



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EQUILIBRIOS MAGNETOHIDRODINAMICOS DE UN PLASMA
CILINDRICO CON FLUJO AXIAL

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C O

P R E S E N T A :

MIZTLI YOLOTZIN YEPEZ MARTINEZ



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. JULIO HERRERA VELAZQUEZ

2004



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Equilibrios Magnetohidrodinámicos de un Plasma Cilíndrico con Flujo Axial"

realizado por Yépez Martínez Miztli Yolotzin

con número de cuenta 9534755-0 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

Dr. José Julio Emilio Herrera Velázquez

Propietario

Dra. Xochitl Blanco Cano

Propietario

Dr. Pier Achille Mello Picco

Suplente

Dr. Juan Américo González Esparza

Suplente

Dr. Julio Javier Martinell Benito

Consejo Departamental de Física

Patricia Goldstein Menache
 DRA. PATRICIA GOLDSPEIN MENACHE CIENCIAS
 Coordinadora de Licenciatura DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Agradecimientos

Quiero agradecer al Doctor José Julio Emilio Herrera Velázquez por haber dirigido mi trabajo de tesis de licenciatura que hoy he concluido. También quiero agradecer a los doctores Julio Javier Martinell Benito y Pier Achille Mello Picco por haber dedicado su valioso tiempo a la revisión de mi trabajo de tesis e igualmente a los doctores Xochitl Blanco Cano y Juan Américo González Esparza.

Agradezco a la UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO por haberme dado la oportunidad de realizar una carrera universitaria además de proporcionarme todos los servicios y actividades a los cuales pude acceder.

Un agradecimiento muy especial merecen mis padres, María y Enrique, quienes me proporcionaron las herramientas necesarias para realizar una carrera universitaria. A Huitzilín y Tochtli quienes no sólo son mis hermanos sino también mis mejores amigos. También quiero agradecer a mis primos Moisés y Rosario (Chayito o la Beba), con quienes tuve la fortuna de compartir mi infancia. A mis amigos más cercanos Ostap e Ivonne con quienes hice una fuerte amistad y a mi novia Martha con quien he pasado algunos de los mejores momentos de mi vida; a mis amigos de la licenciatura Roberto, Julio y Sergio con quienes forme igualmente una gran amistad.

*PASE LO QUE PASE, HAGAS LO QUE HAGAS Y VAYAS A DONDE VAYAS,
NUNCA OLVIDES QUIEN ERES NI DE DONDE VIENES.*

*ES DE HUMANOS TENER MIEDO, PERO ES DE COBARDES NO INTENTAR-
LO.*

Índice general

Introducción	1
1. Ecuaciones MHD.	5
1.1. Introducción.	5
1.2. Derivación del Modelo de Varios Fluidos.	5
1.2.1. Función de Distribución y Ecuación de Boltzmann.	5
1.2.2. Momentos de la Ecuación Boltzmann.	9
1.3. Descripción del Plasma como un Fluido.	14
1.4. Condiciones de Frontera del Modelo MHD.	24
1.4.1. Plasma Limitado por una Pared Perfectamente Conductora.	24
1.4.2. Plasma limitado por campo magnético en vacío producido por la corriente del plasma.	25
1.4.3. Plasma rodeado por Bobinas Externas.	26
2. Equilibrio MHD con una Geometría Cilíndrica.	29
2.1. Introducción.	29
2.2. Ecuaciones Generales del Equilibrio MHD.	30
2.3. Equilibrio del Z-Pinch con Dependencia Radial.	32
2.4. Cantidades de Equilibrio para un Z-Pinch.	38
3. Familias de Equilibrios Estacionarios.	47
3.1. Introducción.	47
3.2. Densidad de Corriente.	48
3.3. Campo Magnético y Presión de Plasma.	50
3.3.1. Campo magnético.	50
3.3.2. Presión de Plasma.	50
3.3.3. Presión Magnética	50
3.4. Equilibrio 1: Densidad de Partículas Binomial.	53
3.4.1. Densidad de Partículas $l = 1/4$.	55
3.4.2. Densidad de Partículas $l = 3$.	56
3.4.3. Densidad de Partículas $l = 30$.	57
3.5. Equilibrio 2: Densidad de Partículas Gaussiana.	59

4. Estabilidad MHD del Z-Pinch.	65
4.1. Introducción	65
4.2. Linealización de las Ecuaciones MHD.	66
4.2.1. Ecuaciones MHD linealizadas para un Z-Pinch.	67
4.3. Evidencia de Estabilización en el Z-Pinch.	71
5. Conclusiones.	75

Índice de figuras

2.1. Cociente de Presión Magnética entre Presión del Plasma α	42
3.1. Densidad de Corriente.	49
3.2. Campo Magnético.	51
3.3. Presión del Plasma.	52
3.4. Presión Magnética.	53
3.5. Densidad de Partículas Binomial.	54
3.6. Perfiles de Temperatura para $l = 1/4$	55
3.7. Perfiles de Velocidad de Flujo para $l = 1/4$	56
3.8. Perfiles de Temperatura para $l = 3$	57
3.9. Perfiles de Velocidad de Flujo para $l = 3$	58
3.10. Perfiles de Temperatura para $l = 30$	59
3.11. Perfiles de Velocidad de Flujo para $l = 30$	60
3.12. Densidad de Partículas Gaussiana.	61
3.13. Perfiles de Temperatura para una Densidad de Partículas Gaussiana.	62
3.14. Perfiles de Velocidad de Flujo para una Densidad de Partículas Gaussiana.	63
4.1. Contornos de presión en un Z-Pinch para una simulación no lineal. a) Equilibrio sin flujo axial. b) Equilibrio con flujo axial.	72

Introducción

En la búsqueda para satisfacer el consumo de energía eléctrica que las sociedades actuales demandan, los científicos han desarrollado fuentes de energía que garanticen el suministro de ésta. La generación de energía eléctrica se realiza a través de diferentes tipos de plantas generadoras como son las plantas hidroeléctricas, eólicas, geotérmicas, solares, termoeléctricas y nucleoeeléctricas; sin embargo, en la actualidad la mayor parte de la generación eléctrica se hace a través de las plantas termoeléctricas, es decir, con combustibles fósiles (petróleo, gas, carbón).

Los combustibles fósiles son los más utilizados alrededor del mundo; no sólo en la generación de electricidad, sino también como combustible para motores de automóviles, barcos, aviones, trenes etc. Depender de estos como combustibles básicos y en la generación de energía eléctrica tiene diversos problemas entre los cuales destaca que son recursos no renovables, es decir, un día se van a terminar. Por esta razón es importante el desarrollo de fuentes de energía que no dependan de estos.

Una alternativa para la generación de energía eléctrica es el uso de la energía nuclear. La generación de energía eléctrica a través de la energía nuclear plantea dos posibilidades: la fisión y la fusión nuclear controlada. El interés de este trabajo está orientado a la investigación de fusión nuclear controlada por lo cual se profundizará más en ésta.

Para generar energía por fisión se bombardea un núcleo radiactivo pesado con neutrones; este bombardeo tiene como resultado el rompimiento del núcleo original, el cual se divide en elementos radiactivos más ligeros y neutrones. Este proceso libera una gran cantidad de energía, la cual puede ser utilizada para la generación de energía eléctrica. La fisión dio lugar al desarrollo de reactores de fisión nuclear los cuales son utilizados en las plantas nucleoeeléctricas; sin embargo, los reactores de fisión nuclear generan elementos radiactivos de vida media larga que son dañinos a la salud humana, el medio ambiente y su mantenimiento es muy costoso.

Para generar energía de fusión se deben unir dos núcleos ligeros para formar un núcleo más pesado que los dos originales. Este proceso libera energía, la cual se utilizará en la generación de energía eléctrica. Para lograr la unión de los núcleos es necesario vencer la barrera Coulombiana de repulsión por lo cual los núcleos deben chocar con altas energías. La manera con la cual se busca generar energía de fusión nuclear es a través de un sistema físico llamado plasma, el cual consiste en un gas ionizado. El plasma debe tener una temperatura lo suficientemente alta para que los iones positivos o núcleos que

lo constituyen colisionen con la energía suficiente para vencer la barrera de repulsión Coulombiana; por esta razón los plasmas de fusión nuclear están totalmente ionizados. Además de tener una alta temperatura el plasma debe ser lo suficientemente denso para que el camino libre de las partículas sea corto, aumentando así la probabilidad de colisiones entre los núcleos capturando uno al otro.

La fusión nuclear es el proceso con el cual el Sol está en combustión, es decir, los núcleos de hidrógeno se fusionan generando núcleos de helio y liberando energía. Sin embargo, no basta hacer que los iones se fusionen; también es necesario lograr que el plasma no se esparza, es decir, es necesario confinar al plasma; la forma en la cual el plasma del Sol se mantiene confinado es por efecto gravitacional. La forma más desarrollada de calentar y confinar plasmas de fusión nuclear en la Tierra es mediante campos magnéticos. El estudio del confinamiento gravitacional del plasma solar o el confinamiento magnético de plasmas terrestres puede hacerse desde un punto de vista macroscópico a través del modelo MAGNETOHIDRODINÁMICO (MHD), el cual describe al plasma como un fluido perfectamente conductor, neutro y capaz de interactuar con los campos magnéticos, (Capítulo 1).

Uno de los problemas que enfrenta el desarrollo de reactores de fusión nuclear es que el confinamiento magnético del plasma presenta inestabilidades, las cuales lo destruyen. Suprimir las inestabilidades del confinamiento magnético del plasma es una de las ramas de investigación en plasmas de fusión nuclear. En primera aproximación el estudio de las inestabilidades puede realizarse mediante el modelo MAGNETOHIDRODINÁMICO (MHD); este estudio consiste en determinar qué tipo de equilibrios magnetohidrodinámicos son estables ante pequeñas perturbaciones. Matemáticamente el estudio de la estabilidad representa un problema no lineal lo cual dificulta su estudio. Una simplificación del problema puede hacerse al linealizar las ecuaciones magnetohidrodinámicas, (Capítulo 4). Este procedimiento conduce al estudio de la estabilidad lineal del confinamiento magnético de un plasma.

Un estado de equilibrio magnetohidrodinámico es aquél en el cual las variables del plasma no dependen del tiempo, (Capítulo 2). Para el caso específico de un plasma existen dos tipos de equilibrios: equilibrio estático (sin flujo de masa) y equilibrio estacionario (con flujo de masa). El equilibrio estático está estudiado en los libros de Magnetohidrodinámica; sin embargo, el caso del equilibrio estacionario no se estudia en los libros de Magnetohidrodinámica debido a que las ecuaciones que este equilibrio plantea son muy complicadas de resolver, pues en general son ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

De lo anterior resulta que el estudio de la estabilidad magnetohidrodinámica requiere un pleno conocimiento del equilibrio magnetohidrodinámico, pues el análisis de la estabilidad supone conocido el equilibrio (Capítulo 4). En este trabajo cuando se refiera a la estabilidad se está pensando en la estabilidad lineal.

La estabilidad del plasma depende fuertemente del tipo de geometría magnética utilizada en el confinamiento. Una de las primeras geometrías que se utilizó para el

confinamiento magnético fue la del Z-Pinch, configuración que utiliza una geometría cilíndrica, (Capítulo 2). El Z-Pinch es un aparato de confinamiento magnético que ha sido estudiado desde el comienzo de la investigación en fusión nuclear controlada, cuya geometría es atractiva por su simplicidad. Este aparato consiste en una columna de plasma cilíndrica por la cual se hace pasar una corriente axial intensa. El campo magnético azimutal producido por dicha corriente es el responsable de confinar al plasma. Sin embargo, esta configuración presenta inestabilidades en el confinamiento magnético, por lo cual se deben diseñar alternativas que resuelvan este problema. Existe evidencia experimental de que un equilibrio con flujo de plasma axial cortante (que varía a lo largo del radio), ayuda a suprimir las inestabilidades del confinamiento magnético del Z-Pinch, las cuales se presentan en ausencia de flujo, (Capítulo 4). Esto ha motivado a los investigadores del área a realizar estudios tanto teóricos como experimentales para poder entender el mecanismo o los mecanismos con los cuales pueden suprimirse las inestabilidades del Z-Pinch. Muchos de los estudios teóricos reportados en revistas de investigación estudian la estabilidad lineal del Z-Pinch. Los resultados de dichos estudios coinciden en lo cualitativo, pero no así en lo cuantitativo (Capítulo 4). Una de las posibles causas que da lugar a estas diferencias puede ser el equilibrio estacionario al cual se le estudia su estabilidad.

La motivación del presente trabajo es el estudio del estado de equilibrio estacionario MHD del Z-Pinch (Capítulo 2). La motivación de este estudio se debe a que el equilibrio estacionario del Z-Pinch no está suficientemente estudiado pues las ecuaciones de este equilibrio son muy parecidas a las del equilibrio estático, lo cual hace pensar que para el equilibrio estacionario pueden usarse los resultados del equilibrio estático y añadir como conocida la dependencia del flujo axial cortante (Capítulo 2). Sin embargo, el objetivo del presente trabajo es demostrar que el estado de equilibrio estacionario impone restricciones al flujo axial cortante (Capítulo 2).

La organización del presente trabajo es la siguiente:

En el capítulo 1 se deriva el modelo MAGNETOHIDRODINÁMICO, el cual de ahora en adelante se abreviará con las siglas MHD; en este capítulo se discuten las aproximaciones en las cuales este modelo es válido. En el capítulo 2 se hace el estudio del problema de equilibrio estacionario MHD para una configuración de Z-Pinch. En este capítulo se mostrará que el flujo de equilibrio depende de la densidad de corriente y de la densidad de carga, es decir, hay restricciones para el flujo de equilibrio estacionario; además, se mostrarán dos casos particulares de equilibrio estacionario. En el capítulo 3 se hace el estudio cualitativo de dos familias de equilibrios estacionarios autoconsistentes las cuales se obtuvieron en el capítulo 2. En el capítulo 4 se planteará el problema de la estabilidad lineal del equilibrio estacionario del Z-Pinch; se mostrarán las técnicas con las cuales se aborda el problema y se mencionarán las evidencias experimentales de estabilización del Z-Pinch. Ese último capítulo pretende ilustrar el siguiente paso que hay que dar en estudio del confinamiento magnético de un plasma.

Capítulo 1

Ecuaciones MHD.

1.1. Introducción.

El modelo MHD ideal proporciona una descripción del comportamiento macroscópico del plasma. Uno de los fenómenos que el modelo MHD describe de manera sencilla pero con precisión, es el efecto que la geometría magnética tiene en el equilibrio y la estabilidad macroscópica del confinamiento magnético de los plasmas. Este modelo responde al siguiente tipo de preguntas: ¿Cómo una geometría magnética proporciona las fuerzas necesarias para confinar a un plasma en equilibrio?, ¿por qué ciertas geometrías magnéticas son mucho más estables que otras ante perturbaciones? y ¿por qué la tecnología de fusión usa, por ejemplo, configuraciones de bobinas en forma de toroide o de la costura de una pelota de baseball?. El estudio de los mismos fenómenos a través del modelo cinético es más complejo, y tiene sentido cuando se desea conocer el efecto de funciones de distribución que se alejan del equilibrio termodinámico.

Para apreciar de mejor manera el contenido físico del modelo MHD, éste se derivará a partir del modelo cinético 1.2, acoplado con las ecuaciones de Maxwell microscópicas. En la sección 1.2 se derivarán las ecuaciones de fluido para cada una de las especies, a partir de las ecuaciones del modelo cinético. Posteriormente en la sección 1.3 se simplificará el modelo de varios fluidos obtenido en la sección 1.2, construyendo las ecuaciones para un sólo fluido de conductividad perfecta y sin viscosidad. Estas últimas, junto con las ecuaciones de Maxwell macroscópicas, constituyen el modelo MHD, que involucra una serie de aproximaciones en las que se eliminan los fenómenos de frecuencia alta.

1.2. Derivación del Modelo de Varios Fluidos.

1.2.1. Función de Distribución y Ecuación de Boltzmann.

Estudiar el movimiento de muchas partículas cargadas que interaccionan entre sí y con un campo electromagnético externo, es posible pero muy complicado, pues el campo

electromagnético debe estar determinado simultánea y consistentemente con las ecuaciones de movimiento de las partículas. Además, es necesario conocer las condiciones iniciales de cada una de las partículas. En el caso de un plasma, el interés no es conocer el comportamiento de cada una de las partículas que lo constituyen, sino investigar las propiedades macroscópicas de este sistema de partículas cargadas. Aunque en principio es posible calcular las contribuciones de cada partícula cargada a la densidad de carga y la densidad de corriente y así determinar el campo electromagnético, para describir la naturaleza colectiva del plasma deben utilizarse otros métodos. Una manera conveniente de tratar al plasma como una colección de muchas partículas cargadas que interactúan con el campo electromagnético, es a través de la Teoría Cinética [1].

La Teoría Cinética es una teoría microscópica que relaciona estadísticamente las propiedades dinámicas de los sistemas de muchas partículas, con las descripciones macroscópicas de fenómenos físicos que involucran transporte en medios continuos. Un ejemplo de teoría macroscópica es la Hidrodinámica [1]. Las Teorías Macroscópicas consisten en sistemas cerrados de ecuaciones diferenciales parciales para los campos vectoriales y escalares que están relacionados con las cantidades macroscópicas del sistema, las cuales dependen de la posición y del tiempo.

Los objetivos de la Teoría Cinética pueden resumirse de la siguiente forma:

- 1) Descripción de fenómenos para los cuales las Teorías Macroscópicas no son apropiadas.
- 2) Derivación y perfeccionamiento de las ecuaciones macroscópicas.
- 3) Cálculo de los coeficientes de Transporte.

La Teoría Cinética necesita una ecuación fundamental para la función de distribución de las partículas $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, la cual es dependiente de la posición, de la velocidad, del tiempo y posiblemente de las coordenadas y velocidades generalizadas que describen a los grados de libertad internos de las partículas [1]. La descripción que la Teoría Cinética hace de un plasma, representa a cada partícula por un punto en un espacio de seis dimensiones con coordenadas (x, y, z, v_x, v_y, v_z) . En este espacio, las tres coordenadas de la posición y las tres de la velocidad son independientes. Si un gran número de partículas está presente en el plasma, basta conocer la densidad de estos puntos $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ para describir al sistema en este espacio. Esta densidad depende del tiempo debido a que los puntos se mueven y la densidad no es necesariamente estacionaria. El número de partículas con coordenadas entre \mathbf{r} y $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, \mathbf{v} y $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, está dado por la cantidad $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{r}d\mathbf{v}$.

En el caso de un plasma en el cual coexisten n especies diferentes de partículas se asocia una función de distribución $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}^\alpha, t)$ a cada una de éstas; donde $\alpha = 1, 2, 3, \dots, n$ es el índice que numera las especies que constituyen el plasma. La evolución de estas funciones de distribución es descrita por la ecuación de Boltzmann:

$$\frac{df_\alpha}{dt} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_j^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} + \frac{\tilde{f}_j^\alpha}{m^\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_j^\alpha} = C_\alpha. \quad (1.1)$$

El lado izquierdo representa la derivada total con respecto al tiempo de la función

de distribución f_α [2]. La aceleración ha sido expresada en términos de las fuerzas que actúan sobre las partículas y la masa de la especie correspondiente. En la ecuación (1.1), el término de colisiones C_α representa las colisiones que partículas de la especie α puedan tener con partículas de su misma especie o de otras especies, determinando la evolución de la función de distribución.

En la descripción de Boltzmann hay dos tipos de interacciones actuando sobre las partículas [2, 3]. La primera se refiere a las interacciones colectivas descritas por el término \tilde{f}_j^α en la ecuación (1.1). En el caso de un plasma el término \tilde{f}_j^α está dado por la fuerza de Lorentz y la fuerza gravitacional. La fuerza \tilde{f}_j^α es una fuerza microscópica que actúa sobre las partículas por lo tanto los campos eléctrico y magnético que en ella aparecen son los campos microscópicos. El segundo tipo de interacciones son las interacciones entre partículas que no son de naturaleza colectiva; estas interacciones están descritas por el término de colisiones C_α .

Para partículas con masa m^α y carga eléctrica q^α que se encuentren bajo la influencia de campos eléctricos, magnéticos y gravitacionales, la fuerza \tilde{f}_j^α se expresa de la siguiente forma:

$$\tilde{f}^\alpha = q^\alpha [\mathbf{e} + (\mathbf{v}^\alpha \times \mathbf{b})] - m^\alpha \nabla \phi_g, \quad (1.2)$$

donde \mathbf{e} es el campo eléctrico, \mathbf{b} es el campo magnético y ϕ_g es el potencial gravitacional. Debe notarse que el campo eléctrico \mathbf{e} y magnético \mathbf{b} son los campos microscópicos de tal manera que cumplen las ecuaciones de Maxwell microscópicas. Estos campos microscópicos pueden expresarse de la siguiente forma:

$$\mathbf{e} = \mathbf{E} + \mathbf{e}_r, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{B} + \mathbf{b}_r, \quad (1.4)$$

donde los campos $\mathbf{E} = \langle \mathbf{e} \rangle$ y $\mathbf{B} = \langle \mathbf{b} \rangle$ representan los valores promedio de \mathbf{e} y \mathbf{b} respectivamente; los campos \mathbf{e}_r y \mathbf{b}_r representan las fluctuaciones de los campos \mathbf{e} y \mathbf{b} de tal manera que el valor promedio de estas cantidades es cero, es decir, $\langle \mathbf{e}_r \rangle = 0$ y $\langle \mathbf{b}_r \rangle = 0$. Más adelante se explicará como se calcula el promedio de una cantidad microscópica.

Un caso particular de la ecuación de Boltzmann (1.1) es la ecuación de Vlassov la cual desprecia los efectos gravitacionales y de colisiones, es decir, $C_\alpha = 0$.

