

01173



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

MODELACIÓN CINEMÁTICA Y DE TRAYECTORIA  
DE UN ROBOT DE 2GDL USANDO LA ROTACIÓN  
USUAL DE NÚMEROS COMPLEJOS.

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRO EN INGENIERÍA  
(ÁREA MECÁNICA)  
P R E S E N T A :  
L. F. HYRUM ESQUER ALCARAZ



ASESOR: M. EN I. EUSEBIO JIMÉNEZ LÓPEZ

MÉXICO, D. F. CIUDAD UNIVERSITARIA

2004

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A Elva Luz, Noemí, Hyrum y Samuel  
Con todo mi amor

## **Agradecimientos**

Agradezco a DIOS por darme una familia, amigos, vida y ,en general, por todo.

Agradezco a Elva Luz Castro, mi esposa, por el apoyo constante que me ha dado para poder elaborar esta Tesis para obtener el grado de Maestro en Ingeniería, por animarme cuando estaba cansado, por amarme, cuidarme y presionarme a hacer siempre lo mejor. Por estar aquí, conmigo, siempre y a pesar de todo.

Agradezco a nuestros hijos; Noemí, Hyrum y Samuel; por alegrarme los pocos ratos libres que me quedaban después de salir de clases y del trabajo. Por soportar los fines de semana en casa en vez de salir al parque, ya que estaba en clases de maestría.

Agradezco a mis padres, Isaías Esquer y Manuela de Jesús Alcaraz, por enseñarme tantas cosas, por inculcarme el deseo de superarme en mis estudios, por su apoyo incondicional y por su fe en mi.

Agradezco a mis suegros, Emilio Castro (r.i.p.) y Margarita Rojo, por el apoyo y animo que me han brindado en estos años. Por creer en mí y por su confianza.

Agradezco a mi asesor, Eusebio Jiménez, por compartir conmigo sus conocimientos, y brindarme su amistad y apoyo para desarrollar esta tesis.

Agradezco a mis amigos por apoyarme de múltiples maneras y animarme a sacar este trabajo de tesis.

Agradezco a mis compañeros de generación por su ayuda y compañerismo durante y después de clases.

# Índice

<b>Prólogo</b>	<b>IV</b>
<b>Resumen</b>	<b>VI</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo 1. Arquitectura del robot y modelo de posición</b>	<b>6</b>
1.1 Caracterización del multicuerpo	6
1.2 Modelación de la configuración deformada	7
1.3 Planteamiento del problema cinemático directo de posición para la configuración no deformada	10
1.4 Planteamiento del problema cinemático inverso de posición para la configuración no deformada	11
1.5 Análisis de la configuración deformada	11
1.6 Planteamiento del problema directo asociado con $S_R M^{F_1 M_2}$	17
1.7 Planteamiento del problema inverso asociado con $S_R M^{F_1 M_2}$	17
1.8 Planteamiento del problema directo asociado con $S_R M^{F_2 M_1}$	18
1.9 Planteamiento del problema inverso asociado con $S_R M^{F_2 M_1}$	18
<b>Capítulo 2. Modelos de velocidad</b>	<b>20</b>
2.1 Ecuaciones de velocidad	20
2.2 Ecuaciones de velocidad en función de las derivadas de las bases deformadas	20
2.3 Ecuaciones de velocidad en términos de las derivadas de los complejos	21
2.4 Ecuaciones de velocidad instantaneas	22
2.5 Derivadas de las normas unitarias y relaciones geométricas	23
2.6 Formulación del problema cinemático directo de la velocidad	24
2.7 Formulación del problema cinemático inverso de la velocidad	25

<b>Capítulo 3. Modelos de aceleración</b>	<b>26</b>
3.1 Las ecuaciones de aceleración	26
3.2 Ecuaciones de aceleración en términos de los complejos	27
3.3 Ecuaciones de aceleración instantaneas	27
3.4 Dobles derivadas de las normas de los complejos y relaciones geométricas	28
3.5 Formulación del problema cinemático directo de aceleración	28
3.6 Formulación del problema cinemático inverso de aceleración	29
<b>Capítulo 4. Ecuaciones de movimiento: análisis de trayectoria</b>	<b>30</b>
4.1 Descripción del ciclo de operación	30
4.2 Caracterización de los lugares geométricos	30
4.3 Perfil de velocidades teórico	32
4.4 Caracterización de las ecuaciones de movimiento	33
4.5 Proyección de los vectores de posición sobre los planos del sistema (x, y, z, t)	35
4.6 Definición de bases locales y la base canónica	36
4.7 Ecuaciones de posición	38
4.8 Ecuaciones de velocidad	38
4.9 Ecuaciones de aceleración	40
4.10 Caracterización de los perfiles de trayectoria	41
4.10.1 Funciones temporales	41
4.11 Generación de funciones temporales para el perfil de velocidades	43
4.11.1 Determinación de las funciones temporales de velocidad	45
4.11.2 Generación de las funciones temporales para el perfil de aceleraciones	49
4.11.3 Generación de las funciones temporales para el perfil de desplazamientos	51
4.12 Normalización de los vectores unitarios	54
4.13 Acoplamiento de las ecuaciones de desplazamiento con las funciones temporales del perfil de desplazamientos	54
4.14 Acoplamiento de las ecuaciones de velocidad con las funciones temporales del perfil de velocidades	56
4.15 Acoplamiento de las ecuaciones de aceleración con las	

funciones temporales del perfil de aceleraciones	57
4.16 Transformación de los vectores de posición proyectados al espacio – tiempo	58
4.17 Metodos para suavizar funciones temporales	61
4.17.1 Suavización del intervalo $J_1$ usando un $P^5$	64
4.17.2 Suavización del intervalo $J_3$ usando un $P^5$	68
4.17.3 Suavización de los intervalos $J_4$ y $J_5$ usando un $P^8$	71
4.18 Representación gráfica de los polinomios suavizados en todo el intervalo	75
<b>Capítulo 5. Acoplamiento de la trayectoria con el movimiento del robot</b>	<b>78</b>
5.1 Acoplamiento de las ecuaciones de la cinemática de la posición y el perfil de desplazamiento	78
5.2 Acoplamiento de las ecuaciones de la cinemática de la velocidad y el perfil de velocidades	80
5.3 Acoplamiento de las ecuaciones de la cinemática de la aceleración y el perfil de aceleraciones	81
<b>Capítulo 6. Programación en Mathematica</b>	<b>84</b>
6.1 Programación de la trayectoria	84
6.2 Cinemática de la posición	107
6.3 Cinemática de la velocidad	114
6.4 Cinemática de la aceleración	115
6.5 Resultados	118
6.5.1 Rotación angular de los eslabones	118
6.5.2 Velocidades angulares de los eslabones	119
6.5.3 Aceleraciones angulares de los eslabones	121
<b>Conclusiones</b>	<b>123</b>
<b>Apéndice A</b>	<b>125</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>163</b>

## Prólogo

Este trabajo de tesis tiene el propósito de generar conocimiento escrito para las futuras generaciones de la maestría en Ingeniería Mecánica y campos afines, interesados en la modelación cinemática y dinámica de robots.

Para poder modelar el comportamiento mecánico de sistemas articulados de cuerpos rígidos, es necesario utilizar metodologías sistemáticas que permitan, por un lado, generar los modelos cinemáticos y dinámicos de dichos sistemas y, por otro lado, construir simuladores computacionales.

Los robots y mecanismos representados por cadenas cinemáticas, han sido modelados usando metodologías tradicionales. Tal es el caso de los parámetros de Denavit – Hartenberg o de la aplicación del álgebra de los números complejos en su representación exponencial.

Recientemente, se han sistematizado y parametrizado las rotaciones y reflexiones rígidas de multicuerpos acoplados tanto en el plano como en el espacio. Los números complejos, el álgebra de cuaterniones y los octaniones o también llamados “bicuaterniones” fueron parametrizados por (Reyes L., 1990, 1998, 2003). De hecho, tales estructuras algebraicas han sido aplicadas para modelar las rotaciones de robots y mecanismos, así como para agilizar las técnicas de graficación.

En este trabajo de tesis se utiliza la rotación usual definida en el espacio vectorial de los números complejos para modelar la cinemática de un robot de dos grados de libertad. Se construyen, de forma sistemática, los modelos de posición, velocidad y aceleración, así como el modelo de trayectoria. Dichos modelos son programados y sistematizados en la plataforma de cálculo formal Mathematica V4.

Este trabajo de tesis forma parte de la línea de investigación: “Modelación cinemática y dinámica de sistemas mecánicas”, desarrollada en la sección mecánica de la DEPMI, UNAM y en el Instituto Tecnológico Superior de Cajeme de Cd. Obregón, Sonora. La tesis esta integrada al archivo científico – tecnológico del laboratorio de mecatrónica localizado en la sección mecánica (DEPMI, UNAM)



Finalmente, se agradece a todas aquellas personas que contribuyeron a la realización de este trabajo.

## **Resumen**

En este trabajo de tesis se construyen y simulan los modelos cinemáticos de un robot de dos grados de libertad. Fue utilizada la rotación usual definida en el espacio vectorial de números complejos para generar, de forma sistemática, los modelos del robot. Se analizaron dos configuraciones: 1) la no deformada y 2) la deformada. En cada configuración se formularon los problemas cinemáticos directo e inverso. Fue modelada una trayectoria compuesta de un lugar geométrico rectilíneo y un perfil de velocidades teórico del tipo trapezoidal. Se usaron polinomios de grado 8 para suavizar los perfiles de trayectoria. Los sistemas de ecuaciones e incógnitas relacionadas con los modelos cinemáticos de  $2 \times 2$  para problemas directos y de  $4 \times 4$  para problemas inversos. Finalmente, los modelos fueron programados y simulados en la plataforma de cálculo formal Matemática V.4.

### **Palabras Clave:**

**Modelación, robots, números complejos, simulación, análisis de trayectoria.**

# Introducción

En este trabajo de tesis se pretende cumplir con los objetivos siguientes:

- 1) Analizar dos configuraciones fijas del robot para construir los modelos de posición, usando la rotación usual definida en el espacio vectorial de números complejos.
- 2) Generar los modelos de velocidad.
- 3) Construir los modelos de aceleración.
- 4) Formular los problemas cinemáticos directo e inverso para los modelos de posición, velocidad y aceleración.
- 5) Analizar y modelar un problema de trayectoria.
- 6) Programar y simular los modelos generados en los incisos anteriores.

Uno de los métodos utilizados en la ciencia y la tecnología para solucionar problemas es el “método científico” [1,2]. El planteamiento del problema, sus restricciones, la formulación de hipótesis y de premisas forman parte del marco conceptual de dicho método. Para llegar a la solución de los problemas, una vez planteados, se usan dos procedimientos: 1) el lógico deductivo y 2) el temporal.

El primer procedimiento parte de las premisas generales y, bajo un proceso de sistematización lógica deductiva, se llega a la solución del problema. Este procedimiento se interpreta: “de lo general a lo particular”.

Para el caso del proceso temporal, se parte de premisas particulares y se llega también, bajo un procedimiento lógico, a la solución del problema. Este procedimiento se interpreta: “de lo particular a lo general”.

Para poder solucionar problemas se pueden utilizar tanto el proceso temporal como el lógico deductivo o ambos.

El comportamiento mecánico de sistemas articulados de cuerpos rígidos como los robots y mecanismos se deben analizar y modelar a partir del problema de la mecánica clásica, el cual se define de la manera siguiente [3]:

“Modelar el comportamiento mecánico del medio que nos rodea”.

Dicho problema tiene asociadas las restricciones siguientes:

- 1) El medio posee masa.
- 2) El medio es continuo (en el sentido del uso de funciones continuas).

Por otro lado, las hipótesis relacionadas con el problema descrito anteriormente y sus premisas básicas son:

“ El comportamiento mecánico del medio, al poseer masa, satisface las leyes de Newton”.

- 1) Ley de la inercia.
- 2) Leyes de equilibrio.
- 3) Ley de la acción y la reacción.

El medio que será analizado y modelado en este trabajo de tesis es un sistema de dos cuerpos rígidos acoplados por juntas rotacionales.

Estrictamente hablando, el problema por solucionar en esta tesis se formula de la manera siguiente:

“Dado  $R_0 = E_1 \cup E_2$ ,  $E_1 \cap T = J_1$ ,  $E_1 \cap E_2 = J_2$ ,  $POT \in E_2$ ,  $L_t$ ,  $G_V \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{R}$ , y  $\mathfrak{S} \in [0, +\infty)$ , encuentre:

Los modelos cinemáticos y de trayectoria del robot

tal que:

- 1)  $E_1$  y  $E_2$  son rígidos.
- 2) El movimiento del robot es en el plano  $(x, y)$ .
- 3) El lugar de la trayectoria es un segmento rectilíneo.
- 4) Los perfiles de trayectoria son del tipo trapezoidal.
- 5) Las funciones de análisis son continuas.”

Aquí,  $R_0$  es el robot,  $E_1, E_2$  son los eslabones,  $J_1, J_2$  son las juntas rotacionales,  $T$  es el eslabón tierra,  $POT \in E_2$  es un punto localizado en el extremo libre del eslabón  $E_2$ ,  $L_\tau$  es el lugar geométrico,  $G_V \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{R}$  es la gráfica del perfil de velocidades y  $J$  es un intervalo de tiempo.

Se puede afirmar con seguridad que, el problema por solucionar en esta tesis, es un caso particular del problema de la mecánica clásica y, por tanto, hereda la misma hipótesis general y el sistema de premisas básicas.

Para modelar los movimientos de robots y mecanismos han sido utilizadas diversas metodologías. Los parámetros de Denavit – Hartenberg y matrices homogéneas [4], y la representación exponencial de los números complejos [5] son algunas de tales metodologías.

Recientemente, en un trabajo desarrollado en [6] se han sistematizado y parametrizado las rotaciones y reflexiones de multicuerpo rígidos en el plano. Dicha sistematización es la base para construir el álgebra de cuaterniones [7].

Los números complejos sistematizados en [6] han sido utilizados para modelar las rotaciones de robots [8] mecanismos [9] y robots paralelos [10] Por otro lado, el álgebra de cuaterniones se ha utilizado para modelar robots espaciales [11] y mecanismos [12].

Tanto el álgebra de complejos como el álgebra de cuaterniones se han usado para modelar problemas de evasión de obstáculos en el plano [12,14].

Sin embargo, en dichos modelos no se ha incluido el tiempo, por consiguiente, les hacen faltas los modelos de velocidad, aceleración y trayectoria.

Una trayectoria, está compuesta de: 1) un sistema de lugares geométricos y 2) un conjunto de perfiles de trayectoria [15]. Sobre los lugares geométricos se desplaza por el espacio – tiempo, una herramienta colocada sobre el órgano terminal del robot. Los perfiles de trayectoria caracterizan las magnitudes de desplazamiento, velocidad y aceleración de la herramienta. Diversos trabajos han tratado el tema de trayectoria. Por ejemplo, en [16] estudia una trayectoria para el pulimento de piezas metálicas usado un robot e información basada en sistemas CAM (Computer Aided

Manufacturing). Aquí, no se presenta un procedimiento explícito del análisis de trayectoria. Por otro lado e [8] utiliza direcciones de contorno paralelas con las direcciones paralelas de la ruta de una herramienta de corte, para comparar la eficiencia de una máquina de CNC. Aquí, se analizan perfiles de trayectoria trapezoidales y no se incluye un método explícito analítico para el diseño de dicha trayectoria.

En este trabajo de tesis se modela la cinemática de un robot de dos grados de libertad incluyendo el problema de trayectoria. Dichos modelos son construidos usando la rotación usual definida en el espacio vectorial de números complejos [6]. La metodología que será usada para el modelado consiste en los pasos generales siguientes:

- 1) Modelar el robot en dos configuraciones: a) la no deformada y b) la deformada, sin incluir el tiempo. Aquí se construyen los modelos de posición y se formulan los problemas directo e inverso.
- 2) Usar funciones del tipo  $\rho: \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$  para definir en función del tiempo las ecuaciones de posición (configuración deformada) y, posteriormente, los modelos de velocidad planteando los problemas directo e inverso.
- 3) Encontrar, a partir de las ecuaciones de velocidad, el modelo de aceleración formulando los problemas directo e inverso.
- 4) Analizar el problema de trayectoria y, posteriormente acoplarlo con los modelos cinemáticos de los pasos 1), 2) y 3).
- 5) Programar y simular los movimientos del robot en la plataforma de cálculo formal Mathematica.

Es importante señalar que el proceso de sistematización que será utilizado para solucionar el problema de esta tesis es el "lógico – temporal" (de lo particular a lo general).

Este trabajo de tesis consta de seis capítulos, los cuales se resumen a continuación:

En el capítulo 1 se caracteriza la arquitectura del robot estudiado en ésta tesis. Se construyen los modelos de posición analizando dos configuraciones fijas del robot. Se formulan los problemas directo e inverso en cada configuración.

En el capítulo 2 se usan funciones del tipo  $\rho: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{R}^2$  para modelar el problema de velocidad asociado con el robot. Se formulan los problemas directo e inverso en la configuración deformada.

En el capítulo 3 se construyen las ecuaciones de aceleración tomando como base el modelo de velocidad. Se formulan los problemas directo e inverso en la configuración deformada.

En el capítulo 4 se analiza y modela una trayectoria de operación. Son construidas las ecuaciones de movimiento de una herramienta que se desplaza por el espacio – tiempo. Es analizado y modelado un perfil de velocidades tipo trapezoidal y, posteriormente, son suavizados usando polinomios de grado 8 los perfiles de trayectoria.

En el capítulo 5 se acoplan los modelos cinemáticos del robot con el modelo de trayectoria y se formulan los problemas inversos.

En el capítulo 6 se presentan la programación y simulación de los modelos cinemáticos y de trayectoria del robot. Dicha programación fue hecha en el paquete de cálculo formal Matemática V4 [18].

Finalmente se dan las conclusiones de este trabajo y un apéndice el cual muestra la sistematización del álgebra de complejos.

# Capítulo 1

## Arquitectura del robot y modelo de posición

**Introducción.** En este capítulo se generan los modelos cinemáticos de posicionamiento del robot articulado de dos grados de libertad (2GDL) motivo de estudio. Para ello, se utiliza el álgebra de complejos sistematizada y parametrizada [6,8]. Se formulan los problemas cinemáticos directo e inverso para las configuraciones no deformada y deformada, respectivamente. Se hace uso del concepto de movimiento secuenciado para caracterizar las ecuaciones asociadas a las configuraciones deformada y no deformada.

### 1.1 Caracterización del multicuerpo

El multicuerpo motivo de estudio consta de dos eslabones rígidos, los cuales se llamarán  $E_1$  y  $E_2$ , respectivamente. El eslabón  $E_1$  está empotrado con la tierra del sistema denominada "T" por medio de la junta  $J_1$ , la cual integra un par inferior rotacional. El segundo eslabón está articulado al primero por medio de la junta  $J_2$ , según se muestra en la figura 1.1.

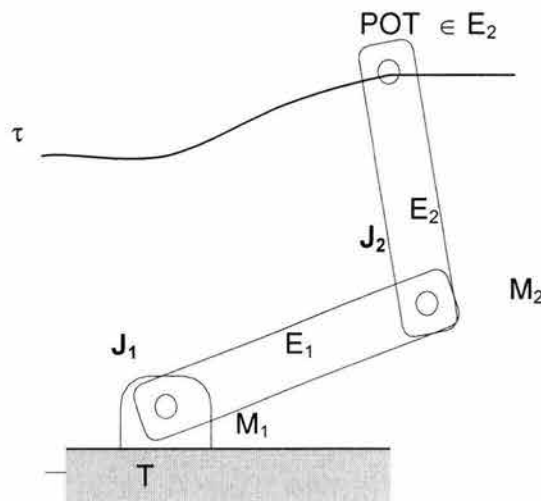


Figura 1.1 Arquitectura del robot

Sobre las juntas  $J_1$  y  $J_2$  se montan los actuadores  $M_1$  y  $M_2$ , los cuales producirán el movimiento del robot. En el eslabón  $E_2$  se localiza, en su extremo final, un punto de especial interés llamado "punto del órgano terminal" (POT) del sistema articulado, en el cual se montará una herramienta para un determinado propósito. El movimiento de



dicha herramienta, para la trayectoria “ $\tau$ ” mostrada en la figura 1.1, es generado en el plano  $(x, y)$ .

Se llamará  $R_0$  al robot en estudio, el cual puede ser representado en términos de sus eslabones a través de la unión siguiente:

$$R_0 = E_1 \cup E_2 \quad (1.1)$$

Por otro lado, las juntas se conectan a los eslabones pueden representarse de la manera siguiente:

$$J_1 = T \cap E_1 \quad (1.2)$$

$$J_2 = E_1 \cap E_2$$

## 1.2 Modelación de la configuración no deformada

En esta sección se construyen las ecuaciones que permiten localizar al punto  $POT \in E_2$  desde el origen del sistema inercial cartesiano  $(x, y)$  mostrado en la figura 1.2.

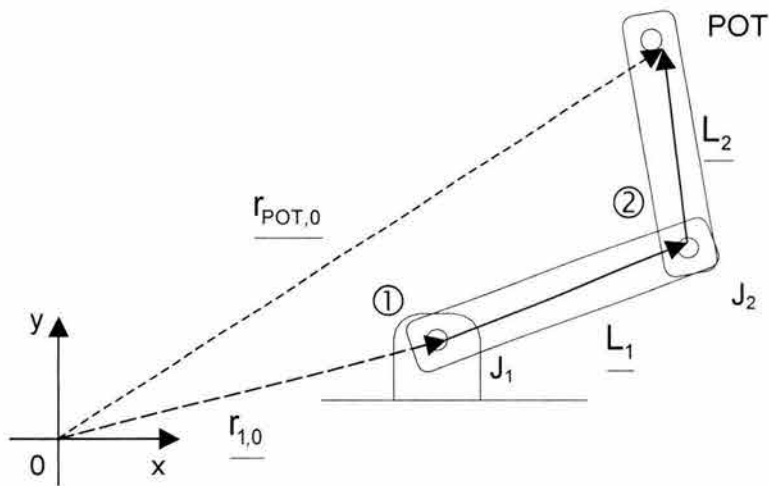


Figura 1.2 Configuración no deformada

Sobre los eslabones  $E_1$  y  $E_2$  se definen los vectores posición denominados  $\underline{L}_1$ ,  $\underline{L}_2 \in \mathbb{R}^2$ . Dichos vectores, al fijar la configuración mostrada en 1.2, se pueden expresar a través de la siguiente diferencia de puntos:

$$\underline{L}_1 = \textcircled{2} - \textcircled{1} \quad (1.3)$$

$$\underline{L}_2 = \text{POT} - \textcircled{2}$$

También, los vectores de posición  $\underline{r}_{\text{POT},0} \in \mathfrak{R}^2$ , que localiza al punto POT  $\in E_2$  desde el origen del sistema, y el vector  $\underline{r}_{1,0} \in \mathfrak{R}^2$ , que localiza al punto  $\textcircled{1}$  desde  $\textcircled{0}$ , se pueden representar de la manera siguiente:

$$\underline{r}_{\text{POT},0} = \text{POT} - \textcircled{0} \quad (1.4)$$

$$\underline{r}_{1,0} = \textcircled{1} - \textcircled{0}$$

Por tanto, las coordenadas del punto POT  $\in E_2$  se puede encontrar a través de la expresión siguiente:

$$\underline{r}_{\text{POT},0} = \underline{r}_{1,0} + \underline{L}_1 + \underline{L}_2 \quad (1.5)$$

También, los vectores  $\underline{L}_1, \underline{L}_2 \in \mathfrak{R}^2$  se pueden representar a través de sistemas locales móviles fijos a los eslabones, los cuales se muestran en la figura 1.3.

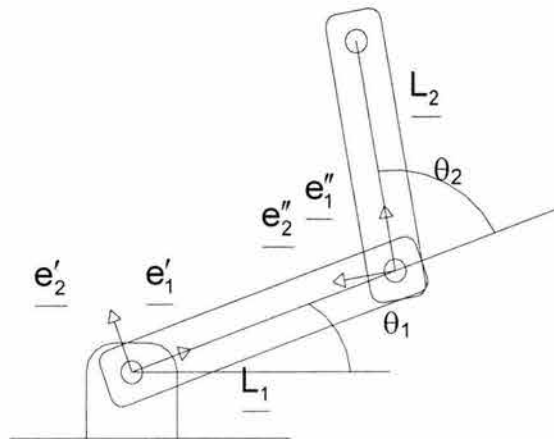


Figura 1.3 Bases locales en la configuración no deformada

Las representaciones de los vectores  $\underline{L}_1, \underline{L}_2 \in \mathfrak{R}^2$  en términos de las bases  $\underline{e}'_j = \{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2\}$  y  $\underline{e}''_j = \{\underline{e}''_1, \underline{e}''_2\}$  mostradas en la figura 1.3 es la siguiente:

$$\begin{aligned}\underline{L}_1 &= l_1 \cdot \underline{e}'_1 \\ \underline{L}_2 &= l_2 \cdot \underline{e}''_1\end{aligned}\tag{1.6}$$

Aquí,  $l_1$  y  $l_2 \in \mathfrak{R}^+$  son las dimensiones principales de los eslabones  $E_1$  y  $E_2$  (Medidos de junta a junta).

Por tanto, las expresiones (1.5) se pueden representar en términos de las bases locales, esto es:

$$\underline{r}_{\text{POT},0} = \underline{r}_{1,0} + l_1 \cdot \underline{e}'_1 + l_2 \cdot \underline{e}''_1\tag{1.7}$$

Las bases móviles  $\underline{e}'_j = \{\underline{e}'_1, \underline{e}'_2\}$  y  $\underline{e}''_j = \{\underline{e}''_1, \underline{e}''_2\}$  son rotaciones de la base inercial fija localizada en  $\textcircled{0}$ , i. e.  $\underline{e}_j = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$  [8].

Dichas rotaciones se pueden representar a través de los complejos de norma unitaria de la manera siguiente [6]:

$$\begin{aligned}\underline{e}'_1 &= \rho(p, \underline{e}_1) = p * \underline{e}_1 \\ \underline{e}''_1 &= \rho(q, \underline{e}'_1) = \rho(q, \rho(p, \underline{e}_1)) = q * p * \underline{e}_1\end{aligned}\tag{1.8}$$

Aquí, se ha usado la función  $\rho: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  definida por:

$$\rho(p, q) = \frac{1}{\|p\|} \bullet p * q; q \in \mathfrak{R}^2 \text{ fijo,}$$

la cual representa una rotación en el espacio vectorial de los números complejo. La operación  $*$ :  $\mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es la multiplicación usual de los complejos.

Por tanto, la ecuación (1.7) se puede expresar en términos de la base local, esto es:

$$\underline{r}_{POT,0} = \underline{r}_{1,0} + l_1 \cdot \{ p^* \underline{e}_1 \} + l_2 \{ q^* p^* \underline{e}_1 \} \quad (1.9)$$

Por otro lado, los complejos son de norma unitaria, es decir:

$$\|p\| = p_0^2 + p_1^2 = 1 \quad (1.10)$$

$$\|q\| = q_0^2 + q_1^2 = 1$$

Y están relacionados con los elementos geométricos de las rotaciones, esto es:

$$p \in \mathfrak{R}^2, p = \{p_0, p_1\}; p_0 \in \mathfrak{R}, p_0 = \cos \theta_1 \quad (1.11)$$

$$p_1 \in \mathfrak{R}, p_1 = \pm \text{sen } \theta_1$$

$$q \in \mathfrak{R}^2, q = \{q_0, q_1\}; q_0 \in \mathfrak{R}, q_0 = \cos \theta_2$$

$$q_1 \in \mathfrak{R}, q_1 = \pm \text{sen } \theta_2$$

Aquí,  $\theta_1$  y  $\theta_2 \in \mathfrak{R}$  son los desplazamientos angulares medidos del eje x al primer eslabón y del primer eslabón al segundo, respectivamente.

### 1.3 Planteamiento del problema cinemático directo de posición para la configuración no deformada

En esta sección es planteado el primer problema fundamental en la cinemática de cuerpos rígidos: “el problema cinemático directo de posición para la configuración no deformada” [8,9,10]. Dicho problema está asociado con la configuración no deformada del multicuerpo en estudio mostrado en la figura 1.3.

“Dados  $p = \{p_0, p_1\}$ ,  $q = \{q_0, q_1\}$ , con  $\|p\| = \|q\| = 1$ ,  $l_1, l_2 \in \mathfrak{R}^+$ ,  $\underline{r}_{1,0} \in \mathfrak{R}^2$ ; encuentre  $\underline{r}_{POT,0} \in \mathfrak{R}^2$  tal que la expresión (1.9) sea satisfecha”

El problema cinemático directo de posición para la configuración no deformada asociado al robot  $R_0$  en estudio genera un sistema de 2 ecuaciones no lineales y 2 incógnitas.

## 1.4 Planteamiento del problema cinemático inverso de posición para la configuración no deformada

En esta sección es planteado otro problema fundamental en la cinemática de cuerpos rígidos: “el problema cinemático inverso de posición para la configuración no deformada” [8,9,10]. Dicho problema está asociado con la configuración no deformada del multicuerpo en estudio mostrado en la figura 1.3.

“Dados  $\underline{r}_{POT,0} \in \mathbb{R}^2$ ,  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^+$ ,  $\underline{r}_{1,0} \in \mathbb{R}^2$ ; encuentre  $p = \{p_0, p_1\}$ ,  $q = \{q_0, q_1\}$  tal que (1.9) sea satisfecha y  $p_0^2 + p_1^2 = 1$ ;  $q_0^2 + q_1^2 = 1$ ”

El problema cinemático inverso de posición para la configuración no deformada asociado al robot  $R_0$  en estudio genera un sistema de 4 ecuaciones no lineales y 4 incógnitas.

## 1.5 Análisis de la configuración deformada

En esta sección se modelan los movimientos del robot  $R_0$  una vez afectado por rotaciones rígidas sucesivas aplicadas a los eslabones  $E_1$  y  $E_2$  por medio de los actuadores  $M_1$  y  $M_2$ , respectivamente. La configuración del multicuerpo así obtenida es conocida como “deformada” [8,9,10,13,14].

El objetivo ahora es determinar las nuevas coordenadas del punto  $POT \in E_2$  en la configuración deformada mostrada en la figura 1.4.

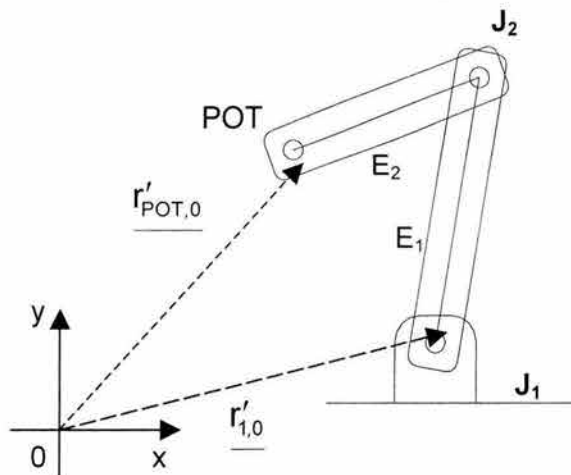


Figura 1.4 Configuración deformada de  $R_0$

De acuerdo a la figura anterior, las nuevas coordenadas de POT  $\in E_2$  se encuentran a través de la expresión siguiente:

$$\underline{r}'_{\text{POT},0} = \underline{r}'_{1,0} + \underline{L}'_1 + \underline{L}'_2 \quad (1.12)$$

Debido a que  $\underline{J}'_1 = \underline{J}_1$  y que  $\underline{r}'_{1,0} = \underline{r}_{1,0}$ , puesto que permanecen en la misma posición antes y después del movimiento, la expresión (1.12) se puede escribir como:

$$\underline{r}'_{\text{POT},0} = \underline{r}_{1,0} + \underline{L}'_1 + \underline{L}'_2 \quad (1.13)$$

Los vectores  $\underline{L}'_1, \underline{L}'_2 \in \mathbb{R}^2$  se llamarán “deformados” y se pueden expresar a través de las rotaciones rígidas de las bases móviles  $\underline{e}'_j, \underline{e}''_j \in \mathbb{R}^2$ . Dichas rotaciones son representadas por las bases deformadas  $\underline{a}'_j, \underline{a}''_j \in \mathbb{R}^2$ . Las cuales se muestran en la figura 1.5.

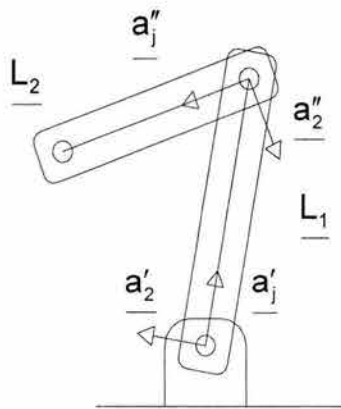


Figura 1.5 Definición de bases móviles en la configuración deformada

Antes de proceder a caracterizar las bases deformadas  $\underline{a}'_j, \underline{a}''_j \in \mathbb{R}^2$  se analizan las formas de los posibles de movimiento del robot  $R_0$  y tomando en cuenta la siguiente relación:

$$N_{\text{MR}} = n! \quad (1.14)$$

Donde  $N_{MR} \in \mathbb{N}$  es el número de movimientos de tipo real y  $n \in \mathbb{N}$  es el grado de libertad de la cadena cinemática.

Existen dos movimientos reales, estos son [13]:

- 1) Mover primero el eslabón  $E_1$  a través del actuador  $M_1$  dejando fijo (o sin activar) el motor  $M_2$  durante la activación de  $M_1$ . Posteriormente mover  $E_2$  a través de  $M_2$  dejando fijo a  $M_1$ .
- 2) Mover primero el eslabón  $E_2$  mediante  $M_2$  dejando fijo a  $E_1$ . Posteriormente mover  $E_1$  a través de  $M_1$  dejando fijo a  $E_2$ .

Para visualizar mejor el movimiento considere la siguiente representación, que describe al primer movimiento:  $S_R M^{F_1 M_2}$ , la cual se interpreta como sigue:

“Secuencia de movimiento real de la familia  $F_1$  (aquel actuador que se activa inicialmente) con  $M_2$  activado en el estado de operación  $T_2$ .”

La tabla 1.1 muestra el movimiento  $S_R M^{F_1 M_2}$  descrito en código binario:

	$M$	
$T$	$M_1$	$M_2$
$T_1$	<b>1</b>	<b>0</b>
$T_2$	<b>0</b>	<b>1</b>

Tabla 1.1 Código de un movimiento secuenciado  $S_R M^{F_1 M_2}$

Considere ahora que el robot  $R_0$  ha sido desplazado de la configuración de referencia a la deformada por medio del movimiento  $S_R M^{F_1 M_2}$ . Entonces la historia del movimiento de  $R_0$  se muestra en la figura siguiente:

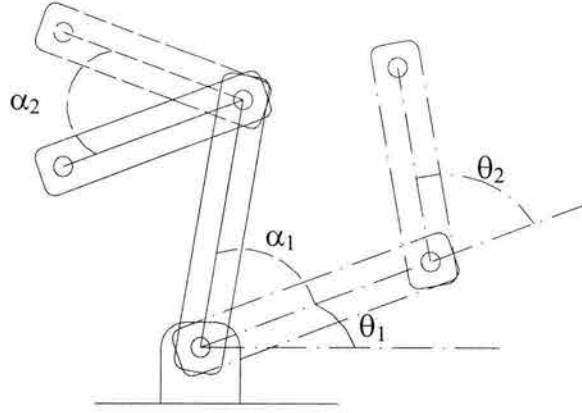


Figura 1.6 Historia del movimiento de  $R_0$  usando  $S_R M^{F, M_2}$

El movimiento de  $R_0$  mostrado en la figura anterior se modela de la manera siguiente:

El primer movimiento se realiza usando solamente al actuador  $M_1$ . Las rotaciones de las bases móviles  $\underline{e}'_j, \underline{e}''_j \in \mathfrak{R}^2$  son:

$$\underline{a}'_1 = \rho(P, \underline{e}'_j) = \rho(P, \rho(p, \underline{e}_1)) = P * p * \underline{e}_1 \quad (1.15)$$

$$\underline{a}''_1 = \rho(P, \underline{e}''_j) = \rho(P, \rho(q, \rho(p, \underline{e}_1))) = P * q * p * \underline{e}_1$$

El segundo movimiento es usando al actuador  $M_2$  y dejando al actuador  $M_1$  fijo; esto es:

$$\underline{a}'_3 = \rho(P, \underline{e}'_j) = \rho(P, \rho(p, \underline{e}_1)) = P * p * \underline{e}_1 \quad (1.16)$$

$$\underline{a}''_4 = \rho(Q, \underline{a}''_1) = \rho(Q, \rho(P, \underline{e}''_j)) = \rho(Q, \rho(P, \rho(q, \rho(p, \underline{e}_1)))) = Q * P * q * p * \underline{e}_1$$

Note que  $\underline{a}'_1 = \underline{a}'_3$ . Por otro lado los vectores posición  $\underline{L}'_1, \underline{L}'_2 \in \mathfrak{R}^2$  se pueden expresar en términos de las bases móviles deformadas; esto es:

$$\underline{L}'_1 = l_1 \cdot \underline{a}'_1 \quad (1.17)$$

$$\underline{L}'_2 = l_2 \cdot \underline{a}''_1$$



La ecuación (1.12) se puede expresar de acuerdo con la ecuación (1.16) de la manera siguiente:

$$\underline{r}'_{POT,0} = \underline{r}'_{1,0} + l_1 \cdot \underline{{}^3a}'_1 + l_2 \cdot \underline{{}^4a}''_1 \quad (1.18)$$

También de acuerdo con la ecuación (1.16) la expresión (1.12) se puede escribir en términos de la base canónica, esto es:

$$\underline{r}'_{POT,0} = \underline{r}'_{1,0} + l_1 \cdot \{ P * p * \underline{e}_1 \} + l_2 \cdot \{ Q * P * q * p * \underline{e}_1 \} \quad (1.19)$$

Según la relación (1.14) existen dos movimientos reales, el faltante es el que se esquematiza en la siguiente tabla:

$S_R M^{F_2 M_1}$		
M \ T	M <sub>1</sub>	M <sub>2</sub>
T <sub>1</sub>	<b>0</b>	<b>1</b>
T <sub>2</sub>	<b>1</b>	<b>0</b>

Tabla 1.2 Código del movimiento  $S_R M^{F_2 M_1}$

Considere ahora que el robot  $R_0$  ha utilizado la secuencia de movimientos  $S_R M^{F_2 M_1}$ . Entonces, la historia de dicho movimiento se muestra en la figura 1.9.

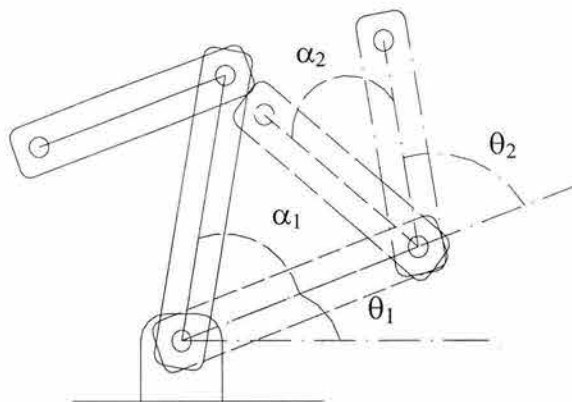


Figura 1.7 Historia del movimiento de  $R_0$  con la secuencia  $S_R M^{F_2 M_1}$

Las bases locales deformadas para este movimiento se explicitan a continuación:

El primer movimiento:  $M_2$  activo y  $M_1$  inactivo.

$$\underline{{}^1a'_1} = \underline{e'_j} = \rho(p, \underline{e_1}) = p^* \underline{e_1} \quad (1.20)$$

$$\underline{{}^2a''_1} = \rho(Q, \underline{e''_1}) = \rho(Q, \rho(q, \rho(p, \underline{e_1}))) = Q^* q^* p^* \underline{e_1}$$

Segundo movimiento:  $M_2$  inactivo y  $M_1$  activo.

$$\underline{{}^3a'_1} = \rho(P, \underline{{}^1a'_1}) = \rho(P, \rho(p, \underline{e_1})) = P^* p^* \underline{e_1} \quad (1.21)$$

$$\underline{{}^4a''_1} = \rho(P, \underline{{}^2a''_1}) = \rho(P, \rho(Q, \underline{e''_1})) = \rho(P, \rho(Q, \rho(q, \rho(p, \underline{e_1})))) = P^* Q^* q^* p^* \underline{e_1}$$

Los vectores de posición  $\underline{L}'_1, \underline{L}'_2 \in \mathfrak{R}^2$  se pueden expresar en términos de las bases móviles deformadas asociadas con la secuencia  $S_R M^{F_2 M_1}$ , esto es:

$$\underline{L}'_1 = l_1 \cdot \underline{{}^3a'_1} \quad (1.22)$$

$$\underline{L}'_2 = l_2 \cdot \underline{{}^4a''_1}$$

La ecuación (1.12) se puede escribir en términos de (1.21) de la manera siguiente:

$$\underline{r'_{POT,0}} = \underline{r'_{1,0}} + l_1 \cdot \underline{{}^3a'_1} + l_2 \cdot \underline{{}^4a''_1} \quad (1.23)$$

Por otro lado, la expresión (1.23) también puede ser escrita en términos de la base canónica; es decir:

$$\underline{r'_{POT,0}} = \underline{r'_{1,0}} + l_1 \cdot \{P^* p^* \underline{e_1}\} + l_2 \cdot \{Q^* P^* q^* p^* \underline{e_1}\} \quad (1.24)$$

Finalmente, los complejos son de norma unitaria, esto es:

$$\begin{aligned}\|P\| &= P_0^2 + P_1^2 = 1 \\ \|Q\| &= Q_0^2 + Q_1^2 = 1\end{aligned}\tag{1.25}$$

y están relacionados con los elementos geométricos de las rotaciones de la forma siguiente:

$$\begin{aligned}P &\in \mathfrak{R}^2, P = \{P_0, P_1\}; P_0 \in \mathfrak{R}, P_0 = \cos(\alpha_1) \\ P_1 &\in \mathfrak{R}, P_1 = \pm \text{sen}(\alpha_1) \\ Q &\in \mathfrak{R}^2, Q = \{Q_0, Q_1\}; Q_0 \in \mathfrak{R}, Q_0 = \cos(\alpha_2) \\ Q_1 &\in \mathfrak{R}, Q_1 = \pm \text{sen}(\alpha_2)\end{aligned}\tag{1.26}$$

### 1.6 Planteamiento del problema directo asociado con $S_R M^{F_1 M_2}$

En esta sección es planteado el problema básico en la cinemática de cuerpos rígidos: “el problema cinemático directo de posición para la configuración deformada”. Dicho problema está asociado con la configuración deformada del multicuerpo en estudio mostrado en la figura 1.5, y fue alcanzada mediante la secuencia  $S_R M^{F_1 M_2}$ .

“ Dados  $P = \{P_0, P_1\}$ ;  $Q = \{Q_0, Q_1\}$ ; con  $\|P\| = \|Q\| = 1$ ;  $p = \{p_0, p_1\}$ ;  $q = \{q_0, q_1\}$ ; con  $\|p\| = \|q\| = 1$ ;  $r_{1,0} \in \mathfrak{R}^2$ ;  $l_1$  y  $l_2 \in \mathfrak{R}^+$ ; encuentre  $\underline{r}'_{POT,0} \in \mathfrak{R}^2$  tal que la expresión (1.19) sea satisfecha.”

El problema cinemático directo de posición para la configuración no deformada asociado al robot  $R_0$  en estudio genera un sistema de 2 ecuaciones no lineales y 2 incógnitas.

### 1.7 Planteamiento del problema inverso asociado con $S_R M^{F_1 M_2}$

En esta sección es planteado un problema fundamental en la cinemática de cuerpos rígidos: “el problema cinemático inverso de posición para la configuración deformada” [13]. Dicho problema está asociado con la configuración deformada del

multicuerpo en estudio mostrada en la figura 1.5. a la que se llega por medio de la secuencia  $S_R M^{F_1 M_2}$ .

“Dados  $\underline{r}'_{POT,0} \in \mathfrak{R}^2$ ;  $\underline{r}_{1,0} \in \mathfrak{R}^2$ ;  $p = \{p_0, p_1\}$ ;  $q = \{q_0, q_1\}$ ; con  $\|p\| = \|q\| = 1$ ;  $l_1$  y  $l_2 \in \mathfrak{R}^+$ ; encuentre  $P = \{P_0, P_1\}$ ;  $Q = \{Q_0, Q_1\}$  tal que la expresión (1.19) sea satisfecha y  $P_0^2 + P_1^2 = 1$ ;  $Q_0^2 + Q_1^2 = 1$ ”

El problema cinemático inverso de posición para la configuración deformada asociado al robot  $R_0$  en estudio genera un sistema de 4 ecuaciones no lineales y 4 incógnitas.

