



00365

# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS  
MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

SINGULARIDADES DE LA  
TRANSFORMACIÓN DE GAUSS Y DE  
LINEAS DE CURVATURA DE SUPERFICIES  
EN  $\mathbb{R}^3$

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE  
MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A :

LUCÍA IVONNE HERNÁNDEZ MARTÍNEZ

Director de tesis: Dr. Federico Sánchez Bringas



MÉXICO, D. F.,

MARZO 2004



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

## Contents

1	Introducción.	2
2	Singularidades de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ .	4
3	Singularidades de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ .	9
4	Transformación de Gauss de una superficie.	31
5	Teorema de caracterización de cúspides Gaussianas.	38
5.1	Singularidades de familias de transformaciones. . . . .	38
5.1.1	Familia de funciones altura. . . . .	39
5.2	Teorema de caracterización. . . . .	41
6	Singularidades de Superficies con un punto umbílico aislado	49
6.1	Configuraciones Darbouxianas. . . . .	49
6.2	Superficie con un punto umbílico aislado. . . . .	51
6.2.1	Análisis de $\Delta^{-1}$ . . . . .	52
6.2.2	Análisis de las regiones descritas por las condiciones de transversalidad. . . . .	55

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.  
NOMBRE: Lucía Luonne Hernández Martínez  
FECHA: 31/03/04  
FIRMA: Lucía P. H. Martínez

# 1 Introducción.

Consideremos una superficie encajada  $X$  en  $\mathbb{R}^3$ . Haciendo uso de la transformación de Gauss de dicha superficie, podemos encontrar las curvaturas principales de cada punto de la superficie y la curvatura Gaussiana, las cuales nos proveen de información geométrica valiosa acerca de ella.

Resulta interesante, ver qué información local podemos obtener acerca de la superficie en una vecindad de un punto donde la curvatura Gaussiana se anula, y por consiguiente donde al menos una de las curvaturas principales es cero; pero la otra no; a estos puntos se les conoce como puntos parabólicos genéricos de  $X$ .

Dado que la curvatura Gaussiana es el determinante de la diferencial de la transformación de Gauss, tendremos que el conjunto de puntos parabólicos de la superficie corresponde a las singularidades de la transformación de Gauss aplicada a  $X$ . Así de manera natural se planteó desde hace algunos años ya, la importancia de comprender el significado geométrico de la clasificación de las singularidades de la transformación de Gauss. En [3], Banchoff, Gaffney y McCrory realizan el estudio de superficies en  $\mathbb{R}^3$  en vecindades de puntos singulares de tipo cúspide de la transformación de Gauss. El Teorema principal del trabajo realizado por ellos, es un teorema de caracterización el cual nos afirma que si  $p$  es un punto cúspide de la transformación de Gauss  $N$ , entonces se cumplen una serie de situaciones geométricas en la superficie en una vecindad de éste, y viceversa. Si alguna de éstas situaciones se cumpliera alrededor de un punto  $p$ , y la transformación de Gauss es estable, entonces  $p$  es una singularidad del tipo cúspide de la transformación. Para comprender mejor el significado del Teorema, se muestran algunos ejemplos clave, los cuales ilustran cada caracterización.

La forma de estudiar las singularidades de la transformación de Gauss (continuando con las ideas presentadas en [3]), es a través de la transformación de Gauss modificada  $\tilde{N}$ , la cual, es una función del plano en el plano, difeomorfa a la transformación de Gauss  $N$ .

Esta nueva transformación de Gauss resulta muy interesante y útil, ya que en 1955, Whitney en [7] estudió las singularidades de familias de funciones del plano en el plano y demostró que las únicas singularidades genéricas de las funciones de  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}^2$  son doblez y cúspide. (En [5] López de Medrano y Bulajich desarrollan con detalle la parte de la demostración correspondiente a las formas normales dadas en [7].)

En los capítulos 4 y 5, explicamos con detalle el Teorema de Banchoff, y discutir algunas de las caracterizaciones de cúspides en la transformación de Gauss de una superficie en  $\mathbb{R}^3$ , empleando los ejemplos desarrollados con todo detalle, a lo largo del trabajo.

En los capítulos 2 y 3 se discute las técnicas desarrolladas por [5] para el estudio de las singularidades de funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  y del plano en el plano. La presentación de los resultados de singularidades de la Teoría clásica resulta ser más extensa en este trabajo, que en las fuentes originales, sobre todo en el caso de los ejemplos.

Del teorema de Whitney, presentamos la parte de la demostración correspondiente a las formas normales del doblez y la cúspide, la demostración correspondiente a la genericidad se omite, pues para los fines del trabajo realizado sólo se ocupa el resultado y no la técnica que se emplea para la demostración de éste.

El estudio realizado en el capítulo 4, nos llevo a analizar en el capítulo 6 el caso de las superficies que son gráficas de un polinomio de grado tres. polinomiales de grado tres, en una vecindad de un punto umbílico aislado. El objetivo inicial fue saber si existen relaciones geométricas interesantes entre las configuraciones descritas por puntos umbílicos darbouxianos en una superficie lisa y el conjunto singular de la transformación de Gauss de dicha superficie. El resultado obtenido muestra que el conjunto singular de la transformación de Gauss modificada es una hipérbola (o su caso degenerado) para superficies con puntos umbílicos darbouxianos del tipo  $D_1$  y  $D_2$ ; para puntos umbílicos darbouxianos del tipo  $D_3$  existen superficies cuyo conjunto singular de la transformación de Gauss modificada es una elipse, una hipérbola o una parábola (o su correspondiente caso degenerado).

A pesar de tener una demostración relativamente elemental, este resultado muestra que estas singularidades tienen relaciones no triviales que es interesante investigar.

## 2 Singularidades de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ .

En este capítulo estudiamos brevemente la clasificación de éstas funciones diferenciables, con respecto a su "orden" de singularidad. A continuación, definiremos la equivalencia de dos funciones de acuerdo a [5].

**Definición 1** Sean  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . diferenciables. Decimos que  $f$  en  $p$  es equivalente a  $g$  en  $q$  si existen difeomorfismos  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f, g \in C^\infty$ , tal que el diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array}$$

es decir,

$$(f\phi) = (\psi g).$$

**Definición 2** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^\infty$ , y  $k \in \mathbb{N}$ . Decimos que  $f$  es de orden  $k$  en el punto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  si todas las derivadas parciales de orden menor que  $k$  de  $f$  son cero en  $(x_0, y_0)$  y alguna parcial de orden  $k$  de  $f$  es distinta de cero en  $(x_0, y_0)$ .

**Definición 3** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^\infty$ , decimos que:

- a)  $f$  es regular en  $(x_0, y_0)$  si  $f$  es de orden 1 en  $(x_0, y_0)$ .
- b)  $f$  es regular si  $f$  es de orden 1 para todo  $(x, y)$  en  $\mathbb{R}^2$ .

La siguiente proposición caracteriza a todas las funciones regulares.

**Proposición 4 (5)** Sea  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , la función proyección,  $\pi(x, y) = x$ . Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^\infty$ . Si  $f$  es regular en  $(x_0, y_0)$  entonces  $f$  es equivalente en  $(x_0, y_0)$  a la función proyección en  $(0, 0)$ .

**Demostración.** Haciendo una traslación en la imagen y en el dominio de  $f$ , podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  y  $f(x_0, y_0) = 0$ . Como  $f$  es de orden 1 en  $(x_0, y_0)$ , tenemos que

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x, f_y)(x_0, y_0) \neq 0.$$

Supongamos que  $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ . Definimos  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , como  $F(x, y) = (f(x, y), y)$ , la derivada de  $F$ , es

$$DF = \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

el jacobiano de  $F$  en  $(x_0, y_0)$  es  $JF(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \neq 0$ . Por el Teorema de la función inversa, existe  $G(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$ , inversa local de  $F$ , tal que

$$(F \circ G)(x, y) = (x, y),$$

en una vecindad de  $(x_0, y_0)$ . Así,

$$F(G(x, y)) = (f(g_1, g_2), g_2),$$

obteniendo así,  $g_2(x, y) = y$ ,  $f(g_1, y) = x$ , es decir

$$(f \circ G)(x, y) = x,$$

por lo tanto, definimos  $\phi = G$ , donde  $\phi$  es el difeomorfismo que buscamos para la equivalencia, así:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R} \\ \phi \downarrow & & \downarrow id \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array}$$

por lo que  $f \circ \phi = \pi$ . ■

Con la proposición anterior, acabamos de ver que las funciones regulares, todas son equivalentes vía difeomorfismos a la función  $\pi$ . Continuando con el análisis, veamos que pasa con las las funciones de orden 2.

**Definición 5** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^\infty$ ; la matriz hessiana de  $f$  es

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}.$$

*Observación:* como  $f \in C^\infty$  entonces  $Hf$  es una matriz simétrica.

Decimos que  $Hf$  es no singular en un punto  $p$  si  $\det(Hf(p)) \neq 0$ .

**Definición 6** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $p \in \mathbb{R}^2$ , diremos que:

- a)  $p$  es un punto crítico de  $f$  si  $\nabla f(p) = (0, 0)$ .
- b)  $p$  es regular si no es punto crítico.
- c)  $p$  es punto crítico no degenerado si  $\nabla f(p) = (0, 0)$  y además  $Hf(p)$  es no singular.
- d)  $p$  es punto crítico degenerado si  $\nabla f(p) = (0, 0)$  y  $\det Hf(p) = 0$ .

Ahora damos algunos ejemplos de funciones cuyos hessianos tienen diferentes rangos.

**Ejemplo 7** Sea  $f(x, y) = x^2 - 3xy^2$ .

Busquemos los puntos críticos de  $f$ .

$$\nabla f(x, y) = (2x - 3y^2, -6xy).$$

Así, el origen es el único punto crítico de  $f$  y la matriz hessiana en  $(0, 0)$  es:

$$(Hf)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el origen es un punto crítico degenerado. Observemos que el rango de  $Hf(0, 0)$  es uno.



**Ejemplo 8** Considere  $g(x, y) = x^2 + y^2$ . El gradiente de  $g$  es  $\nabla g = (2x, 2y)$ . Así, el único punto crítico es el origen. La matriz hessiana evaluada en el punto  $(0, 0)$  es

$$(Hg)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de esta matriz es dos, por lo tanto el origen es un punto crítico no degenerado.

Ahora la pregunta es, si  $f$  en  $p$  es equivalente a  $g$  en  $q$ , ¿qué relación existe entre el hessiano de  $f$  en  $p$  y el hessiano de  $g$  en  $q$ ?. Observemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \end{array}$$

de la relación de equivalencia tenemos que  $(f \circ \phi)(x, y) = (\psi \circ g)(x, y)$ . Derivando esta expresión con respecto a  $x$  obtenemos:

$$f_x(\phi_1, \phi_2)\phi_{1x} + f_y(\phi_1, \phi_2)\phi_{2x} = \psi' g_x.$$

Análogamente para  $y$  tenemos:

$$f_x(\phi_1, \phi_2)\phi_{1y} + f_y(\phi_1, \phi_2)\phi_{2y} = \psi' g_y.$$

Entonces la derivada total, será

$$\nabla f \cdot D\phi = \psi' \nabla g.$$

De la expresión anterior, se ve claramente que si  $p$  es punto crítico de  $f$  entonces  $\phi(p) = q$  también será punto crítico de  $g$ .

Derivando por segunda vez las dos ecuaciones anteriores, tenemos

$$(D\phi)^t Hf D\phi = \psi H(g).$$

Debido a que  $\phi, \psi$  son difeomorfismos, entonces  $D\phi$  es no singular y  $\psi' \neq 0$ , por lo cual, si la hessiana de  $f$  es singular en  $p$ , entonces también será singular la hessiana de  $g$  en  $\phi(p) = q$ . Es decir las matrices son semejantes, módulo una constante.

Como ya habíamos dicho,  $Hf$ , es una matriz simétrica de  $2 \times 2$ , entonces de la teoría básica de álgebra lineal, sabemos que, dadas dos matrices  $A$  y  $B$ ,  $A$  es similar a  $B$  si existe una matriz no singular  $X$  tal que  $XAX^t = B$ . Bajo esta equivalencia, hay formas canónicas para las matrices simétricas. Cualquier matriz simétrica de  $2 \times 2$  es equivalente a una de las siguientes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así tenemos sólo 6 posibilidades para la matriz hessiana, 3 singulares y 3 no singulares.

**Definición 9** a) El corranko de una matriz  $A$  de  $n \times n$  se define como  $n - \text{rango}(A)$ .

b) El corranko de  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  se define como el corranko de  $Hf$ .

c) El índice de una matriz simétrica es el número de términos negativos que tiene en la diagonal, en su forma diagonal.

d) El índice de  $f$  en  $p$  es el índice de la matriz hessiana de  $f$  en  $p$ .

**Definición 10** Sean  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de clase  $C^\infty$ . Decimos que  $f$  en  $p$  es  $C^\infty$  equivalente con orientación a  $g$  en  $p$  si existen difeomorfismos locales  $\phi(p) = q$  tal que  $f \circ \phi = \psi \circ g$  y  $\psi' > 0$ .

Todo el análisis de funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$  alrededor de un punto crítico no degenerado, esta contenido en el siguiente Lema, debido a Morse.

**Lema 11 (5)** .Si  $p$  es un punto crítico no degenerado de  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de clase  $C^\infty$ , entonces  $f$  en  $p$  es equivalente con orientación a una y sólo una de las siguientes funciones en  $(0, 0)$ .

a)  $x^2 + y^2$  de índice 0.

b)  $x^2 - y^2$  de índice 1.

c)  $-x^2 - y^2$  de índice 2.

**Demostración.** Demos un bosquejo de ésta, la cual se puede consultar en [5]. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $p = (0, 0)$  y que  $f(p) = 0$ . Debido a que  $p$  es punto crítico, podemos ver que  $f$  puede escribirse de la forma

$$f(x, y) = h_{11}(x, y)x^2 + h_{12}(x, y)xy + h_{22}(x, y)y^2,$$

obteniendo las parciales de  $f$  y evaluando éstas en el origen, obtenemos la expresión de la matriz hessiana de  $f$  en  $p$  el cual queda expresado como

$$(Hf)(p) = \begin{pmatrix} 2h_{11}(0, 0) & h_{12}(0, 0) \\ h_{12}(0, 0) & 2h_{22}(0, 0) \end{pmatrix}$$

Finalmente, realizando un cambio de coordenadas, se lleva a esta matriz a la forma diagonal

$$(Hf)(p) = \begin{pmatrix} \pm 2 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix},$$

la cual corresponde a la función  $f(x, y) = \pm x^2 \pm y^2$ . ■

De este Lema, se deriva inmediatamente el siguiente Corolario.

**Corolario 12 (5)** . *Un punto crítico no degenerado es un punto crítico aislado.*

Los siguientes corolarios nos serán de utilidad en el capítulo 2.

**Corolario 13 (5)** *Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^\infty$ , tal que  $f(0, y) = 0$  para toda  $y$ , entonces existe  $g \in C^\infty$ ,  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f(x, y) = xg(x, y)$ , donde  $g(0, y) = f_x(0, y)$ .*

**Corolario 14 (5)** *Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \in C^\infty$ ; si  $f(0, y) = f_x(0, y) = 0$ , entonces  $f(x, y) = x^2g(x, y)$  donde  $g \in C^\infty$  y además*

$$g(0, y) = \frac{f_{xx}(0, y)}{2}.$$

### 3 Singularidades de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ .

De aquí en adelante supondremos que las funciones y difeomorfismos son de clase  $C^\infty$ , a menos que se especifique lo contrario. Para las siguientes definiciones seguiremos basándonos en [5].

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f = (f_1, f_2)$ . La derivada de  $f$  es la matriz

$$Df = \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & f_{2y} \end{pmatrix}.$$

**Definición 15** Sea  $p \in \mathbb{R}^2$ ,

- a) El rango de  $f$  en  $p$  es por definición el rango de  $Df$  en  $p$ .
- b)  $f$  es regular en  $p$  si  $Df(p)$  tiene rango máximo.
- c)  $f$  es singular en  $p$  si no es regular.
- d) El jacobiano de  $f$  en  $p$  es el determinante de  $Df(p)$  y lo denotamos por  $Jf(p)$ .

Al igual que en el capítulo anterior, definiremos la equivalencia entre dos funciones.

**Definición 16** Sean  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f, g \in C^\infty$ . Decimos que  $f$  en  $p$  es equivalente a  $g$  en  $q$ , (o  $C^\infty$  equivalente) si existen difeomorfismos  $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $\phi(q) = p$  tal que el diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2 \\ \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

es decir,

$$(f\phi)(q) = (\psi g)(q).$$

El siguiente teorema nos dice que esencialmente funciones regulares, solo hay una.

**Proposición 17** Si  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , es regular en  $p$ , entonces  $f$  es equivalente en  $p$  a la función identidad  $id : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  en  $(0, 0)$ .

**Demostración.** Veamos que existen difeomorfismos  $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , en una vecindad de  $p$  tal que  $f\phi = \psi$ .

Como  $f$  es regular en  $p$ ,

$$Df(p) = \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & f_{2y} \end{pmatrix},$$

tiene rango máximo, entonces  $Jf(p) \neq 0$ ; así, por el Teorema de la función inversa, existe  $G = (g_1, g_2)$  en una vecindad de  $p$  tal que  $G \circ f = Id$  y  $f \circ G = Id$ . Sea  $\phi = Id$ , y sea  $\psi = G$ , por lo tanto, el diagrama queda

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ Id \downarrow & & \downarrow G \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{Id} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

por lo tanto  $f$  es equivalente a la identidad. ■

La siguiente proposición nos dice que el rango de una función es invariante bajo la equivalencia entre funciones.

**Proposición 18** Sean  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Si  $f$  en  $p$  es equivalente a  $g$  en  $q$  entonces el rango de  $f$  en  $p$  es igual al rango de  $g$  en  $q$ .

La prueba de esta demostración se realiza de manera análoga a la prueba de la singularidad de la matriz hessiana de dos funciones vista en el capítulo 1.

Ahora nos interesa analizar el jacobiano de una función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ , en particular el lugar geométrico de sus ceros, es decir, donde se anula y así, caracterizar cuándo este conjunto es una curva lisa. Este jacobiano, lo podemos ver como una función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}$ .

Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , decimos que el conjunto

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / F(x, y) = 0\}$$

es una curva lisa si el gradiente es diferente de cero en cada punto del conjunto  $Z$  (i.e.,  $\nabla F = (F_x, F_y) \neq 0$ , para todo  $(x, y) \in Z$ ).

Observemos que si  $(x_0, y_0)$  es un punto tal que

$$\begin{aligned} F(x_0, y_0) &= 0, \\ \nabla F(x_0, y_0) &\neq (0, 0), \end{aligned}$$

esto implica que  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$  o  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ . Supongamos que  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ . Entonces por el Teorema de la función implícita tenemos que existe  $U$  una vecindad de  $x_0$  y  $\gamma : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\gamma \in C^\infty$ , tal que

$$\begin{aligned} \gamma(x_0) &= y_0, \\ F(x, \gamma(x)) &= 0, \end{aligned}$$

es decir el conjunto de ceros de  $F$ , en una vecindad  $U$ , se puede ver como la gráfica de una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ .

Además  $(x, \gamma(x))$  son los únicos puntos en la vecindad de  $(x_0, y_0)$  donde  $F$  vale cero. De esta manera motivamos la siguiente definición.

**Definición 19** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

a) Decimos que  $f$  es buena si en todo punto  $(x, y)$  tal que el jacobiano de  $f$  es cero, tenemos que el gradiente del jacobiano es distinto de cero. Es decir,  $f$  es buena si en todo punto tal que  $Jf(x, y) = 0$ , se tiene que  $\nabla Jf(x, y) \neq 0$ .

b) El conjunto de puntos  $p \in \mathbb{R}^2$  tales que  $Jf(p) = 0$ , es el conjunto singular de  $f$  y lo denotaremos por  $\Sigma(f)$ .

**Ejemplo 20** Consideremos  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $f(x, y) = (x^2, y^2)$ . Entonces

$$Df = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix},$$

$$Jf = 4xy,$$

$$\nabla Jf = 4(y, x),$$

Observemos que  $Jf(0, 0) = 0$ , y  $\nabla Jf(0, 0) = (0, 0)$ ; por lo tanto  $f$  no es buena.

**Ejemplo 21** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dada por  $f(x, y) = (x^2, y)$ . Entonces

$$Df = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Jf = 2x,$$

$$\Sigma(f) = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\nabla Jf = (2, 0);$$

así  $\nabla Jf(0, y) \neq (0, 0)$  y por lo tanto  $f$  es buena.

**Ejemplo 22** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x, y) = (xy, y)$ . Entonces

$$Df = \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Jf = y,$$

$$\Sigma(f) = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\nabla Jf = (0, 1),$$

así en  $(x, 0)$ ,  $\nabla Jf \neq (0, 0)$ , por lo tanto  $f$  es buena.

Ahora, veamos, si tengo dos funciones  $f, g$  que son equivalentes, ¿qué pasa con su respectivo conjunto singular?. Veamos el siguiente Teorema.

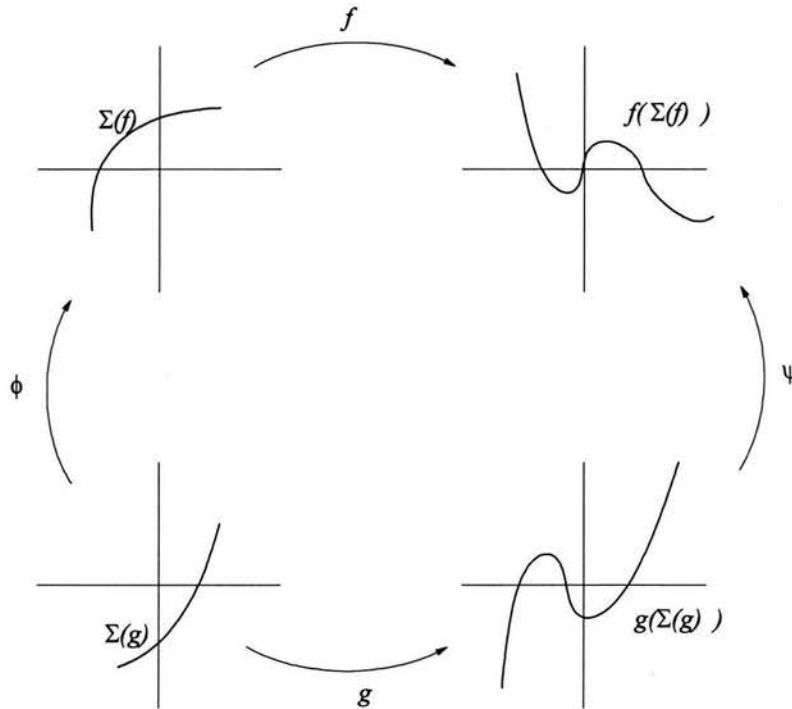
**Teorema 23** Si  $f$  y  $g$  son equivalentes en un punto donde sus jacobianos se anulan, sus conjuntos singulares deben ser equivalentes en una vecindad del punto en el sentido de que  $\phi$  transforma  $\Sigma(g)$  en  $\Sigma(f)$  bajo un difeomorfismo.

**Demostración.** Dado el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\
 \phi \downarrow & & \downarrow \psi \\
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^2
 \end{array}$$

Obtenemos la composición  $(f \circ \phi)(q) = (\psi \circ g)(q)$ , para algún  $q$ .

Derivando tenemos  $Df(\phi(q))D\phi(q) = D\psi(g(q))Dg(q)$ , y ahora si consideramos el jacobiano cada una de las matrices anteriores, tenemos  $Jf(\phi(q))J\phi(q) = J\psi(g(q))Jg(q)$ . Por ser  $\phi$  y  $\psi$  difeomorfismos, sabemos que  $J\phi(q) \neq 0 \neq J\psi(g(q))$ . Es así como vemos que el conjunto de singularidades de  $f$  se transforma en el conjunto de singularidades de  $g$  bajo  $\phi$  en una vecindad del punto  $q$ .

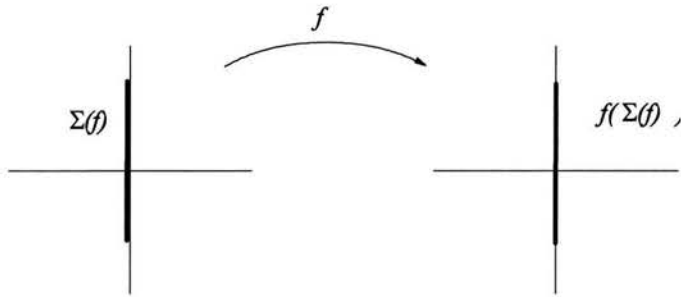


■

Además,  $f(\Sigma(f)) = f(\phi(\Sigma(g))) = \psi(g(\Sigma(g)))$ , aclaremos lo anterior con un ejemplo.

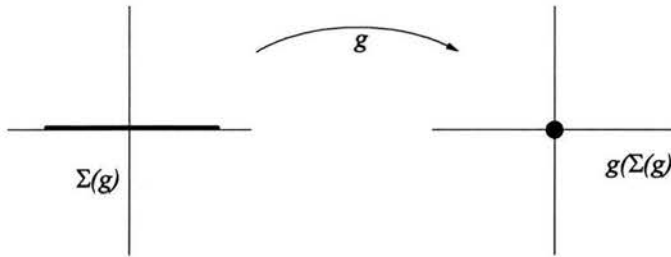
**Ejemplo 24** Sean  $f(x, y) = (x^2, y)$ ,  $g(x, y) = (xy, y)$ .

Observemos que las funciones  $f$  y  $g$  ya fueron analizadas en los ejemplos 21 y 22 respectivamente; en éstos vimos que  $Jf = 2x$ ,  $\Sigma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x = 0\}$ . Entonces  $f(\Sigma(f)) = (0, y)$ .



$\Sigma(f)$  y  $f(\Sigma(f))$ .

Por otro lado, para  $g$  tenemos que  $Jg = y$ ,  $\Sigma(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ , así  $g(\Sigma(g)) = (0, 0)$ . Como podemos observar, en este caso la imagen del conjunto  $\Sigma(g)$  bajo  $g$  se transforma en el origen, mientras que la imagen de  $\Sigma(f)$  bajo  $f$  es el eje  $y$ ; por lo tanto,  $f$  y  $g$  no son equivalentes.



$\Sigma(g)$  y  $g(\Sigma(g))$ .

Con esto podemos reiterar que para que dos funciones sean equivalentes, no sólo el conjunto de puntos singulares debe ser equivalentes, sino que las restricciones de  $f$  y  $g$  a sus conjuntos singulares también deben ser equivalentes.

Ahora, continuemos con el análisis del jacobiano de una función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ . Considere lo siguientes aspectos:

Primero:

Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $p \in \mathbb{R}^2$ , dijimos que  $f$  es buena en  $p$  si cuando  $Jf(p) = 0$  se tiene que  $\nabla Jf(p) \neq 0$ ; bajo estas condiciones, sabemos que existe una curva  $\sigma : (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que:  $\sigma(0) = p$ , y que  $\sigma$  es regular, es decir que

$$\sigma'(t) \neq (0, 0) \text{ y } J(\sigma(t)) = 0, \text{ para todo } t \in (-\epsilon, \epsilon).$$

La última expresión nos dice que la imagen de  $\sigma$  son los puntos singulares de  $f$ . En otras palabras, los puntos singulares de  $f$  quedan parametrizados por  $\sigma$ .



Segundo:

Supongamos que  $p = (x_0, y_0)$  entonces,

$$Jf(x_0, y_0) = 0, \quad \nabla Jf(x_0, y_0) = (J_x f, J_y f)(p) \neq (0, 0)$$

Supongamos que  $J_y f(p) \neq 0$ , entonces por el Teorema de la función implícita, existe  $\gamma(x)$  definida en una vecindad de  $x_0$  tal que

$$\gamma(x_0) = y_0 \quad \text{y} \quad Jf(x, \gamma(x)) = 0.$$

Así, de 1) y 2), tenemos que  $\sigma(0) = (x_0, \gamma(x_0)) = (x_0, y_0)$  y además

$$\sigma'(t) = (1, \gamma'(x_0 + t)) \neq (0, 0).$$

Los siguientes ejemplos son de particular importancia debido a que representan a las dos únicas singularidades genéricas (ver Teorema 33) de funciones del plano en el plano.

**Definición 25** . Decimos que el doblez es la función definida por:

$$d : (x, y) \rightarrow (x^2, y).$$

Como ya habíamos visto,

$$Dd = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Entonces el jacobiano será  $Jd = 2x$ , y el conjunto de singularidades es  $\Sigma(d) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = 0\}$

Vemos que  $\nabla Jd = (2, 0) \neq (0, 0)$ , para todo  $(x, y)$ . Entonces  $d$  es una función buena para todo  $(x, y)$ , por lo tanto podemos dar una parametrización para  $\Sigma(d)$  y su imagen. Consideremos la parametrización para  $\Sigma(d)$  dada por  $\sigma(t) = (0, t)$ . Y ahora, la imagen de estos puntos singulares bajo  $d$  es  $d(\sigma(t)) = (0, t)$ .

Observemos que la imagen de  $\Sigma(d)$  bajo  $d$  es una curva regular.

**Definición 26** Decimos que la cúspide simple es la función definida por:

$$c : (x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{3}x^3 + xy, y\right).$$

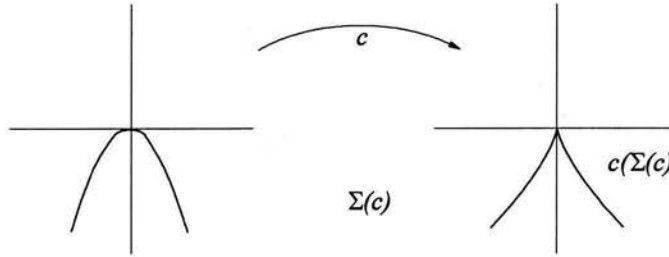
Calculemos la curva de puntos singulares de  $c$ .

$$Dc = \begin{pmatrix} x^2 + y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Entonces el jacobiano será  $Jc = x^2 + y$ , y por lo tanto el conjunto de singularidades será  $\Sigma(c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -x^2\}$

Calculando el gradiente tenemos,  $\nabla Jc = (2x, 1) \neq (0, 0)$ , para todo  $(x, y)$ . Entonces  $c$  es una función buena para todo  $(x, y)$ , por lo tanto podemos encontrar una parametrización para  $\Sigma(c)$  y su imagen,  $\sigma(t) = (t, -t^2)$ . Y ahora, la imagen de estos puntos singulares bajo  $c$  es  $c(\sigma(t)) = (\frac{-2}{3}t^3, -t^2)$ .

Observemos que la imagen de  $\Sigma(c)$  bajo  $c$  es una cúspide, es una curva singular en cero.



**Definición 27** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $p$  un punto en  $\mathbb{R}^2$ . Decimos que  $p$  es un punto doblez de  $f$  si:

- a)  $f$  es buena en  $p$ ,
- b)  $f$  tiene rango uno en  $p$ ,
- c)  $f(\Sigma(f))$  es una curva regular en  $p$ .

Desarrollando estas condiciones en forma analítica, tenemos que, si  $f$  es de rango uno y regular en  $p$  entonces para que se cumpla a) tenemos que:

$$Jf(p) = (f_{1x}f_{2y} - f_{2x}f_{1y})(p) = 0$$

$$\nabla Jf(p) = \begin{pmatrix} f_{1xx}f_{22y} + f_{1x}f_{2xy} - f_{2xx}f_{1y} - f_{2x}f_{1xy}, \\ f_{1yx}f_{2y} + f_{2yy}f_{1x} - f_{2yx}f_{1y} - f_{2x}f_{1yy} \end{pmatrix} (p) \neq 0,$$

La condición c) nos pide que  $f$  sea regular en  $p$ , para ver esto, tenemos que calcular el vector tangente a la curva  $\Sigma(f)$  en el punto  $p$ .

Dada la curva  $\{Jf = 0\}$ , como

$$\nabla f = (J_x f, J_y f),$$

entonces un vector tangente a dicha curva, esta dado por  $(-J_y f, J_x f)$ , y la imagen de este vector será:

$$Df \cdot (-J_y f, J_x f) = (-f_{1x}J_y f + f_{1y}J_x f, -J_y f f_{2x} + f_{2y}J_x f)(p) \neq (0, 0),$$

Por lo tanto, podemos concluir que  $p$  es un doblez si cumple con las condiciones

$$Jf(p) = 0$$

y

$$Df \cdot (-J_y f, J_x f) = (-f_{1x} J_y f + f_{ix} J_x f, -J_y f f_{2x} + f_{2y} J_x)(p) \neq (0, 0).$$

**Definición 28** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $p$  un punto en  $\mathbb{R}^2$ . Decimos que  $p$  es un punto cúspide de  $f$  si:

- a)  $f$  es buena en  $p$ ,
- b)  $f$  tiene rango uno en  $p$ ,
- c)  $f(\Sigma(f))$  es de orden 2 en  $p$ , es decir, que  $(f(\Sigma(f)))'(p) = 0$ , pero  $(f(\Sigma(f)))''(p) \neq 0$ .

Además, diremos que

**Definición 29**  $p$  es un punto cúspide simple de  $f$  si las condiciones a), b) y c) se cumplen, y además  $(f(\Sigma(f)))''(p)$  y  $(f(\Sigma(f)))'''(p)$  son linealmente independientes.

Es interesante ver como en el siguiente ejemplo, dada una función que no tiene puntos singulares del tipo cúspide o doblez, al ser ligeramente perturbada, algunos de éstos tipos de puntos aparecen.

**Ejemplo 30** La función  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $g(x, y) = (x^2, y^2)$ , es buena excepto en el  $(0, 0)$ . Veamos como podemos aproximar a  $g$  por una función buena.

Sea  $A = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$ , y  $g_\varepsilon(x, y) = g(x, y) + A(x, y)$ ,

Así  $g_\varepsilon(x, y) = (x^2 + \varepsilon y, y^2 + \varepsilon x)$ , entonces

$$Dg_\varepsilon = \begin{pmatrix} 2x & \varepsilon \\ \varepsilon & 2y \end{pmatrix},$$

Por lo tanto  $Jg_\varepsilon = 4xy - \varepsilon^2$ , entonces el conjunto  $\Sigma(g_\varepsilon)$  será  $\left\{ (x, y) / y = \frac{\varepsilon^2}{4x} \right\}$ , y  $\nabla g_\varepsilon = (4y, 4x)$  que en el conjunto de puntos singulares siempre es diferente de cero, por lo tanto  $g_\varepsilon$  es buena.

Busquemos la imagen de  $\Sigma(g_\varepsilon)$ . Una parametrización para  $\Sigma(g_\varepsilon)$  es  $\sigma : t \rightarrow (t, \frac{\varepsilon^2}{4t})$ , con  $t \neq 0$ . Entonces  $g_\varepsilon(\Sigma(g_\varepsilon))$  será:

$$g_\varepsilon(\sigma(t)) = \left( t^2 + \frac{\varepsilon^2}{4t}, \varepsilon t - \frac{\varepsilon^4}{16t^2} \right),$$

para ver si la imagen es una curva regular, calculemos  $g'_\varepsilon(\Sigma(g_\varepsilon))$ .

$$g'_\varepsilon(\Sigma(g_\varepsilon)) = \left(2t - \frac{\varepsilon^3}{4t^2}, \varepsilon - \frac{\varepsilon^4}{8t^3}\right),$$

y este vector resulta ser  $(0,0)$  si  $t = \frac{\varepsilon}{2}$ . Por lo tanto, el punto  $\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$  es un punto singular de  $g_\varepsilon$  y también de  $g'_\varepsilon(\Sigma(g_\varepsilon))$ . Calculemos ahora  $g''_\varepsilon(\Sigma(g_\varepsilon))$ .

$$g'_\varepsilon(\Sigma(g_\varepsilon))(p) = (6,6) \neq (0,0),$$

por lo tanto  $p$  es un punto cúspide de  $g_\varepsilon$ . Para ver si se trata de un punto cúspide simple calculemos  $g'''_\varepsilon(\Sigma(g_\varepsilon))$ .

$$g'''_\varepsilon(\Sigma(g_\varepsilon)) = \left(\frac{-3\varepsilon^3}{2t^4}, \frac{-3\varepsilon^4}{2t^5}\right),$$

y que evaluada en  $\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ , obtenemos  $\left(\frac{-24}{\varepsilon}, \frac{-48}{\varepsilon}\right)$ , así  $g'''_\varepsilon(\Sigma(g_\varepsilon))$  y  $g''_\varepsilon(\Sigma(g_\varepsilon))$  son linealmente independientes, entonces  $p$  es cúspide simple.

