

01174



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MÉXICO
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADOS
SECCIÓN DE INGENIERÍA PETROLERA

**“ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE POZOS EN LUTITAS
CONSIDERANDO EFECTOS QUÍMICOS Y TÉRMICOS
TEMPORALES.”**



T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERÍA PRESENTA:
JOSÉ MIGUEL CASTELLANOS DE LA FUENTE.

ASESOR: DR. DANIEL GARCÍA GAVITO.



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN INGENIERÍA

VOTOS APROBATORIOS

UNIVERSIDAD NACIONAL
 AVENIDA DE
 MEXICO

DR. WILFRIDO RIVERA GÓMEZ FRANCO
 Coordinador del Programa de Posgrado
 en Ingeniería, U N A M
 Presente

Por este medio comunico a usted que he leído la tesis titulada: "ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE POZOS EN LUTITAS CONSIDERANDO EFECTOS QUÍMICOS Y TÉRMICOS TEMPORALES" para obtener el grado de MAESTRO EN INGENIERÍA en el campo del conocimiento INGENIERÍA PETROLERA Y GAS NATURAL, que presenta el alumno JOSÉ MIGUEL CASTELLANOS DE LA FUENTE.

Al mismo tiempo me permito informarle mi decisión de otorgar o no el voto aprobatorio.

JURADO		VOTO APROBATORIO	FIRMA	FECHA
PRESIDENTE	DR. FERNANDO SAMANIEGO VERDUZCO	(SI) (NO)		Feb. 16, 2004
VOCAL	DR. DANIEL GARCIA GAVITO	(SI) (NO)		FEB 17, 2004
SECRETARIO	M.I. JOAQUIN MENDIOLA SANCHEZ	(SI) (NO)		Feb 23, 2004
SUPLENTE	DR. JESUS RIVERA RODRIGUEZ	(SI) (NO)		Feb. 23, 2004
SUPLENTE	DR. FERNANDO SEBASTIAN FLORES AVILA	(SI) (NO)		Feb 16, 2004

AGRADECIMIENTOS

Durante mi desarrollo académico y profesional he aprendido de muchas personas, mediante la interacción personal, trabajos publicados y practicas de campo. Nuestra academia e industria han enriquecido nuestro cúmulo de conocimiento con los años, mediante cursos, especialidades y programas de maestrías. A todos ellos mi más sincero agradecimiento.

Hago un reconocimiento al Doc. Daniel García Gavito por marcar una diferencia real en nuestro aprendizaje y por el gran apoyo recibido en la elaboración de esta tesis. Al Doc. Fernando Samaniego Verduzco, por el apoyo brindado, en el seguimiento y terminación de la tesis durante los trabajos de investigación.

A los Doctores Vicente casariego, Fernando Flores Ávila, Sergio Berumen Campos, Jesús Rivera Rodríguez y Heber cinco ley, a los maestros en ingeniería José Antonio Guevara y Luzbel Napoleón Solórzano y al Ingeniero Eusebio Capitanachi González por formar parte de mi formación como graduado de maestro en ingeniería petrolera.

Por ultimo, pero no menos importante, un agradecimiento a mi familia, de manera muy especial a mi esposa Roxana, por su gran comprensión y sacrificio por el poco tiempo familiar brindado de mi parte, durante mis estudios y elaboración de esta tesis. A mis padres por sus apoyos incondicionales y motivaciones. Para terminar espero que esta tesis sirva de motivación y de gran utilidad para aquellas personas interesadas en los estudios de mecánica de roca relacionados con estabilidad de pozo.

José Miguel Castellanos de la Fuente.

CONTENIDO

Capítulo.	Página.
Titulo.	
Votos aprobatorios.	
Agradecimientos.	
Contenido.	
Nomenclatura.	
Capitulo 1: Introducción.	1
Capitulo 2: Conceptos fundamentales en el análisis de estabilidad de pozos.	
2.1.- conceptos fundamentales.	4
2.2.- Antecedentes teóricos de la poroelasticidad.	20
2.3.- Mecanismos de fallas.	34
2.4- Criterios de falla.	36
2.5- Ecuaciones constitutivas que describen el estado de esfuerzo en un pozo.	44
2.6.- El efecto de la transferencia de calor originado por el lodo de perforación en el estado de esfuerzos alrededor del pozo.	62
2.7.- Química de las arcillas.	68
2.8.- El efecto de la interacción de los fluidos de perforación en formaciones sensibles al agua.	74
2.9.- Estabilidad de pozos durante la perforación.	81
Capitulo 3: Determinación de los parámetros de entrada.	
3.1.- Orientación del pozo.	85
3.2.- Determinación de los esfuerzos in-situ.	85

3.3.- Determinación de los parámetros químicos.	90
3.4.- Estimación de las propiedades mecánicas de las rocas.	96
3.5.- Estimación de las propiedades térmicas de las rocas.	99
Capítulo 4: Desarrollo del Modelo.	
4.1.- Presión de poro y temperatura de formación acoplada.	104
4.2.- Teoría de la termo-poroelasticidad.	105
4.3.- Temperatura de la roca.	111
4.4.- Presión de poro y temperatura de la roca.	118
4.5.- Estimación de la presión de poro original de la formación.	126
4.6.- Acoplamiento de los efectos químicos y térmicos al modelo mecánico.	129
4.7.- Esfuerzos inducidos por la presión de poro y cambios de temperatura de la roca.	136
Capítulo 5: Aplicación y validación del modelo con datos de campo.	
5.1.- Calculo de la presión de poro original mediante la nueva metodología.	140
5.2.- Calculo de la sobrecarga.	141
5.3.- Calculo de las propiedades dinámicas.	142
5.4.- Calculo del ángulo de fricción interna y resistencia a la compresión uniaxial.	144
5.5.- Calculo del colapso de pozo y presión de fractura considerando efectos mecánicos.	145
5.6.- Análisis de sensibilidad de parámetros.	147
5.7.- Dependencia del tiempo en la estabilidad de pozo.	152

5.8.- Densidad equivalente de colapso y presión de fractura de pozo.	158
5.9.- Colapso de pozo por pérdida de la resistencia cohesiva de la roca.	161
Capitulo 6: Resumen, conclusiones y recomendaciones.	163
Referencias.	165

NOMENCLATURA.

a_{wdf}	Actividad del agua del fluido de perforación.
a_{ws}	Actividad del agua en la lutita.
A	Constante del material.
b	Constante en la poroelasticidad de Biot.
B	Coeficiente de presión de poro de Skempton.
	Constante del material en la Teoría de poroelasticidad de Biot.
c	Difusividad Hidráulica.
c_{fl}	Capacidad de calor del fluido de perforación.
c^*	Coeficiente de acoplamiento.
c_0	Difusividad térmica del medio poroso.
c_t	Compresibilidad total del medio poroso.
C_0	Compresibilidad de la roca, Resistencia a la compresión uniaxial.
$C_{1,2,3,\dots}$	Constantes elásticas de los materiales.
	Constantes de integración.
C_0'	Coeficiente de acoplamiento (transferencia de calor).
C_{ijkl}	Constantes del material.
d	Desplazamiento relativo entre el sólido y el fluido en el poro.
f	
e_f	Cambio de volumen del fluido en el poro.
e_s	Cambio de volumen del esqueleto del sólido.
E	Modulo de Young.
f	Fuerza de Cuerpo.
G	Modulo de corte.
G_g	Gradiente geotérmico.
H	Constante del material en la teoría de poroelasticidad de Biot.
i_w	Inclinación del pozo.
I_1, I_2, I_3	Invariantes del tensor de esfuerzo.
J_v	Flujo total de la solución a través de la membrana.
J_1, J_2, J_3	Invariante del tensor desviador de esfuerzo.
k	Permeabilidad
K	Constante del material Modulo volumétrico del esqueleto del sólido (roca porosa seca).
K_s	Modulo volumétrico de los constituyentes del sólido.
K_{fr}	Modulo volumétrico del esqueleto del sólido (roca seca).
K_0	Función Bessel modificada de orden cero de segundo tipo.

K_1	Función Bessel modificada de primer orden de segundo tipo.
K_f	Modulo volumétrico del fluido en el poro.
K_s', K_s''	Constantes del material en la teoría de poroelasticidad de Biot.
m	Masa del fluido en los poros por unidad de volumen.
m_o	Masa de referencia del fluido en los poros por unidad de volumen.
M	Constante del material en la teoría de poroelasticidad de Biot.
N	Constante del material en la teoría de poroelasticidad de Biot.
P	Presión de poro.
$P(r,t)$	Presión de poro como una función de distancia y tiempo.
P_0	Presión de poro inicial.
P_d	Presión adimensional.
P_f	Presión de poro de formación.
P_{ff}	Presión de fractura de formación.
P_p	Presión de poro.
P_w	Presión de pozo.
P_π	Presión osmótica.
q	Flujo.
Q	Constante del material de la teoría de poroelasticidad de Biot.
r	Distancia radial cerca del pozo.
r_w	Radio del pozo.
r_i	Radio de la tubería de perforación.
R	Constante del material en la teoría de poroelasticidad de Biot. Constante universal de los gases.
S_H	Esfuerzo horizontal máximo.
S_h	Esfuerzo horizontal mínimo.
S_v	Esfuerzo vertical Esfuerzo de sobrecarga.
t	Tiempo.
T	Temperatura.
T_a	Temperatura del lodo en el anular.
T_d, T_D	Temperatura adimensional.
T_{es}	Temperatura de superficie de la tierra.
T_i	Temperatura del lodo de entrada.
u	Desplazamiento del esqueleto del sólido.
U	Desplazamiento del fluido en el poro.
U_a	Transferencia de calor global a través del anular.
U_t	Transferencia de calor global a través de la tubería de perforación.
v	Velocidad de la ecuación de Darcy. Fracción de volumen vacío. Desplazamiento vertical del sólido.

V_p	Velocidad de las ondas de corte.
	Volumen de espacio poroso.
V_s	Velocidad de ondas de Corte.
Z	Profundidad.
α	Constante de la teoría de poroelasticidad Constante del material. Constante de Biot Azimut del pozo. Coeficiente de expansión térmica lineal de la matriz porosa.
α'	Coeficiente de expansión térmica volumétrica.
α_f	Coeficiente de expansión térmica volumétrica del fluido en el poro.
α_m	Coeficiente de expansión térmica volumétrica de la matriz porosa.
β	Constante de Biot. Angulo de orientación del plano de falla.
δ_{ij}	Delta de Kronecker.
$\Delta\phi$	Cambio de volumen en el poro.
$\Delta\theta$	Cambio de temperatura.
$\Delta\rho$	Cambio de densidad volumétrica.
ε_{ij}	Componentes de deformación.
ϕ	Fracción de porosidad. Angulo de fricción.
κ	Constante de permeabilidad
$\bar{\kappa}$	Conductividad térmica.
λ	Constante de Lamé. Conductividad térmica.
μ	Viscosidad. Coeficiente de fricción
ν	Relación de poisson drenada.
ν_u	Relación de poisson no drenada.
θ	Cambio de contenido de agua por unidad de volumen de roca.
ρ	Densidad volumétrica.
ρ_0	Densidad volumétrica de referencia.
σ_{ij}	Tensor de esfuerzos.
σ_{ij}^e	Tensor de esfuerzo efectivo.
σ_H	Esfuerzo horizontal máximo.
σ_h, σ_{\min}	Esfuerzo horizontal mínimo.
$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}$	Componentes de esfuerzo de la roca en coordenadas cilíndricas alrededor del pozo.
σ_v	Esfuerzo de sobrecarga.

$\bar{\sigma}$ Esfuerzo normal medio.

$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$

Esfuerzo totales referenciados a un eje coordenado cartesianos en el pozo (locales).

τ Esfuerzo de Corte.

Γ Deformación de corte

$\psi_1, \psi_2, \psi_{xy}$ Deformación angular

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

La creciente demanda de energía que exige la comunidad mundial, así como los diferentes sectores industriales en nuestro país, requieren de la incorporación de mayores reservas de hidrocarburos, como consecuencia es necesario perforar un mayor número de pozos. Los retos para los ingenieros de perforación resultan ser cada vez más difíciles debido a que son encontradas condiciones de pozos más severos, con alta presión, alta temperatura y una mayor profundidad.

La perforación de los pozos petroleros en la región sur ha sido caracterizada por contar con pozos profundos, con altas temperaturas y altas presiones. Resulta evidente entonces que los problemas de inestabilidad de pozos estarán presentes durante la perforación por lo que es necesario el empleo de ciencias relativamente nuevas como la mecánica de roca para mantener la estabilidad del agujero durante la perforación y producción de aceite y gas. Algunos de los problemas de inestabilidad de pozos en la región son: intervalos altamente desviados con derrumbe, zonas naturalmente fracturadas, zonas de pérdidas, formaciones y domos salinos, reactivación de fallas, laminaciones paralelas al eje del pozo y lutitas hidratables (Fig.1).

La región sur consciente de la importancia de los estudios de estabilidad de pozos ha realizado una serie de numerosos trabajos con la finalidad de resolver los problemas de inestabilidad de pozos en lutitas. Este trabajo por su parte no pretende resolver los problemas de inestabilidad de pozos antes mencionados, ni incluso resolver uno de ellos en su totalidad, más bien la intención es contribuir en la comprensión y solución de uno de los problemas en particular, asociado con estabilidad de pozos en lutitas.

Los mecanismos que alteran el estado de esfuerzos en las lutitas se debe a un mecanismos puramente mecánico y otro físico-químico, por otra parte la temperatura juega también un papel importante en la alteración de los esfuerzos alrededor del pozo, por lo que es necesario un modelo de estabilidad de pozo que considere la contribución de los esfuerzos térmicos y el flujo de agua de los lodos de perforación dentro y fuera de las formaciones de lutitas.

Los problemas encontrados durante la perforación a través de lutitas resultan de la interacción del fluido de perforación con la formación. Las lutitas son formaciones altamente sensibles al agua por lo que son alteradas significativamente en contacto con fluidos base agua o fluidos base aceite ya que ellos también cuentan con un porcentaje de agua considerable. Tales alteraciones producen fallas en las rocas lo cual se traduce en serios problemas durante la perforación por la excesiva remoción de sólidos y agrandamiento del agujero.

Los esfuerzos térmicos cerca del pozo ocurren debido a que la temperatura alrededor del pozo es cambiada por el lodo de perforación en el anular como consecuencia el estado de esfuerzos alrededor del pozo se ven alterados significativamente.

La necesidad de una nueva metodología en el análisis de estabilidad de pozos resulta ser evidentemente importante donde se incluya los efectos mecánicos, físico-químicos y térmicos, los cuales puedan ser analizados a través de diferentes criterios de fallas con la finalidad de obtener ventanas operacionales de densidades del lodo, compararlas con resultados obtenidos de datos de campos y realizar los ajustes correspondientes.

Por más sofisticado que sea el modelo de estabilidad de pozos que se pretenda lograr la mayoría de los modelos presuponen que uno cuenta con la caracterización geomecánica de la formación lo cual en la mayoría de los casos no es cierto, afortunadamente en los últimos años, en la división de Postgrado de ingeniería de la UNAM sección de Ingeniería Petrolera, varios estudiantes de maestría con la finalidad de lograr su grado han trabajado incansablemente con la asesoría del Dr. Daniel García Gavito para obtener las propiedades mecánicas de la formación, estados de esfuerzos insitu, presión de poro normal y anormal a través de registros eléctricos convencionales, tomados en la mayorías de los pozos. Definitivamente esto nos coloca en la antesala de poder realizar un estudio de estabilidad de pozos, sin tener la limitante de carecer de información vital en el estudio.

El registro DSI que es uno de las recientes herramientas introducidas, conocido como registro sónico dipolar nos determina propiedades mecánicas de la formación, afortunadamente varios registros de este tipo han sido corrido en varios pozos de la región sur, lo que representa una información valiosa en nuestro análisis.

Es conveniente mencionar que en el ámbito internacional sean realizados varios estudios que consideran los aspectos químicos y térmicos por diversos investigadores, por ejemplo Santarelli; en 1992 en su artículo "Estabilidad de lutitas y sus consecuencias en términos de la hidratación y de estabilidad de pozos", Bol; en junio 1994 en su artículo "Estabilidad de pozos en lutitas", Mody y Hale; en noviembre de 1993, en su artículo "Modelo de estabilidad de pozo que acopla mecánica y químicamente la interacción de la lutita y fluido de perforación", Lin Tang y Pinya; en febrero de 1998 en su artículo "El efecto del esfuerzo térmicos en estabilidad de pozo", M. Yu, Chen, Chenevert, y Sharman; en septiembre del 2002 en su artículo "Efecto Químico y Térmico en la estabilidad de pozos en formaciones de lutitas".

El segundo capítulo de este trabajo está dedicado a establecer los conceptos fundamentales en el análisis de estabilidad de pozos, temas tales como: Mecanismos de fallas, estados de esfuerzos alrededor del pozo, criterios de fallas,

el efecto de la interacción del fluido de perforación con formaciones de lutitas y el efecto de la temperatura en la pared del pozo son tratados.

En los restantes capítulos se realiza la determinación de los parámetros de entrada, desarrollo del modelo, validación y aplicación con datos de campo y recomendaciones y conclusiones.

Finalmente espero, que este trabajo sea de gran ayuda para aquellas personas interesadas en seguir contribuyendo en la madurez de la mecánica de roca para la ingeniería petrolera y poder así minimizar los costos de la perforación logrando mejores beneficios para nuestra empresa y nuestro país.

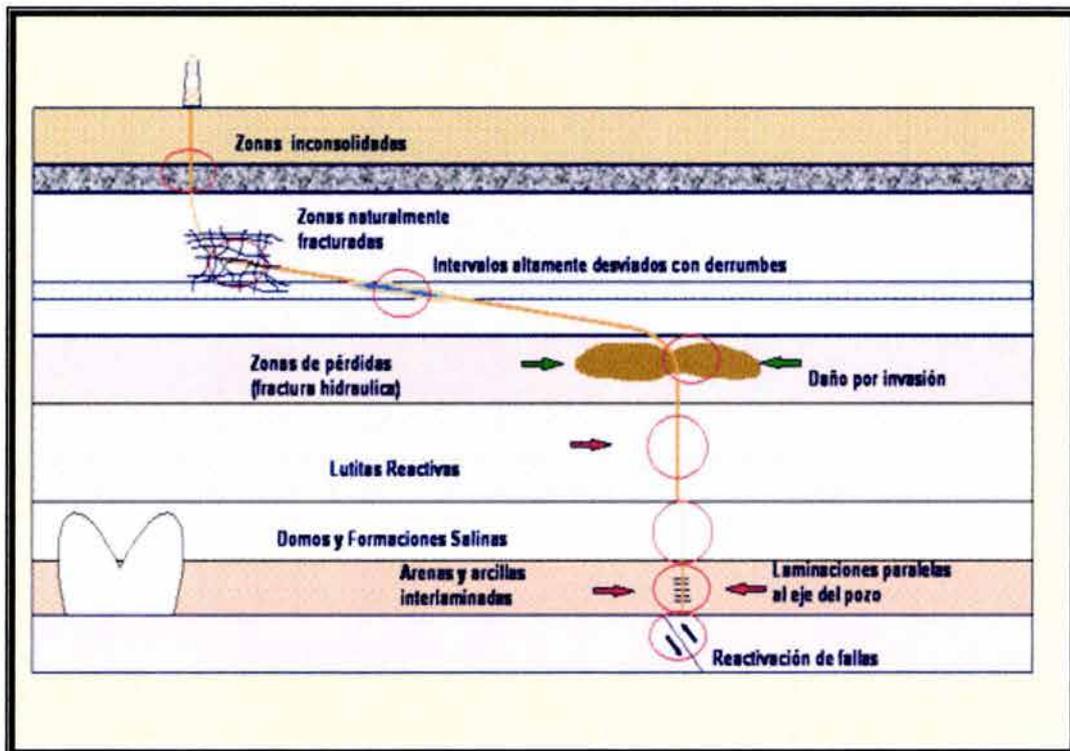


Fig.1 Problemas de inestabilidad de pozo

CAPITULO II

CONCEPTOS FUNDAMENTALES EN EL ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE POZOS.

2.1 Conceptos fundamentales.

Antes de comenzar a definir los principales conceptos involucrados en los estudios de mecánica de roca es necesario definir que es la mecánica de roca.