### 1.8 Planteamiento del problema directo asociado con $S_R M^{F_2 M_1}$

En esta sección es planteado el problema esencial en la cinemática de cuerpos rígidos: “el problema cinemático directo de posición para la configuración deformada”. Dicho problema está asociado con la configuración deformada del multicuerpo en estudio mostrado en la figura 1.5, la cual fue alcanzada usando la secuencia  $S_R M^{F_2 M_1}$ .

“ Dados  $P = \{P_0, P_1\}$ ;  $Q = \{Q_0, Q_1\}$ ; con  $\|P\| = \|Q\| = 1$ ;  $p = \{p_0, p_1\}$ ;  $q = \{q_0, q_1\}$ ; con  $\|p\| = \|q\| = 1$ ;  $\underline{r}_{1,0} \in \mathfrak{R}^2$ ;  $l_1$  y  $l_2 \in \mathfrak{R}^+$ ; encuentre  $\underline{r}'_{POT,0} \in \mathfrak{R}^2$  tal que la expresión (1.24) sea satisfecha.”

El problema cinemático directo de posición para la configuración no deformada asociado al robot  $R_0$  en estudio genera un sistema de 2 ecuaciones no lineales y 2 incógnitas.

### 1.9 Planteamiento del problema inverso asociado con $S_R M^{F_2 M_1}$

En esta sección es planteado un problema fundamental en la cinemática de cuerpos rígidos: “el problema cinemático inverso de posición para la configuración deformada”. Dicho problema está asociado con la configuración deformada del

multicuerpo en estudio mostrado en la figura 1.5. a la que se llega por medio de la secuencia  $S_R M^{F_2 M_1}$ .

“Dados  $\underline{r}'_{POT,0} \in \mathfrak{R}^2$ ;  $\underline{r}_{1,0} \in \mathfrak{R}^2$ ;  $l_1$  y  $l_2 \in \mathfrak{R}^+$ ;  $\underline{p} = \{p_0, p_1\}$ ;  $\underline{q} = \{q_0, q_1\}$ ; con  $\|\underline{p}\| = \|\underline{q}\| = 1$ ; encuentre  $\underline{P} = \{P_0, P_1\}$ ;  $\underline{Q} = \{Q_0, Q_1\}$  tal que la expresión (1.24) sea satisfecha y  $P_0^2 + P_1^2 = 1$ ;  $Q_0^2 + Q_1^2 = 1$ ”

El problema cinemático inverso de posición para la configuración deformada asociado al robot  $R_0$  en estudio genera un sistema de 4 ecuaciones no lineales y 4 incógnitas [8].

## Capítulo 2

### Modelos de velocidad

**Introducción.** En éste capítulo se construyen las ecuaciones de velocidad asociadas con el punto  $POT \in E_2$  definido en la configuración deformada. Para ello, se utilizarán funciones del tipo  $p: \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , donde  $\mathfrak{T} \in [0, +\infty)$  es un intervalo de tiempo. Son formulados los problemas cinemáticos directo e inverso en la configuración deformada, en este caso, de velocidad.

#### 2.1 Ecuaciones de velocidad

Para poder determinar la velocidad de punto  $POT \in E_2$  en la configuración deformada mostrada en la figura 1.3 medida desde el origen del sistema inercial fijo, es necesario derivar con respecto a tiempo  $t \in \mathfrak{T}$  la expresión (1.13), antes se deben utilizar funciones del tipo  $r: \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{R}^2$  para transformar a ecuación (1.13) en función del tiempo  $t \in \mathfrak{T}$ , esto es:

$$\underline{r}'_{POT,0}(t) = \underline{r}_{1,0}(t_0) + \underline{L}'_1(t) + \underline{L}'_2(t) \quad (2.1)$$

Por tanto, la velocidad del punto  $POT \in E_2$  medida en la configuración deformada de  $R_0$  se encuentra al derivar la ecuación (2.1) con respecto al tiempo  $t \in \mathfrak{T}$ , esto es:

$$\underline{\dot{r}}'_{POT,0}(t) = \underline{\dot{L}}'_1(t) + \underline{\dot{L}}'_2(t) \quad (2.2)$$

Aquí,  $\underline{\dot{r}}_{1,0}(t_0) = \underline{0}$

#### 2.2 Ecuaciones de velocidad en función de las derivadas de las bases deformadas

En esta sección se construirán las ecuaciones de velocidad en términos de las derivadas de las bases locales deformadas. Para ello, se considera funciones del tipo  $\underline{a}: \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{R}^2$  y  $l: \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{R}$  para transformar las expresiones (1.15) en función del tiempo  $t \in \mathfrak{T}$ ; esto es,

$$\begin{aligned}
1) \quad \underline{L}'_1(t) &= l_1(t) \cdot \underline{a}'_1(t). & (2.3) \\
2) \quad \underline{L}'_2(t) &= l_2(t) \cdot \underline{a}'_1(t)
\end{aligned}$$

Las derivadas con respecto al tiempo  $t \in \mathfrak{T}$  de las expresiones (2.3) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
1) \quad \dot{\underline{L}}'_1(t) &= \left( \underline{L}'_1(t) \right)^{\bullet} = \left( l_1(t) \cdot \underline{a}'_1(t) \right)^{\bullet} = l_1(t) \cdot \dot{\underline{a}}'_1(t) & (2.4) \\
2) \quad \dot{\underline{L}}'_2(t) &= \left( \underline{L}'_2(t) \right)^{\bullet} = \left( l_2(t) \cdot \underline{a}'_1(t) \right)^{\bullet} = l_2(t) \cdot \dot{\underline{a}}''_1(t)
\end{aligned}$$

Aquí,  $\dot{l}_1(t) = \dot{l}_2(t) = 0$

Por tanto, las expresiones de velocidad (2.2) se pueden escribir en términos de las derivadas de las bases deformadas, esto es:

$$\dot{\underline{r}}'_{\text{POT},0}(t) = l_1 \cdot \dot{\underline{a}}'_1(t) + l_2 \cdot \dot{\underline{a}}''_1(t) \quad (2.5)$$

### 2.3 Ecuaciones de velocidad en términos de las derivadas de los complejos

Considere ahora las funciones del tipo  $q: \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{R}^2$  para transformar las ecuaciones (1.22) en función del tiempo  $t \in \mathfrak{T}$ . Dichas expresiones transformadas son:

$$\begin{aligned}
1) \quad {}^2 \underline{a}'_1(t) &\equiv \underline{a}'_1(t) = P(t) * \underline{e}'_1. & (2.6) \\
2) \quad {}^4 \underline{a}''_1(t) &\equiv \underline{a}''_1(t) = Q(t) * P(t) * \underline{e}''_1
\end{aligned}$$

Las derivadas con respecto al tiempo  $t \in \mathfrak{T}$  de las expresiones (2.6) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
1) \quad \dot{\underline{a}}'_1(t) &= \left( \underline{a}'_1(t) \right)^{\bullet} = \left( P(t) * \underline{e}'_1 \right)^{\bullet} = \dot{P}(t) * \underline{e}'_1. & (2.7) \\
2) \quad \dot{\underline{a}}''_1(t) &= \left( \underline{a}''_1(t) \right)^{\bullet} = \left( Q(t) * P(t) * \underline{e}''_1 \right)^{\bullet} = \dot{Q}(t) * P(t) * \underline{e}''_1 + Q(t) * \dot{P}(t) * \underline{e}''_1
\end{aligned}$$

Aquí,  $\dot{\underline{e}}'_1(t_0) \equiv \dot{\underline{e}}''_1(t_0) \equiv \underline{0}$ .

Las ecuaciones (2.7) han sido obtenidas por el hecho de que la derivada de la transformación lineal  $\rho(\underline{p}(t), \underline{q}(t_0)) = \frac{1}{\|\underline{p}(t)\|} \bullet \underline{p}(t) \bullet \underline{q}(t_0)$  con  $\underline{q}(t_0) \in \mathfrak{R}^2$  fijo es:

$$\dot{\rho}(\underline{p}(t), \underline{q}(t_0)) = \frac{1}{\|\underline{p}(t)\|} \bullet \dot{\underline{p}}(t) \bullet \underline{q}(t_0) = \dot{\underline{p}}(t) \bullet \underline{q}(t_0) \quad (2.8)$$

Aquí,  $\dot{\underline{q}}(t_0) = 0$  y  $\|\underline{p}(t)\|$  es constante.

Por tanto, la expresión (2.5) se puede escribir en términos de las derivadas de los complejos; esto es:

$$\dot{\underline{r}}'_{\text{POT},0}(t) = I_1 \cdot \left\{ \dot{\underline{P}}(t) \bullet \underline{e}'_1 \right\} + I_2 \cdot \left\{ \dot{\underline{Q}}(t) \bullet \underline{P}(t) \bullet \underline{e}''_1 + \underline{Q}(t) \bullet \dot{\underline{P}}(t) \bullet \underline{e}''_1 \right\} \quad (2.9)$$

## 2.4 Ecuaciones de velocidad instantáneas

Las ecuaciones de velocidad (2.9) están en función de los sistemas  $\underline{e}'_1 \in \mathfrak{R}^2$  y  $\underline{e}''_1 \in \mathfrak{R}^2$  definidos en la configuración deformada. Es necesario transformar dichas expresiones a la configuración deformada. Para ello considere las siguientes identidades [6]:

$$\begin{aligned} \underline{Q}(t) \bullet \overline{\underline{Q}(t)} &= I(t) \\ \underline{P}(t) \bullet \overline{\underline{P}(t)} &= I(t) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Aquí,  $\overline{\underline{Q}(t)} = \{Q_0(t), -Q_1(t)\}$  es el conjugado del complejo  $\underline{Q}(t) \in \mathfrak{R}^2$  y  $\overline{\underline{P}(t)} = \{P_0(t), -P_1(t)\}$  es el conjugado del complejo  $\underline{P}(t) \in \mathfrak{R}^2$

Considere ahora las expresiones (2.6), esto es:



- 1)  $\underline{a}'_1(t) = P(t) * \underline{e}'_1$ .
- 2)  $\underline{a}''_1(t) = Q(t) * P(t) * \underline{e}''_1$

Observe que al aplicar (2.10) en las expresiones (2.6) se obtienen las siguientes equivalencias:

- 1)  $\underline{e}'_1 = \overline{P(t)} * \underline{a}'_1(t)$ . (2.11)
- 2)  $\underline{e}''_1 = \overline{P(t)} * \overline{Q(t)} * \underline{a}''_1(t)$

Por tanto, la expresión (2.9) se puede escribir en a configuración deformada usando las ecuaciones (2.11), de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{r}}'_{\text{POT},0}(t) = I_{2,1} \cdot \left\{ \dot{P}(t) * \overline{P(t)} * \underline{a}'_1(t) \right\} + \\ + I_{\text{POT},2} \cdot \left\{ \dot{Q}(t) * \overline{Q(t)} * \underline{a}''_1(t) + Q(t) * \dot{P}(t) * \overline{P(t)} * \overline{Q(t)} * \underline{a}''_1(t) \right\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Dicha ecuación es conocida con la expresión de velocidad instantánea en la configuración deformada.

## 2.5 Derivadas de las normas unitarias y relaciones geométricas

Sean  $p: \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{R}^2$  funciones en el tiempo. Entones las normas de los complejos  $P, Q \in \mathfrak{R}^2$  descritas en las ecuaciones (1.31) en función del tiempo  $t \in \mathfrak{T}$  son:

- 1)  $P(t) = \{P_0(t), P_1(t)\}; P_0^2(t) + P_1^2(t) = 1$
  - 2)  $Q(t) = \{Q_0(t), Q_1(t)\}; Q_0^2(t) + Q_1^2(t) = 1$
- (2.13)

Las derivadas con respecto al tiempo  $t \in \mathfrak{T}$  de las normas descritas en las ecuaciones (2.13) son las siguientes:

$$1) \dot{P}(t) = \left\{ \dot{P}_0(t), \dot{P}_1(t) \right\} ; \dot{P}_0(t)P_0(t) + \dot{P}_1(t)P_1(t) = 0 \quad (2.14)$$

$$2) \dot{Q}(t) = \left\{ \dot{Q}_0(t), \dot{Q}_1(t) \right\} ; \dot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_1(t)Q_1(t) = 0$$

Por otro lado, las relaciones geométricas entre los componentes de los complejos  $P$ ,  $Q \in \mathfrak{R}^2$  y las componentes de las rotaciones, se pueden expresar como funciones del tiempo; esto es:

$$1) P(t) = \{P_0(t), P_1(t)\}; P_0(t) \in \mathfrak{R}; P_0(t) = \cos \alpha_1(t); \quad (2.15)$$

$$P_1(t) \in \mathfrak{R}; P_1(t) = \pm \text{sen } \alpha_1(t)$$

$$2) Q(t) = \{Q_0(t), Q_1(t)\}; Q_0(t) \in \mathfrak{R}; Q_0(t) = \cos \alpha_2(t);$$

$$Q_1(t) \in \mathfrak{R}; Q_1(t) = \pm \text{sen } \alpha_2(t)$$

Por tanto, las derivadas con respecto a tiempo  $t \in \mathfrak{T}$  de las expresiones (2.15) son las siguientes:

$$1) \dot{P}(t) = \left\{ \dot{P}_0(t), \dot{P}_1(t) \right\}; \dot{P}_0(t) \in \mathfrak{R}; \dot{P}_0(t) = -\dot{\alpha}_1(t) \cdot \text{sen } \alpha_1(t); \quad (2.16)$$

$$\dot{P}_1(t) \in \mathfrak{R}; \dot{P}_1(t) = \pm \dot{\alpha}_1(t) \cdot \text{cos } \alpha_1(t)$$

$$2) \dot{Q}(t) = \left\{ \dot{Q}_0(t), \dot{Q}_1(t) \right\}; \dot{Q}_0(t) \in \mathfrak{R}; \dot{Q}_0(t) = -\dot{\alpha}_2(t) \cdot \text{sen } \alpha_2(t);$$

$$\dot{Q}_1(t) \in \mathfrak{R}; \dot{Q}_1(t) = \pm \dot{\alpha}_2(t) \cdot \text{cos } \alpha_2(t)$$

Aquí,  $\dot{\alpha}_1(t) \in \mathfrak{R}$  y  $\dot{\alpha}_2(t) \in \mathfrak{R}$  son las velocidades angulares de los eslabones  $E_1$  y  $E_2$ , los cuales componen al robot  $R_0$  y la trayectoria se desarrolla en un plano fijo  $(x, y)$ .

## 2.6 Formulación del problema cinemático directo de velocidad

En esta sección se formulará un problema de fundamental importancia en la cinemática de cuerpos rígidos: "el problema directo de velocidad". Dicho problema está asociado con la configuración deformada de multicuerpo en estudio mostrada en la figura 1.5.

“Dados:  $\dot{P}(t) = \{\dot{P}_0(t), \dot{P}_1(t)\}$  ;  $\dot{Q}(t) = \{\dot{Q}_0(t), \dot{Q}_1(t)\}$  con  $\dot{P}_0(t)P_0(t) + \dot{P}_1(t)P_1(t) = 0$  y  $\dot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_1(t)Q_1(t) = 0$ ;  $l_1, l_2 \in \mathfrak{R}$ ;  $P(t) = \{P_0(t), P_1(t)\}$  ;  $\overline{P}(t) = \{P_0(t), -P_1(t)\}$ ;  $Q(t) = \{Q_0(t), Q_1(t)\}$  ;  $\overline{Q}(t) = \{Q_0(t), -Q_1(t)\}$ ; con  $\|P(t)\| = \|Q(t)\| = 1$  ;  $p = \{p_0, p_1\}$ ;  $q = \{q_0, q_1\}$ ; con  $\|p\| = \|q\| = 1$ ; encuentre  $\dot{r}'_{\text{POT},0}(t) \in \mathfrak{R}^2$  tal que la expresión (2.12) sea satisfecha”

## 2.7 Problema cinemático inverso de velocidad

En esta sección es formulado otro problema de gran importancia en la cinemática de cuerpos rígidos: “el problema inverso de velocidad”. Dicho problema está relacionado con la configuración deformada de  $R_0$  mostrada en la figura 1.5.

“Dados:  $\dot{r}'_{\text{POT},0}(t) \in \mathfrak{R}^2$ ;  $l_1(t), l_2(t) \in \mathfrak{R}$ ;  $P(t) = \{P_0(t), P_1(t)\}$  ;  $Q(t) = \{Q_0(t), Q_1(t)\}$  ; con  $\|P(t)\| = \|Q(t)\| = 1$ ;  $p = \{p_0, p_1\}$  ;  $q = \{q_0, q_1\}$ ; con  $\|p\| = \|q\| = 1$ ; encuentre  $\dot{P}(t) = \{\dot{P}_0(t), \dot{P}_1(t)\}$  ;  $\dot{Q}(t) = \{\dot{Q}_0(t), \dot{Q}_1(t)\}$  tal que la expresión (2.12) sea satisfecha y,

- 1)  $\dot{P}_0(t)P_0(t) + \dot{P}_1(t)P_1(t) = 0$
- 2)  $\dot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_1(t)Q_1(t) = 0$ ”

## Capítulo 3

### Modelos de aceleración

**Introducción.** En este capítulo se construyen las ecuaciones vectoriales de aceleración asociadas al robot  $R_0$  motivo de estudio. Son formulados dos problemas de gran importancia en la cinemática de cuerpos rígidos: 1) el problema directo de aceleración y 2) el problema inverso de aceleración. Tales problemas estarán relacionados con la configuración deformada del robot  $R_0$  mostrada en a figura 1.5.

#### 3.1 Las ecuaciones de aceleración

Para poder determinar la aceleración de punto  $pot' \in E_2$  medida desde el origen de coordenadas "O" mostrado en la figura 1.5, es necesario, en primera instancia, derivar con respecto a tiempo  $t \in \mathfrak{T}$  las expresiones de velocidad (2.2), esto es:

$$\underline{\ddot{r}}'_{POT,0}(t) = \underline{\ddot{L}}'_1(t) + \underline{\ddot{L}}'_2(t) \quad (3.1)$$

Por otro lado, las aceleraciones  $\underline{\ddot{L}}'_1(t) \in \mathfrak{R}^2$  y  $\underline{\ddot{L}}'_2(t) \in \mathfrak{R}^2$  pueden ser expresadas en términos de las bases locales deformadas derivadas de la manera siguiente:

$$1) \quad \underline{\ddot{L}}'_1(t) = \left( \underline{\dot{L}}'_1(t) \right)' = \left( l_1 \cdot \underline{\dot{a}}'_1(t) \right)' = l_1 \cdot \underline{\ddot{a}}'_1(t) \quad (3.2)$$

$$2) \quad \underline{\ddot{L}}'_2(t) = \left( \underline{\dot{L}}'_2(t) \right)' = \left( l_2 \cdot \underline{\dot{a}}''_1(t) \right)' = l_2 \cdot \underline{\ddot{a}}''_1(t)$$

Por tanto, la ecuación de aceleración (3.1) se puede escribir en términos de las expresiones (3.2); esto es:

$$\underline{\ddot{r}}'_{POT,0}(t) = l_1 \cdot \underline{\ddot{a}}'_1(t) + l_2 \cdot \underline{\ddot{a}}''_1(t) \quad (3.3)$$

### 3.2 Ecuaciones de aceleración en términos de los complejo

Para poder expresar la ecuación de aceleración (3.3) en términos de las dobles derivadas de los complejos, es necesario derivar con respecto al tiempo  $t \in \mathfrak{T}$  las ecuaciones (2.7), esto es:

$$1) \quad \underline{\underline{\ddot{a}}}'_1(t) = \left( \underline{\underline{\dot{a}}}'_1(t) \right)' = \left( \underline{\dot{P}}(t) * \underline{e}'_1 \right)' = \underline{\ddot{P}}(t) * \underline{e}'_1. \quad (3.4)$$

$$2) \quad \underline{\underline{\ddot{a}}}'_1(t) = \left( \underline{\underline{\dot{a}}}'_1(t) \right)' = \left( \underline{\dot{Q}}(t) * \underline{P}(t) * \underline{e}''_1 + \underline{Q}(t) * \underline{\dot{P}}(t) * \underline{e}''_1 \right)' = \\ = \underline{\ddot{Q}}(t) * \underline{P}(t) * \underline{e}''_1 + 2 \underline{\dot{Q}}(t) * \underline{\dot{P}}(t) * \underline{e}''_1 + \underline{Q}(t) * \underline{\ddot{P}}(t) * \underline{e}''_1$$

Por tanto, la expresión (3.3) se puede escribir en términos de las dobles derivadas de los complejos de la manera siguiente:

$$\underline{\underline{\ddot{r}}}'_{\text{POT},0}(t) = l_1 \cdot \left\{ \underline{\ddot{P}}(t) * \underline{e}'_1 \right\} + \\ + l_2 \cdot \left\{ \underline{\ddot{Q}}(t) * \underline{P}(t) * \underline{e}''_1 + 2 \underline{\dot{Q}}(t) * \underline{\dot{P}}(t) * \underline{e}''_1 + \underline{Q}(t) * \underline{\ddot{P}}(t) * \underline{e}''_1 \right\} \quad (3.5)$$

### 3.3 Ecuaciones de aceleración instantáneas

Es importante señalar que la ecuación de aceleración (3.5) está en función de las bases locales definidas en la configuración no deformada. Para poder representar la expresión (3.5) en la configuración deformada, es necesario utilizar las identidades (2.11), esto es:

$$\underline{\underline{\ddot{r}}}'_{\text{POT},0}(t) = l_1 \cdot \left\{ \underline{\ddot{P}}(t) * \overline{\underline{P}}(t) * \underline{a}'_1(t) \right\} + \\ + l_2 \cdot \left\{ \underline{\ddot{Q}}(t) * \overline{\underline{Q}}(t) * \underline{a}''_1(t) + 2 \underline{\dot{Q}}(t) * \underline{\dot{P}}(t) * \overline{\underline{P}}(t) * \overline{\underline{Q}}(t) * \underline{a}''_1(t) + \underline{Q}(t) * \underline{\ddot{P}}(t) * \overline{\underline{P}}(t) * \overline{\underline{Q}}(t) * \underline{a}''_1(t) \right\} \quad (3.6)$$

### 3.4 Dobles derivadas de las normas de los complejos y relaciones geométricas

Para completar el sistema de ecuaciones (para encontrar tanto las aceleraciones lineales como las angulares), es necesario derivar con respecto al tiempo  $t \in \mathfrak{T}$  las ecuaciones de norma (2.14), esto es:

$$1) \ddot{P}_0(t)P_0(t) + \dot{P}_0^2(t) + \ddot{P}_1(t)P_1(t) + \dot{P}_1^2(t) = 0 \quad (3.7)$$

$$2) \ddot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_0^2(t) + \ddot{Q}_1(t)Q_1(t) + \dot{Q}_1^2(t) = 0$$

Cabe señalar que para obtener las expresiones (3.4) y (3.7) se ha utilizado la regla de la cadena. Por otro lado, las relaciones entre los componentes de la aceleración angular son:

$$1) \ddot{P}(t) = \left\{ \ddot{P}_0(t), \ddot{P}_1(t) \right\}; \ddot{P}_0(t) \in \mathfrak{R}; \ddot{P}_0(t) = -\ddot{\alpha}_1(t) \cdot \text{sen } \alpha_1(t) - \dot{\alpha}_1^2(t) \cdot \text{cos } \alpha_1(t); \quad (3.8)$$

$$\ddot{P}_1(t) \in \mathfrak{R}; \ddot{P}_1(t) = \pm \ddot{\alpha}_1(t) \cdot \text{cos } \alpha_1(t) \mp \dot{\alpha}_1^2(t) \cdot \text{sen } \alpha_1(t)$$

$$2) \ddot{Q}(t) = \left\{ \ddot{Q}_0(t), \ddot{Q}_1(t) \right\}; \ddot{Q}_0(t) \in \mathfrak{R}; \ddot{Q}_0(t) = -\ddot{\alpha}_2(t) \cdot \text{sen } \alpha_2(t) - \dot{\alpha}_2^2(t) \cdot \text{cos } \alpha_2(t);$$

$$\ddot{Q}_1(t) \in \mathfrak{R}; \ddot{Q}_1(t) = \pm \ddot{\alpha}_2(t) \cdot \text{cos } \alpha_2(t) \mp \dot{\alpha}_2^2(t) \cdot \text{sen } \alpha_2(t)$$

Aquí,  $\ddot{\alpha}_1(t) \in \mathfrak{R}$  y  $\ddot{\alpha}_2(t) \in \mathfrak{R}$  son las aceleraciones angulares de los eslabones  $E_1$  y  $E_2$ , los cuales componen al robot  $R_0$  motivo de estudio.

### 3.5 Formulación del problema cinemático directo de aceleración

En esta sección se formulará un problema de fundamental importancia en la cinemática de cuerpos rígidos: "el problema directo de aceleración". Dicho problema está asociado con la configuración deformada de multicuerpo en estudio mostrada en la figura 1.5.

“Dados:  $\ddot{P}(t) = \{\ddot{P}_0(t), \ddot{P}_1(t)\}$  ; con  $\ddot{P}_0(t)P_0(t) + \dot{P}_0^2(t) + \ddot{P}_1(t)P_1(t) + \dot{P}_1^2(t) = 0$  y

$\ddot{Q}(t) = \{\ddot{Q}_0(t), \ddot{Q}_1(t)\}$ ; con  $\ddot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_0^2(t) + \ddot{Q}_1(t)Q_1(t) + \dot{Q}_1^2(t) = 0$ ;

$\dot{P}(t) = \{\dot{P}_0(t), \dot{P}_1(t)\}$  ;  $\dot{Q}(t) = \{\dot{Q}_0(t), \dot{Q}_1(t)\}$  ; con  $\dot{P}_0(t)P_0(t) + \dot{P}_1(t)P_1(t) = 0$  y

$\dot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_1(t)Q_1(t) = 0$ ;  $l_1, l_2 \in \mathfrak{R}$ ;  $P(t) = \{P_0(t), P_1(t)\}$  ;  $\overline{P}(t) = \{P_0(t), -P_1(t)\}$ ;

$Q(t) = \{Q_0(t), Q_1(t)\}$ ;  $\overline{Q}(t) = \{Q_0(t), -Q_1(t)\}$  con  $\|P(t)\| = \|Q(t)\| = 1$ ;  $p = \{p_0, p_1\}$  ;

$q = \{q_0, q_1\}$ ; con  $\|p\| = \|q\| = 1$ ; encuentre  $\underline{r}'_{\text{POT},0}(t) \in \mathfrak{R}^2$  tal que la expresión (3.6) sea satisfecha”

El problema directo de aceleración asociado al robot  $R_0$  en estudio genera un sistema de 2 ecuaciones diferenciales no lineales y 2 incógnitas.

### 3.6 Problema cinemático inverso de aceleración

En esta sección es formulado otro problema de fundamental importancia en la cinemática de cuerpos rígidos: “el problema inverso de aceleración”. Dicho problema está asociado con la configuración deformada de  $R_0$  mostrada en la figura 1.5.

“Dados:  $\underline{r}'_{\text{POT},0}(t) \in \mathfrak{R}^2$ ;  $l_1, l_2 \in \mathfrak{R}$ ;  $\dot{P}(t) = \{\dot{P}_0(t), \dot{P}_1(t)\}$  ;  $\dot{Q}(t) = \{\dot{Q}_0(t), \dot{Q}_1(t)\}$  con

$\dot{P}_0(t)P_0(t) + \dot{P}_1(t)P_1(t) = 0$  y  $\dot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_1(t)Q_1(t) = 0$ ;  $P(t) = \{P_0(t), P_1(t)\}$ ;

$\overline{P}(t) = \{P_0(t), -P_1(t)\}$ ;  $Q(t) = \{Q_0(t), Q_1(t)\}$ ;  $\overline{Q}(t) = \{Q_0(t), -Q_1(t)\}$ ; con  $\|P(t)\| = \|Q(t)\| = 1$ ;

$p = \{p_0, p_1\}$  ;  $q = \{q_0, q_1\}$ ; con  $\|p\| = \|q\| = 1$ ; encuentre  $\ddot{P}(t) = \{\ddot{P}_0(t), \ddot{P}_1(t)\}$  ; y

$\ddot{Q}(t) = \{\ddot{Q}_0(t), \ddot{Q}_1(t)\}$  tal que la expresión (3.6) sea satisfecha y,

- 1)  $\ddot{P}_0(t)P_0(t) + \dot{P}_0^2(t) + \ddot{P}_1(t)P_1(t) + \dot{P}_1^2(t) = 0$
- 2)  $\ddot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_0^2(t) + \ddot{Q}_1(t)Q_1(t) + \dot{Q}_1^2(t) = 0$ ”

## Capítulo 4

### Ecuaciones de movimiento: análisis de trayectoria

**Introducción.** El análisis, modelación y simulación de una trayectoria continua se inicia generando las ecuaciones de movimiento que reflejan un ciclo simple de operación. Las ecuaciones de movimiento están constituidas por las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración referidas al extremo final del manipulador que realiza un trabajo, la definición de estas ecuaciones estarán basadas en la caracterización de lugares geométricos y el perfil teórico de velocidades para posteriormente proseguir con la metodología desarrollada en [15,19,20].

#### 4.1 Descripción del ciclo de operación

En esta sección se describe el ciclo de operación usado por el manipulador  $R_0$  motivo de estudio. Cada uno de los desplazamientos del manipulador son realizados sobre un plano  $(x, y)$ . El ciclo completo de la operación se muestra en la figura 4.1.

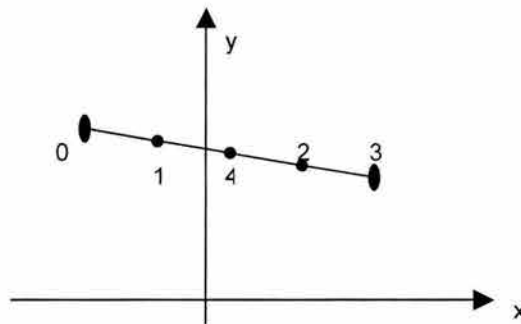


Figura 4.1 Ciclo de operación del manipulador

La descripción del ciclo es la siguiente: la herramienta H del manipulador estará en el punto 0, posteriormente se desplazará hacia 3, pasando por los puntos 1 y 2, luego vuelve a 0 pasando por el punto 4.

#### 4.2 Caracterización de lugares geométricos

De acuerdo con la figura 4.1 la herramienta del manipulador deberá de pasar por 5 puntos localizados sobre el plano  $(x, y)$  partiendo de 0. Cada uno de los puntos caracteriza en términos del proceso al ciclo de operación; esto es:



- 1) Lugares geométricos de ida.
- 2) Lugares geométricos de vuelta.

La unión de ambos conjuntos de lugares geométricos conforman un ciclo operativo [21].

Sea  $L_{i+1,i}$  la representación de un lugar geométrico  $i$ -ésimo, entonces:

$$L_{ida} = \{ L_{1,0}, L_{2,1}, L_{3,2} \}$$

$$L_{vuelta} = \{ L_{4,3}, L_{0,4} \}$$

Es importante señalar que un ciclo operativo está caracterizado por dos tipos de lugares geométricos de proceso [21]:

- 1) Lugares geométricos fijos.
- 2) Lugares geométricos modificables.

Por ejemplo,  $L_{1,0}$ ,  $L_{2,1}$ , y  $L_{3,2}$ , son lugares fijos, pues caracterizan la operación principal del proceso. En tanto  $L_{4,3}$ , y  $L_{0,4}$ , son lugares geométricos modificables. Dichos lugares geométricos se muestran en la figura 4.2.

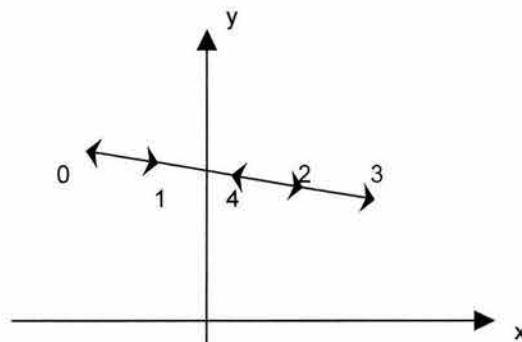


Figura 4.2 Lugares geométricos fijos y modificables

Las rutas de trabajo fijas o lugares geométricos fijos se caracterizan por dos aspectos fundamentales [21]:

- 1) Su forma geométrica ya está definida.
- 2) Las velocidades de operación asociadas con dichas rutas generalmente son fijas y conocidas.

Para el caso de lugares geométricos modificables tanto sus formas geométricas como las velocidades operativas asociadas pueden ser cambiadas. De hecho, éstas rutas de trabajo determinan en general, las capacidades o rangos de producción de la maquinaria de trabajo; de ahí radica su gran importancia.

### 4.3 El perfil de velocidades teórico

Considere que  $V_1$  es la velocidad que el manipulador alcanzará al realizar la operación principal, la herramienta H de dicho manipulador se desplazará sobre los lugares geométricos  $\{L_{1,0}, L_{2,1}, L_{3,2}\}$ . Sea  $G_1$  la gráfica preliminar de la velocidad  $V_1$  [15,19,20]. El perfil de velocidad es el mostrado en la figura 4.3.

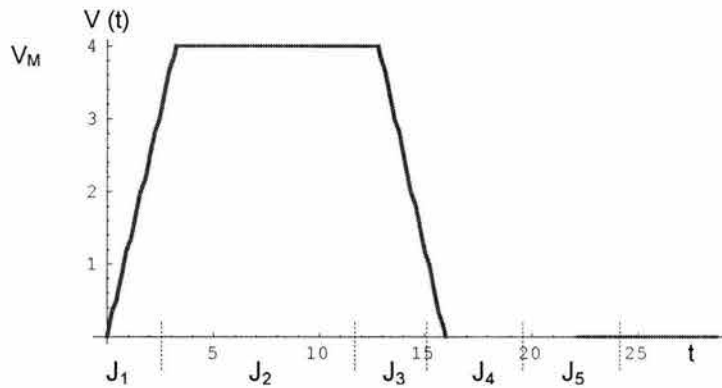


Figura 4.3 Perfil de velocidades preliminar

Note en la figura anterior que la función velocidad  $V: \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{R}$  asociada con la gráfica  $G_1 \subset \mathfrak{T} \times \mathfrak{R}$  está definida sobre los intervalos de tiempo  $J_1, J_2, J_3$ , en tanto que los intervalos  $J_4, J_5$ , no están definidos. Sobre estos últimos intervalos se deben definir las gráficas de velocidad relacionadas con los lugares geométricos modificables.

Para poder caracterizar el perfil de velocidades teórico asociado con el ciclo operativo del manipulador, es necesario proponer o completar la gráfica  $G_{V_1} \subset \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{R}$  por medio de alguna función o "funciones conectoras". Estas funciones deben satisfacer el requisito de ser continuas y diferenciables sobre todo el intervalo de tiempo en el cual serán definidas.

Cualesquier gráfica que se defina sobre dichos intervalos es funcional (siempre que dicha gráfica represente a una función). Para el caso del estudio analizado en este trabajo se considerarán las gráficas más sencillas, es decir, líneas rectas para caracterizar el perfil de velocidades teórico. Dicho perfil se muestra en la figura 4.4.

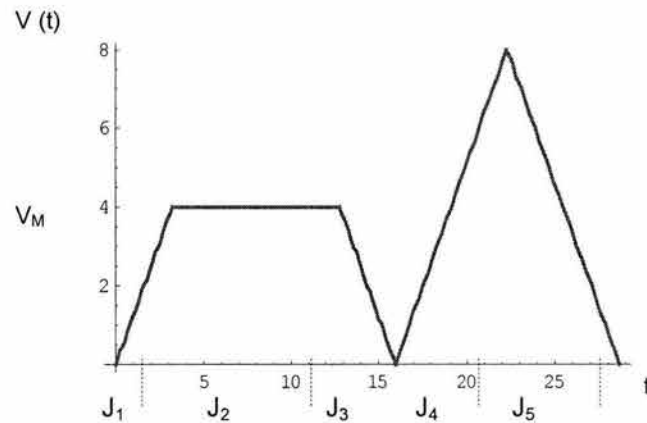


Figura 4.4 Perfil teórico de velocidades

Observe en la figura 4.4 que se han redefinido nuevos intervalos y se han definido nuevos puntos sobre la gráfica  $G_{Vl} \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ . Además,  $V_m \in \mathbb{R}$  es una velocidad conocida. Los intervalos de tiempo definitivos se caracterizarán de la manera siguiente:

- 1)  $J_1 = \{ t \in J_1 \mid S_0 \leq t \leq S_1 \}$  (4.1)
- 2)  $J_2 = \{ t \in J_2 \mid S_1 \leq t \leq S_2 \}$
- 3)  $J_3 = \{ t \in J_3 \mid S_2 \leq t \leq S_3 \}$
- 4)  $J_4 = \{ t \in J_4 \mid S_3 \leq t \leq S_4 \}$
- 5)  $J_5 = \{ t \in J_5 \mid S_4 \leq t \leq S_5 \}$

#### 4.4 Caracterización de las ecuaciones de movimiento

En esta sección se utilizará la metodología desarrollada en [15,19,20] para determinar las ecuaciones de movimiento asociadas con el ciclo operativo del manipulador.

Para ello, los lugares geométricos o rutas de trabajo del manipulador en estudio serán definidas en el espacio-tiempo. Considere que la herramienta H asociada con el manipulador tipo RR se desplazará sobre el conjunto de rectas que componen el ciclo operativo definido en el espacio-tiempo según se muestra en la figura 4.5.

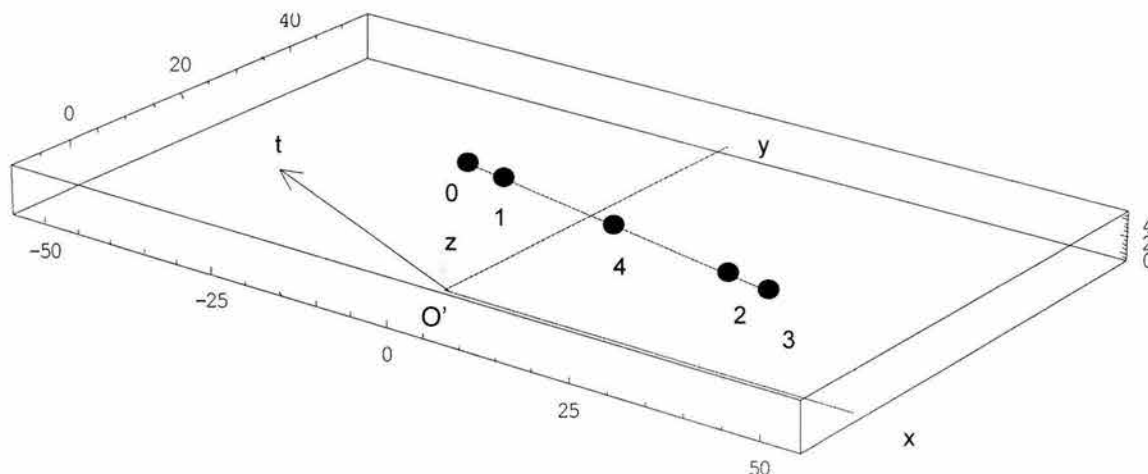


Figura 4.5 Definición de lugares geométricos en el espacio-tiempo

Las coordenadas de cada punto localizado sobre las rutas que componen el ciclo operativo medidas desde el origen de coordenadas  $O'$  ; se determinan de la manera siguiente:

$$\underline{R_{i,0'}}(t) = (x, y, z, t) ; \quad J = 0, \dots, 5 \quad (4.2)$$

El interés es centrado ahora sobre la determinación de las coordenadas de los puntos extremos de cada lugar geométrico relacionado al ciclo operativo relativos al origen " $O'$ " y al punto antecesor o extremo inicial del lugar geométrico seleccionado.

La figura 4.6 muestra vectores de posición que determinan las coordenadas de los puntos extremos finales de cada pedazo de ruta de trabajo.

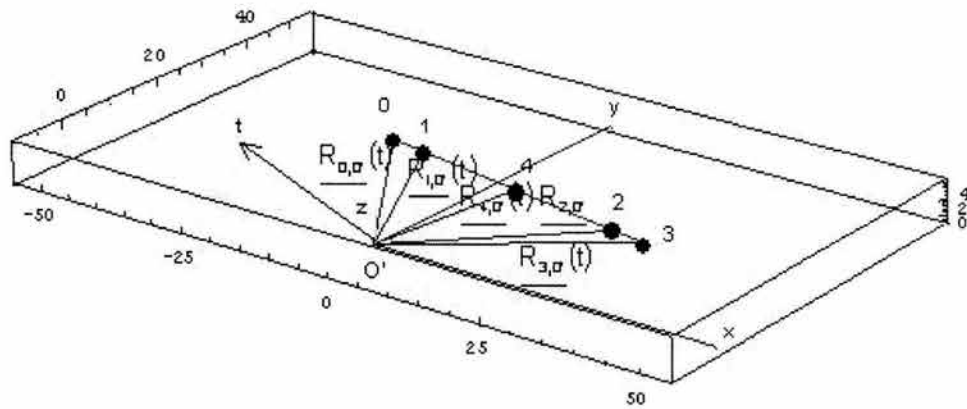


Figura 4.6 Vectores de posición en el espacio-tiempo

Cada punto asociado con el lugar geométrico del ciclo operativo del manipulador se determina desde "o'" por medio de las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{R_{1,0'}(t)} &= \underline{R_{0,0'}(t_0)} + \underline{R_{1,0}(t)} & (4.3) \\
 2) \quad \underline{R_{2,0'}(t)} &= \underline{R_{1,0'}(t)} + \underline{R_{2,1}(t)} \\
 3) \quad \underline{R_{3,0'}(t)} &= \underline{R_{2,0'}(t)} + \underline{R_{3,2}(t)} \\
 4) \quad \underline{R_{4,0'}(t)} &= \underline{R_{3,0'}(t)} + \underline{R_{4,3}(t)} \\
 5) \quad \underline{R_{0,0'}(t)} &= \underline{R_{4,0'}(t)} + \underline{R_{0,4}(t)}
 \end{aligned}$$

#### 4.5 Proyección de los vectores de posición sobre los planos del sistema (x, y, z, t)

El objetivo ahora es proyectar los vectores de posición mostrados en la figura 4.6 sobre los planos (x, y) y (y, z) [15,19,20]. Cada vector proyectado satisface una de las dos relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \Pi(\underline{R_{i,0'}(t)}) &= \underline{r_{i,0'}(t)} & (4.4) \\
 2) \quad \Pi(\underline{R_{i,i+1}(t)}) &= \underline{r_{i,i+1}(t)}
 \end{aligned}$$

Aquí,  $\underline{r}_{i,0'}(t) \in \mathbb{R}^3$  y  $\underline{R}_{i,0'}(t) \in \mathbb{R}^4$

La figura 4.7 muestra las proyecciones de los vectores sobre los planos correspondientes:

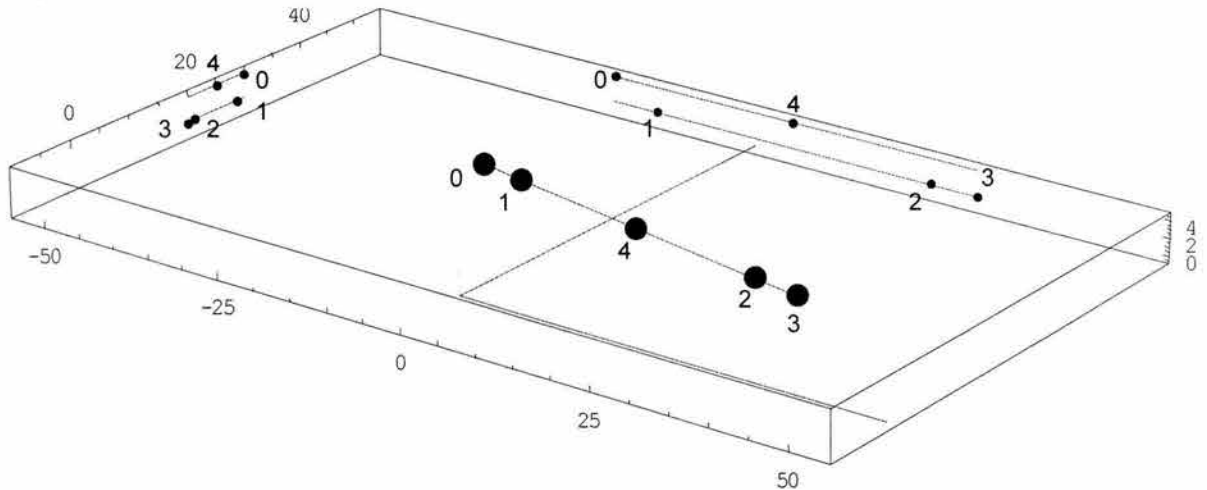


Figura 4.7 Vectores de posición proyectados

Las coordenadas de los puntos proyectados se determinan de la manera siguiente:

- 1)  $\underline{r}_{1,0'}(t) = \underline{r}_{0,0'}(t_0) + \underline{r}_{1,0}(t)$  (4.5)
- 2)  $\underline{r}_{2,0'}(t) = \underline{r}_{1,0'}(t) + \underline{r}_{2,1}(t)$
- 3)  $\underline{r}_{3,0'}(t) = \underline{r}_{2,0'}(t) + \underline{r}_{3,2}(t)$
- 4)  $\underline{r}_{4,0'}(t) = \underline{r}_{3,0'}(t) + \underline{r}_{4,3}(t)$
- 5)  $\underline{r}_{0,0'}(t) = \underline{r}_{4,0'}(t) + \underline{r}_{0,4}(t)$

#### 4.6 Definición de bases locales y la base canónica

Para poder determinar las direcciones del movimiento de la herramienta H es necesario definir sistemas locales de referencia sobre cada punto inicial de los lugares geométricos[15,19,20]. Dichas direcciones serán referidas con respecto a la

base inercial fija localizada en el origen de coordenadas. La figura 4.8 muestra las bases anteriormente señaladas.

