

01173



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ANÁLISIS CINEMÁTICO DE UN ROBOT
PARALELO PLANAR DE TRES GRADOS DE
LIBERTAD TIPO RRR

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERÍA
(ÁREA MECÁNICA)
P R E S E N T A :
ING. JUAN JOSÉ DELFÍN VÁZQUEZ



ASESOR: M. EN I. EUSEBIO JIMÉNEZ LÓPEZ

COASESOR: DE. LUIS REYES ÁVILA

MÉXICO, D. F. CIUDAD UNIVERSITARIA

2004



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

A **DIOS** por haberme permitido nacer, vivir, tener una familia, y por darme fuerza para continuar luchando por ser un ser humano mejor.

A mi madre, porque con su fortaleza, amor y sabiduría ha formado parte del impulso para llegar hasta donde hoy me encuentro.

A mis hermanos por sus buenos deseos de que mi barco llegue a aguas tranquilas.

A Lupita mi amada esposa, compañera y madre de mis hijos, por su amor y apoyo incondicional para todas las tareas que emprendo.

A mis hijos Elizabeth y Juan José, tesoros prestados por DIOS para impulsar mi vida, por su comprensión y paciencia.

Al M. I. Eusebio Jiménez López, por su amistad, gran apoyo como compañero y asesor para la realización de esta tesis.

Al Dr. Luis Reyes Ávila, por sus conocimientos aportados como cotutor de esta tesis.

A los Doctores Luis Ferrer Argote, Jorge Carrera Bolaños, Vicente Borja Ramírez, Saúl D. Santillán Gutiérrez y al M. I. Leopoldo A. González González, por aportar sus conocimientos y experiencia en el proceso de mi formación dentro la maestría.
A mi amigo y compañero Efrén Ruelas Ruiz por su ayuda.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, "alma mater" y al Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Cajeme, por permitirme formar parte de este proyecto piloto.

ÍNDICE

Agradecimientos	I
Prólogo	VII
Resumen	VIII
Introducción	
I.1 Objetivos.....	1
I.2 Generalidades.....	1
I.3 Arquitectura de los robot.....	4
I.4 Aplicaciones de la robótica.....	7
I.5 Robots seriales, mecanismos y robots paralelos.....	9
I.6 Diferencia entre robot seriales y paralelos.....	17
I.7 Definición de robot paralelos.....	18
I.8 Tipos de robot paralelos.....	19
I.9 Aplicación de los robot paralelos.....	34
I.10 El problema cinemático directo e inverso.....	37
I.11 El problema modelado en la tesis.....	39

CAPÍTULO 1 MODELOS CINEMÁTICOS DE POSICIONAMIENTO

Introducción.....	42
1.1 Arquitectura del robot paralelo.....	42
1.2 Representación formal del robot.....	43
1.3 Definición de vectores sobre la configuración de referencia.....	45

1.4	Ecuaciones de posición en la configuración “no deformada” y formulación del problema inverso.....	47
1.4.1	Representación de las rotaciones en la base inercial fija.....	51
1.4.2	Formulación del problema cinemático inverso en la configuración no deformada.....	54
1.5	Análisis del problema cinemático directo.....	55
1.5.1	Primera formulación del problema cinemático directo.....	59
1.5.2	Segunda formulación del problema cinemático directo.....	61
1.6	Análisis del movimiento del robot paralelo en la configuración deformada.....	62
1.6.1	Formulación del problema cinemático inverso en la configuración deformada.....	69
1.7	Análisis del problema cinemático directo en la configuración deformada.....	70
1.7.1	Formulación del problema cinemático directo en la configuración deformada.....	73

CAPÍTULO 2 MODELO CINEMÁTICO DE VELOCIDAD

	Introducción.....	75
2.1	Las ecuaciones de velocidad.....	75
2.2	Derivadas de las bases locales deformadas.....	76

2.3	Explicitación de las ecuaciones de velocidad.....	78
2.4	Ecuaciones de velocidad instantáneas.....	81
2.5	Derivadas de las normas unitarias de los complejos.....	83
2.6	Relaciones entre los componentes de las velocidades angulares y los componentes de las derivadas de los complejos.....	85
2.7	Derivadas de las relaciones geométricas sobre la plataforma.....	86
2.8	Formulación del problema cinemático inverso de la velocidad.....	88
2.9	Ecuaciones de velocidad para el planteamiento del problema directo.....	89
2.9.1	Descripción de las ecuaciones de lazo y sus derivadas.....	89
2.9.2	Ecuaciones de velocidad en términos de las derivadas de las bases locales.....	90
2.9.3	Ecuaciones de velocidad en términos de los complejos.....	91
2.9.4	Planteamiento del problema directo de velocidad.....	93

CAPÍTULO 3 MODELO CINEMÁTICO DE ACELERACIÓN

	Introducción.....	96
3.1	Las ecuaciones de aceleración.....	96

3.2	Dobles derivadas de las normas unitarias de los números complejos.....	100
3.3	Relaciones entre las dobles derivadas de los complejos y los componentes de las aceleraciones angulares.....	100
3.4	Segundas derivadas de las relaciones geométricas sobre la plataforma.....	102
3.5	Formulación del problema cinemático inverso de aceleración.....	103
3.6	Ecuaciones de aceleración para el planteamiento del problema directo.....	104
3.7	Planteamiento del problema directo de aceleración..	107

CAPITULO 4 PROGRAMACIÓN DEL MODELO CINEMÁTICO DE POSICIONAMIENTO DEL ROBOT PARALELO TIPO RRR DE 3 GDL

	Introducción.....	110
4.1	Programación del robot paralelo planar tipo RRR de tres grados de libertad	110
4.2	Programación de la cinemática inversa del robot.....	111
4.3	Programación de la cinemática inversa del robot.....	125

APÉNDICE I MARCO TEÓRICO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

A.1	El espacio vectorial de los números complejos.....	140
A.2	Representación paramétrica de las rotaciones.....	148
A.3	Representación exponencial de $\rho(p, \bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$	152
A.4	Otra operación binaria multiplicativa.....	158
A.5	Otra parametrización de reflexiones.....	164

APÉNDICE II PROTOTIPO DE ROBOT EXPERIMENTAL TIPO RRR DE 3 GDL

	Introducción.....	169
All.1	Manipulador	169
	Conclusiones.....	189
	Referencias.....	191

PRÓLOGO

El presente trabajo de tesis, tiene como propósito generar conocimiento escrito para las futuras generaciones de la Maestría en Ingeniería Mecánica y campos afines, interesados en la modelación cinemática de los robots paralelos. Esta tesis forma parte de un proyecto conjunto de la Universidad Nacional Autónoma de México, DEPMI, Sección Mecánica y el Instituto Tecnológico Superior de Cajeme. La línea de investigación sobre la cual se trabajó corresponde a la cinemática y dinámica de los multicuerpos rígidos en el plano y en el espacio, en esta línea de investigación se modelan robots y mecanismos utilizando el álgebra de los números complejos y el álgebra de Cuaterniones y el objetivo es probar la eficiencias de dichas álgebras en el modelado cinemático y dinámico.

Se estudia en esta tesis la cinemática de un robot paralelo planar tipo RRR de tres grados de libertad, usando una rotación definida en el espacio vectorial de los números complejos.

Se construyen en forma sistemática las ecuaciones relativas a posicionamiento, velocidad y aceleración y se programan únicamente las ecuaciones de posicionamiento del robot en el lenguaje VISUAL – BASIC.

Se construye también, un prototipo a base de materiales ligeros con el fin de probar los modelos cinemáticos de posicionamiento del robot paralelo.

RESUMEN

En este trabajo de tesis se modela el problema cinemático de un robot paralelo plano tipo RRR de 3 GDL. Para analizar y modelar las rotaciones del robot fue usada el álgebra de los números complejos parametrizada y sistematizada en el espacio vectorial de las parejas ordenadas de números reales. Dos configuraciones del robot fueron analizadas: 1) la no deformada y 2) la deformada. Para ambas configuraciones se formularan los problemas cinemáticos directo e inverso. El número de ecuaciones e incógnitas para el caso del problema inverso fue de 12×12 en los modelos de posición, velocidad y aceleración. Para el caso del problema directo, los sistemas de ecuaciones e incógnitas fueron de 10×10 . Finalmente, las ecuaciones resultantes fueron programadas y simuladas en el lenguaje de programación VISUAL BASIC.

Palabras clave: Robots paralelos, números complejos, rotaciones, cinemática.

INTRODUCCIÓN

I.1 Objetivos. En este trabajo de tesis se pretende llegar a los siguientes objetivos:

- Generar las ecuaciones cinemáticas de posicionamiento del robot paralelo usando el álgebra de los números complejos.
- Generar las ecuaciones cinemáticas de velocidad a partir de una configuración llamada “deformada”.
- Generar las ecuaciones cinemáticas de aceleración a partir de la configuración “deformada”.
- Formular los problemas cinemáticos directo e inverso en cada una de las configuraciones analizadas.
- Programar el modelo de posicionamiento en el lenguaje VISUL BASIC.

I.2 Generalidades de la historia de la robótica

La necesidad de ahorrar tiempo, espacio y mano de obra y de aumentar los volúmenes de producción, ha llevado al hombre a desarrollar tecnología para producir máquinas que ayuden a satisfacer las necesidades planteadas. Desde el inicio de la revolución industrial, en el siglo XVIII, las máquinas fabricadas eran rudimentarias debido a que la tecnología estaba en sus inicios.

En esos tiempos para obtener un producto, era necesario invertir mucho tiempo y dinero y obviamente los productos obtenidos estaban al alcance solo de los que tenían poder económico. Para vender más y hacer llegar sus productos a un mercado mayor, fue necesario reducir los precios y mejorar la calidad de sus productos, para lo cual se

requirió que el industrial buscara la forma de reducir los costos de producción. A raíz de todo esto fue necesario impulsar todos los campos de la ciencia, en especial el campo de la ingeniería mecánica para desarrollar mejores máquinas e inventar otras. Como resultado de todo este proceso nace una máquina que su funcionamiento se basa en el brazo del hombre y a esta máquina se le llamo robot [1]. En los últimos 50 años el desarrollo tecnológico ha evolucionado en forma exponencial y el robot como resultado de dicho desarrollo es ahora una máquina imprescindible en toda industria.

La palabra robot aparece por primera vez en el cuento Opilec, de Karel Capek en 1917 [2], el mismo autor en octubre de 1922 en Nueva York vuelve a utilizar la palabra robot en la obra de teatro RUR (Rossum's Universal Robots) y cobra mayor publicidad. La palabra **robot** viene de "robota" palabra checoeslovaca que significa trabajos forzados [1,2]. A partir de ese tiempo, se han construido robots para películas (el R2D2 guerra de las galaxias, Robocop, y otros), para exhibiciones, y sobretodo para la industria.

La historia verdadera de los robots empieza en 1954 cuando el ingeniero norteamericano Geoge Devol, registro una patente llamada **article transfer** (transferencia automática de artículos). Esta patente condujo al primer robot industrial, fabricado en 1962 por la compañía UNIMATION, Inc. La cual fue fundada en 1956.

1.2.1 Definiciones, clasificación y conceptos de robots industriales

A partir de la aparición del robot industrial, se ha tratado de encontrar una definición adecuada, esto es:

- 1) Un robot industrial es una máquina programable de propósito general que posee ciertas características antropomórficas [3] (ver figura 1.1).
- 2) Un robot industrial es un manipulador multifuncional, reprogramable diseñado para mover materiales, partes, herramientas, o dispositivos especiales a través de movimientos programados para efectuar una variedad de tareas.

- 3) El robot es una máquina especializada que puede ser concebida como un “sistema mecánico programable”, el cual está compuesto por subsistemas: 1) un sistema mecánico compuesto de cuerpos rígidos o deformables conectados por juntas de algún tipo, 2) un subsistema de sensado, 3) un subsistema de interfase electrónica, y 4) un subsistema de procesamiento de información [4].
- 4) Un robot industrial es un manipulador automático en posición, polivalente, reprogramable, capaz de posicionar y de orientar un material, una pieza, una herramienta, o dispositivos especiales en curso de movimientos variables y programables, para la ejecución de varias tareas [5].
- 5) Un robot industrial es un manipulador reprogramable con funciones múltiples diseñado para mover materiales, partes, herramientas o dispositivos especializados a través de movimientos programados variables para el desempeño de una gran diversidad de tareas [6].

La definición 5) es la adoptada por el Instituto Norteamericano de Robots (Robot Institute of America) y es la que actualmente tiene mayor aceptación.

Las palabras claves que distinguen a los robots de otras máquinas, son “manipulador” y “reprogramable”.

El término manipular es el acto de sujetar un objeto y cambiar su posición y orientación en el espacio. Muchos manipuladores son antropomórficos, es decir parecen brazos humanos.

La palabra reprogramable es el acto de poder cambiar la programación original del robot para que ejecute otras clases de movimiento dentro del área de trabajo.

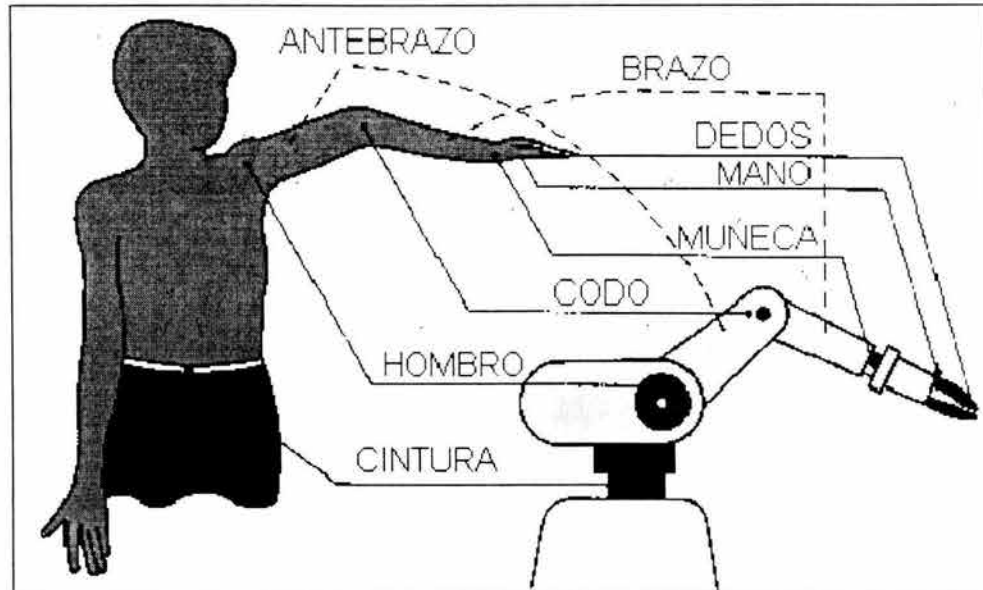


Figura I.1 Características antropomórficas del robot.

I.3 Arquitectura de los robots

La característica antropomórfica más común es la del brazo mecánico. En general un robot está constituido por el manipulador, una interfase electrónica y el controlador como se muestra en la figura I.2.

COMPONENTES DEL ROBOT

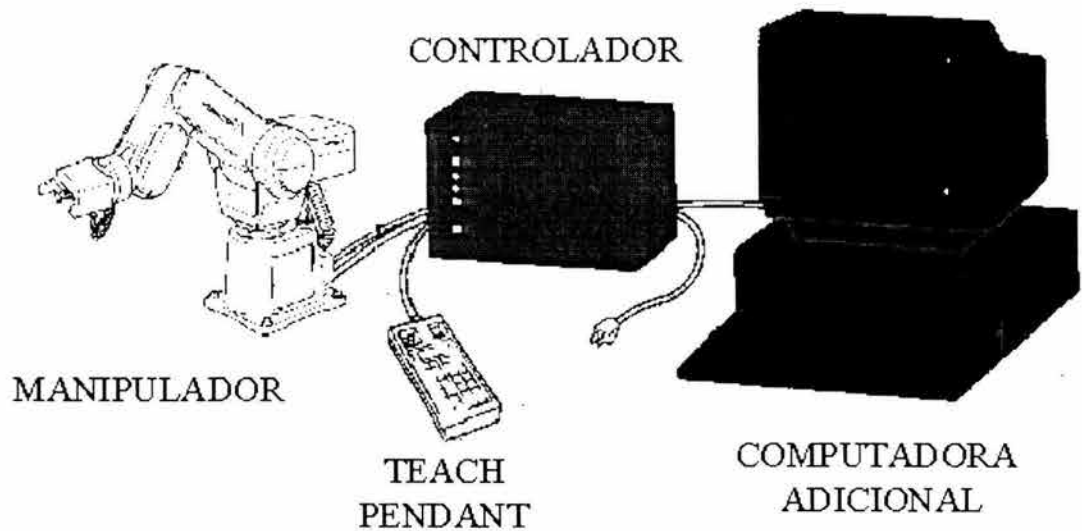


Figura I.2 Partes que componen un robot.

1) **El manipulador** es el componente principal del robot y es una estructura mecánica compuesta del cuerpo, brazo, muñeca y el efector final o griper dichos elementos se muestran en la figura I.3.

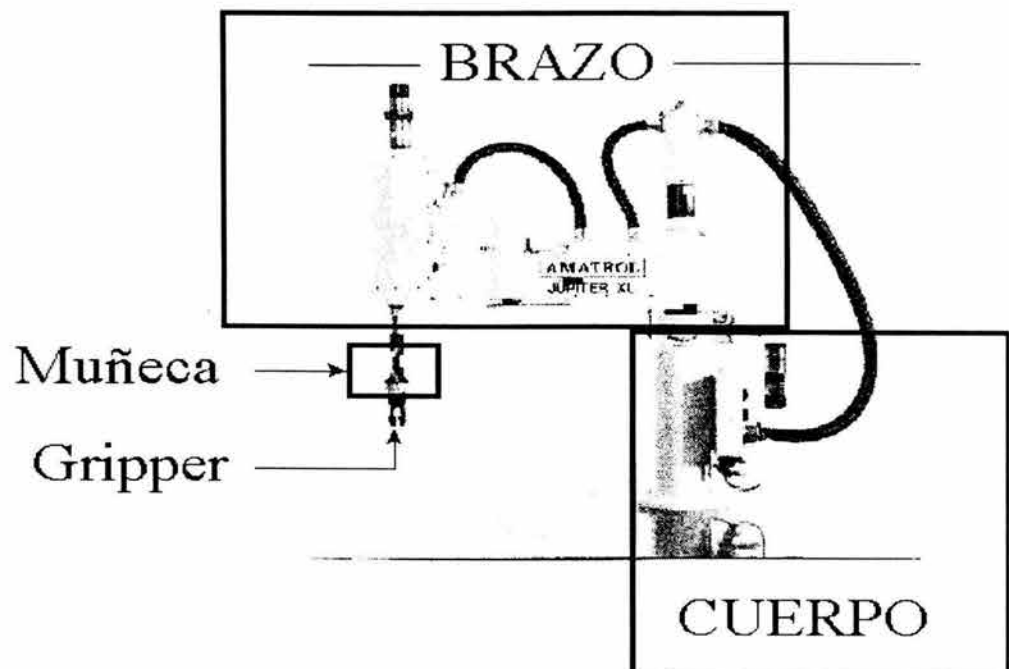


Figura I.3 Partes que componen el manipulador del robot.

- 1.1) **El cuerpo** es la estructura más robusta del robot la cual soporta el peso total.
- 1.2) **El brazo** va unido al cuerpo, está compuesto articulaciones (antebrazo y brazo) y a él se une la muñeca. Este puede tener movimientos lineales que pueden ser horizontales o verticales, movimientos angulares por articulación y puede rotar.
- 1.3) **La muñeca** es la parte terminal del brazo y en ella se inserta el “gripper” o efector final su función es orientar y operar el efector final. Pueden tener como máximo tres orientaciones (ver figura I.4) y que corresponden cada una a un grado de libertad estas son [3]:
- **Inclinación horizontal o elevación (Wrist Rotate)** es la rotación del efector final sobre un eje horizontal en el extremo del brazo del robot y perpendicular a su eje. Permite al efector final un movimiento giratorio hacia arriba y hacia abajo.
 - **Inclinación vertical o azimutal (Wrist Flex)** es la rotación sobre un eje vertical perpendicular a su eje. Permite al efector final un movimiento giratorio de lado a lado.
 - **Oscilación o balanceo (Hand Rotate)** es la rotación sobre el eje longitudinal de la muñeca.

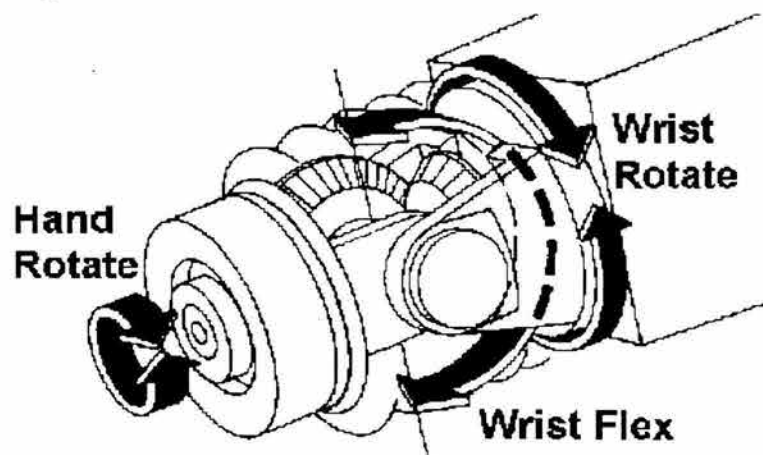


Figura I.4 Orientaciones de la muñeca.

1.4) El efector final o gripper es un dispositivo que se une a la muñeca para efectuar una tarea específica. Existen dos grandes categorías, estas son:

- **Pinzas.**- son diseñadas para carga y descarga, transporte de materiales y ensamble de piezas.
- **Herramientas.**- son utilizadas para tareas mas específicas y puede ser, una pinza para soldar, una broca, un desarmador, una boquilla aspersora, etc..

2. El controlador (computer module).- es el dispositivo que controla cada uno de los movimientos del manipulador y guarda sus posiciones. Recibe y envía señales a otras máquinas herramientas y almacena programas. Estas señales van dirigidas a los motores de cada uno de los ejes del robot. Los componentes del controlador son el teclado, monitor C.P.U.. También forma parte del controlador, la caja de comandos (teach pendant) de entrada y salida que sirven para enseñarle las posiciones al manipulador del robot, y una computadora adicional que se utiliza comúnmente para mandar instrucciones al controlador y para dar de alta programas de control.

1.4 Aplicaciones de la robótica

El campo de aplicación de los robot es muy amplio, son utilizados en una diversidad de aplicaciones, como en procesos de soldadura y ensamble en la industria automotriz, en los procesos de carga y descarga en celdas de manufactura, en el manejo de material radiactivo en laboratorios, en las plantas nucleares para labores de inspección de lugares peligrosos, en las salas de operaciones de hospitales, en los transbordadores espaciales, en las escuelas, entre otras aplicaciones. Se puede decir que en cualquier actividad donde se requieren ejecutarse trabajos repetitivos, donde se requiere precisión o incluso en las labores domésticas se utilizan los robots.

En las figuras I.5, I.6, I.7, I.8 y I.9, se muestran algunas aplicaciones de robots.

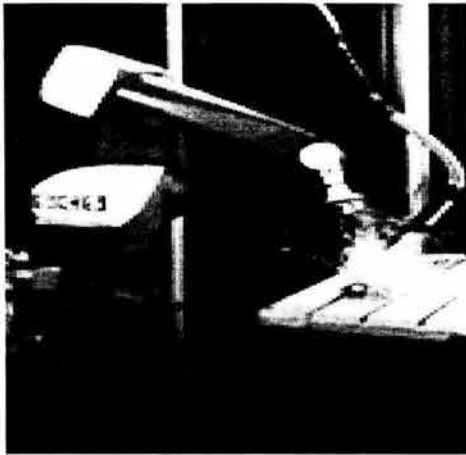


Figura I.5 soldadura de arco

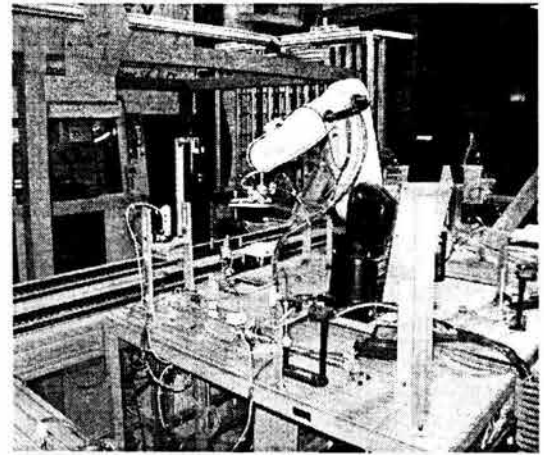


Figura I.6 Carga y descarga a una celda de manufactura

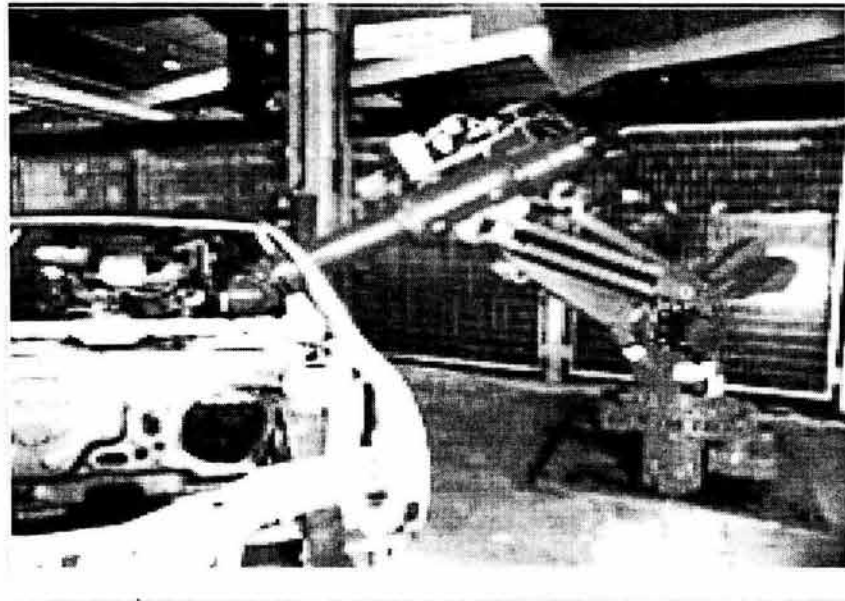


Figura I.7 Proceso de ensamble de automóviles.

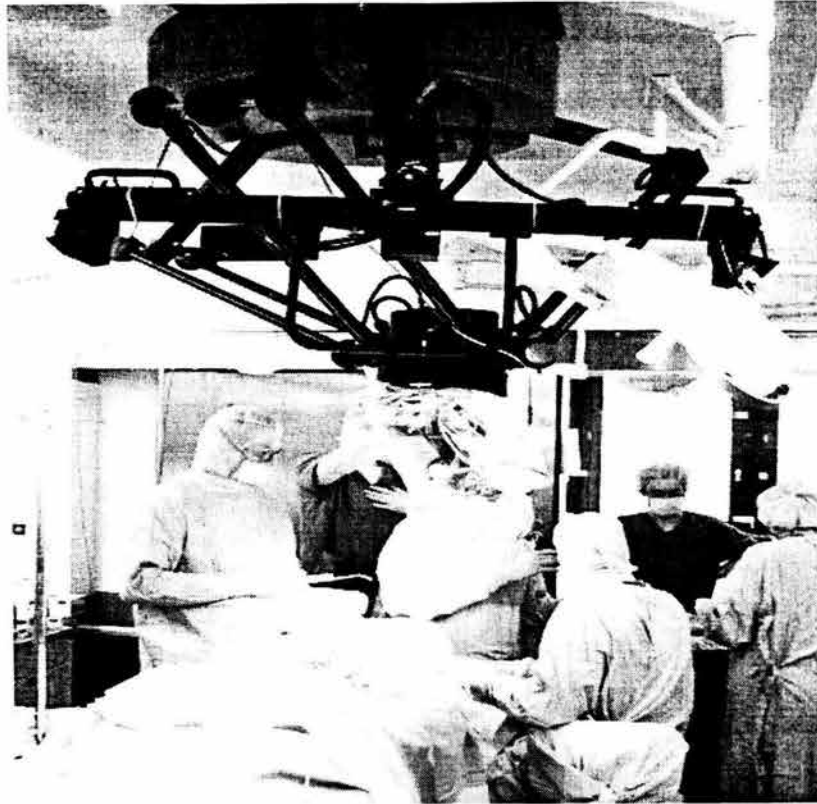


Figura I.8 Robot delta de la ABB en una sala de operaciones.



Figura I.9 Robot serial móvil utilizado en la limpieza de aeronaves.

I.5 Robots seriales, mecanismos y robot paralelos

1) **Los robots seriales o de cadena abierta**, consisten en un conjunto de eslabones rígidos unidos por juntas con un extremo fijo en una base llamada tierra y el

otro extremo está libre y puede ser equipado con una herramienta para que efectúe una labor específica. Se pueden clasificar en base a su configuración en:

- **Configuración angular o de brazo articulado** (ver figura I.10), tiene una articulación con movimiento rotacional y dos angulares. Tienen una semejanza al brazo humano, están compuestos de un torso, brazo, hombro, codo y muñeca y pueden tener 2, 3, 4, 5 y 6 grados de libertad.

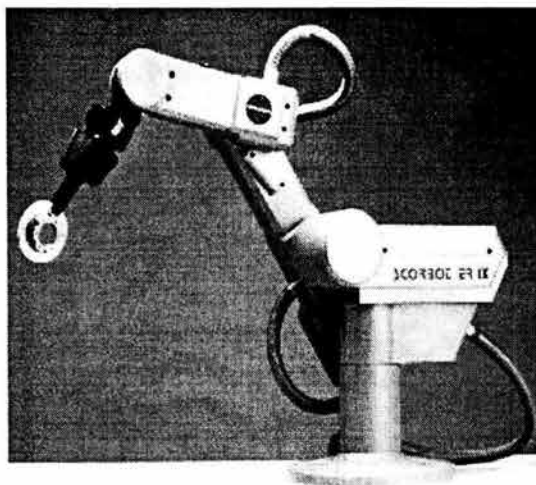


Figura I.10 Robot configuración angular o de brazo articulado.

- **Robot de junta horizontal.-** este robot es más conocido con el nombre de **SCARA** (Selective Compliance Assembly Robot Arm), (ver figura I.11) introducido a finales de los 70, como un robot ideal para tareas de ensamble, es una variación del robot articulado, tiene sus ejes arreglados verticalmente de tal forma que las juntas se inclinan en una orientación horizontal y estos pueden ser de 2, 3 y 4 g.d.l.

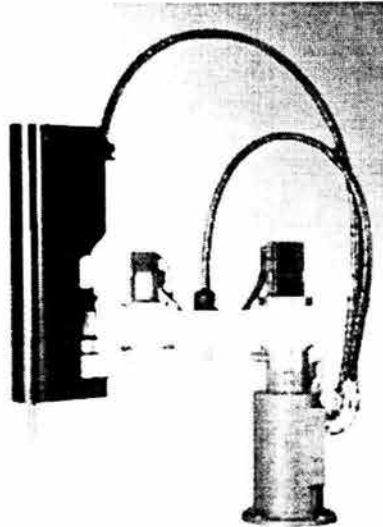


Figura I.11 Robot de junta horizontal tipo SCARA

- **Configuración polar o llamado también esférico.**- (ver figura I.12), este tipo de robot tiene varias articulaciones. En lugar de codo tiene un cilindro neumático o hidráulico que provee una extensión del brazo, mantiene siempre una inclinación. Puede realizar movimientos rotacionales, angulares y lineales. Es muy popular en la industria automotriz ya que este robot puede elevar la pieza de trabajo a lo largo de una trayectoria vertical mientras mantiene una orientación, esto lo hace con movimientos coordinados de los 3 ejes (hombro, extensión del brazo, inclinación de la muñeca).

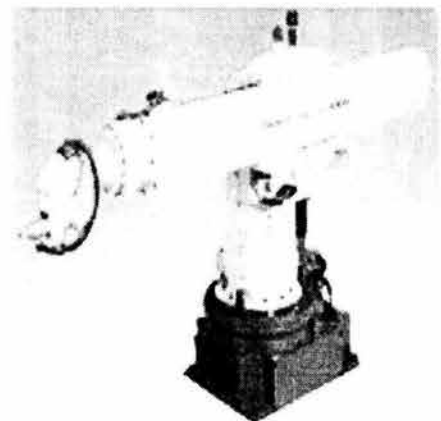
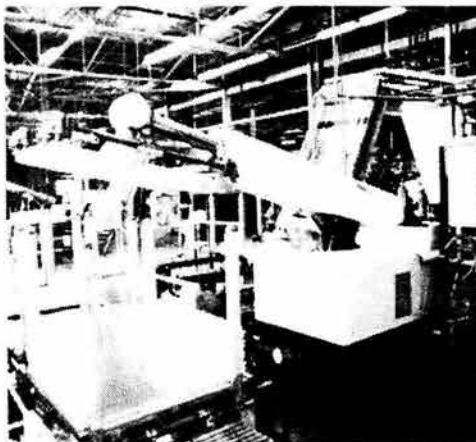


Figura I.12 Robots de configuración polar o esférico

- **Configuración cilíndrica.**- este tipo de robot (ver figura I.13), tiene un eje reciprocante que provee dos grados de libertad. El complemento es un cilindro neumático o hidráulico. Tiene dos movimientos lineales y uno rotacional, ejecuta sus movimientos por interpolación lineal e interpolación por articulación. Este robot genera una envoltura de trabajo en forma de cilindro, usualmente tienen movimiento reciprocante en sus 3 GDL, como sus primos de configuración polar. Estos robots pueden tener hasta 8 GDL configuración considerada como "rara".

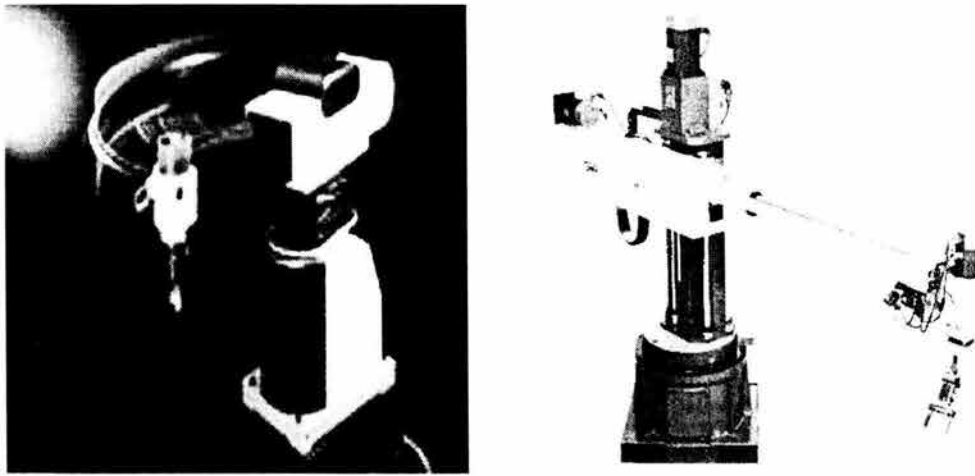


Figura I.13 Robots de configuración cilíndrica.

Configuración cartesiana.- el nombre de esta configuración se debe a que es un robot que trabaja en función de los ejes cartesianos (ver figura I.14). Esta usualmente montado en un portaequipajes o en el piso y se desplaza sobre los ejes x, y, z. Son rígidos y pueden ser de 2 o 3 GDL.

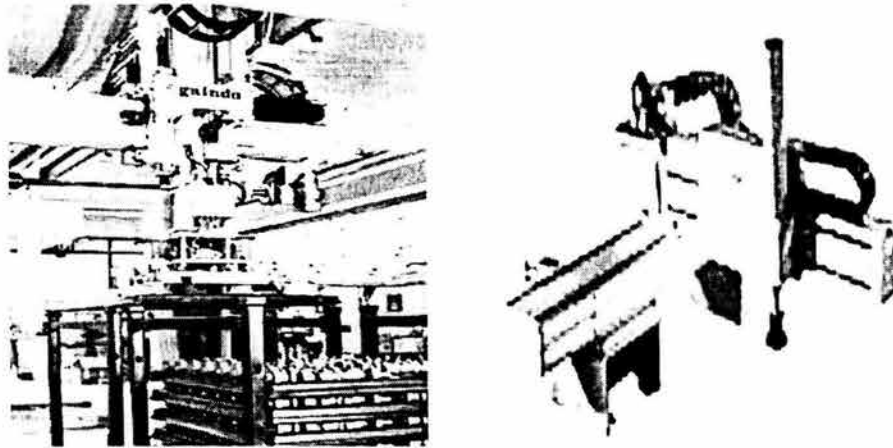


Figura I.14 Robots configuración cartesiana.

2) Mecanismos para robots.- Definiciones:

- Un mecanismo es una parte de una máquina formado por elementos ligados para producir un movimiento definido.⁷
- Un mecanismo es un medio para transmitir, controlar o limitar movimientos relativos.¹

Los pistones, la biela y la manivela de acuerdo con las definiciones descritas anteriormente, son mecanismos así como lo es un par de engranes o un robot.

Se puede decir que el mecanismo se concibe como un ensamble de eslabones rígidos conectados unos con otros por medio de articulaciones que permitan un movimiento relativo. Los mecanismos pueden ser : a) planares y b) espaciales.

- Mecanismo planar.- un mecanismo planar es un conjunto de eslabones cuyo movimiento está restringido a un solo plano (ver figura I.15).

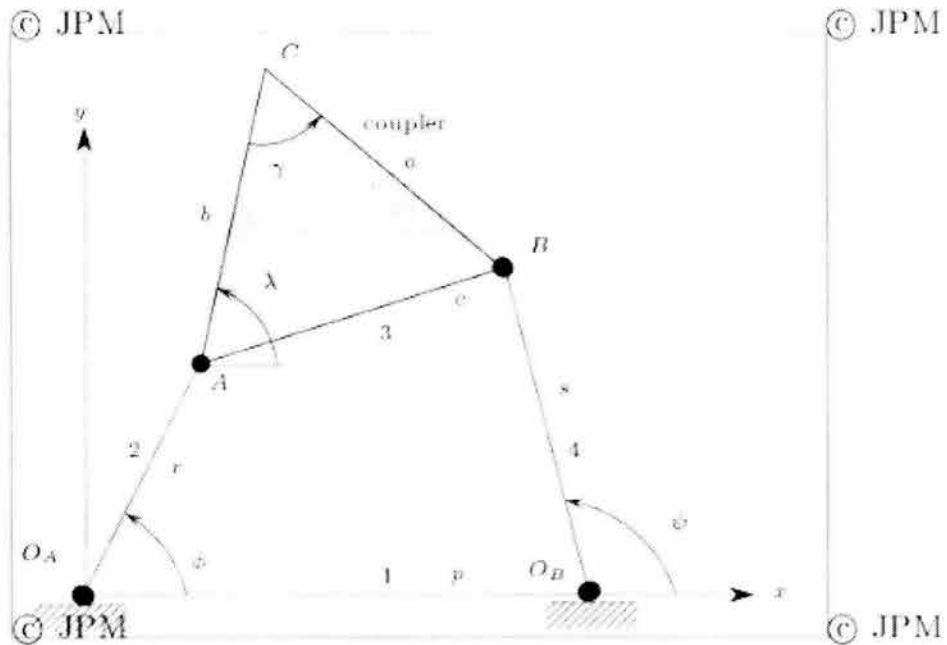


Figura I.15 Mecanismo planar de 4 eslabones.

- Mecanismo espacial.- es un mecanismo cuyos eslabones pueden moverse en diferentes direcciones en el espacio (ver figura I.16).

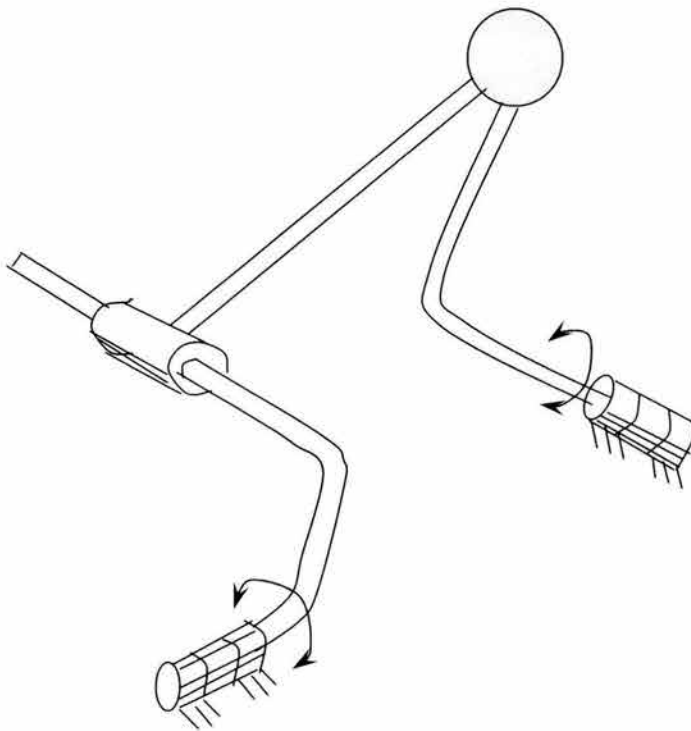


Figura I.16 Mecanismo espacial de 4 eslabones.

Las cadenas cinemáticas que conforman los mecanismos están constituidos por elementos llamados eslabones, el acoplamiento entre dos eslabones se realiza por medio de articulaciones conocidas como pares cinemáticos o llamadas también juntas. Existen dos clases de pares: a) pares inferiores y pares superiores. Existe un par inferior cuando un elemento se acopla a otro por medio de una acción evolvente y el contacto se realiza entre superficies. El par superior es cuando tiene lugar el contacto a lo largo de una línea o punto. Los pares cinemáticos más utilizados en robótica son los inferiores.

Los pares inferiores se pueden clasificar en seis tipos [8].

- a) Par de rotación (R), el cual permite un giro alrededor de un eje y evita traslaciones. Impone cinco restricciones, tres de rotación y dos de traslación.
- b) Par prismático (P), permite únicamente traslación. A lo largo de una dirección. Impone también cinco restricciones, evita traslaciones sobre dos direcciones y rotación respecto a tres ejes.
- c) Par de tornillo (H), permite traslación a lo largo de un eje y rotación alrededor del mismo eje, existiendo una relación entre ellos. Por tanto impone también cinco restricciones.
- d) Par cilíndrico (C), permite dos movimientos independientes, traslación sobre un eje y rotación alrededor del mismo. Impone cuatro restricciones.
- e) Par esférico (S), llamado también articulación de bola, permite rotación alrededor de tres ejes no coplanares e impide movimientos de traslación. Impone tres restricciones.

- f) Par plano (E), permite traslación a lo largo de dos direcciones independientes y rotación alrededor de un eje perpendicular al plano de esas direcciones. Impone tres restricciones.
- g) Par esférico ranurado (SL), consiste en una esfera convexa o sólida que, idealmente, coincide de manera exacta con una cubierta esférica del mismo radio. El perno y la ranura detienen la rotación relativa sobre el eje vertical

En la figura 1.7 se muestran algunos pares cinemáticos interiores.

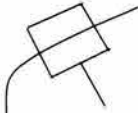

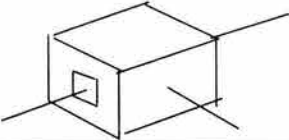
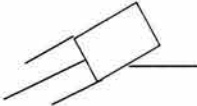
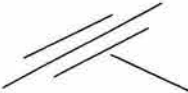
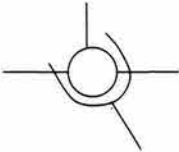
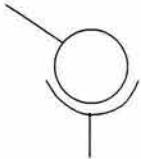
Pares	Espacial	Plano	Símbolo y g.d.l.
Rotacional			R $f = 1$
Prismático			P $f = 1$
Cilíndrico			C $f = 2$
Esférico ranurado			SL $f = 2$
Esférico			S $f = 3$

Figura I.17 Algunos pares rotacionales.

3) Robots paralelos

Los robots paralelos son llamados también plataformas. Son mecanismos de cadena cinemática cerrada, están constituidos por dos o mas cadenas cinemáticas independientes unidas por un eslabón común que tiene una forma geométrica definida y es donde se acopla el efector final. Las cadenas están formadas por eslabones y juntas o pares cinemáticos como los ya mencionados en la sección anterior. Están constituidos también por actuadores que pueden ser motores eléctricos a pasos, servomotores o motores de corriente alterna, actuadores hidráulicos o neumáticos y estos van colocados de acuerdo con el tipo de trayectoria que se quiere generar y a los grados de libertad que tenga el robot.

I.6 Diferencia entre los robots seriales y robots paralelos

Existen algunas diferencias notables entre los robots seriales y paralelos algunas de ellas son las siguientes:

- a) Estructuralmente un robot serial es de cadena abierta, es decir esta formado por dos o tres eslabones uno de los extremos fijado a tierra y el otro extremo esta libre, mientras que el robot paralelo está constituido por dos o mas cadenas cinemáticas en paralelo, cada cadena de manera similar que los seriales está fijada a tierra en un extremo y en el otro extremo se acopla cada cadena por medio de una junta a un eslabón común que puede ser de forma triangular, cuadrada, circular etc [1,3,6].
- b) La puesta en marcha de varias cadenas cinemáticas animadas cada una por un actuador, conduce generalmente a las siguientes ventajas con respecto a los seriales [9]:
 - Capacidad de carga elevada.

- Posibilidades de movimiento de alta dinámica (elevadas aceleraciones).
- Posibilidad de posicionar el actuador directamente sobre la base fija a muy próximo a esta.
- Elevada rigidez mecánica.
- Frecuencia limpia elevada, esto es poco error de repetibilidad ya que la estructura no tiene las oscilaciones que tiene la estructura de un robot serial.
- Construcción de módulos mecánicos de fabricación simple y en serie, por la presencia de mas componentes idénticos.

I.7. Definición de robots paralelos

La investigación dentro del campo de los robots paralelos tiene relativamente pocos años, la primera plataforma o robot paralelo construida en 1949 se le atribuye a Gough, pero como existen diferencias notables entre estos y los robots seriales se ha buscado adecuar una definición. En esta sección se dan dos definiciones que se apegan a lo que es en si el robot :

- Los robots paralelos son mecanismos de cadena cerrada, constituido por un órgano terminal de n grados de libertad y de una base fija unida entre sí por cadenas cinemáticas independientes, cada una de ellas cuenta a lo sumo de dos segmentos articulados, la articulación entre estos dos segmentos deberá tener un solo grado de libertad. El movimiento de este mecanismo se efectúa por n actuadores simples, uno por cada cadena [9].
- Se llamará robot paralelo, a un robot compuesto cuando menos de dos plataformas, relacionados por mas de una cadena cinemática, cada cadena cinemática es una estructura serie, el grupo de cadenas se conectan en paralelo y forman bucles en un plano poligonal [10].

I.8 Tipos de robots paralelos

Existen en la actualidad diversos tipos de robots paralelos que comercialmente se localizan en el mercado como la plataforma Stewart, las plataformas Gough, los robots Delta, Eclipse y otros que forman parte de los proyectos en desarrollo de las distintas universidades y laboratorios en el mundo, aquí solo se mencionarán y describirán algunos de ellos:

1.- Plataformas Stewart – Gough.- las estructuras de estas plataformas son conocidas desde hace tiempo. Alrededor de 1800 el Matemático Cauchy estudió la rigidez de una estructura llamada octaedro articulado. En el siglo pasado en 1949 Gough, usó un mecanismo similar para las pruebas de llantas. En 1965 esos mecanismos fueron redescubiertos y usados ampliamente en simuladores de vuelo por un Ingeniero llamado D. Stewart. Desde ese tiempo cualquier mecanismo paralelo similar son conocidos como plataforma Stewart, aunque Gough descubrió este mecanismo antes que Stewart.

a) Plataforma Gough.- el primer prototipo de esta arquitectura se atribuye a Gough (1949) (ver figura I.18) se utilizó para las pruebas de llantas. Cobró interés en los años 60 en los simuladores de vuelo. Es un robot de 6 GDL constituido por una placa fija y una placa móvil unidas por 6 segmentos. El extremo del segmento que se une a la base lo hace por medio de una junta cardán y a la placa móvil se une por medio de rótula. Cada segmento tiene un actuador lineal que permite modificar la longitud del segmento [13,14].

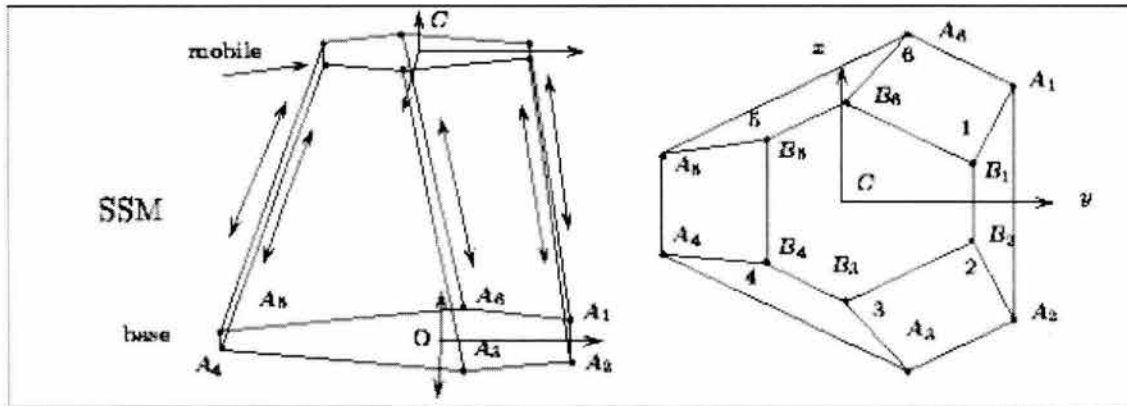


Figura I.18. Plataforma Gough.

b) Plataforma Stewart.- (ver figura I.19a,b), propuesta por D. Stewart en 1965, como un simulador de vuelo, es un manipulador de 6 G.D.L., donde el efector final es adherido como una placa móvil soportada por seis actuadores lineales en paralelo [10]. La plataforma Stewart, como una clase especial de cadena cerrada, es un mecanismo paralelo completo con seis grados de libertad controlados, consiste en dos placas que están conectadas por 6 piernas actuando en paralelo. Una de las placas definida como placa móvil, tiene 6 G.D.L. relativos con la otra placa que es la placa base. Cada pierna tiene en un extremo una junta esférica y en el otro una junta universal, entre ambas juntas existe una junta prismática que es utilizada para modificar la longitud de la pierna [11]. Recientemente, esta clase de manipulador ha atraído un interés considerable debido a sus características inherentes comparadas con los manipuladores seriales que incluye: 1) alta capacidad de fuerza / torque, la carga es distribuida a varios actuadores en paralelo; 2) alta rigidez estructural y 3) es afirmado que su seguridad es mejor debido a que no acumula errores.¹⁰

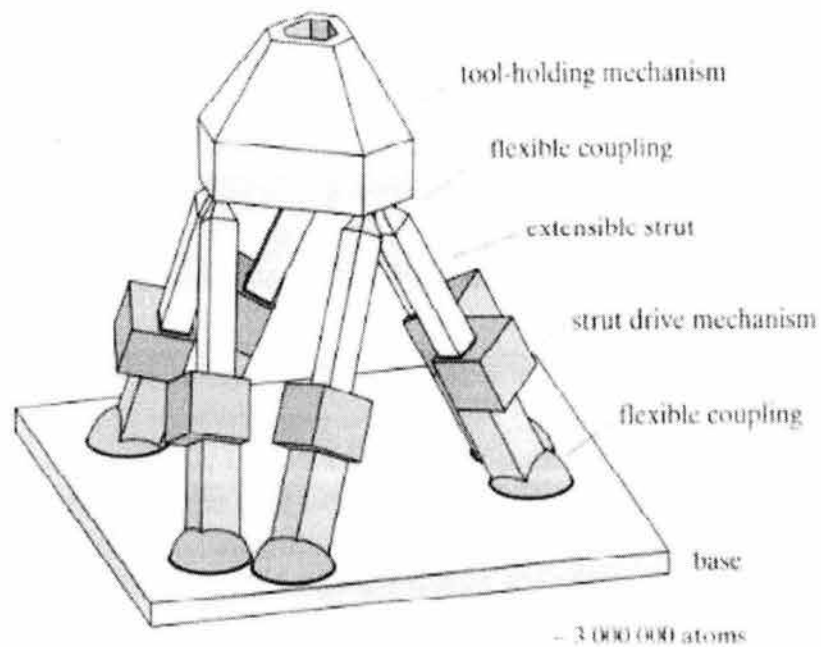


Figura I.19a. Plataforma Stewart básica.

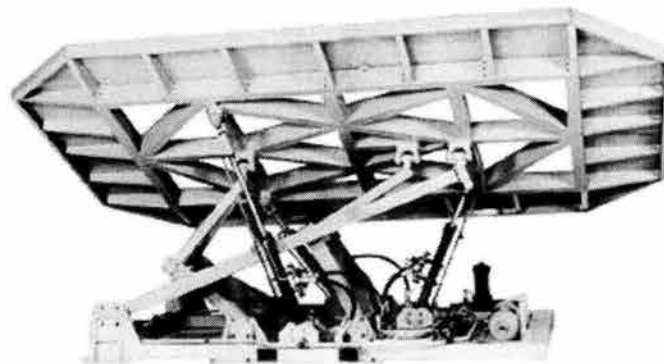


Figura I.19b Simulador de vuelo.

2.- Robots paralelos Hexapod.- Estos robots pertenecen a una nueva familia de dispositivos paralelos y todos están basados en el diseño introducido por D. Stewart, llamado plataforma Stewart. Son estructuras de cadena cinemática cerrada compuestas de 6 piernas, una base y una plataforma de trabajo. La configuración mas común

comprende 6 piernas las cuales son actuadores lineales que pueden ser cilindros hidráulicos, o en el caso de mecanismos positivos resortes cargados. La plataforma de trabajo es móvil y es capaz de moverse en 3 direcciones lineales y 3 direcciones angulares.

Estos robots son plataformas Stewart modificadas para mejorar la precisión del actuador en los procesos de ensamble, maquinado, etc.. Algunos tipos de hexapod se describen a continuación:

- **Hexapod tipo A, posicionador de 6 ejes.-** (ver figura I.20a,b) consiste en 6 cilindros hidráulicos que pueden expandirse y contraerse entre la base inferior y la plataforma superior. Ambos extremos de los cilindros hidráulicos conectan a la plataforma y a la base por medio de juntas universales. Originalmente fue usado en los sistemas de posicionamiento de los simuladores de vuelo, pero ya esta comercialmente disponible para varias aplicaciones que requieran seguridad y exactitud.

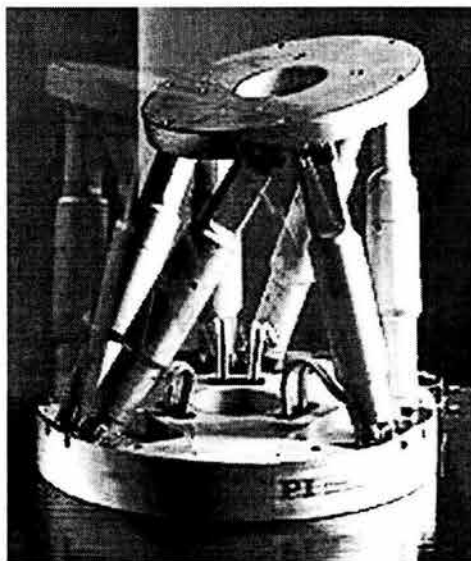


Figura I.20a Hexapod tipo A .