**Definición 31** .Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Decimos que  $f$  es excelente si todos sus puntos son puntos cúspide, dobleces o puntos regulares.

**Definición 32** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , diremos que  $f$  es estable con la topología de Whitney, si existe una vecindad  $W_f$  de  $f$  en  $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  tal que cada  $f'$  en  $W_f$  es equivalente a  $f$ .

El siguiente Teorema se debe a Whitney (1955). En el Teorema probaremos solamente a) y b), debido a que lo que nos interesa a futuro es la caracterización de la cúspide.

**Teorema 33** .Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f \in C^\infty$ ,

a) Si  $p$  es un punto doblez de  $f$ , entonces  $f$  es equivalente a  $d$  en  $(0,0)$  donde

$$d : (x, y) \rightarrow (x^2, y),$$

b) Si  $p$  es un punto cúspide de  $f$ , entonces  $f$  es equivalente a  $c$  en  $(0,0)$  donde

$$c : (x, y) \rightarrow \left(\frac{1}{3}x^3 + xy, y\right),$$

c) Las funciones excelentes son densas en el espacio de funciones de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ , es decir, casi toda función de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  es excelente o bien, se puede aproximar por una función excelente.

d) Las funciones estables son las excelentes, es decir, los únicos puntos singulares donde la función es estable son dobleces y cúspides.

**Demostración.** Comenzemos con a). Podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$p = (0, 0), \quad f(p) = (0, 0),$$

así, la prueba se puede dividir en 4 pasos, los cuales consisten en demostrar que:

1.  $f$  se puede escribir como  $(f_1(x, y), y)$ ,
2.  $\Sigma(f)$  es equivalente a  $\Sigma(d)$
3.  $f(\Sigma(f))$  es equivalente a  $d(\Sigma(d))$
4.  $f$  es equivalente a  $d$  en cero.

**PASO 1.**

Analizemos ahora el siguiente lema que permite escribir a  $f$  de la forma:  $f(x, y) = (f_1(x, y), y)$ .

**Lema 34** Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f$  de rango 1, entonces  $f$  puede escribirse de la forma:  $f(x, y) = (f_1(x, y), y)$ .

**Demostración.** Sea  $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ ,

$$Df = \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ f_{2x} & f_{2y} \end{pmatrix},$$

Como  $f$  es de rango 1, podemos suponer que  $f_{2y}(0, 0) \neq 0$ . Sea  $\lambda(x, y) = (x, f_2(x, y))$ , entonces

$$D\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_{2x} & f_{2y} \end{pmatrix},$$

La función  $\lambda$  es no singular en una vecindad del  $(0, 0)$  pues  $f_{2y}(0, 0) \neq 0$ , por lo tanto  $\lambda$  es un difeomorfismo local, además por el Teorema de la función inversa existe  $\phi$  tal que  $(\lambda \circ \phi)(x, y) = (x, y)$ . Si  $\phi(x, y) = (\phi_1, \phi_2)$ , entonces

$$\begin{aligned} (\lambda \circ \phi)(x, y) &= \lambda(\phi_1, \phi_2) \\ &= (\phi_1, f_2(\phi)) \\ &= (x, y), \end{aligned}$$

de aquí que,  $f_2(\phi) = y$ . Entonces  $(f \circ \phi)(x, y) = (f_1(\phi), y)$ . Sea  $\tilde{f} = f \circ \phi$ , entonces  $\tilde{f}$  es equivalente a  $f$  en  $(0, 0)$  y  $\tilde{f}(x, y) = (\tilde{f}_1(x, y), y)$  donde  $\tilde{f}_1(x, y) = (f \circ \phi)(x, y)$ . ■

**PASO 2.**

Demostremos ahora que  $\Sigma(f)$  es equivalente a  $\Sigma(d)$ .

Por el paso 2, tenemos que  $f$  tiene la forma  $f(x, y) = (f_1(x, y), y)$ , entonces

$$Df = \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para que  $p$  sea un doblez, necesitamos que  $f_{1x}(p) = 0$ , ya que  $f$  tiene rango 1. Por lo tanto, el jacobiano esta dado por

$$Jf = f_{1x}(x, y),$$

por lo que

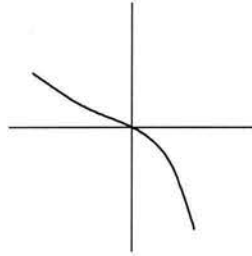
$$\Sigma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2. \text{ tal que } f_{1x}(x, y) = 0\}.$$

Entonces  $\nabla Jf = (f_{1xx}, f_{1xy})$ . Por ser  $f$  buena en  $p$  tenemos que

$$\nabla Jf(0, 0) \neq (0, 0).$$

El vector tangente a  $\{Jf = 0\}$  es  $(-f_{1xy}, f_{1xx})$  y la imagen bajo  $f$  de este vector es  $(-f_{1xy}f_{1x} - f_{1y}f_{1xx}, f_{1xx})$ . Evaluando en el origen tenemos que este vector es  $(-f_{1y}, 1)f_{1xx}$ . Como  $f(\Sigma(f))$  es una curva regular, (recordemos que este es requisito para ser doblez), el vector tangente a esta curva es diferente del  $(0, 0)$ .

El conjunto de puntos críticos esta dado por  $f_{1x}(x, y) = 0$  y además se tiene que  $f_{1xx}(0, 0) \neq 0$ . Entonces el Teorema de la función implícita nos dice que existe  $\gamma_0 : V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\gamma(0) = 0$  tal que  $f_{1x}(\gamma(y), y) = 0$ , como en la siguiente figura.



Sea  $\phi(x, y) = (x + \gamma(y), y)$ . Observación:  $\phi$  es difeomorfismo, ya que

$$D\phi = \begin{pmatrix} 1 & \gamma' \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

El difeomorfismo  $\phi$ , manda el eje  $y$  en  $\gamma(y)$ , es decir  $\phi(0, y) = (\gamma(y), y)$ . Definimos  $\tilde{f} = f \circ \phi$ , entonces  $\tilde{f}(0, 0) = (f \circ \phi)(0, 0) = f(0, 0)$ . Entonces  $\tilde{f}$  es equivalente a  $f$  en  $(0, 0)$ .

Verifiquemos quien es  $\Sigma(\tilde{f})$ .

$$\tilde{f}(x, y) = (f \circ \phi)(x, y),$$

entonces

$$D\tilde{f} = \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1x}\gamma'(y) + f_{1y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

así  $J\tilde{f} = f_{1x}$ , entonces  $\Sigma(\tilde{f}) = \Sigma(d)$ .

**PASO 3.**

Veamos ahora que  $f(\Sigma(f)) = d(\Sigma(d))$ .

Por el segundo paso, tenemos que  $f$  tiene la forma  $f(x, y) = (f_1(x, y), y)$ , y por el tercer paso  $f_{1x}(0, y) = 0$ . Entonces  $f(0, y) = (f_1(0, y), y)$ . Sea  $\hat{f} = \psi \circ f$ , donde  $\psi(u, v) = (u - f_1(0, v), v)$ . Entonces  $\hat{f}(0, y) = \psi(f(0, y)) = (0, y)$ . Observemos que  $\psi$  es difeomorfismo, ya que

$$D\psi(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & f_{1y}(0, 0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ por lo tanto } \hat{f}(\Sigma(f)) = (0, y)$$

**PASO 4.**

Por el paso 1, tenemos que

$$f(x, y) = (f_1(x, y), y),$$

y por el segundo paso

$$f_{1x}(0, y) = 0, \quad f_{1xx}(0, 0) \neq (0, 0),$$

y por el tercer paso

$$f_1(0, y) = 0.$$

Entonces por el corolario 14 del Capítulo 1,  $f_1(x, y)$  tiene la forma:

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^2 g(x, y), \\ f_1(0, y) &= 0. \end{aligned}$$

y  $g(0, 0) = \frac{1}{2} f_{1xx}(0, 0) \neq 0$ . Podemos suponer que  $g(0, 0) > 0$ , si no componemos con difeomorfismo  $\psi(u, v) = (-u, v)$ . Sea  $\phi(x, y) = (x\sqrt{g(x, y)}, y)$ , observemos que  $\phi$  es difeomorfismo ya que

$$D\phi(0, 0) = \begin{pmatrix} \sqrt{g(0, 0)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y además,

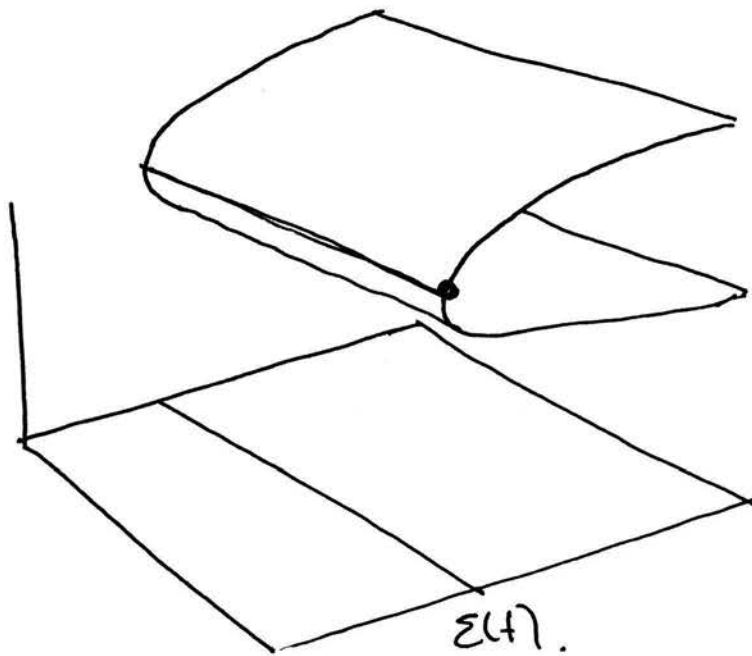
$$\begin{aligned} (d \circ \phi)(x, y) &= d(x\sqrt{g(x, y)}, y) \\ &= (x^2 g(x, y), y), \end{aligned}$$

pero  $f_1(x, y) = x^2 g(x, y)$  entonces

$$\begin{aligned} (d \circ \phi)(x, y) &= (f_1(x, y), y) \\ &= f(x, y), \end{aligned}$$

con esto queda demostrado a). ■

Observación: Consideremos a  $X$  como la gráfica en  $\mathbb{R}^3$ , de la función  $z = x^2$ .  
Observe que si tomamos una vecindad alrededor de un punto singular del  
doblez, la imagen inversa de algún punto en esa vecindad, es o bien dos puntos  
o ninguno.





**Demostración. de b).** Como en el caso anterior, podemos suponer que  $p = (0,0)$ ,  $f(p) = (0,0)$ , dividamos nuevamente la prueba en 4 pasos, estos consisten en demostrar que:

1.  $f$  se puede escribir como  $(f_1(x, y), y)$ ,
2.  $\Sigma(f)$  es equivalente a  $\Sigma(c)$
3.  $f(\Sigma(f))$  es equivalente a  $c(\Sigma(c))$
4.  $f$  es equivalente a  $c$  en cero.

**PASO 1.**

Como  $f$  en  $(0,0)$  tiene un punto cúspide, por el Lema 34 podemos suponer que  $f$  tiene la forma

$$f(x, y) = (f_1(x, y), y).$$

**PASO 2.**

Demostremos que  $\Sigma(f)$  es equivalente a  $\Sigma(c) = \{(x, y) \text{ tal que } y = -x^2\}$ . Tenemos que  $f(x, y) = (f_1(x, y), y)$ , entonces,

$$Df = \begin{pmatrix} f_{1x} & f_{1y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dado que  $f$  tiene rango 1, se tiene que  $f_{1x}(0,0) = 0$ . Además  $f_{1xx}(0,0) = 0$ , ya que si esta fuese diferente de cero, tendríamos que  $f_{1x}(x, y) = 0$  nos definiría a  $x$  como función de  $y$ , y entonces tendríamos las condiciones que cumple un punto doblez, por lo tanto  $f_{1xx}(0,0) = 0$ .

Por otro lado, tenemos que  $Jf = f_{1x}(x, y)$ , y por lo tanto  $\nabla Jf = (f_{1xx}, f_{1xy})$ . Como  $f$  es buena, tenemos que  $\nabla f(0,0) \neq (0,0)$ , entonces  $f_{1xy}(x, y) \neq 0$ . Es decir,  $\Sigma(f)$  será una curva que es gráfica de una función de  $x$ , ya que como  $f_{1x}(0,0) = 0$ ,  $f_{1xy}(0,0) \neq 0$ . Así por el Teorema de la función implícita tenemos que existe

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que

$$\begin{aligned} f_{1x}(x, \gamma(x)) &= 0 \\ \gamma(0) &= 0, \end{aligned}$$

Derivemos ahora  $f_{1x}(x, \gamma(x)) = 0$ ,

$$f_{1xx}(x, \gamma(x)) + f_{1xy}(x, \gamma(x))\gamma'(x) = 0,$$

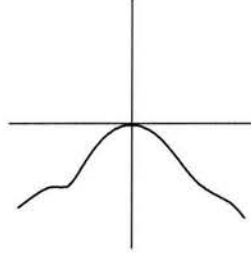
evaluando en  $(0,0)$ , obtenemos

$$f_{1xy}(0,0)\gamma'(0) = 0,$$

Como  $f_{1xy}(0,0) \neq 0$ , se tiene que  $\gamma'(0) = 0$ . Con esto acabamos de demostrar que:

$$f_{1xx}(0,0) = 0 \text{ si y sólo si } \gamma'(0) = 0.$$

O sea que  $\Sigma(f)$  es una curva cuya gráfica es una función de  $x$  y es tangente en el  $(0, 0)$  al eje  $x$ , como se muestra en la siguiente figura.



Recordemos que para  $f$  el conjunto de singularidades es

$$\Sigma(f) = \{(x, y) \text{ tal que } f_{1x}(x, y) = 0\}.$$

Como  $(0, 0)$  es un punto cúspide, deberá de suceder que  $f(\Sigma(f))(p)$  será de orden 2. Veamos que información acerca de  $\gamma$  nos da esta condición.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (f_1(x, y), y), \\ \Sigma(f) &= (x, \gamma(x)). \end{aligned}$$

Entonces

$$f(\Sigma(f)) = (f_1(x, \gamma(x)), \gamma(x)),$$

como  $f_{1x}(x, \gamma(x)) = 0$ ,

$$f'(\Sigma(f)) = (f_{1y}(x, \gamma(x))\gamma'(x), \gamma'(x)),$$

evaluando en el origen tenemos que

$$f'(\Sigma(f))(0, 0) = (f_{1y}(0, 0), 1)\gamma'(0).$$

Entonces  $f'(\Sigma(f))(0, 0) = 0$  si y sólo si  $\gamma'(0) = 0$ . Derivemos nuevamente  $f'(\Sigma(f))$ .

$$f''(\Sigma(f)) = (\gamma''(x)f_{1y}(x, \gamma) + (f_{1xy}(x, \gamma) + \gamma'f_{1yy}(x, \gamma))\gamma', \gamma''),$$

que evaluando en el origen nos queda

$$f''(\Sigma(f))(0, 0) = (f_{1y}(0, 0), 1)\gamma''(0),$$

y como  $f''(\Sigma(f))(0, 0) \neq 0$ , entonces  $\gamma''(0) \neq 0$ . Hasta este momento hemos visto que  $\gamma(0) = 0$ ,  $\gamma'(0) = 0$  y  $\gamma''(0) \neq 0$ . Por lo tanto,  $\gamma$  tiene un mínimo o máximo simple en  $(0, 0)$ , y además  $\gamma(x) = x^2\gamma_2(x)$  con  $\gamma_2(0) \neq 0$ . Podemos

suponer que  $\gamma_2(0) < 0$ , en caso de que no sucediera así, componemos con los difeomorfismos  $\phi(x, y) = (x, -y)$ ,  $\psi(u, v) = (u, -v)$ .

Finalmente obteniendo la tercer derivada de  $f(\Sigma(f))$ , y evaluando en  $(0, 0)$  obtenemos

$$f_{1xxx}(0, 0) + \gamma''(0)f_{1xy}(0, 0) = 0,$$

puesto que  $f_{1xy}(0, 0) \neq 0 \neq \gamma''(0)$ , entonces  $f_{1xxx}(0, 0) \neq 0$ , así obtenemos los siguientes resultados

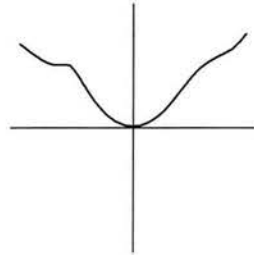
$$f_{1x}(0, 0) = 0,$$

$$f_{1xx}(0, 0) = 0,$$

$$f_{1xy}(0, 0) \neq 0,$$

$$f_{1xxx}(0, 0) \neq 0,$$

es decir las tres primeras ecuaciones, vemos que la gráfica de  $\Sigma(f)$  tiene la siguiente forma



Demostremos ahora que  $f(\Sigma(f))$  es una cúspide simple de  $f$ . Para ello, verifiquemos que  $f''(\Sigma(f))$  y  $f'''(\Sigma(f))$  son linealmente independientes y que  $f(\Sigma(f))$  es de orden 2.

$$f'(\Sigma(f))(x) = (f_{1y}(x, \gamma)\gamma', \gamma'),$$

$$f''(\Sigma(f))(x) = (\gamma''f_{1y}(x, \gamma) + \gamma'f_{1xy}(x, \gamma) + \gamma'^2f_{1y}(x, \gamma), \gamma''),$$

y finalmente

$$\begin{aligned} f'''(\Sigma(f))(x) = & (f_{1xxy}(x, \gamma)\gamma' + 2f_{1xyy}(x, \gamma)\gamma'^2 \\ & + 2f_{1xy}(x, \gamma)\gamma'' + 2f_{yyy}(x, \gamma)\gamma'^3 \\ & + 3f_{1yy}(x, \gamma)\gamma'\gamma'' + f_{1y}(x, \gamma)\gamma''', \gamma'''), \end{aligned}$$

evaluando estas derivadas en  $(0, 0)$  nos da:

$$f'(\Sigma(f))(0) = (0, 0),$$

pues  $\gamma'(0) = 0$ .

$$f''(\Sigma(f))(0) = (f_{1y}(0, 0), 1)\gamma''(0) \neq 0,$$

y

$$f'''(\Sigma(f))(0) = (2f_{1xy}(0, 0)\gamma''(0) + f_{1y}(0, 0)\gamma'''(0), \gamma'''(0)) \neq 0.$$

Ahora, calculando el determinante, obtenemos

$$\det \begin{pmatrix} f_{1y}(0, 0)\gamma'''(0) & \gamma''(0) \\ 2f_{1xy}(0, 0)\gamma'' + f_{1y}(0, 0)\gamma'''(0) & \gamma'''(0) \end{pmatrix} = -2f_{1xy}(0, 0)\gamma''^2 \neq 0,$$

pues  $\gamma''(0) \neq 0$ , y  $f_{1xy}(0, 0) \neq 0$ , por lo tanto  $f(\Sigma(f))$  es cúspide simple. Ahora solo nos falta llevar a  $\Sigma(f)$  en  $\Sigma(c)$  mediante un difeomorfismo. Tenemos que encontrar un difeomorfismo  $\phi$  de la forma

$$\phi(x, y) = (\phi_1(x, y), y),$$

tal que

$$\phi(x, -x^2) = (\phi_1(x), -x^2)$$

esté en  $\Sigma(c)$ .