Mecánica.- Ciencia que estudia la deformación del movimiento de los cuerpos y su relación con los movimientos que la generan.

Roca.- Material complejo heterogéneo con una parte sólida y porosa donde puede alojarse fluidos.

Mecánica de roca.- Es la ciencia que estudia el comportamiento de los esfuerzos y deformaciones que sufren las rocas, y su resistencia mecánica.

2.1-1 Conceptos de esfuerzo y deformación.

El primer pasó necesario en los estudios de los problemas relacionados con la mecánica de roca están relacionados con la comprensión de los términos de esfuerzo y deformación.

Esfuerzo.

Es la reacción que sufre el material al ser sujeto a cargas externas. Dependiendo de la dirección en la que son aplicadas estas cargas externas sobre la superficie del material, se pueden presentar esfuerzos normales o compresivos, esfuerzo tangenciales o de corte o ambos. Ver figura 2.1

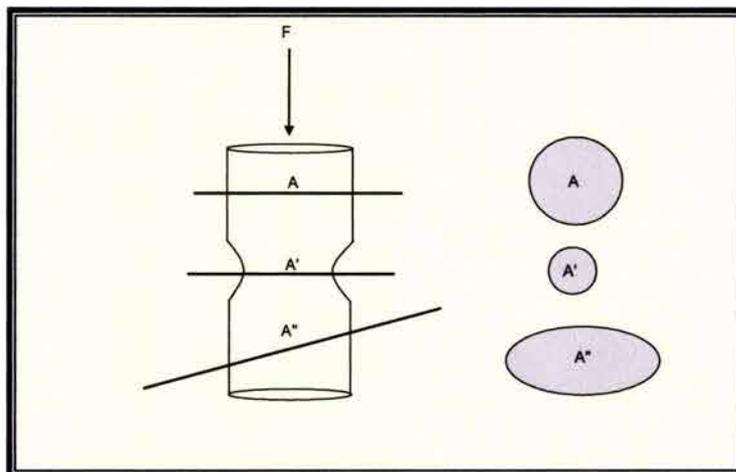


Fig. 2.1 Espécimen de prueba bajo una carga compresiva.

Matemáticamente el esfuerzo puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\sigma = \frac{F}{A} \left[\frac{lbf}{Pg^2}, \frac{Kgf}{Cm^2} \right] \quad (2.1-1)$$

El espécimen de la figura 2.1 muestra tres diferentes superficies donde acciona la misma fuerza aplicada, se puede ver que los esfuerzos en cada una de estas secciones son diferentes en magnitud y en tipo; es decir:

$$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{F}{A'} > \frac{F}{A} \quad (2.1-2)$$

Además en la superficie A'' existen dos tipos de esfuerzos definidos como:

$$\sigma_N = \frac{F_N}{A''} \quad (2.1-3)$$

$$\tau = \frac{F_S}{A''} \quad (2.1-4)$$

Como los esfuerzos dependen de la posición dentro de la muestra, nosotros podemos dividir la sección transversal en un número infinito de subsecciones ΔA a través de la cual una pequeña parte infinitesimal de fuerza ΔF de la fuerza total esta accionando (Fig. 2.2). La fuerza ΔF puede variar de una sección a otra.

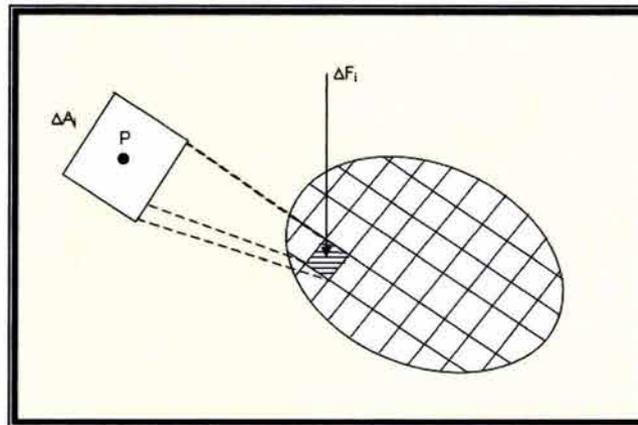


Fig. 2.2 Esfuerzos locales

Matemáticamente nosotros podemos por lo tanto expresar el esfuerzo en un punto P contenido en un subsección i como el valor limite $\Delta F_i / \Delta A_i$ cuando ΔA_i tiende a cero es decir:

$$\sigma = \lim_{\Delta A_i \rightarrow 0} \frac{\Delta F_i}{\Delta A_i} \quad (2.1-5)$$

Tensor de esfuerzo.

Para una descripción completa del estado de esfuerzo en un punto "P" dentro de una muestra es necesario identificar los esfuerzos relacionados a una superficie orientada en tres direcciones ortogonales. Debido a esto nosotros tendremos un tensor de esfuerzo de 9 elementos.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (2.1-6)$$

El significado físico del tensor de esfuerzo es el siguiente: Si r es un vector unitario, la expresión $|\bar{\sigma}_r|$, representa el esfuerzo total en la dirección de r .

Convención de Signos.

En mecánica de roca resulta bastante conveniente considerar los esfuerzos compresivos como positivos y los esfuerzos de tensión como negativos, debido a que normalmente las rocas se encuentran sujetas ha estados de esfuerzos compresivos.

Invariantes del tensor de esfuerzo.

Los invariantes del tensor de esfuerzo son un método alternativo, que resulta conveniente para describir el campo de esfuerzo, independientemente de la orientación de la fuerza o un cambio a diferente juego de ejes coordenados.

Los invariantes de esfuerzo más útiles son:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= -(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yx}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned} \quad (2.1-7)$$

Debido a esto el esfuerzo normal medio es un invariante de esfuerzo y es expresado como:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (2.1-8)$$

Tensor desviador de esfuerzo.

El tensor desviador de esfuerzo puede obtenerse a partir de la descomposición del tensor simétrico de esfuerzo σ_{ij} en dos tensores simétricos. El tensor desviador de esfuerzo y el tensor hidrostático de esfuerzo. Esta descomposición esta dada por:

$$\sigma_{ij} = S_{ij} + \frac{1}{3} \sigma_{nn} \delta_{ij} \quad (2.1-9)$$

Donde:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} \sigma_{nn} \delta_{ij} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad (2.1-10)$$

El tensor hidrostático de esfuerzo o esfuerzo normal medio causa una compresión o extensión uniforme. Mientras que el tensor desviador de esfuerzo es el responsable de las distorsiones. Finalmente dada la descomposición del tensor de esfuerzo nosotros podemos obtener el tensor desviador de esfuerzo de sustraer el esfuerzo hidrostático a las componentes de los esfuerzos normales:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \tau_{xy} \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \sigma_y \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \tau_{zy} \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x S_{xy} S_{xz} \\ S_{yx} S_y S_{yz} \\ S_{zx} S_{zy} S_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\sigma} 0 0 \\ 0 \bar{\sigma} 0 \\ 0 0 \bar{\sigma} \end{pmatrix} \quad (2.1-11)$$

$$\begin{pmatrix} S_x S_{xy} S_{xz} \\ S_{yx} S_y S_{yz} \\ S_{zx} S_{zy} S_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sigma_x - \bar{\sigma}) \tau_{xy} \tau_{xz} \\ \tau_{yx} (\sigma_y - \bar{\sigma}) \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \tau_{zy} (\sigma_z - \bar{\sigma}) \end{pmatrix} \quad (2.1-12)$$

De manera similar existen los invariantes del tensor desviador de esfuerzo

$$\begin{aligned} J_1 &= S_x + S_y + S_z = 0 \\ J_2 &= -(S_x S_y + S_y S_z + S_z S_x) + S_{xy}^2 + S_{yz}^2 + S_{zx}^2 \\ J_3 &= S_x S_y S_z + 2S_{xy} S_{yz} S_{zx} - S_x S_{yz}^2 - S_y S_{zx}^2 - S_z S_{xy}^2 \end{aligned} \quad (2.1-13)$$

Similamente a los invariantes del tensor esfuerzos, estos son independientes de la selección de los ejes coordenados, los invariantes del tensor desviador de esfuerzos aparecen en los criterios de falla y son de gran importancia conocerlos, además de las expresiones de arriba existen otras formas más comunes en los criterios de falla de expresar los invariantes del tensor de esfuerzo.

Esfuerzo efectivo.

Se entiende como esfuerzo efectivo a la carga neta soportada por el esqueleto del mineral sólido. La variable σ_{ij} es considerada como un tensor de esfuerzo efectivo en este capítulo. La presencia de fluido en los poros en los diferentes estratos geológicos provoca que una parte de la carga sea soportada por el fluido. De esta manera se presenta la diferencia entre los esfuerzos totales y los esfuerzos efectivos. Para poder calcular la magnitud de los esfuerzos efectivos apoyamos de la siguiente expresión:

$$\sigma^e = \sigma - \alpha P_p \quad (2.1-14)$$

Donde:

- σ^e : Esfuerzo efectivo.
- σ : Esfuerzo total aplicado.
- α : Coeficiente de poroelasticidad de Biot.

Deformación

La deformación representa el cambio de dimensiones del sistema cuando cargas externas son aplicadas, es decir; el sistema experimenta un cambio con relación a su configuración original.

Existen varias formas de expresar los cambios de dimensiones del sistema. Cauchy, Green, Hencky, y Almansi, son algunas de las medidas más comunes.

Para ilustrar las variaciones que existen entre cada uno de los métodos para medir la deformación vamos apoyarnos en una idealización unidimensional Fig. 2.3, utilizando una barra circular cargada axialmente y aproximada como un elemento de línea adimensional.

Donde L_0 es la longitud de la configuración original, L es la longitud después de un cambio en la configuración por la carga axial aplicada.

Consideremos los siguientes dos casos; una deformación unitaria y una deformación unitaria infinitesimal.

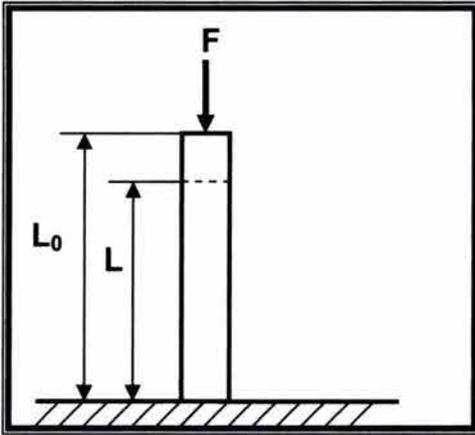


Fig. 2.3 Sistema unidimensional sometido a una carga compresiva.

Caso I

$$L_0 = 1$$

$$L = 2$$

Caso II

$$L_0 = 1$$

$$L = 1.01$$

Modelo	Expresión	Caso I Deformación unitaria	Caso II Deformación unitaria infinitesimal
	$\frac{L}{L_0}$	2	1.010
<i>Cauchy</i>	$\frac{L-L_0}{L_0}$	1	0.0100
	$\frac{L-L_0}{L}$	0.5	0.0099
<i>Almansi</i>	$\frac{L^2 - L_0^2}{2L^2}$	0.375	0.0098
<i>Green</i>	$\frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2}$	1.5	0.0100

Los conceptos anteriores pueden ser generalizados para sistemas en dos y tres dimensiones.

Para el análisis de la deformación en dos dimensiones nos apoyaremos en la figura 2.4 y posteriormente haremos extensivo el análisis para un sistema en tres dimensiones.

Se requieren definir los vectores de desplazamiento u y v , desplazamiento horizontal y desplazamiento vertical respectivamente.

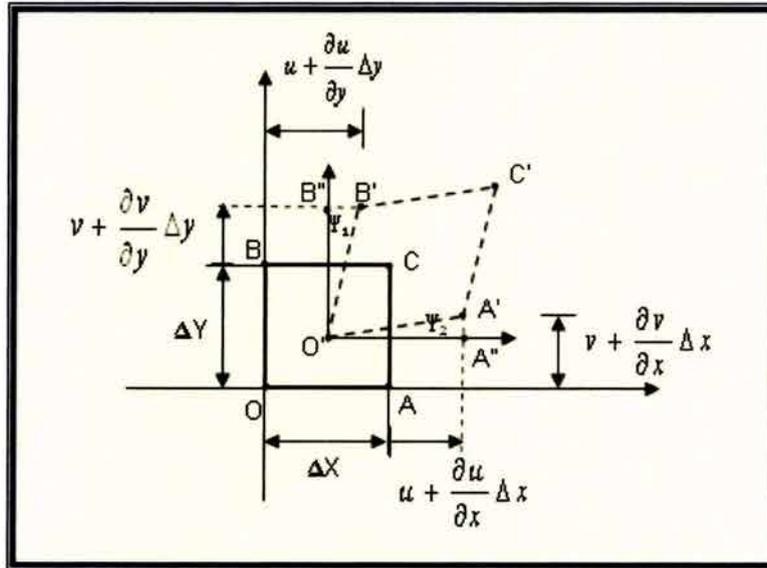


Fig. 2.4 Sistema en dos dimensiones el cual experimenta una deformación.

El segmento representado por OACB es el sistema original antes de aplicarle cargas externas, mientras que O'A'C'B', nos representa el sistema deformado.

Nosotros sabemos que la deformación longitudinal (normal) ε puede ser expresada como:

$$\varepsilon = \frac{\text{Cambio..de.Longitud}}{\text{Longitud..Original}} = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\delta L}{\Delta L} \quad (2.1-15)$$

Además podemos definir una deformación de corte Γ como un cambio angular entre los ángulos rectos.

De la figura 2.4 se puede ver fácilmente las magnitudes de los siguientes segmentos:

$$O'A' = \Delta x + u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - u = \Delta x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.1-16)$$

$$A''A' = v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x - v = \Delta x \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.1-17)$$

Nosotros podemos calcular la longitud $O'A'$ del sistema deformado ya que se puede ver que representa la hipotenusa del triángulo formado por los dos anteriores segmentos.

$$\overline{O'A'} = \sqrt{(O'A'')^2 + (A''A')^2} = \sqrt{\left[\left(\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x \right)^2 + \left[\Delta x \frac{\partial v}{\partial x} \right]^2} \quad (2.1-18)$$

$$O' A' \approx \Delta x \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2.1-19)$$

El cambio de longitud en la dirección x será entonces:

$$\delta x = O' A' - OA = \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.1-20)$$

Por lo tanto la deformación en la dirección de x será:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}}{\Delta x} \right) \quad (2.1-21)$$

Por lo que la deformación en la dirección x, y, z serán respectivamente:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.1-22)$$

Para encontrar la deformación de corte nosotros tenemos que:

$$\Psi_2 = \text{Tan} \frac{A' A''}{O' A''} \approx \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x} = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \lll 1 \quad (2.1-23)$$

$$\Psi_2 = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\Psi_1 = \text{Tan} \frac{B' B''}{O' B''} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \Delta y}{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Delta y} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)}{\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} \lll 1 \quad (2.1-24)$$

$$\Psi_1 = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Finalmente la deformación angular en el plano x-y será la suma de la ecuación 2.1-23 y 2.1-24:

$$\psi_{xy} = \Psi_1 + \Psi_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.1-25)$$

De forma análoga para los planos y-z y z-x tenemos:

$$\psi_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.1-26)$$

$$\psi_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.1-27)$$

Finalmente las componentes del tensor deformación en la mayoría de los libros y artículos son expresados como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \Gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \psi_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \Gamma_{yz} &= \frac{1}{2} \psi_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \Gamma_{zx} &= \frac{1}{2} \psi_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (2.1-28)$$

Se debe tener precaución en la deformación de corte, se puede ver que la deformación angular es dos veces más grande que la deformación de corte.

Finalmente el tensor de deformación puede ser expresado como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \Gamma_{xy} & \Gamma_{xz} \\ \Gamma_{yx} & \varepsilon_y & \Gamma_{yz} \\ \Gamma_{zx} & \Gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (2.1-29)$$

2.1-2 Módulos Elásticos

La teoría de la elasticidad lineal investiga las relaciones entre las cargas externas aplicadas a un cuerpo y el resultado en los cambios de su tamaño y forma, esta teoría asume desplazamientos pequeñas y que el cuerpo regresa a su condición original después que la carga deja de ser ejercida. La fuerza aplicada y los cambios en tamaño y forma resultantes son descrita por los esfuerzos y las deformaciones.

La figura 2.5 muestra la curva de esfuerzo-deformación, la cual es obtenida de aplicar diferentes magnitudes de carga o fuerza a un espécimen de prueba como se muestra en la figura 2.1 y medir sus deformaciones axiales y transversales que sufre el espécimen. Los esfuerzos por abajo del límite elástico son proporcionales a la deformación (Ley de Hooke). Las constantes de proporcionalidad difieren para diferentes condiciones de carga y son definidas como módulos elásticos los cuales son propiedades fundamentales de un material.

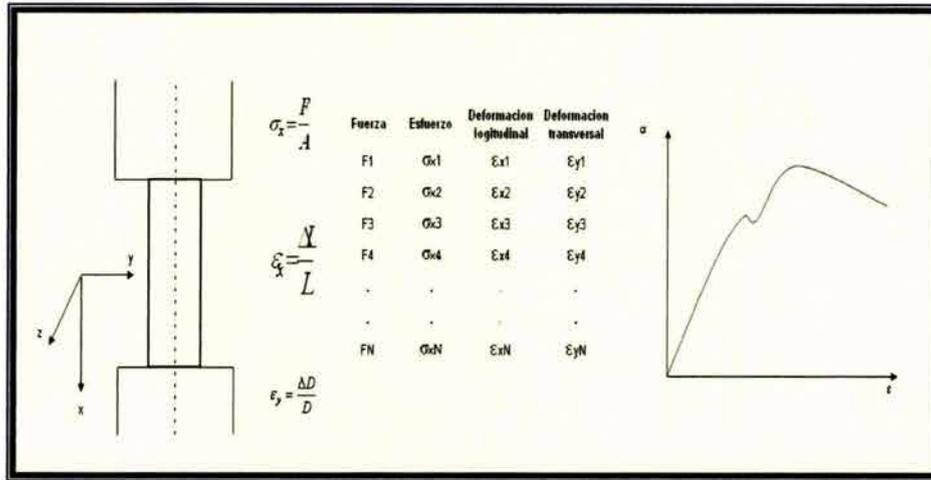


Fig. 2.5 Obtención de la curva de esfuerzo-deformación.

Modulo de Young (E).

Es la relación que existe entre el esfuerzo axial (compresivo o de tensión) y la deformación axial bajo condiciones de carga uniaxial (Figura 2.6).

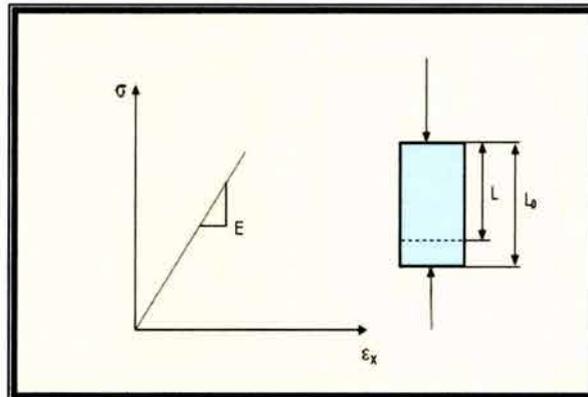


Fig. 2.6 Relación entre el esfuerzo uniaxial y la deformación axial.

Matemáticamente el modulo de Young es expresado como:

$$E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x} \tag{2.1-30}$$

Relación de Poisson (ν)

Como consecuencia de la deformación axial o acortamiento longitudinal debido a un esfuerzo compresivo aplicado bajo condiciones de carga uniaxial, existirá un incremento del diámetro o deformación transversal. A la relación entre

la deformación transversal y longitudinal se le conoce como la relación de poisson (Ver Fig. 2.7).

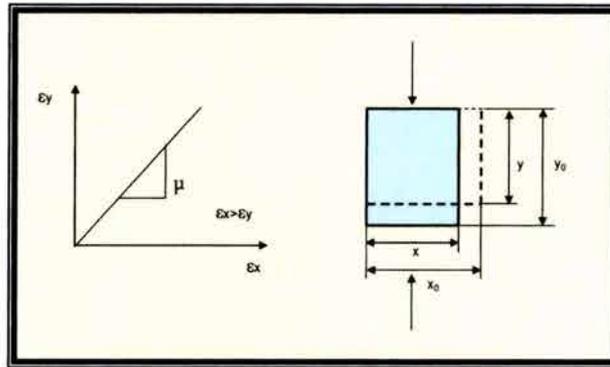


Fig. 2.7 Relación entre la deformación transversal y deformación axial.