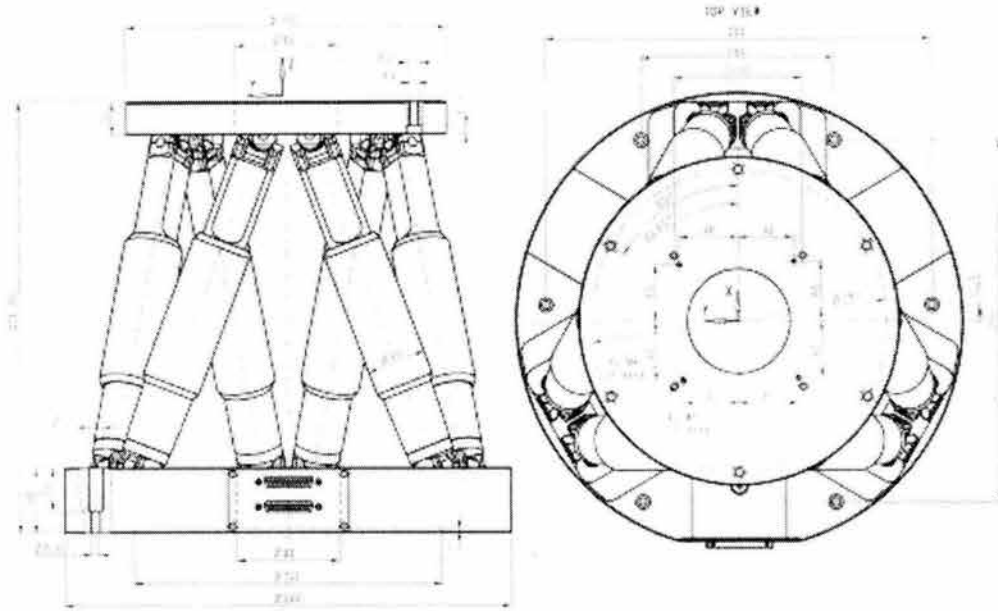


Figura I.20b Dimensiones de un Hexapod tipo A .

- **Hexapod tipo B.-** son las “plataforma Gough-Stewart” básicas descritas en el inciso 1.
- **Hexapod tipo C.-** son nuevos diseños propuestos para eliminar el problema de 6 movimientos locales que existen en el diseño de la plataforma Stewart básica. Estos diseños continúan la misma idea de una estructura de 6 piernas, solo que algunos tienen juntas universales en los extremos de los cilindros para unirse a la base y a la plataforma móvil (ver figura I.21), y otros tienen juntas de bola y “socket” (ver figura I.22). Los cilindros solo permiten una traslación, pues su sección no es circular [15].

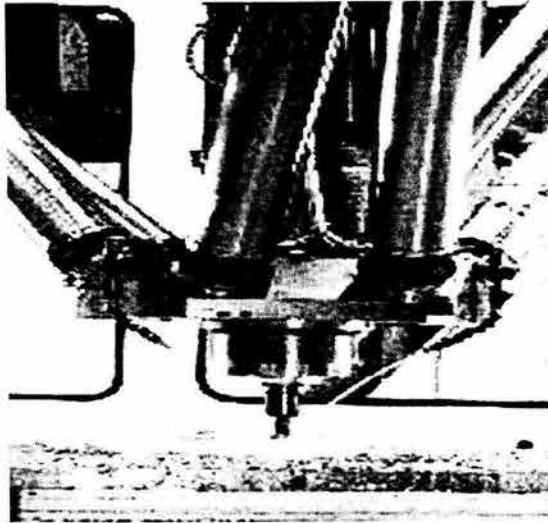


Figura I.21a Robot Hexapod de juntas universales en un centro de maquinado.

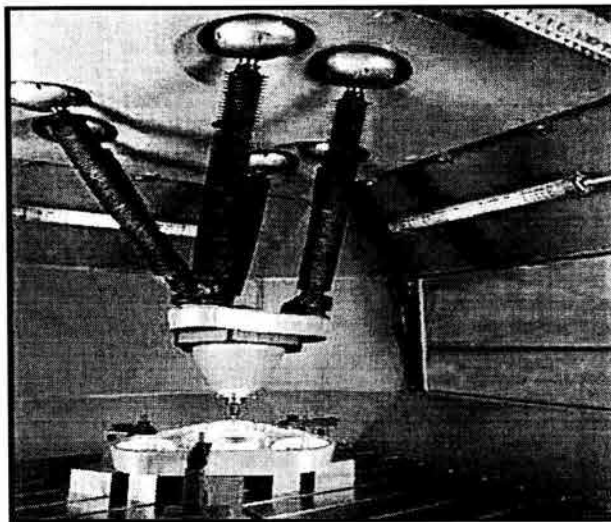


Figura I.21a Robot Hexapod de juntas de bola en un centro de maquinado.

3.- Robot paralelo Eclipse.- (ver figuras I.22a y I.22b), es un prototipo de 6 grados de libertad (GDL) que consiste en tres columnas verticales, cada una se desliza independientemente en una guía circular. El movimiento de cada columna a lo largo de la cama circular, es logrado por un servomotor, un piñón y un engrane de transmisión. Cada columna tiene un carro que se mueve verticalmente a lo largo de la trayectoria lineal de la columna. El movimiento del carro es logrado por un servomotor y una

transmisión de tronillo. Una longitud fijada es atacada por cada uno de los carros a través de una junta pasador. La otra barra longitudinal está adherida al eje de la herramienta por medio de una junta de bola. Un eslabón se une al carro por medio de una junta pasador. El otro extremo del eslabón se fija a la placa que contiene el husillo de la herramienta por medio de una junta de cuenca y bala. El robot Eclipse logra sus 6 G.D.L., usando los movimientos independientes de 3 juntas prismáticas circulares y 3 juntas prismáticas lineales. El usillo puede inclinarse de 0 a 90° y rotar 360° alrededor de la pieza de trabajo. Puede lograr una velocidad máxima de trabajo de 1.2 m/min y una máxima aceleración de 0.1 G. Es una arquitectura viable para maquinado rápido.¹² La versión comercial del eclipse (figura I.20b), es una estación de maquinado universal, maximiza la producción y la hace flexible gracias a las operaciones de maquinado multipasos.

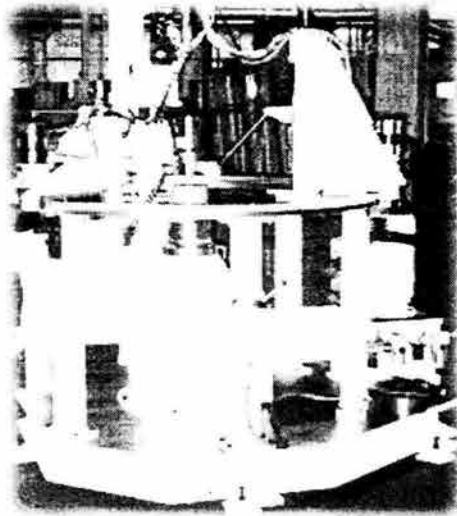


Figura I.22a Prototipo robot paralelo Eclipse-RP.



Figura I.22b Versión comercial.

4.- Robot paralelo tipo Delta.- Es un robot (ver figuras I.23, I.24 e I.25) creado por el Dr. Reymond Clavel, profesor del EPFL (Ecole Polytechnique Federale de Lausanne),

construido usando el principio del paralelogramo, tiene 3 GDL de traslaciones y uno rotacional. Tiene un eslabón de salida en orientación fija con respecto a un eslabón de entrada en cada cadena. El uso de los 3 paralelogramos restringe completamente la orientación de la plataforma móvil que permanece solo con 3 GDL puramente traslacionales. Los eslabones de entrada de los 3 paralelogramos son montados en palancas rotatorias por medio de juntas revolutas, estas juntas son impulsadas en dos diferentes formas; con motores servo ac o dc, o con actuadores lineales. Una cuarta pierna es usada para transmitir un movimiento rotatorio desde la base a un efector final montado en la plataforma móvil[11].

El uso de los actuadores montados en la base y eslabones de baja masa, permiten a la plataforma móvil lograr aceleraciones arriba de 50 G en ambientes experimentales de 12 G en aplicaciones industriales. Esto hace al robot Delta un perfecto candidato para operaciones de levantar y depositar objetos ligeros de 10 gr. A 1 Kg, idealmente. El espacio de trabajo es la intersección de 3 círculos exactos y está disponible para operar en un cilindro de 1 m. de diámetro y 0.2 m. de alto.

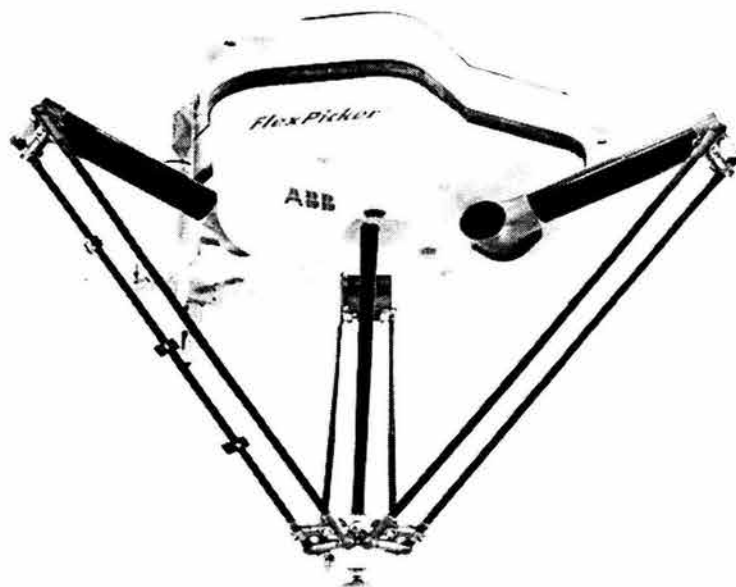


Figura I.23 Robot Delta IRB 340 FlexPicKer de la Cia. ABB.

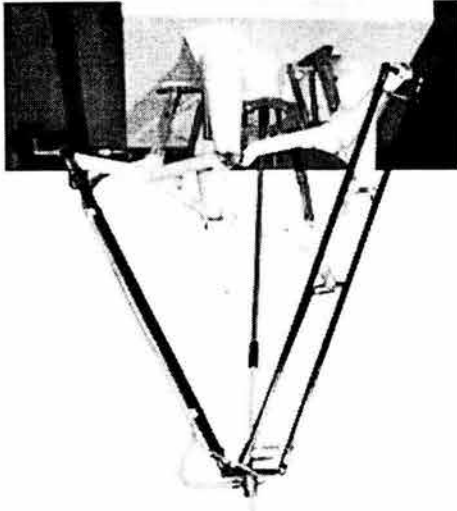


Figura I.24 Robot Delta C33,



Figura I25 Robot Delta CE33.

Ambos de la compañía SIG Pack Systems.

5.- El ojo de Águila.- es un manipulador paralelo esférico de 3 GDL, RRR desarrollado para la máxima orientación de una cámara (ver figura I.26), su arquitectura mecánica permite operar a alta velocidad la figura I.26, muestra la versión original y esta versión fue modificada para mejorar su comportamiento y operar con mayor seguridad. Se construyó en 1993.

Una versión simplificada del ojo de águila de 2 GDL (ver figura I.27) ha sido desarrollada y patentada recientemente, sus ventajas son su bajo costo, cinemática inversa trivial, cinemática directa simplificada, amplio espacio de trabajo y análisis de singularidad trivial. Otra interesante característica es que la orientación de la cámara (la plataforma móvil) está completamente especificada por un "azimut" y un ángulo de altitud, no hay torsión [19].

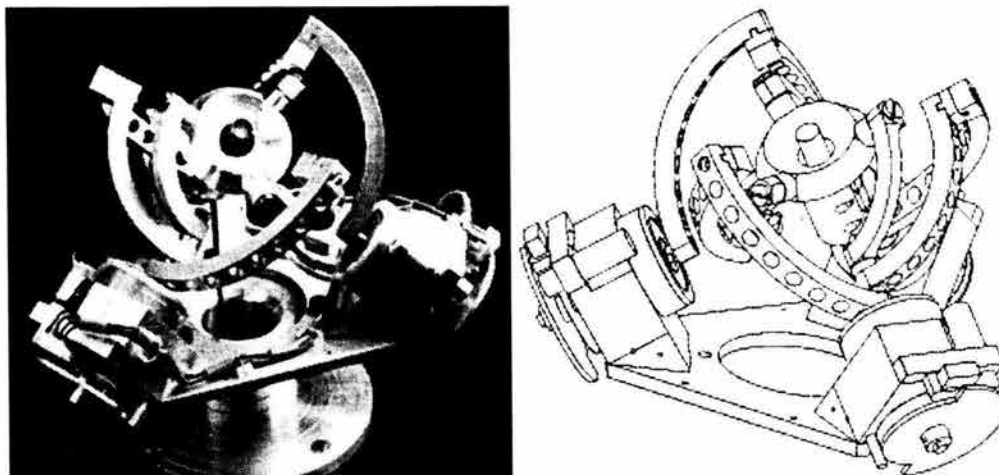


Figura 1.26 El ojo de águila (un mecanismo paralelo esférico).

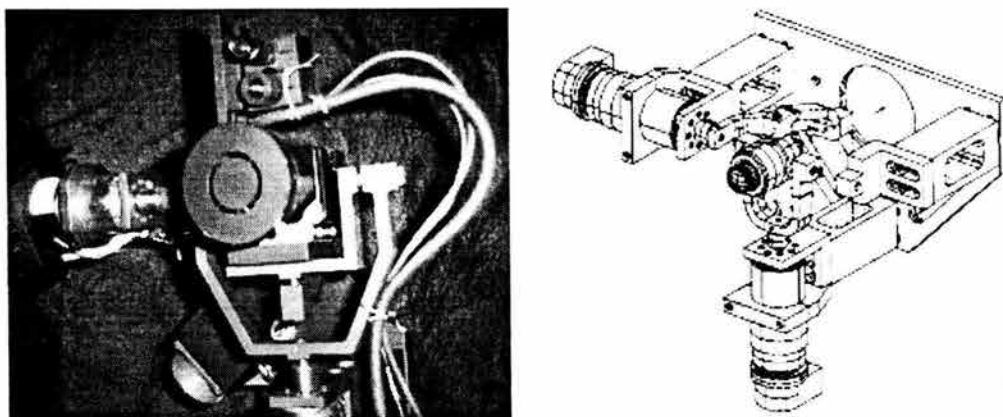


Figura 1.27 Versión modificada de 2 GDL del ojo de águila.

6.- Robot Manta.- es un nuevo robot paralelo de 4 GDL muy rápido diseñado para el manejo de materiales (ver figura 1.28). Los grados de libertad consisten en traslaciones a lo largo de 3 ejes lineales independientes y una rotación en uno de esos ejes. El mecanismo está constituido por 3 cadenas cinemáticas principales montadas en carros, cada cadena está formada por dos componentes (el actuador y un brazo largo fijo). El brazo central transmite un torque rotacional a una junta universal de 2GDL. Tiene 4 motores, 3 localizados en el centro del carro y uno localizado en la barra de rotación. Las principales ventajas de este son su alta rigidez por la estructura de múltiples

cadena cinemáticas que permite un diseño de baja masa. Lo caracteriza su construcción mecánica simple. Así, le es posible lograr altas velocidades y son factibles altas aceleraciones. Sus aplicaciones son: manipulación en almacenajes, cambio de herramienta en las maquinas, y trabajos de carga y descarga [20]. Existe una versión de robot manta con dos cadenas cinemáticas de 2 componentes y una cadena cinemática de un solo componente (ver figura I.29). En la figura I.30 se observa el primer prototipo del robot Manta.

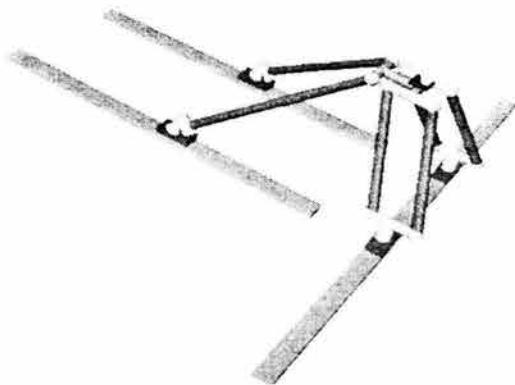


Figura I.28 Robot Manta de 3 cadenas dobles.

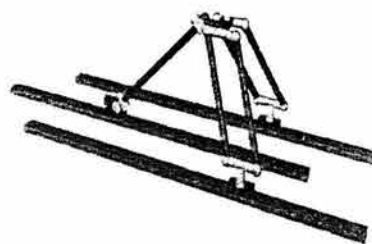


Figura I.29 Robot Manta de 2 cadenas dobles y una sencilla.

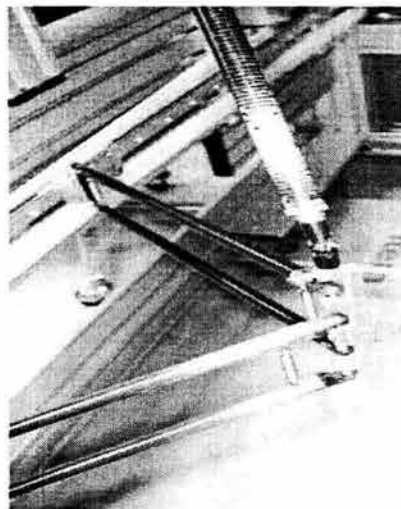
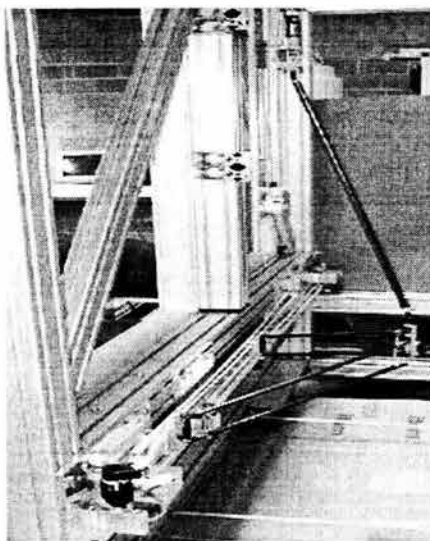


Figura I.30 Primer prototipo del robot Manta construido por EPFL.

7.- Robot paralelo Handlex.- es una plataforma Stewart diseñada en la Universidad de Ciencias Aplicadas FM Bochum, Alemania (ver figura I.31). Es un robot compuesto de 3

cadenas cinemáticas y cada cadena formada por dos cilindros remotos eléctricos. Cada cilindro cuenta con una junta rotacional unida a la plataforma móvil y una junta de bola unida a la plataforma fija. Es un prototipo experimental creado durante un proyecto de investigación interno en julio del 2000, con componentes de bajo costo los cuales son; 6 motores trifásicos con freno electromagnético montado uno en cada cilindro, 6 cilindros remotos eléctricos, cambiadores de frecuencia y una computadora. El principal objetivo fue resolver el problema de control de una estructura de 6 brazos [21].



Figura I.31 Robot paralelo Handlex.

8.- Otros robot paralelo.- gracias a las investigaciones en este campo se han desarrollado una gran diversidad de robots paralelos con fines comunes y fines específicos, en las diferentes universidades y laboratorios de las grandes compañías del mundo. Dentro de estos robots se pueden mencionar los siguientes:

- **El robot paralelo Orthoglide.-** el cual es basado en la plataforma Stewart, formado de 3 cadenas cinemáticas dobles como se observa en la figura 1.32. Se puede adaptar para trabajos de taladrado o para operaciones de manejo de materiales [22].

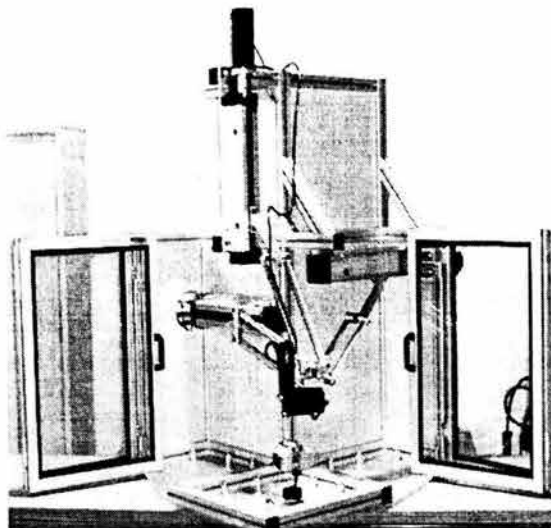


Figura I.32 Robot paralelo Orthoglide.

- **Robot paralelo ParaDex (Parallel Dexterous).**- es una nueva arquitectura de 6 GDL (ver figura I.33), que ofrece una habilidad sin precedentes en la interacción con su medio ambiente. Esta arquitectura es completamente adaptable y permite manejar grandes cargas. Los prototipos normales su capacidad fluctúa entre 5 y 75 lb. Originalmente fue desarrollado para operaciones quirúrgicas y esto fue mediante un esfuerzo conjunto entre CRADA (Cooperative Research and Development Agreement), MDS (Micro Dexterity Systems) y Sandias Intelligent Systems and Robotics Center [23].



Figura I.33 Robot paralelo ParaDex.

- **Robot paralelo Servo-Pneumatic Multi-Axes test facility.**- este mecanismo es un prototipo de un robot paralelo manejado por 6 actuadores servo neumáticos y usado como un facilitador de pruebas multiejes, desarrollado y construido en el Laboratorio de Ingeniería de Control y Sistemas Dinámicos de la Universidad de Kassel, Alemania, para pruebas dinámicas de componentes críticos de mecanismos y sistemas mecatrónicos bajo movimientos transitorios espaciales deseados (ver figura I.34) [24].

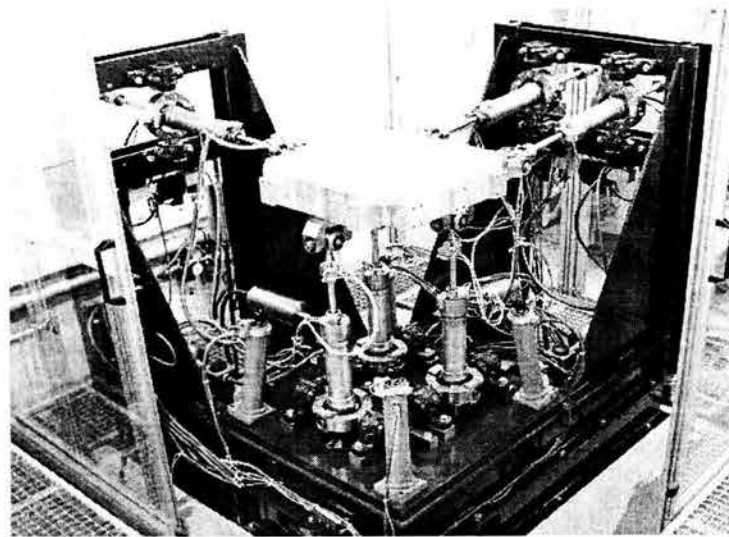


Figura I.34 Robot paralelo Servo-Pneumatic Multi-Axes, desarrollado, construido, simulado y controlado en Laboratory of Control Engineering and Systems Dynamics, University of Kassel.

Robots paralelos planar de 3 GDL.- estos robots (ver figura I.35), están constituidos por 3 cadenas cinemáticas y cada cadena está compuesta de 2 eslabones y 3 juntas. Las cadenas se unen a tierra por una junta, una segunda junta es para efectuar la unión entre los eslabones y una tercera junta es utilizada para unir a las cadenas a un eslabón común llamado plataforma móvil que es donde se coloca el efector final. La arquitectura de estos robots planares está en función de las juntas utilizadas para su construcción. R significa una junta rotacional, P es una junta prismática [6].

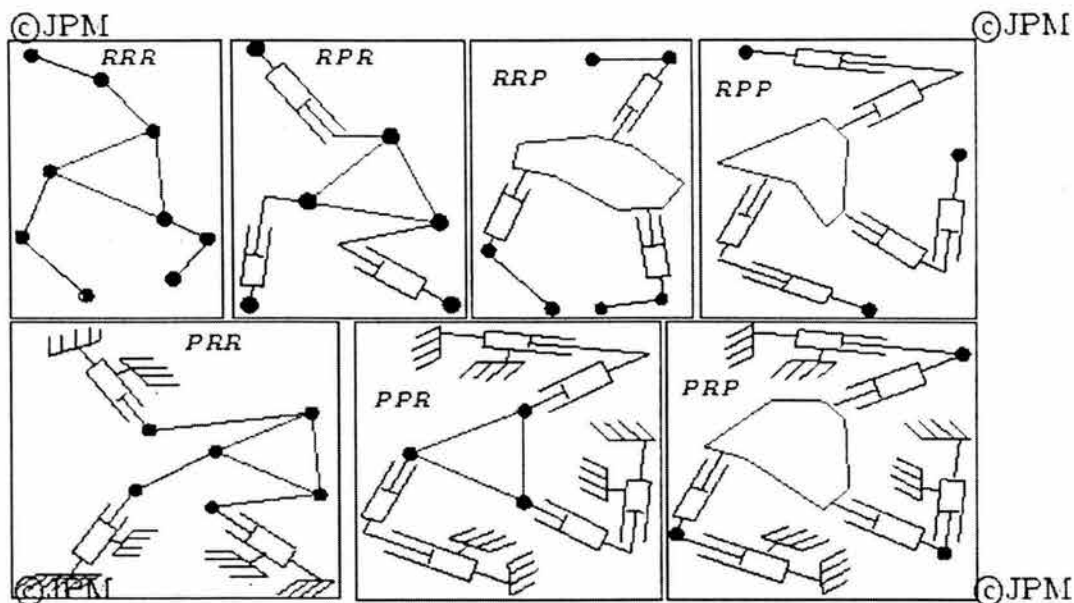


Figura 1.35 Diferentes arquitecturas de robots paralelos planares de 3 GDL.

Como un ejemplo de esta clase de robot, se tiene el **robot paralelo planar tipo RRR de 3 GDL**, (ver figuras 1.36,37), construido para probar los modelos matemáticos de desplazamiento, desarrollado en esta tesis cuya arquitectura está compuesta de 3 cadenas cinemáticas de 2 eslabones y 3 juntas rotacionales cada una, por medio de estas juntas se unen a la base y a una plataforma móvil de forma triangular donde se coloca el efector final.

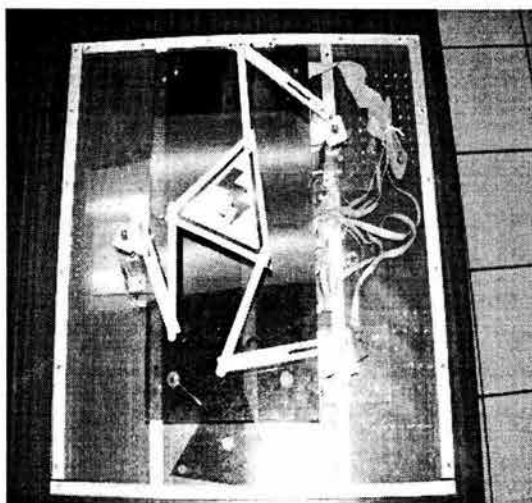


Figura 1.36 Vista Superior Robot RRR.

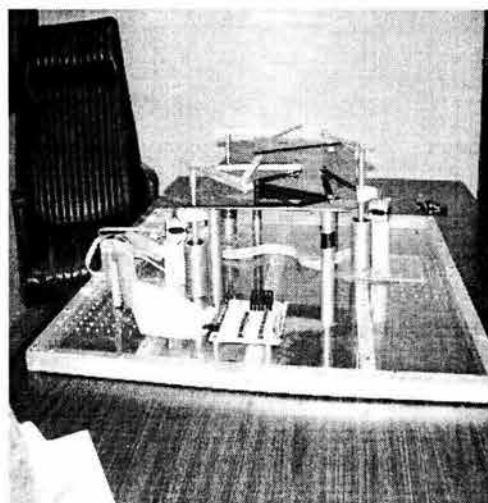


Figura 1.37 Vista lateral Robot RRR.

I.9 Aplicaciones de los robots paralelos

Los robots paralelos son aplicados en múltiples tareas dentro de la industria, en las operaciones de carga y descarga de materiales, envasado, procesos de soldadura, manipulación de materiales, procesos de maquinado como el taladrado, torneado; en medicina se utiliza en las salas de operaciones quirúrgicas; en fotografía; en la industria automotriz en las operaciones de pruebas de llantas, simuladores de viajes, pintura por aspersión; en la aeronáutica como simuladores de vuelo; entre otras aplicaciones. En las figuras I.38, I.39, I.40, I.41, I.42, I.43, I.44, I.45, I.46, se pueden observar algunas de las aplicaciones de los paralelos:

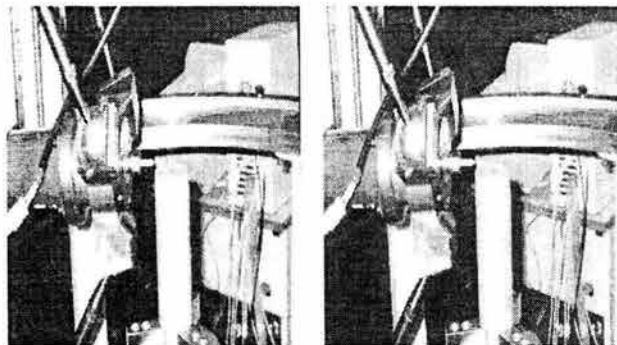


Figura I.38 Robot Eclipse utilizado en operación de torneado y taladrado.

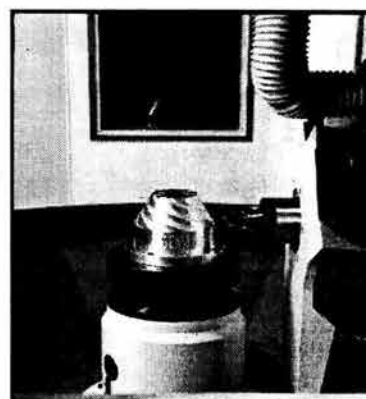


Figura I.39 Proceso de maquinado de alta velocidad de un robot eclipse.

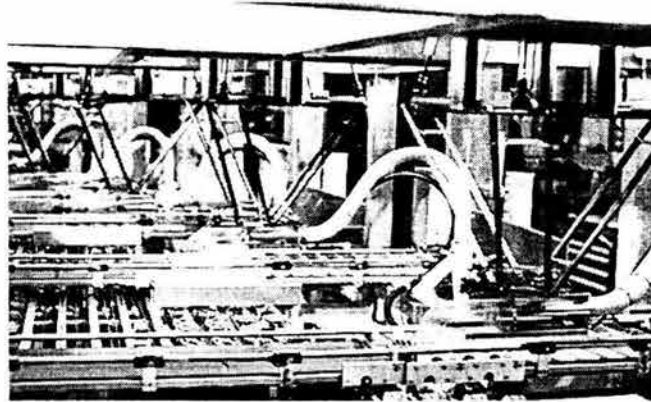


Figura I.40 Robot Delta utilizado en el llenado de moldes en una fabrica de galletas.

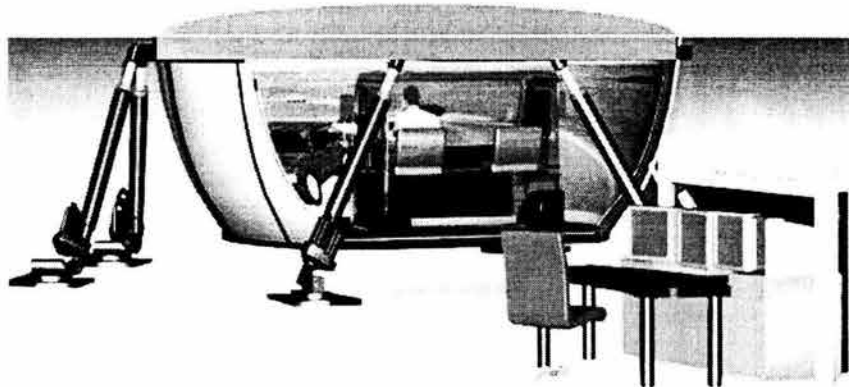


Figura I.41 Hexapod simulador de manejo.



Figura I.42 Robots Hitachi Seiki's Delta para operaciones de pick-and-place (levantar y colocar) y taladrado.

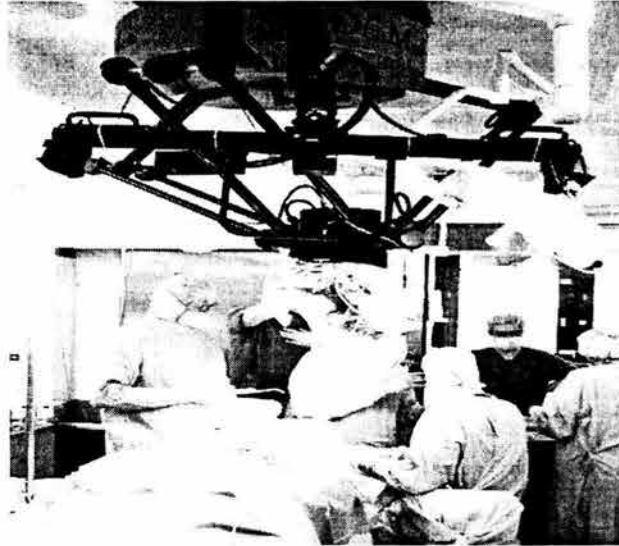


Figura I.43 Robot Delta Utilizado en el Laboratorio de operaciones quirúrgicas Universidad Humbolt de Berlin, Alemania.

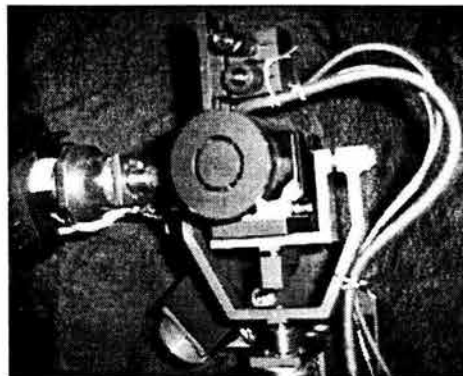


Figura I.44 Robot paralelo utilizado para orientación de cámaras.



Figura I.45 Plataforma Stewart simulador de vuelo.

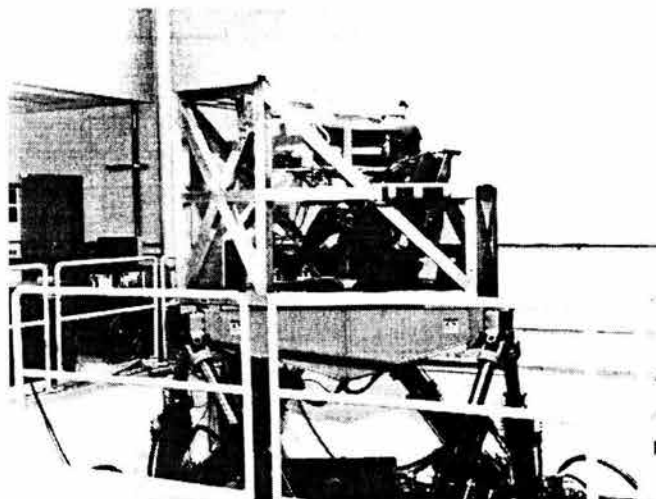


Figura I.46 Simulador de movimiento.

I.10 El problema cinemático directo e inverso

Un manipulador o un robot se puede modelar como una o más cadenas cinemáticas articuladas formada o formadas por eslabones y juntas y accionadas por actuadores. Un extremo de la cadena se une a una base soporte mientras que el otro extremo está libre acoplándose a este la muñeca que contiene al efector final como sería el caso de los robots de cadena abierta o, en el caso de los robots paralelos en lugar de estar libre este extremo se acopla por medio de una junta a una plataforma móvil y a esta plataforma se acopla el efector final. En las aplicaciones de los robots el interés general es la descripción espacial del efector final del manipulador respecto a un sistema de coordenadas de referencia fijo [26].

La cinemática del o los brazos del robot trata con el estudio de la geometría del movimiento sin considerar las fuerzas o momentos de fuerza que originan dicho movimiento, es decir, trata con la descripción analítica del desplazamiento espacial del robot como función del tiempo y de forma particular, trata de las relaciones entre las variables espaciales de tipo articulación y la posición y orientación del efector final del robot. Dos problemas de interés teórico y práctico se plantean en la cinemática del robot, estos son [1,26,27]:

1) **El problema cinemático directo.**- Dados el vector, los ángulos de las articulaciones y los parámetros geométricos de los elementos, encontrar la posición y orientación del efector final con respecto a un sistema de coordenadas de referencia fijo.

2) **El problema cinemático inverso.**- Dada una posición y orientación deseada del efector final del manipulador respecto a un sistema de coordenadas fijo, encontrar los ángulos de las articulaciones y los parámetros geométricos de cada elemento. En este caso, el manipulador para alcanzar la posición y orientación del efector final que se desea, con diferentes configuraciones del manipulador.

Se tiene por ejemplo en el caso de los robots cilíndrico, esférico o polar (ver figuras I.47 a,b), los problemas directo e inverso se puede plantear de la manera siguiente:

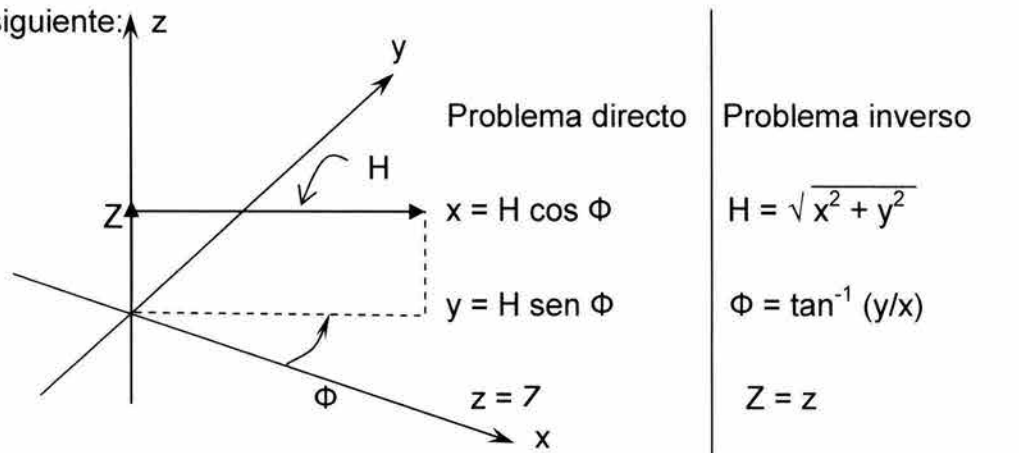


Figura I.47a Configuración cilíndrica

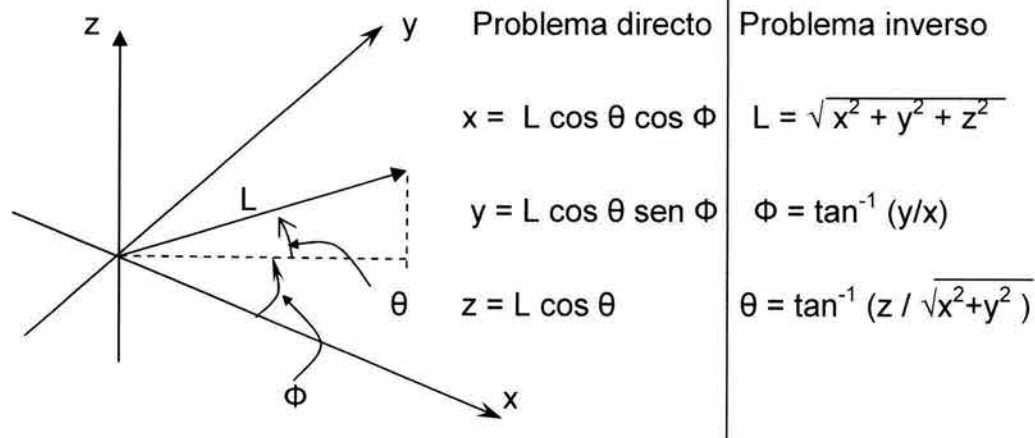


Figura I.47b Configuración esférica o polar

I.11 El problema modelado en la tesis

El problema por analizar en este trabajo tesis se describe a continuación:

“Se requiere modelar el comportamiento mecánico (cinemático) de un robot paralelo planar tipo RRR de tres grados de libertad, usando el álgebra de números complejos”.

Las restricciones del problema son:

- 1) Análisis cinemático sin incluir trayectoria.
- 2) Eslabones rígidos.
- 3) Juntas de conexión: rotacionales.
- 4) Plataforma triangular equilátero.
- 5) Programar el modelo cinemático de posición.

El robot por analizar en esta tesis se muestra en la figura I.48:

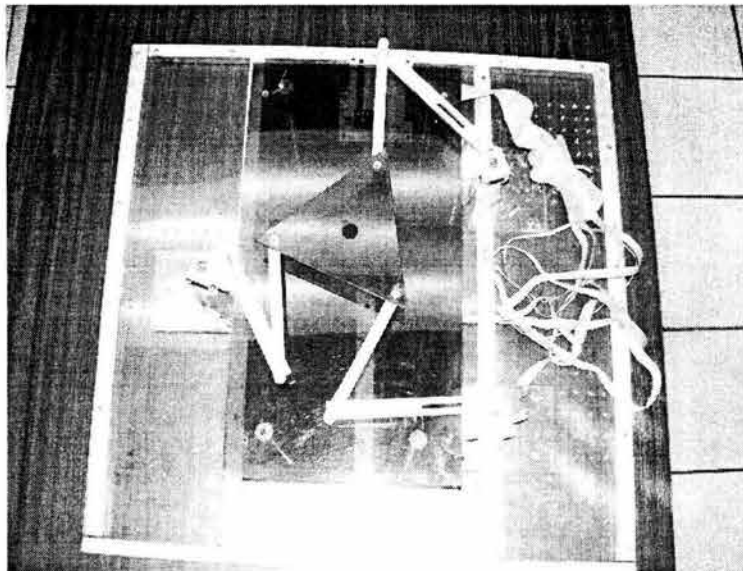


Figura I.48 Robot paralelo planar de 3GDL tipo RRR.

Este trabajo se divide en cuatro capítulos y dos apéndices los cuales se resumen a continuación:

En el primer capítulo se modela la cinemática de posicionamiento del robot paralelo planar de 3 GDL tipo RRR, se presenta la arquitectura del robot motivo de estudio. Se construyen las ecuaciones de posición usando el álgebra de los números complejos (ver apéndice A). Dos tipos de configuraciones son modeladas: 1) la no deformada o también llamada "configuración de referencia" y 2) la configuración "deformada". Para ambas posiciones del robot se formulan dos problemas: 1) el directo y 2) el inverso. Finalmente, los resultados obtenidos serán aplicados en capítulo 2 de esta tesis para construir los modelos cinemáticos de velocidad.

En el capítulo 2 son construidas las ecuaciones de velocidad derivadas de las ecuaciones de posición descritas en el capítulo 1, relacionadas con el punto $pot \in PL$ y su variación angular dada por el complejo $V \in \mathbb{R}^2$. Para ello, se consideran funciones del tipo $\underline{r} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ donde $J \in [0, +\infty)$ es un intervalo de tiempo. Son formulados los problemas cinemáticos directo e inverso relacionados con la configuración deformada del robot paralelo.

En el capítulo 3 son construidas las ecuaciones de aceleración asociadas con el robot motivo de estudio. Algunas ecuaciones de velocidad descritas en el capítulo anterior serán utilizadas para generar las ecuaciones de aceleración del punto $Pot \in PL$ y la aceleración angular de la plataforma PL. Son planteados los problemas directo e inverso de aceleración relacionados con la configuración deformada del robot paralelo.

En el capítulo 4 se programan las ecuaciones resultantes en el lenguaje de programación VISUAL BASIC.

Finalmente al término de este trabajo, se establecen las conclusiones y se muestran 2 apéndices, el primero corresponde con el marco teórico utilizado en la presente tesis y el segundo contiene información relativa con un prototipo construido para probar los modelos obtenidos.

CAPÍTULO 1

MODELOS CINEMÁTICOS DE POSICIONAMIENTO

Capítulo 1

Modelos cinemáticos de posicionamiento

Introducción. En este capítulo se presenta la arquitectura del robot paralelo motivo de estudio. Son construidas las ecuaciones de posición usando el álgebra de los números complejos (ver apéndice A). Dos tipos de configuraciones son modeladas: 1) la no deformada o también llamada "configuración de referencia" y 2) la configuración "deformada". Para ambas posiciones del robot se formulan dos problemas: 1) el directo y 2) el inverso. Finalmente, los resultados obtenidos serán aplicados en capítulo 2 de este informe para construir los modelos cinemáticos de velocidad.

1.1 Arquitectura del robot paralelo.

El multicuerpo motivo de estudio en este informe consta de seis eslabones rígidos llamados E_1 , E_2 , E_3 , E_4 , E_5 y E_6 , así como de una plataforma triangular como se muestra en la figura 1.1. [30,32]

Los eslabones están conectados entre sí con la plataforma y la tierra (T) del sistema por medio de juntas rotacionales denominadas J_1 , J_2 , J_3 , J_4 , J_5 , J_6 , J_7 , J_8 y J_9 , según se muestra en la figura 1.1.

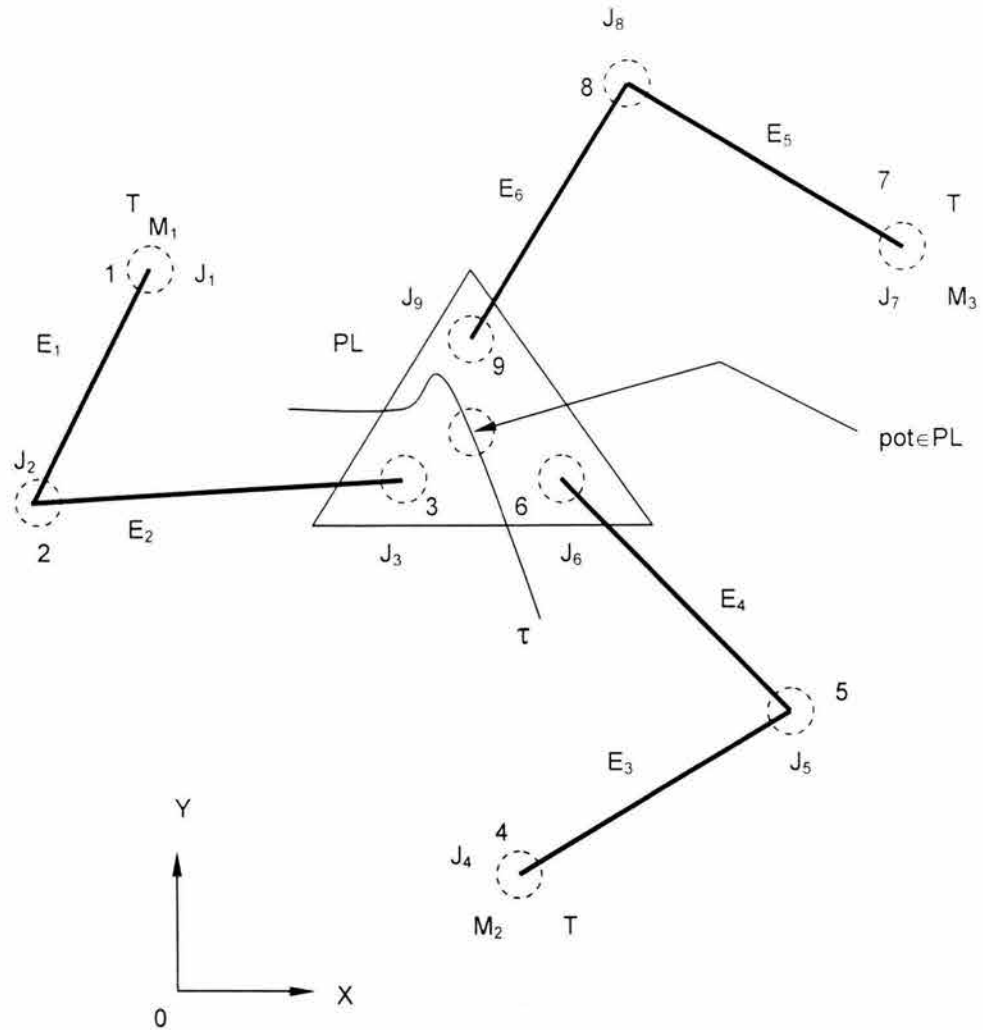


Figura 1.1 Arquitectura del robot paralelo

El punto $P_{ot} \in P_L$ mostrado en la figura anterior, denota el "punto terminal del robot", el cual está obligado a describir una trayectoria τ sobre el plano (x,y) . Por otro lado, sobre las juntas J_1 , J_4 y J_7 se localizan actuadores o motores M_1 , M_2 y M_3 , los cuales moverán al robot paralelo motivo de estudio [30,32].

1.2 Representación formal del robot.

Considere que el robot mostrado en la figura 1.1 está fijo en el tiempo, entonces la siguiente unión representa el multicuerpo motivo de estudio:

$$R_0 = T \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6 \cup P_L \quad (1.1)$$

Por otro lado, las juntas rotacionales que articulan los eslabones del robot pueden ser representadas por intersecciones, esto es:

$$\begin{aligned}
 1) \quad J_1 &= T \cap E_1 \quad ; \quad J_2 = E_1 \cap E_2 \quad ; \quad J_3 = E_2 \cap P_L & (1.2) \\
 2) \quad J_4 &= T \cap E_3 \quad ; \quad J_5 = E_3 \cap E_4 \quad ; \quad J_6 = E_4 \cap P_L \\
 3) \quad J_7 &= T \cap E_5 \quad ; \quad J_8 = E_5 \cap E_6 \quad ; \quad J_9 = E_6 \cap P_L
 \end{aligned}$$

Cabe señalar que los motores M_1 , M_2 y M_3 están empotrados con la tierra (T) del sistema y acoplados sobre las juntas J_1 , J_4 y J_7 con los eslabones E_1 , E_3 y E_6 como se muestra en la figura 1.1.

El robot R_0 está formado por cadenas cinemáticas independientes. Sean CC_1 , CC_2 y CC_3 los conjuntos siguientes:

$$\begin{aligned}
 1) \quad CC_1 &= \{T, E_1, E_2, P_L\} & (1.3) \\
 2) \quad CC_2 &= \{T, E_3, E_4, P_L\} \\
 3) \quad CC_3 &= \{T, E_5, E_6, P_L\}
 \end{aligned}$$

El robot R_0 se puede representar por medio de sus cadenas cinemáticas, esto es:

$$R_0 = CC_1 \cup CC_2 \cup CC_3 \quad (1.4)$$

Por otro lado, las relaciones comunes entre las cadenas que componen el robot motivo de estudio son:

$$\begin{aligned}
 1) \quad P_L &= CC_1 \cap CC_2 \cap CC_3 & (1.5) \\
 2) \quad T &= CC_1 \cap CC_2 \cap CC_3
 \end{aligned}$$

Es importante señalar que cada cadena tiene sus elementos de conexión y actuación; es decir:

$$\begin{aligned}
 a) \quad CC_1' &= \{T, E_1, E_2, P_L, J_1, J_2, J_3, M_1\} & (1.6) \\
 b) \quad CC_2' &= \{T, E_3, E_4, P_L, J_4, J_5, J_6, M_2\}
 \end{aligned}$$

$$c) \quad CC_3^I = \{T, E_5, E_6, P_L, J_7, J_8, J_9, M_3\}$$

Para finalizar esta sección se clasifican los eslabones de la manera siguiente:

- 1) Conductores : E_1, E_3 y E_5
- 2) Conducidos : E_2, E_4, E_6 y P_L .

Los eslabones conductores son movidos por los actuadores M_1, M_2 y M_3 , en tanto los conducidos, se mueven por inducción de los conductores [30,32].

1.3 Definición de vectores sobre la configuración de referencia.

En esta sección se definen algunos conceptos importantes relacionados con el análisis cinemático en la configuración de referencia asociada con el robot R_0 motivo de estudio. Posteriormente, se definirán vectores de posición sobre el sistema articulado, los cuales serán utilizados para determinar las coordenadas del punto $P_{ot} \in P_L$ y la orientación de la plataforma P_L medidas desde el origen de coordenadas (x,y) mostrado en la figura 1.1.

Para poder analizar los movimientos del robot, es necesario construir los modelos cinemáticos asociados de tal forma que sea posible determinar, la posición, velocidad y aceleración del punto $P_{ot} \in P_L$ sobre la trayectoria τ en cualquier instante de tiempo.

El modelo de posición es objeto de estudio en este capítulo. Dos configuraciones relacionadas con el robot deben ser analizadas: 1) la de referencia y 2) la deformada. En cada una de estas configuraciones se formularán dos tipos de problemas:

- 1) El directo y
- 2) el inverso.

Considerando ahora que se desea encontrar el modelo de posición, el cual permitirá determinar las coordenadas del punto $P_{ot} \in P_L$ y la orientación de la plataforma P_L medidas desde el sistema inercial fijo (x,y) mostrado en la figura 1.2. La configuración que adopta el multicuerpo en dicha figura, es conocida como "configuración de referencia" o "no deformada" [30,32].

Para encontrar o más bien dicho, para construir el modelo de posición asociado con la configuración no deformada, es necesario generar ecuaciones de posición y orientación. Para ello, se definen vectores de posición sobre los eslabones del robot y sobre la tierra del sistema (T) según se muestra en la figura 1.2.

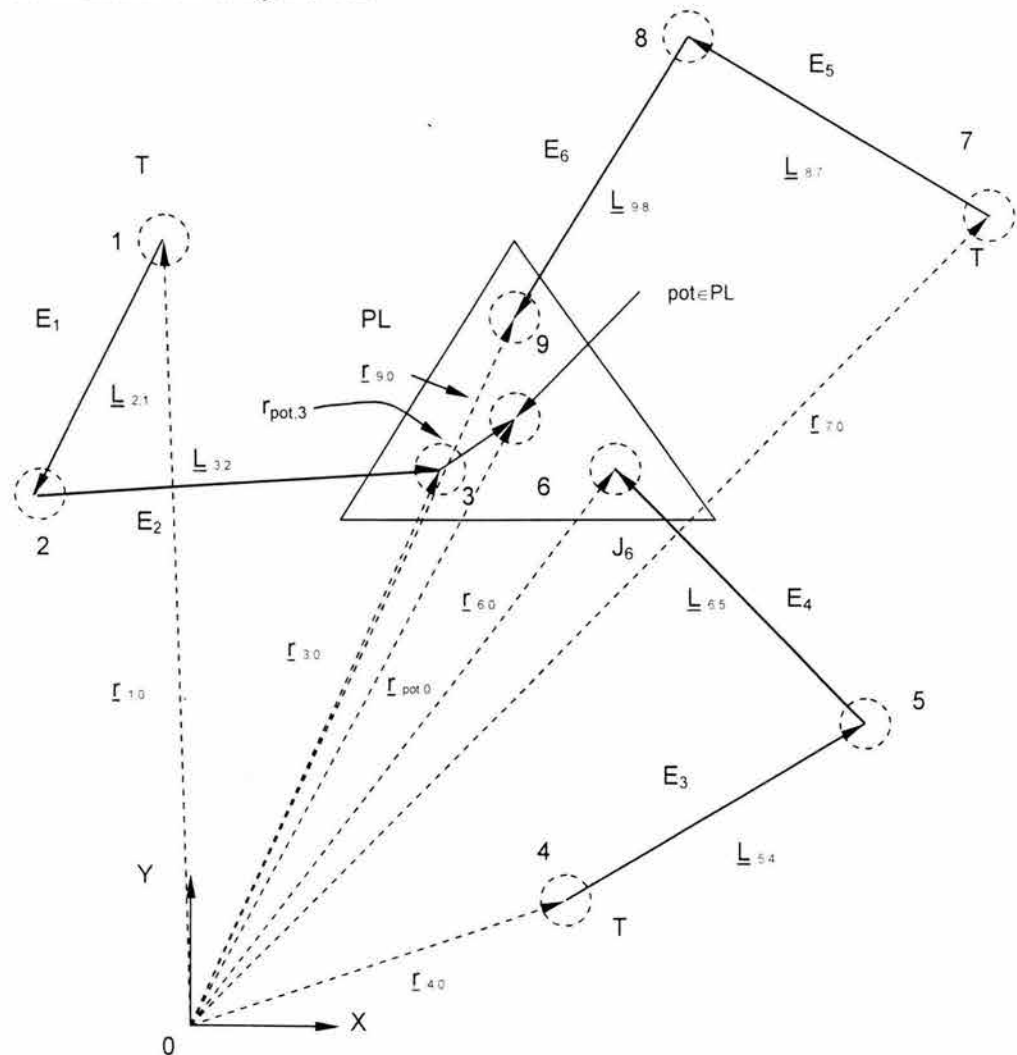


Figura 1.2 Vectores de posición en la configuración no deformada

Obsérvese en la figura anterior que, al fijar el robot en el tiempo, los vectores de posición asociados con los eslabones se pueden representar de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{L}_{2,1} &= (2) - (1) & ; & \quad \underline{L}_{3,2} = (3) - (2) & \quad (1.7) \\
 2) \quad \underline{L}_{5,4} &= (5) - (4) & ; & \quad \underline{L}_{6,5} = (6) - (5) \\
 3) \quad \underline{L}_{8,7} &= (8) - (7) & ; & \quad \underline{L}_{9,8} = (9) - (8) \\
 4) \quad \underline{L}_{\text{pot},3} &= (P_{OT}) - (3).
 \end{aligned}$$

Por otro lado, los vectores de posición que relacionan el origen de coordenadas y los puntos de interés definidos sobre la arquitectura del robot se definen de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{r}_{3,0} &= (3) - (0); & \quad \underline{r}_{6,0} &= (6) - (0); & \quad \underline{r}_{9,0} &= (9) - (0) & \quad (1.8) \\
 2) \quad \underline{r}_{1,0} &= (1) - (0); & \quad \underline{r}_{4,0} &= (4) - (0); & \quad \underline{r}_{7,0} &= (7) - (0) \\
 3) \quad \underline{r}_{\text{pot},0} &= (P_{OT}) - (0)
 \end{aligned}$$

Es importante señalar que la definición de los vectores realizada anteriormente no es única, pues como se verá mas adelante, será necesario definir otros vectores entre los puntos de interés para plantear el problema cinemático directo.