El término de colisiones C_α puede expresarse de la siguiente forma:

$$C_\alpha = \sum_{\beta=1}^n C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta), \quad (1.5)$$

donde $C_{\alpha\beta}$ representa el cambio por unidad de tiempo en la función de distribución de las partículas α , debido a colisiones con partículas de la especie β . Para los propósitos

de este trabajo, los detalles del operador de colisiones no son importantes, lo único que resulta importante para la derivación del modelo de un fluido, son algunas relaciones de conservación global [2, 3]. Para los plasmas de fusión, las colisiones dominantes entre partículas iguales y distintas son las colisiones de Coulomb. Las leyes de conservación para las colisiones elásticas, se resumen de la siguiente forma:

1. Conservación de partículas, implica que las colisiones entre partículas semejantes y distintas deben satisfacer:

$$\int C_{\alpha\alpha} d\mathbf{v}^\alpha = \int C_{\beta\beta} d\mathbf{v}^\beta = \int C_{\alpha\beta} d\mathbf{v}^\alpha = \int C_{\beta\alpha} d\mathbf{v}^\beta = 0. \quad (1.6)$$

2. Conservación del momento y energía entre partículas semejantes, implica que las colisiones entre éstas deben satisfacer:

$$\int m^\alpha v_k^\alpha C_{\alpha\alpha} d\mathbf{v}^\alpha = 0 = \int m^\beta v_k^\beta C_{\beta\beta} d\mathbf{v}^\beta, \quad (1.7)$$

$$\int \frac{1}{2} m^\alpha v_j^\alpha v_j^\alpha C_{\alpha\alpha} d\mathbf{v}^\alpha = 0 = \int \frac{1}{2} m^\beta v_j^\beta v_j^\beta C_{\beta\beta} d\mathbf{v}^\beta. \quad (1.8)$$

3. Conservación del momento y energía entre partículas distintas implica que las colisiones entre éstas deben satisfacer:

$$\int m^\alpha v_k^\alpha C_{\alpha\beta} d\mathbf{v}^\alpha = - \int m^\beta v_k^\beta C_{\beta\alpha} d\mathbf{v}^\beta, \quad (1.9)$$

$$\frac{1}{2} \int m^\alpha v_j^\alpha v_j^\alpha C_{\alpha\beta} d\mathbf{v}^\alpha = - \frac{1}{2} \int m^\beta v_j^\beta v_j^\beta C_{\beta\alpha} d\mathbf{v}^\beta. \quad (1.10)$$

El conjunto completo de ecuaciones Boltzmann-Maxwell es el siguiente:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_j^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} + \frac{\tilde{f}_j^\alpha}{m^\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_j^\alpha} = C_\alpha \quad \text{con } \alpha = 1, 2, \dots, n, \quad (1.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \quad (1.12)$$

$$\nabla \times \mathbf{b} = \mu_o \mathbf{j} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}, \quad (1.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{e} = \frac{\tilde{\rho}_c}{\varepsilon_o}, \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (1.15)$$

donde ε_o y μ_o son la permitividad y la permeabilidad del vacío respectivamente. La fuerza, la densidad de corriente y la densidad de carga están dadas por las siguientes relaciones:

$$\tilde{\mathbf{f}}^\alpha = q^\alpha [\mathbf{e} + (\mathbf{v}^\alpha \times \mathbf{b})] - m^\alpha \nabla \phi_g, \quad (1.16)$$

$$\tilde{\rho}_c = \sum_{\alpha=1}^n \left[\sum_{a=1}^{n_\alpha} q_a^\alpha \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a^\alpha) \right], \quad (1.17)$$

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha=1}^n \left[\sum_{a=1}^{n_\alpha} q_a^\alpha \mathbf{v}_a^\alpha \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a^\alpha) \right]. \quad (1.18)$$

Este sistema de ecuaciones proporciona una descripción completa y detallada del comportamiento del plasma. En las ecuaciones (1.17) y (1.18) $\tilde{\rho}_c$ y \mathbf{j} denotan la densidad de carga y de corriente microscópicas. La manera de calcular estas densidades es pensar que existen n_α partículas con carga eléctrica q^α y que existen n especies diferentes de partículas, por lo tanto, para calcular las densidades $\tilde{\rho}_c$ y \mathbf{j} hay que sumar sobre los índices $a = 1, 2, \dots, n_\alpha$ y $\alpha = 1, 2, \dots, n$.

El punto de partida para la derivación del modelo MHD es este conjunto completo de ecuaciones constituido por las n ecuaciones de Boltzmann para cada una de las especies de partículas que constituyen al plasma y las ecuaciones de Maxwell microscópicas (1.11)-(1.18).

1.2.2. Momentos de la Ecuación Boltzmann.

El primer paso para obtener las ecuaciones del modelo MHD es calcular los momentos adecuados de la ecuación de Boltzmann (1.11), los cuales proporcionarán las ecuaciones de continuidad, momento y energía, para cada especie de partículas. Con estas ecuaciones será posible encontrar las ecuaciones que relacionan las cantidades de densidad de masa, velocidad y presión del plasma.

Para calcular los momentos de la ecuación de Boltzmann (1.11), se multiplica a ésta por una función arbitraria $g^\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}^\alpha, t)$ y se integra sobre el espacio de velocidades [2], [3]. Los casos de interés que ayudarán a obtener las ecuaciones MHD son $g^\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}^\alpha, t) = 1$, $g^\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}^\alpha, t) = m^\alpha v_k^\alpha$ y $g^\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}^\alpha, t) = \frac{1}{2} m^\alpha (v^\alpha)^2$. Para estos casos las ecuaciones que se obtendrán serán expresadas en términos de los valores promedio de las variables relevantes. Dichos valores promedio dependerán de la posición y del tiempo.

El promedio de una función $g^\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}^\alpha, t)$ pesada por la función de distribución, se denota por $\langle g^\alpha \rangle$ y se calcula de la siguiente forma:

$$\langle g^\alpha(\mathbf{r}, t) \rangle = \frac{\int g^\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}^\alpha, t) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}^\alpha, t) d\mathbf{v}^\alpha}{\int f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}^\alpha, t) d\mathbf{v}^\alpha}. \quad (1.19)$$

La densidad de partículas se expresa como:

$$n^\alpha(\mathbf{r}, t) = \int f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}^\alpha, t) d\mathbf{v}^\alpha, \quad (1.20)$$

por lo que al utilizar (1.20) en la ecuación (1.19), se obtiene:

$$n^\alpha(\mathbf{r}, t) \langle g^\alpha(\mathbf{r}, t) \rangle = \int g^\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}^\alpha, t) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}^\alpha, t) d\mathbf{v}^\alpha. \quad (1.21)$$

Integrando por partes cada uno de los términos de la ecuación de Boltzmann, se obtienen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \int g^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d\mathbf{v}^\alpha &= \frac{\partial}{\partial t} (n^\alpha \langle g^\alpha \rangle) - n^\alpha \left\langle \frac{\partial g^\alpha}{\partial t} \right\rangle, \\ \int g^\alpha v_j^\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} d\mathbf{v}^\alpha &= \frac{\partial}{\partial x_j} (n^\alpha \langle v_j^\alpha g^\alpha \rangle) - n^\alpha \left\langle v_j^\alpha \frac{\partial g^\alpha}{\partial x_j} \right\rangle, \\ \int g^\alpha \frac{\tilde{f}_j^\alpha}{m^\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_j^\alpha} d\mathbf{v}^\alpha &= -\frac{n^\alpha}{m^\alpha} \left\langle \tilde{f}_j^\alpha \frac{\partial g^\alpha}{\partial v_j^\alpha} \right\rangle. \end{aligned}$$

Para el último término se utilizó el teorema de la divergencia de Gauss y la propiedad de que la función de distribución se hace cero para valores de la velocidad muy grandes. Además, se usó que para la componente k de la fuerza \tilde{f}_k^α :

$$\tilde{f}_k^\alpha = q^\alpha (e_k + \epsilon_{klm} v_l b_m) - m^\alpha \frac{\partial \phi_g}{\partial x_k},$$

se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{\partial \tilde{f}_j^\alpha}{\partial v_j} = q^\alpha \epsilon_{jlm} \frac{\partial v_l}{\partial v_j} B_m = q^\alpha \epsilon_{jlm} \delta_{lj} B_m = 0.$$

De esta manera se obtiene que los momentos de la ecuación de Boltzmann (1.11) están dados por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial (n^\alpha \langle g^\alpha \rangle)}{\partial t} - n^\alpha \left\langle \frac{\partial g^\alpha}{\partial t} \right\rangle + \frac{\partial (n^\alpha \langle v_j^\alpha g^\alpha \rangle)}{\partial x_j} - n^\alpha \left\langle v_j^\alpha \frac{\partial g^\alpha}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{n^\alpha}{m^\alpha} \left\langle \tilde{f}_j^\alpha \frac{\partial g^\alpha}{\partial v_j^\alpha} \right\rangle = \int g^\alpha C_\alpha d\mathbf{v}. \quad (1.22)$$

Ecuación de continuidad ($g^\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}^\alpha, t) = 1$).

Al considerar el primer caso, es decir, $g^\alpha = 1$ la ecuación (1.22) se reduce a la ecuación de continuidad para la densidad de partículas n^α :

$$\frac{\partial n^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial (n^\alpha \langle v_j^\alpha \rangle)}{\partial x_j} = 0. \quad (1.23)$$

En la ecuación (1.23), el término correspondiente a las colisiones σ_α :

$$\sigma_\alpha = \int C_\alpha d\mathbf{v}^\alpha,$$

ha sido despreciado al utilizar las leyes de conservación (1.6), lo cual quiere decir que los efectos de ionización y recombinación son despreciados.

Ecuaciones de momento ($g^\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}^\alpha, t) = m^\alpha v_k^\alpha$).

Ahora se considerará el caso $g^\alpha = m^\alpha v_k^\alpha$, el cual al ser sustituido en la ecuación (1.22), conducirá a las ecuaciones de momento para las componentes $k = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n^\alpha m^\alpha \langle v_k^\alpha \rangle) + \frac{\partial}{\partial x_j} (n^\alpha m^\alpha \langle v_k^\alpha v_j^\alpha \rangle) - n^\alpha \langle \tilde{f}_k^\alpha \rangle = \int m^\alpha v_k^\alpha C_\alpha d\mathbf{v}. \quad (1.24)$$

La velocidad \mathbf{v}^α se puede escribir como $\mathbf{v}^\alpha = \langle \mathbf{v}^\alpha(\mathbf{r}, t) \rangle + \mathbf{v}_r^\alpha$. El segundo término define la velocidad estocástica \mathbf{v}_r^α , cuyo promedio evidentemente es $\langle \mathbf{v}_r^\alpha \rangle = 0$. Al sustituir la expresión $\mathbf{v}^\alpha = \langle \mathbf{v}^\alpha(\mathbf{r}, t) \rangle + \mathbf{v}_r^\alpha$ en la ecuación (1.24) y utilizar la ecuación de continuidad (1.23), se obtiene la expresión:

$$m^\alpha n^\alpha \left[\frac{\partial \langle v_k^\alpha \rangle}{\partial t} + \langle v_j^\alpha \rangle \frac{\partial \langle v_k^\alpha \rangle}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} (m^\alpha n^\alpha \langle v_{rk}^\alpha v_{rj}^\alpha \rangle) - n^\alpha \langle \tilde{f}_k^\alpha \rangle = \int m^\alpha v_{rk}^\alpha C_\alpha d\mathbf{v}^\alpha. \quad (1.25)$$

Definiendo el término de colisiones R_k^α , el cual representa el cambio de momento debido a colisiones entre partículas de diferentes especies, y el tensor de esfuerzos \mathbf{P}_{kj}^α de la siguiente forma:

$$R_k^\alpha = \int m^\alpha v_{rk}^\alpha C_\alpha d\mathbf{v} \quad , \quad \mathbf{P}_{kj}^\alpha = m^\alpha n^\alpha \langle v_{rk}^\alpha v_{rj}^\alpha \rangle, \quad (1.26)$$

la ecuación de conservación de momento se puede escribir de la siguiente manera:

$$m^\alpha n^\alpha \left[\frac{\partial \langle v_k^\alpha \rangle}{\partial t} + \langle v_j^\alpha \rangle \frac{\partial \langle v_k^\alpha \rangle}{\partial x_j} \right] = - \frac{\partial \mathbf{P}_{kj}^\alpha}{\partial x_j} + n^\alpha \langle \tilde{f}_k^\alpha \rangle + R_k^\alpha. \quad (1.27)$$

El tensor de esfuerzos se puede separar en su parte diagonal que constituye el tensor de presión, y otra no diagonal que constituye el tensor de viscosidad. Cuando la función de distribución es isótropa el tensor de presión se reduce a la identidad multiplicada por una presión escalar, de modo que

$$\mathbf{P}_{kj}^\alpha = p^\alpha \delta_{kj} + \Pi_{kj}^\alpha, \quad (1.28)$$

donde la presión $p^\alpha = \frac{1}{3} m^\alpha n^\alpha \langle (v_r^\alpha)^2 \rangle$. En el caso especial de un gas ideal la ecuación de estado está dada por $p^\alpha = n^\alpha T^\alpha$ donde T^α es la temperatura de cada especie en

unidades de energía. En el presente trabajo se utilizará esta ecuación de estado para el plasma.

Finalmente se obtiene que las ecuaciones de conservación de momento se escriben de la siguiente forma:

$$m^\alpha n^\alpha \left[\frac{\partial \langle v_k^\alpha \rangle}{\partial t} + \langle v_j^\alpha \rangle \frac{\partial \langle v_k^\alpha \rangle}{\partial x_j} \right] = -\frac{\partial p^\alpha}{\partial x_k} - \frac{\partial \Pi_{kj}^\alpha}{\partial x_j} + n^\alpha F_k^\alpha + R_k^\alpha, \quad (1.29)$$

donde $\mathbf{F} = \langle \tilde{f}_k^\alpha \rangle = q^\alpha [\mathbf{E} + \langle \mathbf{v}^\alpha \rangle \times \mathbf{B}] - m^\alpha \nabla \phi_g$ es el promedio de la fuerza microscópica, por lo tanto se expresa en términos de los valores promedio de los campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} .

Ecuación de energía ($g^\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}^\alpha, t) = \frac{1}{2} m^\alpha (v^\alpha)^2$).

El último caso a considerar es $g^\alpha = m^\alpha v_k^\alpha v_k^\alpha / 2 = m^\alpha (v^\alpha)^2 / 2$. Al sustituir g^α en la ecuación (1.22) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} n^\alpha m^\alpha \langle v_k^\alpha v_k^\alpha \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} n^\alpha m^\alpha \langle v_k^\alpha v_k^\alpha v_j^\alpha \rangle \right) - n^\alpha \left\langle \frac{\tilde{f}_j^\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial v_j} (v_k^\alpha v_k^\alpha) \right\rangle \right] = \int \frac{1}{2} m^\alpha v_k^\alpha v_k^\alpha C_\alpha d\mathbf{v}^\alpha. \quad (1.30)$$

Para simplificar esta expresión se utilizan las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} n^\alpha m^\alpha \langle v_k^\alpha v_k^\alpha \rangle \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} n^\alpha m^\alpha \langle v^\alpha \rangle^2 + \frac{3}{2} p^\alpha \right), \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} n^\alpha m^\alpha \langle v_k^\alpha v_k^\alpha v_j^\alpha \rangle \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{m^\alpha n^\alpha}{2} \langle v^\alpha \rangle^2 + \frac{5}{2} p^\alpha \right) \langle v_j^\alpha \rangle + \langle v_k^\alpha \rangle \Pi_{kj}^\alpha + h_j^\alpha \right], \\ n^\alpha \left\langle \frac{\tilde{f}_j^\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial v_j} (v_k^\alpha v_k^\alpha) \right\rangle &= n^\alpha q^\alpha E_j' \langle v_j \rangle \quad \text{con} \quad E_j' = E_j - \frac{m^\alpha}{q^\alpha} \frac{\partial \phi_g}{\partial x_j}, \\ \int \frac{1}{2} m^\alpha v_k^\alpha v_k^\alpha C_\alpha d\mathbf{v} &= \langle v_k^\alpha \rangle R_k^\alpha + Q^\alpha. \end{aligned}$$

donde se definió a Q^α como el calor generado por las colisiones y a h^α como la densidad de flujo de energía debido a los movimientos estocásticos:

$$Q^\alpha = \int \frac{1}{2} m^\alpha (v_r^\alpha)^2 C_\alpha d\mathbf{v}^\alpha, \quad h_j^\alpha = \frac{1}{2} m^\alpha n^\alpha \langle (v_r^\alpha)^2 v_{rj}^\alpha \rangle = \int \frac{1}{2} m^\alpha (v_r^\alpha)^2 v_{rj}^\alpha f_\alpha d\mathbf{v}^\alpha. \quad (1.31)$$

Así, la ecuación de energía se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} n^\alpha m^\alpha \langle v^\alpha \rangle^2 + \frac{3}{2} p^\alpha \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{m^\alpha n^\alpha}{2} \langle v^\alpha \rangle^2 + \frac{5}{2} p^\alpha \right) \langle v_j^\alpha \rangle + \langle v_k^\alpha \rangle \Pi_{kj}^\alpha + h_j^\alpha \right] = \\ = [n^\alpha q^\alpha E_j' \langle v_j^\alpha \rangle + \langle v_k^\alpha \rangle R_k^\alpha + Q^\alpha] \end{aligned} \quad (1.32)$$

De la ecuación (1.32) se pueden eliminar los términos cinéticos correspondientes a $n^\alpha m^\alpha \langle v^\alpha \rangle^2 / 2$, para lo cual se utilizan las ecuaciones (1.23) y (1.29), obteniendo así:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{n^\alpha m^\alpha \langle v^\alpha \rangle^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{m^\alpha n^\alpha}{2} \langle v^\alpha \rangle^2 \langle v_j^\alpha \rangle \right) = \left(-\frac{\partial p^\alpha}{\partial x_k} - \frac{\partial \Pi_{kj}^\alpha}{\partial x_j} + n^\alpha F_k^\alpha + R_k^\alpha \right) \langle v_k^\alpha \rangle. \quad (1.33)$$

Al utilizar la igualdad (1.33) en la ecuación (1.32) se obtiene la ecuación de energía:

$$\frac{3}{2} \left[\frac{\partial p^\alpha}{\partial t} + \langle v_j^\alpha \rangle \frac{\partial p^\alpha}{\partial x_j} \right] + \frac{5}{2} p^\alpha \frac{\partial \langle v_j^\alpha \rangle}{\partial x_j} = -\frac{\partial h_j^\alpha}{\partial x_j} - \Pi_{kj}^\alpha \frac{\partial \langle v_k^\alpha \rangle}{\partial x_j} + Q^\alpha. \quad (1.34)$$

Si se considera que el plasma está constituido por una clase de iones con carga positiva Ze (donde se está utilizando la convención de estado sólido $e > 0$) y de electrones, se puede plantear el modelo de dos fluidos con base en las ecuaciones (1.23), (1.29), (1.34). Este modelo describe al plasma como dos fluidos que coexisten e interaccionan.

$$\frac{\partial n^e}{\partial t} + \nabla \cdot (n^e \langle \mathbf{v}^e \rangle) = 0, \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial n^i}{\partial t} + \nabla \cdot (n^i \langle \mathbf{v}^i \rangle) = 0, \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} m^e n^e \left[\frac{\partial \langle \mathbf{v}^e \rangle}{\partial t} + (\langle \mathbf{v}^e \rangle \cdot \nabla) \langle \mathbf{v}^e \rangle \right] = -\nabla p^e - n^e e [\mathbf{E} + (\langle \mathbf{v}^e \rangle \times \mathbf{B})] - \nabla \cdot \Pi^e \\ - n^e m^e \nabla \phi_g + \mathbf{R}^e, \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} m^i n^i \left[\frac{\partial \langle \mathbf{v}^i \rangle}{\partial t} + (\langle \mathbf{v}^i \rangle \cdot \nabla) \langle \mathbf{v}^i \rangle \right] = -\nabla p^i + Z n^i e [\mathbf{E} + (\langle \mathbf{v}^i \rangle \times \mathbf{B})] - \nabla \cdot \Pi^i \\ - n^i m^i \nabla \phi_g + \mathbf{R}^i, \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\frac{3}{2} \left[\frac{\partial p^e}{\partial t} + \langle \mathbf{v}^e \rangle \cdot \nabla p^e \right] + \frac{5}{2} p^e \nabla \cdot \langle \mathbf{v}^e \rangle = -\nabla \cdot \mathbf{h}^e - \Pi^e \cdot \nabla \cdot \langle \mathbf{v}^e \rangle + Q^e, \quad (1.39)$$

$$\frac{3}{2} \left[\frac{\partial p^i}{\partial t} + \langle \mathbf{v}^i \rangle \cdot \nabla p^i \right] + \frac{5}{2} p^i \nabla \cdot \langle \mathbf{v}^i \rangle = -\nabla \cdot \mathbf{h}^i - \Pi^i \cdot \nabla \cdot \langle \mathbf{v}^i \rangle + Q^i, \quad (1.40)$$

Estas ecuaciones involucran cantidades promediadas, por lo que este sistema de ecuaciones describe al plasma macroscópicamente. En las ecuaciones (1.35)-(1.40) aparecen

los campos eléctrico y magnético promediados; por esta razón estas ecuaciones deben acoplarse con las ecuaciones de Maxwell macroscópicas:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.41)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{J} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.42)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_o}, \quad (1.43)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.44)$$

En estas ecuaciones se han despreciado los efectos de polarización y de magnetización pues se piensa que el plasma está totalmente ionizado, de tal manera que la densidad de carga de polarización y la densidad de corriente de magnetización son despreciables con respecto a las densidades libres. Por esta razón en las ecuaciones de Maxwell macroscópicas (1.42) y (1.43) se expresan en términos de \mathbf{E} , \mathbf{B} y no de $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ pues $\epsilon \simeq \epsilon_o$ y $\mu \simeq \mu_o$. Finalmente, la fuerza, la densidad de corriente y la de carga macroscópicas se expresan en términos de las cantidades promedio:

$$\mathbf{F}^\alpha = q^\alpha [\mathbf{E} + (\langle \mathbf{v}^\alpha \rangle \times \mathbf{B})] - m^\alpha \nabla \phi_g, \quad (1.45)$$

$$\mathbf{J} = e (Z n^i \langle \mathbf{v}^i \rangle - n^e \langle \mathbf{v}^e \rangle), \quad (1.46)$$

$$\rho_c = e (Z n^i - n^e), \quad (1.47)$$

El modelo de dos fluidos (1.35)-(1.47) es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales acopladas con el cual es posible describir el comportamiento de un plasma desde el punto de vista macroscópico y es adecuado para estudiar la propagación de ondas de alta frecuencia. Para el modelo MHD se desea eliminar los efectos de alta frecuencia y mantener los de baja frecuencia lo cual se hará en la sección 1.3.

1.3. Descripción del Plasma como un Fluido.

Con ayuda de las ecuaciones del modelo de los dos fluidos (1.35)-(1.47) y realizando las aproximaciones necesarias, se obtendrán las ecuaciones del modelo MHD para un solo fluido.

Las primeras ecuaciones que se obtienen a partir de las ecuaciones de los dos fluidos, son las de conservación de masa y de carga, para las cuales no se requiere ninguna aproximación. La ecuación de conservación de carga se obtiene directamente a partir de las ecuaciones de continuidad (1.35) y (1.36), y las definiciones para las densidades de corriente y de carga (1.46) y (1.47). Para ello basta multiplicar la ecuación de continuidad para cada especie por la carga correspondiente y sumarlas, obteniendo así:

$$\frac{\partial \rho_c}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (1.48)$$

Para obtener la ecuación de conservación de masa se definen la densidad de masa como:

$$\rho = m^i n^i + m^e n^e, \quad (1.49)$$

y la velocidad del centro de masa como:

$$\mathbf{v} = \frac{m^i n^i \mathbf{v}^i + m^e n^e \mathbf{v}^e}{m^i n^i + m^e n^e}. \quad (1.50)$$

donde el promedio de $\langle \mathbf{v}^\alpha \rangle$ se ha escrito como \mathbf{v}^α , convención que se seguirá en adelante. Análogamente, como se obtuvo la ecuación de conservación de carga, se multiplican las ecuaciones de continuidad de cada especie por la masa correspondiente y se suman, obteniendo así

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.51)$$

Para obtener las ecuaciones de momento, energía, ley de Ohm del modelo MHD y las ecuaciones de Maxwell con las que se trabajará, es necesario hacer las siguientes aproximaciones:

1) Cuasineutralidad. Esta aproximación se sustenta en la propiedad de que los plasmas tienden a mantener la neutralidad eléctrica. La suposición de cuasineutralidad es válida si la longitud de Debye $\lambda_D = (T^e/n^e e^2)$ es pequeña comparada con cualquier dimensión característica del plasma [4]. Al utilizar la propiedad de cuasineutralidad se puede escribir $Zn^i \simeq n^e = n$, es decir, $Zn^i = \lambda' n$ donde $\lambda' \simeq 1$. Sin embargo, en presencia de un campo eléctrico existirán desviaciones de la neutralidad eléctrica las cuales deberán considerarse en la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_c/\epsilon_0$; no obstante, estas desviaciones pueden ignorarse en las ecuaciones dinámicas pues proporcionan correcciones de orden $(v/c)^2$ [5, 6]. Como primera consecuencia de la aproximación de cuasineutralidad, la ecuación de conservación de carga (1.48) se simplifica a que la densidad de corriente sea de la forma $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$.