Sólo tenemos que encontrar  $\phi_1$ . Pero  $\phi_1$  debe cumplir que

$$-x^2 = \gamma(\phi_1(x)).$$

Consideremos  $\lambda(x) = x\sqrt{-\gamma_2(x)}$ , entonces

$$\lambda'(0) = \sqrt{-\gamma_2(0)} \neq 0,$$

así,  $\lambda$  es un difeomorfismo local. Entonces definimos  $\phi_1 = \lambda^{-1}$ , y tendremos lo que queríamos, pues

$$\begin{aligned} (\lambda(x)^2) &= -\gamma(x) \\ \gamma(x) &= -\lambda(x)^2 \\ \gamma(\phi_1(x)) &= -x^2. \end{aligned}$$

Y definiendo  $\tilde{f} = f \circ \phi$  tenemos que

$$\Sigma(\tilde{f}) = \Sigma(c).$$

**PASO 3.**

Demostremos ahora que  $f(\Sigma(f))$  se puede llevar en  $c(\Sigma(c))$  mediante un difeomorfismo.

Sabemos por el Lema 34 que  $f$  tiene la forma:  $f(x, y) = (f_1(x, y), y)$ , y por el paso anterior, que  $\Sigma(f)$  es equivalente a  $\Sigma(c)$ . Además acabamos de demostrar que  $f(\Sigma(f))$  es una cúspide simple.

$$\begin{array}{ccc} (x, -x^2) & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 & (f_1, y) \\ & \uparrow & \downarrow \psi & \\ (x, -x^2) & \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 & (-2x^3, -x^2) \end{array}$$

Estamos buscando un difeomorfismo  $\psi(u, v) = (\psi_1(u, v), v)$ , que mande la imagen de puntos singulares de  $c$ , en la imagen de puntos singulares de  $f$ , es decir un difeomorfismo tal que

$$\psi_1(-2x^3, -x^2) = f_1(x, -x^2),$$

pero esto es equivalente a preguntarnos dada  $g = f_1(x, x^2)$  cuando existe  $G$  tal que  $g(x) = G(-2x^3, -x^2)$ . Y encontrar  $G$  con esta propiedad es equivalente a encontrar  $G_1$  tal que  $g(x) = G_1(x^2, x^3)$ , (observación:  $G$  es difeomorfa a  $G_1$  salvo por una rotación y una reflexión). Veamos que el siguiente lema nos dice cuando esto es válido.

**Lema 35** Dada  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \in C^\infty$  existe  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  también  $C^\infty$  tal que  $g(t) = G(t^2, t^3)$  si y sólo si  $g'(0) = 0$  y entonces así lo que tenemos que verificar es que  $\tilde{f}_1(0, 0) = 0$ , donde  $\tilde{f}_1(x) = f_1(x, -x^2)$ .

Dada  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g \in C^\infty$  existe  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  también  $C^\infty$  tal que  $g(t) = G(t^2, t^3)$  si y sólo si  $g'(0) = 0$  y entonces así lo que tenemos que verificar es que  $\tilde{f}_1(0, 0) = 0$ , donde  $\tilde{f}_1(x) = f_1(x, -x^2)$ .

Entonces:  $\tilde{f}_1(x) = f_{1x}(0, 0) + f_{1y}(x, -x^2)(-2x)$ , y evaluando en cero tenemos  $\tilde{f}_1(0) = 0$ , pues  $f_{1x}(x, -x^2) \equiv 0$ . Por lo tanto existe  $\psi_1$ . Sólo queda verificar que  $\psi(u, v) = (\psi_1(u, v), v)$ , con  $\psi_1(-2x^3, -x^2) = f_1(x, -x^2)$ , es efectivamente un difeomorfismo al rededor del cero.

$$D\psi = \begin{pmatrix} \psi_{1u} & \psi_{1v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde

$$-6x^2\psi_{1u}(-2x^3, -x^2) - 2x\psi_{1v}(-2x^3, -x^2) = -2xf_{1y}(x, -x^2),$$

y la segunda derivada evaluada en cero nos queda como

$$\psi_{1u}(0, 0) = \frac{1}{6}f_{1xy}(0, 0) \neq (0, 0),$$

por lo tanto  $\psi$  es difeomorfismo.

**PASO 4.**

Demostremos por último que  $f$  es equivalente a  $c$  en  $(0, 0)$ . Consideremos la función  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$h(x, y) = f_1(x, y) - \left(\frac{1}{3}x^3 + xy\right),$$

observemos que

$$h(x, -x^2) = 0,$$

y que

$$h_x(x, y) = f_{1x}(x, -x^2) - (x^2 + y),$$

así

$$h_x(x, -x^2) = 0,$$

Obteniendo la derivada total de  $h$ , vemos que:

$$h_x(x, -x^2) - 2xh_y(x, -x^2) = 0,$$

de donde  $-2xh_y(x, -x^2) = 0$ , y si pedimos que  $x \neq 0$ , entonces  $h_y(x, -x^2) = 0$ , y como  $h_y$  es continua, si  $x = 0$  entonces  $h_y = 0$ . Entonces tenemos que tanto  $h$ , como su gradiente se anulan sobre la curva  $(x, -x^2) = 0$ . Esta situación la podemos generalizar de la siguiente manera.

**Lema 36** Consideremos una función  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , de clase  $C^\infty$  y  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\gamma \in C^\infty$ , entonces:

- a)  $h(x, \gamma(x)) = 0$  si y solo si existe  $h_1 \in C^\infty$  tal que  $h(x, y) = (y - \gamma)h_1(x, y)$ ,
- b)  $h(x, \gamma(x)) = 0$  y  $\nabla h(x, \gamma) = (0, 0)$  si y solo si existe  $h_2 \in C^\infty$  tal que  $h(x, y) = (y - \gamma(x))^2 h_2(x, y)$ .

Es así como por el lema anterior tenemos que la función  $h$  podemos expresarla como

$$\begin{aligned} h(x, y) &= (y + x^2)^2 h_2(x, y) \\ &= (y + x^2)g(x, y), \end{aligned}$$

El difeomorfismo que buscamos debe ser tal que:

- 1) Deje fija la componente en  $y$ , i.e.,
- 2) no mueva el conjunto crítico, i.e. no mueva la parábola.

Es decir, un difeomorfismo  $\phi$  que cumpla con:

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= (\phi_1(x, y), y). \\ \phi_1(x, -x^2) &= x. \end{aligned}$$

para obtener así

$$c \circ \phi(x, y) = f(x, y).$$

Por 1) y el Lema 36 se tiene

$$\phi_1(x, y) = -x = (y + x^2)g(x, y)$$

ahora bien,

$$\begin{aligned} c \circ \phi(x, y) &= c(\phi_1(x, y), y) \\ &= \left( \frac{(\phi_1(x, y))^3}{3} + \phi_1(x, y)y, y \right) \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{(\phi_1(x, y))^3}{3} + \phi_1(x, y)y = f_1(x, y). \quad (*)$$

Si pasa esto, entonces  $\phi$  es un difeomorfismo local ya que

$$D\phi = \begin{pmatrix} \phi_{1x} & \phi_{1y} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y

$$\phi_{1x}(x, y) = 1 + 2xg(x, y) + (y + x^2)g_x(x, y)$$

que en el origen es:

$$\phi_{1x}(0, 0) = 1$$

Como habíamos visto

$$f_1(x, y) - \left(\frac{1}{3}x^3 + xy\right) = h(x, y) = (y + x^2)h_2(x, y),$$

es decir

$$f_1(x, y) = \left(\frac{1}{3}x^3 + xy\right) + (y + x^2)h_2(x, y)$$

además se tiene que

$$\phi_1(x, y) = x + (y + x^2)g(x, y)$$

Entonces sustituyendo el valor de  $f_1$  y de  $\phi_1$  en (\*) tenemos:

$$\frac{(x + (y + x^2)g(x, y))^3}{3} + (x + (y + x^2)g(x, y))y = \frac{x^3}{3} + xy + (y + x^2)^2h_2(x, y).$$

Desarrollando la expresión anterior

$$\frac{x^3}{3} + x^2(y+x^2)g(x,y) + x(y+x^2)^2g(x,y)^2 + \frac{(y+x^2)^3(g(x,y))^3}{3} +$$

$$xy + y(y+x^2)g(x,y) = \frac{x^3}{3} + xy + (y+x^2)^2h_2(x,y)$$

de donde

$$(y+x^2)^2(g(x,y) + xg(x,y)^2 + \frac{(y+x^2)(g(x,y))^3}{3}) = (y+x^2)^2h_2(x,y),$$

luego

$$g(x,y) + xg(x,y)^2 + \frac{(y+x^2)(g(x,y))^3}{3} - h_2(x,y) = 0.$$

Si hacemos  $z = g(x,y)$  tenemos

$$z + xz^2 + \frac{1}{3}(y+x^2)z^3 - h_2(x,y) = 0.$$

Definimos

$$G(x,y,z) = z + xz^2 + \frac{1}{3}(y+x^2)z^3 - h_2(x,y)$$

entonces  $G(0,0,0) = 0$ . Derivando respecto a  $z$  tenemos

$$G_z(x,y,z) = 1 + 2xz + (y+x^2)z^2$$

por lo tanto  $G_z(0,0,0) = 1$ . Ahora por el teorema de la función implícita, existe  $g(x,y)$  tal que

$$G(x,y,g(x,y)) = 0$$

y

$$g(0,0) = 0$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\phi_1(x,y)^3}{3} + \phi_1(x,y)y &= f_1(x,y) \\ \phi(x,y) &= (\phi_1(x,y), y) \\ \phi_1(x,y) &= x + (y+x^2)g(x,y), \end{aligned}$$

así  $\phi$  es un difeomorfismo local tal que

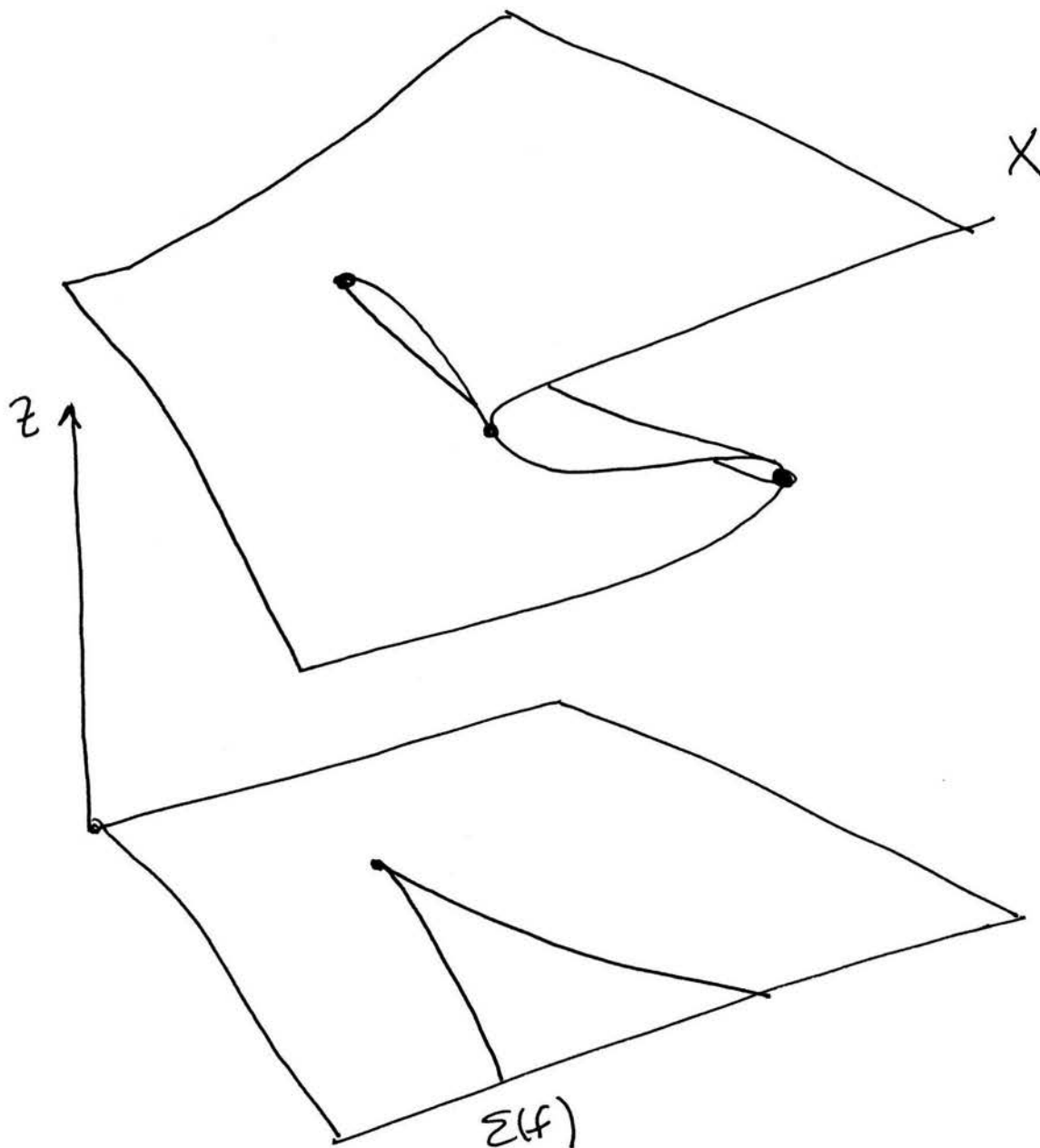
$$c \circ \phi(x,y) = f(x,y).$$

Por lo tanto  $f$  en  $(0,0)$  es equivalente a  $c$  en  $(0,0)$ . ■

Con esto queda demostrado b) del Teorema de Whitney.



Observación: Al igual que en el doblez, consideremos a  $X$  como la gráfica en  $\mathbb{R}^3$  de la función  $z = \frac{1}{3}x^3 + xy$ . Podemos observar que para cualquier vecindad que tomemos alrededor del punto cúspide, podemos encontrar puntos cuya imagen inversa tiene tres puntos o uno.



## 4 Transformación de Gauss de una superficie.

El objetivo de este capítulo es estudiar las singularidades de la transformación de Gauss de una superficie en  $\mathbb{R}^3$ , a través de algunos ejemplos que muestran diversos fenómenos geométricos, asociados a estas singularidades.

**Definición 37** Sea  $S$  una superficie regular con orientación de dimensión dos, y sea  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  una parametrización de la superficie. La transformación de Gauss, que denotaremos por  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ , manda cada punto  $(x, y) \in U$ , al vector normal unitario

$$\frac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|}.$$

**Definición 38** Sea  $p \in S$  y sea  $dN_p : T_p(S) \rightarrow T_{N(p)}(S)$  la diferencial de la transformación de Gauss. El determinante de  $dN_p$  (o sea el jacobiano de  $N$ ,  $JN_p$ ) es la curvatura Gaussiana  $k$  de  $S$  en  $p$ .

**Definición 39** Un punto de una superficie es llamado:

- a) elíptico si  $JN_p > 0$ ,
- b) hiperbólico si  $JN_p < 0$ ,
- c) Parabólico si  $JN_p = 0$ , con  $dN_p \neq 0$ ,
- d) Planar si  $dN_p = 0$ .

**Definición 40** Así el conjunto de singularidades  $\Sigma(N)$  definido en el capítulo anterior, corresponde al conjunto parabólico de  $S$ , por lo cual, de aquí en adelante, llamaremos a  $\Sigma(N)$  el conjunto parabólico.

Los ejemplos a tratar, son gráficas de funciones de la forma:

$$X(x, y) = (x, y, f(x, y)),$$

lo cual resulta general debido a que toda superficie regular puede parametrizarse localmente en una vecindad de un punto  $p$ , con apropiadas transformaciones rígidas, trasladando el punto  $p$  de la superficie al origen, el plano tangente en  $p$  al plano  $(x, y)$  y el vector normal en  $p$ , i.e.,  $N(p)$  al vector  $e_3$ . A esta expresión de la superficie se le conoce como carta de Monge.

Entonces, la expresión explícita para la transformación de Gauss, para  $X$  en esta forma se convierte en:

$$N(x, y) = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Para facilitar el estudio de las singularidades de la transformación, podemos proyectar desde el origen al plano  $z = 1$  para obtener así

$$(-f_x, -f_y, 1),$$

y si nuevamente proyectamos, ahora al plano  $(x, y)$  obtenemos la transformación compuesta

$$\tilde{N}(x, y) = (-f_x, -f_y).$$

Observemos que, en este caso, la imagen de la transformación de Gauss esta contenida en el hemisferio superior de la esfera y esta proyección es un difeomorfismo del hemisferio superior en el plano  $z = 1$ , entonces como ya hemos visto con anterioridad, el conjunto de singularidades de  $N$  se preserva bajo difeomorfismos, así tendremos que la transformación de Gauss modificada  $\tilde{N}$  tendrá las mismas singularidades que  $N$ . Y para estudiar las singularidades de  $\tilde{N}$ , nos remitiremos a aplicar los resultados que hemos visto en el capítulo 2, para funciones del plano en el plano.

