



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

Reconstrucción de Superficies

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
M A T E M Á T I C O
P R E S E N T A:
OSCAR HUGO ÁLVAREZ LUQUÍN



Facultad de Ciencias

UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. MAX NEUMANN COTO





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Reconstrucción de Superficies

realizado por Oscar Hugo Alvarez Luquín con número de cuenta 9435654-6

quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis	DR. MAX NEUMANN COTO
Propietario	
Propietario	BIOL. JOSE LUIS VILLARREAL BENITEZ
Propietario	DR. JORGE URRUTIA GALICIA
Suplente	DR. ANTONIO LASCURAIN ORIVE
Suplente	DRA. HORTENSIA GALEANA SANCHEZ

Consejo Departamental de Matemáticas

M. EN C. JOSE ANTONIO GÓMEZ ORTEGA

MATEMÁTICAS

Índice general

Prefacio	II
Agradecimientos	III
Introducción	1
Capítulo 1. Planteamiento y condiciones	5
1. Condición de Reconstrucción	5
2. Justificación sobre la condición de reconstrucción	7
3. Limitaciones de la condición de reconstrucción	8
Capítulo 2. Asociación de curvas	9
1. Topología de un conjunto de curvas simples en un plano	9
2. El problema de Asociación.	20
Capítulo 3. Reconstrucción de las superficies básicas	29
1. Intersección de triángulos	29
2. Triangulación de polígonos	32
3. Las superficies básicas en el plano	39
4. Métodos para la generación de las superficies básicas	41
Capítulo 4. Aplicación	45
Bibliografía	49

Prefacio

Los sistemas modernos de adquisición de imágenes de objetos en el espacio (Resonancia Magnética, Ultrasonografía, Microscopía confocal, Tomografía, etc), se basan en la reconstrucción de una serie de imágenes bidimensionales (los cortes del objeto con planos paralelos) a partir de las cuales se construye un objeto gráfico en la computadora.

Los objetos gráficos más usados en diversas aplicaciones son modelos geométricos de superficies, representados por elementos regulares, triángulos por ejemplo.

La utilidad de estos objetos gráficos es ganar un mejor entendimiento espacial de las estructuras y realizar mediciones y pruebas espaciales; por ejemplo, planeación de intervenciones quirúrgicas, de radioterapia, desarrollo de prótesis; en medicina. Análisis geotécnicos en exploración petrolera, de fracturas o fallas en piezas mecánicas, etc.

Se han desarrollado muchos algoritmos para segmentar las imágenes 2D, obteniendo las fronteras de las estructuras como curvas cerradas. La aproximación basada en la reconstrucción de superficies consiste en construir una superficie entre los contornos adyacentes de los planos. El procedimiento general consiste en conectar segmentos del contorno a vértices en el plano opuesto, quedando definida la superficie por un conjunto de triángulos. Entonces, el problema es contar con un algoritmo que siga algún criterio para unir segmentos con vértices. Los métodos principales usan algún criterio de optimización (inclusive heurísticas), por ejemplo: minimización de la superficie, máximo volumen (ver [1]).

Estos métodos están limitados a un solo contorno sobre cada plano o corte. En el caso que haya varios contornos una solución son las herramientas interactivas o semiautomáticas, en las que un humano decide el árbol de apareamiento de contornos entre los planos. En este trabajo se proporciona un método de apareamiento que en muchos casos funciona automáticamente y algoritmos para generar superficies que conecten contornos.

A mis papás, a Danliuc y Aladín, porque siempre están conmigo.

A los maestros que tuvieron gran influencia en mi, durante mi paso por la Facultad de Ciencias: Dr. Antonio Lascurain y especialmente al Dr. Max Neumann Coto por su guía y paciencia durante el desarrollo de mi tesis.

A mi jefe de DGSCA, Biol. José Luis Villarreal Benítez, por su apoyo y por hacer que sintiera que el Labvis fuera como mi casa.

Al Plan de Becarios y todos mis amigos en DGSCA, por haber complementado mi formación académica.

A mis maestros y compañeros del IIMAS que han sido parte de éste trabajo, especialmente a Jorge Urrutia por su paciencia.

A Daniel Cervantes, por su apoyo, guía y amistad durante este tiempo que hemos dado clase juntos.

A mis amigos: especialmente al SAGREV (Otto, Renato, Bombón, Josefita, Rochi, Luigi, Nenuco, Jim, Onofre, Chavita, Erit, César, Odin, Rodas, Tellez, José físico, Zapata, Soberanes, Hectorín, Mauricio, Pedriño, Andrés, Lulú y Ana), Martín, Yuliana, Eréndira, Nora, Tatiana y Rubí.

A Olga, lo más importante en mi vida.

A todos ellos mi agradecimiento por ser parte de mi vida.

Oscar Hugo Alvarez Luquín

ohaluquin@yahoo.com

Introducción

El trabajo de esta tesis consiste en dar un algoritmo que permita hacer reconstrucciones de superficies usando solamente la información que nos brinda un conjunto de imágenes (cortes paralelos de la superficie) en dos dimensiones. Al hablar de reconstrucción nos referimos a recuperar la forma aproximada (al menos la forma topológica) de una superficie, pues es claro que el problema no tiene solución única.

Como primer punto, se darán las condiciones necesarias que debe cumplir un conjunto de imágenes para que la reconstrucción sea posible. Posteriormente, se analizarán, desarrollarán y justificarán los pasos del algoritmo. Finalmente, se desarrollará un programa que haga las reconstrucciones usando el algoritmo obtenido.

Los problemas

Tomemos una superficie S en el espacio y elijamos una dirección d . Si barremos a S con un plano P perpendicular a d , podemos observar como cambia el conjunto que genera la intersección de S y P (ver figura 1).

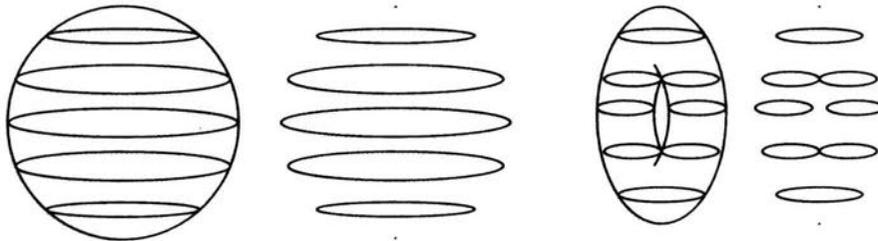


Figura 1. La forma de la superficie barrida cambia en esta esfera de un punto a un plano y finalmente a la esfera. En el Toro cambia de un punto, a un plano, un cilindro, un toro con un agujero y finalmente el toro.

Tanto los cortes como la forma en que cambian, dependen de la dirección en que estemos haciendo el barrido. Si la superficie es suave, la intersección de S y P cambia continuamente, excepto cuando P es tangente a S . Es en estos puntos críticos donde la forma de la superficie barrida puede cambiar drásticamente.

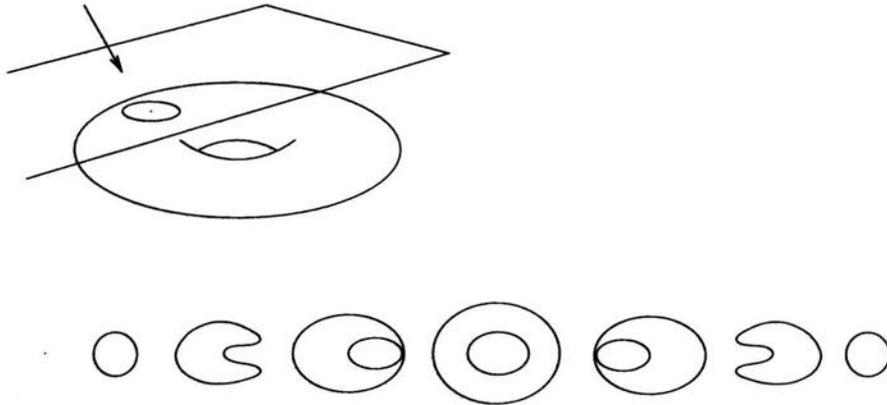


Figura 2. Cortes que se obtienen del toro, usando otra dirección para el barrido.

Conociendo todos los cortes obtendríamos la forma exacta de la superficie, pero lo que queremos es obtener, a partir de solo algunos cortes, una forma aproximada de la superficie. Dado que al hacer el barrido la mayoría de los planos no son tangentes a la superficie, podemos suponer que los cortes se hacen con planos no tangentes, de modo que la intersección de cada plano con S es un conjunto de curvas simples (sin intersecciones). Tomando suficientes planos podemos suponer que entre dos planos consecutivos hay a lo más un punto crítico.

Para poder reconstruir la sección de la superficie acotada por dos planos (cortes) consecutivos, necesitamos generar una o varias superficies que unan a las curvas entre los dos planos. Para esto, tenemos que decidir que curvas van conectadas entre si y en que forma:

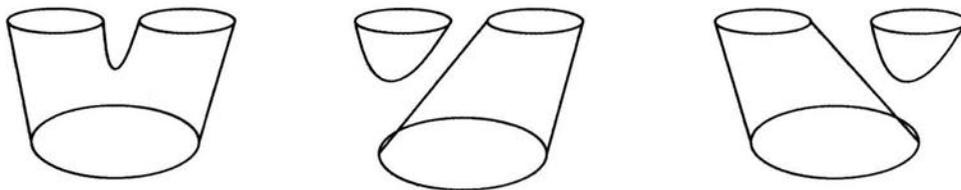


Figura 3.

Esta asociación entre las curvas de planos consecutivos debe hacerse utilizando solamente la información que nos dan los cortes, lo que nos lleva a preguntas como: ¿Cuándo la asociación entre curvas de planos consecutivos es única y cómo deben asociarse si existen varias posibilidades? Una vez decidida la asociación entre las curvas, la siguiente pregunta sería: ¿Cómo podemos generar las superficies entre ellas, de modo que no aparezcan intersecciones? Ya que las curvas a partir de

las cuales queremos reconstruir la superficie se obtienen de imágenes digitales, podemos asumir que son polígonos, además, como la superficie reconstruida será representada en la computadora, es conveniente que sea un poliedro hecho de triángulos. Entonces, surge la pregunta ¿es posible hacer la reconstrucción sin agregar nuevos vértices?

A lo largo de esta tesis, responderemos estas preguntas para poder dar nuestro algoritmo de reconstrucción de superficies.

Falta página

N° 4

CAPÍTULO 1

Planteamiento y condiciones

En este capítulo veremos el enfoque que se le da al problema de reconstrucción, se darán las condiciones que debe cumplir el conjunto de imágenes para poder hacer la reconstrucción y se mostrarán algunas de sus limitaciones.

Antes de empezar: ¿Qué información tenemos? No sabemos cómo será la información que nos pueda dar un plano P , ya que la intersección de una superficie S y P puede ser casi cualquier subconjunto de P . Además, no sabemos qué tanto cambió la superficie entre cada corte, por lo que no es posible determinar a S y menos dar un algoritmo.

Recordemos algunas definiciones de topología: Dos subconjuntos X y Y de \mathbb{R}^3 tienen la misma forma topológica (son **homeomorfos**) si existe una transformación $F : X \rightarrow Y$ continua, biyectiva y con inversa continua entre ellos. Intuitivamente esto quiere decir que los conjuntos son iguales salvo por deformaciones. Una **superficie** es un subconjunto de \mathbb{R}^3 tal que cada uno de sus puntos tienen una vecindad homeomorfa a \mathbb{R}^2 . Una **curva simple** es un subconjunto de \mathbb{R}^3 homeomorfo a una circunferencia.

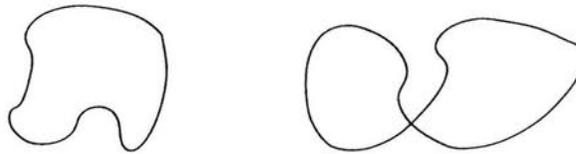


Figura 4. Curva Simple - Curva Singular. En una curva simple cada punto tiene una vecindad homeomorfa a \mathbb{R} . En una curva singular, existen puntos singulares cuyas vecindades no son homeomorfas a \mathbb{R} .

1. Condición de Reconstrucción

Sea S una superficie y P un plano ¿Cómo es $S \cap P$? Podemos ver que si S es suave y P no es tangente a S en ningún punto de $S \cap P$, entonces $S \cap P$ es un conjunto de curvas simples, pero si es tangente, entonces

la intersección son puntos, curvas singulares, es decir, casi cualquier conjunto cerrado del plano. Sin embargo, también podemos obtener conjuntos de curvas simples cuando P es tangente a S , por ejemplo, si a la superficie de revolución S , generada por el círculo de radio 1, con centro en $(2, 0)$, la barremos con el plano XZ , los conjuntos que se generan de la intersección de S y XZ son conjuntos de curvas simples, pero el plano $Y = 1$, es tangente a S en una infinidad de puntos. Para poder distinguir estos casos daremos la siguiente definición.

Decimos que un plano P **corta transversalmente** a una superficie S , si P atraviesa S , es decir, cada punto de $S \cap P$ tiene una vecindad en $S \cup P$ que se ve así:

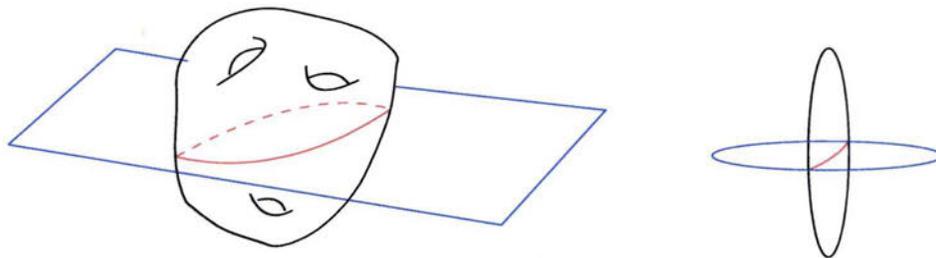


Figura 5. Vecindad de un punto sobre la intersección del plano y la superficie.

OBSERVACIÓN. Si un plano P corta transversalmente a una superficie S , entonces $S \cap P$ es un conjunto de curvas simples.

La intersección de S con un solo plano P no nos dice nada acerca de la topología de S , ya que no importa como sea el conjunto de curvas de S_P , siempre es posible generar una superficie D homeomorfa al disco unitario, tal que la intersección de P y D sea S_P .

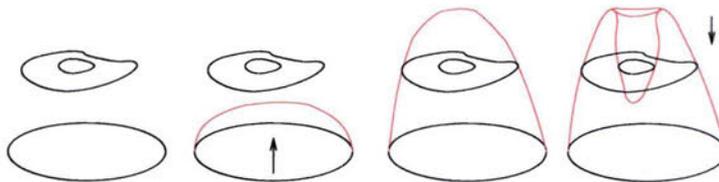


Figura 6.

