

01173



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

ANÁLISIS Y SÍNTESIS DE UN MECANISMO DE CUATRO BARRAS; CONDUCCIÓN DE CUERPO RÍGIDO PARA TRES Y CUATRO PUNTOS DE PRECISIÓN USANDO NÚMEROS COMPLEJOS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN INGENIERÍA (ÁREA MECÁNICA) PRESENTA:  
ING. GABRIEL MARTÍNEZ GRADILLA



ASESOR: M. EN I. EUSEBIO JIMÉNEZ LÓPEZ

MÉXICO, D. F. CIUDAD UNIVERSITARIA

2004



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

# PRÓLOGO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Gabriel Martínez  
Gradilla

FECHA: 1 - Abr - 2004

FIRMA: 

Este trabajo de tesis tiene el propósito de generar conocimiento escrito para las futuras generaciones de la Maestría en Ingeniería Mecánica y campos afines, interesadas en el análisis y síntesis de mecanismos.

Los mecanismos son sistemas mecánicos de cadena cinemática cerrada que se usan en máquinas y dispositivos de trabajo para diversos propósitos. Durante décadas dichos mecanismos han sido modelados utilizando métodos tradicionales. Actualmente, se han desarrollado nuevas estructuras algebraicas usadas para modelar las rotaciones tanto en el plano como en el espacio.

Este trabajo de tesis trata de demostrar la eficiencia de los números complejos en el modelado de mecanismos de cuatro y cinco barras de movimiento en el plano. De hecho, [2] ha sistematizado y parametrizado las rotaciones y reflexiones rígidas en el plano en el espacio vectorial de complejos. Dicha sistematización ha sido realizada en el contexto del álgebra moderna.

En esta tesis se modelan el problema de análisis de un mecanismo de cinco barras y dos problemas de síntesis para conducción de cuerpo rígido (tres y cuatro puntos de precisión), usando la rotación habitual definida en el espacio de los números complejos.

Cabe señalar que este trabajo, forma parte de la línea de investigación: Modelación cinemática y dinámica de sistemas mecánicos, desarrollada por la Sección Mecánica de la DEPMI, UNAM y el Instituto Tecnológico Superior de Cajeme, Cd. Obregón Sonora.

Finalmente, se agradece la colaboración de todas aquellas personas que contribuyeron para realizar esta tesis.

# CONTENIDO

<b>PRÓLOGO</b>	I
<b>RESUMEN</b>	V
<b>INTRODUCCIÓN</b>	VI
<b>LISTA DE FIGURAS Y TABLAS</b>	XXV
<b>CAPÍTULO 1    PARAMETRIZACIÓN DE LAS ROTACIONES RÍGIDAS EN EL PLANO</b>	
1.1. Introducción.	1
1.2. El espacio vectorial de los números complejos.	1
1.3. Representación paramétrica de las rotaciones.	9
1.4. Representación exponencial de $\rho(p, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ .	12
<b>CAPÍTULO 2    ANÁLISIS DE UN MECANISMO DE CINCO BARRAS</b>	
2.1. Introducción.	18
2.2. Caracterización del mecanismo de cinco barras.	18
2.3. Análisis de la configuración no deformada.	21
2.4. Planteamiento de los problemas directo e inverso.	24
2.4.1. Problema directo.	24
2.4.2. Problema inverso.	25
2.5. Análisis de la configuración deformada.	25
2.5.1. Planteamiento del problema directo.	28
2.5.2. Problema inverso.	29
<b>CAPÍTULO 3    PROBLEMA DE SÍNTESIS PARA CONDUCCIÓN DE CUERPO RÍGIDO                   (TRES PUNTOS DE PRECISIÓN)</b>	
3.1. Introducción.	30
3.2. Definición y restricciones del problema.	31
3.3. Desarrollo del modelo.	32
3.4. Planteamiento del problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (tres puntos de precisión).	41

---

<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>PROBLEMA DE SÍNTESIS PARA CONDUCCIÓN DE CUERPO RÍGIDO (CUATRO PUNTOS DE PRECISIÓN)</b>	
4.1.	Introducción.	43
4.2.	Definición y restricciones del problema.	44
4.3.	Desarrollo del modelo.	45
4.4.	Planteamiento del problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (cuatro puntos de precisión).	56
<b>APÉNDICE A</b>	<b>ANÁLISIS DE CUERPO RÍGIDO</b>	
A.1.	Hipótesis fundamental de cuerpo rígido.	57
A.2.	Movimiento plano de un cuerpo rígido.	58
A.3.	Velocidad y aceleración de los puntos de un cuerpo rígido que gira alrededor de un punto.	60
A.4.	Movimiento plano general de un cuerpo rígido.	63
A.5.	Uso de números complejos en el análisis del movimiento plano de cuerpos rígidos (representación Euleriana).	65
A.6.	Representación de transformaciones por matrices.	69
<b>APÉNDICE B</b>	<b>PROGRAMACIÓN Y SIMULACIÓN: ANÁLISIS DE UN MECANISMO DE CINCO BARRAS</b>	
B.1.	Introducción.	72
B.2.	Cinemática inversa.	72
B.3.	Cinemática directa.	82
<b>APÉNDICE C</b>	<b>PROGRAMACIÓN Y SIMULACIÓN: PROBLEMA DE SÍNTESIS PARA CONDUCCIÓN DE CUERPO RÍGIDO (TRES PUNTOS DE PRECISIÓN)</b>	
C.1.	Introducción.	89
<b>CONCLUSIONES</b>		112
<b>REFERENCIAS</b>		114

# RESUMEN

En este trabajo de tesis se modelan los problemas de análisis de un mecanismo de cinco barras, y de síntesis para conducción de cuerpo rígido (tres y cuatro puntos de precisión) asociado con un mecanismo de cuatro barras. Para modelar dichos problemas, fue utilizada el álgebra de los números complejos. Dos configuraciones del mecanismo de cinco barras fueron analizadas: 1) la no deformada y 2) la deformada. El problema directo generó un sistema de seis ecuaciones y seis incógnitas, y el inverso un sistema de ocho por ocho, para ambas configuraciones. El problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (tres puntos de precisión) generó un sistema de doce por doce, en tanto el de cuatro puntos de precisión fue de veinte por veinte. Se introdujeron restricciones de rigidez en el eslabón acoplador y control del área de trabajo para cuadrar los sistemas de ecuaciones e incógnitas. Finalmente, los modelos obtenidos fueron programados en VISUAL BASIC V6.

**Palabras clave:** Mecanismo, análisis y síntesis, números complejos, modelación.



# INTRODUCCIÓN

En este trabajo de tesis se cumplirán los objetivos siguientes:

- Modelar el problema de análisis de un mecanismo de cinco barras.
- Modelar el problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (tres y cuatro puntos de precisión).
- Usar la rotación habitual definida en los números complejos para generar los modelos.
- Programar los modelos en VISUAL BASIC V6.

La mayor parte de los sistemas mecánicos que producen o transfieren movimiento y/o fuerza integran en sus elementos mecanismos, tales como levas, trenes de engranes, dispositivos de movimiento intermitente y multicuerpos rígidos de cadena abierta o cerrada.

El análisis y la síntesis de mecanismos son actividades de suma importancia en la modelación y el diseño cinemático, pues de ellas depende la selección del tipo de

mecanismo adecuado para una cierta tarea, y la determinación de sus dimensiones apropiadas. Tradicionalmente, dichos modelos han sido generados utilizando métodos gráficos [25, 28, 30], matriciales [11, 12, 13, 14, 15, 16, 19, 36] o la comúnmente conocida “álgebra de números complejos” en su representación Euleriana [1, 11].

En la actualidad, los movimientos de un mecanismo pueden ser caracterizados en función de rotaciones y/o reflexiones rígidas de sus miembros dentro del plano o el espacio a través de nuevas estructuras algebraicas, como el álgebra de complejos y el álgebra de cuaterniones, ambas sistematizadas y parametrizadas en el contexto moderno [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

En los siguientes párrafos se presenta una introducción a los conceptos básicos de la cinemática plana de los cuerpos rígidos y la teoría de mecanismos. El objetivo es proporcionar un marco de referencia didáctico y científico que, según [34] resulta fundamental para eliminar cualquier indicio de vaguedad y ambigüedad, las cuales constituyen una seria amenaza para el pensamiento preciso.

Esta parte se distingue, al igual que la etapa axiomática en el desarrollo de una teoría matemática [35], por la clarificación y la organización sistemática de los conceptos necesarios para lograr el mejor entendimiento del trabajo.

### **I.1. Cinemática plana de los cuerpos rígidos y su hipótesis fundamental**

Dentro de la “mecánica clásica” pueden ser identificadas dos grandes áreas de estudio, estática y dinámica. La primera se ocupa del análisis de sistemas sobre los cuales el tiempo no interviene como un factor determinante, por otro lado, la

dinámica estudia a los sistemas cuyas condiciones y parámetros de interés se ven afectados por acción del tiempo.

Como se muestra en la figura I.1, la dinámica puede ser subdividida en dos disciplinas generales, que Leonhard Euler reconoció en 1775 por primera vez, como entidades separadas. Cinemática y cinética centran su estudio, respectivamente, sobre el movimiento de sistemas físicos, y las fuerzas que lo originan.

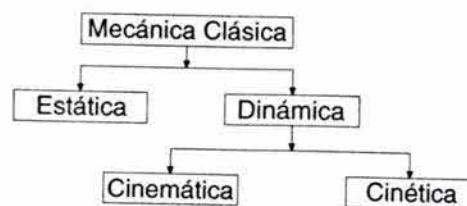


Figura I.1. Subdivisiones de la mecánica clásica

De manera más específica, puede decirse que la cinemática comprende el análisis de la posición, desplazamiento, rotación, rapidez, velocidad y aceleración, derivados del movimiento, independientemente de las fuerzas que lo producen.

Para la “escuela newtoniana”, el desarrollo en el estudio de la cinemática comienza con el análisis de la partícula, continúa con los sistemas de partículas y con la llamada cinemática de los cuerpos rígidos, que constituye un caso particular de los sistemas de partículas. Estas últimas, al pertenecer a un “cuerpo rígido”, adquieren ciertas propiedades mecánicas de importancia considerable.

En [22], la cinemática de los cuerpos rígidos se ocupa del “movimiento externo” de los cuerpos, es decir, sin considerar las pequeñas deformaciones asociadas con la aplicación de carga. Según [37], para la cinemática de los cuerpos rígidos, el único resultado que interesa de la aplicación de una fuerza, es el eventual desplazamiento del cuerpo que la recibe.

Si bien es cierto que el volumen de cuerpo rígido se deforma bajo el efecto de fuerzas externas, estas deformaciones son de magnitud despreciable si se comparan con las dimensiones características del sólido. Por lo cual, en la medición de desplazamientos, velocidades y aceleraciones, tales deformaciones volumétricas pueden ser omitidas sin introducir errores considerables.

Con base en lo anterior, “la hipótesis fundamental de cuerpo rígido” considera a los cuerpos como indeformables, de modo que la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos se mantiene constante en magnitud durante todo momento.

## **I.2. Conceptos básicos de la mecánica clásica**

De acuerdo con [33], el espacio es la región geométrica en la cual se desarrollan los fenómenos físicos. Por tanto, la posición de un cuerpo en el espacio puede ser determinada respecto a un cierto sistema geométrico de referencia mediante métricas lineales y angulares. El sistema de referencia fundamental para las leyes de la “mecánica newtoniana”, es el sistema inercial primario XYZ, formado por tres ejes mutuamente ortogonales que permanecen fijos (es decir, sin traslación ni rotación alguna) en el espacio. Las leyes de la “mecánica clásica” serán válidas para este sistema de referencia en tanto que las velocidades que intervengan sean despreciables frente a la velocidad de la luz.

En [23], una vez establecido el sistema de coordenadas XYZ como marco de referencia espacial, la posición de un punto “P” puede ser definida a partir de un vector (considerado el término en el sentido restringido de una cantidad a la cual se le asocia además de una magnitud, una dirección y sentido) que va del origen del sistema de coordenadas “O” al punto “P”, como se muestra en la figura I.2.

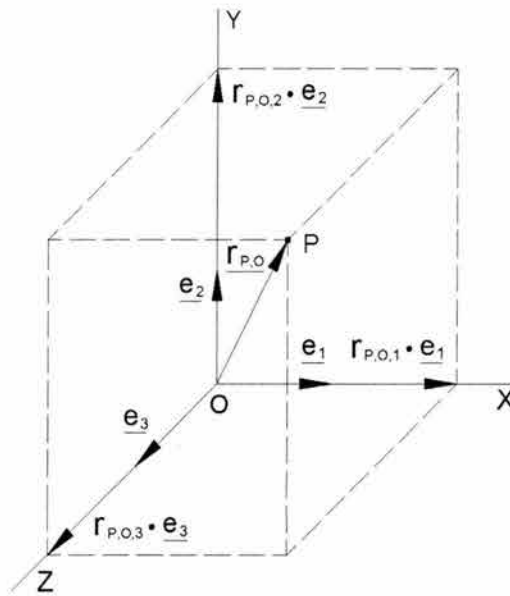


Figura I.2. Posición de un punto en el sistema de coordenadas XYZ

El “vector de posición”  $\underline{r}_{P,O}$  puede ser expresado en términos de sus componentes a lo largo de los ejes de coordenadas de la siguiente manera:

$$\underline{r}_{P,O} = \Gamma_{P,O,1} \cdot \underline{e}_1 + \Gamma_{P,O,2} \cdot \underline{e}_2 + \Gamma_{P,O,3} \cdot \underline{e}_3 \quad (I.1)$$

Aquí,  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3 \in \mathfrak{R}^3$  son vectores unitarios en las direcciones de los ejes X, Y, Z, respectivamente, y  $\Gamma_{P,O,1}, \Gamma_{P,O,2}, \Gamma_{P,O,3} \in \mathfrak{R}$  son las magnitudes escalares de los componentes.

### I.3. Movimiento plano de cuerpo rígido

Las posiciones sucesivas de un cuerpo rígido en movimiento describen un “lugar geométrico” comúnmente llamado “trayectoria”, cuya longitud está definida por las diferentes posiciones que el cuerpo ocupa conforme varía el tiempo. El movimiento de un cuerpo será de tipo espacial, plano o lineal, si se requiere de tres, dos o una coordenada para describir su trayectoria, respectivamente.

Para [33], todo movimiento plano de cuerpo rígido puede ser clasificado en alguna de tres categorías generales, denominadas movimiento de traslación pura, movimiento de rotación pura y movimiento plano general, según se muestra en la tabla I.1.

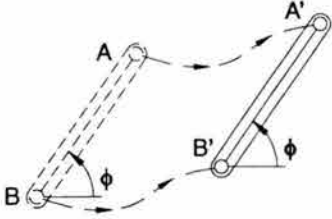
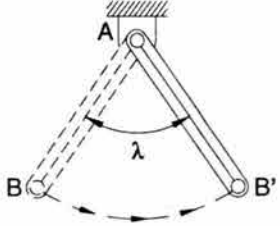
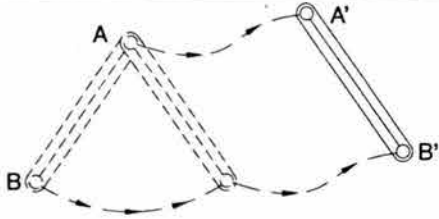
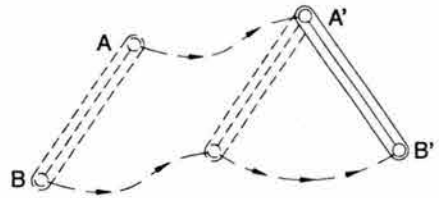
Forma Típica	Tipo de movimiento	
	Movimiento de traslación pura	
	Movimiento de rotación pura	
	Rotación + Traslación	Movimiento plano general
	Traslación + Rotación	

Tabla I.1. Categorías del movimiento plano de cuerpo rígido

En un movimiento de traslación pura, todos los puntos del cuerpo se desplazan sobre trayectorias mutuamente paralelas, es decir, describen un mismo movimiento. Las posiciones finales  $A'$  y  $B'$  de los puntos  $A$  y  $B$ , serán alcanzadas después de una

traslación de los puntos del cuerpo sobre trayectorias similares. Por otra parte, la rotación pura es un movimiento angular en torno a uno de los puntos del cuerpo, conocido como “eje fijo de rotación”, en este caso, la posición final B' del punto B es resultado de la rotación de los puntos del cuerpo sobre A. El movimiento plano general de cuerpo rígido es una combinación de traslación y rotación, por tanto, las posiciones finales A' y B' resultan de la aplicación consecutiva conmutativa, de los dos movimientos.

#### **I.4. Mecanismos, eslabonamientos y cadenas cinemáticas**

Según [11], un mecanismo es un acoplamiento de elementos que se utiliza para transmitir potencia o información. En un trabajo reciente [1], se denomina mecanismo a un dispositivo mecánico que tiene el propósito de transferir movimiento y/o fuerza de una fuente de potencia a una salida.

Por otro lado, un eslabonamiento es un multicuerpo que consiste de varios eslabones (o barras), generalmente considerados rígidos, conectados por juntas, para formar cadenas abiertas, cerradas o compuestas. Los eslabonamientos constituyen mecanismos simples y pueden ser diseñados para efectuar tareas complejas, como movimientos no lineales y transmisión de fuerza. En cinemática se les representa por medio de diagramas o “esqueletos”, los cuales tienen un propósito similar al de un esquema de circuito eléctrico, es decir, muestran únicamente los aspectos esenciales de los miembros.

Como se muestra en la tabla I.2, los eslabones de un mecanismo pueden ser clasificados de acuerdo con la cantidad de nodos o puntos de unión que contienen.



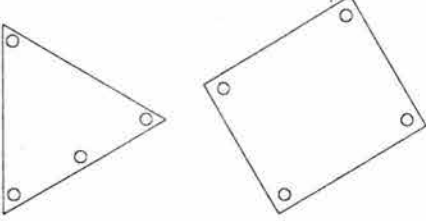
Orden o tipo del eslabón	Forma típica
Binario	
Ternario	
Cuaternario	

Tabla I.2. Tipos de eslabones planos

Las cadenas cinemáticas que forman los eslabones pueden ser abiertas, cerradas o compuestas según se muestra en la figura I.3. De acuerdo con [23], una cadena cinemática cerrada es aquella en la que cada miembro se une al menos con otros dos, formando un lazo cerrado. Por otro lado, si cada eslabón está conectado a cualquier otro, formando uno y sólo un lazo abierto, la disposición resultante es conocida como cadena cinemática abierta. En una cadena compuesta se incluyen eslabones binarios, en combinación con miembros de otro orden para formar dos o más circuitos cerrados.

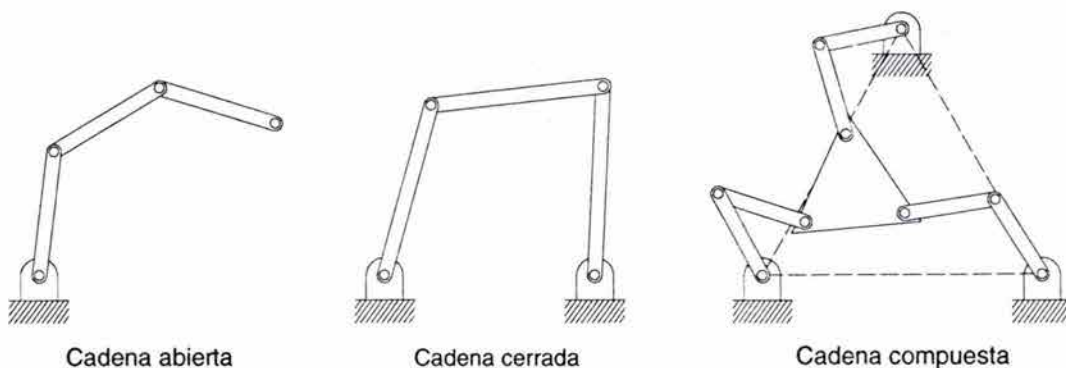


Figura I.3. Tipos de cadenas cinemáticas



## I.5. Grado de libertad de un mecanismo

El concepto de grado de libertad (GDL) es fundamental en el análisis y la síntesis de un mecanismo, ya que se relaciona con la movilidad del dispositivo [17]. En [23], el grado de libertad de un mecanismo se define como el número de parámetros de entrada que se deben controlar independientemente, con el fin de llevar el multicuerpo a su posición final.

De acuerdo con [11], el grado de libertad de un mecanismo es el número mínimo de variables que se requiere para especificar de manera única la configuración de este acoplamiento.

Según [1], si se requiere la posición exacta del eslabón rígido "K" en el sistema de referencia XY, como se muestra en la figura I.4, se deberá determinar el número de variables independientes necesarias para localizarlo por completo. La posición del punto "A" puede alcanzarse, desde el origen del sistema de coordenadas "O" por medio de la distancia  $X_A$  en dirección del eje "X" y la distancia  $Y_A$  en dirección del eje "Y". Estas dos coordenadas, que representan dos traslaciones, ubican el punto "A". Sin embargo, se necesita más información para definir por completo la posición del eslabón "K". Si se conoce el ángulo que forma la línea que une "A" y "B" con respecto al eje "X", la posición del eslabón "K" está especificada en el plano XY. Se tienen entonces tres variables independientes;  $X_A$ ,  $Y_A$  y  $\theta$  (dos traslaciones y una rotación) asociadas con la posición de un eslabón en el plano. Por tanto, un eslabón rígido no restringido en el plano cuenta con tres grados de libertad.

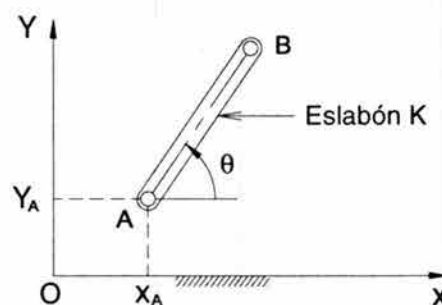


Figura I.4. Eslabón localizado en el sistema de referencia XY

Considere un ensamble de “n” eslabones, los cuales tendrán un total de “3n” grados de libertad antes de ser unidos para formar un eslabonamiento. Las conexiones entre miembros tienen como consecuencia la pérdida de grados de libertad del sistema total. Si el punto “A” sobre el eslabón en la figura I.4 es una junta rotacional entre “K” y tierra, entonces, dos variables independientes,  $X_A$  y  $Y_A$ , quedan fijas, dejando a  $\theta$  como el único grado de libertad en el eslabón “K”.

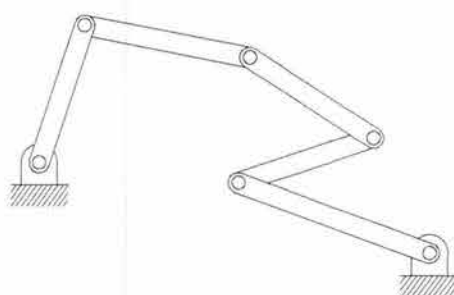


Figura I.5. Conjunto de eslabones conectados para formar un eslabonamiento

En un conjunto de eslabones como el que se muestra en la figura I.5, cada par rotacional elimina dos grados de libertad de movimiento relativo entre barras sucesivas. Lo anterior sugiere una ecuación que determina los grados de libertad de una cadena de “n” eslabones conectados por “R” juntas rotacionales, con tierra (el eslabón fijo) considerado como uno de los miembros:

$$\text{Grados de libertad (GDL)} = F = 3(n-1) - 2R \quad (1.2)$$

donde  $(n-1)$  es el número de eslabones móviles. La expresión (1.2) es conocida como “ecuación de Gruebler”.

Al utilizar la ecuación (1.2) para determinar el número de grados de libertad del eslabonamiento que se muestra en la figura I.6, se tiene que:

$$n = 4 \quad , \quad R = 4$$

$$F = 3(4-1) - 2(4) = 1$$

Por tanto, el mecanismo cuenta con un grado de libertad.

## **I.6. Pares cinemáticos**

Para que un mecanismo sea útil, los movimientos entre sus eslabones no pueden ser arbitrarios, éstos deben restringirse para producir movimientos relativos adecuados.

Los miembros de un mecanismo se conectan en “pares cinemáticos”, a los elementos mecánicos que los unen se les denomina juntas. En un trabajo reciente [19], una junta, de acuerdo con su configuración, cuenta con restricciones físicas que limitan el movimiento entre los eslabones que se unen. El tipo de movimiento relativo que permite se determina por la forma de las superficies de contacto entre los miembros, comúnmente conocidas como “elementos pareados” (pair elements). Una vez acoplados, dos pareados forman un par cinemático que puede ser clasificado como inferior o superior.

Para [11], un par superior existe cuando los elementos acoplados están en contacto por medio de un punto o una recta.

En un par inferior, los elementos hacen contacto por medio de una superficie o área de tamaño substancial, debido a que la geometría de acoplamiento en los pareados es típicamente idéntica.

Existen seis tipos básicos de pares inferiores que se utilizan comúnmente en mecanismos y robots manipuladores, según se muestra en la tabla I.3:

- Par o junta rotacional (R); es aquella que permite únicamente la rotación relativa entre los miembros conectados, sobre un eje definido por la geometría de la junta.
- Par o junta prismática (P); limita a los elementos a deslizarse con respecto de sí mismos, a lo largo de un eje determinado por la geometría de la junta.
- Par o junta esférica (S); permite la libre rotación de un elemento con respecto de otro, alrededor del centro de una esfera acopladora y en todas las orientaciones posibles. No proporciona traslación alguna entre los miembros.
- Par o junta cilíndrica (C); permite tanto rotación angular como un movimiento de deslizamiento independiente, sobre y a lo largo de un eje descrito por la geometría de la junta.
- Par o junta helicoidal (H); a diferencia del par cilíndrico, los movimientos de deslizamiento y rotación están relacionados por el ángulo de hélice de un tornillo helicoidal.
- Par o junta plana (P<sub>i</sub>); tiene dos grados de libertad traslacionales a lo largo de un plano de contacto y uno rotacional alrededor de un eje normal a dicho plano.

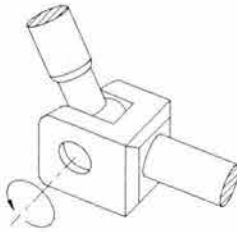
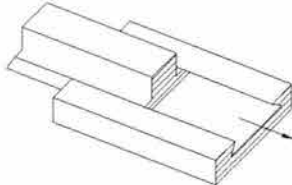

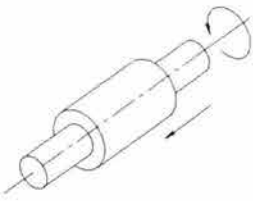
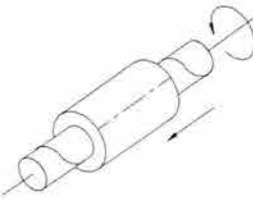
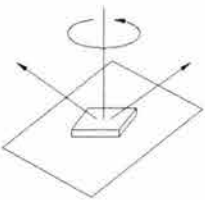
Tipo de junta	Grados de libertad (GDL)	Forma típica
Rotacional (R)	1	
Prismática (P)	1	
Esférica (S)	3	
Cilíndrica (C)	2	
Helicoidal (H)	1	
Plana (P)	3	

Tabla I.3. Pares inferiores

## I.7. Mecanismo de cuatro barras

En [1], el eslabonamiento plano de cadena cerrada más simple es el denominado “mecanismo de cuatro barras”, que tiene tres miembros móviles (mas un miembro fijo) y cuatro juntas rotacionales, según se muestra en la figura I.6. La barra conectada al actuador que proporciona la potencia al mecanismo se llama “eslabón de entrada” (regularmente, A–B). El “eslabón seguidor” conecta el pivote móvil C al punto D de tierra. El “eslabón acoplador o flotante” une los dos pivotes móviles B y C, acoplando la barra de entrada con la de salida, y trasmite el movimiento o la potencia al exterior del multicuerpo, por medio de puntos “cinemáticamente admisibles” (P).

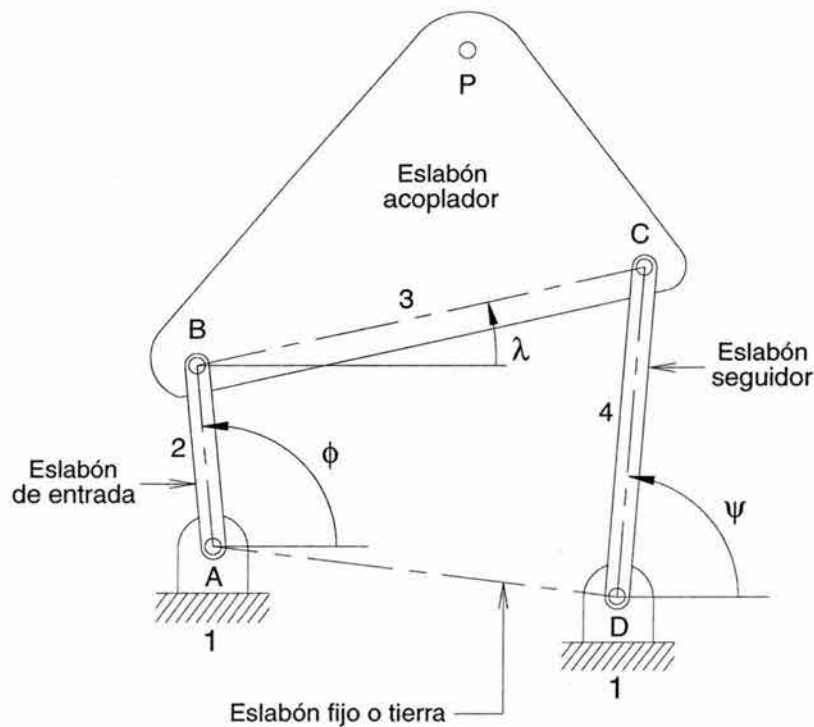


Figura I.6. Nomenclatura del mecanismo de cuatro barras

No obstante que se trata de un mecanismo simple, las cuatro barras forman un dispositivo muy versátil. Si un eslabonamiento de cuatro barras no proporciona el desempeño requerido para una aplicación particular, usualmente se considera como siguiente alternativa uno de seis, como los que se muestran en la figura I.7.

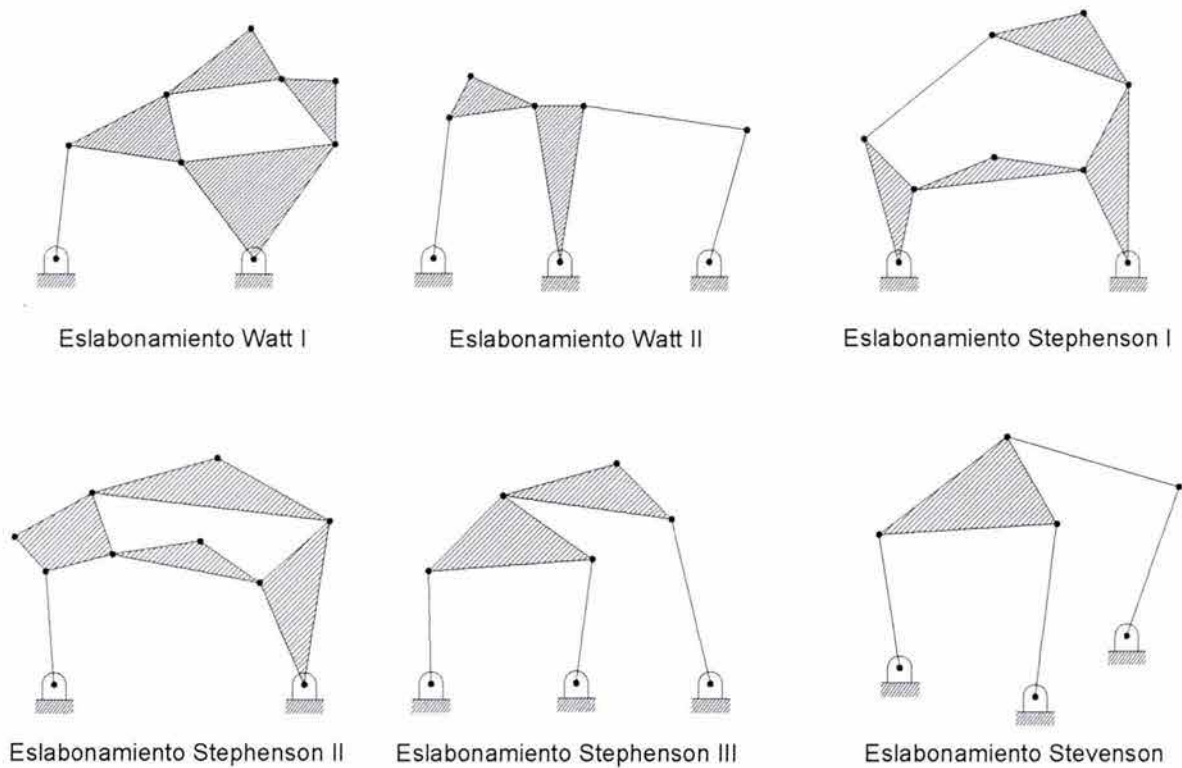


Figura I.7. Eslabonamientos de seis barras

### I.8. Mecanismo de cinco barras

El “mecanismo de cinco barras” es un multicuerpo que tiene cuatro eslabones móviles (mas un miembro de acoplamiento con los actuadores, que se encuentra empotrado en tierra) y cuatro juntas rotacionales, según se muestra en la figura I.7.

A diferencia del eslabonamiento de cuatro barras, el de cinco cuenta con dos actuadores y dos barras de entrada conectadas a ellos (A–B y A–D), por tanto, se le considera de dos grados de libertad. Por otro lado, el movimiento o la potencia al exterior del mecanismo, se transmite por medio del punto “cinemáticamente admisible” (P).