Cabe hacer notar también que, la definición 39, se sigue cumpliendo también para  $\tilde{N}$ , pues recordemos que el determinante de  $N$  permanece invariante bajo estos difeomorfismos, ya que el jacobiano de estos es positivo.

Comencemos con el análisis de los ejemplos.

**Ejemplo 41** *Superficie zapato.*

Sea

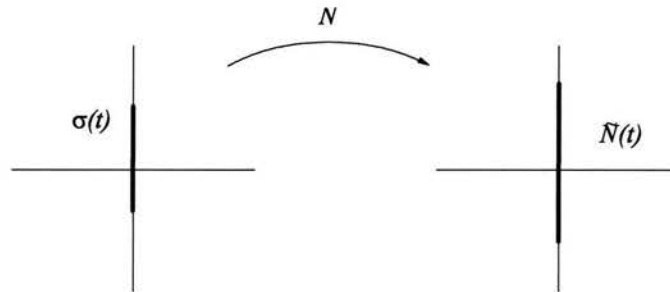
$$X(x, y) = (x, y, \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}y^2),$$

la transformación de Gauss modificada  $\tilde{N} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , esta dado por  $\tilde{N}(x, y) = (-x^2, y)$ , así la diferencial queda expresada como

$$d\tilde{N}(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y tenemos que  $J\tilde{N} = -2x$ . El conjunto parabólico es

$$\Sigma(\tilde{N}) = \{(x, y) \mid -2x = 0\},$$



El gradiente  $\nabla J\tilde{N} = (-2, 0) \neq (0, 0)$ , por lo tanto  $\tilde{N}$  es buena para toda  $(x, y)$ . Tomemos como parametrización de  $\Sigma(\tilde{N})$  la curva  $\sigma(t) = (0, t)$ , así, la imagen de  $\sigma$  bajo  $\tilde{N}$  es  $\tilde{N}(\sigma(t)) = (0, t)$ . Vemos que  $\tilde{N}'(t) = (0, 1) \neq (0, 0)$ , por lo tanto  $\tilde{N}'(t)$  es una curva regular, así todos los puntos singulares de  $\tilde{N}$  son dobles y por el Teorema 33  $\tilde{N}$  es una transformación estable.

**Ejemplo 42** La familia de superficies de Menn.

Sea

$$X_\varepsilon(x, y) = (x, y, \varepsilon x^4 + x^2 y - y^2),$$

la transformación de Gauss modificada  $\tilde{N} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , esta dado por

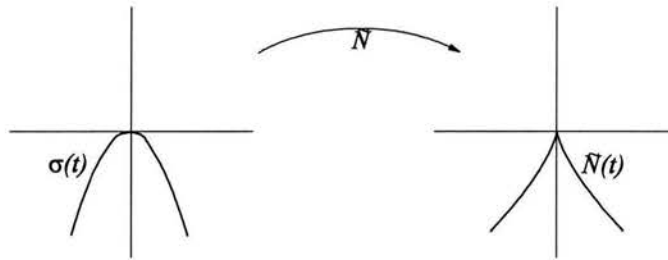
$$\tilde{N}(x, y) = (-4\varepsilon x^3 - 2xy, -x^2 + 2y),$$

así la diferencial queda expresada como

$$d\tilde{N}(x, y) = \begin{pmatrix} -12\varepsilon x^2 - 2y & -2x \\ -2x & 2 \end{pmatrix},$$

y tenemos que  $J\tilde{N} = -24x^2 - 4y - 4x^2$ . El conjunto parabólico es

$$\Sigma(\tilde{N}) = \{(x, y) \mid (6\varepsilon + 1)x^2 + y = 0\},$$



El gradiente  $\nabla J\tilde{N} = (12\varepsilon x + 2x, 1) \neq (0, 0)$ , por lo tanto  $\tilde{N}$  es buena para toda  $(x, y)$ . Una parametrización de  $\Sigma(\tilde{N})$  es  $\sigma(t) = (t, -(6\varepsilon + 1)t^2)$ , así la imagen de  $\sigma$  bajo  $\tilde{N}$  es  $\tilde{N}(\sigma(t)) = (2(4\varepsilon + 1)t^3, -3(4\varepsilon + 1)t^2)$ .

Vemos que  $\tilde{N}'(t) \neq (0, 0)$ , si  $t \neq 0$  y  $\varepsilon \neq -\frac{1}{4}$  por lo tanto  $\tilde{N}'(t)$  es una curva regular, en los puntos singulares que cumplan con esto.  $\tilde{N}'(t) = (6(4\varepsilon + 1)t^2, -6(4\varepsilon + 1)t)$ , y así si  $t \neq 0$ ,  $\tilde{N}'' \neq 0$ , por lo tanto en  $t = 0$ ,  $\tilde{N}$  tiene una cúspide. Así  $\tilde{N}$  es excelente si  $\varepsilon \neq -\frac{1}{4}$ .

Si analizamos la función  $f(x, y) = \varepsilon x^4 + x^2 y - y^2$  veremos que el gradiente de  $f$  es  $(4\varepsilon x^3 + 2xy, x^2 - 2y)$ , el cual se anula en cero, así la matriz hessiana de  $f$ ,

$$Hf = \begin{pmatrix} 2\varepsilon x^2 + 2y & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix},$$

nos indica que el origen es un punto crítico degenerado ( $\det Hf = -4(6\varepsilon + 1)x^2 - 4y$ ). El origen es máximo absoluto si  $\varepsilon < \frac{1}{4}$ , si  $\varepsilon > \frac{1}{4}$  entonces es un punto silla.

El siguiente ejemplo nos muestra una superficie con transformación de Gauss inestable.

**Ejemplo 43** Sea

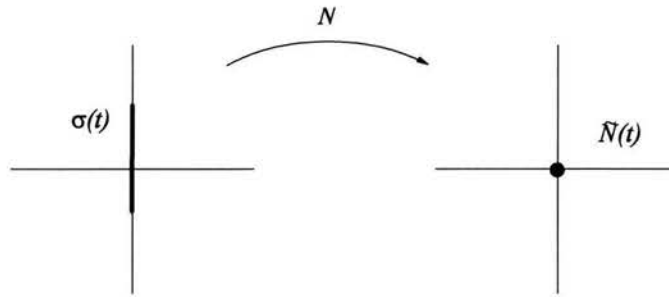
$$X(x, y) = \left(x, y, \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}y^2\right),$$

la transformación de Gauss modificada  $\tilde{N} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , esta dada por  $\tilde{N}(x, y) = (-x^3, y)$ , así la diferencial queda expresada como

$$d\tilde{N}(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y tenemos que  $J\tilde{N} = -3x^2$ . El conjunto parabólico es

$$\Sigma(\tilde{N}) = \{(x, y) \mid -3x^2 = 0\},$$



El gradiente  $\nabla J\tilde{N} = (0, 0)$ , sobre la curva parabólica, por lo tanto  $\tilde{N}$  no es buena. Entonces se trata de una transformación inestable. Una parametrización para  $\Sigma(\tilde{N})$  es  $\sigma(t) = (0, -3t^2)$ , y imagen de  $\sigma$  bajo  $\tilde{N}$  consta sólo del origen.

**Ejemplo 44** Familia de superficies Silla de mono.

Sea

$$X_\varepsilon(x, y) = \left(x, y, \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + \varepsilon(x^2 + y^2)\right),$$

la transformación de Gauss modificada  $\tilde{N} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , esta dado por  $\tilde{N}(x, y) = (-x^2 + y^2 - 2\varepsilon x, 2xy - 2\varepsilon y)$ , así la diferencial queda expresada como

$$d\tilde{N}(x, y) = \begin{pmatrix} -2x - 2\varepsilon & -2y \\ -2y & 2x - 2\varepsilon \end{pmatrix},$$

entonces tenemos que  $J\tilde{N} = -4(x^2 + y^2 - \varepsilon^2)$ . El conjunto parabólico es

$$\Sigma(\tilde{N}) = \{(x, y) \text{ tal que } -4(x^2 + y^2 - \varepsilon^2) = 0\}.$$

El gradiente  $\nabla J\tilde{N} = -4(2x, 2y) \neq (0, 0)$ , por lo tanto  $\tilde{N}$  es buena para toda  $(x, y)$  si y sólo si  $\varepsilon \neq 0$ . La parametrización considerada para  $\Sigma(\tilde{N})$  es  $\sigma(t) = |\varepsilon| (\cos t, \sin t)$ ,

Expresando a  $\tilde{N}$  en coordenadas polares, y evaluando en  $\sigma$  obtenemos

$$\tilde{N}(\sigma(t)) = (-\varepsilon^2 \cos 2t - 2\varepsilon |\varepsilon| \cos t, 2\varepsilon^2 \sin 2t - 2\varepsilon |\varepsilon| \sin t),$$

y por lo tanto

$$\tilde{N}'(\sigma(t)) = (\varepsilon^2 \sin 2t + 2\varepsilon |\varepsilon| \sin t, 2\varepsilon^2 \cos 2t - 2\varepsilon |\varepsilon| \cos t).$$

Así esta curva se anula si:

$$\begin{aligned} \varepsilon \sin 2t &= -|\varepsilon| \sin t \\ \varepsilon \cos 2t &= |\varepsilon| \cos t, \end{aligned}$$

Si  $\varepsilon > 0$  la solución de la ecuación trigonométrica es:  $t = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ , si  $\varepsilon < 0$  entonces las soluciones son  $t = \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ .

Ahora vemos que

$$\tilde{N}''(t) = (4\varepsilon^2 \cos 2t + 2\varepsilon |\varepsilon| \cos t, -4\varepsilon^2 \sin 2t + 2\varepsilon |\varepsilon| \sin t),$$

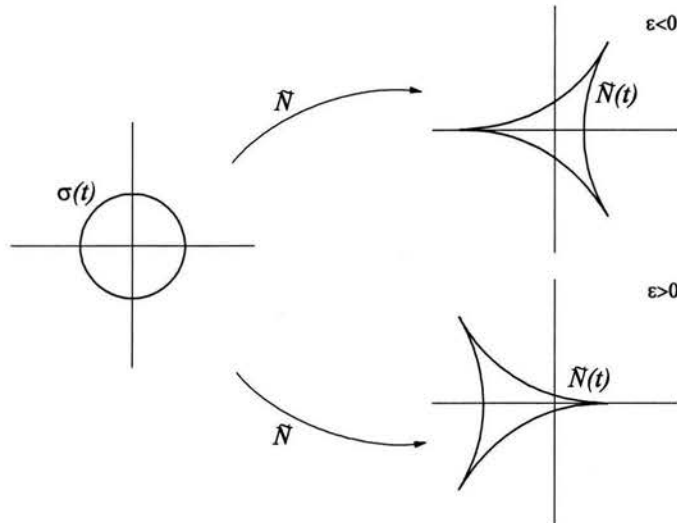
si  $t = 0$ , entonces

$$\tilde{N}''(t) = (4\varepsilon^2 + 2\varepsilon |\varepsilon|, 0) \neq (0, 0),$$

y si  $t = \frac{2\pi}{3}$ , entonces

$$\tilde{N}''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = (-4\varepsilon^2 - 2\varepsilon |\varepsilon|, 0) \neq (0, 0),$$

y así para todos los  $t$ 's vemos que la segunda derivada de la transformación siempre resulta ser diferente de cero, La gráfica de la imagen de  $\sigma$  bajo  $\tilde{N}$ , si  $\varepsilon \neq 0$  es una hipocicloide de 3 cúspides, como se muestra en las siguientes gráficas.



Entonces la transformación de Gauss es estable si  $\varepsilon \neq 0$ . Los únicos puntos singulares que aparecen son dobleces y cúspides.

Analicemos, que pasa con la transformación para  $\varepsilon = 0$ . El único punto singular es el origen. Transformando  $\tilde{N}$  a coordenadas polares tenemos:

$$\tilde{N}(r \cos \theta, r \sin \theta) = (-r^2 \cos 2\theta, r^2 \sin 2\theta),$$

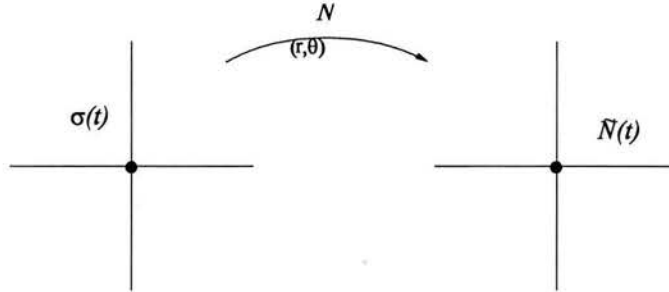
Esta transformación manda una circunferencia de radio  $r$  en otra del doble del radio y con orientación cambiada.

Así la diferencial queda expresada como

$$d\tilde{N} = \begin{pmatrix} 2r \cos 2\theta & 2r^2 \sin 2\theta \\ 2r \sin 2\theta & 2r^2 \cos 2\theta \end{pmatrix},$$

y tenemos que  $J\tilde{N} = -4r^3$ . El conjunto parabólico es:

$$\Sigma(\tilde{N}) = \{(r, \theta) \mid -4r = 0\},$$



El gradiente  $\nabla J\tilde{N} = (1, 0) \neq (0, 0)$ , por lo tanto  $\tilde{N}$  es buena en cero, pero en coordenadas polares.

**Ejemplo 45** Familia de superficies pañuelo.

Sea

$$X_\varepsilon(x, y) = (x, y, \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + \varepsilon(x^2 - y^2)),$$

la transformación de Gauss modificada  $\tilde{N}_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , esta dado por  $\tilde{N}_\varepsilon(x, y) = (-x^2 - y^2 - 2\varepsilon x, -2xy + 2\varepsilon y)$ , así la diferencial queda expresada como

$$d\tilde{N}_\varepsilon(x, y) = \begin{pmatrix} -2x - 2\varepsilon & -2y \\ -2y & -2x + 2\varepsilon \end{pmatrix},$$

y tenemos que  $J\tilde{N}_\varepsilon = -4(x^2 - y^2 - \varepsilon^2)$ . El conjunto parabólico es

$$\Sigma(\tilde{N}_\varepsilon) = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 - \varepsilon^2 = 0\},$$

El gradiente  $\nabla J\tilde{N}_\varepsilon = 4(2x, -2y) \neq (0, 0)$ , por lo tanto  $\tilde{N}_\varepsilon$  es buena para toda  $(x, y)$  si y sólo si  $\varepsilon \neq 0$ . Ya que se trata de una hipérbola, la parametrización de  $\Sigma(\tilde{N}_\varepsilon)$  en este caso será  $\sigma(t) = \varepsilon(\pm \cosh t, \sinh t)$ .

La imagen de  $\sigma$  bajo  $\tilde{N}_\varepsilon$  es

$$\tilde{N}_\varepsilon(\sigma(t)) = (-\varepsilon^2 \cosh 2t \pm 2\varepsilon \cosh t, \pm 2\varepsilon^2 \sinh 2t - 2\varepsilon^2 \sinh t),$$

y por lo tanto

$$\tilde{N}'_\varepsilon(\sigma(t)) = (-2\varepsilon^2 \sinh 2t \pm 2\varepsilon^2 \sinh t, \mp 2\varepsilon^2 \cosh 2t + 2\varepsilon^2 \cosh t).$$

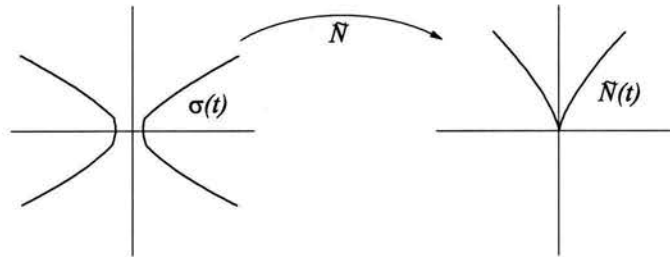
Así  $\tilde{N}'_\varepsilon(t) = 0$  para  $\varepsilon \neq 0$ , la única solución es  $t = 0$ . Ahora vemos que

$$\tilde{N}''_\varepsilon(t) = (-4\varepsilon^2 \cosh 2t \mp 2\varepsilon^2 \cosh t, \pm 4\varepsilon^2 \sinh 2t + 2\varepsilon^2 \sinh t),$$

y si  $t = 0$ , entonces

$$\tilde{N}''_\varepsilon(0) \neq (0, 0),$$

Entonces, para  $t = 0$ ,  $\tilde{N}_\varepsilon(t)$  tiene una cúspide.



Así, la transformación de Gauss es estable si  $\varepsilon \neq 0$ . Si  $\varepsilon = 0$ ,  $\tilde{N}(x, y) = -(x^2 + y^2, 2xy)$ , entonces

$$\Sigma(\tilde{N}) = \{(x, y) \text{ tal que } x = y, -x = y\}$$

si  $\sigma_1(t) = (t, t)$  y  $\sigma_2(t) = (t, -t)$ , entonces  $\tilde{N}(t) = -2(t^2, -t^2)$ , en este caso, la transformación manda cada uno de los cuatro cuadrantes,

$$A = \{(x, y) \mid x \geq y, x \geq -y\},$$

$$B = \{(x, y) \mid x \leq y, x \geq -y\},$$

$$C = \{(x, y) \mid x \leq y, x \leq -y\},$$

$$D = \{(x, y) \mid x \geq y, x \leq -y\},$$

homeomórficamente sobre el cuadrante C.



## 5 Teorema de caracterización de cúspides Gaussianas.

Comenzaremos discutiendo algunos aspectos de la Teoría de singularidades de transformaciones y familias de transformaciones, mismas que se usarán en el análisis y demostración del Teorema principal de éste capítulo.

### 5.1 Singularidades de familias de transformaciones.

Para las siguientes definiciones, consideremos  $N$  y  $P$  variedades diferenciables, y  $C^\infty(N, P)$  el espacio de Transformaciones diferenciables  $C^\infty$  de  $N$  a  $P$ .