Matemáticamente puede ser expresado como:

$$\nu = \frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} \quad (2.1-31)$$

Modulo de corte (G)

El modulo de corte es una medida de la resistencia de la roca a cambiar de forma. Es la relación entre el esfuerzo de corte y la deformación de corte.

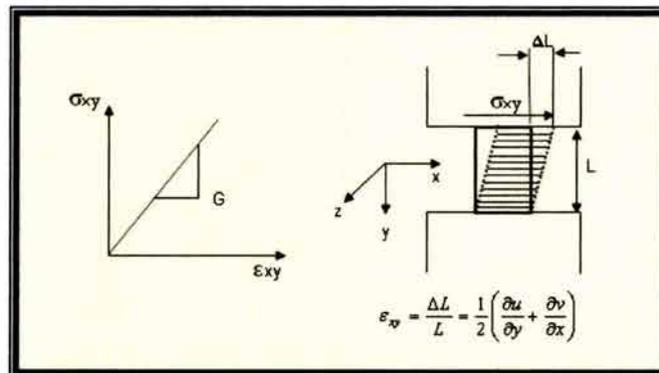


Fig. 2.8 Relación entre el esfuerzo de corte y la deformación de corte

Matemáticamente el modulo de corte es expresado como:

$$G = \frac{\sigma_{xy}}{\epsilon_{xy}} \quad (2.1-32)$$

Modulo de Lamé (λ)

El modulo de Lamé es el equivalente al modulo Young E, bajo condiciones triaxiales de carga, es decir es la relación entre el esfuerzo medio bajo condiciones de carga triaxial y la deformación volumétrica (Ver Fig. 2.9).

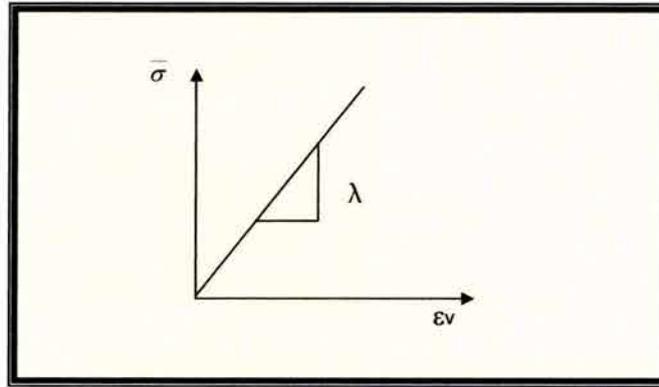


Fig. 2.9 Relación entre el esfuerzo medio y la deformación Volumétrica bajo condiciones de carga triaxial.

El esfuerzo medio es expresado como:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (2.1-33)$$

La deformación volumétrica es expresada como:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (2.1-34)$$

Finalmente el modulo de Lamé es expresado como:

$$\lambda = \frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon_v} \quad (2.1-35)$$

Modulo volumétrico.

Describe el cambio de volumen bajo una presión hidrostática, es decir es la relación entre un esfuerzo hidrostático y la deformación volumétrica (Ver Fig. 2.10).

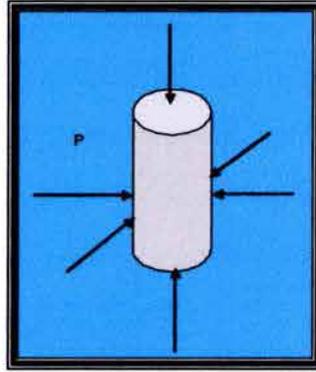


Fig. 2.10 Cuerpo sujeto bajo una condición carga hidrostática.

Bajo condiciones de esfuerzo hidrostático tenemos que:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \quad (2.1-36)$$

Por lo que el esfuerzo medio es igual a una presión hidrostática ejercida en todo el cuerpo:

$$\bar{\sigma} = P_c \quad (2.1-37)$$

Por lo tanto el modulo volumétrico es:

$$K = \frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon_v} \quad (2.1-38)$$

Además el inverso del modulo volumétrico nos representa la propiedad de la compresibilidad de la roca.

$$C_o = \frac{1}{K} \quad (2.1-39)$$

2.1-3 Material isotropico y anisotropico.

Material isotropico.

Es aquel cuya respuesta es independiente de la orientación de los esfuerzos aplicados. Para dichos materiales los ejes principales de esfuerzo y los ejes de deformación siempre coinciden.

Si nosotros consideramos una compresión longitudinal en el sentido del eje se tendrá que:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} \quad (2.1-40)$$

Además debido al acortamiento sufrido en el sentido de la carga compresiva aplicada , existe un alargamiento en el plano x-z dado por:

$$\varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma_y}{E} \quad \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_y}{E} \quad (2.1-41)$$

Si consideramos que la compresión longitudinal es en la dirección del eje x, puede ser expresada como:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_x}{E} \quad \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E} \quad (2.1-42)$$

y para la dirección del eje z tenemos:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} \quad \varepsilon_y = -\mu \frac{\sigma_z}{E} \quad \varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma_z}{E} \quad (2.1-43)$$

La relación de poisson nos permite generalizar la ley de Hook para el caso de esfuerzos triaxiales. Para poder encontrar la deformación resultante para el caso de carga triaxial es necesario superponer las ecuaciones anteriores para poder encontrar las deformaciones en x, y, z por lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)) \end{aligned} \quad (2.1-44)$$

expresada en coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu(\sigma_\theta + \sigma_z)) \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu(\sigma_z + \sigma_r)) \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu(\sigma_r + \sigma_\theta)) \end{aligned} \quad (2.1-45)$$

Para el caso de esfuerzos cortantes, es sencillo demostrar que de igual forma cumple la ley de hook.

$$\tau = G\gamma \quad (2.1-46)$$

Si sobre la cara de un elemento actúan esfuerzos tangenciales, y la deformación del ángulo formado por dos ejes cualesquiera, depende únicamente de las componentes tangenciales paralelas a tales ejes, su valor es:

$$\gamma_{x,y} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \quad (2.1-47)$$

y en coordenadas cilíndricas:

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\tau_{\theta z}}{G} \quad \gamma_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{G} \quad \gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} \quad (2.1-48)$$

La ley de hook generalizada para un cuerpo isotropico esta dada por las ecuaciones 2.1-45 y para el caso de la deformación por los esfuerzos normales y esfuerzo de corte respectivamente.

Una forma más conveniente de expresar la ley generaliza de hook para materiales isotropicos, resultado de despejar los esfuerzos en las ecuaciones 2.1-45 y aplicar las definiciones de los módulos elásticos es:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (\lambda + 2G)\epsilon_r + \lambda\epsilon_\theta + \lambda\epsilon_z \\ \sigma_\theta &= \lambda\epsilon_r + (\lambda + 2G)\epsilon_\theta + \lambda\epsilon_z \\ \sigma_z &= \lambda\epsilon_r + \lambda\epsilon_\theta + (\lambda + 2G)\epsilon_z \\ \tau_{r\theta} &= 2G\Gamma_{r\theta} \\ \tau_{rz} &= 2G\Gamma_{rz} \\ \tau_{\theta z} &= 2G\Gamma_{\theta z} \end{aligned} \quad (2.1-49)$$

Materiales Anisotropicos.

Es aquel material que tiene constantes elásticas diferentes en todos los planos y todos los ejes.

La mayoría de las rocas son anisotropicas en alguna extensión. El origen de la anisotropía son siempre heterogeneidades en escalas más pequeñas que el volumen en investigación examinado de secuencias de capas de diferentes tipos de rocas, a lo largo de su configuración molecular. Las rocas sedimentarias son originadas durante el proceso de depositación, donde los granos normalmente no son depositados al azar. Para el caso de un ambiente de río hay una dirección preferencial en cual los granos del plano, tendrán una tendencia hacer orientados.

En la mayoría de los cálculos de la mecánica de roca, la anisotropía regularmente es ignorada debido a que requiere mucho más información acerca del material. Esta información puede no ser disponible. Sin embargo el ignorar la anisotropía puede generar grandes errores.

Para un material anisotropico, cada componente de esfuerzo, esta linealmente relacionado a cada componente de deformación, por coeficientes independientes. En forma matemática las ecuaciones pueden ser expresadas como:

$$\sigma_{ij} = \sum_{kl} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \tag{2.1-50}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \tau_{xy} \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \sigma_y \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \tau_{zy} \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} C_{1112} C_{1113} C_{1122} C_{1123} C_{1131} C_{1132} C_{1133} \\ C_{1211} \\ C_{1311} \\ C_{2111} \\ C_{2211} \\ C_{2311} \\ C_{3111} \\ C_{3211} \\ C_{3311} \dots \dots \dots C_{3333} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \Gamma_{xy} \Gamma_{xz} \\ \Gamma_{yx} \varepsilon_y \Gamma_{yz} \\ \Gamma_{zx} \Gamma_{zy} \varepsilon_z \end{pmatrix} \tag{2.1-51}$$

El número de constantes requeridas son 81, sin embargo; algunas de estas constantes pueden desaparecer y otras ser iguales por simetría. Para el caso de ejes y esfuerzos principales las constantes se reducen a 21.

Existen otros dos tipos comunes de anisotropías encontradas en rocas que reducen aun más el número de constantes requeridas para un material, estas son:

Anisotropía ortogonal; en este tipo de anisotropía los módulos elásticos son diferentes en cada plano, es decir existen tres módulos diferentes para cada plano, reduciendo al numero de constantes a 9.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} C_{12} C_{13} 0.0.0. \\ C_{12} C_{22} C_{23} 0.0.0 \\ C_{31} C_{32} C_{33} 0.0.0 \\ 0 \dots 0 \dots 0. C_{44} 0.0 \\ 0 \dots 0 \dots 0.0. C_{55} 0 \\ 0 \dots 0 \dots 0.0. 0 C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \Gamma_{xy} \\ \Gamma_{xz} \\ \Gamma_{yz} \end{pmatrix} \tag{2.1-52}$$

Anisotropía transversal; es bastante conveniente su empleo en rocas sedimentarias. Este tipo de simetría implica que las propiedades elásticas son iguales para todas las direcciones dentro del plano, pero diferentes en otro plano. Este elemento extra de simetría reduce el número de constantes a 5.

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \dots \dots \dots (C_{11} - 2C_{66}) \dots C_{13} \dots 0.0.0 \\ (C_{11} - 2C_{66}) \dots C_{11} \dots \dots \dots C_{13} \dots 0.0.0 \\ C_{13} \dots \dots \dots C_{13} \dots \dots \dots C_{33} \dots 0.0.0 \\ 0 \dots \dots \dots 0 \dots \dots \dots 0. C_{44} 0 \dots 0 \\ 0 \dots \dots \dots 0 \dots \dots \dots 0.0 \dots C_{44} 0 \\ 0 \dots \dots \dots 0 \dots \dots \dots 0.0 \dots 0 \dots C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \Gamma_{xy} \\ \Gamma_{xz} \\ \Gamma_{yz} \end{pmatrix} \tag{2.1-53}$$

2.2. Antecedentes teóricos de la Poroelasticidad.

En ingeniería petrolera las formaciones se encuentran sujetas a esfuerzos efectivos que dominan la falla de la roca, estos esfuerzos efectivos a su vez dependen en gran medida de la parte no sólida del sistema roca-fluido es decir; de los poros de la roca. Resulta evidente que la determinación de los esfuerzos efectivos bajo condiciones de cargas externas es crucial. Existen dos técnicas para determinar los esfuerzos efectivos la primera es la de Terzaghi y Peck y la segunda es la de Biot.

Terzaghi y Peck en sus investigaciones enfocadas en el estudio del comportamiento de la deformación en sólidos saturados, introdujeron el concepto de esfuerzos efectivos para un medio poroso con la suposición de que se tenía un material sólido y un fluido incompresible, es decir;

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \quad (2.2-1)$$

Donde:

σ_{ij}^e = Tensor de esfuerzo efectivo que acciona en la roca o esfuerzo normal compresivo.

σ_{ij} = Tensor de esfuerzo total.

p = Presión de poro.

δ_{ij} = Delta de Kronecker.

Se puede ver que σ_{ij} representa el esfuerzo total que acciona en el sistema y es la combinación de la carga en el componente del sólido del medio poroso y la componente del fluido contenido en el poro.

La otra técnica de definir los esfuerzos efectivos es la proporcionada por Biot (1941) y revisada por Skempton (1960). Con la siguiente forma:

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij} - \alpha p\delta_{ij} \quad (2.2-2)$$

$$\alpha = 1 - B = 1 - \frac{K_{fr}}{K_s} \quad (2.2-3)$$

Donde:

α = Constante poroelastica de Biot.

K_{fr} = Modulo volumétrico del esqueleto del sólido (roca porosa seca).

K_s = Modulo volumétrico de los constituyentes del sólido.

B = Coeficiente de Skempton.

Es importante mencionar que K_{fr} es siempre más pequeño que K_s . Teóricamente el límite superior de K_{fr} es $K_s(1-\phi)$ y el límite inferior es cero. Debido a esto α es restringido en el rango $\phi < \alpha \leq 1$ y para rocas no consolidadas α es cercano a 1. En lutitas no consolidadas $\alpha = 1$.

2.2.1 Teoría de la poroelasticidad original de Biot

La porosidad es una medida de la cantidad de espacios vacíos disponibles en el medio poroso y es definida como el volumen de espacios porosos V_p dividida entre el volumen total de la roca o volumen volumétrico V_b .

Bajo condiciones de cargas externas, tanto el esqueleto del sólido del medio poroso y el fluido contenido en los poros se deforman simultáneamente. Originando dos componentes de desplazamiento, la componente de los granos del sólido u_i y la del fluido contenido en los poros U_i .

La relación entre desplazamiento-deformación puede ser escrita como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.2-4)$$

El cambio de volumen del esqueleto del sólido e_s , y del fluido en los poros, e_f son:

$$e_s = u_{k,k} = \varepsilon_{kk} \quad (2.2-5)$$

$$e_f = U_{k,k} \quad (2.2-6)$$

El cambio de agua contenida en los poros, por unidad de volumen de roca volumétrica θ es:

$$\theta = \phi(e_f - e_s) \quad (2.2-7)$$

Varias ecuaciones de gobierno, tales como las ecuaciones de equilibrio y las ecuaciones constitutivas son requeridas para derivar el cambio de la presión de poro como una función del contenido de fluidos en los poros, de la distancia y el tiempo.

Para el caso de una presión de poro igual a cero ($p=0$). La expresión conocida de la ley de hook para un cuerpo elástico isotropico puede ser escrita como (Gould, 1994):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}^e - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk}^e \delta_{ij} \quad (2.2-8)$$

$$\sigma_{ij}^e = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} e_s \delta_{ij} \quad (2.2-9)$$

Biot 1941 presentó las ecuaciones constitutivas donde incluye la presión de poro, expresando la deformación como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} - \frac{p}{3H} \delta_{ij} \quad (2.2-10)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} - \frac{\alpha(1-2\nu)}{E} p \delta_{ij} \quad (2.2-11)$$

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} e_s \delta_{ij} + \alpha p \delta_{ij} \quad (2.2-12)$$

La ecuación 2.2-12 puede ser derivada por sustitución $\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij} - \alpha p \delta_{ij}$ y $\sigma_{kk}^e = \sigma_{kk} - 3\alpha p$ dentro de la ecuación 2.2-9. Un signo negativo es seleccionado para el último término de lado derecho de la ecuación 2.2-11, ya que un incremento de p causará una expansión de los constituyentes del sólido de la roca porosa.

El cambio del contenido de fluido tiene la siguiente forma

$$\theta = -\frac{\sigma_{kk}}{3H} + \frac{p}{R} = -\alpha e_s + \frac{p}{Q} \quad (2.2-13)$$

Donde H y R son constantes y los signos son escogidos del hecho que θ está decreciendo por σ_{kk} e incrementando por p . El significado físico de las nuevas constantes H y R puede ser encontrado por la consideración de varios sistemas experimentales simples. H y R , así como las dos constantes elásticas E y ν son cuatro distintas constantes las cuales completamente definen las proporciones físicas de una roca isotrópica bajo condiciones de equilibrio. Ellas son relacionadas como:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.2-14)$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{H} \quad (2.2-15)$$

$$\alpha = \frac{2(1+\nu)G}{3(1-2\nu)H} = \frac{E}{3(1-2\nu)H} \quad (2.2-16)$$

Insertando los esfuerzos totales dentro de las ecuaciones de equilibrio tenemos;

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (2.2-17)$$

Despreciando las fuerzas de cuerpo se producen las ecuaciones tipo Navier (La formulación del desplazamiento de las ecuaciones de equilibrio).

$$G\nabla^2 u_i + \frac{G}{1-2\nu} e_{s,i} + \alpha p_{,i} = 0 \quad (2.2-18)$$

O bien las ecuaciones pueden ser expresadas en términos del cambio del contenido de agua en el poro.

$$G\nabla^2 u_i + \frac{G}{1-2\nu} e_{s,i} + \alpha M \theta_{,i} = 0 \quad (2.2-19)$$

Donde M es el modulo de Biot.

La ley de darcy y la ecuación de continuidad son requeridas todavía para resolver las ecuaciones de arriba para los desplazamientos, u_i y presión de poro, p. La ley de darcy es usada para describir la difusión del fluido en los poros dentro y fuera del elemento de interés, el cual tiene la forma de

$$v_i = -K\nabla p \quad (2.2-20)$$

Donde

$K = \frac{k}{\mu}$ = Representa la relación entre la permeabilidad y la viscosidad.

v_i = Vector velocidad de darcy.

La ecuación de continuidad expresa la conservación de la masa del fluido en los poros de la siguiente forma (para fluidos incompresibles).

$$\nabla \cdot v_i = v_{i,j} = -\frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (2.2-21)$$

Combinando las ecuaciones 2.2-13, 2.2-14, 2.2-15, 2.2-16, 2.2-20 y 2.2-21 Biot (1941) determinó:

$$K\nabla^2 p = \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial e_s}{\partial t} + \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.2-22)$$

2.2.2 Teoría poroelástica modificada de Biot (Biot, 1955, 1962)

Para un medio poroso isotropico saturado con fluido, las siguientes ecuaciones de gobierno son requeridas para derivar la teoría poroelastica de Biot

a. Ecuaciones constitutivas (Biot, 1955)

$$\sigma_{ij}^e = 2N\varepsilon_{ij} + Ae_s\delta_{ij} + Qe_f\delta_{ij} \quad (2.2-23)$$

$$\sigma = Qe_s + Re_f \quad (2.2-24)$$

Donde N, A, Q y R son constantes del material que son determinadas experimentalmente.

Para un medio con porosidad isotropica, los esfuerzos accionando en el fluido del poro, puede ser relacionado con la presión de poro por la ecuación:

$$\sigma = \phi.p \quad (2.2-25)$$

b. Ecuaciones de equilibrio (Despreciando las fuerzas de cuerpo)

$$\left(\sigma_{ij}^e + \sigma\delta_{ij}\right)_{,j} = 0 \quad (2.2-26)$$

c. Ley de darcy (Biot 1955)

$$\sigma_{,i} = b \frac{\partial}{\partial t} (U_i - u_i) \quad (2.2-27)$$

Donde: b es una constante que debe de ser determinada.