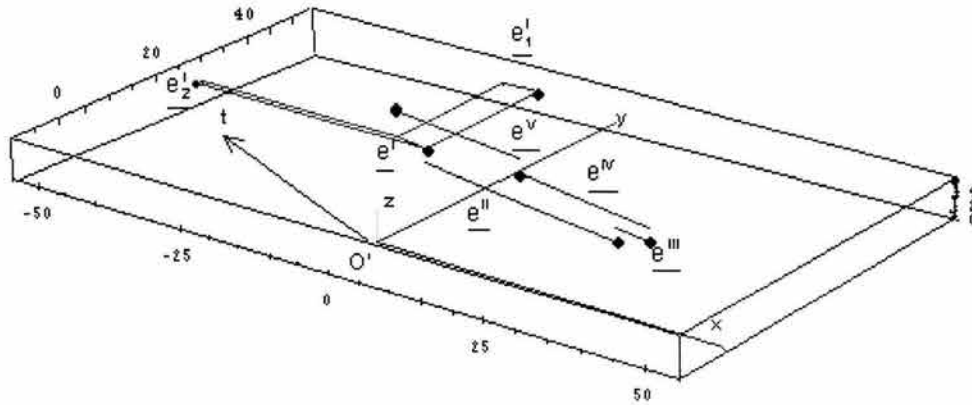


Figura 4.8 Definición de bases locales

De acuerdo con la figura 4.8, los vectores de posición  $\underline{r}_{i+1,i} \in \mathfrak{R}^3$  se pueden representar en términos de las bases locales de la manera siguiente:

- 1)  $\underline{r}_{1,0}(t) = l_{1,0}(t) \bullet \underline{e}^I$  (4.6)
- 2)  $\underline{r}_{2,1}(t) = l_{2,1}(t) \bullet \underline{e}^{II}$
- 3)  $\underline{r}_{3,2}(t) = l_{3,2}(t) \bullet \underline{e}^{III}$
- 4)  $\underline{r}_{4,3}(t) = l_{4,3}(t) \bullet \underline{e}^{IV}$
- 5)  $\underline{r}_{0,4}(t) = l_{0,4}(t) \bullet \underline{e}^V$

Aquí,  $l_{1,0}(t)$ ,  $l_{2,1}(t)$ ,  $l_{3,2}(t)$ ,  $l_{4,3}(t)$ ,  $l_{0,4}(t) \in \mathfrak{R}$  son las longitudes medidas con respecto al tiempo  $t \in \mathfrak{T}$  asociadas con los vectores de posición proyectados.

## 4.7 Ecuaciones de posición

De acuerdo con las expresiones (4.6) las ecuaciones de posición (4.5) se pueden escribir en términos de las bases locales, esto es:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{r}_{1,0'}(t) &= \underline{r}_{0,0'}(t_0) + \ell_{1,0}(t) \bullet \underline{e}^I & (4.7) \\ 2) \quad \underline{r}_{2,0'}(t) &= \underline{r}_{1,0'}(t) + \ell_{2,1}(t) \bullet \underline{e}^{II} \\ 3) \quad \underline{r}_{3,0'}(t) &= \underline{r}_{2,0'}(t) + \ell_{3,2}(t) \bullet \underline{e}^{III} \\ 4) \quad \underline{r}_{4,0'}(t) &= \underline{r}_{3,0'}(t) + \ell_{4,3}(t) \bullet \underline{e}^{IV} \\ 5) \quad \underline{r}_{0,0'}(t) &= \underline{r}_{4,0'}(t) + \ell_{0,4}(t) \bullet \underline{e}^V \end{aligned}$$

## 4.8 Ecuaciones de velocidad

Una vez determinadas las ecuaciones de posición en términos de las direcciones del movimiento de la herramienta H, el objetivo ahora es encontrar las velocidades de dicha herramienta cuando pasa por los puntos extremos (o cualesquiera) de los lugares geométricos relacionados al ciclo operativo del manipulador[15,19,20]. Para encontrar dichas velocidades basta con derivar con respecto al tiempo  $t \in \mathfrak{T}$  las expresiones (4.5), esto es:

$$\begin{aligned} 1) \quad \dot{\underline{r}}_{1,0'}(t) &= \dot{\underline{r}}_{1,0}(t) & (4.8) \\ 2) \quad \dot{\underline{r}}_{2,0'}(t) &= \dot{\underline{r}}_{1,0'}(t) + \dot{\underline{r}}_{2,1}(t) \\ 3) \quad \dot{\underline{r}}_{3,0'}(t) &= \dot{\underline{r}}_{2,0'}(t) + \dot{\underline{r}}_{3,2}(t) \\ 4) \quad \dot{\underline{r}}_{4,0'}(t) &= \dot{\underline{r}}_{3,0'}(t) + \dot{\underline{r}}_{4,3}(t) \\ 5) \quad \dot{\underline{r}}_{0,0'}(t) &= \dot{\underline{r}}_{4,0'}(t) + \dot{\underline{r}}_{0,4}(t) \end{aligned}$$



Observe que las derivadas de los vectores de posición localizados en la extrema derecha de las expresiones (4.8) pueden ser representados en términos de las bases locales de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{\dot{r}}_{1,0}(t) &= \dot{\ell}_{1,0}(t) \bullet \underline{e}^I & (4.9) \\
 2) \quad \underline{\dot{r}}_{2,1}(t) &= \dot{\ell}_{2,1}(t) \bullet \underline{e}^{II} \\
 3) \quad \underline{\dot{r}}_{3,2}(t) &= \dot{\ell}_{3,2}(t) \bullet \underline{e}^{III} \\
 4) \quad \underline{\dot{r}}_{4,3}(t) &= \dot{\ell}_{4,3}(t) \bullet \underline{e}^{IV} \\
 5) \quad \underline{\dot{r}}_{0,4}(t) &= \dot{\ell}_{0,4}(t) \bullet \underline{e}^V
 \end{aligned}$$

Aquí,  $\dot{\ell}_{1,0}(t)$ ,  $\dot{\ell}_{2,1}(t)$ ,  $\dot{\ell}_{3,2}(t)$ ,  $\dot{\ell}_{4,3}(t)$ ,  $\dot{\ell}_{0,4}(t) \in \Re$  son las magnitudes de velocidad instantánea sobre los puntos de interés localizados en los lugares geométricos que componen el ciclo operativo motivo de estudio. Las ecuaciones (4.8) se escriben, de acuerdo con las ecuaciones (4.9) en términos de las bases locales, esto es:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{\dot{r}}_{1,0'}(t) &= \dot{\ell}_{1,0}(t) \bullet \underline{e}^I & (4.10) \\
 2) \quad \underline{\dot{r}}_{2,0'}(t) &= \underline{\dot{r}}_{1,0'}(t) + \dot{\ell}_{2,1}(t) \bullet \underline{e}^{II} \\
 3) \quad \underline{\dot{r}}_{3,0'}(t) &= \underline{\dot{r}}_{2,0'}(t) + \dot{\ell}_{3,2}(t) \bullet \underline{e}^{III} \\
 4) \quad \underline{\dot{r}}_{4,0'}(t) &= \underline{\dot{r}}_{3,0'}(t) + \dot{\ell}_{4,3}(t) \bullet \underline{e}^{IV} \\
 5) \quad \underline{\dot{r}}_{0,0'}(t) &= \underline{\dot{r}}_{4,0'}(t) + \dot{\ell}_{0,4}(t) \bullet \underline{e}^V
 \end{aligned}$$

## 4.9 Ecuaciones de aceleración

El interés es centrado ahora en determinar las aceleraciones de la herramienta H sobre los puntos extremos de los lugares geométricos (o cualquier punto de dichos lugares) [15,19,20]. Las ecuaciones de aceleración son obtenidas al derivar con respecto al tiempo  $t \in \mathfrak{T}$  las expresiones (4.8); esto es:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{\ddot{r}}_{1,0'}(t) &= \underline{\ddot{r}}_{1,0}(t) & (4.11) \\ 2) \quad \underline{\ddot{r}}_{2,0'}(t) &= \underline{\ddot{r}}_{1,0'}(t) + \underline{\ddot{r}}_{2,1}(t) \\ 3) \quad \underline{\ddot{r}}_{3,0'}(t) &= \underline{\ddot{r}}_{2,0'}(t) + \underline{\ddot{r}}_{3,2}(t) \\ 4) \quad \underline{\ddot{r}}_{4,0'}(t) &= \underline{\ddot{r}}_{3,0'}(t) + \underline{\ddot{r}}_{4,3}(t) \\ 5) \quad \underline{\ddot{r}}_{0,0'}(t) &= \underline{\ddot{r}}_{4,0'}(t) + \underline{\ddot{r}}_{0,4}(t) \end{aligned}$$

Los vectores de aceleración localizados en la extrema derecha de las ecuaciones (4.11) se pueden representar en términos de las bases locales al derivar con respecto al tiempo  $t \in \mathfrak{T}$  las expresiones (4.9), esto es:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{\ddot{r}}_{1,0}(t) &= \underline{\dot{\ell}}_{1,0}(t) \bullet \underline{e}^I & (4.12) \\ 2) \quad \underline{\ddot{r}}_{2,1}(t) &= \underline{\dot{\ell}}_{2,1}(t) \bullet \underline{e}^{II} \\ 3) \quad \underline{\ddot{r}}_{3,2}(t) &= \underline{\dot{\ell}}_{3,2}(t) \bullet \underline{e}^{III} \\ 4) \quad \underline{\ddot{r}}_{4,3}(t) &= \underline{\dot{\ell}}_{4,3}(t) \bullet \underline{e}^V \\ 5) \quad \underline{\ddot{r}}_{0,4}(t) &= \underline{\dot{\ell}}_{0,4}(t) \bullet \underline{e}^V \end{aligned}$$

Aquí,  $\dot{\ell}_{1,0}(t)$ ,  $\dot{\ell}_{2,1}(t)$ ,  $\dot{\ell}_{3,2}(t)$ ,  $\dot{\ell}_{4,3}(t)$ ,  $\dot{\ell}_{0,4}(t)$ ,  $\in \mathbb{R}$  son las magnitudes de aceleración asociadas con la herramienta que se desplaza por el ciclo operativo del manipulador cartesiano. Las ecuaciones de aceleración (4.11) se pueden escribir, con base en las expresiones (4.12), en términos de las bases locales de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{\ddot{r}}_{1,0'}(t) &= \underline{\ddot{l}}_{1,0}(t) \bullet \underline{e}^I & (4.13) \\
 2) \quad \underline{\ddot{r}}_{2,0'}(t) &= \underline{\ddot{r}}_{1,0'}(t) + \underline{\ddot{\ell}}_{2,1}(t) \bullet \underline{e}^{II} \\
 3) \quad \underline{\ddot{r}}_{3,0'}(t) &= \underline{\ddot{r}}_{2,0'}(t) + \underline{\ddot{\ell}}_{3,2}(t) \bullet \underline{e}^{III} \\
 4) \quad \underline{\ddot{r}}_{4,0'}(t) &= \underline{\ddot{r}}_{3,0'}(t) + \underline{\ddot{\ell}}_{4,3}(t) \bullet \underline{e}^{IV} \\
 5) \quad \underline{\ddot{r}}_{0,0'}(t) &= \underline{\ddot{r}}_{4,0'}(t) + \underline{\ddot{\ell}}_{0,4}(t) \bullet \underline{e}^V
 \end{aligned}$$

Las expresiones (4.7), (4.10), y (4.13) representan las ecuaciones de movimiento asociadas a la herramienta H que se desplaza por el ciclo operativo del manipulador tipo RR motivo de estudio.

#### 4.10 Caracterización de los perfiles de trayectoria

En esta sección se presenta el análisis funcional de los perfiles de desplazamiento, velocidad y aceleración relacionados con las magnitudes cinemáticas de la herramienta H [15,19,20]. Para iniciar este análisis se tomará en cuenta la gráfica del perfil de velocidades mostrado en la figura 4.4

##### 4.10.1 Funciones temporales

El objetivo en esta sección es discutir en términos generales, las funciones temporales relacionadas con las gráficas de los perfiles de trayectoria. El motivo de expresar las ecuaciones de movimiento relacionadas a la herramienta H, en términos de las magnitudes cinemáticas y en las direcciones del movimiento, caracterizados

por un vector unitario, es por el hecho de que dichas magnitudes se pueden representar por funciones.

De este modo, es posible determinar las magnitudes de posición, velocidad y aceleración de la herramienta H sobre cualesquier punto localizado en los lugares geométricos que componen el ciclo operativo.

Para poder encontrar las funciones temporales es necesario seguir los pasos de la metodología desarrollada en [15,19,20], esto es :

- 1) Caracterizar las funciones temporales asociadas al perfil de velocidades en los intervalos de tiempo correspondientes.
- 2) Determinar las funciones temporales y la gráfica del perfil de aceleraciones una vez caracterizadas las funciones temporales de velocidad.
- 3) Construir las funciones temporales y la gráfica del perfil de posición una vez determinadas las funciones temporales de velocidad.

En cada uno de los pasos anteriormente descritos se deben usar condiciones iniciales y finales definidas en cada extremo de los intervalos de tiempo[15,19,20]. El hecho por el cual se inicia el análisis de funciones temporales tomando en cuenta el perfil de velocidades, es porque dicho perfil de alguna manera es conocido. En otras palabras, la gran mayoría de los problemas de trayectoria los datos conocidos son las velocidades de operación (o se calculan) y, por tanto, ya es conocido una parte del perfil de velocidades. Las velocidades de acercamiento o retiro de la herramienta se asignan o se calculan y, con esto, se completa dicho perfil.

Las funciones temporales obtenidas del perfil de velocidades deben satisfacer dos condiciones[15,19,20]:

- 1) Que sean al menos una vez continuamente diferenciables en  $J \subset [0, +\infty)$ .
- 2) Que pueda ser integrable en  $J \subset [0, +\infty)$ .

Con la primera condición es posible obtener las funciones temporales de las aceleraciones y su correspondiente gráfica, esto es, al derivar con respecto al tiempo, las funciones de velocidad. Por otro lado, con la segunda condición se obtiene, a partir de la integración con respecto al tiempo de las funciones de velocidad, las funciones de desplazamiento y su correspondiente gráfica.

En términos generales, conocido cualquier perfil de trayectoria y sus correspondientes funciones temporales, se pueden obtener los dos restantes y sus funciones [15,19,20]. En cada caso, se deben satisfacer condiciones de diferenciabilidad e integración. Las siguientes relaciones son de fundamental importancia en este trabajo:

Sean  $f : \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{R}$ ,  $\dot{f} : \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{R}$  y  $\ddot{f} : \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{R}$  tres funciones temporales que caracterizan las magnitudes de desplazamiento, velocidad y aceleración respectivamente. Entonces:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & f_{J+1,J}(t) \equiv \ell_{J+1,J}(t); \quad J = 0, \dots, 5 & (4.14) \\
 2) \quad & \dot{f}_{J+1,J}(t) \equiv \dot{\ell}_{J+1,J}(t); \quad J = 0, \dots, 5 \\
 3) \quad & \ddot{f}_{J+1,J}(t) \equiv \ddot{\ell}_{J+1,J}(t); \quad J = 0, \dots, 5
 \end{aligned}$$

Las relaciones anteriormente descritas permitirán asociar funciones temporales con los lugares geométricos relacionados con el ciclo operativo de la herramienta H.

#### 4.11 Generación de funciones temporales para el perfil de velocidades

En esta sección se obtendrán las funciones temporales asociadas al perfil teórico de velocidades mostrado en la figura 4.4. Para ello, considere el siguiente problema:

Dado  $G_{VI}^T \subset \mathfrak{T} \times \mathfrak{R}$ ,  $V_M \in \mathfrak{R}$ ,  $V_I \in \mathfrak{R}$ ,  $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 \in [0, +\infty)$ , encuentre:

- 1)  $\dot{f}_{S1,S0}(t)$  en  $J_1$  (4.15)
- 2)  $\dot{f}_{S2,S1}(t)$  en  $J_2$
- 3)  $\dot{f}_{S3,S2}(t)$  en  $J_3$
- 4)  $\dot{f}_{S4,S3}(t)$  en  $J_4$
- 5)  $\dot{f}_{S5,S4}(t)$  en  $J_5$

tal que:

- i)  $CI = \hat{CI}$
- ii)  $CF = \hat{CF}$

sean satisfechas”.

Aquí CI y CF son las condiciones iniciales y finales de cada segmento del perfil de velocidades y en cada  $J_i$ ,  $i = 0, \dots, 5$  asociado. Es importante señalar que una vez obtenidas las funciones temporales de velocidad en cada segmento, será posible construir la función general asociada al perfil teórico de velocidades, esto es:

$$\dot{f}_G(t) = \dot{f}_{S1,S0}(t) + \dot{f}_{S2,S1}(t) + \dot{f}_{S3,S2}(t) + \dot{f}_{S4,S3}(t) + \dot{f}_{S5,S4}(t) \quad (4.16)$$

Por otro lado, puesto que los segmentos que componen al perfil de velocidades (ver figura 4.4) son líneas rectas, entonces es posible usar el siguiente polinomio para encontrar las funciones temporales.

$$\dot{f}_{i+1,i}(t) = \alpha_0 + \alpha_1(t) \quad (4.17)$$

Por tanto, el objetivo es determinar los coeficientes de la expresión (4.17) en cada uno de los intervalos de tiempo correspondiente.

### 4.11.1 Determinación de las funciones temporales de velocidad

En esta sección se mostrará el procedimiento a seguir [15,19,20] para encontrar las funciones temporales de velocidad en los intervalos  $J_1, J_2, J_3, J_4, J_5$ .

- **Función temporal en  $J_1$**

Considere el siguiente problema:

“Dado  $V_1 \in \mathfrak{R}, J_1$

encuentre  $\dot{f}_{S_1, S_0}(t) = \alpha_0 + \alpha_1(t)$

tal que:

1)  $\dot{f}_{S_1, S_0}(S_0) = 0$

2)  $\dot{f}_{S_1, S_0}(S_1) = V_1$

sean satisfechas”.

Dicho problema está asociado con la figura 4.4. La solución al problema anteriormente planteado es la siguiente:

1)  $\dot{f}_{S_1, S_0}(S_0) = 0 = \alpha_0 + \alpha_1(S_0) \quad ; \quad S_0 = 0$

2)  $\dot{f}_{S_1, S_0}(S_1) = V_1 = \alpha_0 + \alpha_1(S_1) \quad ; \quad S_1 = S_1$

Aquí,  $\alpha_0 = 0$       y       $\alpha_1 = \frac{V_1}{S_1 - S_0}$

Por tanto, la función temporal  $f_{1,0} : \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{R}$  queda definida de la manera siguiente:

$$\dot{f}_{S_1, S_0}(t) = \frac{V_1}{S_1 - S_0} (t) \tag{4.18}$$

- **Función temporal en  $J_2$**

La siguiente formulación está asociada con la figura 4.4 :

“Dada  $V_1 \in \mathfrak{R}$ ,  $J_2$

encuentre  $\dot{f}_{S_2, S_1}(t) = \alpha_0 + \alpha_1(t)$

tal que:

$$1) \dot{f}_{S_2, S_1}(S_1) = V_1$$

$$2) \dot{f}_{S_2, S_1}(S_2) = V_1$$

sean satisfechas”.

La solución a este problema se presenta a continuación:

$$1) \dot{f}_{S_2, S_1}(S_1) = V_1 = \alpha_0 + \alpha_1(S_1)$$

$$2) \dot{f}_{S_2, S_1}(S_2) = V_1 = \alpha_0 + \alpha_1(S_2)$$

Aquí,  $\alpha_0 = V_1$  y  $\alpha_1 = 0$

Por tanto, la función temporal  $\dot{f}_{S_2, S_1} : \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{R}$  queda expresada de la manera siguiente:

$$\dot{f}_{S_2, S_1}(t) = V_1 \tag{4.19}$$

### • **Función temporal en $J_3$**

Considere el siguiente problema:

“Dadas:  $V_1 \in \mathfrak{R}$ ,  $J_3$

encuentre:  $\dot{f}_{S_3, S_2}(t) = \alpha_0 + \alpha_1(t)$

tal que:

$$1) \dot{f}_{S_3, S_2}(S_2) = V_1$$

$$2) \dot{f}_{S_3, S_2}(S_3) = 0$$

sean satisfechas”.



La solución a este problema se presenta a continuación:

$$1) \dot{f}_{S_3, S_2}(S_2) = V_1 = \alpha_0 + \alpha_1(S_2)$$

$$2) \dot{f}_{S_3, S_2}(S_3) = 0 = \alpha_0 + \alpha_1(S_3)$$

$$\text{Aquí, } \alpha_0 = \frac{V_1}{S_3 - S_2}(S_3) \quad \text{y} \quad \alpha_1 = \frac{V_1}{S_2 - S_3}$$

La función temporal de velocidad en  $J_3$  es:

$$\dot{f}_{S_3, S_2}(t) = \frac{V_1}{S_3 - S_2}(S_3) + \frac{V_1}{S_2 - S_3}(t) \quad (4.20)$$

• **Función temporal en  $J_4$**

El problema que será formulado a continuación está relacionado con la figura 4.4.

“Dado:  $V_M \in \mathfrak{R}$  y  $J_4$

encuentre:  $\dot{f}_{S_4, S_3}(t) = \alpha_0 + \alpha_1(t)$

tal que:

$$1) \dot{f}_{S_4, S_3}(S_3) = 0$$

$$2) \dot{f}_{S_4, S_3}(S_4) = V_M$$

sean satisfechas”.

La solución a este problema se presenta a continuación:

$$1) \dot{f}_{S_4, S_3}(S_3) = 0 = \alpha_0 + \alpha_1(S_3)$$

$$2) \dot{f}_{S_4, S_3}(S_4) = V_M = \alpha_0 + \alpha_1(S_4)$$

$$\text{Aquí, } \alpha_0 = \frac{V_M}{S_3 - S_4}(S_3) \quad \text{y} \quad \alpha_1 = \frac{V_M}{S_4 - S_3}$$

La función temporal de velocidad en  $J_3$  es:

$$\dot{f}_{s_4, s_3}(t) = \frac{V_M}{s_3 - s_4} (s_3) + \frac{V_M}{s_4 - s_3} (t) \quad (4.21)$$

• **Función temporal en  $J_5$**

Considere el siguiente problema:

“Dado:  $V_M \in \mathbb{R}$  y  $J_5$

encuentre:  $\dot{f}_{s_5, s_4}(t) = \alpha_0 + \alpha_1(t)$

tal que:

$$1) \dot{f}_{s_5, s_4}(s_4) = V_M$$

$$2) \dot{f}_{s_5, s_4}(s_5) = 0$$

sean satisfechas”.

La solución a este problema se presenta a continuación:

$$1) \dot{f}_{s_5, s_4}(s_4) = V_M = \alpha_0 + \alpha_1(s_4)$$

$$2) \dot{f}_{s_5, s_4}(s_5) = 0 = \alpha_0 + \alpha_1(s_5)$$

$$\text{Aquí, } \alpha_0 = \frac{V_M}{s_5 - s_4} (s_5) \quad \text{y} \quad \alpha_1 = \frac{V_M}{s_4 - s_5}$$

La función temporal definida en  $J_5$  es:

$$\dot{f}_{s_5, s_4}(t) = \frac{V_M}{s_5 - s_4} (s_5) + \frac{V_M}{s_4 - s_5} (t) \quad (4.22)$$

A continuación las funciones temporales de velocidad antes obtenidas son reescritas en forma resumida; esto es:

$$1) \dot{f}_{s_1, s_0}(t) = \frac{V_I}{s_1 - s_0} (t)$$

$$\begin{aligned}
2) \quad \dot{f}_{s_2, s_1}(t) &= V_1 \\
3) \quad \dot{f}_{s_3, s_2}(t) &= \frac{V_1}{s_3 - s_2} (s_3) + \frac{V_1}{s_2 - s_3} (t) \\
4) \quad \dot{f}_{s_4, s_3}(t) &= \frac{V_M}{s_3 - s_4} (s_3) + \frac{V_M}{s_4 - s_3} (t) \\
5) \quad \dot{f}_{s_5, s_4}(t) &= \frac{V_M}{s_5 - s_4} (s_5) + \frac{V_M}{s_4 - s_5} (t)
\end{aligned}
\tag{4.23}$$

Con base en las expresiones (4.23), la función temporal de velocidad dada en la expresión (4.24) se escribe de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
\dot{f}_G(t) &= \frac{V_1}{s_1 - s_0} (t) \Big|_{J_1} + (V_1) \Big|_{J_2} + \left( \frac{V_1}{s_3 - s_2} (s_3) + \frac{V_1}{s_2 - s_3} (t) \right) \Big|_{J_3} + \\
&\left( \frac{V_M}{s_3 - s_4} (s_3) + \frac{V_M}{s_4 - s_3} (t) \right) \Big|_{J_4} + \left( \frac{V_M}{s_5 - s_4} (s_5) + \frac{V_M}{s_4 - s_5} (t) \right) \Big|_{J_5}
\end{aligned}
\tag{4.24}$$

Dicha expresión está asociada al perfil de velocidades mostrado en la figura 4.4.

#### 4.11.2 Generación de las funciones temporales para el perfil de aceleraciones

El interés de esta sección es determinar, a partir de la ecuación (4.24), las correspondientes funciones temporales de aceleración y posteriormente, la función temporal general y la gráfica del perfil de aceleraciones. Para ello, considere el siguiente problema [15,19,20]:

“Dadas, la expresión (4.24),  $V_1 \in \mathbb{R}$ ,  $V_M \in \mathbb{R}$ ,  $J_1$  a  $J_5$ , encuentre:

- 1)  $\ddot{f}_{s_1, s_0}(t)$
- 2)  $\ddot{f}_{s_2, s_1}(t)$
- 3)  $\ddot{f}_{s_3, s_2}(t)$
- 4)  $\ddot{f}_{s_4, s_3}(t)$

$$5) \ddot{f}_{s_5, s_4}(t)$$

Además:

$$\ddot{f}_G(t) \text{ y } G_{al}^T$$

tal que:  $\dot{f}_G(t) \in C'$  en  $J_1$  a  $J_5$ . "

Es importante señalar que la solución al problema, anteriormente planteado, consiste en encontrar las aceleraciones temporales o espaciales en cada intervalo de tiempo y, posteriormente sumar dichas funciones para encontrar la función general temporal de aceleraciones y su gráfica de perfil asociada.

Considere que efectivamente  $\dot{f}_G(t) \in C'$ , entonces:

$$1) \ddot{f}_{s_1, s_0}(t) = \left( \dot{f}_{s_1, s_0}(t) \right)' = \frac{V_i}{s_1 - s_0} \quad , \quad \text{en } J_1$$

$$2) \ddot{f}_{s_2, s_1}(t) = \left( \dot{f}_{s_2, s_1}(t) \right)' = 0 \quad , \quad \text{en } J_2$$

$$3) \ddot{f}_{s_3, s_2}(t) = \left( \dot{f}_{s_3, s_2}(t) \right)' = \frac{V_i}{s_2 - s_3} \quad , \quad \text{en } J_3$$

$$4) \ddot{f}_{s_4, s_3}(t) = \left( \dot{f}_{s_4, s_3}(t) \right)' = \frac{V_M}{s_4 - s_3} \quad , \quad \text{en } J_4$$

$$5) \ddot{f}_{s_5, s_4}(t) = \left( \dot{f}_{s_5, s_4}(t) \right)' = \frac{V_M}{s_5 - s_4} \quad , \quad \text{en } J_5$$

La ecuación temporal de aceleraciones es la siguiente:

$$\ddot{f}_G(t) = \ddot{f}_{s_1, s_0}(t) + \ddot{f}_{s_2, s_1}(t) + \ddot{f}_{s_3, s_2}(t) + \ddot{f}_{s_4, s_3}(t) + \ddot{f}_{s_5, s_4}(t) \quad (4.25)$$

o, equivalentemente:

$$\ddot{f}_G(t) = \frac{V_i}{s_1 - s_0} \Big|_{J_1} + 0 \Big|_{J_2} + \frac{V_i}{s_2 - s_3} \Big|_{J_3} + \frac{V_M}{s_4 - s_3} \Big|_{J_4} + \frac{V_M}{s_5 - s_4} \Big|_{J_5} \quad (4.26)$$

Finalmente, la gráfica del perfil de aceleraciones asociada con la expresión (4.26) se muestra en la figura siguiente:

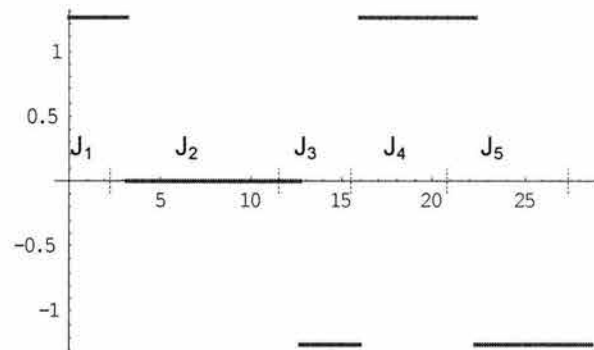


Figura 4.4 Gráfica del perfil de aceleraciones.

#### 4.11.3 Generación de las funciones temporales para el perfil de desplazamientos

En esta sección se generarán las funciones temporales relacionadas con el desplazamiento de la herramienta H. Para ello, se considerará que las funciones temporales asociadas a  $\dot{f}_G(t)$  pueden ser integrables en cada intervalo de tiempo considerado [15,19,20]. Considere ahora el siguiente problema:

“Dada la expresión (4.24),  $V_M \in \mathfrak{R}$ ,  $V_I \in \mathfrak{R}$ ,  $J_1$  a  $J_5$

encuentre:  $f_{S_1, S_0}(t)$  a  $f_{S_4, S_5}(t)$

además,  $f_G(t)$  y  $G_{DI}^i$

tal que:  $\dot{f}_G(t) \in \int$  ”

Para poder encontrar las funciones temporales de desplazamiento, es necesario que la expresión (4.24) sea integrable sobre cada intervalo de tiempo considerado.

Supóngase que la ecuación (4.24) es integrable en todo el dominio de  $f_G : \mathfrak{T} \rightarrow \mathfrak{R}$ , entonces:

$$1) f_{S_1, S_0}(t) = \int_{J_1} \dot{f}_{S_1, S_0}(t) = \left[ \frac{V_1}{2(S_1 - S_0)} (t)^2 \right]_{S_0}^t \quad ; \quad \text{en } J_1 \quad (4.27)$$

$$d_{S_1, S_0} = \left[ \frac{V_1}{2(S_1 - S_0)} (t)^2 \right]_{S_0}^{S_1}$$

$$2) f_{S_2, S_1}(t) = \int_{J_2} \dot{f}_{S_2, S_1}(t) = [V_1(t)]_{S_1}^t + d_{S_1, S_0} \quad ; \quad \text{en } J_2$$

$$d_{S_2, S_1} = [V_1(t)]_{S_1}^{S_2} + d_{S_1, S_0}$$

$$3) f_{S_3, S_2}(t) = \int_{J_3} \dot{f}_{S_3, S_2}(t) = \left[ \frac{V_1(S_2)}{(S_3 - S_2)} (t) + \frac{V_1}{2(S_2 - S_3)} (t)^2 \right]_{S_2}^t + d_{S_2, S_1} \quad ; \quad \text{en } J_3$$

$$d_{S_3, S_2} = \left[ \frac{V_1(S_2)}{(S_3 - S_2)} (t) + \frac{V_1}{2(S_2 - S_3)} (t)^2 \right]_{S_2}^{S_3} + d_{S_2, S_1}$$

$$4) f_{S_4, S_3}(t) = \int_{J_4} \dot{f}_{S_4, S_3}(t) = \left[ \frac{V_M(S_3)}{(S_3 - S_4)} (t) + \frac{V_M}{2(S_4 - S_3)} (t)^2 \right]_{S_3}^t + d_{S_3, S_2} \quad ; \quad \text{en } J_4$$

$$d_{S_4, S_3} = \left[ \frac{V_M(S_3)}{(S_3 - S_4)} (t) + \frac{V_M}{2(S_4 - S_3)} (t)^2 \right]_{S_3}^{S_4} + d_{S_3, S_2}$$

$$5) f_{S_5, S_4}(t) = \int_{J_5} \dot{f}_{S_5, S_4}(t) = \left[ \frac{V_M(S_4)}{(S_4 - S_5)} (t) + \frac{V_M}{2(S_5 - S_4)} (t)^2 \right]_{S_4}^t + d_{S_4, S_3} \quad ; \quad \text{en } J_5$$

La función general de desplazamiento es la siguiente:

$$f_G^r(t) = f_{S_1, S_0}(t) + f_{S_2, S_1}(t) + f_{S_3, S_2}(t) + f_{S_4, S_3}(t) + f_{S_4, S_5}(t) \quad (4.28)$$

o, equivalentemente:

$$\begin{aligned}
f_G(t) = & \left\{ \left[ \frac{V_I}{2(S_1 - S_0)} (t)^2 \right]_{S_0}^t \right\}_{J_1} + \left\{ [V_I(t)]_{S_1}^t + d_{S_1, S_0} \right\}_{J_2} \\
& + \left\{ \left[ \frac{V_I(S_2)}{(S_3 - S_2)} (t) + \frac{V_I}{2(S_2 - S_3)} (t)^2 \right]_{S_2}^t + d_{S_2, S_1} \right\}_{J_3} \\
& + \left\{ \left[ \frac{V_M(S_3)}{(S_3 - S_4)} (t) + \frac{V_M}{2(S_4 - S_3)} (t)^2 \right]_{S_3}^t + d_{S_3, S_2} \right\}_{J_4} \\
& + \left\{ \left[ \frac{V_M(S_4)}{(S_4 - S_5)} (t) + \frac{V_M}{2(S_5 - S_4)} (t)^2 \right]_{S_4}^t + d_{S_4, S_3} \right\}_{J_5}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

donde:

$$\begin{aligned}
d_{S_1, S_0} &= \left[ \frac{V_I}{2(S_1 - S_0)} (t)^2 \right]_{S_0}^{S_1} \\
d_{S_2, S_1} &= [V_I(t)]_{S_1}^{S_2} + d_{S_1, S_0} \\
d_{S_3, S_2} &= \left[ \frac{V_I(S_2)}{(S_3 - S_2)} (t) + \frac{V_I}{2(S_2 - S_3)} (t)^2 \right]_{S_2}^{S_3} + d_{S_2, S_1} \\
d_{S_4, S_3} &= \left[ \frac{V_M(S_3)}{(S_3 - S_4)} (t) + \frac{V_M}{2(S_4 - S_3)} (t)^2 \right]_{S_3}^{S_4} + d_{S_3, S_2}
\end{aligned}$$

La gráfica del perfil de desplazamientos asociada con la ecuación (4.29) se muestra en la figura 4.10.

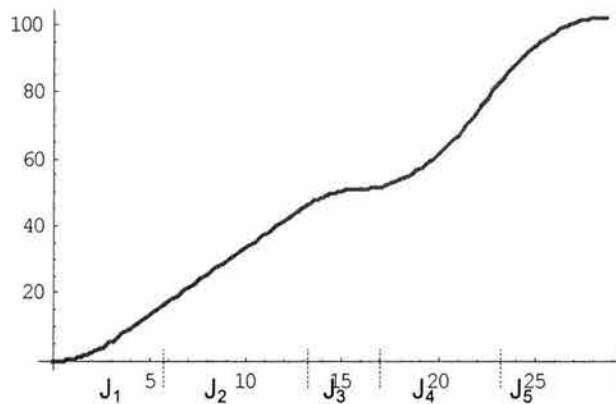


Figura 4.10 Gráfica del perfil de desplazamientos

Note en la figura anterior que el máximo desplazamiento de H se da en  $S_5$ .

#### 4.12 Normalización de los vectores que definen la dirección del movimiento

En esta sección se presenta la normalización de los vectores relacionados con las direcciones del movimiento de H sobre los lugares geométricos [15,19,20]. Dicha normalización es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 1. \underline{e}^I &= \begin{pmatrix} e_1^I \\ e_2^I \\ e_3^I \end{pmatrix} = \frac{1}{d_{1,0}} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix} & 2. \underline{e}^{II} &= \begin{pmatrix} e_1^{II} \\ e_2^{II} \\ e_3^{II} \end{pmatrix} = \frac{1}{d_{2,1}} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} & (4.30) \\
 3. \underline{e}^{III} &= \begin{pmatrix} e_1^{III} \\ e_2^{III} \\ e_3^{III} \end{pmatrix} = \frac{1}{d_{3,2}} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \\ z_3 - z_2 \end{bmatrix} & 4. \underline{e}^{IV} &= \begin{pmatrix} e_1^{IV} \\ e_2^{IV} \\ e_3^{IV} \end{pmatrix} = \frac{1}{d_{4,3}} \begin{bmatrix} x_4 - x_3 \\ y_4 - y_3 \\ z_4 - z_3 \end{bmatrix} \\
 5. \underline{e}^V &= \begin{pmatrix} e_1^V \\ e_2^V \\ e_3^V \end{pmatrix} = \frac{1}{d_{0,4}} \begin{bmatrix} x_0 - x_4 \\ y_0 - y_4 \\ z_0 - z_4 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Aquí,  $d_{i+1,i} \in \mathfrak{S}$  representa la distancia entre dos puntos. La normalización de los vectores unitarios descrita anteriormente, está asociada con la figura 4.10.

#### 4.13 Acoplamiento de las ecuaciones de desplazamiento con el perfil de desplazamientos

El interés en esta sección es utilizar las expresiones (4.7), (4.29) y (4.30) para acoplar las funciones temporales de desplazamiento con las ecuaciones de movimiento [15,19,20]; en este caso, con las ecuaciones de posicionamiento, esto es:



$$1) \underline{r_{1,0'}}(t) = \underline{l_{1,0}}(t) \cdot \frac{1}{d_{1,0}} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\underline{l_{1,0}}(t) = \frac{V_1}{2(S_1 - S_0)} (t)^2; \quad S_0 \leq t \leq S_1$$

$$d_{S_1, S_0} = \left[ \frac{V_1}{2(S_1 - S_0)} (t)^2 \right]_{S_0}^{S_1}$$

$$2) \underline{r_{2,0'}}(t) = \underline{r_{1,0'}}(t) + \underline{l_{2,1}}(t) \cdot \frac{1}{d_{2,1}} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{l_{2,1}}(t) = \left[ V_1(t) \right]_{S_1}^t + d_{S_1, S_0}; \quad S_1 \leq t \leq S_2$$

$$d_{S_2, S_1} = \left[ V_1(t) \right]_{S_1}^{S_2} + d_{S_1, S_0}$$

$$3) \underline{r_{3,0'}}(t) = \underline{r_{2,0'}}(t) + \underline{l_{3,2}}(t) \cdot \frac{1}{d_{3,2}} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \\ z_3 - z_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{l_{3,2}}(t) = \left[ \frac{V_1(S_2)}{(S_3 - S_2)} (t) + \frac{V_1}{2(S_2 - S_3)} (t)^2 \right]_{S_2}^t + d_{S_2, S_1}; \quad S_2 \leq t \leq S_3$$

$$d_{S_3, S_2} = \left[ \frac{V_1(S_2)}{(S_3 - S_2)} (t) + \frac{V_1}{2(S_2 - S_3)} (t)^2 \right]_{S_2}^{S_3} + d_{S_2, S_1}$$

$$4) \underline{r_{4,0'}}(t) = \underline{r_{3,0'}}(t) + \underline{l_{4,3}}(t) \cdot \frac{1}{d_{4,3}} \begin{bmatrix} x_4 - x_3 \\ y_4 - y_3 \\ z_4 - z_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{l_{4,3}}(t) = \left[ \frac{V_M(S_3)}{(S_3 - S_4)} (t) + \frac{V_M}{2(S_4 - S_3)} (t)^2 \right]_{S_3}^t + d_{S_3, S_2}; \quad S_3 \leq t \leq S_4$$

$$d_{S_4, S_3} = \left[ \frac{V_M(S_3)}{(S_3 - S_4)} (t) + \frac{V_M}{2(S_4 - S_3)} (t)^2 \right]_{S_3}^{S_4} + d_{S_3, S_2}$$

$$5) \underline{r_{0,0'}}(t) = \underline{r_{4,0'}}(t) + \underline{l_{0,4}}(t) \cdot \frac{1}{d_{0,4}} \begin{bmatrix} x_0 - x_4 \\ y_0 - y_4 \\ z_0 - z_4 \end{bmatrix}$$

$$\ell_{0,4}(t) = \left[ \frac{V_M(S_4)}{(S_4 - S_5)} (t) + \frac{V_M}{2(S_5 - S_4)} (t)^2 \right]_{S_4}^t + d_{S_4, S_3}; \quad S_4 \leq t \leq S_5$$

#### 4.14 Acoplamiento de las ecuaciones de movimiento con las funciones temporales del perfil de velocidades.

El interés en esta sección es acoplar, utilizando las expresiones (4.8), (4.19) y (4.26), las funciones temporales de velocidad con las ecuaciones de movimiento [15,19,20], en este caso, con las expresiones de velocidad, esto es:

(4.32)

$$1) \underline{\dot{r}}_{1,0'}(t) = \underline{\dot{\ell}}_{1,0}(t) \cdot \frac{1}{d_{1,0}} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{\ell}}_{1,0}(t) = \frac{V_1}{(S_1 - S_0)} (t); \quad S_0 \leq t \leq S_1$$

$$2) \underline{\dot{r}}_{2,0'}(t) = \underline{\dot{r}}_{1,0'}(t) + \underline{\dot{\ell}}_{2,1}(t) \cdot \frac{1}{d_{2,1}} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{\ell}}_{2,1}(t) = V_1; \quad S_1 \leq t \leq S_2$$

$$3) \underline{\dot{r}}_{3,0'}(t) = \underline{\dot{r}}_{2,0'}(t) + \underline{\dot{\ell}}_{3,2}(t) \cdot \frac{1}{d_{3,2}} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \\ z_3 - z_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{\ell}}_{3,2}(t) = \frac{V_1(S_2)}{(S_3 - S_2)} + \frac{V_1}{(S_2 - S_3)} (t); \quad S_2 \leq t \leq S_3$$

$$4) \underline{\dot{r}}_{4,0'}(t) = \underline{\dot{r}}_{3,0'}(t) + \underline{\dot{\ell}}_{4,3}(t) \cdot \frac{1}{d_{4,3}} \begin{bmatrix} x_4 - x_3 \\ y_4 - y_3 \\ z_4 - z_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot{\ell}}_{4,3}(t) = \frac{V_M(S_3)}{(S_3 - S_4)} + \frac{V_M}{(S_4 - S_3)} (t); \quad S_3 \leq t \leq S_4$$

$$5) \underline{\dot{r}}_{0,0'}(t) = \underline{\dot{r}}_{4,0'}(t) + \dot{\ell}_{0,4}(t) \bullet \frac{1}{d_{0,4}} \begin{bmatrix} x_0 - x_4 \\ y_0 - y_4 \\ z_0 - z_4 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\ell}_{0,4}(t) = \frac{V_M(S_5)}{(S_5 - S_4)} + \frac{V_M}{(S_4 - S_5)}(t); \quad S_4 \leq t \leq S_5$$

#### 4.15 Acoplamiento de las ecuaciones de aceleración con las funciones temporales del perfil de aceleraciones

En esta sección son utilizadas las expresiones (4.10), (4.29) y (4.30) para acoplar las ecuaciones de movimiento [15,19,20], en este caso, las de aceleración, con las funciones temporales relacionadas con el perfil de aceleraciones, esto es:

(4.33)

$$1) \underline{\ddot{r}}_{1,0'}(t) = \underline{\ddot{r}}_{1,0}(t) \bullet \frac{1}{d_{1,0}} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\ell}_{1,0}(t) = \frac{V_1}{(S_1 - S_0)}; \quad S_0 \leq t \leq S_1$$

$$2) \underline{\ddot{r}}_{2,0'}(t) = \underline{\ddot{r}}_{1,0'}(t) + \ddot{\ell}_{2,1}(t) \bullet \frac{1}{d_{2,1}} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\ell}_{2,1}(t) = 0; \quad S_1 \leq t \leq S_2$$

$$3) \underline{\ddot{r}}_{3,0'}(t) = \underline{\ddot{r}}_{2,0'}(t) + \ddot{\ell}_{3,2}(t) \bullet \frac{1}{d_{3,2}} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \\ z_3 - z_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\ell}_{3,2}(t) = \frac{V_1}{(S_3 - S_2)}; \quad S_2 \leq t \leq S_3$$

$$4) \underline{\ddot{r}}_{4,0'}(t) = \underline{\ddot{r}}_{3,0'}(t) + \ddot{\ell}_{4,3}(t) \bullet \frac{1}{d_{4,3}} \begin{bmatrix} x_4 - x_3 \\ y_4 - y_3 \\ z_4 - z_3 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\ell}_{4,3}(t) = \frac{V_M}{(S_4 - S_3)}; \quad S_3 \leq t \leq S_4$$

$$5) \underline{\ddot{r}}_{0,0'}(t) = \underline{\ddot{r}}_{4,0'}(t) + \underline{\ddot{\ell}}_{0,4}(t) \bullet \frac{1}{d_{0,4}} \begin{bmatrix} x_0 - x_4 \\ y_0 - y_4 \\ z_0 - z_4 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\ddot{\ell}}_{0,4}(t) = \frac{V_M}{(S_4 - S_5)} ; \quad S_4 \leq t \leq S_5$$

#### 4.16 Transformación de los vectores de posición proyectados al espacio-tiempo

El interés en esta sección es transformar las ecuaciones de movimiento con funciones temporales asociadas de los planos correspondientes al espacio-tiempo, pues es en éste último sistema referencial donde se produce realmente el movimiento [15,19,20].