2) Tensor de esfuerzos Isótropo. Esta suposición es válida cuando hay muchas colisiones durante el tiempo característico $t_c = L/V_A$ donde L es la longitud característica del plasma y $V_A = B/\sqrt{\mu_0 \rho}$ es la velocidad de Alfvén [4].

3) Viscosidad despreciable. Esta aproximación elimina los efectos de viscosidad en las ecuaciones de momento de cada especie. Esta aproximación es válida en las siguientes circunstancias:

a) Cuando el camino libre de las partículas es pequeño comparado con la distancia a la cual las cantidades macroscópicas varían significativamente.

b) Si el camino libre de las partículas es grande, pero el plasma está en un campo magnético suficientemente intenso para que el radio de giro de cada partícula sea

pequeño comparado con la distancia a la cual las cantidades macroscópicas varían apreciablemente [5]. En resumen, bajo estas consideraciones se puede aproximar la divergencia del tensor de esfuerzos como el gradiente de presión $\nabla \cdot \mathbf{P}^\alpha = \nabla p^\alpha$.

4) Se despreciarán los términos que sean proporcionales al factor (m^e/m^i) [4].

5) El vector de desplazamiento eléctrico es despreciable en la ecuación de Maxwell (1.42) lo cual es válido si la velocidad de Alfvén es despreciable con respecto a la velocidad de la luz $(V_A/c) \ll 1$ [4].

6) Como primera aproximación se supondrá que la ecuación de estado del plasma es la de un gas ideal.

7) El flujo de calor será despreciable lo cual implica que se cumpla una ley adiabática, es decir, los efectos disipativos pueden ser ignorados en las escalas de tiempo de interés $t_c = L/V_A$ y cuando el radio de giro de las partículas sea mucho menor que la dimensión característica del plasma L .

8) Los efectos gravitacionales serán despreciados pues se está pensando que el plasma es un plasma terrestre en el cual los efectos gravitacionales son despreciables con respecto a los efectos magnéticos del plasma. Estos efectos gravitacionales son de relevancia para plasmas estelares.

9) Variación temporal lenta. Esta aproximación quiere decir que las propiedades del plasma tienen variaciones temporales pequeñas, es decir, que la frecuencia característica $\Omega_{MHD} = (t_c)^{-1} = (V_A/L)$ es pequeña comparada con la frecuencia de ciclotrón $\omega_{ce} = (eB/m^e)$ y la frecuencia de plasma $\omega_{pe}^2 = (e^2 n/m^e \epsilon_0)$; además, el tiempo característico t_c es grande comparado con el tiempo de colisión entre las partículas; Estas suposiciones eliminan efectos de alta frecuencia para los cuales el modelo MHD no es válido pues se presenta un alejamiento de la neutralidad[7].

Una vez que se han especificado las aproximaciones bajo las que las ecuaciones MHD son válidas, la segunda ecuación que se obtiene es la de momento; ésta se obtiene al sumar las ecuaciones de momento de los electrones (1.37) con la de momento de los iones (1.38) obteniendo así:

$$m^e n^e \frac{d\mathbf{v}^e}{dt} + m^i n^i \frac{d\mathbf{v}^i}{dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \mathbf{\Pi} + \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \rho \nabla \phi_g, \quad (1.52)$$

donde se han utilizado las condiciones de conservación del momento en colisiones dentro de una misma especie y entre distintas especies (1.7), (1.9) por lo que $\mathbf{R}^e + \mathbf{R}^i = 0$; también se usaron las definiciones de densidad de carga (1.47), densidad de corriente (1.46) y de densidad de masa (1.49). Además, se definieron la presión total, el tensor de viscosidad total y se absorbió la derivada convectiva de cada especie en la derivada total con respecto al tiempo:

$$p = p^e + p^i, \quad (1.53)$$

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^e + \mathbf{\Pi}^i, \quad (1.54)$$

$$\frac{d\mathbf{v}^e}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}^e}{\partial t} + (\mathbf{v}^e \cdot \nabla) \mathbf{v}^e, \quad (1.55)$$

$$\frac{d\mathbf{v}^i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}^i}{\partial t} + (\mathbf{v}^i \cdot \nabla) \mathbf{v}^i. \quad (1.56)$$

Al utilizar la suposición de cuasineutralidad en el lado derecho de la ecuación la ecuación (1.52) se obtiene lo siguiente:

$$m^e n^e \frac{d\mathbf{v}^e}{dt} + m^i n^i \frac{d\mathbf{v}^i}{dt} \simeq n \frac{d}{dt} \left(m^e \mathbf{v}^e + \frac{\lambda'}{Z} m^i \mathbf{v}^i \right) = \frac{\lambda'}{Z} n m^i \frac{d}{dt} \left(\mathbf{v}^i + \frac{Z}{\lambda'} \left(\frac{m^e}{m^i} \right) \mathbf{v}^e \right), \quad (1.57)$$

de esta última expresión se puede despreciar el último término que es proporcional a (m^e/m^i) , es decir, se está despreciando la inercia de los electrones con respecto a la de los iones.

$$m^e n^e \frac{d\mathbf{v}^e}{dt} + m^i n^i \frac{d\mathbf{v}^i}{dt} \simeq \frac{\lambda'}{Z} n m^i \frac{d\mathbf{v}^i}{dt}. \quad (1.58)$$

Por otro lado, al aplicar la aproximación de la cuasineutralidad a la densidad de masa (1.49) y la velocidad de flujo (1.50):

$$\rho = m^i n^i \left(1 + \frac{m^e n^e}{m^i n^i} \right) \approx m^i n^i \frac{\lambda'}{Z} \left(1 + \frac{Z}{\lambda'} \frac{m^e}{m^i} \right), \quad (1.59)$$

$$\mathbf{v} = \frac{(\mathbf{v}^i + \frac{m^e n^e}{m^i n^i} \mathbf{v}^e)}{\left(1 + \frac{m^e n^e}{m^i n^i} \right)} \approx \frac{(\mathbf{v}^i + \frac{Z}{\lambda'} \frac{m^e}{m^i} \mathbf{v}^e)}{\left(1 + \frac{Z}{\lambda'} \frac{m^e}{m^i} \right)} \approx \left(1 - \frac{Z}{\lambda'} \frac{m^e}{m^i} \right) \left(\mathbf{v}^i + \frac{Z}{\lambda'} \frac{m^e}{m^i} \mathbf{v}^e \right), \quad (1.60)$$

Al despreciar los términos que son proporcionales al factor (m^e/m^i) se tiene:

$$\rho \approx \frac{\lambda'}{Z} m^i n, \quad (1.61)$$

$$\mathbf{v} \approx \mathbf{v}^i. \quad (1.62)$$

De este modo se muestra que la densidad de masa del plasma, es esencialmente la densidad de masa de los iones y que la velocidad del centro de masa es esencialmente la de los iones. Por lo tanto, en el lado izquierdo de la ecuación (1.52) se ha despreciado la inercia de los electrones por lo que la ecuación (1.52) puede escribirse de manera aproximada de la siguiente forma:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) \simeq -\nabla p - \nabla \cdot \Pi + \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \rho \nabla \phi_g. \quad (1.63)$$

Considerando el lado derecho de la ecuación (1.52) y aplicar la aproximación de cuasineutralidad, de viscosidad despreciable y despreciando los efectos gravitacionales, se obtiene que los efectos dominantes son los de gradiente de presión y los magnéticos pues bajo estas aproximaciones los efectos eléctricos, de viscosidad y gravitacionales son despreciables. Por lo tanto la ecuación (1.52) puede escribirse de la siguiente forma:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (1.64)$$

Esta última ecuación es la ecuación de momento del modelo MHD.

La siguiente ecuación que se obtendrá será la ecuación de energía del plasma. La obtención de la ecuación de energía del modelo MHD se realiza de la misma forma que para la ecuación de momento, es decir, se suman las correspondientes ecuaciones de energía de los iones y de los electrones lo cual da como resultado:

$$\frac{3}{2} \left(\frac{dp^e}{dt} + \frac{dp^i}{dt} \right) + \frac{5}{2} p^e \nabla \cdot \mathbf{v}^e + p^i \nabla \cdot \mathbf{v}^i = -\nabla \cdot \mathbf{h} - \Pi^i \cdot \nabla \cdot \mathbf{v}^i - \Pi^e \cdot \nabla \cdot \mathbf{v}^e + Q, \quad (1.65)$$

donde se han definido las cantidades $Q = Q^i + Q^e$, $\mathbf{h} = \mathbf{h}^i + \mathbf{h}^e$. Al recordar que los términos relacionados con el tensor de esfuerzos de cada especie son proporcionales a la masa de la especie (1.26), entonces es posible despreciar los términos que son proporcionales a la masa de los electrones y conservar los términos que son proporcionales a la masa de los iones:

$$\left[\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p \right] + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{2}{3} (Q - \nabla \cdot \mathbf{h} - \Pi \cdot \nabla \cdot \mathbf{v}), \quad (1.66)$$

donde se ha escrito $p = p^i + p^e$, $\mathbf{v}^i = \mathbf{v}$ y $\gamma = 5/3$. El lado derecho de la ecuación de energía (1.66) representa efectos disipativos. De la ecuación de conservación de masa (1.51) se obtiene

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right). \quad (1.67)$$

Por lo tanto, al multiplicar el lado derecho de la ecuación (1.66) por $1/\rho^\gamma$ y sustituir la expresión (1.67) en el lado izquierdo de la misma ecuación, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{\rho^\gamma} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p \right) - p \frac{\gamma}{\rho^{(\gamma+1)}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right), \quad (1.68)$$

por lo tanto, la ecuación (1.66) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = \frac{2}{3\rho^\gamma} (Q - \nabla \cdot \mathbf{h} - \mathbf{\Pi} \cdot \nabla \cdot \mathbf{v}). \quad (1.69)$$

Esta última ecuación tiene un significado físico muy importante pues el lado izquierdo de la ecuación es la derivada temporal de la densidad de entropía; es decir, la ecuación (1.69) da la evolución temporal de la densidad de entropía del plasma. Como se está suponiendo que el flujo de calor es despreciable esto implica que en primera aproximación se puede suponer una ley adiabática, es decir, que los términos del lado derecho de la ecuación (1.69) son despreciables. Como resultado se obtiene que la densidad de entropía del plasma cumple la conocida ecuación adiabática del gas ideal:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (1.70)$$

donde $\gamma = 5/3$ es el cociente de los calores específicos del gas ideal. Por otro lado, al suponer que el flujo de calor es despreciable la ecuación de energía del plasma toma la forma:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.71)$$

Debe hacerse notar que la ecuación (1.70) es válida siempre y cuando el plasma sea compresible, es decir, $\nabla \cdot \mathbf{v} \neq 0$. Para el caso compresible esta ecuación no es válida y la ecuación con la que realmente se debe trabajar es con la ecuación de energía:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p = 0 \quad (1.72)$$

Hasta el momento se han obtenido las ecuaciones de conservación de masa (1.51), de momento (1.64) y de energía (1.71) del modelo MHD; sin embargo, faltan las ecuaciones para la ley de Ohm y las ecuaciones de Maxwell.

Al usar la suposición de cuasineutralidad en la densidad de corriente (1.46) y la densidad de carga (1.47), se puede expresar la velocidad de los electrones en términos de la velocidad de los iones y de la densidad de corriente:

$$\mathbf{J} \approx en (\lambda' \mathbf{v}^i - \mathbf{v}^e) \Rightarrow \mathbf{v}^e \approx \lambda' \mathbf{v}^i - \frac{1}{en} \mathbf{J}. \quad (1.73)$$

Análogamente, la densidad de carga puede expresarse en términos de la densidad de partículas:

$$\rho_c \approx en (\lambda' - 1), \quad (1.74)$$

donde $|\lambda' - 1| \ll 1$.

Al aplicar la suposición de cuasineutralidad a la ecuación de Maxwell (1.43), la cual relaciona la densidad de carga eléctrica con el campo eléctrico se obtiene una medida de la desviación de la neutralidad, la cual está relacionada con el parámetro λ' de la ecuación (1.74). Aunque en la ecuación de momento (1.64) el término que involucra a la densidad de carga y al campo eléctrico es despreciable pues, las correcciones a ésta son del orden $(V_A/c)^2$, es incorrecto tomar $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. La importancia de considerar $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_c/\epsilon_0 \neq 0$ se hará notar en la sección 2.3 al querer determinar el equilibrio estacionario del plasma.

En la ecuación de Ampère-Maxwell es posible despreciar el término de vector de desplazamiento eléctrico si la velocidad de Alfvén $V_A = B/\sqrt{\mu_0\rho}$ es mucho menor que la velocidad de la luz.

En consecuencia, bajo la aproximación de la cuasineutralidad las ecuaciones de Maxwell se escriben de la siguiente forma:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.75)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad (1.76)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}, \quad (1.77)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.78)$$

donde las ecuaciones (1.77) y (1.78) quedan como condiciones iniciales para los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} .

Para determinar de una manera general la ley de Ohm se consideran las ecuaciones de momento de los iones (1.38) y de los electrones (1.37) en las cuales se desprecian los términos de viscosidad y gravitacionales. A cada una de estas ecuaciones se le multiplica por el correspondiente factor (q^α/m^α) , es decir, se multiplica por la carga eléctrica y se divide por la masa de la correspondiente especie; una vez hecho lo anterior ambas ecuaciones se suman obteniendo así:

$$e \left(Z n^i \frac{d\mathbf{v}^i}{dt} - n^e \frac{d\mathbf{v}^e}{dt} \right) = \left(n^i \frac{(Ze)^2}{m^i} + n^e \frac{e^2}{m^e} \right) \mathbf{E} + n^i \frac{(Ze)^2}{m^i} (\mathbf{v}^i \times \mathbf{B}) + n^e \frac{e^2}{m^e} (\mathbf{v}^e \times \mathbf{B}) - \frac{Ze}{m^i} \nabla p^i + \frac{e}{m^e} \nabla p^e + \frac{Ze}{m^i} \mathbf{R}^i - \frac{e}{m^e} \mathbf{R}^e. \quad (1.79)$$

Al utilizar la aproximación de cuasineutralidad $Z n^i = \lambda' n$, $n^e = n$ y las aproximaciones que de ella se obtienen (1.62) y (1.73), entonces la última ecuación puede escribirse de la siguiente forma:

$$en \left((\lambda' - 1) \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{J}}{en} \right) \right) = \lambda' \frac{ne^2}{m^e} \left(1 + \frac{Zm^e}{m^i} \right) [\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] - \frac{e}{m^e} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{e}{m^e} \left[\left(\nabla p^e - \frac{Zm^e}{m^i} \nabla p^i \right) - \left(\mathbf{R}^e - \frac{Zm^e}{m^i} \mathbf{R}^i \right) \right].$$

Finalmente al despreciar los términos proporcionales a (m^e/m^i) , tomar la aproximación $\lambda' = 1$ y multiplicar por (m^e/ne^2) se obtiene la ley de Ohm:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} + \frac{1}{ne} \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \frac{1}{ne} \nabla p^e - \frac{m^e}{e^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{J}}{n} \right), \quad (1.80)$$

donde se ha expresado el término de colisiones $\mathbf{R}^e/en = \mathbf{J}/\sigma$ donde σ es la conductividad eléctrica del plasma la cual puede expresarse en términos de la frecuencia de colisiones ν_c como $\sigma = (ne^2/\nu_c m^e)$ [7].

La ecuación (1.80) es la ley de Ohm generalizada y dependiendo del tipo de aproximaciones que se hagan para ella, se tendrán diversas variantes del modelo MHD. La ecuación (1.80) merece una discusión pues proporciona una ley de Ohm con términos adicionales a los que se consideran en la ley de Ohm usual en la cual sólo aparece el primer término del lado derecho.

La conducción se presenta cuando existen electrones libres o casi libres los cuales pueden moverse en presencia de campos. En el caso de un conductor sólido los electrones están ligados pero, pueden moverse distancias considerables antes de tener colisiones. En un conductor sólido se observan efectos dinámicos como la conducción eléctrica y el efecto Hall cuando a éste se le aplican campos electromagnéticos; sin embargo no hay movimiento de masa entendiendo por esto movimiento de los iones positivos fijos a la red. Por otro lado, para un fluido conductor los campos actúan sobre los electrones y sobre los iones produciendo así efectos dinámicos que incluyen el movimiento de masa, lo cual produce modificaciones en el campo electromagnético.

Cuando se habla de la ley de Ohm en un metal conductor se piensa que en éste hay una corriente debido al movimiento de los electrones. En ausencia de campo magnético externo y despreciando el campo magnético producido por el flujo de corriente la ley de Ohm toma su expresión más simple:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J}. \quad (1.81)$$

Sin embargo, en presencia de un campo magnético externo la ley de Ohm se modifica pues en estas condiciones se presenta el fenómeno llamado efecto Hall en el cual se presenta un campo eléctrico transversal \mathbf{E}_T al flujo de corriente. Dicho campo eléctrico transversal es proporcional al producto vectorial de la densidad de corriente con el campo magnético y en tal caso la ley de Ohm toma la siguiente expresión:

$$\mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_T = \frac{1}{\sigma} \mathbf{J} \quad \text{con} \quad \mathbf{E}_T = -\frac{1}{ne} \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (1.82)$$

Estos dos últimos casos de la ley de Ohm se encuentran considerados en la expresión general (1.80), la cual considera términos extra para esta ley. El primero de estos términos extra es $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ el cual se refiere a un campo eléctrico generado por el flujo de la especie de iones, pues la velocidad \mathbf{v} representa la velocidad de los iones. Este término no se considera para el caso de un metal conductor debido a que en un metal los iones se encuentran fijos a la red y su movimiento es despreciable; sin embargo, en el plasma los iones están libres y su movimiento tiene que considerarse en la ley de Ohm. El segundo término extra es el que se refiere a gradiente de presión de electrones, el cual sólo tiene relevancia cuando se habla de un gas o líquido conductor y no en un metal conductor. El último término de la ecuación (1.80) describe correcciones debidas a la variación temporal de la densidad de corriente.

Para los propósitos de este trabajo se despreciarán todos los términos del lado derecho de la ecuación (1.80), para lo cual es necesario expresar las aproximaciones en las cuales esto es válido.

10) El término Hall es despreciable si la frecuencia del plasma $\omega_{pe}^2 = (e^2 n / m^e \epsilon_0)$ y la frecuencia de ciclotrón de electrones $\omega_{ce} = (eB / m^e)$ cumplen la siguiente relación:

$$\frac{\omega_{ce}}{\omega_{pe}^2} \frac{c^2}{LV_A} \ll 1. \quad (1.83)$$

11) El término de gradiente de presión de electrones ∇p^e se puede despreciar si se cumple la siguiente relación:

$$\frac{T^e}{m^e \omega_{ce} LV_A} \ll 1. \quad (1.84)$$

12) La variación temporal de la densidad de corriente puede despreciarse si se satisface:

$$\frac{c^2}{L^2 \omega_{ce}^2} \ll 1. \quad (1.85)$$

Si se considera que estas tres últimas condiciones son válidas, entonces la ley de Ohm puede escribirse de la siguiente forma

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.86)$$

Esta última ecuación proporciona una relación entre la densidad de corriente \mathbf{J} y los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} . Para un medio conductor simple de conductividad σ la densidad de corriente tiene una expresión (1.81):

$$\mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}', \quad (1.87)$$

donde \mathbf{J}' y \mathbf{E}' se miden en el sistema de referencia del medio conductor. Para un medio móvil con velocidad relativa al laboratorio \mathbf{v} el campo eléctrico y la densidad de corriente deben transformarse de la siguiente manera:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (1.88)$$

$$\mathbf{J}' = \mathbf{J} + \rho_c \mathbf{v}, \quad (1.89)$$

donde las cantidades \mathbf{E} , \mathbf{v} , \mathbf{B} , \mathbf{J} y ρ_c se miden desde el sistema del laboratorio. Al utilizar la suposición de cuasineutralidad en la ecuación (1.89) se puede despreciar el término que es proporcional a la densidad de carga eléctrica. Por lo tanto, la ley de Ohm en el sistema de laboratorio toma la forma (1.86) [6].

13) Algunas veces es posible pensar que el plasma es un conductor perfecto, es decir, que su conductividad es infinita. Si esto es así, para que la densidad de corriente permanezca finita debe cumplirse que $\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ sea cero. Sin embargo, no es necesario pensar que la conductividad del plasma es infinita para poder escribir $\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \simeq 0$; esta aproximación es válida si σ cumple la siguiente relación:

$$\frac{1}{\mu_0 \sigma L V_A} \ll 1. \quad (1.90)$$

Si estas últimas aproximaciones son válidas la ley de Ohm en su forma (1.86) puede despejarse y escribirse de la forma:

$$\mathbf{J}/\sigma = (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (1.91)$$

y si la condición (1.90) se cumple, entonces la ley de Ohm se escribe como:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0, \quad (1.92)$$

Esta última expresión es conocida como la ley de Ohm en el modelo MHD.

En resumen, las ecuaciones que describen al plasma como un solo fluido son las ecuaciones conservación de masa (1.51), conservación de momento (1.64), conservación de energía (1.70), ecuaciones de Maxwell (1.75)-(1.78) y la ley de Ohm (1.92); estas se conocen como las ecuaciones del modelo MHD ideal:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.93)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + (\mathbf{J} \times \mathbf{B}), \quad (1.94)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0, \quad (1.95)$$

$$\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (1.96)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{J}, \quad (1.97)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.98)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_o} \quad (1.99)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.100)$$

Cuando se ignora el flujo de plasma la divergencia del campo eléctrico no es necesaria, puesto que la densidad de carga no aparece en ninguna de las demás ecuaciones. Sin embargo, se debe retener cuando se considera el flujo, pues la ecuación (1.96) expresa al campo eléctrico en función de la velocidad de flujo y del campo magnético. Este campo eléctrico deberá satisfacer la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = \rho_c / \epsilon_o$ lo cual impone condiciones sobre los campos \mathbf{v} y \mathbf{B} .