1.4 Ecuaciones de posición en la configuración “no deformada” y formulación del problema inverso.

En esta sección se construirán las ecuaciones que gobiernan el problema cinemático inverso asociado con el robot motivo de estudio. Dicho problema está relacionado con la configuración no deformada del multicuerpo mostrada en la figura 1.2. Para ello considere la siguiente proposición:

“Si el eslabón P_L (Plataforma) tiene asociada cualesquier forma triangular, entonces se satisfacen las relaciones siguientes:

- 1) $\underline{r}_{3,0} = (r_{3,0,x}, r_{3,0,y}) = (x_{pot,0} - l_{pot,3} \cos \theta_{pot}, y_{pot,0} - l_{pot,3} \sen \theta_{pot})$ (1.9)
- 2) $\underline{r}_{6,0} = (r_{3,0,x} + l_{3,6} \cos (\theta_{pot} - \beta_{pot}), r_{3,0,y} + l_{3,6} \sen (\theta_{pot} - \beta_{pot}))$
- 3) $\underline{r}_{9,0} = (r_{3,0,x} + l_{3,9} \cos (\theta_{pot} + \beta_{pot}), r_{3,0,y} + l_{3,9} \sen (\theta_{pot} + \beta_{pot}))$

Aquí $l_{3,6}$ y $l_{3,9} \in \mathbb{R}^+$ son las longitudes asociadas con las aristas del triángulo y $\beta_{pot} \in \mathbb{R}$ es un ángulo arbitrario que define la apertura de los vértices del triángulo.

La proposición anteriormente definida se puede interpretar de la manera siguiente:

- 1) Conocidas las coordenadas del punto $P_{OT} \in P_L$ (punto que caracteriza el centroide de un triángulo) y la orientación de la plataforma, se pueden encontrar las coordenadas de los puntos de cada vértice que forma el triángulo usando las expresiones (1.9). Por otro lado, el caso inverso también se satisface, esto es:
- 2) Conocidas las coordenadas de los puntos de los vértices del triángulo asociado con la plataforma P_L , es posible, mediante las ecuaciones (1.9), encontrar las coordenadas del punto $P_{OT} \in P_L$ (centroide) y la orientación de la plataforma.

En este trabajo se utilizará la segunda parte de la proposición antes mencionada.

El problema ahora consiste en determinar las coordenadas de los puntos (3), (6) y (9) asociados con los vértices del triángulo del eslabón P_L medidos desde el punto "0" localizado en el origen de las coordenadas (x,y). Dichas coordenadas se encuentran a través de las expresiones siguientes:

- 1) $\underline{r}_{3,0} = \underline{r}_{1,0} + \underline{L}_{2,1} + \underline{L}_{3,2}$ (1.10)
- 2) $\underline{r}_{6,0} = \underline{r}_{4,0} + \underline{L}_{5,4} + \underline{L}_{6,5}$
- 3) $\underline{r}_{9,0} = \underline{r}_{7,0} + \underline{L}_{8,7} + \underline{L}_{9,8}$

De acuerdo a la figura 1.2, las coordenadas del punto $P_{OT} \in P_L$ se pueden localizar desde "0" por cualquiera de las siguientes ecuaciones de posición:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{r}_{pot,0} &= \underline{r}_{1,0} + \underline{L}_{2,1} + \underline{L}_{3,2} + \underline{L}_{pot,3} & (1.11) \\
 2) \quad \underline{r}_{pot,0} &= \underline{r}_{4,0} + \underline{L}_{5,4} + \underline{L}_{6,5} + \underline{L}_{pot,6} \\
 3) \quad \underline{r}_{pot,0} &= \underline{r}_{7,0} + \underline{L}_{8,7} + \underline{L}_{9,8} + \underline{L}_{pot,9}
 \end{aligned}$$

Aquí, $\underline{L}_{pot,6} = (pot) - (6)$ y $\underline{L}_{pot,9} = (pot) - (9)$ son vectores de posición definidos de los puntos (6) y (9) asociados a los vértices, el punto $P_{OT} \in P_L$ localizado en el centroide de la plataforma P_L .

Por otro lado, es importante mencionar que las expresiones (1.10) no proporcionan información relativa a las posiciones angulares de los eslabones fijos en la configuración no deformada. Para ello, es necesario definir sistemas ortonormales móviles sobre los eslabones, los cuales pueden caracterizar el movimiento angular del multicuerpo en estudio. Dichos sistemas locales están relacionados con una base inercial fija localizada en el origen de coordenadas según se muestra en la figura 1.3.

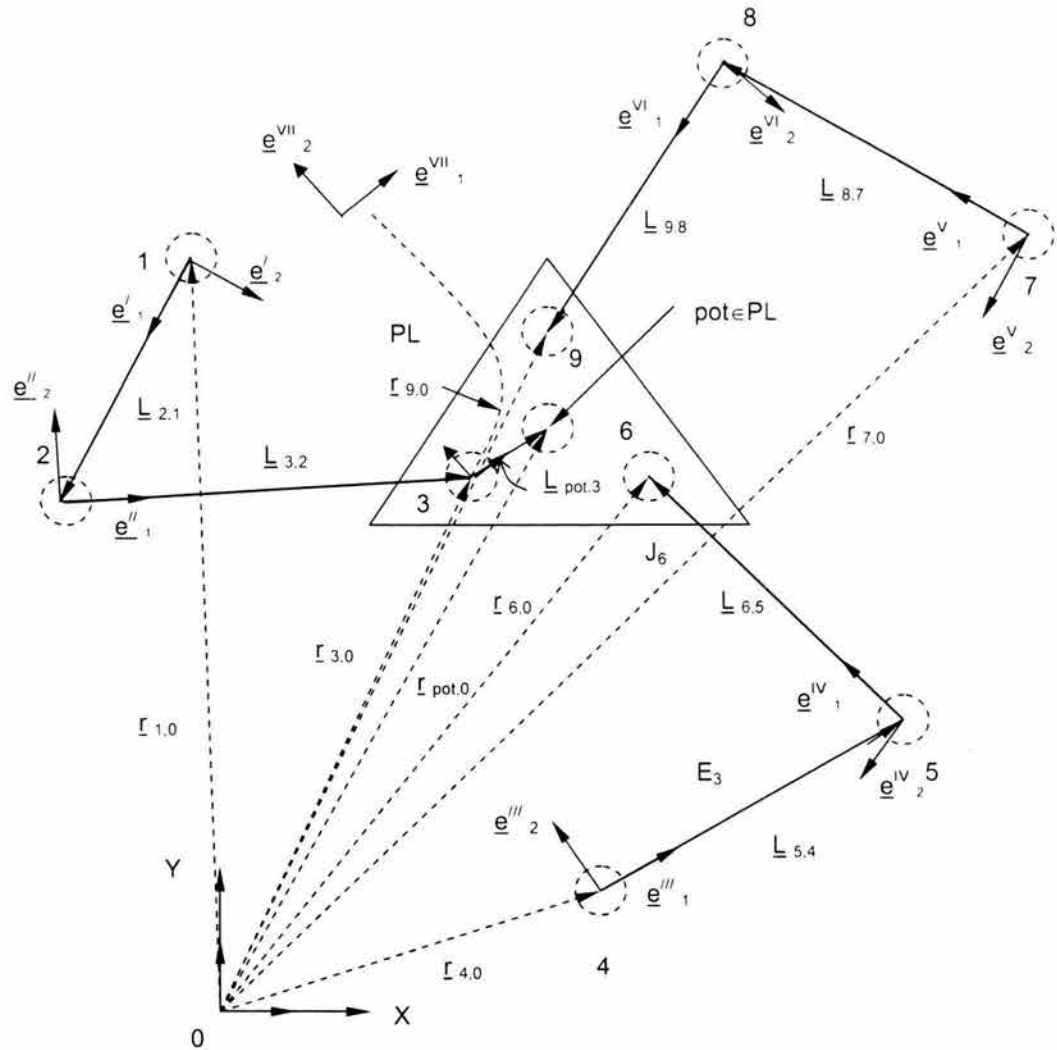


Figura 1.3 Sistemas locales sobre los eslabones

Las bases locales $\underline{e}_j^I = \{ \underline{e}_1^I, \underline{e}_2^I \}$, $\underline{e}_j^{II} = \{ \underline{e}_1^{II}, \underline{e}_2^{II} \}$, $\underline{e}_j^{III} = \{ \underline{e}_1^{III}, \underline{e}_2^{III} \}$, $\underline{e}_j^{IV} = \{ \underline{e}_1^{IV}, \underline{e}_2^{IV} \}$, $\underline{e}_j^V = \{ \underline{e}_1^V, \underline{e}_2^V \}$ y $\underline{e}_j^{VI} = \{ \underline{e}_1^{VI}, \underline{e}_2^{VI} \}$, están montadas y fijadas sobre los eslabones y las direcciones de los componentes \underline{e}_1^I , \underline{e}_1^{II} , \underline{e}_1^{III} , \underline{e}_1^{IV} , \underline{e}_1^V , $\underline{e}_1^{VI} \in \mathfrak{R}^2$ están definidos en las direcciones de los vectores $\underline{L}_{2,1}$, $\underline{L}_{3,2}$, $\underline{L}_{5,4}$, $\underline{L}_{6,5}$, $\underline{L}_{8,7}$, $\underline{L}_{9,8} \in \mathfrak{R}^2$ según se muestra en la figura 1.3. Por tanto, dichos vectores se pueden representar de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \underline{L}_{2,1} = l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^I \quad ; \quad \underline{L}_{3,2} = l_{3,2} \cdot \underline{e}_1^{II} \\
 2) \quad & \underline{L}_{5,4} = l_{5,4} \cdot \underline{e}_1^{III} \quad ; \quad \underline{L}_{6,5} = l_{6,5} \cdot \underline{e}_1^{IV} \\
 3) \quad & \underline{L}_{8,7} = l_{8,7} \cdot \underline{e}_1^V \quad ; \quad \underline{L}_{9,8} = l_{9,8} \cdot \underline{e}_1^{VI}
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Aquí, $l_{2,1}, l_{3,2}, l_{5,4}, l_{6,5}, l_{8,7}, l_{9,8} \in \mathfrak{R}^+$ son las dimensiones de los eslabones medidas de junta a junta. Por otro lado el vector $\underline{l}_{pot,3} \in \mathfrak{R}^2$ se representa en la siguiente forma:

$$\underline{l}_{pot,3} = l_{pot,3} \bullet \underline{e}_1^{VII} \quad (1.13)$$

Las expresiones (1.10) se pueden escribir en términos de las bases locales, esto es:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{r}_{3,0} &= \underline{r}_{1,0} + l_{2,1} \bullet \underline{e}_1^I + l_{3,2} \bullet \underline{e}_1^{II} & (1.14) \\ 2) \quad \underline{r}_{6,0} &= \underline{r}_{4,0} + l_{5,4} \bullet \underline{e}_1^{III} + l_{6,5} \bullet \underline{e}_1^V \\ 3) \quad \underline{r}_{9,0} &= \underline{r}_{7,0} + l_{8,7} \bullet \underline{e}_1^V + l_{9,8} \bullet \underline{e}_1^{VI} \end{aligned}$$

El vector $\underline{r}_{pot,0} \in \mathfrak{R}^2$, también se puede escribir en términos de las bases locales usando las expresiones (1.13) y (1.14.1) de la manera siguiente:

$$\underline{r}_{pot,0} = \underline{r}_{1,0} + l_{2,1} \bullet \underline{e}_1^I + l_{3,2} \bullet \underline{e}_1^{II} + l_{pot,3} \bullet \underline{e}_1^{VII} \quad (1.15)$$

1.4.1 Representación de las rotaciones en la base inercial fija.

Para poder definir las posiciones angulares que componen el robot motivo de estudio relativos al origen de coordenadas, es necesario caracterizar las rotaciones de la base inercial $\underline{e}_j = \{ \underline{e}_1, \underline{e}_2 \}$ sobre cada una de las bases locales montadas sobre los eslabones. Para ello, se utilizará la función [31]

$$\rho(p, q) = \frac{1}{p} \bullet p * q \quad ; \quad p \in \mathfrak{R}^2 \text{ fijo.} \quad (1.16)$$

la cual, según el apéndice A, resulta ser una rotación en el plano. Aquí, $p \in \mathfrak{R}^2$ es un número complejo de norma unitaria; es decir, si $p = \{p_0, p_1\}$, entonces,

$$1) \quad p = p_0^2 + p_1^2 = 1 \quad (1.17)$$

Observe que al utilizar la expresión (1.17) sobre la ecuación (1.16) la transformación lineal $\rho: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se puede escribir de la manera siguiente:

$$\rho(p, q) = p * q \quad (1.18)$$

Es importante señalar que la operación $*$: $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, es la operación usual multiplicativa definida en los números complejos y, sus propiedades, son demostradas en el apéndice A de este informe.

Las rotaciones de la base inercial $\underline{e}_j = \{ \underline{e}_1, \underline{e}_2 \}$ sobre las bases móviles se pueden representar por medio de la ecuación (1.18), esto es:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \underline{e}_1^I = \rho(p, \underline{e}_1) = p * \underline{e}_1 & (1.19) \\ 2) \quad & \underline{e}_1^{II} = \rho(q, \underline{e}_1) = q * \underline{e}_1 \\ 3) \quad & \underline{e}_1^{III} = \rho(r, \underline{e}_1) = r * \underline{e}_1 \\ 4) \quad & \underline{e}_1^V = \rho(s, \underline{e}_1) = s * \underline{e}_1 \\ 5) \quad & \underline{e}_1^V = \rho(t, \underline{e}_1) = t * \underline{e}_1 \\ 6) \quad & \underline{e}_1^{VI} = \rho(u, \underline{e}_1) = u * \underline{e}_1 \\ 7) \quad & \underline{e}_1^{VII} = \rho(v, \underline{e}_1) = v * \underline{e}_1 \end{aligned}$$

Aquí, $p, q, r, s, t, u, v \in \mathbb{R}^2$, son números complejos de norma unitaria, los cuales caracterizan la posición angular de los eslabones que componen el robot motivo de estudio.

Las expresiones (1.14) se pueden escribir en términos de la base inercial fija de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \underline{r}_{3,0} = \underline{r}_{1,0} + l_{2,1} \bullet \{p * \underline{e}_1\} + l_{3,2} \bullet \{q * \underline{e}_1\} & (1.20) \\ 2) \quad & \underline{r}_{6,0} = \underline{r}_{4,0} + l_{5,4} \bullet \{r * \underline{e}_1\} + l_{6,5} \bullet \{s * \underline{e}_1\} \\ 3) \quad & \underline{r}_{9,0} = \underline{r}_{7,0} + l_{8,7} \bullet \{t * \underline{e}_1\} + l_{9,8} \bullet \{u * \underline{e}_1\} \end{aligned}$$

También el vector $\underline{r}_{\text{pot},0} \in \mathbb{R}^2$ se puede representar en términos de la base inercial fija; esto es:

$$\underline{r}_{\text{pot},0} = \underline{r}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{p * \underline{e}_1\} + l_{3,2} \cdot \{q * \underline{e}_1\} + l_{\text{pot},3} \cdot \{v * \underline{e}_1\} \quad (1.21)$$

Por otro lado, las normas unitarias asociadas con los complejos $p, q, r, s, t, u, v \in \mathbb{R}^2$ son las siguientes [30,31,32,33]:

:

$$\begin{aligned} 1) \quad p &= \{p_0, p_1\} \quad ; \quad \|p\| = p_0^2 + p_1^2 = 1 & (1.22) \\ 2) \quad q &= \{q_0, q_1\} \quad ; \quad \|q\| = q_0^2 + q_1^2 = 1 \\ 3) \quad r &= \{r_0, r_1\} \quad ; \quad \|r\| = r_0^2 + r_1^2 = 1 \\ 4) \quad s &= \{s_0, s_1\} \quad ; \quad \|s\| = s_0^2 + s_1^2 = 1 \\ 5) \quad t &= \{t_0, t_1\} \quad ; \quad \|t\| = t_0^2 + t_1^2 = 1 \\ 6) \quad u &= \{u_0, u_1\} \quad ; \quad \|u\| = u_0^2 + u_1^2 = 1 \\ 7) \quad v &= \{v_0, v_1\} \quad ; \quad \|v\| = v_0^2 + v_1^2 = 1 \end{aligned}$$

Finalmente, las relaciones geométricas entre los componentes de las rotaciones y los números complejos se definen, según el apéndice A, de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} 1) \quad p_0 &= \cos \theta_1 \quad ; \quad p_1 = \pm \text{sen } \theta_1 & (1.23) \\ 2) \quad q_0 &= \cos \theta_2 \quad ; \quad q_1 = \pm \text{sen } \theta_2 \\ 3) \quad r_0 &= \cos \theta_3 \quad ; \quad r_1 = \pm \text{sen } \theta_3 \\ 4) \quad s_0 &= \cos \theta_4 \quad ; \quad s_1 = \pm \text{sen } \theta_4 \\ 5) \quad t_0 &= \cos \theta_5 \quad ; \quad t_1 = \pm \text{sen } \theta_5 \\ 6) \quad u_0 &= \cos \theta_6 \quad ; \quad u_1 = \pm \text{sen } \theta_6 \\ 7) \quad v_0 &= \cos \theta_7 \quad ; \quad v_1 = \pm \text{sen } \theta_7 \end{aligned}$$

Aquí, $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7 \in \mathbb{R}$, son los desplazamientos angulares que definen la posición de los eslabones que componen el robot en la configuración no deformada como se muestra en la figura 1.4. Los componentes $\underline{e}_3^I, \underline{e}_3^{II}, \underline{e}_3^{III}, \underline{e}_3^{IV}, \underline{e}_3^V, \underline{e}_3^{VI}, \underline{e}_3^{VII} \in \mathbb{R}^2$, representan los ejes de rotación de cada eslabón,

Note que $\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3$.

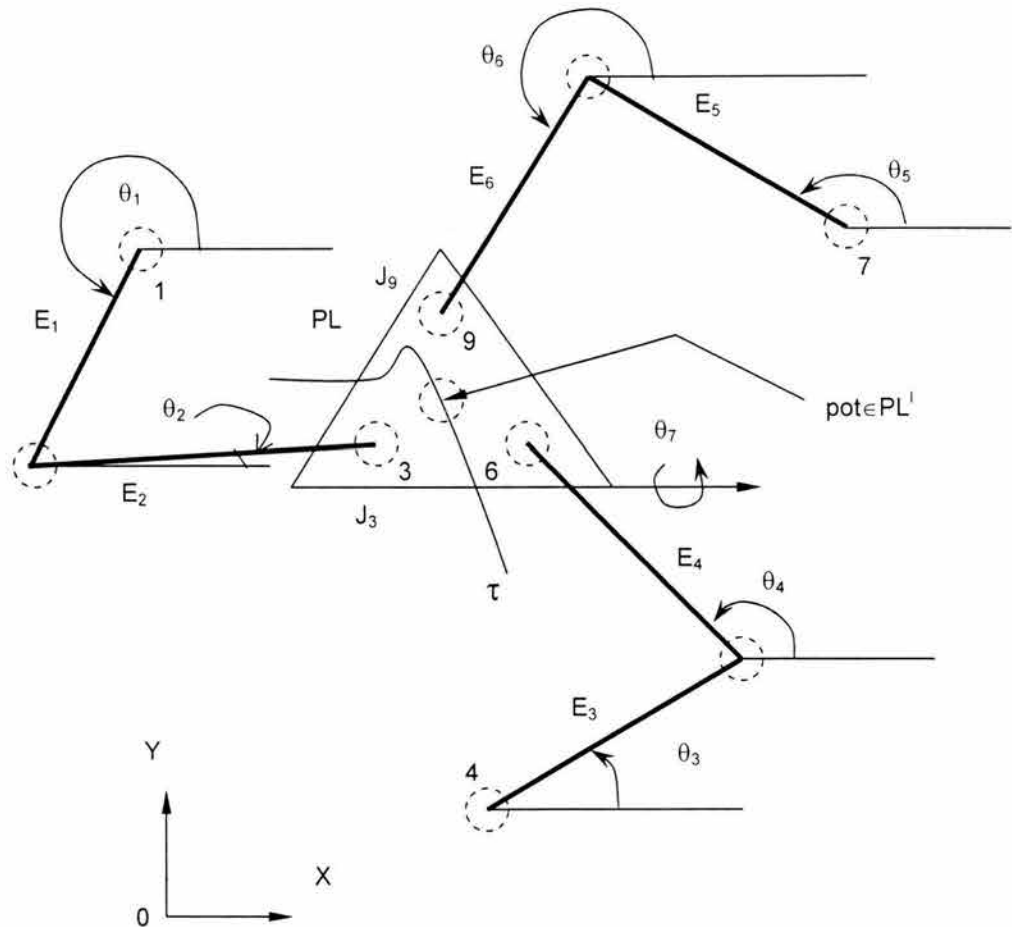


Figura 1.4 Desplazamientos angulares en la configuración no deformada.

1.4.2 Formulación del problema cinemático inverso en la configuración no deformada.

En esta sección es formulado un problema de fundamental importancia en la cinemática de multicuerpos rígidos; "el problema inverso". Dicho problema

está asociado con la configuración no deformada del robot motivo de estudio mostrado en la figura 1.2.

Formulación:

“Dados, $r_{3,0} \in \mathbb{R}^2$, $r_{6,0} \in \mathbb{R}^2$, $r_{9,0} \in \mathbb{R}^2$, $r_{1,0} \in \mathbb{R}^2$, $r_{4,0} \in \mathbb{R}^2$, $r_{7,0} \in \mathbb{R}^2$, $l_{2,1}$, $l_{3,2}$, $l_{5,4}$, $l_{6,5}$, $l_{8,7}$, $l_{9,8} \in \mathbb{R}^+$, encuentre: $p = \{p_0, p_1\}$, $q = \{q_0, q_1\}$, $r = \{r_0, r_1\}$, $s = \{s_0, s_1\}$, $t = \{t_0, t_1\}$, $u = \{u_0, u_1\}$; tal que las expresiones (1.20) sean satisfechas y,

$$\begin{array}{lll} 1) & p_0^2 + p_1^2 = 1 & ; \quad q_0^2 + q_1^2 = 1 \\ 2) & r_0^2 + r_1^2 = 1 & ; \quad s_0^2 + s_1^2 = 1 \\ 3) & t_0^2 + t_1^2 = 1 & ; \quad u_0^2 + u_1^2 = 1 \end{array}$$

El problema de la cinemática inversa relacionado con la configuración no deformada del robot paralelo motivo de estudio es solucionado resolviendo un sistema de 12 ecuaciones algebraicas no lineales y 12 incógnitas del tipo polinomial [30,31,32,33].

Para finalizar esta sección es importante hacer notar que el hecho de conocer las coordenadas de los puntos (3), (6) y (9) a través de los vectores de posición $r_{3,0}$, $r_{6,0}$, $r_{9,0} \in \mathbb{R}^2$ es porque se supone que las relaciones (1.9) han sido satisfechas. Note que dados $r_{3,0}$, $r_{6,0}$, $r_{9,0} \in \mathbb{R}^2$ se conocen $r_{pot,0} \in \mathbb{R}^2$, $\theta_7 \in \mathbb{R}$; este último desplazamiento angular está relacionado a la posición angular de la plataforma P_L .

1.5 Análisis del problema cinemático directo.

En esta sección se estudiarán las ecuaciones de posición que gobiernan el problema cinemático directo asociado con la configuración no deformada del multicuerpo en estudio. Dicho problema se puede plantear en términos generales de la manera siguiente:

“Conocidos los desplazamientos angulares de los eslabones conductores (E_1, E_3, E_5), encontrar las posiciones angulares de los eslabones conducidos (E_2, E_4, E_6, P_L) y las coordenadas del punto $P_{ot} \in P_L$ ”.

Para caracterizar las ecuaciones de posición que permitan formular el problema cinemático directo, es necesario definir nuevos vectores de posición, en este caso, sobre la plataforma P_L , para posteriormente, establecer el sistema de ecuaciones [30,31,32,33].

Considere que la nueva caracterización de vectores de posición sobre el sistema articulado motivo de estudio es la mostrada en la figura 1.5.

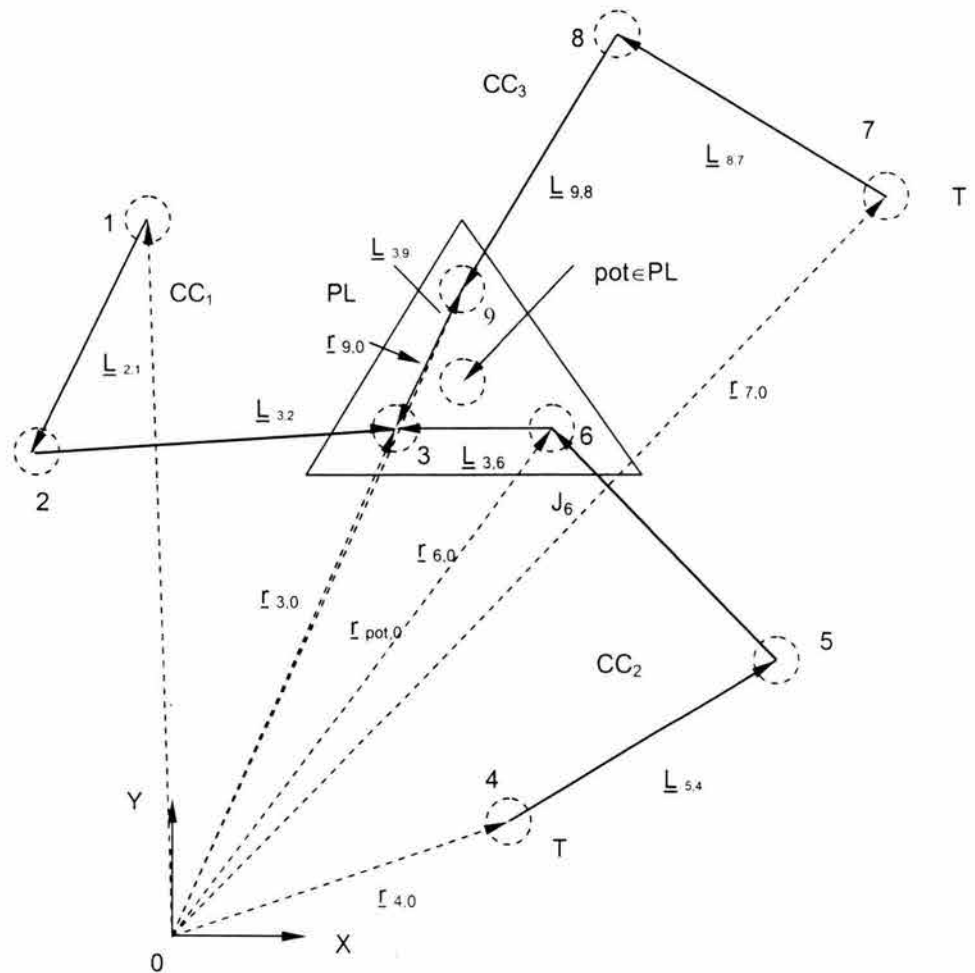


Figura 1.5 Definición de vectores para el problema cinemático directo

Note en la figura 1.5, que los vectores $\underline{L}_{3,6} \in \mathbb{R}^2$ y $\underline{L}_{3,9} \in \mathbb{R}^2$ están definidos sobre la plataforma P_L . Por otro lado, es posible realizar el análisis del problema directo en cualesquiera de los tres puntos asociados con los vértices del triángulo. En esta ocasión se ha elegido al punto (3) mostrado en la figura 1.5.

La posición del punto (3) medida desde el origen "o" se puede encontrar de las tres formas siguientes:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{r}_{3,0} &= \underline{r}_{1,0} + \underline{L}_{2,1} + \underline{L}_{3,2} & (1.24) \\
 2) \quad \underline{r}_{3,0} &= \underline{r}_{4,0} + \underline{L}_{5,4} + \underline{L}_{6,5} + \underline{L}_{3,6} \\
 3) \quad \underline{r}_{3,0} &= \underline{r}_{7,0} + \underline{L}_{8,7} + \underline{L}_{9,8} + \underline{L}_{3,9}
 \end{aligned}$$

Cada expresión de la ecuación (1.24) representa el modelo de una cadena cinemática que compone al robot en estudio. Es necesario encontrar una relación entre dichas cadenas para encontrar las ecuaciones que gobiernan al problema cinemático directo. Para ello considere la siguiente proposición:

"Sea CC_k una cadena del robot paralelo asociada con cualquier punto de análisis para el problema directo, entonces se pueden relacionar dicha cadena con las restantes mediante ecuaciones de lazo, una por cada par de cadenas."

De acuerdo con la figura 1.5, el punto (3) está asociado con la cadena CC_1 , por tanto, las relaciones entre dicha cadena y las restantes están dadas por las siguientes ecuaciones de lazo:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{r}_{1,0} + \underline{L}_{2,1} + \underline{L}_{3,2} &\equiv \underline{r}_{4,0} + \underline{L}_{5,4} + \underline{L}_{6,5} + \underline{L}_{3,6} & (1.25) \\
 2) \quad \underline{r}_{1,0} + \underline{L}_{2,1} + \underline{L}_{3,2} &\equiv \underline{r}_{7,0} + \underline{L}_{8,7} + \underline{L}_{9,8} + \underline{L}_{3,9}
 \end{aligned}$$

Note que las expresiones (1.25) relacionan a CC_1 con CC_2 y CC_1 con CC_3 . Por otro lado, las ecuaciones (1.25) se pueden escribir de la manera siguiente:

$$1) \quad \underline{r}_{1,0} + \underline{L}_{2,1} + \underline{L}_{3,2} - [\underline{r}_{4,0} + \underline{L}_{5,4} + \underline{L}_{6,5} + \underline{L}_{3,6}] = \underline{0} \quad (1.26)$$

$$2) \quad \underline{r}_{1,0} + \underline{L}_{2,1} + \underline{L}_{3,2} - [\underline{r}_{7,0} + \underline{L}_{8,7} + \underline{L}_{9,8} + \underline{L}_{3,9}] = \underline{0}$$

Para poder expresar las ecuaciones (1.26) en términos de las bases locales, es necesario definir nuevos sistemas de referencia; esto es:

$$1) \quad \underline{e}_j^{VIII} = \{\underline{e}_1^{VIII}, \underline{e}_2^{VIII}\} \quad (1.27)$$

$$2) \quad \underline{e}_j^{IX} = \{\underline{e}_1^{IX}, \underline{e}_2^{IX}\}$$

Dichos sistemas locales se muestran en la figura 1.6.

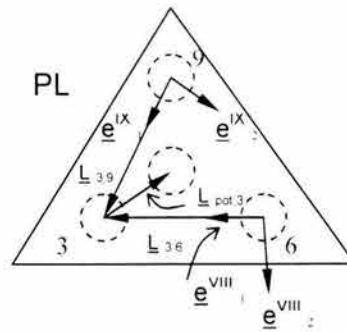


Figura 1.6 Definición de nuevos sistemas de referencia locales.

Por tanto, los vectores de posición $\underline{L}_{3,6} \in \mathfrak{R}^2$ y $\underline{L}_{3,9} \in \mathfrak{R}^2$ asociados con las aristas de la plataforma pueden ser descritos en términos de las bases locales, esto es:

$$1) \quad \underline{L}_{3,6} = l_{3,6} \cdot \underline{e}_1^{VIII} \quad (1.28)$$

$$2) \quad \underline{L}_{3,9} = l_{3,9} \cdot \underline{e}_1^{IX}$$

Aquí, $l_{3,6} \in \mathfrak{R}^+$ y $l_{3,9} \in \mathfrak{R}^+$ son las longitudes principales de las aristas.

Al utilizar las expresiones (1.12) y (1.28), las ecuaciones (1.26) se pueden escribir en términos de las bases locales de la manera siguiente:

$$1) \quad \underline{r}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^I + l_{3,2} \cdot \underline{e}_1^{II} - [\underline{r}_{4,0} + l_{5,4} \cdot \underline{e}_1^{III} + l_{6,5} \cdot \underline{e}_1^{IV} + l_{3,6} \cdot \underline{e}_1^{VIII}] = \underline{0} \quad (1.29)$$

$$2) \quad [r_{1,0} + l_{2,1} \cdot \underline{e}_1' + l_{3,2} \cdot \underline{e}_1'' - [r_{7,0} + l_{8,7} \cdot \underline{e}_1^V + l_{9,8} \cdot \underline{e}_1^{VI} + l_{3,9} \cdot \underline{e}_1^{IX}] = \underline{0}$$

Por otro lado, las rotaciones de la base inercial fija $\underline{e}_j \in \mathfrak{R}^2$, sobre las bases móviles $\underline{e}_j^{VIII} \in \mathfrak{R}^2$ y $\underline{e}_j^{IX} \in \mathfrak{R}^2$ son representadas por los complejos unitarios $w, x \in \mathfrak{R}^2$ de la siguiente manera:

$$1) \quad \underline{e}_1^{VIII} = \rho(w, \underline{e}_1) = w * \underline{e}_1 \quad (1.30)$$

$$2) \quad \underline{e}_1^{IX} = \rho(x, \underline{e}_1) = x * \underline{e}_1$$

las relaciones entre los complejos $w, x \in \mathfrak{R}^2$ y las componentes de las rotaciones son:

$$1) \quad w = \{w_0, w_1\} \quad ; \quad w_0 \in \mathfrak{R} \quad ; \quad w_0 = \cos \theta_8 \quad (1.31)$$

$$w_1 \in \mathfrak{R} \quad ; \quad w_1 = \pm \text{sen } \theta_8 \cdot \underline{e}_3^{VIII}$$

$$2) \quad x = \{x_0, x_1\} \quad ; \quad x_0 \in \mathfrak{R} \quad ; \quad x_0 = \cos \theta_9$$

$$x_1 \in \mathfrak{R} \quad ; \quad x_1 = \pm \text{sen } \theta_9 \cdot \underline{e}_3^{IX}$$

De acuerdo con las expresiones (1.19) y (1.30) las ecuaciones (1.29) se pueden representar en términos de la base canónica; esto es:

$$1) \quad [r_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{p * \underline{e}_1\} + l_{3,2} \cdot \{q * \underline{e}_1\} - \quad (1.32)$$

$$-[r_{4,0} + l_{5,4} \cdot \{r * \underline{e}_1\} + l_{6,5} \cdot \{s * \underline{e}_1\} + l_{3,6} \cdot \{w * \underline{e}_1\}] = \underline{0}$$

$$2) \quad [r_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{p * \underline{e}_1\} + l_{3,2} \cdot \{q * \underline{e}_1\} -$$

$$-[r_{7,0} + l_{8,7} \cdot \{t * \underline{e}_1\} + l_{9,8} \cdot \{u * \underline{e}_1\} + l_{3,9} \cdot \{x * \underline{e}_1\}] = \underline{0}$$

Una vez construidas las expresiones (1.32), es posible plantear el problema cinemático directo.

1.5.1 Primera formulación del problema cinemático directo.

En esta sección se formulará otro problema de fundamental importancia con la cinemática de los cuerpos rígidos; el problema directo. Dicho problema

está asociado con la configuración no deformada del robot en estudio mostrada en la figura 1.2.

“Dados $p = \{p_0, p_1\}$, $r = \{r_0, r_1\}$, $t = \{t_0, t_1\}$, con $\|p\| = \|r\| = \|t\| = 1$, $r_{1,0} \in \mathbb{R}^2$, $r_{4,0} \in \mathbb{R}^2$, $r_{7,0} \in \mathbb{R}^2$, $l_{2,1}, l_{3,2}, l_{5,4}, l_{6,5}, l_{8,7}, l_{9,8}, l_{3,6}, l_{3,9} \in \mathbb{R}^+$, $l_{pot,3} \in \mathbb{R}^+$ encuentre: $r_{pot,0} \in \mathbb{R}^2$, $q = \{q_0, q_1\}$, $s = \{s_0, s_1\}$, $u = \{u_0, u_1\}$, $w = \{w_0, w_1\}$, $x = \{x_0, x_1\}$, tal que las expresiones (1.21) y (1.32) sean satisfechas y,

$$q_0^2 + q_1^2 = 1$$

$$s_0^2 + s_1^2 = 1$$

$$u_0^2 + u_1^2 = 1$$

$$w_0^2 + w_1^2 = 1$$

$$x_0^2 + x_1^2 = 1”$$

Note en la formulación anterior que, el sistema formado no es cuadrado; esto es, existen 12 incógnitas ($r_{pot,0}$, q_0 , q_1 , s_0 , s_1 , u_0 , u_1 , w_0 , w_1 , x_0 , x_1) y 11 ecuaciones (cuatro escalares de (1.32), dos de (1.21) y cinco normas unitarias).

Sin embargo, es necesario hacer notar que los complejos $v \in \mathbb{R}^2$, $w \in \mathbb{R}^2$ y $x \in \mathbb{R}^2$ están relacionados, pues dichos números están definidos sobre la plataforma P_L . Las relaciones angulares fijas asociadas con las bases $\underline{e}_j^{VII} \in \mathbb{R}^2$, $\underline{e}_j^{VIII} \in \mathbb{R}^2$ y $\underline{e}_j^{IX} \in \mathbb{R}^2$ son las siguientes:

$$1) \quad \underline{e}_1^{VIII} = \rho(w, \underline{e}_1^{VII}) = \rho(w, \rho(v, \underline{e}_1)) = w^* v^* \underline{e}_1 \quad (1.33)$$

$$2) \quad \underline{e}_1^{IX} = \rho(x, \underline{e}_1^{VII}) = \rho(x, \rho(v, \underline{e}_1)) = x^* v^* \underline{e}_1$$

Esto es, los sistemas de bases móviles $\underline{e}_j^{VIII} \in \mathbb{R}^2$ y $\underline{e}_j^{IX} \in \mathbb{R}^2$ son proyecciones de la base $\underline{e}_j^{VII} \in \mathbb{R}^2$ sobre los vectores $\underline{l}_{3,6} \in \mathbb{R}^2$ y $\underline{l}_{3,9} \in \mathbb{R}^2$. para cualquier caso, las siguientes relaciones se satisfacen:

$$1) \quad \theta_8 = \beta_{\text{pot}} \quad (1.34)$$

$$2) \quad \theta_9 = \beta_{\text{pot}}$$

Puesto que $\beta_{\text{pot}} \in \mathbb{R}$ es un desplazamiento angular siempre conocido, entonces $w \in \mathbb{R}^2$ y $x \in \mathbb{R}^2$ son también conocidos. Esto implica que las ecuaciones (1.32) deben ser reformuladas; esto es, remplazar los complejos $w, x \in \mathbb{R}^2$ por las expresiones (1.33). Considere ahora las siguientes ecuaciones:

$$1) \quad \begin{aligned} & \Gamma_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{p^* \underline{e}_1\} + l_{3,2} \cdot \{q^* \underline{e}_1\} - [\Gamma_{4,0} + l_{5,4} \cdot \{r^* \underline{e}_1\} + \\ & + l_{6,5} \cdot \{s^* \underline{e}_1\} + l_{3,6} \cdot \{x^* v^* \underline{e}_1\}] = \underline{0} \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$2) \quad \begin{aligned} & \Gamma_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{p^* \underline{e}_1\} + l_{3,2} \cdot \{q^* \underline{e}_1\} - [\Gamma_{7,0} + l_{8,7} \cdot \{t^* \underline{e}_1\} + \\ & + l_{9,8} \cdot \{u^* \underline{e}_1\} + l_{3,9} \cdot \{w^* v^* \underline{e}_1\}] = \underline{0} \end{aligned}$$

1.5.2 Segunda formulación del problema directo.

“Dados $p = \{p_0, p_1\}$, $r = \{r_0, r_1\}$, $t = \{t_0, t_1\}$, con $\|p\| = \|r\| = \|t\| = 1$, $\Gamma_{1,0} \in \mathbb{R}^2$, $\Gamma_{4,0} \in \mathbb{R}^2$, $\Gamma_{7,0} \in \mathbb{R}^2$, $w = \{w_0, w_1\}$, $x = \{x_0, x_1\}$, $l_{2,1}, l_{3,2}, l_{5,4}, l_{6,5}, l_{8,7}, l_{9,8}, l_{3,6}, l_{3,9}$, $l_{\text{pot},3} \in \mathbb{R}^+$ encuentre $\Gamma_{\text{pot},0} \in \mathbb{R}^2$, $q = \{q_0, q_1\}$, $s = \{s_0, s_1\}$, $u = \{u_0, u_1\}$, $v = \{v_0, v_1\}$, tal que las expresiones (1.21) y (1.32) sean satisfechas y.

$$\begin{aligned} q_0^2 + q_1^2 &= 1 \\ s_0^2 + s_1^2 &= 1 \\ u_0^2 + u_1^2 &= 1 \\ v_0^2 + v_1^2 &= 1 \end{aligned}$$

Note ahora que el sistema de ecuaciones es cuadrado; es decir; de 10 ecuaciones y 10 incógnitas. Para finalizar esta sección se recordará lo siguiente:

$$1) \quad \theta_7 = \beta_{\text{pot}} \quad \text{y} \quad v_0 = \cos \theta_7$$

$$2) \quad \Gamma_{\text{pot},0} = (x_{\text{pot},0}, y_{\text{pot},0})$$

Observe entonces que el problema directo asociado con el robot paralelo motivo de estudio, coincide con el problema planteado al inicio de la sección 1.5.

1.6 Análisis del movimiento del robot paralelo en la configuración deformada.

El interés en esta sección es construir ecuaciones de posición que permitan determinar la nuevas coordenadas del punto $p_{\text{ob}}^l \in P_L^l$ y la orientación de P_L^l medidas desde el origen de coordenadas, una vez movido el robot paralelo por medio de sus actuadores. La nueva posición del robot generada por la aplicación de rotaciones rígidas sucesivas sobre los eslabones conductores, es llamada "configuración deformada". Dicha configuración es mostrada en la figura 1.7.

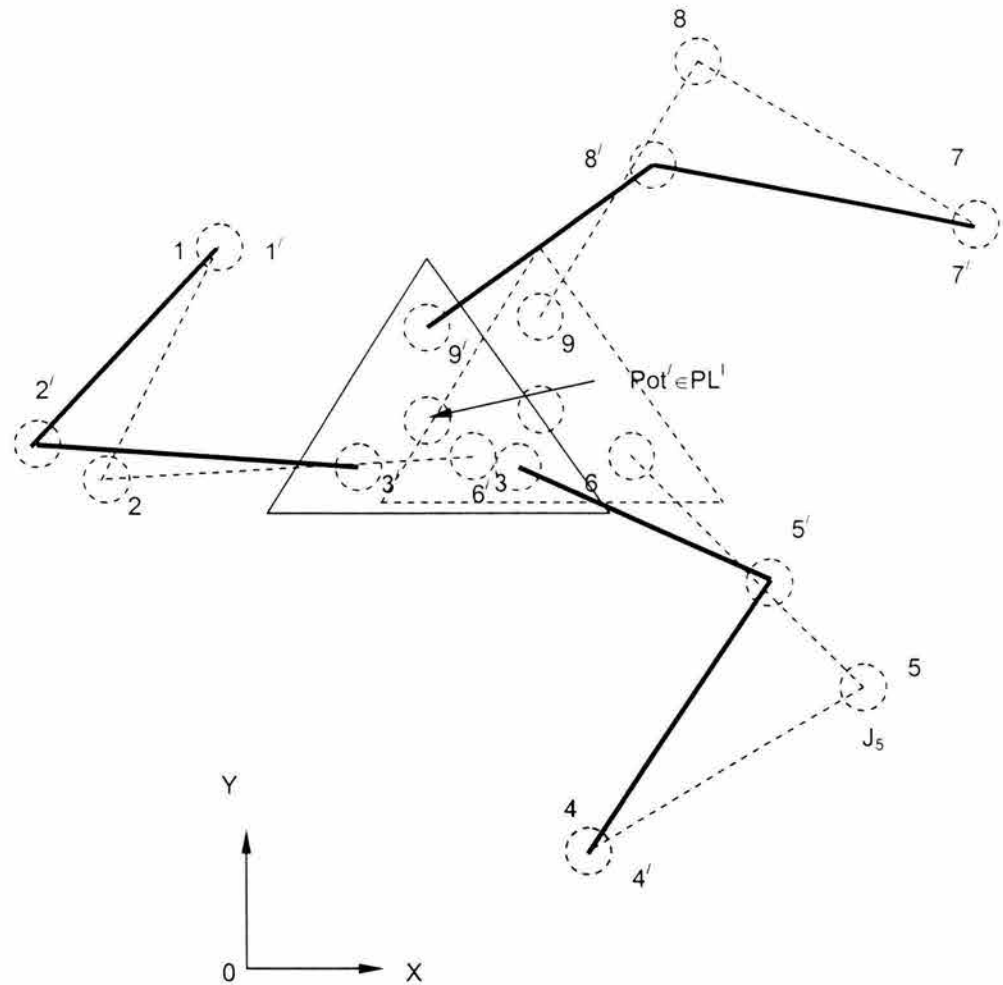


Figura 1.7 Configuración deformada del robot paralelo.

Observe en la figura anterior que el robot motivo de estudio ha cambiado de posición y que los puntos fijos no cambian, esto es: $1 = 1'$, $4 = 4'$ y $7 = 7'$. El objetivo ahora es determinar las ecuaciones de posición que determinen o caractericen el movimiento del robot, específicamente el punto $P_{ot}' \in PL'$. Los nuevos vectores de posición relacionados con la configuración deformada se muestran en la figura 1.8.

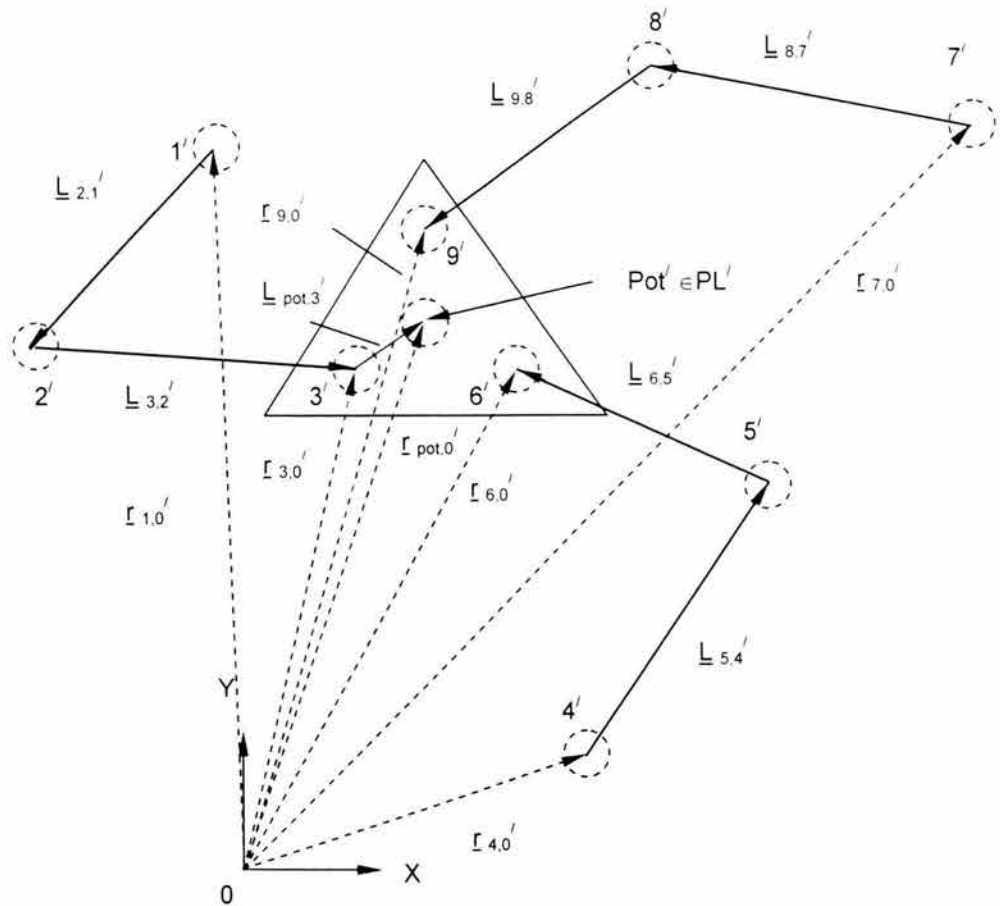


Figura 1.8 Vectores en la configuración deformada del robot paralelo.

De acuerdo con la figura 1.8, las ecuaciones que localizan los puntos (3^l), (6^l) y (9^l) localizados sobre las aristas de la plataforma son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 1) \quad r'_{3,0} &= r'_{1,0} + L'_{2,1} + L'_{3,2} & (1.36) \\
 2) \quad r'_{6,0} &= r'_{4,0} + L'_{5,4} + L'_{6,5} \\
 3) \quad r'_{9,0} &= r'_{7,0} + L'_{8,7} + L'_{9,8}
 \end{aligned}$$

También, el vector de posición $r'_{pot,0} \in \mathbb{R}^2$ se puede expresar en la forma siguiente

$$r'_{pot,0} = r'_{1,0} + L'_{2,1} + L'_{3,2} + L'_{pot,3} \quad (1.37)$$

Por otro lado, las rotaciones de las bases locales $\underline{e}_j^I, \underline{e}_j^{II}, \underline{e}_j^{III}, \underline{e}_j^{IV}, \underline{e}_j^V, \underline{e}_j^{VI}, \underline{e}_j^{VII}$ $\in \mathbb{R}^2$ en la configuración deformada pueden ser representadas por las bases $\underline{a}_j^I, \underline{a}_j^{II}, \underline{a}_j^{III}, \underline{a}_j^{IV}, \underline{a}_j^V, \underline{a}_j^{VI}, \underline{a}_j^{VII} \in \mathbb{R}^2$. Dichos sistemas de referencia se muestran en la figura 1.9.

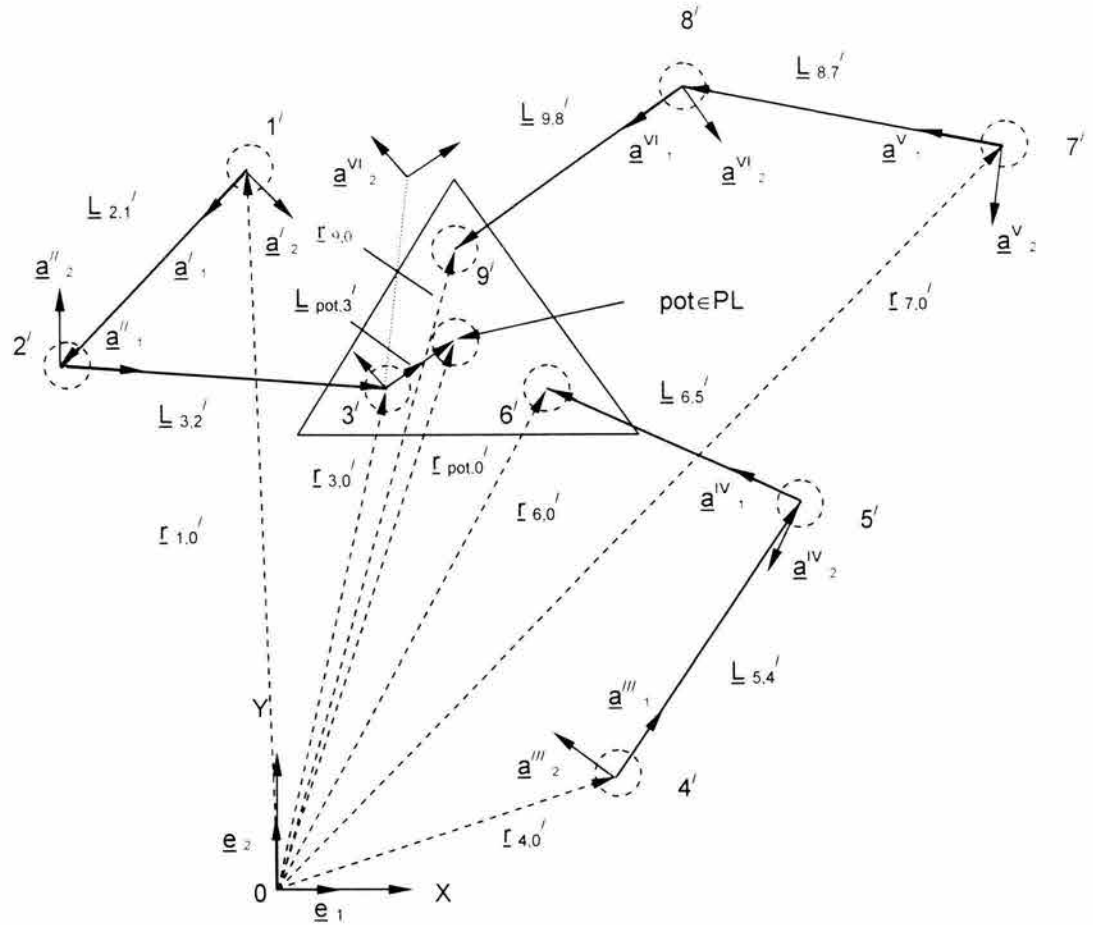


Figura 1.9 Caracterización de las bases locales en la configuración deformada.