Sustituyendo las ecuaciones constitutivas dentro de las ecuaciones de equilibrio e introduciendo las deformaciones y desplazamientos del sólido de la roca y del fluido en el poro se produce la ecuación de tipo Navier, la cual tiene la siguiente forma:

$$N\nabla^2 u_i + (A + N + Q)\nabla e_s + (Q + R)\nabla e_f = 0 \quad (2.2-28)$$

Tomando la divergencia de la ley de darcy y haciendo uso de la ecuación 2.2-24 de las ecuaciones constitutivas producimos la siguiente ecuación:

$$Q\nabla^2 e_s + R\nabla^2 e_f = b \frac{\partial}{\partial t} (e_f - e_s) \quad (2.2-29)$$

Eliminando e_f de las dos ecuaciones de arriba se produce las ecuaciones finales presentadas por Biot (1955).

$$N\nabla^2 u_i + \left(A + N - \frac{Q^2}{R} \right) u_{k,ki} + \frac{Q+R}{R} \sigma_{,i} = 0 \quad (2.2-30)$$

$$\nabla^2 p = \frac{b}{R} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{b(Q+R)}{\phi R} \frac{\partial e_s}{\partial t} \quad (2.2-31)$$

Las relaciones entre los parámetros originales de Biot (G , ν , α , M , K) y los de arriba (N , A , Q , R , b) fueron presentados por Biot (1962) como sigue:

$$G = N \quad (2.2-32)$$

$$\mu = \frac{A - \frac{Q^2}{R}}{2 \left(N + A - \frac{Q^2}{R} \right)} \quad (2.2-33)$$

$$\alpha = \phi \left(\frac{Q+R}{R} \right) \quad (2.2-34)$$

$$M = \frac{R}{\phi^2} \quad (2.2-35)$$

$$K = \frac{\phi^2}{b} \quad (2.2-36)$$

Biot y Willis (1957) discutieron la forma más conveniente para obtener las constantes elásticas de un material isotropico (A , N , Q y R) a través de una combinación de mediciones de módulos de corte, compresibilidad enchaquetada y no enchaquetada del sólido poroso y un coeficiente no enchaquetado del contenido del fluido.

2.2.3 Teoría poroelastica de Rice-Cleary

Rice y Cleary (1976) realizaron una continuación de los trabajos de Biot (1941, 1962), replanteando las ecuaciones poroelásticas de Biot para un material isotropico, para poder simplificar los parámetros del material bajo condiciones de pruebas drenadas ($p = \text{constante}$) y no drenadas ($\theta=0$). Las variables de estado básicas son los esfuerzos totales y la presión de poro.

a. Ecuaciones constitutivas para condiciones isotérmicas.

La siguiente ecuación puede ser deducida de la ecuación 2.2-11 o 2.2-12 de los trabajos de Biot.

$$2G\varepsilon_{ij} = (\sigma_{ij} - p\delta_{ij}) - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_{kk} - 3p)\delta_{ij} + \frac{2G}{3} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{H} \right) p\delta_{ij} \quad (2.2-37)$$

Donde:

G = Modulo de corte

ν = Relación de poisson

K = Modulo volumétrico drenado.

Cuando el material es deformado bajo condiciones drenadas.

$$K = \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \quad (2.2-38)$$

La constante K_s' es una nueva constante del material dada por

$$\frac{1}{K_s'} = \frac{1}{K} - \frac{1}{H} \quad (2.2-39)$$

b. Cambio de masa del fluido contenido en el poro.

$$\theta = \nu - \nu_o = -\frac{1}{3H} (\sigma_{kk} - 3P) - \frac{\nu_o}{K_s''} p \quad (2.2-40)$$

Donde

ν_o = Es una fracción de volumen vacío en un estado sin esfuerzo.

La relación entre la nueva constante K_s'' y las constantes propuestas por Biot son:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{H} - \frac{v_o}{K_s''} \quad (2.2-41)$$

Las constantes K_s' y K_s'' son además sensiblemente asociadas con K_s .

La masa m del fluido en el poro por unidad de volumen para el comportamiento elástico no drenado puede ser expresado en forma lineal como:

$$\begin{aligned} \Delta m &= m - m_o \\ &= \rho_o \Delta v + v_o \Delta \rho \\ &= \rho_o \frac{v_o}{K_f} p - \frac{\rho_o}{3} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K_s'} \right) (\sigma_{kk} - 3p) - \rho_o \frac{v_o}{K_s''} p \end{aligned} \quad (2.2-42)$$

Donde m_o y ρ_o son obtenidas de un estado de referencia y el modulo volumétrico del fluido K_f es dado por

$$K_f = \frac{\rho_o P}{\rho - \rho_o} \quad (2.2-43)$$

La repuesta no drenada puede ser escrita como $\Delta m = 0$ y manipulando la ecuación 2.2-42 nos da una relación como la de skempton (1954) entre la presión de poro inducida inicial y el esfuerzo hidrostático total en un elemento.

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{B}{3} \Delta \sigma_{kk} \\ B &= \frac{\frac{1}{K} - \frac{1}{K_s'}}{\frac{v_o}{K_f} + \frac{1}{K} - \frac{1}{K_s'} - \frac{v_o}{K_s''}} \end{aligned} \quad (2.2-44)$$

Donde B es el parámetro de Skempton, el cual es una relación de la presión de poro inducida por la variación de la presión de confinamiento bajo condiciones no drenada. Su valor típico sería la unidad para sólidos saturados con agua ($K_s''/v_o > K_s' > K_f \gg K$) pero puede ser sustancialmente menor para rocas, las cuales no son efectivamente efectivas.

Una expresión para la "relación de poisson no drenada v_u " puede ser obtenidos por la sustitución de la definición de Δp dada en la ecuación 2.2-44 dentro de la ecuación 2.2-37 y comparando los coeficientes resultantes con la definición de repuesta elástica instantánea se tiene que:

$$2G\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\sigma_{ij} - \frac{v_u}{1+v_u} \Delta\sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.2-45)$$

La expresión para v_u es

$$v_u = \frac{3v + B(1-2v)(1 - K/K_s')}{3 - B(1-2v)(1 - K/K_s')} \quad (2.2-46)$$

El rango para v_u es $v \leq v_u \leq 0.5$. El limite superior es alcanzado por constituyentes incompresibles ($B=1, K/K_s'=0$), y la frontera inferior es alcanzada cuando el fluido en el poro es altamente compresible ($B=0$).

Las ecuaciones son rescritas en términos de cuatro constantes elásticas G , B , v y v_u para tomar la forma de:

$$2G\varepsilon_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{v}{1+v} \sigma_{kk} \delta_{ij} - \frac{3(v_u - v)}{B(1+v)(1+v_u)} p \delta_{ij}$$

$$m - m_o = -\frac{3\rho_o(v_u - v)}{2GB(1+v)(1+v_u)} \left[\sigma_{kk} - \frac{3}{B} p \right] \quad (2.2-47)$$

Las ecuaciones constitutivas de arriba pueden ser escritas en la siguiente forma (Deutornay y Cheng, 1988) después de permitir $i = j$ en la primera ecuación y sustituyendo $\Delta m = \theta \rho_o$ tenemos:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2Gv}{1-2v} e_s \delta_{ij} + \alpha p \delta_{ij}$$

$$p = \frac{2GB(1+v_u)}{3(1-2v_u)} e_s + \frac{2GB^2(1-2v)(1+v_u)^2}{9(v_u - v)(1-2v_u)} \theta \quad (2.2-48)$$

Las ecuaciones revelan que los “esfuerzos efectivos de Biot”, $\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij} - \alpha p \delta_{ij}$ son directamente proporcionales a la deformación del sólido ε_{ij} en una relación de elasticidad idéntica. El parámetro de Biot α es definido por:

$$\alpha = \frac{3(v_u - v)}{B(1-2v)(1+v_u)} \quad (2.2-49)$$

c. Ecuaciones de equilibrio (despreciando las fuerzas de cuerpo)

$$(\sigma_{ij}^e + \alpha p \delta_{ij})_{,j} = 0 \quad (2.2-50)$$

d. Ecuaciones de compatibilidad

Generalmente, las condiciones de compatibilidad puede ser escrita como (Gould, 1994)

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} \quad (2.2-51)$$

Usando las ecuaciones de campo 2.2-46 y 2.2-49 nos genera;

$$\nabla^2 \left[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij} \right] + \sigma_{kk,ij} - \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu_u)} \left[\nabla^2 p \delta_{ij} + p_{,ij} \right] = 0 \quad (2.2-52)$$

e. Ley de Darcy.

$$q_i = -\rho_o \kappa p_{,i} \quad (2.2-53)$$

Donde q_i es el gasto másico en la dirección X_i por unidad de área, $p_{,i}$ es el gradiente de presión de poro y κ es el coeficiente de permeabilidad del medio poroso dado por $\kappa = k/\mu$ donde k es la permeabilidad del material y μ la viscosidad del fluido en el poro. La conservación de la masa para el fluido en el poro puede ser escrita como:

$$q_{i,i} = -\frac{\partial m}{\partial t} \quad (2.2-54)$$

Combinando la segunda ecuación de la 2.2-48 y las dos últimas ecuaciones nos produce:

$$\kappa \nabla^2 p = -\frac{3(\nu_u - \nu)}{2GB(1+\nu)(1+\nu_u)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma_{kk} - \frac{3}{B} p \right) \quad (2.2-55)$$

Una relación útil entre σ_{kk} y p puede ser obtenida por acortamiento en i, j de la ecuación de compatibilidad 2.2-52.

$$\nabla^2 \left[\sigma_{kk} - \frac{6(\nu_u - \nu)}{B(1-\nu)(1+\nu_u)} p \right] = 0 \quad (2.2-56)$$

Combinando esta última ecuación con la ecuación 2.2-55 nos da la siguiente ecuación de flujo:

$$c \nabla^2 \left(\sigma_{kk} - \frac{3}{B} p \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma_{kk} - \frac{3}{B} p \right) \quad (2.2-57)$$

Donde c es el coeficiente de difusividad masica del fluido

$$c = \frac{2\kappa B^2 G(1-\nu)(1+\nu_u)^2}{9(1-\nu_u)(\nu_u - \nu)} \quad (2.2-58)$$

La relación entre las constantes de Rice y Cleary y Biot (1955) pueden ser escritas como (Zhang, 1994):

$$\begin{aligned}
 G &= N \\
 \nu &= \frac{A - \frac{Q^2}{R}}{2\left(N + A - \frac{Q^2}{R}\right)} \\
 \nu_u &= \frac{A + 2Q + R}{2(A - N + 2Q + R)} \\
 B &= \frac{3(Q + R)}{\phi(3A + 2N + 6Q + 3R)} \\
 \kappa &= \frac{\phi^2}{b}
 \end{aligned} \tag{2.2-59}$$

Deutornay y Cheng (1988) rescribieron las ecuaciones de equilibrio y ecuaciones poroelásticas (ecuaciones de presiones de poro) como siguen:

$$G\nabla^2 u_i + \frac{G}{1-2\mu} u_{j,ji} + \alpha p_{,i} = 0 \tag{2.2-60}$$

$$\nabla^2 p = -\frac{\alpha}{\kappa} \frac{\partial e_s}{\partial t} + \frac{\alpha^2(1-2\nu_u)(1-2\nu)}{2\kappa G(\nu_u - \nu)} \frac{\partial p}{\partial t} \tag{2.2-61}$$

Nótese el termino de acoplamiento entre estas ecuaciones y la similitud con la ecuación 2.2-30 y 2.2-31 de la formulación de Biot. Sin embargo, los parámetros del material en la formulación de Rice y Cleary manifiestan las condiciones drenadas y no drenadas, reflejando el comportamiento a tiempos largos y cortos de un medio poroso.

2.2.4 Teoría de poroelasticidad de Yew-Lubinski

a. Ecuaciones constitutivas

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_{ij}^e - \frac{\mu}{E} \sigma_{kk}^e \delta_{ij} - \frac{1-2\mu}{E} (1-\phi-\beta)p\delta_{ij} \quad (2.2-62)$$

$$\beta = \frac{K}{K_s} \quad (2.2-63)$$

En términos de esfuerzos tenemos:

$$\sigma_{ij}^e = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda e_s \delta_{ij} + (1-\phi-\beta)p\delta_{ij} \quad (2.2-64)$$

La ecuación de arriba puede ser expresada usando los esfuerzos totales por sustitución de $\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij} - \phi p \delta_{ij}$

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \lambda e_s \delta_{ij} + (1-\beta)p\delta_{ij} \quad (2.2-65)$$

Donde $(1-\beta)$ es una constante poroelastica de Biot, σ_{ij}^s es el esfuerzo en los granos, y λ es la constante de Lamé.

Las ecuaciones constitutivas son obtenidas por descomposición de la deformación total del medio poroso en tres partes (Lubinski, 1954; Yew y Liu, 1992):

- 1) La deformación promedio del medio poroso seco producida por la componente de esfuerzo σ_{ij}^s .

$$\varepsilon_{ij}^{(1)} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}^e - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk}^e \delta_{ij} \quad (2.2-66)$$

Donde E y ν son el módulo de Young y la relación de Poisson del esqueleto del sólido del medio poroso respectivamente.

- 2) La deformación volumétrica producida por la presión de poro.

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} = \frac{1}{K_s} p \quad (2.2-67)$$

Donde K_s es el módulo volumétrico de los constituyentes del sólido del esqueleto.

- 3) La deformación volumétrica del medio poroso seco producida por un esfuerzo tensivo uniforme $(1-\phi)p$

$$\varepsilon_{ij}^{(3)} = -\frac{1}{K}(1-\phi)p \quad (2.2-68)$$

Donde K es el modulo volumétrico del esqueleto del sólido seco.

b. Ecuaciones de equilibrio tipo Navier

Las ecuaciones de equilibrio en términos de componentes de desplazamientos u_i y presión de poro p esta dada por:

$$G\nabla^2 u_i + (\lambda + G)e_{s,i} + (1-\beta)p_{,i} = 0 \quad (2.2-69)$$

Comparando la ecuación de arriba con la ecuación de Navier de elasticidad, se puede ver que el gradiente de presión acciona como una fuerza de cuerpo en el esqueleto del sólido del material poroso. Nótese que $\alpha = 1 - \beta$ es el parámetro de poroelasticidad de Biot .

c. El cambio de contenido de agua en le medio poroso.

$$\theta = \phi d_{i,i} = -(1-\beta)e_s + \frac{\phi}{K_f} p \quad (2.2-70)$$

$$d_i = U_i - u_i \quad (2.2-71)$$

Donde K_f es la compresibilidad del fluido en los poros y e_s es la dilatación del esqueleto del sólido. En la teoría de Lubinski, la dilatación del esqueleto del sólido e_s es despreciable en la ecuación 2.2-70 de arriba por la suposición de una fuerte estructura del poro y entonces el modulo de Biot M es igual a K_f / ϕ .

d. Ley de Darcy

La ley de darcy es usada para evaluar el transporte de fluido en el medio poroso. Para un medio poroso e isotropico la ecuación puede ser escrita como:

$$\phi \frac{\partial d_i}{\partial t} = \frac{k}{\mu} P_{,i} \quad (2.2-72)$$

Donde k y μ son la permeabilidad del medio poroso y la viscosidad del fluido en los poros respectivamente. Tomando la operación de la divergencia sobre la última ecuación dada tenemos que:

$$\phi \frac{\partial d_{i,i}}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \nabla^2 p \quad (2.2-73)$$

y usando la ecuación 2.2-70 obtenemos:

$$-(1-\beta)\frac{\partial e_s}{\partial t} + \frac{\phi}{K_f} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{k}{\mu} \nabla^2 p \quad (2.2-74)$$

La operación de divergencia de la ecuación 2.2-69 resulta en

$$(\lambda+2G)\nabla^2 e_s + (1-\beta)\nabla^2 p = 0 \quad (2.2-75)$$

Combinando las últimas dos ecuaciones a favor de la presión nosotros obtenemos:

$$\nabla^2 \left(K_1 \nabla^2 p - \frac{\partial p}{\partial t} \right) = 0$$

o

$$K_1 \nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t} + g \quad (2.2-76)$$

Donde g es una función armónica arbitraria. K_1 es el coeficiente de difusividad equivalente a c en la formulación de Rice y Cleary y esta dada por:

$$K_1 = \frac{k}{\mu} \frac{1}{\frac{(1-\beta)^2}{\lambda+2G} + \frac{\phi}{K_f}} \quad (2.2-77)$$

Expresiones generales a la ecuación 2.2-76 pueden ser obtenidas por la supresión de e_s a través de la combinación de las ecuaciones 2.2-18 y 2.2-22, ambas ecuaciones en la ecuación 2.2-30,31, ecuación 2.2-60 y 2.2-61.

En la industria petrolera K_1 es siempre escrita como:

$$K_1 = \frac{k}{\phi \mu c_t} \quad (2.2-79)$$

Nótese que si el dominio es infinito y axil-simétrico como en el caso de un pozo, la función g desvanece. Entonces la ecuación 2.2-76 se reduce a:

$$K_1 \nabla^2 p = \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.2-80)$$

Como se mostró arriba las ecuaciones de poroelasticidad son desacopladas. La distribución de la presión puede ser calculada usando esta última ecuación y, subsecuentemente, el desplazamiento puede ser determinado usando la ecuación 2.2-69. Nótese que los parámetros del material usado en la

formulación de Yew-Lubinski pueden ser relacionados con los parámetros de la formulación de Biot (1955) como sigue (Zhang, 1994)

$$\begin{aligned}
 G &= N \\
 \lambda &= A - \frac{Q^2}{R} \\
 \alpha &= \phi \frac{Q+R}{R} \\
 K_f &= \frac{R}{\phi} \\
 \kappa &= \frac{\phi^2}{b}
 \end{aligned}
 \tag{2.2-81}$$

2.3.- Mecanismos de falla.

Cuando un espécimen de prueba de cualquier material sólido es sujeto a esfuerzos suficientemente grandes una falla de algún tipo ocurrirá, es decir cuando la fuerza aplicada se libere este no regresara a su estado original. El modo de falla dependerá del estado de esfuerzo, del tipo de material y de la geometría del espécimen.

En mecánica de roca las pruebas más comunes utilizadas con este propósito son la prueba uniaxial y triaxial. La Fig. 2.11 muestra un espécimen de prueba típico. Si nosotros aplicamos un esfuerzo axial a través de pistones en las caras finales del espécimen de prueba y es posible aplicar diferentes esfuerzos axiales y si la presión de confinamiento es cero, la prueba se conoce como uniaxial. Cuando la prueba es realizada con una presión de confinamiento entonces la prueba es conocida como triaxial.

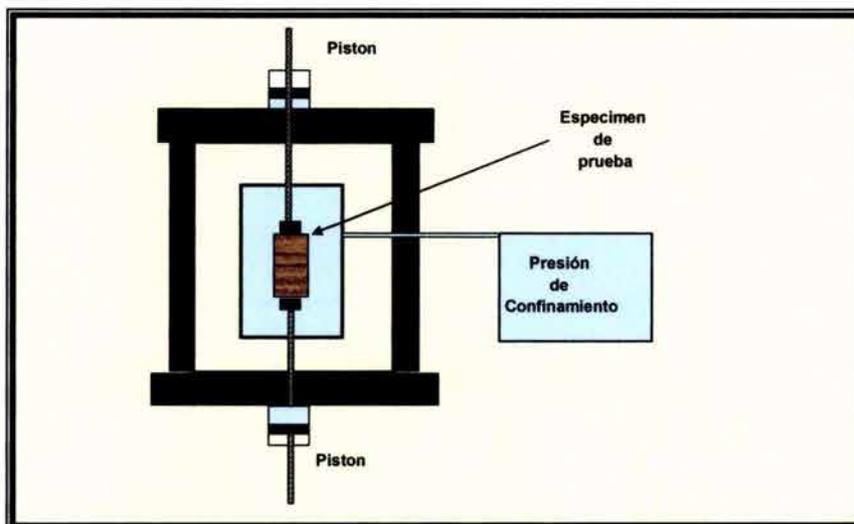


Fig. 2.11 Especimen de prueba sujeta a una prueba uniaxial y triaxial.

La prueba triaxial es lo bastante sencilla consiste en incrementar gradualmente la carga axial y la presión de confinamiento hasta un nivel de esfuerzo hidrostático deseado. Posteriormente se mantiene constante la presión de confinamiento y la carga axial es incrementada hasta que la falla ocurra.

Los resultados de una prueba uniaxial son ilustrado mediante la Fig. 2.12 donde se muestra una grafica de Esfuerzo axial vs. Desplazamiento axial (deformación). Donde nosotros podemos definir varios conceptos fundamentales como son tipos de fallas.