1.4. Condiciones de Frontera del Modelo MHD.

Para los problemas que involucran equilibrio y estabilidad MHD, las condiciones de frontera más comunes son las siguientes tres: "Plasma limitado por una pared perfectamente conductora", "Plasma limitado por campo magnético en vacío producido por la corriente del plasma" y "Plasma limitado por un campo magnético en vacío producido por bobinas externas" [3]. Cada una de estas condiciones de frontera representa un grado de dificultad diferente y al aumentar la dificultad de las condiciones de frontera, más realista es el problema físico.

Las ecuaciones del modelo MHD y el conjunto de condiciones de frontera, forman la base de la investigación teórica del equilibrio y la estabilidad macroscópica de los plasmas confinados magnéticamente.

1.4.1. Plasma Limitado por una Pared Perfectamente Conductora.

La primera y más simple de las condiciones de frontera del modelo MHD, supone que el plasma se extiende hasta una pared perfectamente conductora en $R_w(\mathbf{r}) = 0$. En este caso las condiciones de frontera electromagnéticas que se requieren son:

$$(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E})_{R_w} = 0, \quad (1.101)$$

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B})_{R_w} = 0, \quad (1.102)$$

es decir, la componente tangencial del campo eléctrico y la normal del campo magnético deben ser cero. De la ley de Ohm (1.96) y de las expresiones (1.101) y (1.102) se obtiene que la componente normal del flujo debe ser cero:

$$(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E})_{R_w} + [\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})]_{R_w} = [(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{v} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{B}]_{R_w} = 0 \quad (1.103)$$

$$\text{por lo que } (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})_{R_w} = 0 \quad (1.104)$$

1.4.2. Plasma limitado por campo magnético en vacío producido por la corriente del plasma.

Un conjunto de condiciones de frontera un poco más realistas supone que el plasma está aislado por una región de vacío entre el plasma y una pared perfectamente conductora. En este caso, las condiciones de frontera describen de una manera más realista a los plasmas confinados magnéticamente. En la región del plasma se cumplen las ecuaciones MHD mientras que en la región de vacío las ecuaciones relevantes son:

$$\nabla \times \hat{\mathbf{B}} = 0, \quad (1.105)$$

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0, \quad (1.106)$$

$$(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{B}})_{R_w} = 0. \quad (1.107)$$

Las cantidades de vacío se denotan de la siguiente forma $\hat{\alpha}$.

La superficie del plasma $R_w(\mathbf{r}, t) = 0$, es libre de moverse debido a que el plasma está rodeado por el vacío, por lo tanto, la cantidad $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})_{R_w}$ es arbitraria. Sin embargo, hay tres condiciones de brinco que se deben satisfacer para conectar el campo magnético a través de la superficie. Estas condiciones provienen de la ecuación de la divergencia de campo magnético, la ley de Ampère y de las ecuaciones de momento.

En general, es posible tener una discontinuidad en la presión y en la componente tangencial del campo magnético, si se permite que hayan corrientes superficiales en la superficie del plasma. Al integrar las ecuaciones relevantes a través de la superficie, se obtienen las siguientes condiciones de continuidad:

$$[[\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}]]_R = 0, \quad (1.108)$$

$$[[\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{B}]]_R = \mu_o \mathbf{K}, \quad (1.109)$$

$$\left[\left[p + \frac{B^2}{2\mu_o} \right] \right]_R = 0. \quad (1.110)$$

En las condiciones anteriores el símbolo $[[Q]] = \hat{Q} - Q$ y \mathbf{K} es la densidad de corriente superficial, la cual se supone conocida. En la integración de la ecuación de momento se

supone que la velocidad y la aceleración del plasma son finitas. Aunque las ecuaciones anteriores especifican completamente las condiciones de frontera, el problema del plasma aislado por una región de vacío es difícil de resolver. Si se desea especificar las corrientes superficiales y la forma de la pared conductora externa de manera independiente, es necesario determinar autoconsistentemente la forma correcta de la superficie del plasma $R_w(\mathbf{r}, t) = 0$ con lo cual aparece un grado de libertad adicional. Este problema se conoce como el plasma de frontera libre.

Es necesario notar dos cosas: la primera de éstas es que de la ley de Ohm se sabe que el plasma es un conductor perfecto esto implica que la cantidad $(\hat{n} \cdot \mathbf{B})_R = 0$. La segunda es que en muchos casos de interés la cámara metálica que rodea al plasma puede ser un muy buen conductor mas no perfecto. En estas situaciones, un campo magnético \mathbf{B}_a que varía lentamente en el tiempo, puede aplicarse y penetrar la cámara metálica. Una vez establecido en el interior de la cámara, el campo magnético \mathbf{B}_a permanece constante en las escalas de tiempo del modelo MHD, es decir, para las escalas de tiempo del modelo MHD $\mathbf{B}_a \approx \mathbf{B}_a(\mathbf{r})$. Para este tipo de casos, el campo magnético en el vacío puede escribirse de la siguiente forma $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_a(\mathbf{r}) + \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$ donde $\nabla \times \mathbf{B}_a = 0 = \nabla \times \tilde{\mathbf{B}}$, además $\nabla \cdot \mathbf{B}_a = 0$ y $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0$. En este caso la cantidad $(\hat{n} \cdot \tilde{\mathbf{B}})_{R_w} = 0$ y la cantidad $(\hat{n} \cdot \mathbf{B}_a)_{R_w}$ se supone conocida.

1.4.3. Plasma rodeado por Bobinas Externas.

La condición de frontera más difícil, pero más realista corresponde a la situación en la cual el plasma se confina por campos magnéticos externos creados por un conjunto fijo de corrientes externas producidas por bobinas conductoras.

Para esta configuración, las condiciones de frontera en la interfase plasma vacío son las mismas que para el caso anterior, es decir, las condiciones (1.108)-(1.110), siguen siendo válidas en este caso. Sin embargo, ya no es necesaria la condición para la pared conductora. El campo en el vacío se expresa de la siguiente forma $\hat{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{B}} + \mathbf{B}_a$ con \mathbf{B}_a el campo magnético aplicado por las bobinas externas y $\tilde{\mathbf{B}}$ el campo magnético inducido por el plasma. El campo magnético \mathbf{B}_a se obtiene escribiendo $\mathbf{B}_a = \nabla \times \mathbf{A}_a$ y el vector potencial magnético se calcula a través de la ley de Biot-Savart:

$$\mathbf{A}_a = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\beta=1} \int \frac{\mathbf{J}_{a\beta}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' \quad (1.111)$$

La suma se realiza sobre los conductores externos donde $\mathbf{J}_{a\beta}$ son densidades de corriente en bobinas. Por otra parte, el campo magnético inducido por el plasma satisface las ecuaciones:

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{B}} = 0, \quad (1.112)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0. \quad (1.113)$$

Soluciones para las ecuaciones MHD que satisfagan las condiciones de las bobinas externas, proporcionan una descripción exacta del comportamiento del plasma en situaciones experimentales realistas. Debido a la complejidad, no es sorprendente que la mayoría de tales aplicaciones requieren cálculos numéricos.

Capítulo 2

Equilibrio MHD con una Geometría Cilíndrica.

2.1. Introducción.

El estudio del equilibrio MHD es importante pues de éste se determinarán las cantidades físicas de equilibrio que se necesitan para el estudio de la estabilidad (Capítulo 4). Además, este estudio impondrá las relaciones que deberán satisfacer las cantidades de equilibrio para que el estado de equilibrio sea autoconsistente. El propósito de este capítulo es el estudio del problema de equilibrio estacionario MHD para un plasma que se confina magnéticamente en una geometría cilíndrica la cual presenta una invariancia bajo rotaciones acimutales y traslaciones axiales [8], por lo tanto, el problema de equilibrio MHD tendrá las siguientes características:

- 1) Las cantidades de equilibrio sólo dependerán de la coordenada radial r .
- 2) El flujo de equilibrio será un flujo axial, es decir, sólo habrá flujo de equilibrio en la dirección \hat{z} .
- 3) El campo magnético de equilibrio será azimutal, es decir, sólo habrá campo magnético de equilibrio en la dirección $\hat{\theta}$. Este campo magnético será generado por una corriente axial en la dirección \hat{z} . Esta configuración del plasma es conocida como el Z-Pinch.
- 4) El campo magnético externo será nulo.
- 5) El plasma estará rodeado por una pared rígida perfectamente conductora de modo que el estudio realizado aquí es relevante a los modos internos del plasma.

En los libros de texto no se hace el tratamiento del equilibrio estacionario con flujo sólo se hace el estudio del equilibrio sin flujo del Z-Pinch. Un tratamiento del problema estacionario puede encontrarse en artículos de investigación [9, 15, 16, 17], los cuales están orientados al estudio de la estabilidad MHD (Capítulo 4). Sin embargo, al hacer el estudio de la estabilidad del estado estacionario, con las características anteriormente descritas, la mayoría de estos artículos de investigación suponen un flujo de equilibrio

arbitrario para la configuración del Z-Pinch, sin mostrar que los flujos propuestos sean autoconsistentes con las ecuaciones de equilibrio MHD (2.1)-(2.6) y en particular con la aproximación de la cuasineutralidad. La razón por la cual se puede pensar que los flujos son arbitrarios se explicará más adelante.

En este capítulo se determinarán de una manera general, las condiciones que el flujo debe cumplir para que el estado de equilibrio estacionario de un Z-Pinch exista, es decir, que sea autoconsistente. Además, se encontrará la dependencia explícita en la coordenada radial r de las cantidades de equilibrio para algunos casos particulares de equilibrio estacionario.

2.2. Ecuaciones Generales del Equilibrio MHD.

En el modelo MHD, el equilibrio de un plasma confinado magnéticamente significa el balance total de las fuerzas que actúan sobre el plasma. La existencia de un estado de equilibrio MHD exige una situación en la cual las cantidades del plasma ρ , \mathbf{v} , p el campo eléctrico \mathbf{E} y el magnético \mathbf{B} , no dependan del tiempo. Al introducir lo anterior en las ecuaciones MHD (1.93)-(1.98) se obtienen las ecuaciones MHD de equilibrio:

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla p_0 + \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{v}_0 \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{E}_0 + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0 = 0, \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{J}_0. \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_0 = 0. \quad (2.6)$$

En las ecuaciones (2.1)-(2.6) se han denotado las cantidades de equilibrio con un subíndice cero para diferenciarlas de las cantidades perturbadas las cuales se denotan con un subíndice uno y se utilizan en el estudio de la estabilidad (Capítulo 4). Además, de las ecuaciones (2.4)-(2.6), los campos eléctrico y magnético de equilibrio deben satisfacer las ecuaciones siguientes:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{\rho_{0c}}{\epsilon_0}, \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0. \quad (2.8)$$

La ecuación (2.1) corresponde a la conservación de la masa en equilibrio, ésta expresa que el flujo de masa es cero sobre una superficie cerrada S , es decir no hay fuentes ni sumideros de masa. La afirmación anterior se justifica de la siguiente forma:

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0 \Rightarrow \int_V \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) dV = \oint_S (\rho_0 \mathbf{v}_0) \cdot d\mathbf{S} = \text{flujo de masa} = 0,$$

Al utilizar la ley de Ampère (2.5) en $\mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0$, la ecuación de momento (2.2) puede expresarse como:

$$\rho_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla \left(p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0. \quad (2.9)$$

La ecuación (2.9) representa el balance de fuerzas necesario para la existencia de un estado estacionario. El lado izquierdo de la ecuación (2.9) representa la derivada convectiva del flujo estacionario; ésta deberá ser igual a la suma de las fuerzas que actúan sobre el plasma, las cuales se expresan en el lado derecho de la misma ecuación. El primer término del lado derecho de la ecuación (2.9) representa el gradiente de la presión total $P_T = p_0 + B_0^2/2\mu_0$, la cual es la suma de la presión del plasma más la presión debida al campo magnético. El segundo término corresponde a la derivada direccional del campo magnético la cual está relacionada con la curvatura de las líneas del campo magnético.

La ecuación (2.3) representa la ecuación de energía del equilibrio MHD para procesos adiabáticos sin embargo, existe la posibilidad de que el proceso sea incompresible, es decir, $\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0$. En este último caso la ecuación de energía del estado de equilibrio toma la siguiente forma:

$$\mathbf{v}_0 \cdot \nabla p_0 = 0. \quad (2.10)$$

Por lo tanto, el flujo del plasma es paralelo a las superficies de presión constante.

La ecuación (2.4) representa la ley de Ohm correspondiente al equilibrio, y proporciona el campo eléctrico generado por la velocidad del flujo y el campo magnético. Para el caso particular en el que no hay flujo de equilibrio, el campo eléctrico es cero y en consecuencia la densidad de carga también lo es, es decir, el plasma es localmente neutro.

La ecuación (2.5) es la ley de Ampère para el equilibrio, la cual proporciona la relación entre la densidad de corriente generada en el plasma y el campo magnético en él. El campo magnético total del plasma, es la suma del campo magnético generado por las corrientes en él y el generado externamente, aunque en este trabajo se considerará que el campo magnético externo es nulo.

La ecuación (2.6) es la ley de Faraday del equilibrio, la cual expresa que en equilibrio el campo eléctrico es un campo electrostático.

Las ecuaciones (2.7) y (2.8) representan las condiciones iniciales para los campos eléctrico \mathbf{E}_0 y magnético \mathbf{B}_0 en el problema de equilibrio. Por lo general, los libros de texto e incluso los artículos de investigación no escriben la ecuación (2.7) como parte del sistema de ecuaciones MHD, esto puede deberse a la suposición de cuasineutralidad la cual da como resultado que los efectos eléctricos $\rho_{0e}\mathbf{E}_0$ son despreciables en la ecuación de

momento. Sin embargo, las ecuaciones (2.7) y (2.8) deben satisfacerse y en este trabajo se verá la importancia de considerar $\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \rho_{0c}/\varepsilon_0 \neq 0$.

2.3. Equilibrio del Z-Pinch con Dependencia Radial.

Como ya se mencionó en la introducción de este capítulo, su propósito, es determinar las cantidades de equilibrio de un plasma con geometría cilíndrica, flujo axial y campo magnético acimutal, es decir, la configuración del Z-Pinch con un flujo de equilibrio. Además, se ha supuesto que las cantidades de equilibrio sólo dependen de la coordenada radial r . Estas suposiciones simplifican de manera importante las ecuaciones de equilibrio (2.1)-(2.8) para el Z-Pinch.

Utilizando coordenadas cilíndricas en las ecuaciones de equilibrio (2.1)-(2.8) para una configuración de Z-Pinch con las características descritas en la introducción se obtienen las ecuaciones que describen el equilibrio MHD de esta configuración:

$$\frac{dp_0}{dr} = -J_{0z}B_{0\theta}, \quad (2.11)$$

$$E_{0r} = v_{0z}B_{0\theta}, \quad (2.12)$$

$$J_{0z} = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{d}{dr} (rB_{0\theta}), \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_0 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rB_{0\theta}v_{0z}) = \frac{\rho_{0c}}{\varepsilon_0}. \quad (2.14)$$

Este último sistema de ecuaciones (2.11)-(2.14) consta de cuatro ecuaciones y seis variables por determinar p_0 , J_{0z} , $B_{0\theta}$, E_{0r} , v_{0z} y ρ_{0c} ; lo anterior quiere decir que dos de ellas se deben suponer conocidas dejando así un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas; sin embargo, las variables que se supongan conocidas no deben estar relacionadas directamente. Una vez conocida la densidad de corriente puede determinarse el campo magnético (2.13) y la presión (2.11). De la ecuación (2.14) se observa que al conocer la densidad de carga se puede determinar la velocidad de flujo; por lo tanto, al conocer la densidad de corriente J_{0z} y la de carga ρ_{0c} se determinan las demás cantidades de equilibrio.

Para determinar las cantidades de equilibrio, se supone que éstas pueden escribirse de la siguiente forma:

$$v_{0z}(r) = v_0 u_0(r), \quad (2.15)$$

$$J_{0z}(r) = J_0 j_0(r), \quad (2.16)$$

$$n_0(r) = n_0 N_0(r), \quad (2.17)$$

$$B_{0\theta}(r) = B_0 b_0(r), \quad (2.18)$$

$$p_0(r) = p_0 P_0(r), \quad (2.19)$$

donde las funciones $u_0(r)$, $j_0(r)$, $N_0(r)$, $b_0(r)$ y $P_0(r)$ son funciones adimensionales de la variable radial r y de orden uno, es decir, $|u_0(r)|$, $|j_0(r)|$, $|b_0(r)| \leq 1$, $0 \leq P_0(r) \leq 1$ y $0 \leq N_0(r) \leq 1$. Los valores constantes v_0 , J_0 , n_0 , B_0 y p_0 representan los valores característicos o valores máximos de las cantidades del equilibrio. El valor característico del flujo es del mismo orden de magnitud que la velocidad de Alfvén $v_0 \sim V_A = B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0}$.

De las ecuaciones (2.13) y (2.16), es posible obtener el campo magnético de equilibrio de la siguiente forma:

$$B_{0\theta}(r) = \frac{\mu_0 J_0}{r} \int_0^r s j_0(s) ds. \quad (2.20)$$

La integral que aparece en la ecuación (2.20) se definirá de la siguiente forma:

$$F(r) \equiv \int_0^r s j_0(s) ds. \quad (2.21)$$

Utilizando las expresiones (2.11), (2.16), (2.20) y (2.21), se determina la dependencia de la presión de equilibrio por la siguiente expresión:

$$p_0(r) = p_0(0) - \mu_0 J_0^2 \int_0^r \frac{1}{x} j_0(x) F(x) dx. \quad (2.22)$$

Al fijar el valor de la presión en la pared del cilindro $r = a$ por $p(a)$, se determina el valor de la constante $p_0(0)$ siendo éste:

$$p_0(0) = p(a) + \mu_0 J_0^2 \int_0^a \frac{1}{x} j_0(x) F(x) dx. \quad (2.23)$$

Al introducir (2.23) en la ecuación (2.22) se obtiene la expresión para la presión del equilibrio.

$$p_0(r) = p(a) + \mu_0 J_0^2 \int_r^a \frac{1}{x} j_0(x) F(x) dx. \quad (2.24)$$

Como ya se mencionó al conocer la densidad de corriente, se pueden determinar el campo magnético y la presión del plasma independientemente de la dependencia de la velocidad del flujo y de la densidad de carga.

Lo que hace falta es determinar la velocidad de flujo v_{0z} ; sin embargo, antes de hacerlo es importante hacer una discusión de la ecuación (2.14) pues de ésta se obtendrá la dependencia de la velocidad.

Una de las suposiciones que se hicieron en el capítulo 1 fue la cuasineutralidad del plasma, es decir, la densidad de carga eléctrica es muy pequeña de tal manera que los efectos eléctricos pueden ser despreciados en la ecuación de momento. Sin embargo, en la discusión de la cuasineutralidad del capítulo 1 se aclaró que en presencia de un campo eléctrico habrá una desviación de la neutralidad local la cual debe considerarse en la ecuación (2.7). Aunque haya una densidad de carga eléctrica los efectos dinámicos de ésta pueden ser despreciados en la ecuación de momento pues las correcciones que se introducen son de orden $(v/c)^2$ [6] (como se mostrará en el siguiente párrafo). Al suponer la presencia de una velocidad de flujo en la configuración del Z-Pinch se genera un campo eléctrico radial (2.12) el cual debe satisfacer la ecuación (2.14). Esta condición permite hallar una relación entre el flujo y la densidad de carga.

Si se consideran los efectos eléctricos en la ecuación de momento (2.2), ésta se escribe de la siguiente forma:

$$\rho_{0m} (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla p_0 + \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0 + \rho_{0c} \mathbf{E}_0, \quad (2.25)$$

y al considerar el caso particular del Z-Pinch en la última ecuación se obtiene la siguiente expresión:

$$0 = -\frac{d}{dr} \left(p_0 + \frac{B_{0\theta}^2}{2\mu_0} \right) - \frac{B_{0\theta}^2}{\mu_0 r} + \varepsilon_0 \frac{E_{0r}}{r} \frac{d}{dr} (r E_{0r}). \quad (2.26)$$

Utilizando la ecuación (2.12) y el hecho de que la velocidad de la luz se puede escribir como $c^2 = 1/\varepsilon_0\mu_0$, la ecuación (2.26) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$0 = -\frac{d}{dr} \left[p_0 + \frac{B_{0\theta}^2}{2\mu_0} \left(1 - \frac{v_{0z}^2}{c^2} \right) \right] - \frac{B_{0\theta}^2}{\mu_0 r} \left(1 - \frac{v_{0z}^2}{c^2} \right) \quad (2.27)$$

Por lo tanto, los efectos eléctricos en la ecuación de momento (2.26) pueden expresarse en términos de la velocidad de flujo y el campo magnético, como lo expresa la ecuación (2.27). Si la velocidad del flujo v_{0z} es despreciable con respecto a la velocidad de la luz ($v_{0z}/c \ll 1$ (flujos no relativistas) entonces, aun cuando la densidad de carga eléctrica no sea cero, los efectos eléctricos en la ecuación de momento son despreciables. De lo anterior se observa que no es necesario que la densidad de carga eléctrica (2.14) sea cero para poder despreciar los efectos eléctricos en la ecuación de momento del Z-Pinch. Por el contrario, si la densidad de carga eléctrica fuera cero para un equilibrio con flujo estacionario, entonces la ecuación (2.14) se escribiría de la siguiente forma:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_{0\theta} v_{0z}) = 0 \Rightarrow B_{0\theta} v_{0z} = \frac{A}{r}, \quad (2.28)$$

donde A es una constante; la ecuación anterior implica que el producto $B_{0\theta} v_{0z}$ es divergente en $r = 0$, es decir, una de estas dos cantidades de equilibrio tiene que ser divergente en el origen, lo cual físicamente no es posible. Por lo tanto, en presencia de un flujo axial de equilibrio, la densidad de carga necesariamente es distinta de cero, es decir,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_{0\theta} v_{0z}) = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0} \neq 0. \quad (2.29)$$

Debe observarse que la ecuación (2.29) representa la desviación de la neutralidad del plasma a nivel local, es decir, punto a punto; sin embargo a nivel global el plasma debe ser neutro, es decir, la carga total debe ser cero. La condición anterior quiere decir que la integral de la densidad de carga debe ser cero:

$$Q_T = \int_V \rho_c dV = 0. \quad (2.30)$$

Al aplicar esta condición a la configuración del Z-Pinch (2.29), se obtiene la siguiente relación:

$$\int_V \rho_c r dr d\theta dz = 0 \Rightarrow a B_{0\theta}(a) v_{0z}(a) = 0, \quad (2.31)$$

$$v_{0z}(a) = 0, \quad (2.32)$$

es decir, la condición de neutralidad global del plasma impone una condición en la frontera para la velocidad $v_{0z}(a) = 0$; por lo tanto cualquier flujo que cumpla la condición en la frontera (2.32) es un flujo autoconsistente.