De acuerdo a la figura anterior, los vectores de posición asociados con los eslabones que componen al robot en estudio en la configuración deformada se pueden escribir en términos de los sistemas locales deformados; esto es:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \underline{L}_{2,1}^I = l_{2,1}^I \cdot \underline{a}_1^I \quad ; \quad \underline{L}_{3,2}^I = l_{3,2}^I \cdot \underline{a}_1^{II} & (1.38) \\
 2) \quad & \underline{L}_{5,4}^I = l_{5,4}^I \cdot \underline{a}_1^{III} \quad ; \quad \underline{L}_{6,5}^I = l_{6,5}^I \cdot \underline{a}_1^{IV} \\
 3) \quad & \underline{L}_{8,7}^I = l_{8,7}^I \cdot \underline{a}_1^V \quad ; \quad \underline{L}_{9,8}^I = l_{9,8}^I \cdot \underline{a}_1^{VI}
 \end{aligned}$$

$$4) \quad \underline{L}'_{\text{pot},3} = l'_{\text{pot},3} \cdot \underline{a}_1^{VI}$$

Observe que al ser rígidos los eslabones del robot, las siguientes relaciones se satisfacen:

$$\begin{aligned} 1) \quad & l'_{2,1} \equiv l_{2,1} ; \quad l'_{3,2} \equiv l_{3,2} ; \quad l'_{5,4} \equiv l_{5,4} ; \quad l'_{6,5} \equiv l_{6,5} \\ 2) \quad & l'_{8,7} \equiv l_{8,7} ; \quad l'_{9,8} \equiv l_{9,8} ; \quad l'_{\text{pot},3} \equiv l_{\text{pot},3} \end{aligned} \quad (1.39)$$

Por tanto, las expresiones (1.36) y (1.37), se pueden escribir en términos de las bases locales deformadas; esto es:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \underline{r}'_{3,0} = r_{1,0} + l_{2,1} \cdot \underline{a}_1' + l_{3,2} \cdot \underline{a}_1'' \\ 2) \quad & \underline{r}'_{6,0} = r_{4,0} + l_{5,4} \cdot \underline{a}_1''' + l_{6,5} \cdot \underline{a}_1^{IV} \\ 3) \quad & \underline{r}'_{9,0} = r_{7,0} + l_{8,7} \cdot \underline{a}_1^V + l_{9,8} \cdot \underline{a}_1^{VI} \end{aligned} \quad (1.40)$$

También,

$$\underline{r}'_{\text{pot},0} = r_{1,0} + l_{2,1} \cdot \underline{a}_1' + l_{3,2} \cdot \underline{a}_1'' + l_{\text{pot},3} \cdot \underline{a}_1^{VI} \quad (1.41)$$

Por otro lado, las rotaciones de las bases locales, definidas en la configuración no deformada, sobre las bases deformadas se pueden escribir en términos de complejos de norma unitaria y usando la expresión (1.16), de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \underline{a}_1' = \rho(P, \underline{e}_1') = \rho(P, \rho(p, \underline{e}_1)) = P * p * \underline{e}_1 \\ 2) \quad & \underline{a}_1'' = \rho(Q, \underline{e}_1'') = \rho(Q, \rho(q, \underline{e}_1)) = Q * q * \underline{e}_1 \\ 3) \quad & \underline{a}_1''' = \rho(R, \underline{e}_1''') = \rho(R, \rho(r, \underline{e}_1)) = R * r * \underline{e}_1 \\ 4) \quad & \underline{a}_1^{IV} = \rho(S, \underline{e}_1^{IV}) = \rho(S, \rho(s, \underline{e}_1)) = S * s * \underline{e}_1 \\ 5) \quad & \underline{a}_1^V = \rho(T, \underline{e}_1^V) = \rho(T, \rho(t, \underline{e}_1)) = T * t * \underline{e}_1 \\ 6) \quad & \underline{a}_1^{VI} = \rho(U, \underline{e}_1^{VI}) = \rho(U, \rho(u, \underline{e}_1)) = U * u * \underline{e}_1 \\ 7) \quad & \underline{a}_1^{VII} = \rho(V, \underline{e}_1^{VII}) = \rho(V, \rho(v, \underline{e}_1)) = V * v * \underline{e}_1 \end{aligned} \quad (1.42)$$

Aquí, $P, Q, R, S, T, U, V \in \mathfrak{R}^2$ son números complejos de norma unitaria definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & P = \{P_0, P_1\} \quad ; \quad |P| = 1 \quad ; \quad P_0^2 + P_1^2 = 1 \\
 2) \quad & Q = \{Q_0, Q_1\} \quad ; \quad |Q| = 1 \quad ; \quad Q_0^2 + Q_1^2 = 1 \\
 3) \quad & R = \{R_0, R_1\} \quad ; \quad |R| = 1 \quad ; \quad R_0^2 + R_1^2 = 1 \\
 4) \quad & S = \{S_0, S_1\} \quad ; \quad |S| = 1 \quad ; \quad S_0^2 + S_1^2 = 1 \\
 5) \quad & T = \{T_0, T_1\} \quad ; \quad |T| = 1 \quad ; \quad T_0^2 + T_1^2 = 1 \\
 6) \quad & U = \{U_0, U_1\} \quad ; \quad |U| = 1 \quad ; \quad U_0^2 + U_1^2 = 1 \\
 7) \quad & V = \{V_0, V_1\} \quad ; \quad |V| = 1 \quad ; \quad V_0^2 + V_1^2 = 1
 \end{aligned} \tag{1.43}$$

Por tanto, las expresiones (1.40) y (1.41), se pueden escribir en términos de la base inercial fija; esto es:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \underline{r}'_{3,0} = \underline{r}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{P \cdot p \cdot \underline{e}_1\} + l_{3,2} \cdot \{Q \cdot q \cdot \underline{e}_1\} \\
 2) \quad & \underline{r}'_{6,0} = \underline{r}_{4,0} + l_{5,4} \cdot \{R \cdot r \cdot \underline{e}_1\} + l_{6,5} \cdot \{S \cdot s \cdot \underline{e}_1\} \\
 3) \quad & \underline{r}'_{9,0} = \underline{r}_{7,0} + l_{8,7} \cdot \{T \cdot t \cdot \underline{e}_1\} + l_{9,8} \cdot \{U \cdot u \cdot \underline{e}_1\}
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

También,

$$\underline{r}'_{\text{pot},0} = \underline{r}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{P \cdot p \cdot \underline{e}_1\} + l_{3,2} \cdot \{Q \cdot q \cdot \underline{e}_1\} + l_{\text{pot},3} \cdot \{V \cdot v \cdot \underline{e}_1\} \tag{1.45}$$

Por otro lado, las relaciones entre los complejos de norma unitaria y los componentes de las relaciones se definen de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & P = \{P_0, P_1\} \quad ; \quad P_0 \in \mathfrak{R} \quad ; \quad P_0 = \cos \alpha_1 \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad P_1 \in \mathfrak{R} \quad ; \quad P_1 = \pm \text{sen } \alpha_1 \\
 2) \quad & Q = \{Q_0, Q_1\} \quad ; \quad Q_0 \in \mathfrak{R} \quad ; \quad Q_0 = \cos \alpha_2 \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad Q_1 \in \mathfrak{R} \quad ; \quad Q_1 = \pm \text{sen } \alpha_2 \\
 3) \quad & R = \{R_0, R_1\} \quad ; \quad R_0 \in \mathfrak{R} \quad ; \quad R_0 = \cos \alpha_3 \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad R_1 \in \mathfrak{R} \quad ; \quad R_1 = \pm \text{sen } \alpha_3
 \end{aligned} \tag{1.46}$$

- | | | | |
|----|--------------------|------------------------|----------------------------------|
| 4) | $S = \{S_0, S_1\}$ | $S_0 \in \mathfrak{R}$ | $S_0 = \cos \alpha_4$ |
| | | $S_1 \in \mathfrak{R}$ | $S_1 = \pm \text{sen } \alpha_4$ |
| 5) | $T = \{T_0, T_1\}$ | $T_0 \in \mathfrak{R}$ | $T_0 = \cos \alpha_5$ |
| | | $T_1 \in \mathfrak{R}$ | $T_1 = \pm \text{sen } \alpha_5$ |
| 6) | $U = \{U_0, U_1\}$ | $U_0 \in \mathfrak{R}$ | $U_0 = \cos \alpha_6$ |
| | | $U_1 \in \mathfrak{R}$ | $U_1 = \pm \text{sen } \alpha_6$ |
| 7) | $V = \{V_0, V_1\}$ | $V_0 \in \mathfrak{R}$ | $V_0 = \cos \alpha_7$ |
| | | $V_1 \in \mathfrak{R}$ | $V_1 = \pm \text{sen } \alpha_7$ |

Aquí, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7 \in \mathfrak{R}$, son los desplazamientos angulares definidos en la configuración deformada y $\underline{a}_3^I, \underline{a}_3^{II}, \underline{a}_3^{III}, \underline{a}_3^N, \underline{a}_3^V, \underline{a}_3^{VI}, \underline{a}_3^{VII} \in \mathfrak{R}^2$ son los ejes de rotación. Dichos desplazamientos angulares se muestran en la figura 1.10.

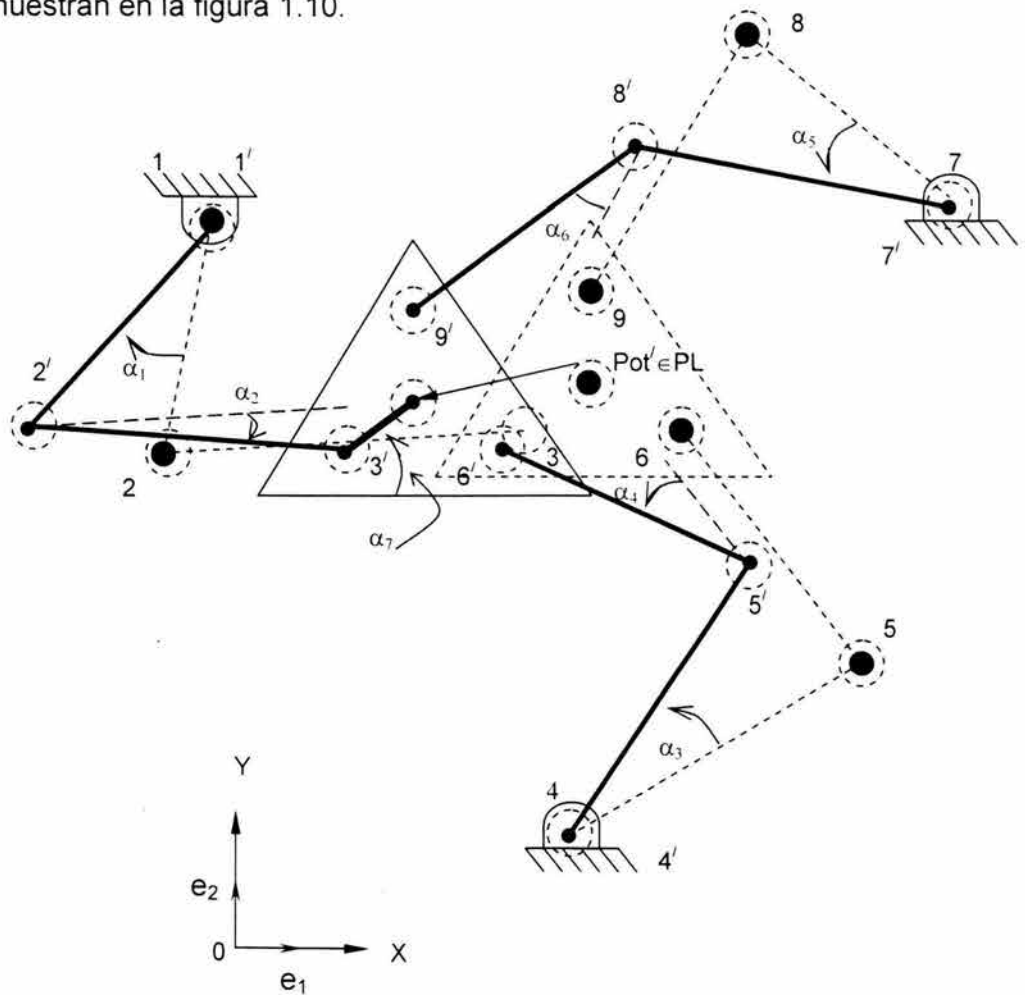


Figura 1.10 Desplazamientos angulares en la configuración deformada.

1.6.1 Formulación del problema cinemático inverso en la configuración deformada.

En esta sección se define un problema de fundamental importancia en la cinemática de multicuerpos rígidos: el problema inverso. Dicho problema está asociado con la configuración deformada del robot paralelo mostrada en la figura 1.8.

“Dados, $r_{3,0} \in \mathbb{R}^2$, $r_{6,0} \in \mathbb{R}^2$, $r_{9,0} \in \mathbb{R}^2$, $r_{1,0} \in \mathbb{R}^2$, $r_{4,0} \in \mathbb{R}^2$, $r_{7,0} \in \mathbb{R}^2$, $l_{2,1}$, $l_{3,2}$, $l_{5,4}$, $l_{6,5}$, $l_{8,7}$, $l_{9,8} \in \mathbb{R}^+$, $p = \{p_0, p_1\}$, $q = \{q_0, q_1\}$, $r = \{r_0, r_1\}$, $s = \{s_0, s_1\}$, $t = \{t_0, t_1\}$, $u = \{u_0, u_1\}$, con $\|p\| = \|q\| = \|r\| = \|s\| = \|t\| = \|u\| = 1$, encuentre $P = \{P_0, P_1\}$, $Q = \{Q_0, Q_1\}$, $R = \{R_0, R_1\}$, $S = \{S_0, S_1\}$, $T = \{T_0, T_1\}$, $U = \{U_0, U_1\}$, tal que la expresión (1.45) sea satisfecha y,

$$\begin{aligned} 1) \quad P_0^2 + P_1^2 &= 1 & ; & & Q_0^2 + Q_1^2 &= 1 \\ 2) \quad R_0^2 + R_1^2 &= 1 & ; & & S_0^2 + S_1^2 &= 1 \\ 3) \quad T_0^2 + T_1^2 &= 1 & ; & & U_0^2 + U_1^2 &= 1 \end{aligned}$$

El problema de la cinemática inversa en la configuración deformada, consiste en resolver un sistema de 12 ecuaciones no lineales y 12 incógnitas del tipo algebraico polinomial. Finalmente, para plantear el problema cinemático inverso se han utilizado las relaciones (1.9), las cuales se describen a continuación:

$$\begin{aligned} 1) \quad r_{3,0} &= (r_{3,0,x}, r_{3,0,y}) = (x_{pot,0} - l_{pot,3} \cos \theta_{pot}, y_{pot,0} - l_{pot,3} \sin \theta_{pot}) \quad (1.9) \\ 2) \quad r_{6,0} &= (r_{3,0,x} + l_{3,6} \cos (\theta_{pot} - \beta_{pot}), r_{3,0,y} + l_{3,6} \sin (\theta_{pot} - \beta_{pot})) \\ 3) \quad r_{9,0} &= (r_{3,0,x} + l_{3,9} \cos (\theta_{pot} + \beta_{pot}), r_{3,0,y} + l_{3,9} \sin (\theta_{pot} + \beta_{pot})) \end{aligned}$$

1.7 Análisis del problema cinemático directo en la configuración deformada.

En esta sección serán construidas, al igual que en la sección 1.5, las ecuaciones cinemáticas de posición que permitirán formular el problema cinemático directo asociado con el robot paralelo motivo de estudio en la configuración deformada. Para ello, se definirán vectores de posición sobre la plataforma P_L y nuevas expresiones cinemáticas. La figura 1.11 muestra los vectores deformados definidos sobre las aristas del triángulo que conforma al eslabón P_L' .

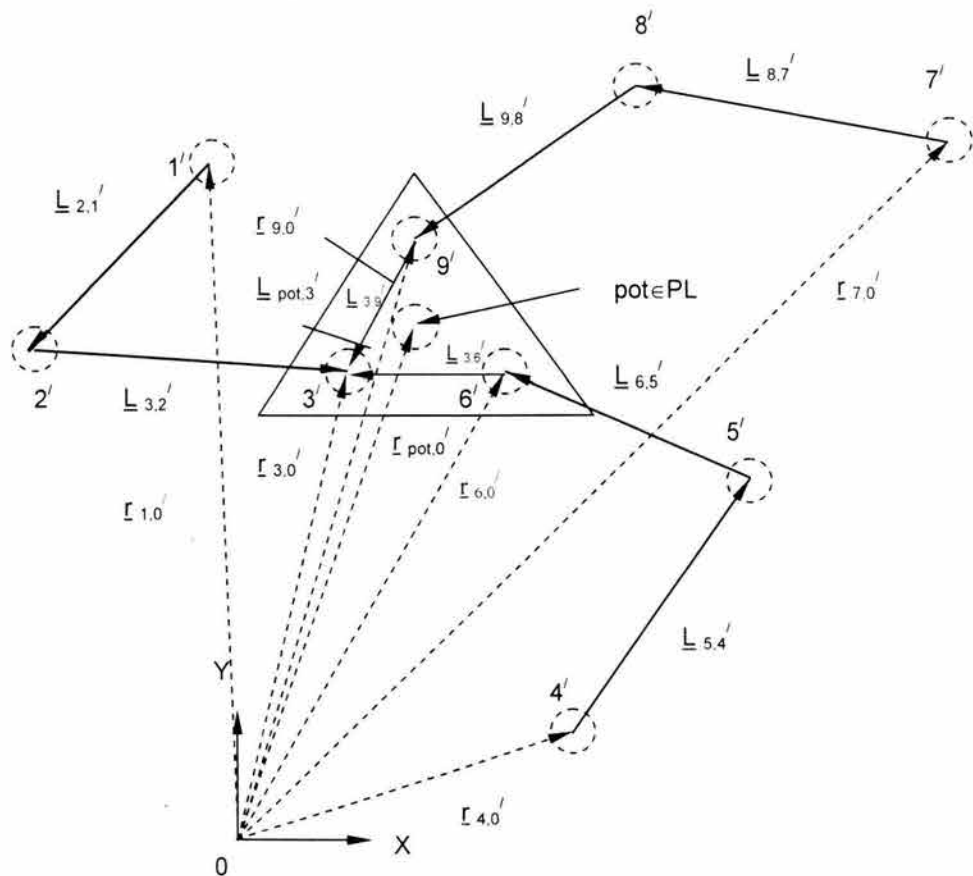


Figura 1.11 Vectores deformados para el planteamiento del problema directo.

De acuerdo con la figura anterior, las ecuaciones de posición relacionadas con el punto ($3'$), localizado en una arista de la plataforma, y al punto "o" definido en el origen de las coordenadas son las siguientes:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{r}'_{3,0} &= \underline{r}_{1,0} + \underline{L}'_{2,1} + \underline{L}'_{3,2} & (1.47) \\ 2) \quad \underline{r}'_{3,0} &= \underline{r}_{4,0} + \underline{L}'_{5,4} + \underline{L}'_{6,5} + \underline{L}'_{3,6} \\ 3) \quad \underline{r}'_{3,0} &= \underline{r}_{7,0} + \underline{L}'_{8,7} + \underline{L}'_{9,8} + \underline{L}'_{3,9} \end{aligned}$$

Cabe hacer notar que, cada expresión anterior representa el modelo de posición de cada cadena cinemática (CC_1' , CC_2' , CC_3') que componen al robot en estudio.

Por otro lado, las ecuaciones de lazo que relacionan el modelo de la cadena CC_1' con la cadena CC_2' y de la cadena CC_1' con la cadena CC_3' se determinan, de acuerdo con la sección 1.5, de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{r}_{1,0} + \underline{L}'_{2,1} + \underline{L}'_{3,2} - [\underline{r}_{4,0} + \underline{L}'_{5,4} + \underline{L}'_{6,5} + \underline{L}'_{3,6}] &= \underline{0} & (1.48) \\ 2) \quad \underline{r}_{1,0} + \underline{L}'_{2,1} + \underline{L}'_{3,2} - [\underline{r}_{7,0} + \underline{L}'_{8,7} + \underline{L}'_{9,8} + \underline{L}'_{3,9}] &= \underline{0} \end{aligned}$$

Los nuevos sistemas de referencia relacionados con los vectores deformados $\underline{L}'_{3,6} \in \mathfrak{R}^2$, $\underline{L}'_{3,9} \in \mathfrak{R}^2$ se muestran en la figura siguiente:

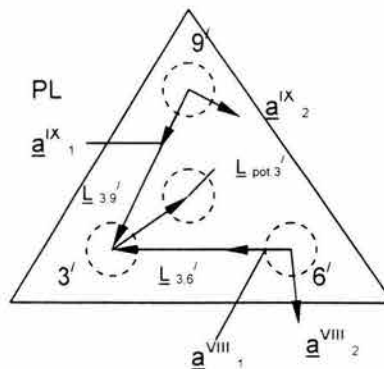


Figura 1.12 bases locales deformadas sobre la plataforma PL' .

Por tanto, según la figura anterior, los vectores $\underline{l}'_{3,6} \in \mathbb{R}^2$, $\underline{l}'_{3,9} \in \mathbb{R}^2$ se pueden escribir en términos de las bases locales, esto es:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{l}'_{3,6} &= l'_{3,6} \cdot \underline{a}_1^{VIII} & (1.49) \\ 2) \quad \underline{l}'_{3,9} &= l'_{3,9} \cdot \underline{a}_1^{IX} \end{aligned}$$

Note que $l'_{3,6} \equiv l_{3,6}$ y $l'_{3,9} \equiv l_{3,9}$. De acuerdo con las expresiones (1.42) y (1.49), las ecuaciones de lazo (1.48) se pueden escribir en términos de las bases móviles deformadas; esto es:

$$\begin{aligned} 1) \quad r_{1,0} + l_{2,1} \cdot \underline{a}_1^I + l_{3,2} \cdot \underline{a}_1^{II} - [r_{4,0} + l_{5,4} \cdot \underline{a}_1^{III} + l_{6,5} \cdot \underline{a}_1^V + l_{3,6} \cdot \underline{a}_1^{VIII}] &= \underline{0} & (1.50) \\ 2) \quad r_{1,0} + l_{2,1} \cdot \underline{a}_1^I + l_{3,2} \cdot \underline{a}_1^{II} - [r_{7,0} + l_{8,7} \cdot \underline{a}_1^V + l_{9,8} \cdot \underline{a}_1^{VI} + l_{3,9} \cdot \underline{a}_1^{IX}] &= \underline{0} \end{aligned}$$

Por otro lado, las rotaciones de la base $\underline{a}_1^{VIII} \in \mathbb{R}^2$, sobre las bases móviles $\underline{a}_1^{VIII} \in \mathbb{R}^2$ y $\underline{a}_1^{IX} \in \mathbb{R}^2$ son:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{a}_1^{VIII} &= \rho(W, \underline{a}_1^{VIII}) = \rho(W, \rho(V, \underline{e}_1^{VIII})) = \rho(W, \rho(V, \rho(v, \underline{e}_1))) = W * V * v * \underline{e}_1 & (1.51) \\ 2) \quad \underline{a}_1^{IX} &= \rho(X, \underline{a}_1^{VIII}) = \rho(X, \rho(V, \underline{e}_1^{VIII})) = \rho(X, \rho(V, \rho(v, \underline{e}_1))) = X * V * v * \underline{e}_1 \end{aligned}$$

Observe que el desplazamiento angular $\beta'_{pot} \in \mathbb{R}$, es tal que: $\beta'_{pot} \equiv \beta_{pot}$.

Por tanto, en la configuración deformada los complejos $W \in \mathbb{R}^2$ y $X \in \mathbb{R}^2$ son conocidos. Las ecuaciones de lazo (1.50) se pueden escribir en términos de la base inercial fija usando las expresiones (1.42) y (1.50), esto es:

$$\begin{aligned} 1) \quad r_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{P * p * \underline{e}_1\} + l_{3,2} \cdot \{Q * q * \underline{e}_1\} - [r_{4,0} + l_{5,4} \cdot \{R * r * \underline{e}_1\} + & (1.52) \\ & + l_{6,5} \cdot \{S * s * \underline{e}_1\} + l_{3,6} \cdot \{W * V * v * \underline{e}_1\}] = \underline{0} \\ 2) \quad r_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{P * p * \underline{e}_1\} + l_{3,2} \cdot \{Q * q * \underline{e}_1\} - [r_{7,0} + l_{8,7} \cdot \{T * t * \underline{e}_1\} + & \\ & + l_{9,8} \cdot \{U * u * \underline{e}_1\} + l_{3,9} \cdot \{X * V * v * \underline{e}_1\}] = \underline{0} \end{aligned}$$

Por tanto, según la figura anterior, los vectores $\underline{l}'_{3,6} \in \mathfrak{R}^2$, $\underline{l}'_{3,9} \in \mathfrak{R}^2$ se pueden escribir en términos de las bases locales, esto es:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{l}'_{3,6} &= l'_{3,6} \cdot \underline{a}_1^{VIII} & (1.49) \\ 2) \quad \underline{l}'_{3,9} &= l'_{3,9} \cdot \underline{a}_1^{IX} \end{aligned}$$

Note que $l'_{3,6} \equiv l_{3,6}$ y $l'_{3,9} \equiv l_{3,9}$. De acuerdo con las expresiones (1.42) y (1.49), las ecuaciones de lazo (1.48) se pueden escribir en términos de las bases móviles deformadas; esto es:

$$\begin{aligned} 1) \quad r_{1,0} + l_{2,1} \cdot \underline{a}_1' + l_{3,2} \cdot \underline{a}_1'' - [r_{4,0} + l_{5,4} \cdot \underline{a}_1''' + l_{6,5} \cdot \underline{a}_1^V + l_{3,6} \cdot \underline{a}_1^{VIII}] &= \underline{0} & (1.50) \\ 2) \quad r_{1,0} + l_{2,1} \cdot \underline{a}_1' + l_{3,2} \cdot \underline{a}_1'' - [r_{7,0} + l_{8,7} \cdot \underline{a}_1^V + l_{9,8} \cdot \underline{a}_1^{VI} + l_{3,9} \cdot \underline{a}_1^{IX}] &= \underline{0} \end{aligned}$$

Por otro lado, las rotaciones de la base $\underline{a}_1^{VIII} \in \mathfrak{R}^2$, sobre las bases móviles $\underline{a}_1^{VIII} \in \mathfrak{R}^2$ y $\underline{a}_1^{IX} \in \mathfrak{R}^2$ son:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{a}_1^{VIII} &= \rho(W, \underline{a}_1^{VIII}) = \rho(W, \rho(V, \underline{e}_1^{VIII})) = \rho(W, \rho(V, \rho(v, \underline{e}_1))) = W * V * v * \underline{e}_1 & (1.51) \\ 2) \quad \underline{a}_1^{IX} &= \rho(X, \underline{a}_1^{VIII}) = \rho(X, \rho(V, \underline{e}_1^{VIII})) = \rho(X, \rho(V, \rho(v, \underline{e}_1))) = X * V * v * \underline{e}_1 \end{aligned}$$

Observe que el desplazamiento angular $\beta'_{pot} \in \mathfrak{R}$, es tal que: $\beta'_{pot} \equiv \beta_{pot}$.

Por tanto, en la configuración deformada los complejos $W \in \mathfrak{R}^2$ y $X \in \mathfrak{R}^2$ son conocidos. Las ecuaciones de lazo (1.50) se pueden escribir en términos de la base inercial fija usando las expresiones (1.42) y (1.50), esto es:

$$\begin{aligned} 1) \quad r_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{P * p * \underline{e}_1\} + l_{3,2} \cdot \{Q * q * \underline{e}_1\} - [r_{4,0} + l_{5,4} \cdot \{R * r * \underline{e}_1\} + & (1.52) \\ & + l_{6,5} \cdot \{S * s * \underline{e}_1\} + l_{3,6} \cdot \{W * V * v * \underline{e}_1\}] = \underline{0} \\ 2) \quad r_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{P * p * \underline{e}_1\} + l_{3,2} \cdot \{Q * q * \underline{e}_1\} - [r_{7,0} + l_{8,7} \cdot \{T * t * \underline{e}_1\} + & \\ & + l_{9,8} \cdot \{U * u * \underline{e}_1\} + l_{3,9} \cdot \{X * V * v * \underline{e}_1\}] = \underline{0} \end{aligned}$$

1.7.1 Formulación del problema cinemático directo en la configuración deformada.

En esta sección será planteado otro problema de fundamental importancia en la cinemática de los cuerpos rígidos: el problema directo. Dicho problema está relacionado con la configuración deformada del robot paralelo mostrado en la figura 1.11.

“Dados, $P = \{P_0, P_1\}$, $R = \{R_0, R_1\}$, $T = \{T_0, T_1\}$, con $\|P\| = \|R\| = \|T\| = 1$, $r_{1,0} \in \mathfrak{R}^2$, $r_{4,0} \in \mathfrak{R}^2$, $r_{7,0} \in \mathfrak{R}^2$, $l_{2,1}, l_{3,2}, l_{5,4}, l_{6,5}, l_{8,7}, l_{9,8}, l_{pot,3} \in \mathfrak{R}^+$, $W = \{W_0, W_1\}$, $X = \{X_0, X_1\}$, con $\|W\| = \|X\| = 1$, $p = \{p_0, p_1\}$, $q = \{q_0, q_1\}$, $r = \{r_0, r_1\}$, $s = \{s_0, s_1\}$, $t = \{t_0, t_1\}$, $u = \{u_0, u_1\}$, $v = \{v_0, v_1\}$, $w = \{w_0, w_1\}$, $x = \{x_0, x_1\}$, con $\|p\| = \|q\| = \|r\| = \|s\| = \|t\| = \|u\| = \|v\| = \|w\| = \|x\| = 1$, encuentre $r'_{pot,0} \in \mathfrak{R}^2$, $Q = \{Q_0, Q_1\}$, $S = \{S_0, S_1\}$, $U = \{U_0, U_1\}$, $V = \{V_0, V_1\}$, tal que las expresiones (1.45) y (1.51) sean satisfechas y,

$$\begin{aligned} 1) \quad Q_0^2 + Q_1^2 &= 1 & ; & & S_0^2 + S_1^2 &= 1 \\ 2) \quad U_0^2 + U_1^2 &= 1 & ; & & V_0^2 + V_1^2 &= 1 \end{aligned}$$

El problema cinemático directo definido en la configuración deformada, genera un sistema de 10 ecuaciones no lineales y 10 incógnitas del tipo algebraico polinomial. Para finalizar este capítulo cabe recordar que las salidas operativas del problema son:

$$\begin{aligned} 1) \quad r'_{pot,0} &= (X'_{pot,0}, Y'_{pot,0}) \\ 2) \quad V &= \{V_0, V_1\} \end{aligned}$$

Aquí $\alpha_7 \in \mathfrak{R}$ dado por $V_0 = \cos \alpha_7$, es el ángulo operativo de la plataforma P'_L en la configuración deformada.

CAPÍTULO 2

MODELOS CINEMÁTICOS DE VELOCIDAD

Capítulo 2

Modelos cinemáticos de velocidad

Introducción. En este capítulo son construidas las ecuaciones de velocidad derivadas de las ecuaciones de posición descritas en la sección 1.6 del capítulo anterior, relacionadas con el punto $pot' \in P_L$ y su variación angular dada por el complejo $V \in \mathbb{R}^2$.

Para ello, se consideran funciones del tipo $\underline{r} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ donde $J \in [0, +\infty)$ es un intervalo de tiempo. Son formulados los problemas cinemáticos directo e inverso relacionados con la configuración deformada del robot paralelo mostrado en las figuras 1.9 y 1.11, respectivamente.

2.1 Las ecuaciones de velocidad

Considere funciones del tipo $\underline{r} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ para caracterizar las ecuaciones que permitan determinar la velocidad lineal del centroide de la plataforma ($pot' \in P_L$) y la velocidad angular del eslabón P_L^1 , medidas desde el origen de coordenadas. Por tanto, las ecuaciones de posición (1.36) se pueden escribir en función del tiempo $t \in J$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{r}'_{3,0}(t) &= \underline{r}'_{1,0}(t_0) + \underline{L}'_{2,1}(t) + \underline{L}'_{3,2}(t) & (2.1) \\ 2) \quad \underline{r}'_{6,0}(t) &= \underline{r}'_{4,0}(t_0) + \underline{L}'_{5,4}(t) + \underline{L}'_{6,5}(t) \\ 3) \quad \underline{r}'_{9,0}(t) &= \underline{r}'_{7,0}(t_0) + \underline{L}'_{8,7}(t) + \underline{L}'_{9,8}(t) \end{aligned}$$

También, la expresión (1.37) se puede escribir en función del tiempo $t \in J$, esto es:

$$\underline{r}'_{pot,0}(t) = \underline{r}'_{1,0}(t_0) + \underline{L}'_{2,1}(t) + \underline{L}'_{3,2}(t) + \underline{L}'_{pot,3}(t) \quad (2.2)$$

Las velocidades de los puntos $(3)^I$, $(6)^I$, $(9)^I$, medidas desde el origen de coordenadas en el tiempo $t \in J$, se puede obtener al tomar la derivada con respecto al tiempo $t \in J$ de las expresiones (2.1), esto es:

$$\begin{aligned} 1) \quad \dot{\mathbf{r}}_{3,0}^I(t) &= \dot{\mathbf{L}}_{2,1}^I(t) + \dot{\mathbf{L}}_{3,2}^I(t) & (2.3) \\ 2) \quad \dot{\mathbf{r}}_{6,0}^I(t) &= \dot{\mathbf{L}}_{5,4}^I(t) + \dot{\mathbf{L}}_{6,5}^I(t) \\ 3) \quad \dot{\mathbf{r}}_{9,0}^I(t) &= \dot{\mathbf{L}}_{8,7}^I(t) + \dot{\mathbf{L}}_{9,8}^I(t) \end{aligned}$$

$$\text{Note que: } \dot{\mathbf{r}}_{1,0}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_{4,0}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_{7,0}(t_0) \equiv 0.$$

También la expresión (2.2) se puede derivar con respecto al tiempo $t \in J$ de la manera siguiente:

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{pot},0}^I(t) = \dot{\mathbf{L}}_{2,1}^I(t) + \dot{\mathbf{L}}_{3,2}^I(t) + \dot{\mathbf{L}}_{\text{pot},3}^I(t) \quad (2.4)$$

2.2 Derivadas de las bases locales deformadas.

En esta sección se utilizarán funciones del tipo $\underline{\mathbf{a}} : J \rightarrow \mathfrak{R}^2$ para transformar las bases locales deformadas mostradas en la figura 1.9 en función del tiempo $t \in J$; esto es:

$$\begin{aligned} 1) \quad \underline{\mathbf{a}}_J^I(t) &= \{ \underline{\mathbf{a}}_1^I(t), \underline{\mathbf{a}}_2^I(t) \} & (2.5) \\ 2) \quad \underline{\mathbf{a}}_J^{II}(t) &= \{ \underline{\mathbf{a}}_1^{II}(t), \underline{\mathbf{a}}_2^{II}(t) \} \\ 3) \quad \underline{\mathbf{a}}_J^{III}(t) &= \{ \underline{\mathbf{a}}_1^{III}(t), \underline{\mathbf{a}}_2^{III}(t) \} \\ 4) \quad \underline{\mathbf{a}}_J^{IV}(t) &= \{ \underline{\mathbf{a}}_1^{IV}(t), \underline{\mathbf{a}}_2^{IV}(t) \} \\ 5) \quad \underline{\mathbf{a}}_J^V(t) &= \{ \underline{\mathbf{a}}_1^V(t), \underline{\mathbf{a}}_2^V(t) \} \\ 6) \quad \underline{\mathbf{a}}_J^{VI}(t) &= \{ \underline{\mathbf{a}}_1^{VI}(t), \underline{\mathbf{a}}_2^{VI}(t) \} \\ 7) \quad \underline{\mathbf{a}}_J^{VII}(t) &= \{ \underline{\mathbf{a}}_1^{VII}(t), \underline{\mathbf{a}}_2^{VII}(t) \} \end{aligned}$$

Por otro lado, las distancias $l_{2,1}$, $l_{3,2}$, $l_{5,4}$, $l_{6,5}$, $l_{8,7}$, $l_{9,8}$, $l_{\text{pot},3} \in \mathfrak{R}^+$ también se pueden escribir en términos de la función $l : J \rightarrow \mathfrak{R}^+$ de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
1) \quad & l_{2,1}(t) \quad ; \quad l_{3,2}(t) \\
2) \quad & l_{5,4}(t) \quad ; \quad l_{6,5}(t) \\
3) \quad & l_{8,7}(t) \quad ; \quad l_{9,8}(t) \\
4) \quad & l_{\text{pot},3}(t)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Por tanto, los vectores de posición $\underline{l}'_{2,1}(t)$, $\underline{l}'_{3,2}(t)$, $\underline{l}'_{5,4}(t)$, $\underline{l}'_{6,5}(t)$, $\underline{l}'_{8,7}(t)$, $\underline{l}'_{9,8}(t) \in \mathfrak{R}^2$ y $\underline{l}'_{\text{pot},3}(t) \in \mathfrak{R}^2$ se pueden escribir en términos de las expresiones (2.5) y (2.6), esto es:

$$\begin{aligned}
1) \quad & \underline{l}'_{2,1}(t) = l_{2,1}(t) \cdot \underline{a}_1'(t) \\
2) \quad & \underline{l}'_{3,2}(t) = l_{3,2}(t) \cdot \underline{a}_1''(t) \\
3) \quad & \underline{l}'_{5,4}(t) = l_{5,4}(t) \cdot \underline{a}_1'''(t) \\
4) \quad & \underline{l}'_{6,5}(t) = l_{6,5}(t) \cdot \underline{a}_1^{IV}(t) \\
5) \quad & \underline{l}'_{8,7}(t) = l_{8,7}(t) \cdot \underline{a}_1^V(t) \\
6) \quad & \underline{l}'_{9,8}(t) = l_{9,8}(t) \cdot \underline{a}_1^{VI}(t) \\
7) \quad & \underline{l}'_{\text{pot},3}(t) = l_{\text{pot},3}(t) \cdot \underline{a}_1^{VII}(t)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Las ecuaciones de posición (2.1) se pueden escribir en términos de las bases locales como funciones del tiempo, esto es:

$$\begin{aligned}
1) \quad & \underline{r}'_{3,0}(t) = \underline{r}_{1,0}(t_0) + l_{2,1}(t) \cdot \underline{a}_1'(t) + l_{3,2}(t) \cdot \underline{a}_1''(t) \\
2) \quad & \underline{r}'_{6,0}(t) = \underline{r}_{4,0}(t_0) + l_{5,4}(t) \cdot \underline{a}_1'''(t) + l_{6,5}(t) \cdot \underline{a}_1^{IV}(t) \\
3) \quad & \underline{r}'_{9,0}(t) = \underline{r}_{7,0}(t_0) + l_{8,7}(t) \cdot \underline{a}_1^V(t) + l_{9,8}(t) \cdot \underline{a}_1^{VI}(t)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

También la expresión (2.2) se puede escribir de la manera siguiente:

$$\underline{r}'_{\text{pot},0}(t) = \underline{r}_{1,0}(t_0) + l_{2,1}(t) \cdot \underline{a}_1'(t) + l_{3,2}(t) \cdot \underline{a}_1''(t) + l_{\text{pot},3}(t) \cdot \underline{a}_1^{VII}(t) \tag{2.9}$$

Las derivadas explícitas con respecto al tiempo $t \in J$ de las ecuaciones (2.8) se obtienen al derivar cada una de las ecuaciones (2.7) con respecto al tiempo $t \in J$, esto es:

$$\begin{aligned}
1) \quad \dot{L}_{2,1}(t) &= l_{2,1}(t) \cdot \dot{a}_1(t) & (2.10) \\
2) \quad \dot{L}_{3,2}(t) &= l_{3,2}(t) \cdot \dot{a}_1(t) \\
3) \quad \dot{L}_{5,4}(t) &= l_{5,4}(t) \cdot \dot{a}_1(t) \\
4) \quad \dot{L}_{6,5}(t) &= l_{6,5}(t) \cdot \dot{a}_1(t) \\
5) \quad \dot{L}_{8,7}(t) &= l_{8,7}(t) \cdot \dot{a}_1(t) \\
6) \quad \dot{L}_{9,8}(t) &= l_{9,8}(t) \cdot \dot{a}_1(t) \\
7) \quad \dot{L}_{pot,3}(t) &= l_{pot,3}(t) \cdot \dot{a}_1(t)
\end{aligned}$$

Aquí, $\dot{L}_{2,1}(t) \equiv \dot{L}_{3,2}(t) \equiv \dot{L}_{6,5}(t) \equiv \dot{L}_{6,5}(t) \equiv \dot{L}_{8,7}(t) \equiv \dot{L}_{9,8}(t) \equiv \dot{L}_{pot,3}(t) \equiv 0$. Por tanto, las derivadas de las expresiones (2.8) en términos de $t \in J$ y de las bases locales son las siguientes:

$$\begin{aligned}
1) \quad \dot{r}_{3,0}^I(t) &= l_{2,1}^I \cdot \dot{a}_1(t) + l_{3,2}^I \cdot \dot{a}_1(t) & (2.11) \\
2) \quad \dot{r}_{6,0}^I(t) &= l_{5,4}^I \cdot \dot{a}_1(t) + l_{6,5}^I \cdot \dot{a}_1(t) \\
3) \quad \dot{r}_{9,0}^I(t) &= l_{8,7}^I \cdot \dot{a}_1(t) + l_{9,8}^I \cdot \dot{a}_1(t)
\end{aligned}$$

También, la derivada explícita de la ecuación (2.9) se escribe la manera siguiente:

$$\dot{r}_{pot,0}^I(t) = l_{2,1}^I \cdot \dot{a}_1(t) + l_{3,2}^I \cdot \dot{a}_1(t) + l_{pot,3}^I \cdot \dot{a}_1(t) \quad (2.12)$$

2.3 Explicitación de las ecuaciones de velocidad.

El interés en esta sección es encontrar las formas explícitas de las derivadas de las bases locales deformadas; esto es, en términos de las derivadas de los complejos asociados con las rotaciones. Para ello, considere funciones

del tipo $p : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ para transformar los complejos en funciones del tiempo $t \in J$, esto es:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & P(t) = \{ P_0(t), P_1(t) \} ; Q(t) = \{ Q_0(t), Q_1(t) \} \\
 2) \quad & R(t) = \{ R_0(t), R_1(t) \} ; S(t) = \{ S_0(t), S_1(t) \} \\
 3) \quad & T(t) = \{ T_0(t), T_1(t) \} ; U(t) = \{ U_0(t), U_1(t) \} \\
 4) \quad & V(t) = \{ V_0(t), V_1(t) \}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Por otro lado, las bases locales definidas en la configuración no deformada se pueden escribir en términos de $t \in J$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \underline{e}_J^I = \{ \underline{e}_1^I, \underline{e}_2^I \} \\
 2) \quad & \underline{e}_J^{II} = \{ \underline{e}_1^{II}, \underline{e}_2^{II} \} \\
 3) \quad & \underline{e}_J^{III} = \{ \underline{e}_1^{III}, \underline{e}_2^{III} \} \\
 4) \quad & \underline{e}_J^{IV} = \{ \underline{e}_1^{IV}, \underline{e}_2^{IV} \} \\
 5) \quad & \underline{e}_J^V = \{ \underline{e}_1^V, \underline{e}_2^V \} \\
 6) \quad & \underline{e}_J^{VI} = \{ \underline{e}_1^{VI}, \underline{e}_2^{VI} \} \\
 7) \quad & \underline{e}_J^{VII} = \{ \underline{e}_1^{VII}, \underline{e}_2^{VII} \}
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Por tanto, las ecuaciones (1.42) toman la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \underline{a}_1^I(t) = \rho(P(t), \underline{e}_1^I) = P(t) * \underline{e}_1^I \\
 2) \quad & \underline{a}_1^{II}(t) = \rho(Q(t), \underline{e}_1^{II}) = Q(t) * \underline{e}_1^{II} \\
 3) \quad & \underline{a}_1^{III}(t) = \rho(R(t), \underline{e}_1^{III}) = R(t) * \underline{e}_1^{III} \\
 4) \quad & \underline{a}_1^{IV}(t) = \rho(S(t), \underline{e}_1^{IV}) = S(t) * \underline{e}_1^{IV} \\
 5) \quad & \underline{a}_1^V(t) = \rho(T(t), \underline{e}_1^V) = T(t) * \underline{e}_1^V \\
 6) \quad & \underline{a}_1^{VI}(t) = \rho(U(t), \underline{e}_1^{VI}) = U(t) * \underline{e}_1^{VI} \\
 7) \quad & \underline{a}_1^{VII}(t) = \rho(V(t), \underline{e}_1^{VII}) = V(t) * \underline{e}_1^{VII}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Por otro lado, las expresiones (2.8) se pueden representar en términos de los complejos $P(t), Q(t), R(t), S(t), T(t), U(t), V(t) \in \mathbb{R}^2$; esto es:

$$\begin{aligned}
1) \quad \underline{r}'_{3,0}(t) &= \underline{r}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{P(t) * \underline{e}_2'\} + l_{3,2} \cdot \{Q(t) * \underline{e}_2''\} & (2.16) \\
2) \quad \underline{r}'_{6,0}(t) &= \underline{r}_{4,0} + l_{5,4} \cdot \{R(t) * \underline{e}_2'''\} + l_{6,5} \cdot \{S(t) * \underline{e}_2^{IV}\} \\
3) \quad \underline{r}'_{9,0}(t) &= \underline{r}_{7,0} + l_{8,7} \cdot \{T(t) * \underline{e}_2^V\} + l_{9,8} \cdot \{U(t) * \underline{e}_2^{VI}\}
\end{aligned}$$

También, la expresión (2.9) se puede escribir de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
\underline{r}'_{pot,0}(t) &= \underline{r}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{P(t) * \underline{e}_2'\} + l_{3,2} \cdot \{Q(t) * \underline{e}_2''\} + & (2.17) \\
&+ l_{pot,3} \cdot \{V(t) * \underline{e}_2^{VII}\}
\end{aligned}$$

Para poder encontrar las ecuaciones explícitas de velocidad en términos de los complejos, es necesario derivar con respecto al tiempo $t \in J$ las expresiones (2.15), esto es:

$$\begin{aligned}
1) \quad \dot{\underline{a}}_1'(t) &= (P(t) * \underline{e}_1') = \dot{P}(t) * \underline{e}_1' & (2.18) \\
2) \quad \dot{\underline{a}}_1''(t) &= (Q(t) * \underline{e}_1'') = \dot{Q}(t) * \underline{e}_1'' \\
3) \quad \dot{\underline{a}}_1'''(t) &= (R(t) * \underline{e}_1''') = \dot{R}(t) * \underline{e}_1''' \\
4) \quad \dot{\underline{a}}_1^{IV}(t) &= (S(t) * \underline{e}_1^{IV}) = \dot{S}(t) * \underline{e}_1^{IV} \\
5) \quad \dot{\underline{a}}_1^V(t) &= (T(t) * \underline{e}_1^V) = \dot{T}(t) * \underline{e}_1^V \\
6) \quad \dot{\underline{a}}_1^{VI}(t) &= (U(t) * \underline{e}_1^{VI}) = \dot{U}(t) * \underline{e}_1^{VI} \\
7) \quad \dot{\underline{a}}_1^{VII}(t) &= (V(t) * \underline{e}_1^{VII}) = \dot{V}(t) * \underline{e}_1^{VII}
\end{aligned}$$

Aquí, $\dot{\underline{e}}_1' \equiv \dot{\underline{e}}_1'' \equiv \dot{\underline{e}}_1''' \equiv \dot{\underline{e}}_1^{IV} \equiv \dot{\underline{e}}_1^V \equiv \dot{\underline{e}}_1^{VI} \equiv \dot{\underline{e}}_1^{VII} \equiv \underline{0}$.

Por tanto, las expresiones (2.11) se escriben en términos de las ecuaciones (2.18) de la manera siguiente:

$$1) \quad \dot{r}_{3,0}^I(t) = l_{2,1} \cdot \left\{ \dot{P}(t) * e_1^I \right\} + l_{3,2} \cdot \left\{ \dot{Q}(t) * e_1^{II} \right\} \quad (2.19)$$

$$2) \quad \dot{r}_{6,0}^I(t) = l_{5,4} \cdot \left\{ \dot{R}(t) * e_1^{III} \right\} + l_{3,2} \cdot \left\{ \dot{S}(t) * e_1^{IV} \right\}$$

$$3) \quad \dot{r}_{9,0}^I(t) = l_{8,7} \cdot \left\{ \dot{T}(t) * e_1^V \right\} + l_{3,2} \cdot \left\{ \dot{U}(t) * e_1^{IV} \right\}$$

También la expresión (2.12) se puede representar en términos de las derivadas de los complejos asociados; esto es:

$$\dot{r}_{pot,0}^I(t) = l_{2,1} \cdot \left\{ \dot{P}(t) * e_1^I \right\} + l_{3,2} \cdot \left\{ \dot{Q}(t) * e_1^{II} \right\} + (2.20) + l_{pot,3} \cdot \left\{ \dot{V}(t) * e_1^{V''} \right\}$$

2.4 Ecuaciones de velocidad instantáneas.

Es importante mencionar que las ecuaciones (2.19) y (2.20) descritas en la sección anterior, están en función de las bases locales definidas en la configuración no deformada y, por tanto, dichas expresiones no pueden ser representativas de los cambios de velocidad en la configuración deformada.

Para poder transformar las expresiones (2.19) y (2.20) al régimen de velocidades instantáneas; es decir, a velocidades en la configuración deformada, es necesario utilizar la siguiente identidad:

$$K(t) * K(t) = I(t) \quad (2.21)$$

Aquí, $K(t) \in \mathfrak{R}^2$ es un complejo genérico, $K(t) \in \mathfrak{R}^2$ es el conjugado de $K(t) \in \mathfrak{R}^2$ e $I(t) \in \mathfrak{R}^2$ es la identidad en \mathfrak{R}^2 .

Considere ahora las siguientes relaciones:

- 1) $a_i'(t) = P(t) * e_i'$
- 2) $a_i''(t) = Q(t) * e_i''$
- 3) $a_i'''(t) = R(t) * e_i'''$
- 4) $a_i^{IV}(t) = S(t) * e_i^{IV}$
- 5) $a_i^V(t) = T(t) * e_i^V$
- 6) $a_i^{VI}(t) = U(t) * e_i^{VI}$
- 7) $a_i^{VII}(t) = V(t) * e_i^{VII}$

Dichas relaciones están dadas por las ecuaciones (2.15). Al aplicar en cada una de las expresiones (2.15) la identidad (2.21) se obtienen los siguientes resultados:

- 1) $e_i' = P(t) * a_i'(t)$ (2.22)
- 2) $e_i'' = Q(t) * a_i''(t)$
- 3) $e_i''' = R(t) * a_i'''(t)$
- 4) $e_i^{IV} = S(t) * a_i^{IV}(t)$
- 5) $e_i^V = T(t) * a_i^V(t)$
- 6) $e_i^{VI} = U(t) * a_i^{VI}(t)$
- 7) $e_i^{VII} = V(t) * a_i^{VII}(t)$

Para poder obtener las expresiones (2.22), se ha utilizado el siguiente procedimiento:

- 1) Definir la relación:

$$a_i'(t) = P(t) * e_i'(t_0)$$

- 2) Multiplicar ambos lados de la ecuación anterior por el complejo

$$P(t) * a_i'(t) = P(t) * P(t) * e_i'(t_0)$$

3) Aplicar la identidad (2.21), es decir,

$$P(t) * a_1'(t) = e_i'$$

Por tanto, las ecuaciones de velocidad instantáneas (configuración deformada) se obtienen al sustituir las expresiones (2.22) en las ecuaciones (2.19); esto es:

$$1) \quad \dot{r}_{3,0}'(t) = I_{2,1} \bullet \left\{ \dot{P}(t) * P(t) * a_1'(t) \right\} + I_{3,2} \bullet \left\{ \dot{Q}(t) * Q(t) * a_1''(t) \right\} \quad (2.23)$$

$$2) \quad \dot{r}_{6,0}'(t) = I_{5,4} \bullet \left\{ \dot{R}(t) * R(t) * a_1'''(t) \right\} + I_{6,5} \bullet \left\{ \dot{S}(t) * S(t) * a_1^{IV}(t) \right\}$$

$$3) \quad \dot{r}_{9,0}'(t) = I_{8,7} \bullet \left\{ \dot{T}(t) * T(t) * a_1^V(t) \right\} + I_{9,8} \bullet \left\{ \dot{U}(t) * U(t) * a_1^{VI}(t) \right\}$$

También la expresión (2.20) se puede escribir de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{r}_{pot,0}'(t) = & I_{2,1} \bullet \left\{ \dot{P}(t) * P(t) * a_1'(t) \right\} + I_{3,2} \bullet \left\{ \dot{Q}(t) * Q(t) * a_1''(t) \right\} + \\ & + I_{pot,3} \bullet \left\{ \dot{V}(t) * V(t) * a_1^{V''}(t) \right\} \end{aligned} \quad (2.24)$$

2.5 Derivadas de las normas unitarias de los complejos.

Para completar el sistema de ecuaciones de velocidad es necesario derivar las normas unitarias de los complejos asociados. Las normas se pueden escribir en términos del tiempo $t \in J$ al considerar funciones del tipo $p : J \rightarrow \mathfrak{R}$, esto es:

$$1) \quad P(t) = P_0^2(t) + P_1^2(t) = 1 \quad (2.25)$$

$$2) \quad Q(t) = Q_0^2(t) + Q_1^2(t) = 1$$

$$3) \quad R(t) = R_0^2(t) + R_1^2(t) = 1$$

$$4) \quad S(t) = S_0^2(t) + S_1^2(t) = 1$$

$$5) \quad T(t) = T_0^2(t) + T_1^2(t) = 1$$

$$6) \quad U(t) = U_0^2(t) + U_1^2(t) = 1$$

$$7) \quad V(t) = V_0^2(t) + V_1^2(t) = 1$$

Las derivadas con respecto al tiempo $t \in J$ de las expresiones (2.25) son las siguientes:

$$1) \quad \dot{P}_0(t)P_0(t) + \dot{P}_1(t)P_1(t) = 0 \quad (2.26)$$

$$2) \quad \dot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_1(t)Q_1(t) = 0$$

$$3) \quad \dot{R}_0(t)R_0(t) + \dot{R}_1(t)R_1(t) = 0$$

$$4) \quad \dot{S}_0(t)S_0(t) + \dot{S}_1(t)S_1(t) = 0$$

$$5) \quad \dot{T}_0(t)T_0(t) + \dot{T}_1(t)T_1(t) = 0$$

$$6) \quad \dot{U}_0(t)U_0(t) + \dot{U}_1(t)U_1(t) = 0$$

$$7) \quad \dot{V}_0(t)V_0(t) + \dot{V}_1(t)V_1(t) = 0$$

Es importante mencionar que para derivar las expresiones (2.26) se ha utilizado la regla de la cadena.

2.6 Relaciones entre los componentes de las velocidades angulares y los componentes de las derivadas de los complejos.

En esta sección se presentan las relaciones existentes entre los componentes de las derivadas de los complejos y las velocidades angulares. Para ello, se consideran funciones del tipo $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $p : J \rightarrow \mathbb{R}$. Las expresiones (1.15) definidas en la sección 1.6 del capítulo anterior se pueden representar en función del tiempo $t \in J$ de la forma siguiente:

- 1) $P(t) = \{P_0(t), P_1(t)\}$; $P_0(t) \in \mathbb{R}$; $P_0(t) = \text{Cos } \alpha_1(t)$ (2.27)
 $P_1(t) \in \mathbb{R}$; $P_1(t) = \pm \text{Sen } \alpha_1(t)$
- 2) $Q(t) = \{Q_0(t), Q_1(t)\}$; $Q_0(t) \in \mathbb{R}$; $Q_0(t) = \text{Cos } \alpha_2(t)$
 $Q_1(t) \in \mathbb{R}$; $Q_1(t) = \pm \text{Sen } \alpha_2(t)$
- 3) $R(t) = \{R_0(t), R_1(t)\}$; $R_0(t) \in \mathbb{R}$; $R_0(t) = \text{Cos } \alpha_3(t)$
 $R_1(t) \in \mathbb{R}$; $R_1(t) = \pm \text{Sen } \alpha_3(t)$
- 4) $S(t) = \{S_0(t), S_1(t)\}$; $S_0(t) \in \mathbb{R}$; $S_0(t) = \text{Cos } \alpha_4(t)$
 $S_1(t) \in \mathbb{R}$; $S_1(t) = \pm \text{Sen } \alpha_4(t)$
- 5) $T(t) = \{T_0(t), T_1(t)\}$; $T_0(t) \in \mathbb{R}$; $T_0(t) = \text{Cos } \alpha_5(t)$
 $T_1(t) \in \mathbb{R}$; $T_1(t) = \pm \text{Sen } \alpha_5(t)$
- 6) $U(t) = \{U_0(t), U_1(t)\}$; $U_0(t) \in \mathbb{R}$; $U_0(t) = \text{Cos } \alpha_6(t)$
 $U_1(t) \in \mathbb{R}$; $U_1(t) = \pm \text{Sen } \alpha_6(t)$
- 7) $V(t) = \{V_0(t), V_1(t)\}$; $V_0(t) \in \mathbb{R}$; $V_0(t) = \text{Cos } \alpha_7(t)$
 $V_1(t) \in \mathbb{R}$; $V_1(t) = \pm \text{Sen } \alpha_7(t)$

Las derivadas con respecto al tiempo $t \in J$ de las expresiones (2.27) son:

$$1) \quad \dot{P}(t) = \left\{ \dot{P}_0(t), \dot{P}_1(t) \right\} ; \dot{P}_0(t) \in \mathfrak{R} ; \dot{P}_0(t) = -\dot{\alpha}_1(t) \text{Sen } \alpha_1(t) \quad (2.28)$$

$$\dot{P}_1(t) \in \mathfrak{R} ; \dot{P}_1(t) = -\dot{\alpha}_1(t) \text{Cos } \alpha_1(t)$$

$$2) \quad \dot{Q}(t) = \left\{ \dot{Q}_0(t), \dot{Q}_1(t) \right\} ; \dot{Q}_0(t) \in \mathfrak{R} ; \dot{Q}_0(t) = -\dot{\alpha}_2(t) \text{Sen } \alpha_2(t)$$

$$\dot{Q}_1(t) \in \mathfrak{R} ; \dot{Q}_1(t) = -\dot{\alpha}_2(t) \text{Cos } \alpha_2(t)$$

$$3) \quad \dot{R}(t) = \left\{ \dot{R}_0(t), \dot{R}_1(t) \right\} ; \dot{R}_0(t) \in \mathfrak{R} ; \dot{R}_0(t) = -\dot{\alpha}_3(t) \text{Sen } \alpha_3(t)$$

$$\dot{R}_1(t) \in \mathfrak{R} ; \dot{R}_1(t) = -\dot{\alpha}_3(t) \text{Cos } \alpha_3(t)$$

$$4) \quad \dot{S}(t) = \left\{ \dot{S}_0(t), \dot{S}_1(t) \right\} ; \dot{S}_0(t) \in \mathfrak{R} ; \dot{S}_0(t) = -\dot{\alpha}_4(t) \text{Sen } \alpha_4(t)$$

$$\dot{S}_1(t) \in \mathfrak{R} ; \dot{S}_1(t) = -\dot{\alpha}_4(t) \text{Cos } \alpha_4(t)$$

$$5) \quad \dot{T}(t) = \left\{ \dot{T}_0(t), \dot{T}_1(t) \right\} ; \dot{T}_0(t) \in \mathfrak{R} ; \dot{T}_0(t) = -\dot{\alpha}_5(t) \text{Sen } \alpha_5(t)$$

$$\dot{T}_1(t) \in \mathfrak{R} ; \dot{T}_1(t) = -\dot{\alpha}_5(t) \text{Cos } \alpha_5(t)$$

$$6) \quad \dot{U}(t) = \left\{ \dot{U}_0(t), \dot{U}_1(t) \right\} ; \dot{U}_0(t) \in \mathfrak{R} ; \dot{U}_0(t) = -\dot{\alpha}_6(t) \text{Sen } \alpha_6(t)$$

$$\dot{U}_1(t) \in \mathfrak{R} ; \dot{U}_1(t) = -\dot{\alpha}_6(t) \text{Cos } \alpha_6(t)$$

$$7) \quad \dot{V}(t) = \left\{ \dot{V}_0(t), \dot{V}_1(t) \right\} ; \dot{V}_0(t) \in \mathfrak{R} ; \dot{V}_0(t) = -\dot{\alpha}_7(t) \text{Sen } \alpha_7(t)$$

$$\dot{V}_1(t) \in \mathfrak{R} ; \dot{V}_1(t) = -\dot{\alpha}_7(t) \text{Cos } \alpha_7(t)$$

Aquí, $\dot{\alpha}_1(t), \dot{\alpha}_2(t), \dot{\alpha}_3(t), \dot{\alpha}_4(t), \dot{\alpha}_5(t), \dot{\alpha}_6(t), \dot{\alpha}_7(t) \in \mathfrak{R}$, son las velocidades angulares.