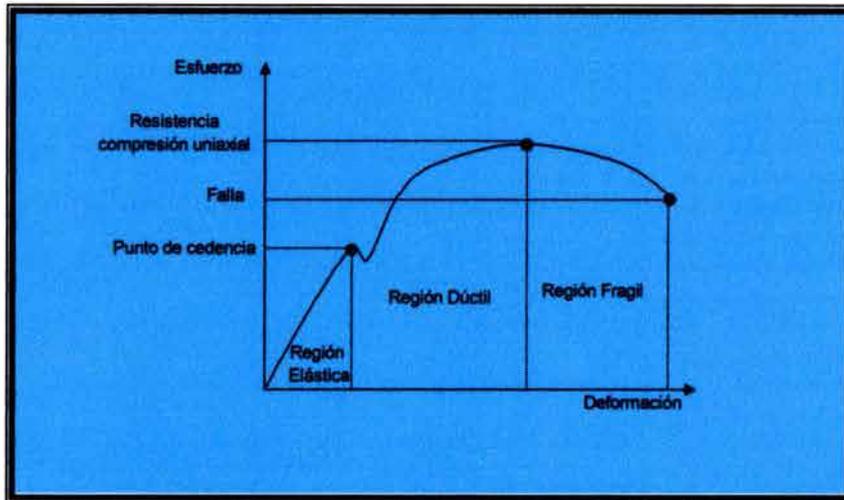


Fig. 2.12 Esfuerzo vs. Deformación para una prueba de compresión uniaxial.

Región elástica: Si el esfuerzo es liberado el espécimen regresara a su estado original.

Punto de cedencia: Es el punto mas allá en el cual cambios permanentes ocurriran.

Resistencia a la Compresión uniaxial: Es el esfuerzo pico o máximo.

Región dúctil: Es una región en la cual el espécimen sufre deformación permanente sin perder la capacidad de soportar carga.

Región frágil: Es una región en la cual la capacidad del espécimen para soportar esfuerzo decrece rápidamente cuando la deformación se incrementa.

De acuerdo a las regiones definidas podemos tener en general dos tipos de fallas:

Falla frágil: La cual esta asociada con una deformación no permanente de la roca ejemplo el vidrio.

Falla Dúctil: Esta asociada a una deformación permanente.

Dilatancia: El volumen final de la roca es mayor al inicial debido al fallamiento.

En el caso de realizar una prueba triaxial uno usualmente grafica la diferencia de los Esfuerzos principales vs. Deformación axial. Las curvas son similares a las obtenidas en las pruebas uniaxial. Sin embargo el comportamiento post-falla puede ser diferente. La Fig. 2.13 muestra los resultados de pruebas triaxiales con varias presiones de confinamiento. Se puede ver que el comportamiento post-falla exhibe una considerable variación y que para mas altas presiones de confinamiento la capacidad del espécimen para soportar carga se incrementa considerablemente incluso después de la falla.

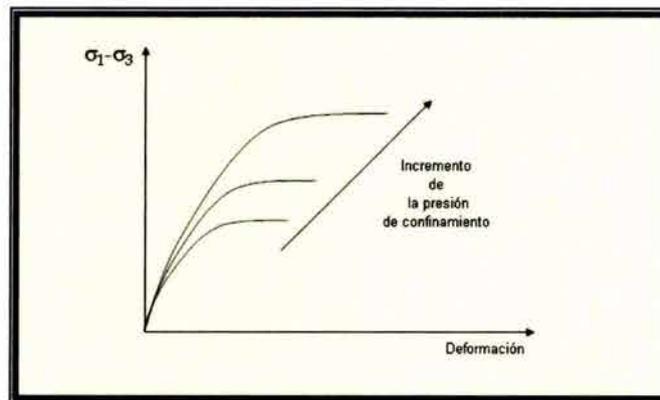


Fig. 2.13 Esfuerzo axial menos la presión de confinamiento vs. deformación axial para una prueba triaxial.

2.4 Criterios de falla.

Una vez que son determinados los esfuerzos in-situ en el pozo es necesario para un análisis de estabilidad de pozos, introducir los criterios de fallas que nos permitirán establecer los puntos donde el estado de esfuerzo excede la resistencia de la roca y como consecuencia la falla de la misma.

Toda formación a una profundidad existe bajo un estado de esfuerzos compresivos, cuando un pozo es perforado la roca alrededor de las paredes del pozo deberán soportar la carga que fue previamente tomada por la roca removida. Como consecuencia alrededor del pozo se produce una concentración de esfuerzos. Si la roca no es lo suficientemente fuerte la falla ocurrirá. En algunos casos que resultan de la interacción roca-fluido la roca es lo suficientemente debilitada como sucede en formaciones de lutitas sensibles al agua, que se trataran mas tarde.

En la práctica son realizadas varias cosas para evitar la falla de la roca. Por ejemplo se selecciona el lodo para minimizar el debilitamiento de la roca, en otros casos el incremento de la presión del pozo debido al incremento de la densidad del lodo puede reducir los esfuerzos compresivos en la pared del pozo y por lo tanto evitar la falla. Sin embargo este incremento en la densidad del lodo nos puede llevar a que ocurra la falla por tensión en la roca causando pérdidas de circulación.

Como la roca se comporta de manera diferente en tensión que en compresión, dos criterios de fallas separados son requeridos para describir cada tipo de falla.

2.4.1 Criterios de falla por compresión.

Existen diversos criterios propuestos para definir la falla de la roca en compresión, los cuales pueden clasificarse en cuatro categorías:

- Categoría A: Lineal y con efecto de esfuerzo principal intermedio.
- Categoría B: Lineal y sin efecto de esfuerzo principal intermedio.
- Categoría C: No lineal y con efecto de esfuerzo principal intermedio.
- Categoría D: No lineal y sin efecto de esfuerzo principal intermedio.

Una pregunta obligada es ¿Qué criterio utilizar. ? La verdad es que en la mayoría de los casos el criterio lineal resulta bastante adecuado ya que materiales sedimentarios son más consolidados conforme se incrementa la profundidad, aunque en formaciones muy débiles donde la resistencia a la compresión uniaxial es menor que 1500 PSI un criterio no lineal sería probablemente justificado.

Criterio de Mohr-Coulomb

La hipótesis de Mohr supone que la falla por corte puede ocurrir cuando el esfuerzo de corte a lo largo del plano en la muestra es también grande. Mohr asume que la falla puede ser descrita por:

$$\tau = f(\sigma) \quad (2.4-1)$$

Donde τ es el esfuerzo de corte a lo largo del plano y σ representa el esfuerzo normal a través del plano. En un plano τ - σ la ecuación de arriba describe una curva que separa una región segura, de una región no segura es decir una región donde la falla ocurrirá.

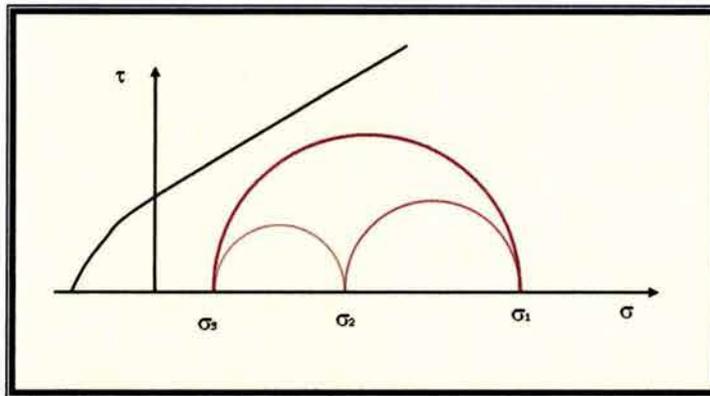


Fig. 2.14 El efecto del esfuerzo principal intermedio en el círculo de Mohr

Imagine que la curva que divide ambas regiones es como la que se muestra en la figura 2.14, si además agregamos los tres esfuerzos principales interconectados entre sí por el círculo de Mohr podemos ver todos los posibles estados de esfuerzos y la relación entre el esfuerzo de corte y el esfuerzo normal.

Si suponemos que el esfuerzo principal mayor se incrementa, el círculo de conexión entre el esfuerzo principal mayor y menor se expande, y como consecuencia toca la curva de falla, ocurriendo la falla. El valor del esfuerzo principal intermedio no tiene influencia en este proceso. Debido a esto la falla de corte definida en la hipótesis de Mohr depende solamente del esfuerzo principal mínimo y máximo y no del esfuerzo intermedio.

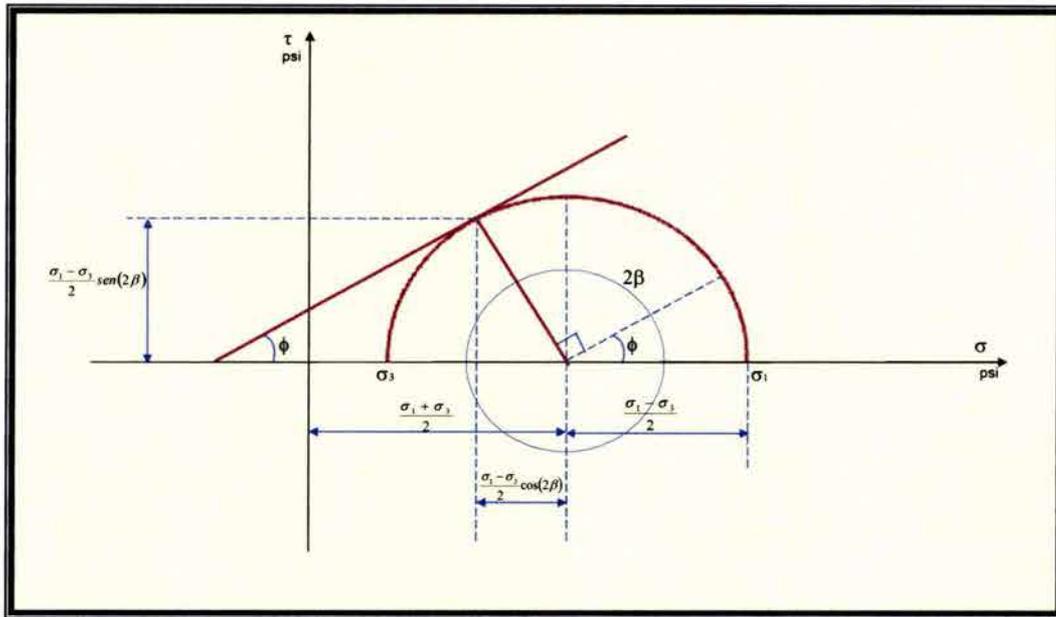
La función $f()$ previamente descrita, es una función lineal en el criterio de Mohr-Coulomb de la siguiente forma:

$$|\tau| = S_0 + \mu\sigma \quad (2.4-2)$$

Donde S_0 es la resistencia de corte inherente o cohesiva del material y μ es el coeficiente de fricción interna. Este último término es claramente seleccionado por analogía con el deslizamiento ordinario del cuerpo en una superficie.

En la figura 2.15 nosotros tenemos dibujado el criterio de Mohr-Coulomb y un círculo de Mohr que toca la línea de falla. En la figura nosotros tenemos definido el ángulo de fricción interna Φ relacionado con el coeficiente de fricción interna μ por:

$$\tan\Phi = \mu \quad (2.4-3)$$


Fig. 2.15 Criterio de Mohr Coulomb

En la figura 2.15 también se muestra el ángulo 2β el cual nos proporciona la posición del punto de coincidencia entre el círculo de Mohr y la línea de falla. Se puede observar que los esfuerzos de corte y normal en el punto de contacto son:

$$|\tau| = \frac{I}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \text{Sen}(2\beta) \quad (2.4-4)$$

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{I}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \text{Cos}(2\beta) \quad (2.4-5)$$

β y θ están relacionadas por:

$$\Phi + \frac{\pi}{2} = 2\beta \quad (2.4-6)$$

La variación máxima permisible de Φ de de $0^\circ - 90^\circ$ (en la practica este rango puede ser pequeño y estar centrado alrededor de 30°) es claro que β varia entre $45^\circ - 90^\circ$ entonces β es el ángulo para el cual el criterio de falla es satisfecho, β da la orientación del plano de falla y nosotros podemos concluir que le plano de falla esta inclinado a un ángulo mas pequeño que 45° en la dirección de σ_1 . De la ecuación (2.4-6) nosotros tenemos

$$\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\Phi}{2} \quad (2.4-7)$$

Un punto importante de señalar es que β esta dado solamente por Φ , de manera que la orientación del plano de falla es independiente del esfuerzo

confinado. Introduciendo las expresiones de las ecuaciones (2.4-4) y (2.4-5) en la ecuación (2.4-2) nosotros tenemos

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\text{Sen}2\beta = S_0 + \mu \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\text{Cos}2\beta \right] \quad (2.4-8)$$

Remplazando β y μ por Φ tenemos

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\text{Cos}\Phi = S_0 + \frac{1}{2}\text{Tan}\Phi(\sigma_1 + \sigma_3) - \frac{1}{2}\text{Tan}\Phi\text{Sen}\Phi(\sigma_1 - \sigma_3) \quad (2.4-9)$$

Multiplicando toda la expresión por $2\text{Cos}\Phi$ y reorganizando tenemos

$$(\sigma_1 - \sigma_3)(\text{Cos}^2\Phi + \text{Sen}^2\Phi) = 2S_0\text{Cos}\Phi + (\sigma_1 + \sigma_3)\text{Sen}\Phi \quad (2.4-10)$$

$$\sigma_1(1 - \text{Sen}\Phi) = 2S_0\text{Cos}\Phi + \sigma_3(1 + \text{Sen}\Phi) \quad (2.4-11)$$

$$\sigma_1 = 2S_0 \frac{\text{Cos}\Phi}{1 - \text{Sen}\Phi} + \sigma_3 \frac{1 + \text{Sen}\Phi}{1 - \text{Sen}\Phi} \quad (2.4-12)$$

Es evidente que la ecuación (2.4-12) es la ecuación de una línea recta y la figura 2.16 ilustra la relación del plano (σ_1, σ_3) se puede ver que es bastante similar a la figura 2.15. Sin embargo, el ángulo α en el plano (σ_1, σ_3) no es igual a Φ , pero esta relacionado por:

$$\text{Tan}\alpha = \frac{1 + \text{Sen}\Phi}{1 - \text{Sen}\Phi} \quad (2.4-13)$$

$$\text{Sen}\Phi = \frac{\text{Tan}\alpha - 1}{\text{Tan}\alpha + 1} \quad (2.4-14)$$

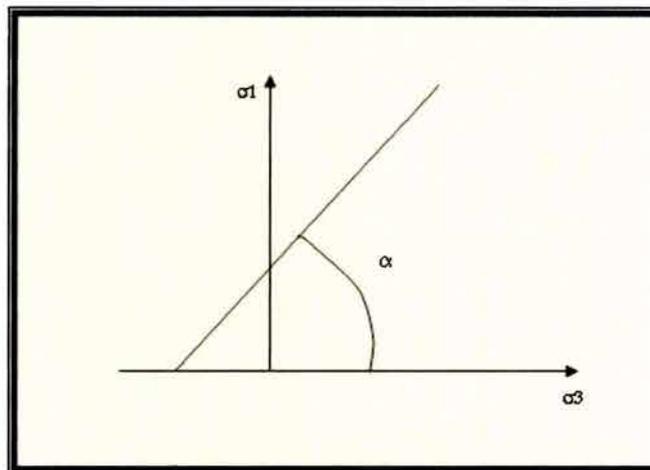


Fig. 2.16 Criterio de Mohr en el plano (σ_1, σ_3)

El término $2S_0 \frac{\text{Cos}\Phi}{1-\text{Sen}\Phi}$ representa la resistencia a la compresión uniaxial y gráficamente es la intersección en el eje σ_1 . Puede ser representada como:

$$C_0 = 2S_0 \frac{\text{Cos}\Phi}{1-\text{Sen}\Phi} \quad (2.4-13)$$

Por lo que la ecuación (2.4-12) puede ser escrita en términos de α (ángulo formado por los esfuerzos principales) de la siguiente manera:

$$\sigma_1 = C_0 + \sigma_3 \text{Tan}\alpha \quad (2.4-14)$$

Si nosotros hacemos $\sigma_1=0$ en la ecuación (2.4-14) tenemos la intersección con el eje σ_3 en la cual $\sigma_3 = T_0$ a T_0 se le conoce como la resistencia a la tensión uniaxial esto nos lleva a que T_0 esta relacionada con C_0 por:

$$\frac{C_0}{T_0} = \text{Tan}\alpha = \frac{1+\text{Sen}\Phi}{1-\text{Sen}\Phi} \quad (2.4-15)$$

Finalmente nosotros podemos expresar la ecuación (2.4-12) en términos del ángulo de falla β de la siguiente forma.

$$\sigma_1 = 2S_0 \frac{\text{Cos}\left(2\beta - \frac{\pi}{2}\right)}{1-\text{Sen}\left(2\beta - \frac{\pi}{2}\right)} + \sigma_3 \frac{1+\text{Sen}\left(2\beta - \frac{\pi}{2}\right)}{1-\text{Sen}\left(2\beta - \frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\sigma_1 = 2S_0 \frac{\text{Cos}(2\beta)\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{Sen}(2\beta)\text{Sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1-\text{Sen}(2\beta)\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{Cos}(2\beta)\text{Sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \sigma_3 \frac{1+\text{Sen}(2\beta)\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{Cos}(2\beta)\text{Sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{1-\text{Sen}(2\beta)\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \text{Cos}(2\beta)\text{Sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\sigma_1 = 2S \frac{\text{Sen}(2\beta)}{1+\text{Cos}2\beta} + \sigma_3 \frac{1-\text{Cos}(2\beta)}{1+\text{Cos}(2\beta)}$$

$$\sigma_1 = 2S_0 \text{Tan}\beta + \sigma_3 \text{Tan}^2 \beta \quad (2.4-16)$$

Por lo tanto al comparar la ecuación (2.4-14) con la ecuación (2.4-16) se puede deducir fácilmente que

$$\text{Tan}^2 \beta = \text{Tan}\alpha \quad (2.4-17)$$

$$2S_0 \text{Tan}\beta = C_0 \quad (2.4-18)$$

Hasta ahora nosotros hemos discutido la falla desde el punto de vista de un material sólido o una roca seca. En ingeniería petrolera estamos interesados en rocas saturadas por lo que es necesario introducir el concepto de los esfuerzos efectivos de Terzaghi donde este es obtenido de sustraer a los esfuerzos totales, la presión de poro como se puede ver a continuación.

$$\sigma' = \sigma - \alpha P_p \quad (2.4-19)$$

$$(\sigma_1 - \alpha P_p) = C_0 + (\sigma_3 - \alpha P_p) f \tan \alpha \quad (2.4-20)$$

Criterio de Drucker-Prager

Este criterio toma en cuenta el efecto de los esfuerzos principales intermedios, donde estudios recientes demuestran la importancia de los esfuerzos intermedios en la falla de la roca.

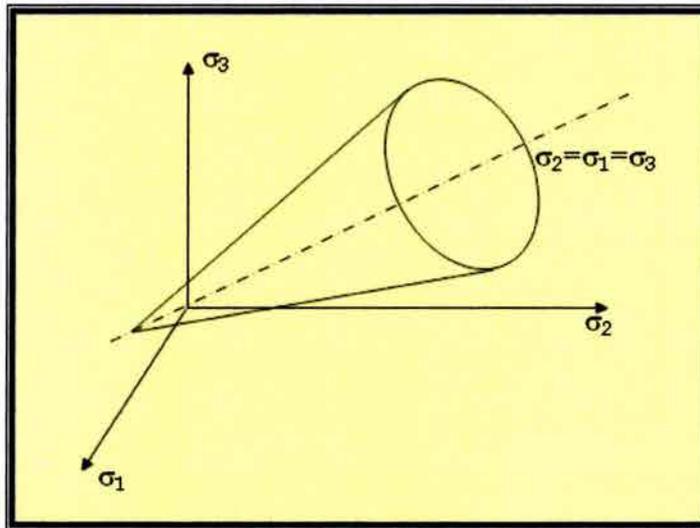


Fig. 2.17 Criterio de Drucker-Prager en un espacio de esfuerzos principales.