En el presente trabajo se utilizará la densidad de partículas $n_0(r)$ en vez de la densidad de carga $\rho_{0c}(r)$ pues de acuerdo con el modelo MHD al conocer n_0 se puede determinar la densidad de carga ρ_{0c} (1.74)

$$\rho_{0c}(r) = e n_0(r) [\lambda'(r) - 1], \quad (2.33)$$

En el capítulo 1 se obtuvo esta ecuación para lo cual se definió el parámetro $\lambda'(r)$, lo cual resulta de la suposición de cuasineutralidad del plasma. Para que la definición del parámetro $\lambda'(r)$ sea consistente con la aproximación de cuasineutralidad, debe cumplirse que $\lambda'(r) \approx 1$. La variación de $\lambda'(r)$ no puede determinarse del modelo MHD sin embargo, su valor no es constante e idénticamente 1 sino que varía alrededor de este valor. Lo anterior es importante pues si este parámetro fuese idénticamente 1 entonces

de la ecuación (2.33) se concluye que la densidad de carga debe ser cero; sin embargo, de la ecuación (2.29) se observa que esto no es posible para un estado de equilibrio estacionario. Finalmente, en el capítulo 1 también se definió el factor de desviación de la cuasineutralidad $\lambda(r) = \lambda'(r) - 1$, tal que $|\lambda| \ll 1$ de tal manera que la densidad de carga se puede escribir como:

$$\rho_{oc}(r) = e\lambda(r)n_0(r), \quad (2.34)$$

esta última ecuación expresa la desviación de la neutralidad local que existe en un estado de equilibrio estacionario. Al usar las suposiciones (2.15)-(2.19) en la ecuación (2.34) la densidad de carga se expresa de la siguiente forma:

$$\rho_{oc}(r) = en_0\lambda(r)N_0(r). \quad (2.35)$$

Finalmente, al introducir (2.35) en la divergencia de campo eléctrico (2.14), se encuentra la siguiente relación para la densidad de partículas y la velocidad de flujo:

$$\frac{v_0\mu_0 J_0}{r} \frac{d}{dr} [u_0(r)F(r)] = \frac{en_0}{\epsilon_0} \lambda(r)N_0(r), \quad (2.36)$$

La ecuación (2.36) exhibe el resultado más importante del presente trabajo: **La presencia de un flujo axial en la configuración del Z-Pinch tiene consecuencias en la desviación de la neutralidad local del plasma las cuales deben ser consideradas para garantizar que el estado de equilibrio estacionario sea autoconsistente.**

En la ecuación (2.36) se desconocen las funciones adimensionales $N_0(r)$, $u_0(r)$ y $\lambda(r)$; sólo se conoce la cantidad $F(r)$, la cual está relacionada con $j_0(r)$ a través de (2.21). Como ya se mencionó, para determinar completamente el equilibrio estacionario de esta configuración es necesario proponer la densidad de corriente y la de carga, es decir, proponer la dependencia explícita de $j_0(r)$ y el producto $\lambda(r)N_0(r)$. El suponer conocido el último término quiere decir que tanto se conoce la densidad de partículas como el factor de neutralidad $\lambda(r)$. Al igual que $\lambda'(r)$ la dependencia de $\lambda(r)$ no puede determinarse a través del modelo MHD; para determinar su dependencia el plasma debe estudiarse desde el punto de vista de los dos fluidos. Sin embargo, la dependencia de $\lambda(r)$ debe darse alrededor del 0 y su valor absoluto debe satisfacer $|\lambda(r)| \ll 1$.

En los cálculos posteriores (sección 2.4) se determinará el equilibrio estacionario autoconsistente considerando el caso particular en el cual la dependencia del factor $\lambda(r)$ es constante en la coordenada radial; de esta forma se puede expresar la dependencia del perfil de velocidad $u_0(r)$ en términos de los perfiles de densidad de corriente $j_0(r)$ y de partículas $N_0(r)$, de tal manera que se obtenga un estado de equilibrio estacionario autoconsistente:

$$u_0(r) = \frac{en_0c^2}{v_0J_0} \lambda \frac{\int_0^r s N_0(s) ds}{\int_0^r s j_0(s) ds}, \quad (2.37)$$

$$|\lambda| \sim \left| \frac{v_0J_0}{en_0c^2} \right| \ll 1 \quad (2.38)$$

donde el factor de la desviación de la neutralidad λ debe satisfacer la condición (2.38). Esta aproximación es razonable pues para un plasma de laboratorio los parámetros que determinan el orden de magnitud de λ satisfacen la condición (2.38). Sin embargo, deben tenerse claras las consecuencias de esta aproximación, pues al suponer λ constante la neutralidad global del plasma se ve afectada (2.30).

$$\int_V \rho_c dV = en_0 \lambda \int_V N_0(r) dV = e\lambda (\# \text{ de partículas}), \quad (2.39)$$

lo cual quiere decir que hay una desviación de la neutralidad global: sin embargo, esta desviación es pequeña debido a que $|\lambda| \ll 1$. Esta desviación de la neutralidad global se debe a que existe más carga de una especie (electrones o iones).

Uno de los casos particulares que contiene la expresión (2.37) es el equilibrio sin flujo, es decir, $u_0(r) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$, lo cual quiere decir que el plasma es totalmente neutro. Otro caso particular es que el flujo sea uniforme, es decir, $u_0(r) = 1$ para lo cual se requiere que la densidad de corriente y la densidad de partículas tengan la misma dependencia.

En resumen, suponiendo conocidas las densidades de corriente (2.16), la de partículas (2.17) y que λ es constante, es posible determinar el campo magnético (2.20), la presión (2.24) y el flujo de equilibrio (2.37), para un estado de equilibrio autoconsistente de la configuración del Z-Pinch.

En los libros de texto sólo se estudia el equilibrio del Z-Pinch en el cual no hay flujo de equilibrio, es decir, $v_{0z} = 0$, lo cual implica que la ecuación (2.14) es idénticamente cero, es decir, el plasma es localmente neutro. Sin embargo, los artículos de investigación tratan el caso con flujo como si fuera localmente neutro pues no escriben y mucho menos discuten la ecuación (2.14). Al no considerar en su sistema de ecuaciones la divergencia de campo eléctrico (2.14) no hay una relación para la velocidad de flujo y por lo tanto es natural suponer que el perfil de velocidad de flujo es arbitrario. Por ejemplo en el artículo de T. D. Arber [9] se expresa la ecuación de momento para el equilibrio del Z-Pinch como:

$$\rho_0 \frac{v_{0\theta}^2}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(p_0 + \frac{B_{0\theta}^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_{0\theta}^2}{\mu_0 r}. \quad (2.40)$$

Al restringirse al problema del equilibrio estacionario afirma lo siguiente *De esta ecuación es claro que cualquier equilibrio para $\mathbf{v} = 0$ también es un equilibrio cuando se introduce*

un flujo axial arbitrario, pues en la ecuación (2.40) sólo se toman en cuenta los efectos de rotación. Al restringirse a flujos axiales $v_{0\theta} = 0$ se obtiene la misma ecuación que en el equilibrio sin flujo. Por lo tanto, él está asumiendo que el flujo axial puede ser arbitrario. Los perfiles de velocidad que propone T. D. Arber [9] son los siguientes:

$$v_{0z}(r) = v_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right], \quad (2.41)$$

$$v_{0z}(r) = v_0 \left(\frac{r}{a} \right), \quad (2.42)$$

$$v_{0z}(r) = v_0 \cos \left(2 \frac{r}{a} \right), \quad (2.43)$$

$$v_{0z}(r) = v_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 + \left(\frac{r}{a} \right)^3 \right]. \quad (2.44)$$

El primer perfil de velocidad (2.41) si satisface la condición de neutralidad global del plasma (2.30) y (2.32) los demás perfiles de velocidad no satisfacen esta condición; sin embargo estos perfiles de velocidad (2.42)-(2.44) pueden tratarse siempre y cuando se reconozca que generan una desviación de la neutralidad local y global.

El interés de estos artículos de investigación, como el de T. D. Arber, es el estudio de la estabilidad del equilibrio el cual depende de las cantidades de equilibrio (Capítulo 4); al proponer la velocidad de equilibrio como arbitraria los análisis de estabilidad arrojarán resultados de un equilibrio que no necesariamente es autoconsistente.

2.4. Cantidades de Equilibrio para un Z-Pinch.

Al suponer que el factor de la desviación de la neutralidad es constante las cantidades del equilibrio estacionario pueden determinarse fácilmente, para lo cual basta conocer las densidades de corriente (2.16) y de partículas (2.17). Por esta razón es necesario suponer conocidas las funciones adimensionales y normalizadas $j_0(r)$ y $N_0(r)$. El único criterio que se utilizará para proponer las funciones $j_0(r)$ y $N_0(r)$ será que la velocidad del flujo de equilibrio (2.15) no sea divergente a lo largo del cilindro. Al conocer estas densidades y con la ayuda de la ecuación (2.37), se puede determinar el flujo de equilibrio autoconsistente con ellas.

La idea de suponer conocida la densidad de partículas, es pensar en una densidad de partículas deseada y consecuentemente determinar el flujo de equilibrio autoconsistente con esta densidad de partículas. Al decir una densidad de partículas deseada, se está pensando en una densidad de partículas que sea muy grande cerca del centro del cilindro, de tal manera que en esa región del cilindro se favorezcan las reacciones de fusión nuclear, pero en las cercanías de la pared del cilindro la densidad de partículas decrezca rápidamente a cero.

Densidad de corriente $J_{0z}(r) = J_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^n \right]$.

Para proponer el perfil de densidad de corriente se considera un cilindro de radio a , es decir, la longitud característica del plasma es $L = a$. En este cilindro se inyecta una densidad de corriente, la cual tendrá su intensidad máxima en el centro del cilindro y su valor mínimo en las paredes de éste. Por esta razón, la densidad de corriente deberá cumplir con las siguientes condiciones a) $J_{0z}(a) = 0$ y b) $J_{0z}(0) = J_0$, con J_0 el valor máximo de la densidad de corriente.

La densidad de corriente con la cual se trabajará será la siguiente [8]:

$$J_{0z}(r) = J_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^n \right] \Rightarrow j_0(r) = \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^n \right] \quad \forall n > 0 \quad (2.45)$$

Al tener este arreglo del plasma, las condiciones de frontera que deben cumplir las cantidades v_{oz} , $B_{0\theta}$ y E_{0r} son las expresadas en las ecuaciones (1.101), (1.102) y (1.104).

Campo magnético Azimutal $B_{0\theta}(r)$.

Al usar la ecuación (2.45) para calcular la función $F(r)$ se obtiene que:

$$F(r) = \frac{1}{2} r^2 \left[1 - \frac{2}{n+2} \left(\frac{r}{a} \right)^n \right]. \quad (2.46)$$

Al insertar la ecuación (2.46) en la ecuación (2.37) se debe notar que la función $N_0(r)$ debe ser tal que el numerador de la ecuación (2.46), sea proporcional a r^2 para así tener un buen comportamiento en el origen de la función $u_0(r)$.

Al usar la ecuación (2.46) se encuentra que el campo magnético tiene la siguiente dependencia:

$$B_{0\theta}(r) = \frac{\mu_0 a J_0}{2} \left(\frac{r}{a} \right) \left[1 - \frac{2}{n+2} \left(\frac{r}{a} \right)^n \right]. \quad (2.47)$$

Para expresar al campo magnético de la forma (2.18) se observa que el campo magnético toma su valor máximo en el punto:

$$r = \left(\frac{n+2}{2(n+1)} \right)^{\frac{1}{n}} a, \quad (2.48)$$

siendo este valor máximo:

$$B_0 = \frac{\mu_0 a J_0}{2} \left(\frac{n+2}{2(n+1)} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{(n+1)}. \quad (2.49)$$

Por lo tanto, al definir la constante de normalización para el campo magnético C_B :

$$C_B = \frac{n+1}{n} \left(\frac{2(n+1)}{n+2} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (2.50)$$

se obtiene que el campo magnético característico (2.49) se escribe como:

$$B_0 = \frac{\mu_0 a J_0}{2C_B}. \quad (2.51)$$

Finalmente, el campo magnético se escribe de la forma (2.18) como:

$$B_{0\theta}(r) = B_0 C_B \left(\frac{r}{a}\right) \left[1 - \frac{2}{n+2} \left(\frac{r}{a}\right)^n\right], \quad (2.52)$$

donde la función adimensional $b_0(r)$ es:

$$b_0(r) = C_B \left(\frac{r}{a}\right) \left[1 - \frac{2}{n+2} \left(\frac{r}{a}\right)^n\right]. \quad (2.53)$$

Presión $p_0(r)$.

Usando las ecuaciones (2.24), (2.46) y (2.51) se obtiene que la dependencia de la presión del plasma tiene la siguiente forma:

$$p_0(r) = 4C_B^2 \frac{B_0^2}{2\mu_0} \left[\frac{(1 - (r/a)^{2n+2})}{(n+2)(n+1)} - \frac{n+4}{(n+2)^2} (1 - (r/a)^{n+2}) + \frac{1}{2} (1 - (r/a)^2) \right], \quad (2.54)$$

donde se ha supuesto que la presión en la pared del plasma es cero, es decir, la columna de plasma termina en $r = a$, lo cual implicará que la densidad de partículas también deberá ser cero en la pared del cilindro.

Se observa que la presión toma su valor máximo en $r = 0$, siendo éste:

$$p_0 = 4C_B^2 \frac{B_0^2}{2\mu_0} \left[\frac{1}{(n+2)(n+1)} - \frac{n+4}{(n+2)^2} + \frac{1}{2} \right]. \quad (2.55)$$

Definiendo la constante de normalización para la presión C_p y la presión magnética característica p_{0m} como:

$$C_p = \left[\frac{1}{(n+2)(n+1)} - \frac{n+4}{(n+2)^2} + \frac{1}{2} \right]^{-1}, \quad (2.56)$$

$$p_{0m} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} = \frac{1}{8C_B^2} \mu_0 a^2 J_0^2, \quad (2.57)$$

se obtiene que el valor característico de la presión es:

$$p_0 = \frac{4C_B^2}{C_p} p_{0m} = \frac{1}{2C_p} \mu_0 a^2 J_0^2, \quad (2.58)$$

Finalmente, la presión se escribe de la forma (2.19):

$$p_0(r) = p_0 C_p \left[\frac{(1 - (r/a)^{2n+2})}{(n+2)(n+1)} - \frac{n+4}{(n+2)^2} (1 - (r/a)^{n+2}) + \frac{1}{2} (1 - (r/a)^2) \right], \quad (2.59)$$

donde la función adimensional $P_0(r)$ es:

$$P_0(r) = C_p \left[\frac{(1 - (r/a)^{2n+2})}{(n+2)(n+1)} - \frac{n+4}{(n+2)^2} (1 - (r/a)^{n+2}) + \frac{1}{2} (1 - (r/a)^2) \right]. \quad (2.60)$$

Al usar las expresiones (2.57) y (2.58) se puede obtener el cociente entre la máxima presión magnética y la del plasma $\alpha(n)$ (2.61) el cual depende de la elección del parámetro n .

$$\alpha(n) = \frac{p_{0m}}{p_0} = \frac{C_p}{4C_B^2} = \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \left(\frac{n+2}{2(n+1)}\right)^{\frac{2}{n}}}{4 \left[\frac{1}{(n+2)(n+1)} - \frac{n+4}{(n+2)^2} + \frac{1}{2} \right]} \quad (2.61)$$

En la Fig(2.1) se observa que $\alpha(n)$ se aproxima asintóticamente a $1/2$ para valores de $n \gg 1$. Lo anterior quiere decir que no importa qué tan grande sea el valor de n , el valor máximo de la presión magnética p_{0m} nunca será mayor que la mitad del valor máximo de la presión del plasma. Por valores grandes de n se entiende que el perfil de densidad de corriente es aproximadamente uniforme, es decir, la variación a lo largo de la coordenada radial es muy poca excepto en las cercanías de las paredes del cilindro.

Densidad de partículas $n_0(r) = n_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^l \right]$.

La densidad de partículas se propondrá de tal manera que la ecuación (2.37) se satisfaga y que la función $u_0(r)$ sea acotada en el cilindro. Las dos características que se impondrán sobre la densidad de partículas son las siguientes: a) que en el origen tome su valor máximo $n_0(0) = n_0$ y b) que en la pared del cilindro sea cero $n_0(a) = 0$. Esta última condición obliga a que la presión sea cero en $r = a$, es decir, $p_0(a) = 0$.

Para simplificar los cálculos, el primer tipo de dependencia que se supondrá para la densidad de partículas será una análoga a la que tiene la densidad de corriente, es decir,

$$n_0(r) = n_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^l \right] \Rightarrow N_0(r) = \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^l \right] \quad \forall l \geq 0. \quad (2.62)$$

Por esta razón, de la ecuación (2.37) se obtiene:

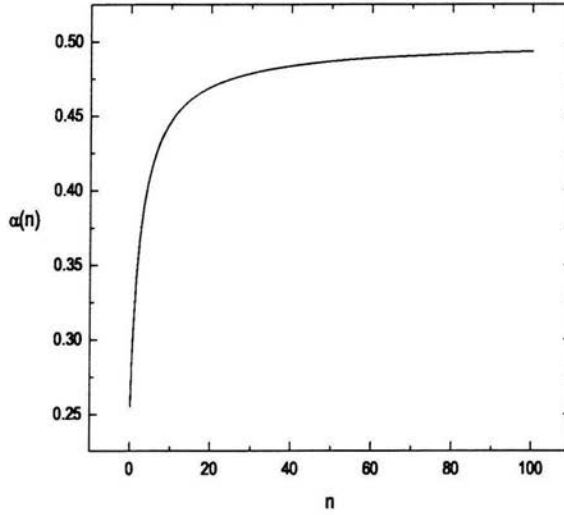


Figura 2.1: Cociente de Presión Magnética entre Presión del Plasma α .

$$u_0(r) = \frac{en_0c^2}{v_0J_0} \lambda \frac{\left[1 - \frac{2}{l+2} \left(\frac{r}{a}\right)^l\right]}{\left[1 - \frac{2}{n+2} \left(\frac{r}{a}\right)^n\right]}. \quad (2.63)$$

Si $n < l$, el máximo de $u_0(r)$ está en $r = a$, siendo éste

$$u_0(a) = 1 = \frac{en_0c^2}{v_0J_0} \lambda \frac{l(n+2)}{n(l+2)}, \quad (2.64)$$

$$\lambda = \frac{v_0J_0}{en_0c^2} \frac{n(l+2)}{l(n+2)}. \quad (2.65)$$

Por lo tanto si $n < l$, la velocidad del flujo de equilibrio toma la forma:

$$v_{0z}(r) = v_0 \frac{n(l+2)}{l(n+2)} \frac{\left[1 - \frac{2}{l+2} \left(\frac{r}{a}\right)^l\right]}{\left[1 - \frac{2}{n+2} \left(\frac{r}{a}\right)^n\right]}. \quad (2.66)$$

Por el contrario si $n > l$, el máximo de $u_0(r)$ está en $r = 0$, siendo éste

$$u_0(0) = 1 = \frac{en_0c^2}{v_0J_0}\lambda, \quad (2.67)$$

$$\lambda = \frac{v_0J_0}{en_0c^2}. \quad (2.68)$$

Por lo tanto si $n > l$, la velocidad del flujo de equilibrio toma la forma:

$$v_{0z}(r) = v_0 \frac{\left[1 - \frac{2}{l+2} \left(\frac{r}{a}\right)^l\right]}{\left[1 - \frac{2}{n+2} \left(\frac{r}{a}\right)^n\right]}. \quad (2.69)$$

De las ecuaciones (2.65) y (2.68) se observa que para satisfacer la condición de cuasineutralidad, los valores característicos de la velocidad de flujo, la densidad de corriente y la densidad de partículas deben ser tales que la combinación adimensional $v_0J_0/en_0c^2 \ll 1$.

Densidad de partículas $n_0(r) = n_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] e^{-(r/a)^2}$.

Para proponer el segundo tipo de dependencia de la densidad de partículas, se pide que la densidad de partículas siga siendo máxima en el centro del cilindro y que decrezca a cero al acercarse a la pared del cilindro. Un tipo de dependencia para la densidad de partículas en la cual se puede pensar, es el siguiente comportamiento Gaussiano:

$$n_0(r) = n_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2} \Rightarrow N_0(r) = \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2}. \quad (2.70)$$

La razón por la que se multiplica por el binomio $\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$ a la Gaussiana, es para garantizar que en el borde del cilindro la densidad de partículas sea cero. Al introducir la expresión para $N_0(r)$ en la expresión (2.37) y considerar el mismo tipo de dependencia para la densidad de corriente (2.45), se encuentra el siguiente tipo de dependencia para la velocidad:

$$u_0(r) = \frac{en_0c^2}{v_0J_0} \lambda \frac{e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2}}{1 - \frac{2}{n+2} \left(\frac{r}{a}\right)^n}. \quad (2.71)$$

Definiendo la constante de normalización para la velocidad como el inverso del valor máximo del cociente anterior:

$$C_v^{-1} = \text{máx} \left(\frac{e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2}}{1 - \frac{2}{n+2} \left(\frac{r}{a}\right)^n} \right), \quad (2.72)$$

entonces el valor del factor λ toma la siguiente forma:

$$\lambda = \frac{v_0 J_0}{en_0 c^2} C_v. \quad (2.73)$$

Por lo tanto la velocidad del flujo es:

$$v_{0z}(r) = v_0 C_v \frac{e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2}}{1 - \frac{2}{n+2} \left(\frac{r}{a}\right)^n}, \quad (2.74)$$

con la función adimensional

$$u_0(r) = C_v \frac{e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^2}}{1 - \frac{2}{n+2} \left(\frac{r}{a}\right)^n} \quad (2.75)$$

Temperatura $T_0(r)$.

Una vez que se conocen la densidad de partículas y la presión de equilibrio, es posible determinar el perfil de temperatura que se obtendrá.

En los párrafos anteriores se determinaron tres posibles familias de equilibrios para los cuales corresponderá un perfil de temperatura diferente. Para obtener el perfil de temperatura como función de r se utiliza la ley de los gases ideales $p = nT$, de esta forma la temperatura se expresa para cada uno de los casos como:

$$T_0(r) = \frac{p_0(r)}{n_0(r)} = T_0 \Theta_0(r), \quad (2.76)$$

con T_0 la temperatura característica y $\Theta_0(r)$ la función adimensional correspondiente a la temperatura tal que $0 < \Theta_0(r) \leq 1$.