2.7 Derivadas de las relaciones geométricas sobre la plataforma.

Para poder utilizar las ecuaciones de velocidad (2.23) es necesario derivar con respecto al tiempo $t \in J$ las relaciones (1.9) definidas en el capítulo anterior.

Dichas expresiones se pueden escribir en función del tiempo $t \in J$, usando funciones del tipo $\underline{r} : J \rightarrow \mathfrak{R}^2$ y $\alpha : J \rightarrow \mathfrak{R}$, de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \underline{r}'_{3,0}(t) &= (r'_{3,0,x}(t), r'_{3,0,y}(t)) = [x'_{pot,0}(t) - l_{pot,3} \text{Cos} \alpha_{pot}(t), y'_{pot,0}(t) - \\
 &\quad - l_{pot,3} \text{Sen} \alpha_{pot}(t)] \quad (2.29) \\
 2) \quad \underline{r}'_{6,0}(t) &= [r'_{3,0,x}(t) + l_{3,6} \text{Cos}(\alpha_{pot}(t) - \beta_{pot}(t)), r'_{3,0,y}(t) + \\
 &\quad + l_{3,6} \text{Sen}(\alpha_{pot}(t) - \beta_{pot}(t))] \\
 3) \quad \underline{r}'_{9,0}(t) &= [r'_{3,0,x}(t) + l_{3,9} \text{Cos}(\alpha_{pot}(t) + \beta_{pot}(t)), r'_{3,0,y}(t) + \\
 &\quad + l_{3,9} \text{Sen}(\alpha_{pot}(t) + \beta_{pot}(t))]
 \end{aligned}$$

Es importante señalar que las relaciones anteriormente descritas han sido definidas en la configuración deformada. Por tanto, las velocidades de las relaciones (2.29) se encuentran al tomar su derivada con respecto al tiempo $t \in J$, esto es:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \dot{\underline{r}}'_{3,0}(t) &= (\dot{r}'_{3,0,x}(t), \dot{r}'_{3,0,y}(t)) = [\dot{x}'_{pot,0}(t) + l_{pot,3} (-\dot{\alpha}_{pot}(t)) \text{Sen} \alpha_{pot}(t), \\
 &\quad \dot{y}'_{pot,0}(t) - l_{pot,3} (\dot{\alpha}_{pot}(t)) \text{Cos} \alpha_{pot}(t)] \quad (2.30) \\
 2) \quad \dot{\underline{r}}'_{6,0}(t) &= [\dot{r}'_{3,0,x}(t) - l_{3,6} (-\dot{\alpha}_{pot}(t)) \text{Sen}(\alpha_{pot}(t) - \beta_{pot}(t)), \\
 &\quad \dot{r}'_{3,0,y}(t) + l_{3,6} (\dot{\alpha}_{pot}(t)) \text{Cos}(\alpha_{pot}(t) - \beta_{pot}(t))] \\
 3) \quad \dot{\underline{r}}'_{9,0}(t) &= [\dot{r}'_{3,0,x}(t) - l_{3,9} (-\dot{\alpha}_{pot}(t)) \text{Sen}(\alpha_{pot}(t) + \beta_{pot}(t)),
 \end{aligned}$$

$$\dot{r}_{3,0,y}^l(t) + l_{3,0}(\dot{\alpha}_{pot}(t)) \cos(\alpha_{pot}(t) - \beta_{pot}(t))]$$

Las relaciones (2.30) se pueden interpretar de la manera siguiente:

- 1) "Conocidas las velocidades de los puntos (3)^l, (6)^l y (9)^l dadas por $\dot{r}_{3,0}^l(t)$, $\dot{r}_{6,0}^l(t)$, $\dot{r}_{9,0}^l(t) \in \mathbb{R}^2$, son también conocidas, aplicando las relaciones (2.30), la velocidad del centroide de P_L dada por $\dot{r}_{pot,0}^l(t) = (\dot{x}_{pot,0,x}(t), \dot{y}_{pot,0,y}(t))$ y la velocidad angular de la plataforma dada por $\dot{\alpha}_{pot}(t) = \dot{\alpha}_1(t)$ o propiamente dicho, se conoce $\dot{V}(t) = \{\dot{V}_0(t), \dot{V}_1(t)\}$ ".
- 2) "Conocidos $\dot{r}_{pot,0}^l(t) \in \mathbb{R}^2$ y $\dot{V}(t) = \{\dot{V}_0(t), \dot{V}_1(t)\}$, se encuentran al aplicar las relaciones (2.30), las velocidades $\dot{r}_{3,0}^l(t) \in \mathbb{R}^2$, $\dot{r}_{6,0}^l(t) \in \mathbb{R}^2$ y $\dot{r}_{9,0}^l(t) \in \mathbb{R}^2$ ".

2.8 Formulación del problema cinemático inverso de velocidad.

En esta sección es planteado un problema de fundamental importancia en la cinemática de los cuerpos rígidos: el problema cinemático inverso de velocidad. Dicho problema está asociado con la configuración deformada del robot paralelo mostrado en la figura 1.8.

"Dados, $\dot{r}_{3,0}^l(t) \in \mathbb{R}^2$, $\dot{r}_{6,0}^l(t) \in \mathbb{R}^2$, $\dot{r}_{9,0}^l(t) \in \mathbb{R}^2$, $l_{2,1}$, $l_{3,2}$, $l_{5,4}$, $l_{6,5}$, $l_{8,7}$, $l_{9,8} \in \mathbb{R}^+$, $P(t) = \{P_0(t), P_1(t)\}$, $Q(t) = \{Q_0(t), Q_1(t)\}$, $R(t) = \{R_0(t), R_1(t)\}$, $S(t) = \{S_0(t), S_1(t)\}$, $T(t) = \{T_0(t), T_1(t)\}$, $U(t) = \{U_0(t), U_1(t)\}$, con $P(t) = Q(t) = R(t) = S(t) = T(t) = U(t) = 1$, $p(t_0) = \{p_0(t_0), p_1(t_0)\}$, $q(t_0) = \{q_0(t_0), q_1(t_0)\}$, $r(t_0) = \{r_0(t_0), r_1(t_0)\}$, $s(t_0) = \{s_0(t_0), s_1(t_0)\}$, $t(t_0) = \{t_0(t_0), t_1(t_0)\}$, $u(t_0) = \{u_0(t_0), u_1(t_0)\}$, con $p(t_0) = q(t_0) = r(t_0) = s(t_0) = t(t_0) = u(t_0) = 1$, encuentre:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= \left\{ \dot{P}_0(t), \dot{P}_1(t) \right\}, & \dot{Q}(t) &= \left\{ \dot{Q}_0(t), \dot{Q}_1(t) \right\}, & \dot{R}(t) &= \left\{ \dot{R}_0(t), \dot{R}_1(t) \right\}, \\ \dot{S}(t) &= \left\{ \dot{S}_0(t), \dot{S}_1(t) \right\}, & \dot{T}(t) &= \left\{ \dot{T}_0(t), \dot{T}_1(t) \right\}, & \dot{U}(t) &= \left\{ \dot{U}_0(t), \dot{U}_1(t) \right\}, \end{aligned}$$

expresiones (2.23) sean satisfechas y,

- 1) $\dot{P}_0(t)P_0(t) + \dot{P}_1(t)P_1(t) = 0$
- 2) $\dot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_1(t)Q_1(t) = 0$
- 3) $\dot{R}_0(t)R_0(t) + \dot{R}_1(t)R_1(t) = 0$
- 4) $\dot{S}_0(t)S_0(t) + \dot{S}_1(t)S_1(t) = 0$
- 5) $\dot{T}_0(t)T_0(t) + \dot{T}_1(t)T_1(t) = 0$
- 6) $\dot{U}_0(t)U_0(t) + \dot{U}_1(t)U_1(t) = 0$

2.9 Ecuaciones de velocidad para el planteamiento del problema directo.

El interés en esta sección es encontrar las ecuaciones de velocidad que permitan formular el problema cinemático directo de velocidad relacionado con el robot paralelo motivo de estudio. Para ello, se utilizarán funciones del tipo $\underline{r} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ para transformar las ecuaciones (1.46) descritas en la sección 1.7 del capítulo anterior, en función del tipo $t \in J$.

2.9.1 Descripción de las ecuaciones de lazo y sus derivadas.

Sea $\underline{r} : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función del tiempo. Entonces las expresiones (1.46) se pueden escribir en términos de $t \in J$ de la manera siguiente:

- 1) $r'_{3,0}(t) = r_{1,0}(t) + L'_{2,1}(t) + L'_{3,2}(t) \quad (2.31)$
- 2) $r'_{3,0}(t) = r_{4,0}(t) + L'_{5,4}(t) + L'_{6,5}(t) + L'_{3,6}(t)$
- 3) $r'_{3,0}(t) = r_{7,0}(t) + L'_{8,7}(t) + L'_{9,8}(t) + L'_{3,9}(t)$

Las derivadas con respecto al tiempo $t \in J$ de las expresiones (2.31), son:

$$1) \quad \dot{\mathbf{r}}_{3,0}^j(t) = \dot{\mathbf{L}}_{2,1}^j(t) + \dot{\mathbf{L}}_{3,2}^j(t) \quad (2.32)$$

$$2) \quad \dot{\mathbf{r}}_{3,0}^j(t) = \dot{\mathbf{L}}_{5,4}^j(t) + \dot{\mathbf{L}}_{6,5}^j(t) + \dot{\mathbf{L}}_{3,6}^j(t)$$

$$3) \quad \dot{\mathbf{r}}_{3,0}^j(t) = \dot{\mathbf{L}}_{8,7}^j(t) + \dot{\mathbf{L}}_{9,8}^j(t) + \dot{\mathbf{L}}_{3,9}^j(t)$$

De acuerdo con las ecuaciones de lazo (1.47) y con las expresiones (2.31) las derivadas de las ecuaciones de lazo son las siguientes:

$$1) \quad \dot{\mathbf{L}}_{2,1}^j(t) + \dot{\mathbf{L}}_{3,2}^j(t) - [\dot{\mathbf{L}}_{3,4}^j(t) + \dot{\mathbf{L}}_{6,5}^j(t) + \dot{\mathbf{L}}_{3,6}^j(t)] = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

$$2) \quad \dot{\mathbf{L}}_{2,1}^j(t) + \dot{\mathbf{L}}_{3,2}^j(t) - [\dot{\mathbf{L}}_{8,7}^j(t) + \dot{\mathbf{L}}_{9,8}^j(t) + \dot{\mathbf{L}}_{3,9}^j(t)] = \mathbf{0}$$

2.9.2 Ecuaciones de velocidad en términos de las derivadas de las bases locales.

Las expresiones (1.48) se pueden representar usando funciones del tipo $\mathbf{l}: J \rightarrow \mathfrak{R}^+$ y $\underline{\mathbf{a}}: J \rightarrow \mathfrak{R}^2$, en función del tiempo $t \in J$, esto es:

$$1) \quad \mathbf{L}_{3,6}^j(t) = l_{3,6} \bullet \mathbf{a}_1^{VIII}(t) \quad (2.34)$$

$$2) \quad \mathbf{L}_{3,9}^j(t) = l_{3,9} \bullet \mathbf{a}_1^{IX}(t)$$

Por tanto, las expresiones (1.47) se representan, al utilizar las ecuaciones (1.37) y (2.34), en términos de las bases locales deformadas, de la manera siguiente:

$$1) \quad \mathbf{r}_{1,0}(t_0) + l_{2,1} \bullet \mathbf{a}_1^I(t) + l_{3,2} \bullet \mathbf{a}_1^{II}(t) - [\mathbf{r}_{4,0}(t_0) + l_{5,4} \bullet \mathbf{a}_1^{III}(t) + l_{6,5} \bullet \mathbf{a}_1^{IV}(t) + l_{3,6} \bullet \mathbf{a}_1^{VIII}(t)] = \mathbf{0} \quad (2.35)$$

$$2) \quad \mathbf{r}_{1,0}(t_0) + l_{2,1} \bullet \mathbf{a}_1^I(t) + l_{3,2} \bullet \mathbf{a}_1^{II}(t) - [\mathbf{r}_{7,0}(t_0) + l_{8,7} \bullet \mathbf{a}_1^V(t) +$$

$$+I_{9,8} \cdot \dot{\mathbf{a}}_1^{V'}(t) + I_{3,9} \cdot \dot{\mathbf{a}}_1^{X'}(t)] = 0$$

Las derivadas con respecto al tiempo $t \in J$ de las ecuaciones (2.35) son:

$$(1) \quad I_{2,1} \cdot \dot{\mathbf{a}}_1'(t) + I_{3,2} \cdot \dot{\mathbf{a}}_1''(t) - \left[I_{5,4} \cdot \dot{\mathbf{a}}_1'''(t) + \right. \quad (2.36)$$

$$\left. + I_{6,5} \cdot \dot{\mathbf{a}}_1^{V'}(t) + I_{3,6} \cdot \dot{\mathbf{a}}_1^{V''}(t) \right] = 0$$

$$2) \quad I_{2,1} \cdot \dot{\mathbf{a}}_1'(t) + I_{3,2} \cdot \dot{\mathbf{a}}_1''(t) - \left[I_{8,7} \cdot \dot{\mathbf{a}}_1^{V'}(t) + \right.$$

$$\left. + I_{9,8} \cdot \dot{\mathbf{a}}_1^{V'}(t) + I_{3,9} \cdot \dot{\mathbf{a}}_1^{X'}(t) \right] = 0$$

2.9.3 Ecuaciones de velocidad en términos de complejos.

Sean $p : J \rightarrow \mathfrak{R}^2$ una función del tiempo, entonces los complejos $W \in \mathfrak{R}^2$ y $X \in \mathfrak{R}^2$ definidos sobre la plataforma P_L^1 se pueden escribir de la siguiente manera:

$$1) \quad W(t) = \{W_0(t), W_1(t)\} \quad (2.37)$$

$$2) \quad X(t) = \{X_0(t), X_1(t)\}$$

Por otro lado, las bases locales $e_J^{V''''} \in \mathfrak{R}^2$ y $e_J^{X'} \in \mathfrak{R}^2$ también se pueden escribir en función de $t \in J$, esto es:

$$1) \quad e_J^{V''''} = \{e_1^{V''''}, e_2^{V''''}\} \quad (2.38)$$

$$2) \quad e_J^{X'} = \{e_1^{X'}, e_2^{X'}\}$$

Las bases locales $a_J^{V''''}(t) \in \mathfrak{R}^2$ y $a_J^{X'}(t) \in \mathfrak{R}^2$ son representadas en términos de $a_J^{V''}(t) \in \mathfrak{R}^2$ y con las expresiones (2.34) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
1) \quad \mathbf{a}_1^{V'''}(t) &= \rho(W(t), \mathbf{a}_1^{V''}(t)) = \rho(W(t), \rho(V(t), \mathbf{e}_1^{V''})) = & (2.39) \\
&= W(t) * V(t) * \mathbf{e}_1^{V''} \\
2) \quad \mathbf{a}_1^{X'}(t) &= \rho(X(t), \mathbf{a}_1^{X}(t)) = \rho(X(t), \rho(V(t), \mathbf{e}_1^{V''})) = \\
&= X(t) * V(t) * \mathbf{e}_1^{V''}
\end{aligned}$$

Las derivadas con respecto al tiempo de las expresiones anteriores son:

$$\begin{aligned}
1) \quad \dot{\mathbf{a}}_1^{V'''}(t) &= W(t) * \dot{V}(t) * \mathbf{e}_1^{V''} & (2.40) \\
2) \quad \dot{\mathbf{a}}_1^{X'}(t) &= X(t) * \dot{V}(t) * \mathbf{e}_1^{V''}
\end{aligned}$$

$$\text{Aquí, } \dot{W}(t) = \dot{X}(t) = \dot{\mathbf{e}}_1^{V''} = 0$$

Las velocidades relativas con la configuración deformada son:

$$\begin{aligned}
1) \quad \dot{\mathbf{a}}_1^{V'''}(t) &= W(t) * \dot{V}(t) * V(t) * W(t) * \mathbf{a}_1^{V''}(t) & (2.41) \\
2) \quad \dot{\mathbf{a}}_1^{X'}(t) &= X(t) * \dot{V}(t) * V(t) * X(t) * \mathbf{a}_1^{V''}(t)
\end{aligned}$$

Aquí, se ha utilizado la identidad $K(t) * K(t) = I(t)$ dos veces.

Por tanto, las expresiones (2.36) se podrán escribir en términos de las derivadas de los complejos de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
1) \quad & I_{2,1} \bullet \left\{ \dot{P}(t) * P(t) * \mathbf{a}_1^{X'}(t) \right\} + I_{3,2} \bullet \left\{ \dot{Q}(t) * Q(t) * \mathbf{a}_1^{V''}(t) \right\} + & (2.42) \\
& \left[I_{5,4} \bullet \left\{ \dot{R}(t) * R(t) * \mathbf{a}_1^{V'''}(t) \right\} + I_{6,5} \bullet \left\{ \dot{S}(t) * S(t) * \mathbf{a}_1^{V'}(t) \right\} + \right. \\
& \left. I_{3,6} \bullet \left\{ W(t) * \dot{V}(t) * V(t) * W(t) * \mathbf{a}_1^{V''}(t) \right\} \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad & I_{2,1} \bullet \left\{ \dot{P}(t) * P(t) * a_1'(t) \right\} + I_{3,2} \bullet \left\{ \dot{Q}(t) * Q(t) * a_1''(t) \right\} - \\
& I_{8,7} \bullet \left\{ \dot{T}(t) * T(t) * a_1^v(t) \right\} + I_{9,8} \bullet \left\{ \dot{U}(t) * U(t) * a_1^{v'}(t) \right\} + \\
& + I_{3,9} \bullet \left\{ X(t) * \dot{V}(t) * V(t) * X(t) * a_1^{v''}(t) \right\}] = 0
\end{aligned}$$

Para generar la expresión (2.42) se han utilizado las expresiones del lado derecho de (2.23) y la ecuación (2.41).

Es importante señalar que todas las variables requeridas para plantear el problema cinemático directo de velocidad, ya han sido caracterizadas. Para los propósitos de la siguiente sección se rescribirá la expresión (2.24), esto es:

$$\begin{aligned}
r'_{\text{pot},0}(t) = & I_{2,1} \bullet \left\{ \dot{P}(t) * P(t) * a_1'(t) \right\} + I_{3,2} \bullet \left\{ \dot{Q}(t) * Q(t) * a_1''(t) \right\} + \\
& + I_{\text{pot},3} \bullet \left\{ \dot{V}(t) * V(t) * a_1^{v''}(t) \right\}
\end{aligned}$$

2.9.4 Planteamiento del problema directo de velocidad.

En esta sección es formulado otro problema de fundamental importancia en la cinemática de los cuerpos rígidos: el problema directo de velocidad. Dicho problema está asociado con la configuración deformada del robot paralelo mostrada en la figura 1.8.

“Dados, $\dot{P}(t) = \left\{ \dot{P}_0(t), \dot{P}_1(t) \right\}$, $\dot{R}(t) = \left\{ \dot{R}_0(t), \dot{R}_1(t) \right\}$, $\dot{T}(t) = \left\{ \dot{T}_0(t), \dot{T}_1(t) \right\}$, con

$P(t) = R(t) = T(t) = 0$, $I_{2,1}(t)$, $I_{3,2}(t)$, $I_{5,4}(t)$, $I_{6,5}(t)$, $I_{8,7}(t)$, $I_{9,8}(t)$, $I_{\text{pot},3}(t)$, $I_{3,6}(t)$, $I_{3,9}(t) \in \mathbb{R}^+$, $P(t) = \{P_0(t), P_1(t)\}$, $P(t) = \{P_0(t), -P_1(t)\}$, $Q(t) = \{Q_0(t), Q_1(t)\}$, $\bar{Q}(t) = \{Q_0(t), -Q_1(t)\}$, $R(t) = \{R_0(t), R_1(t)\}$, $R(t) = \{R_0(t), -R_1(t)\}$, $S(t) = \{S_0(t), S_1(t)\}$, $S(t) = \{S_0(t), -S_1(t)\}$, $T(t) = \{T_0(t), T_1(t)\}$, $T(t) = \{T_0(t), -T_1(t)\}$, $U(t) = \{U_0(t), U_1(t)\}$, $U(t) = \{U_0(t), -U_1(t)\}$, $V(t) = \{V_0(t), V_1(t)\}$, $V(t) = \{V_0(t), -V_1(t)\}$, $W(t) = \{W_0(t),$

$W_1(t)\}$, $W(t)=\{W_0(t), -W_1(t)\}$, $X(t)=\{X_0(t), X_1(t)\}$, $X(t)=\{X_0(t), -X_1(t)\}$, Con
 $P(t) = Q(t) = R(t) = S(t) = T(t) = U(t) = V(t) = W(t) = X(t) = 1$,
 $p(t_0)=\{p_0(t_0), p_1(t_0)\}$, $q(t_0)=\{q_0(t_0), q_1(t_0)\}$, $r(t_0)=\{r_0(t_0), r_1(t_0)\}$, $s(t_0)=\{s_0(t_0),$
 $s_1(t_0)\}$, $t(t_0)=\{t_0(t_0), t_1(t_0)\}$, $u(t_0)=\{u_0(t_0), u_1(t_0)\}$, $v(t_0)=\{v_0(t_0), v_1(t_0)\}$,
 $w(t_0)=\{w_0(t_0), w_1(t_0)\}$, $x(t_0)=\{x_0(t_0), x_1(t_0)\}$, con $p(t_0) = q(t_0) = r(t_0) = s(t_0) =$
 $t(t_0) = u(t_0) = v(t_0) = w(t_0) = x(t_0) = 1$, encuentre: $r'_{pot,0}(t) \in \mathbb{R}^2$,

$$\dot{Q}(t) = \left\{ \dot{Q}_0(t), \dot{Q}_1(t) \right\}, \quad \dot{S}(t) = \left\{ \dot{S}_0(t), \dot{S}_1(t) \right\}, \quad \dot{U}(t) = \left\{ \dot{U}_0(t), \dot{U}_1(t) \right\},$$

$$\dot{V}(t) = \left\{ \dot{V}_0(t), \dot{V}_1(t) \right\}, \text{ tal que las expresiones (2.24) y (2.42) sean satisfechas}$$

y,

$$1) \quad \dot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_1(t)Q_1(t) = 0$$

$$2) \quad \dot{S}_0(t)S_0(t) + \dot{S}_1(t)S_1(t) = 0$$

$$3) \quad \dot{U}_0(t)U_0(t) + \dot{U}_1(t)U_1(t) = 0$$

$$4) \quad \dot{V}_0(t)V_0(t) + \dot{V}_1(t)V_1(t) = 0$$

CAPÍTULO 3

MODELOS CINEMÁTICOS DE ACELERACIÓN

Capítulo 3

Modelos cinemáticos de aceleración

Introducción. En este capítulo serán construidas las ecuaciones de aceleración asociadas con el multicuerpo rígido motivo de estudio. Algunas ecuaciones de velocidad descritas en el capítulo anterior serán utilizadas para generar las ecuaciones de aceleración del punto $P_{ot}^I \in P_L^I$ y la aceleración angular de la plataforma P_L^I . Son planteados los problemas directo e inverso de aceleración relacionados con la configuración deformada del robot paralelo mostrado en las figuras 1.9 y 1.11, respectivamente.

3.1 Las ecuaciones de aceleración.

Para poder determinar tanto la aceleración lineal del punto $P_{ot}^I \in P_L^I$ como la aceleración angular de la plataforma P_L mostrada en la figura 1.9, es necesario derivar con respecto al tiempo $t \in J$ las ecuaciones de velocidad (2.3), esto es:

$$1) \quad \ddot{\mathbf{r}}_{3,0}(t) = \ddot{\mathbf{L}}_{2,1}(t) + \ddot{\mathbf{L}}_{3,2}(t) \quad (3.1)$$

$$2) \quad \ddot{\mathbf{r}}_{6,0}(t) = \ddot{\mathbf{L}}_{5,4}(t) + \ddot{\mathbf{L}}_{6,5}(t)$$

$$3) \quad \ddot{\mathbf{r}}_{9,0}(t) = \ddot{\mathbf{L}}_{8,7}(t) + \ddot{\mathbf{L}}_{9,8}(t)$$

También la expresión (2.4) puede ser derivada con respecto a $t \in J$ de la manera siguiente:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{pot,0}(t) = \ddot{\mathbf{L}}_{2,1}(t) + \ddot{\mathbf{L}}_{3,2}(t) + \ddot{\mathbf{L}}_{pot,3}(t) \quad (3.2)$$

Por otro lado, sean:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \dot{L}_{2,1}^j(t) &= l_{2,1} \cdot \dot{a}_1^j(t) & (3.3) \\
 2) \quad \dot{L}_{3,2}^j(t) &= l_{3,2} \cdot \dot{a}_1^{II}(t) \\
 3) \quad \dot{L}_{5,4}^j(t) &= l_{5,4} \cdot \dot{a}_1^{III}(t) \\
 4) \quad \dot{L}_{6,5}^j(t) &= l_{6,5} \cdot \dot{a}_1^{IV}(t) \\
 5) \quad \dot{L}_{8,7}^j(t) &= l_{8,7} \cdot \dot{a}_1^V(t) \\
 6) \quad \dot{L}_{9,8}^j(t) &= l_{9,8} \cdot \dot{a}_1^{VI}(t) \\
 7) \quad \dot{L}_{\text{pot},3}^j(t) &= l_{\text{pot},3} \cdot \dot{a}_1^{VII}(t)
 \end{aligned}$$

Las derivadas con respecto al tiempo $t \in J$ de las ecuaciones (3.3) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \ddot{L}_{2,1}^j(t) &= \left(\dot{L}_{2,1}^j(t) \right)^{\cdot} = \left(l_{2,1} \cdot \dot{a}_1^j(t) \right)^{\cdot} = l_{2,1} \cdot \ddot{a}_1^j(t) & (3.4) \\
 2) \quad \ddot{L}_{3,2}^j(t) &= \left(\dot{L}_{3,2}^j(t) \right)^{\cdot} = \left(l_{3,2} \cdot \dot{a}_1^{II}(t) \right)^{\cdot} = l_{3,2} \cdot \ddot{a}_1^{II}(t) \\
 3) \quad \ddot{L}_{5,4}^j(t) &= \left(\dot{L}_{5,4}^j(t) \right)^{\cdot} = \left(l_{5,4} \cdot \dot{a}_1^{III}(t) \right)^{\cdot} = l_{5,4} \cdot \ddot{a}_1^{III}(t) \\
 4) \quad \ddot{L}_{6,5}^j(t) &= \left(\dot{L}_{6,5}^j(t) \right)^{\cdot} = \left(l_{6,5} \cdot \dot{a}_1^{IV}(t) \right)^{\cdot} = l_{6,5} \cdot \ddot{a}_1^{IV}(t) \\
 5) \quad \ddot{L}_{8,7}^j(t) &= \left(\dot{L}_{8,7}^j(t) \right)^{\cdot} = \left(l_{8,7} \cdot \dot{a}_1^V(t) \right)^{\cdot} = l_{8,7} \cdot \ddot{a}_1^V(t) \\
 6) \quad \ddot{L}_{9,8}^j(t) &= \left(\dot{L}_{9,8}^j(t) \right)^{\cdot} = \left(l_{9,8} \cdot \dot{a}_1^{VI}(t) \right)^{\cdot} = l_{9,8} \cdot \ddot{a}_1^{VI}(t) \\
 7) \quad \ddot{L}_{\text{pot},3}^j(t) &= \left(\dot{L}_{\text{pot},3}^j(t) \right)^{\cdot} = \left(l_{\text{pot},3} \cdot \dot{a}_1^{VII}(t) \right)^{\cdot} = l_{\text{pot},3} \cdot \ddot{a}_1^{VII}(t)
 \end{aligned}$$

Por tanto, las expresiones (3.1) se pueden escribir en términos de las bases locales doblemente derivadas; esto es:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \ddot{\mathbf{r}}_{3,0}^I(t) &= l_{2,1} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1^I(t) + l_{3,2} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1^{II}(t) & (3.5) \\
 2) \quad \ddot{\mathbf{r}}_{6,0}^I(t) &= l_{5,4} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1^{III}(t) + l_{6,5} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1^{IV}(t) \\
 3) \quad \ddot{\mathbf{r}}_{9,0}^I(t) &= l_{8,7} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1^V(t) + l_{9,8} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1^{VI}(t)
 \end{aligned}$$

También la expresión (3.2) puede ser escrita de la manera siguiente:

$$\ddot{\mathbf{r}}_{pot,0}^I(t) = l_{2,1} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1^I(t) + l_{3,2} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1^{II}(t) + l_{pot,2} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1^{V,II}(t) \quad (3.6)$$

Por otro lado, cada base local doblemente derivada se obtiene de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
 1) \quad \ddot{\mathbf{a}}_1^I(t) &= \left(\dot{\mathbf{a}}_1^I(t) \right)^\bullet = \left(\dot{\mathbf{P}}(t) * \mathbf{e}_1^I \right)^\bullet = \ddot{\mathbf{P}}(t) * \mathbf{e}_1^I & (3.7) \\
 2) \quad \ddot{\mathbf{a}}_1^{II}(t) &= \left(\dot{\mathbf{a}}_1^{II}(t) \right)^\bullet = \left(\dot{\mathbf{Q}}(t) * \mathbf{e}_1^{II} \right)^\bullet = \ddot{\mathbf{Q}}(t) * \mathbf{e}_1^{II} \\
 3) \quad \ddot{\mathbf{a}}_1^{III}(t) &= \left(\dot{\mathbf{a}}_1^{III}(t) \right)^\bullet = \left(\dot{\mathbf{R}}(t) * \mathbf{e}_1^{III} \right)^\bullet = \ddot{\mathbf{R}}(t) * \mathbf{e}_1^{III} \\
 4) \quad \ddot{\mathbf{a}}_1^{IV}(t) &= \left(\dot{\mathbf{a}}_1^{IV}(t) \right)^\bullet = \left(\dot{\mathbf{S}}(t) * \mathbf{e}_1^{IV} \right)^\bullet = \ddot{\mathbf{S}}(t) * \mathbf{e}_1^{IV} \\
 5) \quad \ddot{\mathbf{a}}_1^V(t) &= \left(\dot{\mathbf{a}}_1^V(t) \right)^\bullet = \left(\dot{\mathbf{T}}(t) * \mathbf{e}_1^V \right)^\bullet = \ddot{\mathbf{T}}(t) * \mathbf{e}_1^V \\
 6) \quad \ddot{\mathbf{a}}_1^{VI}(t) &= \left(\dot{\mathbf{a}}_1^{VI}(t) \right)^\bullet = \left(\dot{\mathbf{U}}(t) * \mathbf{e}_1^{VI} \right)^\bullet = \ddot{\mathbf{U}}(t) * \mathbf{e}_1^{VI} \\
 7) \quad \ddot{\mathbf{a}}_1^{V,II}(t) &= \left(\dot{\mathbf{a}}_1^{V,II}(t) \right)^\bullet = \left(\dot{\mathbf{V}}(t) * \mathbf{e}_1^{V,II} \right)^\bullet = \ddot{\mathbf{V}}(t) * \mathbf{e}_1^{V,II}
 \end{aligned}$$

Aquí, se han derivado con respecto al tiempo $t \in \mathcal{R}^+$ las expresiones (2.18). Las ecuaciones (3.5) se pueden escribir en términos de las derivadas de los complejos $\ddot{P}(t)$, $\ddot{Q}(t)$, $\ddot{R}(t)$, $\ddot{S}(t)$, $\ddot{T}(t)$, $\ddot{U}(t) \in \mathcal{R}^2$, esto es:

$$1) \quad \ddot{r}'_{3,0}(t) = l_{2,1} \bullet \left\{ \ddot{P}(t) * e'_{11} \right\} + l_{3,2} \bullet \left\{ \ddot{Q}(t) * e''_{11} \right\} \quad (3.8)$$

$$2) \quad \ddot{r}'_{6,0}(t) = l_{5,4} \bullet \left\{ \ddot{R}(t) * e'''_{11} \right\} + l_{6,5} \bullet \left\{ \ddot{S}(t) * e^{V'}_{11} \right\}$$

$$3) \quad \ddot{r}'_{9,0}(t) = l_{8,7} \bullet \left\{ \ddot{T}(t) * e^V_{11} \right\} + l_{9,8} \bullet \left\{ \ddot{U}(t) * e^{V'}_{11} \right\}$$

También la ecuación (3.6) se puede escribir de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \ddot{r}'_{3,0}(t) = & l_{2,1} \bullet \left\{ \ddot{P}(t) * e'_{11} \right\} + l_{3,2} \bullet \left\{ \ddot{Q}(t) * e''_{11} \right\} + \\ & + l_{pot,3} \bullet \left\{ \ddot{V}(t) * e^{V''}_{11} \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Observe que tanto las expresiones (3.8) como la ecuación (3.9), están definidas sobre las bases locales no deformadas. Por tanto, es necesario utilizar las relaciones (2.22) para representar las ecuaciones de velocidad en la configuración deformada, esto es:

$$1) \quad \ddot{r}'_{3,0}(t) = l_{2,1} \bullet \left\{ \ddot{P}(t) * P(t) * a'_{11}(t) \right\} + l_{3,2} \bullet \left\{ \ddot{Q}(t) * Q(t) * a''_{11}(t) \right\} \quad (3.10)$$

$$2) \quad \ddot{r}'_{6,0}(t) = l_{5,4} \bullet \left\{ \ddot{R}(t) * R(t) * a'''_{11}(t) \right\} + l_{6,5} \bullet \left\{ \ddot{S}(t) * S(t) * a^{V'}_{11}(t) \right\}$$

$$3) \quad \ddot{r}'_{9,0}(t) = l_{8,7} \bullet \left\{ \ddot{T}(t) * T(t) * a^V_{11}(t) \right\} + l_{9,8} \bullet \left\{ \ddot{U}(t) * U(t) * a^{V'}_{11}(t) \right\}$$

También, la expresión (3.9) se puede escribir de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \ddot{r}'_{\text{pot},0}(t) = & I_{2,1} \cdot \left\{ \ddot{P}(t) * P(t) * a'_{11}(t) \right\} + I_{3,2} \cdot \left\{ \ddot{Q}(t) * Q(t) * a''_{11}(t) \right\} + \\ & + I_{\text{pot},3} \cdot \left\{ \ddot{V}(t) * V(t) * a^{v''}_{11}(t) \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.2 Doble derivada de las normas unitarias de los números complejos.

En esta sección se representarán de forma explícita las ecuaciones de norma doblemente derivadas. Para ello, se derivarán con respecto al tiempo $t \in J$ las expresiones (2.26) descritas en el capítulo 2, esto es:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \ddot{P}_0(t)P_0(t) + \dot{P}_0^2(t) + \ddot{P}_1(t)P_1(t) + \dot{P}_1^2(t) = 0 \\ 2) \quad & \ddot{Q}_0(t)Q_0(t) + \dot{Q}_0^2(t) + \ddot{Q}_1(t)Q_1(t) + \dot{Q}_1^2(t) = 0 \\ 3) \quad & \ddot{R}_0(t)R_0(t) + \dot{R}_0^2(t) + \ddot{R}_1(t)R_1(t) + \dot{R}_1^2(t) = 0 \\ 4) \quad & \ddot{S}_0(t)S_0(t) + \dot{S}_0^2(t) + \ddot{S}_1(t)S_1(t) + \dot{S}_1^2(t) = 0 \\ 5) \quad & \ddot{T}_0(t)T_0(t) + \dot{T}_0^2(t) + \ddot{T}_1(t)T_1(t) + \dot{T}_1^2(t) = 0 \\ 6) \quad & \ddot{U}_0(t)U_0(t) + \dot{U}_0^2(t) + \ddot{U}_1(t)U_1(t) + \dot{U}_1^2(t) = 0 \\ 7) \quad & \ddot{V}_0(t)V_0(t) + \dot{V}_0^2(t) + \ddot{V}_1(t)V_1(t) + \dot{V}_1^2(t) = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.3 Relaciones entre las dobles derivadas de los complejos y las componentes de las aceleraciones angulares.

En esta sección se presentan las relaciones existentes entre las aceleraciones angulares de los eslabones y las componentes de las dobles derivadas de complejos; esto es:

$$1) \ddot{P}(t) = \left\{ \ddot{P}_0(t), \ddot{P}_1(t) \right\}; \ddot{P}_0(t) \in \mathfrak{R}; \ddot{P}_0(t) = -\ddot{\alpha}_1(t) \text{Sen} \alpha_1(t) - \dot{\alpha}_1^2(t) \text{Cos} \alpha_1(t) \quad (3.13)$$

$$\ddot{P}_1(t) \in \mathfrak{R}; \ddot{P}_1(t) = -\ddot{\alpha}_1(t) \text{Cos} \alpha_1(t) + \dot{\alpha}_1^2(t) \text{Sen} \alpha_1(t)$$

$$2) \ddot{Q}(t) = \left\{ \ddot{Q}_0(t), \ddot{Q}_1(t) \right\}; \ddot{Q}_0(t) \in \mathfrak{R}; \ddot{Q}_0(t) = -\ddot{\alpha}_2(t) \text{Sen} \alpha_2(t) - \dot{\alpha}_2^2(t) \text{Cos} \alpha_2(t)$$

$$\ddot{Q}_1(t) \in \mathfrak{R}; \ddot{Q}_1(t) = -\ddot{\alpha}_2(t) \text{Cos} \alpha_2(t) + \dot{\alpha}_2^2(t) \text{Sen} \alpha_2(t)$$

$$3) \ddot{R}(t) = \left\{ \ddot{R}_0(t), \ddot{R}_1(t) \right\}; \ddot{R}_0(t) \in \mathfrak{R}; \ddot{R}_0(t) = -\ddot{\alpha}_3(t) \text{Sen} \alpha_3(t) - \dot{\alpha}_3^2(t) \text{Cos} \alpha_3(t)$$

$$\ddot{R}_1(t) \in \mathfrak{R}; \ddot{R}_1(t) = -\ddot{\alpha}_3(t) \text{Cos} \alpha_3(t) + \dot{\alpha}_3^2(t) \text{Sen} \alpha_3(t)$$

$$4) \ddot{S}(t) = \left\{ \ddot{S}_0(t), \ddot{S}_1(t) \right\}; \ddot{S}_0(t) \in \mathfrak{R}; \ddot{S}_0(t) = -\ddot{\alpha}_4(t) \text{Sen} \alpha_4(t) - \dot{\alpha}_4^2(t) \text{Cos} \alpha_4(t)$$

$$\ddot{S}_1(t) \in \mathfrak{R}; \ddot{S}_1(t) = -\ddot{\alpha}_4(t) \text{Cos} \alpha_4(t) + \dot{\alpha}_4^2(t) \text{Sen} \alpha_4(t)$$

$$5) \ddot{T}(t) = \left\{ \ddot{T}_0(t), \ddot{T}_1(t) \right\}; \ddot{T}_0(t) \in \mathfrak{R}; \ddot{T}_0(t) = -\ddot{\alpha}_5(t) \text{Sen} \alpha_5(t) - \dot{\alpha}_5^2(t) \text{Cos} \alpha_5(t)$$

$$\ddot{T}_1(t) \in \mathfrak{R}; \ddot{T}_1(t) = -\ddot{\alpha}_5(t) \text{Cos} \alpha_5(t) + \dot{\alpha}_5^2(t) \text{Sen} \alpha_5(t)$$

$$6) \ddot{U}(t) = \left\{ \ddot{U}_0(t), \ddot{U}_1(t) \right\}; \ddot{U}_0(t) \in \mathfrak{R}; \ddot{U}_0(t) = -\ddot{\alpha}_6(t) \text{Sen} \alpha_6(t) - \dot{\alpha}_6^2(t) \text{Cos} \alpha_6(t)$$

$$\ddot{U}_1(t) \in \mathfrak{R}; \ddot{U}_1(t) = -\ddot{\alpha}_6(t) \text{Cos} \alpha_6(t) + \dot{\alpha}_6^2(t) \text{Sen} \alpha_6(t)$$

$$7) \ddot{V}(t) = \left\{ \ddot{V}_0(t), \ddot{V}_1(t) \right\}; \ddot{V}_0(t) \in \mathfrak{R}; \ddot{V}_0(t) = -\ddot{\alpha}_7(t) \text{Sen} \alpha_7(t) - \dot{\alpha}_7^2(t) \text{Cos} \alpha_7(t)$$

$$\ddot{V}_1(t) \in \mathfrak{R}; \ddot{V}_1(t) = -\ddot{\alpha}_7(t) \text{Cos} \alpha_7(t) + \dot{\alpha}_7^2(t) \text{Sen} \alpha_7(t)$$

Aquí, $\ddot{\alpha}_1(t), \ddot{\alpha}_2(t), \ddot{\alpha}_3(t), \ddot{\alpha}_4(t), \ddot{\alpha}_5(t), \ddot{\alpha}_6(t), \ddot{\alpha}_7(t) \in \mathfrak{R}$, son las aceleraciones angulares.

Para obtener las relaciones anteriores se han derivado con respecto al tiempo $t \in J$ las ecuaciones (2.28).

3.4 Segundas derivadas de las relaciones geométricas sobre la plataforma.

Para poder utilizar las ecuaciones de aceleración (3.10), es necesario derivar con respecto al tiempo $t \in J$ las expresiones (2.30); esto es:

$$1) \ddot{\mathbf{r}}'_{3,0}(t) = (\ddot{\mathbf{r}}'_{3,0,X}(t), \ddot{\mathbf{r}}'_{3,0,Y}(t)) = \left(\ddot{X}'_{pot,0}(t) - \left[l_{pot,3}(t)(-\ddot{\alpha}_{pot}(t))\text{sen}\alpha_{pot}(t) + \right. \right. \quad (3.14)$$

$$\left. + l_{pot,3}(t)(-\dot{\alpha}_{pot}^2(t)\text{cos}\alpha_{pot}(t)) \right], \ddot{Y}'_{pot,0}(t) - \left[l_{pot,3}(t)\ddot{\alpha}_{pot}(t)\text{cos}\alpha_{pot}(t) + \right. \\ \left. + l_{pot,3}(t)(\dot{\alpha}_{pot}^2(t))\text{sen}\alpha_{pot}(t) \right] \Bigg)$$

$$2) \ddot{\mathbf{r}}'_{6,0}(t) = \left(\ddot{\mathbf{r}}'_{3,0,X}(t) + \left[l_{3,6}(t)(-\ddot{\alpha}_{pot}(t))\text{sen}(\alpha_{pot}(t) - \beta_{pot}(t)) + \right. \right.$$

$$\left. + l_{3,6}(t)(-\dot{\alpha}_{pot}^2(t))\text{cos}(\alpha_{pot}(t) - \beta_{pot}(t)) \right],$$

$$\ddot{\mathbf{r}}'_{3,0,Y}(t) + l_{3,6}(t)(\ddot{\alpha}_{pot}(t))\text{cos}(\alpha_{pot}(t) - \beta_{pot}(t)) +$$

$$\left. + l_{3,6}(t)(\dot{\alpha}_{pot}^2(t))\text{sen}(\alpha_{pot}(t) - \beta_{pot}(t)) \right)$$

$$3) \ddot{\mathbf{r}}'_{9,0}(t) = \left(\ddot{\mathbf{r}}'_{3,0,X}(t) + l_{3,9}(t)(-\ddot{\alpha}_{pot}(t))\text{sen}(\alpha_{pot}(t) + \beta_{pot}(t)) + \right.$$

$$\left. + l_{3,9}(t)(\dot{\alpha}_{pot}^2(t))\text{cos}(\alpha_{pot}(t) + \beta_{pot}(t)), \right.$$

$$\left. \ddot{\mathbf{r}}'_{3,0,Y} + l_{3,9}(t)(\ddot{\alpha}_{pot}(t))\text{cos}(\alpha_{pot}(t) + \beta_{pot}(t)) + \right.$$

$$+l_{3,0}(t)(\dot{\alpha}_{\text{pot}}(t)\text{sen}(\alpha_{\text{pot}}(t)+\beta_{\text{pot}}(t)))\Big).$$

Las relaciones (3.14) se pueden interpretar de la manera siguiente:

1) “Conocidas las aceleraciones de los puntos (3)', (6)', (9)' dadas por $\ddot{r}'_{3,0}(t)$, $\ddot{r}'_{6,0}(t)$, $\ddot{r}'_{9,0}(t) \in \mathbb{R}^2$ son también conocidas, aplicando las relaciones (3.14), la aceleración del centroide de P_L dada por

$$\ddot{r}'_{\text{pot},0}(t) = \left(\ddot{X}_{\text{pot},0}(t), \ddot{Y}_{\text{pot},0}(t) \right) \text{ y la aceleración dada por } \ddot{\alpha}_{\text{pot}}(t) \equiv \ddot{\alpha}_7(t) \text{ o}$$

propriadamente dicho, se conoce $\ddot{V}(t) = \left\{ \ddot{V}_0(t), \ddot{V}_1(t) \right\}$ ”.

“Conocidos $\ddot{r}'_{\text{pot},0}(t) \in \mathbb{R}^2$ y $\ddot{V}(t) = \left\{ \ddot{V}_0(t), \ddot{V}_1(t) \right\}$, se encuentran al aplicar las

relaciones (3.14) las aceleraciones $\ddot{r}'_{3,0}(t)$, $\ddot{r}'_{6,0}(t)$, $\ddot{r}'_{9,0}(t) \in \mathbb{R}^2$ ”.

3.5 Formulación del problema cinemático inverso de aceleración.

En esta sección es planteado un problema de fundamental importancia en la cinemática de multicuerpos rígidos: “el problema inverso de aceleración”. Dicho problema está asociado con la configuración deformada del robot paralelo mostrado en la figura 1.8.

“Dados, $\ddot{r}'_{3,0}(t) \in \mathbb{R}^2$, $\ddot{r}'_{6,0}(t) \in \mathbb{R}^2$, $\ddot{r}'_{9,0}(t) \in \mathbb{R}^2$, $l_{3,2}(t)$, $l_{3,2}(t)$, $l_{5,4}(t)$, $l_{6,5}(t)$, $l_{8,7}(t)$, $l_{9,8}(t) \in \mathbb{R}^+$, $P(t) = \{P_0(t), P_1(t)\}$, $P(t) = \{P_0(t), -P_1(t)\}$, $Q(t) = \{Q_0(t), Q_1(t)\}$, $Q(t) = \{Q_0(t), -Q_1(t)\}$, $R(t) = \{R_0(t), R_1(t)\}$, $R(t) = \{R_0(t), -R_1(t)\}$, $S(t) = \{S_0(t), S_1(t)\}$, $S(t) = \{S_0(t), -S_1(t)\}$, $T(t) = \{T_0(t), T_1(t)\}$, $T(t) = \{T_0(t), -T_1(t)\}$, $U(t) = \{U_0(t), U_1(t)\}$, $U(t) = \{U_0(t), -U_1(t)\}$, con $P(t) = Q(t) = R(t) = S(t) = T(t) = U(t) = 1$, $p(t_0) = \{p_0(t_0), p_1(t_0)\}$, $q(t_0) = \{q_0(t_0)$

, $q_1(t_0)$, $r(t_0) = \{r_0(t_0), r_1(t_0)\}$, $s(t_0) = \{s_0(t_0), s_1(t_0)\}$, $t(t_0) = \{t_0(t_0), t_1(t_0)\}$, $u(t_0) = \{u_0(t_0), u_1(t_0)\}$, con $p(t_0) = q(t_0) = r(t_0) = s(t_0) = t(t_0) = u(t_0) = 1$,

encuentre: $\ddot{P}(t) = \{\ddot{P}_0(t), \ddot{P}_1(t)\}$, $\ddot{Q}(t) = \{\ddot{Q}_0(t), \ddot{Q}_1(t)\}$, $\ddot{R}(t) = \{\ddot{R}_0(t), \ddot{R}_1(t)\}$,

$\ddot{S}(t) = \{\ddot{S}_0(t), \ddot{S}_1(t)\}$, $\ddot{T}(t) = \{\ddot{T}_0(t), \ddot{T}_1(t)\}$, $\ddot{U}(t) = \{\ddot{U}_0(t), \ddot{U}_1(t)\}$, tal que las

expresiones (3.9) sean satisfechas y,

$$1) \quad \ddot{P}_0(t)P_0(t) + \dot{P}_0^2(t) + \ddot{P}_1(t)P_1(t) + \dot{P}_1^2(t) = 0$$

$$2) \quad \ddot{Q}_0(t)P_0(t) + \dot{Q}_0^2(t) + \ddot{Q}_1(t)P_1(t) + \dot{Q}_1^2(t) = 0$$

$$3) \quad \ddot{R}_0(t)P_0(t) + \dot{R}_0^2(t) + \ddot{R}_1(t)P_1(t) + \dot{R}_1^2(t) = 0$$

$$4) \quad \ddot{S}_0(t)S_0(t) + \dot{S}_0^2(t) + \ddot{S}_1(t)S_1(t) + \dot{S}_1^2(t) = 0$$

$$5) \quad \ddot{T}_0(t)T_0(t) + \dot{T}_0^2(t) + \ddot{T}_1(t)T_1(t) + \dot{T}_1^2(t) = 0$$

$$6) \quad \ddot{U}_0(t)U_0(t) + \dot{U}_0^2(t) + \ddot{U}_1(t)U_1(t) + \dot{U}_1^2(t) = 0''$$

3.6 Ecuaciones de aceleración para el planteamiento del problema cinemático directo.

El interés en esta sección es generar las ecuaciones de aceleración que permitan formular el problema cinemático directo de aceleración relacionado con el robot paralelo que se está estudiando. Para lograr tal propósito, es necesario derivar con respecto al tiempo las ecuaciones de lazo (2.33); esto es:

$$1) \quad \ddot{L}'_{2,1}(t) + \ddot{L}'_{3,2}(t) - [\ddot{L}'_{3,4}(t) + \ddot{L}'_{6,5}(t) + \ddot{L}'_{3,6}(t)] = \underline{0} \quad (3.15)$$

$$2) \quad \ddot{L}'_{2,1}(t) + \ddot{L}'_{3,2}(t) - [\ddot{L}'_{8,7}(t) + \ddot{L}'_{9,8}(t) + \ddot{L}'_{3,9}(t)] = \underline{0}$$

Para representar las ecuaciones (3.15) en términos de las dobles derivadas de las bases locales deformadas, es necesario derivar dos veces con respecto al tiempo $t \in J$ las expresiones (2.34); esto es:

$$\begin{aligned} 1) \quad \ddot{\mathbf{L}}_{3,6}'(t) &= l_{3,6} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1^{V'''}(t) & (3.16) \\ 2) \quad \ddot{\mathbf{L}}_{3,9}'(t) &= l_{3,9} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1^{X'}(t) \end{aligned}$$

Por tanto, las ecuaciones (3.15) se pueden escribir en términos de las dobles derivadas de las bases locales de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 1) \quad l_{2,1} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1'(t) + l_{3,2} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1''(t) - [l_{5,4} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1'''(t) + \\ + l_{6,5} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1^{V'}(t) + l_{3,6} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1^{V''}(t)] &= 0 & (3.17) \\ 2) \quad l_{2,1} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1'(t) + l_{3,2} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1''(t) - [l_{8,7} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1^V(t) + \\ + l_{9,8} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1^{V'}(t) + l_{3,9} \bullet \ddot{\mathbf{a}}_1^{X'}(t)] &= 0 \end{aligned}$$

Para generar las expresiones (3.17), se han utilizado las ecuaciones (3.4) y (3.16).

Es necesario precisar que, para escribir las ecuaciones (3.17) en términos de las dobles derivadas de los complejos, basta derivar con respecto al tiempo las expresiones (2.39); esto es:

$$\begin{aligned} 1) \quad \ddot{\mathbf{a}}_1^{V'''} &= W(t) * \ddot{\mathbf{V}}(t) * \mathbf{e}_1^{V''}(t) & (3.18) \\ 2) \quad \ddot{\mathbf{a}}_1^{X'} &= X(t) * \ddot{\mathbf{V}}(t) * \mathbf{e}_1^{V''}(t) \end{aligned}$$

Se debe observar que, al aplicar la identidad $k(t) * k(t) = I$ en las expresiones (3.18) se llega al siguiente resultado:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \ddot{\mathbf{a}}_1^{V''' } &= W(t) * \ddot{V}(t) * V(t) * W(t) * \mathbf{a}_1^{V''}(t) & (3.19) \\
 2) \quad \ddot{\mathbf{a}}_1^{X'} &= X(t) * \ddot{V}(t) * V(t) * X(t) * \mathbf{a}_1^{V''}(t)
 \end{aligned}$$

Por tanto, al utilizar las ecuaciones (3.6) y (3.19), las expresiones de lazo de aceleración (3.17) se pueden escribir en términos de las dobles derivadas de los complejos, esto es:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & I_{2,1} \bullet \left\{ \ddot{P}(t) * P(t) * \mathbf{a}_1' \right\} + I_{3,2} \bullet \left\{ \ddot{Q}(t) * Q(t) * \mathbf{a}_1'' \right\} - & (3.20) \\
 & - \left[I_{5,4} \bullet \left\{ \ddot{R}(t) * R(t) * \mathbf{a}_1''' \right\} + I_{6,5} \bullet \left\{ \ddot{S}(t) * S(t) * \mathbf{a}_1^{IV} \right\} + \right. \\
 & \left. - I_{3,6} \bullet \left\{ W(t) * \ddot{V}(t) * V(t) * W(t) * \mathbf{a}_1^{V''} \right\} \right] = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & I_{2,1} \bullet \left\{ \ddot{P}(t) * P(t) * \mathbf{a}_1' \right\} + I_{3,2} \bullet \left\{ \ddot{Q}(t) * Q(t) * \mathbf{a}_1'' \right\} - \\
 & - \left[I_{8,7} \bullet \left\{ \ddot{T}(t) * T(t) * \mathbf{a}_1^V \right\} + I_{9,8} \bullet \left\{ \ddot{U}(t) * U(t) * \mathbf{a}_1^{V'} \right\} + \right. \\
 & \left. - I_{3,9} \bullet \left\{ X(t) * \ddot{V}(t) * V(t) * X(t) * \mathbf{a}_1^{V''} \right\} \right] = 0
 \end{aligned}$$

Finalmente, para poder formular el problema cinemático directo de aceleración, se reescribirá la expresión (3.11), esto es:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\mathbf{r}}_{\text{pot},0}^j(t) &= I_{2,1} \bullet \left\{ \ddot{P}(t) * P(t) * \mathbf{a}'_1(t) \right\} + I_{3,2} \bullet \left\{ \ddot{Q}(t) * Q(t) * \mathbf{a}''_1(t) \right\} + & (3.21) \\
 & + I_{\text{pot},3} \bullet \left\{ \ddot{V}(t) * V(t) * \mathbf{a}^{V''}_1(t) \right\}
 \end{aligned}$$

3.7 Planteamiento del problema cinemático directo de aceleración.

En esta sección es formulado otro problema de fundamental importancia en la cinemática de los multicuerpos rígidos: “el problema directo de aceleración”. Dicho problema está asociado con la configuración deformada del robot paralelo mostrada en la figura 1.8.