**Definición 46** a) *Un desdoblamiento  $q$ -paramétrico de una transformación  $f_0 \in C^\infty(N, P)$ , es una transformación  $F : \mathbb{R}^q \times N \rightarrow \mathbb{R}^q \times P$ , de la forma  $F(u, x) = (u, f(u, x))$  con  $F(0, x) = f_0(x)$ .*

b) *Si  $h \in C^\infty(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^q)$ , con  $h(\bar{0}) = \bar{0}$ , el pull-back  $h^*F$  es el desdoblamiento  $r$ -paramétrico de  $f_0$  dado por  $(h^*F)(v, x) = (v, f(h(v), x))$ .*

c) *Diremos que dos desdoblamientos  $q$ -paramétricos  $F_1$  y  $F_2$  de la misma función  $f_0$  son isomorfos, si el diagrama conmuta,*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^q \times N & \xrightarrow{F_1} & \mathbb{R}^q \times P \\ \phi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbb{R}^q \times N & \xrightarrow{F_2} & \mathbb{R}^q \times P \end{array}$$

*i.e.,  $F_2 = \varphi F_1 \phi^{-1}$ , donde  $\phi$  (respectivamente  $\varphi$ ) es un desdoblamiento  $q$ -paramétrico de la identidad en  $N$  (respectivamente en  $P$ ).*

d) *Diremos que  $F_1$  y  $F_2$  son equivalentes si existe un difeomorfismo  $h$  de  $\mathbb{R}^q$  tal que  $F_2$  es isomorfo a  $h^*F_1$ .*

e) *Un desdoblamiento  $F$  de  $f_0$  es versal si cualquier otro desdoblamiento de  $f_0$  es isomorfo a  $h^*F$ .*

Con respecto a familias de funciones, tenemos lo siguiente:

**Definición 47** a) *Una familia de transformaciones de  $N$  a  $P$  parametrizada por una variedad diferenciable  $Q$ , es una transformación  $C^\infty$   $F : Q \times N \rightarrow Q \times P$  de la forma  $F(u, x) = (u, f(u, x))$ .*

b) *El pull-back de una familia  $F$  para una transformación  $h : Q' \rightarrow Q$  esta definido por  $(h^*F)(v, x) = (v, f(h(v), x))$ .*

c) *Dos familias son equivalentes si existe un difeomorfismo  $h$  de  $Q$ , una familia de difeomorfismos  $\varphi$  de  $N$  parametrizados por  $Q$ , una familia de difeomorfismos  $\psi$  de  $P$  parametrizados por  $Q$ , tal que  $F_2 = \psi(h^*F_1)\varphi^{-1}$ .*

d) *Una familia es versal si ésta define un desdoblamiento versal en cada uno de sus miembros.*

**Definición 48** Para  $x \in N$  y  $y \in P$ , consideremos el espacio de todas las transformaciones  $f : N \rightarrow P$  de clase  $C^\infty$ , tal que  $f(x) = y$ . El espacio de gérmenes  $C^\infty(N, P)(x, y)$  es el espacio cociente de este espacio, bajo la relación de equivalencia:  $f \sim g$  si existe una vecindad  $U$  de  $x \in N$  tal que  $f|_U = g|_U$ . La clase de equivalencia de  $f$  se llama el germen de  $f$  en  $x$ .

Observación: Si introducimos cartas coordenadas, con respecto a  $x$  y  $y$ ,  $C^\infty(N, P)(x, y)$  se identifica con  $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)(0, 0) = C^\infty(n, p)_0$ .

**Definición 49** El número de Milnor de un germen es el número máximo de puntos críticos que pueden aparecer en un desdoblamiento.

### 5.1.1 Familia de funciones altura.

La Teoría de catástrofes de acuerdo Thom-Zeeman, (ver[3]) se dedica al estudio de las singularidades de Familias de funciones real valuadas  $F : Q \times N \rightarrow Q \times \mathbb{R}$ , en nuestro caso, la familia a estudiar es la familia de funciones altura la cual nos será de gran utilidad para desarrollar algunas afirmaciones expresadas en el Teorema de Caracterización.

**Definición 50** Sea  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión de una superficie diferenciable  $M$  en  $\mathbb{R}^3$ . Para cada vector unitario  $v \in \mathbb{R}^3$ , sea

$$\Pi_v : M \rightarrow \mathbb{R},$$

la función altura en la dirección de  $v$ , la composición de  $X$  con la proyección ortogonal a la línea generada por  $v$ ,

$$\Pi_v(p) = X(p) \cdot v$$

Colocando todas estas proyecciones en una familia, parametrizada por la esfera unitaria ( $S^2$ ), tendremos la transformación

$$\Pi : S^2 \times M \rightarrow S^2 \times \mathbb{R},$$

$$\Pi(v, p) = (v, \Pi_v(p)).$$

**Definición 51** El conjunto crítico (o variedad catastrofe) de la familia  $F$  es el conjunto

$$C = \left\{ (u, x) \in Q \times N \mid \frac{\partial F}{\partial x}(u, x) = 0 \right\},$$

es decir, es un desdoblamiento de las singularidades de  $F$ .

Observación: si  $F$  es versal, entonces el conjunto  $C$ , es una variedad diferenciable, de la misma dimensión  $q$  que  $Q$ .

**Definición 52** La transformación catástrofe de la familia  $F$  es la proyección  $\mathcal{X} : C \rightarrow Q$ , definida como  $\mathcal{X}(u, x) = u$ .

**Definición 53** El conjunto de bifurcación de  $F$  es la imagen en  $Q$  del conjunto singular de  $\mathcal{X}$ . (es decir, es el conjunto de puntos en  $C$  en los cuales  $\mathcal{X}$  tiene rango menor que  $q$ ).

Observación: Una familia de funciones real valuadas  $F: Q \times N \rightarrow Q \times \mathbb{R}$ . es versal si y sólo si  $F$  es una transformación estable, (Véase [2]).

Hagamos algunas observaciones importantes.

1) Un plano  $\xi$  es tangente a la superficie  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  en  $p \in U$  si y sólo si  $p$  es un punto crítico de la composición de  $X$  con la proyección ortogonal a la línea  $l$  a través de la normal en el origen a  $\xi$ .

Analizemos la afirmación con el siguiente caso particular. Consideremos  $X$  dada en la carta de Monge,  $(x, y, f(x, y))$ ,  $p$  el origen en  $\mathbb{R}^3$ , y  $v = (0, 0, 1)$ . (así, el plano tangente a  $X$  en  $p$  es el plano  $z = 0$ ). La función altura en la dirección de  $v$  esta dada por:

$$\Pi_v(p) = f(x, y),$$

Supongamos que  $p$  es punto crítico de la función altura, entonces  $f_x(p) = f_y(p) = 0$ , por lo cual la ecuación del plano tangente en  $p$  será  $z = 0$ .

Por otra parte, ahora supongamos que  $\xi$  es plano tangente a la superficie  $X$  en el punto  $p = (0, 0, 0)$ . La ecuación del plano tangente en el origen es

$$z = 0,$$

Si  $p$  no es punto crítico de la función altura, entonces  $(f_x(p), f_y(p)) \neq \bar{0}$ , podemos suponer que  $\alpha = f_x(p) \neq 0$ , entonces la ecuación del plano tangente en  $p$  tendría la forma

$$\alpha x = 0,$$

lo cual es una contradicción. De manera similar se prueba el resultado para un vector  $v$  arbitrario en cualquier punto sobre la superficie.

2) El conjunto crítico de la familia  $C$  de la familia  $\Pi$  es el conjunto de parejas  $(v, p)$  tal que  $p$  es punto crítico de la función altura  $\Pi_v$ , es decir son aquellas parejas donde el vector  $v$  es normal al plano tangente de la inmersión  $X$  en  $p$ .

3) La transformación catástrofe de la familia de funciones altura en una superficie inmersa es la transformación de Gauss de la superficie.

(Esto se puede ver fácilmente, si consideramos a  $M$  orientable.) La transformación catástrofe de la familia  $\Pi$ , es la transformación  $\mathcal{X} : C \rightarrow S^2$ , definida como  $\mathcal{X}(v, p) = v$ . Así, como ya se había mencionado,  $(v, p) \in C$  si y sólo si  $v$  es normal a  $X$  en  $p$ , por lo tanto  $\mathcal{X}(v, p) = v$  es precisamente la transformación de Gauss de  $X$  en  $p$ .

**Definición 54** Diremos que  $p$  es una cúspide elíptica (resp. hiperbólica) de la transformación de Gauss  $N$ , si  $p$  es una cúspide y la curvatura principal no cero  $k$  es positiva (resp. negativa).

**Definición 55** Sea  $p$  un punto en  $M$ . Una dirección asintótica de  $M$  en  $p$  es una dirección de  $T_p(M)$  para la cual, la curvatura normal es cero.

## 5.2 Teorema de caracterización.

El siguiente Teorema se ilustrará con los ejemplos del capítulo anterior.

**Teorema 56** Sea  $U$  un conjunto abierto en el plano, y sea  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión suave. Si  $p \in U$  es una cúspide de la transformación de Gauss de  $X$ , entonces las afirmaciones de a) a d) se cumplen. Inversamente, si la transformación de Gauss es estable, y cualquiera de las condiciones se cumple, entonces  $p$  es una cúspide de la transformación de Gauss.

a) La línea asintótica de  $X$  es tangente a la curva parabólica de  $X$  en  $p$ .

b) Para cada  $\varepsilon > 0$  existen tres puntos distintos  $Q_1, Q_2, Q_3 \in U$  tal que  $|p - Q_i| < \varepsilon$  para  $i = 1, 2, 3$  y los planos tangentes a  $X$  en  $Q_1, Q_2$  y  $Q_3$  son paralelos.

c) Para cada  $\varepsilon > 0$  existen dos puntos distintos  $Q_1, Q_2 \in U$  tal que  $|p - Q_i| < \varepsilon$  para  $i = 1, 2$ , y los planos tangentes a  $X$  en  $Q_1$  y  $Q_2$  son iguales.

d)  $p$  es un punto parabólico de  $X$  y una recta en  $\mathbb{R}^3$  tiene orden de contacto mayor que dos con  $X$  en  $p$ .

A continuación, ejemplificaremos los cuatro incisos enunciados.

a) La línea asintótica de  $X$  es tangente a la curva parabólica de  $X$  en  $p$ .

Analizaremos dos ejemplos. En el primero, mostramos que la dirección de curvatura principal cero de la superficie zapato no es tangente a la curva parabólica en ningún punto, ya que los puntos singulares de la transformación de Gauss asociada a ésta son todos dobleces, (no hay cúspides).

Consideremos la superficie zapato, vista en el capítulo 3 página 32. La diferencial de la transformación de Gauss modificada  $\tilde{N}$ , esta dada por

$$d\tilde{N} = \begin{pmatrix} -2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

como se había visto, una curva  $\sigma$  que parametriza el conjunto parabólico es  $\sigma(t) = (0, t)$ . La dirección de curvatura principal cero a lo largo de la curva

parabólica esta dada por el vector  $(1, 0)$  por lo tanto, el vector tangente a  $\sigma$  nunca coincide con el  $(1, 0)$ . por lo tanto a) no se cumple.

Veamos ahora el otro ejemplo, una superficie, cuya transformación de Gauss si tiene puntos singulares cúspide, como es el caso de la superficie de Menn (recordemos que la transformación de Gauss de esta superficie tiene una cúspide para  $t = 0$ ,  $\varepsilon \neq -\frac{1}{4}$ ).

La diferencial de  $\tilde{N}$  de dicha superficie es la matriz

$$d\tilde{N}(x, y) = \begin{pmatrix} -12\varepsilon x^2 - 2y & -2x \\ -2x & 2 \end{pmatrix},$$

una parametrización para la curva parabólica, será  $\sigma(t) = (t, -6(4\varepsilon + 1)t^2)$  y por lo tanto su vector tangente será  $\sigma'(t) = (1, -12(4\varepsilon + 1)t)$  La línea asintótica a lo largo de la curva parabólica, esta dada por el vector  $(1, t)$ . Si  $\varepsilon \neq -\frac{1}{4}$  vemos que este vector es tangente a la curva parabólica si y sólo si  $t = 0$ . Justo donde la transformación de Gauss tiene una cúspide, por lo tanto se cumple a).

Si  $\varepsilon = -\frac{1}{4}$  el vector  $(1, t)$  es tangente a lo largo de toda la curva parabólica, pero la transformación de Gauss no es excelente.

**b) Para cada  $\varepsilon > 0$  existen tres puntos distintos  $Q_1, Q_2, Q_3 \in U$  tal que  $|p - Q_i| < \varepsilon$  para  $i = 1, 2, 3$  y los planos tangentes a  $X$  en  $Q_1, Q_2$  y  $Q_3$  son paralelos.**

Consideremos un vector unitario  $v \in \mathbb{R}^3$ , consideremos, la función altura con respecto al vector  $v$ ,  $\Pi_v : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\Pi_v(p) = X(p) \cdot v.$$

Si tomamos ahora, a  $v$  como el vector normal a la superficie en  $p$  tendremos que:

$$\Pi_{N(p)}(x, y) = X(x, y) \cdot N(p),$$

así el vector gradiente de la función  $\Pi_{N(p)}$ , es

$$\nabla \Pi_{N(p)}(x, y) = (f_x(x, y) - f_x(p), f_y(x, y) - f_y(p))$$

por lo cual tenemos que  $p$  es un punto crítico de la función  $\Pi_{N(p)}$ , y no sólo eso, si no que podemos afirmar que se trata de un punto crítico degenerado, la matriz hessiana de  $\Pi_{N(p)}$  es

$$H\Pi_{N(p)}(p) = \begin{pmatrix} f_{xx}(p) & f_{xy}(p) \\ f_{yx}(p) & f_{yy}(p) \end{pmatrix},$$

y por ser  $p$  una singularidad de  $\tilde{N}$ , esta matriz no tiene rango máximo.

Empleando funciones altura, que se cumpla b) significa que el punto crítico degenerado  $p$ , separa en tres distintos puntos críticos  $Q_1, Q_2, Q_3$  cerca de  $p$  para ciertas funciones altura  $\Pi_v$  con  $v$  arbitrariamente cerca de  $N(p)$ .

Esta demostrado en [Banchoff] que estos tres puntos críticos son no degenerados si  $p$  es una cúspide de la transformación de Gauss  $N$ . Así que la afirmación (b) es equivalente a decir que el punto crítico  $p$  de la función altura  $\Pi_{N(p)}$  tiene número de Milnor tres.

Los dos tipos de cúspides Gaussianas son distinguidas desde este punto de vista por el índice de Morse de  $\Pi_{N(p)}$  en  $p$ ; si  $p$  es una cúspide elíptica [hiperbólica] de la transformación de Gauss  $N$  si y sólo si  $p$  es un valor extremo (silla) de  $\Pi_{N(p)}$ , (esto se obtiene de aplicarle el criterio del Hessiano a la función  $\Pi_{N(p)}$ ),  $p$  separa en tres puntos críticos no degenerados: dos máximos (o mínimos) y un silla [dos sillars y un máximo (o mínimo)]. Observemos que  $\Pi_{N(Q)}$  tiene un punto crítico no degenerado en  $Q$  el cual es un valor extremo [silla] si y sólo si la curvatura Gaussiana de  $X$  en  $Q$  es positiva [negativa].

A continuación veremos que los puntos parabólicos de la superficie  $X$ , pueden ser caracterizados como puntos críticos de la función altura.

Consideremos la superficie,  $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$  con  $p = (0, 0)$  y  $N(p) = (0, 0, 1)$ . Entonces  $f$  es la función altura de  $M$  en la dirección de  $N(p)$ ,

$$\Pi_{N(p)} = f(x, y).$$

Podemos parametrizar las direcciones cerca de  $p$  por  $(a, b, 1)$  para  $a$  y  $b$  cerca de 0, así que la familia de funciones altura  $\Pi_v : U \rightarrow \mathbb{R}$ , que esta dada por

$$\Pi_v(x, y) = X(x, y) \cdot v,$$

toma la forma

$$\Pi_{(a,b)}(x, y) = f(x, y) + ax + by.$$

Se puede ver en [8] que esta familia resulta ser un desdoblamiento versal de las funciones altura de  $f$  si y sólo si

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a} &= x, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial b} &= y \left\langle \frac{M(x, y)}{J(f)} \right\rangle, \end{aligned}$$

donde  $M$  es el ideal maximal de funciones que se anulan en el origen y  $J(f)$  es el ideal jacobiano de  $f$  generado por  $\partial/\partial x$  y  $\partial/\partial y$ .

Veamos,  $Q = (x, y)$  es un punto crítico de  $\Pi_{(a,b)}$  si y sólo sí

$$\nabla \Pi_{(a,b)}(x, y) = (a + f_x, b + f_y) = (0, 0),$$

es decir  $(a, b) = \tilde{N}(Q)$  donde  $\tilde{N}$  es la transformación de Gauss modificada de  $X$ .

La matriz Hessiana de segundas parciales de  $\Pi_{(a,b)}$  es

$$H_{\Pi}(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix},$$

y resulta ser igual a la matriz Hessiana de  $f(x, y)$ , la cual es la negativa de la matriz jacobiana de  $\tilde{N}$ . Entonces  $Q$  es un punto crítico degenerado de  $\Pi_{(a,b)}$  si y sólo si  $Q$  es un punto parabólico de  $X$ .

Veamos esta situación en los ejemplos analizados.

Para la superficie zapato, tenemos la perturbación

$$\Pi_{(a,b)}(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}y^2 + ax + by$$

con gradiente

$$\nabla\Pi_{(a,b)}(x, y) = (x^2 + a, -y + b).$$

Si  $a > 0$ , entonces  $\Pi_{(a,b)}$  no tiene puntos críticos. Si  $a < 0$ , entonces  $\Pi_{(a,b)}$  tiene dos puntos críticos:  $(\sqrt{-a}, b)$  y  $(-\sqrt{-a}, b)$  con matrices Hessianas

$$\begin{pmatrix} 2\sqrt{-a} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\sqrt{-a} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

respectivamente, así que  $(\sqrt{-a}, b)$  es una silla y  $(-\sqrt{-a}, b)$  es un máximo. (Si  $a < 0$ ,  $\Pi_{(a,b)}$  tiene un punto crítico degenerado en  $(0, b)$ .) Entonces  $f(x, y)$  tiene número de Milnor dos en  $p = (0, 0)$ .