Para poder obtener información sobre la topología de S , necesitamos ver como cambia el conjunto $S \cap P$ si barremos a S con el plano P , sobre la dirección normal a P . Observemos que al hacer el barrido, mientras los cortes sean transversales las curvas de intersección se deforman continuamente, sin juntarse o dividirse. Es en el momento en

que P deja de ser transversal cuando las curvas de intersección pueden juntarse o dividirse.

Sea $\{P_n\}$ un conjunto de planos paralelos y ordenados, tales que cada uno corta transversalmente a S . Para recuperar la topología de S usando únicamente el conjunto $\{P_n\}$ necesitamos obtener información sobre los puntos clave de S , es decir, los puntos en que la topología del conjunto $S \cap P$ cambia. Un punto p en $S \cap P$, es **crítico**, si P no corta transversalmente a S en p .

DEFINICIÓN. Si un conjunto de planos paralelos ordenados $\{P_n\}$, cortan transversalmente a una superficie S y entre cada par de planos P_i y P_{i+1} , al hacer el barrido de P_i a P_{i+1} todos los planos cortan transversalmente a S , salvo por uno que contiene un punto crítico, entonces diremos que $\{P_n\}$ cumple la **condición de reconstrucción con S** .

2. Justificación sobre la condición de reconstrucción

Una vez que tenemos nuestra condición de reconstrucción planteada, veamos qué tanto hemos restringido a las superficies y a los conjuntos de planos ¿Qué tan probable es que $\{P_n\}$ cumpla la condición de reconstrucción? Sabemos que el conjunto $\{P_n\}$ está caracterizado por una dirección y que haciendo un barrido de la superficie con una dirección se puede obtener el conjunto de puntos críticos que hay en esa dirección. Una dirección es buena, si al hacer el barrido de S , el conjunto de los planos que no cortan transversalmente a S , es finito y en cada uno de estos planos hay un solo punto crítico. Pero entonces ¿cuántas direcciones buenas hay?

Supongamos que S es suave, entonces queremos encontrar una dirección en la cual el barrido de S tenga un número finito de planos tangentes a S y que cada uno de estos planos tenga a lo más un punto crítico.

En el caso cuando S es un poliedro, las direcciones son malas cuando alguna de las caras $C \in S$ es paralela a $\{P_n\}$, ya que el plano que corta a S en C , es tangente a S en una infinidad de puntos (toda C). Cuando uno de los planos P_n contiene a una arista de S puede darse que el plano sea tangente a S sobre toda la arista, de igual manera, si algún plano contiene dos de los vértices de S , estos dos vértices podrían ser puntos críticos en el barrido y por lo tanto ser una mala dirección.

Ahora veamos cuántas direcciones malas hay. Si vemos las direcciones como el conjunto de los vectores unitarios normales a los planos con los que podríamos hacer los barridos de la superficie, representaríamos todas las direcciones en la esfera unitaria. Obsérvese que direcciones opuestas tienen el mismo efecto ante el barrido. Ahora, cada pareja de vértices de S está contenida en una infinidad de planos cuyos vectores normales describen un círculo en la esfera de direcciones, por lo que tenemos un círculo por cada pareja. Aunque cada círculo tiene un número infinito de direcciones que podrían ser malas (no todas son malas), a la esfera, que es de dimensión dos, le estamos quitando un número finito de círculos que son de dimensión uno, es decir, casi no le quitamos nada, o dicho de otra manera, casi todas las direcciones son buenas. Así, la probabilidad de que una dirección dada sea mala, es cero.

Si se tiene una buena dirección para que el conjunto $\{P_n\}$ cumpla la condición de reconstrucción con S , necesitamos suficientes planos que corten la superficie donde su topología cambia mucho. Es claro que entre mejor sea el muestreo de S , la aproximación de la superficie será mejor.

3. Limitaciones de la condición de reconstrucción

Una limitación que tiene la condición de reconstrucción es que aún si tenemos un conjunto de planos paralelos $\{P_n\}$ que la cumplen, no siempre es posible determinar la topología de S , es decir, S no es única (ver Figura 3).

No siempre es posible encontrar una "mejor" manera de asociar curvas.

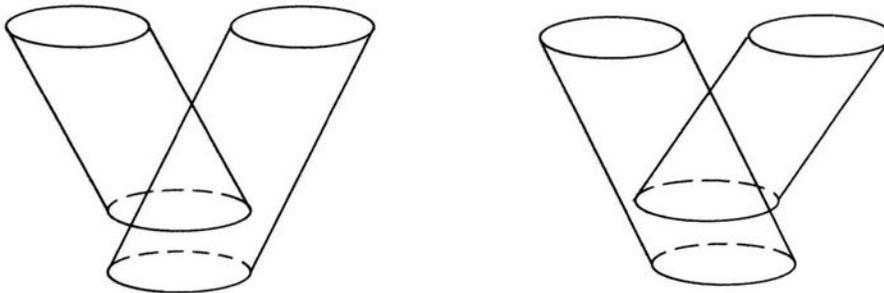


Figura 7. El plano inferior está rotado con respecto al plano superior, sin embargo, no sabemos en que sentido fue hecha la rotación.

CAPÍTULO 2

Asociación de curvas

Para hacer la reconstrucción de la superficie S , generaremos las secciones de S que están acotadas por cada par de planos consecutivos, de tal manera que la unión de las secciones sea S , por lo que queremos que $S \cap P$ sea también la intersección de las dos secciones de S acotadas por el plano P . Así, por el momento nos concentraremos en generar una superficie S acotada por dos planos paralelos P y Q , tal que el conjunto $\{P, Q\}$ cumple la condición de reconstrucción con S .

1. Topología de un conjunto de curvas simples en un plano

Si P y Q contienen los conjuntos de curvas simples S_p y S_q respectivamente ¿cómo podemos saber si el conjunto $\{P, Q\}$ cumple la condición de reconstrucción? Para responder a esta pregunta, necesitamos analizar la topología de los conjuntos de curvas S_p y S_q , para lo que utilizaremos el Teorema de Jordan.

Una **trayectoria** C es la imagen de una función continua $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$. Una curva simple puede recorrerse continuamente como una trayectoria donde F sea inyectiva excepto que $F(0) = F(1)$.

Sea X un subconjunto de \mathbb{R}^3 , X es **conexo** (por trayectorias) si para cada par de puntos x, y en X , existe una trayectoria de x a y contenida en X .

TEOREMA DE JORDAN. *Toda curva simple divide al plano en dos regiones conexas.*

Ya que nuestras curvas provienen de imágenes digitales podemos asumir que son curvas poligonales (hechas de un número finito de segmentos de recta). De aquí en adelante asumiremos que las curvas son de este tipo, aunque los argumentos son similares para las curvas suaves con un número finito de puntos de inflexión. La demostración del Teorema de Jordan para el caso de curvas poligonales se divide en dos partes:

LEMA 1.1. *Toda curva poligonal simple separa el plano en al menos dos regiones.*

DEMOSTRACIÓN. Sea C una curva poligonal simple. Escogemos una dirección d tal que ninguno de los lados del polígono C tenga pendiente d y para cada x en $\mathbb{R}^2 - C$ tomamos un rayo $L(x)$ que empieza en x y con dirección d . Como el número de lados de un polígono es finito, entonces d existe. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $L(x)$ tiene dirección $(-1, 0)$ y que ninguna recta horizontal pasa por dos vértices de C .

Definimos una función $i : \mathbb{R}^2 - C \rightarrow \{0, 1\}$ de la siguiente manera: Si para un punto x , $L(x)$ no pasa por ningún vértice de C , definir $i(x) =$ número de veces que $L(x)$ corta a C , módulo 2. Si para un punto x , $L(x)$ pasa por algún vértice de C , al mover un poco* $L(x)$, para arriba o para abajo, no pasará por ningún vértice, entonces podemos definir $i(x)$ como en el caso anterior.

Veamos que i está bien definida, de hecho que i es continua: Sea $x \in \mathbb{R}^2 - C$, si $L(x)$ no pasa por algún vértice de C , entonces existe una vecindad V de $L(x)$, en la que para todo $y \in V$, $L(y)$ no pasa por ningún vértice de C . V existe ya que el número de vértices de C es finito. Por lo tanto, existe una vecindad W de x , $W \subset V$, tal que para todo $y \in W$, $i(x) = i(y)$ ya que cada vez que $L(x)$ cruza a C , $L(y)$ también lo hará, pues entre las dos rectas no hay vértices de C , es decir, i es constante en W , por lo tanto continua en W .

Ahora, si $L(x)$ pasa por algún vértice p de C , entonces pueden pasar dos cosas, que $L(x)$ intersecte al triángulo T definido por p y sus dos vértices vecinos q, r de C , en uno o dos puntos. Si lo intersecta en dos puntos, como una de las intersecciones fue en p , entonces la otra intersección debe ser en el segmento qr , por lo tanto uno de los vértices vecinos de p está arriba y el otro abajo de la recta xp , por lo tanto, existe una vecindad W de x en la que los puntos de W que están arriba de la recta xp cruzan el mismo número de veces a C como los puntos que están abajo de la recta. En el caso en que xp solo corta a T en un punto, entonces q y r , están los dos arriba o los dos abajo de xp , por lo tanto existe una vecindad W de x en la que los puntos de W que están arriba de la recta xp intersectan n veces a C y los de abajo de xp $n \pm 2$ veces, pero $n \equiv (n \pm 2)$ módulo 2, por lo tanto i está bien definida en i x , es constante en W y continua en x .

Por lo tanto i es una función continua en $\mathbb{R}^2 - C$.

* Ordenando los vértices de C respecto a su segunda coordenada $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, x = (a_i, b_i), \dots, (a_n, b_n)\}$, basta con movernos menos del mínimo de $\{b_i - b_{i-1}, b_{i+1} - b_i\}$.

Observemos ahora que i toma los valores 0 y 1 ya que si tomamos una recta que corte a C en un punto x , la función i toma un valor con los puntos de la recta inmediatamente antes de x y toma el otro valor con los puntos inmediatos después de x , por lo tanto existen puntos en ambas regiones de C , es decir, C separa el plano en dos regiones. \square

Diremos que un punto x está en el interior de C si $i(x) = 1$ y que está en el exterior de C si $i(x) = 0$. Falta demostrar que el interior y el exterior de C son conexos:

LEMA 1.2. *Toda curva poligonal simple separa el plano en a lo más dos regiones.*

DEMOSTRACIÓN. Sea C una curva poligonal simple. Si dibujamos una banda alrededor de C , podemos observar que desde cualquier punto del plano se puede llegar al borde de la banda sin cruzar la curva (ver Figura 8).

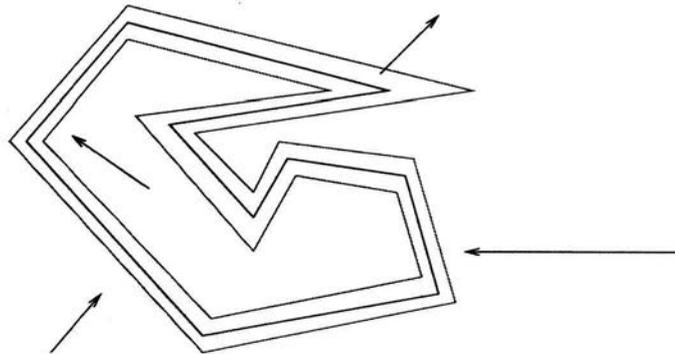


Figura 8.

Basta con trazar una recta desde el punto en que estamos parados, tal que corte a C . Si el punto está fuera de la banda, caminamos en dirección a C y claramente llegaremos al borde de la banda antes que a C , pero si el punto está en el interior de la banda, entonces caminamos sobre la recta pero en la dirección contraria a C .

Sabemos que como C es una curva poligonal simple, entonces es conexa y por lo tanto el borde de la banda tiene a lo más dos partes. Por lo tanto si $i(p) = i(q)$, existen dos trayectorias: una de p al borde de la banda alrededor de C en un punto a y otra de q al borde de la banda en un punto b . Ahora como $i(p) = i(q)$ y estas dos trayectorias no cortan a C , entonces por continuidad $i(a) = i(p) = i(q) = i(b)$, es decir, a y b están en el mismo borde de la banda.

Pero entonces existe una trayectoria de p a q , que no intersecta a C , primero de p a a , de ahí por el borde hasta b y luego a q .

Por lo tanto la superficie separa al espacio en a lo más dos regiones conexas.

□

COROLARIO 1.3. *Si dos curvas simples C_1 y C_2 son ajenas, entonces C_1 y C_2 dividen al plano en tres regiones.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos una función $j : \mathbb{R}^2 - (C_1 \cup C_2) \rightarrow \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ de la siguiente manera: $j(p) = (i_1(p), i_2(p))$ donde i_1 es la función i , respecto a la curva C_1 e i_2 respecto a C_2 . Sea A una recta que corta a C_1 y a C_2 y sea pq un segmento en A tal que $p \in C_1$ y $q \in C_2$ y que no tiene más intersecciones con las curvas.

Analizando el comportamiento de la función j sobre la recta A , antes de llegar a p tiene un valor, al llegar al segmento pq , cambia su primer coordenada y después de q cambia su segunda coordenada. Por lo tanto la función j toma al menos tres valores distintos y por lo tanto determina al menos tres regiones en el plano.

Si bordeamos las curvas, sabemos que entre las dos dividen al plano en a lo más cuatro regiones, pero como podemos unir dos de los bordes por el segmento pq , entonces a lo más hay tres regiones.

Por lo tanto C_1 y C_2 dividen al plano en tres regiones.

□

OBSERVACIÓN. Sean C_1 , C_2 y C_3 curvas simples, ajenas. Si C_1 está en el interior de C_2 y C_2 está en el interior de C_3 , entonces C_1 está en el interior de C_3 .

El teorema de Jordan en el plano tiene un análogo en el espacio:

TEOREMA 1.4. *Toda superficie cerrada y conexa, separa el espacio en dos regiones conexas.*

La demostración de este teorema para el caso de superficies poliédricas es análoga a la demostración del teorema de Jordan para curvas poligonales: se crea la función i que cuenta el número de intersecciones de la recta con el poliedro, se ve que i es continua y como toma los valores 0 y 1, entonces determina al menos dos regiones conexas. Para ver que no hay más de dos regiones, se dibuja un "colchón" alrededor de la superficie y se observa que desde cualquier punto del espacio se puede llegar al borde del colchón sin cruzar la superficie. Pero el borde del colchón tiene a lo más dos partes (ya que la superficie es conexa), por lo tanto la superficie separa al espacio en a lo más dos regiones conexas.

1.1. Análisis de los puntos críticos. Una vez que tenemos las herramientas para analizar la topología de los conjuntos de curvas S_p y S_q , podemos analizar si $\{P, Q\}$ cumple la condición de reconstrucción, pero antes necesitamos ver cuáles son los tipos de apareamientos válidos, es decir, que no se puede dar un apareamiento cualquiera. Si cada plano tiene n curvas y cada curva de arriba se junta con una de abajo, en principio existirían $n!$ posibles apareamientos entre las curvas de los planos, sin embargo, no todos los apareamientos son posibles, es decir, no siempre se puede aparear una curva con cualquier curva del otro plano sin crear intersecciones.