“Dados, $\ddot{P}(t) = \{\ddot{P}_0(t), \ddot{P}_1(t)\}$, $\ddot{R}(t) = \{\ddot{R}_0(t), \ddot{R}_1(t)\}$, $\ddot{T}(t) = \{\ddot{T}_0(t), \ddot{T}_1(t)\}$, con

$P(t) = R(t) = T(t) = 0$, $l_{2,1}(t)$, $l_{3,2}(t)$, $l_{5,4}(t)$, $l_{6,5}(t)$, $l_{8,7}(t)$, $l_{9,8}(t)$, $l_{pot,3}(t)$, $l_{3,6}(t)$, $l_{3,9}(t) \in \mathcal{R}^+$, $P(t) = \{P_0(t), P_1(t)\}$, $P(t) = \{P_0(t), -P_1(t)\}$, $Q(t) = \{Q_0(t), Q_1(t)\}$,

$Q(t) = \{Q_0(t), -Q_1(t)\}$, $R(t) = \{R_0(t), R_1(t)\}$, $R(t) = \{R_0(t), -R_1(t)\}$,

$S(t) = \{S_0(t), S_1(t)\}$, $S(t) = \{S_0(t), -S_1(t)\}$, $T(t) = \{T_0(t), T_1(t)\}$, $T(t) = \{T_0(t), -T_1(t)\}$,

$U(t) = \{U_0(t), U_1(t)\}$, $U(t) = \{U_0(t), -U_1(t)\}$,

$V(t) = \{V_0(t), V_1(t)\}$, $V(t) = \{V_0(t), -V_1(t)\}$, $W(t) = \{W_0(t), W_1(t)\}$,

$W(t) = \{W_0(t), -W_1(t)\}$, $X(t) = \{X_0(t), X_1(t)\}$, $X(t) = \{X_0(t), -X_1(t)\}$, con

$P(t) = Q(t) = R(t) = S(t) = T(t) = U(t) = V(t) = W(t) = X(t) = 1$;

$p(t_0) = \{p_0(t_0), p_1(t_0)\}$, $q(t_0) = \{q_0(t_0), q_1(t_0)\}$, $r(t_0) = \{r_0(t_0), r_1(t_0)\}$,

$s(t_0) = \{s_0(t_0), s_1(t_0)\}$, $t(t_0) = \{t_0(t_0), t_1(t_0)\}$, $u(t_0) = \{u_0(t_0), u_1(t_0)\}$,

$v(t_0) = \{v_0(t_0), v_1(t_0)\}$, $w(t_0) = \{w_0(t_0), w_1(t_0)\}$, $x(t_0) = \{x_0(t_0), x_1(t_0)\}$, con

$p(t_0) = q(t_0) = r(t_0) = s(t_0) = t(t_0) = u(t_0) = v(t_0) = w(t_0) = x(t_0) = 1$,

encuentre: $\ddot{r}_{pot,0}(t) \in \mathcal{R}^2$, $\ddot{Q}(t) = \{\ddot{Q}_0(t), \ddot{Q}_1(t)\}$, $\ddot{S}(t) = \{\ddot{S}_0(t), \ddot{S}_1(t)\}$,

$\ddot{U}(t) = \{\ddot{U}_0(t), \ddot{U}_1(t)\}$, $\ddot{V}(t) = \{\ddot{V}_0(t), \ddot{V}_1(t)\}$, tal que las expresiones (3.11) y

(3.20) sean satisfechas y,

$$1) \quad \ddot{Q}_0(t)P_0(t) + \dot{Q}_0^2(t) + \ddot{Q}_1(t)P_1(t) + \dot{Q}_1^2(t) = 0$$

$$2) \quad \ddot{S}_0(t)S_0(t) + \dot{S}_0^2(t) + \ddot{S}_1(t)S_1(t) + \dot{S}_1^2(t) = 0$$

$$3) \quad \ddot{U}_0(t)U_0(t) + \dot{U}_0^2(t) + \ddot{U}_1(t)U_1(t) + \dot{U}_1^2(t) = 0$$

$$4) \quad \ddot{V}_0(t)V_0(t) + \dot{V}_0^2(t) + \ddot{V}_1(t)V_1(t) + \dot{V}_1^2(t) = 0''$$

CAPÍTULO 4

PROGRAMACIÓN DEL MODELO CINEMÁTICO DE POSICIONAMIENTO DEL ROBOT PARALELO TIPO RRR DE 3 G.D.L.

Capítulo 4

Programación del modelo cinemático de posicionamiento del robot paralelo tipo RRR de 3 GDL

Introducción.- En este capítulo se programan los modelos cinemáticos de posicionamiento del robot paralelo planar tipo RRR de 3 GDL. El objetivo es mostrar como el uso sistemático del álgebra de los números complejos permite una fácil programación y visualización de los movimientos del robot mediante la programación en el lenguaje VISUAL BASIC.

4.1.- Programación del robot paralelo planar tipo RRR de tres grados de libertad.

La programación del robot en base al modelo cinemático de posición desarrollado en esta tesis, tiene gran importancia debido a que los modelos matemáticos que la literatura tradicional⁹ utiliza para modelar este tipo de robot son complicados, sin embargo el modelo planteado en el capítulo 1 utilizando el álgebra de los números complejos, permite generar un programa que modela la cinemática de posición inversa y directa de este sistema mecánico. Las ecuaciones que se programan para la cinemática inversa son las siguientes: (1.9), (1.44), (1.45), $P_0^2 + P_1^2 = 1$, $Q_0^2 + Q_1^2 = 1$, $R_0^2 + R_1^2 = 1$, $S_0^2 + S_1^2 = 1$, $T_0^2 + T_1^2 = 1$ y $U_0^2 + U_1^2 = 1$ y las ecuaciones que se utilizan para programar la cinemática directa son: (1.45), (1.51), (1.52), $Q_0^2 + Q_1^2 = 1$, $S_0^2 + S_1^2 = 1$, $U_0^2 + U_1^2 = 1$, $V_0^2 + V_1^2 = 1$. La concepción de este robot se da en el marco de las cadenas cinemáticas cerradas.⁶ Otro modelo de este robot se ve en²⁸, y la base de este programa fue desarrollada en²⁹.

4.2 Programación de la cinemática inversa del robot.

En esta sección se describe la programación de l modelo cinemático inverso de posicionamiento, se dan aquí las coordenadas del efector final conocido como P_{OT} y localizado en la placa P_L del robot, estas coordenadas son X_{POT} , Y_{POT} tomadas con relación a un sistema cartesiano de referencia fijo y el angulo θ_{POT} existente entre el eje x y el vector $L_{pot.3}$ existente entre la junta rotacional 3 y el punto P_{OT} de la placa triangular P_L del robot, para encontrar los ángulos de los eslabones conductor llamado para efecto de programación activo y conducido de cada cadena cinemática que conforma el robot, esto con respecto al eje x de referencia, utilizando las ecuaciones descritas en la sección 4.1.

Programa de la cinemática inversa.

- Se definen las banderas de estado para el problema de solución inversa de las cadenas cinemáticas 1, 2 y 3.

Dim banderacc1, banderacc2, banderacc3 As Boolean

Dim incremento As Integer

- Se aplican nuevas coordenadas para modelar su posición.

```
Private Sub aplicar_Click()
```

- Posición Home de referencia.

```
Xref = Int(Trim(Text1.Text))
```

```
Yref = Int(Trim(Text2.Text))
```

```
tetharef = Int(Trim(Text3.Text))
```

```
cinematicaInversa Xref, Yref, tetharef
```

```
End Sub
```

```
Private Sub Form_Load()
```

- Se define la posición Home de referencia.

```
Xref = 0
```

```
Yref = 1000
```

```
tetharef = 150
```

```
cinematicalInversa Xref, Yref, tetharef
```

```
End Sub
```

- Se sale de la ventana de modelación de posición.

```
Private Sub Salir_Click()
```

```
Unload Me
```

```
End Sub
```

- En el siguiente segmento de código se determina la solución de la cinemática inversa del robot

```
Public Sub cinematicalInversa(x As Single, y As Single, angulo As Single)
```

- Definición del ángulo de referencia bpl de PL.

```
Dim Bpl As Single
```

- Definición de ángulos temporales.

```
Dim angulo1 As Single
```

```
Dim angulo2 As Single
```

```
'Tolerancia
```

```
rango = 10
```

- Base de referencia.

```
e1(0) = 1
```

$$e1(1) = 0$$

- Definición del ángulo tethapot.

$$tethapot = \text{GtoR}(\text{angulo})$$

- Las siguientes 4 líneas describen las coordenadas de referencia.

$$Rpot(0) = x$$

$$Rpot(1) = y$$

$$Xpot = Rpot(0)$$

$$Ypot = Rpot(1)$$

- Definición de los vectores que componen el robot.

$$Bpl = \text{GtoR}(30)$$

$$Lpot = 400$$

$$L36 = Lpot * 2$$

$$L39 = Lpot * 2$$

$$L1 = L36$$

$$L2 = L1$$

$$L3 = L1$$

$$L4 = L1$$

$$L5 = L1$$

$$L6 = L1$$

$$L = 2 * L1$$

- Modelo referido a P1.

$$p1(0) = 0$$

$$p1(1) = 0$$

- Determinación de R3(), R6() y R9() en la configuración no deformada.

$$R3(0) = \text{Int}(Xpot - Lpot * \text{Cos}(tethapot))$$

$$R3(1) = \text{Int}(Ypot - Lpot * \text{Sin}(tethapot))$$

$$p3(0) = R3(0)$$

$$p3(1) = R3(1)$$

$$R6(0) = \text{Int}(p3(0) + L36 * \text{Cos}(\text{tethapot} - \text{Bpl}))$$

$$R6(1) = \text{Int}(p3(1) + L36 * \text{Sin}(\text{tethapot} - \text{Bpl}))$$

$$R9(0) = \text{Int}(p3(0) + L39 * \text{Cos}(\text{tethapot} + \text{Bpl}))$$

$$R9(1) = \text{Int}(p3(1) + L39 * \text{Sin}(\text{tethapot} + \text{Bpl}))$$

- Función de la cinemática inversa de cadena CC1.
cadenacc1

- Función de la cinemática inversa de cadena CC2.
cadenacc2

- Función de la cinemática inversa de cadena CC3.
cadenacc3

- Gráfica el robot en la pantalla.

Graficarobot

End Sub

- Función de la cinemática inversa de cadena CC1.
Private Sub cadenacc1()

- Definición de ángulos temporales para encontrar solución.

Dim angulo1 As Single

Dim angulo2 As Single

- Bandera de estado de solución.

banderacc1 = True

- Complejos de la cadena cinemática.

For angulo1 = 0 To 360 Step 0.9

$$P(0) = \text{Cos}(\text{GtoR}(\text{angulo1}))$$

$$P(1) = \text{Sin}(\text{GtoR}(\text{angulo1}))$$

For angulo2 = 0 To 360 Step 0.9

$$Q(0) = \text{Cos}(\text{GtoR}(\text{angulo2}))$$

$$Q(1) = \text{Sin}(\text{GtoR}(\text{angulo2}))$$

- Determinación de las bases móviles.

$$e11(0) = \text{ropq}(P(), e1()).x(0)$$

$$e11(1) = \text{ropq}(P(), e1()).x(1)$$

$$e12(0) = \text{ropq}(Q(), e1()).x(0)$$

$$e12(1) = \text{ropq}(Q(), e1()).x(1)$$

- Determinación de la posición de los vectores L1,L2.

$$LL1t(0) = \text{Int}(L1 * e11(0))$$

$$LL1t(1) = \text{Int}(L1 * e11(1))$$

$$LL2t(0) = \text{Int}(L2 * e12(0))$$

$$LL2t(1) = \text{Int}(L2 * e12(1))$$

- Determinación de la condición $R3=I1+I2$.

If $(R3(0) + \text{rango} > LL1t(0) + LL2t(0) \text{ And } R3(1) + \text{rango} > LL1t(1) + LL2t(1)) \text{ And}$
 $(R3(0) - \text{rango} < LL1t(0) + LL2t(0) \text{ And } R3(1) - \text{rango} < LL1t(1) + LL2t(1)) \text{ Then}$

- Ángulos para las cadenas cinemáticas.

$$\text{tetha1} = \text{angulo1}$$

$$\text{tetha2} = \text{angulo2}$$

- Determinación de la condición.

$$L11(0) = \text{Int}(L1 * e11(0))$$

$$L11(1) = \text{Int}(L1 * e11(1))$$

$$L22(0) = \text{Int}(L2 * e12(0))$$

$$L22(1) = \text{Int}(L2 * e12(1))$$

- Se verifica que cumpla con condición de los cuadrados $P_0+P_1=1$, $Q_0+Q_1=1$.

If ((P(0) * P(0) + P(1) * P(1) = 1) And (Q(0) * Q(0) + Q(1) * Q(1) = 1)) Then

Exit Sub

End If

End If

Next

Next

banderacc1 = False

End Sub

- Función de la cinemática inversa de cadena CC2.

Private Sub cadenacc2()

- Definición de ángulos temporales para encontrar solución.

Dim angulo1 As Single

Dim angulo2 As Single

- Bandera de estado de solución.

banderacc2 = True

- Determinación de la tierra de cc2.

$$L14(0) = L * \text{Cos}(GtoR(60))$$

$$L14(1) = L * \text{Sin}(GtoR(60))$$

- Complejos de la cadena cinemática

For angulo1 = 0 To 360 Step 0.9

$$R(0) = \text{Cos}(G\text{toR}(\text{angulo1}))$$

$$R(1) = \text{Sin}(G\text{toR}(\text{angulo1}))$$

For angulo2 = 0 To 360 Step 0.9

$$S(0) = \text{Cos}(G\text{toR}(\text{angulo2}))$$

$$S(1) = \text{Sin}(G\text{toR}(\text{angulo2}))$$

- Determinación de las bases móviles.

$$e13(0) = \text{ropq}(R(), e1()).x(0)$$

$$e13(1) = \text{ropq}(R(), e1()).x(1)$$

$$e14(0) = \text{ropq}(S(), e1()).x(0)$$

$$e14(1) = \text{ropq}(S(), e1()).x(1)$$

- Determinación de la posición de los vectores L3,L4.

$$LL3t(0) = \text{Int}(L3 * e13(0))$$

$$LL3t(1) = \text{Int}(L3 * e13(1))$$

$$LL4t(0) = \text{Int}(L4 * e14(0))$$

$$LL4t(1) = \text{Int}(L4 * e14(1))$$

- Determinación de la condición $R6=L14+L3+L4$.

If $(R6(0) + \text{rango} > L14(0) + LL3t(0) + LL4t(0)$ And $R6(1) + \text{rango} > L14(1) + LL3t(1) + LL4t(1))$ And $(R6(0) - \text{rango} < L14(0) + LL3t(0) + LL4t(0)$ And $R6(1) - \text{rango} < L14(1) + LL3t(1) + LL4t(1))$ Then

- Ángulos para las cadenas cinemáticas.

$$\text{tetha3} = \text{angulo1}$$

$$\text{tetha4} = \text{angulo2}$$

- Determinación de la condición.

$$L33(0) = \text{Int}(L3 * e13(0))$$

$$L33(1) = \text{Int}(L3 * e13(1))$$

$$L44(0) = \text{Int}(L4 * e14(0))$$

$$L44(1) = \text{Int}(L4 * e14(1))$$

- Se verifica que cumpla con condición de los cuadrados $P_0+P_1=1$, $Q_0+Q_1=1$.
 If $((R(0) * R(0) + R(1) * R(1) = 1) \text{ And } (S(0) * S(0) + S(1) * S(1) = 1))$ Then
 Exit Sub
 End If
 End If
 Next
 Next
 banderacc2 = False
 End Sub

- Función de la cinemática inversa de cadena CC3.

Private Sub cadenacc3()

- Definición de ángulos temporales para encontrar solución.

Dim angulo1 As Single

Dim angulo2 As Single

- Bandera de estado de solución.

banderacc3 = True

- Determinación del eslabón de tierra de CC3.

$$L17(0) = -1 * L * \text{Cos}(GtoR(60))$$

$$L17(1) = L * \text{Sin}(GtoR(60))$$

- Complejos de la cadena cinemática.

For angulo1 = 360 To 0 Step -0.9

$$T(0) = \text{Cos}(GtoR(angulo1))$$

$$T(1) = \text{Sin}(\text{GtoR}(\text{angulo1}))$$

For angulo2 = 360 To 0 Step -0.9

$$U(0) = \text{Cos}(\text{GtoR}(\text{angulo2}))$$

$$U(1) = \text{Sin}(\text{GtoR}(\text{angulo2}))$$

- Determinación de las bases móviles.

$$e15(0) = \text{ropq}(T(), e1()).x(0)$$

$$e15(1) = \text{ropq}(T(), e1()).x(1)$$

$$e16(0) = \text{ropq}(U(), e1()).x(0)$$

$$e16(1) = \text{ropq}(U(), e1()).x(1)$$

- Determinación de la posición de los vectores L5,L6.

$$LL5t(0) = \text{Int}(L5 * e15(0))$$

$$LL5t(1) = \text{Int}(L5 * e15(1))$$

$$LL6t(0) = \text{Int}(L6 * e16(0))$$

$$LL6t(1) = \text{Int}(L6 * e16(1))$$

- Determinación de la condición $R9=L17+L5+L6$.

If $(R9(0) + \text{rango} > L17(0) + LL5t(0) + LL6t(0)$ And $R9(1) + \text{rango} > L17(1) + LL5t(1) + LL6t(1))$ And $(R9(0) - \text{rango} < L17(0) + LL5t(0) + LL6t(0)$ And $R9(1) - \text{rango} < L17(1) + LL5t(1) + LL6t(1))$ Then

- Ángulos para las cadenas cinemáticas.

$$\text{tetha5} = \text{angulo1}$$

$$\text{tetha6} = \text{angulo2}$$

- Determinación de la condición.

$$L55(0) = \text{Int}(L5 * e15(0))$$

$$L55(1) = \text{Int}(L5 * e15(1))$$

$$L66(0) = \text{Int}(L6 * e16(0))$$

$$L66(1) = \text{Int}(L6 * e16(1))$$

- Se verifica que cumpla con condición de los cuadrados.

```

    If ((T(0) * T(0) + T(1) * T(1) = 1) And (U(0) * U(0) + U(1) * U(1) = 1)) Then
        Exit Sub
    End If
End If
Next
Next
banderacc3 = False
End Sub

```

- Grafica el robot en el la caja de dibujo.

```
Private Sub Graficarobot()
```

- Variables temporales para el sistema de la pantalla.

```

Dim ofsetx As Single
Dim ofsety As Single
Dim Rtpot(1) As Single
Dim RT1(1) As Single
Dim RT2(1) As Single
Dim RT3(1) As Single
Dim RT4(1) As Single
Dim RT6(1) As Single
Dim RT9(1) As Single

```

- Verificacion de soluciones.

```

If (banderacc1 = False Or banderacc2 = False Or banderacc3 = False) Then
    MsgBox "El sistema no tubo solucion "
    Exit Sub
End If

```

- Ofset en x+2500 ofset en y -2100, centrado referido a CC1.

offsetx = 2500

offsety = 1500

- Adecuación al sistema en de pantalla.

Rtpot(0) = Rpot(0) + offsetx

Rtpot(1) = Rpot(1) + offsety

RT3(0) = R3(0) + offsetx

RT3(1) = R3(1) + offsety

RT6(0) = R6(0) + offsetx

RT6(1) = R6(1) + offsety

RT9(0) = R9(0) + offsetx

RT9(1) = R9(1) + offsety

- Características de la figura del robot.

Line3.BorderWidth = 3

Line4.BorderWidth = 3

Line5.BorderWidth = 3

Line6.BorderWidth = 3

Line7.BorderWidth = 3

Line8.BorderWidth = 3

Line9.BorderWidth = 3

Line10.BorderWidth = 3

Line11.BorderWidth = 3

Line12.BorderWidth = 3

Line3.BorderColor = vbWhite

Line4.BorderColor = vbWhite

Line5.BorderColor = vbWhite

Line6.BorderColor = vbWhite

Line7.BorderColor = vbBlue
Line8.BorderColor = vbBlue
Line9.BorderColor = vbBlue
Line10.BorderColor = vbBlue
Line11.BorderColor = vbBlue
Line12.BorderColor = vbBlue

- Corrección de cuadrante y offset de centrado.
- Graficación del vector Bpl.

Line3.X1 = Int(Rtpot(0))
Line3.Y1 = Int(Rtpot(1))
Line3.X2 = Int(RT3(0))
Line3.Y2 = Int(RT3(1))

- Graficación del vector L36.

Line4.X1 = Int(RT3(0))
Line4.Y1 = Int(RT3(1))
Line4.X2 = Int(RT6(0))
Line4.Y2 = Int(RT6(1))

- Graficación del vector L39.

Line5.X1 = Int(RT3(0))
Line5.Y1 = Int(RT3(1))
Line5.X2 = Int(RT9(0))
Line5.Y2 = Int(RT9(1))

- Graficación del vector L96.

Line6.X1 = Int(RT9(0))
Line6.Y1 = Int(RT9(1))
Line6.X2 = Int(RT6(0))

$$\text{Line6.Y2} = \text{Int}(\text{RT6}(1))$$

- Graficación de CC1.
- Vector L1.

$$\text{Line7.X1} = \text{offsetx}$$

$$\text{Line7.Y1} = \text{offsety}$$

$$\text{Line7.X2} = \text{offsetx} + \text{L11}(0)$$

$$\text{Line7.Y2} = \text{offsety} + \text{L11}(1)$$

- Vector L2

$$\text{Line8.X1} = \text{offsetx} + \text{L11}(0)$$

$$\text{Line8.Y1} = \text{offsety} + \text{L11}(1)$$

$$\text{Line8.X2} = \text{offsetx} + \text{L11}(0) + \text{L22}(0)$$

$$\text{Line8.Y2} = \text{offsety} + \text{L11}(1) + \text{L22}(1)$$

- Graficación de CC2.
- Vector L3.

$$\text{Line9.X1} = \text{offsetx} + \text{L14}(0)$$

$$\text{Line9.Y1} = \text{offsety} + \text{L14}(1)$$

$$\text{Line9.X2} = \text{offsetx} + \text{L14}(0) + \text{L33}(0)$$

$$\text{Line9.Y2} = \text{offsety} + \text{L14}(1) + \text{L33}(1)$$

- Vector L4.

$$\text{Line10.X1} = \text{offsetx} + \text{L14}(0) + \text{L33}(0)$$

$$\text{Line10.Y1} = \text{offsety} + \text{L14}(1) + \text{L33}(1)$$

$$\text{Line10.X2} = \text{offsetx} + \text{L14}(0) + \text{L33}(0) + \text{L44}(0)$$

$$\text{Line10.Y2} = \text{offsety} + \text{L14}(1) + \text{L33}(1) + \text{L44}(1)$$

- Graficación de CC3.

- Vector L5.

```
Line11.X1 = offsetx + L17(0)
Line11.Y1 = offsety + L17(1)
Line11.X2 = offsetx + L17(0) + L55(0)
Line11.Y2 = offsety + L17(1) + L55(1)
```

- Vector L6.

```
Line12.X1 = offsetx + L17(0) + L55(0)
Line12.Y1 = offsety + L17(1) + L55(1)
Line12.X2 = offsetx + L17(0) + L55(0) + L66(0)
Line12.Y2 = offsety + L17(1) + L55(1) + L66(1)
```

- Valores de los controles

```
Text1.Text = Int(Rpot(0))
Text2.Text = Int(Rpot(1))
Text3.Text = RtoG(tethapot)
```

- Valores de los ángulos de las cadena cinemática.

```
Label13.Caption = Int(tetha1)
Label16.Caption = Int(tetha2)
Label14.Caption = Int(tetha3)
Label17.Caption = Int(tetha4)
Label19.Caption = Int(tetha5)
Label20.Caption = Int(tetha6)
End Sub
```

```
Private Sub VScroll1_Change()
incremento = VScroll1.Value
Text4.Text = incremento
End Sub
```

El ejecutar el siguiente programa da como resultado la salida gráfica que se muestra a continuación, donde se dan los valores de x, y, theta p_{ot} y la solución al modelo permite mostrar su nuevo posicionamiento de cada eslabón que compone el robot.

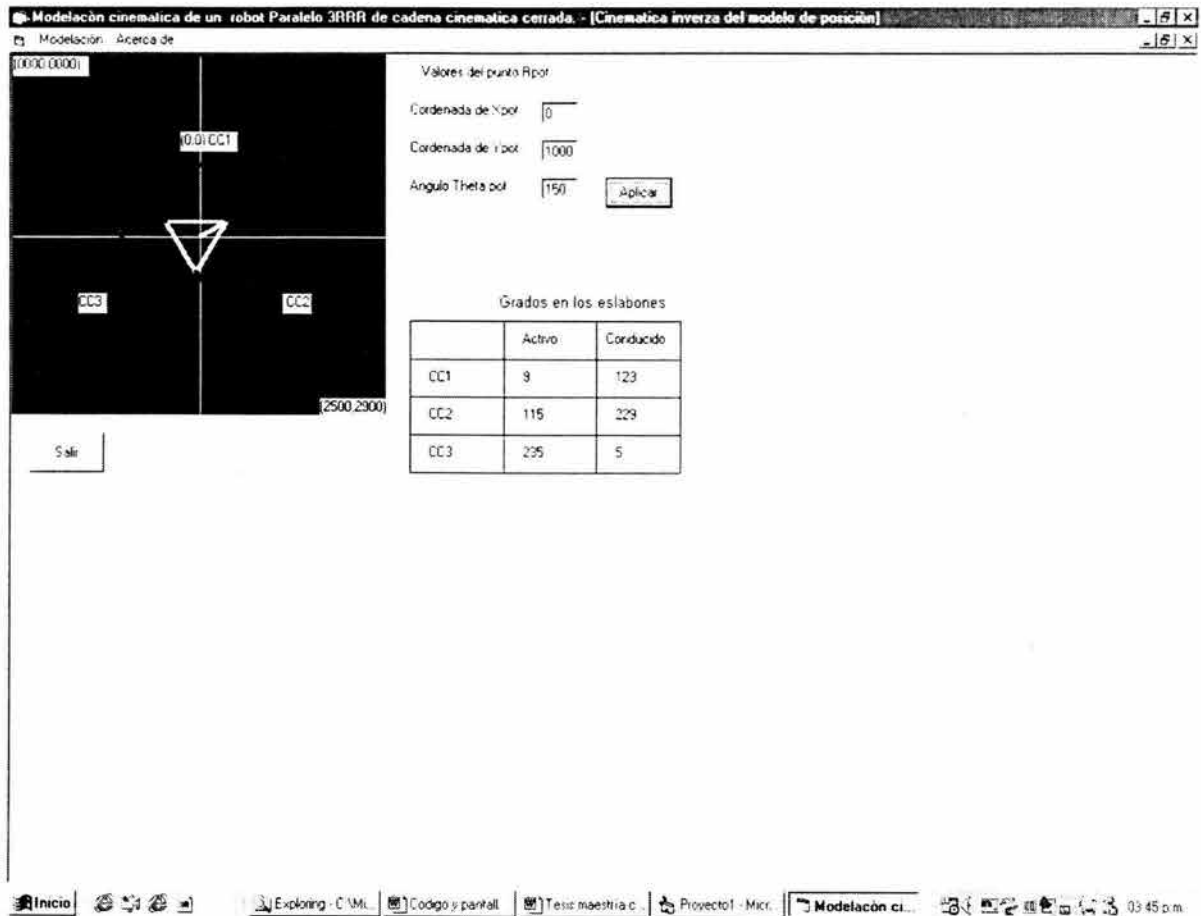


Figura 4.1 Salida gráfica de la cinemática inversa del robot paralelo.

4.3 Programación de la cinemática directa del robot.

En esta sección se describe la programación del modelo cinemático directo de posicionamiento, se dan aquí con respecto a un sistema coordenado de referencia x, y, básicamente respecto a x, los ángulos de los eslabones conductores de las cadenas cinemáticas llamados para efecto de programación activos, para localizar la posición del efector final $P_{ot} \in P_L$ del robot,. Esto es, se encuentran las coordenadas

X_{POT} , Y_{POT} y el ángulo θ_{POT} . También el programa determina la posición en grados de los eslabones conducidos. Para la programación se utilizan las ecuaciones descritas en la sección 4.1.

Programa de la cinemática directa.

- Se dimensionan las Banderas de estado de solución inversa de cadenas cinemáticas.

Dim banderacc1, banderacc2, banderacc3 As Boolean

Dim incremento As Integer

- Se aplican nuevas coordenadas para modelar su posición.

Private Sub aplicar_Click()

- Nueva orientación.

tetha1 = Int(Trim(Text1.Text))

tetha3 = Int(Trim(Text2.Text))

tetha6 = Int(Trim(Text3.Text))

cinematicadirecta tetha1, tetha3, tetha6

End Sub

Private Sub Form_Load()

- Posición Home de referencia Borrar>rango de 307, 112, 238.

Text4.Text = "9"

Text5.Text = "115"

Text6.Text = "235"

cinematicadirecta 9, 115, 235

End Sub

- Sale de la ventana de modelación de posición.

```
Private Sub Salir_Click()
```

```
Unload Me
```

```
End Sub
```

- Determinación de la posición de la cinemática directa del robot.

```
Public Sub cinematicadirecta(angulo1 As Single, angulo3 As Single, angulo6 As Single)
```

- Definición de ángulos temporales.

```
Dim angulot1 As Single
```

```
Dim angulot2 As Single
```

```
Dim angulot3 As Single
```

```
Dim angulot4 As Single
```

- Definición de los elementos temporales de solución

```
Dim e36(1) As Single
```

```
Dim e39(1) As Single
```

```
Dim epot(1) As Single
```

```
Dim tem(1) As Single
```

```
Dim LL36t(1) As Single
```

```
Dim LL39t(1) As Single
```

```
Dim solucion(1) As Single
```

```
Dim incremento As Single
```

- Dato que depende de la resolución del actuador mecánico del sistema.

```
incremento = 0.9
```

- Margen de tolerancia..

rango = 10

- Formulaciòn del problema DADOS:

tetha1 = angulo1

tetha3 = angulo3

tetha6 = angulo6

- Base de referencia.

e1(0) = 1

e1(1) = 0

- Definición de los vectores que componen al robot.

Bpl = GtoR(30)

Lpot = 400

L36 = Lpot * 2

L39 = Lpot * 2

L1 = L36

L2 = L1

L3 = L1

L4 = L1

L5 = L1

L6 = L1

L = 2 * L1

- Definición de los complejos X() y W().

x(0) = Cos(GtoR(150))

x(1) = Sin(GtoR(150))

$$W(0) = \text{Cos}(GtoR(210))$$

$$W(1) = \text{Sin}(GtoR(210))$$

- Determinación de la orientación del eslabón activo CC1.
- Modelo referido a P1

$$p1(0) = 0$$

$$p1(1) = 0$$

$$P(0) = \text{Cos}(GtoR(\text{angulo1}))$$

$$P(1) = \text{Sin}(GtoR(\text{angulo1}))$$

- Determinación de las bases móviles.

$$e11(0) = \text{ropq}(P(), e1()).x(0)$$

$$e11(1) = \text{ropq}(P(), e1()).x(1)$$

- Determinación de vector de L1.

$$L11(0) = \text{Int}(L1 * e11(0))$$

$$L11(1) = \text{Int}(L1 * e11(1))$$

- Determinación de la orientación del eslabón activo de CC2.
- Determinación de la tierra de CC2.

$$L14(0) = L * \text{Cos}(GtoR(60))$$

$$L14(1) = L * \text{Sin}(GtoR(60))$$

- Derterminación de la orientación del vector.

$$R(0) = \text{Cos}(GtoR(\text{angulo3}))$$

$$R(1) = \text{Sin}(GtoR(\text{angulo3}))$$

- Determinación de las bases móviles.

$$e13(0) = \text{ropq}(R(), e1()).x(0)$$

$$e13(1) = \text{ropq}(R(), e1()).x(1)$$

- Determinación de vector de L1.

$$L33(0) = \text{Int}(L3 * e13(0))$$

$$L33(1) = \text{Int}(L3 * e13(1))$$

- Determinación de la orientación del eslabón activo de CC3.

$$T(0) = \text{Cos}(GtoR(\text{angulo6}))$$

$$T(1) = \text{Sin}(GtoR(\text{angulo6}))$$

- Determinación de las bases móviles.

$$e15(0) = \text{ropq}(T(), e1()).x(o)$$

$$e15(1) = \text{ropq}(T(), e1()).x(1)$$

- Determinación de vector de L1.

$$L55(0) = \text{Int}(L5 * e15(0))$$

$$L55(1) = \text{Int}(L5 * e15(1))$$

- Determinación del eslabón de tierra de CC3

$$L17(0) = -1 * L * \text{Cos}(GtoR(60))$$

$$L17(1) = L * \text{Sin}(GtoR(60))$$

- Formulación de la ecuación $L11+L22-(L14+L33+L44+L36)=0$.

- Determinación del vector L2 temporal 121.

For angulot1 = 120 To 360 Step incremento

$$Q(0) = \text{Cos}(GtoR(\text{angulot1}))$$

$$Q(1) = \text{Sin}(GtoR(\text{angulot1}))$$

$$e12(0) = \text{ropq}(Q(), e1()).x(o)$$

$$e12(1) = \text{ropq}(Q(), e1()).x(1)$$

$$LL2t(0) = \text{Int}(L2 * e12(0))$$

$$LL2t(1) = \text{Int}(L2 * e12(1))$$

- Determinación del vector L44 temporal.

For angulot2 = 0 To 360 Step incremento

$$S(0) = \text{Cos}(\text{GtoR}(\text{angulot2}))$$

$$S(1) = \text{Sin}(\text{GtoR}(\text{angulot2}))$$

$$e14(0) = \text{ropq}(S(), e1()).x(0)$$

$$e14(1) = \text{ropq}(S(), e1()).x(1)$$

$$LL4t(0) = \text{Int}(L4 * e14(0))$$

$$LL4t(1) = \text{Int}(L4 * e14(1))$$

- Determinación del vector L36 temporal.

For angulot3 = 0 To 360 Step incremento

$$V(0) = \text{Cos}(\text{GtoR}(\text{angulot3}))$$

$$V(1) = \text{Sin}(\text{GtoR}(\text{angulot3}))$$

$$\text{tem}(0) = \text{ropq}(x(), V()).x(0)$$

$$\text{tem}(1) = \text{ropq}(x(), V()).x(1)$$

$$e36(0) = \text{ropq}(\text{tem}(), e1()).x(0)$$

$$e36(1) = \text{ropq}(\text{tem}(), e1()).x(1)$$

$$LL36t(0) = \text{Int}(L36 * e36(0))$$

$$LL36t(1) = \text{Int}(L36 * e36(1))$$

- Verificación de la solución de la ecuación $L11+L22-(L14+L33+L44+L36)=0$.

$$\text{solucion}(0) = L11(0) + LL2t(0) - (L14(0) + L33(0) + LL4t(0) + LL36t(0))$$

$$\text{solucion}(1) = L11(1) + LL2t(1) - (L14(1) + L33(1) + LL4t(1) + LL36t(1))$$

If (solucion(0) + rango > 0 And solucion(1) + rango > 0) And (solucion(0) - rango < 0 And solucion(1) - rango < 0) Then

- Formulación de la ecuación $L11+L22-(L17+L55+L66+L39)=0$.

- Determinación del vector L66.

For angulot4 = 0 To 360 Step 0.9

$$U(0) = \text{Cos}(\text{GtoR}(\text{angulot4}))$$

$$U(1) = \text{Sin}(G\text{toR}(\text{angulot4}))$$

$$e16(0) = \text{ropq}(U(), e1()).x(o)$$

$$e16(1) = \text{ropq}(U(), e1()).x(1)$$

$$LL6t(0) = \text{Int}(L6 * e16(0))$$

$$LL6t(1) = \text{Int}(L6 * e16(1))$$

- Determinación del vector L39 temporal.

$$\text{tem}(0) = \text{ropq}(W(), V()).x(o)$$

$$\text{tem}(1) = \text{ropq}(W(), V()).x(1)$$

$$e39(0) = \text{ropq}(\text{tem}(), e1()).x(o)$$

$$e39(1) = \text{ropq}(\text{tem}(), e1()).x(1)$$

$$LL39t(0) = \text{Int}(L39 * e39(0))$$

$$LL39t(1) = \text{Int}(L39 * e39(1))$$

- Verificación de la solución de la ecuación $L11+L22-(L17+L55+L66+L39)=0$.

$$\text{solucion}(0) = L11(0) + LL2t(0) - (L17(0) + L55(0) + LL6t(0) + LL39t(0))$$

$$\text{solucion}(1) = L11(1) + LL2t(1) - (L17(1) + L55(1) + LL6t(1) + LL39t(1))$$

$$\text{If } (\text{solucion}(0) + \text{rango} > 0 \text{ And } \text{solucion}(1) + \text{rango} > 0) \text{ And } (\text{solucion}(0)$$

- rango < 0 And solucion(1) - rango < 0) Then

- Determinación de las rotaciones de los eslabones conducidos.

$$\text{tetha2} = \text{angulot1}$$

$$\text{tetha4} = \text{angulot2}$$

$$\text{tethapot} = \text{angulot3}$$

$$\text{tetha5} = \text{angulot4}$$

- Determinación de los vectores conducidos.

$$L22(0) = \text{Int}(L2 * e12(0))$$

$$L22(1) = \text{Int}(L2 * e12(1))$$

$$L44(0) = \text{Int}(L4 * e14(0))$$

```

L44(1) = Int(L4 * e14(1))
L66(0) = Int(L6 * e16(0))
L66(1) = Int(L6 * e16(1))
LL36(0) = Int(L36 * e36(0))
LL36(1) = Int(L36 * e36(1))
LL39(0) = Int(L39 * e39(0))
LL39(1) = Int(L39 * e39(1))
epot(0) = ropq(V(), e1()).x(0)
epot(1) = ropq(V(), e1()).x(1)
LLpot(0) = Int(Lpot * epot(0))
LLpot(1) = Int(Lpot * epot(1))
Rpot(0) = L11(0) + L22(0) + LLpot(0)
Rpot(1) = L11(1) + L22(1) + LLpot(1)

```

!*****

- Se verifica que cumpla con condición de los cuadrados Q(),S(),U() Y V().
 If ((Q(0) * Q(0) + Q(1) * Q(1) = 1) And (S(0) * S(0) + S(1) * S(1) = 1)
 And (U(0) * U(0) + U(1) * U(1) = 1) And (V(0) * V(0) + V(1) * V(1) = 1)) Then
 Graficarobot
 Exit Sub
 End If
 End If
 Next
 End If
 Next
 Next
 Next
 Next
 MsgBox ("no se encontro solución")
 End Sub

- Gráfica el robot en el la caja de dibujo.

Private Sub Graficarobot()

- Variables temporales para el sistema de la pantalla.

Dim ofsetx As Single

Dim ofsety As Single

Dim Rtpot(1) As Single

- Ofset en x+2500 ofset en y -2100, centrado y referido a CC1 el modelo.

ofsetx = 2500

ofsety = 1500

- Adecuación al sistema en de pantalla.

Rtpot(0) = Rpot(0) + ofsetx

Rtpot(1) = Rpot(1) + ofsety

- Características de la figura del robot.

Line3.BorderWidth = 3

Line4.BorderWidth = 3

Line5.BorderWidth = 3

Line6.BorderWidth = 3

Line7.BorderWidth = 3

Line8.BorderWidth = 3

Line9.BorderWidth = 3

Line10.BorderWidth = 3

Line11.BorderWidth = 3

Line12.BorderWidth = 3

Line3.BorderColor = vbBlue

Line4.BorderColor = vbWhite

Line5.BorderColor = vbWhite

Line6.BorderColor = vbWhite
 Line7.BorderColor = vbBlue
 Line8.BorderColor = vbBlue
 Line9.BorderColor = vbBlue
 Line10.BorderColor = vbBlue
 Line11.BorderColor = vbBlue
 Line12.BorderColor = vbBlue

- Corrección de cuadrante y offset de centrado.
- Graficación del vector Bpl.

Line3.X1 = offsetx + L11(0) + L22(0) 'Int(Rtpot(0))
 Line3.Y1 = offsety + L11(1) + L22(1) 'Int(Rtpot(1))
 Line3.X2 = offsetx + L11(0) + L22(0) + LLpot(0) 'Int(RT3(0))
 Line3.Y2 = offsety + L11(1) + L22(1) + LLpot(1) 'Int(RT3(1))

- Graficación del vector L36.

Line4.X1 = offsetx + L14(0) + L33(0) + L44(0) 'Int(RT3(0))
 Line4.Y1 = offsety + L14(1) + L33(1) + L44(1) 'Int(RT3(1))
 Line4.X2 = offsetx + L14(0) + L33(0) + L44(0) + LL36(0) 'offsetx + L14(0) + L33(0) +
 L44(0) 'Int(RT6(0))
 Line4.Y2 = offsety + L14(1) + L33(1) + L44(1) + LL36(1) 'offsety + L14(1) + L33(1) +
 L44(1) 'Int(RT6(1))

- Graficación del vector L39.

Line5.X1 = offsetx + L17(0) + L55(0) + L66(0) 'Int(RT3(0))
 Line5.Y1 = offsety + L17(1) + L55(1) + L66(1) 'Int(RT3(1))
 Line5.X2 = offsetx + L17(0) + L55(0) + L66(0) + LL39(0) 'Int(RT9(0))
 Line5.Y2 = offsety + L17(1) + L55(1) + L66(1) + LL39(1) 'Int(RT9(1))

- Graficación del vector L96.

$$\text{Line6.X1} = \text{offsetx} + L14(0) + L33(0) + L44(0) \cdot \text{Int}(\text{RT9}(0))$$

$$\text{Line6.Y1} = \text{offsety} + L14(1) + L33(1) + L44(1) \cdot \text{Int}(\text{RT9}(1))$$

$$\text{Line6.X2} = \text{offsetx} + L17(0) + L55(0) + L66(0) \cdot \text{Int}(\text{RT6}(0))$$

$$\text{Line6.Y2} = \text{offsety} + L17(1) + L55(1) + L66(1) \cdot \text{Int}(\text{RT6}(1))$$

- Graficación de CC1.

'vector L1

$$\text{Line7.X1} = \text{offsetx}$$

$$\text{Line7.Y1} = \text{offsety}$$

$$\text{Line7.X2} = \text{offsetx} + L11(0)$$

$$\text{Line7.Y2} = \text{offsety} + L11(1)$$

'vector L2

$$\text{Line8.X1} = \text{offsetx} + L11(0)$$

$$\text{Line8.Y1} = \text{offsety} + L11(1)$$

$$\text{Line8.X2} = \text{offsetx} + L11(0) + L22(0)$$

$$\text{Line8.Y2} = \text{offsety} + L11(1) + L22(1)$$

- Graficación de CC2.
- Vector L3.

$$\text{Line9.X1} = \text{offsetx} + L14(0)$$

$$\text{Line9.Y1} = \text{offsety} + L14(1)$$

$$\text{Line9.X2} = \text{offsetx} + L14(0) + L33(0)$$

$$\text{Line9.Y2} = \text{offsety} + L14(1) + L33(1)$$

- Vector L4.

$$\text{Line10.X1} = \text{offsetx} + L14(0) + L33(0)$$

$$\text{Line10.Y1} = \text{offsety} + L14(1) + L33(1)$$

$$\text{Line10.X2} = \text{offsetx} + L14(0) + L33(0) + L44(0)$$

$$\text{Line10.Y2} = \text{offsety} + L14(1) + L33(1) + L44(1)$$

- Graficación de CC3.
- Vector L5.

Line11.X1 = offsetx + L17(0)

Line11.Y1 = offsety + L17(1)

Line11.X2 = offsetx + L17(0) + L55(0)

Line11.Y2 = offsety + L17(1) + L55(1)

- Vector L6.

Line12.X1 = offsetx + L17(0) + L55(0)

Line12.Y1 = offsety + L17(1) + L55(1)

Line12.X2 = offsetx + L17(0) + L55(0) + L66(0)

Line12.Y2 = offsety + L17(1) + L55(1) + L66(1)

- Valores de la cinemática directa.
- Valores de las corenadas de PL.

Text1.Text = Int(Rpot(0))

Text2.Text = Int(Rpot(1))

Text3.Text = tethapot

- Valores de los ángulos de las cadena cinemática

Label13.Caption = Int(tetha1)

Label16.Caption = Int(tetha2)

Label14.Caption = Int(tetha3)

Label17.Caption = Int(tetha4)

Label19.Caption = Int(tetha6)

Label20.Caption = Int(tetha5)

End Sub

El ejecutar el siguiente programa da como resultado la salida gráfica que se muestra a continuación, donde se dan los valores de los ángulos para los eslabones activos de las cadenas cinemáticas CC1, CC2 y CC3 del robot y se determinan X_{pot} , Y_{pot} , θ_{pot} , que representan la posición del efector final $P_{ot} \in P_L$ y la solución al modelo permite mostrar su nuevo posicionamiento.

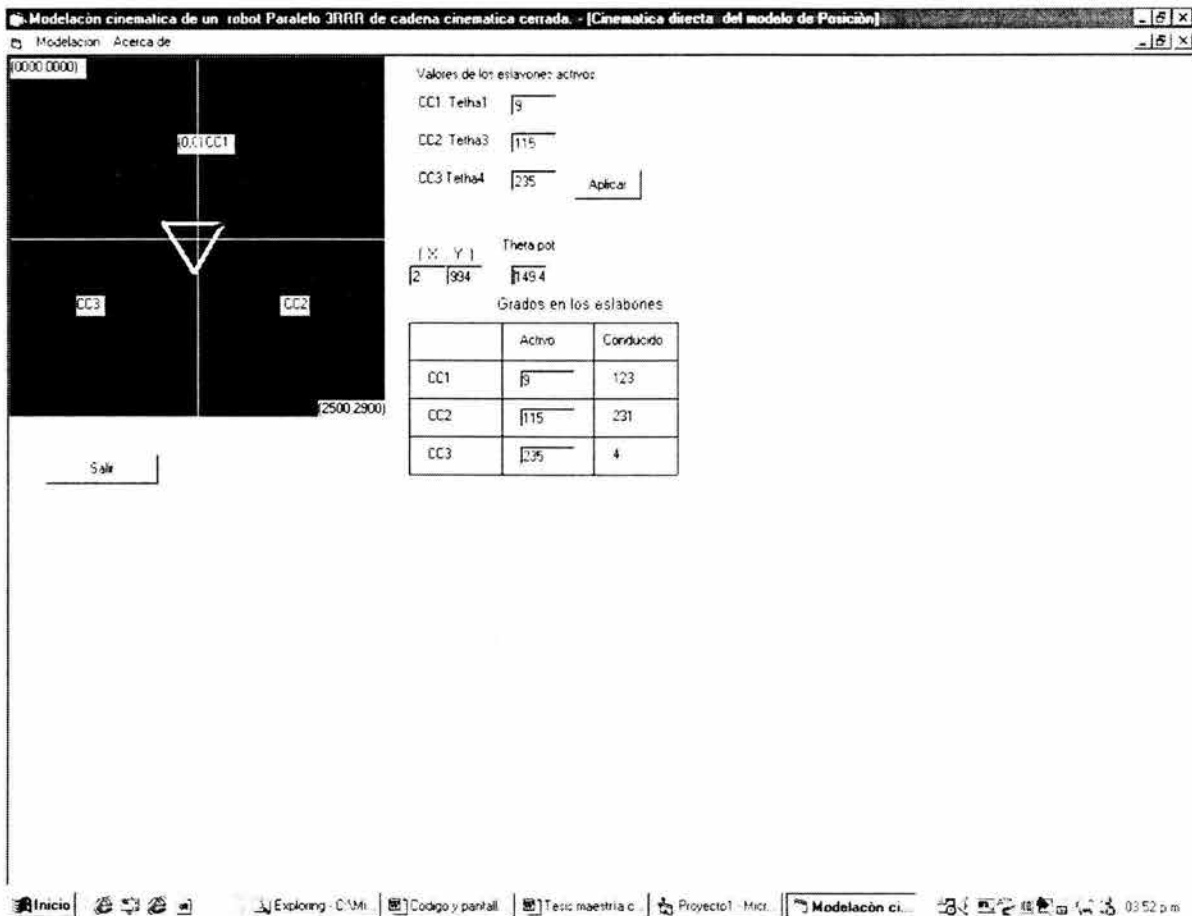


Figura 4.1 Salida gráfica de la cinemática directa del robot paralelo

APÉNDICE I

MARCO TEÓRICO NÚMEROS COMPLEJOS

APÉNDICE I

MARCO TEÓRICO NÚMEROS COMPLEJOS

Introducción: para construir los modelos cinemáticos de posicionamiento, velocidad, aceleración y trayectoria del robot paralelo planar de 3 GDL, tipo RRR, se utiliza el espacio vectorial de los números complejos. El contenido utilizado en este apéndice está basado en [2], presentado a continuación.

A.1 El espacio vectorial de los números complejos

Aquí definiremos dos operaciones binarias sobre el conjunto \mathfrak{R}^2 , el cual es el conjunto de parejas ordenadas de números reales. La primer operación que se define es la operación aditiva $\oplus : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$. La segunda es una operación multiplicativa $\star : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$. Se mostrara que mediante estas operaciones la pareja (\mathfrak{R}^2, \oplus) y la terna $(\mathfrak{R}^2, \oplus, \star)$, forman un grupo aditivo conmutativo y un campo conmutativo respectivamente. Utilizándose la multiplicación escalar $\bullet : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ y el producto interno $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, se mostrará que el conjunto $(\mathfrak{R}^2, \oplus, \star, \bullet, \langle \bullet, \bullet \rangle)$, es un espacio vectorial con producto interno conocido como el conjunto de los números complejos. Considerando el conjunto \mathfrak{R}^2 sobre el cual se definirán las siguientes operaciones:

$$1) (a, b) \oplus (\alpha, \beta) = (a+\alpha, b+\beta) \quad (A1)$$

$$2) (a, b) \star (\alpha, \beta) = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha)$$

Donde $(a, b), (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$, las operaciones $\oplus : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ es la suma usual en \mathfrak{R}^2 y es conocido que la pareja (\mathfrak{R}^2, \oplus) es un grupo aditivo conmutativo. Se mostrara ahora un resultado primordial para los objetivos deseados.

Teorema A. 1. La terna $(\mathbb{R}^2, \oplus, \star)$ es un campo conmutativo.

Demostración. Puesto que la pareja (\mathbb{R}^2, \oplus) es un grupo aditivo conmutativo, falta solo demostrar que (\mathbb{R}^2, \star) es un grupo multiplicativo conmutativo excepto por la existencia del inverso multiplicativo del elemento nulo aditivo, además las operaciones aditiva y multiplicativa satisfacen las correspondientes propiedades distributivas. De acuerdo a la propiedad conmutativa de la multiplicación de los números reales, la operación $\star : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es conmutativa, además:

a) La operación $\star : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es asociativa. Sean $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$, esta propiedad se demuestra de la siguiente forma. Sea

$\mathbf{p} = (a, b)$, $\mathbf{q} = (\alpha, \beta)$, y $\mathbf{r} = (c, d)$, y tenemos la operación:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \star (\mathbf{q} \star \mathbf{r}) &= (a, b) \star ((\alpha, \beta) \star (c, d)) \\ &= (a, b) \star (\alpha c - \beta d, \alpha d + \beta c) \\ &= (a(\alpha c - \beta d) - b(\alpha d + \beta c), a(\alpha d + \beta c) + b(\alpha c - \beta d)) \\ &= (aac - a\beta d - bad - b\beta c, aad + a\beta c + bac - b\beta d) \\ &= ((a\alpha - b\beta)c - (a\beta + b\alpha)d, (a\beta + b\alpha)c + (a\alpha - b\beta)d) \\ &= (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) \star (c, d) \\ &= ((a, b) \star (\alpha, \beta)) \star (c, d) \\ &= (\mathbf{p} \star \mathbf{q}) \star \mathbf{r} \end{aligned}$$

b) A continuación se construye el elemento identidad de la multiplicación.

Tenemos que $\tilde{\mathbf{I}} \in \mathbb{R}^2$ es la identidad multiplicativa de \mathbb{R}^2 si y solo si $\tilde{\mathbf{I}} \star \mathbf{p} = \mathbf{p} \star \tilde{\mathbf{I}}$, tal que $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$. Por lo tanto si $\mathbf{p} = (a, b)$ y $\tilde{\mathbf{I}} = (\alpha, \beta)$, entonces tenemos que

$$\tilde{\mathbf{I}} \star \mathbf{p} = \mathbf{p} \star \tilde{\mathbf{I}} = (a, b) \star (\alpha, \beta) = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) = (a, b)$$

dado que $\tilde{I} \in \mathfrak{R}^2$ es la identidad, se tiene que

$$a\alpha - b\beta = a \quad (b1) \quad , \quad a\beta + b\alpha = b \quad (b2).$$

El elemento identidad multiplicativo de $\mathfrak{p} \in \mathfrak{R}^2$ con respecto a la operación

$*$: $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ da como resultado al resolver el sistema de ecuaciones anterior, las siguientes ecuaciones:

siendo $a \neq 0$ las dos ecuaciones se reducen a :

Despejando α de (b1) tenemos

$$\alpha = 1/a (a + b\beta)$$

sustituyendo en (b2)

$$a\beta + 1/a (a + b\beta) = b$$

$$a^2 \beta + b (a + b\beta) = ab$$

$$a^2 \beta + ab + b^2 \beta = ab$$

$$a^2 \beta + b^2 \beta = 0 \quad \text{de donde se obtiene}$$

$$(a^2 + b^2) \beta = 0 \quad (b3)$$

De acuerdo a esta expresión, tenemos que $\beta = 0$ y sustituyendo el valor de β en (b1) se obtiene

$$a\alpha - b(0) = a$$

$$\alpha = a / a = 1$$

De donde tenemos que como el elemento identidad $\tilde{I} = (\alpha, \beta)$, se tiene que este $\tilde{I} = (1, 0)$.

c) Ahora se mostrara que para toda $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ existe un elemento inverso $\mathbf{p}' \in \mathbb{R}^2$, tal que $\mathbf{p} * \mathbf{p}' = \mathbf{p}' * \mathbf{p} = \tilde{I}$. Siendo $\mathbf{p} = (a, b)$ y $\mathbf{p}' = (\alpha, \beta)$, se tiene que

$$\mathbf{p} * \mathbf{p}' = \mathbf{p}' * \mathbf{p} = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) = (1, 0)$$

de acuerdo a esta expresión se deduce que

$$a\alpha - b\beta = 1 \quad (c1)$$

$$\text{y que } a\beta + b\alpha = 0 \quad (c2)$$

Despejando α de la primera expresión (c1) y sustituyéndola en la segunda (c2) tenemos que

$$\alpha = 1/a (1 + b\beta)$$

$$a\beta + b/a (1 + b\beta) = 0$$

$$a^2\beta + b + b^2\beta = 0$$

$$(a^2 + b^2)\beta = -b \quad \text{de donde}$$

$$\beta = -b / (a^2 + b^2)$$

sustituyendo en la expresión

$$\alpha = 1/a (1 + b\beta) = 1/a (1 + b(-b / (a^2 + b^2)))$$

$$= 1/a ((1 - b^2) / (a^2 + b^2)) = 1/a ((a^2 + b^2 - b^2) / (a^2 + b^2))$$

$$= (a^2 / (a^2 + b^2)) / a \quad \text{por lo que}$$

$$\alpha = a / (a^2 + b^2)$$

De donde se concluye que el elemento inverso multiplicativo de $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$, resulta ser:

$$\mathbf{p}' = \{ a / (a^2 + b^2), -b / (a^2 + b^2) \}$$

así, si multiplicamos $\mathbf{p} * \mathbf{p}'$ estos deben ser igual a $\vec{1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} * \mathbf{p}' &= \{(a, b) * [a / (a^2 + b^2), -b / (a^2 + b^2)]\} \\ &= \{a(a / (a^2 + b^2)) - b(-b / (a^2 + b^2)), a(-b / (a^2 + b^2)) \\ &\quad + b(a / (a^2 + b^2))\} \\ &= \{a^2 / (a^2 + b^2) + b^2 / (a^2 + b^2), -ab / (a^2 + b^2) + ba / (a^2 + b^2)\} \\ &= \{(a^2 + b^2) / (a^2 + b^2), 0\} \end{aligned}$$

$$\mathbf{p} * \mathbf{p}' = (1, 0) = \vec{1}$$

d) Si tenemos ahora que $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$, $\mathbf{q}' = (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$ y $\mathbf{r} = (c, d) \in \mathfrak{R}^2$, las siguientes propiedades distributivas son satisfechas:

$$\mathbf{p} * (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) = \mathbf{p} * \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} * \mathbf{r},$$

$$(\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}) * \mathbf{r} = \mathbf{p} * \mathbf{r} \oplus \mathbf{q} * \mathbf{r}.$$

Utilizando sus valores respectivos tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{p} * (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) &= (a, b) * \{(\alpha, \beta) + (c, d)\} = (a, b) * \{\alpha + c, \beta + d\} \\ &= [(a(\alpha + c) - b(\beta + d), a(\beta + d) + b(\alpha + c))] \\ &= (a\alpha + ac - b\beta - bd, a\beta + ad + b\alpha + bc) \\ &= [(a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) + (ac - bd, ad + bc)] \\ &= [(a, b) * (\alpha, \beta) + (a, b) * (c, d)] \end{aligned}$$

$$= \mathbf{p} * \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} * \mathbf{r}$$

La otra expresión

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}) * \mathbf{r} &= [(a, b) + (\alpha, \beta)] * (c, d) = (a + \alpha, b + \beta) * (c, d) \\ &= [(a + \alpha)c - (b + \beta)d, (a + \alpha)d + (b + \beta)c] \\ &= (ac + \alpha c - bd - \beta d, ad + \alpha d + bc + \beta c) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (\alpha c - \beta d, \alpha d + \beta c) \\ &= (a, b) * (c, d) + (\alpha, \beta) * (c, d) \\ &= \mathbf{p} * \mathbf{r} \oplus \mathbf{q} * \mathbf{r} \end{aligned}$$

se sabe también que la operación $\bullet : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la cual está definida por

$$\alpha \bullet (a, b) = (\alpha a, \alpha b), \text{ tal que } \alpha \in \mathbb{R}, (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

Es una multiplicación escalar y por consecuencia \mathbb{R}^2 es un espacio vectorial real. Además con esta multiplicación escalar el inverso multiplicativo de $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathbf{p}' = (1/(a^2 + b^2)) \overline{\mathbf{p}}$$

donde el elemento $\overline{\mathbf{p}} = (a, -b) \in \mathbb{R}^2$ es llamado el conjugado de $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Algunas propiedades de este elemento se presentan en el siguiente teorema.