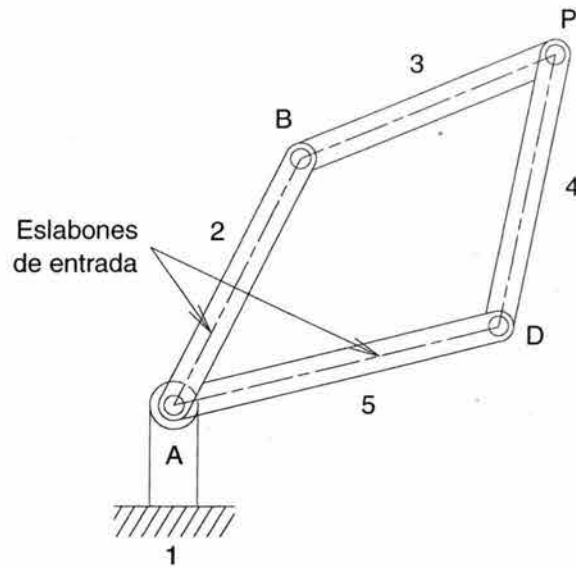


Figura I.8. Eslabonamiento de cinco barras

### I.9. Análisis y síntesis cinemática

El proceso de diseño de un mecanismo consiste de dos etapas; el análisis y la síntesis cinemática [32]. En la parte de análisis se plantean dos problemas fundamentales llamados “directo” e “inverso”, que determinan la posición y orientación del punto cinemáticamente admisible del multicuerpo, y resuelven la configuración que debe adoptar para una posición y orientación dadas, respectivamente.

Por otra parte, en la etapa de síntesis se diseña un mecanismo para desempeñar una tarea deseada. El problema formulado determina las longitudes de los miembros del eslabonamiento y puede ser clasificado en alguna de las siguientes categorías de acuerdo con el tipo de tarea que realiza el mecanismo:

- Conducción de cuerpo rígido o generación de movimiento. El problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido, consiste en el diseño de un



mecanismo que conduzca un cuerpo por “n” configuraciones (posiciones y orientaciones) sucesivas deseadas, a las cuales se les conoce como puntos de precisión o prescritos, partiendo de una cierta configuración llamada inicial u original.

- Generación de funciones de una variable o movimiento coordinado de la entrada y salida. En este tipo de síntesis se estudia el método de selección de las longitudes de los eslabones de un multicuerpo, con objeto de que la variable de salida sea una función específica de la variable de entrada.
- Generación de trayectoria. Este problema se centra sobre un punto de la barra acopladora, al cual se le hace pasar por “n” posiciones sucesivas partiendo de una posición inicial, y cuya trayectoria es de interés en la realización de una cierta función [1, 11].

#### **1.10. El problema por analizar en esta tesis**

En este trabajo de tesis se modelarán los problemas de análisis y síntesis asociados con mecanismos de cinco y cuatro barras, respectivamente. Específicamente, se estudiarán los problemas siguientes:

- 1) Problema de análisis.
- 2) Problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (tres puntos de precisión).
- 3) Problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (cuatro puntos de precisión).

Para modelar los problemas mencionados anteriormente, se usará la rotación habitual definida en el espacio vectorial de números complejos [2].

En los trabajos desarrollados por [5, 9] se ha modelado el problema de análisis de un mecanismo de cuatro barras usando una rotación definida en el espacio vectorial de cuaterniones [3].

También, [9] modeló el problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (tres puntos de precisión). Por otro lado, [10] modeló un problema de síntesis (entrada–salida) de un mecanismo de seis barras usando cuaterniones.

Este trabajo de tesis está compuesto fundamentalmente de cinco partes las cuales se resumen a continuación:

En el capítulo 1 se presenta el marco teórico de los números complejos. Se sistematiza el espacio vectorial de dichos números. Se propone una transformación lineal la cual resulta ser una rotación. Este capítulo reproduce el marco teórico generado en [2].

En el capítulo 2 se modela el problema de análisis del mecanismo de cinco barras motivo de estudio. Son caracterizadas dos configuraciones: 1) la no deformada y 2) la deformada. Los movimientos rotacionales del mecanismo son modelados usando la rotación sistematizada en el capítulo 1.

En el capítulo 3 se modela el problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (tres puntos de precisión) relacionado con un mecanismo de cuatro barras. Dicho problema es caracterizado con la rotación definida en el capítulo 1.

En el capítulo 4 se analiza y modela el problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (cuatro puntos de precisión).

En los apéndices B y C los modelos obtenidos en los capítulos 2 y 3 son programados en VISUAL BASIC V6.

Finalmente, se presentan las conclusiones derivadas de este trabajo de tesis, así como un apéndice en el cual se dan las bases sobre análisis de cuerpos rígidos.

# LISTA DE TABLAS Y FIGURAS

- Figura I.1. Subdivisiones de la mecánica clásica.
- Figura I.2. Posición de un punto en el sistema de coordenadas XYZ.
- Figura I.3. Tipos de cadenas cinemáticas.
- Figura I.4. Eslabón localizado en el sistema de referencia XY.
- Figura I.5. Conjunto de eslabones conectados para formar un eslabonamiento.
- Figura I.6. Nomenclatura del mecanismo de cuatro barras.
- Figura I.7. Eslabonamientos de seis barras.
- Figura I.8. Eslabonamiento de cinco barras.
- Figura 2.1. Arquitectura del mecanismo de cinco barras.
- Figura 2.2. Definición de vectores de posición en el  $M_{CB}$ .
- Figura 2.3. Bases locales asociadas con el  $M_{CB}$ .
- Figura 2.4. Definición de desplazamientos angulares.
- Figura 2.5. Configuración deformada.
- Figura 2.6. Bases locales asociadas con el  $M_{CB}$  en la configuración deformada.
- Figura 2.7. Definición de desplazamientos angulares en la configuración deformada.
- Figura 3.1. Caracterización del problema.
- Figura 3.2. Configuraciones de mecanismos.
- Figura 3.3. Asociación de bases locales a los mecanismos.
- Figura 3.4. Ángulos asociados con los pivotes de los mecanismos.
- Figura 4.1. Caracterización del problema.
- Figura 4.2. Configuraciones de mecanismos.
- Figura 4.3. Asociación de bases locales a los mecanismos.
- Figura 4.4. Ángulos asociados con los pivotes de los mecanismos.
- Figura A.1. Desplazamiento de cuerpo rígido.
- Figura A.2. Rotación de ejes coordenados.
- Figura A.3. Movimiento plano general de cuerpo rígido.

Figura A.4. El número complejo  $c = a + ib$ .

Figura A.5. Desplazamiento de un cuerpo rígido.

Figura B.1. Interfase gráfica de la cinemática inversa.

Figura B.2. Interfase gráfica de la cinemática directa.

Figura C.1. Interfase gráfica del problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido.

Tabla I.1. Categorías del movimiento plano de cuerpo rígido.

Tabla I.2. Tipos de eslabones planos.

Tabla I.3. Pares inferiores.

# CAPÍTULO 1

## PARAMETRIZACIÓN DE LAS ROTACIONES RIGIDAS EN EL PLANO

### 1.1. Introducción

En este capítulo se presenta la parametrización de las rotaciones rígidas en el plano, utilizando para este propósito el espacio vectorial de los números complejos. Los resultados obtenidos son aplicados a la modelación cinemática de mecanismos planos de cinco y cuatro barras. El contenido fue extraído de [2] en su totalidad.

### 1.2. El espacio vectorial de los números complejos

En esta parte se definen dos operaciones binarias sobre el conjunto  $\mathfrak{R}^2$ , el cual como es bien sabido, es el conjunto de parejas ordenadas de números reales, una es la operación aditiva  $\oplus : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  común en  $\mathfrak{R}^2$  y la otra una operación multiplicativa  $*$  :  $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ . Se demostrará que, mediante estas operaciones, la pareja  $(\mathfrak{R}^2, \oplus)$  y la terna  $(\mathfrak{R}^2, \oplus, *)$  forman, un grupo aditivo conmutativo y un campo multiplicativo conmutativo, respectivamente. Al utilizar la multiplicación escalar  $\bullet : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  y el producto interno  $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$  usuales, se mostrará que el

conjunto  $(\mathfrak{R}^2, \oplus, *, \bullet, \langle \bullet, \bullet \rangle)$  es un espacio vectorial con producto interno conocido como el conjunto de números complejos. Considere entonces el conjunto  $\mathfrak{R}^2$  sobre el cual serán definidas las operaciones siguientes:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & (a, b) \oplus (\alpha, \beta) = (a + \alpha, b + \beta), \\ \text{ii)} \quad & (a, b) * (\alpha, \beta) = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha), \\ & \forall (a, b), (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

de hecho, la operación  $\oplus : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es la suma usual en  $\mathfrak{R}^2$  y es bien conocido que la pareja  $(\mathfrak{R}^2, \oplus)$  es un grupo aditivo conmutativo. Se mostrará a continuación, un resultado fundamental para los objetivos de este capítulo.

**Teorema 1.1.** La terna  $(\mathfrak{R}^2, \oplus, *)$  es un campo conmutativo.

**Demostración.** Puesto que la pareja  $(\mathfrak{R}^2, \oplus)$  es un grupo aditivo conmutativo, falta únicamente mostrar que  $(\mathfrak{R}^2, *)$  es un grupo multiplicativo conmutativo excepto por la existencia del inverso multiplicativo del elemento nulo aditivo, y que además, la operación aditiva y la multiplicativa satisfacen las correspondientes propiedades distributivas. En efecto, de acuerdo a la conmutatividad de la multiplicación de los números reales, la operación  $* : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es conmutativa, además:

i) La operación  $* : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es asociativa.

En efecto, sean  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathfrak{R}^2$  tal que

$$\mathbf{p} = (a, b), \mathbf{q} = (\alpha, \beta), \mathbf{r} = (c, d), \text{ entonces:}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} * (\mathbf{q} * \mathbf{r}) &= (a, b) * ((\alpha, \beta) * (c, d)) \\ &= (a, b) * (\alpha c - \beta d, \alpha d + \beta c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (a(\alpha c - \beta d) - b(\alpha d + \beta c), a(\alpha d + \beta c) + b(\alpha c - \beta d)) \\
 &= (a\alpha c - a\beta d - b\alpha d - b\beta c, a\alpha d + a\beta c + b\alpha c - b\beta d) \\
 &= ((a\alpha - b\beta)c - (a\beta + b\alpha)d, (a\beta + b\alpha)c + (a\alpha - b\beta)d) \\
 &= (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) * (c, d) \\
 &= ((a, b) * (\alpha, \beta)) * (c, d) \\
 &= (\mathbf{p} * \mathbf{q}) * \mathbf{r}
 \end{aligned}$$

ii) Existe el elemento identidad de la operación multiplicación.

Se sabe que  $\mathbf{I} \in \mathfrak{R}^2$  es la identidad multiplicativa de  $\mathfrak{R}^2$  si y solo si  $\mathbf{I} * \mathbf{p} = \mathbf{p} * \mathbf{I} = \mathbf{p}$ ,  $\forall \mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$ . Por tanto, siendo  $\mathbf{p} = (a, b)$  y  $\mathbf{I} = (\alpha, \beta)$ , entonces,  $\mathbf{I} * \mathbf{p} = \mathbf{p} * \mathbf{I} = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) = (a, b)$ . Esto es,

$$a\alpha - b\beta = a \quad , \quad a\beta + b\alpha = b$$

El elemento identidad multiplicativo de  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$  con respecto a la operación  $*$  :  $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , se obtiene al resolver este último sistema de ecuaciones. Es decir, siendo  $a \neq 0$ , las dos ecuaciones se reducen a:

$$\alpha = \frac{1}{a} (a + b\beta) \quad , \quad a\beta + \frac{b}{a} (a + b\beta) = b$$

Por tanto, de la segunda de estas últimas ecuaciones se obtiene que:

$$(a^2 + b^2) \beta = 0$$

Luego,  $\beta = 0$  y  $\alpha = 1$ . Esto es  $\mathbf{I} = (1, 0)$ .



iii) Existe el elemento inverso en la operación multiplicación.

Se mostrará ahora que, para toda  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$  existe  $\mathbf{p}' \in \mathfrak{R}^2$ , tal que  $\mathbf{p} * \mathbf{p}' = \mathbf{p}' * \mathbf{p} = \mathbf{I}$ .

En efecto, siendo  $\mathbf{p} = (a, b)$  y  $\mathbf{p}' = (\alpha, \beta)$ , entonces,

$$\mathbf{p} * \mathbf{p}' = \mathbf{p}' * \mathbf{p} = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) = (1, 0)$$

Por tanto,

$$a\alpha - b\beta = 1 \quad , \quad a\beta + b\alpha = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene que,

$$\alpha = \frac{1}{a} (1 + b\beta) \quad , \quad a\beta + \frac{b}{a} (1 + b\beta) = 0$$

Esto es,  $(a^2 + b^2)\beta = -b$ , o equivalentemente  $\beta = -\frac{b}{a^2 + b^2}$ . Además,  $\alpha = \frac{a}{a^2 + b^2}$ .

Por tanto, el elemento inverso multiplicativo de  $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2$ , está dado por:

$$\mathbf{p}' = \left( \frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2} \right)$$

iv) Sean ahora  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{q} = (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$ , y  $\mathbf{r} = (c, d) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces las siguientes propiedades distributivas son satisfechas:

$$\mathbf{p} * (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) = \mathbf{p} * \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} * \mathbf{r},$$

$$(\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}) * \mathbf{r} = \mathbf{p} * \mathbf{r} \oplus \mathbf{q} * \mathbf{r}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p} * (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) &= (a, b) * ((\alpha, \beta) \oplus (c, d)) \\
 &= (a, b) * (\alpha + c, \beta + d) \\
 &= (a(\alpha + c) - b(\beta + d), a(\beta + d) + b(\alpha + c)) \\
 &= (a\alpha + ac - b\beta - bd, a\beta + ad + b\alpha + bc) \\
 &= (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha) \oplus (ac - bd, ad + bc) \\
 &= (a, b) * (\alpha, \beta) \oplus (a, b) * (c, d) \\
 &= \mathbf{p} * \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} * \mathbf{r}
 \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}) * \mathbf{r} &= ((a, b) \oplus (\alpha, \beta)) * (c, d) \\
 &= (a + \alpha, b + \beta) * (c, d) \\
 &= ((a + \alpha)c - (b + \beta)d, (a + \alpha)d + (b + \beta)c) \\
 &= (ac + \alpha c - bd - \beta d, ad + \alpha d + bc + \beta c) \\
 &= (ac - bd, ad + bc) \oplus (\alpha c - \beta d, \alpha d + \beta c) \\
 &= (a, b) * (c, d) \oplus (\alpha, \beta) * (c, d) \\
 &= \mathbf{p} * \mathbf{r} \oplus \mathbf{q} * \mathbf{r}
 \end{aligned}$$

■

Es igualmente bien conocido que la operación  $\bullet : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , definida por:

$$\alpha \bullet (a, b) = (\alpha a, \alpha b), \quad \forall \alpha \in \mathfrak{R}, (a, b) \in \mathfrak{R}^2,$$

es una multiplicación escalar y por consecuencia  $\mathfrak{R}^2$  es un espacio vectorial real. Además, con esta multiplicación escalar, el inverso multiplicativo de  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$  puede escribirse de la forma siguiente:

$$\mathbf{p}' = \frac{1}{a^2 + b^2} \bar{\mathbf{p}},$$

donde el elemento  $\bar{\mathbf{p}} = (a, -b) \in \mathfrak{R}^2$  es llamado el conjugado de  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$ . Algunas propiedades de este elemento se presentan en el teorema siguiente:

**Teorema 1.2.** Sea  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$  y  $\mathbf{q} = (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces:

- i)  $\overline{\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}} = \bar{\mathbf{p}} \oplus \bar{\mathbf{q}},$
- ii)  $\overline{\mathbf{p} * \mathbf{q}} = \bar{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{p}},$
- iii)  $\mathbf{p} * \bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{p}} * \mathbf{p} = (a^2 + b^2, 0)$

**Demostración.** Observe primeramente que, de acuerdo con la definición de la operación aditiva en  $\mathfrak{R}^2$  y la correspondiente al conjugado se obtiene que:

$$\overline{\mathbf{p} \oplus \mathbf{q}} = \overline{(a + \alpha, b + \beta)} = (a + \alpha, -b - \beta) = (a, -b) \oplus (\alpha, -\beta) = \bar{\mathbf{p}} \oplus \bar{\mathbf{q}},$$

también,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{p} * \mathbf{q}} &= \overline{(a, b) * (\alpha, \beta)} = \overline{(a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha)} = (a\alpha - b\beta, -a\beta - b\alpha) \\ &= (\alpha, -\beta) * (a, -b) = \bar{\mathbf{q}} * \bar{\mathbf{p}}, \end{aligned}$$

finalmente,

$$\mathbf{p} * \bar{\mathbf{p}} = (a, b) * (a, -b) = (a^2 + b^2, 0) \quad \blacksquare$$

Sean  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$  y  $\mathbf{q} = (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$ , la transformación  $\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$  puede ser definida como:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = a\alpha + b\beta,$$

la cual es un producto interno en  $\mathfrak{R}^2$ , de tal suerte que el conjunto  $\mathcal{C} = (\mathfrak{R}^2, \oplus, *, \bullet, \langle \bullet, \bullet \rangle)$  es un espacio vectorial con producto interno, y la función  $\|\bullet\| : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$  definida por:

$$\|\mathbf{p}\| = \langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle^{1/2}, \forall \mathbf{p} \in \mathfrak{R}^2,$$

es una norma, por tanto  $\mathcal{C}$  es un espacio vectorial normado, y sus elementos son llamados comúnmente números complejos.

**Observación 1.1.** Note que al tomar en cuenta la definición de la operación aditiva, el elemento  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathcal{C}$  puede expresarse como la suma siguiente:

$$\mathbf{p} = (a, b) = (a, 0) \oplus (0, b)$$

Es decir, al definir los subespacios

$$\mathcal{C}_R = \{ (a, 0) : a \in \mathfrak{R} \} \subset \mathfrak{R}^2, \mathcal{C}_V = \{ (0, b) : b \in \mathfrak{R} \} \subset \mathfrak{R}^2,$$

del espacio vectorial de números complejos, éste puede expresarse mediante la siguiente suma directa de subespacios:

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_R \bowtie \mathcal{C}_V = \{ \mathbf{p} \in \mathcal{C} : \mathbf{p} = \mathbf{p}_R \oplus \mathbf{p}_V ; \mathbf{p}_R \in \mathcal{C}_R, \mathbf{p}_V \in \mathcal{C}_V \}$$

También, al definir los isomorfismos  $T_R: \mathcal{C}_R \rightarrow \mathfrak{R}; T_V: \mathcal{C}_V \rightarrow \mathfrak{R}$  por:

$$T_R(a, 0) = a \quad , \quad T_V(0, b) = b,$$

y, siendo  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathcal{C}$ , entonces,

$$\mathbf{p} = T_R^{-1}(a) \oplus T_V^{-1}(b)$$

Al observar finalmente que, siendo  $\mathbf{q} = (\alpha, \beta) \in \mathfrak{R}^2$ ,

$$\bar{\mathbf{p}} * \mathbf{q} \oplus \bar{\mathbf{q}} * \mathbf{p} = 2(a\alpha + b\beta, 0),$$

el producto interno de los elementos  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathfrak{R}^2$  puede expresarse en la siguiente forma:

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{2} T_{\mathbb{R}} \{ \bar{\mathbf{p}} * \mathbf{q} \oplus \bar{\mathbf{q}} * \mathbf{p} \} \quad \blacksquare$$

**Observación 1.2.** Observe que el elemento  $\underline{e}_2 = (0, 1) \in \mathfrak{R}^2$  de la base canónica, satisface lo siguiente:

$$i^2 = \underline{e}_2 * \underline{e}_2 = (0, 1) * (0, 1) = (-1, 0) = T_{\mathbb{R}}^{-1}(-1)$$

Además, siendo  $\mathbf{p} = (a, b)$ , entonces,

$$\mathbf{p} = (a, b) = (a, 0) \oplus b \underline{e}_2 = T_{\mathbb{R}}^{-1}(a) \oplus b \underline{e}_2$$

Estas dos últimas expresiones han sido utilizadas para interpretar los números complejos como la suma de una parte real, mas una parte imaginaria. En realidad el número imaginario  $i$ , comúnmente utilizado en el álgebra compleja, es el vector  $\underline{e}_2$  de la base canónica y la representación algebraicamente correcta de la pareja  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$ , está dada por la última ecuación de esta observación. \blacksquare

### 1.3. Representación paramétrica de las rotaciones

En esta parte se plantea como objetivo el de construir, con la operación  $*$  :  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , estudiada anteriormente, una transformación lineal  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , con  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  fijo, que preserva el producto interno y cuya matriz asociada posea determinante positivo con respecto a la base canónica, con lo cual dicha transformación del parámetro  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ , es una rotación. Se estudiarán también algunas otras representaciones de la rotación antes mencionada.

Sea  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$  fijo, entonces  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  esta definida por:

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} * \mathbf{q} \quad , \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{R}^2 \quad (1.2)$$

Las propiedades de la transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , definida anteriormente, se resumen en los siguientes resultados.

**Teorema 1.3.** La transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida en la ecuación (1.2) es lineal y ortogonal, y el determinante de su matriz asociada es positivo.

**Demostración.** En efecto, siendo  $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ , y de acuerdo con la distributividad de la operación  $*$  :  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \mathbf{p} * (\mathbf{q} \oplus \mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \mathbf{p} * \mathbf{q} \oplus \mathbf{p} * \mathbf{r} \} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \mathbf{p} * \mathbf{q} \} \oplus \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \mathbf{p} * \mathbf{r} \} \\ &= \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \oplus \rho(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \end{aligned}$$

también,  $\forall \alpha \in \mathfrak{R}$ ,

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{p}, \alpha \mathbf{q}) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{ \mathbf{p} * (\alpha \bullet \mathbf{q}) \} \\ &= \frac{\alpha}{\|\mathbf{p}\|} \bullet \{ \mathbf{p} * \mathbf{q} \} \\ &= \alpha \bullet \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})\end{aligned}$$

Además,  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es ortogonal, pues:

$$\begin{aligned}\{ \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \rho(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \} &= \frac{1}{2} \text{TR} \{ \rho(\overline{\mathbf{p}, \mathbf{q}}) * \rho(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \oplus \rho(\overline{\mathbf{p}, \mathbf{r}}) * \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \text{TR} \{ (\overline{\mathbf{p} * \mathbf{q}}) * (\mathbf{p} * \mathbf{r}) \oplus (\overline{\mathbf{p} * \mathbf{r}}) * (\mathbf{p} * \mathbf{q}) \} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} \text{TR} \{ \bar{\mathbf{q}} * (\bar{\mathbf{p}} * \mathbf{p}) * \mathbf{r} \oplus \bar{\mathbf{r}} * (\bar{\mathbf{p}} * \mathbf{p}) * \mathbf{q} \} \\ &= \frac{1}{2} \text{TR} \{ \bar{\mathbf{q}} * \mathbf{r} \oplus \bar{\mathbf{r}} * \mathbf{q} \} \\ &= \{ \mathbf{q}, \mathbf{r} \}\end{aligned}$$

Se mostrará finalmente que el determinante de la matriz asociada con la transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es positivo, en efecto, siendo  $B = \{(1, 0), (0, 1)\} \subset \mathfrak{R}^2$ , la matriz asociada de  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  con respecto a esta base canónica resulta ser,

$$M_{\rho(\mathbf{p}, \bullet)} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

pues,

$$\rho(\mathbf{p}, \underline{e}_1) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a, b) * (1, 0) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a, b),$$

$$\rho(\mathbf{p}, \underline{e}_2) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a, b) * (0, 1) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (-b, a)$$

El resultado buscado se obtiene al observar que  $\det M_{\rho(\mathbf{p}, \bullet)} = 1$ . ■

La transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2) = \{T : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2 : T \text{ es lineal}\}$ , puede ser representada de la manera siguiente:

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a \mathbf{I} + b \mathbf{W}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (b \mathbf{W} - a \mathbf{W}^2),$$

donde  $\mathbf{I} : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  es la transformación identidad y  $\mathbf{W} : \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  esta dada por:

$$\mathbf{W} = -\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1$$

**Demostración.** Observe que:

$$M_{\rho(\mathbf{p}, \bullet)} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} \right\} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \{a \mathbf{I} + b \mathbf{W}\},$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad y la matriz antisimétrica  $\mathbf{W}$  esta dada por:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La segunda igualdad se obtiene al observar que:

$$\mathbf{W}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbf{I} \quad \blacksquare$$



La parte antisimétrica  $\mathbf{W} \in A(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) = \{ \mathbf{B} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : \mathbf{B} = -\mathbf{B}^T \}$  de la demostración anterior, satisface el siguiente resultado:

**Teorema 1.4.** La transformación  $\mathbf{W} \in A(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  es tal que

$$\mathbf{W}^{2n-1} = (-1)^{n-1} \mathbf{W} \quad , \quad \mathbf{W}^{2n} = (-1)^{n-1} \mathbf{W}^2 \quad , \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

**Demostración.** Para demostrar este teorema se procederá por inducción, mostrando primeramente que para  $n = 2$  el resultado es satisfecho. En efecto,

$$\mathbf{W}^3 = \mathbf{W}^2 \mathbf{W} = -\mathbf{I} \mathbf{W} = -\mathbf{W} \quad , \quad \mathbf{W}^4 = \mathbf{W}^3 \mathbf{W} = -\mathbf{W} \mathbf{W} = -\mathbf{W}^2,$$

por tanto para  $n = 2$ , el resultado es obtenido. Suponga ahora que para  $n - 1$  el resultado se satisface, entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{2n-1} &= \mathbf{W}^{2n-2} \mathbf{W} = \mathbf{W}^{2(n-1)} \mathbf{W} = \mathbf{W}^{2(n-1)-1} \mathbf{W}^2 = (-1)^{n-2} \mathbf{W} \mathbf{W}^2 \\ &= (-1)^{n-2} \mathbf{W}^3 = -(-1)^{n-2} \mathbf{W} = (-1)^{n-1} \mathbf{W} \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^{2n} &= \mathbf{W}^{2n-2} \mathbf{W}^2 = \mathbf{W}^{2(n-1)} \mathbf{W}^2 = (-1)^{n-2} \mathbf{W}^2 \mathbf{W}^2 = (-1)^{n-2} \mathbf{W}^4 \\ &= (-1)^{n-2} (-1) \mathbf{W}^2 = (-1)^{n-1} \mathbf{W}^2 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

#### 1.4. Representación exponencial de $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Para interpretar físicamente los parámetros de la rotación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ , se utilizará la geometría del espacio vectorial de los números complejos, presentando el resultado fundamental en el siguiente teorema.

**Teorema 1.5.** Sea  $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$  y  $\mathbf{v} = \rho(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \in \mathfrak{R}^2$ . Entonces el coseno y el seno del ángulo formado por los vectores  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  están dados por:

$$\text{Cos } \theta = \frac{a}{\|\mathbf{p}\|}, \quad \text{Sen } \theta = \pm \frac{b}{\|\mathbf{p}\|}$$

**Demostración.** En efecto, el coseno del ángulo está definido en términos del producto interno del vector  $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^2$  y el vector rotado  $\mathbf{v} = \rho(\mathbf{p}, \mathbf{u}) \in \mathfrak{R}^2$ , esto es:

$$\text{Cos } \theta = \frac{(\mathbf{u}, \rho(\mathbf{p}, \mathbf{u}))}{\|\mathbf{u}\| \|\rho(\mathbf{p}, \mathbf{u})\|}$$

Además, siendo  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$  una rotación, entonces  $\|\mathbf{u}\| = \|\rho(\mathbf{p}, \mathbf{u})\|$ . También,

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{u}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (au_1 - bu_2, au_2 + bu_1),$$

por tanto,

$$(\mathbf{u}, \rho(\mathbf{p}, \mathbf{u})) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (au_1^2 - bu_1u_2, au_2^2 + bu_1u_2) = \frac{a\|\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{p}\|}$$

Esto es,

$$\text{Cos } \theta = \frac{a\|\mathbf{u}\|^2}{\|\mathbf{p}\|\|\mathbf{u}\|^2} = \frac{a}{\|\mathbf{p}\|}$$

Finalmente, de la igualdad  $\text{Cos}^2 \theta + \text{Sen}^2 \theta = 1$  se obtiene que:

$$\text{Sen}^2 \theta = 1 - \text{Cos}^2 \theta = 1 - \frac{a^2}{\|\mathbf{p}\|^2} = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} (\|\mathbf{p}\|^2 - a^2) = \frac{b^2}{\|\mathbf{p}\|^2},$$

por tanto,  $\text{Sen } \theta = \pm \frac{b}{\|\mathbf{p}\|}$  ■

El resultado del teorema anterior permite encontrar la siguiente representación trigonométrica de la rotación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ .

**Corolario 1.1.** La transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  puede ser representada en la forma:

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \text{Cos } \theta \mathbf{I} \pm \text{Sen } \theta \mathbf{W}$$

**Demostración.** De acuerdo al teorema 1.5 se tiene que  $a = \|\mathbf{p}\| \text{Cos } \theta$  y  $b = \pm \|\mathbf{p}\| \text{Sen } \theta$ , entonces,

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, \bullet) &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a \mathbf{I} + b \mathbf{W}) = \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (\|\mathbf{p}\| \text{Cos } \theta \mathbf{I} \pm \|\mathbf{p}\| \text{Sen } \theta \mathbf{W}) \\ &= \text{Cos } \theta \mathbf{I} \pm \text{Sen } \theta \mathbf{W} \end{aligned}$$

**Corolario 1.2.** La transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  es tal que:

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{1}{n!} \mathbf{W}_{\theta}^n$$

**Demostración.** En efecto, como se recordará la transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  puede expresarse de acuerdo con el teorema anterior de la manera:

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \text{Cos } \theta \mathbf{I} \pm \text{Sen } \theta \mathbf{W}$$

Al considerar en esta expresión las expansiones en series de las funciones trigonométricas, esto es,

$$\text{Sen } \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots, \quad \text{Cos } \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

Se obtiene, siendo  $\mathbf{W}_\theta = \theta \mathbf{W}$ , que:

Caso 1.

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, \bullet) &= \text{Cos } \theta \mathbf{I} + \text{Sen } \theta \mathbf{W} \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) \mathbf{I} + \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right) \mathbf{W} \\ &= \mathbf{I} + \theta \mathbf{W} - \frac{\theta^2}{2!} \mathbf{I} - \frac{\theta^3}{3!} \mathbf{W} + \frac{\theta^4}{4!} \mathbf{I} + \frac{\theta^5}{5!} \mathbf{W} - \frac{\theta^6}{6!} \mathbf{I} - \dots \\ &= \mathbf{I} + \theta \mathbf{W} + \frac{\theta^2}{2!} \mathbf{W}^2 + \frac{\theta^3}{3!} \mathbf{W}^3 + \frac{\theta^4}{4!} \mathbf{W}^4 + \frac{\theta^5}{5!} \mathbf{W}^5 + \frac{\theta^6}{6!} \mathbf{W}^6 + \dots \\ &= \mathbf{I} + \mathbf{W}_\theta + \frac{1}{2!} \mathbf{W}_\theta^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{W}_\theta^3 + \frac{1}{4!} \mathbf{W}_\theta^4 + \frac{1}{5!} \mathbf{W}_\theta^5 + \frac{1}{6!} \mathbf{W}_\theta^6 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{W}_\theta^n \end{aligned}$$

Caso 2.

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}, \bullet) &= \text{Cos } \theta \mathbf{I} - \text{Sen } \theta \mathbf{W} \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots\right) \mathbf{I} - \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots\right) \mathbf{W} \\ &= \mathbf{I} - \theta \mathbf{W} - \frac{\theta^2}{2!} \mathbf{I} + \frac{\theta^3}{3!} \mathbf{W} + \frac{\theta^4}{4!} \mathbf{I} - \frac{\theta^5}{5!} \mathbf{W} - \frac{\theta^6}{6!} \mathbf{I} + \dots \\ &= \mathbf{I} - \theta \mathbf{W} + \frac{\theta^2}{2!} \mathbf{W}^2 - \frac{\theta^3}{3!} \mathbf{W}^3 + \frac{\theta^4}{4!} \mathbf{W}^4 - \frac{\theta^5}{5!} \mathbf{W}^5 + \frac{\theta^6}{6!} \mathbf{W}^6 - \dots \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{W}_\theta + \frac{1}{2!} \mathbf{W}_\theta^2 - \frac{1}{3!} \mathbf{W}_\theta^3 + \frac{1}{4!} \mathbf{W}_\theta^4 - \frac{1}{5!} \mathbf{W}_\theta^5 + \frac{1}{6!} \mathbf{W}_\theta^6 - \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \mathbf{W}_\theta^n \end{aligned}$$

**Corolario 1.3.** La transformación  $\rho(\mathbf{p}, \bullet) \in L(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}^2)$  tiene la representación exponencial que se muestra a continuación:

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = e^{\pm \mathbf{w}_\theta}$$

**Demostración.** Se sabe que la definición de la representación exponencial de una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  es,

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}} &= \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 + \frac{1}{4!} \mathbf{A}^4 + \frac{1}{5!} \mathbf{A}^5 + \frac{1}{6!} \mathbf{A}^6 + \frac{1}{7!} \mathbf{A}^7 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n \end{aligned}$$

Luego, del corolario 1.2,

$$\rho(\mathbf{p}, \bullet) = \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n \frac{1}{n!} \mathbf{w}_\theta^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\pm \mathbf{w}_\theta)^n = e^{\pm \mathbf{w}_\theta} \quad \blacksquare$$

**Teorema 1.6.** Sea  $\mathbf{q} = (q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces la siguiente igualdad es satisfecha:

$$\mathbf{q} \times \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{b}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{p}\|^2 \underline{e}_3 = (0, 0, \frac{b}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{p}\|^2)$$

**Demostración.** En efecto,

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \times \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \varepsilon_{ijk} q_j \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k \underline{e}_i = \varepsilon_{3jk} q_j \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k \underline{e}_3 \\ &= (\varepsilon_{31k} q_0 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k + \varepsilon_{32k} q_1 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_k) \underline{e}_3 \\ &= (\varepsilon_{312} q_0 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_2 + \varepsilon_{321} q_1 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_1) \underline{e}_3 \\ &= (q_0 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_2 - q_1 \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q})_1) \underline{e}_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} (a q_0 q_1 + b q_0^2 - a q_0 q_1 + b q_1^2) \underline{e}_3 \\
 &= \frac{b}{\|\mathbf{p}\|} \|\mathbf{p}\|^2 \underline{e}_3 \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Corolario 1.4.** Sea  $\mathbf{q} = (q_0, q_1) \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{p} = (a, b) \in \mathfrak{R}^2$ , entonces:

$$\mathbf{q} \times \rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (0, 0, \pm \text{Sen } \theta \frac{\|\mathbf{q}\|^2}{\|\mathbf{p}\|})$$

**Demostración.** El resultado buscado se obtiene de combinar los teoremas 1.5 y 1.6. ■

El marco teórico aquí definido es utilizado en el capítulo 2 para modelar un mecanismo plano de cinco barras.