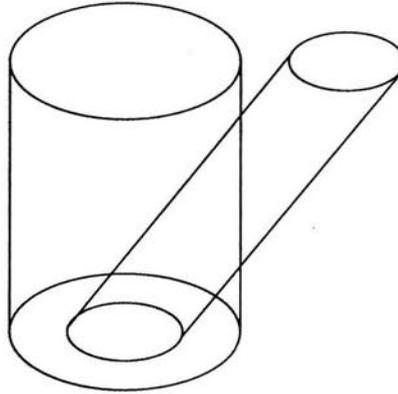


Figura 9. Los apareamientos no válidos están determinados por la topología de los conjuntos.

Para analizar cuando una curva se puede aparear o no con otra, veamos los posibles comportamientos que puede tener el conjunto de curvas al hacer el barrido de P a Q suponiendo que hay a lo más un punto crítico durante el barrido.

Solo hay las siguientes posibilidades:

1- El conjunto de curvas no cambia su topología: las curvas se deforman sin tocar a otras o tocarse ellas mismas, de modo que cada una de ellas genera un cilindro (Un **cilindro**, es una superficie homeomorfa al producto del círculo unitario y el intervalo $[0, 1]$).

2- Una curva se deforma hasta convertirse en un punto y luego desaparece (o viceversa).

3- Una o más curvas se deforman hasta tocarse en un punto, convirtiéndose en una curva singular, que inmediatamente se separa en una o varias curvas simples.

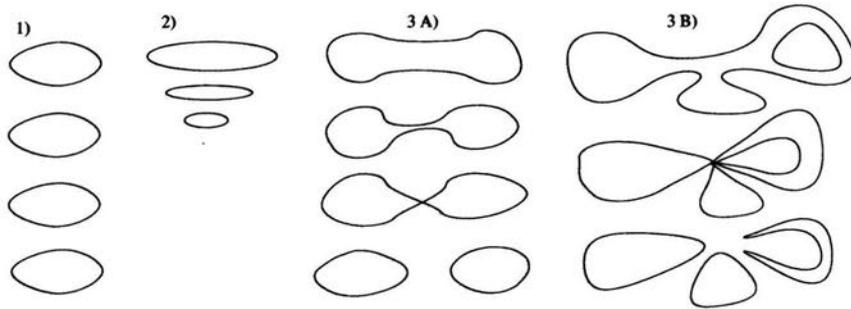


Figura 10. El primer caso es el único que no tiene ningún punto crítico, por lo que entre dos planos consecutivos, las curvas deben unirse por medio de cilindros y solo puede ocurrir uno de los casos 2 y 3.

Sabemos que S_p y S_q pueden generar superficies topológicamente diferentes, por lo tanto, necesitamos buscar una manera de decidir que superficie generar. Lo que haremos es suponer que entre P y Q no hubo muchos cambios, es decir, que el cambio fue el más simple de suponer, de otra manera podríamos tener entre otros problemas, el siguiente.

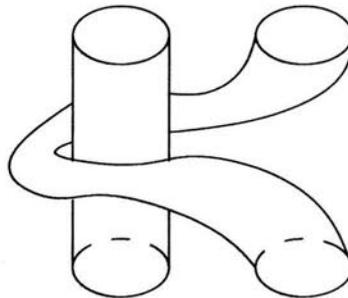


Figura 11. Aún cuando se tenga una buena asociación y la sección de S esté compuesta de cilindros, podemos tener resultados topológicos distintos.

Sean P y Q dos planos tales que cumplen la condición de reconstrucción con una superficie S y sea R el plano intermedio en el que está el punto crítico que llamaremos x . Observese que la intersección de R y la superficie en una vecindad de x es x , o un número par de trayectorias cuya intersección es x . La curva singular en $R \cap S$ que contiene a x , tiene una vecindad sobre la superficie que se ve igual que la vecindad de la curva sobre R : un disco con hoyos. De modo que la sección de S entre dos planos P' y Q' cerca de R , es homeomorfa a la vecindad de $R \cap S$ en R y como al hacer el barrido de S entre P y P' y entre Q y Q' no hay puntos críticos, entonces, estas secciones están formadas por cilindros.

cantidad es lo que llamamos la capacidad de una arista. Por ejemplo, en la gráfica G con $E(G) = \{(f, e), (e, d)\}$, si la capacidad de la arista (f, e) es n y la de (e, d) es m , entonces el flujo máximo de f a d es el mínimo de n y m .

La idea básica del método de Ford-Fulkerson es buscar una trayectoria de F a D con aristas de capacidad positiva, hasta que no sea posible. Cada vez que se pasa por una arista (a, b) disminuye su capacidad en uno y aumenta en uno la capacidad de la arista (b, a) . En nuestro caso inventaremos los vértices F y D y la capacidad de todas las aristas es uno. Si el flujo máximo de F a D es n , entonces este flujo define las n trayectorias mutuamente ajenas de A a B , obteniendo así el apareamiento perfecto. Pero si el flujo máximo de F a D es $m < n$, entonces tenemos m trayectorias mutuamente ajenas de A a B , de las cuales tenemos que obtener un separador S de I con m elementos.

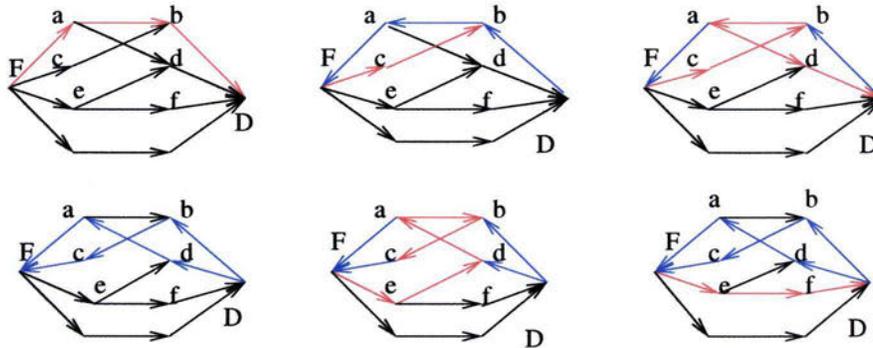


Figura 19. El método de Ford-Fulkerson genera las siguientes trayectorias.

- 1.- $\{F, a, b, D\}$ Dando un apareamiento provisional entre a y b .
- 2.- $\{F, c, b, a, d, D\}$ Aparea (c, b) y (a, d) eliminándose (a, b) .
- 3.- $\{F, e, d, a, b, c\}$ Busca una trayectoria de F a D , pero no llega, Así que continua buscando utilizando backtrack. Finalmente encuentra la trayectoria $\{F, e, f, D\}$ y aparea (e, f) .

Sabemos que el separador de A y B más pequeño que podemos encontrar tiene m elementos y que lo que obtuvimos es un conjunto Z con $2m$ vértices, tal que Z contiene a S , es decir, Z es un separador de A y B en I . Si podemos eliminar los vértices que no son necesarios en Z para ser separador de A y B en I , hasta obtener un conjunto de cardinalidad m , habremos acabado. Tenemos varios criterios para decidir si un vértice $v \in V(Z)$ pertenece o no al separador. Como lo que tenemos son m trayectorias mutuamente ajenas, entonces tenemos m parejas de vértices, por lo tanto un vértice de cada pareja pertenece a S y el otro no. Sabemos que si $v \in V(Z)$ tiene un vecino en $V(I - Z)$, entonces $v \in S$. Análogamente si $w \in V(Z)$ tiene todos sus vecinos en $V(Z)$, entonces $Z - \{w\}$ es un separador de A y B en I (en particular, si

DEMOSTRACIÓN. La superficie S_1 es homeomorfa a la vecindad de una curva singular en un plano y por lo tanto es homeomorfa a un disco con hoyos, algunos de cuyos bordes corresponden a curvas de S_P y otros a curvas en S_Q . Además sabemos que si S_P es de tipo a entonces S_Q es de tipo b y viceversa, de modo que el borde exterior del disco corresponde a una curva del conjunto de tipo a . De los otros bordes solo sabemos cuántas (pero no cuáles) corresponden a curvas de S_P y cuántas a curvas en S_Q . Lo mismo podemos decir de S_2 . Como S_1 y S_2 son discos con hoyos, digamos con el borde exterior rojo y ambas con el mismo número de bordes interiores y rojos, entonces podemos deformar continuamente los bordes azules de S_1 a los bordes azules de S_2 , de igual manera con los bordes rojos. Por lo tanto S_1 es homeomorfa a S_2 . □

El aceptar toda clase de puntos críticos complica mucho el análisis para generar la superficie, ya que crea demasiadas posibilidades, a veces más del $n!$ mencionado. Manteniendo la idea de suponer que entre P y Q ocurrió lo más simple posible, evitaremos hasta donde sea posible los puntos críticos donde una curva singular se parte en más de dos curvas. Esto se justifica al menos cuando tratamos con superficies suaves, ya que basta cambiar un poco la dirección del barrido para que esa clase de puntos críticos se separen en otros puntos críticos más simples. Sin embargo, cuando la superficie no es suave esto no siempre ocurre.

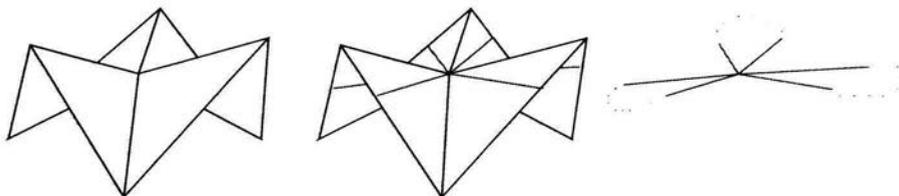


Figura 15. No siempre se pueden separar los puntos críticos. Aún cambiando un poco la dirección del barrido, los cortes cerca del punto crítico son similares.

1.2. Las superficies básicas. Analicemos ahora los casos donde la superficie es conexa y solo tiene puntos críticos simples (en los que una curva se divide en dos o viceversa).

DEFINICIÓN. Si un conjunto de planos paralelos ordenados $\{P_n\}$, cortan transversalmente a una superficie S y entre cada par de planos P_i y P_{i+1} , al hacer el barrido de P_i a P_{i+1} todos los planos cortan transversalmente a S , salvo por uno que contiene un punto crítico simple,

entonces diremos que $\{P_n\}$ cumple la **condición de reconstrucción fuerte con S** .

OBSERVACIÓN. El número de curvas de S_p y S_q difieren en a lo más uno.

Solo existen tres superficies conexas, a las que llamaremos las **superficies básicas**.

a) Disco: Si en un plano no hay curvas y en el otro solo hay una, entonces la única posibilidad es que la curva se deforme hasta convertirse en un punto y luego desaparezca.

b) Cilindro: Cuando tenemos una curva en cada plano.

c) Disco con dos hoyos: El caso de dos curvas en un plano y una en el otro. Tenemos dos posibilidades: que en el plano que contiene dos curvas, una esté en el interior de la otra ó que sean mutuamente exteriores.

Cualquier otro caso es unión de los casos conexos. Por ejemplo, en el caso de dos curvas en ambos planos con las curvas mutuamente exteriores, podemos ver que no es posible dividirlo en un disco y un disco con un hoyo, ya que cada caso utiliza un punto crítico, por lo tanto, la única posibilidad es que sean dos cilindros, de hecho, en general para n contra n , la única posibilidad es que sean n cilindros, ya que los otros casos ocupan un punto crítico y números distintos de curvas de arriba y de abajo, por lo que se necesita otro punto crítico para emparejar el número de curvas.

1.3. Árboles. Hemos visto las tres superficies básicas, es decir, las distintas superficies conexas que puede haber entre dos planos que cumplen la condición de reconstrucción fuerte. Ahora, busquemos identificar y eliminar los apareamientos de curvas que no son posibles, para poder decir cuando el conjunto $\{P, Q\}$ cumple la condición de reconstrucción fuerte.

Recordemos algunas definiciones de teoría de gráficas: Una **gráfica** G está definida por un conjunto de vértices $V(G)$ y un conjunto de aristas $E(G)$, donde una arista $a \in E(G)$ está dada por una pareja no ordenada de vértices $a = (v_1, v_2) = (v_2, v_1)$ con $v_1, v_2 \in V(G)$. A es **subgráfica** de G , si $V(A) \subset V(G)$ y $E(A) \subset E(G)$. Un **camino** entre dos vértices p y q de una gráfica G , es una sucesión alternante de vértices y aristas de G , $\{p = v_0, (v_0, v_1), v_1, (v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n), v_n = q\}$. Una **trayectoria** es un camino que no repite vértices. Una **digráfica** es una gráfica G donde (v_1, v_2) es diferente de (v_2, v_1) , con $v_1, v_2 \in V(G)$.

Un **árbol "dirigido"** T es una digráfica, donde existe un vértice llamado raíz, tal que para todo vértice v de $V(T)$, existe una trayectoria de la raíz a v y a cada vértice llega exactamente una arista, excepto la raíz a la que no llega ninguna arista. Dos **gráficas** G y H son **isomorfas** si existe una función biyectiva $F : V(G) \rightarrow V(H)$, tal que (v_1, v_2) está en $E(G)$ si $(F(v_1), F(v_2))$ está en $E(H)$.

Se recomienda revisar [2] para obtener más claridad en estos conceptos de teoría de gráficas.

Algunos conceptos que se utilizan en computación cuando hablamos de árboles son: hoja, padre, hijo, hermano.

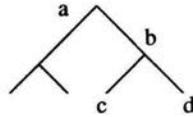


Figura 16. a es el vértice raíz del árbol, a es el padre de b y b es el padre de c y d , c y d son vértices hermanos (hijos de b), además c y d son hojas del árbol.

Observemos que la topología del conjunto de curvas simples contenidas en un plano, la podemos representar en un árbol dirigido, sabiendo que cada curva separa el plano en dos regiones y usando la estructura que proporciona el árbol.

Sea T un árbol dirigido, tal que v, v_1, v_2 están en $V(T)$.

DEFINICIÓN. Sea P un plano que contiene un conjunto de curvas simples S_P , Definimos como $T(S_P)$, al árbol dirigido generado por el conjunto S_P , donde P es la raíz del árbol y tal que cumple:

Si $c_1, c_2 \in S_P$ y la curva c_1 está en el interior de la curva c_2 , entonces existe una trayectoria de c_2 a c_1 en $T(S_P)$.

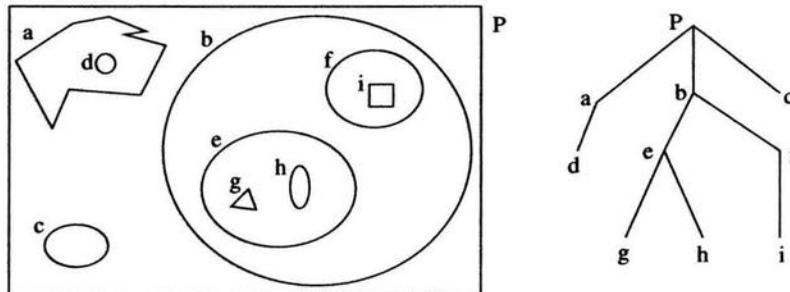


Figura 17. Ejemplo de una imagen con un conjunto de curvas simples y cerradas y su representación como árbol.