Para la superficie de Menn tenemos

$$\Pi_{(a,b)}(x, y) = \varepsilon x^4 + x^2 y - y^2 + ax + by$$

con gradiente

$$\nabla\Pi_{(a,b)}(x, y) = (4\varepsilon x^3 + 2xy + a, x^2 - 2y + b).$$

Así  $(x, y)$  es un punto crítico de  $\Pi_{(a,b)}$  si y sólo si se cumplen

$$\begin{aligned} (a) \quad & y = -(4\varepsilon x^3 + a)/2x, \\ (b) \quad & (-4\varepsilon + 1)x^3 + bx + a = 0 \end{aligned}$$

suponiendo que  $x \neq 0$ . (Si  $x = 0$ , entonces  $a = 0$  y  $y = \frac{1}{2}b$ .) Ahora, si  $\varepsilon \neq \frac{1}{4}$  entonces (b) tiene tres distintas raíces reales si y sólo si su discriminante es negativo, es decir,

$$\left(\frac{b}{3(4\varepsilon + 1)}\right)^3 + \left(\frac{a}{2(4\varepsilon + 1)}\right)^2 < 0.$$

Observemos que el conjunto de ceros del discriminante esta dada por la curva

$$(2(4\varepsilon + 1)b^3, -3(4\varepsilon + 1)a^2),$$

la cual resulta ser precisamente la imagen de la curva parabólica de  $X$  por la transformación de Gauss modificada  $\tilde{N}$ . Si  $\varepsilon < -\frac{1}{4}$  entonces  $f(x, y) = 0$  sólo si  $(x, y) = (0, 0)$ , entonces  $f$  tiene un máximo absoluto en  $(0, 0)$ , y  $p = (0, 0)$  es una cúspide elíptica Gaussiana. Si  $\varepsilon > -\frac{1}{4}$ , entonces el conjunto  $f(x, y) = 0$  son dos parábolas tangentes, y  $f$  tiene un punto silla topológico en  $(0, 0)$ , así  $p$  es una cúspide Gaussiana hiperbólica.

**c) Para cada  $\varepsilon > 0$  existen dos puntos distintos  $Q_1, Q_2 \in U$  tal que  $|p - Q_i| < \varepsilon$  para  $i = 1, 2$ , y los planos tangentes a  $X$  en  $Q_1, Q_2$  y  $Q_3$  son iguales.**

Nuevamente, términos de las funciones altura, estas condiciones dicen que existe un vector unitario  $\Pi_v$  cerca de  $N(p)$  tal que  $\Pi_v$  tiene dos puntos críticos distintos  $Q_1$  y  $Q_2$  cerca de  $p$  con  $\Pi_v(Q_1) = \Pi_v(Q_2)$ .

Para la gráfica de una función  $X(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , esta condición traslada a  $N(Q_1) = (a, b) = N(Q_2)$  y  $\Pi_{(a,b)}(Q_1) = \Pi_{(a,b)}(Q_2)$ , es decir,

$$\begin{aligned} f_x(x_1, y_1) &= a = f_x(x_2, y_2), \\ f_y(x_1, y_1) &= b = f_y(x_2, y_2), \\ f(x_1, y_1) + ax_1 + by_1 &= f(x_2, y_2) + ax_2 + by_2. \end{aligned}$$

Ejemplo: Para la superficie zapato tenemos que

$$\begin{aligned} x_1^2 &= x_2^2, \\ y_1 &= y_2, \\ \frac{1}{3}x_1^3 - \frac{1}{2}y_1^2 + x_1^3 + y_1^2 &= \frac{1}{3}x_1^3 - \frac{1}{2}y_2^2 + x_2^3 + y_2^2 \end{aligned}$$

así  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$  y (c) no se cumple.

En el caso de la superficie de Menn usamos la simetría del plano con respecto a las dos segundas coordenadas. Si  $x_1 = -x_2$  y  $y_1 = y_2$ , entonces

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= f(x_2, y_2), \\ f_x(x_1, y_1) &= -f_x(x_2, y_2), \\ f_y(x_1, y_1) &= f_y(x_2, y_2), \end{aligned}$$

Entonces si

$$f_x(x_1, y_1) = 0, \quad y \quad x \neq 0,$$

$Q_1 = (x, y)$  y  $Q_2 = (-x, y)$  serán dos parejas de puntos distintos con el mismo plano tangente. Ahora

$$0 = f_x(x, y) = 4\varepsilon x^3 + 2xy = 2x(2\varepsilon x^2 + y),$$



si y sólo si  $x = 0$  o  $y = -2\epsilon x^2$ . ya que ésta última curva contiene a  $p = (0, 0)$ , (c) se cumple para la superficie de Menn. (Notemos que si  $\epsilon = -\frac{1}{4}$  esta curva coincide con la curva parabólica, ya que la imagen Gaussiana de la curva parabólica es un solo punto, la misma situación pasa en el toro de revolución).

d)  $p$  es un punto parabólico de  $X$  y una recta en  $\mathbb{R}^3$  tiene orden de contacto mayor que dos con  $X$  en  $p$ .

La curva en el espacio  $\alpha(t)$  tiene  $n$ -ésimo orden de contacto con la superficie  $G(x, y, z) = 0$ , en el punto  $\alpha(t_0)$  si y sólo si la función  $G(t) = G(\alpha(t))$  tiene orden  $n$  en  $t_0$ , i.e.,

$$G(t_0) = G'(t_0) = G''(t_0) = \dots = G^{(n)}(t_0) = 0, \quad G^{(n+1)}(t_0) \neq 0.$$

Entonces una línea es tangente a la superficie si y sólo si esta tiene orden de contacto en uno menos que con la superficie.

Para la zapato tenemos

$$G(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}y^2 - z$$

El origen  $(0, 0, 0)$  es un punto parabólico, y el plano tangente en el origen es horizontal. Para la recta tangente  $\alpha(t) = (t \cos \theta, t \sin \theta, 0)$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,

$$G^{(2)}(0) = -\sin^2 \theta, \quad G^{(3)}(0) = 2 \cos^3 \theta, \quad G^{(4)}(0) = 0,$$

así que  $\alpha$  tiene primer orden de contacto con la superficie zapato si  $\theta \neq 0$  y segundo orden de contacto si  $\sin \theta = 0$ .

Ahora consideremos la superficie de Menn,

$$G(x, y, z) = \epsilon x^4 + x^2 y - y^2 - z,$$

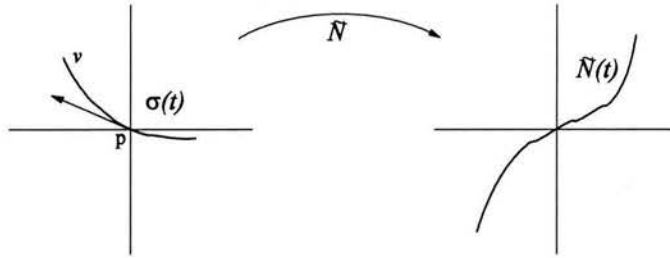
Nuevamente  $(0, 0, 0)$  es un punto parabólico con plano tangente horizontal, y para la recta  $\alpha$  que mencionamos arriba tenemos

$$\begin{aligned} G^{(2)}(0) &= -2 \sin^2 \theta, \\ G^{(3)}(0) &= 6 \cos^2 \theta \sin \theta, \\ G^{(4)}(0) &= 24 \epsilon \cos^4 \theta, \\ G^{(5)}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces  $\alpha$  tiene primer orden de contacto con la superficie de Menn si  $\theta \neq 0$ . Si  $\epsilon \neq 0$  y  $\theta = 0$  entonces  $\alpha$  tiene tercer orden de contacto con la superficie. Si  $\epsilon = 0$  y  $\theta = 0$  entonces  $\alpha$  tiene orden infinito de contacto con la superficie, en efecto la recta  $y = z = 0$  esta contenida en la superficie.

Demostremos ahora los incisos a), b) y c) de éste Teorema.

**Demostración. de a):** Si la transformación  $\tilde{N}$  es buena, entonces su jacobiano tiene rango 1 en cada punto parabólico  $p$ . Considere la curva  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$  en el dominio de  $U$  con imagen gaussiana  $N(t)$ .



El kernel del jacobiano es la dirección de curvatura principal cero en  $p$ . Sea  $p = (x(0), y(0))$ , y  $v = (x'(0), y'(0))$  el vector tangente a  $\sigma$  en  $p$ .

La curvatura normal de  $X$  en la dirección  $v$  en  $p$  es cero si y sólo si  $N'(0) = \bar{0}$ , ya que

$$k_n = -\langle dN_p(v), v \rangle = 0$$

si y sólo si

$$dN_p(v) = 0 \text{ ó } dN_p(v) \perp v,$$

pero el punto es parabólico, lo cual implica que

$$dN_p(v) = N'(0) = 0$$

Si  $\sigma$  es la curva que parametriza al conjunto parabólico de  $X$ , y  $N$  es excelente  $N'(0) = 0$  si y sólo si  $p$  es una cúspide de  $N$ . lo cual implica a). ■

Las caracterizaciones de cúspides de b) y c) son corolarios del siguiente Teorema, cuya prueba se puede consultar en [2].

**Teorema 57** Sea  $M$  una superficie diferenciable. Para un subconjunto abierto y denso  $A$  del espacio de inmersiones  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , el germen  $(v, p)$  de la familia  $\Pi : S^2 \times M \rightarrow S^2 \times \mathbb{R}$ , es un desdoblamiento versal de  $\Pi_v$  en  $p$ , para todo  $(v, p) \in S^2 \times M$ .

Observemos que, afirmar que la familia  $\Pi : S^2 \times M \rightarrow S^2 \times \mathbb{R}$ , es un desdoblamiento versal de  $\Pi_v$  en  $p$ , es equivalente a afirmar que el germen en  $(v, p)$  de la transformación  $\Pi$  es estable.

Ahora demostremos b) y c)

**Demostración. b).** Sea  $v$  un vector normal unitario a  $X$  en  $p$ . Los puntos  $Q_1, Q_2$  y  $Q_3$  son puntos críticos de la función altura  $\Pi_w$ , para  $w$  cerca de  $v$ .

Pero,  $p$  es una cúspide de la transformación de Gauss de  $X$ , si y sólo si es  $(v, p)$  es una cúspide de la transformación catástrofe  $\mathcal{X}$  de la familia  $\Pi$ . (véase pag. 40)

Para cada  $w \in S^2$ ,  $\mathcal{X}^{-1}(w)$  es por definición el conjunto de puntos críticos de la función altura  $\Pi_w$ . Si  $(v, p)$  es una cúspide de  $\mathcal{X}$  entonces existe  $w$  arbitrariamente cerca de  $v$  tal que  $\mathcal{X}^{-1}(w)$  tiene tres puntos. (véase la figura de la página 30).

Por otro lado, si  $X \in A$ , entonces por ser estable, el germen de  $\mathcal{X}$  en un punto  $(v, p)$  es, o un germen regular, o un doblez o una cúspide. Si este germen es regular, entonces  $\mathcal{X}^{-1}(w)$  tiene sólo un punto para  $w$  cerca de  $v$ . Si el germen es doblez, entonces  $\mathcal{X}^{-1}(w)$  tiene o dos puntos o ninguno, para  $w$  cerca de  $v$ . (véase figura de la página 21) ■

**Demostración. c).** Sea  $v$  un vector unitario normal a  $X$  en  $p$ . Nuevamente, los puntos  $Q_1$  y  $Q_2$  de la función altura con  $\Pi_w$  para cada  $w$  cerca de  $v$  con  $\Pi(Q_1) = \Pi_w(Q_1)$ .

Ya que  $\mathcal{X}$  es la transformación catástrofe de la familia  $\Pi : M \times S^2 \rightarrow \mathbb{R} \times S^2$ , el germen de  $\mathcal{X}$  en  $(v, p)$  es una cúspide (respectivamente doblez o regular), si y sólo si el germen de  $\Pi$  en  $(v, p)$  es una cola de golondrina (respectivamente cúspide o doblez) [véase [10]] .

La imagen del conjunto de puntos críticos de  $\Pi$  cerca de de una singularidad del tipo "swallowtail" es una curva de puntos dobles [véase [10]] , es decir hay dos curvas  $\alpha, \beta : [0, \varepsilon) \rightarrow C$  tal que

$$\alpha(0) = (v, p) = \beta(0),$$

$$\alpha((0, \varepsilon)) \cap \beta((0, \varepsilon)) = \phi,$$

y

$$\Pi(\alpha(t)) = \Pi(\beta(t))$$

para todo  $t \in [0, \varepsilon)$ . La imagen de puntos críticos cerca de un doblez o una cúspide no tiene puntos dobles. ■

## 6 Singularidades de Superficies con un punto umbílico aislado

### 6.1 Configuraciones Darbouxianas.

Consideremos  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una inmersión,  $C^\infty$ . Denotemos  $\varphi(U) = M$

La primer forma fundamental  $I_q$  se define

$$\begin{aligned} I_q & : T_q M \rightarrow \mathbb{R}, \\ I_q(\bar{v}) & = \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = \|\bar{v}\|^2 \end{aligned}$$

con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  el producto punto de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $\mathbb{R}^2 = \{(u, v)\}$ , entonces

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

donde  $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$ ,  $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$ ,  $G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$ , y consideremos la transformación de Gauss como se definió anteriormente,

$$\begin{aligned} N & : M \rightarrow S^2 \\ N(q) & = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}(q) \end{aligned}$$

donde la diferencial de la transformación  $N$  en  $q$ ,

$$: T_q M \rightarrow T_{N(q)} S^2,$$

donde  $T_{N(q)} S^2$  lo identificaremos con  $T_q M$ . El operador  $dN_q$  es un operador autoadjunto. Su forma cuadrática asociada es la segunda forma fundamental

$$\begin{aligned} II_q & : T_q M \rightarrow \mathbb{R} \\ II_q(\bar{v}) & = \langle d_q N(\bar{v}), \bar{v} \rangle \\ II & = e(q)du^2 + 2f(q)dudv + g(q)dv^2 \end{aligned}$$

donde  $e(q) = \langle \varphi_{uu}(q), N(q) \rangle$ ,  $f(q) = \langle \varphi_{uv}(q), N(q) \rangle$ ,  $g(q) = \langle \varphi_{vv}(q), N(q) \rangle$ .

**Definición 58** a) Las curvaturas principales  $k_1 \in \mathbb{R}$  y  $k_2 \in \mathbb{R}$  en  $q$  son el valor máximo y el valor mínimo de  $II_q$  restringido a  $S^1$ . (Si  $k_1 \neq k_2$  estos valores se toman en direcciones ortogonales.)

b) Si  $k_1(q) = k_2(q)$  se dice que  $q$  es un punto umbílico.

Las curvas integrales de estas direcciones definen 2 foliaciones ortogonales para casi todo punto. Llamamos a dichas curvas integrales líneas de curvatura,  $L_\varphi, l_\varphi$  cuyas singularidades son los puntos umbílicos.

Las ecuaciones diferenciales de las líneas de curvatura obtenidas de  $dN(v) = k$  tienen la forma

$$(Ef - eF)du^2 + (Eg - Ge)dudv + (Fg - fG)dv^2 = 0.$$

**Definición 59** Un punto umbílico  $p_0$  de una superficie  $S$  descrita por

$$f(u, v) = \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{c}{6}v^3 + O[(u^2 + v^2)]^2,$$

es llamado darbouxiano si las condiciones  $T$  y  $D$  se cumplen:

$T$ ) Condición de transversalidad,  $b(b - a) \neq 0$ ,

$D$ ) Condición discriminante,

$$\begin{aligned} D_1 : a/b &> (c/2b)^2 + 2 \text{ ó} \\ D_2 : (c/2b)^2 + 2 &> a/b > 1, (a \neq 2b) \text{ ó} \\ D_3 : a/b &< 1. \end{aligned}$$

**Definición 60** El retrato fase de las líneas de curvatura en una vecindad de un punto umbílico darbouxiano se le conoce como configuraciones principales.

Los tres diferentes tipos topológicos de umbílicos darbouxianos se muestran a continuación.

y la transición en el eje  $a/b$  se da de la siguiente manera

### Configuraciones Darbouxianas

Sotomayor y Gutierrez probaron en [1] que las configuraciones principales para puntos umbílicos darboxianos son estructuralmente estables (o robustos) en el espacio de las inmersiones con la topología  $\mathcal{C}^2$ .

## 6.2 Superficie con un punto umbílico aislado.

El ejemplo que nos interesa es el de una superficie con un punto umbílico (no necesariamente darboxiano), la cual, es la gráfica de una función de la forma

$$f(u, v) = \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{c}{6}v^3 \quad (1),$$

con  $a, b, c$ , valores reales.

La transformación de Gauss modificada  $\tilde{N}$  asociada a una superficie como  $S$  esta dada por

$$\tilde{N}(u, v) = -\left(ku + \frac{a}{2}u^2 + \frac{b}{2}v^2, kv + buv + \frac{c}{2}v^2\right),$$

La transformación  $\tilde{N}$  es singular en los puntos  $p = (u, v)$  donde la matriz jacobiana

$$D\tilde{N} = \begin{pmatrix} k + au & bv \\ bv & k + bu + cv \end{pmatrix},$$

tiene determinante cero, es decir  $J\tilde{N}(p) = 0$ .

Aquí,  $\Sigma(\tilde{N}) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid abu^2 + acuv - b^2v^2 + k(a+b)u + kcv + k^2 = 0\}$ , es el conjunto de puntos singulares de  $\tilde{N}$ . Dicho conjunto define una curva suave si  $\nabla J\tilde{N} \neq 0$ . Tenemos que

$$\nabla \tilde{N} = (2abu + acv + k(a+b), acu - 2b^2v + kc),$$

dicho gradiente se anula en el punto

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{-k(ac^2 + 2b^2(a+b))}{a^2c^2 + 4ab^3} \\ v_0 &= \frac{kc(2b - (a+b))}{ac^2 + 4b^3} \end{aligned},$$

Ahora la pregunta es, ¿Qué tipo de curva define  $\Sigma(\tilde{N})$ ? Como se puede observar,  $\Sigma(\tilde{N})$  depende de los valores  $a, b, c$  asociados a la superficie. Así tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 61** *Sea  $S$  una superficie con un punto umbílico la cual es la gráfica de una función definida como en (1), y sea  $\Delta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por  $\Delta(b, c, a) = a^2c^2 + 4ab^3$ , la función discriminante, la cual se obtiene de la expresión del conjunto parabólico (i.e., es el discriminante de  $J\tilde{N} = 0$ ). Si  $\nabla J\tilde{N} \neq 0$ , entonces la curva definida por el conjunto parabólico de la transformación de Gauss modificada asociado a la superficie  $S$  será:*

- a) una parábola (o dos rectas paralelas) si  $\Delta = 0$ ,
- b) una elipse (o un punto) si  $\Delta < 0$ ,
- c) una hipérbola (o dos rectas que se intersectan) si  $\Delta > 0$ .