En la práctica es común definir un esfuerzo de corte octaédrico. Este esfuerzo octaédrico es igual a la magnitud de la proyección del vector esfuerzo en un plano octaédrico el cual forma ángulos iguales en las tres principales direcciones (ver Fig. 2.17). La teoría que el esfuerzo de corte octaédrico es función del esfuerzo normal medio, el cual permanece constante en un plano octaédrico corresponde a la teoría del Mohr extendida por Nadai [1950].

$$\tau_{oct} = f(\sigma_{oct}) \quad (2.4-21)$$

Como un caso simple esta puede ser una relación lineal entre el esfuerzo normal octaédrico y el esfuerzo de corte octaédrico la cual fue estudiada por Bresler, y Pister.

$$\tau_{oct} = C_1 \sigma_{oct} + C_2 \quad (2.4-22)$$

Como una extensión formal a la teoría de griffth para tres dimensiones Murrell [1965] presento la siguiente relación

$$\tau_{oct}^2 = C \sigma_{oct} \quad (2.4-23)$$

Donde:

$$\sigma_{oct} = \frac{(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})}{3} = \frac{J_1}{3} \quad (2.4-24)$$

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{9} [(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2] + \frac{2}{3} (\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{zr}^2) \quad (2.4-25)$$

$$J_{2D} = \frac{3}{2} \tau_{oct}^2 \quad (2.4-26)$$

$$J_{2D} = \frac{1}{6} [(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2] + (\tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2 + \tau_{zr}^2) \quad (2.4-27)$$

Introduciendo el concepto de esfuerzos efectivos y considerando un estado de esfuerzos principales se puede ver fácilmente que:

$$\tau_{oct} = \left(\frac{1}{9} [(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2] \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.4-28)$$

$$J_{2D}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{6} [(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2] \right)^{\frac{1}{2}} = \tau_{oct} \quad (2.4-29)$$

$$\sigma_{oct} = \frac{(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz})}{3} - P_p \quad (2.4-30)$$

$$\sigma_{oct} = \bar{\sigma} - P_p \quad (2.4-31)$$

$$C_1 = -\frac{\text{Sen}\Phi}{\sqrt{3}\sqrt{4 - \text{Cos}^2\Phi}} \quad (2.4-32)$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{3}\text{Cos}(\Phi)}{\sqrt{4 - \text{Cos}^2\Phi}} C_0 \quad (2.4-33)$$

2. 5 Ecuaciones constitutivas que describen el estado de esfuerzo en un pozo

Las ecuaciones constitutivas que describen el estado de esfuerzo en un pozo son derivadas a partir de los siguientes principios físicos: 1) Ecuaciones generales de equilibrio, 2) Análisis de deformación, 3) Ecuaciones de compatibilidad, y 4) Ecuaciones constitutivas (Ley general de Hook).

2.5.1 Ecuaciones generales de equilibrio en coordenadas cilíndricas.

Comenzaremos nuestra derivación de las ecuaciones constitutivas que describen el estado de esfuerzo en un pozo, con la derivación de las ecuaciones de equilibrio.

Nosotros haremos uso de las coordenadas cilíndricas por la geometría del pozo el cual puede ser representado como un cilindro, si nosotros consideramos un pequeño corte como se muestra en la figura 2.18 la posición de un punto cualquiera en la parte media del volumen que se analiza, estará dada por una distancia r , un ángulo θ , y una distancia z al origen del eje de coordenadas.

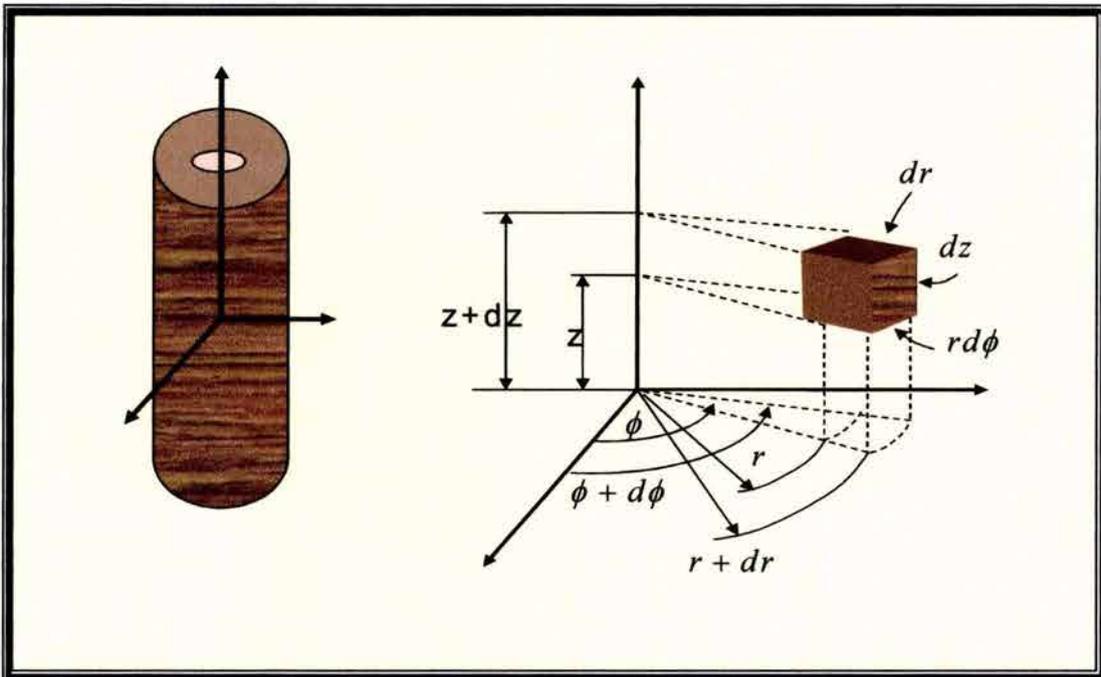


Fig. 2.18 Análisis del volumen de control en coordenadas cilíndricas , cuando actúan esfuerzos tangenciales y axiales sobre sus superficies

Si nosotros consideramos que este volumen infinitesimal se encuentra en equilibrio estático, actuando sobre sus superficies esfuerzos normales y de corte en la dirección radial, tangencial y axial, los cuales son designados por σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{zz} .

Si nosotros consideramos la fuerza en la dirección r, generada por el esfuerzo normal σ_{rr} se tendrá que:

$$F_{rr} = \sigma_{rr} * Area \quad (2.5-1)$$

y por el principio de continuidad en el lado opuesto de la fuerza se tendrá:

$$F_{r+dr} = \left(\sigma_{rr} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \right) * Area \quad (2.5-2)$$

Este mismo análisis puede ser aplicado para los demás esfuerzos que actúan en el volumen de control en la dirección de r.

Además existe una fuerza generada por el peso mismo del cuerpo debido a la gravedad esta fuerza esta representada en la figura 2.18 por las componentes ρR , $\rho \theta$, ρz .

Si consideramos que el volumen de control esta en equilibrio entonces la sumatoria de fuerzas en la dirección de r es igual a cero, es decir:

$$\sum F_r = 0 \quad (2.5-3)$$

La componente de la esfuerzo radial σ_{rr} genera la fuerza:

$$F_1 = \left(\sigma_{rr} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \sigma_{rr} r d\theta dz \quad (2.5-4)$$

El esfuerzo tangencial que actúa en el plano θ , esta compuesto por dos componentes, uno de los cuales genera la fuerza en la dirección r, el cual esta dada por:

$$F_3 = - \left(\sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \text{Sen} \left(\frac{d\theta}{2} \right) - \sigma_{\theta\theta} dr dz \text{Sen} \left(\frac{d\theta}{2} \right) \quad (2.5-5)$$

El esfuerzo de corte $\tau_{\theta r}$ genera una fuerza en la dirección r dada por:

$$F_3 = \left(\tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz - \tau_{\theta r} dr dz \quad (2.5-6)$$

La fuerza axial que actúa en la dirección r será debido al esfuerzo de corte τ_{zr} :

$$F_4 = \left(\sigma_{zr} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} dz \right) \left(\frac{rd\theta + (r + dr)d\theta}{2} \right) dr - \sigma_{zr} \left(\frac{rd\theta + (r + dr)d\theta}{2} \right) dr \quad (2.5-7)$$

La fuerza debido a la componente del peso en la dirección r será:

$$F_5 = \rho R dr dz \left(\frac{rd\theta + (r+dr)d\theta}{2} \right) \quad (2.5-8)$$

Haciendo un balance de fuerzas en la dirección r es decir aplicando la ecuación 2.5-3 tenemos que:

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{rr} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} dr \right) (r+dr) d\theta dz - \sigma_{rr} r d\theta dz - \left(\sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \text{Sen} \left(\frac{d\theta}{2} \right) - \sigma_{\theta\theta} dr dz \text{Sen} \left(\frac{d\theta}{2} \right) + \\ & \left(\tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz - \tau_{r\theta} dr dz + \left(\sigma_{zr} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} dz \right) \left(\frac{rd\theta + (r+dr)d\theta}{2} \right) dr - \sigma_{zr} \left(\frac{rd\theta + (r+dr)d\theta}{2} \right) dr \\ & + \rho R dr dz \left(\frac{rd\theta + (r+dr)d\theta}{2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.5-9)$$

Desarrollando y manipulando la ecuación 2.5.9 considerando despreciable las derivadas de orden superior nosotros obtenemos la ecuación de equilibrio en la dirección r:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho R = 0 \quad (2.5.10)$$

Para obtener las ecuaciones de equilibrio en la dirección θ , z, se procede de manera similar por lo que las ecuaciones de equilibrio respectivamente son:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \rho\theta = 0 \quad (2.5-11)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \rho Z = 0 \quad (2.5-12)$$

2.5.2 Ecuaciones de compatibilidad.

Las ecuaciones 2.1-28 obtenidas de un análisis de deformación, nos permiten obtener una expresión matemática de compatibilidad que nos permitirá encontrar todas las componentes de esfuerzo ya que el problema resulta ser estáticamente indeterminado.

En los problemas de dos dimensiones solo deberán considerarse tres componentes de deformación estas son:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \psi_{xy} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.5-13)$$

Para obtener la relación que debe de existir entre estas componentes de deformación, cuyo valores no puede ser arbitraria, ya que las tres están expresadas en funciones de u y v, se procede de la siguiente manera; se deriva las primeras de las ecuaciones dos veces con respecto a "y", la segunda dos veces con respecto a "x" y la tercera una vez con respecto a "x" y otra con respecto a "y", obteniendo la siguiente expresión:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.5-14)$$

A la ecuación diferencial se le conoce como ecuación de compatibilidad.

Sustituyendo las ecuaciones constitutivas (ley de hook) para un material isotropico en la ecuación 2.5-14 nosotros obtenemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) - 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.5-15)$$

Las ecuaciones de equilibrio para un problema en dos dimensiones en coordenadas rectangulares pueden ser expresadas como:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.5-16)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} = 0 \quad (2.5-17)$$

Derivando la ecuación 2.5-16 con respecto a "x" y la ecuación 2.5-17 con respecto a "y" nosotros obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.5-18)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yx}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.5-19)$$

Sumando algebraicamente las ecuaciones 2.5-18 y 2.5-19 nosotros obtenemos que:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 \sigma_{yx}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.5-20)$$

Despejando $2 \frac{\partial^2 \sigma_{yx}}{\partial x \partial y}$ de la ecuación 2.5-10 y sustituyendo en la ecuación 2.5-15 obtenemos:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = (1 + \nu) \left(-\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} \right) \quad (2.5-21)$$

Reduciendo y manipulando los términos de la ecuación 2.5-21 se obtiene:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.5-22)$$

Finalmente nosotros podemos expresar la ecuación 2.5-22 como:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (2.5-23)$$

Ahora es conveniente definir una función $\Phi(x, y)$ conocida como función de Airy, la cual también es conocida como la función de esfuerzo. Se puede demostrar fácilmente que las ecuaciones quedan satisfechas por una función $\Phi(x, y)$, relacionada con las componentes de esfuerzo por medio de las expresiones siguientes:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sigma_x \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \sigma_y \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \sigma_{xy} \quad (2.5-24)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.5-24 en la ecuación 2.5-23 se obtiene:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.5-25)$$

Despejando Φ de la ecuación tenemos:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Phi = 0 \quad (2.5-26)$$

La ecuación 2.5-26 también puede ser expresada como:

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \quad (2.5-27)$$

La ecuación puede ser representada vectorialmente como:

$$\nabla^4 \Phi = 0 \quad (2.5-28)$$

Nuestro problema de pozo requiere la consideración de geometría cilíndrica por lo que es necesario transformar la ecuación dada en coordenadas rectangulares a coordenadas polares.

Se requiere conocer las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \operatorname{sen} \theta \\ z &= z \\ \theta &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \\ r^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned} \quad (2.5-29)$$

La ecuación puede ser expresada como:

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \phi = 0 \quad (2.5-30)$$

Usando la regla de la cadena para transformar cada uno de los términos de la ecuación tenemos que:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{\partial}{\partial x} * \frac{\partial}{\partial x} * \frac{\partial}{\partial x} * \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} * \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad (2.5-31)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} * \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} * \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.5-32)$$

Despejando r de la última ecuación de las ecuaciones 2.5-29 y derivando con respecto a "x" tenemos:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} * 2x = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{x}{r} \quad (2.5-33)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{r \cos \theta}{r} = \cos \theta \quad (2.5-34)$$

Derivando la penúltima ecuación de la ecuación 2.5-29 con respecto a "x" tenemos:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\operatorname{tag}^{-1} \frac{y}{x} \right) \quad (2.5-35)$$

Realizando cambio de variable de $v = y/x$ tenemos:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (tg^{-1}v) \quad (2.5-36)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\frac{dv}{dx}}{1+v^2} \quad (2.5-37)$$

Por lo tanto la expresión final es:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{rsen\theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{sen\theta}{r} \quad (2.5-38)$$

Sustituyendo la ecuación 2.5-38 en la ecuación 2.5-32 nosotros tenemos que:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \cdot \cos\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} sen\theta$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \left[\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} sen\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \phi$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \phi = \left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} sen\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos\theta \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r} sen\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos\theta \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r} sen\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} sen\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos\theta \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r} sen\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{1}{r} sen\theta \left[\cos\theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} - sen\theta \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(sen\theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \cos\theta \right) \right]$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \cos\theta \left[\cos\theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - sen\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} - \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{1}{r^2} \right) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \frac{sen\theta \cos\theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} + \frac{sen\theta \cos\theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{sen\theta \cos\theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} \\ &+ \frac{sen^2 \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{sen^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{sen\theta \cos\theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - 2 \frac{\text{sen} \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} + 2 \frac{\text{sen} \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\text{sen}^2 \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\text{sen}^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (2.5-39)$$

Procediendo de manera análoga para "y" tenemos:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \text{sen}^2 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - 2 \frac{\text{sen} \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} - 2 \frac{\text{sen} \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (2.5-40)$$

Sumando algebraicamente las ecuaciones 2.5-39 y 2.5-40 nosotros obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} &= (\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta) \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - 2 \frac{\text{sen} \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} + 2 \frac{\text{sen} \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta \partial r} \\ &+ 2 \frac{\text{sen} \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - 2 \frac{\text{sen} \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (2.5-41)$$

Manipulando y reduciendo términos en la ecuación 2.5-41 obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (2.5-42)$$

Sustituyendo la ecuación 2.5-42 en la ecuación 2.5-26 nosotros finalmente obtenemos la ecuación de Airy en coordenadas polares:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.5-43)$$

La ecuación es satisfecha por las expresiones:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r \partial \theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \quad (2.5-44)$$

Donde ϕ es una función de r y θ y representa la función de esfuerzo de Airy en coordenadas polares. Las ecuaciones 2.5-44, son determinadas de las ecuaciones 2.5-24 considerando un punto cualquiera sobre el eje x , para $\theta=0$. De

manera que σ_x y σ_y coinciden con σ_r, σ_θ , sustituyendo en la ecuación el valor de $\theta=0$ nosotros obtenemos:

$$\sigma_r = \sigma_x = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)_{\theta=0} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}$$

De forma análoga haciendo $\theta=0$ en la ecuación se tiene:

$$\sigma_\theta = \sigma_y = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{\theta=0} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$$

Finalmente procediendo de forma similar al obtener la expresión de $-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$ se tendrá la expresión de la ecuación 2.5-44.

2.5.3 Distribución simétrica de esfuerzos.

Si las componentes de esfuerzos no dependen de θ y son función solamente de r (ver figura 2.19).

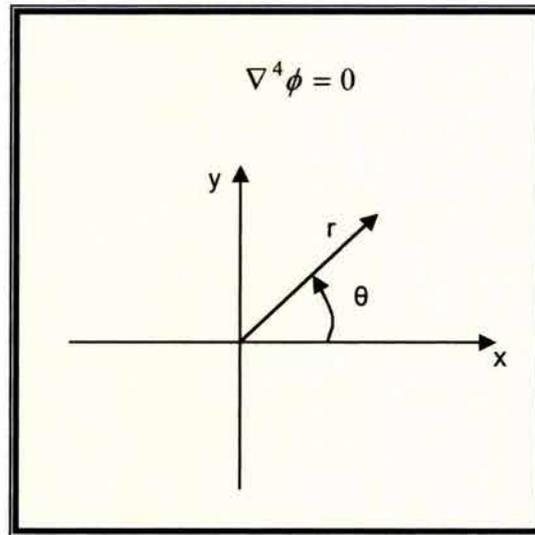


Fig. 2.19 Distribución simétrica de esfuerzo.

Nosotros podemos simplificar la ecuación de manera que:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \tag{2.5-45}$$

Desarrollando la expresión nosotros obtenemos:

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \quad (2.5-46)$$

La ecuación 2.5-46 es la ecuación diferencial ordinaria de Euler y puede ser fácilmente resuelta.

2.5.4 Efectos de circulares en la distribución de esfuerzo en una placa

Para poder evaluar la influencia que un orificio circular origina en la distribución de esfuerzo sobre la placa es necesario utilizar el principio de superposición (Ver figura 2.20).

Si nosotros consideramos la placa sin el orificio el esfuerzo generado en la placa es igual al calculado por ecuación 2.1-1. Sin embargo si consideramos que el área donde se esta ejerciendo la fuerza varia, el esfuerzo cambia y puede ser calculado usando la ecuación 2.1-3.

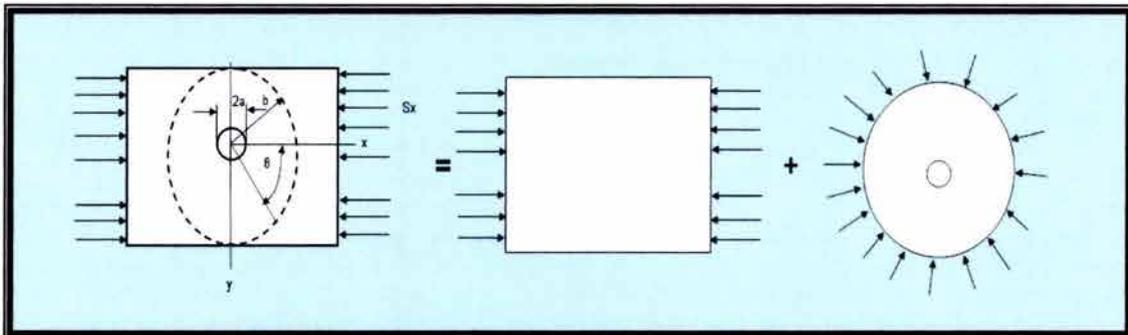


Fig. 2.20 Principio de superposición

El camino mas simple de expresar la orientación del plano, que representa el área sobre la que esta actuando la fuerza es trazar un vector normal al plano. Sea v el vector unitario del plano inclinado y sea z un vector unitario en la dirección del eje z . Entonces $v \cdot z = \cos(v, z) = \cos\theta$. Además un balance de fuerza requiere que el resultado de la fuerzas que accionan sobre el plano sean igual a la fuerza aplicada F . Este resultado puede ser obtenido de las dos componentes una normal y una de corte respectivamente, entonces:

$$F_n = F \cos\theta \quad F_s = F \sin\theta \quad (2.5-47)$$

Además el área de sección transversal del bloque cortado por el plano v es $A/\cos\theta$, por lo que al dividir las ecuaciones nosotros tenemos:

$$\sigma_N = \sigma \cos^2 \theta \quad \sigma_s = \sigma \sin \theta \cos \theta \quad (2.5-48)$$

Las ecuaciones 2.5-48 pueden ser expresadas en coordenadas polares como:

$$\sigma_{rx}|_b = S_x \cos^2 \theta \quad \tau_{r\alpha}|_b = S_x \sin \theta \cos \theta \quad (2.5-49)$$

Aplicando identidades trigonometricas a las ecuaciones 2.5-49 nosotros obtenemos:

$$S_x \cos^2 \theta = \frac{1}{2} S_x (1 + \cos 2\theta) = \frac{1}{2} S_x + \frac{1}{2} S_x \cos 2\theta \quad (2.5-50)$$

$$S_x \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} S_x \sin 2\theta \quad (2.5-51)$$

Además si el orificio en la placa es pequeño comparado con las dimensiones de la placa, la distribución de esfuerzo en su proximidad habrá cambiado, pero de acuerdo con el principio de Saint-Venant, la distribución de esfuerzo es despreciable a distancias grandes con respecto al radio del agujero.