Ahora veamos las siguientes funciones que modifican un árbol de la misma forma que cambian los árboles de los planos que cumplen la condición de reconstrucción fuerte:

Sea F una función que une dos vértices hermanos v_1 y v_2 de $T(S_P)$, es decir, existen $v_1, v_2 \in V(T(S_P))$ vértices hermanos, tales que:

- a) $F(v_2) = v_1$ y $F(v_1) = v_2$ en otro caso.
- b) $F((u, v)) = (F(u), F(v))$.

Sea G una función que modifica tres vértices v_0, v_1 y v_2 de $T(S_P)$, es decir, existen $v_0, v_1, v_2 \in V(T(S_P))$ tales que v_0 es padre de v_1 , v_1 es padre de v_2 y cumplen:

- a) $G(v_2) = v_0$ y $G(v_1) = v_2$ en otro caso.
- b) $G((u, v)) = (G(u), G(v))$ excepto para (v_1, v_2) .

Finalmente estamos en condiciones de responder a la pregunta de cuándo el conjunto $\{P, Q\}$ cumple la condición de reconstrucción.

LEMA 1.6. *Sean P y Q dos planos con conjuntos de curvas simples S_P y S_Q respectivamente y tales que $|S_P| \geq |S_Q|$, entonces P y Q cumplen la condición de reconstrucción fuerte, si y solo si $T(S_P)$ y $T(S_Q)$ cumplen una de las siguientes opciones:*

- 1-. $T(S_P)$ es isomorfo a $T(S_Q)$.
- 2-. $T(S_P) - \{h\}$ es isomorfo a $T(S_Q)$, donde h es una hoja de $T(S_P)$.
- 3-. Existen dos vértices hermanos v_1 y v_2 de $T(S_P)$ tales que $F(T(S_P), v_1, v_2)$ es isomorfo a $T(S_Q)$.
- 4-. Existen tres vértices v_0, v_1 y v_2 (abuelo, padre e hijo) de $T(S_P)$ tales que $G(T(S_P), v_0, v_1, v_2)$ es isomorfo a $T(S_Q)$.

DEMOSTRACIÓN. Si P y Q cumplen la condición de reconstrucción fuerte con S , entonces S está formada por superficies básicas, es decir, por un conjunto de cilindros A y una superficie básica B (un disco o un disco con dos hoyos).

Olvidandonos por un momento de B , si uno de los cilindros contiene en su interior n cilindros, entonces tanto su borde en P como el de Q contienen n curvas (los bordes de los n cilindros) y como la estructura de sus árboles $T(S_P)$ y $T(S_Q)$ depende solo de que curvas están en el interior de otras, se deduce el isomorfismo entre sus árboles, donde la función está dada precisamente por los cilindros en A , es decir, si $J \in A$ entonces $F : T(S_P) \rightarrow T(S_Q)$ está definida así: $F(J \cap P) = J \cap Q$. (El borde de J en P , va al borde de J en Q).

Si no quedan más curvas que asociar, es decir, S estaba formada de puros cilindros, entonces estamos en el caso 1.

Si sobrara solo una curva, entonces es la superficie básica homeomorfa al disco; Como esta curva se deforma hasta convertirse en un punto, entonces no puede tener otra curva en su interior ya que sería borde de uno de los cilindros (se intersectaría con él), por lo tanto en el árbol esta curva es una hoja y estamos en el caso 2.

El caso faltante es cuando dos curvas $C_1, C_2 \in P$ se unen y llegan a Q como una curva, es decir, cuando B es una de las superficies básicas homeomorfas a un disco con dos hoyos. Observemos que si C_1 está en el interior de una curva C , entonces B está en el interior del cilindro cuyo borde contiene a C , por lo tanto C_2 está en el interior de C . De aquí que si C_1 está en el exterior de C_2 y C_2 está en el exterior de C_1 , entonces C_1 y C_2 son vértices hermanos, también podemos ver que si un cilindro está en el interior de B , entonces su borde está en el interior del borde de B , es decir, los hijos de C_1 y C_2 en $T(S_Q)$ son hermanos y estamos en el caso 3.

Finalmente si C_1 está en el interior de C_2 , entonces al llegar a Q se pierde la arista (C_2, C_1) ya que en Q , C_1 y C_2 son la misma curva. Analizando la superficie B observamos que las curvas que están en el interior de C_2 pero en el exterior de C_1 , representan los cilindros en el interior de B y por lo tanto, estarán en el interior del borde de B en Q , de igual manera, las curvas en el interior de C_1 están en el exterior de B , por lo tanto, tienen que estar en el exterior del borde de B al llegar a Q , cumpliendo las condiciones del caso 4.

□

2. El problema de Asociación.

Ahora que podemos calcular el árbol del conjunto de curvas de cada plano, podemos saber si dos planos son consecutivos o no y además se reduce el número de posibles apareamientos de cada curva. Para hacer el apareamiento lo que buscamos es generar uno de los isomorfismos entre los árboles, lo que implica que en general buscaremos aparear n curvas de un plano con n curvas en el otro.

Recordaremos otras definiciones: Una gráfica G es **completa**, si para cualquier par de vértices $x, y \in V(G)$ existe $(x, y) \in E(G)$. Una gráfica G es **bipartita**, si existen dos conjuntos $A, B \subset V(G)$ tales que $A \cup B = V(G)$; $A \cap B = \emptyset$ y toda arista de G tiene un vértice en A y el otro en B . Sea G una gráfica y una función $w : E(G) \rightarrow \mathbb{R}$, definimos el **peso** de G con w , como: $W(G, w) = \sum_{a \in E(G)} w(a)$. Un **apareamiento**

A de G es una subgráfica $A \subset G$, tal que $V(A) = V(G)$ y cada vértice de $V(A)$ está en a lo más una arista de $E(A)$. Un apareamiento es **perfecto** si todo vértice de $V(A)$ está en exactamente una arista de $E(A)$. El apareamiento es **de peso mínimo** con w , si para cualquier otro apareamiento B de G , $W(A, w) \leq W(B, w)$.

Sean $\{p_n\}$, n vértices de un árbol que pueden aparearse con $\{q_m\}$, m vértices del otro árbol.

Cuando existen varios posibles apareamientos, la manera en que asociaremos es buscando un apareamiento perfecto que minimice la suma de las distancias entre las curvas apareadas (para cualquier corte P de la superficie, existe una vecindad del plano P , en la que este apareamiento es el correcto). La distancia que usaremos depende tanto de la topología de los árboles de las curvas como de la distancia de las curvas vistas como conjuntos de puntos, teniendo más peso la topología del árbol.

Para calcular el apareamiento usaremos el problema de asociación: Dada una gráfica bipartita completa con pesos en las aristas, encontrar un apareamiento perfecto de peso mínimo. En este caso la bipartición está dada por los conjuntos $\{p_n\}$ y $\{q_m\}$, cada arista representa un posible apareamiento y el peso de la arista es la distancia entre las curvas.

LEMA 2.1. *Sea A un apareamiento perfecto de peso mínimo de G con w y sean $v \in V(G)$, $c \in \mathbb{R}$.*

Si definimos otra función de peso de G , como $w'(a) = \{w(a) + c$ si $v \in a$, $w(a)$ si $v \notin a\}$. Entonces A es un apareamiento perfecto de peso mínimo de G con w' .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe B un apareamiento perfecto de peso mínimo de G con w' , tal que $W(B, w') < W(A, w')$ y sea $x \in E(B)$ tal que $v \in x$.

$$W(B, w') = \sum_{a \in E(B)} w'(a) = \sum_{a \in E(B)/\{x\}} w'(a) + w'(x) = \sum_{a \in E(B)} w(a) + w(x) + c = W(B, w) + c$$

$$\implies W(B, w) + c = W(B, w') < W(A, w') = W(A, w) + c$$

$\implies W(B, w) < W(A, w)$, contradicción!!! ya que A es un apareamiento perfecto de peso mínimo de G con w .

Entonces $W(A, w') \leq W(B, w')$.

Por lo tanto A es un apareamiento perfecto de peso mínimo de G con w' .

□

Un apareamiento perfecto en una gráfica bipartita completa G , claramente no se puede obtener si $|U| \neq |V|$, donde U y V son los dos conjuntos que particionan $V(G)$. Cuando esto pasa, significa que la superficie tiene un punto crítico y necesitamos hacer un apareamiento distinto. Para resolver este problema, lo que haremos es inventar los vértices necesarios para que $|U| = |V|$, agregar las aristas de tal manera que G siga siendo una gráfica bipartita completa y dándole el mismo peso a todas las aristas nuevas, por el lema anterior, el peso de estas nuevas aristas no importa mientras todas tengan el mismo. Haremos el apareamiento con las $\max\{|U|, |V|\} - 2$ parejas de curvas que más se parecen y decidiremos mediante distancias, cuáles de las superficies básicas crear con las tres curvas restantes. De esta manera cubrimos los casos cuando el número de curvas es distinto en un plano y el otro, simplificando el problema a cuando tenemos el mismo número de curvas en ambos planos. Para el algoritmo que calcula el apareamiento perfecto mínimo, utilizaremos el Teorema de Menger.

Sea D una digráfica, $A, B, S \subset V(D)$. Se dice que S es un **separador** de A y B si toda trayectoria en D que empieza en A y termina en B pasa por S .

TEOREMA DE Menger. *Sea D una digráfica, $A, B \subset V(D)$. Si todo separador de A y B en D tiene al menos n elementos, entonces D contiene n trayectorias mutuamente ajenas, que empiezan en A y terminan en B .*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar el teorema cuando $n = \min\{|S| \text{ tal que } S \text{ es un separador de } A \text{ y } B \text{ en } D\}$.

Sea S un separador de A y B en D con n elementos. Haremos la demostración por inducción sobre el peso de D , $P(D) = |V(D)| + |E(D)|$.

i) Si $P(D) = 1$, la única posibilidad es $|V(D)| = 1$, $|E(D)| = 0$ y por lo tanto $A = B = S$ y de ahí que toda trayectoria de A a B pase por S .

ii) Supongamos que el teorema ha sido probado cuando $P(D) < k$ y sea ahora D tal que $P(D) = k$. Tenemos dos casos posibles: el separador S es distinto de A y de B , ó es igual a alguno de los dos.

Caso 1. Sea $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ un separador de A y B diferente de A y diferente de B , tal que $|S| = n$. Nótese que $|A|, |B| \geq n$.

Sea D'_{AS} la subdigráfica de D que es unión de todas las trayectorias directas que van de A a S en D y definase D_{AS} de modo que $V(D_{AS}) = V(D'_{AS}) \cup A \cup S$ y $E(D_{AS}) = E(D'_{AS})$ (ver Figura 17). Análogamente sea D'_{SB} la subdigráfica de D que es unión de todas las trayectorias directas

que van de S a B en D y definase D_{SB} de manera que $V(D_{SB}) = V(D'_{SB}) \cup S \cup B$ y $E(D_{SB}) = E(D'_{SB})$.

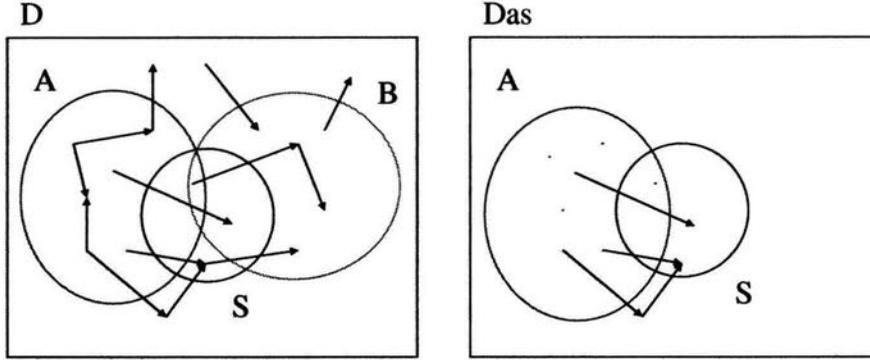


Figura 18.

Como $|B| \geq |S|$ y $B \neq S$, entonces $B - S \neq \emptyset$. Sea $b \in B - S$. Probaremos que $b \notin V(D_{AS})$: Si b estuviera en $V(D_{AS})$ se tendría $b \in A - S$ ó bien b sería punto interior de alguna trayectoria de A a S . En ambos casos S no sería un separador de A y B en D . Luego $P(D_{AS}) < k$. Dualmente $P(D_{SB}) < k$. Si Z es un separador de A y S en D_{AS} , Z es un separador de A y B en D pues cada trayectoria de A a B en D pasa por S y contiene por lo tanto una trayectoria directa de A a S la cual, por estar contenida en D_{AS} debe pasar por Z . Se sigue que $|Z| \geq n$. Aplicando la hipótesis de inducción, D_{AS} contiene n trayectorias mutuamente ajenas de A a S , T_1, \dots, T_n que terminan en s_1, s_2, \dots, s_n respectivamente, las cuales podemos suponer directas.

Dualmente D_{SB} contiene n trayectorias directas mutuamente ajenas de S a B T'_1, \dots, T'_n las cuales inician en s_1, s_2, \dots, s_n respectivamente.

Se tiene $V(T_1) \cap V(T'_1) = \{\emptyset \text{ si } i \neq j \text{ ó } \{s_i\} \text{ si } i = j\}$

Ya que si T_i y T_j se intersecarían en w con i distinta de j , habría una trayectoria de A a B sin pasar por S , de A por T_i hasta w y de w a B por T_j , lo que no se puede ya que S es un separador de A y B .

Por lo tanto $T_1 \cup T'_1, \dots, T_n \cup T'_n$ forman un haz de trayectorias de A a B mutuamente disjuntas en D .

Caso 2: Sin pérdida de generalidad sea $|A| \leq |B|$. Sea S un separador de A y B en D tal que $|S| = n$. Sabemos que $S = A$ ó $S = B$. Como A es un separador de A y B y $|S| = n$, se tiene que $A = S$. Si $A \subset B$, los n vértices de A son las n trayectorias buscadas. Si $A \not\subset B$ probaremos primero que existe $(a, x) \in E(D)$ con $a \in A - B$ y $x \notin A$. Para verlo, tomese $a \in A - B$ y sea $A_1 = A - \{a\}$. Como $|A_1| = n - 1$, A_1 no separa A de B en D . Luego existe una trayectoria de A a B en $D - A_1$, es decir, existe una trayectoria que empieza en a y termina en B en $D - A_1$. Como $a \notin B$, dicha trayectoria usa una arista (a, x) con

$x \notin A$. Sea $D_1 = D - (a, x)$. Notese que $P(D_1) = P(D) - 1 < k$. Sea W un separador de A y B en D_1 de cardinalidad mínima. Si $|W| = n$ (claramente $|W| \leq n$) D_1 (y por lo tanto D) contiene n trayectorias de A a B mutuamente disjuntas.