# CAPÍTULO 2

## ANÁLISIS DE UN MECANISMO DE CINCO BARRAS

### 2.1. Introducción

En este capítulo se estudia el modelo de posición asociado con un mecanismo plano de cinco barras utilizando para este propósito, el álgebra de números complejos desarrollada y sistematizada en el capítulo 1. El objetivo es encontrar un modelo generalizado que permita analizar mecanismos de este tipo.

### 2.2. Caracterización del mecanismo de cinco barras

En esta sección se caracterizan los elementos y la arquitectura del multicuerpo que será objeto de estudio. La estructura articulada mostrada en la figura 2.1 está compuesta por cinco eslabones rígidos los cuales serán llamados  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $E_4$  y  $T$ . Dichos eslabones están conectados y articulados por juntas del tipo R denominadas  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$ ,  $J_4$  y  $J_4'$ , respectivamente. El multicuerpo se encuentra empotrado con la tierra del sistema ( $T$ ) a través de las articulaciones  $J_1$  y  $J_4'$ , según se muestra en 2.1.

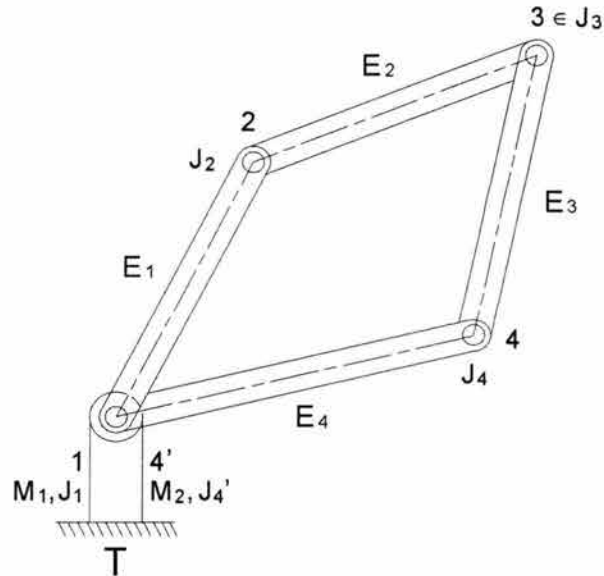


Figura 2.1. Arquitectura del mecanismo de cinco barras

La configuración mostrada en la figura anterior es conocida como cadena cinemática cerrada. Sobre las juntas  $J_1$  y  $J_4'$  se ubican dos actuadores ( $M_1$  y  $M_2$ ) los cuales inducirán el movimiento. Observe también que, al fijar la estructura (llamada " $M_{CB}$ ") en el tiempo, es posible representarla por medio de la siguiente unión:

$$M_{CB} = T \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \quad (2.1)$$

De manera similar, las juntas  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$ ,  $J_4$  y  $J_4'$  que conectan los eslabones  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $E_4$  y  $T$  pueden ser representadas utilizando intersecciones, esto es:

$$J_1 = T \cap E_1 \quad (2.2)$$

$$J_2 = E_1 \cap E_2$$

$$J_3 = E_2 \cap E_3$$

$$J_4 = E_3 \cap E_4$$

$$J_4' = T \cap E_1 \cap E_4$$



Una restricción propia del  $M_{CB}$  es que sus eslabones se consideran rígidos. El punto de interés en este estudio es  $\mathbf{3} \in J_3$  (mostrado en la figura 2.1) puesto que se le considera cinemáticamente admisible.

Suponga que se desea localizar a  $\mathbf{3} \in J_3$  desde el origen  $O$  mostrado en la figura 2.2, entonces para ello, se definen vectores de posición sobre los eslabones:

$$\underline{L}_{2,1} = 2 - 1 \quad (2.3)$$

$$\underline{L}_{3,2} = 3 - 2$$

$$\underline{L}_{3,4} = 3 - 4$$

$$\underline{L}_{4,1} = 4 - 1$$

Sea  $(X, Y)$  un sistema de referencia del movimiento ubicado en el punto  $O$  mostrado en la figura 2.2.

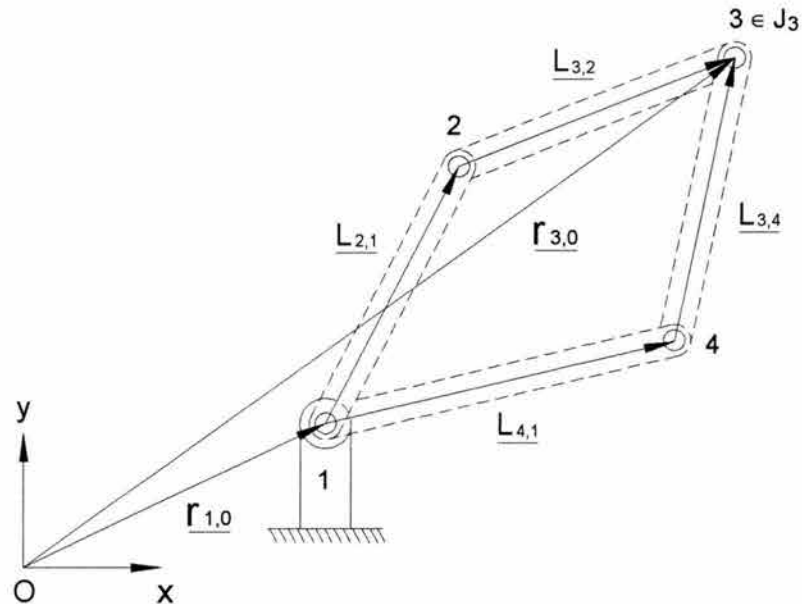


Figura 2.2. Definición de vectores de posición en el  $M_{CB}$

La configuración de la figura anterior es conocida como “de referencia” o “no deformada”. Note que las coordenadas de los puntos  $\mathbf{3}$  y  $\mathbf{1}$  medidas desde  $O$  pueden ser localizadas a través de los siguientes vectores:

$$\underline{r}_{3,0} = 3 - 0 \quad (2.4)$$

$$\underline{r}_{1,0} = 1 - 0$$

### 2.3. Análisis de la configuración no deformada

De acuerdo con la figura 2.2, las coordenadas del punto **3** con respecto de **O** pueden ser determinadas con las expresiones siguientes:

$$\underline{r}_{3,0} = \underline{r}_{1,0} + \underline{L}_{2,1} + \underline{L}_{3,2} \quad (2.5)$$

$$\underline{r}_{3,0} = \underline{r}_{1,0} + \underline{L}_{4,1} + \underline{L}_{3,4}$$

Sobre cada vector de posición asociado con los eslabones  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  y  $E_4$  se definen sistemas de referencia móviles los cuales serán llamados  $\underline{e}_1^I, \underline{e}_2^I, \underline{e}_1^{II}, \underline{e}_2^{II}, \underline{e}_1^{III}, \underline{e}_2^{III}, \underline{e}_1^{IV}, \underline{e}_2^{IV} \in \mathfrak{R}^2$  según se muestra en la figura 2.3.

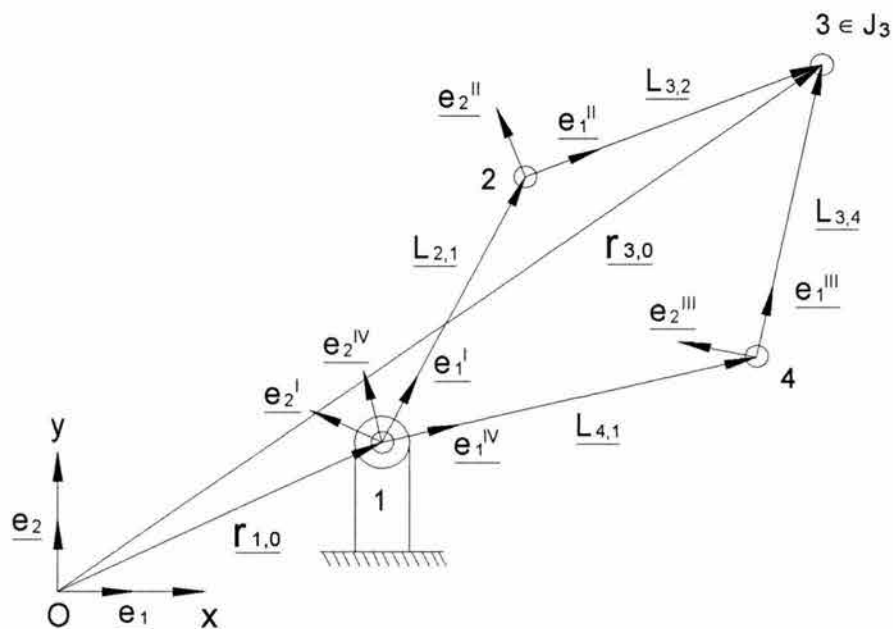


Figura 2.3. Bases locales asociadas con el  $M_{CB}$

Las bases móviles descritas en la figura anterior están fijadas a los eslabones de tal forma que rotan con ellos.

Los vectores  $\underline{L}_{2,1}$ ,  $\underline{L}_{3,2}$ ,  $\underline{L}_{3,4}$ ,  $\underline{L}_{4,1} \in \mathfrak{R}^2$  se pueden representar en términos de las bases móviles, esto es:

$$\begin{aligned}\underline{L}_{2,1} &= l_{2,1} \bullet \underline{e}_1^I & (2.6) \\ \underline{L}_{3,2} &= l_{3,2} \bullet \underline{e}_1^{II} \\ \underline{L}_{3,4} &= l_{3,4} \bullet \underline{e}_1^{III} \\ \underline{L}_{4,1} &= l_{4,1} \bullet \underline{e}_1^{IV}\end{aligned}$$

Aquí,  $l_{2,1}$ ,  $l_{3,2}$ ,  $l_{3,4}$ ,  $l_{4,1} \in \mathfrak{R}^+$  son las dimensiones principales de los eslabones (medidas de junta a junta).

De acuerdo con las expresiones (2.6), las ecuaciones (2.5) adquieren la forma siguiente:

$$\begin{aligned}\underline{r}_{3,0} &= \underline{r}_{1,0} + l_{2,1} \bullet \underline{e}_1^I + l_{3,2} \bullet \underline{e}_1^{II} & (2.7) \\ \underline{r}_{3,0} &= \underline{r}_{1,0} + l_{4,1} \bullet \underline{e}_1^{IV} + l_{3,4} \bullet \underline{e}_1^{III}\end{aligned}$$

Por otro lado, las bases móviles son rotaciones de la base inercial asociada con el punto de referencia O, y pueden ser expresadas en términos de números complejos y por la transformación lineal  $\rho: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}^2$ , esto es:

$$\begin{aligned}\underline{e}_1^I &= \rho(\mathbf{p}, \underline{e}_1) = \mathbf{p} * \underline{e}_1 & (2.8) \\ \underline{e}_1^{II} &= \rho(\mathbf{q}, \underline{e}_1) = \mathbf{q} * \underline{e}_1 \\ \underline{e}_1^{III} &= \rho(\mathbf{r}, \underline{e}_1) = \mathbf{r} * \underline{e}_1 \\ \underline{e}_1^{IV} &= \rho(\mathbf{s}, \underline{e}_1) = \mathbf{s} * \underline{e}_1\end{aligned}$$

Aquí,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{s} \in \mathfrak{R}^2$  son complejos de norma unitaria asociados con las rotaciones de las bases locales.

Al considerar las ecuaciones (2.8), las expresiones (2.7) se pueden escribir en términos de la base canónica como sigue:

$$\begin{aligned}\underline{r}_{3,0} &= \underline{r}_{1,0} + l_{2,1} \cdot \{\mathbf{p} * \underline{e}_1\} + l_{3,2} \cdot \{\mathbf{q} * \underline{e}_1\} \\ \underline{r}_{3,0} &= \underline{r}_{1,0} + l_{4,1} \cdot \{\mathbf{s} * \underline{e}_1\} + l_{3,4} \cdot \{\mathbf{r} * \underline{e}_1\}\end{aligned}\tag{2.9}$$

Los complejos  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{s} \in \mathfrak{R}^2$  son, de acuerdo con el capítulo 1, de norma unitaria, esto es:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p}\|^2 &= p_0^2 + p_1^2 = 1 \\ \|\mathbf{q}\|^2 &= q_0^2 + q_1^2 = 1 \\ \|\mathbf{r}\|^2 &= r_0^2 + r_1^2 = 1 \\ \|\mathbf{s}\|^2 &= s_0^2 + s_1^2 = 1\end{aligned}\tag{2.10}$$

Las relaciones geométricas entre las componentes de los complejos y las rotaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \{p_0, p_1\}; & p_0 &\in \mathfrak{R}, & p_0 &= \text{Cos } \theta_1 \\ & & p_1 &\in \mathfrak{R}, & p_1 &= \pm \text{Sen } \theta_1 \\ \mathbf{q} &= \{q_0, q_1\}; & q_0 &\in \mathfrak{R}, & q_0 &= \text{Cos } \theta_2 \\ & & q_1 &\in \mathfrak{R}, & q_1 &= \pm \text{Sen } \theta_2 \\ \mathbf{r} &= \{r_0, r_1\}; & r_0 &\in \mathfrak{R}, & r_0 &= \text{Cos } \theta_3 \\ & & r_1 &\in \mathfrak{R}, & r_1 &= \pm \text{Sen } \theta_3 \\ \mathbf{s} &= \{s_0, s_1\}; & s_0 &\in \mathfrak{R}, & s_0 &= \text{Cos } \theta_4 \\ & & s_1 &\in \mathfrak{R}, & s_1 &= \pm \text{Sen } \theta_4\end{aligned}\tag{2.11}$$

Los desplazamientos angulares  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4 \in \mathfrak{R}$  se muestran en la figura 2.4.

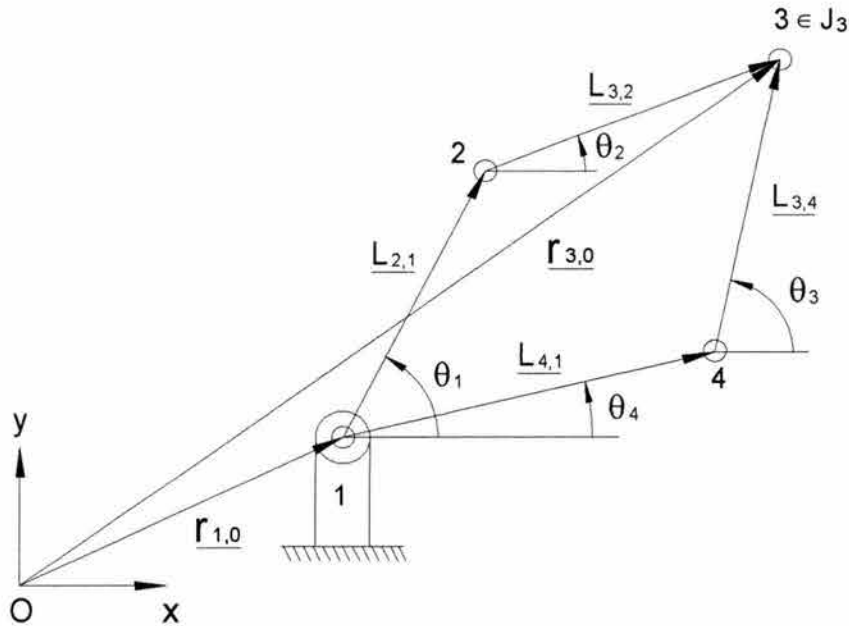


Figura 2.4. Definición de desplazamientos angulares

## 2.4. Planteamiento de los problemas directo e inverso

En esta sección se formulan dos problemas fundamentales en la cinemática: el problema directo y el inverso, para un punto de precisión. Todos asociados con la configuración no deformada del multicuerpo mostrada en la figura 2.4. Se utilizará para estos propósitos las ecuaciones (2.9) y (2.10) descritas anteriormente.

### 2.4.1. Problema directo

Dados,  $\mathbf{p} = \{p_0, p_1\}$ ,  $\mathbf{s} = \{s_0, s_1\}$  con  $\|\mathbf{p}\| = \|\mathbf{s}\| = 1$ ,  $l_{2,1}, l_{3,2}, l_{3,4}, l_{4,1} \in \mathfrak{R}^+$ ,  $\underline{r}_{1,0} \in \mathfrak{R}^2$ , encuentre  $\underline{r}_{3,0} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{q} = \{q_0, q_1\}$ ,  $\mathbf{r} = \{r_0, r_1\}$  tal que la expresión (2.9)<sub>1</sub> o (2.9)<sub>2</sub> sea satisfecha y,

$$\begin{aligned} q_0^2 + q_1^2 &= 1 \\ r_0^2 + r_1^2 &= 1 \end{aligned}$$

## 2.4.2. Problema inverso

Dados,  $\underline{r}_{3,0} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\underline{r}_{1,0} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $l_{2,1}, l_{3,2}, l_{3,4}, l_{4,1} \in \mathfrak{R}^+$ , encuentre  $\mathbf{p} = \{p_0, p_1\}$ ,  $\mathbf{q} = \{q_0, q_1\}$ ,  $\mathbf{r} = \{r_0, r_1\}$ ,  $\mathbf{s} = \{s_0, s_1\}$  tal que las ecuaciones (2.9) sean satisfechas y,

$$p_0^2 + p_1^2 = 1$$

$$q_0^2 + q_1^2 = 1$$

$$r_0^2 + r_1^2 = 1$$

$$s_0^2 + s_1^2 = 1$$

## 2.5. Análisis de la configuración deformada

Considere ahora que el multicuerpo ha sido movido desde la configuración de referencia por los actuadores  $M_1$  y  $M_2$  ubicados en las junta  $J_1$  y  $J_4'$ . La configuración así obtenida es llamada "deformada". El interés ahora es el de construir las ecuaciones de posición para localizar el punto  $\mathbf{3} \in J_3$ , el cual ha sido deformado a través de rotaciones rígidas de los eslabones. La configuración deformada del mecanismo en estudio se muestra en la figura 2.5.

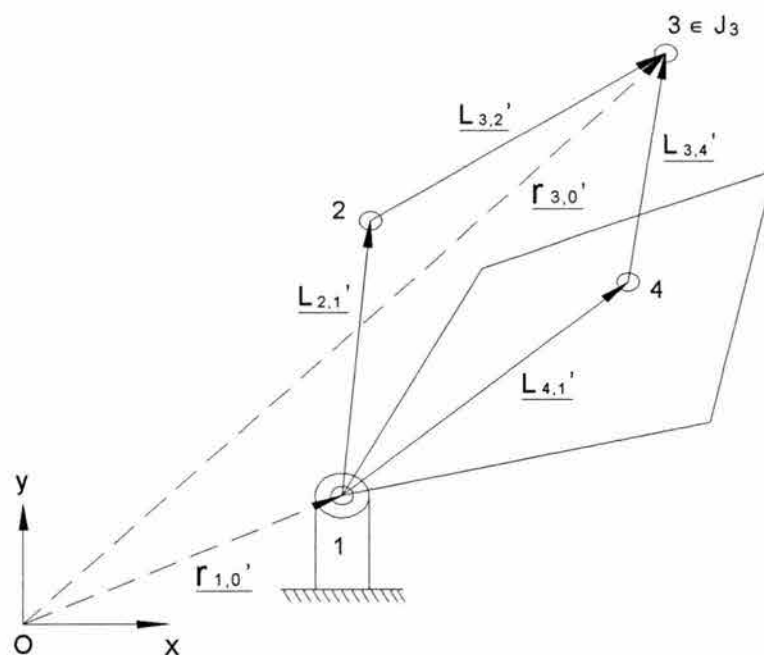


Figura 2.5. Configuración deformada

De acuerdo con la figura anterior, las nuevas coordenadas del punto  $3 \in J_3$  pueden ser determinadas a través de las expresiones siguientes:

$$\underline{r}_{3,0'} = \underline{r}_{1,0'} + \underline{L}_{2,1'} + \underline{L}_{3,2'} \quad (2.12)$$

$$\underline{r}_{3,0'} = \underline{r}_{1,0'} + \underline{L}_{4,1'} + \underline{L}_{3,4'}$$

Aquí,  $\underline{L}_{2,1'}$ ,  $\underline{L}_{3,2'}$ ,  $\underline{L}_{3,4'}$ ,  $\underline{L}_{4,1'}$   $\in \mathfrak{R}^2$  son llamados vectores deformados, y pueden ser expresados en términos de las bases deformadas  $\underline{a}_j^I$ ,  $\underline{a}_j^{II}$ ,  $\underline{a}_j^{III}$ ,  $\underline{a}_j^{IV}$   $\in \mathfrak{R}^2$ , esto es:

$$\underline{L}_{2,1'} = l_{2,1} \cdot \underline{a}_1^I \quad (2.13)$$

$$\underline{L}_{3,2'} = l_{3,2} \cdot \underline{a}_1^{II}$$

$$\underline{L}_{3,4'} = l_{3,4} \cdot \underline{a}_1^{III}$$

$$\underline{L}_{4,1'} = l_{4,1} \cdot \underline{a}_1^{IV}$$

De acuerdo con las ecuaciones (2.13), las expresiones (2.12) pueden ser escritas de la manera siguiente:

$$\underline{r}_{3,0'} = \underline{r}_{1,0'} + l_{2,1} \cdot \underline{a}_1^I + l_{3,2} \cdot \underline{a}_1^{II} \quad (2.14)$$

$$\underline{r}_{3,0'} = \underline{r}_{1,0'} + l_{4,1} \cdot \underline{a}_1^{IV} + l_{3,4} \cdot \underline{a}_1^{III}$$

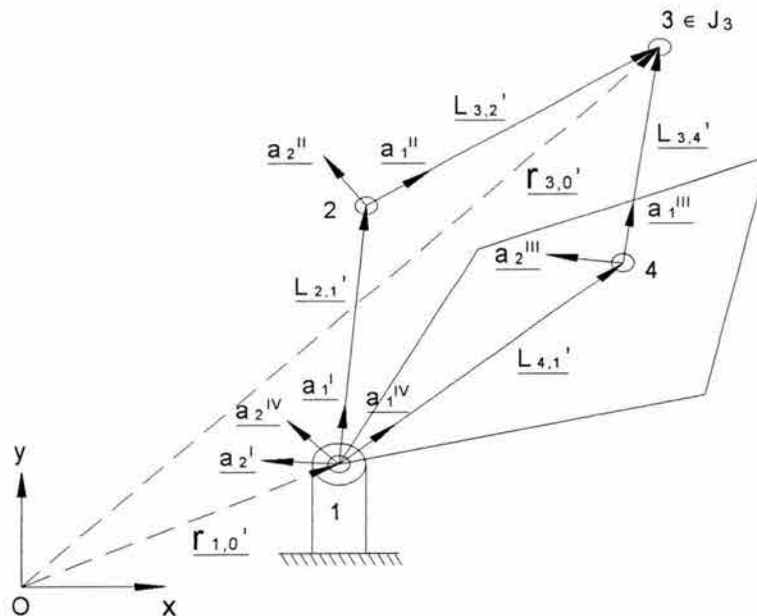


Figura 2.6. Bases locales asociadas con el  $M_{CB}$  en la configuración deformada

Según la figura 2.6, las bases deformadas son rotaciones rígidas de las bases locales  $\underline{e}_1^I, \underline{e}_1^{II}, \underline{e}_1^{III}, \underline{e}_1^{IV} \in \mathfrak{R}^2$  y estas a su vez, son rotaciones de la base canónica localizada en el origen de coordenadas. Dichas rotaciones pueden ser representadas en términos de complejos de norma unitaria:

$$\begin{aligned}\underline{a}_1^I &= \rho(\mathbf{P}, \underline{e}_1^I) = \rho(\mathbf{P}, \rho(\mathbf{p}, \underline{e}_1)) = \mathbf{P} * \mathbf{p} * \underline{e}_1 \\ \underline{a}_1^{II} &= \rho(\mathbf{Q}, \underline{e}_1^{II}) = \rho(\mathbf{Q}, \rho(\mathbf{q}, \underline{e}_1)) = \mathbf{Q} * \mathbf{q} * \underline{e}_1 \\ \underline{a}_1^{III} &= \rho(\mathbf{R}, \underline{e}_1^{III}) = \rho(\mathbf{R}, \rho(\mathbf{r}, \underline{e}_1)) = \mathbf{R} * \mathbf{r} * \underline{e}_1 \\ \underline{a}_1^{IV} &= \rho(\mathbf{S}, \underline{e}_1^{IV}) = \rho(\mathbf{S}, \rho(\mathbf{s}, \underline{e}_1)) = \mathbf{S} * \mathbf{s} * \underline{e}_1\end{aligned}\quad (2.15)$$

Aquí,  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S} \in \mathfrak{R}^2$  son complejos. Las expresiones (2.14) se pueden escribir en términos de la base canónica, esto es:

$$\begin{aligned}\underline{r}_{3,0}' &= \underline{r}_{1,0}' + l_{2,1} \bullet \{\mathbf{P} * \mathbf{p} * \underline{e}_1\} + l_{3,2} \bullet \{\mathbf{Q} * \mathbf{q} * \underline{e}_1\} \\ \underline{r}_{3,0}' &= \underline{r}_{1,0}' + l_{4,1} \bullet \{\mathbf{S} * \mathbf{s} * \underline{e}_1\} + l_{3,4} \bullet \{\mathbf{R} * \mathbf{r} * \underline{e}_1\}\end{aligned}\quad (2.16)$$

Por otro lado, las ecuaciones de norma unitaria de los complejos  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S} \in \mathfrak{R}^2$  son:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{P}\| &= P_0^2 + P_1^2 = 1 \\ \|\mathbf{Q}\| &= Q_0^2 + Q_1^2 = 1 \\ \|\mathbf{R}\| &= R_0^2 + R_1^2 = 1 \\ \|\mathbf{S}\| &= S_0^2 + S_1^2 = 1\end{aligned}\quad (2.17)$$

Finalmente, las relaciones geométricas entre los complejos  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S} \in \mathfrak{R}^2$  de norma unitaria y las rotaciones son las siguientes:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \{P_0, P_1\}; & P_0 &\in \mathfrak{R}, & P_0 &= \text{Cos } \alpha_1 \\ & & P_1 &\in \mathfrak{R}, & P_1 &= \pm \text{Sen } \alpha_1 \\ \mathbf{Q} &= \{Q_0, Q_1\}; & Q_0 &\in \mathfrak{R}, & Q_0 &= \text{Cos } \alpha_2 \\ & & Q_1 &\in \mathfrak{R}, & Q_1 &= \pm \text{Sen } \alpha_2\end{aligned}\quad (2.18)$$



$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} &= \{R_0, R_1\}; & R_0 &\in \mathfrak{R}, & R_0 &= \text{Cos } \alpha_3 \\
 & & R_1 &\in \mathfrak{R}, & R_1 &= \pm \text{Sen } \alpha_3 \\
 \mathbf{S} &= \{S_0, S_1\}; & S_0 &\in \mathfrak{R}, & S_0 &= \text{Cos } \alpha_4 \\
 & & S_1 &\in \mathfrak{R}, & S_1 &= \pm \text{Sen } \alpha_4
 \end{aligned}$$

Los desplazamientos angulares  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathfrak{R}$  se muestran en la figura 2.7.

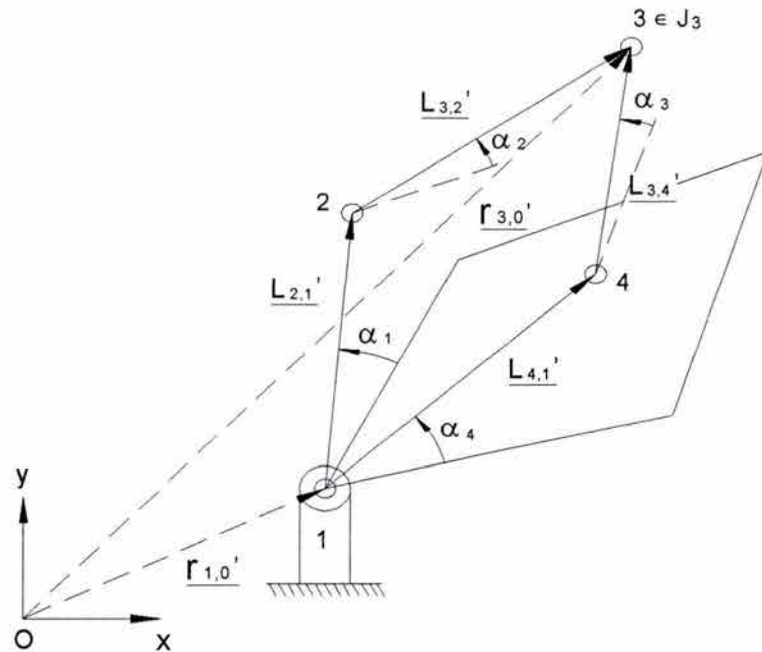


Figura 2.7. Definición de desplazamientos angulares en la configuración deformada

En las secciones 2.5.1 y 2.5.2 se plantean los problemas cinemáticos directo e inverso relacionados con la configuración deformada de la estructura articulada motivo de estudio.

### 2.5.1. Planteamiento del problema directo

Dados,  $\mathbf{P} = \{P_0, P_1\}$ ,  $\mathbf{S} = \{S_0, S_1\}$  con  $\|\mathbf{P}\| = \|\mathbf{S}\| = 1$ ,  $\mathbf{p} = \{p_0, p_1\}$ ,  $\mathbf{q} = \{q_0, q_1\}$ ,  $\mathbf{r} = \{r_0, r_1\}$ ,  $\mathbf{s} = \{s_0, s_1\}$  con  $\|\mathbf{p}\| = \|\mathbf{q}\| = \|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{s}\| = 1$ ,  $l_{2,1}, l_{3,2}, l_{3,4}, l_{4,1} \in \mathfrak{R}^+$ ,  $\underline{r_{1,0}} \in \mathfrak{R}^2$ ,

encuentre  $\underline{r}_{3,0'} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{Q} = \{Q_0, Q_1\}$ ,  $\mathbf{R} = \{R_0, R_1\}$  tal que la expresión (2.16)<sub>1</sub> o (2.16)<sub>2</sub> sea satisfecha y,

$$Q_0^2 + Q_1^2 = 1$$

$$R_0^2 + R_1^2 = 1$$

### 2.5.2. Problema inverso

Dados,  $\underline{r}_{3,0'} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\underline{r}_{1,0'} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\mathbf{p} = \{p_0, p_1\}$ ,  $\mathbf{q} = \{q_0, q_1\}$ ,  $\mathbf{r} = \{r_0, r_1\}$ ,  $\mathbf{s} = \{s_0, s_1\}$  con  $\|\mathbf{p}\| = \|\mathbf{q}\| = \|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{s}\| = 1$ ,  $l_{2,1}, l_{3,2}, l_{3,4}, l_{4,1} \in \mathfrak{R}^+$ , encuentre  $\mathbf{P} = \{P_0, P_1\}$ ,  $\mathbf{Q} = \{Q_0, Q_1\}$ ,  $\mathbf{R} = \{R_0, R_1\}$ ,  $\mathbf{S} = \{S_0, S_1\}$  tal que las ecuaciones (2.16) sean satisfechas y,

$$P_0^2 + P_1^2 = 1$$

$$Q_0^2 + Q_1^2 = 1$$

$$R_0^2 + R_1^2 = 1$$

$$S_0^2 + S_1^2 = 1.$$

## CAPÍTULO 3

### PROBLEMA DE SÍNTESIS PARA CONDUCCIÓN DE CUERPO RÍGIDO (TRES PUNTOS DE PRECISIÓN)

#### 3.1. Introducción

En este capítulo se analiza un problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (tres puntos de precisión) relacionado con un mecanismo plano de cuatro barras. Se asumirán dos tipos de hipótesis que permitirán cuadrar el sistema de ecuaciones resultante;

- 1) El eslabón acoplador es rígido.
- 2) El movimiento del multicuerpo se encuentra restringido dentro de una cierta área de trabajo ( $A_T$ ).