Se puede ver que los esfuerzos in-situ son dependientes del ángulo rotacional 2θ , por lo tanto la función de esfuerzo esta definida como:

$$\phi = f(r, \theta) = f(r) \cos 2\theta \quad (2.5-52)$$

Si sustituimos esta expresión en la ecuación de compatibilidad y reduciendo términos obtenemos la ecuación diferencial ordinaria de la forma:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \frac{4f}{r^2} \right) = 0 \quad (2.5-53)$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$f(r) = Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D \quad (2.5-54)$$

Por lo tanto la función de esfuerzo es:

$$\phi = \left(Ar^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D \right) \cos 2\theta \quad (2.5-55)$$

Las correspondientes componentes de esfuerzo, de acuerdo con las ecuaciones 2.5-44 serán:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = - \left(2A + \frac{6C}{r^4} + \frac{4D}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \left(2A + 12Br^2 + \frac{6C}{r^4} \right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = \left(2A + 6Br^2 - \frac{6C}{r^4} - \frac{2D}{r^2} \right) \text{Sen}2\theta \quad (2.5-56)$$

Se requiere evaluar las constantes A, B, C y D, si nosotros aplicamos las siguientes condiciones de frontera.

$$\begin{aligned} r = a & & \sigma_r &= 0 & & \sigma_{r\theta} &= 0 \\ r = b & & \sigma_r &= \frac{1}{2} S_x \text{Cos}2\theta & & \tau_{r\theta} &= \frac{1}{2} S_x \text{Sen}2\theta \end{aligned} \quad (2.5-57)$$

Evaluando las condiciones de frontera en las ecuaciones 2.5-56 resolviendo el sistema de ecuaciones tenemos que:

$$A = \frac{1}{4} S_x \quad B = 0 \quad C = -\frac{a^4}{4} S_x \quad D = \frac{a^2}{2} S_x \quad (2.5-58)$$

Sustituyendo las constantes en las ecuaciones 2.5-56 se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{S_x}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \text{Cos}2\theta \\ \sigma_\theta &= -\frac{S_x}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \text{Cos}2\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{S_x}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \text{Sen}2\theta \end{aligned} \quad (2.5-59)$$

Para tener el resultado total es necesario agregar los esfuerzos originados por el esfuerzo uniforme $1/2S$, en el contorno exterior. Por lo tanto se requiere resolver la ecuación diferencial de euler cuyo resultado es:

$$\phi = A \ln r + Br^2 \ln r + Cr^2 + D \quad (2.5-60)$$

Sustituyendo en las ecuaciones 2.5-44 se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{A}{r^2} + B(1 + 2 \ln r) + 2C \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = -\frac{A}{r^2} + B(3 + 2 \ln r) + 2C \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5-61)$$

Se puede ver que para que los esfuerzos en el origen no resulten infinito es necesario que las constantes A y B desaparezcan. Si se considera que la placa esta sujeta a compresión uniformes en todas las direcciones en el plano.

Haciendo por ejemplo B igual a cero en dichas ecuaciones se tiene que:

$$\sigma_r = \frac{A}{r^2} + 2C$$

$$\sigma_\theta = -\frac{A}{r^2} + 2C \quad (2.5-62)$$

Esta solución se adapta al caso de la distribución de tensiones que se origina en un cilindro hueco sometido a presión uniforme exterior e interior. Si denotamos con a y b los radios de las superficies cilíndricas interna y externa y con P_i y P_o las presiones uniformes respectivas, las condiciones de contorno serán:

$$r = a \quad \sigma_r = -P_i$$

$$r = b \quad \sigma_r = -P_o \quad (2.5-63)$$

Sustituyendo las condiciones de frontera en las ecuaciones 2.5-62 y resolviendo el sistema de ecuaciones nosotros obtenemos que:

$$A = \frac{a^2 b^2 (P_o - P_i)}{b^2 - a^2} \quad C = \frac{P_i a^2 - P_o b^2}{b^2 - a^2} \quad (2.5-64)$$

Sustituyendo las constantes en las ecuaciones 2.5-62 se tiene que:

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2 (P_o - P_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{P_i a^2 - P_o b^2}{b^2 - a^2}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{a^2 b^2 (P_o - P_i)}{b^2 - a^2} \frac{1}{r^2} + \frac{P_i a^2 - P_o b^2}{b^2 - a^2} \quad (2.5-65)$$

Si consideramos que $P_i = 0$ y que $P_o = 1/2 S_x$ y además que $b \gg a$ nosotros obtenemos que:

$$\sigma_r = \frac{S_x}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{S_x}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (2.5-66)$$

Si ahora nosotros consideramos que $P_o = 0$ y que $P_i = P_w$ y que $a/b \approx 0$ ya que $b \gg a$ obtenemos:

$$\sigma_r = \frac{a^2}{r^2} P_w$$

$$\sigma_\theta = -\frac{a^2}{r^2} P_w \tag{2.5-67}$$

Aplicando el principio de superposición los esfuerzos finales resultaran de sumar las ecuaciones 2.5-59 y las ecuaciones 2.5-67 obteniendo:

$$\sigma_r = \frac{S_x}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{S_x}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta + \frac{a^2}{r^2} P_w$$

$$\sigma_\theta = \frac{S_x}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{S_x}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta - \frac{a^2}{r^2} P_w$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{S_x}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \text{Sen} 2\theta \tag{2.5-68}$$

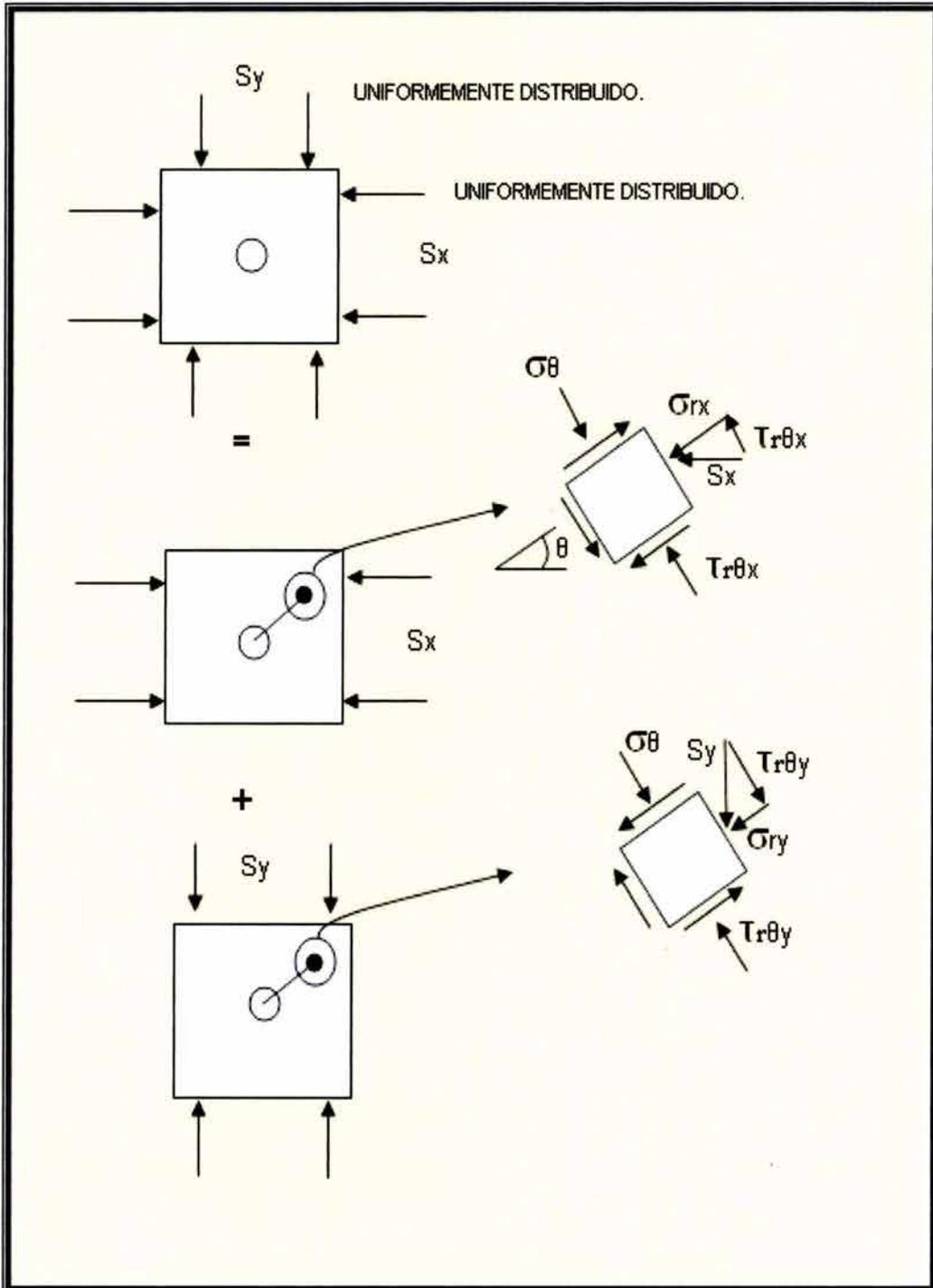


Fig. 2.21 Aplicación del principio de superposición cuando existe más de una fuerza en el cuerpo.

Si nosotros consideramos una segunda fuerza la cual genera el esfuerzo S_y perpendicular a S_x nosotros podemos aplicar el principio de superposición (Ver figura 2.18) por lo que nosotros obtenemos que:

$$\begin{aligned}\sigma_{ry}|_b &= S_y \text{Sen}^2\theta = \frac{1}{2}S_y - \frac{1}{2}S_y \text{Cos}2\theta \\ \tau_{r\theta y}|_b &= S_y \text{Sen}\theta \text{Cos}\theta = \frac{S_y}{2}(\text{Sen}2\theta)\end{aligned}\quad (2.5-69)$$

Si sumamos las ecuaciones 2.5-49 con las ecuaciones 2.5-69 obtenemos:

$$\begin{aligned}\sigma_{rt} &= \sigma_{rx} + \sigma_{ry} = \frac{(S_x + S_y)}{2} + \frac{(S_x - S_y)}{2} \text{Cos}2\theta \\ \tau_{r\theta t} &= \tau_{r\theta x} + \tau_{r\theta y} = \frac{(S_x + S_y)}{2} \text{Sen}2\theta\end{aligned}\quad (2.5-70)$$

Por lo que se puede ver fácilmente que los esfuerzos totales debido a esas dos fuerzas son:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{(S_x + S_y)}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{(S_x - S_y)}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right) \text{Cos}2\theta + \frac{a^2}{r^2} P_w \\ \sigma_\theta &= \frac{(S_x - S_y)}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{(S_x - S_y)}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \text{Cos}2\theta - \frac{a^2}{r^2} P_w \\ \tau_{r\theta} &= \frac{(S_x - S_y)}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \text{Sen}2\theta\end{aligned}\quad (2.5-71)$$

Para obtener los esfuerzos totales es necesario incluir los efectos de esfuerzos de corte, puede notarse (ver Fig. 2.21) que la fuerza de corte resultante es:

$$\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta x} - \tau_{r\theta y} = \frac{(S_x - S_y)}{2} \text{Sen}2\theta = -\tau_{xy} \text{Sen}2\theta \quad (2.5-72)$$

Si nosotros ahora definimos una función de esfuerzo de la forma:

$$f = f(r) \text{Sen}2\theta \quad (2.5-73)$$

La solución general de la ecuación 2.5-43 es similar a la ecuación 2.5-54. Sin embargo, la ecuación de esfuerzo es idéntica a la ecuación 2.5-53 excepto por las partes trigonométricas.

Aplicando las siguientes condiciones de frontera.

$$\begin{aligned} r = a & \quad \tau_{r\theta} = 0 \\ r = b & \quad \tau_{r\theta} = -\tau_{xy} \text{Sen}2\theta \\ r = a & \quad \sigma_r = 0 \end{aligned} \quad (2.5-74)$$

Por lo que los esfuerzos de cortes resultantes serán:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \tau_{xy} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \text{Sen}2\theta \\ \sigma_\theta &= -\tau_{xy} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \text{Sen}2\theta \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{xy} \left(1 - 3\frac{a^4}{r^4} + 2\frac{a^2}{r^2} \right) \text{Cos}2\theta \end{aligned} \quad (2.5-75)$$

Por ultimo si nosotros consideramos solo deformación en el plano x-y entonces $\varepsilon_z = 0$ por lo que:

$$\sigma_z = S_z \quad (2.5-76)$$

Además si consideramos el esfuerzo en z, dos esfuerzos de corte adicionales aparecen estos son:

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= \tau_{xz} \text{Cos}\theta + \tau_{yz} \text{Sen}\theta \\ \tau_{\theta z} &= -\tau_{xz} \text{Sen}\theta + \tau_{yz} \text{Cos}\theta \end{aligned} \quad (2.5-77)$$

Asumiendo una distribución radial, el siguiente resultado es obtenido por Bradley.

$$\begin{aligned} \tau_{rz} &= \left(\tau_{xz} \text{Cos}\theta + \tau_{yz} \text{Sen}\theta \right) \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \tau_{\theta z} &= \left(-\tau_{xz} \text{Sen}\theta + \tau_{yz} \text{Cos}\theta \right) \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (2.5-78)$$

El total de los esfuerzos totales desde cualquier punto alejado hasta llegar a las paredes del pozo. Será el obtenido de aplicar el principio de superposición por la suma de las ecuaciones 2.5-71, 2.5-75 y 2.5-78 como sigue:

$$\sigma_r = \frac{(S_x + S_y)}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{(S_x - S_y)}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2}\right) \text{Cos}2\theta + \tau_{xy} \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} - 4\frac{a^2}{r^2}\right) \text{Sen}2\theta + \frac{a^2}{r^2} P_w$$

$$\sigma_\theta = \frac{(S_x - S_y)}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) - \frac{(S_x - S_y)}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4}\right) \text{Cos}2\theta - \tau_{xy} \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4}\right) - \frac{a^2}{r^2} P_w$$

$$\sigma_z = S_{zz} - 2\mu(S_x - S_y) \frac{a^2}{r^2} \text{Cos}2\theta - 4\mu\tau_{xy} \frac{a^2}{r^2} \text{Sen}2\theta$$

$$\sigma_z = S_{zz}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{(S_x - S_y)}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \text{Sen}2\theta + \tau_{xy} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2}\right) \text{Cos}2\theta$$

$$\tau_{rz} = (\tau_{xz} \text{Cos}\theta + \tau_{yz} \text{Sen}\theta) \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\tau_{\theta z} = (-\tau_{xz} \text{Sen}\theta + \tau_{yz} \text{Cos}\theta) \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \quad (2.5-79)$$

2.6 El efecto de la transferencia de calor originado por el lodo de perforación en el estado de esfuerzos alrededor del pozo.

Distribución de los esfuerzos térmicos cerca del pozo

Cuando la temperatura alrededor del pozo es cambiada, son originados esfuerzos térmicos en la formación. Es bien conocido que los esfuerzos térmicos ocurren solo cuando la expansión por calentamiento o el encogimiento por enfriamiento es restringido. Así que nosotros asumimos que no existen esfuerzos térmicos en la interfase pozo-formación, debido a que hay expansión o reducción libre en la pared. De acuerdo a la regulación de la mecánica de roca, los esfuerzos térmicos por calentamiento son positivos y los esfuerzos térmicos por enfriamiento son negativos. Por lo tanto basados en la teoría de la mecánica elástica térmica, la formulas de los esfuerzos térmicos pueden ser derivadas cerca del pozo.

Las ecuaciones físicas que relacionan los esfuerzos térmicos con la deformación térmica esta dada por la ley de Hooke.

$$\varepsilon_{r1} = \frac{1}{E} [\sigma_{r1} - \nu(\sigma_{z1} + \sigma_{\theta1})] + \lambda\Delta T \quad (2.6-1)$$

$$\varepsilon_{\theta1} = \frac{1}{E} [\sigma_{\theta1} - \nu(\sigma_{r1} + \sigma_{z1})] + \lambda\Delta T \quad (2.6-2)$$

$$\varepsilon_{z1} = \frac{1}{E} [\sigma_{z1} - \nu(\sigma_{r1} + \sigma_{\theta1})] + \lambda\Delta T \quad (2.6-3)$$

Podemos considerar que el problema de la distribución de esfuerzo cerca del pozo pertenece a un problema de deformación en el plano, de manera que $\varepsilon_z = 0$, por lo tanto:

$$\sigma_{z1} = \nu(\sigma_{\theta1} + \sigma_{r1}) - \alpha E \Delta T \quad (2.6-4)$$

Sustituyendo la ecuación 2.6-4 en la ecuación 2.6-1 tenemos que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{r1} - \alpha\Delta T &= \frac{1}{E} [\sigma_{r1} - \nu(\sigma_{\theta1} + \nu(\sigma_{\theta1} + \sigma_{r1}) - \alpha E \Delta T)] \\ \varepsilon_{r1} - \alpha\Delta T &= \frac{1}{E} \sigma_{r1} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{\theta1} + \nu(\sigma_{\theta1} + \sigma_{r1}) - \alpha E \Delta T) \\ \varepsilon_{r1} - \alpha\Delta T &= \frac{1}{E} \sigma_{r1} - \frac{\nu}{E} \sigma_{\theta1} - \frac{\nu^2}{E} (\sigma_{\theta1} + \sigma_{r1}) + \frac{\alpha E \Delta T \nu}{E} \\ \varepsilon_{r1} - (1-\nu)\alpha\Delta T &= \frac{\sigma_{r1}}{E} (1-\nu^2) - \frac{\sigma_{\theta1}}{E} (\nu + \nu^2) \\ \varepsilon_{r1} - (1-\nu)\alpha\Delta T &= \frac{\sigma_{r1}}{E} (1-\nu^2) - \frac{\sigma_{\theta1} \mu}{E} (1+\nu) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{rt} - (1-v)\alpha\Delta T = \frac{(1-v^2)}{E} \left[\sigma_{rt} - \frac{v}{1-v} \sigma_{\theta} \right] \quad (2.6-5)$$

Sustituyendo la ecuación 2.6-4 en la ecuación 2.6-2 tenemos que:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta} - \alpha\Delta T &= \frac{1}{E} [\sigma_{\theta} - v(\sigma_{rt} + \sigma_{zt})] \\ \varepsilon_{\theta} - \alpha\Delta T &= \frac{1}{E} [\sigma_{\theta} - v(\sigma_{rt} + v(\sigma_{\theta} + \sigma_{rt}) - \alpha E\Delta T)] \\ \varepsilon_{\theta} - \alpha\Delta T &= \frac{\sigma_{\theta}}{E} - \frac{v}{E} [\sigma_{rt} + v\sigma_{\theta} + v\sigma_{rt} - \alpha E\Delta T] \\ \varepsilon_{\theta} - \alpha\Delta T &= \frac{\sigma_{\theta}}{E} - \frac{v}{E} \sigma_{rt} - \frac{v^2\sigma_{\theta}}{E} - \frac{v^2}{E} \sigma_{rt} - \frac{\alpha E\Delta T v}{E} \\ \varepsilon_{\theta} - (1+v)\alpha\Delta T &= \frac{(1-v^2)}{E} \left[\sigma_{\theta} - \frac{v}{1-v} \sigma_{rt} \right] \end{aligned} \quad (2.6-6)$$

Despejando de la ecuación 2.6-5 σ_{rt} tenemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rt} - (1+v)\alpha\Delta T &= \frac{(1-v^2)}{E} \left[\sigma_{rt} - \frac{v}{1-v} \sigma_{\theta} \right] \\ \frac{\varepsilon_{rt} E - (1+v)\alpha\Delta T E}{(1-v^2)} &= \sigma_{rt} - \frac{v}{1-v} \sigma_{\theta} \\ \sigma_{rt} &= \frac{E}{1-v^2} [\varepsilon_{rt} - (1+v)\alpha\Delta T] + \frac{v}{1-v} \sigma_{\theta} \end{aligned} \quad (2.6-7)$$