El primer caso que se considerará será aquel en el cual la densidad de partículas tiene una dependencia análoga a la densidad de corriente (2.45) y (2.62). Este caso incluye dos familias posibles de equilibrios, la primera de éstas es cuando $n < l$ y la segunda es cuando $n > l$. Para ambos casos el perfil de temperatura tiene la siguiente expresión:

$$T_0(r) = \frac{p_0}{n_0} C_p \frac{\frac{(1-(r/a)^{2n+2})}{(n+2)(n+1)} - \frac{n+4}{(n+2)^2} (1-(r/a)^{n+2}) + \frac{1}{2} (1-(r/a)^2)}{\left[1 - (r/a)^l\right]}. \quad (2.77)$$

Definiendo la constante de normalización de la temperatura C_T como el inverso del valor máximo que toma el cociente anterior, entonces la ecuación (2.77) puede escribirse en términos de un valor característico T_0 y una función adimensional de la siguiente manera:

$$T_0(r) = T_0 \Theta(r), \quad (2.78)$$

donde

$$\Theta_0(r) = C_T \frac{\frac{(1-(r/a)^{2n+2})}{(n+2)(n+1)} - \frac{n+4}{(n+2)^2} (1-(r/a)^{n+2}) + \frac{1}{2} (1-(r/a)^2)}{[1-(r/a)^l]}, \quad (2.79)$$

$$C_T^{-1} = \text{máx} \left(\frac{\left(\frac{(1-(r/a)^{2n+2})}{(n+2)(n+1)} - \frac{n+4}{(n+2)^2} (1-(r/a)^{n+2}) + \frac{1}{2} (1-(r/a)^2) \right)}{[1-(r/a)^l]} \right), \quad (2.80)$$

$$T_0 = \frac{p_0 C_p}{n_0 C_T} = \frac{\mu_0 a^2 J_0^2}{2 C_T n_0}. \quad (2.81)$$

La dependencia funcional de la temperatura (2.79) tiene un problema al ser evaluada en $r = a$ pues se obtiene una indeterminación. Sin embargo, en $r = a$ tanto la densidad de partículas como la presión son cero, es decir, ya no hay plasma en $r = a$ por lo cual ya no se puede hablar de la temperatura del plasma en $r = a$. Es fácil mostrar que para toda n y l se cumple la siguiente ecuación:

$$\lim_{r \rightarrow a} \Theta_0(r) = 0. \quad (2.82)$$

El segundo caso consiste en considerar la temperatura para una densidad de partículas con un perfil Gaussiano. Al introducir esta densidad de partículas (2.70) en la ecuación (2.76) se obtiene el perfil de temperatura para este caso:

$$T_0(r) = T_0 C_p \frac{\frac{(1-(r/a)^{2n+2})}{(n+2)(n+1)} - \frac{n+4}{(n+2)^2} (1-(r/a)^{n+2}) + \frac{1}{2} (1-(r/a)^2)}{[1-(r/a)^2] e^{-(r/a)^2}}. \quad (2.83)$$

Al igual que para el caso anterior, la ecuación (2.83) se puede escribir de la forma (2.78), donde:

$$\Theta_0(r) = C_T \frac{\frac{(1-(r/a)^{2n+2})}{(n+2)(n+1)} - \frac{n+4}{(n+2)^2} (1-(r/a)^{n+2}) + \frac{1}{2} (1-(r/a)^2)}{[1-(r/a)^2] e^{-(r/a)^2}}. \quad (2.84)$$

$$C_T^{-1} = \text{máx} \left(\frac{\left(\frac{(1-(r/a)^{2n+2})}{(n+2)(n+1)} - \frac{n+4}{(n+2)^2} (1-(r/a)^{n+2}) + \frac{1}{2} (1-(r/a)^2) \right)}{[1-(r/a)^2] e^{-(r/a)^2}} \right), \quad (2.85)$$

$$T_0 = \frac{p_0 C_p}{n_0 C_T} = \frac{\mu_0 a^2 J_0^2}{2 C_T n_0}. \quad (2.86)$$

Capítulo 3

Familias de Equilibrios Estacionarios.

3.1. Introducción.

El objetivo del presente capítulo es ejemplificar el método descrito en el capítulo 2 y así obtener algunos equilibrios estacionarios autoconsistentes para la configuración del Z-Pinch. Para generar estos equilibrios será necesario suponer conocidas la densidad de corriente y la de partículas pues con ellas se determinan todas las demás cantidades de equilibrio. El único perfil de densidad de corriente que se usará será el dado por la ecuación (2.45); sin embargo, en el capítulo 2 se propusieron dos tipos de densidades de partículas (2.62) y (2.70) las cuales al ser combinadas con la densidad de corriente (2.45) proporcionarán equilibrios diferentes. A los estados de equilibrio estacionario que se obtengan se les hará un análisis cualitativo para poder determinar si son estados de equilibrio estacionario deseables, entendiendo por deseable que la densidad de partículas, la presión y la temperatura tomen su valor máximo en el centro del cilindro; además, el valor de estas cantidades debe decrecer rápidamente al crecer el radio del cilindro. El pedir que la densidad de partículas y la temperatura tomen su valor máximo en el centro obedece al siguiente razonamiento: En la región del plasma en la cual la densidad de partículas sea máxima el camino libre de las partículas disminuirá y el número de colisiones entre las partículas aumentará; de esta forma aumentará la probabilidad de que se presenten colisiones que den como resultado reacciones de fusión. Sin embargo, no basta con reducir el camino libre de las partículas también se debe aumentar la velocidad con la cual las partículas choquen entre sí, lo cual se logra al aumentar la temperatura del plasma. Por otro lado, se desea que la región del plasma en la cual la temperatura es máxima esté lejos de las paredes del cilindro para lo cual se pide que el máximo de temperatura y de densidad de partículas esté en el centro del cilindro. Al tener que los valores máximos de densidad de partículas y de temperatura estén en el centro del cilindro se consigue que la presión del plasma sea máxima también ahí. El método desar-

rollado en el capítulo 2 permite forzar a que la presión y la densidad de partículas sean máximas en el centro, pero no así con la temperatura, por lo que habrá que determinar en qué condiciones se logra que la temperatura sea máxima en el centro del cilindro. Una característica adicional para hablar de un equilibrio estacionario deseable es que la velocidad de flujo sea cortante, es decir, que varíe de manera considerable al crecer el valor de (r/a) .

3.2. Densidad de Corriente.

La ecuación (2.45) proporciona la dependencia del perfil de densidad de corriente con el cual se trabajará; la única restricción que ésta tiene es que $n > 0$, pero este parámetro puede ser o no un número entero.

Las cantidades de equilibrio $B_{0\theta}(r)$ y $p_0(r)$ no tienen una relación directa con las cantidades de equilibrio $n_0(r)$ y $v_{0z}(r)$, sólo dependen de la densidad de corriente $J_{0z}(r)$; por esta razón, al fijar la dependencia de la densidad de corriente $J_{0z}(r)$ (2.45) las cantidades $B_{0\theta}(r)$ y $p_0(r)$ quedarán determinadas y pueden estudiarse independientemente de la densidad de partículas $n_0(r)$.

En todos los cálculos que se hagan de ahora en adelante se supondrá que el valor característico de la densidad de corriente J_0 es fijo. Los valores de n que se utilizarán serán los siguientes:

- 1) $n = 1/2$
- 2) $n = 2$
- 3) $n = 20$

Los perfiles de densidad de corriente para estos valores de n se observan en la figura (3.1). El primer caso $n = 1/2$ representa una densidad de corriente que es muy intensa sólo en las cercanías del centro del cilindro y que su valor decrece rápidamente al crecer el valor de (r/a) . Al disminuir el valor del parámetro n , el comportamiento anterior de la densidad de corriente se hace más evidente, es decir, para valores de $n \ll 1$, la densidad de corriente que se genera, toma un valor que es importante únicamente en las cercanías del centro del cilindro, pero no así cerca de la pared del cilindro. Este tipo de perfiles de densidad de corriente expresa que el flujo de carga eléctrica es sólo importante en las cercanías del centro del cilindro. El segundo caso representa una densidad de corriente que es intensa en las cercanías del cilindro y decrece más lentamente que el caso anterior al crecer (r/a) . El último caso representa una densidad de corriente que es aproximadamente constante en la mayor parte del cilindro y que en las cercanías de la pared de éste decrece abruptamente a cero. A pesar de que el valor característico de la densidad de corriente J_0 es el mismo para los tres casos, el flujo de carga eléctrica (la corriente eléctrica) no es el mismo pues éste depende del valor de n ; mientras más grande sea el valor de n mayor flujo de carga eléctrica habrá y por lo tanto el campo magnético generado será más intenso.

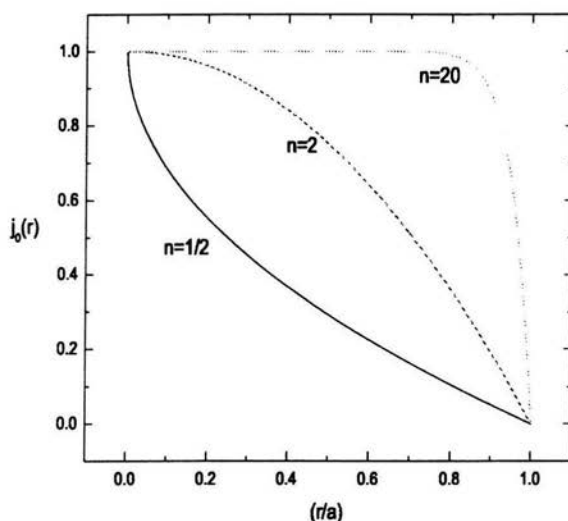


Figura 3.1: Densidad de Corriente.

Es oportuno discutir en este momento la razón de este tipo de perfiles de densidad de corriente.

Desde el punto de vista del modelo MHD ideal el plasma es un conductor ideal, es decir, con conductividad infinita; en este contexto se sabe que la densidad de corriente debe fluir por la superficie del plasma. Sin embargo, los experimentos muestran perfiles de densidad de corriente cuya forma depende de la manera en la cual se generó el plasma; por ejemplo si el plasma se ha generado a partir de la ionización de una fibra sólida, la densidad de corriente tiende a concentrarse en el eje de la fibra decreciendo rápidamente hacia el exterior de ésta; por otro lado, si el plasma es generado por un cilindro de gas que se comprime, entonces la densidad de corriente se concentra en la región del borde del cilindro. Una comprensión más completa de los perfiles de densidad de corriente requiere considerar el efecto de la resistividad, que en el presente trabajo se ha supuesto despreciable con respecto a los otros términos que aparecen en la ley de Ohm generalizada (1.80).

Una vez hechas estas aclaraciones se continuará con la ejemplificación del método desarrollado en el capítulo anterior.

3.3. Campo Magnético y Presión de Plasma.

3.3.1. Campo magnético.

En la figura (3.2) se observa el comportamiento cualitativo del campo magnético para los diferentes casos considerados. Para los tres casos se observa que el campo magnético es cero en el centro del cilindro, crece hasta alcanzar su valor máximo el cual toma en el interior del cilindro y posteriormente decrece. La rapidez con la cual el campo magnético crece depende del valor del parámetro n , es decir, del correspondiente perfil de densidad de corriente; también se observa que mientras más grande sea el valor de n el campo magnético toma su valor máximo más cerca de la pared del cilindro. De acuerdo con la ecuación (2.20), en el exterior del cilindro el comportamiento del campo magnético será proporcional a $(1/r)$.

Los valores característicos del campo magnético para los tres diferentes casos son los siguientes: para $n = 1/2$ $B_0 \simeq 0.12 (\mu_0 a J_0)$, $n = 2$ $B_0 \simeq 0.27 (\mu_0 a J_0)$, $n = 20$ $B_0 \simeq 0.46 (\mu_0 a J_0)$, es decir, al crecer el valor de n el campo magnético es más intenso lo cual es de esperarse pues al crecer el valor de n la corriente que atraviesa la sección transversal del cilindro es mayor y por lo tanto el campo magnético será más intenso.

3.3.2. Presión de Plasma.

En la figura (3.3) se observa que el comportamiento cualitativo de la presión de plasma no varía de manera importante al variar n . Dicho comportamiento para los tres casos considerados es el siguiente: La presión toma su valor máximo en el centro del cilindro y al crecer el valor de (r/a) decrece hasta cero en $(r/a) = 1$. Lo único que varía entre los perfiles de presión de la figura (3.3) es la rapidez con la cual la presión decrece; mientras más grande sea el valor de n más lentamente decrecerá el perfil de presión.

Los valores característicos de la presión de plasma para los diferentes casos son los siguientes: $n = 1/2$ $p_0 \simeq 2.3 \times 10^{-2} (\mu_0 a^2 J_0^2)$, $n = 2$ $p_0 \simeq 1.04 \times 10^{-1} (\mu_0 a^2 J_0^2)$, $n = 20$ $p_0 \simeq 2.26 \times 10^{-1} (\mu_0 a^2 J_0^2)$, es decir, al igual que para el campo magnético al crecer el valor de n el valor característico de la presión crece.

3.3.3. Presión Magnética

Una cantidad muy importante que sirve como diagnóstico del confinamiento magnético del plasma, es la presión magnética $p_{0m}(r) = B_0^2(r)/2\mu_0$. El comportamiento cualitativo de la presión magnética se observa en la figura (3.4); en esta figura se graficó el producto del factor $\alpha(n)$ ec.(2.61) por la función adimensional b_0^2 ec.(2.53); la razón de haber hecho esto fue para poder comparar la presión magnética con la presión del plasma. En la figura (3.4) se observa que el comportamiento cualitativo de la presión magnética es análogo al del campo magnético, es decir, es cero en el centro del cilindro,

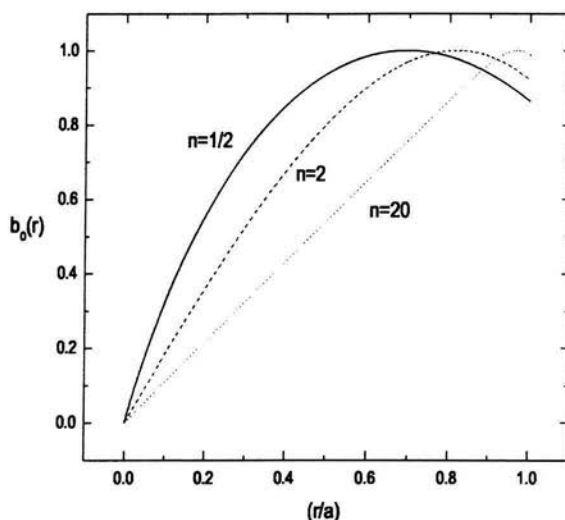


Figura 3.2: Campo Magnético.

crece hasta tomar su valor máximo en el interior del cilindro y en el exterior del cilindro decrece proporcional a $(1/r^2)$. Al comparar la figura (3.4) con la figura (3.3) se observa que la presión magnética es despreciable comparada con la de plasma en las cercanías del centro del cilindro; sin embargo al crecer (r/a) la presión magnética crece y la de plasma decrece hasta llegar a un valor de (r/a) en el cual la presión magnética domina a la de plasma. Las regiones a partir de las cuales esto sucede son las siguientes: $n = 1/2$ (r/a) $\simeq 0.7$, $n = 2$ (r/a) $\simeq 0.8$ y $n = 20$ (r/a) $\simeq 0.9$, es decir, la región en la cual la presión del plasma domina es en las cercanías de la pared del cilindro. Los valores característicos de la presión magnética y los valores del factor α son los siguientes: $n = 1/2$ con $p_{0m} \simeq 6.7 \times 10^{-3} (\mu_0 a^2 J_0^2)$ y $\alpha \simeq 0.29$, $n = 2$ con $p_{0m} \simeq 4.7 \times 10^{-2} (\mu_0 a^2 J_0^2)$ y $\alpha \simeq 0.35$, $n = 20$ con $p_{0m} \simeq 1.06 \times 10^{-1} (\mu_0 a^2 J_0^2)$ y $\alpha \simeq 0.47$, es decir, al aumentar el valor del parámetro n , el valor característico de la presión magnética y el del factor α crecen lo cual concuerda con la figura (2.1).

Del análisis cualitativo anterior se pueden hacer las siguientes conclusiones:

1) El campo magnético tiene el mismo comportamiento cualitativo para los tres casos expuestos. Este comportamiento se caracteriza por que en el centro del cilindro el

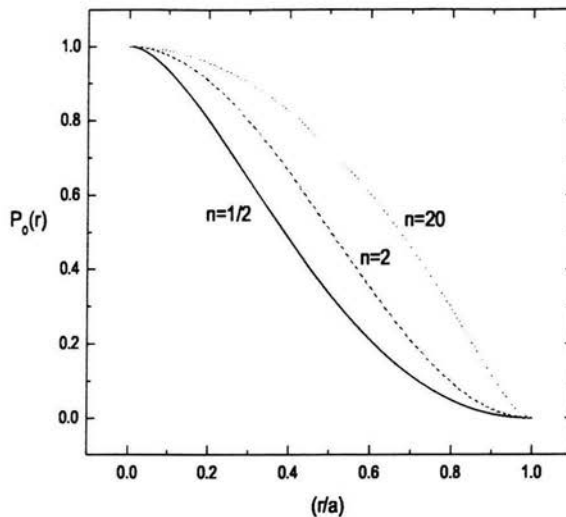


Figura 3.3: Presión del Plasma.

valor del campo magnético es cero y por que el valor del campo magnético crece hasta alcanzar su valor máximo en un valor del radio, el cual varía dependiendo del valor de n . Mientras más grande sea el valor n , es decir, densidades de corriente más uniformes, el campo magnético tomará su valor máximo más cerca de la pared del cilindro.

2) Para los perfiles de presión de plasma y presión magnética se observa lo siguiente. Al generar densidades de corriente cuya intensidad es muy importante cerca del centro del cilindro $n \ll 1$, se producen perfiles de presión del plasma que decrecen rápidamente a cero al crecer (r/a) . Para este tipo de densidades de corriente la presión magnética domina rápidamente a la presión del plasma cuando (r/a) crece. Sin embargo, los valores característicos de campo magnético, presión y presión magnética son pequeños comparados con los que se obtienen para valores más grandes del parámetro n . Además, el valor del factor α también es pequeño comparado con valores de n grandes Fig(2.1). Por otro lado, al generar densidades de corriente que son aproximadamente uniformes en la mayor parte del cilindro excepto en las cercanías de la pared de éste, $n \gg 1$, se producen perfiles de presión del plasma que caen a cero al crecer (r/a) . Sin embargo, los perfiles de presión que se generan no decrecen tan rápido como lo hacen los

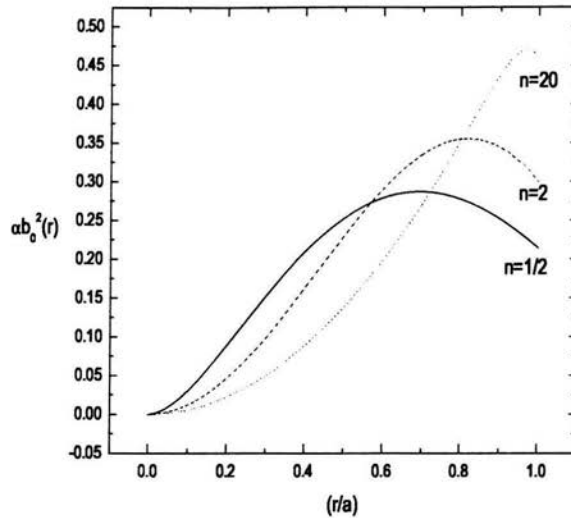


Figura 3.4: Presión Magnética.

perfiles de presión para densidades de corriente cuyos valores de n son pequeños. Para este tipo de densidades de corriente, el perfil de presión magnética empieza a dominar al de presión del plasma muy cerca de la pared del cilindro.

Una vez estudiadas las cantidades $J_0(r)$, $B_{0\theta}(r)$ y $p_0(r)$, se analizarán las cantidades de equilibrio que dependen tanto de la densidad de corriente como de la densidad de partículas y así se determinarán los equilibrios autoconsistentes.

3.4. Equilibrio 1: Densidad de Partículas Binomial.

Los valores de l que se utilizarán para definir el perfil de densidad de partículas y por ello los de temperatura y velocidad de flujo, serán los siguientes:

- 1) $l = 1/4$
- 2) $l = 3$
- 3) $l = 30$

El comportamiento cualitativo de estos perfiles de densidad de partículas se observa en la figura (3.5). Para la densidad de partículas con $l = 1/4$ se observa que ésta decrece

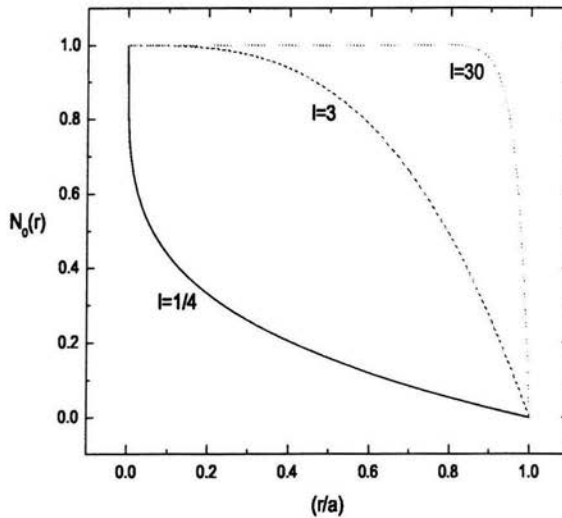


Figura 3.5: Densidad de Partículas Binomial.

rápidamente al crecer (r/a) , por lo que el plasma se encuentra concentrado en el centro del cilindro y su presencia en el borde de éste es casi nula. En principio, este tipo de perfiles de densidad de partículas son los que se desearían tener en el confinamiento plasma para así mantener alejada a la columna del plasma de la pared del cilindro. Sin embargo, más adelante se discutirán las razones por las que este tipo de perfiles no son convenientes para el estado de equilibrio estacionario. Para el caso de la densidad de partículas con $l = 3$ se observa que la densidad de partículas tiene un comportamiento más uniforme que en el caso $l = 1/4$, es decir, este perfil de densidad de partículas cae a cero más lentamente al crecer (r/a) lo cual significa que el plasma es muy denso en el centro del cilindro y deja de serlo en una región no muy lejana al centro de éste. Finalmente, el caso con $l = 30$ genera un perfil de densidad de partículas que es aproximadamente uniforme en la mayor parte del cilindro con excepción de la región cercana a la pared del cilindro, en la cual cae a cero abruptamente.

3.4.1. Densidad de Partículas $l = 1/4$.

En la figura (3.6) se observa el comportamiento cualitativo de los perfiles de temperatura para esta densidad de partículas. En ella se observa que para los tres diferentes valores de n el perfil de temperatura no toma su valor máximo en el centro del cilindro como es deseado, sino que al variar el valor del parámetro n la posición del máximo de temperatura se aleja del centro del cilindro; este comportamiento del perfil de temperatura se hace más notorio al disminuir el valor del parámetro l y aumentar el de n obteniendo como resultado, que el máximo de temperatura se acerca a la pared del cilindro. Los valores característicos para estos perfiles de temperatura son $T_0 \approx 1.24 (\mu_o a^2 J_0^2 / n_0)$ para $n = 1/2$, $T_0 \approx 1.62 (\mu_o a^2 J_0^2 / n_0)$ para $n = 2$ y $T_0 \approx 2.73 (\mu_o a^2 J_0^2 / n_0)$ para $n = 20$.

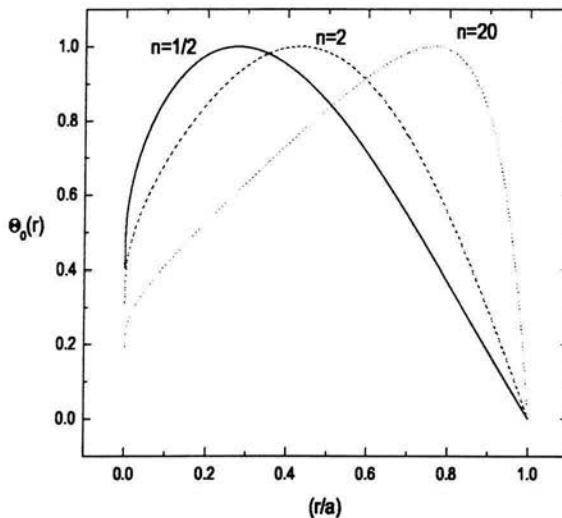


Figura 3.6: Perfiles de Temperatura para $l = 1/4$.