##### - Ecuaciones de posición -

Considere ahora la siguiente función:

$$\pi^{-1} : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^4 \tag{4.34}$$

definida por:

$$1) \pi^{-1}(\underline{r}_{i,0'}^\tau(t)) = \underline{R}_{i,0'}^\tau(t)$$

$$2) \pi^{-1}(\underline{r}_{i,i+1}^\tau(t)) = \underline{R}_{i,i+1}^\tau(t)$$

Aquí,  $\underline{r}_{i,0'}^\tau(t)$  y  $\underline{r}_{i,i+1}^\tau(t)$  son los vectores de posición con funciones temporales acoplados con direcciones normalizadas proyectados, además  $\underline{R}_{i,0'}^\tau(t)$  y  $\underline{R}_{i,i+1}^\tau(t)$  representan los vectores de posición con funciones temporales acoplados descritos en el espacio-tiempo. Por tanto, las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración definidas en el espacio-tiempo son:

(4.35)

$$1) \underline{R}_{1,0}^{\tau}(t) = \pi^{-1} \left[ \underline{r}_{0,0}^{\tau}(t_0) \right] + \pi^{-1} \left[ \underline{r}_{1,0}^{\tau}(t) \right]$$

$$2) \underline{R}_{2,0}^{\tau}(t) = \underline{R}_{1,0}^{\tau}(t) + \pi^{-1} \left[ \underline{r}_{2,1}^{\tau}(t) \right]$$

$$3) \underline{R}_{3,0}^{\tau}(t) = \underline{R}_{2,0}^{\tau}(t) + \pi^{-1} \left[ \underline{r}_{3,2}^{\tau}(t) \right]$$

$$4) \underline{R}_{4,0}^{\tau}(t) = \underline{R}_{3,0}^{\tau}(t) + \pi^{-1} \left[ \underline{r}_{4,3}^{\tau}(t) \right]$$

$$5) \underline{R}_{0,0}^{\tau}(t) = \underline{R}_{4,0}^{\tau}(t) + \pi^{-1} \left[ \underline{r}_{0,4}^{\tau}(t) \right]$$

### - Ecuaciones de velocidad -

Para poder transformar las ecuaciones de velocidad proyectadas al espacio-tiempo, es conveniente aclarar que la función  $\pi^{-1} : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^4$  también es válida para vectores de velocidad, esto es:

$$1) \pi^{-1} \left( \underline{\dot{r}}_{i,0}^{\tau}(t) \right) = \underline{\dot{R}}_{i,0}^{\tau}(t) \quad (4.36)$$

$$2) \pi^{-1} \left( \underline{\dot{r}}_{i+1,i}^{\tau}(t) \right) = \underline{\dot{R}}_{i+1,i}^{\tau}(t)$$

Por tanto, las ecuaciones de velocidad en el espacio-tiempo son las siguientes:

(4.37)

$$1) \underline{\dot{R}}_{1,0}^{\tau}(t) = \pi^{-1} \left[ \underline{\dot{r}}_{1,0}^{\tau}(t) \right]$$

$$2) \underline{\dot{R}}_{2,0}^{\tau}(t) = \underline{\dot{R}}_{1,0}^{\tau}(t) + \pi^{-1} \left[ \underline{\dot{r}}_{2,1}^{\tau}(t) \right]$$

$$3) \underline{\dot{R}}_{3,0}^{\tau}(t) = \underline{\dot{R}}_{2,0}^{\tau}(t) + \pi^{-1} \left[ \underline{\dot{r}}_{3,2}^{\tau}(t) \right]$$

$$4) \underline{\dot{R}}_{4,0}^{\tau}(t) = \underline{\dot{R}}_{3,0}^{\tau}(t) + \pi^{-1} \left[ \underline{\dot{r}}_{4,3}^{\tau}(t) \right]$$

$$5) \underline{\dot{R}}_{0,0}^{\tau}(t) = \underline{\dot{R}}_{4,0}^{\tau}(t) + \pi^{-1} \left[ \underline{\dot{r}}_{0,4}^{\tau}(t) \right]$$

### - Ecuaciones de aceleración -

En esta sección se utilizará, al igual que en la sección anterior, la transformación  $\pi^{-1} : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^4$  para encontrar las aceleraciones en el espacio-tiempo, esto es:

$$1) \underline{\ddot{R}}_{i,0'}(t) = \pi^{-1} \left[ \underline{\ddot{r}}_{i,0'}(t) \right] \quad (4.38)$$

$$2) \underline{\ddot{R}}_{i+1,i}(t) = \pi^{-1} \left[ \underline{\ddot{r}}_{i+1,i}(t) \right]$$

Por tanto, las ecuaciones de aceleración con funciones temporales acopladas definidas en el espacio-tiempo son las siguientes:

$$(4.39)$$

$$1) \underline{\ddot{R}}_{1,0'}(t) = \pi^{-1} \left[ \underline{\ddot{r}}_{1,0}(t) \right] \qquad 2) \underline{\ddot{R}}_{2,0'}(t) = \underline{\ddot{R}}_{1,0'}(t) + \pi^{-1} \left[ \underline{\ddot{r}}_{2,1}(t) \right]$$

$$3) \underline{\ddot{R}}_{3,0'}(t) = \underline{\ddot{R}}_{2,0'}(t) + \pi^{-1} \left[ \underline{\ddot{r}}_{3,2}(t) \right] \qquad 4) \underline{\ddot{R}}_{4,0'}(t) = \underline{\ddot{R}}_{3,0'}(t) + \pi^{-1} \left[ \underline{\ddot{r}}_{4,3}(t) \right]$$

$$5) \underline{\ddot{R}}_{0,0'}(t) = \underline{\ddot{R}}_{4,0'}(t) + \pi^{-1} \left[ \underline{\ddot{r}}_{0,4}(t) \right]$$

Es importante señalar que la única diferencia entre vectores  $\underline{R}_{i,0'}^\tau(t) \in \mathfrak{R}^4$  y  $\underline{r}_{i,0'}^\tau(t) \in \mathfrak{R}^3$  es la incorporación de las coordenadas faltantes en cada dirección del movimiento. Por ejemplo:

$$1) \underline{R}_{1,0'}^\tau(t) = \pi^{-1} \left[ \underline{r}_{1,0'}^\tau(t) \right] = \ell_{1,0}(t) \cdot \frac{1}{d_{1,0}} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix}$$

$$\ell_{1,0}(t) = \frac{V_1}{2(S_1 - S_0)} (t)^2 \quad ; \quad S_0 \leq t \leq S_1$$

La distancia  $d_{1,0} \in \mathfrak{R}^+$  es definida de la manera siguiente:

$$d_{1,0} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

$$2) \underline{\ddot{R}}_{5,0}^T(t) = \underline{\ddot{R}}_{4,0}^T(t) + \ddot{\ell}_{5,4}(t) \cdot \frac{1}{d_{0,4}} \begin{bmatrix} x_5 - x_4 \\ y_5 - y_4 \\ z_5 - z_4 \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\ell}_{0,4}(t) = \frac{V_1}{S_5 - S_4} \quad ; \quad S_5 \leq t \leq S_4$$

Aquí,  $d_{0,4} = \sqrt{(x_0 - x_4)^2 + (y_0 - y_4)^2 + (z_0 - z_4)^2}$

Por tanto, no es necesario definir todos los vectores en el espacio-tiempo como los casos anteriormente señalados. Basta con agregar las coordenadas faltantes en cada dirección y redefinir las distancias.

#### 4.17 Métodos para suavizar funciones temporales

En esta sección se presenta dos formas de suavizar funciones temporales asociadas a los perfiles de desplazamiento, velocidad y aceleración. Dichas formas son:  $P^5$  y  $P^8$ ; donde  $P^5$  denota un polinomio de grado 5 y  $P^8$  un polinomio de grado 8. Ambas formas han sido estudiadas por [15,19,20,22].

El principal objetivo de la “suavización” es utilizar funciones continuas derivables que permitan eliminar las discontinuidades presentadas en el perfil de aceleraciones (ver figura 4.5). Los polinomios de grado 5 y grado 8 son funciones continuas y derivables en todo el dominio de las funciones temporales de posición, velocidad y aceleración [22]. No hay que olvidar que los polinomios de grado 8 o mayores generan inestabilidades. Sin embargo, en este trabajo de tesis se usarán para eliminar discontinuidades [15]

Las discontinuidades presentadas en los perfiles de trayectoria implican que dichos perfiles teóricos no pueden ser utilizados, pues en los puntos en los cuales la herramienta H cambia instantáneamente de aceleración, el manipulador tendrá problemas en la operación.

Para poder modificar los perfiles de trayectoria de teóricos a operativos, es necesario utilizar algún método de “suavización”, en este caso, se propondrán polinomios de grado 5 y grado 8 [22].

Es importante señalar que el grado de suavización depende del grado del polinomio. Por otro lado, para cada polinomio utilizado se usan condiciones iniciales, intermedias y finales relacionados a los intervalos de tiempo y los valores máximos y mínimos de desplazamiento, velocidad y aceleración.

Los siguientes pasos desarrollados en [15, 20] son fundamentales para suavizar perfiles de trayectoria:

#### **- Polinomios de grado 5 –**

- 1) Colocar en un mismo esquema las graficas de los perfiles de desplazamiento, velocidad y aceleración.
- 2) Definir las porciones de las graficas que serán suavizadas. Aquí, se pueden presentar dos casos:
  - 2.1) Tomar un solo intervalo de tiempo y sus condiciones iniciales y finales.
  - 2.2) Tomar uno o más intervalos de tiempo y definir sus condiciones iniciales y finales (de todo el intervalo de la forma  $I_i = J_1 \cup J_2 \dots$ ).

- 3) Definir el polinomio de grado 5, esto es:

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \alpha_5 t^5$$

- 4) Derivar con respecto al tiempo  $t \in \mathfrak{I}$  el polinomio definido en el paso anterior, esto es:

$$\dot{f}(t) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + 4\alpha_4 t^3 + 5\alpha_5 t^4$$

- 5) Derivar con respecto al tiempo  $t \in \mathfrak{I}$  el polinomio obtenido en el paso 4, esto es:

$$\ddot{f}(t) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 t + 12\alpha_4 t^2 + 20\alpha_5 t^3$$



- 6) Calcular o interpretar de las gráficas de los perfiles de trayectoria las condiciones iniciales y finales en cada intervalo de tiempo seleccionado.
- 7) Evaluar los polinomios dados en los pasos 3, 4 y 5, en las condiciones iniciales y finales descritas por el paso 6.
- 8) Formar con las ecuaciones evaluadas en el paso anterior un sistema de 6 ecuaciones (2 de posición, 2 de velocidad y 2 de aceleración) y 6 incógnitas (los coeficientes de los polinomios).
- 9) Resolver el sistema formado en el paso anterior.
- 10) Sustituir los coeficientes encontrados en los polinomios de los pasos 3, 4 y 5.
- 11) Los polinomios encontrados en el paso 10 representan las funciones temporales suavizadas.
- 12) Acoplar las funciones temporales suavizadas a las ecuaciones de movimiento definidas en el espacio-tiempo.

### **- Polinomios de grado 8 –**

Para utilizar un polinomio de grado 8 en la suavización de perfiles de trayectoria se deben tomar en cuenta los siguientes pasos:

- 1) Calcular en un mismo esquema las gráficas de los perfiles de desplazamiento, velocidad y aceleración.
- 2) Definir las porciones de las gráficas que serán suavizadas. Aquí se pueden presentar dos casos:
  - 2.1) Tomar un solo intervalo de tiempo y condiciones iniciales, intermedias y finales.
  - 2.2) Tomar dos o más intervalos de tiempo y definir condiciones iniciales, intermedias y finales (de todo el intervalo de la forma  $I_i = J_1 \cup J_2 \dots$ ).
- 3) Definir el polinomio de grado 8, esto es:

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \alpha_5 t^5 + \alpha_6 t^6 + \alpha_7 t^7 + \alpha_8 t^8$$

- 4) Derivar con respecto al tiempo  $t \in \mathfrak{T}$  el polinomio descrito en el paso anterior, esto es:

$$\dot{f}(t) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + 4\alpha_4 t^3 + 5\alpha_5 t^4 + 6\alpha_6 t^5 + 7\alpha_7 t^6 + 8\alpha_8 t^7$$

- 5) Derivar con respecto al tiempo  $t \in \mathfrak{S}$  el polinomio obtenido en el paso 4, esto es:

$$\ddot{f}(t) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 t + 12\alpha_4 t^2 + 20\alpha_5 t^3 + 30\alpha_6 t^4 + 42\alpha_7 t^5 + 56\alpha_8 t^6$$

- 6) Calcular o interpretar de las gráficas de los perfiles de trayectoria las condiciones iniciales, intermedias y finales en cada intervalo de tiempo seleccionado.
- 7) Evaluar los polinomios dados en los pasos 3, 4 y 5, en las condiciones iniciales, intermedias y finales descritas por el paso 6.
- 8) Formar con las ecuaciones evaluadas en el paso anterior un sistema de 9 ecuaciones (3 de posición, 3 de velocidad y 3 de aceleración) y 9 incógnitas (los coeficientes de los polinomios).
- 9) Resolver el sistema formado en el paso anterior.
- 10) Sustituir los coeficientes encontrados en los polinomios de los pasos 3, 4 y 5.
- 11) Los polinomios encontrados en el paso 10 representan las funciones temporales suavizadas.
- 12) Acoplar las funciones temporales suavizadas a las ecuaciones de movimiento definidas en el espacio-tiempo.

#### **4.17.1 Suavización del intervalo $J_1$ perfil usando un polinomio de grado 5**

El interés en esta sección es suavizar el trozo de gráfica del perfil de trayectoria usando un polinomio de grado 5 [20,22]. Se utilizarán los pasos descritos en la sección 4.17.

- 1) El intervalo seleccionado y los trozos de los perfiles se muestran en la figura 4.7.
- 2) Las porciones de gráficas de los perfiles han sido esquematizadas en la figura 4.6. El intervalo seleccionado es  $I_1 = J_1$  y las condiciones iniciales, intermedias y finales son:

$$a) f(S_0) = d_{S_0} \quad f(S_1) = d_{S_1}$$

$$b) \dot{f}(S_0) = V_{S_0} \quad \dot{f}(S_1) = V_{S_1}$$

$$c) \ddot{f}(S_0) = a_{S_0} \quad \ddot{f}(S_1) = a_{S_1}$$

3), 4) y 5) El polinomio de grado 5, su primera y segunda derivada con respecto al tiempo son las siguientes:

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \alpha_5 t^5$$

$$\dot{f}(t) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + 4\alpha_4 t^3 + 5\alpha_5 t^4$$

$$\ddot{f}(t) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 t + 12\alpha_4 t^2 + 20\alpha_5 t^3$$

6) Las condiciones iniciales, intermedias y finales son:

$$1) d_{S_0} = \frac{V_i(S_0)^2}{2(S_1 - S_0)} - \frac{V_i(S_0)^2}{2(S_1 - S_0)} = 0$$

$$2) d_{S_1} = \frac{V_i(S_1)^2}{2(S_1 - S_0)}$$

$$3) V_{S_0} = \frac{V_i(S_0)}{(S_1 - S_0)} = 0$$

$$4) V_{S_1} = V_i$$

$$5) a_{S_0} = 0$$

$$6) a_{S_1} = 0$$

7) Evaluar los polinomios descritos en los pasos 3), 4) y 5) en las condiciones iniciales, intermedias y finales caracterizadas en el paso anterior.

$$f(S_0) = d_{S_0} = \alpha_0 + \alpha_1(S_0) + \alpha_2(S_0)^2 + \alpha_3(S_0)^3 + \alpha_4(S_0)^4 + \alpha_5(S_0)^5$$

$$f(S_1) = d_{S_1} = \alpha_0 + \alpha_1(S_1) + \alpha_2(S_1)^2 + \alpha_3(S_1)^3 + \alpha_4(S_1)^4 + \alpha_5(S_1)^5$$

$$\dot{f}(S_0) = V_{S_0} = \alpha_1 + 2\alpha_2(S_0) + 3\alpha_3(S_0)^2 + 4\alpha_4(S_0)^3 + 5\alpha_5(S_0)^4$$

$$\dot{f}(S_1) = V_{S_1} = \alpha_1 + 2\alpha_2(S_1) + 3\alpha_3(S_1)^2 + 4\alpha_4(S_1)^3 + 5\alpha_5(S_1)^4$$

$$\ddot{f}(S_0) = a_{S_0} = 2\alpha_2 + 6\alpha_3(S_0) + 12\alpha_4(S_0)^2 + 20\alpha_5(S_0)^3$$

$$\ddot{f}(S_1) = a_{S_1} = 2\alpha_2 + 6\alpha_3(S_1) + 12\alpha_4(S_1)^2 + 20\alpha_5(S_1)^3$$

8) El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} d_{S_0} \\ d_{S_1} \\ V_{S_0} \\ V_{S_1} \\ a_{S_0} \\ a_{S_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & S_0 & S_0^2 & S_0^3 & S_0^4 & S_0^5 \\ 1 & S_1 & S_1^2 & S_1^3 & S_1^4 & S_1^5 \\ 0 & 1 & 2S_0 & 3S_0^2 & 4S_0^3 & 5S_0^4 \\ 0 & 1 & 2S_1 & 3S_1^2 & 4S_1^3 & 5S_1^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6S_0 & 12S_0^2 & 20S_0^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6S_1 & 12S_1^2 & 20S_1^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix}$$

9) Suponga que:  $\alpha_0 = K_{10}$ ,  $\alpha_1 = K_{11}$ ,  $\alpha_2 = K_{12}$ ,  $\alpha_3 = K_{13}$ ,  $\alpha_4 = K_{14}$ ,  $\alpha_5 = K_{15}$ .

10) Los coeficientes sustituidos en los polinomios de posición, velocidad y aceleración son:

$$f(t) = K_{10} + K_{11}t + K_{12}t^2 + K_{13}t^3 + K_{14}t^4 + K_{15}t^5$$

$$\dot{f}(t) = K_{11} + 2K_{12}t + 3K_{13}t^2 + 4K_{14}t^3 + 5K_{15}t^4$$

$$\ddot{f}(t) = 2K_{12} + 6K_{13}t + 12K_{14}t^2 + 20K_{15}t^3$$

11) Las gráficas de las funciones temporales caracterizadas anteriormente se

muestran en la figura 4.10.

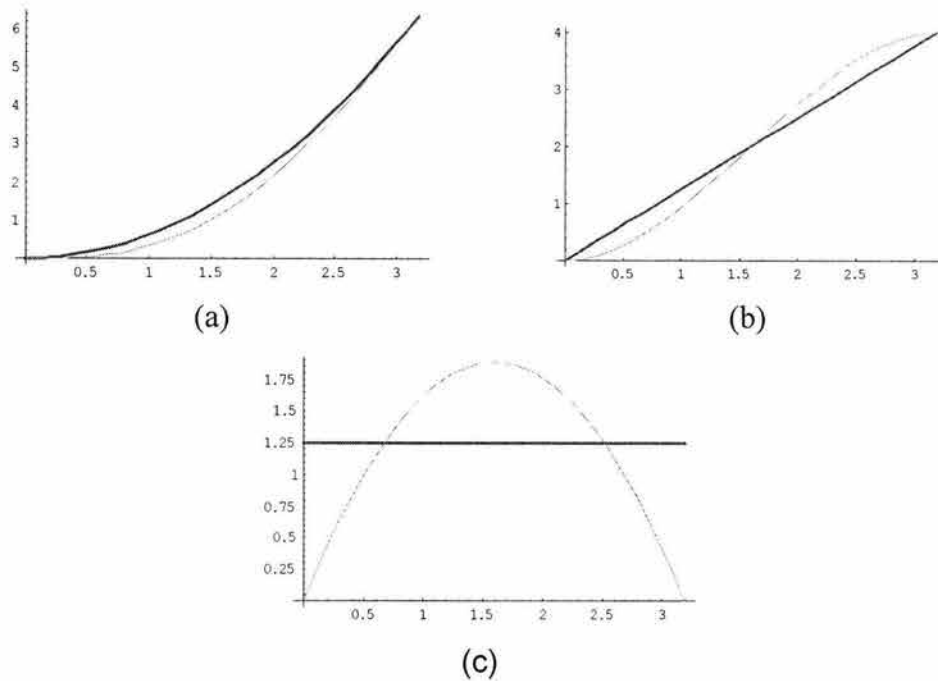


Figura 4.10 Perfiles de trayectoria para  $J_1$  suavizados usando un polinomio de grado 5  
(a) posición, (b) velocidad y (c) aceleración

12) Acoplamiento de las funciones suavizadas con las ecuaciones de movimiento en el espacio-tiempo.

$$\underline{\underline{R}}_{1,0}^{\tau}(t) = \left[ K_{10} + K_{11}(t) + K_{12}(t)^2 + K_{13}(t)^3 + K_{14}(t)^4 + K_{15}(t)^5 \right] \Big|_{S_0}^t \cdot \frac{1}{d_{1,0}} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\dot{R}}}_{1,0}^{\tau}(t) = \left[ K_{11} + 2K_{12}(t) + 3K_{13}(t)^2 + 4K_{14}(t)^3 + 5K_{15}(t)^4 \right] \Big|_{S_0}^t \cdot \frac{1}{d_{1,0}} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\ddot{R}}}_{1,0}^{\tau}(t) = \left[ 2K_{12}(t)^2 + 6K_{13}(t) + 12K_{14}(t)^2 + 20K_{15}(t)^3 \right] \Big|_{S_0}^t \cdot \frac{1}{d_{1,0}} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{bmatrix}$$

#### 4.17.2 Suavización del intervalo $J_3$ perfil usando un polinomio de grado 5

El interés en esta sección es suavizar el trozo de gráfica del perfil de trayectoria usando un polinomio de grado 5. Se utilizarán los pasos descritos en la sección 4.17.

- 1) El intervalo seleccionado y los trozos de los perfiles se muestran en la figura 4.7.
- 2) Las porciones de gráficas de los perfiles han sido esquematizadas en la figura 4.6. El intervalo seleccionado es  $I_3 = J_3$  y las condiciones iniciales, intermedias y finales son:

$$\text{a) } f(S_3) = d_{S_2, S_1} \quad f(S_1) = d_{S_3, S_2}$$

$$\text{b) } \dot{f}(S_0) = V_{S_2} \quad \dot{f}(S_1) = V_{S_3}$$

$$\text{c) } \ddot{f}(S_0) = a_{S_2} \quad \ddot{f}(S_1) = a_{S_3}$$

- 3), 4) y 5) El polinomio de grado 5, su primera y segunda derivada con respecto al tiempo son las siguientes:

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \alpha_5 t^5$$

$$\dot{f}(t) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + 4\alpha_4 t^3 + 5\alpha_5 t^4$$

$$\ddot{f}(t) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 t + 12\alpha_4 t^2 + 20\alpha_5 t^3$$

- 6) Las condiciones iniciales, intermedias y finales son:

$$1) d_{S_2, S_1} = \left[ V_1(t) \right]_{S_1}^{S_2} + \left[ \frac{V_1}{2(S_1 - S_0)} (t)^2 \right]_{S_0}^{S_1}$$

$$2) d_{s_3, s_2} = \left[ \frac{V_1(s_2)}{(s_3 - s_2)} (t) + \frac{V_1}{2(s_2 - s_3)} (t)^2 \right]_{s_2}^{s_3} + d_{s_2, s_1}$$

$$3) V_{s_2} = V_1$$

$$4) V_{s_3} = 0$$

$$5) a_{s_0} = 0$$

$$6) a_{s_1} = 0$$

7) Evaluar los polinomios descritos en los pasos 3), 4) y 5) en las condiciones iniciales, intermedias y finales caracterizadas en el paso anterior.

$$f(s_2) = d_{s_2} = \alpha_0 + \alpha_1(s_2) + \alpha_2(s_2)^2 + \alpha_3(s_2)^3 + \alpha_4(s_2)^4 + \alpha_5(s_2)^5$$

$$f(s_3) = d_{s_3} = \alpha_0 + \alpha_1(s_3) + \alpha_2(s_3)^2 + \alpha_3(s_3)^3 + \alpha_4(s_3)^4 + \alpha_5(s_3)^5$$

$$\dot{f}(s_2) = V_{s_2} = \alpha_1 + 2\alpha_2(s_2) + 3\alpha_3(s_2)^2 + 4\alpha_4(s_2)^3 + 5\alpha_5(s_2)^4$$

$$\dot{f}(s_3) = V_{s_3} = \alpha_1 + 2\alpha_2(s_3) + 3\alpha_3(s_3)^2 + 4\alpha_4(s_3)^3 + 5\alpha_5(s_3)^4$$

$$\ddot{f}(s_2) = a_{s_2} = 2\alpha_2 + 6\alpha_3(s_2) + 12\alpha_4(s_2)^2 + 20\alpha_5(s_2)^3$$

$$\ddot{f}(s_3) = a_{s_3} = 2\alpha_2 + 6\alpha_3(s_3) + 12\alpha_4(s_3)^2 + 20\alpha_5(s_3)^3$$

8) El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} d_{s_2} \\ d_{s_3} \\ V_{s_2} \\ V_{s_3} \\ a_{s_2} \\ a_{s_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s_2 & s_2^2 & s_2^3 & s_2^4 & s_2^5 \\ 1 & s_3 & s_3^2 & s_3^3 & s_3^4 & s_3^5 \\ 0 & 1 & 2s_2 & 3s_2^2 & 4s_2^3 & 5s_2^4 \\ 0 & 1 & 2s_3 & 3s_3^2 & 4s_3^3 & 5s_3^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6s_2 & 12s_2^2 & 20s_2^3 \\ 0 & 0 & 2 & 6s_3 & 12s_3^2 & 20s_3^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix}$$

9) Suponga que:  $\alpha_0 = K_{20}$ ,  $\alpha_1 = K_{21}$ ,  $\alpha_2 = K_{22}$ ,  $\alpha_3 = K_{23}$ ,  $\alpha_4 = K_{24}$ ,  $\alpha_5 = K_{25}$ .

10) Los coeficientes sustituidos en los polinomios de posición, velocidad y aceleración son:

$$f(t) = K_{20} + K_{21}t + K_{22}t^2 + K_{23}t^3 + K_{24}t^4 + K_{25}t^5$$

$$\dot{f}(t) = K_{21} + 2K_{22}t + 3K_{23}t^2 + 4K_{24}t^3 + 5K_{25}t^4$$

$$\ddot{f}(t) = 2K_{22} + 6K_{23}t + 12K_{24}t^2 + 20K_{25}t^3$$

11) Las gráficas de las funciones temporales caracterizadas anteriormente se muestran en la figura 4.11.

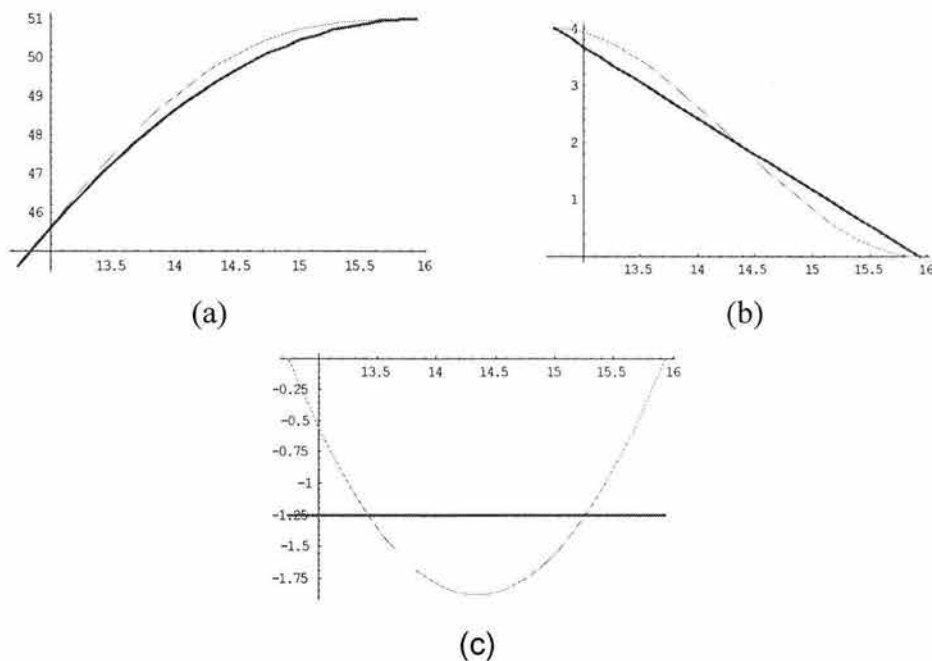


Figura 4.10 Perfiles de trayectoria para  $J_1$  suavizados usando un polinomio de grado 5  
(a) posición, (b) velocidad y (c) aceleración

12) Acoplamiento de las funciones suavizadas con las ecuaciones de movimiento en el espacio-tiempo.

$$\underline{R}_{3,2}^t(t) = \left[ K_{20} + K_{21}(t) + K_{22}(t)^2 + K_{23}(t)^3 + K_{24}(t)^4 + K_{25}(t)^5 \right]_{S2}^t \bullet \frac{1}{d_{3,2}} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \\ z_3 - z_2 \end{bmatrix}$$



$$\underline{\dot{R}}_{3,2}^{\tau}(t) = \left[ K_{21} + 2K_{22}(t) + 3K_{23}(t)^2 + 4K_{24}(t)^3 + 5K_{25}(t)^4 \right] \Big|_{S_2}^t \cdot \frac{1}{d_{3,2}} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \\ z_3 - z_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\ddot{R}}_{3,2}^{\tau}(t) = \left[ 2K_{22}(t)^2 + 6K_{23}(t) + 12K_{24}(t)^2 + 20K_{25}(t)^3 \right] \Big|_{S_2}^t \cdot \frac{1}{d_{3,2}} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \\ z_3 - z_2 \end{bmatrix}$$

#### 4.17.3 Suavización de un trozo de perfil usando un polinomio de grado 8.

El interés en esta sección es suavizar los trozos de gráficas de los perfiles de trayectoria usando un polinomio de grado 8 [15,19,20,22]. Se utilizarán los pasos descritos en la sección 4.17.

- 1) El intervalo seleccionado y los trozos de los perfiles se muestran en la figura 4.7.
- 2) Las porciones de gráficas de los perfiles han sido esquematizadas en la figura 4.6. El intervalo seleccionado es  $I_4 = J_4 \cup J_5$  y las condiciones iniciales, intermedias y finales son:

$$\text{a) } f(S_3) = d_{S_3,S_2} \qquad f(S_4) = d_{S_4,S_5} \qquad f(S_5) = d_{S_5,S_4}$$

$$\text{b) } \dot{f}(S_3) = V_{S_3} \qquad \dot{f}(S_4) = V_{S_4} \qquad \dot{f}(S_5) = V_{S_5}$$

$$\text{c) } \ddot{f}(S_3) = a_{S_3} \qquad \ddot{f}(S_4) = a_{S_4} \qquad \ddot{f}(S_5) = a_{S_5}$$

- 3), 4) y 5) El polinomio de grado 8, su primera y segunda derivada con respecto al tiempo son las siguientes:

$$f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \alpha_3 t^3 + \alpha_4 t^4 + \alpha_5 t^5 + \alpha_6 t^6 + \alpha_7 t^7 + \alpha_8 t^8$$

$$\dot{f}(t) = \alpha_1 + 2\alpha_2 t + 3\alpha_3 t^2 + 4\alpha_4 t^3 + 5\alpha_5 t^4 + 6\alpha_6 t^5 + 7\alpha_7 t^6 + 8\alpha_8 t^7$$

$$\ddot{f}(t) = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 t + 12\alpha_4 t^2 + 20\alpha_5 t^3 + 30\alpha_6 t^4 + 42\alpha_7 t^5 + 56\alpha_8 t^6$$

6) Las condiciones iniciales, intermedias y finales son:

$$1) \quad d_{S_3, S_2} = \left[ \frac{V_i(S_2)}{(S_3 - S_2)} (t) + \frac{V_i}{2(S_2 - S_3)} (t)^2 \right]_{S_2}^{S_3} + \left[ V_i(t) \right]_{S_1}^{S_2} + \left[ \frac{V_i}{2(S_1 - S_0)} (t)^2 \right]_{S_0}^{S_1}$$

$$2) \quad d_{S_4, S_3} = \left[ \frac{V_M(S_3)}{(S_3 - S_4)} (t) + \frac{V_M}{2(S_4 - S_3)} (t)^2 \right]_{S_3}^{S_4} + d_{S_3, S_2}$$

$$3) \quad d_{S_5, S_4} = \left[ \frac{V_M(S_4)}{(S_4 - S_5)} (t) + \frac{V_M}{2(S_5 - S_4)} (t)^2 \right]_{S_4}^{S_5} + d_{S_4, S_3}$$

$$4) \quad V_{S_3} = 0$$

$$5) \quad V_{S_4} = V_M$$

$$6) \quad V_{S_5} = 0$$

$$7) \quad a_{S_3} = 0$$

$$8) \quad a_{S_4} = 0$$

$$9) \quad a_{S_5} = 0$$

7) Evaluar los polinomios descritos en los pasos 3), 4) y 5) en las condiciones iniciales, intermedias y finales caracterizadas en el paso anterior.

$$f(S_3) = d_{S_3} = \alpha_0 + \alpha_1(S_3) + \alpha_2(S_3)^2 + \alpha_3(S_3)^3 + \alpha_4(S_3)^4 + \alpha_5(S_3)^5 + \alpha_6(S_3)^6 + \alpha_7(S_3)^7 + \alpha_8(S_3)^8$$

$$f(S_4) = d_{S_4} = \alpha_0 + \alpha_1(S_4) + \alpha_2(S_4)^2 + \alpha_3(S_4)^3 + \alpha_4(S_4)^4 + \alpha_5(S_4)^5 + \alpha_6(S_4)^6 + \alpha_7(S_4)^7 + \alpha_8(S_4)^8$$

$$f(S_5) = d_{S_5} = \alpha_0 + \alpha_1(S_5) + \alpha_2(S_5)^2 + \alpha_3(S_5)^3 + \alpha_4(S_5)^4 + \alpha_5(S_5)^5 + \alpha_6(S_5)^6 + \alpha_7(S_5)^7 + \alpha_8(S_5)^8$$

$$\dot{f}(S_3) = V_{S_3} = \alpha_1 + 2\alpha_2(S_3) + 3\alpha_3(S_3)^2 + 4\alpha_4(S_3)^3 + 5\alpha_5(S_3)^4 + 6\alpha_6(S_3)^5 + 7\alpha_7(S_3)^6 + 8\alpha_8(S_3)^7$$

$$\dot{f}(S_4) = V_{S_4} = \alpha_1 + 2\alpha_2(S_4) + 3\alpha_3(S_4)^2 + 4\alpha_4(S_4)^3 + 5\alpha_5(S_4)^4 + 6\alpha_6(S_4)^5 + 7\alpha_7(S_4)^6 + 8\alpha_8(S_4)^7$$

$$\dot{f}(S_5) = V_{S_5} = \alpha_1 + 2\alpha_2(S_5) + 3\alpha_3(S_5)^2 + 4\alpha_4(S_5)^3 + 5\alpha_5(S_5)^4 + 6\alpha_6(S_5)^5 + 7\alpha_7(S_5)^6 + 8\alpha_8(S_5)^7$$

$$\ddot{f}(S_3) = a_{S_3} = 2\alpha_2 + 6\alpha_3(S_3) + 12\alpha_4(S_3)^2 + 20\alpha_5(S_3)^3 + 30\alpha_6(S_3)^4 + 42\alpha_7(S_3)^5 + 56\alpha_8(S_3)^6$$

$$\ddot{f}(S_4) = a_{S_4} = 2\alpha_2 + 6\alpha_3(S_4) + 12\alpha_4(S_4)^2 + 20\alpha_5(S_4)^3 + 30\alpha_6(S_4)^4 + 42\alpha_7(S_4)^5 + 56\alpha_8(S_4)^6$$

$$\ddot{f}(S_5) = a_{S_5} = 2\alpha_2 + 6\alpha_3(S_5) + 12\alpha_4(S_5)^2 + 20\alpha_5(S_5)^3 + 30\alpha_6(S_5)^4 + 42\alpha_7(S_5)^5 + 56\alpha_8(S_5)^6$$

8) El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} d_{S_3} \\ d_{S_4} \\ d_{S_5} \\ V_{S_3} \\ V_{S_4} \\ V_{S_5} \\ a_{S_3} \\ a_{S_4} \\ a_{S_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & S_3 & S_3^2 & S_3^3 & S_3^4 & S_3^5 & S_3^6 & S_3^7 & S_3^8 \\ 1 & S_4 & S_4^2 & S_4^3 & S_4^4 & S_4^5 & S_4^6 & S_4^7 & S_4^8 \\ 1 & S_5 & S_5^2 & S_5^3 & S_5^4 & S_5^5 & S_5^6 & S_5^7 & S_5^8 \\ 0 & 1 & 2S_3 & 3S_3^2 & 4S_3^3 & 5S_3^4 & 6S_3^5 & 7S_3^6 & 8S_3^7 \\ 0 & 1 & 2S_4 & 3S_4^2 & 4S_4^3 & 5S_4^4 & 6S_4^5 & 7S_4^6 & 8S_4^7 \\ 0 & 1 & 2S_5 & 3S_5^2 & 4S_5^3 & 5S_5^4 & 6S_5^5 & 7S_5^6 & 8S_5^7 \\ 0 & 0 & 2 & 6S_3 & 12S_3^2 & 20S_3^3 & 30S_3^4 & 42S_3^5 & 56S_3^6 \\ 0 & 0 & 2 & 6S_4 & 12S_4^2 & 20S_4^3 & 30S_4^4 & 42S_4^5 & 56S_4^6 \\ 0 & 0 & 2 & 6S_5 & 12S_5^2 & 20S_5^3 & 30S_5^4 & 42S_5^5 & 56S_5^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{bmatrix}$$

9) Suponga que:

$$\alpha_0 = K_{30}, \alpha_1 = K_{31}, \alpha_2 = K_{32}, \alpha_3 = K_{33}, \alpha_4 = K_{34}, \alpha_5 = K_{35}, \alpha_6 = K_{36}, \alpha_7 = K_{37}, \alpha_8 = K_{38}.$$

10) Los coeficientes sustituidos en los polinomios de posición, velocidad y aceleración son:

$$f(t) = K_{30} + K_{31}t + K_{32}t^2 + K_{33}t^3 + K_{34}t^4 + K_{35}t^5 + K_{36}t^6 + K_{37}t^7 + K_{38}t^8$$

$$\dot{f}(t) = K_{31} + 2K_{32}t + 3K_{33}t^2 + 4K_{34}t^3 + 5K_{35}t^4 + 6K_{36}t^5 + 7K_{37}t^6 + 8K_{38}t^7$$

$$\ddot{f}(t) = 2K_{32} + 6K_{33}t + 12K_{34}t^2 + 20K_{35}t^3 + 30K_{36}t^4 + 42K_{37}t^5 + 56K_{38}t^6$$

11) Las gráficas de las funciones temporales caracterizadas anteriormente se muestran en la figura 4.12.

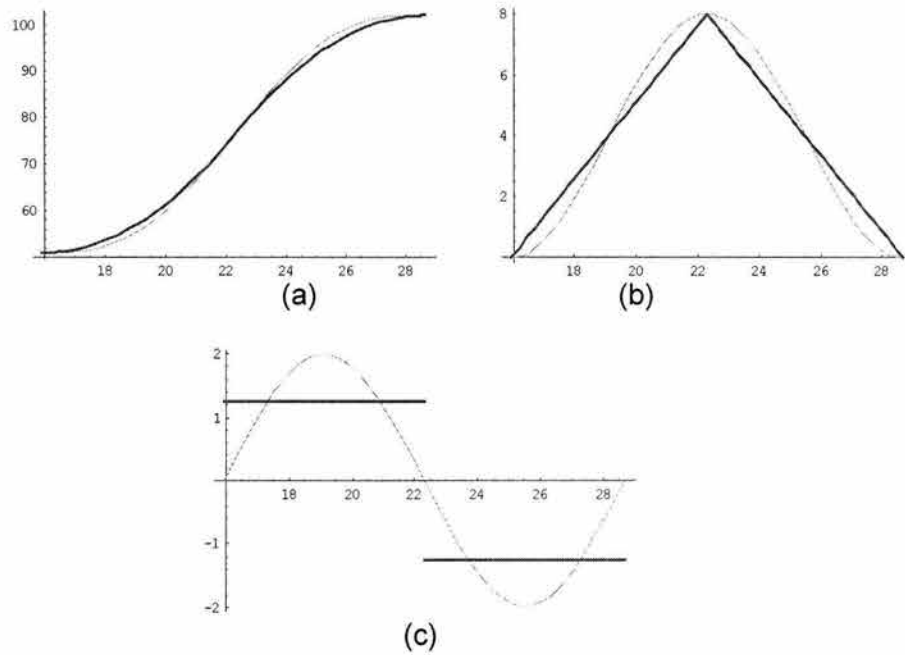


Figura 4.12 Perfiles de trayectoria para  $I_4$  suavizados usando un polinomio de grado 8  
 (a) posición, (b) velocidad y (c) aceleración

12) Acoplamiento de las funciones suavizadas con las ecuaciones de movimiento en el espacio-tiempo.

$$\underline{\underline{R}}_{0,3}^{\tau}(t) = \left[ K_{30} + K_{31}(t) + K_{32}(t)^2 + K_{33}(t)^3 + K_{34}(t)^4 + K_{35}(t)^5 + K_{36}(t)^6 + K_{37}(t)^7 + K_{38}(t)^8 \right]_{S3}^t \bullet$$

$$\frac{1}{d_{0,3}} \begin{bmatrix} x_0 - x_3 \\ y_0 - y_3 \\ z_0 - z_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\dot{R}}}_{0,3}^{\tau}(t) = \left[ K_{31} + 2K_{32}(t) + 3K_{33}(t)^2 + 4K_{34}(t)^3 + 5K_{35}(t)^4 + 6K_{36}(t)^5 + 7K_{37}(t)^6 + 8K_{38}(t)^7 \right]_{S3}^t \bullet$$

$$\frac{1}{d_{0,3}} \begin{bmatrix} x_0 - x_3 \\ y_0 - y_3 \\ z_0 - z_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\ddot{R}}}_{0,3}^{\tau}(t) = \left[ 2K_{32}(t)^2 + 6K_{33}(t) + 12K_{34}(t)^2 + 20K_{35}(t)^3 + 30K_{36}(t)^4 + 42K_{37}(t)^5 + 56K_{38}(t)^6 \right]_{S3}^t \bullet$$

$$\frac{1}{d_{0,3}} \begin{bmatrix} x_0 - x_3 \\ y_0 - y_3 \\ z_0 - z_3 \end{bmatrix}$$

donde  $d_{0,3} = d_{0,4} + d_{4,3} = \sqrt{(x_0 - x_3)^2 + (y_0 - y_3)^2 + (z_0 - z_3)^2}$

#### 4.18 Representación gráfica de los polinomios suavizados en todo el intervalo

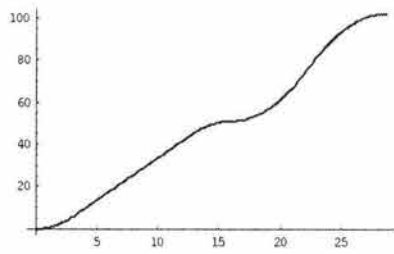
En esta sección se presenta la gráfica de los polinomios suavizados para cada intervalo, se comparan las gráficas de los polinomios teóricos y de los polinomios suavizados.

