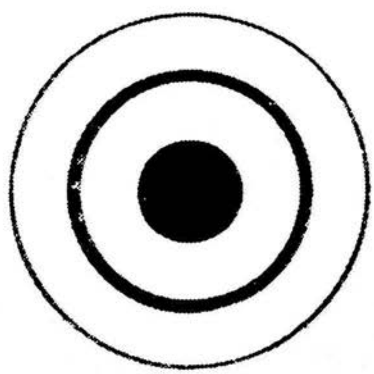




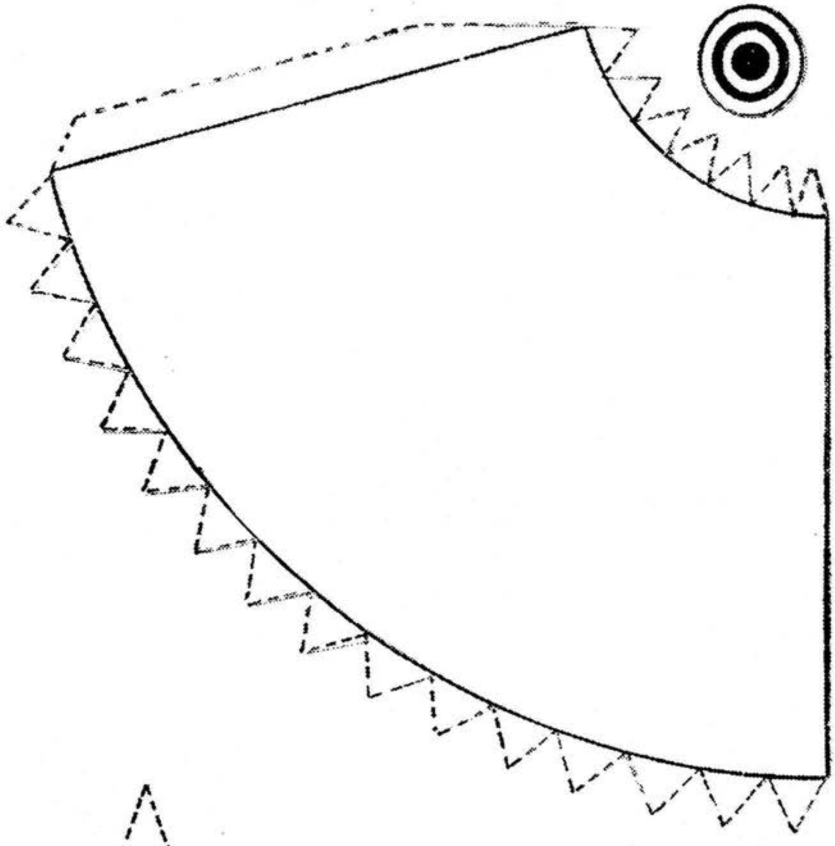
OCTAEDRO

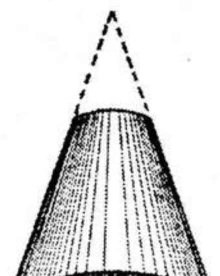


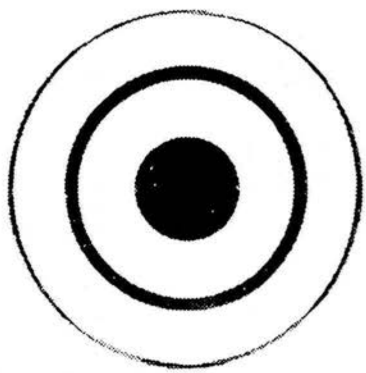




CONO







CONO TRUNCADO

Anexo 2

En este apartado trataré de aclarar las diferencias entre algunos conceptos físicos y el volumen.

Freudenthal aclara que hay que marcar las diferencias entre volumen, peso y masa; y que no hay que tratarlos por separado. Esto es muy importante y me parece fundamental para facilitar el aprendizaje del concepto de volumen. Sugiere relacionar al niño con estos conceptos de manera didáctica.

Masa, Peso, y Volumen

Al considerar al volumen como la cantidad de unidades que forman un cuerpo, podemos confundirnos con la cantidad de materia que lo forma. Es cierto que cuanto más materia tiene un cuerpo mayor es su masa, tomando en cuenta que la masa es una propiedad de la materia y no la materia en sí. Esto justifica al saber (actualmente) que la masa de un cuerpo puede variar con su velocidad, cosa que no hace la materia; por otra parte la masa no se conserva ya que puede transformarse en energía y la materia sí.

Fuente: "El pensamiento del maestro de primaria acerca del volumen y su enseñanza", Mariana Sáiz.

La masa permite atraer a otros cuerpos con mayor o menor intensidad. La unidad de medida de la masa es el kilogramo masa (Kg), que equivale a la masa de un cilindro de platino iridiado que se encuentra en el museo internacional de pesas y medidas de París, y que se usa como referencia universal por definición. Ahí están todas las unidades internacionales patrón a una cierta temperatura, humedad, etc.

El peso de un cuerpo es la fuerza con la que es atraído por la Tierra, su unidad de medida es el Newton (N) que es la fuerza gravitatoria que a un kilogramo de masa le produce una aceleración de un metro por segundo cada segundo, esto es, $N = 1\ Kg \times 1\ m/s^2 = 1\ Kg\text{-}m/s^2$. Así, una fuerza de un Newton proporciona una aceleración de $1\ m/s^2$ a 1 Kg masa.