Por otro lado, en la figura (3.7) se observa que al combinar este valor de l con los diferentes valores de n estudiados anteriormente, se generan perfiles de velocidad de flujo cortantes, es decir, que tienen una variación importante entre sus valores máximo y mínimo; además, todos los perfiles de velocidad para este perfil de densidad de partículas toman su valor máximo en el centro del cilindro.

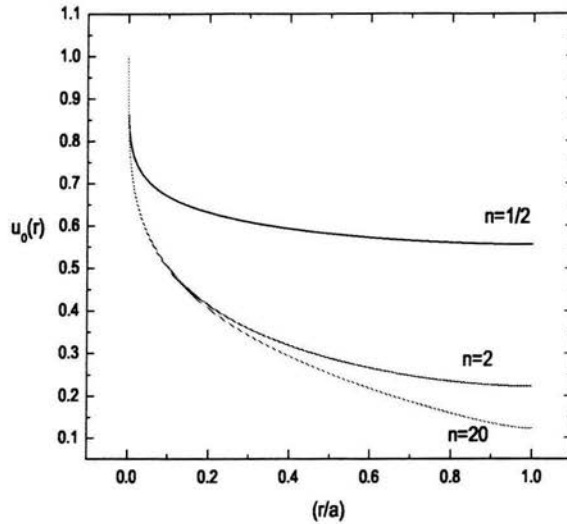


Figura 3.7: Perfiles de Velocidad de Flujo para $l = 1/4$.

3.4.2. Densidad de Partículas $l = 3$.

En la figura (3.8), se observa que los perfiles de temperatura que se obtienen al combinar este valor de l con los diferentes valores de n propuestos, si generan un perfil de temperatura cuyo máximo está en el centro del cilindro lo cual, como se explicó en la introducción, se desea obtener; de esta forma la región más caliente del plasma se mantiene alejada de las paredes del cilindro independientemente del valor que tome el parámetro n . De estos perfiles de temperatura, resultan interesantes los dos primeros $n = 1/2$ y $n = 2$ en los cuales el perfil de temperatura decrece rápidamente a cero al crecer el cociente (r/a) . Sin embargo, el perfil de temperatura para $n = 20$ no decrece tan rápido y cerca de la pared del cilindro el perfil tiene una temperatura comparable con la temperatura máxima que se obtiene en el centro. Para estos perfiles de temperatura el valor característico es $T_0 \approx 0.5 (\mu_0 a^2 J_0^2 / n_0)$ el cual es menor que los valores característicos de la temperatura para el perfil de densidad de partículas $l = 1/4$.

La figura (3.9) muestra los perfiles de velocidad de flujo generados para esta densidad de partículas los cuales representan flujos cortantes. Para los dos últimos casos $n = 2$ y $n = 20$ la variación del perfil es muy pequeña comparada con la que tiene el primer

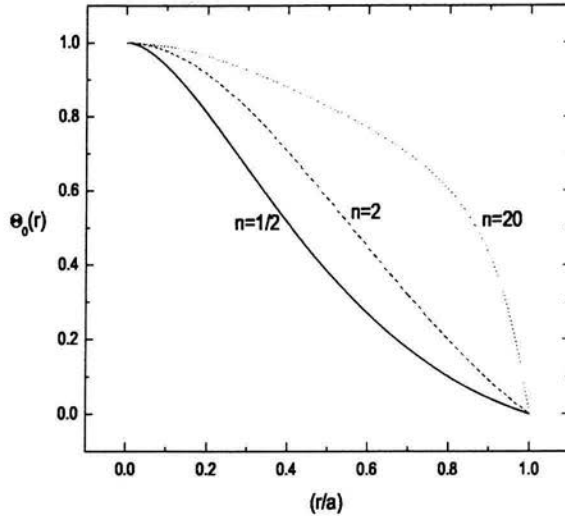


Figura 3.8: **Perfiles de Temperatura para $l = 3$.**

caso $n = 1/2$ cuya variación es mayor.

De los comentarios hechos para los perfiles de temperatura y de velocidad de flujo se observa que el equilibrio generado por una densidad de corriente y una densidad de partículas con $n = 1/2$ y $l = 3$ respectivamente, es un equilibrio deseable pues sus perfiles de densidad de partículas, presión y temperatura toman sus valores máximos en el centro del cilindro y decrecen rápidamente. Además, el perfil de velocidad es un perfil cortante que varía mucho entre su valor mínimo (en centro del cilindro) y su valor máximo (en la pared del mismo).

3.4.3. Densidad de Partículas $l = 30$.

En la figura (3.10) se observan los perfiles de temperatura que se obtienen al combinar este valor de l con los diferentes valores de n propuestos anteriormente; estos perfiles de temperatura tienen un comportamiento deseado pues, para los tres casos, el valor máximo es en el centro y los perfiles de temperatura decrecen rápidamente a cero al crecer (r/a) . El valor característico para los tres perfiles de temperatura es

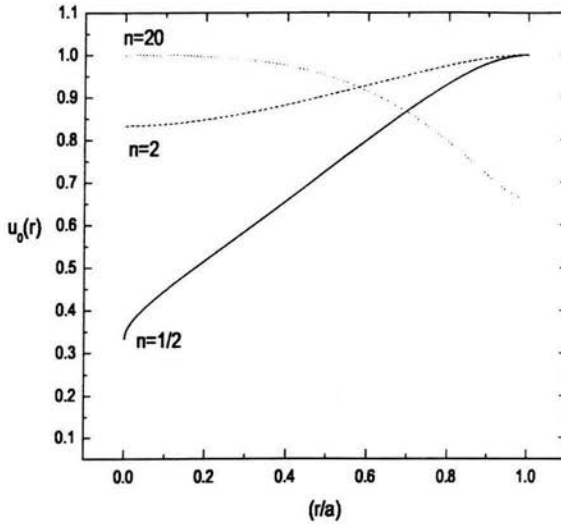


Figura 3.9: Perfiles de Velocidad de Flujo para $l = 3$.

$$T_0 \approx 0.5 (\mu_0 a^2 J_0^2 / n_0).$$

La figura (3.11) muestra los perfiles de velocidad de flujo generados para esta densidad de partículas los cuales representan flujos cortantes. Para los dos primeros casos $n = 1/2$ y $n = 2$ la variación del perfil es muy importante; sin embargo el perfil de velocidad con $n = 20$ prácticamente se tiene un flujo uniforme.

De los comentarios hechos para los perfiles de temperatura y de velocidad de flujo se observa que los equilibrios generados por una densidad de corriente y una densidad de partículas con $n = 1/2, 2$ y $l = 30$ respectivamente, son equilibrios deseables pues sus perfiles de densidad de partículas, presión y temperatura toman sus valores máximos en el centro del cilindro y decrecen rápidamente. Además, el perfil de velocidad es un perfil cortante que varía mucho entre su valor mínimo (en centro del cilindro) y su valor máximo (en la pared del mismo).

De este análisis cualitativo se pueden hacer las siguientes conclusiones para este tipo de equilibrio.

1) Las densidades de partículas cuyos perfiles tomen un valor muy importante en el centro del cilindro $l < 1$, es decir, plasmas muy densos en las cercanías del centro

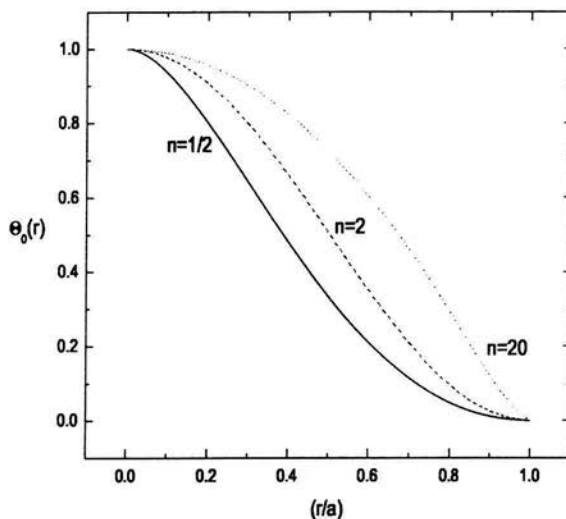


Figura 3.10: **Perfiles de Temperatura para $l = 30$.**

del cilindro, y poco densos en el resto del mismo, generan perfiles de temperatura que no toman su valor máximo en el centro del cilindro, sino que lo hacen cerca de la pared del cilindro, lo cual no es deseado. Además, mientras más rápido decrezca la densidad de partículas al crecer (r/a) más cerca de la pared del cilindro estará el máximo de temperatura. Por lo tanto, los perfiles de densidad de partículas no deben ser de esta forma.

2) Un equilibrio estacionario deseable se obtiene al generar una densidad de corriente cuyo perfil tenga un valor muy importante sólo en el centro del cilindro ($n < 1$) y el perfil de densidad de partículas sea uniforme en una región cercana al centro del cilindro, pero que en las cercanías de la pared del cilindro decrezca rápidamente a cero ($l > 1$).

3.5. Equilibrio 2: Densidad de Partículas Gaussiana.

Para este equilibrio la densidad de partículas se muestra en la figura (3.12). En este equilibrio la temperatura y la velocidad de flujo sólo dependen de la elección del valor

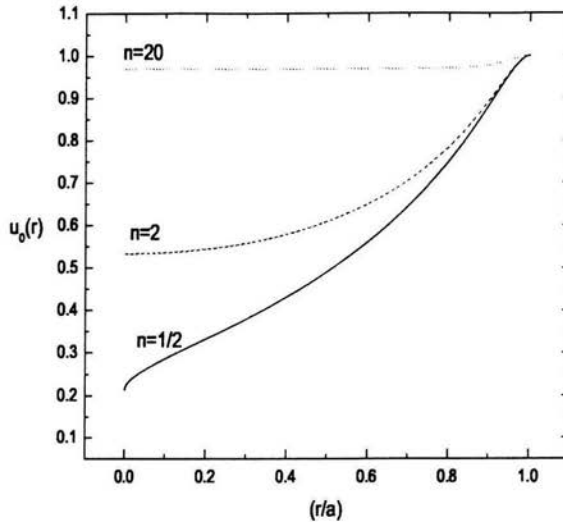


Figura 3.11: Perfiles de Velocidad de Flujo para $l = 30$.

de n .

En la figura (3.13) se muestran los perfiles de temperatura para las diferentes combinaciones de n . Para el primer caso $n = 1/2$ el perfil de temperatura no decrece tan rápido como lo hacen algunos de los perfiles de temperatura del equilibrio 1, pero sí cumple con la condición de tomar su valor máximo en el centro del cilindro siendo éste $T_0 = 0.5 (\mu_0 a^2 J_0^2 / n_0)$. Para el segundo caso $n = 2$ el perfil de temperatura toma su valor máximo $T_0 \approx 0.5 (\mu_0 a^2 J_0^2 / n_0)$ en el centro del cilindro; sin embargo el valor de la temperatura no decrece tan rápido como para el caso $n = 1/2$. Para el último caso $n = 20$ el perfil de temperatura toma su valor máximo $T_0 \approx 0.77 (\mu_0 a^2 J_0^2 / n_0)$ cerca de la pared del cilindro lo que no es deseable pues la parte más caliente del plasma está cerca de la pared del cilindro. Este corrimiento de la posición del máximo de temperatura para este tipo de densidad de partículas, comienza a notarse para valores de $n > 4$. Lo anterior quiere decir que si se combina una densidad de partículas de este tipo junto con una densidad de corriente que sea uniforme en las cercanías del cilindro, entonces el perfil de temperatura no tendrá su valor máximo en el centro del cilindro y se acercará a la pared del cilindro mientras más uniforme sea la densidad de corriente.

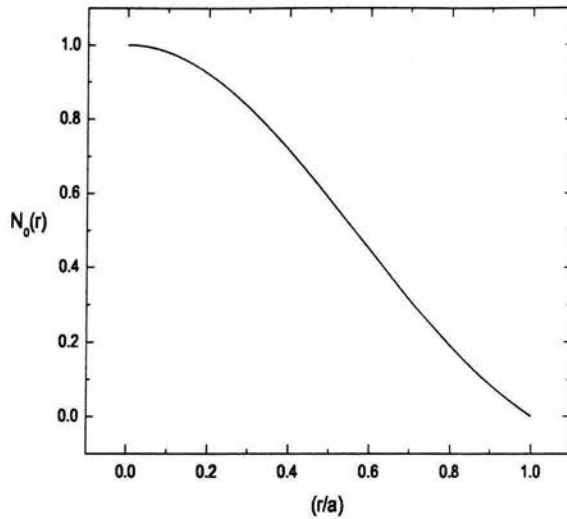


Figura 3.12: Densidad de Partículas Gaussiana.

En la figura (3.14) se muestran los diferentes perfiles de velocidades de flujo que son autoconsistentes con las densidades de corriente propuestas y esta densidad de partículas. Para el primer caso $n = 1/2$ el perfil de velocidad de flujo tiene una variación importante, es decir, esta combinación de densidad de corriente con la densidad de partículas Gaussiana, genera velocidades de flujo cortantes. En este caso el perfil de velocidad toma su máximo en las cercanías de la pared del cilindro. Para el segundo caso $n = 2$ el perfil de velocidad de flujo toma su valor máximo en el centro del cilindro, pero su variación es menor comparada con la variación que tienen los casos $n = 1/2$ y $n = 20$ cuyas variaciones son más notorias. Finalmente el caso $n = 20$ representa un perfil de velocidad cuya variación es más importante que los dos casos anteriores. Sin embargo, el perfil de temperatura asociado en este caso, representa un perfil no deseado por lo tanto este caso no es de interés.

Del análisis cualitativo anterior se pueden hacer las siguientes conclusiones.

1) Si el equilibrio estacionario está constituido por una densidad de partículas del tipo Gaussiana, entonces el perfil de temperatura tendrá dos comportamientos diferentes dependiendo del valor del parámetro n . El primero de ellos es para valores de $n \lesssim 4$

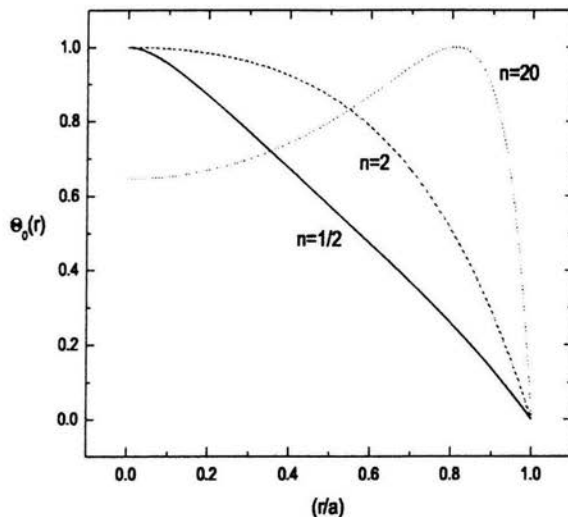


Figura 3.13: Perfiles de Temperatura para una Densidad de Partículas Gaussiana.

para los cuales el perfil de temperatura toma su valor máximo en el centro del cilindro y decrece al acercarse a las paredes del cilindro. Sin embargo, el decremento del perfil no es tan rápido como lo era para el equilibrio 1. Los valores de n para los cuales temperatura decrece suficientemente rápido son $n < 1$, pues para valores $1 < n < 4$ el perfil decrece muy lentamente. El segundo comportamiento del perfil de temperatura es para valores de $n \gtrsim 4$, para los cuales el perfil de temperatura es no deseado pues el máximo de la temperatura no está en el centro del cilindro sino que se acerca hacia las paredes del cilindro. El valor $n \approx 4$ es el valor aproximado del umbral del perfil de temperatura; este valor separa los perfiles de temperatura que son deseados de los no deseados.

2) El perfil de velocidad de flujo tiene una variación importante para este tipo de densidades de partículas, pero deben elegirse densidades de corriente que generen un flujo cortante, pero también que generen un perfil de temperatura que tome su valor máximo en el centro del cilindro y decrezca rápidamente al crecer (r/a) .

Resulta difícil comparar los resultados aquí expuestos pues son pocos los trabajos de investigación en estabilidad que aclaran que equilibrio están estudiando. Uno de estos trabajos que aclara los equilibrios que estudia es el trabajo de T. D. Arber [9].

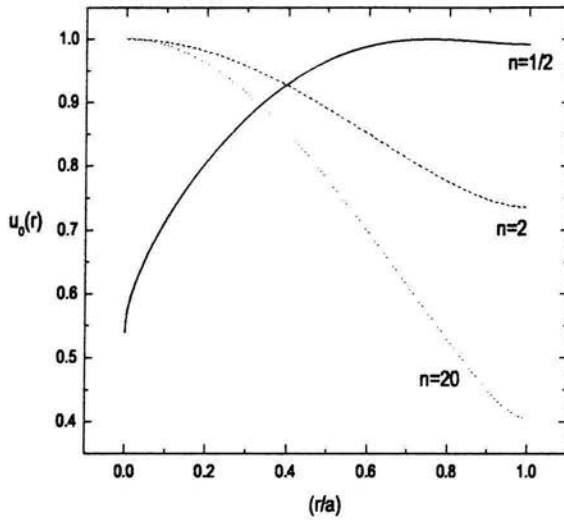


Figura 3.14: **Perfiles de Velocidad de Flujo para una Densidad de Partículas Gaussiana.**

Además, los artículos de investigación no discuten las desviaciones de la neutralidad que se presentan en un equilibrio estacionario, discusión fundamental en el presente trabajo.

Capítulo 4

Estabilidad MHD del Z-Pinch.

4.1. Introducción

El estudio de la estabilidad MHD pretende determinar qué tipo de equilibrios son estables bajo perturbaciones arbitrariamente pequeñas. Dicho estudio se realiza mediante las ecuaciones MHD linealizadas (sección 4.2).

Al aplicar una pequeña perturbación sobre el estado de equilibrio del plasma, éste tenderá a regresar o alejarse de su estado de equilibrio original [10]. Estas dos posibilidades se denominan estado de equilibrio estable e inestable respectivamente. Estos equilibrios dependen del tipo de geometría magnética que se utilice en el confinamiento. La estabilidad MHD es crucial debido a que el confinamiento magnético de los plasmas se destruye como consecuencia de las inestabilidades; por esta razón hay un consenso en la comunidad internacional de plasmas en que la estabilidad MHD es indispensable para el funcionamiento de un reactor de fusión nuclear.

La motivación para estudiar la estabilidad de equilibrios MHD con flujos se debe a que experimentalmente se ha encontrado que la presencia de un flujo axial en un Z-Pinch ayuda a suprimir las inestabilidades que se presentan al no haber flujo. El comprender este tipo de efectos significaría avances en el desarrollo de reactores de fusión, pues uno de los problemas que estos tienen es que el confinamiento magnético que se hace del plasma es destruido por la presencia de inestabilidades.

El objetivo de este capítulo no es resolver, sino plantear el problema de la estabilidad de un equilibrio MHD para un Z-Pinch con un flujo axial de equilibrio. Este planteamiento no se hace en los libros de texto debido a la complejidad de las ecuaciones. Los primeros intentos por tratar este problema tienen sus orígenes en el artículo de E. Frieman y M. Rotenberg [11]. Además, se presentarán brevemente algunos resultados teóricos y experimentales que se han presentado en los trabajos de investigación sobre el tema.

4.2. Linealización de las Ecuaciones MHD.

El estudio de la estabilidad del plasma puede hacerse mediante el modelo MHD siempre y cuando se cumplan las condiciones descritas en el capítulo 1; de lo contrario la estabilidad del plasma deberá estudiarse con el modelo de los dos fluidos también descrito en el capítulo 1.

Si se desea estudiar la estabilidad del plasma mediante el modelo MHD (1.93)-(1.98) debe notarse que este modelo es de inicio no lineal. Desafortunadamente los problemas que involucran ecuaciones diferenciales no lineales son muy complicados de resolver de manera exacta; por esta razón, los problemas no lineales se tratan de resolver mediante métodos aproximados como lo son los numéricos. Sin embargo, los métodos numéricos que se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales parciales no lineales son muy complicados. Una primera aproximación que se utiliza para el estudio de la estabilidad del plasma consiste en linealizar las ecuaciones del modelo MHD; este estudio es conocido como el estudio de la estabilidad lineal del plasma.

Para linealizar las ecuaciones MHD se hacen las siguientes suposiciones:

i) Fuera del equilibrio MHD, todas las cantidades del plasma pueden expresarse como la suma de la correspondiente cantidad de equilibrio $\nu_0(\mathbf{r})$ (dependiente sólo de la posición) más una pequeña perturbación $\nu_1(\mathbf{r}, t)$ (dependiente de la posición y del tiempo). Al decir que la perturbación es pequeña, se está pensando que su magnitud lo es comparada con la cantidad característica del equilibrio.

ii) Los términos de las cantidades perturbadas que sean de segundo u orden superior, se desprecian con respecto a los términos de primer orden y de orden cero.

Usando las suposiciones anteriores, las cantidades del plasma fuera del equilibrio pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t), \quad (4.1)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0(\mathbf{r}) + \rho_1(\mathbf{r}, t), \quad (4.2)$$

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0(\mathbf{r}) + p_1(\mathbf{r}, t), \quad (4.3)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t), \quad (4.4)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t), \quad (4.5)$$

$$\rho_c(\mathbf{r}, t) = \rho_{0c}(\mathbf{r}) + \rho_{1c}(\mathbf{r}, t) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{J}_1(\mathbf{r}, t). \quad (4.7)$$

Al sustituir las cantidades anteriores en las ecuaciones del modelo MHD (1.93)-(1.98), se obtiene un sistema de ecuaciones que se puede simplificar al utilizar las ecuaciones de equilibrio (2.1)-(2.8) y despreciar los términos de segundo orden correspondientes a las perturbaciones. Este sistema de ecuaciones se conoce como las ecuaciones MHD linealizadas y es el siguiente:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla \rho_0 + \rho_1 \nabla \cdot \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \rho_1 + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \cdot \nabla p_0 + \gamma p_1 \nabla \cdot \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla p_1 + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} & \rho_0 \left[\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \right] + \rho_1 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = \\ & = -\nabla \left(p_1 + \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{B}_1}{\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} [(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \mathbf{B}_1 + (\mathbf{B}_1 \cdot \nabla) \mathbf{B}_0], \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_1) + \nabla \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0), \quad (4.11)$$

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}_1, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{E}_1 = -[(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_1) + (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0)] \quad (4.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{\rho_{1c}}{\epsilon_0}. \quad (4.14)$$

Para conocer el comportamiento del plasma fuera del equilibrio se debe resolver este sistema de ecuaciones, es decir, determinar las cantidades perturbadas \mathbf{v}_1 , ρ_1 , p_1 y \mathbf{B}_1 con las cuales se pueden determinar \mathbf{J}_1 y \mathbf{E}_1 . Las cantidades \mathbf{v}_0 , ρ_0 , p_0 , \mathbf{B}_0 , \mathbf{E}_0 y \mathbf{J}_0 representan las cantidades del equilibrio al cual se le estudiará la estabilidad; por esta razón estas cantidades de equilibrio deben determinarse previamente.