En la sección 4.16 se suavizaron las trayectorias usando polinomios .de la siguiente manera. En los intervalos  $I_1 = J_1$  y  $I_3 = J_3$  utilizaron un polinomio de grado 5 ( $P^5$ ), mientras que en el intervalo  $I_4 = J_4 \cup J_5$  se uso un polinomio de grado 8 ( $P^8$ ). También cabe aclarar que el intervalo  $I_2 = J_2$  no se suavizó, pues es una línea horizontal. Como la trayectoria está contenida en el plano xy, la componente en z es cero, las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración serán:

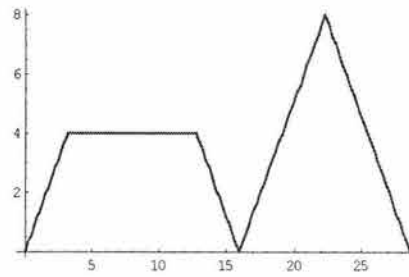
$$\begin{aligned} \underline{R}^r(t) = & \left\{ \left[ K_{10} + K_{11}(t) + K_{12}(t)^2 + K_{13}(t)^3 + K_{14}(t)^4 + K_{15}(t)^5 \right] \Big|_{S_0}^t \cdot \frac{1}{d_{1,0}} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix} \right\} \Big|_{I_1} + \\ & \left\{ \left[ K_1 + K_2(t) \right] \Big|_{S_1}^t \cdot \frac{1}{d_{2,1}} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \right\} \Big|_{I_2} + \\ & \left\{ \left[ K_{20} + K_{21}(t) + K_{22}(t)^2 + K_{23}(t)^3 + K_{24}(t)^4 + K_{25}(t)^5 \right] \Big|_{S_2}^t \cdot \frac{1}{d_{3,2}} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{bmatrix} \right\} \Big|_{I_3} + \\ & \left\{ \left[ K_{30} + K_{31}(t) + K_{32}(t)^2 + K_{33}(t)^3 + K_{34}(t)^4 + K_{35}(t)^5 + K_{36}(t)^6 + K_{37}(t)^7 + K_{38}(t)^8 \right] \Big|_{S_3}^t \right. \\ & \left. \cdot \frac{1}{d_{0,3}} \begin{bmatrix} x_0 - x_3 \\ y_0 - y_3 \end{bmatrix} \right\} \Big|_{I_4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\dot{R}}(t) = & \left\{ \left[ K_{11} + 2K_{12}(t) + 3K_{13}(t)^2 + 4K_{14}(t)^3 + 5K_{15}(t)^4 \right] \Big|_{S_0} \cdot \frac{1}{d_{1,0}} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix} \right\} \Big|_{I_1} + \\
& \left\{ \left[ K_2 \right] \Big|_{S_1} \cdot \frac{1}{d_{2,1}} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \right\} \Big|_{I_2} + \\
& \left\{ \left[ K_{21} + 2K_{22}(t) + 3K_{23}(t)^2 + 4K_{24}(t)^3 + 5K_{25}(t)^4 \right] \Big|_{S_2} \cdot \frac{1}{d_{3,2}} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{bmatrix} \right\} \Big|_{I_3} + \\
& \left\{ \left[ K_{31} + 2K_{32}(t) + 3K_{33}(t)^2 + 4K_{34}(t)^3 + 5K_{35}(t)^4 + 6K_{36}(t)^5 + 7K_{37}(t)^6 + 8K_{38}(t)^7 \right] \Big|_{S_3} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \cdot \frac{1}{d_{0,3}} \begin{bmatrix} x_0 - x_3 \\ y_0 - y_3 \end{bmatrix} \right\} \Big|_{I_4} \\
\\
\underline{\ddot{R}}(t) = & \left\{ \left[ 2K_{12}(t)^2 + 6K_{13}(t) + 12K_{14}(t)^2 + 20K_{15}(t)^3 \right] \Big|_{S_0} \cdot \frac{1}{d_{1,0}} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix} \right\} \Big|_{I_1} + \\
& \left\{ \left[ 0 \right] \Big|_{S_1} \cdot \frac{1}{d_{2,1}} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \right\} \Big|_{I_2} + \\
& \left\{ \left[ 2K_{22}(t)^2 + 6K_{23}(t) + 12K_{24}(t)^2 + 20K_{25}(t)^3 \right] \Big|_{S_2} \cdot \frac{1}{d_{3,2}} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{bmatrix} \right\} \Big|_{I_3} + \\
& \left\{ \left[ 2K_{32}(t)^2 + 6K_{33}(t) + 12K_{34}(t)^2 + 20K_{35}(t)^3 + 30K_{36}(t)^4 + 42K_{37}(t)^5 + 56K_{38}(t)^6 \right] \Big|_{S_3} \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \cdot \frac{1}{d_{0,3}} \begin{bmatrix} x_0 - x_3 \\ y_0 - y_3 \end{bmatrix} \right\} \Big|_{I_4}
\end{aligned}$$

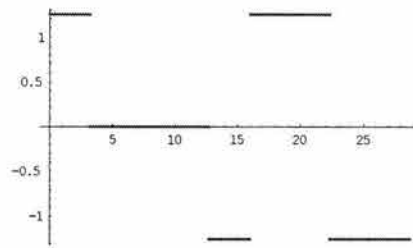
Las graficas de los perfiles suavizados y sin suavizar para el problema general se muestran en la figura 4.13



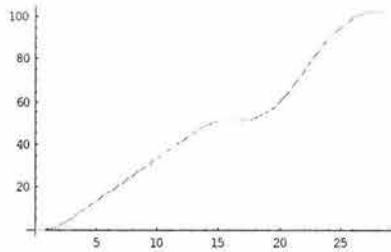
(1a)



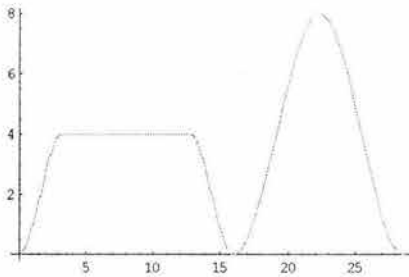
(1b)



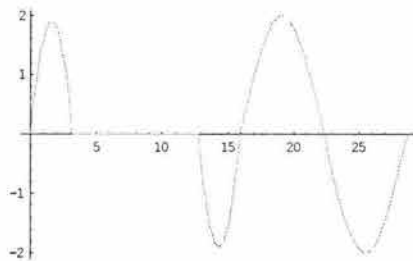
(1c)



(2a)



(2b)



(2c)

Figura 4.13 Perfiles de trayectoria sin suavizar (1) y suavizados (2);  
(a) posición, (b) velocidad y (c) aceleración

## Capítulo 5

### Acoplamiento de la trayectoria con el movimiento del Robot

**Introducción.** En este capítulo se acoplan las expresiones del movimiento del POT  $\in E_2$  del robot  $R_0$  motivo de estudio, con las ecuaciones de la trayectoria  $\tau$  por donde se mueve la herramienta H, la cual se encuentra montada en POT. Para ello las expresiones de la cinemática del movimiento de POT obtenidas en los capítulos 1, 2 y 3; y las de la trayectoria suavizada obtenidas en el capítulo 4 se acoplan, ya que ambas describen el mismo lugar geométrico, unas el movimiento de POT y otras la trayectoria que sigue la herramienta montada en POT.

#### 5.1 Acoplamiento de las ecuaciones de la cinemática de la posición y el perfil de desplazamiento

En esta sección se acoplan las ecuaciones obtenidas en el capítulo 1 y el perfil de posición del capítulo 4. En el capítulo 1 se plantearon los problemas cinemático directo e inverso de la posición del Robot  $R_0$ , el cual permite describir la posición de POT en término de las rotaciones de las bases canónicas montadas en los eslabones.

El problema cinemático directo plantea que se conocen las longitudes de los eslabones, la posición del actuador  $M_1$ , que está fijo a tierra, con respecto a un origen y las rotaciones que tienen que experimentar las rotaciones de manera tal que las magnitudes de las rotaciones de las bases sean igual a 1; para que se encuentre la posición del punto POT en el plano [8,10].

El problema cinemático inverso plantea que se conocen las longitudes de los eslabones, la posición del punto POT en el espacio y la posición del actuador  $M_1$ , que está fijo a tierra, con respecto a un origen; y se encuentran las rotaciones que tienen que sufrir las rotaciones de manera tal que las magnitudes de las rotaciones de las bases sean igual a 1[8,10].



Si al problema cinemático inverso se le pone, en lugar de las coordenadas de un punto como posición de POT, las funciones que describen el perfil de posición como función del tiempo se encuentra la función de la posición angular de los eslabones como función del tiempo ( $\alpha_1(t)$  y  $\alpha_2(t)$ ).

El problema por resolver sería entonces el siguiente:

“Dados  $\underline{r'_{POT,0}}(t) \in \mathbb{R}^2$ ;  $\underline{r'_{1,0}} \in \mathbb{R}^2$ ;  $l_1$  y  $l_2 \in \mathbb{R}^+$ ;  $p = \{p_0, p_1\}$ ;  $q = \{q_0, q_1\}$  encuentre  $P(t) = \{P_0(t), P_1(t)\}$ ;  $Q = \{Q_0(t), Q_1(t)\}$  tal que  $\underline{r'_{POT,0}}(t) = \underline{r'_{1,0}} + l_1 \cdot \{P(t) * p * \underline{e}_1\} + l_2 \cdot \{Q(t) * P(t) * q * p * \underline{e}_1\}$  sea satisfecha y  $P_0^2(t) + P_1^2(t) = 1$ ;  $Q_0^2(t) + Q_1^2(t) = 1$

donde,

$$\begin{aligned} \underline{r'_{POT,0}} = \underline{R^T}(t) = & \left\{ \left[ K_{10} + K_{11}(t) + K_{12}(t)^2 + K_{13}(t)^3 + K_{14}(t)^4 + K_{15}(t)^5 \right] \Big|_{S_0} \cdot \frac{1}{d_{1,0}} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix} \right\} \Big|_{I_1} + \\ & \left\{ \left[ K_{11} + K_{21}(t) \right] \Big|_{S_1} \cdot \frac{1}{d_{2,1}} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \right\} \Big|_{I_2} + \\ & \left\{ \left[ K_{20} + K_{21}(t) + K_{22}(t)^2 + K_{23}(t)^3 + K_{24}(t)^4 + K_{25}(t)^5 \right] \Big|_{S_2} \cdot \frac{1}{d_{3,2}} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{bmatrix} \right\} \Big|_{I_3} + \\ & \left\{ \left[ K_{30} + K_{31}(t) + K_{32}(t)^2 + K_{33}(t)^3 + K_{34}(t)^4 + K_{35}(t)^5 + K_{36}(t)^6 + K_{37}(t)^7 + K_{38}(t)^8 \right] \Big|_{S_3} \cdot \frac{1}{d_{0,3}} \begin{bmatrix} x_0 - x_3 \\ y_0 - y_3 \end{bmatrix} \right\} \Big|_{I_4} \\ & \text{”} \end{aligned}$$

y donde se cumplen las siguiente relaciones geométricas:

$$p_0 = \cos \theta_1; p_1 = \pm \sin \theta_1; q_0 = \cos \theta_2; q_1 = \pm \sin \theta_2$$

y, también;

$$P_0(t) = \cos(\alpha_1(t)); P_1(t) = \pm \sin(\alpha_1(t)); Q_0(t) = \cos(\alpha_2(t)); Q_1(t) = \pm \sin(\alpha_2(t))$$

Además,

$$\alpha_1(t) = \arccos(P_0(t)) \text{ y } \alpha_2(t) = \arccos(Q_0(t)).$$

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

## 5.2 Acoplamiento de las ecuaciones de la cinemática de la velocidad y el perfil de velocidad

En esta sección se acoplan las ecuaciones obtenidas en el capítulo 2 y el perfil de posición del capítulo 4. En el capítulo 2 se plantean los problemas cinemáticos directo e inverso de la velocidad del robot. El problema inverso se enunciará de la siguiente forma:

"Dados:  $\dot{r}'_{POT,0} \in \mathbb{R}^2$ ;  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ ;  $P(t) = \{P_0(t), P_1(t)\}$ ;  $Q(t) = \{Q_0(t), Q_1(t)\}$ ; con  $\|P(t)\| = \|Q(t)\| = 1$ ;  $p = \{p_0, p_1\}$ ;  $q = \{q_0, q_1\}$ ; con  $\|p\| = \|q\| = 1$ ; encuentre  $\dot{P}(t) = \{\dot{P}_0(t), \dot{P}_1(t)\}$ ;  $\dot{Q}(t) = \{\dot{Q}_0(t), \dot{Q}_1(t)\}$  tal que la expresión

$$\dot{r}'_{POT,0}(t) = l_1 \cdot \left\{ \dot{P}(t) * \overline{P(t)} * \underline{a}'_1(t_0) \right\} + l_2 \cdot \left\{ \dot{Q}(t) * \overline{Q(t)} * \underline{a}''_1(t) + Q(t) * \dot{P}(t) * \overline{P(t)} * \overline{Q(t)} * \underline{a}''_1(t) \right\}$$

sea satisfecha y,

$$1) \dot{P}_0(t)P_0(t) + \dot{P}_1(t)P_1(t) = 0$$

$$2) \dot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_1(t)Q_1(t) = 0$$

donde,

$$\dot{r}'_{POT,0}(t) = \dot{\underline{R}}^T(t) = \left[ K_{11} + 2K_{12}(t) + 3K_{13}(t)^2 + 4K_{14}(t)^3 + 5K_{15}(t)^4 \right] \Big|_{S_0}^t \cdot \frac{1}{d_{1,0}} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix} +$$

$$\left\{ \left[ K_2 \right] \Big|_{S_1}^t \cdot \frac{1}{d_{2,1}} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \right\} \Big|_{I_2} +$$

$$\left\{ \left[ K_{21} + 2K_{22}(t) + 3K_{23}(t)^2 + 4K_{24}(t)^3 + 5K_{25}(t)^4 \right] \Big|_{S_2}^t \cdot \frac{1}{d_{3,2}} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{bmatrix} \right\} \Big|_{I_3} +$$

$$\left\{ \left[ K_{31} + 2K_{32}(t) + 3K_{33}(t)^2 + 4K_{34}(t)^3 + 5K_{35}(t)^4 + 6K_{36}(t)^5 + 7K_{37}(t)^6 + 8K_{38}(t)^7 \right]_{S3}^t \cdot \frac{1}{d_{0,3}} \begin{bmatrix} x_0 - x_3 \\ y_0 - y_3 \end{bmatrix} \right\}_{14}$$

”

Para la cual, se satisfacen las siguientes relaciones geométricas:

$$\dot{P}_0(t) = -\dot{\alpha}_1(t) \cdot \text{sen } \alpha_1(t); \quad \dot{P}_1(t) = \pm \dot{\alpha}_1(t) \cdot \text{cos } \alpha_1(t)$$

$$\dot{Q}_0(t) = -\dot{\alpha}_2(t) \cdot \text{sen } \alpha_2(t); \quad \dot{Q}_1(t) = \pm \dot{\alpha}_2(t) \cdot \text{cos } \alpha_2(t)$$

Además,

$$\dot{\alpha}_1(t) = -\frac{\dot{P}_0(t)}{\text{sen } \alpha_1(t)} \quad \text{y} \quad \dot{\alpha}_2(t) = -\frac{\dot{P}_1(t)}{\text{sen } \alpha_2(t)};$$

Las cuales representan las funciones de las velocidades angulares de los eslabones  $E_1$  y  $E_2$ .

### 5.3 Acoplamiento de las ecuaciones de la cinemática de la aceleración y el perfil de aceleraciones

En esta sección se acoplan las ecuaciones obtenidas en el capítulo 3 y el perfil de posición del capítulo 4. En el capítulo 3 se plantean los problemas cinemáticos directo e inverso de la velocidad del robot. El problema inverso se enunciará de la siguiente forma:

$$\text{“Dados: } \ddot{r}'_{\text{POT},0}(t) \in \mathfrak{R}^2; \quad l_1, l_2 \in \mathfrak{R}; \quad \dot{P}(t) = \left\{ \dot{P}_0(t), \dot{P}_1(t) \right\} \quad ; \quad \dot{Q}(t) = \left\{ \dot{Q}_0(t), \dot{Q}_1(t) \right\} \quad \text{con}$$

$$\dot{P}_0(t)P_0(t) + \dot{P}_1(t)P_1(t) = 0 \quad \text{y} \quad \dot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_1(t)Q_1(t) = 0; \quad P(t) = \{P_0(t), P_1(t)\};$$

$$\overline{P(t)} = \{P_0(t), -P_1(t)\}; \quad Q(t) = \{Q_0(t), Q_1(t)\}; \quad \overline{Q(t)} = \{Q_0(t), -Q_1(t)\}; \quad \text{con } \|P(t)\| = \|Q(t)\| = 1;$$

$\mathbf{p} = \{p_0, p_1\}$  ;  $\mathbf{q} = \{q_0, q_1\}$ ; con  $\|\mathbf{p}\| = \|\mathbf{q}\| = 1$ ; encuentre  $\ddot{\mathbf{P}}(t) = \{\ddot{P}_0(t), \ddot{P}_1(t)\}$  ; y

$$\ddot{\mathbf{Q}}(t) = \{\ddot{Q}_0(t), \ddot{Q}_1(t)\}$$

tal que la expresión

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}'_{\text{POT},0}(t) = & I_1 \cdot \left\{ \ddot{\mathbf{P}}(t) * \overline{\mathbf{P}}(t) * \underline{\mathbf{a}}_1'(t) \right\} + \\ & + I_2 \cdot \left\{ \ddot{\mathbf{Q}}(t) * \overline{\mathbf{Q}}(t) * \underline{\mathbf{a}}_1''(t) + 2\dot{\mathbf{Q}}(t) * \dot{\mathbf{P}}(t) * \overline{\mathbf{P}}(t) * \overline{\mathbf{Q}}(t) * \underline{\mathbf{a}}_1''(t) + \mathbf{Q}(t) * \ddot{\mathbf{P}}(t) * \overline{\mathbf{P}}(t) * \overline{\mathbf{Q}}(t) * \underline{\mathbf{a}}_1''(t) \right\} \end{aligned}$$

sea satisfecha y,

$$1) \ddot{P}_0(t)P_0(t) + \dot{P}_0^2(t) + \ddot{P}_1(t)P_1(t) + \dot{P}_1^2(t) = 0$$

$$2) \ddot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_0^2(t) + \ddot{Q}_1(t)Q_1(t) + \dot{Q}_1^2(t) = 0 "$$

aquí,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}'_{\text{POT},0}(t) = & \ddot{\mathbf{R}}^T(t) = \left[ 2K_{12}(t)^2 + 6K_{13}(t) + 12K_{14}(t)^2 + 20K_{15}(t)^3 \right]_{S_0}^t \cdot \frac{1}{d_{1,0}} \begin{bmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{bmatrix} + \\ & \left\{ [0]_{S_1}^t \cdot \frac{1}{d_{2,1}} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \right\}_{I_2} + \\ & \left\{ \left[ 2K_{22}(t)^2 + 6K_{23}(t) + 12K_{24}(t)^2 + 20K_{25}(t)^3 \right]_{S_2}^t \cdot \frac{1}{d_{3,2}} \begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ y_3 - y_2 \end{bmatrix} \right\}_{I_3} + \\ & \left. \left\{ \left[ 2K_{32}(t)^2 + 6K_{33}(t) + 12K_{34}(t)^2 + 20K_{35}(t)^3 + 30K_{36}(t)^4 + 42K_{37}(t)^5 + 56K_{38}(t)^6 \right]_{S_3}^t \cdot \frac{1}{d_{0,3}} \begin{bmatrix} x_0 - x_3 \\ y_0 - y_3 \end{bmatrix} \right\}_{I_4} \right. \\ & \left. \right. \end{aligned}$$

además, se satisfacen las siguientes relaciones geométricas:

$$\ddot{P}_0(t) = -\ddot{\alpha}_1(t) \cdot \text{sen } \alpha_1(t) - \dot{\alpha}_1^2(t) \cdot \text{cos } \alpha_1(t),$$

$$\ddot{P}_1(t) = \pm \ddot{\alpha}_1(t) \cdot \text{cos } \alpha_1(t) \mp \dot{\alpha}_1^2(t) \cdot \text{sen } \alpha_1(t)$$

$$\ddot{Q}_0(t) = -\ddot{\alpha}_2(t) \cdot \text{sen } \alpha_2(t) - \dot{\alpha}_2^2(t) \cdot \text{cos } \alpha_2(t),$$

$$\ddot{Q}_1(t) = \pm \ddot{\alpha}_2(t) \cdot \text{cos } \alpha_2(t) \mp \dot{\alpha}_2^2(t) \cdot \text{sen } \alpha_2(t)$$

y de dichas ecuaciones se obtiene:

$$\ddot{\alpha}_1(t) = -\frac{\ddot{P}_0(t) + \dot{\alpha}_1^2(t) \cdot \text{cos } \alpha_1(t)}{\text{sen } \alpha_1(t)}.$$

$$\ddot{\alpha}_2(t) = -\frac{\ddot{Q}_0(t) + \dot{\alpha}_2^2(t) \cdot \text{cos } \alpha_2(t)}{\text{sen } \alpha_2(t)}.$$

Estos son los problemas que se resolverán mediante un programa elaborado en Mathematica V.4. [18].

## Capítulo 6

### Programación en Mathematica

**Introducción.** El propósito de este capítulo es programar en el lenguaje de Matemática [18] la trayectoria y la cinemática del robot de 2GDL motivo de estudio.

#### 6.1 Programación de la trayectoria

En esta sección se programará la trayectoria teórica descrita en el capítulo 4. Para ello, se describirá el lugar geométrico y las velocidades conocidas. Se obtienen los perfiles teóricos y se grafican. También, se suavizan con polinomios los perfiles y se grafican también. Por último los datos se guardan en un archivo para su uso posterior.

Declaración de las velocidades conocidas en el perfil de velocidades;

```
Vi = 4;  
Vm = 8;
```

Estos datos son para limitar el movimiento del robot en el espacio (Rango de los ejes);

```
plotminx = -55;  
plotmaxx = 55;  
plotminy = -55;  
plotmaxy = 55;  
plotminz = -1;  
plotmaxz = 5;
```

Descripción de los lugares geométricos;

```
x0 = -20;  
y0 = 30;  
z0 = 1;
```

```
x3 = 30;
```

```
y3 = 20;
```

```
z3 = 1;
```

```
x1 = x0 + (x3 - x0)/8;
```

```
y1 = y0 + (y3 - y0)/8;
```

```
z1 = 1;
```

```
x2 = x0 + 7*(x3 - x0)/8;
```

```
y2 = y0 + 7*(y3 - y0)/8;
```

```
z2 = 1;
```

```
x4 = (x0 + x3)/2;
```

```
y4 = (y0 + y3)/2;
```

```
z4 = 1;
```

Cálculo de las distancias entre los puntos;

```
dist1 = Sqrt((x1 - x0)^2 + (y1 - y0)^2 + (z1 - z0)^2);
```

```
dist2 = Sqrt((x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2 + (z2 - z1)^2);
```

```
dist3 = Sqrt((x3 - x2)^2 + (y3 - y2)^2 + (z3 - z2)^2);
```

```
dist4 = Sqrt((x4 - x3)^2 + (y4 - y3)^2 + (z4 - z3)^2);
```

```
dist5 = Sqrt((x4 - x0)^2 + (y4 - y0)^2 + (z4 - z0)^2);
```

Se calculan los tiempos;

```
t0 = 0;
```

```
t1 = t0 + 2*dist1/Vi;
```

```
t2 = t1 + dist2/Vi;
```

```
t3 = t2 + 2*dist3/Vi;
```

```
t4 = t3 + 2*dist4/Vm;
```

```
t5 = t4 + 2*dist5/Vm;
```

Los tiempos obtenidos con estos datos son los siguientes:

$$t_1 = \frac{5\sqrt{\frac{13}{2}}}{4}, \quad t_2 = 5\sqrt{\frac{13}{2}}, \quad t_3 = \frac{25\sqrt{\frac{13}{2}}}{4}, \quad t_4 = \frac{35\sqrt{\frac{13}{2}}}{4}, \quad t_5 = \frac{45\sqrt{\frac{13}{2}}}{4}$$

Obtención del perfil de velocidades por intervalos;

Función velocidad en J1;

$$vel1 = 0 + ((Vi/(t1 - t0)))*(t - t0);$$

Función velocidad en J2;

$$vel2 = Vi;$$

Función velocidad en J3;

$$vel3 = 0 - ((Vi/(t3 - t2)))*(t - t3);$$

Función velocidad en J4;

$$vel4 = 0 + ((Vm/(t4 - t3)))*(t - t3);$$

Función velocidad en J5;

$$vel5 = 0 - ((Vm/(t5 - t4)))*(t - t5);$$

Obtención del perfil de aceleración por intervalos;

Función aceleración asociada a J1;

$$acel1 = D[vel1, t];$$

Función aceleración asociada a J2;

$$acel2 = D[vel2, t];$$

Función aceleración asociada a J3;

$$acel3 = D[vel3, t];$$

Función aceleración asociada a J4;

$$acel4 = D[vel4, t];$$

Función aceleración asociada a J5;



```
acel5 = D[vel5, t];
```

Obtención del perfil de posición por intervalos;

Función posición asociada a J1;

```
pos1 = Integrate[vel1, {t, t0, t}];
```

```
pos1a = Integrate[vel1, {t, t0, t1}];
```

Función posición asociada a J2;

```
pos2 = pos1a + Integrate[vel2, {t, t1, t}];
```

```
pos2a = pos1a + Integrate[vel2, {t, t1, t2}];
```

Función posición asociada a J3;

```
pos3 = pos2a + Integrate[vel3, {t, t2, t}];
```

```
pos3a = pos2a + Integrate[vel3, {t, t2, t3}];
```

Función posición asociada a J4;

```
pos4 = pos3a + Integrate[vel4, {t, t3, t}];
```

```
pos4a = pos3a + Integrate[vel4, {t, t3, t4}];
```

Función posición asociada a J5;

```
pos5 = pos4a + Integrate[vel5, {t, t4, t}];
```

```
pos5a = pos4a + Integrate[vel5, {t, t4, t5}];
```

Gráficas asociadas con el perfil de posición;

```
graficapos1 = Plot[pos1, {t, t0, t1}, PlotStyle ->
{{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0.500008, 0.500008]}}, AxesLabel
-> {"tiempo", "Pos"}, PlotLabel -> "Posición J1", TextStyle ->
{FontSlant -> "Oblique", FontSize -> 12}];
```

```
graficapos2 = Plot[pos2, {t, t1, t2}, PlotStyle ->
{{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0.500008, 0.500008]}}, AxesLabel
-> {"tiempo", "Pos"}, PlotLabel -> "Posición J2",
TextStyle -> {FontSlant -> "Oblique", FontSize -> 12}];
```

```
graficapos3 = Plot[pos3, {t, t2, t3}, PlotStyle ->
{{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0.500008, 0.500008]}}, AxesLabel
-> {"tiempo", "Pos"}, PlotLabel -> "Posición J3",
TextStyle -> {FontSlant -> "Obliqua", FontSize -> 12}};
```

```
graficapos4 = Plot[pos4, {t, t3, t4}, PlotStyle ->
{{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0.500008, 0.500008]}},
AxesLabel -> {"tiempo", "Pos"}, PlotLabel -> "Posición J4",
TextStyle -> {FontSlant -> "Obliqua", FontSize -> 12}};
```

```
graficapos5 = Plot[pos5, {t, t4, t5}, PlotStyle ->
{{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0.500008, 0.500008]}},
AxesLabel -> {"tiempo", "Pos"}, PlotLabel -> "Posición J5",
TextStyle -> {FontSlant -> "Obliqua", FontSize -> 12}};
```

Gráficas asociadas con el perfil de velocidad;

```
graficavel1 = Plot[vel1, {t, t0, t1}, PlotStyle ->
{{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0.500008, 0.500008]}},
AxesLabel -> {"tiempo", "vel"}, PlotLabel -> "Velocidad en J1",
TextStyle -> {FontSlant -> "Obliqua", FontSize -> 12}};
```

```
graficavel2 = Plot[vel2, {t, t1, t2}, PlotStyle ->
{{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0.500008, 0.500008]}},
AxesLabel -> {"tiempo", "vel"}, PlotLabel -> "Velocidad en J2",
TextStyle -> {FontSlant -> "Obliqua", FontSize -> 12}};
```

```
graficavel3 = Plot[vel3, {t, t2, t3}, PlotStyle ->
{{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0.500008, 0.500008]}},
AxesLabel -> {"tiempo", "vel"}, PlotLabel -> "Velocidad en J3",
TextStyle -> {FontSlant -> "Obliqua", FontSize -> 12}};
```

```
graficavel4 = Plot[vel4, {t, t3, t4}, PlotStyle ->
{{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0.500008, 0.500008]}},
AxesLabel -> {"tiempo", "vel"}, PlotLabel -> "Velocidad en J4",
TextStyle -> {FontSlant -> "Obliqua", FontSize -> 12}};
```

```
graficavel5 = Plot[vel5, {t, t4, t5}, PlotStyle ->
{{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0.500008, 0.500008]}},
AxesLabel -> {"tiempo", "vel"}, PlotLabel -> "Velocidad en J5",
TextStyle -> {FontSlant -> "Oblique", FontSize -> 12}];
```

Gráficas asociadas con el perfil de aceleración;

```
graficaacel1 = Plot[acel1, {t, t0, t1}, PlotStyle ->
{{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0.500008, 0.500008]}},
AxesLabel -> {"tiempo", "acel"}, PlotLabel -> "Aceleracion 1",
TextStyle -> {FontSlant -> "Oblique", FontSize -> 12}];
```

```
graficaacel2 = Plot[acel2, {t, t1, t2}, PlotStyle ->
{{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0.500008, 0.500008]}},
AxesLabel -> {"tiempo", "acel"}, PlotLabel -> "Aceleracion 2",
TextStyle -> {FontSlant -> "Oblique", FontSize -> 12}];
```

```
graficaacel3 = Plot[acel3, {t, t2, t3}, PlotStyle ->
{{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0.500008, 0.500008]}},
AxesLabel -> {"tiempo", "acel"}, PlotLabel -> "Aceleracion 3",
TextStyle -> {FontSlant -> "Oblique", FontSize -> 12}];
```

```
graficaacel4 = Plot[acel4, {t, t3, t4}, PlotStyle ->
{{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0.500008, 0.500008]}},
AxesLabel -> {"tiempo", "acel"}, PlotLabel -> "Aceleracion 4",
TextStyle -> {FontSlant -> "Oblique", FontSize -> 12}];
```

```
graficaacel5 = Plot[acel5, {t, t4, t5}, PlotStyle ->
{{Thickness[0.01], RGBColor[0, 0.500008, 0.500008]}},
AxesLabel -> {"tiempo", "acel"}, PlotLabel -> "Aceleracion 5",
TextStyle -> {FontSlant -> "Oblique", FontSize -> 12}];
```

Suavización del perfil de posición en J1 usando un polinomio de grado 5;

Matriz para j1;

```
Matrizaj1 = {{1, t0, t0^2, t0^3, t0^4, t0^5},
```

```

    {1, t1, t1^2, t1^3, t1^4, t1^5},
    {0, 1, 2*t0, 3*t0^2, 4*t0^3, 5*t0^4},
    {0, 1, 2*t1, 3*t1^2, 4*t1^3, 5*t1^4},
    {0, 0, 2, 6*t0, 12*t0^2, 20*t0^3},
    {0, 0, 2, 6*t1, 12*t1^2, 20*t1^3}};
MaInversaj1 = Inverse[Matrizaj1];
Vectorj1 = {{0}, {dist1}, {0}, {Vi}, {0}, {0}};
{{alfa0j1}, {alfa1j1}, {alfa2j1}, {alfa3j1}, {alfa4j1},
{alfa5j1}} = MaInversaj1.Vectorj1;
alfas0j1 = Simplify[alfa0j1];
alfas1j1 = Simplify[alfa1j1];
alfas2j1 = Simplify[alfa2j1];
alfas3j1 = Simplify[alfa3j1];
alfas4j1 = Simplify[alfa4j1];
alfas5j1 = Simplify[alfa5j1];

Polinomio de suavización en J1;
Polj1 = alfas0j1 + alfas1j1*(t) + alfas2j1*(t)^2 +
alfas3j1*(t)^3 + alfas4j1*(t)^4 + alfas5j1*(t)^5
Polj1p = D[Polj1, t]
Polj1pp = D[Polj1p, t]

Graficas suavizadas para el intervalo j1;
StyleBox["Gráficas del Perfil utilizando un polinomio de Grado
8 en J1:", "Section", FontColor -> RGBColor[0.996109, 0, 0]] //
DisplayForm

StyleBox["Posición para J1:", "Section", FontColor ->
RGBColor[0.824231, 0.500008, 0.171878]] // DisplayForm
grafp1 = Plot[Polj1, {t, t0, t1}, PlotStyle ->
RGBColor[0.996109, 0.500008, 0]]

StyleBox["Velocidad para J1:", "Section", FontColor ->
RGBColor[0.824231, 0.500008, 0.171878]] // DisplayForm
grafv1 = Plot[Polj1p, {t, t0, t1}, PlotStyle ->
RGBColor[0.996109, 0.500008, 0]]

```

```

StyleBox["Aceleración para J1:", "Section", FontColor ->
RGBColor[0.824231, 0.500008, 0.171878]] // DisplayForm
grafal = Plot[Polj1pp, {t, t0, t1}, PlotStyle ->
RGBColor[0.996109, 0.500008, 0]]

```

Los polinomios suavizados para esta parte de la gráfica son los siguientes:

$$\text{Polj1} = \frac{128t^3}{325} - \frac{256\sqrt{\frac{2}{13}}t^4}{1625}$$

$$\text{Polj1p} = \frac{384t^2}{325} - \frac{1024\sqrt{\frac{2}{13}}t^3}{1625}$$

$$\text{Polj1pp} = \frac{768t}{325} - \frac{3072\sqrt{\frac{2}{13}}t^2}{1625}$$

Perfil de posición en J2 usando una línea recta;

Polinomio en j2;

Polj2 = pos2

Polj2p = D[Polj2, t]

Polj2pp = D[Polj2p, t]

Gráficas suavizadas para el intervalo j2;

```

StyleBox["Gráficas del Perfil utilizando un polinomio de Grado
8 en J2:", "Section", FontColor -> RGBColor[0.996109, 0, 0]] //
DisplayForm

```

```

StyleBox["Posición para J2:", "Section", FontColor ->
RGBColor[0.824231, 0.500008, 0.171878]] // DisplayForm
grafp2 = Plot[Polj2, {t, t1, t2}, PlotStyle ->
RGBColor[0.996109, 0.500008, 0]]

```

```

StyleBox["Velocidad para J2:", "Section", FontColor ->
RGBColor[0.824231, 0.500008, 0.171878]] // DisplayForm

```

```
grafv2 = Plot[Polj2p, {t, t1, t2}, PlotStyle ->
RGBColor[0.996109, 0.500008, 0]]
```

```
StyleBox["Aceleración para J2:", "Section", FontColor ->
RGBColor[0.824231, 0.500008, 0.171878]] // DisplayForm
grafa2 = Plot[Polj2pp, {t, t1, t2}, PlotStyle ->
RGBColor[0.996109, 0.500008, 0]]
```

Los polinomios suavizados para esta parte de la gráfica son los siguientes:

$$\text{Polj2} = -\frac{5\sqrt{\frac{13}{2}}}{2} + 4t$$

$$\text{Polj2p} = 4t$$

$$\text{Polj2pp} = 0$$

Suavización del perfil de posición en J3 usando un polinomio de grado 5;

Matriz para j3;

drt = dist1 + dist2;

```
Matrizaj3 = {{1, t2, t2^2, t2^3, t2^4, t2^5},
             {1, t3, t3^2, t3^3, t3^4, t3^5},
             {0, 1, 2*t2, 3*t2^2, 4*t2^3, 5*t2^4},
             {0, 1, 2*t3, 3*t3^2, 4*t3^3, 5*t3^4},
             {0, 0, 2, 6*t2, 12*t2^2, 20*t2^3},
             {0, 0, 2, 6*t3, 12*t3^2, 20*t3^3}};
```

```
MaInversaj3 = Inverse[Matrizaj3];
```

```
Vectorj3 = {{drt}, {drt + dist3}, {Vi}, {0}, {0}, {0}};
{{alfa0j3}, {alfa1j3}, {alfa2j3}, {alfa3j3}, {alfa4j3},
{alfa5j3}} = MaInversaj3.Vectorj3;
```

```
alfas0j3 = Simplify[alfa0j3];
```

```
alfas1j3 = Simplify[alfa1j3];
```

```
alfas2j3 = Simplify[alfa2j3];
```

```
alfas3j3 = Simplify[alfa3j3];
alfas4j3 = Simplify[alfa4j3];
alfas5j3 = Simplify[alfa5j3];
```

```
Polinomio de suavización j3;
Polj3 = alfas0j3 + alfas1j3*(t) + alfas2j3*(t)^2 +
alfas3j3*(t)^3 + alfas4j3*(t)^4 + alfas5j3*(t)^5
Polj3p = D[Polj3, t]
Polj3pp = D[Polj3p, t]
```

```
Gráficas suavizadas para en el intervalo j3;
StyleBox["Gráficas del Perfil utilizando un polinomio de Grado
5 en J3:", "Section", FontColor -> RGBColor[0.996109, 0, 0]] //
DisplayForm
```

```
StyleBox["Posición para J3:", "Section", FontColor ->
RGBColor[0.824231, 0.500008, 0.171878]] // DisplayForm
grafp3 = Plot[Polj3, {t, t2, t3}, PlotStyle ->
RGBColor[0.996109, 0.500008, 0]]
```

```
StyleBox["Velocidad para J3:", "Section", FontColor ->
RGBColor[0.824231, 0.500008, 0.171878]] // DisplayForm
grafv3 = Plot[Polj3p, {t, t2, t3}, PlotStyle ->
RGBColor[0.996109, 0.500008, 0]]
```

```
StyleBox["Aceleración para J3:", "Section", FontColor ->
RGBColor[0.824231, 0.500008, 0.171878]] // DisplayForm
grafa3 = Plot[Polj3pp, {t, t2, t3}, PlotStyle ->
RGBColor[0.996109, 0.500008, 0]]
```

Los polinomios suavizados para esta parte de la gráfica son los siguientes:

$$\text{Polj3} = \frac{1915\sqrt{\frac{13}{2}}}{2} - 700t + 192\sqrt{\frac{2}{13}}t^2 - \frac{1152t^3}{325} + \frac{256\sqrt{\frac{2}{13}}t^4}{1625}$$

$$\text{Polj3p} = -700 + 384\sqrt{\frac{2}{13}}t - \frac{3456t^2}{325} + \frac{1024\sqrt{\frac{2}{13}}t^3}{1625}$$

$$\text{Polj3pp} = 384\sqrt{\frac{2}{13}} - \frac{6912t}{325} + \frac{3072\sqrt{\frac{2}{13}}t^2}{1625}$$

Suavización del perfil de posición en J4 y J5 usando un polinomio de grado 8;

Matriz para j4;

drt = dist1 + dist2 + dist3;

```
Matrizaj4 = {{1, t3, t3^2, t3^3, t3^4, t3^5, t3^6, t3^7, t3^8},
             {1, t4, t4^2, t4^3, t4^4, t4^5, t4^6, t4^7, t4^8},
             {1, t5, t5^2, t5^3, t5^4, t5^5, t5^6, t5^7, t5^8},
             {0, 1, 2*t3, 3*t3^2, 4*t3^3, 5*t3^4, 6*t3^5, 7*t3^6,
             8*t3^7},
             {0, 1, 2*t4, 3*t4^2, 4*t4^3, 5*t4^4, 6*t4^5, 7*t4^6,
             8*t4^7},
             {0, 1, 2*t5, 3*t5^2, 4*t5^3, 5*t5^4, 6*t5^5, 7*t5^6,
             8*t5^7},
             {0, 0, 2, 6*t3, 12*t3^2, 20*t3^3, 30*t3^4, 42*t3^5,
             56*t3^6},
             {0, 0, 2, 6*t4, 12*t4^2, 20*t4^3, 30*t4^4, 42*t4^5,
             56*t4^6},
             {0, 0, 2, 6*t5, 12*t5^2, 20*t5^3, 30*t5^4, 42*t5^5,
             56*t5^6}};
```

MaInversaj4 = Inverse[Matrizaj4];

```
Vectorj4 = {{drt}, {drt + dist4}, {drt + dist4 + dist5}, {0},
            {Vm}, {0}, {0}, {0}, {0}};
```

```
{{alfa0j4}, {alfa1j4}, {alfa2j4}, {alfa3j4}, {alfa4j4},
 {alfa5j4}, {alfa6j4}, {alfa7j4}, {alfa8j4}} =
```

MaInversaj4.Vectorj4;



```

Polinomio de suavización en j4;
Polj4 = alfa0j4 + alfa1j4*(t) + alfa2j4*(t)^2 + alfa3j4*(t)^3
+ alfa4j4*(t)^4 + alfa5j4*(t)^5 + alfa6j4*(t)^6 + alfa7j4*(t)^7
+ alfa8j4*(t)^8
Polj4p = D[Polj4, t]
Polj4pp = D[Polj4p, t]

```

Gráficas suavizadas para los intervalos J4 y J5;

```

StyleBox["Gráficas del Perfil utilizando un polinomio de Grado
8 en J4:", "Section", FontColor -> RGBColor[0.996109, 0, 0]] //
DisplayForm

```

```

StyleBox["Posición para J4:", "Section", FontColor ->
RGBColor[0.824231, 0.500008, 0.171878]] // DisplayForm
grafp4 = Plot[Polj4, {t, t3, t5}, PlotStyle ->
RGBColor[0.996109, 0.500008, 0]]

```

```

StyleBox["Velocidad para J4:", "Section", FontColor ->
RGBColor[0.824231, 0.500008, 0.171878]] // DisplayForm
grafv4 = Plot[Polj4p, {t, t3, t5}, PlotStyle ->
RGBColor[0.996109, 0.500008, 0]]

```

```

StyleBox["Aceleración para J4:", "Section", FontColor ->
RGBColor[0.824231, 0.500008, 0.171878]] // DisplayForm
grafa4 = Plot[Polj4pp, {t, t3, t5}, PlotStyle ->
RGBColor[0.996109, 0.500008, 0]]