La confusión entre masa y peso es debido a que cuando pesamos algo en una báscula aparece en kilogramos (fuerza), esto porque el peso de un cuerpo (medido en kilogramos fuerza) en la Tierra es igual a su masa (medido en kilogramos masa) por la aceleración de la gravedad, la cual es constante para todos los cuerpos sin importar su tamaño, de $9.81\ m/s^2$, que generalmente se desprecia. Como, para los niños, el peso está conectado al concepto de volumen, si no son claros estos conceptos y sus diferencias pueden causar mayores dificultades en su aprendizaje.

Volumen y Densidad

Ninguno de los autores que leí, menciona el concepto de densidad, aunque Freudenthal menciona que hay que marcar las diferencias entre peso, masa y volumen. Supongo que como se está hablando de volumen y la densidad está definida en términos del volumen es incongruente. A mi juicio creo que es importante enseñar el concepto de densidad, no formalmente, sino solamente dar una idea general; al mismo tiempo que se enseña el de volumen para evitar la confusión de éstos.

Formalmente la densidad (ρ) es la masa de una sustancia o cuerpo, que cabe o que hay en una unidad de volumen. Para medir la densidad ρ de un objeto de masa M y volumen V se aplica la fórmula: $\rho = M / V$. Se acostumbra a medir la densidad en gramos sobre centímetros cúbicos (g/cm^3).

La densidad es la cantidad de masa por unidad de volumen.

Como dije antes no hay que enseñar formalmente lo que es densidad, lo mejor es dar una idea y muchos ejemplos para que sepan diferenciarla del volumen aunque no la puedan definir claramente. Podemos usar la expresión de "que tan apretado" está el material o que "tan compacto ó comprimido" está el material.

Para ejemplificar un poco lo que trato de decir podemos hacer actividades y preguntas a los niños tales como ¿Qué pesa más un kilo de algodón o un kilo de plomo? ¿Qué ocupa más espacio (volumen) un kilo de algodón o un kilo de plomo? ¿Que es más denso el algodón o el plomo? O bien ¿Qué esta más compacto? Los niños se dan cuenta de un kilo de algodón "es mucho más grande" que un kilo de plomo. Yo creo que precisamente por no entender el concepto de densidad se vuelve más difícil de entender el de volumen.

Cuando se tiene que explicar esto a los niños lo que se puede hacer es preguntarles: ¿Qué pesa más este recipiente "A" con poquito algodón pero que ocupa todo el recipiente u otro recipiente "B" igual pero con más algodón que está más apretado y que también ocupa todo el recipiente sin salirse? Luego decirles que el recipiente "B" tiene algodón más "denso" está más "apretado", hay más algodón en el mismo espacio etc., etc. Y los niños lo entienden muy bien. Después podemos preguntarles qué recipiente es más grande, qué recipiente tiene más volumen o más capacidad ("A" y "B" son iguales). Al final la conclusión debe ser que volumen y masa están relacionados si se toma en cuenta la densidad. (Con una misma densidad a mayor masa mayor volumen.)

Otro ejemplo muy claro para lograr que los niños puedan diferenciar entre volumen, peso y densidad puede ser el siguiente: podemos preguntarles ¿Qué es más grande o que ocupa más espacio un globo lleno de aire o un balín? ¿Qué pesa más el globo o el balín? ¿En dónde está más apretado el material, es decir, qué es más denso el aire del globo o el plomo del balín? Ellos podrán responder correctamente éstas preguntas.

6. BIBLIOGRAFÍA

- CASTELNUOVO Emma, Didáctica de las matemáticas modernas, Editorial Trillas, México D.F. 1995.

- DEL OLMO M.A., MORENO M.F., Y GIL F., Superficie y volumen ¿algo mas que el trabajo con formulas?, Editorial Síntesis, Madrid, España 1989.

- LABINOWICZ ED., Introducción a Piaget Pensamiento, aprendizaje y Enseñanza, Editorial Addison-Wesley, Wilmington, Delaware, Estados Unidos 1987.

- SAIZ Roldan Mariana Luisa, El pensamiento del maestro de primaria acerca del concepto del volumen y su enseñanza, Tesis Doctoral, Matemática Educativa, México D.F. 2002.

- RAMIREZ David Lucia, Introducción al concepto de área en la enseñanza básica, Tesis de licenciatura, Matemática, México D.F. 2000

- MONTESSORI María, Psico-Geometría, El estudio de la geometría basado en la psicología infantil, Casa editorial Araluce, Barcelona, España 1934.

- PIAGET J. Seis estudios de Psicología, Editorial Seix Barral, Barcelona, España 1971.

- ALARCÓN Bortilussi Jesús y otros, Libro para el maestro, matemáticas, Secretaría de Educación Pública, México 1994. Educación Secundaria.

- NOREÑA Francisco, Física de Emergencia, Editorial Pangea, México D.F. 1995
- http://www.bibliodgsca.unam.mx/tesis/tes15marg/sec_1.htm
- http://www.piaget.org/biography/biog.html
- http://redescolar.ilce.edu.mx/act_permanentes/mate/mate5f.htm
- http://euler.slu.edu/teachmaterial/Van_Hiele_Model_of_Geometer.htm l
- http://www.sedl.org/cgi-bin/mysql/scimast-archives.cgi
- www.mathmadeeasy.com/geometry.htm
- www.groups.dcsstand ac uk./history/HistTopics/Mathematical_games.
- www.math.rice.edu/lanius/geom/cyls.htm
- www.math.rice.edu/lanius/geom/cyls2.htm
- www.tea.state.tx.us/teks/111-031n.htm#111.34
- www.math2.org/math/geometry/areasvols.htm
- www.cyberparent.com/kidsdo/volume.htm
- www.webster.edu/~woolflm/montessori.html