4.2.1. Ecuaciones MHD linealizadas para un Z-Pinch.

A continuación se presentarán las ecuaciones linealizadas para la configuración del Z-Pinch para lo cual es necesario expresar las ecuaciones (4.8)-(4.14) en coordenadas cilíndricas; además, se considerará que las cantidades de equilibrio \mathbf{v}_0 , ρ_0 , p_0 y \mathbf{B}_0 son conocidas y cumplen con las características descritas en el capítulo 2.

El tipo de equilibrio y la geometría que se está considerando simplifican las ecuaciones MHD linealizadas, siendo la expresión final de éstas la siguiente:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + v_{1r} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + v_{0z} \frac{\partial \rho_1}{\partial z} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0, \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + v_{1r} \frac{\partial p_0}{\partial r} + v_{0z} \frac{\partial p_1}{\partial z} + \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0. \quad (4.16)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_{1r}}{\partial t} + v_{0z} \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} \right) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(p_1 + \frac{B_{0\theta} B_{1\theta}}{\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{B_{0\theta}}{r} \frac{\partial B_{1r}}{\partial \theta} - 2 \frac{B_{0\theta} B_{1\theta}}{r} \right), \quad (4.17)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_{1\theta}}{\partial t} + v_{0z} \frac{\partial v_{1\theta}}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(p_1 + \frac{B_{0\theta} B_{1\theta}}{\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{B_{0\theta}}{r} \frac{\partial B_{1\theta}}{\partial \theta} + \frac{B_{1r}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{0\theta}) \right), \quad (4.18)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_{1z}}{\partial t} + v_{0z} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} + \frac{\partial v_{0z}}{\partial r} v_{1r} \right) = -\frac{\partial}{\partial z} \left(p_1 + \frac{B_{0\theta} B_{1\theta}}{\mu_0} \right) + \frac{B_{0\theta}}{\mu_0 r} \frac{\partial B_{1z}}{\partial \theta}, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial B_{1r}}{\partial t} = \frac{B_{0\theta}}{r} \frac{\partial v_{1r}}{\partial \theta} - v_{0z} \frac{\partial B_{1r}}{\partial z}, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial B_{1\theta}}{\partial t} = - \left(v_{0z} \frac{\partial B_{1\theta}}{\partial z} + B_{0\theta} \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} (v_{1r} B_{0\theta}) \right), \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial B_{1z}}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_{0z} B_{1r}) + \frac{v_{0z}}{r} \frac{\partial B_{1\theta}}{\partial \theta} + \frac{B_{0\theta}}{r} \frac{\partial v_{1z}}{\partial \theta}, \quad (4.22)$$

donde se ha sustituido la expresión del campo eléctrico en la ecuación (4.11)

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = (B_{0\theta} v_{1z} + v_{0z} B_{1\theta}) \hat{\mathbf{e}}_r - v_{0z} B_{1r} \hat{\mathbf{e}}_\theta - B_{0\theta} v_{1r} \hat{\mathbf{e}}_z;$$

además, la divergencia del campo eléctrico debe satisfacer la ecuación (4.14) la cual proporciona la desviación de la neutralidad local del plasma; esta desviación de la neutralidad proporciona una relación entre el campo magnético la velocidad y la densidad de carga eléctrica:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r (B_{0\theta} v_{1z} + v_{0z} B_{1\theta})] - \frac{v_{0z}}{r} \frac{\partial B_{1r}}{\partial \theta} - B_{0\theta} \frac{\partial v_{1r}}{\partial z} = \frac{\rho_{1c}}{\epsilon_0}. \quad (4.23)$$

Las expresiones (4.15)-(4.22) son las ecuaciones que se deben resolver para determinar la estabilidad del equilibrio de un Z-pinch; estas ecuaciones forman un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales acopladas con ocho ecuaciones y ocho incógnitas, es decir, matemáticamente el problema es cerrado; la ecuación (4.23) proporciona la desviación de la neutralidad local. Este tipo de problemas son difíciles de resolver, aun numéricamente; sin embargo antes de enfrentarse al complicado problema de resolver numéricamente las ecuaciones (4.15)-(4.22), se debe especificar a qué equilibrio se le estudiará la estabilidad. Es en este momento en el cual destaca la importancia de tener un método para determinar los equilibrios estacionarios autoconsistentes. En el capítulo 2 se discutió el método para determinar equilibrios estacionarios que fueran autoconsistentes con la neutralidad global del plasma; este tipo de equilibrios autoconsistentes

imponen una condición en la frontera para la velocidad del plasma (2.32). Sin embargo, en ese mismo capítulo se desarrolló un modelo para generar estados de equilibrios estacionarios autoconsistentes que tienen una pequeña desviación la neutralidad global del plasma. Este tipo de equilibrios estacionarios son candidatos para un análisis de estabilidad lineal.

Como se mencionó en el capítulo 2, los artículos de investigación que abordan el tema de la estabilización del Z-Pinch, suponen que la velocidad de flujo de equilibrio es arbitraria; además, en ellos no se discute la desviación de la neutralidad local y global que se genera al introducir un flujo de equilibrio axial. No obstante, se demostró que la densidad de carga y la velocidad de plasma están relacionadas mediante la ecuación (2.14) la cual restringe la dependencia de la velocidad de equilibrio estacionario.

Una vez que se tiene bien determinado el equilibrio, el siguiente problema es resolver el problema de la estabilidad lineal, es decir, resolver las ecuaciones (4.15)-(4.22). Para resolver este tipo de problemas deben utilizarse métodos numéricos los cuales pueden ser muy complicados debido a que se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Una complicación que se presenta al tratar de resolver las ecuaciones (4.15)-(4.22) es que el método numérico elegido debe ser un método estable en el contexto del cálculo numérico.

Una forma de obtener información acerca de la estabilidad de la configuración del Z-Pinch sin la necesidad de resolver de manera completa el sistema de ecuaciones, es utilizando la geometría del problema. Este método se utiliza desde los primeros trabajos realizados en el estudio de la estabilidad de un plasma con esta geometría [4] no sólo en el estudio de plasmas de fusión nuclear, sino también en los estudios de plasmas interestelares. Este método tiene dos esquemas de trabajo, que son el método de eigenvalores y el principio de energía, los cuales se describen a continuación.

El método de los eigenvalores, considera que cada una de las cantidades perturbadas $\nu_1(\mathbf{r}, t)$ de las ecuaciones (4.15)-(4.22) pueden escribirse de la siguiente forma [12]:

$$\nu_1(\mathbf{r}, t) = \nu_1(r) \exp[i(m\theta + kz) + \omega t], \quad (4.24)$$

donde k es el número de onda real, m es un número entero (positivo o negativo) y ω es el eigenvalor por determinar. La perturbación general consistirá de una suma sobre m y una integral sobre k de términos de la forma (4.24), pero al linealizar las ecuaciones cada modo puede tratarse independientemente. Pueden obtenerse expresiones para todas las cantidades perturbadas en términos de las cantidades de equilibrio y las constantes k y m que hasta el momento son arbitrarias. Al aplicar las condiciones de frontera (sección 1.4) a estas relaciones, se obtienen la relación de dispersión entre k , m y la razón de crecimiento ω . Modos inestables corresponden a valores de k y m para los cuales la relación de dispersión tiene una raíz ω , con parte real positiva, es decir, la perturbación crece indefinidamente en el tiempo. En resumen el método de los eigenvalores consiste en determinar las partes real e imaginaria del eigenvalor ω .

Al aplicar la suposición (4.24) en las ecuaciones (4.15)-(4.23), se obtiene un sistema

de ecuaciones simplificadas en el cual sólo aparecen derivadas totales con respecto a la variable radial r :

$$(\omega + ikv_{0z}) \rho_1 + v_{1r} \frac{d\rho_0}{dr} + \rho_0 \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_{1r}) + i \frac{m}{r} v_{1\theta} + ikv_{1z} \right) = 0 \quad (4.25)$$

$$(\omega + ikv_{0z}) p_1 + v_{1r} \frac{dp_0}{dr} + \gamma p_0 \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_{1r}) + i \frac{m}{r} v_{1\theta} + ikv_{1z} \right) = 0 \quad (4.26)$$

$$\rho_0 (\omega + ikv_{0z}) v_{1r} = - \frac{d}{dr} \left(p_1 + \frac{B_{0\theta} B_{1\theta}}{\mu_0} \right) + \frac{B_{0\theta}}{\mu_0} \left(i \frac{m}{r} B_{1r} - 2 \frac{B_{1\theta}}{r} \right) \quad (4.27)$$

$$\rho_0 (\omega + ikv_{0z}) v_{1\theta} = -i \frac{m}{r} \left(p_1 + \frac{B_{0\theta} B_{1\theta}}{\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(i \frac{m}{r} B_{0\theta} B_{1\theta} + \frac{B_{1r}}{r} \frac{d}{dr} (r B_{0\theta}) \right) \quad (4.28)$$

$$\rho_0 (\omega + ikv_{0z}) v_{1z} + \rho_0 \frac{dv_{0z}}{dr} v_{1r} = -ik \left(p_1 + \frac{B_{0\theta} B_{1\theta}}{\mu_0} \right) + i \frac{m}{r} \frac{B_{0\theta}}{\mu_0} B_{1z} \quad (4.29)$$

$$(\omega + ikv_{0z}) B_{1r} = i \frac{m}{r} B_{0\theta} v_{1r} \quad (4.30)$$

$$(\omega + ikv_{0z}) B_{1\theta} = - \left(ik B_{0\theta} v_{1z} + \frac{d}{dr} (v_{1r} B_{0\theta}) \right) \quad (4.31)$$

$$\omega B_{1z} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv_{0z} B_{1r}) + i \frac{m}{r} v_{0z} B_{1\theta} + i \frac{m}{r} B_{0\theta} v_{1z} \quad (4.32)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r (B_{0\theta} v_{1z} + v_{0z} B_{1\theta})] - i \left(\frac{m}{r} v_{0z} B_{1r} + k B_{0\theta} v_{1r} \right) = \frac{\rho_{1c}}{\epsilon_0} \quad (4.33)$$

El método del principio de energía depende de una formulación variacional de las ecuaciones de movimiento. Su ventaja con respecto al método de los eigenvalores es que no requiere determinar los valores de los eigenvalores, sino que necesita determinar si hay una perturbación que disminuya la energía potencial de su valor de equilibrio. Sin embargo, esta técnica tiene problemas, pues para el caso del equilibrio sin flujo el principio de energía puede formularse, pero para equilibrios con un flujo la formulación de un principio de energía no es posible lo cual limita la técnica a equilibrios sin flujo.

En los artículos de investigación se trabaja el problema linealizado (4.25)-(4.32) de dos maneras diferentes. La primera y la más usada, es con el uso de los desplazamientos lagrangianos $\xi(\mathbf{r}, t)$, en vez de las componentes de la velocidad perturbada $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$. La relación entre la velocidad y los desplazamientos lagrangianos es $\partial \xi(\mathbf{r}, t) / \partial t = \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$.

La razón por la que se trabaja con los desplazamientos lagrangianos es que la formulación variacional de la cual depende el principio de energía hace uso de ellos [13]. La segunda manera es sin hacer uso de los desplazamientos lagrangianos y trabajar con las tres componentes de la velocidad $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$ [14].

El presente capítulo no pretende resolver de el problema de la estabilidad del Z-Pinch, sino sólo plantear el problema en los dos niveles tanto al nivel de las ecuaciones diferenciales parciales (4.15)-(4.22) como al nivel del método de los eigenvalores (4.25)-(4.32), pero utilizando como variables a las componentes de la velocidad. Por último, se propone como un trabajo a futuro, el estudio de la estabilidad de los equilibrios encontrados en el capítulo 3.

4.3. Evidencia de Estabilización en el Z-Pinch.

La configuración del Z-Pinch ha sido estudiada desde los orígenes de la búsqueda de la fusión nuclear mediante el confinamiento magnético de un plasma. No obstante, el estudio de esta configuración fue abandonado durante un largo periodo de tiempo, debido a que presentaba importantes inestabilidades MHD las cuales han sido encontradas tanto teórica como experimentalmente. Experimentalmente se han generado configuraciones del Z-pinch, las cuales tienen flujos de plasma inherentes que exhiben confinamientos estables. Una configuración del Z-pinch de alta densidad y estable, tendría profundas implicaciones para el desarrollo de reactores de fusión nuclear pues una de las complicaciones que estos tienen es la presencia de inestabilidades.

El papel del flujo del plasma en las inestabilidades MHD de un Z-Pinch ha sido estudiado teóricamente por [15] y [9] usando análisis lineal. Ambos estudios tienen como resultado fundamental que la presencia de un flujo axial cortante puede estabilizar una configuración del Z-Pinch; sin embargo, estos dos estudios difieren en la magnitud del flujo necesario para la estabilización.

El análisis lineal de [9] se aplica a tres diferentes equilibrios,

1) Densidad de corriente de piel del Z-Pinch en el cual todo el flujo de corriente se encuentra en la superficie del plasma y por lo tanto el campo magnético en el interior del plasma es cero.

2) Equilibrio con una densidad de corriente uniforme, por lo que el perfil de campo magnético es proporcional a r y el de presión es parabólico $p_0(r) = p_0(1 - \beta(r/a)^2)$ donde β es un parámetro usado para variar el valor de la presión en la frontera del plasma y p_0 es la presión en el eje.

3) Equilibrio de Bennett el cual tiene los siguientes perfiles de campo magnético y de presión:

$$B_{0\theta}(r) = \frac{2rB_m}{r^* [1 + (r/r^*)]}, \quad (4.34)$$

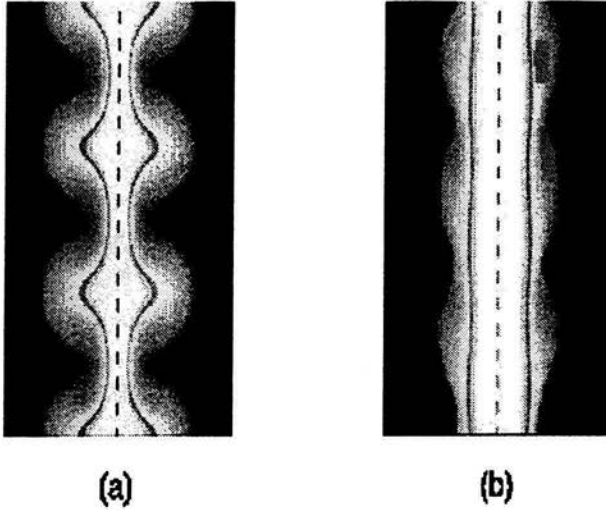


Figura 4.1: Contornos de presión en un Z-Pinch para una simulación no lineal. a) Equilibrio sin flujo axial. b) Equilibrio con flujo axial.

$$p_0(r) = \frac{p_0}{[1 + (r/r^*)]^2}, \quad (4.35)$$

donde r^* , es el radio en el cual el campo magnético toma su valor máximo B_m .

Los perfiles de velocidad que se utilizan en este [9] trabajo son los que se expresaron en la sección 2.3 del capítulo 2. Por otro lado, el trabajo de [15] no especifica que tipos de equilibrios está utilizando para su análisis.

Otra manera de estudiar los efectos estabilizadores de un flujo axial en el Z-Pinch, es a través de simulaciones numéricas no lineales. Los resultados no lineales se presentan en la figura (4.1) [16]. Estos resultados son generados usando Mach2, un código MHD resistivo dependiente del tiempo. El equilibrio estacionario inicial consta de un flujo axial cortante y una perturbación de la densidad la cual es axialmente periódica del uno por ciento; además, se considera que no hay corriente en $r = a$. La figura muestra los contornos de presión para el caso a) sin flujo y b) con flujo $v_z(r = 0) = 0$ y $v_z(r = a) = 0.2kaV_A$ al mismo tiempo de simulación. La figura 1a) muestra una inestabilidad bien desarrollada

en un Z-Pinch estático. La figura 1b) muestra una inestabilidad sustancialmente menor en un Z-Pinch con un flujo axial cortante.

Uno de los aparatos utilizados para investigar los efectos que el flujo axial de plasma tiene en la estabilización de un Z-Pinch es el ZaP en la Universidad de Washington [17]; este experimento ha generado un Z-Pinch con flujo axial cortante en la dirección radial. El flujo axial cortante que se mide en este aparato puede compararse con el umbral predicho por el análisis lineal. El campo magnético característico generado en este aparato es $B_0 = 1.8T$, la densidad de número de electrones es $n_0 = 9.0 \times 10^{16} \text{cm}^{-3} = 9.0 \times 10^{25} \text{m}^{-3}$, la velocidad de Alfvén es $V_A = 1.3 \times 10^5 \text{m/s}$ y la estimación de la temperatura total es $T_0 = T_e + T_i = 150 \text{eV}$. Las fluctuaciones magnéticas que se presentan en este aparato son pequeñas cuando el flujo de plasma cortante está presente, pero son grandes cuando el flujo de plasma cortante es pequeño o no está. La evidencia experimental es consistente con el modelo MHD, en el sentido de que el Z-Pinch puede estabilizarse con un flujo de plasma axial suficientemente cortante.

Capítulo 5

Conclusiones.

Del trabajo aquí expuesto se pueden obtener las siguientes conclusiones:

1) El estudio del equilibrio Magnetohidrodinámico de un plasma cilíndrico con flujo axial (Z-Pinch) indica que para que pueda haber balance de presiones, es necesario que existan desviaciones de la neutralidad local, las cuales se presentan como resultado de la presencia de un flujo axial.

2) En un plasma con geometría cilíndrica, la presencia de un flujo de equilibrio axial genera dos tipos de desviaciones en la neutralidad local del plasma: La primera de ellas mantiene la neutralidad global del plasma. Para que estas desviaciones de la neutralidad se presenten la velocidad del plasma debe ser cero en la pared del cilindro. Si la velocidad del plasma no es cero en la pared del cilindro se genera el segundo tipo de desviaciones de la neutralidad local del plasma; este tipo de desviaciones tiene como consecuencia que el plasma no conserve la neutralidad global, lo cual es válido si los parámetros característicos del plasma cumplen la siguiente condición $|(v_0 J_0) / (en_0 c^2)| \ll 1$.

3) Al considerar un plasma cilíndrico con un flujo de equilibrio axial cuyo factor de desviación de la neutralidad $\lambda(r)$ es constante, se está trabajando con un plasma que globalmente no es neutro; sin embargo, esta desviación de la neutralidad es suficientemente pequeña si los valores característicos del plasma son los adecuados, lo cual puede cumplirse en plasmas de laboratorio. Al suponer que el factor de cuasineutralidad es constante se pueden generar familias de equilibrio estacionario autoconsistentes a los cuales se les puede analizar de manera cualitativa. El análisis cualitativo de los estados de equilibrio estacionario autoconsistente que en el presente trabajo se generaron permitió determinar las características necesarias para tener un equilibrio estacionario deseable obteniendo las siguientes conclusiones:

a) Para generar perfiles de velocidad cortantes (que varíen a lo largo del radio del cilindro), deben considerarse perfiles de densidad de corriente que sean intensos en el centro del cilindro y que decrezcan rápidamente al acercarse a la pared del cilindro; además, la densidad de partículas debe ser aproximadamente uniforme en las cercanías del centro del cilindro.

b) Los perfiles de presión del plasma toman su valor máximo en el centro del cilindro y decrecen rápidamente si la densidad de corriente es intensa en el centro del cilindro y decrece rápidamente al acercarse a la pared del cilindro.

c) Para generar perfiles de temperatura que sean deseados, la densidad de corriente debe ser intensa en el centro del cilindro y decrecer rápidamente al acercarse a la pared; por el contrario la densidad de partículas debe ser uniforme en el centro del cilindro y posteriormente decrecer lentamente al acercarse a la pared del cilindro.

Los resultados anteriores se obtuvieron de estudiar el estado de equilibrio estacionario de un plasma cilíndrico en el contexto del modelo Magnetohidrodinámico ideal, es decir, sin considerar los efectos de disipación; además, no se consideraron los términos Hall y gradiente de presión de electrones pues se consideró que la longitud característica del plasma es mucho mayor que el radio de giro de las partículas. Estas observaciones son importantes pues al considerar estos efectos la desviación de la neutralidad local será modificada y por lo tanto los resultados aquí expuestos serán también modificados.

Como futuros trabajos a éste pueden mencionarse los siguientes:

- i) Estudio del equilibrio estacionario de un plasma cilíndrico considerando los términos de disipación, de presión de electrones o el efecto Hall en la ley de Ohm.
- ii) Análisis de estabilidad de los equilibrios estacionarios aquí expuestos.

Bibliografía

- [1] Schram, P.P.J.M. *Kinetic Theory of Gases and Plasmas*. Kluwer Academic Publishers 1991 1974.
- [2] Miyamoto, K. *Plasma Physics for Nuclear Fusion*. The MIT Press 1989.
- [3] Freidberg, J. P. *Ideal Magnetohydrodynamics*. Plenum Press 1987.
- [4] Bernstein, I. B. and others. *An energy principle for hydromagnetic stability problems*. Proc. Roy. Soc (London) A244, 17 1958.
- [5] Spitzer, L. *Physics of Fully Ionized Gases*. Second edition, John Wiley and Sons 1962.
- [6] Jackson, J. D. *Classical Electrodynamics*. John Wiley and Sons 1962.
- [7] Krall N. A. and Trivelpiece A. W. *Principles of Plasma Physics*. McGraw-Hill.
- [8] Salingaros, N. A. *A Simplified Approach to Pinch Equilibrium*. Plasma Physics and Controlled Fusion Vol 34, No 2, pp 191-202, 1992.
- [9] Arber T. D. and Howell, D. F. *The effect of sheared axial flow on the linear stability of the Z-Pinch*. Physics of Plasmas 3(2), February 1996.
- [10] Bateman, G. *MHD Instabilities*. The MIT Press Cambridge, Massachusetts, and London, England.
- [11] Frieman, E. and Rotenberg, M. *On Hydromagnetic Stability of Stationary Equilibria*. Reviews of Modern Physics Volume 32, Number 4 October, 1960.
- [12] Tayler, R. J. *Hydromagnetic Instabilities of an Ideally Conducting Fluid*. Proc. Phys Soc LXX 1956
- [13] Friedman, J. L. and Schutz, B. F. *Lagrangian Perturbation Theory of Nonrelativistic Fluids*. The Astrophysical Journal, 221:937-957. May 1978.
- [14] S. Appl, S. and Camenzind, M. *The stability of current-carrying jets*. Astronomy and Astrophysics 256, 354-370 1992.

- [15] Shumlak, U. and Hartman, C. W. *Sheared Flow Stabilization of the $m = 1$ Kink in Z Pinches*. Physical Review Letters, Volume 75, Number 18, October 1995.
- [16] Shumlak U. and others. *Evidence of Stabilization in the Z-Pinch*. Physical Review Letters Volume 87, Number 20, November 2001.
- [17] Shumlak, U. and others. *Sheared flow stabilization experiments in the Zap flow Z pinch*. Physics of Plasmas Volume 10, Number 5, May 2003.