Si $|W| < n$ tanto $W \cup \{a\}$ como $W \cup \{x\}$ son separadores de A y B en D con cardinalidad menor o igual a n lo que implica que ambos tienen cardinalidad n y cada uno de ellos debe coincidir por lo tanto con A ó B . Se sigue que $A = W \cup \{a\}$ y $B = W \cup \{x\}$ ya que $a \notin B$ y $x \notin A$. Por lo tanto las n trayectorias de A a B buscadas, consisten de los $n - 1$ vértices de W y la arista (a, x) .

Demostración obtenida de las notas de clase del curso: Teoría de Gráficas del Dr. Victor Neumann. \square

Como en nuestro caso G es una gráfica bipartita completa donde la partición de G está dada por dos conjuntos $A, B \subset V(G)$ de cardinalidad n , entonces un separador de A y B de cardinalidad mínima en G tiene cardinalidad igual a n . Luego, existen n trayectorias de A a B mutuamente disjuntas, es decir, existe un apareamiento perfecto en G .

OBSERVACIÓN. Si para una gráfica G con función de peso w , el $\text{mínimo}\{w(a) | a \in E(G)\} \geq 0$ y H es un apareamiento perfecto de G tal que $W(H, w) = 0$, entonces H es un apareamiento perfecto de peso mínimo de G con w .

2.1. Método Húngaro. Después de tener estos resultados, estamos listos para ver el algoritmo del apareamiento perfecto de peso mínimo sobre G . Lo que buscamos es hacer modificaciones a la función de peso w , de tal manera que exista un apareamiento perfecto H de G , tal que $W(H, w) = 0$.

El primer paso es modificar la función w para que no haya pesos negativos (en nuestro caso como los pesos son distancias nunca son negativos) pero sí muchos ceros.

-Paso 1: Para cada vértice $a \in A$, sea $x = \min\{w((a, b)) | b \in N(a)\}$. Definimos w_1 como: $w_1((a, b)) = w((a, b)) - x$, para $b \in N(a)$.

-Paso 2: Para cada vértice $b \in B$, sea $x = \min\{w_1((a, b)) | a \in N(b)\}$. Definimos w_2 como: $w_2((a, b)) = w_1((a, b)) - x$, para $a \in N(b)$.

Con estos dos pasos ya no habrá pesos negativos y además cada vértice tiene al menos una arista de peso cero.

-Paso 3. El siguiente paso es buscar un apareamiento perfecto de G , tal que, su peso con w_2 sea cero. Si obtenemos la subgráfica I de G ,

tal que, $V(I) = V(G)$ y $E(I) = \{a \in E(G) | w_2(a) = 0\}$ y existe un apareamiento perfecto H de I , entonces $W(H, w_2)$ sería cero y habríamos acabado.

Pero si no existe un apareamiento perfecto, tenemos que modificar más a la función de peso w , es decir, generar más ceros.

Sabemos que si no existe un apareamiento perfecto, entonces no existen n trayectorias de A a B mutuamente disjuntas, por lo tanto, existe un AB-separador S de I , tal que $|S| < n$. Sea J la subgráfica de G , inducida por $V(G) - S$, como $|S| < n$ y G es completa entonces S no es un AB-separador en G .

Sea $x = \text{mínimo}\{w(e) | e \in E(J)\}$. Lo que haremos es restar x a todas las aristas de G . Pero como ahora tenemos pesos negativos, para cada vértice v en S , sumamos x a todas sus aristas. Así, al final de estos dos pasos, la función w disminuyo en x a las aristas de J y a las que tenían sus dos vértices en S las aumento en x . Finalmente regresamos al paso 3.

Aunque el número de ceros no siempre disminuye, $W(G, w_i) > W(G, w_{i+1}) \geq 0$, por lo tanto, el algoritmo termina. $W(G, w_i) \geq 0$ ya que no hay pesos negativos en w_i , así que veamos que $W(G, w_i) > W(G, w_{i+1})$, es decir, que hacemos más restas que sumas en cada paso. Sean $r = |S \cap A|$ y $c = |S \cap B|$, por lo tanto $|J \cap A| = n - r$ y $|J \cap B| = n - c$. Queremos ver que $|E(J)| > |\{(a, b) \in E(G) | a, b \in S\}| = rc$. Sabemos que $|S| = r + c < n$ y como $r < n - c$ y $c < n - r$, tenemos que $rc < (n - c)(n - r) = |E(J)|$. Por lo tanto $W(G, w_i) > W(G, w_{i+1})$.

Lectura recomendada [3].

2.2. Apareamiento perfecto y separador. Ya solo falta ver como calculamos el apareamiento perfecto H de I , o en su defecto S el separador de A y B en I tal que $|S| < n$. Como vimos, para que exista el apareamiento perfecto se necesita que $|V(I) \cap A| = |V(I) \cap B|$ de otra manera, digamos $|V(I) \cap A| < |V(I) \cap B| \leq n$, $S = V(I) \cap A$ es un separador de A y B en I .

Usaremos el método de Ford-Fulkerson [4] para I y con esto obtendremos ya sea el apareamiento o el separador.

El método de Ford-Fulkerson está diseñado para calcular el flujo máximo entre dos vértices en una gráfica con capacidades. Un flujo entre dos vértices F y D en una gráfica con capacidades, lo podemos ver como un sistema (la gráfica) en el cual desde el vértice F se produce un líquido que termina en D y donde las aristas son una especie de tuberías por las que puede pasar una cantidad determinada del líquido, esta

cantidad es lo que llamamos la capacidad de una arista. Por ejemplo, en la gráfica G con $E(G) = \{(f, e), (e, d)\}$, si la capacidad de la arista (f, e) es n y la de (e, d) es m , entonces el flujo máximo de f a d es el mínimo de n y m .

La idea básica del método de Ford-Fulkerson es buscar una trayectoria de F a D con aristas de capacidad positiva, hasta que no sea posible. Cada vez que se pasa por una arista (a, b) disminuye su capacidad en uno y aumenta en uno la capacidad de la arista (b, a) . En nuestro caso inventaremos los vértices F y D y la capacidad de todas las aristas es uno. Si el flujo máximo de F a D es n , entonces este flujo define las n trayectorias mutuamente ajenas de A a B , obteniendo así el apareamiento perfecto. Pero si el flujo máximo de F a D es $m < n$, entonces tenemos m trayectorias mutuamente ajenas de A a B , de las cuales tenemos que obtener un separador S de I con m elementos.

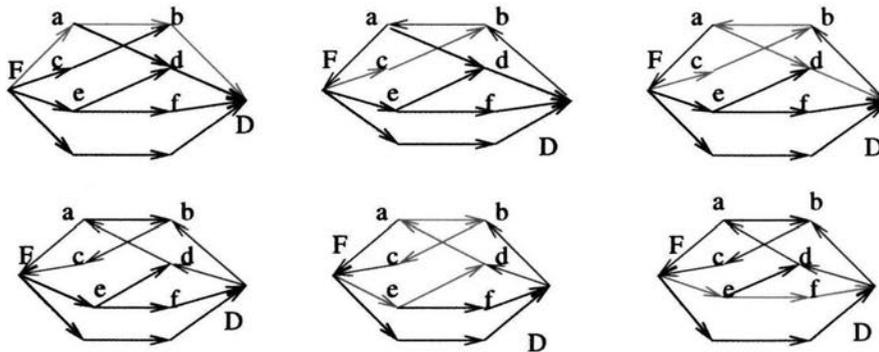


Figura 19. El método de Ford-Fulkerson genera las siguientes trayectorias.

- 1.- $\{F, a, b, D\}$ Dando un apareamiento provisional entre a y b .
- 2.- $\{F, c, b, a, d, D\}$ Aparea (c, b) y (a, d) eliminandose (a, b) .
- 3.- $\{F, e, d, a, b, c\}$ Busca una trayectoria de F a D , pero no llega, Así que continua buscando utilizando backtrack. Finalmente encuentra la trayectoria $\{F, e, f, D\}$ y aparea (e, f) .

Sabemos que el separador de A y B más pequeño que podemos encontrar tiene m elementos y que lo que obtuvimos es un conjunto Z con $2m$ vértices, tal que Z contiene a S , es decir, Z es un separador de A y B en I . Si podemos eliminar los vértices que no son necesarios en Z para ser separador de A y B en I , hasta obtener un conjunto de cardinalidad m , habremos acabado. Tenemos varios criterios para decidir si un vértice $v \in V(Z)$ pertenece o no al separador. Como lo que tenemos son m trayectorias mutuamente ajenas, entonces tenemos m parejas de vértices, por lo tanto un vértice de cada pareja pertenece a S y el otro no. Sabemos que si $v \in V(Z)$ tiene un vecino en $V(I - Z)$, entonces $v \in S$. Análogamente si $w \in V(Z)$ tiene todos sus vecinos en $V(Z)$, entonces $Z - \{w\}$ es un separador de A y B en I (en particular, si

tiene todos sus vecinos en S , entonces $w \notin S$). Con estas reglas podemos encontrar S , probando quitar distintas combinaciones de vértices a Z .

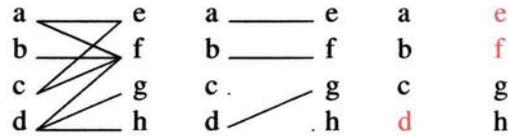


Figura 20. Si $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{e, f, g, h\}$ y $V(Z) = \{a, b, d, e, f, g\}$ entonces $S = \{d, e, f\}$.

Ejemplo de una gráfica con representación matricial (las aristas se representan con un 1) y el separador obtenido:

1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Falta página

N° 28

CAPÍTULO 3

Reconstrucción de las superficies básicas

Una vez que se tiene la asociación de curvas entre planos, sabemos que tipos de Superficies Básicas generar para obtener la sección de la superficie. Con la hipótesis de que la superficie que generaremos tiene por frontera curvas poligonales simples, es natural pensar que las superficies básicas son poliédricas.

Sea S una superficie básica con frontera $\{C_n\}$. Suponiendo que no queremos inventar nuevos puntos en la triangulación de S , esto nos lleva a la siguiente pregunta ¿Será posible triangular las superficies básicas sin agregar vértices? ¿Cómo determinamos cuando dos triángulos con vértices en $\{C_n\}$, están en una triangulación de S ? Mas aún ¿cómo generamos una triangulación de S ? Sabemos que si dos triángulos con vértices en los polígonos $\{C_n\}$ se intersectan en su interior, entonces, no forman parte de la misma triangulación de S .

DEFINICIÓN. Dada una triangulación de una superficie básica S , decimos que un **triángulo es horizontal**, si sus tres vértices pertenecen a uno de los planos que contienen la frontera de S .

Para simplificar el problema, podríamos pensar en resolver para la cerradura convexa de los polígonos $\{C_n\}$ y luego agregar los triángulos horizontales necesarios para que la frontera de S fuera $\{C_n\}$, es decir, generar triángulos para tapar los hoyos que deja la cerradura convexa. Sin embargo, cuando hagamos lo mismo con la siguiente sección, la intersección de estas dos superficies parciales, no van a ser las curvas simples que esperamos, así, lo que resulta de la unión de estas secciones no es una superficie. Por lo tanto, una superficie básica no tiene triángulos horizontales.

1. Intersección de triángulos

Sean a, b, c tres puntos en un plano P_1 y d, e dos puntos en un plano P_2 , paralelo a P_1 . Observemos que si ab es paralelo a de , entonces ad intersecta a be , si y solo si, los vectores ab y de tienen direcciones opuestas.

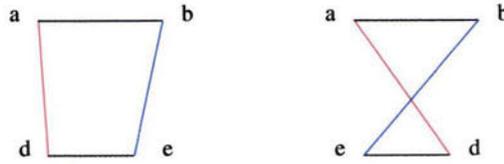


Figura 21.

Para saber si los triángulos $A = \{a, b, d\}$ y $B = \{c, e, f\}$ se intersectan en su interior (f en P_1 ó P_2), basta ver si alguna de las dos aristas de B que van de P_1 a P_2 , intersectan el interior de A .

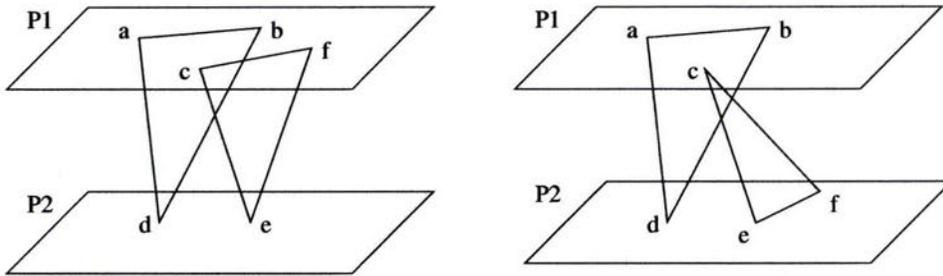


Figura 22.

Veamos ahora dos lemas que nos permiten decir cuando un triángulo y un segmento de recta se intersectan:

Sean x, y puntos distintos en \mathbb{R}^3 y X un plano en \mathbb{R}^3 . La **proyección** de un punto x sobre un plano X desde y , es la intersección de la recta xy con X . $P : \mathbb{R}^3 * \mathbb{R}^3 * X \rightarrow \mathbb{R}^3$, $P(x, y, X) = xy \cap X$.

LEMA 1.1. *El triángulo $A = \{a, b, d\}$ y la recta ce se intersectan, si y solo si, e está en la proyección de A sobre P_2 desde c .*

DEMOSTRACIÓN. Sea $P(A) \subset P_2$ la proyección de A sobre P_2 desde c . Si $e \in P(A)$, existe $x \in A$, tal que $P(x) = e$, es decir, la proyección de x sobre P_2 desde c es e , por lo tanto, $x \in ec$ y como $x \in A$, entonces, ec y A se intersectan. Análogamente si ec y A se intersectan, existe $x \in ec \cap A$, luego $P(x) = e$, por lo tanto, $e \in P(A)$. □

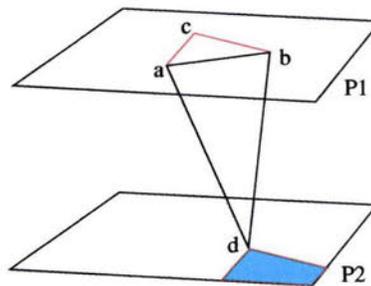


Figura 23.

OBSERVACIÓN. $P(A)$ queda determinada por los planos $a, d, c \in Q$ y $b, d, c \in R$ y por la proyección de un punto interior de A . Como P_1 y P_2 son paralelos, Q corta a P_2 en una recta paralela a ac y R corta a P_2 en una línea paralela a bc .