Se utilizará un caso de estudio el cual consiste en transportar una “caja” de banda a banda mediante un mecanismo plano de cuatro barras. La caja deberá pasar por tres puntos prescritos cumpliendo con una orientación fija. A dichos puntos se les conoce como “puntos de precisión”. Con el objeto de construir y plantear el problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido será utilizada el álgebra de complejos desarrollada en el capítulo 1.

### 3.2. Definición y restricciones del problema

Considere el siguiente problema:

“Una banda ( $B_1$ ) transporta una caja “C” del punto “a” al punto “b” como se muestra en la figura 3.1. La caja deberá localizarse en un tiempo  $t \in \mathfrak{R}^+$  en el punto “e” situado en la banda ( $B_2$ ) pasando por un punto intermedio llamado “d”. Se asume que el transporte de “C” de banda a banda será por medio de un mecanismo plano de cuatro barras”.

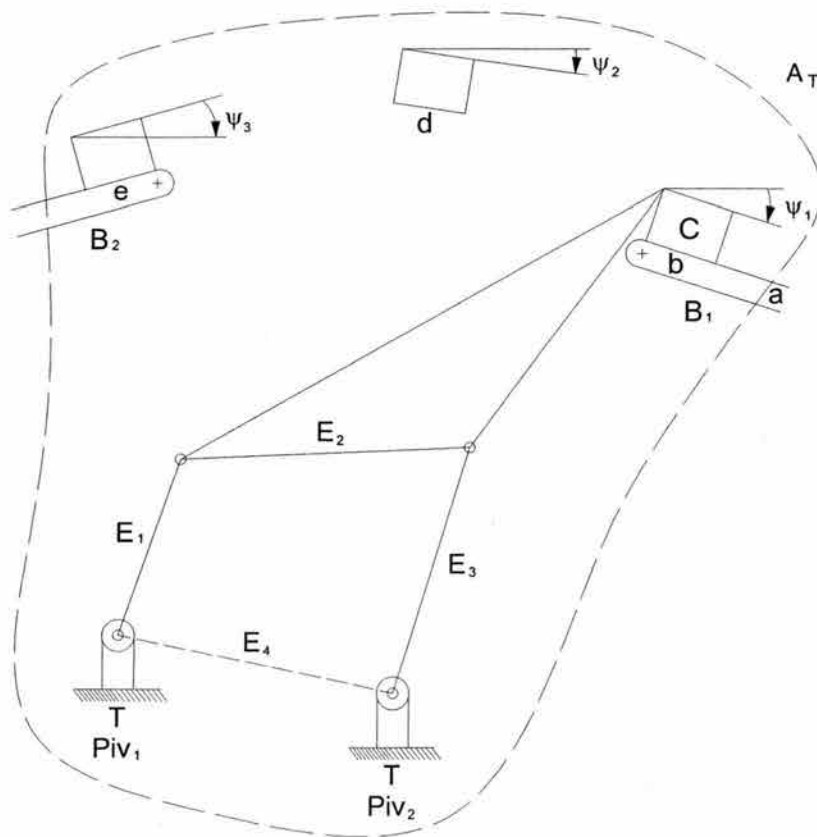


Figura 3.1. Caracterización del problema

La caja “C”, además de pasar por los puntos b, d y e, deberá satisfacer las orientaciones  $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in \mathfrak{R}$  y el área de trabajo.

Las restricciones del problema son:

- 1) Las coordenadas de los pivotes Piv 1 y Piv 2 mostrados en la figura anterior son fijas y conocidas.
- 2) La caja "C" es rígida.
- 3) No se considera el movimiento de las bandas y el análisis se centra en los puntos b, d y e.
- 4) El mecanismo no debe salir del área de trabajo.
- 5) La configuración del eslabón acoplador es arbitraria.
- 6) Las orientaciones del eslabón acoplador deben satisfacer los desplazamientos angulares  $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in \mathfrak{R}$ .

### 3.3. Desarrollo del modelo

En esta parte se construirán las ecuaciones que gobiernan el problema de síntesis asociado con el mecanismo en estudio. Considere la siguiente proposición:

*"Por cada punto de precisión existe un mecanismo plano de cuatro barras con pivotes únicos".*

Las configuraciones de los mecanismos relacionadas con los tres puntos de precisión se muestran en la figura 3.2.

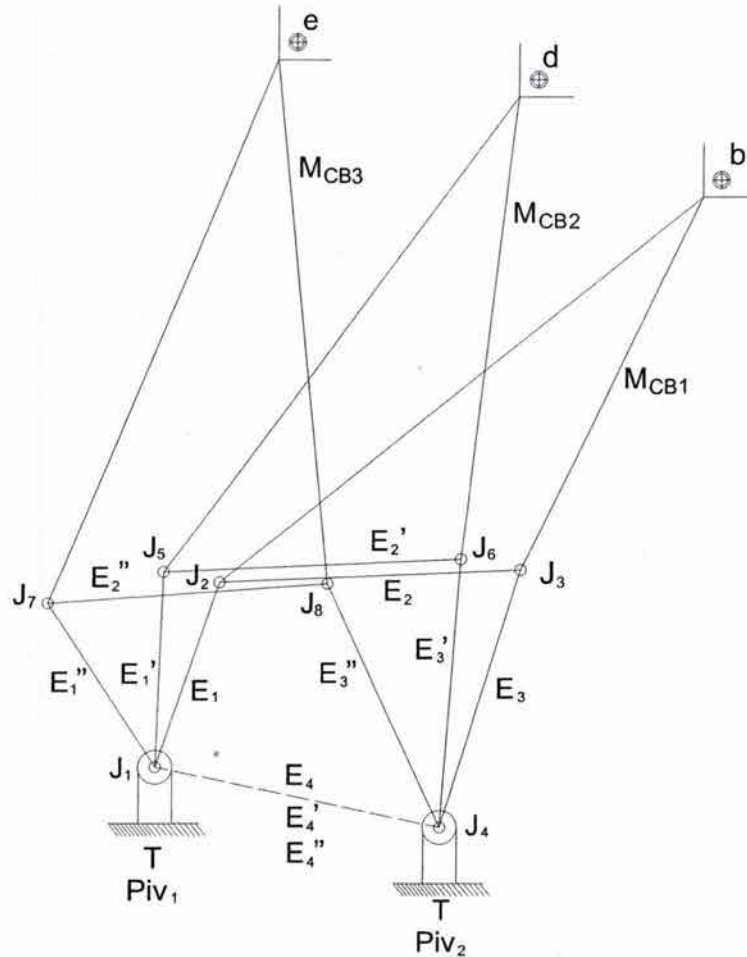


Figura 3.2. Configuraciones de mecanismos

Los multicuerpos  $M_{CB1}$ ,  $M_{CB2}$  y  $M_{CB3}$  se pueden representar, al ser fijados en el tiempo, de la manera siguiente:

$$M_{CB1} = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \quad (3.1)$$

$$M_{CB2} = E_1' \cup E_2' \cup E_3' \cup E_4'$$

$$M_{CB3} = E_1'' \cup E_2'' \cup E_3'' \cup E_4''$$

Igualmente, las juntas que unen a los eslabones pueden ser representadas en términos de intersecciones:

$$\begin{aligned}
 (M_{CB1}) \quad & J_1 = E_1 \cap E_4 \quad , \quad J_2 = E_1 \cap E_2 & (3.2) \\
 & J_3 = E_2 \cap E_3 \quad , \quad J_4 = E_3 \cap E_4 \\
 (M_{CB2}) \quad & J_1' = E_1' \cap E_4' \quad , \quad J_2' = E_1' \cap E_2' \\
 & J_3' = E_2' \cap E_3' \quad , \quad J_4' = E_3' \cap E_4' \\
 (M_{CB3}) \quad & J_1'' = E_1'' \cap E_4'' \quad , \quad J_2'' = E_1'' \cap E_2'' \\
 & J_3'' = E_2'' \cap E_3'' \quad , \quad J_4'' = E_3'' \cap E_4''
 \end{aligned}$$

Aquí,

$$\begin{aligned}
 E_4 &= E_4' = E_4'' & (3.3) \\
 J_1 &= J_1' = J_1'' \\
 J_4 &= J_4' = J_4''
 \end{aligned}$$

Suponga ahora que, sobre cada eslabón se definen vectores de posición, esto es:

$$\begin{aligned}
 (M_{CB1}) \quad & \underline{L}_{2,1} = 2 - 1 \quad , \quad \underline{L}_{b,2} = b - 2 & (3.4) \\
 & \underline{L}_{b,3} = b - 3 \quad , \quad \underline{L}_{3,4} = 3 - 4 \\
 (M_{CB2}) \quad & \underline{L}_{5,1} = 5 - 1 \quad , \quad \underline{L}_{d,5} = d - 5 \\
 & \underline{L}_{d,6} = d - 6 \quad , \quad \underline{L}_{6,4} = 6 - 4 \\
 (M_{CB3}) \quad & \underline{L}_{7,1} = 7 - 1 \quad , \quad \underline{L}_{e,7} = e - 7 \\
 & \underline{L}_{e,8} = e - 8 \quad , \quad \underline{L}_{8,4} = 8 - 4
 \end{aligned}$$

Los vectores de posición que localizan los puntos “d” y “e” desde el punto “b” se definen de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 \underline{r}_{d,b} &= d - b & (3.5) \\
 \underline{r}_{e,b} &= e - b
 \end{aligned}$$

La siguiente consideración es importante:

“Por cada junta rotacional asocie una base local y fije una base canónica sobre el sistema cartesiano”.

En la figura 3.3 se pueden ver las bases móviles asociadas con las configuraciones de los mecanismos.

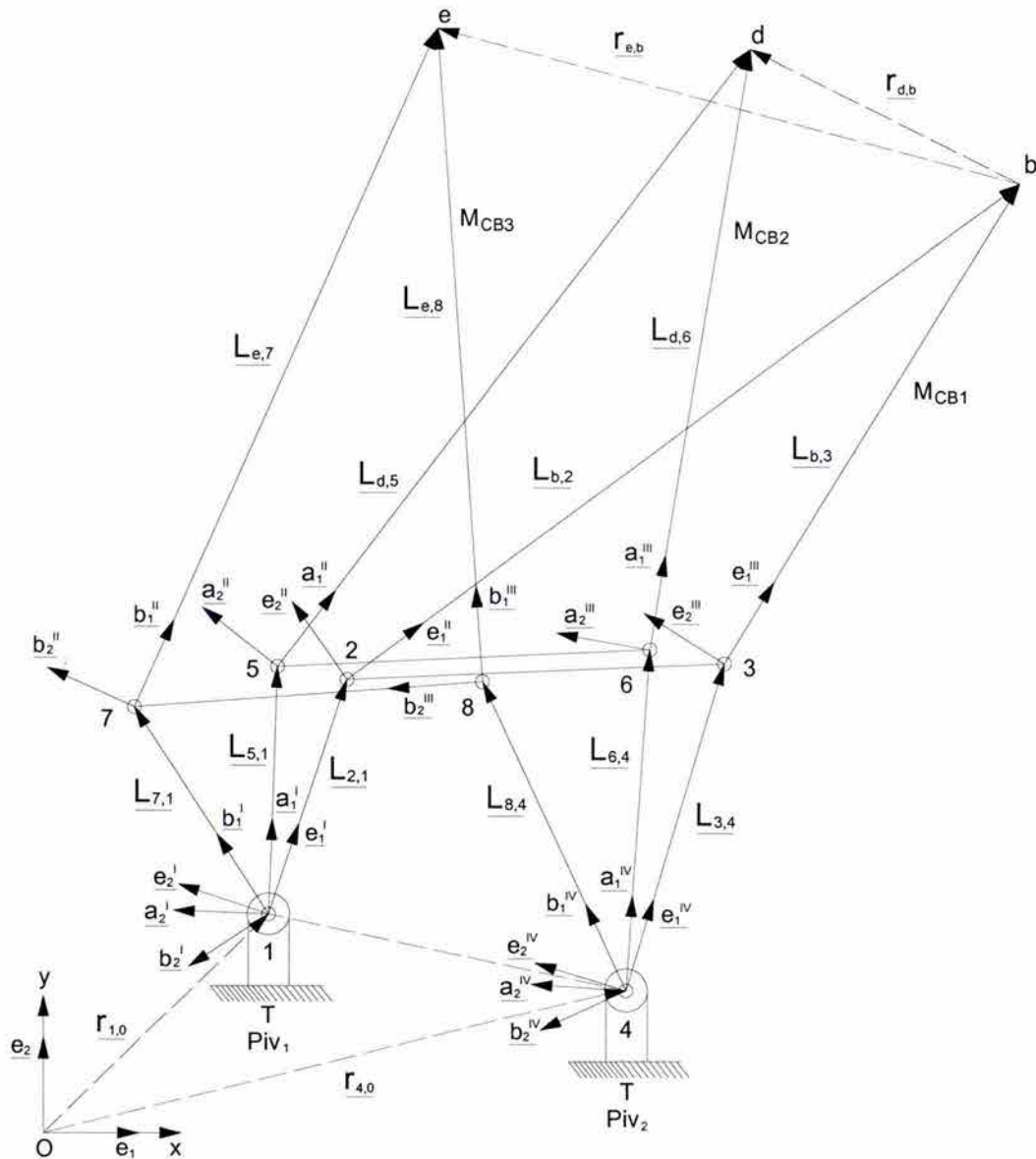


Figura 3.3. Asociación de bases locales a los mecanismos

Por otro lado, las ecuaciones de lazo relacionadas con los pivotes Piv 1 y Piv 2 son las siguientes:



$$(Piv 1) \quad \underline{L}_{2,1} + \underline{L}_{b,2} + \underline{r}_{d,b} = \underline{L}_{5,1} + \underline{L}_{d,5} \quad (3.6)$$

$$\underline{L}_{2,1} + \underline{L}_{b,2} + \underline{r}_{e,b} = \underline{L}_{7,1} + \underline{L}_{e,7}$$

$$(Piv 2) \quad \underline{L}_{3,4} + \underline{L}_{b,3} + \underline{r}_{d,b} = \underline{L}_{6,4} + \underline{L}_{d,6}$$

$$\underline{L}_{3,4} + \underline{L}_{b,3} + \underline{r}_{e,b} = \underline{L}_{8,4} + \underline{L}_{e,8}$$

De acuerdo con la figura 3.3, los vectores de posición se pueden representar en términos de las bases móviles, esto es:

$$(M_{CB1}) \quad \underline{L}_{2,1} = l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^I \quad (3.7)$$

$$\underline{L}_{b,2} = l_{b,2} \cdot \underline{e}_1^{II}$$

$$\underline{L}_{b,3} = l_{b,3} \cdot \underline{e}_1^{III}$$

$$\underline{L}_{3,4} = l_{3,4} \cdot \underline{e}_1^{IV}$$

$$(M_{CB2}) \quad \underline{L}_{5,1} = l_{5,1} \cdot \underline{a}_1^I$$

$$\underline{L}_{d,5} = l_{d,5} \cdot \underline{a}_1^{II}$$

$$\underline{L}_{d,6} = l_{d,6} \cdot \underline{a}_1^{III}$$

$$\underline{L}_{6,4} = l_{6,4} \cdot \underline{a}_1^{IV}$$

$$(M_{CB3}) \quad \underline{L}_{7,1} = l_{7,1} \cdot \underline{b}_1^I$$

$$\underline{L}_{e,7} = l_{e,7} \cdot \underline{b}_1^{II}$$

$$\underline{L}_{e,8} = l_{e,8} \cdot \underline{b}_1^{III}$$

$$\underline{L}_{8,4} = l_{8,4} \cdot \underline{b}_1^{IV}$$

Aquí,  $l_{2,1}, l_{b,2}, l_{b,3}, l_{3,4}, l_{5,1}, l_{d,5}, l_{d,6}, l_{6,4}, l_{7,1}, l_{e,7}, l_{e,8}, l_{8,4} \in \mathfrak{R}^+$  son las longitudes principales (buscadas) de los eslabones las cuales satisfacen las siguientes relaciones:

$$l_{2,1} = l_{5,1} = l_{7,1} \quad (3.8)$$

$$l_{b,2} = l_{d,5} = l_{e,7}$$

$$l_{b,3} = l_{d,6} = l_{e,8}$$

$$l_{3,4} = l_{6,4} = l_{8,4}$$

Al considerar las ecuaciones (3.7) y (3.8) las expresiones (3.6) pueden ser escritas como sigue:

$$\begin{aligned} \text{(Piv 1)} \quad l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^I + l_{b,2} \cdot \underline{e}_1^{II} + \underline{r}_{d,b} &= l_{2,1} \cdot \underline{a}_1^I + l_{b,2} \cdot \underline{a}_1^{II} \\ l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^I + l_{b,2} \cdot \underline{e}_1^{II} + \underline{r}_{e,b} &= l_{2,1} \cdot \underline{b}_1^I + l_{b,2} \cdot \underline{b}_1^{II} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \text{(Piv 2)} \quad l_{3,4} \cdot \underline{e}_1^{IV} + l_{b,3} \cdot \underline{e}_1^{III} + \underline{r}_{d,b} &= l_{3,4} \cdot \underline{a}_1^{IV} + l_{b,3} \cdot \underline{a}_1^{III} \\ l_{3,4} \cdot \underline{e}_1^{IV} + l_{b,3} \cdot \underline{e}_1^{III} + \underline{r}_{e,b} &= l_{3,4} \cdot \underline{b}_1^{IV} + l_{b,3} \cdot \underline{b}_1^{III} \end{aligned}$$

o equivalentemente:

$$\begin{aligned} \text{(Piv 1)} \quad \underline{r}_{d,b} &= l_{2,1} \cdot \underline{a}_1^I + l_{b,2} \cdot \underline{a}_1^{II} - [l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^I + l_{b,2} \cdot \underline{e}_1^{II}] \\ \underline{r}_{e,b} &= l_{2,1} \cdot \underline{b}_1^I + l_{b,2} \cdot \underline{b}_1^{II} - [l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^I + l_{b,2} \cdot \underline{e}_1^{II}] \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \text{(Piv 2)} \quad \underline{r}_{d,b} &= l_{3,4} \cdot \underline{a}_1^{IV} + l_{b,3} \cdot \underline{a}_1^{III} - [l_{3,4} \cdot \underline{e}_1^{IV} + l_{b,3} \cdot \underline{e}_1^{III}] \\ \underline{r}_{e,b} &= l_{3,4} \cdot \underline{b}_1^{IV} + l_{b,3} \cdot \underline{b}_1^{III} - [l_{3,4} \cdot \underline{e}_1^{IV} + l_{b,3} \cdot \underline{e}_1^{III}] \end{aligned}$$

Considere la siguiente afirmación;

“Las bases locales están relacionadas de la siguiente manera:

- 1) Las bases  $\underline{e}_i^I, \underline{e}_i^{II}, \underline{e}_i^{III}, \underline{e}_i^{IV} \in \mathfrak{R}^2$  son rotaciones de la canónica  $\underline{e}_i \in \mathfrak{R}^2$
- 2) Las bases  $\underline{a}_i^I, \underline{a}_i^{II}, \underline{a}_i^{III}, \underline{a}_i^{IV} \in \mathfrak{R}^2$  son rotaciones de las bases  $\underline{e}_i^I, \underline{e}_i^{II}, \underline{e}_i^{III}, \underline{e}_i^{IV} \in \mathfrak{R}^2$
- 3) Las bases  $\underline{b}_i^I, \underline{b}_i^{II}, \underline{b}_i^{III}, \underline{b}_i^{IV} \in \mathfrak{R}^2$  son rotaciones de las bases  $\underline{a}_i^I, \underline{a}_i^{II}, \underline{a}_i^{III}, \underline{a}_i^{IV} \in \mathfrak{R}^2$ .

Las rotaciones de las bases se pueden expresar en términos de números complejos de acuerdo con [2], de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 (M_{CB1}) \quad \underline{e}_1^I &= \rho(\underline{p}, \underline{e}_1) = \underline{p} * \underline{e}_1 & (3.11) \\
 \underline{e}_1^{II} &= \rho(\underline{q}, \underline{e}_1) = \underline{q} * \underline{e}_1 \\
 \underline{e}_1^{III} &= \rho(\underline{r}, \underline{e}_1) = \underline{r} * \underline{e}_1 \\
 \underline{e}_1^{IV} &= \rho(\underline{s}, \underline{e}_1) = \underline{s} * \underline{e}_1 \\
 (M_{CB2}) \quad \underline{a}_1^I &= \rho(\underline{P}, \underline{e}_1^I) = \rho(\underline{P}, \rho(\underline{p}, \underline{e}_1)) = \underline{P} * \underline{p} * \underline{e}_1 \\
 \underline{a}_1^{II} &= \rho(\underline{Q}, \underline{e}_1^{II}) = \rho(\underline{Q}, \rho(\underline{q}, \underline{e}_1)) = \underline{Q} * \underline{q} * \underline{e}_1 \\
 \underline{a}_1^{III} &= \rho(\underline{R}, \underline{e}_1^{III}) = \rho(\underline{R}, \rho(\underline{r}, \underline{e}_1)) = \underline{R} * \underline{r} * \underline{e}_1 \\
 \underline{a}_1^{IV} &= \rho(\underline{S}, \underline{e}_1^{IV}) = \rho(\underline{S}, \rho(\underline{s}, \underline{e}_1)) = \underline{S} * \underline{s} * \underline{e}_1 \\
 (M_{CB3}) \quad \underline{b}_1^I &= \rho(\underline{P}', \underline{a}_1^I) = \rho(\underline{P}', \rho(\underline{P}, \underline{e}_1^I)) = \rho(\underline{P}', \rho(\underline{P}, \rho(\underline{p}, \underline{e}_1))) \\
 &= \underline{P}' * \underline{P} * \underline{p} * \underline{e}_1 \\
 \underline{b}_1^{II} &= \rho(\underline{Q}', \underline{a}_1^{II}) = \rho(\underline{Q}', \rho(\underline{Q}, \underline{e}_1^{II})) = \rho(\underline{Q}', \rho(\underline{Q}, \rho(\underline{q}, \underline{e}_1))) \\
 &= \underline{Q}' * \underline{Q} * \underline{q} * \underline{e}_1 \\
 \underline{b}_1^{III} &= \rho(\underline{R}', \underline{a}_1^{III}) = \rho(\underline{R}', \rho(\underline{R}, \underline{e}_1^{III})) = \rho(\underline{R}', \rho(\underline{R}, \rho(\underline{r}, \underline{e}_1))) \\
 &= \underline{R}' * \underline{R} * \underline{r} * \underline{e}_1 \\
 \underline{b}_1^{IV} &= \rho(\underline{S}', \underline{a}_1^{IV}) = \rho(\underline{S}', \rho(\underline{S}, \underline{e}_1^{IV})) = \rho(\underline{S}', \rho(\underline{S}, \rho(\underline{s}, \underline{e}_1))) \\
 &= \underline{S}' * \underline{S} * \underline{s} * \underline{e}_1
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones (3.10) pueden ser representadas en términos de la base canónica, esto es:

$$\begin{aligned}
 (\text{Piv } 1) \quad \underline{r}_{d,b} &= l_{2,1} \bullet \{ \underline{P} * \underline{p} * \underline{e}_1 \} + l_{b,2} \bullet \{ \underline{Q} * \underline{q} * \underline{e}_1 \} - [ l_{2,1} & (3.12) \\
 &\bullet \{ \underline{p} * \underline{e}_1 \} + l_{b,2} \bullet \{ \underline{q} * \underline{e}_1 \} ] \\
 \underline{r}_{e,b} &= l_{2,1} \bullet \{ \underline{P}' * \underline{P} * \underline{p} * \underline{e}_1 \} + l_{b,2} \bullet \{ \underline{Q}' * \underline{Q} * \underline{q} * \\
 &\underline{e}_1 \} - [ l_{2,1} \bullet \{ \underline{p} * \underline{e}_1 \} + l_{b,2} \bullet \{ \underline{q} * \underline{e}_1 \} ]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(Piv 2)} \quad \underline{r}_{d,b} &= l_{3,4} \bullet \{\mathbf{S} * \mathbf{s} * \underline{e}_1\} + l_{b,3} \bullet \{\mathbf{R} * \mathbf{r} * \underline{e}_1\} - [ l_{3,4} \bullet \\
 &\quad \{\mathbf{s} * \underline{e}_1\} + l_{b,3} \bullet \{\mathbf{r} * \underline{e}_1\} ] \\
 \underline{r}_{e,b} &= l_{3,4} \bullet \{\mathbf{S}' * \mathbf{S} * \mathbf{s} * \underline{e}_1\} + l_{b,3} \bullet \{\mathbf{R}' * \mathbf{R} * \mathbf{r} * \\
 &\quad \underline{e}_1\} - [ l_{3,4} \bullet \{\mathbf{s} * \underline{e}_1\} + l_{b,3} \bullet \{\mathbf{r} * \underline{e}_1\} ]
 \end{aligned}$$

Por otro lado, los complejos  $\mathbf{P}'$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{Q}'$ ,  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{R}'$ ,  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{S}'$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{s} \in \mathfrak{R}^2$  son de norma unitaria; esto es:

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{P}'\| &= \|\mathbf{P}\| = \|\mathbf{p}\| = 1 & (3.13) \\
 \|\mathbf{Q}'\| &= \|\mathbf{Q}\| = \|\mathbf{q}\| = 1 \\
 \|\mathbf{R}'\| &= \|\mathbf{R}\| = \|\mathbf{r}\| = 1 \\
 \|\mathbf{S}'\| &= \|\mathbf{S}\| = \|\mathbf{s}\| = 1
 \end{aligned}$$

Finalmente, las relaciones geométricas entre los complejos y las rotaciones son:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}' &= \{\mathbf{P}'_0, \mathbf{P}'_1\}; & \mathbf{P}'_0 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{P}'_0 &= \text{Cos } \phi_1 & (3.14) \\
 & & \mathbf{P}'_1 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{P}'_1 &= \pm \text{Sen } \phi_1 \\
 \mathbf{Q}' &= \{\mathbf{Q}'_0, \mathbf{Q}'_1\}; & \mathbf{Q}'_0 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{Q}'_0 &= \text{Cos } \phi_2 \\
 & & \mathbf{Q}'_1 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{Q}'_1 &= \pm \text{Sen } \phi_2 \\
 \mathbf{R}' &= \{\mathbf{R}'_0, \mathbf{R}'_1\}; & \mathbf{R}'_0 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{R}'_0 &= \text{Cos } \phi_3 \\
 & & \mathbf{R}'_1 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{R}'_1 &= \pm \text{Sen } \phi_3 \\
 \mathbf{S}' &= \{\mathbf{S}'_0, \mathbf{S}'_1\}; & \mathbf{S}'_0 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{S}'_0 &= \text{Cos } \phi_4 \\
 & & \mathbf{S}'_1 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{S}'_1 &= \pm \text{Sen } \phi_4 \\
 \mathbf{P} &= \{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\}; & \mathbf{P}_0 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{P}_0 &= \text{Cos } \alpha_1 \\
 & & \mathbf{P}_1 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{P}_1 &= \pm \text{Sen } \alpha_1 \\
 \mathbf{Q} &= \{\mathbf{Q}_0, \mathbf{Q}_1\}; & \mathbf{Q}_0 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{Q}_0 &= \text{Cos } \alpha_2 \\
 & & \mathbf{Q}_1 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{Q}_1 &= \pm \text{Sen } \alpha_2 \\
 \mathbf{R} &= \{\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_1\}; & \mathbf{R}_0 &\in \mathfrak{R}, & \mathbf{R}_0 &= \text{Cos } \alpha_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
 & R_1 \in \mathfrak{R}, & R_1 = \pm \text{Sen } \alpha_3 \\
 \mathbf{S} = \{S_0, S_1\}; & S_0 \in \mathfrak{R}, & S_0 = \text{Cos } \alpha_4 \\
 & S_1 \in \mathfrak{R}, & S_1 = \pm \text{Sen } \alpha_4 \\
 \mathbf{p} = \{p_0, p_1\}; & p_0 \in \mathfrak{R}, & p_0 = \text{Cos } \theta_1 \\
 & p_1 \in \mathfrak{R}, & p_1 = \pm \text{Sen } \theta_1 \\
 \mathbf{q} = \{q_0, q_1\}; & q_0 \in \mathfrak{R}, & q_0 = \text{Cos } \theta_2 \\
 & q_1 \in \mathfrak{R}, & q_1 = \pm \text{Sen } \theta_2 \\
 \mathbf{r} = \{r_0, r_1\}; & r_0 \in \mathfrak{R}, & r_0 = \text{Cos } \theta_3 \\
 & r_1 \in \mathfrak{R}, & r_1 = \pm \text{Sen } \theta_3 \\
 \mathbf{S} = \{s_0, s_1\}; & s_0 \in \mathfrak{R}, & s_0 = \text{Cos } \theta_4 \\
 & s_1 \in \mathfrak{R}, & s_1 = \pm \text{Sen } \theta_4
 \end{array}$$

Cabe señalar que, de acuerdo con las expresiones (3.12) y (3.13), el sistema generado es de 20 ecuaciones con 28 incógnitas. Por tanto, es necesario utilizar las restricciones dadas al inicio del presente capítulo, estas son:

- 1) Condición de rigidez del eslabón acoplador.
- 2) Restricción del área de trabajo.

Las consecuencias lógicas de dichas restricciones son las siguientes:

- 1) Si  $\alpha_2, \phi_2 \in \mathfrak{R}$  son conocidos, entonces  $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}' \in \mathfrak{R}^2$  son conocidos.
- 2) Si  $\mathbf{Q}, \mathbf{Q}' \in \mathfrak{R}^2$  son conocidos, entonces  $\mathbf{R}, \mathbf{R}' \in \mathfrak{R}^2$  son conocidos.
- 3)  $\mathbf{P}, \mathbf{P}' \in \mathfrak{R}^2$  y  $\mathbf{S}, \mathbf{S}' \in \mathfrak{R}^2$  son complejos de control en el área de trabajo.

La figura 3.4 muestra los ángulos relacionados con el área de trabajo controlable del mecanismo.

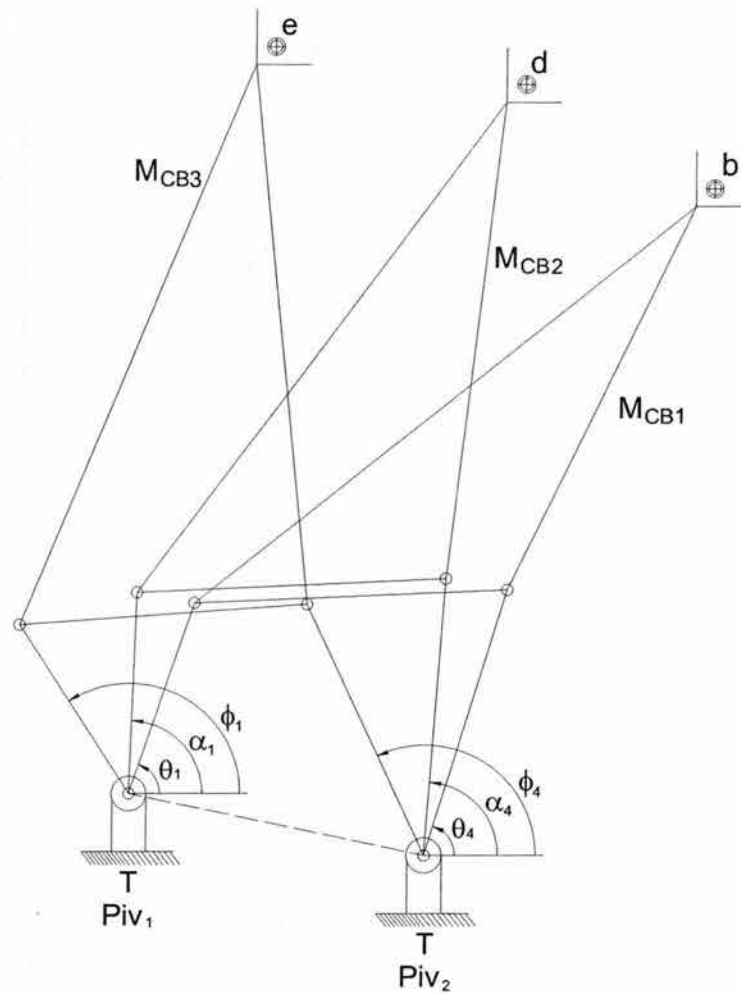


Figura 3.4. Ángulos asociados con los pivotes de los mecanismos

### 3.4. Planteamiento del problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (tres puntos de precisión)

“Dados los puntos de precisión  $r_{d,b} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $r_{e,b} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $(X_{Piv_1}, Y_{Piv_1}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ ,  $(X_{Piv_2}, Y_{Piv_2}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ ,  $\mathbf{P}' = \{P'_0, P'_1\}$ ,  $\mathbf{Q}' = \{Q'_0, Q'_1\}$ ,  $\mathbf{R}' = \{R'_0, R'_1\}$ ,  $\mathbf{S}' = \{S'_0, S'_1\}$ ,  $\mathbf{P} = \{P_0, P_1\}$ ,  $\mathbf{Q} = \{Q_0, Q_1\}$ ,  $\mathbf{R} = \{R_0, R_1\}$ ,  $\mathbf{S} = \{S_0, S_1\}$ , con  $\|\mathbf{P}'\| = \|\mathbf{Q}'\| = \|\mathbf{R}'\| = \|\mathbf{S}'\| = \|\mathbf{P}\| =$

$\| \mathbf{Q} \| = \| \mathbf{R} \| = \| \mathbf{S} \| = 1$ , encuentre  $l_{2,1}, l_{b,2}, l_{b,3}, l_{3,4} \in \mathfrak{R}^+$ ,  $\mathbf{p} = \{p_0, p_1\}$ ,  $\mathbf{q} = \{q_0, q_1\}$ ,  $\mathbf{r} = \{r_0, r_1\}$ ,  $\mathbf{s} = \{s_0, s_1\}$  tal que las expresiones (3.12) sean satisfechas y

$$\begin{aligned} p_0^2 + p_1^2 &= 1 \\ q_0^2 + q_1^2 &= 1 \\ r_0^2 + r_1^2 &= 1 \\ s_0^2 + s_1^2 &= 1'' \end{aligned}$$

El problema arriba escrito forma un sistema de 12 ecuaciones con 12 incógnitas del tipo polinomial no lineal.