```

Los polinomios suavizados para esta parte de la gráfica son los siguientes:

$$\text{Polj4} = \frac{2437115\sqrt{\frac{13}{2}}}{512} - \frac{564975t}{128} + \frac{54999t^2}{16\sqrt{26}} - \frac{72483t^3}{1300} + \frac{2233}{325}\sqrt{\frac{2}{13}}t^4 - \frac{1608t^5}{21125} + \frac{1568\sqrt{\frac{2}{13}}t^6}{528125} - \frac{256t^7}{34328125}$$

$$\text{Polj4p} = -\frac{564975}{128} + \frac{54999t}{8\sqrt{26}} - \frac{217449t^2}{1300} + \frac{8932}{325}\sqrt{\frac{2}{13}}t^3 - \frac{1608t^4}{4225} + \frac{9408\sqrt{\frac{2}{13}}t^5}{528125} - \frac{1792t^6}{34328125}$$

$$\text{Polj4pp} = \frac{54999}{8\sqrt{26}} - \frac{217449t}{650} + \frac{26796}{325}\sqrt{\frac{2}{13}}t^2 - \frac{6432t^3}{4225} + \frac{9408\sqrt{\frac{2}{13}}t^4}{105625} - \frac{10752t^5}{34328125}$$

Perfiles de trayectoria teóricos;

```
StyleBox["Gráfica de velocidad teórica:", "Section",
FontColor -> RGBColor[0.968765, 0.460945, 0.121096]] //
DisplayForm
Show[graficavel1, graficavel2, graficavel3, graficavel4,
graficavel5]
```

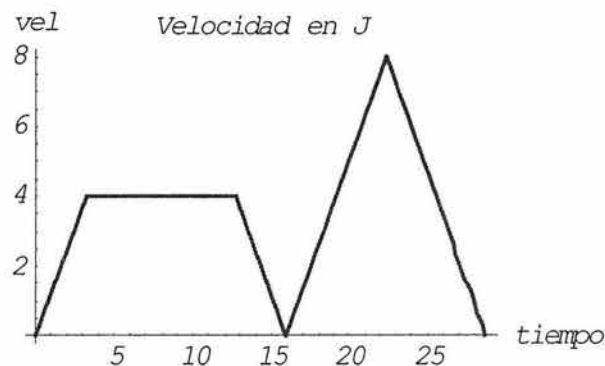


Figura 6.1 Gráfica de la velocidad contra el tiempo (perfil de velocidad)

```

StyleBox["Gráfica de posición teórica:", "Section", FontColor
-> RGBColor[0.968765, 0.460945, 0.121096]] // DisplayForm
Show[graficapos1, graphicapos2, graphicapos3, graphicapos4,
graficapos5]

```

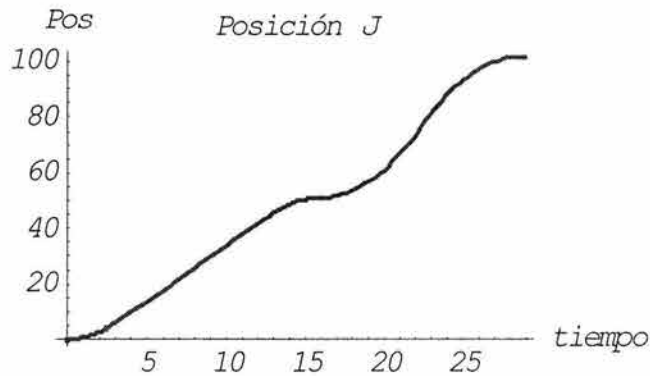


Figura 6.2 Grafica de la posición contra el tiempo (perfil de posición)

```

StyleBox["Gráfica de aceleración teórica:", "Section",
FontColor -> RGBColor[0.968765, 0.460945, 0.121096]] //
DisplayForm
Show[graficaacel1, graficaacel2, graficaacel3, graficaacel4,
graficaacel5]

```

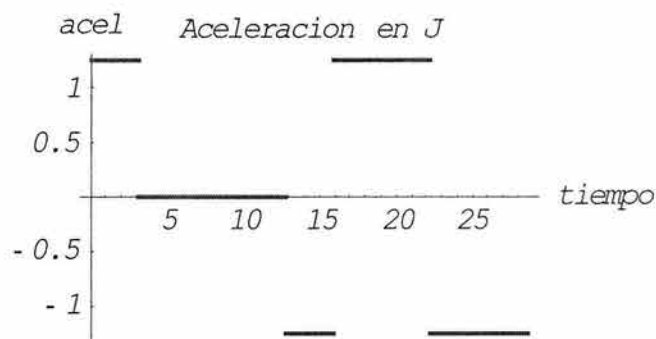


Figura 6.3 Grafica de la aceleración contra el tiempo (perfil de aceleración)

Perfiles de trayectoria suavizados;

```

StyleBox["Gráfica de velocidad suavizada:", "Section",
FontColor -> RGBColor[0.968765, 0.460945, 0.121096]] //
DisplayForm

```

```
Show[grafv1, grafv2, grafv3, grafv4]
```

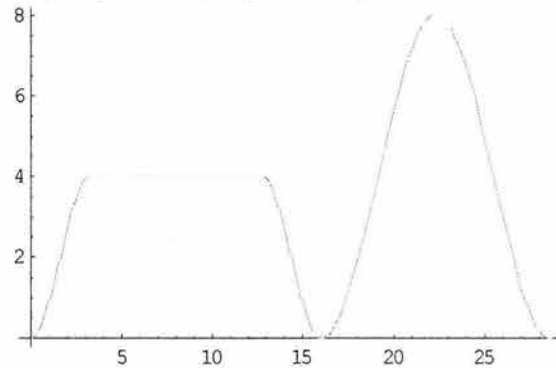


Figura 6.4 Grafica de la velocidad suavizada contra el tiempo (perfil de velocidad suavizado)

```
StyleBox["Gráfica de posición suavizada:", "Section",  
FontColor -> RGBColor[0.968765, 0.460945, 0.121096]] //  
DisplayForm  
Show[grafp1, grafp2, grafp3, grafp4]
```

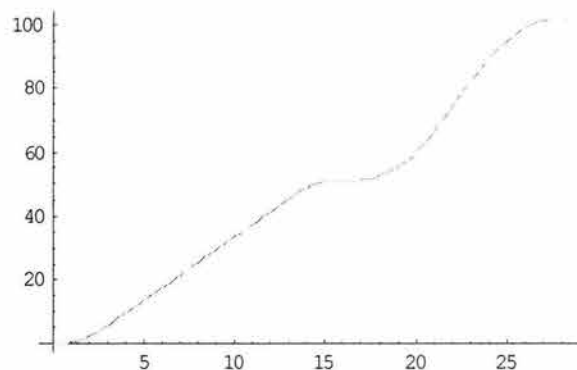


Figura 6.5 Grafica de la posición suavizada contra el tiempo (perfil de posición suavizado)

```
StyleBox["Gráfica de aceleración suavizada:", "Section",  
FontColor -> RGBColor[0.968765, 0.460945, 0.121096]] //  
DisplayForm  
Show[grafal1, grafa2, grafa3, grafa4]
```

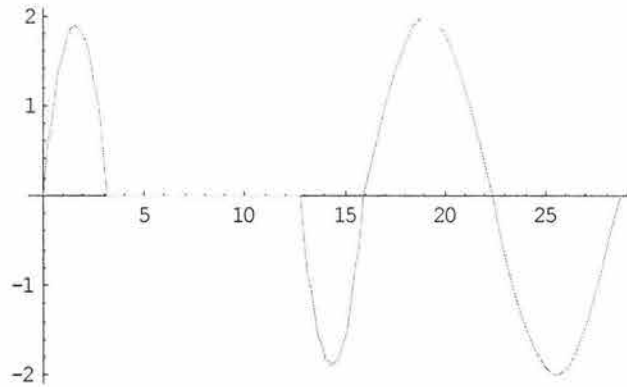


Figura 6.6 Grafica de la aceleración suavizada contra el tiempo (perfil de aceleración suavizado)

Gráficos para la trayectoria;

```

Ejex = Graphics3D[{RGBColor[0, 0, 0.996109], Thickness[0.001],
Line[{{0, 0, 0}, {55, 0, 0}}]}];
Ejey = Graphics3D[{RGBColor[0.996109, 0, 0], Thickness[0.001],
Line[{{0, 0, 0}, {0, 55, 0}}]}];
Ejez = Graphics3D[{RGBColor[0.500008, 0.996109, 0],
Thickness[0.001], Line[{{0, 0, 0}, {0, 0, 2}}]}];
Textox = Graphics3D[{RGBColor[0, 0, 0.996109] ,
Text["eje x", {50, 0, 0}, TextStyle -> {FontSlant -> "Oblique",
FontSize -> 10}]}];
Textoy = Graphics3D[{RGBColor[0, 0, 0.996109] ,
Text["eje y", {0, 50, 0}, TextStyle -> {FontSlant -> "Oblique",
FontSize -> 10}]}];
Textoz = Graphics3D[{RGBColor[0, 0, 0.996109] ,
Text["eje z", {0, 0, 1}, TextStyle -> {FontSlant -> "Oblique",
FontSize -> 10}]}];
LineaTrazada1 = Graphics3D[{RGBColor[0.996109, 0, 0],
Thickness[0.001], Line[{{x0, y0, z0 + 1}, {x3, y3, z3 + 1}}]}];
LineaTrazada2 = Graphics3D[{RGBColor[0.996109, 0, 0],
Thickness[0.001], Line[{{x3, y3, z3}, {x0, y0, z0}}]}];

```

Vectores Unitarios;

```
a1 = Divide[x1 - x0, dist1];
b1 = Divide[y1 - y0, dist1];
c1 = Divide[z1 - z0, dist1];
```

```
a2 = Divide[x2 - x1, dist2];
b2 = Divide[y2 - y1, dist2];
c2 = Divide[z2 - z1, dist2];
```

```
a3 = Divide[x3 - x2, dist3];
b3 = Divide[y3 - y2, dist3];
c3 = Divide[z3 - z2, dist3];
```

```
a4 = Divide[x0 - x3, dist4 + dist5];
b4 = Divide[y0 - y3, dist4 + dist5];
c4 = Divide[z0 - z3, dist4 + dist5];
```

Polinomios de posición direccionados;

```
Pt1 = Polj1;
xJ1 = x0 + a1*Pt1;
yJ1 = y0 + b1*Pt1;
zJ1 = z0 + c1*Pt1;
```

```
Pt2 = Polj2 - dist1;
xJ2 = x1 + a2*Pt2;
yJ2 = y1 + b2*Pt2;
zJ2 = z1 + c2*Pt2;
```

```
Pt3 = Polj3 - dist1 - dist2;
xJ3 = x2 + a3*Pt3;
yJ3 = y2 + b3*Pt3;
zJ3 = z2 + c3*Pt3;
```

```
Pt4 = Polj4 - dist1 - dist2 - dist3;
xJ4 = x3 + a4*Pt4;
```

```
yJ4 = y3 + b4*Pt4;  
zJ4 = z3 + c4*Pt4;
```

Grafica de la herramienta;

```
Table[HerramientaJ1[t] = Graphics3D[{PointSize[0.02],  
RGBColor[0, 0, 0.996109], Point[{xJ1, yJ1, zJ1}]}, AspectRatio  
-> 1, PlotRange -> {{plotminx, plotmaxx}, {plotminy, plotmaxy},  
{plotminz, plotmaxz}}], {t, t0, t1, 0.2}];
```

```
Table[HerramientaJ2[t] = Graphics3D[{PointSize[0.02],  
RGBColor[0, 0, 0.996109], Point[{xJ2, yJ2, zJ2}]}, AspectRatio  
-> 1, PlotRange -> {{plotminx, plotmaxx}, {plotminy, plotmaxy},  
{plotminz, plotmaxz}}], {t, t1, t2, 0.2}];
```

```
Table[HerramientaJ3[t] = Graphics3D[{PointSize[0.02],  
RGBColor[0, 0, 0.996109], Point[{xJ3, yJ3, zJ3}]}, AspectRatio  
-> 1, PlotRange -> {{plotminx, plotmaxx}, {plotminy, plotmaxy},  
{plotminz, plotmaxz}}], {t, t2, t3, 0.2}];
```

```
Table[HerramientaJ4[t] = Graphics3D[{PointSize[0.02],  
RGBColor[0, 0, 0.996109], Point[{xJ4, yJ4, zJ4}]}, AspectRatio  
-> 1, PlotRange -> {{plotminx, plotmaxx}, {plotminy, plotmaxy},  
{plotminz, plotmaxz}}], {t, t3, t5, 0.2}];
```

Guardar el movimiento de la herramienta en un archivo;

```
Open["xJ.dat"];  
Table[Write["xJ.dat", xJ1], {t, t0, t1, 0.2}];  
Table[Write["xJ.dat", xJ2], {t, t1, t2, 0.2}];  
Table[Write["xJ.dat", xJ3], {t, t2, t3, 0.2}];  
Table[Write["xJ.dat", xJ4], {t, t3, t5, 0.2}];  
Close["xJ.dat"];  
Open["yJ.dat"];  
Table[Write["yJ.dat", yJ1], {t, t0, t1, 0.2}];  
Table[Write["yJ.dat", yJ2], {t, t1, t2, 0.2}];  
Table[Write["yJ.dat", yJ3], {t, t2, t3, 0.2}];  
Table[Write["yJ.dat", yJ4], {t, t3, t5, 0.2}];  
Close["yJ.dat"];
```

Polinomios de velocidad direccionados;

```
Pt1 = Polj1p;  
vxJ1 = a1*Pt1;  
vyJ1 = b1*Pt1;  
vzJ1 = c1*Pt1;
```

```
Pt2 = Polj2p;  
vxJ2 = a2*Pt2;  
vyJ2 = b2*Pt2;  
vzJ2 = c2*Pt2;
```

```
Pt3 = Polj3p;  
vxJ3 = a3*Pt3;  
vyJ3 = b3*Pt3;  
vzJ3 = c3*Pt3;
```

```
Pt4 = Polj4p;  
vxJ4 = a4*Pt4;  
vyJ4 = b4*Pt4;  
vzJ4 = c4*Pt4;
```

Guardar los datos de la velocidad de la herramienta en archivo;

```
Open["vxJ.dat"];  
Table[Write["vxJ.dat", vxJ1], {t, t0, t1, 0.2}];  
Table[Write["vxJ.dat", vxJ2], {t, t1, t2, 0.2}];  
Table[Write["vxJ.dat", vxJ3], {t, t2, t3, 0.2}];  
Table[Write["vxJ.dat", vxJ4], {t, t3, t5, 0.2}];  
Close["vxJ.dat"];
```

```
Open["vyJ.dat"];  
Table[Write["vyJ.dat", vyJ1], {t, t0, t1, 0.2}];  
Table[Write["vyJ.dat", vyJ2], {t, t1, t2, 0.2}];  
Table[Write["vyJ.dat", vyJ3], {t, t2, t3, 0.2}];  
Table[Write["vyJ.dat", vyJ4], {t, t3, t5, 0.2}];  
Close["vyJ.dat"];
```



Polinomios de aceleración direccionados;

```
Pt1 = Polj1pp;  
axJ1 = a1*Pt1;  
ayJ1 = b1*Pt1;  
azJ1 = c1*Pt1;
```

```
Pt2 = Polj2pp;  
axJ2 = a2*Pt2;  
ayJ2 = b2*Pt2;  
azJ2 = c2*Pt2;
```

```
Pt3 = Polj3pp;  
axJ3 = a3*Pt3;  
ayJ3 = b3*Pt3;  
azJ3 = c3*Pt3;
```

```
Pt4 = Polj4pp;  
axJ4 = a4*Pt4;  
ayJ4 = b4*Pt4;  
azJ4 = c4*Pt4;
```

Guardar los datos de la velocidad de la herramienta en archivo;

```
Open["axJ.dat"];  
Table[Write["axJ.dat", axJ1], {t, t0, t1, 0.2}];  
Table[Write["axJ.dat", axJ2], {t, t1, t2, 0.2}];  
Table[Write["axJ.dat", axJ3], {t, t2, t3, 0.2}];  
Table[Write["axJ.dat", axJ4], {t, t3, t5, 0.2}];  
Close["axJ.dat"];
```

```
Open["ayJ.dat"];  
Table[Write["ayJ.dat", ayJ1], {t, t0, t1, 0.2}];  
Table[Write["ayJ.dat", ayJ2], {t, t1, t2, 0.2}];  
Table[Write["ayJ.dat", ayJ3], {t, t2, t3, 0.2}];  
Table[Write["ayJ.dat", ayJ4], {t, t3, t5, 0.2}];
```

```
Close["ayJ.dat"];
```

Graficación de la trayectoria;

Graficas de la trayectoria en el tiempo J1;

```
Table[Show[{LineaTrazada1, HerramientaJ1[t], Ejex, Ejey},  
ViewPoint -> {1.710, -4.000, 1.510}, PlotRange -> {{plotminx,  
plotmaxx}, {plotminy, plotmaxy}, {plotminz, plotmaxz}}, Boxed -  
> True, Axes -> True], {t, t0, t1, 0.2}];
```

Grafica trayectoria en el tiempo J2;

```
Table[Show[{LineaTrazada1, HerramientaJ2[t], Ejex, Ejey},  
ViewPoint -> {1.710, -4.000, 1.510}, PlotRange -> {{plotminx,  
plotmaxx}, {plotminy, plotmaxy}, {plotminz, plotmaxz}}, Boxed -  
> True, Axes -> True], {t, t1, t2, 0.2}];
```

Grafica trayectoria en el tiempo J3;

```
Table[Show[{LineaTrazada1, HerramientaJ3[t], Ejex, Ejey},  
ViewPoint -> {1.710, -4.000, 1.510}, PlotRange -> {{plotminx,  
plotmaxx}, {plotminy, plotmaxy}, {plotminz, plotmaxz}}, Boxed -  
> True, Axes -> True], {t, t2, t3, 0.2}];
```

Grafica trayectoria en el tiempo J4;

```
Table[Show[{LineaTrazada2, HerramientaJ4[t], Ejex, Ejey},  
ViewPoint -> {1.710, - 4.000, 1.510}, PlotRange -> {{plotminx,  
plotmaxx}, {plotminy, plotmaxy}, {plotminz,  
plotmaxz}}, Boxed -> True, Axes -> True], {t, t3, t5, 0.2}];
```

Las siguientes gráficas muestran el movimiento de la herramienta en el tiempo, el punto representa la herramienta, y la línea por donde pasa el punto es el lugar geométrico de la trayectoria.

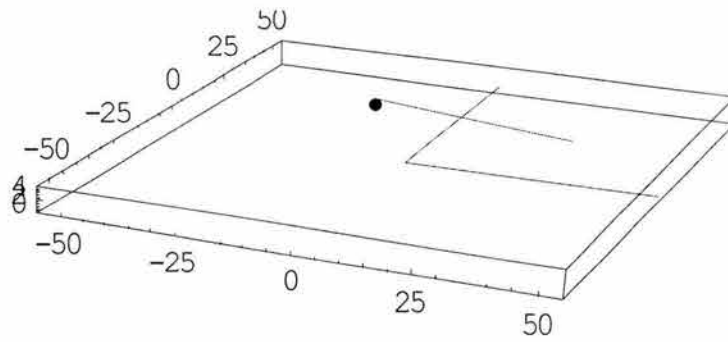


Figura 6.7 Gráfica de la trayectoria de la herramienta en el tiempo

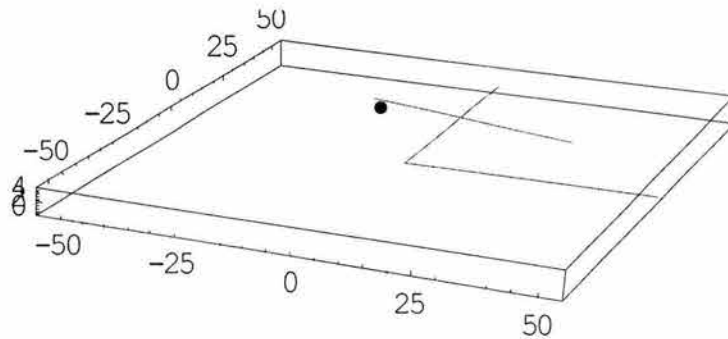


Figura 6.8 Gráfica de la trayectoria de la herramienta en el tiempo

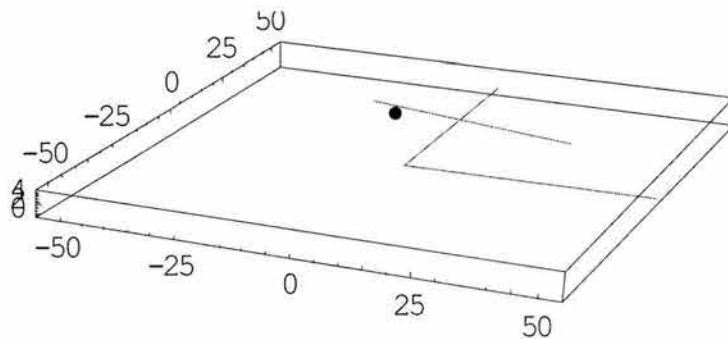


Figura 6.9 Gráfica de la trayectoria de la herramienta en el tiempo

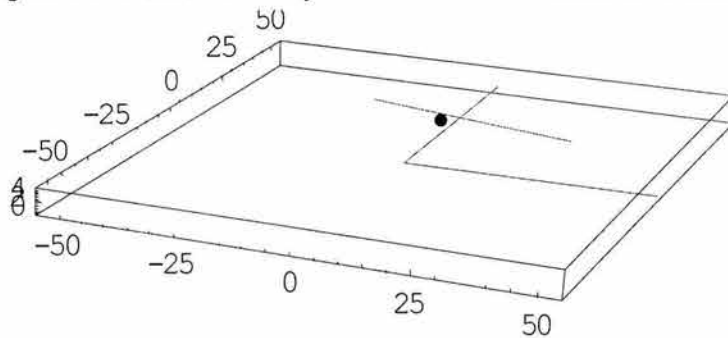


Figura 6.10 Gráfica de la trayectoria de la herramienta en el tiempo

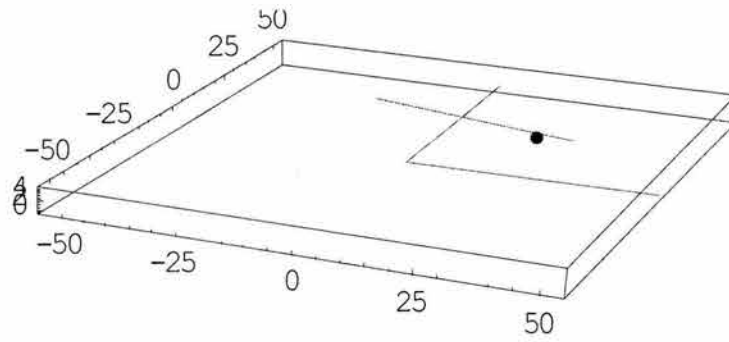


Figura 6.11 Gráfica de la trayectoria de la herramienta en el tiempo

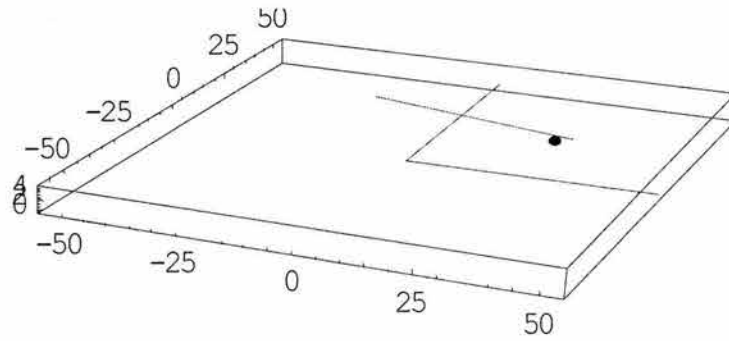


Figura 6.12 Gráfica de la trayectoria de la herramienta en el tiempo

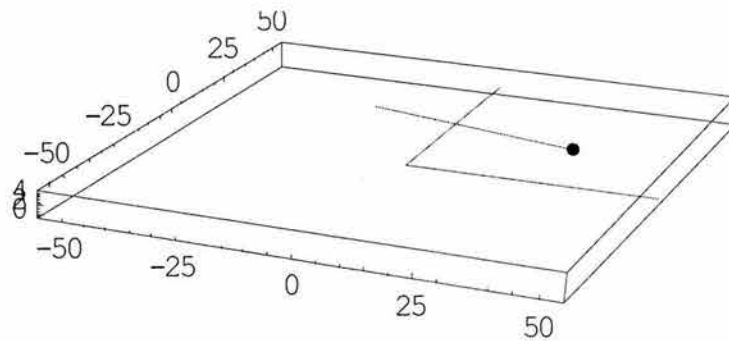


Figura 6.13 Gráfica de la trayectoria de la herramienta en el tiempo

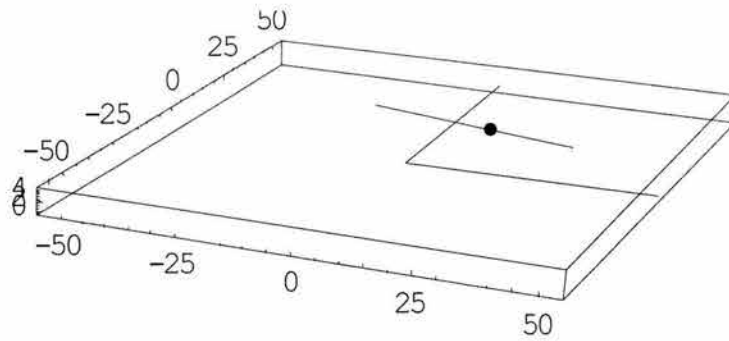


Figura 6.14 Gráfica de la trayectoria de la herramienta en el tiempo

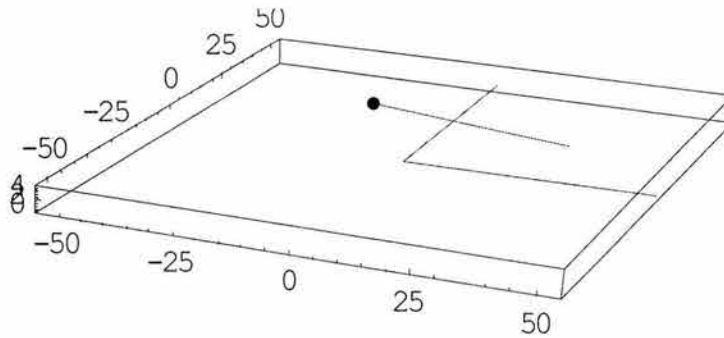


Figura 6.15 Gráfica de la trayectoria de la herramienta en el tiempo

## 6.2 Cinemática de la posición

El propósito de esta sección es el de programar la cinemática inversa y directa del robot de DGDL motivo de estudio, acoplándola con el perfil de posición de la herramienta. Los datos obtenidos se grafican en una simulación de figuras y se guardan en un archivo.

```

Cinemática directa de la posición;
Configuración No Deformada;
ClearAll[theta, phi, L1, L2, P0, P1, Q0, Q1, po, qo, ui, vi,
ri];
Mpq[x_, y_] := {x[[1]]*y[[1]] - x[[2]]*y[[2]],
               x[[1]]*y[[2]] + x[[2]]*y[[1]]};
Ro[b_, x_] := Mpq[b, x];
theta = 60*Degree;
phi = -30*Degree;
po = {Cos[theta], Sin[theta]};
qo = {Cos[phi], Sin[phi]};
ê1 = {1, 0}; ê2 = {0, 1};
â11 = Ro[po, ê1]; â21 = Ro[qo, â11];
L1 = 30; L2 = 20;
ui = L1*â11; vi = L2*â21;
ri = ui + vi;
Configuración Deformada;
P = {P0, P1};
Q = {Q0, Q1};
ô11 = Ro[P, â11]; ô21 = Ro[Q, Ro[P, â21]];

```

```

uf = L1*δ11; vf = L2*δ21;
rf = uf + vf;
For[n = 1, n <= 144, n += 1,
  If[n <= 144, px = Read["xJ.dat"]; py = Read["yJ.dat"];
    sol[t] = FindRoot[{rf[[1]] == px, rf[[2]] == py,
P0^2 + P1^2 == 1, Q0^2 + Q1^2 == 1}, {P0, 0.8}, {P1, -0.1},
{Q0, 0.1}, {Q1, 0.8},
    MaxIterations -> 100];
    vec[t] = {P0, P1, Q0, Q1} /. sol[t];
    theta1 = vec[t][[1]];
    phi1 = vec[t][[3]] ;
    theta2 = vec[t][[2]];
    phi2 = vec[t][[4]];
    Write["P0.dat", theta1];
    Write["P1.dat", theta2];
    Write["Q0.dat", phi1];
    Write["Q1.dat", phi2]
  ]
Close["P0.dat"]; Close["P1.dat"];
Close["Q0.dat"]; Close["Q1.dat"]; Close["xJ.dat"];
Close["yJ.dat"];

```

Subrutina de Simulación del acoplamiento de la posición del POT y la trayectoria;

```

For[n = 1, n <= 144, n += 1,
  P0 = Read["P0.dat"]; P1 = Read["P1.dat"];
  Q0 = Read["Q0.dat"]; Q1 = Read["Q1.dat"];
  px = Read["xJ.dat"]; py = Read["yJ.dat"];
  Show[Graphics3D[{{PointSize[0.015], RGBColor[1, 0, 0],
Point[{px, py, zJ1}}, {PointSize[0.02], RGBColor[0, 1, 0],
Point[{rf[[1]], rf[[2]], 0}}, {Thickness[.015],
RGBColor[0, 0, 1], Line[{{0, 0, 0}, {uf[[1]], uf[[2]], 0},
{rf[[1]], rf[[2]], 0}}]}, {RGBColor[.9, .9, .9], Line[{{0, 0,
0}, {ui[[1]], ui[[2]], 0}, {ri[[1]], ri[[2]], 0}}]}]},
ViewPoint -> {1.710, -4.000, 1.510}, PlotRange -> {{plotminx,
plotmaxx}, {plotminy, plotmaxy}, {plotminz, plotmaxz}}, Boxed ->
True, Axes -> True, AspectRatio -> 1]]

```

```
Close["P0.dat"]; Close["P1.dat"];  
Close["Q0.dat"]; Close["Q1.dat"]; Close["xJ.dat"];  
Close["yJ.dat"];
```

Las siguientes gráficas representan el movimiento del robot acoplado con la trayectoria de la herramienta. El robot está representado por la línea gruesa, una línea tenue es la posición no deformada del robot; la línea delgada es la trayectoria de la herramienta, el punto pequeño es la herramienta y, el punto en el extremo del robot es el punto de órgano terminal, que es donde va montada la herramienta.

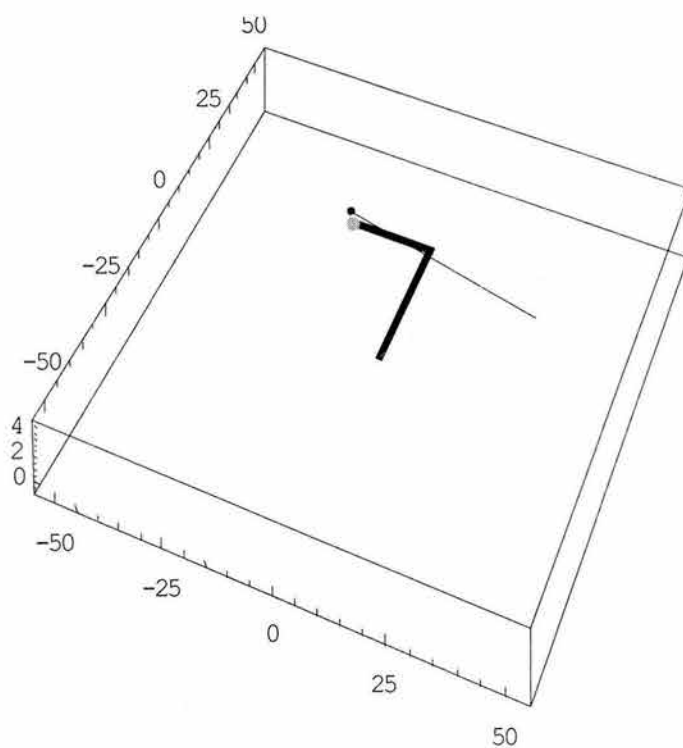


Figura 6.16 Gráfica del movimiento del robot acoplado con la trayectoria

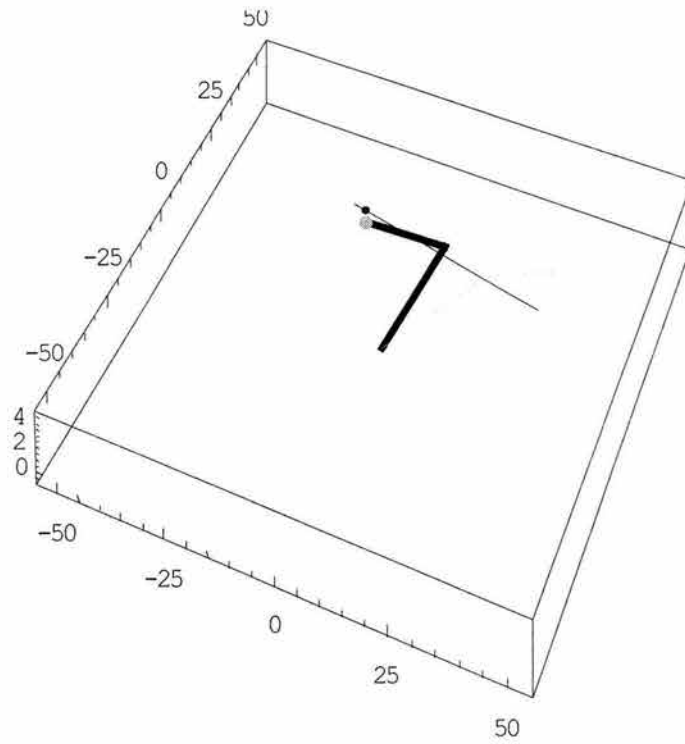


Figura 6.17 Gráfica del movimiento del robot acoplado con la trayectoria

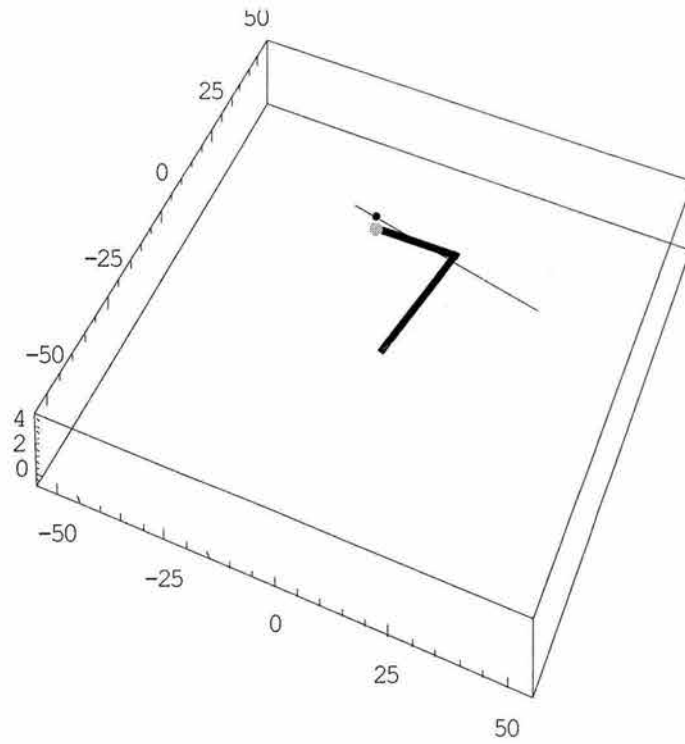


Figura 6.18 Gráfica del movimiento del robot acoplado con la trayectoria



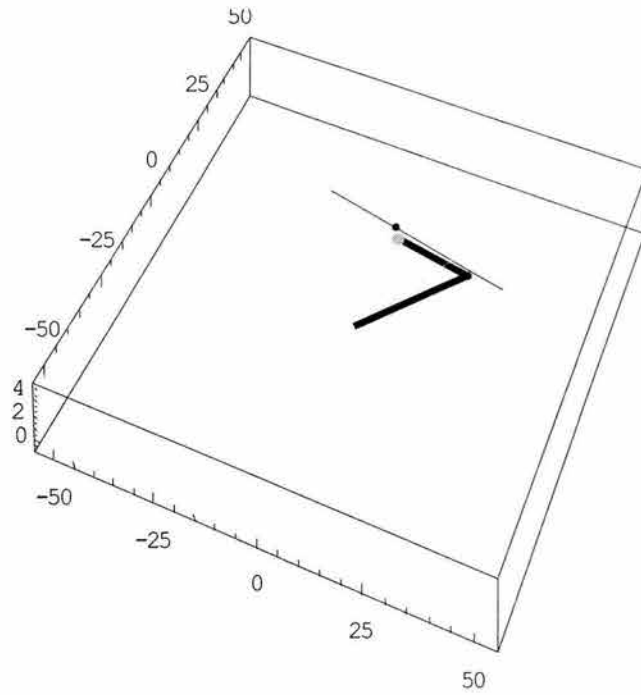


Figura 6.19 Gráfica del movimiento del robot acoplado con la trayectoria

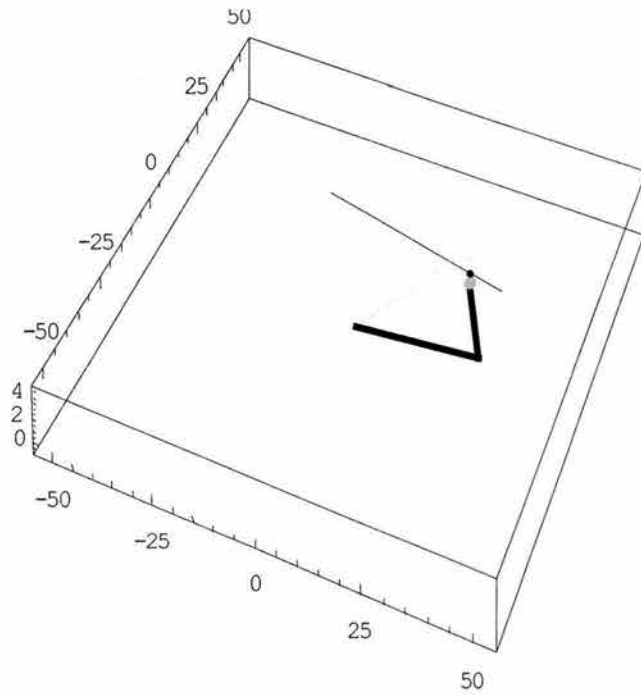


Figura 6.20 Gráfica del movimiento del robot acoplado con la trayectoria

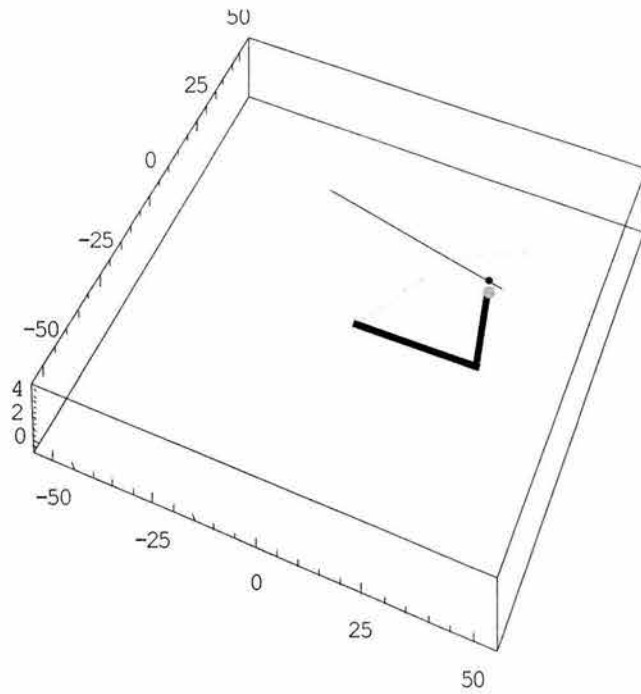


Figura 6.21 Gráfica del movimiento del robot acoplado con la trayectoria

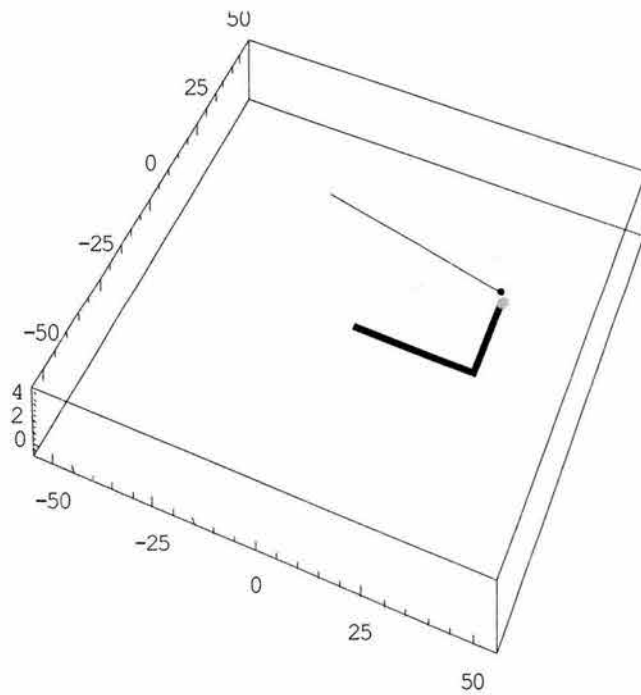


Figura 6.22 Gráfica del movimiento del robot acoplado con la trayectoria

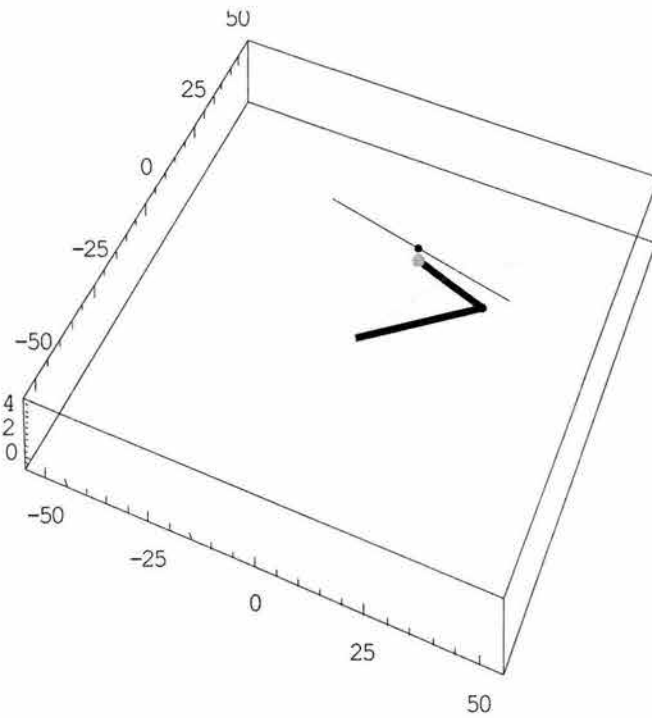


Figura 6.23 Gráfica del movimiento del robot acoplado con la trayectoria

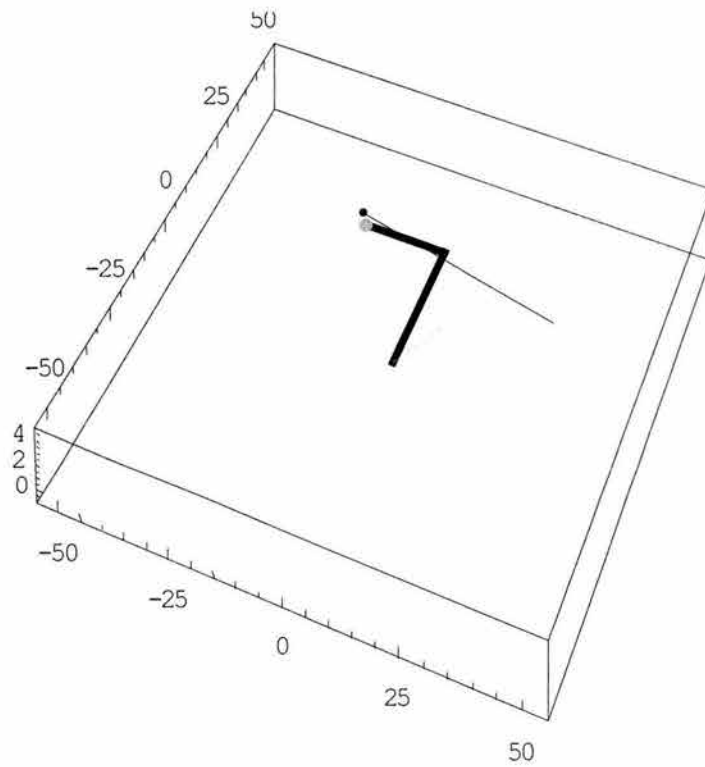


Figura 6.24 Gráfica del movimiento del robot acoplado con la trayectoria

### 6.3 Cinemática de la velocidad

El propósito de esta sección es el de programar la cinemática inversa y directa del robot de 2GDL motivo de estudio, acoplándola con el perfil de velocidad de la herramienta. Los datos obtenidos se grafican en una simulación de figuras y se guardan en un archivo.

```
Cinemática directa de la velocidad;
Configuración No Deformada;
Mpq[x_, y_] := {x[[1]]*y[[1]] - x[[2]]*y[[2]],
               x[[1]]*y[[2]] + x[[2]]*y[[1]]};
Ro[b_, x_] := Mpq[b, x];
theta = 60*Degree;
phi = -30*Degree;
p = {Cos[theta], Sin[theta]};
q = {Cos[phi], Sin[phi]};
ê1 = {1, 0}; ê2 = {0, 1};
â11 = Ro[p, ê1]; â21 = Ro[q, â11];
L1 = 30; L2 = 20;
Configuración Deformada;
P = {P0, P1};
Q = {Q0, Q1};
Pn = {P0, -P1};
Qn = {Q0, -Q1};
Pp = {Pp0, Pp1};
Qp = {Qp0, Qp1};
v11 = Ro[Pp, Ro[Pn, â11]]; v21 =
  Ro[Qp, Ro[Qn, â21]] + Ro[Q, Ro[Pp, Ro[Pn, Ro[Qn, â21]]];
w1 = L1*v11; w2 = L2*v21;
velocidad = w1 + w2;

Open["P0.dat"]; Open["P1.dat"]; Open["Q0.dat"]; Open["Q1.dat"];
Open["vxJ.dat"]; Open["vyJ.dat"];

Cinemática Inversa de la velocidad;
For[n = 1, n <= 144, n += 1,
```

```

If[n <= 144, vx = Read["vxJ.dat"]; vy = Read["vyJ.dat"];
  P0 = Read["P0.dat"];
  P1 = Read["P1.dat"];
  Q0 = Read["Q0.dat"];
  Q1 = Read["Q1.dat"];
  sol[t] = FindRoot[{velocidad[[1]] == vx, velocidad[[2]] ==
vy, Pp0 P0 + Pp1 P1 == 0, Qp0 Q0 + Qp1 Q1 == 0}, {Pp0, 0.8},
{Pp1, -0.1}, {Qp0, 0.1}, {Qp1, 0.8}, MaxIterations -> 80];
  vec2[t] = {Pp0, Pp1, Qp0, Qp1} /. sol[t];
  theta1p = vec2[t][[1]];
  phi1p = vec2[t][[3]];
  Write["P0p.dat", theta1p];
  Write["Q0p.dat", phi1p];
  theta2p = vec2[t][[2]];
  phi2p = vec2[t][[4]];
  Write["P1p.dat", theta2p];
  Write["Q1p.dat", phi2p]
]]
Close["P0.dat"]; Close["P1.dat"]; Close["Q0.dat"];
Close["Q1.dat"];
Close["vxJ.dat"]; Close["vyJ.dat"]; Close["P0p.dat"];
Close["P1p.dat"];
Close["Q0p.dat"]; Close["Q1p.dat"];