LEMA 1.2. *El triángulo $A = \{a, b, d\}$ y la recta ce se intersectan si el rayo $c + k(d - e)$ corta al segmento ab , para $k > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Si el rayo $c + k(e - d)$ corta al segmento ab en x , entonces en el plano que contiene a c, d, e y x , tenemos dos segmentos paralelos xc y de , pero con direcciones opuestas, $xc = x - c = c + k(e - d) - c = k(e - d)$ y $de = d - e$, por lo tanto, las aristas xd y ce se intersectan y como la arista xd está contenida en A , entonces, A y ce se intersectan. □

LEMA 1.3. *Si el triángulo A y la recta ce no se intersectan, al trasladar el plano P_1 con una función $Tr : P_1 \rightarrow P_1$, $Tr(x) = x + x_0$, con $x_0 \in P_1$, el triángulo $Tr(A) = \{Tr(a), Tr(b), d\}$ y la recta por $Tr(c)$ y e , tampoco se intersectan.*

DEMOSTRACIÓN. La recta por $Tr(a)$ y $Tr(c)$ tiene como vector director a $Tr(a) - Tr(c) = a + x_0 - c - x_0 = a - c$, por lo tanto, es paralela a la que pasa por a y c , análogamente, la recta por $Tr(b)$ y $Tr(c)$ es paralela a la que pasa por b y c . Como $P(A)$ está determinada por el punto d y dos rectas paralelas, las cuales no cambiaron al hacer la traslación, luego, $P(A)$ no cambia. De modo que si A y ce no se intersectaban, entonces, $Tr(A)$ y la recta por $Tr(c)$ y e tampoco lo hacen. □

LEMA 1.4. *Si el triángulo A y la recta ce no se intersectan, al expandir o contraer el plano P_1 desde un punto $x_0 \in P_1$, con una función $E : P_1 \rightarrow P_1$, $E(x) = x_0 + t(x - x_0)$, con $x_0 \in P_1$ y $t \in \mathbb{R}$, el triángulo $E(A) = \{E(a), E(b), d\}$ y la recta por $E(c)$ y e no se intersectan.*

DEMOSTRACIÓN. La recta que pasa por $E(a)$ y $E(c)$ tiene como vector director a $E(a) - E(c) = x_0 + t(a - x_0) - x_0 - t(c - x_0) = t(a - c)$, luego, el vector $(a - c)$ es paralelo al vector $(E(a) - E(c))$ y por lo tanto, $P(A)$ no cambia. □

LEMA 1.5. Si S es una superficie poliédrica simple, con una triangulación $T(S)$, entonces, $S_{tr} = \{Tr(T)|T \in T(S)\}$ y $S_e = \{E(T)|T \in T(S)\}$ también lo son.

DEMOSTRACIÓN. Si S_{tr} ó S_e no fueran superficies simples, dos de sus triángulos se intersectarían, así como un triángulo y una arista. Pero ya se demostró que esto no es causado por las funciones Tr y E , y como S es una superficie simple, entonces, S_{tr} y S_e , también lo son. \square

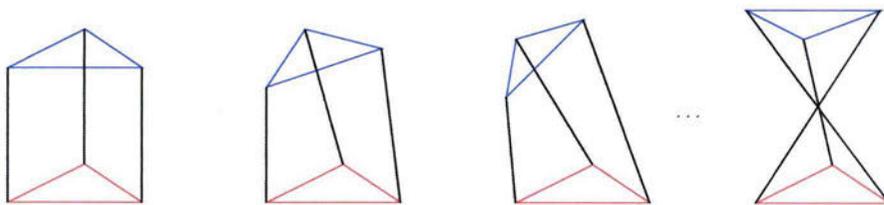


Figura 24. Las rotaciones de uno de los planos pueden causar autointersecciones en S .

2. Triangulación de polígonos

Para hacer la reconstrucción trasladaremos el plano P_1 al plano P_2 , haremos ahí la triangulación de la superficie básica y regresaremos el plano P_1 a su lugar.

LEMA 2.1. La región acotada por un polígono simple en el plano es triangulable.

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre el número de lados de P .

El caso base es cuando $n = 3$, donde P ya está triangulado, puesto que es un triángulo.

Supongamos ahora que el lema se cumple para polígonos con menos de n lados. Sea P un polígono de $n > 3$ lados y sea l una línea, tal que, si a cada vértice $v \in P$ le asociamos la recta perpendicular a l que pasa por v , esta asociación sea una biyección. Sin pérdida de generalidad, supongamos que l es el eje x , así no habrá dos vértices de P con la misma coordenada x .

Sea a el vértice de P más a la izquierda y b, c sus vecinos, si el segmento bc es una diagonal de P , es decir, no intersecta a P , entonces, podemos separar de P al triángulo $\{a, b, c\}$, lo que reduce en uno el número de lados de P y por inducción, el resto del polígono puede ser triangulado.

Ahora, si el segmento bc intersecta a P , sea d el vértice de P más a la izquierda que esté en el interior del triángulo $\{a, b, c\}$, entonces, el segmento ad es una diagonal de P y lo divide en dos polígonos con menos de n lados, por lo tanto, cada polígono es triangulable.

De esta manera, la triangulación de P está dada por la unión de las triangulaciones de los polígonos que se obtuvieron al separar a P con una de sus diagonales.

□

En esta demostración se muestra un método para encontrar una diagonal en un polígono dado, y si el polígono no tiene hoyos, también sirve para triangularlo. Cuando el polígono tiene hoyos, la diagonal que encontramos con este método no siempre separa el polígono en dos polígonos con menos de n lados, sin embargo, si una diagonal no lo separa, nos podemos deshacer de un hoyo agregándole dos lados (la diagonal pero con ambas direcciones), de esta manera, podemos aplicar el mismo algoritmo.

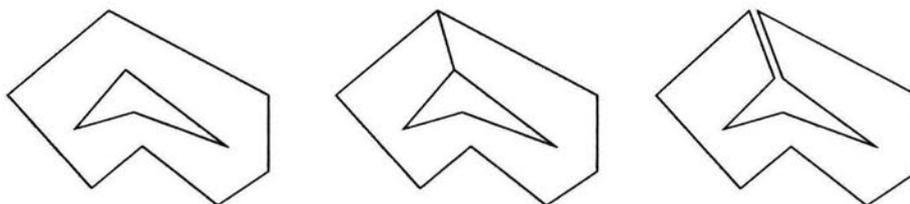


Figura 25.

Un **triángulo libre** en una triangulación del interior de un polígono P , es aquel que dos de sus aristas son lados de P .

LEMA 2.2. *Dada una triangulación $\{T_n\}$ del interior de un polígono P con más de tres lados, existen dos triángulos libres en $\{T_n\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por **inducción** sobre el número de lados de P .

Para $n = 4$, la triangulación de P se genera agregándole una diagonal, obteniendo así dos triángulos que la comparten para formar uno de sus lados y los otros dos, son lados de P , es decir, se forman dos triángulos libres en la triangulación.

Supongamos ahora que el lema se cumple para polígonos con menos de n lados. Sea P un polígono de n lados. Si dividimos a P con una diagonal, obtenemos dos polígonos P_1 y P_2 con menos de n lados, donde por hipótesis de inducción, podemos encontrar dos triángulos libres en cada uno de los polígonos. Como P_1 y P_2 tienen solo un lado en común,

hay solamente un triángulo de P_1 y uno de P_2 que compartan una arista, de manera que uno de los triángulos libres de P_1 es también libre en P . Análogamente, uno de los triángulos libres de P_2 es también libre en P , por lo tanto, P tiene dos triángulos libres. □

LEMA 2.3. *La región acotada por un polígono simple P en el plano es homeomorfa a un disco.*

DEMOSTRACIÓN. Si triangulamos el interior del polígono, podemos deformarlo hasta convertirlo en un triángulo. Esto lo hacemos deformando los triángulos libres, es decir, "empujando" los triángulos libres hacia el interior del polígono, de manera que, en cada paso eliminamos un triángulo. Dado que el número de triángulos es finito, eventualmente obtenemos un triángulo, el cual es homeomorfo a un disco. □

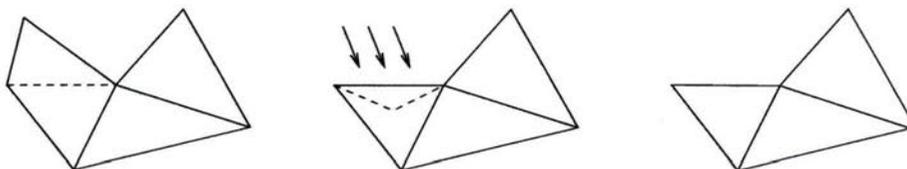


Figura 26.

LEMA 2.4. *Si un polígono C_1 está en el interior de un polígono C_2 , entonces, la región acotada por C_1 y C_2 es un cilindro.*

DEMOSTRACIÓN. Triangulando la región entre ellos podemos obtener dos aristas que conecten a C_1 y C_2 , estas dos aristas separaran la región en dos polígonos, los cuales son homotópicos a un disco. Si deformamos los discos y los pegamos por las dos aristas donde lo separamos, entonces, obtenemos un cilindro. □

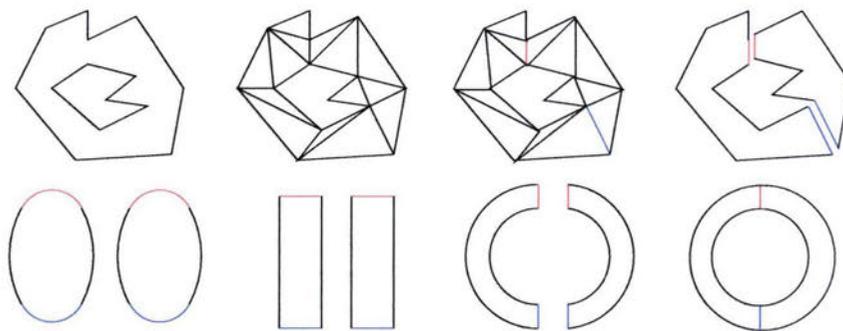


Figura 27.

Ahora veremos algunas observaciones y resultados que nos permitirán dar un ejemplo de dos curvas poligonales C_1 y C_2 , tales que, no es posible generar un cilindro cuya frontera sea $C_1 \cup C_2$, sin agregar vértices y sin triángulos horizontales.

OBSERVACIÓN. Dado un polígono C en un plano P y un punto x fuera de P , la unión de los triángulos que forman cada arista de C con x , es una superficie básica homeomorfa a un disco, llamada el **cono** de C desde x .

DEFINICIÓN. Sean $C \subset \mathbb{R}^3$ y un punto $p \in \mathbb{R}^3$, tal que, $p \notin C$. Decimos que p **ilumina** completamente [6] al conjunto $A \subset C$, si para cada punto $x \in A$, $px \cap C = x$.

DEFINICIÓN. Sean A y B subconjuntos de C mutuamente ajenos. Decimos que $A < B$ desde p , si existe $x \in B$, tal que, $px \cap A \neq \emptyset$.

Podemos extender esta definición para las aristas de un polígono simple, permitiendo que dos aristas compartan el mismo extremo, el cual debe ser un vértice del polígono. Entonces, decimos que una arista a es menor que otra arista b , si existe $x \in b - a$ tal que $px \cap a \neq \emptyset$.

LEMA 2.5. *Dado un polígono plano C y una dirección d . Si desde el punto al infinito iluminamos C con líneas paralelas a d , entonces, existe una arista de C que se ilumina completamente.*

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $d = (1, 0)$. Ahora, barramos C de abajo hacia arriba con una línea horizontal L . Sea a la primer arista de C que intersecta L (de izquierda a derecha). Si a no se ilumina completamente, entonces, existe una arista menor que a . En tal caso, movamos L hacia arriba hasta tocar una arista $b < a$ (si encontráramos más de una, tomemos la de más a la izquierda). Repitiendo el mismo razonamiento, si b no se ilumina, existe una arista $c < b$. De esta manera, en cada paso para encontrar una arista menor, la línea L va subiendo sobre las aristas, y como el número de aristas es finito, eventualmente habremos encontrado una para la cual no haya una arista menor y por lo tanto, ésta se iluminará completamente. \square

OBSERVACIÓN. Dado un polígono C en un plano P y una arista ab contenida en un plano paralelo P' , existe un disco poliédrico sin triángulos horizontales cuya frontera es C y que toca a P' en ab .

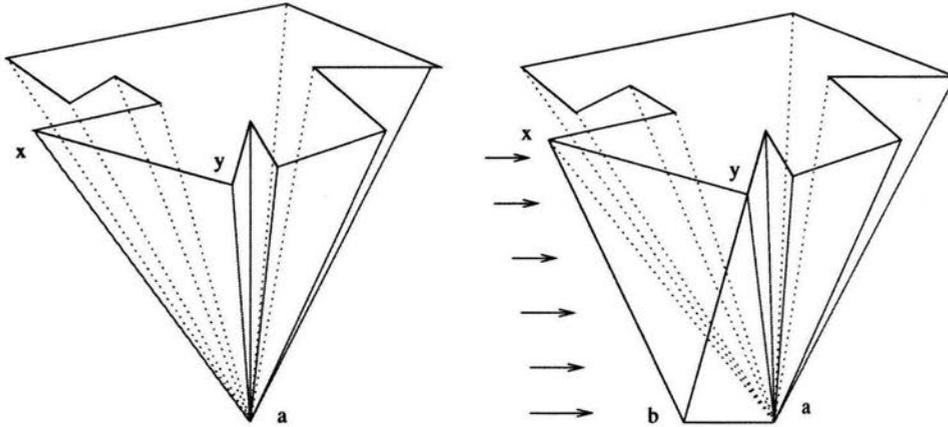


Figura 28. Primero unimos el vértice a con todos los vértices de C , después, iluminamos desde el infinito con dirección ba , y sea xy una arista de C que se iluminó completamente. Ahora, quitamos el triángulo axy y ponemos los triángulos axb , bxy y bya .

El "jalar" el triángulo axy en dirección ab , para convertirlo en los otros tres triángulos, no crea intersecciones. Ya que como xy se ilumina completamente, esto significa que en esa dirección no hay nada que pueda bloquear la arista xy . Suponiendo que ahora la fuente de iluminación es la arista xy , lo que tenemos es que desde los puntos x y y podemos lanzar rayos con dirección ab , tales que no intersectan a C . Ahora, queremos ver si podemos variar la dirección de iluminación de la arista xy y obtener los ángulos más grandes con los cuales podemos hacer esto.

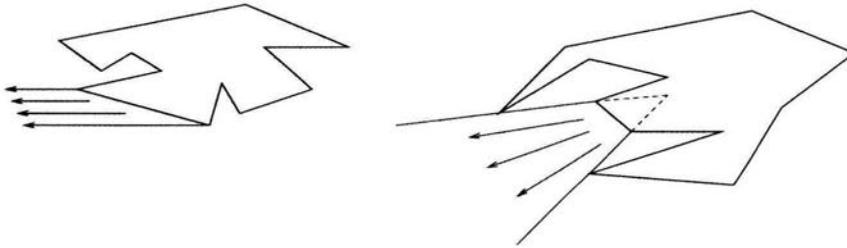


Figura 29.