Este resultado se sigue de la forma explícita que tiene  $\Sigma(\tilde{N})$ , ya que corresponde a la forma general de una forma cuadrática en  $\mathbb{R}^2$ .

**Observación:** Cabe destacar, que las transformaciones realizadas para llegar a una forma normal de  $f$  como en (1) preservan el tipo de conjunto singular de la transformación de Gauss de  $S$ , descritas en la proposición anterior, es decir, una superficie en  $\mathbb{R}^3$  con punto umbílico, donde la curva definida por el conjunto parabólico de la transformación  $\tilde{N}$  asociada a esta superficie sea una elipse, seguirá teniendo a la elipse como conjunto parabólico en la forma normal (1) de la superficie.

### 6.2.1 Análisis de $\Delta^{-1}$ .

La función  $\Delta$  determina, dado un punto  $(b, c, a)$  el cual define una superficie en (1), cual es la curva descrita por el conjunto parabólico. Analizaremos ahora, la imagen inversa de  $\Delta$ , pues nos interesa separar las regiones que corresponden a cada uno de los casos citados en la proposición.

Como ya se había mencionado,  $\Delta : (b, c, a) \rightarrow a(ac^2 + 4b^3)$ . Comencemos por describir  $\Delta^{-1}(0)$ . Este es el conjunto de puntos  $(b, c, a) \in \mathbb{R}^3$  tal que

$$a(ac^2 + 4b^3) = 0.$$

La ecuación anterior se cumple si alguna de las siguientes dos condiciones se cumple

$$a = 0 \quad (2)$$

$$ac^2 + 4b^3 = 0 \quad (3),$$

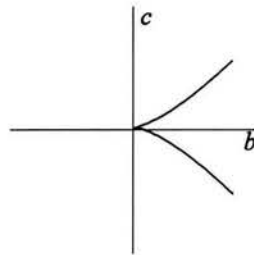
la ecuación (2), corresponde al plano  $(b, c)$ . Para ver la solución de la ecuación (3) veamos las curvas de nivel de ésta.

Tomemos  $a = k \neq 0$ . El primer caso será  $a < 0$ .

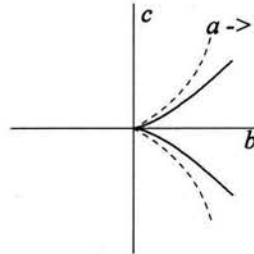
De (3), obtenemos

$$c^2 = \alpha b^3 \quad (4),$$

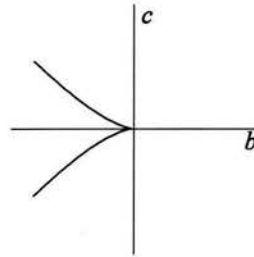
donde  $\alpha = -4/a > 0$ . Así en planos paralelos a  $(b, c)$  la gráfica de (3) corresponde a una cúspide (o parábola semicúbica), como se muestra en la siguiente figura.



Observemos que conforme  $a \rightarrow 0^-$ , la amplitud de la cúspide se va haciendo cada vez más grande, así, cuando  $a = 0$  la cúspide degenera en el eje  $c$  como se muestra a continuación.



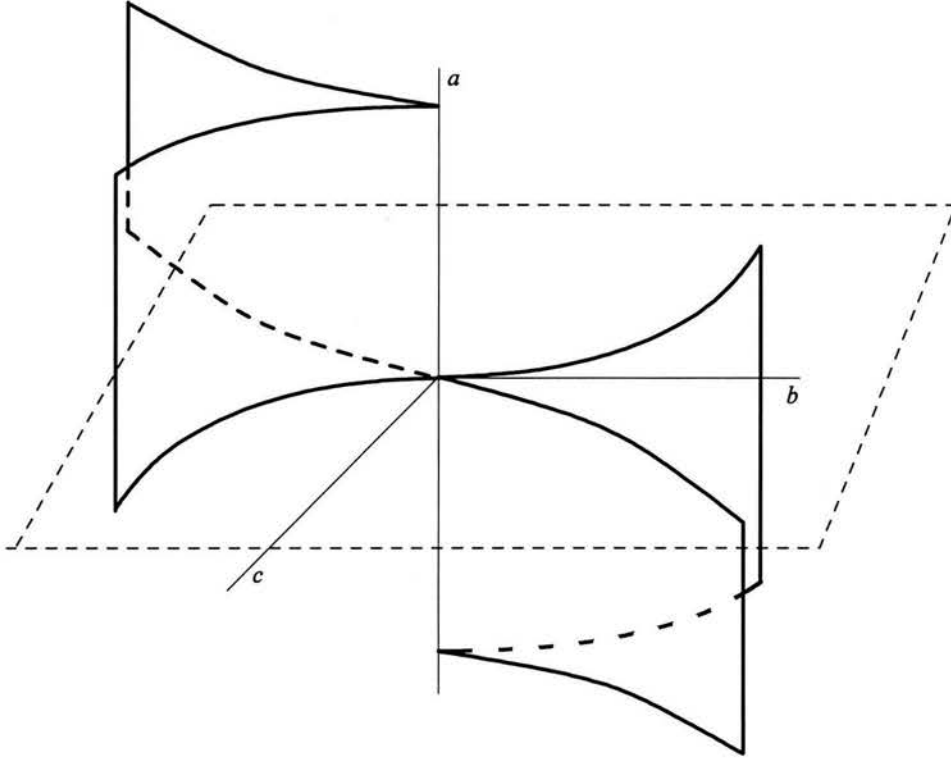
Consideremos ahora  $a > 0$ , nuevamente tendremos la ecuación (4) con  $\alpha < 0$ , la cual nuevamente nos define una cúspide como la siguiente.



Al igual que en el caso anterior la amplitud de la cúspide va creciendo conforme  $a \rightarrow 0^+$ , así, cuando  $a = 0$ , la cúspide vuelve a degenerar en el eje  $c$ . Es de ésta manera como podemos concluir que la gráfica de  $\Delta^{-1}(0)$  es como la siguiente. Recordemos que es justamente en  $\Delta^{-1}(0)$  donde el conjunto parabólico de  $\Sigma(\tilde{N})$  tiene por gráfica asociada una parábola (o bien dos rectas paralelas).



La superficie  $\Delta^{-1}(0)$  se muestra a continuación.



La anterior superficie cuspidal, descrita por  $\Delta^{-1}(0)$  nos define 4 regiones en el espacio, a continuación determinaremos sobre cuáles de estas regiones, el conjunto parabólico de  $\tilde{N}$  corresponde a una hipérbola o elipse (o bien su correspondiente caso degenerado). Si  $a > 0$  se define una región cóncava en  $\mathbb{R}^3$  que se encuentra fuera de la superficie cuspidal, la cual llamaremos  $Cc_s$  y otra región convexa, dentro de la superficie, la cual llamaremos  $Cv_s$ . Análogamente para  $a < 0$ , se distinguen las regiones que denotaremos por  $Cc_i$  (la región cóncava, fuera de la superficie) y  $Cv_i$  ( región convexa, dentro de la superficie).

Si  $a > 0$ , y tomamos  $b > 0$ ,  $c > 0$ , tendremos que  $ac^2 + 4b^3 > 0$ , estos valores corresponden a la región  $Cc_s$ , así tendremos que por conexidad, y dado que esta región es abierta, para cualquier punto  $(b, c, a) \in Cc_s$  existe una vecindad de radio  $\delta > 0$ , enteramente contenida en  $Cc_s$ , en la cual todos los puntos pertenecientes a dicha vecindad definen una superficie  $S$  cuyo conjunto parabólico de la transformación de Gauss asociado a ésta, tiene por gráfica una hipérbola.

Si  $a > 0$ ,  $b < 0$ ,  $c = 0$  tendremos que  $ac^2 + 4b^3 < 0$ . Estos valores corresponden a la región  $Cv_s$ , es decir, dentro de la superficie cuspidal, así nuevamente

por como  $Cv_s$  es también abierto, para cualquier punto  $(b, c, a) \in Cv_s$  existe una vecindad de radio  $\delta > 0$  enteramente contenida en  $Cv_s$  donde cada punto perteneciente a la vecindad, define una superficie  $S$  cuyo conjunto parabólico de la transformación de Gauss asociado a ésta, tiene por gráfica una elipse. Haciendo un análisis similar a éste, se puede ver que  $Cc_i$  corresponde a la parametrización de superficies donde  $\Sigma(\tilde{N})$  es una hipérbola y para  $Cv_i$  una elipse.

La distribución de las regiones queda como se muestra en la siguiente gráfica.

## Superficie Cuspidal

### 6.2.2 Análisis de las regiones descritas por las condiciones de transversalidad.

Ahora, investiguemos como es el diagrama de bifurcación descrito por las condiciones  $T$  y  $D$  descritas en la definición 59, en el espacio de parámetros  $(b, c, a)$ .

Por la condición de transversalidad se tiene que

$$\begin{aligned} b &\neq 0 \\ b &\neq a, \end{aligned}$$

por lo que tenemos que quitar los planos  $b = 0$ ,  $b = a$ . Dado que la condición  $D_3$  no involucra el parámetro  $c$ , podemos determinar en que región del plano  $(a, b)$  se encuentra esta condición, justamente las condiciones de transversalidad nos marcan los límites para  $D_3$  como se muestra a continuación.

Para hacer la descripción del resto de la condición  $D$  analicemos la superficie

$$D_{12}(b, c, a) = \left(\frac{c}{2b}\right)^2 + 2 - \frac{a}{b}. \quad (5)$$

Veamos sus curvas de nivel, para ello tomemos  $c$  constante.

Si tomamos  $c = 0$ , por un lado la superficie  $D_{12}$  nos da  $a = 2b$ , y por otro lado, de la condición  $D_2$  se tiene que

$$2 > a/b > 1, \quad (6)$$

así, si  $b > 0$  entonces  $2b > a$ . Tomando  $a = 3/2$ ,  $b = 1$ , vemos que este punto cumple con la desigualdad (6), y por consiguiente toda la región donde éste se encuentra, ya que ésta es abierta. Si  $b < 0$ , entonces por (6) tendremos que  $a$  tiene que ser negativo. Si consideramos el punto  $a = -3/2$ ,  $b = -1$ , podemos observar que también cumple con la desigualdad (6) y al igual que en el caso anterior, también toda la región donde se localiza este punto. Por lo tanto, en el plano  $(a, b)$ , el conjunto de puntos que cumple con la condición  $D_2$  es el que se muestra en la siguiente figura.

Para la condición  $D_1$  considerando  $c = 0$  tenemos

$$a/b > 2, \quad (7),$$

si  $b > 0$ , consideremos el punto  $b = 1$ ,  $a = 3$ , así, este punto cumple con la desigualdad (7). Si  $b < 0$ , por (7) tenemos que  $a$  tiene que ser negativo,

considerando el punto  $a = -1$ ,  $b = -3$ , tenemos que cumple con (7), por lo tanto, en el plano  $(a, b)$  el conjunto de puntos que cumple con la condición  $D_1$  es el que se muestra a continuación.

El análisis anterior, podemos concluir que las rectas  $b = a$ ,  $2b = a$  y  $a = 0$  son parte del diagrama de bifurcación de la condición  $D$  en el plano  $(a, b)$  como podemos ver a continuación.

Hemos considerado el caso en el cual  $c = 0$ , veamos que sucede si  $c \neq 0$ , pero tomando ahora  $a$  constante en lugar de  $c$ . De la expresión (5) suponiendo  $b \neq 0$ , obtenemos

$$\frac{c^2}{a^2/2} + \frac{(b - a/4)^2}{a^2/16} = 1,$$

esta ecuación corresponde a elipses con ejes  $a/\sqrt{2}$ ,  $a/4$  y centro en  $(0, a/4)$ , conforme varia  $a$ . Ya que por (5),  $b$  no puede tomar el cero, tenemos

que la gráfica de la curva de nivel en planos paralelos a  $(c, b)$  son elipses sin el punto  $b = 0$  como se muestra en la siguiente gráfica.

Ahora consideremos  $c$  constante, es decir planos paralelos a  $(a, b)$ . De (5), tomando  $c = k$  obtenemos la expresión

$$a = \frac{k^2}{4b} + 2b, \quad (8)$$

Haciendo el análisis de la gráfica de (8). tenemos que dicha gráfica es simétrica respecto al origen, por otro lado, por medio de un cálculo podemos ver que en  $b = \sqrt{k/8}$  y en  $b = -\sqrt{k/8}$  la función descrita por (8) tiene un mínimo y un máximo local respectivamente.

La gráfica de la función descrita por  $D_{12}(a, b, k)$  es como se muestra a continuación.

Hemos encontrado el conjunto de bifurcación  $D_{12}$ , ahora determinemos sobre que regiones se encuentran las configuraciones  $D_1, D_2$  y  $D_3$ , para el caso  $c \neq 0$ . Observemos que la región para  $D_3$  se sigue preservando no solo para el plano  $(a, b)$  si no también para cualquier plano paralelo a éste, pues la condición que

determina esta configuración no depende de  $c$ . Para  $D_2$  si consideramos el punto  $a = 3/2$ ,  $b = 1$  tenemos que este punto cumple que

$$D_{12} > a/b > 1 \quad (9),$$

y dado que la región donde se encuentra este punto es abierta, cualquier punto dentro de ésta también cumplirá con (9).

De la misma forma podemos concluir que  $D_1$  es la región que se encuentra en el interior de la superficie  $D_{12}$ .

El análisis completo de la distribución de las regiones para la condición  $D$  es como se muestra a continuación.

Debido a todo lo anterior podemos enunciar la siguiente proposición.

**Proposición 62** *Sea  $S$  una superficie de dimensión 2 con un punto umbílico la cual es la gráfica de una función definida como en (1). El conjunto de bifurcación definido por las condiciones  $T$  y  $D$  que determinan las configuraciones Darbouxianas en el espacio tridimensional de parámetros  $(b, c, a)$  son los planos  $a = b$ ,  $a = 2b$  y la superficie  $D_{12}$  la cual es un cono con base elíptica*

Del análisis realizado, podemos deducir el siguiente Teorema.

**Teorema 63** *En el espacio de parámetros  $(b, c, a)$  los cuales determinan una superficie  $S$  de dimensión 2 con un punto umbílico la cual es la gráfica de una función definida como en (1), tanto el conjunto de bifurcación de puntos umbílicos darbouxianos así como el conjunto de bifurcación del conjunto de singularidades la transformación de Gauss modificada correspondiente a  $S$ ,  $\Sigma(\tilde{N})$ , se distribuyen en regiones descritas por cuádricas y planos. (Para el primero se trata de el cono con base elíptica con una discontinuidad en  $b = 0$ , el plano  $b = a$  y el plano  $2b = a$ , para el segundo la superficie cuspidal y el plano  $a = 0$ ).*

Además del Teorema anterior, surge la siguiente pregunta. Para las superficies con punto umbílico darbouxiano, del tipo  $D_1$  (por ejemplo), ¿el conjunto

parabólico de la transformación de Gauss modificada , asociado a dicha superficie será siempre una elipse, o bien, puede aceptar cualquier tipo de cuádrica como conjunto  $\Sigma(\tilde{N})$ , es decir, podemos encontrar  $D_1$  cuyo conjunto parabólico puede ser elipse, hipérbola o parábola.

Si intersectamos ambos diagramas de bifurcación, tenemos el siguiente Teorema.

**Teorema 64** *Sea  $S$  una superficie de dimensión 2 con un punto umbílico la cual es la gráfica de una función definida como en (1), sea  $\tilde{N}$  la transformación de Gauss modificada de  $S$  y sea  $\Sigma(\tilde{N})$  el conjunto parabólico de dicha transformación. Entonces, para las superficies descritas por los parámetros  $(b, c, a)$  con puntos umbílicos darbouxianos del tipo  $D_1$  y  $D_2$  tienen como conjunto  $\Sigma(\tilde{N})$  hipérbolas (siempre). Para puntos umbílicos darbouxianos del tipo  $D_3$  podemos encontrar superficies descritas por los parámetros  $(b, c, a)$  cuyo conjunto  $\Sigma(\tilde{N})$  puede ser una elipse, una hipérbola o parábola (o bien su correspondiente caso degenerado).*

## References

- [1] Sotomayor, J., Gutierrez, C., Structurally Stable Configurations of Lines of Principal Curvature; *Astérisque* 98-99 (1982). 195-215.
- [2] Gibson, C. G., Singular points of smooth mappings.; London Pitman, (1979).
- [3] Banchoff, Thomas F., Gaffney, T. and Mc Crory, C.; *Cusps of Gauss mappings*, Boston, Mass., Pitman, (1982).
- [4] Gutierrez, C., Sotomayor, J., *Lines of Curvature and Umbilical Points on Surfaces*; IMPA, (1991).
- [5] Radmila, Bulajich, López de Medrano, Santiago., *Teoría de Singularidades, introducción elemental. Aportaciones matemáticas.* (1995).
- [6] Golubitsky, Martín, Guillemin V. *Stable mappings and their singularities.* New York; Springer Verlag.; (1973).
- [7] Whitney, H.; *On singularities of mappings of Euclidean spaces I: mappings of the plane into the plane.* *Ann. of Math.* 62, (1965). 374-410.
- [8] Bruce, J. W. , Giblin, P., Tari, F. *Families of surfaces: height functions, Gauss maps and duals. Real and complex singularities*, Pitman, Research notes in Mathematics series.
- [9] Montaldi, James A. *Contact, whit applications to submanifolds of  $\mathbb{R}^n$ .* Tesis doctoral. Liverpool (1983).
- [10] Callahan, James. *Singularities and plane maps II: sketching catastrophes.* *Amer. Math. Monthly* 84 (1977), 765-803.
- [11] Navarro Soza, José M. *Bifurcaciones de puntos umbilicos simples de superficies en  $\mathbb{R}^4$ .* Tesis doctoral. México (2001).