```

## 6.4 Cinemática de la aceleración

El propósito de esta sección es el de programar la cinemática inversa y directa del robot de DGDL motivo de estudio, acoplándola con el perfil de aceleración de la herramienta. Los datos obtenidos se grafican en una simulación de figuras y se guardan en un archivo.

```

Cinemática Directa de la aceleración;
Configuración No Deformada;
Mpq[x_, y_] := {x[[1]]*y[[1]] - x[[2]]*y[[2]],
  x[[1]]*y[[2]] + x[[2]]*y[[1]]};
Ro[b_, x_] := Mpq[b, x];

```

```

theta = 60*Degree;
phi = -30*Degree;
p = {Cos[theta], Sin[theta]};
q = {Cos[phi], Sin[phi]};
ê1 = {1, 0}; ê2 = {0, 1};
â11 = Ro[p, ê1]; â21 = Ro[q, â11];
L1 = 30; L2 = 20;
Configuración Deformada;
P = {P0, P1};
Q = {Q0, Q1};
Pn = {P0, -P1};
Qn = {Q0, -Q1};
Pp = {Pp0, Pp1};
Qp = {Qp0, Qp1};
Ppp = {Ppp0, Ppp1};
Qpp = {Qpp0, Qpp1};
aa11 = Ro[Ppp, Ro[Pn, â11]]; aa21 =
  Ro[Qpp, Ro[Qn, â21]] + 2Ro[Qp, Ro[Pp, Ro[Pn, Ro[Qn, â21]]]] +
Ro[Q, Ro[Ppp, Ro[Pn, Ro[Qn, â21]]]];
acel1 = L1*aa11; acel2 = L2*aa21;
acelera = acel1 + acel2;

```

Cinemática inversa de la aceleración;

```

Open["P0.dat"]; Open["P1.dat"]; Open["Q0.dat"];
Open["Q1.dat"]; Open["axJ.dat"]; Open["ayJ.dat"];
Open["P0p.dat"]; Open["P1p.dat"]; Open["Q0p.dat"];
Open["Q1p.dat"]; \n
For[n = 1, n <= 144, n += 1,
if[n <= 144, acex = Read["axJ.dat"];
  acey = Read["ayJ.dat"];
  P0 = Read["P0.dat"];
  P1 = Read["P1.dat"];
  Q0 = Read["Q0.dat"];
  Q1 = Read["Q1.dat"];
  Pp0 = Read["P0p.dat"];
  Pp1 = Read["P1p.dat"];
  Qp0 = Read["Q0p.dat"];

```

```

    Qp1 = Read["Q1p.dat"];
    sol3[t] = FindRoot[{acelera[[1]] == acex, acelera[[2]] ==
acey, Ppp0 P0 + Pp0^2 + Ppp1 P1 + Pp1^2 == 0, Qpp0 Q0 + Qp0^2 +
Qpp1 Q1 + Qp1^2 == 0}, {Ppp0, 0.8}, {Ppp1, -0.1}, {Qpp0, 0.1},
{Qpp1, 0.8}, MaxIterations -> 80];
    vec3[t] = {Ppp0, Ppp1, Qpp0, Qpp1} /.sol3[t];
    theta1pp = vec3[t][[1]];
    phi1pp = vec3[t][[3]];
    Write["P0pp.dat",theta1pp];
    Write["Q0pp.dat",phi1pp];
    theta2pp = vec3[t][[2]];
    phi2pp = vec3[t][[4]];
    Write["P1pp.dat",theta2pp];
    Write["Q1pp.dat", phi2pp]
]]
Close["P0.dat"]; Close["P1.dat"]; Close["Q0.dat"];
Close["Q1.dat"]; Close["axJ.dat"]; Close["ayJ.dat"];
Close["P0p.dat"]; Close["P1p.dat"]; Close["Q0p.dat"];
Close["Q1p.dat"]; Close["P0pp.dat"]; Close["P1pp.dat"];
Close["Q0pp.dat"]; Close["Q1pp.dat"];

```

Una vez terminada la corrida del programa se tiene los siguientes archivos de datos:

axJ.dat; ayJ.dat; azJ.dat; vxJ.dat; vyJ.dat; vzJ.dat; xJ.dat; yJ.dat; zJ.dat; P0.dat; P1.dat; Q0.dat; Q1.dat; P0p.dat; P1p.dat; Q0p.dat; Q1p.dat; P0pp.dat; P1pp.dat; Q0pp.dat; Q1pp.dat;

Los cuales se agruparon en un archivo para su manejo de datos en Excel, en el cual se calcularon y graficaron los desplazamientos angulares de los eslabones, las velocidades angulares de los eslabones y las aceleraciones angulares de los eslabones.

## 6.5 Análisis de resultados.

En esta sección se presentan los resultados obtenidos del programa en forma gráfica. Los primeros 15 datos son de la primera parte del movimiento (intervalo  $I_1$ ); Los datos que finalizan en el 63 corresponden al intervalo  $I_2$ ; los datos hasta el 79 son para el intervalo  $I_3$  y los últimos son para el intervalo  $I_4$ , en cada una de las gráficas que se muestran.

### 6.5.1 Rotación angular de los eslabones

En esta sección se muestran las gráficas de los desplazamientos angulares de los eslabones.

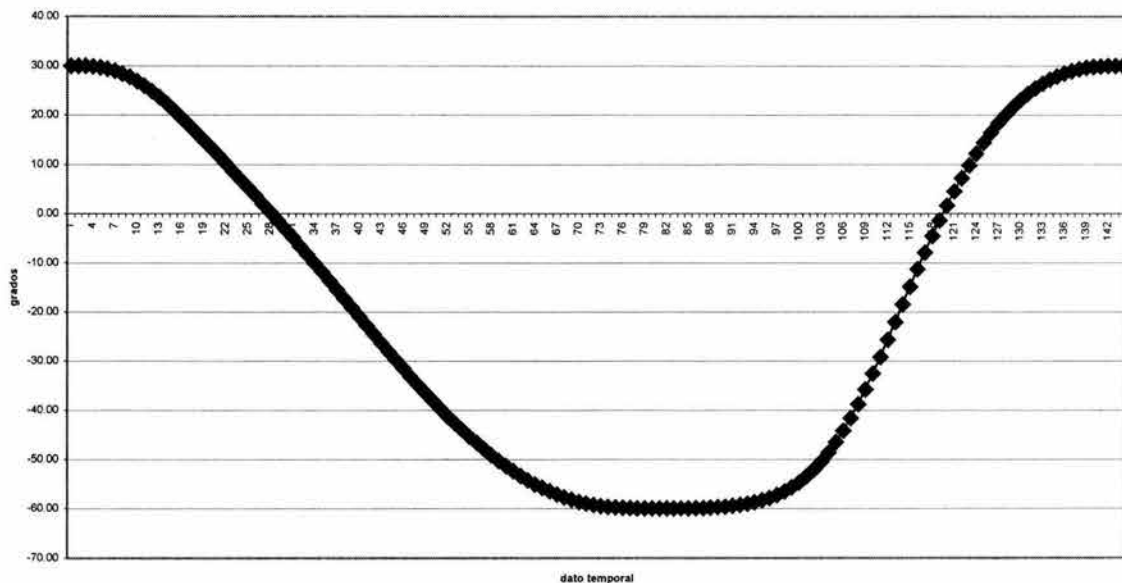


Figura 6.25 Rotación del eslabón  $E_1$  como función del tiempo

En esta gráfica (figura 6.25) se observa como se mueve el eslabón  $E_1$ , se puede ver que al inicio su desplazamiento angular empieza a decrecer, pasa por el cero y se vuelve negativo. Aquí cabe recordar que el cero es cuando el ángulo del robot coincide con el ángulo del eslabón  $E_1$  en la posición no deformada que en nuestro caso es de  $60^\circ$ . Después de llegar a un valor mínimo el desplazamiento angular empieza a aumentar hasta que regresa a su valor original.



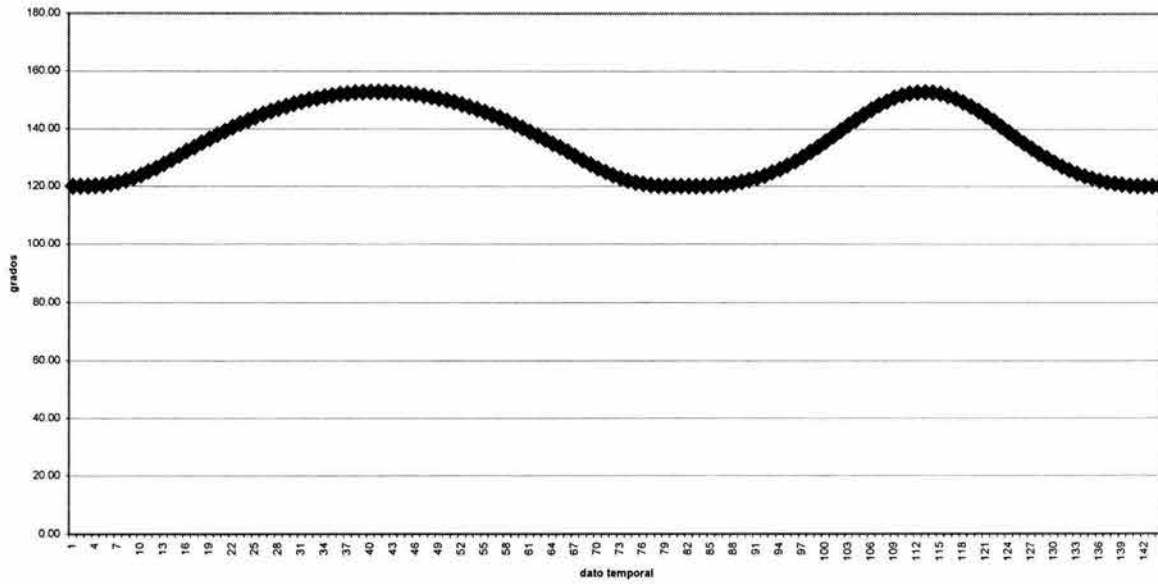


Figura 6.26 Rotación del eslabón E<sub>2</sub> como función del tiempo

En la figura 6.26 se observa como se mueve el eslabón E<sub>2</sub>, se puede ver que al inicio su desplazamiento angular empieza a crecer, después de llegar a un valor máximo el desplazamiento angular empieza a decrecer, y luego aumenta y por último disminuye hasta que regresa a su valor original. De nuevo el cero es cuando el desplazamiento angular del robot coincide con la posición inicial angular del eslabón E<sub>2</sub> en la posición no deformada que en nuestro problema es  $-30^\circ$ .

### 6.5.2 Velocidades angulares de los eslabones

En esta sección se muestran las gráficas de las velocidades angulares de los eslabones

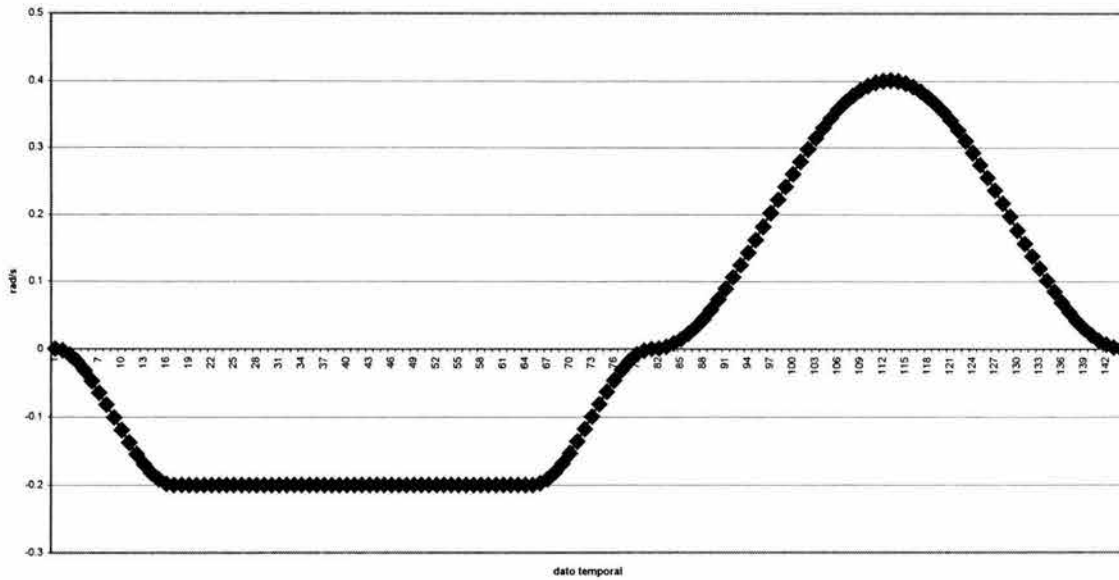


Figura 6.27 Velocidad angular del eslabón E<sub>1</sub> como función del tiempo

En la figura 6.27 se observa la velocidad del eslabón E<sub>1</sub> como en la primera parte es a favor de las agujas del reloj y al retornar su movimiento es en contra del movimiento de las agujas del reloj. Hay una región donde la velocidad angular es constante.

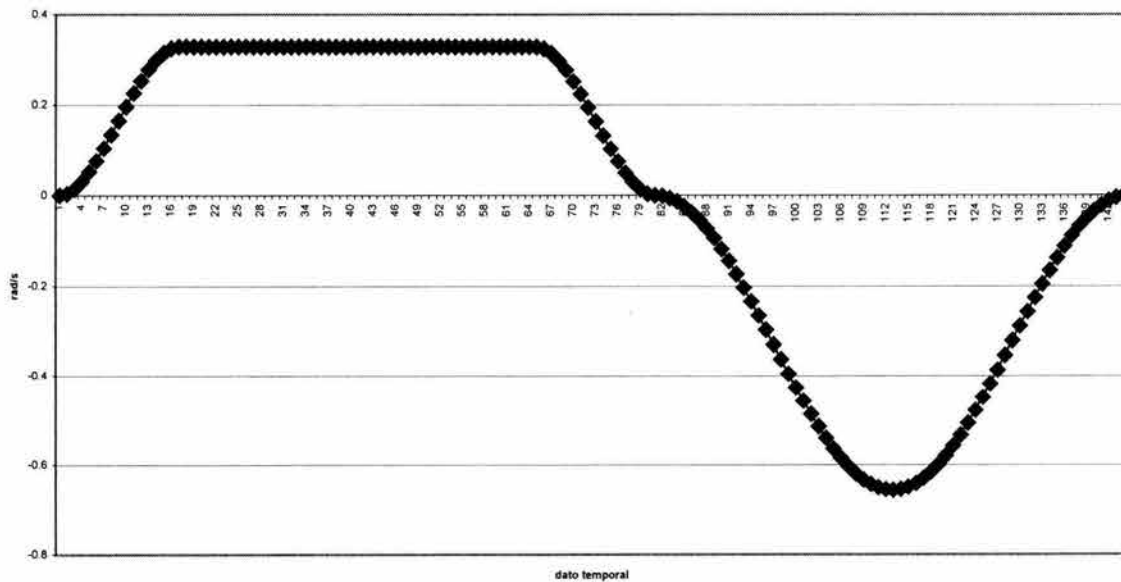


Figura 6.28 Velocidad angular del eslabón E<sub>2</sub> como función del tiempo

En la figura 6.28 se observa la velocidad del eslabón  $E_2$  como en la primera parte es en sentido horario y al retornar su movimiento es antihorario. Hay una región donde la velocidad angular es constante.

### 6.5.3 Aceleraciones angulares de los eslabones

En esta sección se muestran las gráficas de las aceleraciones angulares de los eslabones

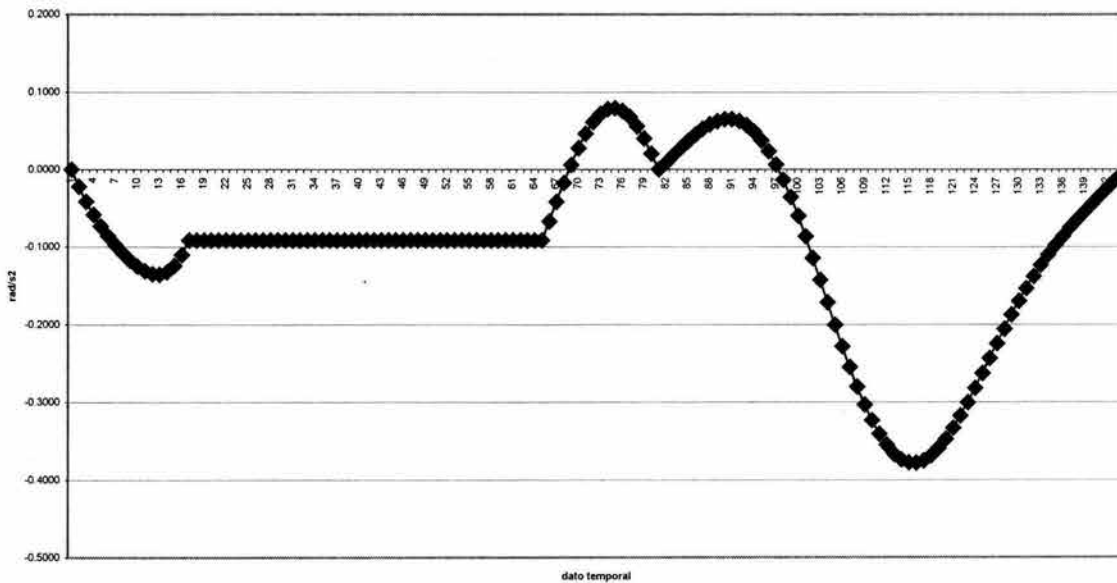


Figura 6.29 Aceleración angular del eslabón  $E_1$  como función del tiempo

Aquí, en la figura 6.29, se ve el comportamiento de la aceleración angular conforme el tiempo transcurre.

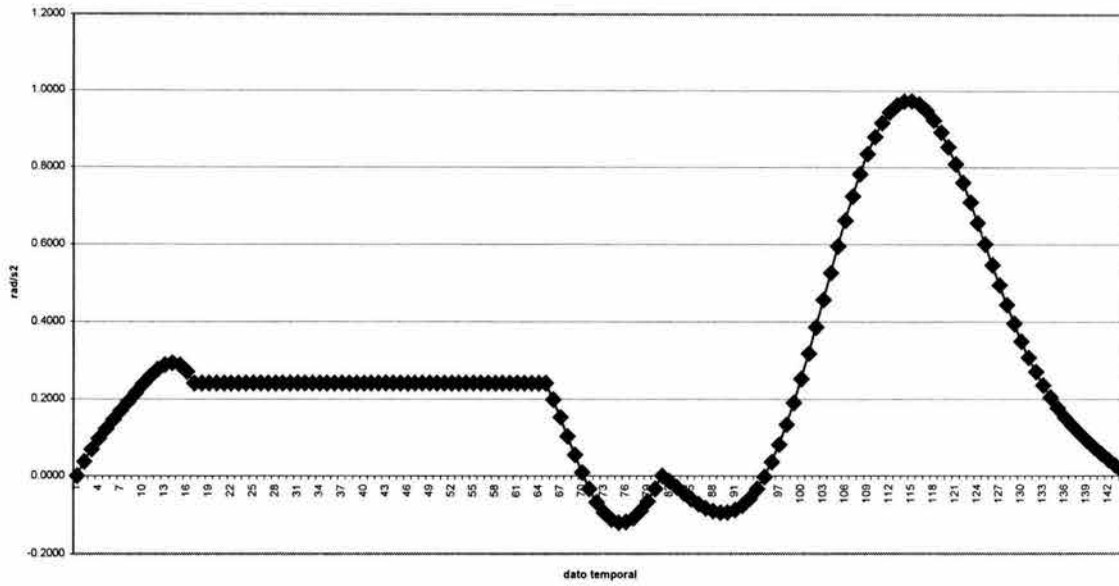


Figura 6.30 Aceleración angular del eslabón E<sub>2</sub> como función del tiempo

Aquí, en la figura 6.30, se ve que la aceleración angular no es cero cuando el eslabón 2 se mueve a velocidad constante; pues en ese caso hay una aceleración normal la cual debe ser compensada, para que la aceleración total del punto POT sea cero. Como la velocidad angular es constante, la aceleración normal es constante sólo variando su dirección, de la misma manera la aceleración angular es constante, dando una aceleración tangencial constante, pero varía de dirección lo que ocasiona que se eliminen las componentes de la aceleración normal y la aceleración total es cero.

## Conclusiones

En este trabajo de tesis se cumplieron los objetivos siguientes:

- Fueron analizadas dos configuraciones fijas del robot y se construyeron los modelos de posición usando la rotación usual definida en el espacio vectorial de números complejos.
- Se construyeron los modelos de velocidad asociados con el robot.
- Se generaron los modelos de aceleración.
- Fueron formulados los problemas directo e inverso en los modelos de posición, velocidad y aceleración.
- Se analizó y modeló una trayectoria.
- Se programaron los modelos en Mathematica V.4.

En esta tesis fue analizado y modelado el comportamiento cinemático de un robot de dos grado de libertad utilizando la sistematización “lógico – temporal”. Para construir los modelos se usó la rotación usual definida en el espacio vectorial de números complejos. Las conclusiones y resultados obtenidos en este trabajo se resumen en los puntos siguientes:

- Los modelos de posición generan sistemas de 2 ecuaciones y 2 incógnitas para el caso del problema directo, y de 4 ecuaciones con 4 incógnitas para el problema inverso en las configuraciones no deformada y deformada.
- Para el caso del problema de velocidad los sistemas de ecuaciones e incógnitas fueron: 1) de  $2 \times 2$  y 2) de  $4 \times 4$  para el problema directo e inverso respectivamente. Dichos problemas se formularon en la configuración deformada.

- El Modelo de aceleración generó, al igual que el problema de velocidad, sistemas de ecuaciones e incógnitas de  $2 \times 2$  y  $4 \times 4$  para los problemas directo e inverso.
- La metodología usada para analizar y modelar la trayectoria resultó ser clara y sistemática.
- Al utilizar polinomios de grado 8 se logró eliminar las discontinuidades de los perfiles de trayectoria.
- El proceso de modelación sistemática “temporal” permitió programar en forma eficiente los modelos cinemáticos del robot.

Futuros trabajos por desarrollar relacionados con esta tesis son:

- 1) Modelación dinámica de un robot de dos grados de libertad.
- 2) Modelación cinemática y dinámica del robot de dos grados de libertad, usando una rotación variante del álgebra de los complejos.
- 3) Modelación cinemática de problemas de evasión de obstáculos en el plano.
- 4) Análisis de trayectorias curvas – continuas.

## APÉNDICE A

### Sobre la parametrización de las rotaciones y reflexiones rígidas en el plano

**Introducción.** Presentaremos en este apéndice la parametrización de las rotaciones y reflexiones rígidas en el plano utilizando para este propósito el espacio vectorial de números complejos, los resultados obtenidos serán aplicados a la modelación cinemática de posicionamiento de un robot de dos grados de libertad, también con estas ideas puede caracterizarse un problema de evasión de obstáculos en el plano. El contenido de este apéndice, se basa en [Reyes L., 1998] el cual es presentado en su totalidad.

#### A.1 El espacio vectorial de los números complejos

En esta parte definiremos dos operaciones binarias sobre el conjunto  $\mathfrak{R}^2$ , el cual como es bien sabido, es el conjunto de parejas ordenadas de números reales, una es la operación aditiva  $\oplus : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  usual en  $\mathfrak{R}^2$  y la otra una operación multiplicativa  $*$  :  $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ . Mostraremos que mediante estas operaciones la pareja  $(\mathfrak{R}^2, \oplus)$  y la terna  $(\mathfrak{R}^2, \oplus, *)$  forman un grupo aditivo conmutativo y un campo conmutativo, respectivamente. Al utilizar la multiplicación escalar  $\bullet : \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  y el producto interno  $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$  usuales, se mostrará que el conjunto  $(\mathfrak{R}^2, \oplus, *, \bullet, \langle \bullet, \bullet \rangle)$  es un espacio vectorial con producto interno conocido como el conjunto de números complejos. Consideremos entonces el conjunto  $\mathfrak{R}^2$  sobre el cual definiremos las operaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \text{i) } (a, b) \oplus (\alpha, \beta) &= (a + \alpha, b + \beta) \\ \text{ii) } (a, b) * (\alpha, \beta) &= (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha), \\ &\forall (a, b), (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2, \end{aligned} \tag{A.1}$$

de hecho la operación  $\oplus : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es la suma usual en  $\mathbb{R}^2$  y es bien conocido que la pareja  $(\mathbb{R}^2, \oplus)$  es un grupo aditivo conmutativo. Mostraremos ahora un resultado fundamental para nuestros objetivos.

**Teorema A.1** La terna  $(\mathbb{R}^2, \oplus, *)$  es un campo conmutativo.

*Demostración.* Puesto que la pareja  $(\mathbb{R}^2, \oplus)$  es un grupo aditivo conmutativo, falta únicamente mostrar que  $(\mathbb{R}^2, *)$  es un grupo multiplicativo conmutativo excepto por la existencia del inverso multiplicativo del elemento nulo aditivo, y que además la operación aditiva y la multiplicativa satisfacen las correspondientes propiedades distributivas. En efecto, de acuerdo a la conmutatividad de la multiplicación de los números reales, la operación  $*$  :  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es conmutativa además:

i) la operación  $*$  :  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es asociativa. En efecto, sean  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$  tal que

$\mathbf{p} = (a,b), \mathbf{q} = (\alpha,\beta), \mathbf{r} = (c,d)$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} * (\mathbf{q} * \mathbf{r}) &= (a, b) * ((\alpha, \beta) * (c, d)) \\
 &= (a, b) * (\alpha c - \beta d, \alpha d + \beta c) \\
 &= (a(\alpha c - \beta d) - b(\alpha d + \beta c), a(\alpha d + \beta c) + b(\alpha c - \beta d)) \\
 &= (a\alpha c - a\beta d - b\alpha d - b\beta c, a\alpha d + a\beta c + b\alpha c - b\beta d) \\
 &= ((\alpha\alpha - b\beta)c - (a\beta + b\alpha)d, (a\beta + b\alpha)c + (\alpha\alpha - b\beta)d) \\
 &= (\alpha\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) * (c, d) \\
 &= ((a, b) * (\alpha, \beta)) * (c, d) \\
 &= (\mathbf{p} * \mathbf{q}) * \mathbf{r}
 \end{aligned}$$

ii) Construiremos ahora el elemento identidad de la operación multiplicación.

Sabemos que  $\underline{\mathbf{1}} \in \mathbb{R}^2$  es la identidad multiplicativa de  $\mathbb{R}^2$  si y solo si



$\underline{1} * \mathbf{p} = \mathbf{p} * \underline{1} = \mathbf{p}, \forall \mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$ . Por tanto, siendo  $\mathbf{p} = (a, b)$  y  $\underline{1} = (\alpha, \beta)$ , entonces,

$\underline{1} * \mathbf{p} = \mathbf{p} * \underline{1} = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) = (a, b)$ . Esto es,

$$a\alpha - b\beta = a \quad , \quad a\beta + b\alpha = b.$$

El elemento identidad multiplicativo de  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$  con respecto a la operación  $*$  :  $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , se obtiene al resolver este último sistema de ecuaciones. Es decir, siendo  $a \neq 0$ , las dos ecuaciones se reducen a :

$$\alpha = \frac{1}{a} \{ a + b\beta \} \quad , \quad a\beta + \frac{b}{a} \{ a + b\beta \} = b.$$

Por tanto, de la segunda de estas últimas ecuaciones se obtiene que:

$$(a^2 + b^2) \beta = 0.$$

Por tanto,  $\beta = 0$  y  $\alpha = 1$ . Esto es  $\underline{1} = (1, 0)$ .

iii) Mostraremos ahora que para toda  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$  existe  $\mathbf{p}' \in \mathfrak{R}^2$ , tal que  $\mathbf{p} * \mathbf{p}' = \mathbf{p}' * \mathbf{p} = \underline{1}$ . En efecto, siendo  $\mathbf{p} = (a, b)$  y  $\mathbf{p}' = (\alpha, \beta)$ , entonces,

$$\mathbf{p} * \mathbf{p}' = \mathbf{p}' * \mathbf{p} = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) = (1, 0).$$

Por tanto,

$$a\alpha - b\beta = 1 \quad , \quad a\beta + b\alpha = 0.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene primeramente que,

$$\alpha = \frac{1}{a} (1 + b\beta) \quad , \quad a\beta + \frac{b}{a} (1 + b\beta) = 0.$$

Esto es,  $(a^2 + b^2) \beta = -b$ , equivalentemente  $\beta = -\frac{b}{a^2 + b^2}$ . Además,  $\alpha = \frac{a}{a^2 + b^2}$ .

Por tanto, el elemento inverso multiplicativo de  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$ , está dado por:

$$\mathbf{p}' = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

iv) Sean ahora  $\mathbf{p} = (a,b) \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{q} = (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$ , y  $\mathbf{r} = (c,d) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces las siguientes propiedades distributivas son satisfechas:

$$\mathbf{p} * (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) = \mathbf{p} * \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} * \mathbf{r},$$

$$(\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}) * \mathbf{r} = \mathbf{p} * \mathbf{r} \oplus \mathbf{q} * \mathbf{r}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} * (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) &= (a,b) * \{(\alpha, \beta) \oplus (c,d)\} = (a,b) * (\alpha + c, \beta + d) \\ &= (a(\alpha+c) - b(\beta + d), a(\beta + d) + b(\alpha+c)) \\ &= (a\alpha + ac - b\beta - bd, a\beta + ad + b\alpha + bc) \\ &= (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) \oplus (ac - bd, ad + bc) \\ &= (a,b) * (\alpha, \beta) \oplus (a,b) * (c,d) = \mathbf{p} * \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} * \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}) * \mathbf{r} &= ((a,b) \oplus (\alpha, \beta)) * (c,d) \\ &= (a + \alpha, b + \beta) * (c,d) = ((a + \alpha) c - (b + \beta) d, (a + \alpha) d + (b + \beta) c) \\ &= (ac + \alpha c - bd - \beta d, ad + \alpha d + bc + \beta c) \\ &= (ac - bd, ad + bc) \oplus (\alpha c - \beta d, \alpha d + \beta c) \\ &= (a,b) * (c,d) \oplus (\alpha, \beta) * (c,d) \\ &= \mathbf{p} * \mathbf{r} \oplus \mathbf{q} * \mathbf{r}. \end{aligned}$$

**Falta página**

**N° 129**

Finalmente,

$$\mathbf{p}^* \bar{\mathbf{p}} = (a, b) * (a, -b) = (a^2 + b^2, 0).$$

Es también bien conocido, que la transformación  $\langle \bullet, \bullet \rangle: \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$  definida, siendo  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$  y  $\mathbf{q} = (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$ , por:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a\alpha + b\beta,$$

es un producto interno en  $\mathfrak{R}^2$ , de tal suerte que el conjunto  $\mathcal{C} = (\mathfrak{R}^2, \oplus, *, \bullet, \langle \bullet, \bullet \rangle)$  es un espacio vectorial con producto interno y la función  $\|\bullet\|: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$  definida por:

$$\|\mathbf{p}\| = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle^{1/2}, \forall \mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2,$$

es una norma, por tanto  $\mathcal{C}$  es un espacio vectorial normado, y sus elementos son llamados comúnmente números complejos.

Observación A.1. Observemos que al tomar en cuenta la definición de la operación aditiva, el elemento  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathcal{C}$  puede expresarse como la suma siguiente:

$$\mathbf{p} = (a, b) = (a, 0) \oplus (0, b).$$

Es decir, al definir los subespacios

$$\mathcal{C}_R = \{(a, 0): a \in \mathfrak{R}\} \subset \mathfrak{R}^2, \mathcal{C}_V = \{(0, b): b \in \mathfrak{R}\} \subset \mathfrak{R}^2,$$

del espacio vectorial de números complejos, éste puede expresarse mediante la siguiente suma directa de subespacios:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_R \dot{\cup} \mathcal{C}_V \equiv \{\mathbf{p} \in \mathcal{C} : \mathbf{p} = \mathbf{p}_R \oplus \mathbf{p}_V; \mathbf{p}_R \in \mathcal{C}_R, \mathbf{p}_V \in \mathcal{C}_V\}.$$

También al definir los isomorfismos  $T_R: \mathcal{C}_R \rightarrow \mathfrak{R}$ ;  $T_V: \mathcal{C}_V \rightarrow \mathfrak{R}$  por :

$$T_R(a,0) = a \quad , \quad T_V(0,b) = b,$$

y, siendo  $\mathbf{p} = (a,b) \in \mathcal{C}$ , entonces,

$$\mathbf{p} = T_R^{-1}(a) \oplus T_V^{-1}(b).$$

Al observar finalmente que, siendo  $\mathbf{q} = (\alpha,\beta) \in \mathfrak{R}^2$ ,

$$\bar{\mathbf{p}} * \mathbf{q} \oplus \bar{\mathbf{q}} * \mathbf{p} = 2(a\alpha + b\beta, 0),$$

el producto interno de los elementos  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^2$  puede expresarse en la siguiente forma:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle \equiv \frac{1}{2} T_R \{ \bar{\mathbf{p}} * \mathbf{q} \oplus \bar{\mathbf{q}} * \mathbf{p} \}.$$

Observación A.2. Obsérvese que el elemento  $\underline{e}_2 = (0,1) \in \mathfrak{R}^2$  de la base canónica, satisface que:

$$i^2 = \underline{e}_2 * \underline{e}_2 = (0,1) * (0,1) = (-1,0) \equiv T_R^{-1}(-1).$$

Además, siendo  $\mathbf{p} = (a,b)$ , entonces,

$$\mathbf{p} = (a,b) = (a,0) \oplus b\underline{e}_2 = T_R^{-1}(a) \oplus b\underline{e}_2.$$

Estas dos últimas expresiones han sido utilizadas para interpretar los números complejos como la suma de una parte real, mas una parte imaginaria. En realidad el número imaginario  $i$ , comúnmente utilizado en el álgebra compleja, es el vector  $\underline{e}_2$

de la base canónica y la representación algebraicamente correcta de la pareja  $\mathbf{p} = (a,b) \in \mathfrak{R}^2$ , está dada por la última ecuación de esta observación.

## A.2 Representación paramétrica de rotaciones

El objetivo de esta parte es construir con la operación  $*$ :  $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , estudiada anteriormente, una transformación lineal  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , con  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$  fijo, que preserve el producto interno y cuya matriz con respecto a la base canónica posea determinante positivo, con lo cual dicha transformación de parámetro  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$ , es una rotación. Se estudiarán también algunas otras representaciones de la rotación antes mencionada. Sea  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$ , fijo definida por:

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} * \mathbf{q} \quad , \quad \forall \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^2. \quad [\text{A.2}]$$

Las propiedades de la transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , definida anteriormente se resumen en los resultados siguientes.

**Teorema A.3.** La transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  definida en la ecuación [A.2] es lineal y ortogonal de determinante positivo.

**Demostración:** En efecto, siendo  $\mathbf{q}, \mathbf{s} \in \mathfrak{R}^2$ , y de acuerdo a la distributividad de la operación  $*$ :  $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q} \oplus \mathbf{s}) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} * (\mathbf{q} \oplus \mathbf{s}) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{\mathbf{p} * \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} * \mathbf{s}\} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{\mathbf{p} * \mathbf{q}\} \oplus \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{\mathbf{p} * \mathbf{s}\} = \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \oplus \rho(\mathbf{p}, \mathbf{s}), \end{aligned}$$

también,  $\forall \alpha \in \mathfrak{R}$ ,

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{p}, \alpha \mathbf{q}) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \mathbf{p} * (\alpha \bullet \mathbf{q}) \} \\ &= \frac{\alpha}{\|\mathbf{p}\|} \bullet \{ \mathbf{p} * \mathbf{q} \} = \alpha \bullet \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}).\end{aligned}$$

Además,  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es ortogonal, pues:

$$\begin{aligned}\langle \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \rho(\overline{\mathbf{p}}, \mathbf{q}) * \rho(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \oplus \rho(\overline{\mathbf{p}}, \mathbf{r}) * \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \text{Tr} \{ (\overline{\mathbf{p}} * \mathbf{q}) * (\mathbf{p} * \mathbf{r}) \oplus (\overline{\mathbf{p}} * \mathbf{r}) * (\mathbf{p} * \mathbf{q}) \} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \text{Tr} \{ \bar{\mathbf{q}} * (\bar{\mathbf{p}} * \mathbf{p}) * \mathbf{r} \oplus \bar{\mathbf{r}} * (\bar{\mathbf{p}} * \mathbf{p}) * \mathbf{q} \} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \bar{\mathbf{q}} * \mathbf{r} \oplus \bar{\mathbf{r}} * \mathbf{q} \} = \langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle.\end{aligned}$$

Mostremos finalmente que el determinante de la transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es positivo, en efecto, siendo  $B = \{(1,0), (0,1)\} \subset \mathfrak{R}^2$  la base canónica en  $\mathfrak{R}^2$ , la matriz de  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  con respecto a esta base resulta ser,

$$M_{\rho(\mathbf{p}, \bullet)} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

pues,

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{p}, \underline{e}_1) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a, b) * (1, 0) \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a, b), \\ \rho(\mathbf{p}, \underline{e}_2) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a, b) * (0, 1) \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (-b, a).\end{aligned}$$

El resultado buscado se obtiene al observar que  $\det M_{\rho(\mathbf{p}, \bullet)} = 1$ .

Teorema A.4. La transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2) = \{\tilde{T}: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2: \tilde{T} \text{ es lineal}\}$ , puede ser representada en la forma siguiente:

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a \tilde{\mathbf{I}} + b \tilde{\mathbf{W}}\} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{b \tilde{\mathbf{W}} - a \tilde{\mathbf{W}}^2\},$$

donde  $\tilde{\mathbf{I}}: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es la transformación identidad y  $\tilde{\mathbf{W}}: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  está dado por:

$$\tilde{\mathbf{W}} = -\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1.$$

Demostración. En efecto, observemos que:

$$M_{\rho(\mathbf{p}, \bullet)} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \right\} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a \mathbf{I} + b \mathbf{W}\}$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad y la matriz antisimétrica  $\mathbf{W}$  está dada por:

$$\mathbf{W} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La segunda igualdad del teorema se obtiene al observar que:

$$\mathbf{W}^2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv -\mathbf{I}.$$



La parte antisimétrica  $\underline{W} \in A(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = \{ \underline{B}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \underline{B} = -\underline{B}^T \}$  del teorema anterior, satisface el siguiente resultado:

Teorema A.5. La transformación  $\underline{W} \in A(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  es tal que

$$\underline{W}^{2n-1} = (-1)^{n-1} \underline{W} \quad , \quad \underline{W}^{2n} = (-1)^{n-1} \underline{W}^2 \quad , \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Demostración. Para demostrar este teorema procederemos por inducción, mostrando primeramente que para  $n = 2$  el resultado es satisfecho. En efecto,

$$\underline{W}^3 = \underline{W}^2 \circ \underline{W} = -\underline{I} \circ \underline{W} = -\underline{W} \quad , \quad \underline{W}^4 = \underline{W}^3 \circ \underline{W} = -\underline{W} \circ \underline{W} = -\underline{W}^2,$$

por tanto para  $n = 2$ , el resultado es obtenido. Supongamos ahora que para  $n-1$  el resultado se satisface, entonces

$$\begin{aligned} \underline{W}^{2n-1} &= \underline{W}^{2n-2} \circ \underline{W} = \underline{W}^{2(n-1)} \circ \underline{W} = \underline{W}^{2(n-1)-1} \circ \underline{W}^2 \\ &= (-1)^{n-2} \underline{W} \circ \underline{W}^2 = (-1)^{n-2} \underline{W}^3 = -(-1)^{n-2} \underline{W} = \\ &= (-1)^{n-1} \underline{W}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \underline{W}^{2n} &= \underline{W}^{2n-2} \circ \underline{W}^2 = \underline{W}^{2(n-1)} \circ \underline{W}^2 = (-1)^{n-2} \underline{W}^2 \circ \underline{W}^2 \\ &= (-1)^{n-2} \underline{W}^4 = (-1)^{n-2} (-1) \underline{W}^2 = (-1)^{n-1} \underline{W}^2. \end{aligned}$$

### A.3 Representación exponencial de $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Para interpretar físicamente los parámetros de la rotación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ , utilizaremos la geometría del espacio vectorial de los números complejos, presentando el resultado fundamental en el siguiente teorema.