Cabe señalar que el problema formulado anteriormente es válido, siempre que las condicionantes de cuerpo rígido y el área de trabajo sean consideradas. Note además, que para cada sistema de números complejos  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S})$  y  $(\mathbf{P}', \mathbf{Q}', \mathbf{R}', \mathbf{S}')$  propuesto, debe encontrarse las dimensiones del mecanismo y los complejos  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$ .

## **C**APÍTULO 4

### **PROBLEMA DE SÍNTESIS PARA CONDUCCIÓN DE CUERPO RÍGIDO (CUATRO PUNTOS DE PRECISIÓN)**

#### **4.1. Introducción**

En este capítulo se analiza un problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (cuatro puntos de precisión) relacionado con un mecanismo plano de cuatro barras. Se usarán, al igual que en el problema modelado en el capítulo 3, las hipótesis siguientes;

- 1) El eslabón acoplador es rígido.
- 2) El movimiento del multicuerpo se encuentra restringido dentro de una cierta área de trabajo ("A<sub>T</sub>").

Se utilizará el mismo caso de estudio analizado en el capítulo 3 ahora con cuatro puntos de precisión y cuatro orientaciones fijas del cuerpo por conducir.



## 4.2. Definición y restricciones del problema

Considere el siguiente problema:

“Una banda ( $B_1$ ) transporta una caja “C” del punto “a” al punto “b” como se muestra en la figura 4.1. La caja deberá localizarse en un tiempo  $t \in \mathcal{R}^+$  en el punto “f” situado en la banda ( $B_2$ ) pasando por dos puntos intermedios llamados “d” y “e”. Se asume que el transporte de “C” de banda a banda será por medio de un mecanismo plano de cuatro barras”.

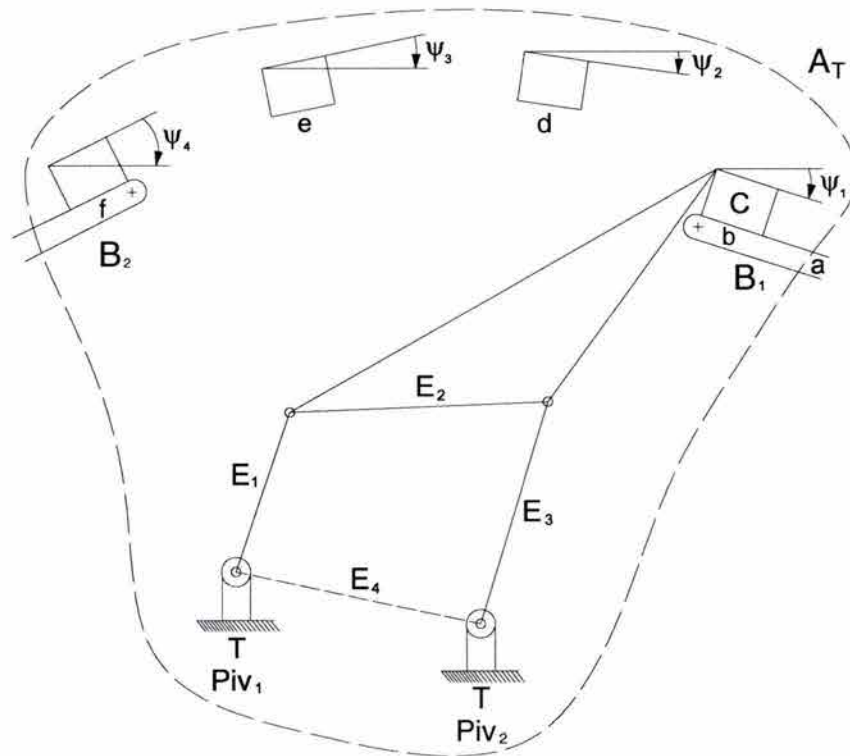


Figura 4.1. Caracterización del problema

La caja “C”, además de pasar por los puntos  $b, d, e$  y  $f$ , deberá satisfacer las orientaciones  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4 \in \mathcal{R}$  y el área de trabajo.

Las restricciones del problema son:

- 1) Las coordenadas de los pivotes Piv 1 y Piv 2 mostrados en la figura anterior son fijas y conocidas.
- 2) La caja "C" es rígida.
- 3) No se considera el movimiento de las bandas y el análisis se centra en los puntos b, d, e y f.
- 4) El mecanismo no debe salir del área de trabajo.
- 5) La configuración del eslabón acoplador es arbitraria.
- 6) Las orientaciones del eslabón acoplador deben satisfacer los desplazamientos angulares  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4 \in \mathfrak{R}$ .

### **4.3. Desarrollo del modelo**

En esta parte se construirán las ecuaciones que gobiernan el problema de síntesis asociado con el mecanismo en estudio.

Al igual que en el problema modelado en el capítulo 3, por cada punto de precisión se asocia un mecanismo plano de cuatro barras o, más bien, una configuración. Tales configuraciones del mecanismo se muestran en la figura 4.2.

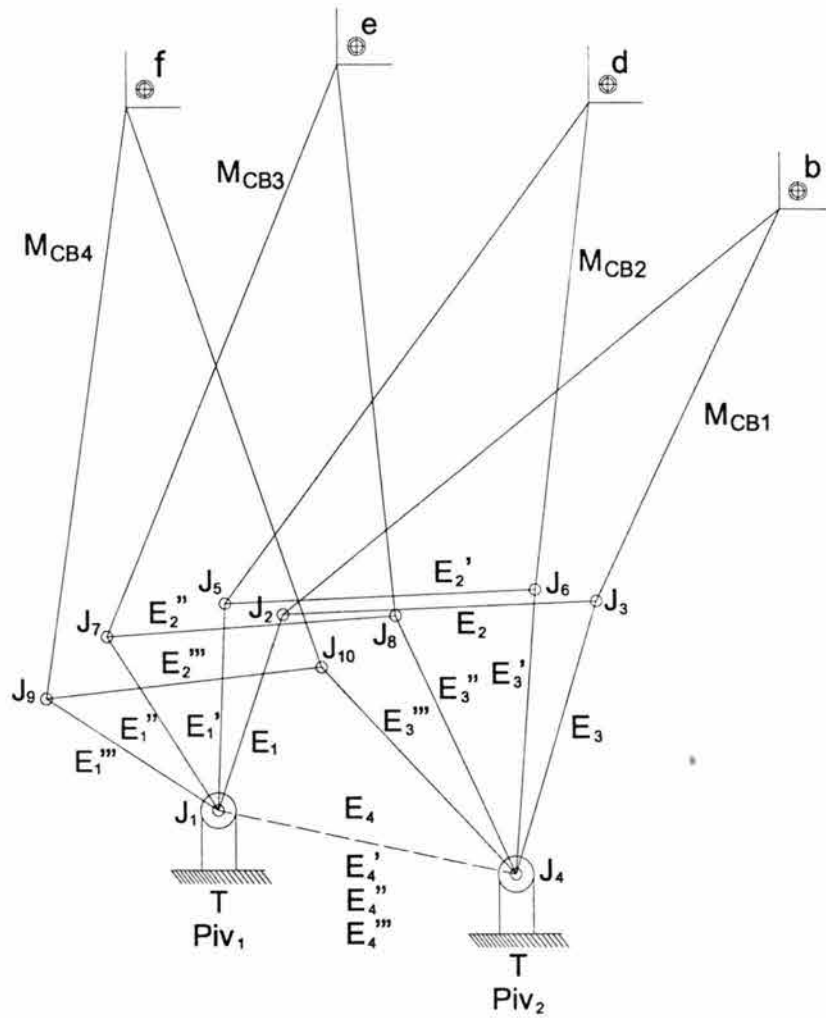


Figura 4.2. Configuraciones de mecanismos

Los multicuerpos  $M_{CB1}$ ,  $M_{CB2}$ ,  $M_{CB3}$  y  $M_{CB4}$  se pueden representar, al ser fijados en el tiempo, de la manera siguiente:

$$M_{CB1} = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \quad (4.1)$$

$$M_{CB2} = E_1' \cup E_2' \cup E_3' \cup E_4'$$

$$M_{CB3} = E_1'' \cup E_2'' \cup E_3'' \cup E_4''$$

$$M_{CB4} = E_1''' \cup E_2''' \cup E_3''' \cup E_4'''$$

Igualmente, las juntas que unen a los eslabones pueden ser representadas en términos de intersecciones:

$$\begin{aligned}
 (M_{CB1}) \quad & J_1 = E_1 \cap E_4 \quad , \quad J_2 = E_1 \cap E_2 & (4.2) \\
 & J_3 = E_2 \cap E_3 \quad , \quad J_4 = E_3 \cap E_4 \\
 (M_{CB2}) \quad & J_1' = E_1' \cap E_4' \quad , \quad J_2' = E_1' \cap E_2' \\
 & J_3' = E_2' \cap E_3' \quad , \quad J_4' = E_3' \cap E_4' \\
 (M_{CB3}) \quad & J_1'' = E_1'' \cap E_4'' \quad , \quad J_2'' = E_1'' \cap E_2'' \\
 & J_3'' = E_2'' \cap E_3'' \quad , \quad J_4'' = E_3'' \cap E_4'' \\
 (M_{CB4}) \quad & J_1''' = E_1''' \cap E_4''' \quad , \quad J_2''' = E_1''' \cap E_2''' \\
 & J_3''' = E_2''' \cap E_3''' \quad , \quad J_4''' = E_3''' \cap E_4'''
 \end{aligned}$$

Aquí,

$$\begin{aligned}
 E_4 = E_4' = E_4'' = E_4''' & & (4.3) \\
 J_1 = J_1' = J_1'' = J_1''' & \\
 J_4 = J_4' = J_4'' = J_4''' &
 \end{aligned}$$

Suponga ahora que, sobre cada eslabón se definen vectores de posición, esto es:

$$\begin{aligned}
 (M_{CB1}) \quad & \underline{L}_{2,1} = 2 - 1 \quad , \quad \underline{L}_{b,2} = b - 2 & (4.4) \\
 & \underline{L}_{b,3} = b - 3 \quad , \quad \underline{L}_{3,4} = 3 - 4 \\
 (M_{CB2}) \quad & \underline{L}_{5,1} = 5 - 1 \quad , \quad \underline{L}_{d,5} = d - 5 \\
 & \underline{L}_{d,6} = d - 6 \quad , \quad \underline{L}_{6,4} = 6 - 4 \\
 (M_{CB3}) \quad & \underline{L}_{7,1} = 7 - 1 \quad , \quad \underline{L}_{e,7} = e - 7 \\
 & \underline{L}_{e,8} = e - 8 \quad , \quad \underline{L}_{8,4} = 8 - 4 \\
 (M_{CB4}) \quad & \underline{L}_{9,1} = 9 - 1 \quad , \quad \underline{L}_{f,9} = f - 9 \\
 & \underline{L}_{f,10} = f - 10 \quad , \quad \underline{L}_{10,4} = 10 - 4
 \end{aligned}$$

Los vectores de posición que localizan los puntos “d”, “e” y “f” desde el punto “b” se definen de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 \underline{r}_{d,b} &= d - b & (4.5) \\
 \underline{r}_{e,b} &= e - b
 \end{aligned}$$

$$\underline{r}_{f,b} = f - b$$

Al igual que en el problema analizado en el capítulo 3, en cada junta rotacional asociada con los mecanismos se define una base local y se fija una base canónica sobre el sistema cartesiano. Dichas bases se muestran en la figura 4.3.

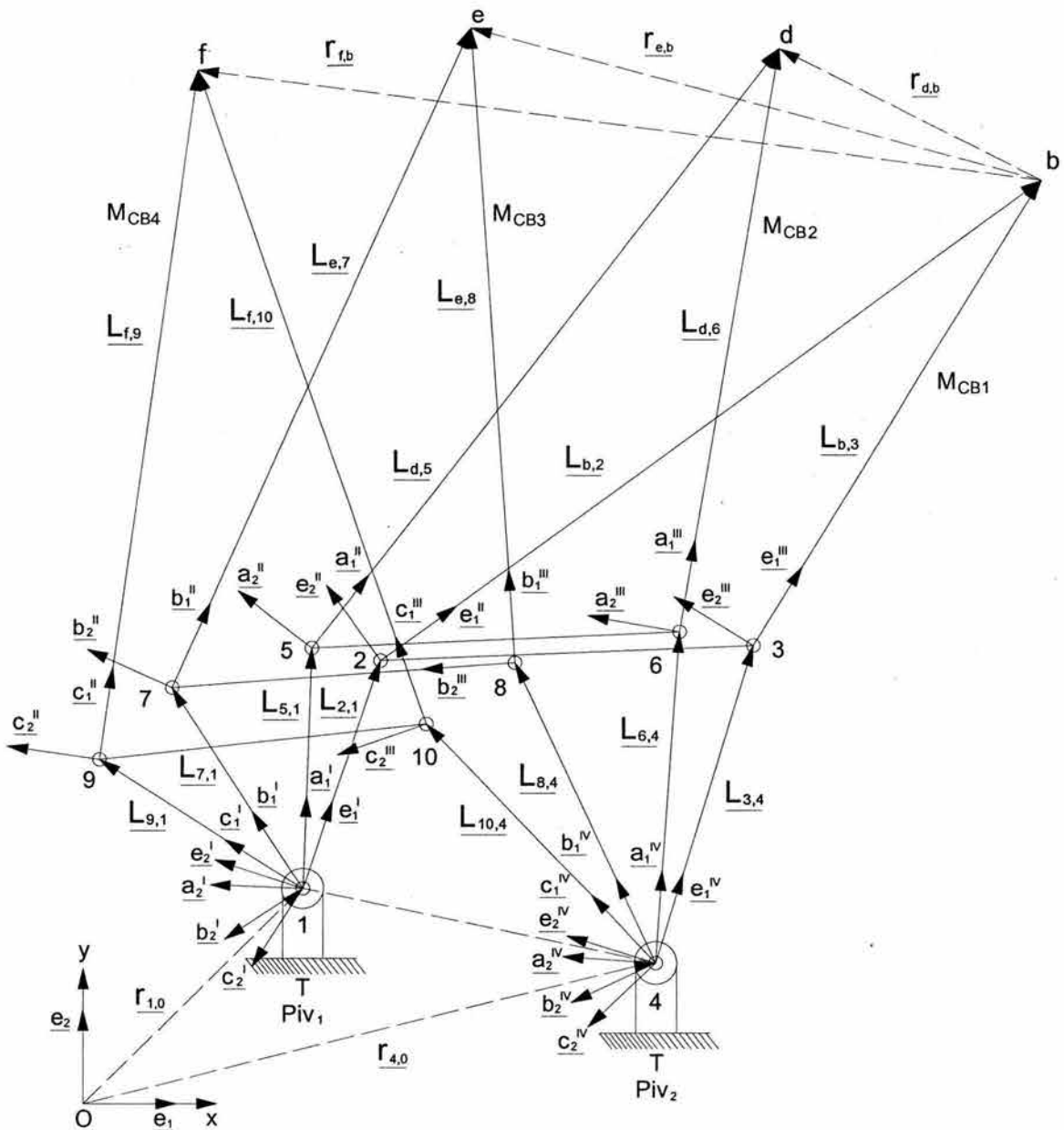


Figura 4.3. Asociación de bases locales a los mecanismos

Por otro lado, las ecuaciones de lazo relacionadas con los pivotes Piv 1 y Piv 2 son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \text{(Piv 1)} \quad & \underline{L}_{2,1} + \underline{L}_{b,2} + \underline{r}_{d,b} = \underline{L}_{5,1} + \underline{L}_{d,5} \\
 & \underline{L}_{2,1} + \underline{L}_{b,2} + \underline{r}_{e,b} = \underline{L}_{7,1} + \underline{L}_{e,7} \\
 & \underline{L}_{2,1} + \underline{L}_{b,2} + \underline{r}_{f,b} = \underline{L}_{9,1} + \underline{L}_{f,9} \\
 \\
 \text{(Piv 2)} \quad & \underline{L}_{3,4} + \underline{L}_{b,3} + \underline{r}_{d,b} = \underline{L}_{6,4} + \underline{L}_{d,6} \\
 & \underline{L}_{3,4} + \underline{L}_{b,3} + \underline{r}_{e,b} = \underline{L}_{8,4} + \underline{L}_{e,8} \\
 & \underline{L}_{3,4} + \underline{L}_{b,3} + \underline{r}_{f,b} = \underline{L}_{10,4} + \underline{L}_{f,10}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

De acuerdo con la figura 4.3, los vectores de posición se pueden representar en términos de las bases móviles, esto es:

$$\begin{aligned}
 \text{(MCB1)} \quad & \underline{L}_{2,1} = l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^I \\
 & \underline{L}_{b,2} = l_{b,2} \cdot \underline{e}_1^{II} \\
 & \underline{L}_{b,3} = l_{b,3} \cdot \underline{e}_1^{III} \\
 & \underline{L}_{3,4} = l_{3,4} \cdot \underline{e}_1^{IV} \\
 \text{(MCB2)} \quad & \underline{L}_{5,1} = l_{5,1} \cdot \underline{a}_1^I \\
 & \underline{L}_{d,5} = l_{d,5} \cdot \underline{a}_1^{II} \\
 & \underline{L}_{d,6} = l_{d,6} \cdot \underline{a}_1^{III} \\
 & \underline{L}_{6,4} = l_{6,4} \cdot \underline{a}_1^{IV} \\
 \text{(MCB3)} \quad & \underline{L}_{7,1} = l_{7,1} \cdot \underline{b}_1^I \\
 & \underline{L}_{e,7} = l_{e,7} \cdot \underline{b}_1^{II} \\
 & \underline{L}_{e,8} = l_{e,8} \cdot \underline{b}_1^{III} \\
 & \underline{L}_{8,4} = l_{8,4} \cdot \underline{b}_1^{IV} \\
 \text{(MCB4)} \quad & \underline{L}_{9,1} = l_{9,1} \cdot \underline{c}_1^I
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\underline{L}_{f,9} &= l_{f,9} \cdot \underline{c}_1^{\text{II}} \\ \underline{L}_{f,10} &= l_{f,10} \cdot \underline{c}_1^{\text{III}} \\ \underline{L}_{10,4} &= l_{10,4} \cdot \underline{c}_1^{\text{IV}}\end{aligned}$$

Aquí,  $l_{2,1}, l_{b,2}, l_{b,3}, l_{3,4}, l_{5,1}, l_{d,5}, l_{d,6}, l_{6,4}, l_{7,1}, l_{e,7}, l_{e,8}, l_{8,4}, l_{9,1}, l_{f,9}, l_{f,10}, l_{10,4} \in \mathfrak{R}^+$  son las longitudes principales (buscadas) de los eslabones las cuales satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}l_{2,1} &= l_{5,1} = l_{7,1} = l_{9,1} \\ l_{b,2} &= l_{d,5} = l_{e,7} = l_{f,9} \\ l_{b,3} &= l_{d,6} = l_{e,8} = l_{f,10} \\ l_{3,4} &= l_{6,4} = l_{8,4} = l_{10,4}\end{aligned}\tag{4.8}$$

Al considerar las ecuaciones (4.7) y (4.8) las expresiones (4.6) pueden ser escritas como sigue:

$$\begin{aligned}(\text{Piv 1}) \quad l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^{\text{I}} + l_{b,2} \cdot \underline{e}_1^{\text{II}} + \underline{r}_{d,b} &= l_{2,1} \cdot \underline{a}_1^{\text{I}} + l_{b,2} \cdot \underline{a}_1^{\text{II}} \\ l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^{\text{I}} + l_{b,2} \cdot \underline{e}_1^{\text{II}} + \underline{r}_{e,b} &= l_{2,1} \cdot \underline{b}_1^{\text{I}} + l_{b,2} \cdot \underline{b}_1^{\text{II}} \\ l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^{\text{I}} + l_{b,2} \cdot \underline{e}_1^{\text{II}} + \underline{r}_{f,b} &= l_{2,1} \cdot \underline{c}_1^{\text{I}} + l_{b,2} \cdot \underline{c}_1^{\text{II}}\end{aligned}\tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}(\text{Piv 2}) \quad l_{3,4} \cdot \underline{e}_1^{\text{IV}} + l_{b,3} \cdot \underline{e}_1^{\text{III}} + \underline{r}_{d,b} &= l_{3,4} \cdot \underline{a}_1^{\text{IV}} + l_{b,3} \cdot \underline{a}_1^{\text{III}} \\ l_{3,4} \cdot \underline{e}_1^{\text{IV}} + l_{b,3} \cdot \underline{e}_1^{\text{III}} + \underline{r}_{e,b} &= l_{3,4} \cdot \underline{b}_1^{\text{IV}} + l_{b,3} \cdot \underline{b}_1^{\text{III}} \\ l_{3,4} \cdot \underline{e}_1^{\text{IV}} + l_{b,3} \cdot \underline{e}_1^{\text{III}} + \underline{r}_{f,b} &= l_{3,4} \cdot \underline{c}_1^{\text{IV}} + l_{b,3} \cdot \underline{c}_1^{\text{III}}\end{aligned}$$

o equivalentemente:

$$\begin{aligned}(\text{Piv 1}) \quad \underline{r}_{d,b} &= l_{2,1} \cdot \underline{a}_1^{\text{I}} + l_{b,2} \cdot \underline{a}_1^{\text{II}} - [l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^{\text{I}} + l_{b,2} \cdot \underline{e}_1^{\text{II}}] \\ \underline{r}_{e,b} &= l_{2,1} \cdot \underline{b}_1^{\text{I}} + l_{b,2} \cdot \underline{b}_1^{\text{II}} - [l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^{\text{I}} + l_{b,2} \cdot \underline{e}_1^{\text{II}}] \\ \underline{r}_{f,b} &= l_{2,1} \cdot \underline{c}_1^{\text{I}} + l_{b,2} \cdot \underline{c}_1^{\text{II}} - [l_{2,1} \cdot \underline{e}_1^{\text{I}} + l_{b,2} \cdot \underline{e}_1^{\text{II}}]\end{aligned}\tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}
 (\text{Piv } 2) \quad \underline{r}_{d,b} &= l_{3,4} \cdot \underline{a}_1^{IV} + l_{b,3} \cdot \underline{a}_1^{III} - [l_{3,4} \cdot \underline{e}_1^{IV} + l_{b,3} \cdot \underline{e}_1^{III}] \\
 \underline{r}_{e,b} &= l_{3,4} \cdot \underline{b}_1^{IV} + l_{b,3} \cdot \underline{b}_1^{III} - [l_{3,4} \cdot \underline{e}_1^{IV} + l_{b,3} \cdot \underline{e}_1^{III}] \\
 \underline{r}_{f,b} &= l_{3,4} \cdot \underline{c}_1^{IV} + l_{b,3} \cdot \underline{c}_1^{III} - [l_{3,4} \cdot \underline{e}_1^{IV} + l_{b,3} \cdot \underline{e}_1^{III}]
 \end{aligned}$$

Considere la siguiente afirmación;

“Las bases locales están relacionadas de la siguiente manera:

- 1) Las bases  $\underline{e}_1^I, \underline{e}_1^{II}, \underline{e}_1^{III}, \underline{e}_1^{IV} \in \mathfrak{R}^2$  son rotaciones de la canónica  $\underline{e}_1 \in \mathfrak{R}^2$
- 2) Las bases  $\underline{a}_1^I, \underline{a}_1^{II}, \underline{a}_1^{III}, \underline{a}_1^{IV} \in \mathfrak{R}^2$  son rotaciones de las bases  $\underline{e}_1^I, \underline{e}_1^{II}, \underline{e}_1^{III}, \underline{e}_1^{IV} \in \mathfrak{R}^2$
- 3) Las bases  $\underline{b}_1^I, \underline{b}_1^{II}, \underline{b}_1^{III}, \underline{b}_1^{IV} \in \mathfrak{R}^2$  son rotaciones de las bases  $\underline{a}_1^I, \underline{a}_1^{II}, \underline{a}_1^{III}, \underline{a}_1^{IV} \in \mathfrak{R}^2$
- 4) Las bases  $\underline{c}_1^I, \underline{c}_1^{II}, \underline{c}_1^{III}, \underline{c}_1^{IV} \in \mathfrak{R}^2$  son rotaciones de las bases  $\underline{b}_1^I, \underline{b}_1^{II}, \underline{b}_1^{III}, \underline{b}_1^{IV} \in \mathfrak{R}^2$ .

Las rotaciones de las bases se pueden expresar en términos de números complejos de acuerdo con [2], de la manera siguiente:

$$(\text{M}_{CB1}) \quad \underline{e}_1^I = \rho(\mathbf{p}, \underline{e}_1) = \mathbf{p} * \underline{e}_1 \quad (4.11)$$

$$\underline{e}_1^{II} = \rho(\mathbf{q}, \underline{e}_1) = \mathbf{q} * \underline{e}_1$$

$$\underline{e}_1^{III} = \rho(\mathbf{r}, \underline{e}_1) = \mathbf{r} * \underline{e}_1$$

$$\underline{e}_1^{IV} = \rho(\mathbf{s}, \underline{e}_1) = \mathbf{s} * \underline{e}_1$$

$$(\text{M}_{CB2}) \quad \underline{a}_1^I = \rho(\mathbf{P}, \underline{e}_1^I) = \rho(\mathbf{P}, \rho(\mathbf{p}, \underline{e}_1)) = \mathbf{P} * \mathbf{p} * \underline{e}_1$$

$$\underline{a}_1^{II} = \rho(\mathbf{Q}, \underline{e}_1^{II}) = \rho(\mathbf{Q}, \rho(\mathbf{q}, \underline{e}_1)) = \mathbf{Q} * \mathbf{q} * \underline{e}_1$$

$$\underline{a}_1^{III} = \rho(\mathbf{R}, \underline{e}_1^{III}) = \rho(\mathbf{R}, \rho(\mathbf{r}, \underline{e}_1)) = \mathbf{R} * \mathbf{r} * \underline{e}_1$$

$$\underline{a}_1^{IV} = \rho(\mathbf{S}, \underline{e}_1^{IV}) = \rho(\mathbf{S}, \rho(\mathbf{s}, \underline{e}_1)) = \mathbf{S} * \mathbf{s} * \underline{e}_1$$

$$(\text{M}_{CB3}) \quad \underline{b}_1^I = \rho(\mathbf{P}', \underline{a}_1^I) = \rho(\mathbf{P}', \rho(\mathbf{P}, \underline{e}_1^I)) = \rho(\mathbf{P}', \rho(\mathbf{P}, \rho(\mathbf{p}, \underline{e}_1)))$$

$$= \mathbf{P}' * \mathbf{P} * \mathbf{p} * \underline{e}_1$$



$$\begin{aligned}
 \underline{b}_1^{II} &= \rho(\mathbf{Q}', \underline{a}_1^{II}) = \rho(\mathbf{Q}', \rho(\mathbf{Q}, \underline{e}_1^{II})) = \rho(\mathbf{Q}', \rho(\mathbf{Q}, \rho(\mathbf{q}, \underline{e}_1))) \\
 &= \mathbf{Q}' * \mathbf{Q} * \mathbf{q} * \underline{e}_1 \\
 \underline{b}_1^{III} &= \rho(\mathbf{R}', \underline{a}_1^{III}) = \rho(\mathbf{R}', \rho(\mathbf{R}, \underline{e}_1^{III})) = \rho(\mathbf{R}', \rho(\mathbf{R}, \rho(\mathbf{r}, \underline{e}_1))) \\
 &= \mathbf{R}' * \mathbf{R} * \mathbf{r} * \underline{e}_1 \\
 \underline{b}_1^{IV} &= \rho(\mathbf{S}', \underline{a}_1^{IV}) = \rho(\mathbf{S}', \rho(\mathbf{S}, \underline{e}_1^{IV})) = \rho(\mathbf{S}', \rho(\mathbf{S}, \rho(\mathbf{s}, \underline{e}_1))) \\
 &= \mathbf{S}' * \mathbf{S} * \mathbf{s} * \underline{e}_1 \\
 \text{(M}_{CB4}\text{)} \quad \underline{c}_1^I &= \rho(\mathbf{P}'', \underline{b}_1^I) = \rho(\mathbf{P}'', \rho(\mathbf{P}', \underline{a}_1^I)) = \rho(\mathbf{P}'', \rho(\mathbf{P}', \rho(\mathbf{P}, \\
 &\quad \rho(\mathbf{p}, \underline{e}_1)))) = \mathbf{P}'' * \mathbf{P}' * \mathbf{P} * \mathbf{p} * \underline{e}_1 \\
 \underline{c}_1^{II} &= \rho(\mathbf{Q}'', \underline{b}_1^{II}) = \rho(\mathbf{Q}'', \rho(\mathbf{Q}', \underline{a}_1^{II})) = \rho(\mathbf{Q}'', \rho(\mathbf{Q}', \rho(\mathbf{Q}, \\
 &\quad \rho(\mathbf{q}, \underline{e}_1)))) = \mathbf{Q}'' * \mathbf{Q}' * \mathbf{Q} * \mathbf{q} * \underline{e}_1 \\
 \underline{c}_1^{III} &= \rho(\mathbf{R}'', \underline{b}_1^{III}) = \rho(\mathbf{R}'', \rho(\mathbf{R}', \underline{a}_1^{III})) = \rho(\mathbf{R}'', \rho(\mathbf{R}', \rho(\mathbf{R}, \\
 &\quad \rho(\mathbf{r}, \underline{e}_1)))) = \mathbf{R}'' * \mathbf{R}' * \mathbf{R} * \mathbf{r} * \underline{e}_1 \\
 \underline{c}_1^{IV} &= \rho(\mathbf{S}'', \underline{b}_1^{IV}) = \rho(\mathbf{S}'', \rho(\mathbf{S}', \underline{a}_1^{IV})) = \rho(\mathbf{S}'', \rho(\mathbf{S}', \rho(\mathbf{S}, \\
 &\quad \rho(\mathbf{s}, \underline{e}_1)))) = \mathbf{S}'' * \mathbf{S}' * \mathbf{S} * \mathbf{s} * \underline{e}_1
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones (4.10) pueden ser representadas en términos de la base canónica, esto es:

$$\begin{aligned}
 \text{(Piv 1)} \quad \underline{r}_{d,b} &= l_{2,1} \cdot \{\mathbf{P} * \mathbf{p} * \underline{e}_1\} + l_{b,2} \cdot \{\mathbf{Q} * \mathbf{q} * \underline{e}_1\} - [ l_{2,1} \cdot \{\mathbf{p} * \underline{e}_1\} + l_{b,2} \cdot \{\mathbf{q} * \underline{e}_1\} ] \\
 \underline{r}_{e,b} &= l_{2,1} \cdot \{\mathbf{P}' * \mathbf{P} * \mathbf{p} * \underline{e}_1\} + l_{b,2} \cdot \{\mathbf{Q}' * \mathbf{Q} * \mathbf{q} * \underline{e}_1\} - [ l_{2,1} \cdot \{\mathbf{p} * \underline{e}_1\} + l_{b,2} \cdot \{\mathbf{q} * \underline{e}_1\} ] \\
 \underline{r}_{f,b} &= l_{2,1} \cdot \{\mathbf{P}'' * \mathbf{P}' * \mathbf{P} * \mathbf{p} * \underline{e}_1\} + l_{b,2} \cdot \{\mathbf{Q}'' * \mathbf{Q}' * \mathbf{Q} * \mathbf{q} * \underline{e}_1\} - [ l_{2,1} \cdot \{\mathbf{p} * \underline{e}_1\} + l_{b,2} \cdot \{\mathbf{q} * \underline{e}_1\} ]
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(Piv 2)} \quad \underline{r}_{d,b} &= l_{3,4} \cdot \{\mathbf{S} * \mathbf{s} * \underline{e}_1\} + l_{b,3} \cdot \{\mathbf{R} * \mathbf{r} * \underline{e}_1\} - [ l_{3,4} \cdot \{\mathbf{s} * \underline{e}_1\} + l_{b,3} \cdot \{\mathbf{r} * \underline{e}_1\} ] \\
 \underline{r}_{e,b} &= l_{3,4} \cdot \{\mathbf{S}' * \mathbf{S} * \mathbf{s} * \underline{e}_1\} + l_{b,3} \cdot \{\mathbf{R}' * \mathbf{R} * \mathbf{r} * \underline{e}_1\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \underline{e}_1 \} - [ l_{3,4} \bullet \{ \underline{s} * \underline{e}_1 \} + l_{b,3} \bullet \{ \underline{r} * \underline{e}_1 \} ] \\ \underline{r}_{f,b} = & l_{3,4} \bullet \{ \underline{S}'' * \underline{S}' * \underline{S} * \underline{s} * \underline{e}_1 \} + l_{b,3} \bullet \{ \underline{R}'' * \underline{R}' * \\ & \underline{R} * \underline{r} * \underline{e}_1 \} - [ l_{3,4} \bullet \{ \underline{s} * \underline{e}_1 \} + l_{b,3} \bullet \{ \underline{r} * \underline{e}_1 \} ] \end{aligned}$$