OBSERVACIÓN. Sea C un polígono y a, b, c tres puntos en el plano. Si la dirección ba ilumina completamente una arista xy de C , existe un real $\epsilon > 0$, tal que, para todo c que cumpla $|b - c| < \epsilon$, entonces, la dirección ca también ilumina completamente la arista xy .

PROPOSICIÓN 2.6. *Dado un polígono C en un plano P , existe un triángulo T en un plano paralelo a P , tal que, se puede generar un cilindro poliédrico con vértices en $V(C) \cup V(T)$, sin triángulos horizontales y cuya frontera sea $C \cup T$.*

DEMOSTRACIÓN. Siguiendo el mismo procedimiento que con el segmento de recta ba , primero unimos todos los vértices de C a un punto a , luego jalamos un triángulo completamente iluminado sobre una dirección que lo ilumine. Como tenemos espacio para jalar más de un punto, jalamos un segundo triángulo sin salirnos de la región iluminada. \square

PROPOSICIÓN 2.7. *Para todo triángulo T , existe un polígono C en un plano paralelo a T , tal que, no se puede generar un cilindro poliédrico con vértices en $V(C) \cup V(T)$, sin triángulos horizontales y cuya frontera sea $C \cup T$.*

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero el caso cuando T es equilátero: Sea C_1 un triángulo equilátero con vértices v, r, a (verde, rojo y azul) y C_2 la curva de la figura 30.

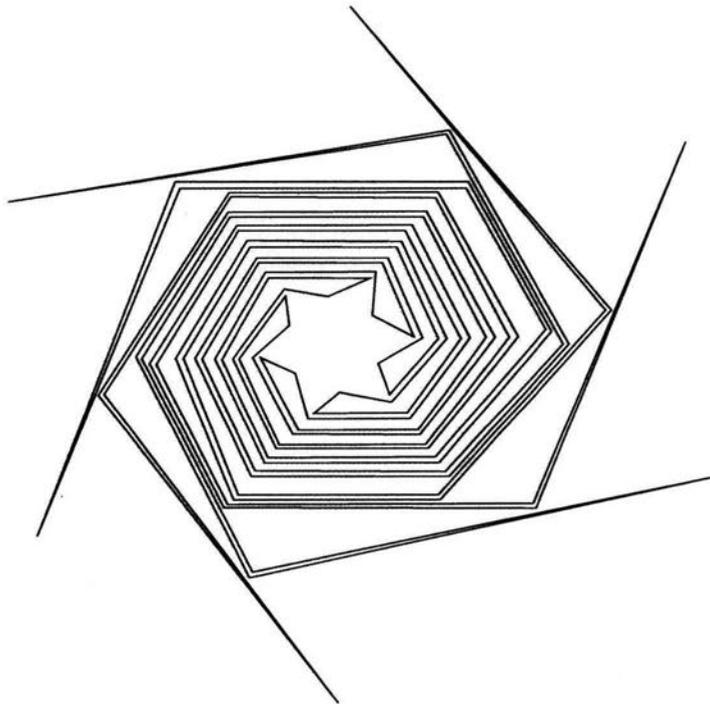


Figura 30.

Supongamos que existe una buena triangulación (un cilindro) entre C_1 y C_2 , entonces, cada arista de C_2 está en un triángulo cuyo tercer vértice está en C_1 . Si pintáramos las aristas de C_2 del color de su vértice asociado, la figura C_2 estaría pintada de rojo, azul y verde.

Observemos que el orden de los colores en C_1 y C_2 es el mismo, es decir, si empezamos en verde y recorremos ambas figuras en el sentido de las manecillas del reloj, vemos que en C_1 después del verde está el rojo, entonces en C_2 , después del verde, también debe seguir el rojo. Ya que al cortar el cilindro en una arista (verde-azul) que va de C_1 a C_2 y poner el cilindro en el plano, observamos que no puede haber un segmento en C_2 cuyos extremos sean rojo-verde, pues intersectaría al segmento verde-rojo que está en C_1 . Esto significa también que C_2 está dividida en a lo más tres curvas poligonales, una verde, una roja y una azul.



Figura 31.

Diremos que un vértice $x \in C_2$ **tiene un color** $c \in C_1$, si existe una arista de x a c . Y x es **completamente de un color** si sólo hay una arista de x a C_1 . Podemos tener vértices con más de un color, pero como son a lo más tres curvas, entonces, hay a lo más 3 vértices con más de un color.

AFIRMACIÓN 2.8. *No existe un cilindro poliédrico con vértices en $V(C_1) \cup V(C_2)$, tal que no tenga triángulos horizontales y cuya frontera sea $C_1 \cup C_2$.*

Supongamos que C_2 tiene 3 colores, entonces existe un color que cubre la tercera parte de C_2 , por ejemplo el rojo, por lo tanto, el rojo cubre uno de los brazos de C_2 . Ahora, ¿De qué color pueden ser los puntos de C_2 ?, es decir, para cada punto $x \in C_2$ veamos si puede ser pintado de azul o verde. Esto lo podemos hacer si prohibimos la región del plano que haría que esta arista azul o verde intersectara un triángulo rojo.

Como el brazo rojo da una vuelta completa, los puntos del centro de C_2 prohíben todo el plano, por lo tanto, todos los puntos del centro de C_2 tienen que ser rojos.

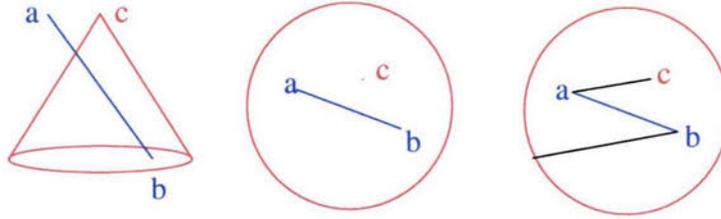


Figura 32. Si en un plano están a y c , y en el otro plano b y el círculo, existe un punto d en el círculo, tal que, el segmento db es paralelo al segmento ac , entonces, las líneas que unen ab y cd se intersectan.

Ahora, como el centro es rojo, el color azul y verde están en la punta de uno de los brazos, ya que azul y verde deben estar juntos, por lo tanto, todos los brazos menos uno son rojos.

Observemos que, debido a la forma de C_2 , hay a lo más dos aristas que no son rojas (en cada brazo sólo hay 3 vértices que no quedan completamente rodeados), también podemos ver que la suma de los ángulos que forman las puntas de C_2 es $2\pi + n\epsilon$, donde n es el número de brazos de la figura y $\epsilon > 0$, es decir, cada ángulo mide $2\pi/n + \epsilon$.

Por lo tanto, el ángulo máximo de iluminación de las dos aristas de uno de los picos de un brazo, es de $2\pi/n + \epsilon$. De modo que basta con una figura de más de $2\pi/(60 - \epsilon)$ brazos para que este ángulo sea menor que 60, y no haya suficiente espacio para meter un triángulo equilátero.

De esta manera, los vértices de C_2 no pueden tener los tres colores, por lo tanto, no existe un cilindro poliédrico con vértices en $V(C_1) \cup V(C_2)$ sin triángulos horizontales y cuya frontera sea $C_1 \cup C_2$.

Finalmente, cuando T no es un triángulo equilátero, basta ajustar el número de brazos de C_2 para que se cumpla la desigualdad $n > 2\pi/(\beta - \epsilon)$, donde β es el ángulo menor de T , y de esta manera, no sea posible generar el cilindro poliédrico.

□

3. Las superficies básicas en el plano

Para generar la triangulación de las superficies básicas, primero haremos la triangulación en el plano y después levantarla al espacio. Por los lemas anteriores, el resultado será una superficie básica. Para generar el cilindro con frontera C_1 y C_2 , lo que haremos es meter C_1 en C_2 . La manera más fácil de hacer esto, es metiendo el círculo más

pequeño que contiene a C_1 en el círculo más grande contenido en C_2 , esto funciona muy bien si las curvas son convexas, pero claramente tiene desventajas si las curvas son muy complejas. Para encontrar estos círculos definiremos dos funciones:

Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que, $F(x) = \max\{d(x, p) | p \in C_1\}$. De esta manera, obtenemos una función continua donde el mínimo se alcanza en el centro del círculo más pequeño que contiene a C_1 y donde $F(x)$ es el radio del círculo.

Sea $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos a $G(x)$ como $\min\{d(x, p) | p \in C_2\}$ si x está en el interior de C_2 , y como 0 en otro caso. Así, G es continua y alcanza el máximo en el centro del círculo más grande que contiene C_2 y $G(x)$ nos da su radio.

Finalmente, trasladamos el centro de un círculo para que coincida con el otro centro, ahí escalamos para hacer que los círculos tengan radios iguales, de esta manera, obtenemos la transformación que deben sufrir los vértices del polígono C_1 para que estén en el interior de C_2 .

Explícitamente, si los círculos son $a = \{(h_1 + r_1 \cos \alpha, k_1 + r_1 \sin \alpha)\}$ y $b = \{(h_2 + r_2 \cos \alpha, k_2 + r_2 \sin \alpha)\}$, entonces, la función $H : \mathbb{R}^2 * [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ deforma continuamente el plano moviendo el círculo a hasta convertirlo en b .

$$H((h_1 + r \cos \alpha, k_1 + r \sin \alpha), t) = (h_2 + r(tr_2/r_1 + (1-t)) \cos \alpha, k_2 + r(tr_2/r_1 + (1-t)) \sin \alpha)$$

Para las superficies básicas homeomorfas a un disco con dos hoyos se sigue la misma idea, sin embargo, existen dos casos: Cuando una de las dos curvas que están en el mismo plano, está contenida en la otra y cuando no. En el primer caso, tenemos que meter la tercer curva en la región acotada por las otras dos curvas (un disco con un hoyo), de tal manera, que el resultado sea homeomorfo a un disco con dos hoyos. En el segundo caso, tenemos que meter las dos curvas al interior de la tercera curva. En ambos casos, se usan las mismas funciones definidas anteriormente.

la superficie básica queda dividida en dos partes: una para $0 < t < 1/2$ y la otra para $1/2 < t < 1$.

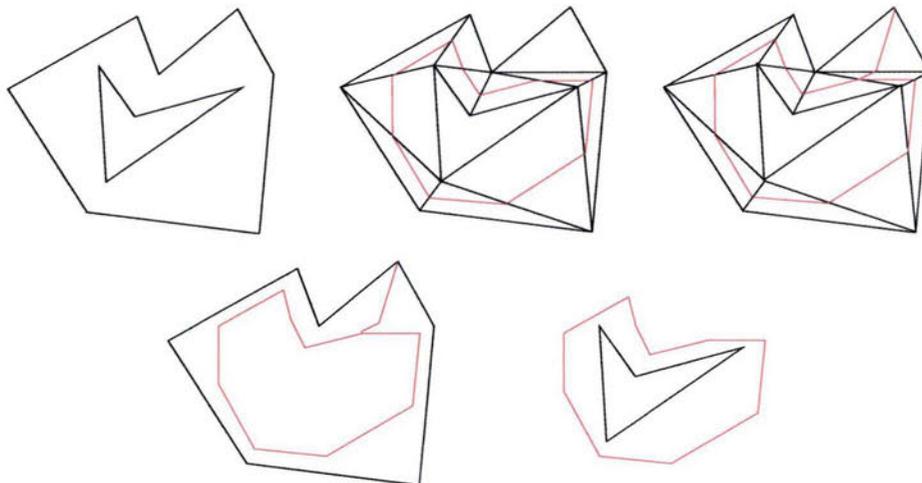


Figura 35.

4.3. Con una homotopía definida por la triangulación. [5].

Al igual que el método anterior, éste funciona para cualquier superficie básica en el plano, dándole una triangulación cualquiera. La idea es ir deformando la curva exterior hasta convertirla en la frontera interior, "empujando" las aristas del polígono de afuera hacia adentro, eliminando los triángulos.

OBSERVACIÓN. Sea $\{T_n\}$ una triangulación de un polígono con hoyos P . Existe $T \in \{T_n\}$, donde T es un triángulo libre ó un triángulo con dos vértices en el polígono exterior y el tercero en un polígono que bordea un hoyo.

En el caso del cilindro hay dos reglas para eliminar un triángulo:

Regla 1-. Si el triángulo a deformar tiene dos vértices u y v en el polígono exterior y el otro vértice w en el polígono interior, entonces, la deformación que se hace es: Mandar en línea recta el punto medio del segmento uv a w y los demás puntos en dirección paralela.

Regla 2-. Si el triángulo es libre en el polígono exterior, entonces, la deformación que se hace es mandar en línea recta al vértice, cuyas aristas son lados del polígono, al punto medio de la diagonal del polígono, y mover todos los otros puntos del triángulo en dirección paralela a ésta.

una triangulación válida en el plano. Sin embargo, cuando C_1 y C_2 estén en planos distintos, la triangulación no tendrá intersecciones entre dos regiones. Ahora, solo falta por triangular las partes donde lanzamos los rayos. Ésta región está formada por una arista de C_2 y una curva poligonal de C_1 unidas por dos de las diagonales que acabamos de crear. Dado que las regiones están segmentadas, podemos mandar todo a un vértice de la arista de C_2 para terminar la triangulación.

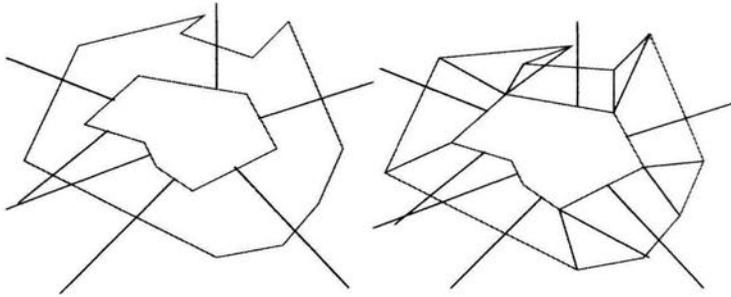


Figura 34.

4.2. Agregando vértices. Este método triangula cualquier superficie básica en el plano, el problema es que una triangulación cualquiera puede contener triángulos horizontales. Para eliminar los triángulos horizontales, tenemos que agregar vértices al cilindro poliédrico, solo tenemos que ver dónde y cómo. Observemos que los triángulos horizontales tienen al menos una diagonal (una arista que no es parte del polígono). Si ponemos un vértice en el punto medio de cada diagonal de un triángulo horizontal, agregando también las aristas necesarias para mantener la triangulación, entonces, basta con poner a la mitad de los dos planos estos vértices nuevos para eliminar los triángulos horizontales.

Si se tuvo que hacer una transformación de P_1 para que su frontera quedara en el interior de la frontera en P_2 , puede haber problemas si no movemos también los vértices nuevos. Una forma de resolver este problema es hacer la deformación de C_1 a C_2 en dos pasos. Si eliminamos los triángulos horizontales de la triangulación, lo que nos queda, es un cilindro con triángulos que van de un plano al otro, entonces podemos calcular un polígono a la mitad de los planos dividiendo cada arista por la mitad y retriangulando.