Teorema A.2. Sea $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{q} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que:

$$\begin{aligned} 1) \overline{\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}} &= \overline{\mathbf{p}} \oplus \overline{\mathbf{q}} \\ 2) \overline{\mathbf{p} * \mathbf{q}} &= \overline{\mathbf{q}} * \overline{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

$$3) \mathbf{p} * \mathbf{p} = \mathbf{p} * \mathbf{q} = (a^2 + b^2, 0).$$

Demostración. Tomando en cuenta que basándose en la definición de la operación aditiva en \mathfrak{R}^2 y la correspondiente al conjugado se obtiene que:

$$\overline{\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}} = \overline{(a + \alpha, b + \beta)} = (a + \alpha, -b - \beta) = (a, -b) \oplus (\alpha, -\beta) = \overline{\mathbf{p}} \oplus \overline{\mathbf{q}}$$

se tiene también que

$$\begin{aligned} \mathbf{q} * \mathbf{p} &= (a, -b) * (\alpha, -\beta) = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) = (a\alpha - b\beta, -a\beta - b\alpha) \\ &= (\alpha, -\beta) * (a, -b) = \overline{\mathbf{q}} * \overline{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

Finalmente tenemos,

$$\overline{\mathbf{p} * \mathbf{p}} = (a, b) * (a, -b) = (a^2 + b^2, -ab + ab) = (a^2 + b^2, 0)$$

Ahora, también se tiene, que la transformación $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$, definida siendo $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$ y $\mathbf{q} = (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$, por:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a\alpha + b\beta$$

Es un producto interno en \mathfrak{R}^2 , de tal forma que el conjunto $\mathcal{C} = (\mathfrak{R}^2, \oplus, *, \bullet, \langle \bullet, \bullet \rangle)$ es un espacio vectorial con producto interno y la función $\|\bullet\| : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$ que está definida por

$$\|\mathbf{p}\| = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle^{1/2}, \text{ tal que } \mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$$

es una norma, por lo tanto \mathcal{C} es un espacio vectorial normado y sus elementos son llamados comúnmente números complejos.

Observación A.1. Se puede observar que al considerar la definición de la operación aditiva, el elemento $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathcal{C}$, se puede expresar como la suma siguiente:

$$\mathbf{p} = (a, b) = (a, 0) \oplus (0, b)$$

Esto es, al definir los subespacios

$$\mathcal{C}_R = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{C}_V = \{(0, b) : b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Del espacio vectorial de números complejos, este puede expresarse mediante la siguiente suma directa de subespacios:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_R \oplus \mathcal{C}_V = [\mathbf{p} \in \mathcal{C} : \mathbf{p} = \mathbf{p}_R \oplus \mathbf{p}_V ; \mathbf{p}_R \in \mathcal{C}_R, \mathbf{p}_V \in \mathcal{C}_V]$$

También al definir los isomorfismos tenemos que $\mathbf{T}_R : \mathcal{C}_R \rightarrow \mathbb{R}$; $\mathbf{T}_V : \mathcal{C}_V \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\mathbf{T}_R(a, 0) = a, \quad \mathbf{T}_V(0, b) = b,$$

Y siendo $\mathbf{T}_R^{-1}(a)$ entonces

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}_R^{-1}(a) \oplus \mathbf{T}_V^{-1}(b)$$

Observamos finalmente que, siendo $\mathbf{q} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{p}^* \overline{\mathbf{q}} \oplus \mathbf{q}^* \overline{\mathbf{p}} = 2(a\alpha + b\beta, 0)$$

el producto interno de los elementos $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$ se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} [\mathbf{p} * \bar{\mathbf{q}} \oplus \mathbf{q} * \bar{\mathbf{p}}]$$

Observación A.2. Se observa que el elemento $\underline{e}_2 = (0, 1) \in \mathfrak{R}^2$ de la base canónica. Satisface que:

$$i^2 = \underline{e}_2 * \underline{e}_2 = (0, 1) * (0, 1) = (-1, 0) = \mathbf{T}_R^{-1}(-1)$$

Además siendo $\mathbf{p} = (a, b)$, entonces tenemos que:

$$\mathbf{p} = (a, b) = (a, 0) \oplus b \underline{e}_2 = \mathbf{T}_R^{-1}(a) \oplus b \underline{e}_2$$

Las ultimas dos expresiones se han utilizado para interpretar los números complejos como la suma de una parte real, mas una parte imaginaria. Lo cierto es que el numero imaginario i , utilizado comúnmente en el álgebra compleja, es el vector \underline{e}_2 de la base canónica y la representación algebraicamente correcta de la pareja $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$, está dada por la ultima ecuación de esta observación.

A.2 Representación paramétrica de las rotaciones.

La finalidad de esta sección es construir con la operación $*$: $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, estudiada , una transformación lineal $\rho(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, con $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$ fijo, que preserve el producto interno, cuya matriz con respecto a la base canónica posea determinante positivo, con lo cual dicha transformación del parámetro $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$, es una rotación. Se estudiaran aquí también algunas otras representaciones de la rotación antes mencionada. Sea $\rho(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$, fijo definido por:

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (1 / \|\mathbf{p}\|) \mathbf{p} * \mathbf{q} \quad , \quad \forall \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^2. \quad (\text{A.2})$$

Las propiedades de la transformación $\rho(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ definida en la ecuación (A.2) se resumen en los resultados siguientes.

Teorema A.3. La transformación $\rho(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ definida en la ecuación (A.2) es lineal y ortogonal de determinante positivo.

Demostración: Siendo $\mathbf{q}, \mathbf{s} \in \mathfrak{R}^2$, y de acuerdo con la distributividad de la operación $*$: $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q} \oplus \mathbf{s}) &= (1 / \|\mathbf{p}\|) \mathbf{p} * (\mathbf{q} \oplus \mathbf{s}) \\ &= (1 / \|\mathbf{p}\|) [\mathbf{p} * \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} * \mathbf{s}] = (1 / \|\mathbf{p}\|) [\mathbf{p} * \mathbf{q}] \oplus (1 / \|\mathbf{p}\|) [\mathbf{p} * \mathbf{s}] \\ &= \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \oplus \rho(\mathbf{p}, \mathbf{s}). \end{aligned}$$

Si tenemos utilizamos a α , $\forall \alpha \in \mathfrak{R}$,

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, \alpha \mathbf{q}) &= (1 / \|\mathbf{p}\|) [\mathbf{p} * (\alpha \bullet \mathbf{q})] \\ &= (\alpha / \|\mathbf{p}\|) \bullet [\mathbf{p} * \mathbf{q}] = \alpha \bullet \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{aligned}$$

Además tenemos que $\rho(\mathbf{p}, \bullet) * : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, es ortogonal, pues:

$$\begin{aligned} \langle \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle &= \frac{1}{2} \overline{\text{Tr}} [\overline{\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})} * \rho(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \oplus \overline{\rho(\mathbf{p}, \mathbf{r})} * \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})] \\ &= \frac{1}{2} (1 / \|\mathbf{p}\|^2) \text{Tr} [(\overline{\mathbf{p}}, \mathbf{q}) * (\mathbf{p}, \mathbf{r}) \oplus \overline{\rho(\mathbf{p}, \mathbf{r})} * (\mathbf{p}, \mathbf{q})] \\ &= \frac{1}{2} (1 / \|\mathbf{p}\|^2) \text{Tr} [\overline{\mathbf{q}} * (\mathbf{p}, \mathbf{p}) * \mathbf{r} \oplus \overline{\mathbf{r}} * (\mathbf{p}, \mathbf{p}) * \mathbf{q}] \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} [\overline{\mathbf{q}} * \mathbf{r} \oplus \overline{\mathbf{r}} * \mathbf{q}] = \langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle \end{aligned}$$

Finalmente se muestra que el determinante de la transformación $\rho(\mathbf{p}, \bullet) * : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ es positivo, si tenemos que siendo $B = [(1, 0), (0, 1)] \subset \mathfrak{R}^2$ la base canónica en \mathfrak{R}^2 , la matriz de $\rho(\mathbf{p}, \bullet) * : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ con respecto a esta base resulta ser:

$$\mathbf{M}_{\rho(\mathbf{p}, \bullet)} = (1/\|\mathbf{p}\|) \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ya que,

$$\rho(\mathbf{p}, \underline{e}_1) = (1/\|\mathbf{p}\|) (a, b) * (1, 0) = (1/\|\mathbf{p}\|) (a, b),$$

$$\rho(\mathbf{p}, \underline{e}_2) = (1/\|\mathbf{p}\|) (a, b) * (0, 1) = (1/\|\mathbf{p}\|) (-b, a)$$

el resultado buscado se obtiene al observar que el determinante $\mathbf{M}_{\rho(\mathbf{p}, \bullet)} = 1$.

Teorema A.4. La transformación $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2) = (\underline{\mathbb{I}}: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2: \underline{\mathbb{I}}$ es lineal), puede ser representada de la siguiente forma:

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = (1/\|\mathbf{p}\|) (a \underline{\mathbb{I}} + b \hat{\mathbf{W}}) = (1/\|\mathbf{p}\|) (b \hat{\mathbf{W}} - a \hat{\mathbf{W}}^2),$$

Donde $\underline{\mathbb{I}}: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ es la transformación identidad y $\hat{\mathbf{W}}: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ está dado por:

$$\hat{\mathbf{W}} = -\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1,$$

Demostración. Observemos que:

$$\mathbf{M}_{\rho(\mathbf{p}, \bullet)} = (1/\|\mathbf{p}\|) \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \right\} = (1/\|\mathbf{p}\|) (a\mathbf{I} + b\mathbf{W})$$

Donde \mathbf{I} es la matriz identidad y \mathbf{W} es la matriz asimétrica la cual esta dada por:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La segunda igualdad del teorema se obtiene al observar que:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0*0 + -1*1) & (0*(-1) + (-1*0)) \\ 1*0 + 0*1 & 1*(-1) + 0*0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{I} \end{aligned}$$

La parte antisimétrica $\hat{\mathbf{W}} \in A(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2) = (\mathbf{B}: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2: \mathbf{B} = -\mathbf{B}^T$, que es del teorema anterior satisface el siguiente teorema:

Teorema A.5.- la transformación $\hat{\mathbf{W}} \in A(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2)$ es tal que

$$\hat{\mathbf{W}}^{2n-1} = (-1)^{n-1} \hat{\mathbf{W}} \quad , \quad \hat{\mathbf{W}}^{2n-1} = (-1)^{n-1} \hat{\mathbf{W}}^2 \quad , \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Demostración: Para demostrar este teorema se procederá por inducción, mostrando primeramente que para $n = 2$ el resultado es satisfecho. Y cierto es que,

$$\hat{\mathbf{W}}^3 = \hat{\mathbf{W}}^2 \circ \hat{\mathbf{W}} = -\mathbf{I} \circ \hat{\mathbf{W}} = -\hat{\mathbf{W}} \quad , \quad \hat{\mathbf{W}}^4 = \hat{\mathbf{W}}^3 \circ \hat{\mathbf{W}} = -\hat{\mathbf{W}} \circ \hat{\mathbf{W}} = -\hat{\mathbf{W}}^2 \quad ,$$

Por lo tanto para $n = 2$, el resultado que se obtiene, suponiendo ahora que para $n = 1$ el resultado es satisfecho, entonces se tiene que :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{W}}^{2n-1} &= \hat{\mathbf{W}}^{2n-2} \circ \hat{\mathbf{W}} = -\hat{\mathbf{W}}^{2(n-1)} \circ \hat{\mathbf{W}} = \hat{\mathbf{W}}^{2(n-1)-1} \circ \hat{\mathbf{W}}^2 \\ &= (-1)^{n-2} \hat{\mathbf{W}} \circ \hat{\mathbf{W}}^2 = (-1)^{n-2} \hat{\mathbf{W}}^3 = -(-1)^{n-2} \hat{\mathbf{W}} \\ &= (-1)^{n-1} \hat{\mathbf{W}} \quad . \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{W}}^{2n} &= \hat{\mathbf{W}}^{2n-2} \circ \hat{\mathbf{W}} = -\hat{\mathbf{W}}^{2(n-1)} \circ \hat{\mathbf{W}}^2 = (-1)^{n-2} \hat{\mathbf{W}}^2 \circ \hat{\mathbf{W}}^2 \\ &= (-1)^{n-2} \hat{\mathbf{W}}^4 = (-1)^{n-2} (-1) \hat{\mathbf{W}}^2 = -(-1)^{n-1} \hat{\mathbf{W}}^2 \end{aligned}$$

A.3 Representación exponencial de $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Para la interpretación física de los parámetros de la rotación $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, se utilizara la geometría del espacio vectorial de los números complejos, presentándose el resultado primordial en el siguiente teorema.

Teorema A.6. Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ y $\mathbf{v} = \rho(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2$. Entonces tenemos que el coseno del ángulo formado por los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} viene dado por:

$$\cos \theta = a / \|\mathbf{p}\| \quad , \quad \text{sen } \theta = \pm b / \|\mathbf{p}\| \quad ,$$

Demostración. El coseno del ángulo está definido en términos del producto interno del vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ y el vector rotado $\mathbf{v} = \rho(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}^2$, esto es:

$$\cos \theta = (\mathbf{u}, \rho(\mathbf{p}, \mathbf{u})) / (\|\mathbf{u}\| \|\rho(\mathbf{p}, \mathbf{u})\|) \quad .$$

Además, siendo $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una rotación, entonces $\|\mathbf{u}\| = \|\rho(\mathbf{p}, \mathbf{u})\|$. También,

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = (1/\|\mathbf{p}\|)(au_1 - bu_2, au_2 + bu_1),$$

por tanto

$$(\mathbf{u}, \rho(\mathbf{p}, \mathbf{u})) = (1/\|\mathbf{p}\|)(au_1^2 - bu_1u_2 + au_2^2 + bu_1u_2) = a \|\mathbf{u}\|^2 / \|\mathbf{p}\|.$$

Esto es,

$$\cos \theta = a \|\mathbf{u}\|^2 / (\|\mathbf{p}\| \|\mathbf{u}\|^2) = a / \|\mathbf{p}\|.$$

Finalmente, de la igualdad $\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1$ se obtiene que:

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - a^2 / \|\mathbf{p}\|^2 = 1 / \|\mathbf{p}\|^2 [\|\mathbf{p}\|^2 - a^2] = b^2 / \|\mathbf{p}\|^2.$$

Por lo tanto, $\sin \theta = \pm b / \|\mathbf{p}\|$.

El resultado del teorema anterior nos permite encontrar la siguiente representación trigonométrica de la rotación $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

Corolario A.1 La transformación $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ puede ser representada en la forma:

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \cos \theta \tilde{\mathbf{I}} \pm \sin \theta \hat{\mathbf{W}}.$$

Demostración. En efecto de acuerdo al teorema A.6 tenemos que $a = \|\mathbf{p}\| \cos \theta$ y $b = \pm \|\mathbf{p}\| \sin \theta$, entonces,

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, \bullet) &= 1 / \|\mathbf{p}\| [a \tilde{\mathbf{I}} + b \hat{\mathbf{W}}] \equiv 1 / \|\mathbf{p}\| [\|\mathbf{p}\| \cos \theta \tilde{\mathbf{I}} + \|\mathbf{p}\| \sin \theta \hat{\mathbf{W}}] \\ &= \cos \theta \tilde{\mathbf{I}} \pm \sin \theta \hat{\mathbf{W}} \end{aligned}$$

Corolario A.2. La transformación $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ es tal que:

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{1}{n!} \hat{\mathbf{W}}_0^n.$$

Demostración. Recordando que la transformación $\rho(\mathbf{p}, \bullet) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ puede expresarse de acuerdo con el teorema anterior en la forma:

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \cos \theta \tilde{\mathbf{I}} \pm \sin \theta \hat{\mathbf{W}}$$

Al considerar en esta expresión las expansiones en serie de las funciones trigonométricas, esto es,

$$\text{sen } \theta = \theta - \theta^3/3! + \theta^5/5! - \theta^7/7! + \dots, \quad \text{cos } \theta = 1 - \theta^2/2! + \theta^4/4! - \theta^6/6! + \dots$$

se obtiene que, siendo $\hat{\mathbf{W}}_0 = \theta \hat{\mathbf{W}}$, que:

Caso 1

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, \bullet) &= \text{cos } \theta \tilde{\mathbf{I}} + \text{sen } \theta \hat{\mathbf{W}} \\ &= (1 - \theta^2/2! + \theta^4/4! - \theta^6/6! + \dots) \tilde{\mathbf{I}} + (\theta - \theta^3/3! + \theta^5/5! - \theta^7/7! + \dots) \hat{\mathbf{W}} \\ &= \tilde{\mathbf{I}} + \theta \hat{\mathbf{W}} - \theta^2/2! \tilde{\mathbf{I}} - \theta^3/3! \hat{\mathbf{W}} + \theta^4/4! \tilde{\mathbf{I}} + \theta^5/5! \hat{\mathbf{W}} - \theta^6/6! \tilde{\mathbf{I}} - \theta^7/7! \hat{\mathbf{W}} + \dots \\ &= 1 + \theta \hat{\mathbf{W}} + \theta^2/2! \hat{\mathbf{W}}^2 + \theta^3/3! \hat{\mathbf{W}}^3 + \theta^4/4! \hat{\mathbf{W}}^4 + \theta^5/5! \hat{\mathbf{W}}^5 + \theta^6/6! \hat{\mathbf{W}}^6 + \theta^7/7! \hat{\mathbf{W}}^7 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^m \frac{1}{n!} \hat{\mathbf{W}}_0^n. \end{aligned}$$

Caso 2

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, \bullet) &= \text{cos } \theta \tilde{\mathbf{I}} - \text{sen } \theta \hat{\mathbf{W}} \\ &= (1 - \theta^2/2! + \theta^4/4! - \theta^6/6! + \dots) \tilde{\mathbf{I}} - (\theta - \theta^3/3! + \theta^5/5! - \theta^7/7! + \dots) \hat{\mathbf{W}} \\ &= \tilde{\mathbf{I}} - \theta \hat{\mathbf{W}} - \theta^2/2! \tilde{\mathbf{I}} + \theta^3/3! \hat{\mathbf{W}} + \theta^4/4! \tilde{\mathbf{I}} - \theta^5/5! \hat{\mathbf{W}} - \theta^6/6! \tilde{\mathbf{I}} + \theta^7/7! \hat{\mathbf{W}} + \dots \\ &= 1 - \theta \hat{\mathbf{W}} + \theta^2/2! \hat{\mathbf{W}}^2 - \theta^3/3! \hat{\mathbf{W}}^3 + \theta^4/4! \hat{\mathbf{W}}^4 - \theta^5/5! \hat{\mathbf{W}}^5 + \theta^6/6! \hat{\mathbf{W}}^6 - \theta^7/7! \hat{\mathbf{W}}^7 + \dots \\ &= 1 - \theta \hat{\mathbf{W}}_0 + \theta^2/2! \hat{\mathbf{W}}_0^2 - \theta^3/3! \hat{\mathbf{W}}_0^3 + \theta^4/4! \hat{\mathbf{W}}_0^4 - \theta^5/5! \hat{\mathbf{W}}_0^5 + \theta^6/6! \hat{\mathbf{W}}_0^6 - \theta^7/7! \hat{\mathbf{W}}_0^7 + \dots \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^m (-1)^n \frac{1}{n!} \hat{\mathbf{w}}_0^n.$$

Teorema A.7. Sea $\mathbf{q} = (q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$, $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$, entonces la siguiente igualdad es satisfecha:

$$\mathbf{q} \times \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv (b/\|\mathbf{p}\|)\|\mathbf{q}\|^2 \mathbf{e}_3 = (0, 0, (b/\|\mathbf{p}\|)\|\mathbf{q}\|^2).$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \times \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &\equiv \varepsilon_{ijk} q_j \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k \mathbf{e}_i \equiv \varepsilon_{3jk} q_j \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k \mathbf{e}_3 \\ &\equiv [\varepsilon_{31k} q_0 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k + \varepsilon_{32k} q_1 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k] \mathbf{e}_3 \\ &\equiv [\varepsilon_{312} q_0 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_2 + \varepsilon_{321} q_1 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_1] \mathbf{e}_3 \\ &\equiv [q_0 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_2 - q_1 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_1] \mathbf{e}_3 \\ &\equiv (b/\|\mathbf{p}\|) [aq_0 q_1 + bq_0^2 - aq_0 q_1 + bq_1^2] \mathbf{e}_3 \\ &\equiv (b/\|\mathbf{p}\|) \|\mathbf{q}\|^2 \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Corolario A.3. Sea $\mathbf{q} = (q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$, $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$, entonces tenemos que:

$$\mathbf{q} \times \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv [0, 0, \pm \sin \theta (\|\mathbf{q}\|^2 / \|\mathbf{p}\|)]$$

Demostración. En efecto el resultado buscado se obtiene combinando los teoremas A.6 y A.7.

El marco teórico aquí definido es utilizado en el capítulo 3 para modelar un robot paralelo plano de 3GDL, RRR.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \mathbf{T}_R \left\{ \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} [(\mathbf{q}^* \bar{\mathbf{r}})^*(\mathbf{p}^* \bar{\mathbf{p}}) \oplus (\bar{\mathbf{q}}^* \mathbf{r})^*(\mathbf{p}^* \bar{\mathbf{p}})] \right\} \\
 &\equiv \frac{1}{2} \mathbf{T}_R \{ \mathbf{q}^* \bar{\mathbf{r}} \oplus \bar{\mathbf{q}}^* \mathbf{r} \} \equiv \langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle.
 \end{aligned}$$

Observemos ahora que, la matriz de la transformación $\mathbf{R}(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ está dada por:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{R}(\mathbf{p}, \bullet)} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & -a \end{pmatrix},$$

puesto que,

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}, \underline{\mathbf{e}}_1) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p}^* \underline{\mathbf{e}}_1} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \bar{\mathbf{p}} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a, -b),$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}, \underline{\mathbf{e}}_2) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{\mathbf{p}^* \underline{\mathbf{e}}_2} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \overline{(a, b)^* (0, 1)} \equiv (-b, -a).$$

El resultado buscado, se obtiene de observar que $\det \mathbf{M}_{\mathbf{R}(\mathbf{p}, \bullet)} = -1$.

Teorema 1.9. La transformación $\mathbf{R}(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ puede ser representada en la forma siguiente:

$$\mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a \mathbf{I}_1 + b \mathbf{W}_1\},$$

donde las matrices de las transformaciones \mathbf{I}_1 y \mathbf{W}_1 están dadas por:

$$\mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Es suficiente con observar que la matriz de la transformación estudiada puede escribirse en la forma siguiente:

$$\mathbf{M}_{\mathbf{R}(\mathbf{p}, \cdot)} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & -a \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Teorema 1.10. Sea $\mathbf{q} = (q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$ y $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$, entonces, las siguientes igualdades son satisfechas.

$$\mathbf{q} \times \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (0, 0, b(q_1^2 - q_0^2) - 2a q_1 q_0),$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a(q_0^2 - q_1^2) - 2b q_0 q_1\},$$

donde θ es el ángulo formado por los vectores $\mathbf{q} \in \mathfrak{R}^2$ y $\mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^2$.

Demostración. Observemos primeramente que, siendo $\mathbf{q} = (q_0, q_1)$, entonces,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{q} \rangle &\equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \langle (q_0, q_1), (aq_0 - bq_1, -aq_1 - bq_0) \rangle \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{aq_0^2 - bq_0q_1 - aq_1^2 - bq_0q_1\} \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a(q_0^2 - q_1^2) - 2bq_0q_1\}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q} \times \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \varepsilon_{ijk} q_j \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k \mathbf{e}_i \equiv \varepsilon_{3jk} q_j \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k \underline{\mathbf{e}}_3 \\
 &= \{ \varepsilon_{312} q_0 \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q})_2 + \varepsilon_{321} q_1 \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q})_1 \} \underline{\mathbf{e}}_3 \\
 &\equiv \{ q_0 \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q})_2 - q_1 \mathbf{R}(\mathbf{p}, \mathbf{q})_1 \} \underline{\mathbf{e}}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ q_0 (-aq_1 - bq_0) - q_1 (aq_0 - bq_1) \} \underline{\mathbf{e}}_3 \\
 &\equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ -aq_0q_1 - bq_0^2 - aq_1q_0 + bq_1^2 \} \underline{\mathbf{e}}_3 \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ b(q_1^2 - q_0^2) - 2aq_0q_1 \} \underline{\mathbf{e}}_3 \\
 &\equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (0, 0, b(q_1^2 - q_0^2) - 2aq_0q_1).
 \end{aligned}$$

A.4 Otra operación binaria multiplicativa

Presentaremos en esta parte otra operación multiplicativa $\odot: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, mediante la cual podremos construir una transformación $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ fijo, que resultará ser una reflexión. Consideremos entonces la operación

$\odot: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \odot (\alpha, \beta) = (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha). \quad (1.4)$$

Estudiaremos ahora las propiedades de dicha operación a través de los resultados siguientes:

Teorema 1.11. La operación $\odot: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es no asociativa.

Demostración. En efecto, sean $\mathbf{p}=(a,b)$, $\mathbf{q}=(\alpha,\beta)$, $\mathbf{r}=(c,d)$, entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} \circledast (\mathbf{q} \circledast \mathbf{r}) &= (a,b) \circledast \{(\alpha,\beta) \circledast (c,d)\} \\
&\equiv (a,b) \circledast \{-\alpha c + \beta d, \alpha d + \beta c\} \\
&\equiv (-a(-\alpha c + \beta d) + b(\alpha d + \beta c), a(\alpha d + \beta c) + b(-\alpha c + \beta d)) \\
&\equiv (a\alpha c - a\beta d + b\alpha d + b\beta c, a\alpha d + a\beta c - b\alpha c + b\beta d) \\
&\equiv (c(a\alpha + b\beta) + d(b\alpha - a\beta), (a\alpha + b\beta)d + (a\beta - b\alpha)c).
\end{aligned}$$

También,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{p} \circledast \mathbf{q}) \circledast \mathbf{r} &= \{(a,b) \circledast (\alpha,\beta)\} \circledast (c,d) \equiv (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) \circledast (c,d) \\
&= (-c(-a\alpha + b\beta) + d(a\beta + b\alpha), d(-a\alpha + b\beta) + c(a\beta + b\alpha)) \\
&= (c(a\alpha - b\beta) + d(a\beta + b\alpha), d(-a\alpha + b\beta) + c(a\beta - b\alpha)).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{p} \circledast (\mathbf{q} \circledast \mathbf{r}) \neq (\mathbf{p} \circledast \mathbf{q}) \circledast \mathbf{r}.$$

Teorema 1.12. El elemento $\underline{\mathbf{1}} = \frac{1}{a^2 + b^2} (b^2 - a^2, 2ba)$, es tal que si $\mathbf{p} = (a, b)$,

entonces, $\mathbf{p} \circledast \underline{\mathbf{1}} \equiv \mathbf{p}$.

Demostración. En efecto, sean $\mathbf{p} = (a, b)$ y $\underline{\mathbf{1}} = (\alpha, \beta)$ tal que $\mathbf{p} \circledast \underline{\mathbf{1}} \equiv \mathbf{p}$, esto es:

$$(a, b) \circledast (\alpha, \beta) = (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) = (a, b),$$

por tanto,

$$-a\alpha + b\beta = a, \quad a\beta + b\alpha = b.$$

Al resolver este sistema de ecuaciones, se obtiene que:

$$\alpha = -\frac{1}{a}(a - b\beta) \quad , \quad a\beta - \frac{b}{a}(a - b\beta) = b.$$

Por tanto, $\beta(a^2 + b^2) = 2ba$. Esto es $\beta = \frac{2ba}{a^2 + b^2}$. También,

$$\alpha = -\frac{1}{a}\left(a - \frac{2b^2a}{a^2 + b^2}\right) = \frac{1}{a^2 + b^2}(-a^2 - b^2 + 2b^2) \equiv \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}.$$

Por tanto, $\underline{1} = \frac{1}{a^2 + b^2}(b^2 - a^2, 2ba)$.

Teorema 1.13. Sea $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$, entonces, el elemento $\mathbf{p}' = \frac{1}{a^2 + b^2}(a, b)$, es tal que $\mathbf{p} \circledast \mathbf{p}' \equiv \underline{1}$.

Demostración. En efecto, sea $\mathbf{p}' \equiv (\alpha, \beta)$ tal que $\mathbf{p} \circledast \mathbf{p}' \equiv \underline{1}$, esto es,

$$(a, b) \circledast (\alpha, \beta) = (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) \equiv \frac{1}{a^2 + b^2}(b^2 - a^2, 2ba).$$

Entonces,

$$-a\alpha + b\beta \equiv \frac{1}{a^2 + b^2}(b^2 - a^2) \quad , \quad a\beta + b\alpha = 2ab.$$

Esto es,

$$\alpha = -\frac{1}{(a^2 + b^2)a}(b^2 - a^2) + \frac{b}{a}\beta.$$

Por tanto,

$$a\beta - \frac{b}{a(a^2 + b^2)} (b^2 - a^2) + \frac{b^2}{a} \beta = \frac{1}{a^2 + b^2} 2ab.$$

Esto es,

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{b^2}{a}\right) \beta &= \frac{1}{a^2 + b^2} \left(2ab + \frac{b}{a} (b^2 - a^2)\right) \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} \left(ab + \frac{b^3}{a}\right) = \frac{b}{a(a^2 + b^2)} (a^2 + b^2) = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

por tanto,

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{a}\right) \beta = \frac{b}{a},$$

de donde, $\beta = \frac{b}{a^2 + b^2}$, y

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{a(a^2 + b^2)} (b^2 - a^2) + \frac{b}{a} \left(\frac{b}{a^2 + b^2}\right) \equiv \frac{1}{a(a^2 + b^2)} \{-b^2 + a^2 + b^2\} \\ &\equiv \frac{a}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\mathbf{p}' = \frac{1}{a^2 + b^2} (a, b) = \frac{1}{a^2 + b^2} \mathbf{p}$.

Teorema 1.14. Sean $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathfrak{R}^2$. Entonces, las siguientes propiedades distributivas son satisfechas:

$$\mathbf{p} \otimes (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) = \mathbf{p} \otimes \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} \otimes \mathbf{r},$$

$$(\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}) \otimes \mathbf{r} = \mathbf{p} \otimes \mathbf{r} \oplus \mathbf{q} \otimes \mathbf{r}.$$

Demostración. En efecto, sean $\mathbf{p} = (a, b)$, $\mathbf{q} = (\alpha, \beta)$ y $\mathbf{r} = (c, d)$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \circledast (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) &= (a, b) \circledast (\alpha + c, \beta + d) \\ &\equiv (-a(\alpha + c) + b(\beta + d), b(\alpha + c) + a(\beta + d)) \\ &= (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) \oplus (-ac + bd, ad + bc) \\ &= (a, b) \circledast (\alpha, \beta) \oplus (a, b) \circledast (c, d) \\ &\equiv \mathbf{p} \circledast \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} \circledast \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}) \circledast \mathbf{r} &= (a + \alpha, b + \beta) \circledast (c, d) \\ &= (-c(a + \alpha) + d(b + \beta), d(a + \alpha) + c(b + \beta)) \\ &= (-ca + db, da + cb) \oplus (-c\alpha + d\beta, d\alpha + c\beta) \\ &= (a, b) \circledast (c, d) \oplus (\alpha, \beta) \circledast (c, d) \\ &\equiv \mathbf{p} \circledast \mathbf{r} \oplus \mathbf{q} \circledast \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Teorema 1.15. La operación $\circledast: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es conmutativa. En efecto si $\mathbf{p} = (a, b)$, $\mathbf{q} = (\alpha, \beta)$, entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \circledast \mathbf{q} &\equiv (a, b) \circledast (\alpha, \beta) \equiv (-a\alpha + b\beta, b\alpha + a\beta) = (-\alpha a + \beta b, \alpha b + \beta a) \\ &\equiv (\alpha, \beta) \circledast (a, b) \equiv \mathbf{q} \circledast \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Los siguientes resultados, son satisfechos por la operación $\circledast: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Teorema 1.16. Sean $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Entonces

$$\text{i) } \overline{\mathbf{p} \circledast \mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}} \circledast \bar{\mathbf{p}},$$

$$\text{ii) } \mathbf{p} \circledast \bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}} \circledast \mathbf{p} = -(a^2 + b^2, 0),$$

$$\text{iii) } \bar{\mathbf{p}} \circledast \mathbf{q} \oplus \bar{\mathbf{q}} \circledast \mathbf{p} = -2(a\alpha + b\beta, 0).$$

Demostración. En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \circledast \mathbf{q} &= (a, b) \circledast (\alpha, \beta) = (-a\alpha + b\beta, a\beta + b\alpha) = (-a\alpha + b\beta, -a\beta - b\alpha) \\ &= (\alpha, -\beta) \circledast (a, -b) = \bar{\mathbf{q}} \circledast \bar{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$

También,

$$\mathbf{p} \circledast \bar{\mathbf{p}} = (a, b) \circledast (a, -b) = (-a^2 - b^2, 0) = -(a^2 + b^2, 0).$$

Finalmente, tenemos que:

$$\bar{\mathbf{p}} \circledast \mathbf{q} \equiv (a, -b) \circledast (\alpha, \beta) = (-a\alpha - b\beta, -b\alpha + a\beta),$$

y

$$\bar{\mathbf{q}} \circledast \mathbf{p} \equiv (\alpha, -\beta) \circledast (a, b) = (-\alpha a - \beta b, -\beta a + \alpha b),$$

por tanto,

$$\bar{\mathbf{p}} \circledast \mathbf{q} \oplus \bar{\mathbf{q}} \circledast \mathbf{p} = -2(a\alpha + b\beta, 0).$$

Tomando en cuenta la transformación $T_R : \mathbb{C}_R \rightarrow \mathbb{R}$, definida en incisos anteriores, observamos que la siguiente relación es satisfecha:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = -\frac{1}{2} T_R \{ \bar{\mathbf{p}} \circledast \mathbf{q} \oplus \bar{\mathbf{q}} \circledast \mathbf{p} \}.$$

A.5 Otra parametrización de reflexiones

Presentaremos en esta parte, una transformación lineal $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ fijo, definida a través de la operación estudiada en el inciso anterior, la cual preserva el producto interno y el determinante asociado a la matriz de la misma, construida con respecto a la base canónica de \mathbb{R}^2 , resulta ser negativo, con lo cual dicha transformación es una reflexión. Se estudiarán también algunas otras representaciones de la reflexión construida. Sea $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, con $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ fijo, definida por:

$$\rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \circledast \mathbf{q} \quad , \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 . \quad (1.5)$$

Observemos que la transformación $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tiene la misma forma cualitativa que la definida en el inciso 1.4. En este caso $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ está definida en términos de la operación $\circledast: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida en el inciso 1.5. Algunas propiedades de la misma se estudian a continuación.

Teorema 1.17. La transformación $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es lineal, ortogonal de determinante negativo.

Demostración. En efecto, siendo $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ y de acuerdo a la distribuidad de la operación $\circledast: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, se obtiene que :

$$\begin{aligned} \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) &\equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \circledast (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \mathbf{p} \circledast \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} \circledast \mathbf{r} \} \\ &\equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \circledast \mathbf{q} \oplus \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \circledast \mathbf{r} \equiv \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \oplus \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Además, siendo $\alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$

$$\rho_2(\mathbf{p}, \alpha \mathbf{q}) \equiv \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \circledast (\alpha \mathbf{q}) \equiv \alpha \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} \circledast \mathbf{q} \equiv \alpha \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$

También, siendo $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$, entonces,

$$\begin{aligned} \langle \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \circledast \overline{\rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{r})} \oplus \overline{\rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{r})} \circledast \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \} \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \overline{(\mathbf{p} \circledast \mathbf{q})} \circledast (\mathbf{p} \circledast \mathbf{r}) \oplus \overline{(\mathbf{p} \circledast \mathbf{r})} \circledast (\mathbf{p} \circledast \mathbf{q}) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \text{Tr} \{ \overline{(\mathbf{p} \circledast \mathbf{q})} \circledast (\mathbf{p} \circledast \mathbf{r}) \oplus \overline{(\mathbf{p} \circledast \mathbf{r})} \circledast (\mathbf{p} \circledast \mathbf{q}) \}. \end{aligned}$$

El resultado buscado, se sigue al desarrollar esta última expresión, esto es, al observar que:

$$(\mathbf{p} \circledast \mathbf{q}) \circledast (\mathbf{p} \circledast \mathbf{r}) = -\|\mathbf{p}\|^2 (\alpha c + \beta d, \beta c - \alpha d),$$

y

$$(\mathbf{p} \circledast \mathbf{r}) \circledast (\mathbf{p} \circledast \mathbf{q}) = -\|\mathbf{p}\|^2 (c\alpha + d\beta, d\alpha - c\beta),$$

de donde,

$$\begin{aligned} (\mathbf{p} \circledast \mathbf{q}) \circledast (\mathbf{p} \circledast \mathbf{r}) \oplus (\mathbf{p} \circledast \mathbf{r}) \circledast (\mathbf{p} \circledast \mathbf{q}) &= -2 \|\mathbf{p}\|^2 (c\alpha + d\beta, 0) \\ &= -2 \|\mathbf{p}\|^2 \text{Tr}^{-1} \{ \langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle \}, \end{aligned}$$

por tanto,

$$\langle \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle \equiv \langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle.$$

Finalmente, al observar que:

$$\rho_2(\mathbf{p}, \underline{\mathbf{e}}_1) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a, b) \odot (1, 0) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (-a, b),$$

y

$$\rho_2(\mathbf{p}, \underline{\mathbf{e}}_2) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a, b) \odot (0, 1) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (b, a),$$

la matriz de $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ está dada por:

$$\mathbf{M}_{\rho_2(\mathbf{p}, \bullet)} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

de donde, $\det \mathbf{M}_{\rho_2(\mathbf{p}, \bullet)} \equiv -1$.

Teorema 1.18. La transformación $\rho_2(\mathbf{p}, \bullet) : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$, puede ser representada en la forma siguiente:

$$\rho_2(\mathbf{p}, \bullet) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a \mathbf{I}_{\sim 2} + b \mathbf{W}_{\sim 2}\} = -\frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a \mathbf{I}_{\sim 1} + b \mathbf{W}_{\sim 1}\},$$

donde las matrices de las transformación $\mathbf{I}_{\sim 2}$ y $\mathbf{W}_{\sim 2}$, están dadas por:

$$\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y las transformaciones $\mathbf{I}_{\sim 1}$ y $\mathbf{W}_{\sim 1}$ están definidas en el inciso anterior.

Demostración. Es suficiente con observar que la matriz de la transformación estudiada, puede escribirse en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\rho_2(\mathbf{p}, \cdot)} &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \left\{ a \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \left\{ -a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Teorema 1.19. Sea $\mathbf{q}=(q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$ y $\mathbf{p}=(a, b) \in \mathfrak{R}^2$, entonces, las siguientes igualdades son satisfechas.

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \times \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (b(q_0^2 - q_1^2) + 2a q_0 q_1) \underline{e}_3 \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (0, 0, b(q_0^2 - q_1^2) + 2a q_0 q_1), \end{aligned}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{-a(q_0^2 - q_1^2) + 2b q_0 q_1\}.$$

Demostración. En efecto,

$$\mathbf{q} \times \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \varepsilon_{3jk} q_i \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k \underline{e}_3 = \{q_0 \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})_2 - q_1 \rho_2(\mathbf{p}, \mathbf{q})_1\} \underline{e}_3$$

Apéndice II

**Prototipo experimental de robot paralelo planar tipo
RRR de 3 GDL**

Apéndice II

Prototipo experimental de robot paralelo planar tipo RRR de 3 GDL

Introducción

La necesidad de probar los modelos cinemáticos de posicionamiento, condujo a la construcción de un prototipo mecatrónico del robot paralelo planar de 3 GDL, tipo RRR, el cual fue construido con materiales rígidos ligeros. En el prototipo no se consideraron esfuerzos ni cargas estáticas y dinámicas.

A.1 Manipulador

El manipulador es la estructura mecánica que conforma el prototipo de robot paralelo tipo RRR de 3 GDL, construido, consiste en tres cadenas cinemáticas y la estructura está constituida de acuerdo a la figura AII.1 y a la tabla AIIT.1, de la siguiente manera:

Nota: aunque no forma parte del manipulador la interfase electrónica aparece en el dibujo. La interfase se utiliza para controlar los motores a pasos que se utilizan como actuadores y el giro mecánico producido se transmite por medio de un tren de engranaje (corona y piñón), a las cadenas cinemáticas que conforman el robot paralelo prototipo.

- 1) **La plataforma fija** (ver figura AII.2), consta de una placa de acrílico transparente de 750 X 750 mm por 4 mm de espesor, con tres grupos de 64 taladros de 4 mm, para sujetar por medio de tronillos la base de los eslabones de tierra en las posiciones deseadas, 37 taladros como trucado diámetro mayor de 6mm y 4 mm diámetro menor. La plataforma para darle rigidez, esta reforzada con un marco construido con 6 tablas, 4 son de 25 X 20 X 725 mm y 2 son de 25 X 20 X 700 mm Utilizándose para fijar la base al marco chilillos con cabeza cónica de 3.18 x 15 mm.

- 2) **La plataforma móvil** (ver figura All.3), consiste en una placa de acrílico en forma de triángulo equilátero de 200 mm de lado y 4 mm de espesor, en el centro geométrico cuenta con un orificio de 19 mm de diámetro para alojar el efector final que puede ser un dispositivo electroimán para activar una pluma. Tiene también tres orificios de 10 mm de diámetro uno en cada vértice de la placa.
- 3) **4) Tres eslabones de tierra**, cada eslabón (ver figura All.4), está compuesto por un porta baleros y una base soporte descritos a continuación: **3)** El porta baleros consiste en una pieza circular de aluminio de 44 mm de diámetro exterior por 70 mm de largo, con 2 cajas o cavidades de forma circular, una en cada extremo, el diámetro es 28.2 mm con una profundidad de 8 mm. En el centro de la pieza existe un orificio o taladro de 13 mm de diámetro de cavidad a cavidad. **4)** La base soporte es de acrílico de 115 mm de ancho, 150 mm de largo y 4 mm de espesor, para fijar los soportes de los motores tiene 4 barrenos en forma de cono truncado diámetros de 6 a 4 mm, para fijar la base soporte a la plataforma fija tiene 4 barrenos de 4 mm de diámetro, además para fijar el porta baleros a la base tiene dos barrenos en forma de cono truncado diámetros de 10 a 5 mm. Para unir el porta baleros a la base soporte y así formar el eslabón de tierra, se utilizan 2 tornillos de cabeza cónica de 4.76 mm de diámetro por 20 mm de largo.
- 5) **6) Tres juntas rotacionales** son utilizadas para unir los eslabones de **tierra** a los eslabones **conductores**. Cada junta rotacional (ver figura All.5), esta constituida por una flecha y dos rodamientos. **5)** La flecha es de aluminio su diámetro es 12.7 mm y tiene 180 mm de largo uno de sus extremos tiene un maquinado especial para acoplarse al eslabón conductor y en este extremo tiene un taladro de 3.18 mm de diámetro por 15 mm de profundidad. **6)** Los rodamientos son marca SMT, N77R8 ZZ, de 28 mm diámetro exterior y 12.72 mm diámetro interior y 8 mm de profundidad, estos van colocados en las cajas del porta baleros del eslabón de tierra.

- 7) **Tres eslabones conductores de aluminio**, cada eslabón (ver figura AII.6), es de 19 mm de ancho, 200 mm de largo y 6.5 mm de espesor, en un extremo tiene un canal corrido cuya profundidad es el espesor del eslabón de 84 mm de largo y 6 mm de ancho redondeado en los extremos. En el extremo contrario se localiza un caja de baleros de 9,6 mm de diámetro, 4 mm de profundidad y en el centro de esta cavidad tiene un barreno de 4 mm de diámetro.

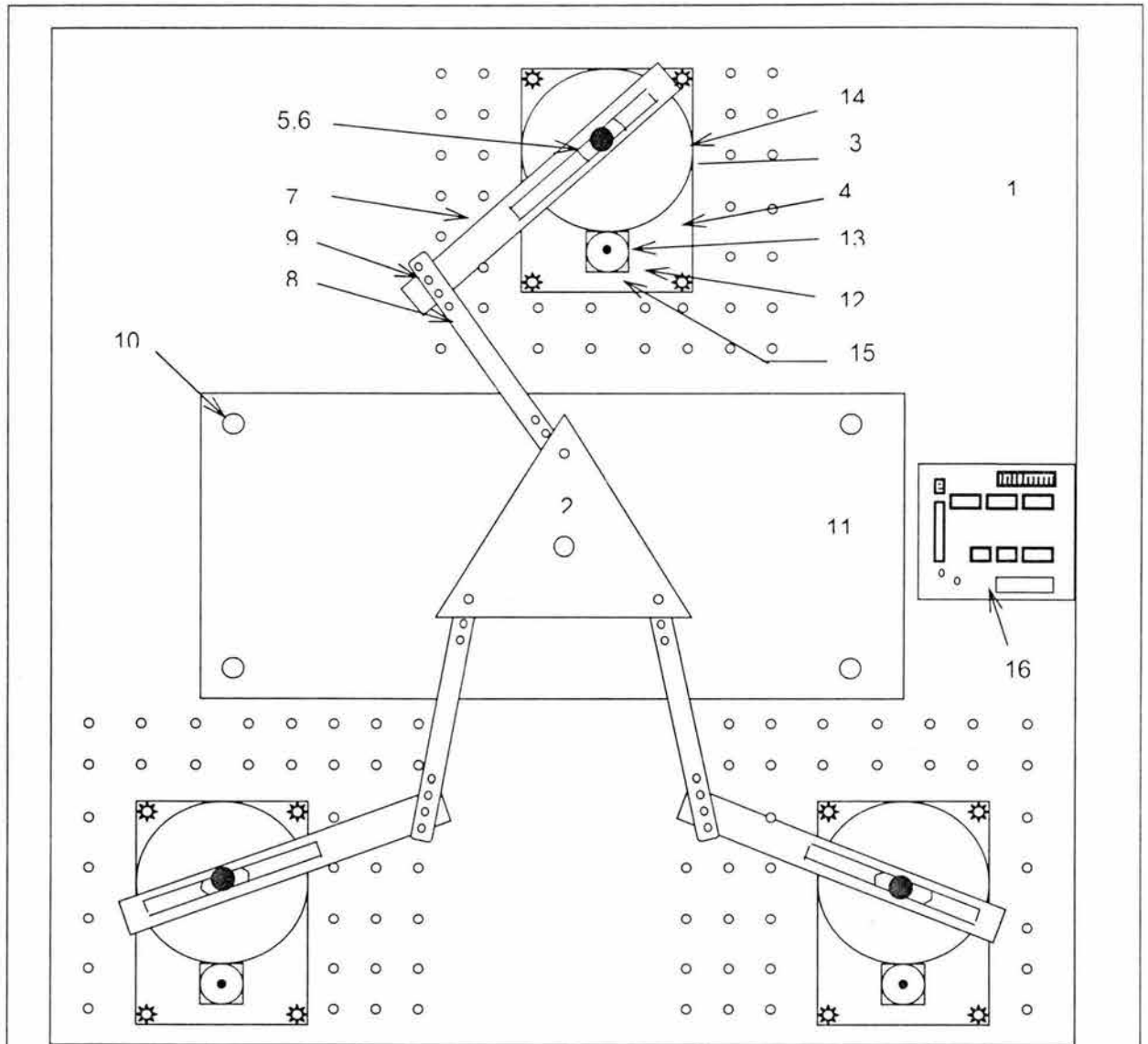
- 8) **Tres eslabones conducidos de aluminio**, cada eslabón(ver figura AII.7), tiene dos piezas cada pieza es de 13 mm de ancho por 200 mm de largo y 2.4 mm de espesor dando un total de 4.8 mm. Cada pieza cuenta también con 6 barrenos en forma de cono truncado diámetros de 6 a 4 mm, 4 en un extremo y 2 en el extremo contrario.

- 9) **Tres juntas rotacionales** son utilizadas para unir el eslabones conductores a los conducidos y los conducidos a la plataforma móvil o placa triangular, cada junta rotacional (ver figura AII.8), está constituida por un rodamiento marca SMT, N77R2 ZZ, de 9.5 mm diámetro exterior y 3.6 mm diámetro interior y 3.9 mm de profundidad, e stos van colocados en las cajas de baleros de los eslabones conductores y en los barrenos de los vértices de la placa triangular. Además del rodamiento se utiliza un tornillo de cabeza cónica de 3.18 mm de diámetro por 20 mm de largo con guasa plana y un separador de plástico duro de 2mm.

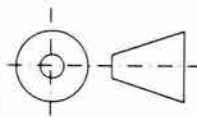
- 10) **Cuatro soportes** son utilizados para sostener en posición la mesa de trabajo, cada soporte (ver figura AII.9), consiste en una barra redonda de aluminio de 21 mm de diámetro por 150 mm de largo, en un extremo tiene un taladro de 3.2 mm de diámetro y 20 mm de profundidad rosca estándar para atornillar la mesa de trabajo y en el otro extremo tiene un taladro de 4.8 mm de diámetro por 25 mm de profundidad para fijar el soporte a la plataforma fija.

- 11) Una mesa de trabajo** forma parte también como un complemento del robot, esta mesa (ver figura All.10), consiste en una placa de acrílico polarizado de 280 mm de ancho por 530 mm de largo y 4 mm de espesor, en cada vértice tiene un barreno en forma de cono truncado diámetros de 8 a 4 mm.
- 12) 13) 14) Tres actuadores con sus sistemas de transmisión** son utilizados para transmitir el giro mecánico a las cadenas cinemáticas del robot, cada actuador y su sistema de transmisión (ver figura All.11), esta constituido por: 12) un motor a pasos bipolar, 13) un engrane motriz de plástico nylamid color rojo, de 15 mm de diámetro exterior, 4 mm de diámetro interior, por 7 mm de espesor y 28 dientes rectos inclinados un ángulo aproximado de 10 grados, 14) un engrane de plástico nylamid color blanco de 60 mm de diámetro exterior, 12.7 mm de diámetro interior, por 7 mm de espesor y 122 dientes rectos.
- 15) Tres soportes** son utilizados para soportar los motores a paso y dar la inclinación necesaria para que el engrane motriz se alinee con el engrane transmisor, cada soporte (ver figura All.12), esta construido a base de una placa delgada de aluminio de 1.5 mm de espesor, 256 mm de largo doblada en forma conveniente. El soporte tiene un barreno central de 8 mm de diámetro y en cada extremo dos perforaciones 4 mm de diámetro.
- 16) Una interfase** electrónica es utilizada para establecer la comunicación entre el robot y la computadora, la interfase (ver figura All.13), esta constituida por 6 chips, un puerto de entrada para alimentar las señales de la computadora, un puerto de salida para alimentar los 3 motores a pasos con sus respectivos grupos de conductores, un disipador, una fuente de poder.