Por otro lado, los complejos  $\underline{P}''$ ,  $\underline{P}'$ ,  $\underline{P}$ ,  $\underline{p}$ ,  $\underline{Q}''$ ,  $\underline{Q}'$ ,  $\underline{Q}$ ,  $\underline{q}$ ,  $\underline{R}''$ ,  $\underline{R}'$ ,  $\underline{R}$ ,  $\underline{r}$ ,  $\underline{S}''$ ,  $\underline{S}'$ ,  $\underline{S}$ ,  $\underline{s} \in \mathfrak{R}^2$  son de norma unitaria; esto es:

$$\begin{aligned} \|\underline{P}''\| &= \|\underline{P}'\| = \|\underline{P}\| = \|\underline{p}\| = 1 & (4.13) \\ \|\underline{Q}''\| &= \|\underline{Q}'\| = \|\underline{Q}\| = \|\underline{q}\| = 1 \\ \|\underline{R}''\| &= \|\underline{R}'\| = \|\underline{R}\| = \|\underline{r}\| = 1 \\ \|\underline{S}''\| &= \|\underline{S}'\| = \|\underline{S}\| = \|\underline{s}\| = 1 \end{aligned}$$

Finalmente, las relaciones geométricas entre los complejos y las rotaciones son:

$$\begin{aligned} \underline{P}'' &= \{ \underline{P}''_0, \underline{P}''_1 \}; & \underline{P}''_0 \in \mathfrak{R}, & \underline{P}''_0 = \text{Cos } \beta_1 & (4.14) \\ & & \underline{P}''_1 \in \mathfrak{R}, & \underline{P}''_1 = \pm \text{Sen } \beta_1 \\ \underline{Q}'' &= \{ \underline{Q}''_0, \underline{Q}''_1 \}; & \underline{Q}''_0 \in \mathfrak{R}, & \underline{Q}''_0 = \text{Cos } \beta_2 \\ & & \underline{Q}''_1 \in \mathfrak{R}, & \underline{Q}''_1 = \pm \text{Sen } \beta_2 \\ \underline{R}'' &= \{ \underline{R}''_0, \underline{R}''_1 \}; & \underline{R}''_0 \in \mathfrak{R}, & \underline{R}''_0 = \text{Cos } \beta_3 \\ & & \underline{R}''_1 \in \mathfrak{R}, & \underline{R}''_1 = \pm \text{Sen } \beta_3 \\ \underline{S}'' &= \{ \underline{S}''_0, \underline{S}''_1 \}; & \underline{S}''_0 \in \mathfrak{R}, & \underline{S}''_0 = \text{Cos } \beta_4 \\ & & \underline{S}''_1 \in \mathfrak{R}, & \underline{S}''_1 = \pm \text{Sen } \beta_4 \\ \underline{P}' &= \{ \underline{P}'_0, \underline{P}'_1 \}; & \underline{P}'_0 \in \mathfrak{R}, & \underline{P}'_0 = \text{Cos } \phi_1 \\ & & \underline{P}'_1 \in \mathfrak{R}, & \underline{P}'_1 = \pm \text{Sen } \phi_1 \\ \underline{Q}' &= \{ \underline{Q}'_0, \underline{Q}'_1 \}; & \underline{Q}'_0 \in \mathfrak{R}, & \underline{Q}'_0 = \text{Cos } \phi_2 \\ & & \underline{Q}'_1 \in \mathfrak{R}, & \underline{Q}'_1 = \pm \text{Sen } \phi_2 \\ \underline{R}' &= \{ \underline{R}'_0, \underline{R}'_1 \}; & \underline{R}'_0 \in \mathfrak{R}, & \underline{R}'_0 = \text{Cos } \phi_3 \\ & & \underline{R}'_1 \in \mathfrak{R}, & \underline{R}'_1 = \pm \text{Sen } \phi_3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
 \mathbf{S}' = \{S'_0, S'_1\}; & S'_0 \in \mathfrak{R}, & S'_0 = \text{Cos } \phi_4 \\
 & S'_1 \in \mathfrak{R}, & S'_1 = \pm \text{Sen } \phi_4 \\
 \mathbf{P} = \{P_0, P_1\}; & P_0 \in \mathfrak{R}, & P_0 = \text{Cos } \alpha_1 \\
 & P_1 \in \mathfrak{R}, & P_1 = \pm \text{Sen } \alpha_1 \\
 \mathbf{Q} = \{Q_0, Q_1\}; & Q_0 \in \mathfrak{R}, & Q_0 = \text{Cos } \alpha_2 \\
 & Q_1 \in \mathfrak{R}, & Q_1 = \pm \text{Sen } \alpha_2 \\
 \mathbf{R} = \{R_0, R_1\}; & R_0 \in \mathfrak{R}, & R_0 = \text{Cos } \alpha_3 \\
 & R_1 \in \mathfrak{R}, & R_1 = \pm \text{Sen } \alpha_3 \\
 \mathbf{S} = \{S_0, S_1\}; & S_0 \in \mathfrak{R}, & S_0 = \text{Cos } \alpha_4 \\
 & S_1 \in \mathfrak{R}, & S_1 = \pm \text{Sen } \alpha_4 \\
 \mathbf{p} = \{p_0, p_1\}; & p_0 \in \mathfrak{R}, & p_0 = \text{Cos } \theta_1 \\
 & p_1 \in \mathfrak{R}, & p_1 = \pm \text{Sen } \theta_1 \\
 \mathbf{q} = \{q_0, q_1\}; & q_0 \in \mathfrak{R}, & q_0 = \text{Cos } \theta_2 \\
 & q_1 \in \mathfrak{R}, & q_1 = \pm \text{Sen } \theta_2 \\
 \mathbf{r} = \{r_0, r_1\}; & r_0 \in \mathfrak{R}, & r_0 = \text{Cos } \theta_3 \\
 & r_1 \in \mathfrak{R}, & r_1 = \pm \text{Sen } \theta_3 \\
 \mathbf{s} = \{s_0, s_1\}; & s_0 \in \mathfrak{R}, & s_0 = \text{Cos } \theta_4 \\
 & s_1 \in \mathfrak{R}, & s_1 = \pm \text{Sen } \theta_4
 \end{array}$$

Cabe señalar que, de acuerdo con las expresiones (4.12) y (4.13), el sistema generado es de 28 ecuaciones con 38 incógnitas. Por tanto, es necesario utilizar las restricciones dadas al inicio del presente capítulo, estas son:

- 1) Condición de rigidez del eslabón acoplador.
- 2) Restricción del área de trabajo.

Las consecuencias lógicas de dichas restricciones son las siguientes:

- 1) Si  $\phi_2, \beta_2 \in \mathfrak{R}$  son conocidos, entonces  $\mathbf{Q}', \mathbf{Q}'' \in \mathfrak{R}^2$  son conocidos.
- 2) Si  $\mathbf{Q}', \mathbf{Q}'' \in \mathfrak{R}^2$  son conocidos, entonces  $\mathbf{R}', \mathbf{R}'' \in \mathfrak{R}^2$  son conocidos.
- 3)  $\mathbf{P}', \mathbf{P}'' \in \mathfrak{R}^2$  y  $\mathbf{S}', \mathbf{S}'' \in \mathfrak{R}^2$  son complejos de control en el área de trabajo.

La figura 4.4 muestra los ángulos relacionados con el área de trabajo controlable del mecanismo.

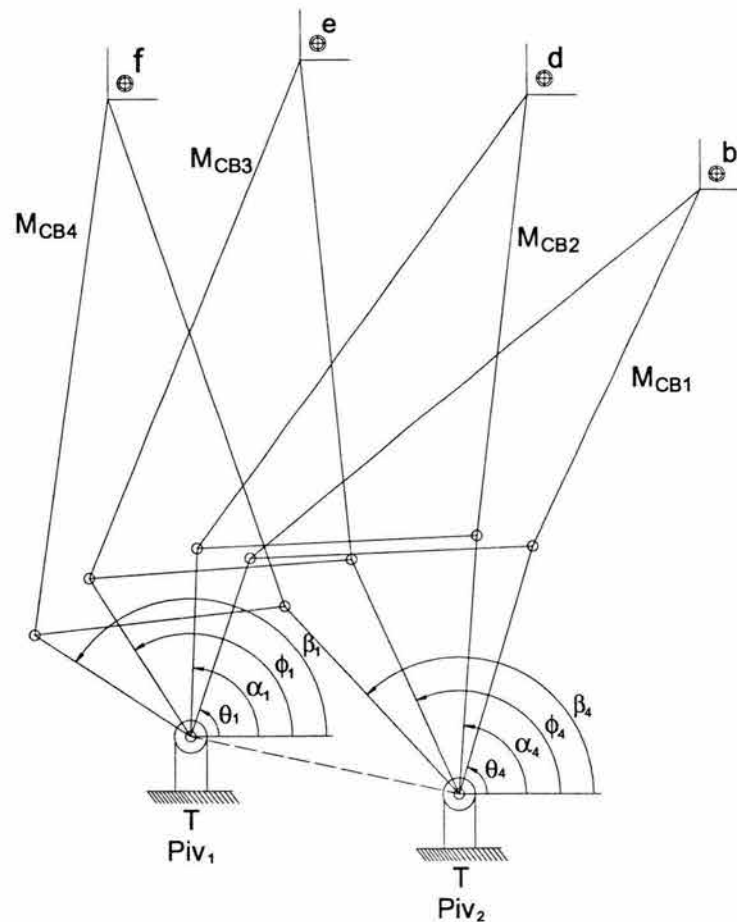


Figura 4.4. Ángulos asociados con los pivotes de los mecanismos

#### 4.4. Planteamiento del problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (cuatro puntos de precisión)

“Dados los puntos de precisión  $\underline{r}_{d,b} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\underline{r}_{e,b} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $\underline{r}_{f,b} \in \mathfrak{R}^2$ ,  $(X_{\text{Piv } 1}, Y_{\text{Piv } 1}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ ,  $(X_{\text{Piv } 2}, Y_{\text{Piv } 2}) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ ,  $\mathbf{P}'' = \{P''_0, P''_1\}$ ,  $\mathbf{Q}'' = \{Q''_0, Q''_1\}$ ,  $\mathbf{R}'' = \{R''_0, R''_1\}$ ,  $\mathbf{S}'' = \{S''_0, S''_1\}$ ,  $\mathbf{P}' = \{P'_0, P'_1\}$ ,  $\mathbf{Q}' = \{Q'_0, Q'_1\}$ ,  $\mathbf{R}' = \{R'_0, R'_1\}$ ,  $\mathbf{S}' = \{S'_0, S'_1\}$ , con  $\|\mathbf{P}''\| = \|\mathbf{Q}''\| = \|\mathbf{R}''\| = \|\mathbf{S}''\| = \|\mathbf{P}'\| = \|\mathbf{Q}'\| = \|\mathbf{R}'\| = \|\mathbf{S}'\| = 1$ , encuentre  $l_{2,1}, l_{b,2}, l_{b,3}, l_{3,4} \in \mathfrak{R}^+$ ,  $\mathbf{P} = \{P_0, P_1\}$ ,  $\mathbf{Q} = \{Q_0, Q_1\}$ ,  $\mathbf{R} = \{R_0, R_1\}$ ,  $\mathbf{S} = \{S_0, S_1\}$ ,  $\mathbf{p} = \{p_0, p_1\}$ ,  $\mathbf{q} = \{q_0, q_1\}$ ,  $\mathbf{r} = \{r_0, r_1\}$ ,  $\mathbf{s} = \{s_0, s_1\}$  tal que las expresiones (4.12) sean satisfechas y

$$\begin{aligned} P_0^2 + P_1^2 &= 1 \\ Q_0^2 + Q_1^2 &= 1 \\ R_0^2 + R_1^2 &= 1 \\ S_0^2 + S_1^2 &= 1 \\ p_0^2 + p_1^2 &= 1 \\ q_0^2 + q_1^2 &= 1 \\ r_0^2 + r_1^2 &= 1 \\ s_0^2 + s_1^2 &= 1". \end{aligned}$$

El problema arriba escrito forma un sistema de 20 ecuaciones con 20 incógnitas del tipo polinomial no lineal.

Al igual que en el problema de síntesis analizado en el capítulo 3, el modelo para cuatro puntos de precisión es válido siempre que las condicionantes de cuerpo rígido y el área de trabajo sean consideradas. Note además, que para cada sistema de números complejos  $(\mathbf{P}', \mathbf{Q}', \mathbf{R}', \mathbf{S}')$  y  $(\mathbf{P}'', \mathbf{Q}'', \mathbf{R}'', \mathbf{S}'')$  propuesto, debe encontrarse las dimensiones del mecanismo, y los complejos  $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}, \mathbf{s})$  y  $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S})$ .

# APÉNDICE A

## ANÁLISIS DE CUERPO RÍGIDO

### A.1. Hipótesis fundamental de cuerpo rígido

Un cuerpo rígido es aquel que bajo cualquier movimiento conserva inalterable la distancia entre dos cualesquiera de sus puntos. De acuerdo con la figura A.1, si se llama  $\underline{r}_{A,B}$  y  $\underline{r}_{A,B}'$  al vector que une los puntos “A” y “B” de un cuerpo rígido antes y después de que éste experimente un desplazamiento, respectivamente, entonces:

$$\| \underline{r}_{A,B} \| = \| \underline{r}_{A,B}' \|$$

Considere ahora que  $\underline{a}_1$ ,  $\underline{a}_2$ ,  $\underline{b}_1$  y  $\underline{b}_2$  son los vectores de posición de “A” y de “B” antes y después del desplazamiento, respectivamente, entonces:

$$\| \underline{a}_2 - \underline{b}_2 \| = \| \underline{a}_1 - \underline{b}_1 \|$$

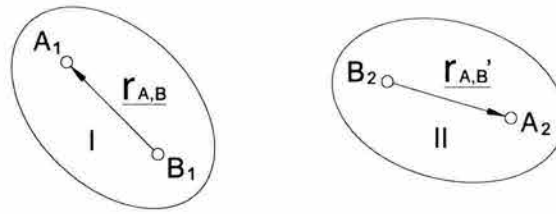


Figura A.1. Desplazamiento de cuerpo rígido

### A.2. Movimiento plano de un cuerpo rígido

Un cuerpo rígido se encuentra en movimiento plano cuando todos sus puntos describen trayectorias contenidas en un plano fijo. Suponga el caso de un cuerpo rígido sometido a movimiento plano y en el cual se fijan los ejes  $XY$ . Si se le aplica a este cuerpo una rotación de  $+\theta^\circ$  alrededor de un eje perpendicular al plano  $XY$ , los ejes pasarán de la posición  $X_1Y_1$  a la posición  $X_2Y_2$  como se muestra en la figura A.2.

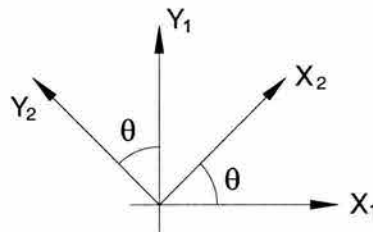


Figura A.2. Rotación de ejes coordenados

De la figura anterior se deducen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \underline{X}_2 &= \text{Cos } \theta \underline{X}_1 + \text{Sen } \theta \underline{Y}_1, \\ \underline{Y}_2 &= -\text{Sen } \theta \underline{X}_1 + \text{Cos } \theta \underline{Y}_1 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Aquí,  $\underline{X}_i$ ,  $\underline{Y}_i$  son vectores unitarios paralelos a los ejes  $X_i$ ,  $Y_i$ , respectivamente.

Por otro lado, según [21, 29] la representación matricial de una transformación lineal, respecto a una base vectorial B es una matriz cuya i-ésima columna contiene los componentes de la imagen del i-ésimo vector de la base, bajo la transformación en cuestión, referida (esa imagen) a la base B.

Luego, la transformación A.1 tiene la siguiente representación matricial, en la base  $X_1Y_1$ :

$$[Q]_1 = \begin{bmatrix} \text{Cos } \theta & -\text{Sen } \theta \\ \text{Sen } \theta & \text{Cos } \theta \end{bmatrix}$$

De hecho, [29] dice que una aplicación lineal  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una rotación si su matriz asociada se puede escribir en la forma que muestra  $[Q]_1$ . Una propiedad importante de  $[Q]_1$  es su ortogonalidad, es decir, su inversa es idéntica a su traspuesta.

Considere ahora que el cuerpo (al que se han fijado los ejes XY) experimenta un desplazamiento tal que el origen del sistema de referencia O permanece fijo. Entonces, cualquier punto "A" del cuerpo, bajo una rotación  $+\theta^\circ$  pasa a la posición "A'". Sean  $\underline{a}_1$  y  $\underline{a}_2$  los vectores de posición de "A" y "A'", respectivamente, ambos referidos a la misma base  $X_1Y_1$ , se tiene que:

$$[\underline{a}_2]_1 = [Q]_1 [\underline{a}_1]_1, \tag{A.2}$$

es una expresión que determina la posición de un punto dado del cuerpo rígido al final de una rotación.

En efecto, siendo  $(\alpha, \beta)$  las coordenadas de "A" con respecto a la base  $X_1Y_1$ , esto es,

$$\underline{a}_1 = \alpha \underline{X}_1 + \beta \underline{Y}_1,$$



entonces,

$$Q \underline{a}_1 = \alpha (Q \underline{X}_1) + \beta (Q \underline{Y}_1) = \alpha \underline{X}_2 + \beta \underline{Y}_2,$$

de las ecuaciones A.1 se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \underline{a}_2 = Q \underline{a}_1 &= \alpha (\text{Cos } \theta \underline{X}_1 + \text{Sen } \theta \underline{Y}_1) + \beta (-\text{Sen } \theta \underline{X}_1 + \text{Cos } \theta \underline{Y}_1) \\ &= (\alpha \text{Cos } \theta - \beta \text{Sen } \theta) \underline{X}_1 + (\alpha \text{Sen } \theta + \beta \text{Cos } \theta) \underline{Y}_1, \end{aligned}$$

finalmente,

$$[\underline{a}_2]_1 = \begin{bmatrix} \alpha \text{Cos } \theta & -\beta \text{Sen } \theta \\ \alpha \text{Sen } \theta & \beta \text{Cos } \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Cos } \theta & -\text{Sen } \theta \\ \text{Sen } \theta & \text{Cos } \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = [Q]_1 [\underline{a}_1]_1$$

### A.3. Velocidad y aceleración de los puntos de un cuerpo rígido que gira alrededor de un punto

Considere nuevamente el cuerpo rígido mostrado en la figura A.1 el cual experimenta un desplazamiento tal que uno de sus puntos O permanece fijo. La posición de un punto cualquiera "A" al cabo de la rotación Q, dada por la ecuación A.2 es función de  $[Q]_1$  y de  $[\underline{a}_1]_1$ . Derivando ambos miembros de A.2 con respecto a  $t$ , se obtiene  $[\dot{\underline{a}}_2]_1$ , la velocidad de "A" referida a  $X_1Y_1$ , esto es,

$$[\dot{\underline{a}}_2]_1 = [\dot{Q}]_1 [\underline{a}_1]_1 \tag{A.3}$$

Note de la expresión A.3 que  $[\dot{\underline{a}}_2]_1$  está dada en términos de  $[\underline{a}_1]_1$ , el vector de posición original de "A".

Por otro lado, al hacer una medición de una variable lo que se obtiene es el valor instantáneo de esta, y no sus valores pasados, es conveniente expresar  $[\dot{\underline{a}}_2]_1$  como una función del vector de posición actual de "A",  $[\underline{a}_2]_1$ ; pero de la ecuación A.2 y del hecho de que Q es ortogonal, se obtiene el siguiente resultado:

$$[\underline{a}_1]_1 = [Q^T]_1 [\underline{a}_2]_1, \quad (A.4)$$

sustituyendo la expresión A.4 en A.3,

$$[\dot{\underline{a}}_2]_1 = [\dot{Q}]_1 [Q^T]_1 [\underline{a}_2]_1 = [\Omega]_1 [\underline{a}_2]_1, \quad (A.5)$$

donde  $[\Omega]_1$  es la matriz de velocidad angular del cuerpo rígido. Es claro que:

$$[\Omega]_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

Derivando los miembros de la ecuación A.5 con respecto a  $t$ , se obtiene  $[\ddot{\underline{a}}_2]_1$ , la aceleración de "A", con respecto a  $X_1Y_1$ , esto es,

$$[\ddot{\underline{a}}_2]_1 = [\dot{\Omega}]_1 [\underline{a}_2]_1 + [\Omega]_1 [\dot{\underline{a}}_2]_1 \quad (A.6)$$

Sustituyendo la expresión A.3 en la ecuación A.6,

$$[\ddot{\underline{a}}_2]_1 = [\dot{\Omega}]_1 [\underline{a}_2]_1 + [\Omega]_1 [\dot{Q}]_1 [\underline{a}_1]_1 \quad (A.7)$$

La expresión anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned} [\ddot{\underline{a}}_2]_1 &= [\dot{\Omega}]_1 [\underline{a}_2]_1 + [\Omega]_1 [\dot{Q}]_1 [Q^T]_1 [\underline{a}_2]_1 \\ &= [\dot{\Omega}]_1 [\underline{a}_2]_1 + [\Omega^2]_1 [\underline{a}_2]_1 \end{aligned} \quad (A.8)$$

La primera componente de la expresión A.8 es la aceleración tangencial, que es paralela a la velocidad, mientras que la segunda es la aceleración normal, perpendicular a la velocidad.

En efecto, sean  $(\alpha', \beta')$  las componentes de  $[\underline{a}_2]_1$ , la velocidad dada por la ecuación A.5 es,

$$[\dot{\underline{a}}_2]_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta} \\ \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} = \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\beta' \\ \alpha' \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

También,

$$[\dot{\Omega}]_1 [\underline{a}_2]_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\ddot{\theta} \\ \ddot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} = \ddot{\theta} \begin{bmatrix} -\beta' \\ \alpha' \end{bmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

de las expresiones A.9 y A.10, se obtiene;

$$[\dot{\Omega}]_1 [\underline{a}_2]_1 = \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}} [\dot{\underline{a}}_2]_1,$$

por lo que, efectivamente, la aceleración tangencial es paralela a la velocidad. Considere ahora el producto escalar de la velocidad por la aceleración normal, entonces:

$$\begin{aligned} [\dot{\underline{a}}_2^T]_1 [\Omega^2]_1 [\underline{a}_2]_1 &= [\underline{a}_2^T]_1 [\Omega^T]_1 [\Omega^2]_1 [\underline{a}_2]_1 \\ &= [\alpha', \beta'] \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\theta}^3 \\ \dot{\theta}^3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

#### A.4. Movimiento plano general de un cuerpo rígido

En la sección anterior se estudió el movimiento de un cuerpo rígido cuando uno de sus puntos permanece fijo durante el movimiento. En esta parte se supone el caso en que el cuerpo rígido sufre un movimiento plano, sin que tenga necesariamente un punto que permanezca fijo. Se mostrará que, si el cuerpo rígido se desplaza de la configuración I a la III, como se muestra en la figura I.3, se puede pensar que este cuerpo ocupó la configuración III mediante la composición de dos movimientos: un movimiento que lo lleva de la configuración I a la II donde  $\underline{b}_2 = \underline{b}_3$  y  $\underline{a}_2 - \underline{b}_2 = \underline{a}_1 - \underline{b}_1$ , y el otro lo lleva de la II a la III por medio de una rotación alrededor de  $B_2$ .

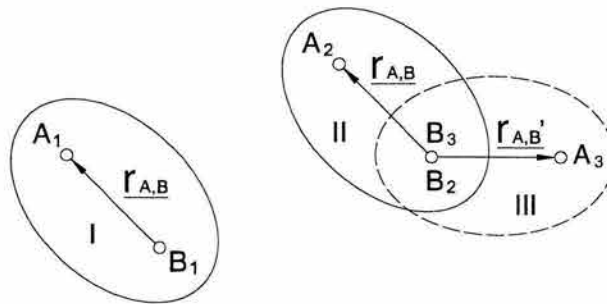


Figura A.3. Movimiento plano general de cuerpo rígido

De la figura anterior se puede observar que:

$$\underline{a}_3 = \underline{b}_3 + \underline{r}_{A,B}'$$

pero,

$$\underline{r}_{A,B}' = Q \underline{r}_{A,B} = Q (\underline{a}_1 - \underline{b}_1),$$

por tanto,

$$\underline{a}_3 = \underline{b}_3 + Q (\underline{a}_1 - \underline{b}_1) \tag{A.11}$$

La ecuación A.11 determina la posición final  $\underline{a}_3$  de un punto cualquiera “A” de un cuerpo rígido, a partir de su posición inicial  $\underline{a}_1$ , de la rotación Q, y de las posiciones inicial  $\underline{b}_1$  y final  $\underline{b}_3$  de un punto “base”.

Refiriendo los vectores y las matrices que integran a la ecuación A.11 a una misma base,

$$[\underline{a}_3]_1 = [\underline{b}_3]_1 + [Q]_1 [\underline{a}_1 - \underline{b}_1]_1$$

Para obtener la velocidad de “A”, se derivan ambos miembros de la expresión A.11 con respecto a  $t$ , esto es,

$$\dot{\underline{a}}_3 = \dot{\underline{b}}_3 + \dot{Q} (\underline{a}_1 - \underline{b}_1), \quad (\text{A.12})$$

pero, de la expresión A.11 también se tiene que,

$$\underline{a}_3 - \underline{b}_3 = Q (\underline{a}_1 - \underline{b}_1),$$

o equivalentemente,

$$\underline{a}_1 - \underline{b}_1 = Q^T (\underline{a}_3 - \underline{b}_3) \quad (\text{A.13})$$

Sustituyendo la ecuación A.13 en la expresión A.12, se obtiene lo siguiente:

$$\dot{\underline{a}}_3 = \dot{\underline{b}}_3 + \Omega (\underline{a}_3 - \underline{b}_3), \quad (\text{A.14})$$

que es equivalente a la expresión A.5 excepto por el término  $\dot{\underline{b}}_3$ . La variable  $\Omega$  tiene el mismo significado que en A.5.

La aceleración de "A",  $\ddot{\underline{a}}_3$  se obtiene derivando ambos miembros de la ecuación A.14 con respecto a  $t$ :

$$\ddot{\underline{a}}_3 = \ddot{\underline{b}}_3 + \dot{\Omega} (\underline{a}_3 - \underline{b}_3) + \Omega (\dot{\underline{a}}_3 - \dot{\underline{b}}_3), \quad (\text{A.15})$$

de la expresión A.14 se tiene que,

$$\dot{\underline{a}}_3 - \dot{\underline{b}}_3 = \Omega (\underline{a}_3 - \underline{b}_3) \quad (\text{A.16})$$

Sustituyendo la expresión A.16 en la ecuación A.15, se obtiene el siguiente resultado:

$$\ddot{\underline{a}}_3 = \ddot{\underline{b}}_3 + \dot{\Omega} (\underline{a}_3 - \underline{b}_3) + \Omega^2 (\underline{a}_3 - \underline{b}_3), \quad (\text{A.17})$$

que es equivalente a la ecuación A.8, y en donde nuevamente,  $\dot{\Omega} (\underline{a}_3 - \underline{b}_3)$  es la aceleración tangencial, y  $\Omega^2 (\underline{a}_3 - \underline{b}_3)$  es la aceleración normal.

### **A.5. Uso de números complejos en el análisis del movimiento plano de cuerpos rígidos (representación Euleriana)**

De acuerdo con [1] el número  $\mathbf{c} = a + ib$  es llamado "número complejo", donde "a" y "b" son números reales e "i" es la unidad imaginaria; el término "a" es conocido comúnmente como "la parte real del complejo", mientras que "ib" se llama "la parte imaginaria".

Considere que  $\mathbf{c}$  está representado por la distancia  $r$  trazada a partir del origen del sistema de referencia O como se muestra en la figura A.4. Geométricamente,  $\mathbf{c}$  es

un radio vector:  $r$  veces la longitud de un vector de longitud unitaria (v. u.). La posición del punto extremo "A" del radio vector puede ser descrita utilizando la forma polar, que incluye la magnitud de radio  $r$  y el ángulo  $\phi$  del radio vector medido desde el eje real positivo horizontal,

$$\mathbf{c} = r (\text{Cos } \phi + i \text{ Sen } \phi) \quad (\text{A.18})$$

Por otro lado, la forma cartesiana especifica las partes real e imaginaria del radio vector, esto es,

$$\mathbf{c} = a + ib \quad (\text{A.19})$$

La ecuación de Euler relaciona a las expresiones A.18 y A.19 de la siguiente manera [1]:

$$\mathbf{c} = r e^{i\phi}$$

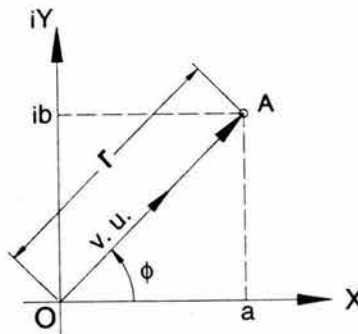


Figura A.4. El número complejo  $c = a + ib$

Se sabe que, con excepción de la velocidad angular, todos los vectores que intervienen en el análisis de la cinemática plana de los cuerpos rígidos están contenidos en un plano de movimiento, por lo que pueden ser sustituidos por números complejos.

Considere que el plano del movimiento es el complejo. Por tanto, a cada punto le corresponde un número complejo, y sólo uno. A continuación se muestran algunos resultados importantes.

**Teorema A.1.** La operación de multiplicar cualquier número complejo  $\mathbf{c}_1 = re^{i\phi}$  por el número  $e^{i\theta}$  es rotar  $\mathbf{c}_1$  un ángulo  $\theta$ .

**Demostración.** En efecto,

$$\mathbf{c}_2 = e^{i\theta} \mathbf{c}_1, \tag{A.20}$$

luego, desarrollando la ecuación A.20, esto es,

$$\mathbf{c}_2 = e^{i\theta} re^{i\phi} = re^{i(\phi + \theta)} \quad \blacksquare$$

El resultado anterior muestra que se puede evitar el uso de matrices en la representación de rotaciones.

De acuerdo con la figura A.5, el desplazamiento del cuerpo rígido puede representarse con números complejos de la siguiente forma:

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_3 + e^{i\theta} \mathbf{c}_1 \tag{A.21}$$

donde  $\mathbf{a}_3$  y  $\mathbf{b}_3$  son los complejos asociados a los puntos “A” y “B” del plano complejo después del desplazamiento. Además,

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1$$

Por tanto, la ecuación A.21 puede escribirse,

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{b}_3 + e^{i\theta} (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) \tag{A.22}$$



que es equivalente a la expresión A.11.

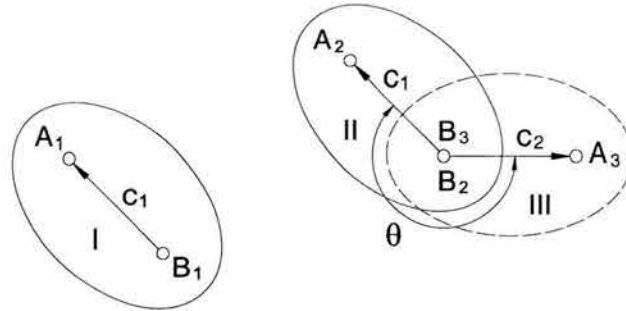


Figura A.5. Desplazamiento de un cuerpo rígido

La velocidad de "A",  $\dot{\mathbf{a}}_3$  se obtiene al derivar la expresión A.22 con respecto a  $t$ :

$$\dot{\mathbf{a}}_3 = \dot{\mathbf{b}}_3 + i\dot{\theta} e^{i\theta} (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1), \quad (\text{A.23})$$

pero, de la ecuación A.22 se tiene que,

$$\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1 = e^{-i\theta} (\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3) \quad (\text{A.24})$$

Sustituyendo la expresión A.24 en A.23, se obtiene el siguiente resultado:

$$\dot{\mathbf{a}}_3 = \dot{\mathbf{b}}_3 + i\dot{\theta} (\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3), \quad (\text{A.25})$$

que es equivalente a la ecuación A.14.

Al derivar la expresión A.25 con respecto a  $t$ , se obtiene la aceleración de "A",  $\ddot{\mathbf{a}}_3$  esto es,

$$\ddot{\mathbf{a}}_3 = \ddot{\mathbf{b}}_3 + i\ddot{\theta} (\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3) + i\dot{\theta} (\dot{\mathbf{a}}_3 - \dot{\mathbf{b}}_3) \quad (\text{A.26})$$

De la ecuación A.22 se tiene que,

$$\dot{\mathbf{a}}_3 - \dot{\mathbf{b}}_3 = i \dot{\theta} e^{i\theta} (\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1),$$

además, al considerar la expresión A.24,

$$\dot{\mathbf{a}}_3 - \dot{\mathbf{b}}_3 = i \dot{\theta} (\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3) \quad (\text{A.27})$$

Finalmente, al sustituir la ecuación A.27 en la expresión A.26, se obtiene lo siguiente:

$$\ddot{\mathbf{a}}_3 = \ddot{\mathbf{b}}_3 + i \ddot{\theta} (\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3) - \dot{\theta}^2 (\mathbf{a}_3 - \mathbf{b}_3),$$

que es equivalente a la ecuación A.17.

### A.6. Representación de transformaciones por matrices

En esta parte se plantea el objetivo de dar un sustento formal a los resultados obtenidos en la sección A.2, se demuestra que para cada transformación lineal, existe una matriz asociada que la representa.

Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión “ $n$ ” sobre el cuerpo  $F$ , y sea  $W$  un espacio vectorial de dimensión “ $m$ ” sobre  $F$ . Sea  $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  una base ordenada de  $V$ , y  $B' = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$  una base ordenada de  $W$ . Si  $T$  es cualquier transformación lineal de  $V$  en  $W$ , entonces  $T$  está determinada por su efecto sobre los vectores  $\alpha_j$ . Cada uno de los “ $n$ ” vectores  $T\alpha_j$  se expresa de manera única como combinación lineal

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^m A_{ij} \beta_i \quad (\text{A.28})$$

de los  $\beta_i$ , los escalares  $A_{1j}, \dots, A_{mj}$  son las coordenadas de  $T\alpha_j$  en la base ordenada  $B'$ . Por consiguiente, la transformación  $T$  está determinada por los “ $mn$ ” escalares  $A_{ij}$

mediante la expresión (A.28). La matriz  $m \times n$ ,  $A$ , definida por  $A(i, j) = A_{ij}$  se llama matriz de  $T$  respecto al par de bases ordenadas  $B$  y  $B'$ . La tarea inmediata es comprender claramente cómo la matriz  $A$  determina la transformación lineal  $T$ .

Si  $\alpha = x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n$  es un vector de  $V$ , entonces

$$\begin{aligned} T\alpha &= T\left(\sum_{j=1}^n x_j \alpha_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j (T\alpha_j) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m A_{ij} \beta_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j\right) \beta_i. \end{aligned}$$

Si  $X$  es la matriz de las coordenadas de  $\alpha$  en la base ordenada  $B$ , entonces el cálculo anterior muestra que  $AX$  es la matriz de las coordenadas del vector  $T\alpha$  en la base ordenada  $B'$ , ya que el escalar

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j$$

es el elemento de la  $i$ -ésima fila de la matriz columna  $AX$ . Obsérvese también que si  $A$  es cualquier matriz  $m \times n$  sobre el cuerpo  $F$ , entonces

$$T\left(\sum_{j=1}^n x_j \alpha_j\right) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j\right) \beta_i$$

define una transformación lineal  $T$  de  $V$  en  $W$ , la matriz de la cual es  $A$ , respecto a  $B$ ,  $B'$ . Resumiendo formalmente se tiene el siguiente teorema:

**Teorema A.2.** Sean  $V$  un espacio vectorial de dimensión “ $n$ ” sobre el cuerpo  $F$ , y  $W$  un espacio vectorial de dimensión “ $m$ ” sobre  $F$ . Sean  $B$  una base ordenada de  $V$  y  $B'$  una base ordenada de  $W$ . Para cada transformación lineal  $T$  de  $V$  en  $W$ , existe una matriz  $m \times n$ ,  $A$ , cuyos elementos pertenecen a  $F$ , tal que

$$[T\alpha]_{B'} = A [\alpha]_B$$

para todo vector  $\alpha$  en  $V$ . Además,  $T \rightarrow A$  es una correspondencia biyectiva entre el conjunto de todas las transformaciones lineales de  $V$  en  $W$  y el conjunto de todas las matrices  $m \times n$  sobre el cuerpo  $F$ .

La matriz  $A$ , que está asociada a  $T$  en el teorema A.2, se llama la matriz de  $T$  respecto a las bases ordenadas  $B, B'$ . Obsérvese que la ecuación (A.28) dice que  $A$  es la matriz cuyas columnas  $A_1, \dots, A_n$  son dadas por

$$A_j = [T\alpha_j]_{B'}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Si  $U$  es otra transformación lineal de  $V$  en  $W$  y  $B = [B_1, \dots, B_n]$  es la matriz de  $U$  respecto a las bases ordenadas  $B, B'$ , entonces  $cA + B$  es la matriz de  $cT + U$  respecto a  $B, B'$ . Esto es claro porque

$$\begin{aligned} cA_j + B_j &= c[T\alpha_j]_{B'} + [U\alpha_j]_{B'} \\ &= [cT\alpha_j + U\alpha_j]_{B'} \\ &= [(cT + U)\alpha_j]_{B'}. \end{aligned}$$

# APÉNDICE B

## PROGRAMACIÓN Y SIMULACIÓN: ANÁLISIS DE UN MECANISMO DE CINCO BARRAS

### B.1. Introducción

En este apéndice se programan y simulan los modelos cinemáticos de posición del mecanismo plano de cinco barras, el objetivo es mostrar como el uso sistemático del álgebra de los números complejos permite una fácil programación y resolución de las ecuaciones asociadas con el multicuerpo, para lo cual se hace uso del lenguaje computacional VISUAL BASIC.

### B.2. Cinemática inversa

En esta parte se describe la programación y simulación del modelo cinemático inverso de posicionamiento, se da solución al problema de la sección 2.4.2 y se muestra la interfase gráfica de salida. El código correspondiente a la cinemática inversa del mecanismo es el siguiente:

- Banderas de solución de la cinemática inversa

Dim banderacc1, banderacc2, banderacc3 As Boolean

Dim R30(1) As Single

- Aplica nuevas coordenadas para modelar posición

```
Private Sub aplicar_Click()
```

- Posición home de referencia

```
Xref = Int(Trim(Text1(0).Text))
```

```
Yref = Int(Trim(Text2.Text))
```

```
cinematicalInverza Xref, Yref
```

```
End Sub
```

```
Private Sub Form_Load()
```

- Dimensiones por default del mecanismo

```
Text1(1).Text = 1000
```

```
Text1(2).Text = 1000
```

```
Text1(3).Text = 1000
```

```
Text1(4).Text = 1000
```

- Posición home de referencia

```
Xref = 1000
```

```
Yref = 1000
```

```
cinematicalInverza Xref, Yref
```

```
End Sub
```

- Sale de la ventana de modelación de posición

```
Private Sub Salir_Click()
```

```
Unload Me
```

```
End Sub
```

- Determinación de la posición de la cinemática inversa del mecanismo

Public Sub cinematicaInversa(x As Single, y As Single)

- Definición de ángulos temporales

Dim angulo1 As Single

Dim angulo2 As Single

- Tolerancia

rango = 10

- Base de referencia

e1(0) = 1

e1(1) = 0

- Coordenadas de referencia

Rpot(0) = x

Rpot(1) = y

Xpot = Rpot(0)

Ypot = Rpot(1)

- Definición de los vectores que componen al mecanismo

L1 = Int(Text1(1).Text)

L2 = Int(Text1(2).Text)

L3 = Int(Text1(3).Text)

L4 = Int(Text1(4).Text)

- Modelo referido a p1

p1(0) = 0

p1(1) = 0

- Determinación de R3(), R6() y R9() en la configuración no deformada

R30(0) = Int(Xpot)

R30(1) = Int(Ypot)

- Determinación del lazo R30 = L1 + L2

lazo1

- Determinación del lazo R30 = L4 + L3

lazo2

- Grafica el mecanismo en pantalla

Graficamecanismo

End Sub

- Función de la cinemática inversa de la cadena CC1

Private Sub lazo1()

- Definición de ángulos temporales para determinar solución

Dim angulo1 As Single

Dim angulo2 As Single

- Bandera de estado de solución

banderacc1 = True

- Complejos de la cadena cinemática

For angulo1 = 0 To 360 Step 0.9

P(0) = Cos(GtoR(angulo1))

P(1) = Sin(GtoR(angulo1))

For angulo2 = 0 To 360 Step 0.9

Q(0) = Cos(GtoR(angulo2))

Q(1) = Sin(GtoR(angulo2))



- Determinación de las bases móviles
  - $e_{11}(0) = \text{ropq}(P(), e1()).x(o)$
  - $e_{11}(1) = \text{ropq}(P(), e1()).x(1)$
  - $e_{12}(0) = \text{ropq}(Q(), e1()).x(o)$
  - $e_{12}(1) = \text{ropq}(Q(), e1()).x(1)$
  
- Determinación de la posición de los vectores L1, L2
  - $LL1t(0) = \text{Int}(L1 * e_{11}(0))$
  - $LL1t(1) = \text{Int}(L1 * e_{11}(1))$
  - $LL2t(0) = \text{Int}(L2 * e_{12}(0))$
  - $LL2t(1) = \text{Int}(L2 * e_{12}(1))$
  
- Determinación de la condición  $R30 = L1 + L2$ 
  - If  $(R30(0) + \text{rango} > LL1t(0) + LL2t(0) \text{ And } R30(1) + \text{rango} > LL1t(1) + LL2t(1))$
  - And  $(R30(0) - \text{rango} < LL1t(0) + LL2t(0) \text{ And } R30(1) - \text{rango} < LL1t(1) + LL2t(1))$
  - Then
  
- Ángulos para las cadenas cinemáticas
  - tetha1 = angulo1
  - tetha2 = angulo2
  
- Determinación de la condición
  - $L11(0) = \text{Int}(L1 * e_{11}(0))$
  - $L11(1) = \text{Int}(L1 * e_{11}(1))$
  - $L22(0) = \text{Int}(L2 * e_{12}(0))$
  - $L22(1) = \text{Int}(L2 * e_{12}(1))$
  
- Se verifica que se cumplan las condiciones de los cuadrados;  $P0^2 + P1^2 = 1$  y  $Q0^2 + Q1^2 = 1$ 
  - If  $((P(0) * P(0) + P(1) * P(1) = 1) \text{ And } (Q(0) * Q(0) + Q(1) * Q(1) = 1))$  Then
  - Exit Sub

```

    End If
  End If
Next
Next
banderacc1 = False
End Sub

```

- Función de la cinemática inversa de la cadena CC2

```
Private Sub lazo2()
```

- Definición de ángulos temporales para determinar solución

```
Dim angulo1 As Single
```

```
Dim angulo2 As Single
```

- Bandera de estado de solución

```
banderacc2 = True
```

- Determinación de la tierra de L2

```
'L14(0) = L4 * Cos(GtoR(30))
```

```
'L14(1) = L4 * Sin(GtoR(30))
```

- Complejos de la cadena cinemática

```
For angulo1 = 0 To 360 Step 0.9
```

```
  R(0) = Cos(GtoR(angulo1))
```

```
  R(1) = Sin(GtoR(angulo1))
```

```
  For angulo2 = 0 To 360 Step 0.9
```

```
    S(0) = Cos(GtoR(angulo2))
```

```
    S(1) = Sin(GtoR(angulo2))
```

- Determinación de las bases móviles

```
e13(0) = ropq(R(), e1()).x(o)
```

$$e13(1) = \text{ropq}(R(), e1()).x(1)$$

$$e14(0) = \text{ropq}(S(), e1()).x(0)$$

$$e14(1) = \text{ropq}(S(), e1()).x(1)$$

- Determinación de la posición de los vectores L3, L4

$$LL3t(0) = \text{Int}(L3 * e13(0))$$

$$LL3t(1) = \text{Int}(L3 * e13(1))$$

$$LL4t(0) = \text{Int}(L4 * e14(0))$$

$$LL4t(1) = \text{Int}(L4 * e14(1))$$

- Determinación de la condición  $R30 = L3 + L4$

$$\text{If } (R30(0) + \text{rango} > LL3t(0) + LL4t(0) \text{ And } R30(1) + \text{rango} > LL3t(1) + LL4t(1))$$

$$\text{And } (R30(0) - \text{rango} < LL3t(0) + LL4t(0) \text{ And } R30(1) - \text{rango} < LL3t(1) + LL4t(1))$$

Then

- Ángulos para las cadenas cinemáticas

$$\text{tetha3} = \text{angulo1}$$

$$\text{tetha4} = \text{angulo2}$$

- Determinación de la condición

$$L33(0) = \text{Int}(L3 * e13(0))$$

$$L33(1) = \text{Int}(L3 * e13(1))$$

$$L44(0) = \text{Int}(L4 * e14(0))$$

$$L44(1) = \text{Int}(L4 * e14(1))$$

- Se verifica que se cumplan las condiciones de los cuadrados;  $R0^2 + R1^2 = 1$  y

$$S0^2 + S1^2 = 1$$

$$\text{If } ((R(0) * R(0) + R(1) * R(1) = 1) \text{ And } (S(0) * S(0) + S(1) * S(1) = 1)) \text{ Then}$$

Exit Sub

End If

End If

Next

Next

banderacc2 = False

End Sub

- Grafica el mecanismo en la ventana de referencia

Private Sub Graficamecanismo()

- Definición de variables temporales para el sistema de pantalla

Dim ofsetx As Single

Dim ofsety As Single

Dim RT3(1) As Single

- Se verifican las soluciones

If (banderacc1 = False Or banderacc2 = False) Then

    MsgBox "El sistema no tubo solucion "

    Exit Sub

End If

- Offset en x+2500 offset en y-2100, centrado referido al lazo1

ofsetx = 2500

ofsety = 1500

- Adecuación al sistema de pantalla

RT3(0) = R30(0) + ofsetx

RT3(1) = R30(1) + ofsety

- Características de la gráfica del mecanismo

Line1.BorderWidth = 10

Line2.BorderWidth = 10

Line3.BorderWidth = 10

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

Line4.BorderWidth = 10  
Line1.BorderColor = vbWhite  
Line2.BorderColor = vbBlue  
Line3.BorderColor = vbRed  
Line4.BorderColor = vbGreen

Label5(2).Left = offsetx - 800  
Label5(2).Top = ofsety  
Label5(3).Left = offsetx + L44(0) - 800  
Label5(3).Top = ofsety + L44(1)  
Label5(4).Left = RT3(0) + 50  
Label5(4).Top = RT3(1) + 50

- Corrección de cuadrante y offset de centrado

- Grafica el vector L1

Line1.X1 = offsetx  
Line1.Y1 = ofsety  
Line1.X2 = offsetx + L11(0)  
Line1.Y2 = ofsety + L11(1)

- Grafica el vector L2

Line2.X1 = Line1.X2  
Line2.Y1 = Line1.Y2  
Line2.X2 = Line2.X1 + L22(0)  
Line2.Y2 = Line2.Y1 + L22(1)

- Grafica el vector L3

Line3.X1 = offsetx + L44(0)  
Line3.Y1 = ofsety + L44(1)  
Line3.X2 = Line3.X1 + L33(0)  
Line3.Y2 = Line3.Y1 + L33(1)

- Grafica el vector L4

Line4.X1 = offsetx

Line4.Y1 = offsety

Line4.X2 = Line4.X1 + L44(0)

Line4.Y2 = Line4.Y1 + L44(1)

- Valores de los ángulos de las cadenas cinemáticas

Label13.Caption = Int(tetha1)

Label14.Caption = Int(tetha2)

Label15.Caption = Int(tetha3)

Label19.Caption = Int(tetha4)

Text1(0).Text = R30(0)

Text2.Text = R30(1)

End Sub

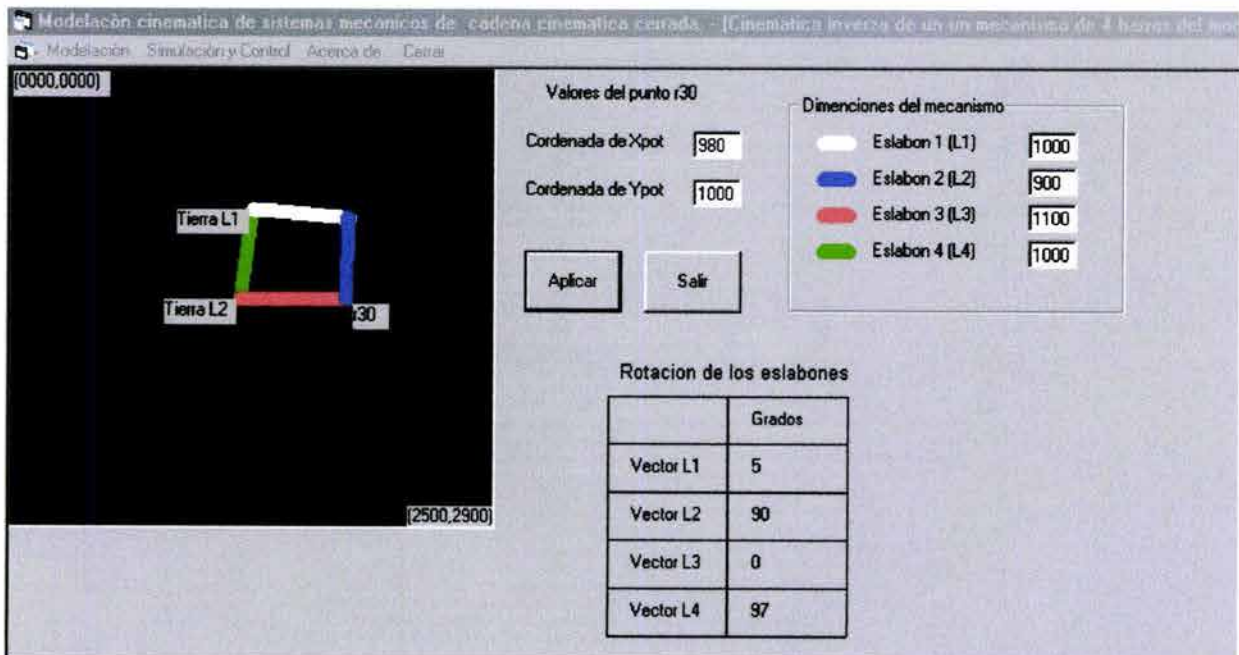


Figura B.1. Interfase gráfica de la cinemática inversa

### B.3. Cinemática directa

En esta parte se describe la programación y simulación del modelo cinemático directo de posicionamiento, se da solución al problema de la sección 2.4.1 y se muestra la interfase gráfica de salida. El código correspondiente a la cinemática directa del mecanismo es el siguiente:

- Módulo de solución de la cinemática directa

Dim R30(1) As Single

Dim e33(1) As Single

Dim e44(1) As Single

Dim tetha1 As Single

Dim tetha2 As Single

Dim tetha3 As Single

Dim tetha4 As Single

- Valores iniciales de la configuración del mecanismo

Private Sub Form\_Load()

- Dimensiones por default del mecanismo

Text1(1).Text = 1000

Text1(2).Text = 1000

Text1(3).Text = 1000

Text1(4).Text = 1000

- Rotaciones de los eslabones

Text1(5).Text = 0

```
Text1(6).Text = 90
```

```
Text1(7).Text = 0
```

```
Text1(8).Text = 90
```

- Llamada a la solución de la cinemática directa

```
cinematicadirecta 0, 90, 0, 90
```

```
End Sub
```

- Aplica nuevas coordenadas para modelar posición

```
Private Sub aplicar_Click()
```

- Nueva orientación

```
tetha1 = Int(Trim(Text1(5).Text))
```

```
tetha2 = Int(Trim(Text1(6).Text))
```

```
tetha3 = Int(Trim(Text1(7).Text))
```

```
tetha4 = Int(Trim(Text1(8).Text))
```

```
cinematicadirecta tetha1, tetha2, tetha3, tetha4
```

```
End Sub
```

- Sale de la ventana de modelación de posición

```
Private Sub Salir_Click()
```

```
Unload Me
```

```
End Sub
```

- Determinación de la posición de la cinemática directa del mecanismo

```
Public Sub cinematicadirecta(angulo1 As Single, angulo2 As Single, angulo3 As  
Single, angulo4 As Single)
```



- Tolerancia

rango = 10

- Definición de los vectores que componen al mecanismo

$L1 = \text{Int}(\text{Trim}(\text{Text1}(1).\text{Text}))$

$L2 = \text{Int}(\text{Trim}(\text{Text1}(2).\text{Text}))$

$L3 = \text{Int}(\text{Trim}(\text{Text1}(3).\text{Text}))$

$L4 = \text{Int}(\text{Trim}(\text{Text1}(4).\text{Text}))$

- Eslabón 1

$P(0) = \text{Cos}(\text{GtoR}(\text{angulo1}))$

$P(1) = \text{Sin}(\text{GtoR}(\text{angulo1}))$

- Determinación de las bases móviles

$e11(0) = \text{ropq}(P(), E1()).x(0)$

$e11(1) = \text{ropq}(P(), E1()).x(1)$

- Determinación del vector de L1

$L11(0) = \text{Int}(L1 * e11(0))$

$L11(1) = \text{Int}(L1 * e11(1))$

- Eslabón 2

$Q(0) = \text{Cos}(\text{GtoR}(\text{angulo2}))$

$Q(1) = \text{Sin}(\text{GtoR}(\text{angulo2}))$

- Determinación de las bases móviles

$e22(0) = \text{ropq}(Q(), E1()).x(0)$

$e22(1) = \text{ropq}(Q(), E1()).x(1)$

- Determinación del vector de L2

$$L22(0) = \text{Int}(L2 * e22(0))$$

$$L22(1) = \text{Int}(L2 * e22(1))$$

- Determinación de la ecuación  $R30 = L1 + L2$

$$R30(0) = L11(0) + L22(0)$$

$$R30(1) = L11(1) + L22(1)$$

- Eslabón 3

$$R(0) = \text{Cos}(GtoR(\text{angulo3}))$$

$$R(1) = \text{Sin}(GtoR(\text{angulo3}))$$

- Determinación de las bases móviles

$$e33(0) = \text{ropq}(R(), E1()).x(0)$$

$$e33(1) = \text{ropq}(R(), E1()).x(1)$$

- Determinación del vector de L3

$$L33(0) = \text{Int}(L3 * e33(0))$$

$$L33(1) = \text{Int}(L3 * e33(1))$$

- Eslabón 4

$$s(0) = \text{Cos}(GtoR(\text{angulo4}))$$

$$s(1) = \text{Sin}(GtoR(\text{angulo4}))$$

- Determinación de las bases móviles

$$e44(0) = \text{ropq}(s(), E1()).x(0)$$

$$e44(1) = \text{ropq}(s(), E1()).x(1)$$

- Determinación del vector de L4

$$L44(0) = \text{Int}(L4 * e44(0))$$

$$L44(1) = \text{Int}(L4 * e44(1))$$

- Determinación de la ecuación  $R30 = L3 + L4$

$$R30(0) = L33(0) + L44(0)$$

$$R30(1) = L33(1) + L44(1)$$

Graficamecanismo

End Sub

- Grafica el mecanismo en la ventana de referencia

Private Sub Graficamecanismo()

- Definición de variables temporales para el sistema de pantalla

Dim ofsetx As Single

Dim ofsety As Single

Dim RT3(1) As Single

- Offset en  $x+2500$  offset en  $y-2100$ , centrado referido al lazo1

ofsetx = 2500

ofsety = 1500

- Adecuación al sistema de pantalla

$$RT3(0) = R30(0) + \text{ofsetx}$$

$$RT3(1) = R30(1) + \text{ofsety}$$

- Características de la gráfica del mecanismo

Line1.BorderWidth = 10

```
Line2.BorderWidth = 10
Line3.BorderWidth = 10
Line4.BorderWidth = 10
Line1.BorderColor = vbWhite
Line2.BorderColor = vbBlue
Line3.BorderColor = vbRed
Line4.BorderColor = vbGreen
```

```
Label5(2).Left = offsetx - 800
Label5(2).Top = offsety
Label5(3).Left = offsetx + L44(0) - 800
Label5(3).Top = offsety + L44(1)
Label5(4).Left = RT3(0) + 50
Label5(4).Top = RT3(1) + 50
```

- Corrección de cuadrante y offset de centrado

- Grafica el vector L1

```
Line1.x1 = offsetx
Line1.y1 = offsety
Line1.x2 = offsetx + L11(0)
Line1.y2 = offsety + L11(1)
```

- Grafica el vector L2

```
Line2.x1 = Line1.x2
Line2.y1 = Line1.y2
Line2.x2 = Line2.x1 + L22(0)
Line2.y2 = Line2.y1 + L22(1)
```

- Grafica el vector L3

```
Line3.x1 = offsetx + L44(0)
```

```
Line3.y1 = ofsety + L44(1)
Line3.x2 = Line3.x1 + L33(0)
Line3.y2 = Line3.y1 + L33(1)
```

- Grafica el vector L4

```
Line4.x1 = ofsetx
Line4.y1 = ofsety
Line4.x2 = Line4.x1 + L44(0)
Line4.y2 = Line4.y1 + L44(1)
```

- Valores de los ángulos de las cadenas cinemáticas

```
Text1(0).Text = R30(0)
Text2.Text = R30(1)
End Sub
```

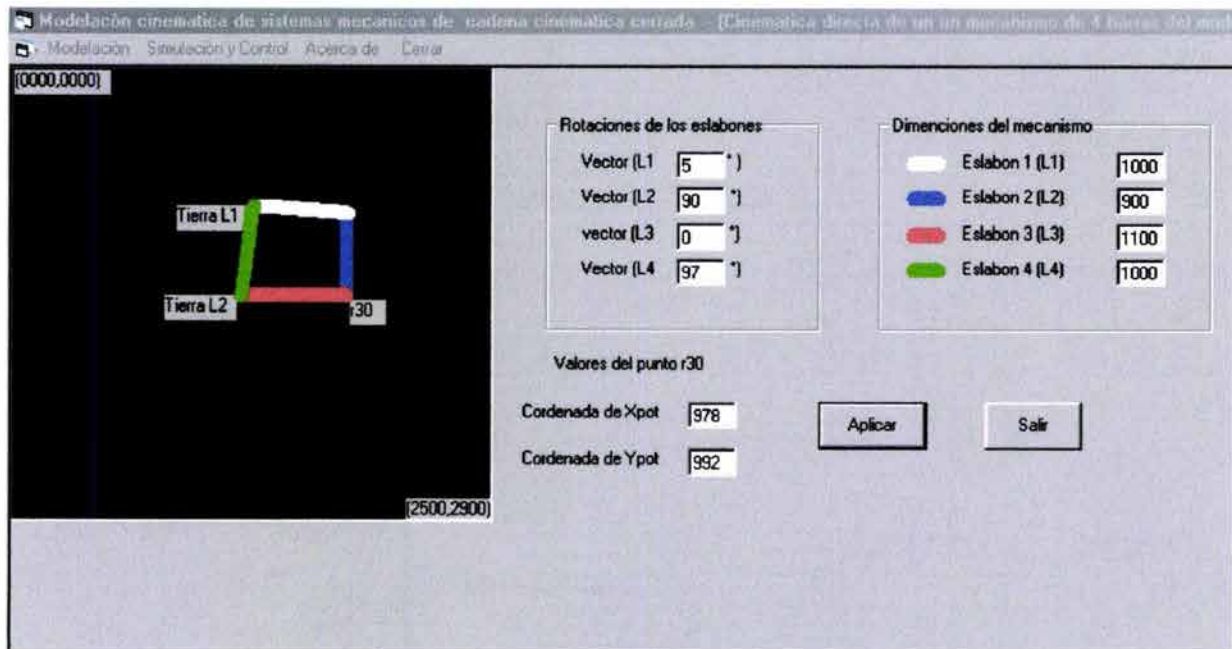


Figura B.2. Interfase gráfica de la cinemática directa

# APÉNDICE C

## PROGRAMACIÓN Y SIMULACIÓN: PROBLEMA DE SÍNTESIS PARA CONDUCCIÓN DE CUERPO RÍGIDO (TRES PUNTOS DE PRECISIÓN)

### C.1. Introducción

En este apéndice se programan y simulan los modelos cinemáticos correspondientes a un problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (tres puntos de precisión), relacionado con un mecanismo plano de cuatro barras, al igual que en el apéndice B el uso sistemático del álgebra de los números complejos permite una fácil programación y resolución de las ecuaciones asociadas con el multicuerpo, nuevamente se hace uso del lenguaje computacional VISUAL BASIC. Se da solución al problema planteado en la sección 3.4 y se muestra la interfase gráfica de salida. El código del programa es el siguiente:

- Banderas de solución

Dim banderacc1, banderacc2, banderacc3 As Boolean

Dim rb(1) As Single

Dim Rbd(1) As Single

Dim Rbe(1) As Single

Dim LL1(1) As Single

Dim LL2(1) As Single

Dim LL1t(1) As Single  
Dim LL2t(1) As Single  
Dim LL1tt(1) As Single  
Dim LL2tt(1) As Single

- Bases locales

Dim a11(1) As Single  
Dim a12(1) As Single  
Dim a13(1) As Single  
Dim a14(1) As Single  
Dim b11(1) As Single  
Dim b12(1) As Single  
Dim b13(1) As Single  
Dim b14(1) As Single  
Private Sub Form\_Load()

- Procedimiento para determinar los puntos de referencia en la síntesis  
ProcedimientoReferencia

- Parámetros para la síntesis del mecanismo

- Coordenadas del mecanismo (Piv1)

Text1(9).Text = 100  
Text1(10).Text = 150

- Coordenadas del mecanismo (Piv2)

Text1(11).Text = 150  
Text1(12).Text = 200

- Rotaciones de los complejos P', Q', R', S'
- Coordenadas del mecanismo (Piv1)  
Text1(1).Text = 30  
Text1(2).Text = 5  
Text1(3).Text = 40  
Text1(4).Text = 0
- Rotaciones de los complejos P, Q, R, S
- Coordenadas del mecanismo mcb1 desde el Piv1  
Text1(13).Text = 10  
Text1(14).Text = 5
- Coordenadas del mecanismo mcb1 desde el Piv2  
Text1(15).Text = 10  
Text1(16).Text = 0
- Coordenadas del Piv1  
Text1(0).Text = 0  
Text1(22).Text = 0
- Coordenadas del Piv2  
Text1(23).Text = Int(700 \* Cos(GtoR(68)))  
Text1(24).Text = Int(700 \* Sin(GtoR(68)))
- Coordenadas del mecanismo  
ProcedimientoReferencia  
End Sub



- Sale de la ventana de modelación de posición

```
Private Sub Salir_Click()
```

```
    Unload Me
```

```
End Sub
```

```
Private Sub ProcedimientoReferencia()
```

- Definición de ángulos temporales

```
Dim angulo1 As Single
```

```
Dim angulo2 As Single
```

```
Dim bandera1 As Boolean
```

```
Dim bandera2 As Boolean
```

- Tolerancia

```
rango = 10
```

- Banderas de estado de solución

```
bandera1 = False
```

```
bandera2 = False
```

- Base de referencia

```
E1(0) = 1
```

```
E1(1) = 0
```

- Coordenadas de referencia

```
Rpot(0) = 950
```

```
Rpot(1) = 1050
```

```
xpot = Rpot(0)
```

```
ypot = Rpot(1)
```

- Definición de los vectores que componen al mecanismo

$$L1 = 1000$$

$$L2 = 700$$

$$L3 = 1000$$

$$L4 = 700$$

- Modelo referido a p1

$$p1(0) = 0$$

$$p1(1) = 0$$

- Determinación del valor rb

$$rb(0) = \text{Int}(x_{\text{pot}})$$

$$rb(1) = \text{Int}(y_{\text{pot}})$$

- Complejos de la cadena cinemática

For angulo1 = 0 To 360 Step 0.9

$$P(0) = \text{Cos}(\text{GtoR}(\text{angulo1}))$$

$$P(1) = \text{Sin}(\text{GtoR}(\text{angulo1}))$$

For angulo2 = 0 To 360 Step 0.9

$$Q(0) = \text{Cos}(\text{GtoR}(\text{angulo2}))$$

$$Q(1) = \text{Sin}(\text{GtoR}(\text{angulo2}))$$

- Determinación de las bases móviles

$$e11(0) = \text{ropq}(P(), E1()).x(0)$$

$$e11(1) = \text{ropq}(P(), E1()).x(1)$$

$$e12(0) = \text{ropq}(Q(), E1()).x(0)$$

$$e12(1) = \text{ropq}(Q(), E1()).x(1)$$

- Determinación de la posición de los vectores L1, L2

$$LL1t(0) = \text{Int}(L1 * e11(0))$$

$$LL1t(1) = \text{Int}(L1 * e11(1))$$

$$LL2t(0) = \text{Int}(L2 * e12(0))$$

$$LL2t(1) = \text{Int}(L2 * e12(1))$$

- Determinación de la condición  $rb = L1 + L2$

If  $(rb(0) + rango > LL1t(0) + LL2t(0) \text{ And } rb(1) + rango > LL1t(1) + LL2t(1))$   
And  $(rb(0) - rango < LL1t(0) + LL2t(0) \text{ And } rb(1) - rango < LL1t(1) + LL2t(1))$  Then

- Ángulos para las cadenas cinemáticas

$$tetha1 = \text{angulo1}$$

$$tetha2 = \text{angulo2}$$

- Determinación de la condición

$$L11(0) = \text{Int}(L1 * e11(0))$$

$$L11(1) = \text{Int}(L1 * e11(1))$$

$$L22(0) = \text{Int}(L2 * e12(0))$$

$$L22(1) = \text{Int}(L2 * e12(1))$$

- Se verifica que se cumplan las condiciones de los cuadrados;  $P0^2 + P1^2 = 1$  y  $Q0^2 + Q1^2 = 1$

If  $((P(0) * P(0) + P(1) * P(1) = 1) \text{ And } (Q(0) * Q(0) + Q(1) * Q(1) = 1))$  Then

bandera1 = True

Exit For

End If

End If

Next

If bandera1 = True Then Exit For

Next

- Complejos de la cadena cinemática 2

For angulo1 = 0 To 360 Step 0.9

R(0) = Cos(GtoR(angulo1))

R(1) = Sin(GtoR(angulo1))

For angulo2 = 0 To 360 Step 0.9

s(0) = Cos(GtoR(angulo2))

s(1) = Sin(GtoR(angulo2))

- Determinación de las bases móviles

e13(0) = ropq(R(), E1()).x(o)

e13(1) = ropq(R(), E1()).x(1)

e14(0) = ropq(s(), E1()).x(o)

e14(1) = ropq(s(), E1()).x(1)

- Determinación de la posición de los vectores L3, L4

LL3t(0) = Int(L3 \* e13(0))

LL3t(1) = Int(L3 \* e13(1))

LL4t(0) = Int(L4 \* e14(0))

LL4t(1) = Int(L4 \* e14(1))

- Se verifica que se cumpla con Piv1

- Determinación de la condición  $rb = L3 + L4$ , para verificar que se cumpla con Piv2

If (rb(0) + rango > LL3t(0) + LL4t(0) And rb(1) + rango > LL3t(1) + LL4t(1))