Teorema A.6. Sea  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{p} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$  y  $\mathbf{v} = \rho(\mathbf{p},\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2$ . Entonces el coseno del ángulo formado por los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  está dado por:

$$\text{Cos } \theta = \frac{a}{\|\mathbf{p}\|} \quad , \quad \text{Sen } \theta = \pm \frac{b}{\|\mathbf{p}\|} .$$

Demostración. En efecto, el coseno del ángulo está definido en términos del producto interno del vector  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$  y el vector rotado  $\mathbf{v} = \rho(\mathbf{p},\mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2$ , esto es:

$$\text{Cos } \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \rho(\mathbf{p},\mathbf{u}) \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\rho(\mathbf{p},\mathbf{u})\|} .$$

Además, siendo  $\rho(\mathbf{p},\bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una rotación, entonces  $\|\mathbf{u}\| = \|\rho(\mathbf{p},\mathbf{u})\|$ . También,

$$\rho(\mathbf{p},\mathbf{u}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (au_1 - bu_2, au_2 + bu_1),$$

por tanto,

$$\langle \mathbf{u}, \rho(\mathbf{p},\mathbf{u}) \rangle = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (au_1^2 - bu_1u_2 + au_2^2 + bu_1u_2) = \frac{a\|\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{p}\|} .$$

Esto es,

$$\text{Cos } \theta = \frac{a\|\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{a}{\|\mathbf{p}\|} .$$

Finalmente, de la igualdad  $\text{Cos}^2 \theta + \text{Sen}^2 \theta = 1$  se obtiene que:

$$\text{Sen}^2 \theta = 1 - \text{Cos}^2 \theta = 1 - \frac{a^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \left\{ \|\mathbf{p}\|^2 - a^2 \right\} = \frac{b^2}{\|\mathbf{p}\|^2} ,$$

por tanto,  $\text{Sen } \theta = \pm \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{p}\|}$ .

El resultado del teorema anterior nos permite encontrar la siguiente representación trigonométrica de la rotación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ .

Corolario A.1 La transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2)$  puede ser representada en la forma:

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \text{Cos } \theta \mathbf{I} \pm \text{Sen } \theta \mathbf{W}.$$

Demostración. En efecto, de acuerdo al teorema A.6 tenemos que  $a = \|\mathbf{p}\| \text{Cos } \theta$  y  $b = \pm \|\mathbf{p}\| \text{Sen } \theta$ , entonces,

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, \bullet) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ a \mathbf{I} + b \mathbf{W} \} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \|\mathbf{p}\| \text{Cos } \theta \mathbf{I} \pm \|\mathbf{p}\| \text{Sen } \theta \mathbf{W} \} \\ &= \text{Cos } \theta \mathbf{I} \pm \text{Sen } \theta \mathbf{W}. \end{aligned}$$

Corolario A.2. La transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2)$  es tal que:

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{1}{n!} \mathbf{W}^n.$$

Demostración. En efecto, recordemos que la transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  puede expresarse de acuerdo con el teorema anterior en la forma:

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \text{Cos } \theta \mathbf{I} \pm \text{Sen } \theta \mathbf{W}.$$

Al considerar en esta expresión las expansiones en series de las funciones trigonométricas, esto es,

$$\text{Sen}\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots, \quad \text{Cos}\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

Se obtiene, siendo  $\tilde{W}_\theta = \theta \tilde{W}$ , que:

Caso 1.

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \text{Cos } \theta \tilde{\mathbf{I}} + \text{Sen } \theta \tilde{\mathbf{W}}$$

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) \tilde{\mathbf{I}} + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right) \tilde{\mathbf{W}} \\ &= \tilde{\mathbf{I}} + \theta \tilde{\mathbf{W}} - \frac{\theta^2}{2!} \tilde{\mathbf{I}} - \frac{\theta^3}{3!} \tilde{\mathbf{W}} + \frac{\theta^4}{4!} \tilde{\mathbf{I}} + \frac{\theta^5}{5!} \tilde{\mathbf{W}} - \frac{\theta^6}{6!} \tilde{\mathbf{I}} - \frac{\theta^7}{7!} \tilde{\mathbf{W}} + \dots \\ &= \tilde{\mathbf{I}} + \theta \tilde{\mathbf{W}} + \frac{\theta^2}{2!} \tilde{\mathbf{W}}^2 + \frac{\theta^3}{3!} \tilde{\mathbf{W}}^3 + \frac{\theta^4}{4!} \tilde{\mathbf{W}}^4 + \frac{\theta^5}{5!} \tilde{\mathbf{W}}^5 + \frac{\theta^6}{6!} \tilde{\mathbf{W}}^6 + \frac{\theta^7}{7!} \tilde{\mathbf{W}}^7 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tilde{\mathbf{W}}_\theta^n. \end{aligned}$$

Caso 2.

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \text{Cos } \theta \tilde{\mathbf{I}} - \text{Sen } \theta \tilde{\mathbf{W}}$$

$$\begin{aligned} &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) \tilde{\mathbf{I}} - \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right) \tilde{\mathbf{W}} \\ &= \tilde{\mathbf{I}} - \theta \tilde{\mathbf{W}} - \frac{\theta^2}{2!} \tilde{\mathbf{I}} + \frac{\theta^3}{3!} \tilde{\mathbf{W}} + \frac{\theta^4}{4!} \tilde{\mathbf{I}} - \frac{\theta^5}{5!} \tilde{\mathbf{W}} - \frac{\theta^6}{6!} \tilde{\mathbf{I}} + \frac{\theta^7}{7!} \tilde{\mathbf{W}} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{I} - \theta \mathbf{W} + \frac{\theta^2}{2!} \mathbf{W}^2 - \frac{\theta^3}{3!} \mathbf{W}^3 + \frac{\theta^4}{4!} \mathbf{W}^4 - \frac{\theta^5}{5!} \mathbf{W}^5 + \frac{\theta^6}{6!} \mathbf{W}^6 - \frac{\theta^7}{7!} \mathbf{W}^7 + \dots \\
&= \mathbf{I} - \frac{\mathbf{W}}{\theta} + \frac{1}{2!} \frac{\mathbf{W}^2}{\theta^2} - \frac{1}{3!} \frac{\mathbf{W}^3}{\theta^3} + \frac{1}{4!} \frac{\mathbf{W}^4}{\theta^4} - \frac{\theta^5}{5!} \mathbf{W}^5 + \frac{1}{6!} \frac{\mathbf{W}^6}{\theta^6} - \frac{1}{7!} \frac{\mathbf{W}^7}{\theta^7} + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \frac{\mathbf{W}^n}{\theta^n} .
\end{aligned}$$

Teorema A.7. Sea  $\mathbf{q} = (q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces la siguiente igualdad es satisfecha:

$$\mathbf{q} \times \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv \frac{b}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{q}\|^2 \mathbf{e}_3 \equiv (0, 0, \frac{b}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{q}\|^2).$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} \times \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &\equiv \varepsilon_{ijk} q_j \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k \mathbf{e}_i \equiv \varepsilon_{3jk} q_j \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k \mathbf{e}_3 \\
&\equiv \{\varepsilon_{31k} q_0 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k + \varepsilon_{32k} q_1 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k\} \mathbf{e}_3 \\
&\equiv \{\varepsilon_{312} q_0 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_2 + \varepsilon_{321} q_1 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_1\} \mathbf{e}_3 \\
&\equiv \{q_0 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_2 - q_1 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_1\} \mathbf{e}_3 \\
&\equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a q_0 q_1 + b q_0^2 - a q_0 q_1 + b q_1^2\} \mathbf{e}_3 \\
&\equiv \frac{b}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{q}\|^2 \mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

Corolario A.3. Sea  $\mathbf{q} = (q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces:

$$\mathbf{q} \times \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv (0, 0, \pm \text{Sen } \theta \frac{\|\mathbf{q}\|^2}{\|\mathbf{p}\}}).$$

Demostración. En efecto el resultado buscado se obtiene de combinar los teoremas A.6 y A.7.

#### A.4 Representación paramétrica de las reflexiones.

El objetivo de esta parte, es presentar una modificación a la definición de la transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2)$  presentada en la sección anterior, para construir una reflexión, esto es, una transformación ortogonal de determinante negativo. Se interpretará también la relación de los componentes del parámetro  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$  fijo, con el ángulo que forman el vector  $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^2$  y el correspondiente vector rotado  $\rho(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \in \mathfrak{R}^2$ . En este caso definamos la transformación  $\mathbf{R}(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , con  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$  fijo, por

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p} * \mathbf{q}} \quad , \quad \forall \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^2. \quad [\text{A.3}]$$

Algunas propiedades de nuestro interés, relacionadas con la transformación  $\mathbf{R}(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  se presentan en los teoremas siguientes.

Teorema 1.8. La transformación  $\mathbf{R}(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  definida en [A.3] es lineal y ortogonal de determinante negativo.

Demostración. En efecto, siendo  $\mathbf{q}, \mathbf{s} \in \mathfrak{R}^2$ , entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q} \oplus \mathbf{s}) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\{\mathbf{p} * (\mathbf{q} \oplus \mathbf{s})\}} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\{(\mathbf{q} \oplus \mathbf{s}) * \mathbf{p}\}} \\
&= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\{(\bar{\mathbf{q}} \oplus \bar{\mathbf{s}}) * \bar{\mathbf{p}}\}} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\{\bar{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{p}} \oplus \bar{\mathbf{s}} * \bar{\mathbf{p}}\}} \\
&= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\{\mathbf{p} * \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} * \mathbf{s}\}} = \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \oplus \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{s}).
\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}(\mathbf{p}, \alpha \mathbf{q}) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\{\mathbf{p} * (\alpha \mathbf{q})\}} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\{\alpha(\mathbf{q}) * \mathbf{p}\}} \\
&= \frac{\alpha}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\{\bar{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{p}}\}} = \alpha \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\{\mathbf{p} * \mathbf{q}\}} = \alpha \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q}).
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{2} \mathbf{T}_R \{ \overline{\{\mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) * \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{r})\}} \oplus \overline{\{\mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) * \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q})\}} \} \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{T}_R \left\{ \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \overline{\{(\mathbf{p} * \mathbf{q}) * (\mathbf{p} * \mathbf{r}) \oplus (\mathbf{p} * \mathbf{r}) * (\mathbf{p} * \mathbf{q})\}} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{T}_R \left\{ \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} [(\mathbf{p} * \mathbf{q}) * (\bar{\mathbf{r}} * \bar{\mathbf{p}}) \oplus (\mathbf{p} * \mathbf{r}) * (\bar{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{p}})] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \mathbf{T}_R \left\{ \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} [(\bar{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{r}}) * (\mathbf{p} * \bar{\mathbf{p}}) \oplus (\bar{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{r}}) * (\mathbf{p} * \bar{\mathbf{p}})] \right\} \\
&\equiv \frac{1}{2} \mathbf{T}_R \{ \bar{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{r}} \oplus \bar{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{r}} \} \equiv \langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle.
\end{aligned}$$

Observemos ahora que, la matriz de la transformación  $\mathbf{R}(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2)$  está dada por:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{R}(\mathbf{p}, \bullet)} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & -a \end{pmatrix},$$

puesto que,

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}, \underline{\mathbf{e}}_1) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p}^* \underline{\mathbf{e}}_1} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p}} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a, -b),$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}, \underline{\mathbf{e}}_2) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p}^* \underline{\mathbf{e}}_2} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{(a, b)^* (0, 1)} \equiv (-b, -a).$$

El resultado buscado, se obtiene de observar que  $\det \mathbf{M}_{\mathbf{R}(\mathbf{p}, \bullet)} = -1$ .

Teorema A.9. La transformación  $\mathbf{R}(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2)$  puede ser representada en la forma siguiente:

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a \mathbf{I}_{\sim 1} + b \mathbf{W}_{\sim 1}\},$$

donde las matrices de las transformaciones  $\mathbf{I}_{\sim 1}$  y  $\mathbf{W}_{\sim 1}$  están dadas por:

$$\mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Es suficiente con observar que la matriz de la transformación estudiada puede escribirse en la forma siguiente:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{R}(\mathbf{p}, \bullet)} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & -a \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$



Teorema A.10. Sea  $\mathbf{q}=(q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$  y  $\mathbf{p}=(a,b) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces, las siguientes igualdades son satisfechas.

$$\mathbf{q} \times \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (0, 0, b(q_1^2 - q_0^2) - 2a q_1 q_0),$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a(q_0^2 - q_1^2) - 2bq_0q_1\},$$

donde  $\theta$  es el ángulo formado por los vectores  $\mathbf{q} \in \mathfrak{R}^2$  y  $\mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^2$ .

Demostración. Observemos primeramente que, siendo  $\mathbf{q}=(q_0, q_1)$ , entonces,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{q} \rangle &\equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \langle (q_0, q_1), (aq_0 - bq_1, -aq_1 - bq_0) \rangle \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{aq_0^2 - bq_0q_1 - aq_1^2 - bq_0q_1\} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a(q_0^2 - q_1^2) - 2bq_0q_1\}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \times \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \varepsilon_{ijk} q_j \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k \mathbf{e}_i \equiv \varepsilon_{3jk} q_j \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k \mathbf{e}_3 \\ &= \{ \varepsilon_{312} q_0 \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q})_2 + \varepsilon_{321} q_1 \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q})_1 \} \mathbf{e}_3 \\ &\equiv \{ q_0 \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q})_2 - q_1 \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q})_1 \} \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ q_0 (-aq_1 - bq_0) - q_1 (aq_0 - bq_1) \} \mathbf{e}_3 \\ &\equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ -aq_0q_1 - bq_0^2 - aq_1q_0 + bq_1^2 \} \mathbf{e}_3 \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ b(q_1^2 - q_0^2) - 2aq_0q_1 \} \mathbf{e}_3 \\ &\equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (0, 0, b(q_1^2 - q_0^2) - 2aq_0q_1). \end{aligned}$$

## A.5 Otra operación binaria multiplicativa

Presentaremos en esta parte otra operación multiplicativa  $\odot: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , mediante la cual podremos construir una transformación  $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  fijo, que resultará ser una reflexión. Consideremos entonces la operación

$\odot: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por:

$$(a,b) \odot (\alpha, \beta) = (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) \quad [\text{A.4}]$$

Estudiaremos ahora las propiedades de dicha operación a través de los resultados siguientes:

Teorema A.11. La operación  $\odot: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es no asociativa.

Demostración. En efecto, sean  $\mathbf{p}=(a,b)$ ,  $\mathbf{q}=(\alpha,\beta)$ ,  $\mathbf{r}=(c,d)$ , entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \odot (\mathbf{q} \odot \mathbf{r}) &= (a,b) \odot \{(\alpha,\beta) \odot (c,d)\} \\ &\equiv (a,b) \odot \{-a\alpha + \beta d, \alpha d + \beta c\} \\ &\equiv (-a(-a\alpha + \beta d) + b(\alpha d + \beta c), a(\alpha d + \beta c) + b(-a\alpha + \beta d)) \\ &\equiv (a\alpha c - a\beta d + b\alpha d + b\beta c, a\alpha d + a\beta c - b\alpha c + b\beta d) \\ &\equiv (c(a\alpha + b\beta) + d(b\alpha - a\beta), (a\alpha + b\beta)d + (a\beta - b\alpha)c). \end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \odot \mathbf{q}) \odot \mathbf{r} &= \{(a,b) \odot (\alpha,\beta)\} \odot (c,d) \equiv (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) \odot (c,d) \\ &= (-c(-a\alpha + b\beta) + d(a\beta + b\alpha), d(-a\alpha + b\beta) + c(a\beta + b\alpha)) \\ &= (c(a\alpha - b\beta) + d(a\beta + b\alpha), d(-a\alpha + b\beta) + c(a\beta - b\alpha)). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{p} \circledast (\mathbf{q} \circledast \mathbf{r}) \neq (\mathbf{p} \circledast \mathbf{q}) \circledast \mathbf{r}.$$

Teorema A.12. El elemento  $\underset{\sim}{\mathbf{1}} = \frac{1}{a^2 + b^2} (b^2 - a^2, 2ba)$ , es tal que si  $\mathbf{p} = (a, b)$ ,

entonces,  $\mathbf{p} \circledast \underset{\sim}{\mathbf{1}} \equiv \mathbf{p}$ .

Demostración. En efecto, sean  $\mathbf{p} = (a, b)$  y  $\underset{\sim}{\mathbf{1}} = (\alpha, \beta)$  tal que  $\mathbf{p} \circledast \underset{\sim}{\mathbf{1}} \equiv \mathbf{p}$ , esto es:

$$(a, b) \circledast (\alpha, \beta) = (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) = (a, b),$$

por tanto,

$$-a\alpha + b\beta = a \quad , \quad a\beta + b\alpha = b.$$

Al resolver este sistema de ecuaciones, se obtiene que:

$$\alpha = -\frac{1}{a} (a - b\beta) \quad , \quad a\beta - \frac{b}{a} (a - b\beta) = b.$$

Por tanto,  $\beta(a^2 + b^2) = 2ba$ . Esto es  $\beta = \frac{2ba}{a^2 + b^2}$ . También,

$$\alpha = -\frac{1}{a} \left( a - \frac{2b^2 a}{a^2 + b^2} \right) = \frac{1}{a^2 + b^2} (-a^2 - b^2 + 2b^2) \equiv \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}.$$

Por tanto,  $\underset{\sim}{\mathbf{1}} = \frac{1}{a^2 + b^2} (b^2 - a^2, 2ba)$ .

Teorema A.13. Sea  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces, el elemento  $\mathbf{p}' = \frac{1}{a^2 + b^2} (a, b)$ , es tal que  $\mathbf{p} \odot \mathbf{p}' \equiv \underline{\mathbf{1}}$ .

Demostración. En efecto, sea  $\mathbf{p}' \equiv (\alpha, \beta)$  tal que  $\mathbf{p} * \mathbf{p}' \equiv \underline{\mathbf{1}}$ , esto es,

$$(a, b) \odot (\alpha, \beta) = (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) \equiv \frac{1}{a^2 + b^2} (b^2 - a^2, 2ba).$$

Entonces,

$$-a\alpha + b\beta \equiv \frac{1}{a^2 + b^2} (b^2 - a^2) \quad , \quad a\beta + b\alpha = 2ab.$$

Esto es,

$$\alpha = -\frac{1}{(a^2 + b^2)a} (b^2 - a^2) + \frac{b}{a}\beta.$$

Por tanto,

$$a\beta - \frac{b}{a(a^2 + b^2)} (b^2 - a^2) + \frac{b^2}{a}\beta = \frac{1}{a^2 + b^2} 2ab.$$

Esto es,

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{b^2}{a}\right)\beta &= \frac{1}{a^2 + b^2} \left(2ab + \frac{b}{a}(b^2 - a^2)\right) \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \left(ab + \frac{b^3}{a}\right) = \frac{b}{a(a^2 + b^2)} (a^2 + b^2) = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

por tanto,

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a}\right)\beta = \frac{b}{a},$$

de donde,  $\beta = \frac{b}{a^2+b^2}$ , y

$$\alpha = -\frac{1}{a(a^2+b^2)}(b^2-a^2) + \frac{b}{a}\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right) \equiv \frac{1}{a(a^2+b^2)}\{-b^2+a^2+b^2\}$$

$$\equiv \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Por tanto,  $\mathbf{p}' = \frac{1}{a^2+b^2}(a, b) = \frac{1}{a^2+b^2}\mathbf{p}$ .

Teorema A.14. Sean  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathfrak{R}^2$ . Entonces, las siguientes propiedades distributivas son satisfechas:

$$\mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) = \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} \otimes \mathbf{r},$$

$$(\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}) \otimes \mathbf{r} = \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \oplus \mathbf{q} \otimes \mathbf{r}.$$

Demostración. En efecto, sean  $\mathbf{p} = (a, b)$ ,  $\mathbf{q} = (\alpha, \beta)$  y  $\mathbf{r} = (c, d)$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) &= (a, b) \otimes (\alpha + c, \beta + d) \\ &\equiv (-a(\alpha + c) + b(\beta + d), b(\alpha + c) + a(\beta + d)) \\ &= (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) \oplus (-ac + bd, ad + bc) \\ &= (a, b) \otimes (\alpha, \beta) \oplus (a, b) \otimes (c, d) \\ &\equiv \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} \otimes \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}) * \mathbf{r} &= (\mathbf{a} + \alpha, \mathbf{b} + \beta) * (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \\
&= (-\mathbf{c}(\mathbf{a} + \alpha) + \mathbf{d}(\mathbf{b} + \beta), \mathbf{d}(\mathbf{a} + \alpha) + \mathbf{c}(\mathbf{b} + \beta)) \\
&= (-\mathbf{c}\mathbf{a} + \mathbf{d}\mathbf{b}, \mathbf{d}\mathbf{a} + \mathbf{c}\mathbf{b}) \oplus (-\mathbf{c}\alpha + \mathbf{d}\beta, \mathbf{d}\alpha + \mathbf{c}\beta) \\
&= (\mathbf{a}, \mathbf{b}) * (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \oplus (\alpha, \beta) * (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \\
&\equiv \mathbf{p} * \mathbf{r} \oplus \mathbf{q} * \mathbf{r}.
\end{aligned}$$

Teorema A.15. La operación  $*$ :  $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es conmutativa. En efecto si  $\mathbf{p} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ,  $\mathbf{q} = (\alpha, \beta)$ , entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} * \mathbf{q} &\equiv (\mathbf{a}, \mathbf{b}) * (\alpha, \beta) = (-\mathbf{a}\alpha + \mathbf{b}\beta, \mathbf{b}\alpha + \mathbf{a}\beta) = (-\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}, \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{a}) \\
&\equiv (\alpha, \beta) * (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \mathbf{q} * \mathbf{p}.
\end{aligned}$$

Los siguientes resultados, son satisfechos por la operación  $*$ :  $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ .

Teorema A.16. Sean  $\mathbf{p} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{q} = (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$ . Entonces

- i)  $\overline{\mathbf{p} * \mathbf{q}} = \overline{\mathbf{q}} * \overline{\mathbf{p}}$ ,
- ii)  $\mathbf{p} * \overline{\mathbf{p}} = \overline{\mathbf{p}} * \mathbf{p} = -(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2, 0)$ ,
- iii)  $\overline{\mathbf{p}} * \mathbf{q} \oplus \overline{\mathbf{q}} * \mathbf{p} = -2(\mathbf{a}\alpha + \mathbf{b}\beta, 0)$ .

Demostración. En efecto,

---


$$\mathbf{p} * \mathbf{q} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) * (\alpha, \beta) = (-\mathbf{a}\alpha + \mathbf{b}\beta, \mathbf{a}\beta + \mathbf{b}\alpha) = (-\mathbf{a}\alpha + \mathbf{b}\beta, -\mathbf{a}\beta - \mathbf{b}\alpha)$$

$$=(\alpha, -\beta) \circledast (a, -b) = \bar{q} \circledast \bar{p}.$$

También,

$$\mathbf{p} \circledast \bar{\mathbf{p}} = (a, b) \circledast (a, -b) = (-a^2 - b^2, 0) = -(a^2 + b^2, 0).$$

Finalmente, tenemos que:

$$\bar{\mathbf{p}} \circledast \mathbf{q} \equiv (a, -b) \circledast (\alpha, \beta) = (-a\alpha - b\beta, -b\alpha + a\beta),$$

y

$$\bar{\mathbf{q}} \circledast \mathbf{p} \equiv (\alpha, -\beta) \circledast (a, b) = (-\alpha a - \beta b, -\beta a + \alpha b),$$

por tanto,

$$\bar{\mathbf{p}} \circledast \mathbf{q} \oplus \bar{\mathbf{q}} \circledast \mathbf{p} = -2(a\alpha + b\beta, 0).$$

Tomando en cuenta la transformación  $T_R : \mathcal{A}_R \rightarrow \mathfrak{R}$ , definida en incisos anteriores, observamos que la siguiente relación es satisfecha:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = -\frac{1}{2} T_R \{ \bar{\mathbf{p}} \circledast \mathbf{q} \oplus \bar{\mathbf{q}} \circledast \mathbf{p} \}.$$

## A.6. Otra parametrización de reflexiones

Presentaremos en esta parte, una transformación lineal  $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , con  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$  fijo, definida a través de la operación estudiada en el inciso anterior, la cual preserva el producto interno y el determinante asociado a la matriz de la misma, construida con respecto a la base canónica de  $\mathfrak{R}^2$ , resulta ser negativo, con lo cual dicha transformación es una reflexión. Se estudiarán también algunas otras representaciones de la reflexión construida. Sea  $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , con  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$  fijo, definida por:

$$\rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \odot \mathbf{q} \quad , \quad \forall \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^2 . \quad [\text{A.5}]$$

Observemos que la transformación  $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  tiene la misma forma cualitativa que la definida en el inciso A.4. En este caso  $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  está definida en términos de la operación  $\odot: \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  definida en el inciso A.5. Algunas propiedades de la misma se estudian a continuación.

**Teorema A.17.** La transformación  $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es lineal, ortogonal de determinante negativo.

*Demostración.* En efecto, siendo  $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathfrak{R}^2$  y de acuerdo a la distribuidad de la operación  $\odot: \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , se obtiene que :

$$\begin{aligned} \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) &\equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \odot (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \mathbf{p} \odot \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} \odot \mathbf{r} \} \\ &\equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \odot \mathbf{q} \oplus \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \odot \mathbf{r} \equiv \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \oplus \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Además, siendo  $\alpha \in \mathfrak{R}, \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^2$

$$\rho_2(\mathbf{p}, \alpha \mathbf{q}) \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \odot (\alpha \mathbf{q}) \equiv \alpha \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \odot \mathbf{q} \equiv \alpha \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

También, siendo  $\mathbf{q} \in \mathfrak{R}^2, \mathbf{r} \in \mathfrak{R}^2$ , entonces,

$$\langle \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle = -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ \overline{\rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})} \odot \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \oplus \overline{\rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{r})} \odot \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \}$$



$$= -\frac{1}{2} T_R \left\{ \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \overline{(\mathbf{p} * \mathbf{q})} \otimes \overline{(\mathbf{p} \otimes \mathbf{r})} \oplus \overline{(\mathbf{p} * \mathbf{r})} \otimes \overline{(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q})} \right.$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} T_R \left\{ (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \otimes (\mathbf{p} \otimes \mathbf{r}) \oplus \overline{(\mathbf{p} \otimes \mathbf{r})} \otimes (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \right\}.$$

El resultado buscado, se sigue al desarrollar esta última expresión, esto es, al observar que:

$$(\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \otimes (\mathbf{p} \otimes \mathbf{r}) = -\|\mathbf{p}\|^2 (\alpha c + \beta d, \beta c - \alpha d),$$

y

$$\overline{(\mathbf{p} \otimes \mathbf{r})} \otimes (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) = -\|\mathbf{p}\|^2 (c\alpha + d\beta, d\alpha - c\beta),$$

de donde,

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) \otimes (\mathbf{p} \otimes \mathbf{r}) \oplus \overline{(\mathbf{p} \otimes \mathbf{r})} \otimes (\mathbf{p} \otimes \mathbf{q}) &= -2 \|\mathbf{p}\|^2 (c\alpha + d\beta, 0) \\ &= -2 \|\mathbf{p}\|^2 T_R^{-1} \{ \langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle \}, \end{aligned}$$

por tanto,

$$\langle \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle \equiv \langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle.$$

Finalmente, al observar que:

$$\rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{e}_1) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a, b) \otimes (1, 0) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (-a, b),$$

y

$$\rho_2(\mathbf{p}, \underline{\mathbf{e}}_2) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \odot (0, 1) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (\mathbf{b}, \mathbf{a}),$$

la matriz de  $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  está dada por:

$$\mathbf{M}_{\rho_2(\mathbf{p}, \bullet)} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \begin{pmatrix} -\mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{pmatrix},$$

de donde,  $\det \mathbf{M}_{\rho_2(\mathbf{p}, \bullet)} \equiv -1$ .

Teorema A.18. La transformación  $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , puede ser representada en la forma siguiente:

$$\rho_2(\mathbf{p}, \bullet) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a \mathbf{I}_{\sim_2} + b \mathbf{W}_{\sim_2}\} = -\frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a \mathbf{I}_{\sim_1} + b \mathbf{W}_{\sim_1}\},$$

donde las matrices de las transformación  $\mathbf{I}_{\sim_2}$  y  $\mathbf{W}_{\sim_2}$ , están dadas por:

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y las transformaciones  $\mathbf{I}_{\sim_1}$  y  $\mathbf{W}_{\sim_1}$  están definidas en el inciso anterior.

Demostración. Es suficiente con observar que la matriz de la transformación estudiada, puede escribirse en la forma siguiente:

$$\mathbf{M}_{\rho_2(\mathbf{p}, \bullet)} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \begin{pmatrix} -\mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \left\{ a \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \left\{ -a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Teorema A.19. Sea  $\mathbf{q}=(q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$  y  $\mathbf{p}=(a,b) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces, las siguientes igualdades son satisfechas.

$$\mathbf{q} \times \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (b(q_0^2 - q_1^2) + 2a q_0 q_1) \mathbf{e}_3$$

$$= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (0, 0, b(q_0^2 - q_1^2) + 2a q_0 q_1),$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{-a(q_0^2 - q_1^2) + 2b q_0 q_1\}.$$

Demostración. En efecto,

$$\mathbf{q} \times \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \varepsilon_{3jk} q_i \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k \mathbf{e}_3 = \{q_0 \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})_2 - q_1 \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})_1\} \mathbf{e}_3$$

$$= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{q_0 (a q_1 + b q_0) - q_1 (-a q_0 + b q_1)\} \mathbf{e}_3,$$

$$\equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{b(q_0^2 - q_1^2) + 2a q_0 q_1\} \mathbf{e}_3$$

$$\equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (0, 0, b(q_1^2 - q_0^2) - 2a q_0 q_1).$$

Además,

$$\cos \theta \equiv \langle \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \langle (-a q_0 + b q_1, a q_1 + b q_0), (q_0, q_1) \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{-a q_0^2 + b q_0 q_1 + a q_1^2 + b q_1 q_0\} \\
&\equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{-a(q_0^2 - q_1^2) + 2b q_0 q_1\}.
\end{aligned}$$

## A.7 Otra parametrización de rotaciones

Presentaremos ahora una transformación lineal  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$  fijo, que se construirá al tomar el conjugado de la transformación  $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , definida en el inciso anterior. Tal transformación resultará ser una rotación, puesto que será ortogonal y su determinante será positivo. Se estudiarán también algunas otras representaciones de la transformación aquí construída. Sea entonces la transformación  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , definida por:

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \circledast \mathbf{q} \quad , \quad \forall \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^2. \quad [\text{A.6}]$$

Algunas propiedades de la transformación definida anteriormente serán estudiadas a continuación.

**Teorema A.19.** La transformación  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es lineal ortogonal de determinante positivo.

**Demostración.** En efecto, siendo  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathfrak{R}^2$  y tomando en cuenta la distributividad de la operación  $\circledast: \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , el teorema A.16 y la conmutativa de la multiplicación, se obtiene que:

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p} \circledast (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r})} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \overline{\mathbf{p} \circledast \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} \circledast \mathbf{r}} \}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \bar{\mathbf{p}} \circledast \bar{\mathbf{q}} \oplus \bar{\mathbf{p}} \circledast \bar{\mathbf{r}} \} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \bar{\mathbf{q}} \circledast \bar{\mathbf{p}} \oplus \bar{\mathbf{r}} \circledast \bar{\mathbf{p}} \} \\
&= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \bar{\mathbf{p}} \circledast \bar{\mathbf{q}} \oplus \bar{\mathbf{p}} \circledast \bar{\mathbf{r}} \} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \bar{\mathbf{p}} \circledast \bar{\mathbf{q}} \oplus \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \bar{\mathbf{p}} \circledast \bar{\mathbf{r}} \\
&= \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \oplus \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}).
\end{aligned}$$

También,

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \alpha \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \circledast (\alpha \mathbf{q}) \equiv \alpha \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \circledast \mathbf{q} \equiv \alpha \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle &= -\frac{1}{2} T_R \left\{ \overline{\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})} \circledast \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \oplus \overline{\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{r})} \circledast \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right\} \\
&= -\frac{1}{2} T_R \left\{ \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} (\mathbf{p} \circledast \mathbf{q}) \circledast (\mathbf{p} \circledast \mathbf{r}) \oplus (\mathbf{p} \circledast \mathbf{r}) \circledast (\mathbf{p} \circledast \mathbf{q}) \right\}
\end{aligned}$$

Al desarrollar esta última expresión obtenemos el resultado buscado pues, siendo  $\mathbf{p} = (a, b)$ ,  $\mathbf{q} = (\alpha, \beta)$ , y  $\mathbf{r} = (c, d)$ , se tiene que:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{p} \circledast \mathbf{q}) \circledast (\mathbf{p} \circledast \mathbf{r}) \oplus (\mathbf{p} \circledast \mathbf{r}) \circledast (\mathbf{p} \circledast \mathbf{q}) &\equiv -2 \|\mathbf{p}\|^2 (c\alpha + d\beta, 0) \\
&= -2 \|\mathbf{p}\|^2 T_R^{-1} \{ \langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle \}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\langle \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle \equiv \langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle.$$

Finalmente, al observar que:

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \underline{e}_1) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{(a,b) \otimes (1,0)} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (-a, -b),$$

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \underline{e}_2) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{(a,b) \otimes (0,1)} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (b, -a),$$

la matriz de  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , está dada por:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet)} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & -a \end{pmatrix},$$

de donde  $\det \mathbf{M}_{\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet)} \equiv 1$ .

Teorema A.20. La transformación  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , puede ser representada en la forma siguiente:

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{-a \underline{\mathbf{I}} - b \underline{\mathbf{W}}\} = -\frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a \underline{\mathbf{I}} + b \underline{\mathbf{W}}\},$$

donde  $\underline{\mathbf{I}}: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es la transformación identidad y la transformación  $\underline{\mathbf{W}}: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  está dada por

$$\underline{\mathbf{W}} = -\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1.$$

Demostración. En efecto, es suficiente con observar que la matriz de  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  puede escribirse en la forma siguiente:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet)} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \left\{ -a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = -\frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Obsérvese que la transformación  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  definida en esta parte, es el negativo de la transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  definida en la sección 3. Para encontrar la representación exponencial de dicha transformación, es necesario, como en el caso de dicha sección, interpretar físicamente los parámetros de la misma en términos de la geometría definida por el producto interno usual en  $\mathfrak{R}^2$ . Para esto, es de fundamental importancia el resultado presentado en el teorema siguiente.

**Teorema A.21.** Sea  $\mathbf{u} = (q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$  y  $\mathbf{v} = \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces las siguientes igualdades son satisfechas:

$$\cos \theta = -\frac{1}{\|\mathbf{p}\|} a, \quad \text{Sen } \theta = \pm \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} b,$$

donde  $\theta$  es el ángulo formado por los vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ .

Demostración. En efecto, el coseno del ángulo formado por los vectores  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  está dado por:

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{u})\|} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2} \left\{ \langle (q_0, q_1), \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (-aq_0 + bq_1, -aq_1 - bq_0) \rangle \right\} \\
&= \frac{1}{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{p}\|} \{-aq_0^2 - aq_1^2\} \equiv -\frac{a}{\|\mathbf{p}\|}.
\end{aligned}$$

Además, de la relación  $\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1$ , se obtiene que:

$$\text{Sen}^2\theta = 1 - \text{Cos}^2\theta = 1 - \frac{a^2}{\|\mathbf{p}\|^2} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \{\|\mathbf{p}\|^2 - a^2\} = \frac{b^2}{\|\mathbf{p}\|^2}.$$

Por tanto,  $\text{Sen}\theta = \pm \frac{b}{\|\mathbf{p}\|}$ .

Al utilizar el teorema anterior, obtenemos la siguiente representación de la transformación  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ .

Corolario A.4. La transformación  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , admite la siguiente representación:

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet) = \text{Cos}\theta \underline{\mathbf{I}} \pm \text{Sen}\theta \underline{\mathbf{W}}.$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet) &= -\frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a \underline{\mathbf{I}} + b \underline{\mathbf{W}}) = -\frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{-\|\mathbf{p}\| \text{Cos}\theta \underline{\mathbf{I}} \pm \|\mathbf{p}\| \text{Sen}\theta \underline{\mathbf{W}}\} \\
&= \text{Cos}\theta \underline{\mathbf{I}} \pm \text{Sen}\theta \underline{\mathbf{W}}.
\end{aligned}$$

Teorema A.22. Sea  $\mathbf{q} = (q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$  y  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces, la siguiente igualdad es satisfecha:



$$\mathbf{q} \times \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv -\frac{b}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{q}\|^2 \mathbf{e}_3 \equiv (0, 0, -\frac{b}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{q}\|^2).$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \times \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &\equiv q_0 \{ \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})_2 - q_1 \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})_1 \} \mathbf{e}_3 \\ &\equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ -a q_0 q_1 - b q_0^2 + a q_0 q_1 - b q_1^2 \} \mathbf{e}_3 \\ &\equiv -\frac{b}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{q}\|^2 \mathbf{e}_3 \equiv (0, 0, -\frac{b}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{q}\|^2). \end{aligned}$$

Corolario A.5. Sea  $\mathbf{q} = (q_0, q_1) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ , entonces, la igualdad siguiente es satisfecha:

$$\mathbf{q} \times \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv (0, 0, \pm \text{Sen } \theta \|\mathbf{q}\|^2).$$

Demostración. El resultado se obtiene de combinar los teoremas A.21 y A.22.

Observación A.3. Obsérvese que la representación dada en el corolario A.4 de la transformación  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , es la misma que la representación trigonométrica de la transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida en la sección A.2. Además se observa que la representación exponencial de  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  está dada también por el corolario A.2, esto es

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet) = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{1}{n!} \mathbf{W}_{\theta}^n,$$

donde  $\mathbf{W}_{\theta} = \theta \mathbf{W}$ .

## A.8. Algunas interpretaciones geométricas

El objetivo de esta parte, es presentar algunos resultados que nos permitan encontrar los ángulos formados entre los vectores obtenidos al aplicar las transformaciones  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{R}(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ ,  $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  y  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  al vector  $\mathbf{q}=(q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$ . Dichos resultados se resumen en el teorema siguiente.

Teorema A.23 Sea  $\mathbf{q}=(q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$  y sean  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \in \mathfrak{R}^2$  los vectores definidos por:

$$\mathbf{u}_1 = \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{u}_2 = \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{u}_3 = \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{u}_4 = \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$

respectivamente, entonces,

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4 \rangle = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \{(a^2 - b^2)(q_0^2 - q_1^2) - 4abq_0q_1\},$$

$$\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4 \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle = -\frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \{(a^2 - b^2)(q_0^2 - q_1^2) - 4abq_0q_1\},$$

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle = -\|\mathbf{q}\|^2.$$

Demostración. En efecto, es suficiente observar que:

$$\mathbf{u}_1 = \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} * \mathbf{q} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (aq_0 - bq_1, aq_1 + bq_0),$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p} * \mathbf{q}} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (aq_0 - bq_1, -aq_1 - bq_0),$$

$$\mathbf{u}_3 = \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \odot \mathbf{q} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (-aq_0 + bq_1, aq_1 + bq_0),$$

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p} \odot \mathbf{q}} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (-aq_0 + bq_1, -aq_1 - bq_0),$$

y el resultado buscado se obtiene al realizar el producto interno de los vectores.

Corolario A.6. Sean  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  los ángulos formados por los vectores  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2; \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4$ , respectivamente, entonces,

$$\cos \theta_1 = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2 \|\mathbf{p}\|^2} \{(a^2 - b^2)(q_0^2 - q_1^2) - 4abq_0q_1\},$$

$$\cos \theta_2 = -\frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2 \|\mathbf{p}\|^2} \{(a^2 - b^2)(q_0^2 - q_1^2) - 4abq_0q_1\},$$

$$\cos \theta_3 = -1.$$

Demostración. En efecto, utilizando los resultados del teorema anterior, se tiene que:

$$\cos \theta_1 = \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\| \|\mathbf{u}_2\|} = \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{q}\|^2} = \frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2 \|\mathbf{p}\|^2} \{(a^2 - b^2)(q_0^2 - q_1^2) - 4abq_0q_1\},$$

$$\cos \theta_2 = \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\| \|\mathbf{u}_4\|} = \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4 \rangle}{\|\mathbf{q}\|^2} = -\frac{1}{\|\mathbf{q}\|^2 \|\mathbf{p}\|^2} \{(a^2 - b^2)(q_0^2 - q_1^2) - 4abq_0q_1\},$$

$$\text{Cos}\theta_3 = \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\| \|\mathbf{u}_4\|} = \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_4 \rangle}{\|\mathbf{q}\|^2} = -1.$$

Presentaremos a continuación una nomenclatura que nos será de utilidad para nuestros desarrollos, esto es:

- 1)  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$
- 2)  $\mathbf{R}(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$
- 3)  $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$
- 4)  $\mathbf{R}_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$

## Bibliografía

- [1] Cohen M., Nagel E. *Introducción a la lógica y al método científico: Lógica aplicada y método científico II.* (1961). Harcour, Brace World Inc., Argentina.
- [2] Wartofsky M. *Introducción a la filosofía de la ciencia 1.* (1973). Alianza Editorial S.A., Madrid.
- [3] Jiménez, E, Reyes, Ferrer L, Acosta F. (2003). Aplicaciones del método científico a problemas en la Ingeniería mecánica. DEPMI UNAM. ISBN (en trámite)
- [4] Ángeles J. (1982). *Spatial Kinematic Chains : Analysis – Synthesis - Optimization.* Springer Verlag , New York .
- [5] Erdman A., Sandor G. (1997). *Mechanisms Design: Analysis and Synthesis.* Prentice Hall Inc, New Jersey
- [6] Reyes, L .(1998). Sobre la parametrización de las Rotaciones y Reflexiones de Multicuerpos Rígidos en el plano. Estudios Ocasionales. Universidad Anáhuac del Sur. ISBN 968-64-02-08-X.
- [7] Reyes Ávila Luis. Quaternions: Une Representation Parametrique Systematique Des Rotations Finies. Partie 1: Le Cadre Theorique. (1990). Rapport de Recherche INRIA Rocquencourt. France.
- [8] Jiménez, E, Reyes, L et al. (2002). Sobre la parametrización de las rotaciones y reflexiones de multicuerpos rígidos en el plano: Modelación cinemática de un robot de dos grados de libertad. Informe interno de investigación. ISBN 968 - 36 - 9841 – 7.
- [9] Jiménez E., Reyes L., Cuenca F. Modelación cinemática de posicionamiento de un mecanismo de cinco barras usando una rotación variante de los números complejos. Asociación Mexicana de Mecatrónica A.C. Por presentarse en Congreso 2003.

- [10] Jiménez E., Cuenca F., Reyes L., Pérez A., Delfin J., Ruiz E., Ojeda E. Modelación cinemática de posicionamiento de un robot paralelo planar tipo rr usando una números complejos. Asociación Mexicana de Mecatrónica A.C., Por presentarse en Congreso 2003.
- [12] Martínez R. Modelación y simulación computacional de trayectorias tridimensionales México.(1997). Tesis (Maestría en Ingeniería Mecánica) UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, Sección Mecánica.
- [13] Jiménez E. Simulación de un proceso de manufactura con obstáculo en la línea de producción. México. 1998. (Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica). UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, Sección Mecánica.
- [14] A. Rubio. Evasión de Obstáculos Mediante Multicuerpos Rígidos. México. (2000). Tesis (Maestría en Ingeniería Mecánica). UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, Sección Mecánica.
- [15] Jiménez E., Reyes A., Galindo F., Esquer H., González I., Luna J., Mercado M., Portillo S. Simulación computacional de una trayectoria continua para la aplicación de soldadura por inmersión de estaño de un componente electrónico. Asociación Mexicana de Mecatrónica A.C. Por presentarse en Congreso 2003.
- [16] Lee, C., Go, J., Lee H., Jun C., Kim D., Cha J., Ahn J. "A Robust Trajectory Control of a Polishing Robot System based on Cam". (2001). *Robotics and Computer Integrated Manufacturing*. 17. pp. 177-183.
- [17] Kim B., Choi B. "Machining Efficiency Comparison Direction – Parallel Tool Path with Contour – Parallel Tool Path". (2002). *Computer Aided Design*. 34. pp. 89-95.
- [18] John W. Gray. *Mastering Mathematica, Programming Methods and Applications*. 1994. Academic Press Inc. New. York.

- [19] Galindo G. Análisis, modelación y simulación de una trayectoria continua para la aplicación de soldadura en un transformador eléctrico. 2003. (Tesis de Maestría en Ingeniería Mecánica). UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, Sección Mecánica.
- [20] Jiménez, E, Reyes, L et al. (2003). Sistematización de trayectorias (rectilíneas): Aplicaciones a ciclos de maquinado. DEPMI- UNAM. ISBN (En trámite).
- [21] Jiménez E., Reyes L., Galindo F., García D., González I., Hito O., Mercado I. Sincronización local y global de sistemas productivos seriales. Informe interno de investigación (2003). Universidad la Salle Noroeste. ISBN 968-5844-00-3
- [22] Jorge A. "Fundamentals of Robotic Mechanical System. Theory, Methods and Algorithms" (1997). Springer- Verlag. New York .