APÉNDICE II COMPONENTES DEL PROTOTIPO



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
 DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
 MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA



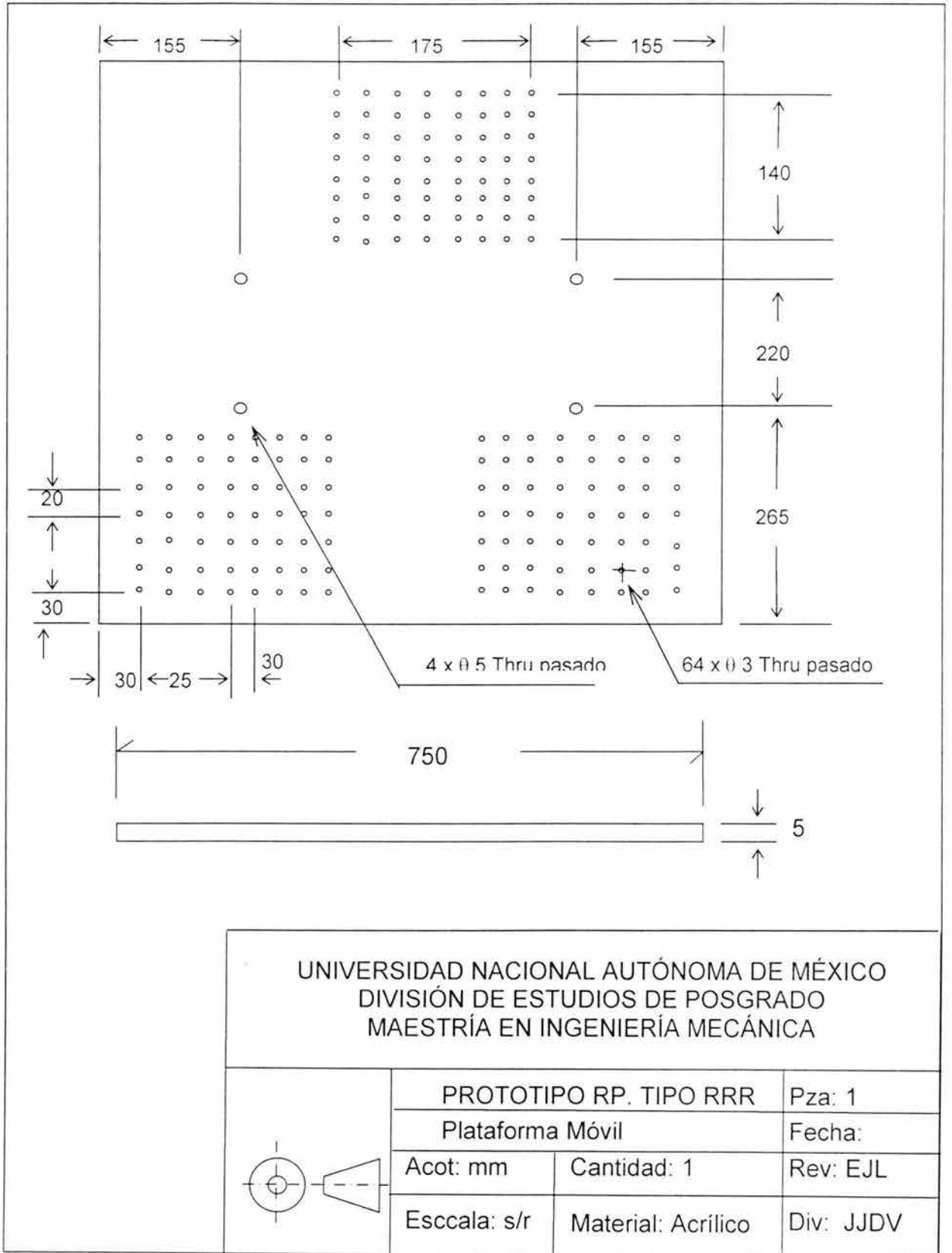
PROTOTIPO RP. TIPO		Pza:
MANIPULADOR ROBOT		Fecha:
Acot:	Cantidad: 1	Rev: E JL
ESCALA: s/e	Material: Varios	Div: JJ DV

Figura AII.1 Manipulador del Prototipo de Robot Paralelo

Tabla AII.1 Componentes del Manipulador

Numero	Descripción	Unidad	Cantidad
1	Plataforma fija	Pza	1
2	Plataforma móvil	Pza	1
3	Eslabón de tierra (Portabaleros)	Pza.	3
4	Eslabón de tierra (Base soporte)	Pza.	3
5	Junta rotacional tierra (Flecha)	Pza.	3
6	Junta rotacional tierra (Baleros)	Pza.	6
7	Eslabón conductor	Pza.	3
8	Eslabón conducido	Pza.	3
9	Junta rotacional conductor-conducido	Pza.	3
10	Soporte mesa de trabajo	Pza.	4
11	Mesa de trabajo	Pza.	1
12	Motor a pasos	Pza.	3
13	Engrane motriz θ 10 mm., 28 dientes	Pza.	3
14	Engrane transmisor θ 60 mm, 122 dientes	Pza.	3
15	Base soporte motor	Pza.	3
16	Interfase electrónica	Pza.	1
17	Tornillo cabeza cónica de 4.76 x 20 mm.	Pza.	10
18	Tornillo cabeza cónica de 3.18 x 20 mm.	Pza.	12
19	Tornillo cabeza de gota de 3.18 x 20 mm.	Pza.	12
20	Chilillo cabeza cónica de 3.18 x 15 mm.	Pza.	40
21	Madera de 25 x20 mm	Mts.	4.3

APÉNDICE II COMPONENTES DEL PROTOTIPO



All.2 Plataforma fija

APÉNDICE II COMPONENTES DEL PROTOTIPO

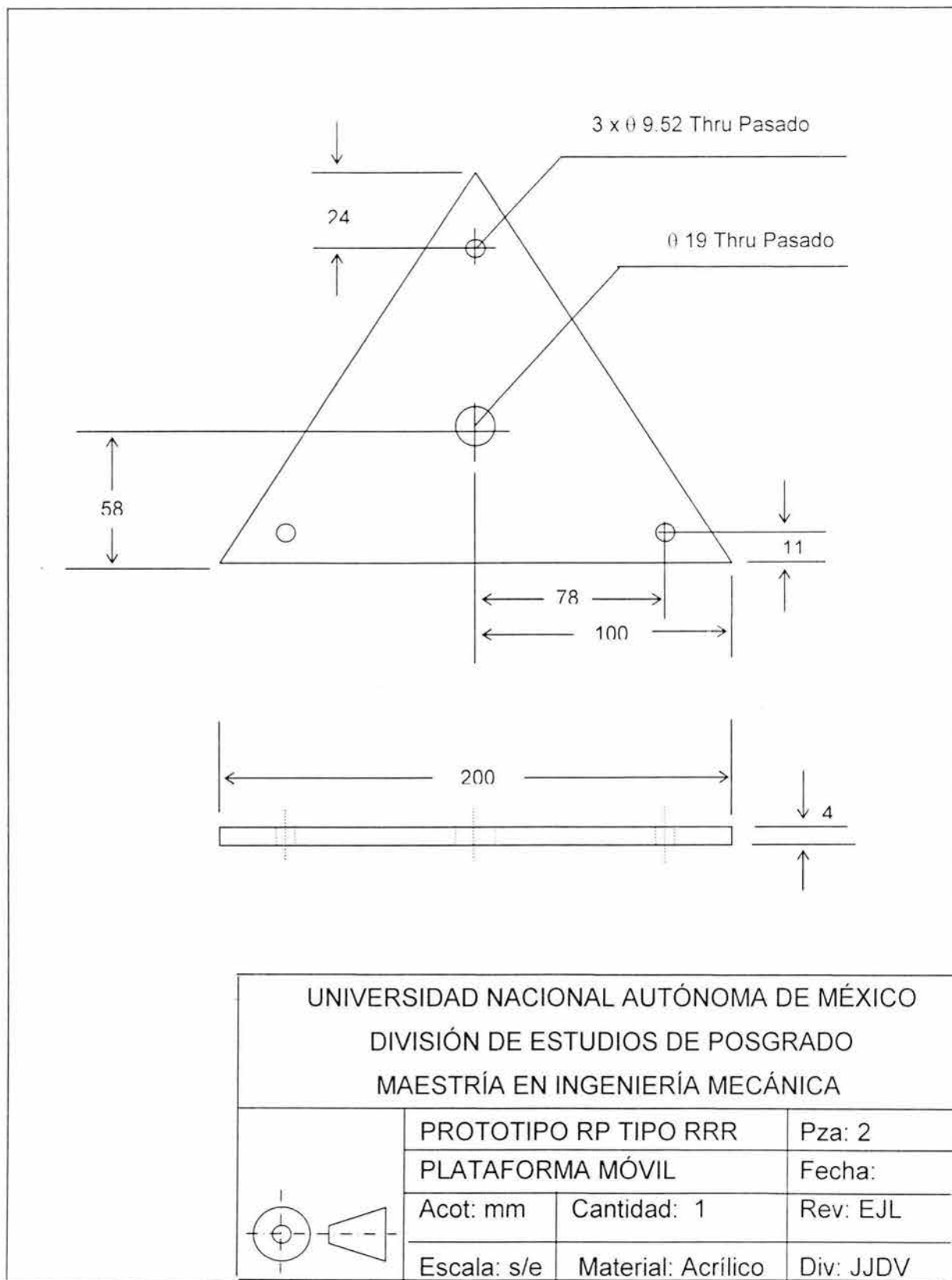


Figura AII.3 Plataforma móvil

APÉNDICE II COMPONENTES DEL PROTOTIPO

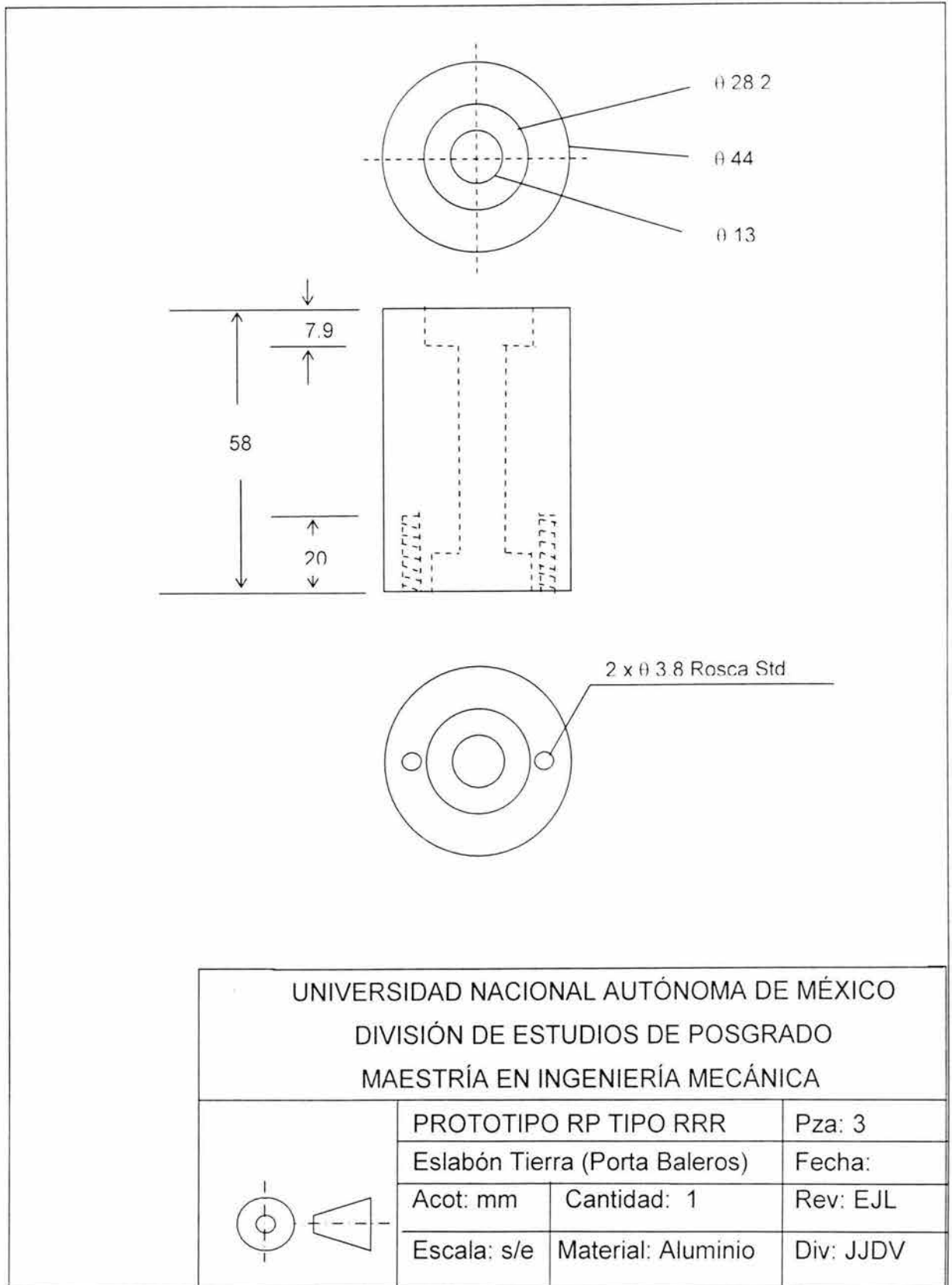


Figura AII.4 A Pieza porta baleros (Eslabón de tierra)

APÉNDICE II COMPONENTES DEL PROTOTIPO

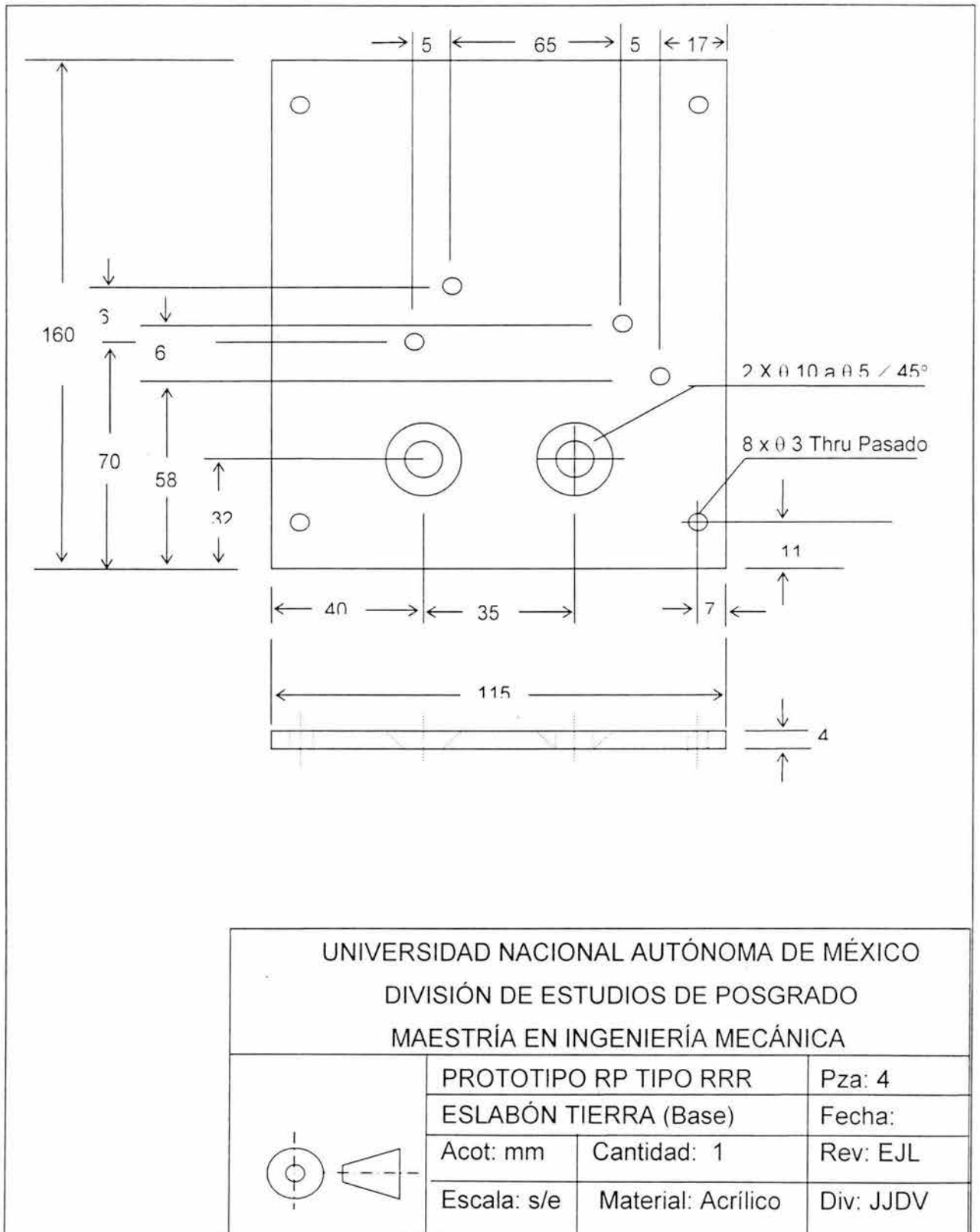


Figura AII.4B Base soporte (Eslabón de tierra)

APÉNDICE II COMPONENTES DEL PROTOTIPO

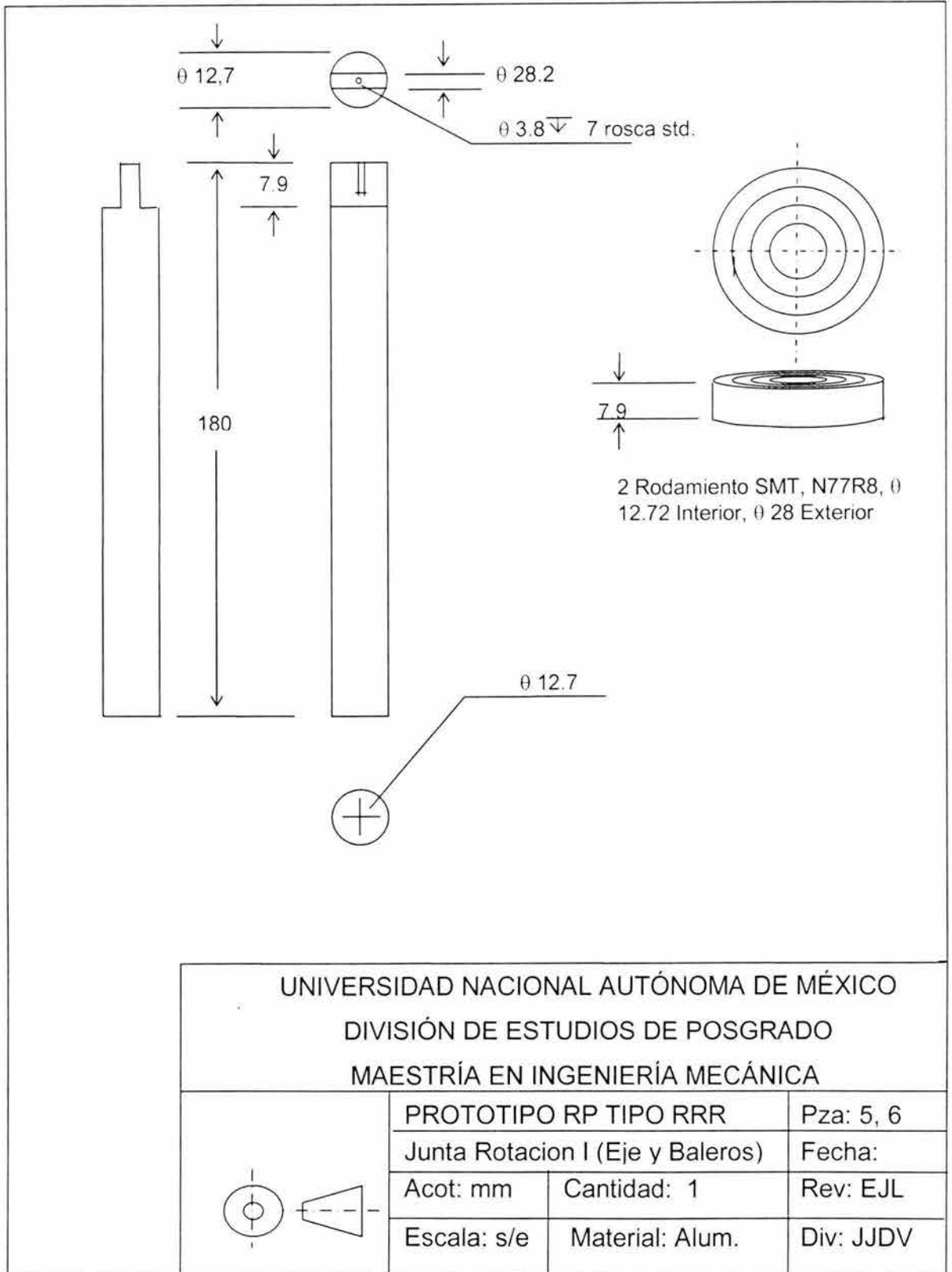


Figura AII.5 Junta rotacional eslabón tierra a eslabón conductor.

APÉNDICE II COMPONENTES DEL PROTOTIPO

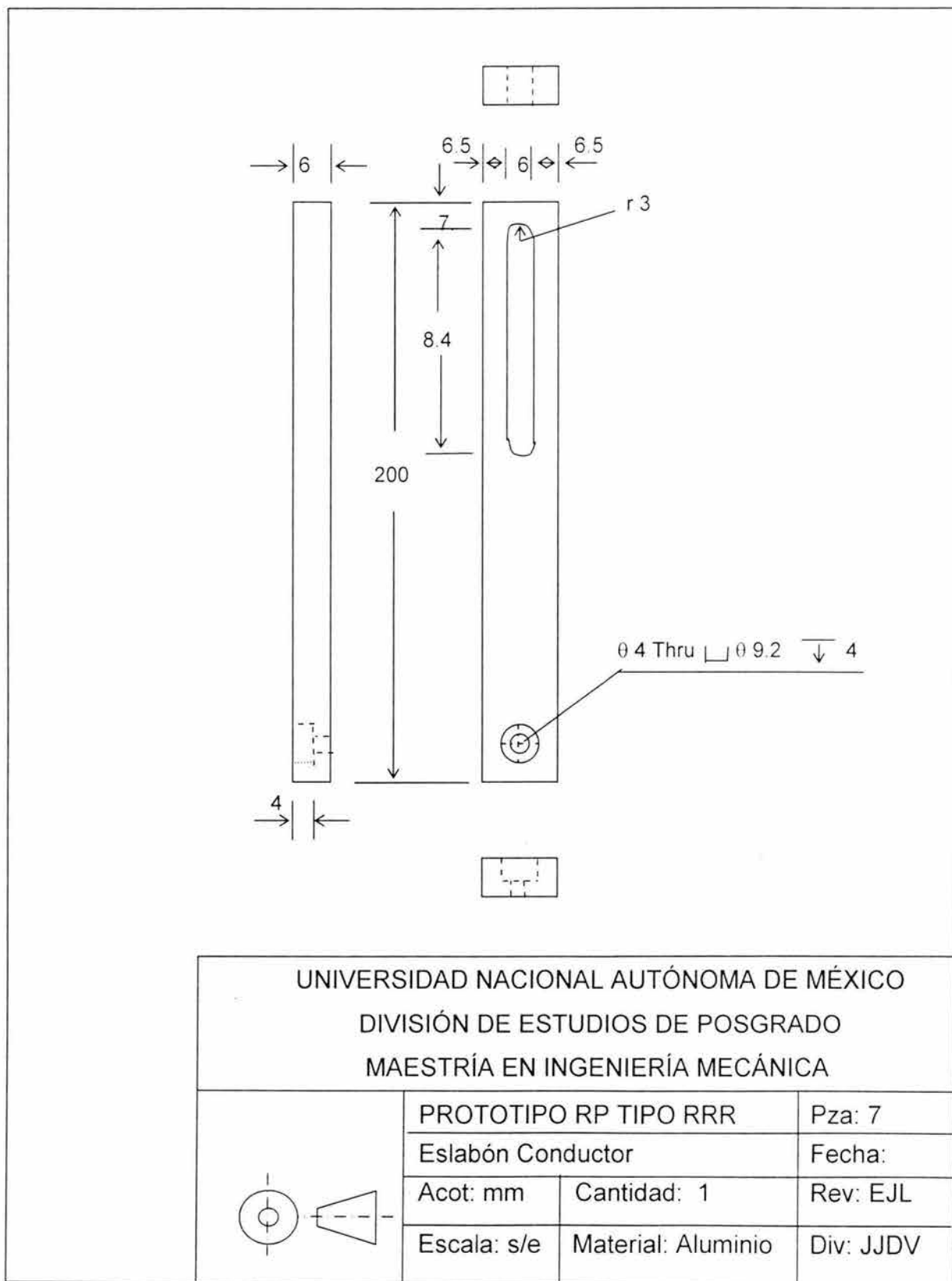


Figura AII.6 Eslabón conductor

APÉNDICE II COMPONENTES DEL PROTOTIPO

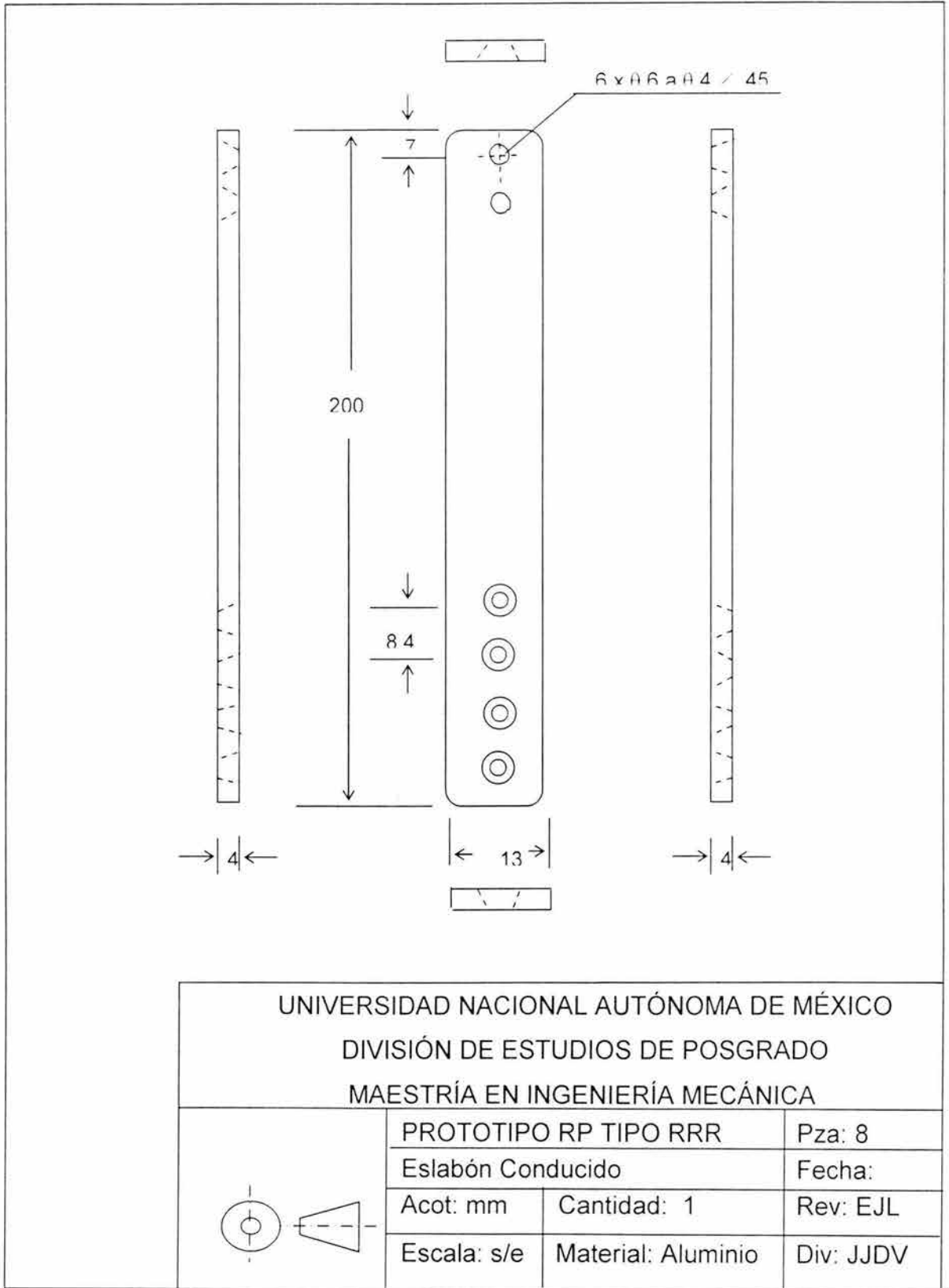


Figura AII.7 Eslabón conducido.

APÉNDICE II COMPONENTES DEL PROTOTIPO

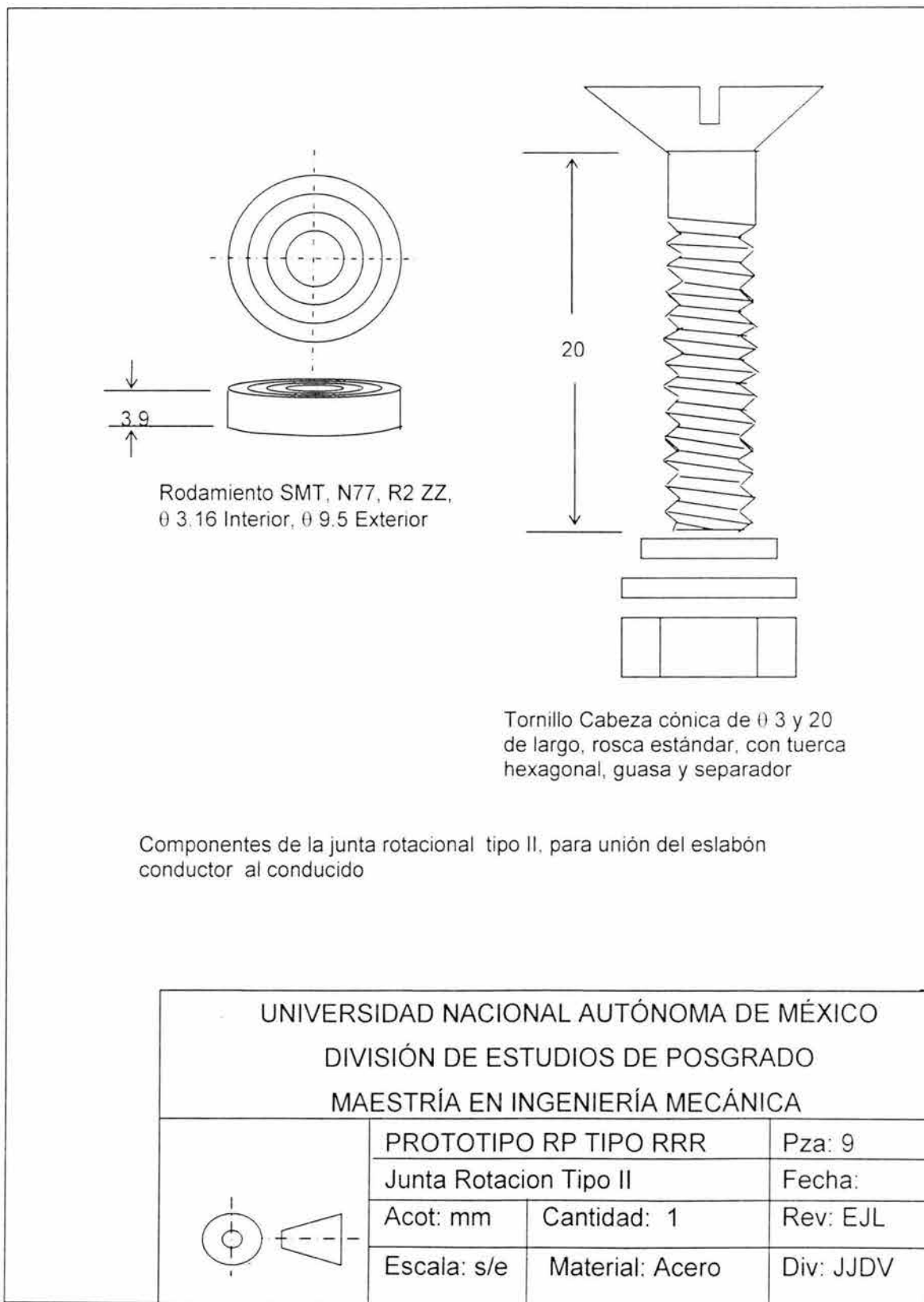


Figura AII.8 Junta rotacional eslabón conductor a conducido y de conducido a placa triangular.

APÉNDICE II COMPONENTES DEL PROTOTIPO

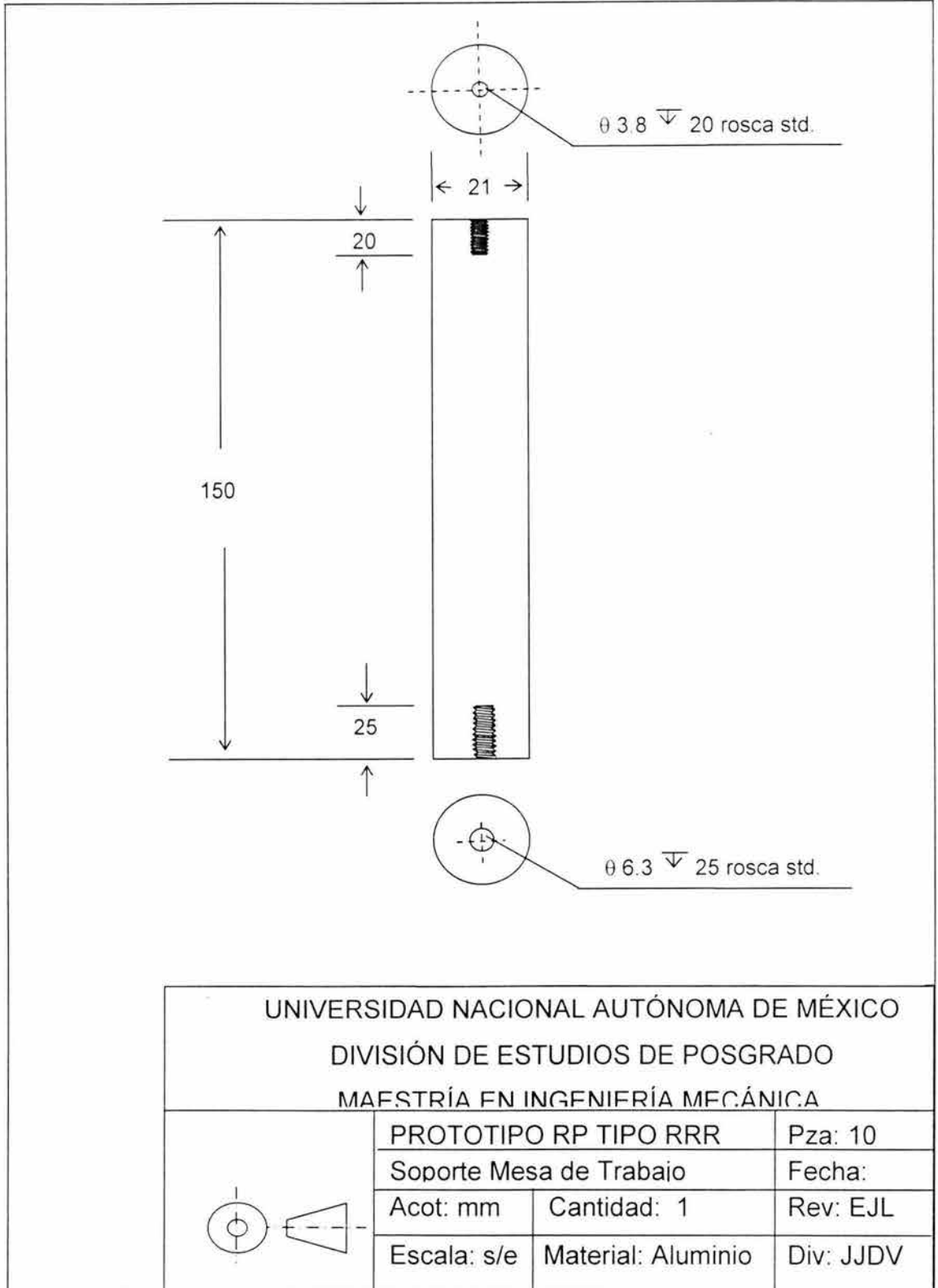


Figura AII.9 Soporte de la mesa de trabajo.

APÉNDIC II COMPONENTES DEL PROTOTIPO

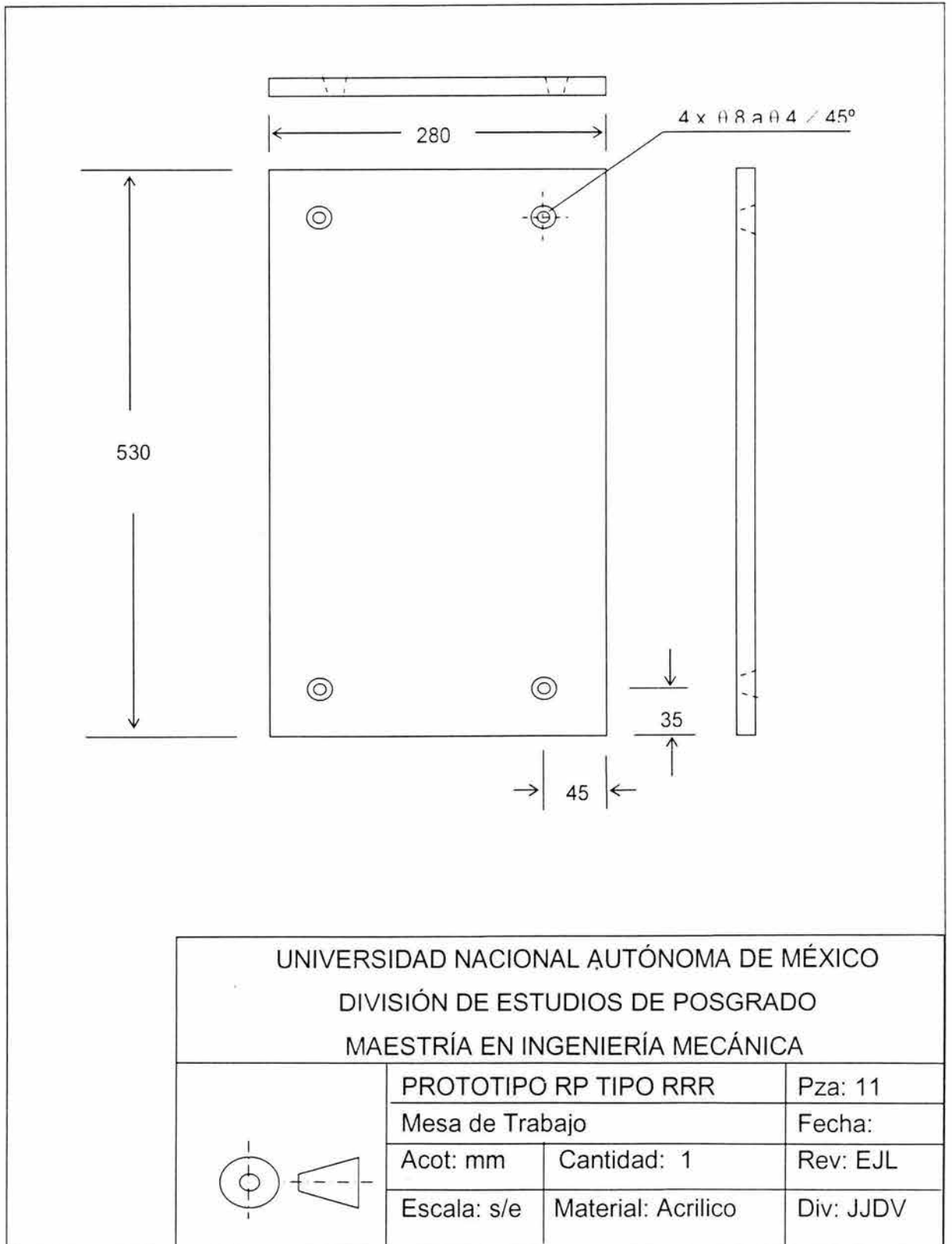
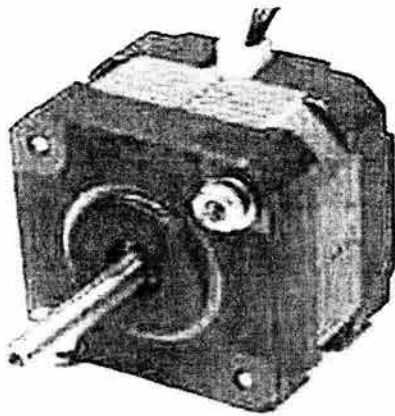
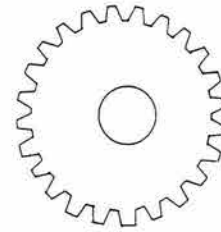


Figura AII.10 Mesa de trabajo

APÉNDICE II COMPONENTES DEL PROTOTIPO

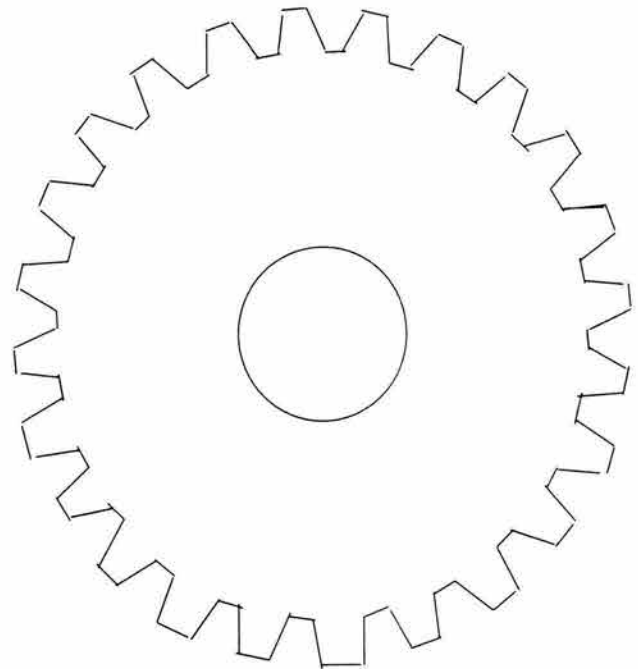


12) Motor bipolar a pasos

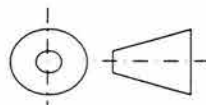


13) Engrane motriz de nylamid de 15 mm de diámetro exterior, 4 mm de interior, 7 mm de espesor y 28 dientes rectos con 10° de inclinación.

14) Engrane de transmisión de nylamid de 60 mm de diámetro exterior, 12.7 mm de diámetro interior, 7 mm de espesor y 122 dientes rectos.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
 DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
 MAESTRÍA EN INGENIERÍA MECÁNICA



PROTOTIPO RP TIPO RRR		Pza: 12, 13, 14
Actuador y sistema de transmisión		Fecha:
Acot: mm	Cantidad: 1	Rev: EJL
Escala: s/r	Material: Varios	Div: JJDV

Figura All.11 Mesa de trabajo

APÉNDICE II COMPONENTES DEL PROTOTIPO

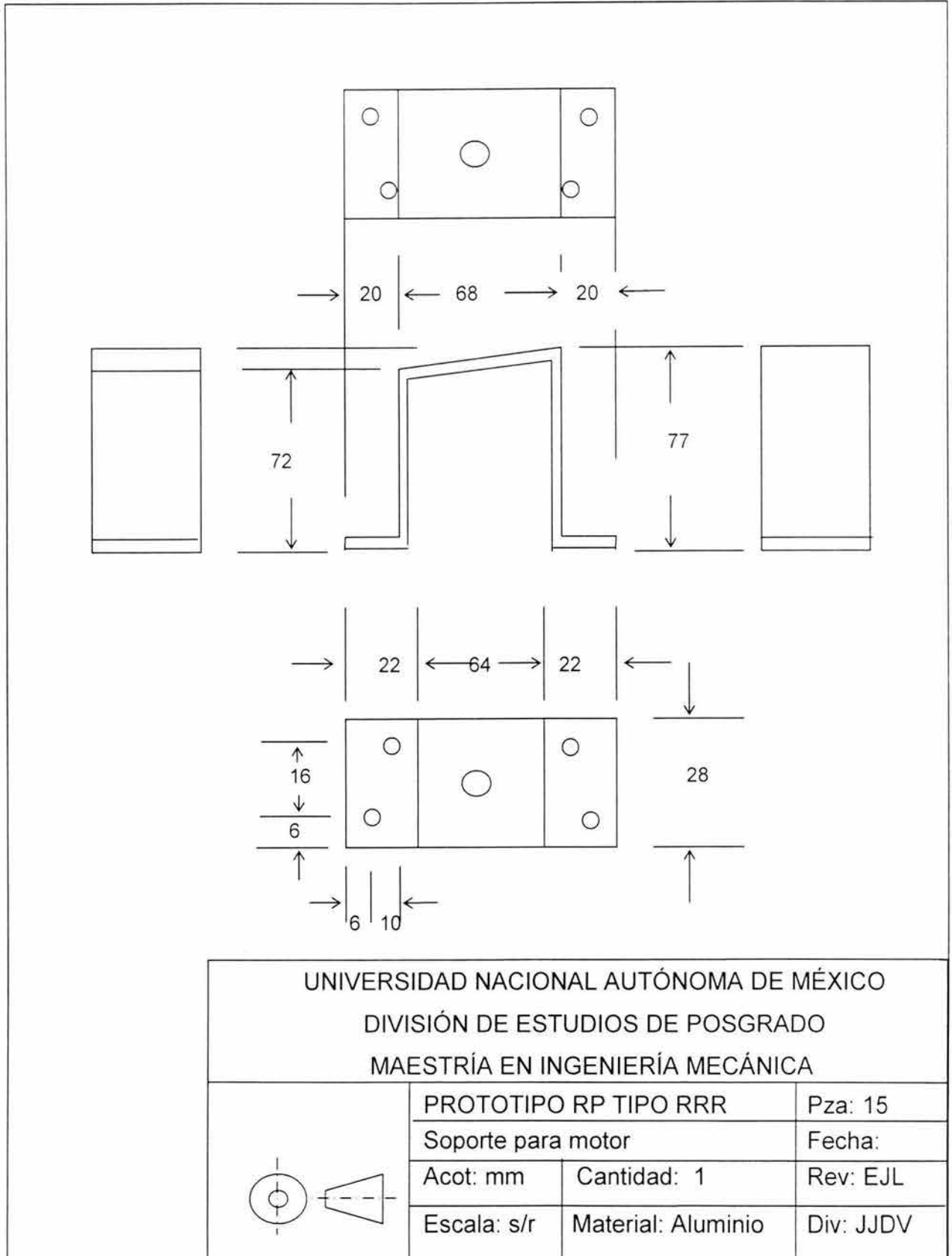


Figura AII.12 Soporte para motor a pasos

APÉNDICE II COMPONENTES DEL PROTOTIPO

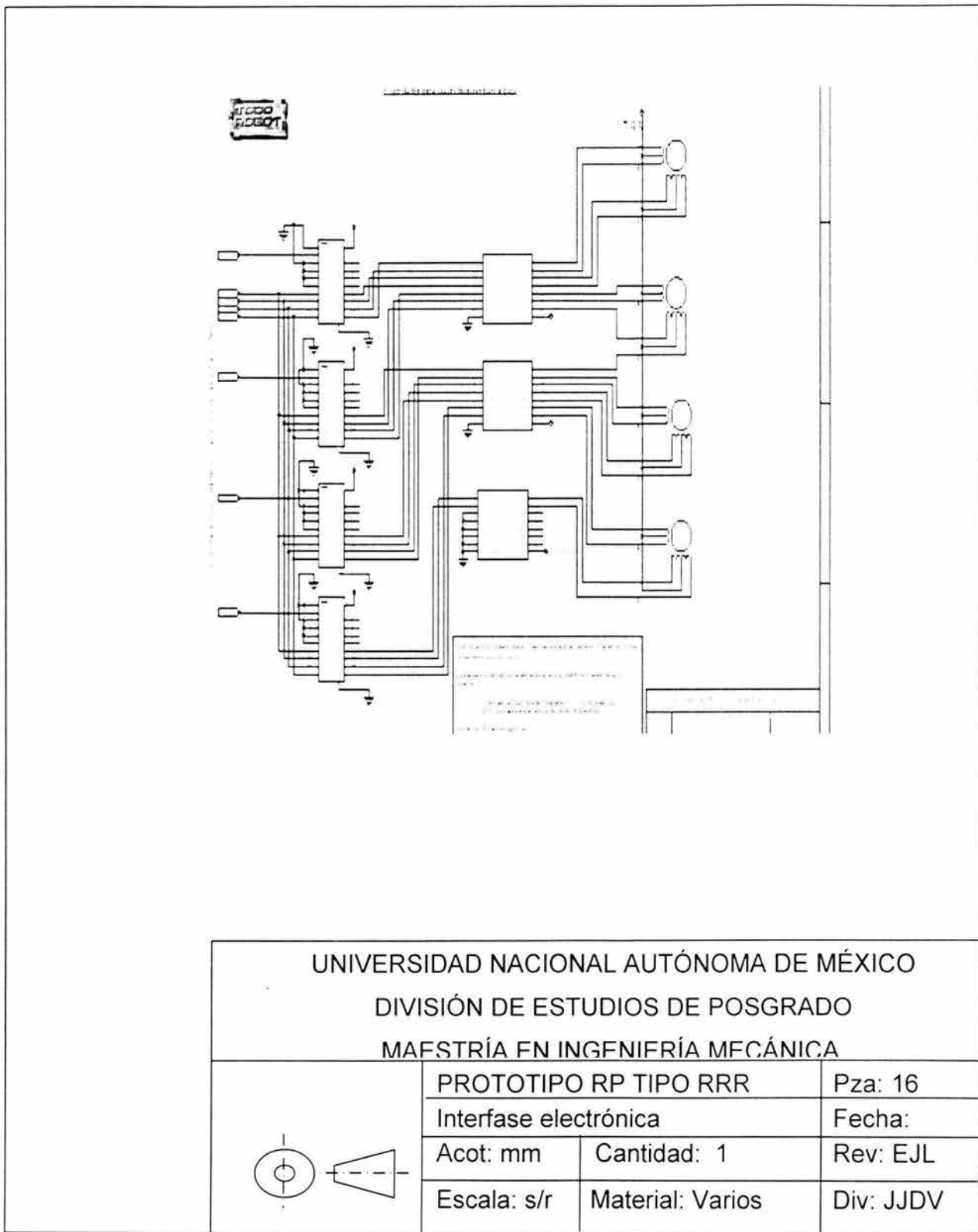


Figura AII.13 Interfase electrónica

CONCLUSIONES Y REFERENCIAS

Conclusiones

En este trabajo de tesis se cumplieron los siguientes objetivos:

- Se modeló la cinemática de un robot paralelo planar tipo RRR, usando el álgebra de complejos.
- Los problemas cinemáticos directo e inverso se formularon para el análisis de posición, velocidad y aceleración.
- El modelo cinemática de posición resultante fué programado en el lenguaje VISUAL BASIC V6.

En este trabajo se modeló la cinemática de un robot paralelo plano tipo RRR. Para tal propósito, se utilizó el álgebra de los números complejos sistematizados y parametrizados por (Reyes L. 1998). Las conclusiones y resultados derivados de esta tesis se resumen en los puntos siguientes:

- El problema cinemático inverso para la posición, velocidad y aceleración generó un sistema de 12 ecuaciones y 12 incógnitas para cada modelo.
- El problema cinemático directo de posición, velocidad y aceleración generó un sistema de 10 ecuaciones con 10 incógnitas.
- Para utilizar la cinemática directa del robot estudiado, fue necesario definir nuevos vectores de posición sobre la plataforma; en otras palabras, el análisis cinemático directo es diferente al inverso.

- El planteamiento sistemático de los modelos cinemáticos permitió la programación y simulación del modelo de posición en forma eficiente en el lenguaje VISUAL BASIC V6.
- Es necesario optimar la programación de los modelos para obtener una respuesta en tiempo real.

Los modelos cinemáticos del robot paralelo obtenidos en este trabajo de tesis no incluyen el análisis de trayectoria, por tanto, para estudiar el análisis dinámico de este tipo de robots resulta necesario incluir el modelo de trayectoria. Cabe señalar que, la herramienta matemática usada (números complejos) para construir los modelos del robot, puede ser usada para analizar y modelar otros tipos de robots paralelos planos y mecanismos.

Futuros trabajos por desarrollar relacionados con esta tesis son:

- 1) Modelación cinemática de posición de un robot paralelo planar tipo RPP usando una rotación usual y otra variante definidas en el espacio vectorial de los números complejos.
- 2) Optimar la programación de los modelos cinemáticos de un robot paralelo tipo RRR para eficientar la respuesta a tiempo real.
- 3) Análisis dinámico de un robot paralelo planar tipo RRR.
- 4) Análisis de trayectoria y aplicación al ciclo operativo de un robot paralelo planar.
- 5) Programar los modelos de velocidad y aceleración del robot.

REFERENCIAS

- 1 Don McCloy y Michael Harris ; Robótica una introducción, Editorial LIMUSA. S.A. de C. V., 1993.
- 2 Robots and Manufacturing Automation
- 3 Robótica Industrial; http://www.parallemic.org/Reviews/Review_004.htm, MiKell Groover; Automation, Production Systems and Computer Integrated Manufacturing.
- 4 J. Ángeles. "Fundamentals of Robotics Mechanical Sistem". Springer-Verlany, New York (1997).
- 5 Groupe de Robotique Parallele Definitions (Robot Industriales seriales, paralelos y híbridos).
- 6 Jiménez I. Eusebio, "Simulación de un Proceso de Manufactura con Obstáculo en la Línea de Producción." Tesis de Grado de Maestro en Ingeniería Mecánica. UNAM-DEPFI, México, D. F., 1998.
- 7 Joseph Edward Shigley; Análisis Cinemático de Mecanismos, Editorial McGraw-Hill, edición 1970.
- 8 Méndez Canseco Mauricio C., Modelado Cinemático de Sistemas Mecánicos de Cadena Cerrada. Tesis de Grado de Maestro en Ingeniería Mecánica. UNAM-DEPFI, México D. F., 1995.

- 9 Merlet Jean – Pierre. Les Robots Parallèles.
Traité des Nouvelles Technologies – Serie Robotique. Hermes
Paris, 1990.

- 10 Oren Masory, Jian Wang and Hanqi Zhuang. On the Accuracy of a Stewart
Platform-part II. Kinematic Calibration and Compensation.
Reporte Internacional
Robotics Center, Florida Atlantic University, Boca Raton, FL., 1993

- 11 Zhiming Ji. Dynamics Decomposition for Stewart Platform.
Revista de Diseño Mecánico.
Department of Mechanical and Industrial Engineering, New Jersey Institute
of Technology, Newark, N. J., 1993.

- 12 <http://macea.SNU.ac.kr/eclipse/proto/proto.html>. SEOUL National University
and Sena Technology Co. Corea 1999.

- 13 Jean Pierre Merlet. Manipulateurs Paraleles, 6 Eme Partie: Determination
des Espaces de Travail en Orientation.
Rapports de Recherche (Reporte de Investigación)
Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique.
Sophia – Antipolis, France, Mayo 1993.

- 14 Jean Pierre Merlet. Agosto 1995
<http://www.sop.inria.fr/coprin/logical/RP/Ssm/noticce.html.html>.

- 15 Dr. Hani Ali Arafa. Project Six DOF Hexapod, Challenge of Design and
Innovation.
Reporte Internacional.
The American University in Cairo. Department of Engineering, Mechanical
Engineering.

<http://biotsavart.tripod.com/hexapod.html>.

- 16 Bryan Anderson. M850 HEXAPOD 6-Axis Parallel Kinematics Robot.
Reporte internacional.
http://www.physikinstrumente.com/micropositioningsystems/8_4.html.
<http://www.geekvest.com/robotic/hexapod.html>.
- 17 Profesors Jongwon Kim, F.C. Paik. The Parallel Mechanism Based
Universal Machining Center for fast Machining.
Reporte Internacional.
Seoul National University and Sena Technology Co.
- 18 Llian Bonev. Delta Parallel Robot – The Story of Success. Mayo 6 2001
Reporte Internacional.
http://www.parallemic.org/Reviews/Review_002.htm
- 19 The Agile Eye (a Spherical Parallel Mechanism). Laboratoire de Robotique,
Universite Laval, Canadda.
Reporte Internacional.
http://wwwrobot.gmc.ulaval.ca/recherche/theme01_a.html
- 20 Luc Rolland. Manta Parallel Robot: A 4 DOF Robot for Inexpensive Material
Handling. Universite Loria, France. Abril 5 2002
Reporte Internacional.
<http://www.parallemic.org/Reviews/Review010.html>
- 21 Profesor Georg Michael Pohl. Handlex: The Handling Parallel Robot.
Research Project of the University of Applied Sciences FH Bochum
(Germany) July 2000.
<http://www.parallemic.org/Reviews/Review009.html>
By Llian Bonev, Published on March 31, 2002.

- 22 By Damien Chablat, Philippe Wenger and Felix Majou. Orthoglide: A 3-Axis Parallel Machine Tool for High-Speed Machining
Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes, Fr.
Publicado por Llian Bonev en Abril 8, 2002
<http://www.parallemic.org/Reviews/Review011.html>
<http://www.irccyn.ec-nantes.fr/~wenger/Orthoglide/>
- 23 ParaDex: A Novel 6 – DOF Parallel Manipulator. Sandia's Intelligent Systems and Robotics Center.
Reporte de Investigación. Last Modified by G. Garrison 11/13/00
<http://www.sandia.gov/isrc/ParaDex/paradex.html>
<http://www.sandia.gov/isrc/Paradex.html>
- 24 Robot paralelo Servo-Pneumatic Multi-Axes test facility. Proceedings of the 32nd ISR(International Symposium on Robotics), 19-21 April 2001, Seoul, Korea.

Martin Neumann and Hubert Hahn. Laboratory of Control Engineering and System Dynamics. Department of Mechanical Engineering, University of Kassel. Moenchebergstr. 7, 34109 Kassel, Germany. (E-mail : hahn@hrz.uni-kassel.de)

http://www.rts.maschinenbau.uni-kassel.de/RTS/staff/neumann/isr2001_www/isr2001_www.html
- 25 Jean Pierre Merlet. Architecture des robots plans à 3 degrés de liberté/3 DOF robots. Inria Sophia – Antipolis, France. Jul 26 1995.
Reporte Internacional.
<http://www-sop.inria.fr/coprin/equipe/merlet/Archi/node3.html>

- 26 K. S. FU, R. C. GONZALEZ, C. S. G. LEE; ROBOTICA: Control, detección, visión e inteligencia; Editorial McGraw-Hill, julio 1988.
- 27 Kevin Cleary and Thruston Brooks. KINEMATIC ANALYSIS OF A NOVEL 6-DOF PARALLEL MANIPULATOR. Hughes STX Robotics.
Reporte internacional 1050-4729/93 IEEE, 1993
E-mail : kleary@six.com, tbrooks@six.com
- 28 Cuenca J. Francisco. "Modelado del análisis Cinemático de una Plataforma Paralela Plna": Una aplicación del álgebra de Cuaterniones.
Tesis de Grado de Maestro en Ingeniería Mecánica .
UNAM – DEPFI, México D. F., 1996.
- 29 Olvera A. Ernesto. Vega Miguel A. "Simulación y Construcción de un Robot Paralelo"
Reporte de Proyecto de Maestría I.
UNAM – DEPFI, México D. F., 1997
- 30 Pérez C. Julio Alejandro. "Caracterización y prueba de las secuencias simultaneas de un Robot Paralelo experimental tipo RRR"
Tesis de Grado de Maestro en Ingeniería Mecánica.
UNAM – DEPFI, México D. F., 2001