And (rb(0) - rango < LL3t(0) + LL4t(0) And rb(1) - rango < LL3t(1) + LL4t(1)) Then

- Ángulos para las cadenas cinemáticas

tetha3 = angulo1

tetha4 = angulo2

- Determinación de la condición

$$L33(0) = \text{Int}(L3 * e13(0))$$

$$L33(1) = \text{Int}(L3 * e13(1))$$

$$L44(0) = \text{Int}(L4 * e14(0))$$

$$L44(1) = \text{Int}(L4 * e14(1))$$

- Se verifica que se cumplan las condiciones de los cuadrados;  $R0^2 + R1^2 = 1$  y  $S0^2 + S1^2 = 1$

If ((R(0) \* R(0) + R(1) \* R(1) = 1) And (s(0) \* s(0) + s(1) \* s(1) = 1)) Then

bandera2 = True

Exit For

End If

End If

Next

If bandera2 = True Then Exit For

Next

Graficamecanismo

End Sub

- Función para solucionar el modelo de síntesis

Private Sub Sintesis3Punto()

- Definición de ángulos temporales para determinar solución

Dim angulo1 As Single

Dim angulo2 As Single

Dim angulo3 As Single

Dim angulo4 As Single

Dim angulop As Single

Dim anguloq As Single

Dim angulor As Single

```
Dim angulos As Single
Dim angulopp As Single
Dim anguloqq As Single
Dim angulorr As Single
Dim anguloss As Single
Dim Pp(1) As Single
Dim Qq(1) As Single
Dim Rr(1) As Single
Dim Ss(1) As Single
Dim Ppp(1) As Single
Dim Qqq(1) As Single
Dim Rrr(1) As Single
Dim Sss(1) As Single
Dim Temporal(1) As Single
Dim Temporal1(1) As Single
Dim Distancia(1) As Single
Dim Distancia1(1) As Single
Dim L1t, L2t, I3t, I4t As Integer

rango = 100
Rbd(0) = Int(Text1(9).Text)
Rbd(1) = Int(Text1(10).Text)
Rbe(0) = Int(Text1(11).Text)
Rbe(1) = Int(Text1(12).Text)
xpiv1 = Int(Text1(0).Text)
ypiv1 = Int(Text1(22).Text)
xpiv2 = Int(Text1(23).Text)
ypiv2 = Int(Text1(24).Text)
angulopp = Int(Text1(1).Text)
anguloqq = Int(Text1(2).Text)
angulorr = Int(Text1(3).Text)
```

```
anguloss = Int(Text1(4).Text)
angulop = Int(Text1(13).Text)
anguloq = Int(Text1(14).Text)
angulor = Int(Text1(15).Text)
angulos = Int(Text1(16).Text)
Distancia(0) = Rbd(0)
Distancia(1) = Rbd(1)
Distancia1(0) = Rbe(0)
Distancia1(1) = Rbe(1)
```

- Determinación de la posición de los vectores L1, L2 y sus rotaciones

```
Pp(0) = Cos(GtoR(angulop))
Pp(1) = Sin(GtoR(angulop))
Ppp(0) = Cos(GtoR(angulopp))
Ppp(1) = Sin(GtoR(angulopp))
Qq(0) = Cos(GtoR(anguloq))
Qq(1) = Sin(GtoR(anguloq))
Qqq(0) = Cos(GtoR(anguloqq))
Qqq(1) = Sin(GtoR(anguloqq))
Rr(0) = Cos(GtoR(angulor))
Rr(1) = Sin(GtoR(angulor))
Rrr(0) = Cos(GtoR(angulorr))
Rrr(1) = Sin(GtoR(angulorr))
Ss(0) = Cos(GtoR(angulos))
Ss(1) = Sin(GtoR(angulos))
Sss(0) = Cos(GtoR(anguloss))
Sss(1) = Sin(GtoR(anguloss))
For L1t = 1 To 1000 Step 100
  For L2t = 1 To 1000 Step 100
```

- Complejos de la cadena cinemática
  - For angulo1 = 0 To 360 Step 1
    - P(0) = Cos(GtoR(angulo1))
    - P(1) = Sin(GtoR(angulo1))
  - For angulo2 = 0 To 360 Step 1
    - Q(0) = Cos(GtoR(angulo2))
    - Q(1) = Sin(GtoR(angulo2))
  
- Determinación de las bases móviles
  
- Rotaciones en función de los complejos
  - e11(0) = ropq(P(), E1()).x(0)
  - e11(1) = ropq(P(), E1()).x(1)
  - e12(0) = ropq(Q(), E1()).x(0)
  - e12(1) = ropq(Q(), E1()).x(1)
  - a11(0) = ropq(Pp(), e11()).x(0)
  - a11(1) = ropq(Pp(), e11()).x(1)
  - a12(0) = ropq(Qq(), e12()).x(0)
  - a12(1) = ropq(Qq(), e12()).x(1)
  - b11(0) = ropq(Ppp(), a11()).x(0)
  - b11(1) = ropq(Ppp(), a11()).x(1)
  - b12(0) = ropq(Qqq(), a12()).x(0)
  - b12(1) = ropq(Qqq(), a12()).x(1)
  - LL1(0) = Int(L1t \* e11(0))
  - LL1(1) = Int(L1t \* e11(1))
  - LL2(0) = Int(L2t \* e12(0))
  - LL2(1) = Int(L2t \* e12(1))
  - LL1t(0) = Int(L1t \* a11(0))
  - LL1t(1) = Int(L1t \* a11(1))
  - LL2t(0) = Int(L2t \* a12(0))
  - LL2t(1) = Int(L2t \* a12(1))



$$LL1tt(0) = \text{Int}(L1t * b11(0))$$

$$LL1tt(1) = \text{Int}(L1t * b11(1))$$

$$LL2tt(0) = \text{Int}(L2t * b12(0))$$

$$LL2tt(1) = \text{Int}(L2t * b12(1))$$

$$Rbd(0) = (LL1t(0) + LL2t(0)) - (LL1(0) + LL2(0))$$

$$Rbd(1) = (LL1t(1) + LL2t(1)) - (LL1(1) + LL2(1))$$

$$Rbe(0) = (LL1tt(0) + LL2tt(0)) - (LL1(0) + LL2(0))$$

$$Rbe(1) = (LL1tt(1) + LL2tt(1)) - (LL1(1) + LL2(1))$$

$$\text{Temporal}(0) = ((LL1t(0) + LL2t(0)) - (LL1(0) + LL2(0)))$$

$$\text{Temporal}(1) = ((LL1t(1) + LL2t(1)) - (LL1(1) + LL2(1)))$$

$$\text{Temporal1}(0) = ((LL1tt(0) + LL2tt(0)) - (LL1(0) + LL2(0)))$$

$$\text{Temporal1}(1) = ((LL1tt(1) + LL2tt(1)) - (LL1(1) + LL2(1)))$$

- Se toma la menor del rango

If (Distancia(0) + rango > Temporal(0) And Distancia1(0) + rango > Temporal1(0)) And (Distancia(1) + rango > Temporal(1) And Distancia1(1) + rango > Temporal1(1)) And (Distancia(0) - rango < Temporal(0) And Distancia1(0) - rango < Temporal1(0)) And (Distancia(1) - rango < Temporal(1) And Distancia1(1) - rango < Temporal1(1)) Then

- Ángulos y dimensiones de los eslabones para las cadenas cinemáticas

$$\text{tetha1} = \text{angulo1}$$

$$\text{tetha2} = \text{angulo2}$$

$$L1 = L1t$$

$$L2 = L2t$$

$$\text{MsgBox}(L1)$$

- Se verifica que se cumplan las condiciones de los cuadrados;  $P0^2 + P1^2 = 1$  y  $Q0^2 + Q1^2 = 1$

If ((P(0) \* P(0) + P(1) \* P(1) = 1) And (Q(0) \* Q(0) + Q(1) \* Q(1) = 1))

Then

- Determinación de la posición de los vectores L3, L4 y sus rotaciones

$$Rr(0) = \text{Cos}(\text{GtoR}(\text{angulorr}))$$

$$Rr(1) = \text{Sin}(\text{GtoR}(\text{angulorr}))$$

$$Rrr(0) = \text{Cos}(\text{GtoR}(\text{angulorr}))$$

$$Rrr(1) = \text{Sin}(\text{GtoR}(\text{angulorr}))$$

$$Ss(0) = \text{Cos}(\text{GtoR}(\text{angulorr}))$$

$$Ss(1) = \text{Sin}(\text{GtoR}(\text{angulorr}))$$

$$Sss(0) = \text{Cos}(\text{GtoR}(\text{angulorr}))$$

$$Sss(1) = \text{Sin}(\text{GtoR}(\text{angulorr}))$$

For I3t = 1 To 1000 Step 100

For I4t = 1 To 1000 Step 100

- Complejos de la cadena cinemática

For angulo3 = 0 To 360 Step 1

$$R(0) = \text{Cos}(\text{GtoR}(\text{angulo3}))$$

$$R(1) = \text{Sin}(\text{GtoR}(\text{angulo3}))$$

For angulo4 = 0 To 360 Step 1

$$s(0) = \text{Cos}(\text{GtoR}(\text{angulo4}))$$

$$s(1) = \text{Sin}(\text{GtoR}(\text{angulo4}))$$

- Determinación de las bases móviles
- Rotaciones en función de los complejos

$$e13(0) = \text{ropq}(R(), E1()).x(0)$$

$$e13(1) = \text{ropq}(R(), E1()).x(1)$$

$$e14(0) = \text{ropq}(s(), E1()).x(0)$$

$$e14(1) = \text{ropq}(s(), E1()).x(1)$$

$$a13(0) = \text{ropq}(\text{Rr}(), e13()).x(0)$$

$$a13(1) = \text{ropq}(\text{Rr}(), e13()).x(1)$$

$$a14(0) = \text{ropq}(\text{Ss}(), e14()).x(0)$$

$$a14(1) = \text{ropq}(\text{Ss}(), e14()).x(1)$$

$$b13(0) = \text{ropq}(\text{Rrr}(), a13()).x(0)$$

$$b13(1) = \text{ropq}(\text{Rrr}(), a13()).x(1)$$

$$b14(0) = \text{ropq}(\text{Sss}(), a14()).x(0)$$

$$b14(1) = \text{ropq}(\text{Sss}(), a14()).x(1)$$

$$\text{LL3}(0) = \text{Int}(\text{l3t} * e13(0))$$

$$\text{LL3}(1) = \text{Int}(\text{l3t} * e13(1))$$

$$\text{LL4}(0) = \text{Int}(\text{l4t} * e14(0))$$

$$\text{LL4}(1) = \text{Int}(\text{l4t} * e14(1))$$

$$\text{LL3t}(0) = \text{Int}(\text{l3t} * a13(0))$$

$$\text{LL3t}(1) = \text{Int}(\text{l3t} * a13(1))$$

$$\text{LL4t}(0) = \text{Int}(\text{l4t} * a14(0))$$

$$\text{LL4t}(1) = \text{Int}(\text{l4t} * a14(1))$$

$$\text{LL3tt}(0) = \text{Int}(\text{l3t} * b13(0))$$

$$\text{LL3tt}(1) = \text{Int}(\text{l3t} * b13(1))$$

$$\text{LL4tt}(0) = \text{Int}(\text{l4t} * b14(0))$$

$$\text{LL4tt}(1) = \text{Int}(\text{l4t} * b14(1))$$

$$\text{Rbd}(0) = (\text{LL3t}(0) + \text{LL4t}(0)) - (\text{LL3}(0) + \text{LL4}(0))$$

$$\text{Rbd}(1) = (\text{LL3t}(1) + \text{LL4t}(1)) - (\text{LL3}(1) + \text{LL4}(1))$$

$$\text{Rbe}(0) = (\text{LL3tt}(0) + \text{LL4tt}(0)) - (\text{LL3}(0) + \text{LL4}(0))$$

$$\text{Rbe}(1) = (\text{LL3tt}(1) + \text{LL4tt}(1)) - (\text{LL3}(1) + \text{LL4}(1))$$

$$\text{Temporal}(0) = ((\text{LL3t}(0) + \text{LL4t}(0)) - (\text{LL3}(0) + \text{LL4}(0)))$$

$$\text{Temporal}(1) = ((\text{LL3t}(1) + \text{LL4t}(1)) - (\text{LL3}(1) + \text{LL4}(1)))$$

$$\text{Temporal1}(0) = ((\text{LL3tt}(0) + \text{LL4tt}(0)) - (\text{LL3}(0) + \text{LL4}(0)))$$

$$\text{Temporal1}(1) = ((\text{LL3tt}(1) + \text{LL4tt}(1)) - (\text{LL3}(1) + \text{LL4}(1)))$$

- Se toma la menor del rango

```

    If (Distancia(0) + rango > Temporal(0) And Distancia1(0)
+ rango > Temporal1(0)) And (Distancia(1) + rango > Temporal(1) And Distancia1(1)
+ rango > Temporal1(1)) And (Distancia(0) - rango < Temporal(0) And Distancia1(0) -
rango < Temporal1(0)) And (Distancia(1) - rango < Temporal(1) And Distancia1(1) -
rango < Temporal1(1)) Then

```

- Ángulos y dimensiones de los eslabones para las cadenas cinemáticas

```

    tetha3 = angulo1
    tetha4 = angulo2
    L3 = l3t
    L4 = l4t
    MsgBox (L1)

```

- Se verifica que se cumplan las condiciones de los cuadrados;  $R0^2 + R1^2 = 1$  y  $S0^2 + S1^2 = 1$

```

    If ((R(0) * R(0) + R(1) * R(1) = 1) And (s(0) * s(0) + s(1)
* s(1) = 1)) Then
        Exit Sub
    End If
End If
Next
Next
Next
Next

```

- Sale de la rutina para tres puntos de precisión

```

    Exit Sub
End If
End If
Next

```

Next

Next

Next

- Opción; “se evaluaron todas las soluciones posibles y de acuerdo con las condiciones ninguna fue satisfactoria”

MsgBox ("no se encontro solucion")

bandera1 = False

End Sub

- Grafica el punto mcb1

Private Sub MCB1\_Click()

- Determinación de la posición de los vectores de acuerdo con el modelo de síntesis

$L11(0) = \text{Int}(L1 * e11(0))$

$L11(1) = \text{Int}(L1 * e11(1))$

$L22(0) = \text{Int}(L2 * e12(0))$

$L22(1) = \text{Int}(L2 * e12(1))$

$L33(0) = \text{Int}(L3 * e13(0))$

$L33(1) = \text{Int}(L3 * e13(1))$

$L44(0) = \text{Int}(L4 * e14(0))$

$L44(1) = \text{Int}(L4 * e14(1))$

- Grafica el mecanismo

Graficamecanismo

End Sub

- Grafica el punto mcb2

Private Sub MCB2\_Click()

Dim Pp(1) As Single

Dim Qq(1) As Single

Dim Rr(1) As Single

Dim Ss(1) As Single

Dim angulop As Single

Dim anguloq As Single

Dim angulor As Single

Dim angulos As Single

- Determinación de la posición de los vectores de acuerdo con el modelo de síntesis

angulop = Int(Text1(13).Text)

anguloq = Int(Text1(14).Text)

angulor = Int(Text1(15).Text)

angulos = Int(Text1(16).Text)

Pp(0) = Cos(GtoR(angulop))

Pp(1) = Sin(GtoR(angulop))

Qq(0) = Cos(GtoR(anguloq))

Qq(1) = Sin(GtoR(anguloq))

Rr(0) = Cos(GtoR(angulor))

Rr(1) = Sin(GtoR(angulor))

Ss(0) = Cos(GtoR(angulos))

Ss(1) = Sin(GtoR(angulos))

a11(0) = ropq(Pp(), e11()).x(0)

a11(1) = ropq(Pp(), e11()).x(1)

a12(0) = ropq(Qq(), e12()).x(0)

a12(1) = ropq(Qq(), e12()).x(1)

a13(0) = ropq(Rr(), e13()).x(0)

a13(1) = ropq(Rr(), e13()).x(1)

a14(0) = ropq(Ss(), e14()).x(0)

a14(1) = ropq(Ss(), e14()).x(1)

L11(0) = Int(L1 \* a11(0))

L11(1) = Int(L1 \* a11(1))

L22(0) = Int(L2 \* a12(0))

L22(1) = Int(L2 \* a12(1))

L33(0) = Int(L3 \* a13(0))

L33(1) = Int(L3 \* a13(1))

L44(0) = Int(L4 \* e14(0))

L44(1) = Int(L4 \* e14(1))

- Grafica el mecanismo

Graficamecanismo

End Sub

- Grafica el punto mcb3

Private Sub MCB3\_Click()

Dim Pp(1) As Single

Dim Qq(1) As Single

Dim Rr(1) As Single

Dim Ss(1) As Single

Dim Ppp(1) As Single

Dim Qqq(1) As Single

Dim Rrr(1) As Single

Dim Sss(1) As Single

Dim angulop As Single

Dim anguloq As Single

Dim angulor As Single

Dim angulos As Single

Dim angulopp As Single

Dim anguloqq As Single

Dim angulorr As Single

Dim anguloss As Single

- Determinación de la posición de los vectores de acuerdo con el modelo de síntesis

angulop = Int(Text1(13).Text)

anguloq = Int(Text1(14).Text)

```

angulor = Int(Text1(15).Text)
angulos = Int(Text1(16).Text)
angulopp = Int(Text1(1).Text)
anguloqq = Int(Text1(2).Text)
angulorr = Int(Text1(3).Text)
anguloss = Int(Text1(4).Text)
Pp(0) = Cos(GtoR(angulop))
Pp(1) = Sin(GtoR(angulop))
Qq(0) = Cos(GtoR(anguloq))
Qq(1) = Sin(GtoR(anguloq))
Rr(0) = Cos(GtoR(angulor))
Rr(1) = Sin(GtoR(angulor))
Ss(0) = Cos(GtoR(angulos))
Ss(1) = Sin(GtoR(angulos))
Ppp(0) = Cos(GtoR(angulopp))
Ppp(1) = Sin(GtoR(angulopp))
Qqq(0) = Cos(GtoR(anguloqq))
Qqq(1) = Sin(GtoR(anguloqq))
Rrr(0) = Cos(GtoR(angulorr))
Rrr(1) = Sin(GtoR(angulorr))
Sss(0) = Cos(GtoR(anguloss))
Sss(1) = Sin(GtoR(anguloss))
a11(0) = ropq(Pp(), e11()).x(0)
a11(1) = ropq(Pp(), e11()).x(1)
a12(0) = ropq(Qq(), e12()).x(0)
a12(1) = ropq(Qq(), e12()).x(1)
a13(0) = ropq(Rr(), e13()).x(0)
a13(1) = ropq(Rr(), e13()).x(1)
a14(0) = ropq(Ss(), e14()).x(0)
a14(1) = ropq(Ss(), e14()).x(1)

```



```
b11(0) = ropq(Ppp(), a11()).x(0)
b11(1) = ropq(Ppp(), a11()).x(1)
b12(0) = ropq(Qqq(), a12()).x(0)
b12(1) = ropq(Qqq(), a12()).x(1)
b13(0) = ropq(Rrr(), a13()).x(0)
b13(1) = ropq(Rrr(), a13()).x(1)
b14(0) = ropq(Sss(), a14()).x(0)
b14(1) = ropq(Sss(), a14()).x(1)
L11(0) = Int(L1 * b11(0))
L11(1) = Int(L1 * b11(1))
L22(0) = Int(L2 * b12(0))
L22(1) = Int(L2 * b12(1))
L33(0) = Int(L3 * b13(0))
L33(1) = Int(L3 * b13(1))
L44(0) = Int(L4 * e14(0))
L44(1) = Int(L4 * e14(1))
```

- Grafica el mecanismo

```
Graficamecanismo
```

```
End Sub
```

- Grafica el mecanismo en la ventana de referencia

```
Private Sub Graficamecanismo()
```

- Definición de variables temporales para el sistema de pantalla

```
Dim ofsetx As Single
```

```
Dim ofsety As Single
```

```
Dim RT3(1) As Single
```

- Offset en x+2500 offset en y–2100, centrado referido al lazo1

```
ofsetx = 2500
```

```
ofsety = 1500
```

- Adecuación al sistema de pantalla

$RT3(0) = rb(0) + offsetx$

$RT3(1) = rb(1) + ofsety$

- Características de la gráfica del mecanismo

Line1.BorderWidth = 5

Line2.BorderWidth = 5

Line3.BorderWidth = 5

Line4.BorderWidth = 1

Line27.BorderWidth = 5

Line28.BorderWidth = 5

Line1.BorderColor = vbGreen

Line2.BorderColor = vbWhite

Line3.BorderColor = vbRed

Line4.BorderColor = vbWhite

Line27.BorderColor = vbWhite

Line28.BorderColor = vbWhite

Label5(2).Left = offsetx - 800

Label5(2).Top = ofsety

Label5(3).Left = offsetx + L44(0) - 800

Label5(3).Top = ofsety + L44(1)

- Corrección de cuadrante y offset de centrado

- Grafica el vector L1

Line1.x1 = offsetx

Line1.y1 = ofsety

Line1.x2 = offsetx + L11(0)

Line1.y2 = ofsety + L11(1)

- Grafica el vector L2

Line2.x1 = Line1.x2

$$\text{Line2.y1} = \text{Line1.y2}$$

$$\text{Line2.x2} = \text{Line2.x1} + \text{L22}(0)$$

$$\text{Line2.y2} = \text{Line2.y1} + \text{L22}(1)$$

- Grafica el vector L3

$$\text{Line3.x1} = \text{offsetx} + \text{L44}(0)$$

$$\text{Line3.y1} = \text{offsety} + \text{L44}(1)$$

$$\text{Line3.x2} = \text{Line3.x1} + \text{L33}(0)$$

$$\text{Line3.y2} = \text{Line3.y1} + \text{L33}(1)$$

- Grafica el vector L4

$$\text{Line4.x1} = \text{offsetx}$$

$$\text{Line4.y1} = \text{offsety}$$

$$\text{Line4.x2} = \text{Line4.x1} + \text{L44}(0)$$

$$\text{Line4.y2} = \text{Line4.y1} + \text{L44}(1)$$

- Grafica el eslabón acoplador

$$\text{Line27.x1} = \text{offsetx} + \text{L11}(0)$$

$$\text{Line27.y1} = \text{offsety} + \text{L11}(1)$$

$$\text{Line27.x2} = \text{offsetx} + \text{L11}(0) + 1000 * \text{Cos}(\text{GtoR}(30))$$

$$\text{Line27.y2} = \text{offsety} + \text{L11}(1) + 1000 * \text{Sin}(\text{GtoR}(30))$$

$$\text{Line28.x1} = \text{Line3.x1} + \text{L33}(0)$$

$$\text{Line28.y1} = \text{Line3.y1} + \text{L33}(1)$$

$$\text{Line28.x2} = \text{offsetx} + \text{L11}(0) + 1000 * \text{Cos}(\text{GtoR}(30))$$

$$\text{Line28.y2} = \text{offsety} + \text{L11}(1) + 1000 * \text{Sin}(\text{GtoR}(30))$$

- Dimensiones de los eslabones

$$\text{Text1}(5).\text{Text} = \text{L1}$$

$$\text{Text1}(6).\text{Text} = \text{L2}$$

$$\text{Text1}(7).\text{Text} = \text{L3}$$

$$\text{Text1}(8).\text{Text} = \text{L4}$$

- Rotaciones de los eslabones

Text1(17).Text = tetha1

Text1(18).Text = tetha2

Text1(19).Text = tetha3

Text1(20).Text = tetha4

- Coordenadas del punto Ro

Label5(4).Left = Line28.x2

Label5(4).Top = Line28.y2

Text1(21).Text = Line28.x2

Text1(25).Text = Line28.y2

End Sub

Private Sub sintesis3\_Click()

    Sintesis3Punto

End Sub

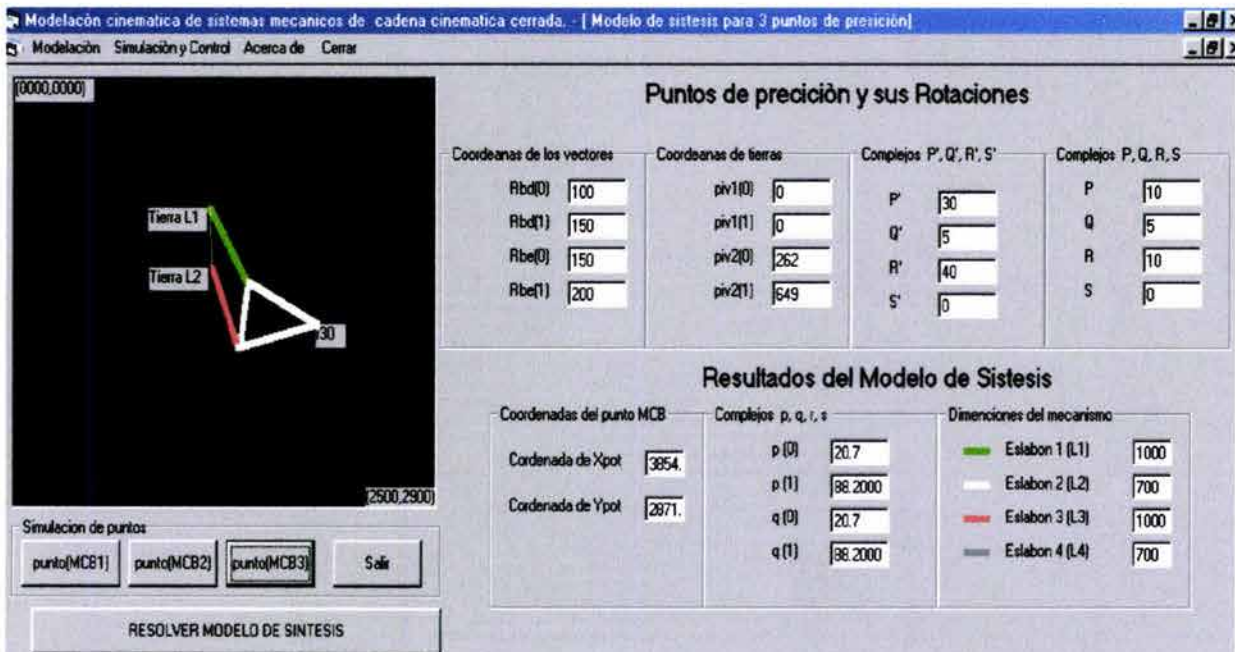


Figura C.1. Interfase gráfica del problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido

# CONCLUSIONES

En este trabajo de tesis fueron cumplidos los siguientes objetivos:

- Se modeló el problema de análisis de un mecanismo de cinco barras usando la rotación habitual sistematizada y parametrizada en el espacio vectorial de números complejos.
- Se construyeron los modelos de síntesis para conducción de cuerpo rígido tres y cuatro puntos de precisión.
- Los modelos resultantes fueron programados en VISUAL BASIC V6.

En esta tesis se analizaron y modelaron en forma sistemática los problemas de análisis para un mecanismo de cinco barras, y de síntesis (conducción de cuerpo rígido tres y cuatro puntos de precisión) relacionado con un mecanismo de cuatro barras. Las conclusiones y resultados de este trabajo se resumen en los puntos siguientes:

- El problema directo del análisis fue de seis ecuaciones con seis incógnitas, y el problema inverso de ocho por ocho, en ambas configuraciones.
- El problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (tres puntos de precisión) generó un sistema de doce ecuaciones con doce incógnitas.
- El problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (cuatro puntos de precisión) generó un sistema de veinte ecuaciones con veinte incógnitas.
- Las consideraciones de rigidez en el eslabón acoplador y el área de trabajo controlada, permitieron generar sistemas cuadrados para los problemas de síntesis y, por tanto, solución única para cada propuesta angular requerida.
- El modelado de los problemas de análisis y síntesis para mecanismos de cinco y cuatro barras, usando el álgebra de complejos parametrizada y sistematizada por [2] fue más claro y eficiente que las modelaciones hechas con los métodos tradicionales.

Futuros trabajos por desarrollar derivados de esta tesis son:

- Modelación del problema de síntesis para conducción de cuerpo rígido (cinco puntos de precisión).
- Modelación del problema de análisis; posición, velocidad y aceleración.
- Modelación del problema de síntesis: generación de función y entrada–salida.

# REFERENCIAS

- [1] Erdman A., Sandor G. *Diseño de mecanismos: análisis y síntesis*. (1998). México. Prentice Hall.
- [2] Reyes L. *Sobre la parametrización de las rotaciones y reflexiones de multicuerpos rígidos en el plano. Parte I: el marco teórico*. (1998). México. Universidad Anáhuac del Sur.
- [3] Reyes L. *Sobre una generalización del álgebra de cuaterniones en la sistematización de rotaciones rígidas en el espacio. Parte I: primera modificación del álgebra compleja. Reporte interno No. EGI-004/TI/MM-03-0798*. (1998). México. Universidad Anáhuac del Sur.
- [4] Cuenca F. *Modelación del análisis cinemático de una plataforma paralela plana usando el álgebra de cuaterniones*. (1996). México. Tesis (Maestría en Ingeniería Mecánica) UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, Sección Mecánica.
- [5] Méndez M. *Modelado cinemático de sistemas mecánicos de cadena cerrada*. (1995). México. Tesis (Maestría en Ingeniería Mecánica) UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, Sección Mecánica.

- [6] Miranda M. *Modelado cinemático de sistemas mecánicos de cadena abierta*. (1995). México. Tesis (Maestría en Ingeniería Mecánica) UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, Sección Mecánica.
- [7] Jiménez E., Cuenca F., Reyes L. *Análisis combinatorio de los movimientos de un robot de 2GDL*. (1999). México. Coloquio 1999, Facultad de ingeniería UNAM.
- [8] Jiménez E., Cuenca F., Reyes L. *Modelación cinemática de un robot paralelo tipo RRR*. (1999). México. Coloquio 1999, Facultad de ingeniería UNAM.
- [9] Jiménez E. *Simulación de un proceso productivo con obstáculo en la línea de producción*. (1998). México. Tesis (Maestría en Ingeniería Mecánica) UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, Sección Mecánica.
- [10] Torres D. *Diseño y construcción de una sembradora portátil para maíz*. (2000). México. Tesis (Maestría en Ingeniería Mecánica) UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, Sección Mecánica.
- [11] Angeles J. *Análisis y síntesis cinemáticos de sistemas mecánicos*. (1978). México. Editorial Limusa.
- [12] Angeles J. *Fundamentals of robotics mechanical system*. (1997). New York. Springer-Verlag.
- [13] Angeles J. *Matrix methods in applied kinematics*. (1978). México. UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios Superiores.
- [14] Baron L., Angeles J. *The direct kinematics of parallel manipulators under joint-sensor redundancy*. (2000). IEEE Transactions on robotics and automation. V16 n1 Febrero, p. 12-19.
- [15] Jiménez J., Alvarez G., Cardenal J., Cuadrado J. *A simple and general method for kinematic synthesis of spatial mechanisms*. (1997). Elsevier Science Ltd. V32 n3, p. 323-341.
- [16] Liu M., Li C., Li C. *Dynamics analysis of the Gough-Stewart platform manipulator*. (2000). IEEE Transactions on robotics and automation. V16 n1 Febrero, p. 94-98.
- [17] Norton R. *Diseño de maquinaria*. (1995). México. McGraw-Hill.
- [18] Chiang L. *Análisis dinámico de sistemas mecánicos*. (1999). México. Alfaomega.



- [19] Tsai L. *Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators*. (1999). New York. Wiley-Interscience.
- [20] Skowronski J. *Control dynamics of robotic manipulators*. (1986). Orlando Florida. Academic Press.
- [21] Blyth T., Robertson E. *Basic linear algebra*. (2000). New York. Springer-Verlag.
- [22] Ugural A., Fenster S. *Advanced strength and applied elasticity*. (1995). New York. Prentice Hall.
- [23] Shigley E., Vicker J. *Teoría de máquinas y mecanismos*. (1988). México. McGraw-Hill.
- [24] Mabie H., Ocvirck F. *Mechanisms and dynamics of machinery*. (1975). New York. John Wiley and Sons.
- [25] Soni A. *Mechanism synthesis and analysis*. (1974). New York. McGraw-Hill.
- [26] Fregoso A. *Los elementos del lenguaje de la matemática. Parte I: lógica y teoría de conjuntos*. (1977). México. Editorial Trillas.
- [27] Fregoso A. *Los elementos del lenguaje de la matemática. Parte II: funciones*. (1979). México. Editorial Trillas.
- [28] Tao D. *Applied linkage synthesis*. (1964). Palo Alto California. Addison-Wesley.
- [29] Lang S. *Linear algebra*. (1970). New York. Addison-Wesley.
- [30] Denavit J., Hartenberg R. *Kinematic synthesis of linkages*. (1964). New York. McGraw-Hill.
- [31] Hoffman K., Kunze R. *Álgebra lineal*. (1973). Madrid. Prentice Hall.
- [32] Barrientos A., Peñín L., Balaguer C., Aracil R. *Fundamentos de robótica*. (1997). Madrid. McGraw-Hill.
- [33] Meriam J. *Dinámica*. (1981). Barcelona. Editorial Recerté.
- [34] Nagel E., Cohen M. *Introducción a la lógica y el método científico*. (1961). Buenos Aires. Amorrortu Editores.
- [35] Mosterín J. *Teoría axiomática de conjuntos*. (1980). Barcelona. Editorial Ariel.
- [36] Suh C., Radcliffe C. *Kinematics and mechanisms design*. (1978). New York. John Wiley and Sons.
- [37] Leví E. *Elementos de mecánica del medio continuo*. (1971). Editorial Limusa.