Deformando todos los vértices nuevos (incluyendo los de los triángulos horizontales) con $t = 1/2$, con la función que se usó en los círculos ($H : a * [0, 1] \rightarrow b$), obtenemos una curva a la mitad de los planos y

la superficie básica queda dividida en dos partes: una para $0 < t < 1/2$ y la otra para $1/2 < t < 1$.

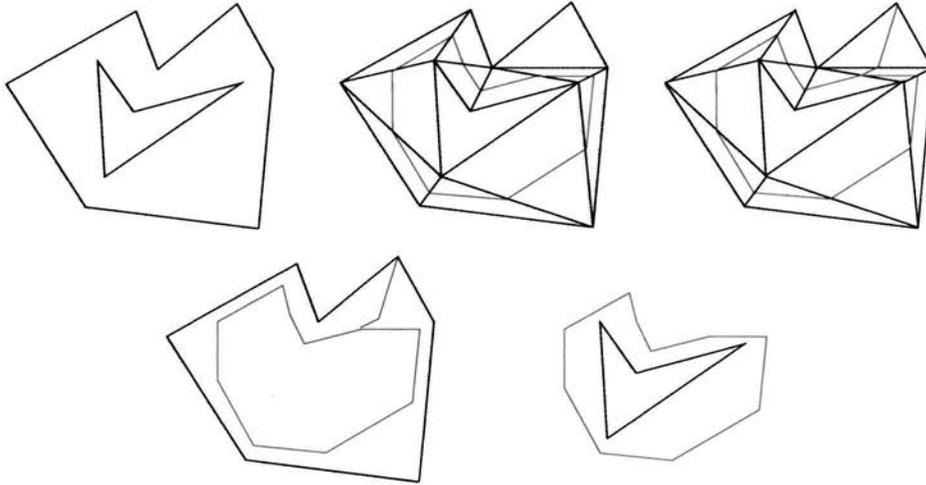


Figura 35.

4.3. Con una homotopía definida por la triangulación. [5].

Al igual que el método anterior, éste funciona para cualquier superficie básica en el plano, dándole una triangulación cualquiera. La idea es ir deformando la curva exterior hasta convertirla en la frontera interior, "empujando" las aristas del polígono de afuera hacia adentro, eliminando los triángulos.

OBSERVACIÓN. Sea $\{T_n\}$ una triangulación de un polígono con hoyos P . Existe $T \in \{T_n\}$, donde T es un triángulo libre ó un triángulo con dos vértices en el polígono exterior y el tercero en un polígono que bordea un hoyo.

En el caso del cilindro hay dos reglas para eliminar un triángulo:

Regla 1-. Si el triángulo a deformar tiene dos vértices u y v en el polígono exterior y el otro vértice w en el polígono interior, entonces, la deformación que se hace es: Mandar en línea recta el punto medio del segmento uv a w y los demás puntos en dirección paralela.

Regla 2-. Si el triángulo es libre en el polígono exterior, entonces, la deformación que se hace es mandar en línea recta al vértice, cuyas aristas son lados del polígono, al punto medio de la diagonal del polígono, y mover todos los otros puntos del triángulo en dirección paralela a ésta.

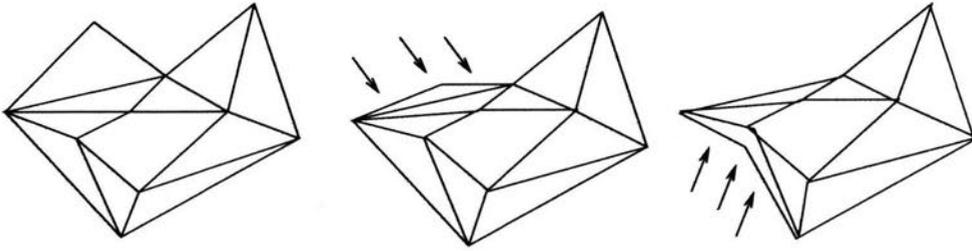


Figura 36.

De esta manera, cada punto $p \in C_2$ genera una trayectoria a un punto $q \in C_1$, definiendo la función $T_p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, en donde, $T_p(0) = p$ y $T_p(1) = q$. Podemos definir la homotopía $H' : C_2 * [0, 1] \rightarrow C_1$, como $H'(p, t) = T_p(t)$.

Las trayectorias de dos puntos cercanos son muy parecidas, por lo tanto, la función es continua sobre el perímetro de C_2 . Además, como estas trayectorias son ajenas, el cilindro no tendrá autointersecciones. Si la curva C_1 sufrió una transformación para estar en el interior de C_2 , al regresarla a su posición y tamaño original no afectará al cilindro, siempre y cuando, dicha transformación se haga para cada t , ya que las curvas son ajenas para valores distintos de t .

En superficies básicas homeomorfas a un disco con dos hoyos, podemos hacer la deformación en dos pasos: Primero, llevar las dos curvas a la curva 8 utilizando la misma triangulación, y luego deformar la curva exterior en el 8.

CAPÍTULO 4

Aplicación

En este capítulo se muestra el algoritmo de reconstrucción, además, se mencionan algunos de los cambios necesarios para pasar al espacio discreto, ya que para generar la aplicación trabajaremos en Z^2 y Z^3 .

Los tres puntos importantes de esta aplicación son:

- Obtención del árbol de curvas de una imagen.
- Asociación de curvas entre dos arboles.
- Generación de una superficie básica.

Obtención del árbol de curvas de una imagen. Aunque las curvas podrían provenir de diferentes medios, en esta aplicación se asume que son imágenes digitales, así que para generar el árbol de curvas, primero veremos cómo capturar una curva de una imagen digital.

Captura de una curva en una imagen. Como las curvas que necesitamos son simples, veamos cuál es la definición de estas en el discreto, es decir, en Z^2 .

Sea p un punto en Z^2 con coordenadas (x, y) . La **vecindad 4** de p es el conjunto de puntos $N_4(p) = \{(x-1, y), (x+1, y), (x, y-1), (x, y+1)\}$. La **vecindad d** de p es el conjunto de puntos $N_d(p) = \{(x-1, y-1), (x-1, y+1), (x+1, y-1), (x+1, y+1)\}$. La **vecindad 8** de p es el conjunto de puntos $N_8(p) = N_4(p) \cup N_d(p)$. Una **Imagen** es la gráfica de una función $F : X \rightarrow V$, con $X \subset Z^2$ y V un conjunto de valores. Dos puntos $p, q \in X$ son **adyacentes** (tienen adyacencia 8), si $q \in N_8(p)$ y $F(p) = F(q)$. Una **trayectoria** entre dos puntos p y q , es una sucesión de puntos $T_{pq} = \{p = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = q\}$, tales que, x_i y x_{i+1} son adyacentes. Una **curva simple** C , es una trayectoria que no repite puntos interiores y que cada punto $x_i \in C$ tiene una vecindad homeomorfa a Z , es decir, $|N_8(x_i) \cap C| = 2$.

Pretender que en la imagen existan solamente curvas simples, no es adecuado. Antes de capturar las curvas de la imagen, se debe hacer

un preprocesamiento de la misma, para que la información quede como queremos. Algunos de los cambios que realiza este preprocesamiento es eliminar puntos problemáticos y dejar a la imagen con solo dos valores: cuando un punto está sobre una curva y cuando es parte del fondo.

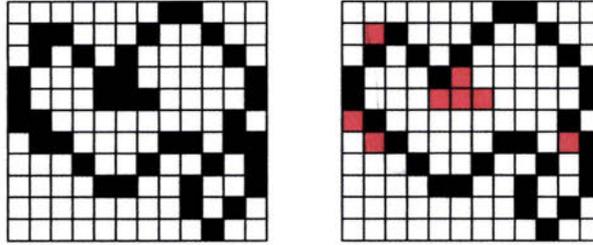


Figura 37.

El **Filtro Melt** elimina datos no deseados. La idea de este filtro es recorrer la imagen, y en cada punto p , ver si p está en una curva según un umbral que discrimina objeto y fondo. Si está en la curva, vemos localmente si el punto es indispensable para eliminarlo o no. Si la vecindad del punto se desconecta al quitarlo, entonces, es indispensable, y viceversa.

Para obtener cada curva se recorre la matriz por renglones hasta encontrar un punto p , tal que, $F(p) = 1$, lo que significa, que estamos sobre una de las curvas del plano. Dado que son curvas simples, si empezamos a caminar sobre la curva guardándola en una lista, terminaremos de recorrerla al llegar al punto de inicio. Caminaremos sobre una curva C , sabiendo que cada punto p tiene exactamente dos vecinos en C . Cuando estemos parados en p , sólo tenemos que buscar a uno de los dos vecinos, el cual, será nuestro nuevo punto p . Para agilizar el algoritmo, se intentará caminar en la dirección más parecida a la anterior. Al ir sobre C vamos borrando sus puntos, así evitamos recorrerla más de una vez, y leer curvas que no son simples.

Generación del árbol de curvas. Para generar el árbol de curvas se diseñó una estructura de datos y un algoritmo para decidir si una curva está en el interior de otra, es decir, el algoritmo para el Teorema de Jordan en el discreto.

Para ver que una curva C_1 está en el interior de otra C_2 , basta ver si un punto p de C_1 está en el interior de C_2 , lo cual hacemos intuitivamente de la siguiente manera: anzamos un rayo L desde p y contamos el número de veces que L atraviesa C_2 , si éste número es

impar, entonces p está en el interior de C_2 , y si es par, está en el exterior.

El algoritmo para decidir si un punto $p = (x, y)$ está en el interior de una curva C funciona así:

1-. Si p está en C , entonces, regresa falso.

2-. Si no, entonces, previamente calculamos las coordenadas X y Y mínimas y máximas de los puntos de C , de esta manera, tenemos acotada la curva C por un rectángulo R . Ahora bien, desde p calculamos la distancia mínima a R y caminamos en esa dirección hasta llegar a R . Supongamos que es hacia arribar:

a) Inicializamos una bandera de dirección $d = 0$ y un contador $n = 0$.

b) Si p no está en C , hacemos $p = (x, y - 1)$, es decir, caminamos un punto hacia arriba y regresamos al paso b.

c) Si p está en C , entonces, a partir de los dos vecinos de p sobre C , $q = (x_1, y_1)$ y $r = (x_2, y_2)$, calculamos $a = |x_1 + x_2 - 2x + d|$.

- Si $a = 1$, significa que nos subimos a la curva C , por lo que usaremos nuestra variable d , para recordar por dónde entramos (izquierda o derecha), es decir, $d = -1$ si entramos por la izquierda y $d = 1$ si entramos por la derecha.

- Si $a = 0$, cortamos la curva C , por lo que incrementamos nuestro contador n y asignamos $d = 0$.

- Si $a = 2$, sólo pisamos un vértice o la curva, pero realmente no cambiamos de región (interior - exterior), así que hacemos $d = 0$.

Volvemos al paso b.

3-. Si n es impar entonces regresamos verdadero, si no entonces regresamos falso.

La estructura de árbol se diseñó para tener un método externo que permitiera agregar curvas en un subárbol. Este método encuentra la posición que le corresponde a una curva en el árbol y la agrega en el subárbol indicado. El árbol hace todos los cambios necesarios, es decir, se actualiza automáticamente.

Asociación de curvas entre planos consecutivos. Para cada par de árboles de curvas, se genera una lista de Superficies Básicas, es decir, las asociaciones entre las curvas de un árbol y el otro. Estas superficies básicas pueden contener una, dos o tres curvas.

Se reciben dos árboles A y B , tales que, representan imágenes consecutivas, por lo que la diferencia en la topología de los árboles no es mucha, de esta manera, se busca alguno de los isomorfismos entre

los árboles para dar la asociación. La forma más rápida es empezar con los niveles más altos (cerca de la raíz) y utilizar invariantes de los subárboles (número de hijos, niveles de profundidad, cardinalidad) para decidir si pueden o no, estar asociados. Para hacer la asociación se crea una función distancia, la cual, tiene como parámetros la topología de los árboles y la distancia entre las curvas (como conjuntos de puntos), dándole un mayor peso a la topología de los árboles (ramas, niveles y cardinalidad). Como el problema de asociación busca que el apareamiento de curvas entre planos minimice la suma de las distancias entre curvas asociadas, entonces, esta distancia obliga a buscar primero el isomorfismo entre árboles y después hacer el apareamiento de curvas como conjuntos de puntos.

Generación de una superficie básica. Una vez que obtenemos la lista de superficies básicas a generar, debemos obtener la lista de triángulos que desplegaremos en la aplicación. Antes de triangular cambiaremos de curvas a polígonos, ya que los algoritmos de triangulación son más rápidos entre menos vértices usen. Posteriormente debemos poner la superficie básica en el plano, dependiendo cuál superficies básicas es, son los pasos que se siguen. En el cilindro por ejemplo, a cada polígono de la superficie básica se le calcula su círculo inscrito más grande, para decidir que curva deformar, luego se crea una copia de dicha curva y se hace la deformación para que la region acotada por las curvas sea un anillo, después, se triangula la región. En caso de existir triángulos horizontales, se agregan los puntos necesarios para generar la superficie en dos pasos. En cada triángulo se reasignan los valores de los vértices originales de la curva deformada y se calcula la posición de los vértices nuevos. Finalmente, se le asigna altura a todos los vértices.

Glosario de clases y métodos importantes. Este programa fue hecho en el lenguaje C++, además, el ambiente de ventanas QT y el despliegue gráfico utilizando OpenGL.

Estructuras de datos: Arreglo, Lista, Matriz, Arbol, Imagen, Punto, Punto3D, Vertices, ConjuntoDePuntos, Curva, Poligono, Triangulo, Triangulo3D, SurperficieBasica.

Métodos importantes: Filtro, Triangulacion, Ordenacion, Apareamiento, covertir Imagen en Arbol y convertir dos arboles en una lista de superficies básicas.

Bibliografía

- [1] H. Fuchs, Z. Kedem y S.P. Uselton. 1977. Optimal surface reconstruction from planar contours. Communications of the ACM, 20:693-702.
- [2] Chartrand, Gary. 1977. Graphs as Mathematical Models. Prindle, Weber & Schmidt, Inc. Boston. 294pp.
- [3] Kuhn, H.W. 1955. The Hungarian method for the assignment problem. Naval Research Logistics Quarterly. Vol 2. pp. 83-97
- [4] Ford, L.R., Jr., y Fulkerson, D.R. 1956. Maximal Flow Through a Network. Can. J. of Math. Vol. 8. pp. 339-404.
- [5] Fujimura, Kikuo. 1999. Shape Reconstruction from Contours Using Isotopic Deformation. Department of Computer and Information Science, The Ohio State University Article ID gmpi. 1999.0494, available online at <http://www.idealibrary.com>
- [6] Foldes, I. Rival y J. Urrutia. 1990. Light sources, obstructions and spherical orders.