Despejando de la ecuación 2.6-6 σ_{θ} tenemos:

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1-v^2} [\varepsilon_{\theta} - (1+v)\alpha\Delta T] + \frac{v}{1-v} \sigma_{rt} \quad (2.6-8)$$

Sustituyendo la ecuación 2.6-8 en la ecuación 2.6-7 obtenemos:

$$\sigma_{rt} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} [(1-v)\varepsilon_{rt} + v\varepsilon_{\theta} - (1+v)\alpha\Delta T] \quad (2.6-9)$$

Sustituyendo la ecuación 2.6-9 en la ecuación 2.6-8 obtenemos:

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)} [(1-v)\varepsilon_{\theta} - (1+v)\alpha\Delta T + v\varepsilon_{rt}] \quad (2.6-10)$$

Las ecuación de equilibrio esta dada por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \sigma_{rt}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rt} - \sigma_{\theta}}{r} = 0 \quad (2.6-11)$$

En un plano perpendicular al eje del pozo, una distribución de temperatura simétrica es asumida. De manera que las relaciones de deformación y desplazamiento están dadas por:

$$\varepsilon_{rt} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} \quad (2.6-12)$$

Sustituyendo la ecuación 2.6-10 en la ecuación 2.6-11 y haciendo uso de la ecuación 2.6-12 producimos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \alpha \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{\partial \Delta T}{\partial r} \quad (2.6-13)$$

Reareglando la ecuación 2.6-13 obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} \right) = \alpha \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{\partial \Delta T}{\partial r} \quad (2.6-14)$$

Integrando dos veces la ecuación 2.6-14 obtenemos:

$$u = \alpha \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{1}{r} \int r \Delta T dr + C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (2.6-15)$$

Sustituyendo la ecuación 2.6-15 en la ecuación 2.6-12

$$\varepsilon_{rt} = -\frac{\alpha(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \int r \Delta T dr + \frac{\alpha(1+\nu)}{(1-\nu)} \Delta T + C_1 - \frac{C_2}{r^2} \quad (2.6-16)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{\alpha(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \int r \Delta T dr + C_1 + \frac{C_2}{r^2} \quad (2.6-17)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.6-16 y 2.6-17 en la ecuación 2.6-9 obtenemos:

$$\sigma_{rt} = -\frac{\alpha E}{(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \int r \Delta T dr + \frac{E}{(1+\nu)} \left[\frac{C_1}{1-2\nu} - \frac{C_2}{r^2} \right] \quad (2.6-18)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.6-16 y 2.6-17 en la ecuación 2.6-10 obtenemos:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\alpha E}{(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \int r \Delta T dr - \frac{\alpha E \Delta T}{(1-\nu)} + \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{C_1}{1-2\nu} + \frac{C_2}{1-2\nu} \right] \quad (2.6-19)$$

Sustituyendo las ecuaciones 2.6-18 y 2.6-19 en la ecuación 2.6-4 obtenemos:

$$\sigma_{zt} = \frac{2\nu EC_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\alpha E \Delta T}{1-\nu} \quad (2.6-20)$$

La distribución de temperatura asumiendo conducción de calor en estado permanente en una dimensión, y válida para valores de $a \leq r \leq R$, esta dada por:

$$T(r) = T_F - \frac{(T_F - T_{DF})}{\ln \frac{a}{R}} \ln \frac{r}{R} \quad (2.6-21)$$

Donde:

$T(r)$: Temperatura en punto localizada a una distancia r desde el centro del

pozo.

r : Localización radial de un punto desde el centro del pozo.

a : Radio de pozo.

R : Radio de un punto localizado a lo lejos del pozo donde la temperatura es igual a la temperatura de la formación.

T_F : Temperatura de la formación.

T_{DF} : Temperatura del fluido de perforación.

El valor de ΔT esta dado por:

$$\Delta T = T_F - T(r). \quad (2.6-22)$$

Sustituyendo la ecuación 2.6-21 dentro de la ecuación 2.6-22 obtenemos:

$$\Delta T = \frac{(T_F - T_{DF})}{\ln \frac{a}{R}} \ln \frac{r}{R} \quad (2.6-23)$$

Para valores de $r \geq R$, $\Delta T = 0$

Sustituyendo los valores de ΔT de la ecuación 2.6-23 dentro de la ecuación 2.6-15 e integramos, obtenemos:

$$u = \frac{\alpha(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{T_F - T_{DF}}{\ln \frac{a}{R}} \frac{r}{4} \left[2 \ln \frac{r}{R} - 1 \right] + c_1 r + \frac{c_2}{r} \quad (2.6-24)$$

Sustituyendo los valores de ΔT de la ecuación 2.6-23 dentro de la ecuación 2.6-18 e integrando nosotros obtenemos:

$$\sigma_r = -\frac{\alpha E}{(1-\nu)} \frac{T_F - T_{DF}}{\ln \frac{a}{R}} \frac{1}{4} \left[2 \ln \frac{r}{R} - 1 \right] + \frac{E}{(1+\nu)} \left[\frac{c_1}{(1-2\nu)} - \frac{c_2}{r^2} \right] \quad (2.6-25)$$

Sustituyendo los valores de ΔT de la ecuación 2.6-23 dentro de la ecuación 2.6-19 e integrando nosotros obtenemos:

$$\sigma_\theta = -\frac{\alpha E}{(1-\nu)} \frac{T_F - T_{DF}}{\ln \frac{a}{R}} \frac{1}{4} \left[2 \ln \frac{r}{R} - 1 \right] - \frac{\alpha E \Delta T}{(1-\nu)} + \frac{E}{(1+\nu)} \left[\frac{c_1}{(1-2\nu)} + \frac{c_2}{r^2} \right] \quad (2.6-26)$$

Para encontrar las constantes de integración las siguientes condiciones de frontera fueron usadas:

- 1) $\sigma_r = 0$ cuando $r = a$
- 2) Continuidad de u en $r = R$.
- 3) Continuidad de σ_r , en $r = R$.

Aplicando la primera condición de frontera dentro de la ecuación 2.6-25. nosotros obtenemos:

$$\frac{c_1}{(1-2\nu)} - \frac{c_2}{a^2} = \frac{\alpha(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{T_F - T_{DF}}{\ln \frac{a}{R}} \frac{1}{4} \left[2 \ln \frac{a}{R} - 1 \right] \quad (2.6-27)$$

Aplicando la segunda condición de frontera (continuidad de u) a la ecuación 2.6-24.

Para $a \leq r \leq R$ nosotros tenemos que $r = R$

$$u = -\frac{\alpha(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{T_F - T_{DF}}{\ln \frac{a}{R}} \frac{R}{4} + C_1 R + \frac{C_2}{R} \quad (2.6-28)$$

Para $r \geq R$, $\Delta T = 0$, la ecuación 2.6-14 será:

$$u = -C_1' r + \frac{C_2'}{r} \quad (2.6-29)$$

En $r = R$

$$u = -C_1' R + \frac{C_2'}{R} \quad (2.6-30)$$

Aplicando la tercera condición de frontera (continuidad de σ_r) a la ecuación 2.6-25.

Para $a \leq r \leq R$ nosotros tenemos a $r = R$:

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{(1-\nu)} \frac{T_F - T_{DF}}{\ln \frac{a}{R}} \frac{1}{4} + \frac{E}{(1+\nu)} \left[\frac{C_1}{(1-2\nu)} - \frac{C_2}{R^2} \right] \quad (2.6-31)$$

Para $r \geq R$, la ecuación 2.6-18 será:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)} \left[\frac{C_1'}{(1-2\nu)} - \frac{C_2'}{r^2} \right] \quad (2.6-32)$$

Cuando $r \rightarrow \infty$, $\sigma_r = 0$ y $C_1' = 0$. De manera que la expresión para σ_r cuando $r = R$, será:

$$\sigma_r = -\frac{E}{(1+\nu)} \left[\frac{C_2'}{R^2} \right] \quad (2.6-33)$$

Haciendo la ecuación 2.6-32 igual a la ecuación 2.6-33 obtenemos:

$$\frac{\alpha E}{(1-\nu)} \frac{T_F - T_{DF}}{\ln \frac{a}{R}} \frac{1}{4} + \frac{E}{(1+\nu)} \left[\frac{C_1}{(1-2\nu)} - \frac{C_2}{R^2} \right] = -\frac{E}{(1+\nu)} \left[\frac{C_2'}{R^2} \right] \quad (2.6-34)$$

Las variables desconocidas hasta este punto son C_1, C_2 y C_2' .

Dividiendo la ecuación 2.6-35 por R y sustituyendo dentro de la ecuación 2.6-36, nosotros obtenemos que $C_1 = 0$.

Sustituyendo estos valores dentro la ecuación 2.6-27 nosotros obtenemos:

$$C_2 = -\frac{\alpha(1+\nu)}{(1-\nu)} \frac{T_F - T_{DF}}{\ln \frac{a}{R}} \frac{a^2}{4} \left[2 \ln \frac{a}{R} - 1 \right] \quad (2.6-35)$$

La expresión final para σ_r , σ_θ y σ_z son obtenidos sustituyendo los valores de las constantes de integración dentro de las ecuaciones 2.6-25, 2.6-26 y 2.6-20 respectivamente, para $a \leq r \leq R$. Además para recordar que los valores son cambios de esfuerzos un signo Δ será incluido.

$$\Delta \sigma_r = \frac{\alpha E}{4(1-\nu)} \frac{T_F - T_{DF}}{\ln \frac{a}{R}} \left[\frac{a^2}{r^2} \left(2 \ln \frac{a}{R} - 1 \right) - 2 \ln \frac{r}{R} + 1 \right] \quad (2.6-36)$$

$$\Delta \sigma_\theta = -\frac{\alpha E}{4(1-\nu)} \frac{T_F - T_{DF}}{\ln \frac{a}{R}} \left[\frac{a^2}{r^2} \left(2 \ln \frac{a}{R} - 1 \right) + 2 \ln \frac{r}{R} + 1 \right] \quad (2.6-37)$$

$$\Delta\sigma_z = -\frac{\alpha E}{(1-\nu)} \frac{T_F - T_{DF}}{\ln \frac{a}{R}} \ln \frac{r}{R} \quad (2.6-38)$$

En la pared del pozo ($r=a$) por lo tanto;

$$\Delta\sigma_r = 0 \quad (2.6-39)$$

$$\Delta\sigma_\theta = -\frac{\alpha E}{(1-\nu)} (T_F - T_{DF}) \quad (2.6-40)$$

$$\Delta\sigma_\theta = -\frac{\alpha E}{(1-\nu)} (T_F - T_{DF}) \quad (2.6-41)$$

2.7 Química de las arcillas.

El entendimiento de la química de las arcillas es de gran importancia en los estudios de estabilidad de pozos en formaciones de lutitas ya que ellas son rocas arcillosas, que físicamente pueden ser descritas como una mezcla heterogénea de materiales finamente divididos (2 micras o menos). Como son el feldespato, cuarzo, calcita, pirita y otros materiales sedimentarios compuestos de sílice, aluminio y agua.

Durante la perforación las arcillas son encontradas primeramente por la adición en superficie al lodo de perforación de la bentonita la cual es utilizada para el control de pérdidas de filtrado y obtención de viscosidad y secundamente por la perforación de estratos de arcillas las cuales son perjudiciales ya que contribuyen a elevar excesivamente la viscosidad, a constantes problemas de pegaduras de tuberías y a inestabilidad de pozos.

Resulta evidente también que cualquier persona interesada en la tecnología de los fluidos de perforación deberá tener un conocimiento básico de la química de las arcillas

2.7.1 Estructura fundamental de las arcillas.

La mayoría de las arcillas presentan una estructura en forma de micas, o laminas de cristales dispuestos cara a cara como un mazo de barajas.

Una placa individual esta compuesta por átomos dispuestos en una forma tetraedral u octaedral. Ver figura 2.22.

El arreglo tetraedral esta dispuesto en forma de una pirámide en la cual un átomo de sílice colocado en el centro simétricamente esta enlazado con cuatro átomos de oxigeno. Cada una de las mitades tetraédricas se unen para formar una red u hoja tetraedral.

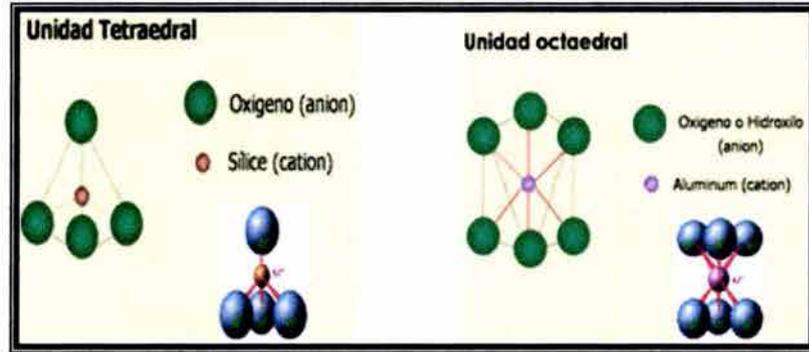


Fig. 2.22 Estructura Octaedral y Tetraedral

En el arreglo octaedral el oxígeno o los hidroxilos forman dos hileras compactas coordinadas con un centro que puede ser: aluminio o magnesio.

En arcillas minerales como la motmorillonita, la cual se encuentra compuesta de tres capas, los átomos de oxígeno se combinan con dos hojas tetraédricas y una hoja de sílice, que se combina de cada lado con una hoja octaedral de magnesio o aluminio.

Las Capas son combinaciones de hojas tetraedral, octaedrales u combinadas, las cuales se colocan como laminas dispuestas cara a cara para formar lo que se conoce como celosía cristalina.

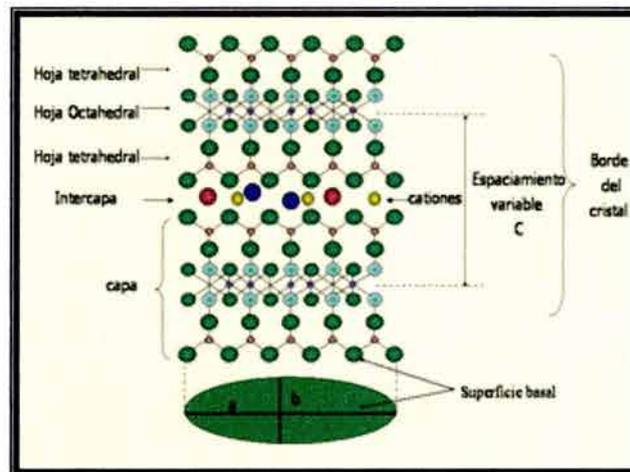


Fig. 2.23 Diagrama que representa la celosía de la arcilla expandible de tres capas.

En la Fig. 2.23 se puede observar las partes que componen una celosía cristalina, se puede ver que la distancia existente entre el plano de una capa y su correspondiente plano en la otra unidad de capa se le conoce como espaciamento C, o espaciamento basal.

2.7.2 Grupos de arcillas

Los principales grupos de arcilla son:

- Emeclita
- Illita.
- Kaolinita
- Cloritas.

Emeclita. En su celosía cristalina, la hoja tetraedral de una capa es adyacente con la hoja tetraedral de la siguiente de tal manera que los átomos de oxígeno son opuestos a los otros átomos de oxígeno. Como consecuencia el enlace entre las capas es débil y la división es fácil, por lo que la sustitución isomorfica toma lugar particularmente a causa de los enlaces débiles y a los altos potenciales de repulsión en las capas, por lo que le agua puede entrar entre las capas y causar un incremento del espaciamiento C. Ver figura 2.24.

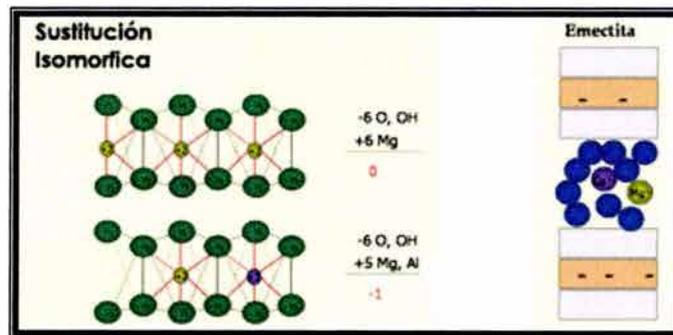


Fig. 2.24 Expansión y sustitución isomorfica de la arcilla.

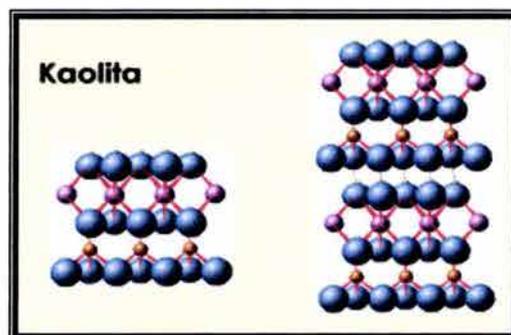
La motmorillonita es el mejor miembro conocido de este grupo y ha sido extensamente estudiada por su importancia económica y ocurrencia común. Es el principal constituyente de la bentonita wyoming y otras arcillas adicionada a los lodos de perforación. Es el componente activo en formaciones jóvenes que causan problemas de hidratación y genera grandes esfuerzos cuando se perfora.

Las sustituciones predominantes son Mg^{+2} y Fe^{+3} por Al^{+3} en la hoja octaedral pero él Al^{+3} puede ser remplazado por él Si^{+4} en la hoja tetraedral.

Illita. Son arcillas no expandibles de tres capas las cuales se distinguen de la motmorillonita principalmente por la ausencia de intercapas que se enlazan al contacto con el agua. La sustitución predominante es aluminio por silicón en la hoja tetraedral.

Kaolinita. Es un grupo de dos capas es decir una hoja octaedral es unida a una hoja tetraedral de tal manera que los hidroxilos de las caras de una de las

capas están yuxtapuesta a los oxígenos tetraedrales en la cara de la siguiente capa lo cual origina enlaces fuertes entre capas y como consecuencia no permite que la celosía se expanda. Ver figura 2.25



2.25 Estructura de la Kaolita.

Clorita. Las cloritas son un grupo de arcillas minerales, las cuales estructuralmente se asemejan a una arcilla de tres capas.

En estos minerales, la compensación de la carga cationica entre las placas de las unidades tipo montmorillonita, son remplazada por una hoja octaedral de hidróxido de magnesio. Debido a algunas sustituciones de magnesio por aluminio en la hoja de hidróxido de magnesio, esta hoja tiene una carga positiva, esto es debido a que la capacidad de intercambio cationica es muy baja.

2.7.3 Intercambio iónico.

Los cationes son absorbidos por la superficie en la arcilla para compensar por la sustitución de átomos en la estructura del cristal. Los aniones y cationes son además mantenidos en los bordes del cristal debido a la interrupción de la estructura cristalina a lo largo del eje C resultando en un enlace de valencia roto. En suspensiones acuosas ambos iones pueden intercambiarse con iones en la solución acuosa.

La reacción de intercambio esta gobernada primeramente por la concentración relativa de diferentes especies de iones en cada fase. Por ejemplo para dos especies de iones monovalentes , la ecuación puede ser escrita.

$$\frac{[A]_c}{[B]_c} = K \frac{[A]_s}{[B]_s}$$

Donde los términos a la derecha $[A]_s$ y $[B]_s$ representan la concentración molecular de dos especies de iones en la solución, los términos de la izquierda representan las especies en la arcilla. El termino K es una constante de equilibrio de intercambio iónico. Cuando K es mayor que la unidad , la especie A es preferentemente absorbida.

Cuando dos iones de diferentes valencias son presentes, el primero con la más alta valencia es absorbido preferentemente. El orden de preferencia usualmente es:



Se puede ver que el hidrógeno es fuertemente absorbido, por lo que el PH tiene una fuerte influencia en la reacción de intercambio base.

La cantidad total de iones absorbidos expresada en miligramos equivalentes por cada 100 gramos de arcilla seca es llamada capacidad de intercambio de cationes o base. La capacidad de intercambio base y la especie de los cationes en la posición de intercambio es un buen indicativo de la actividad coloidal de la arcilla. Una arcilla tal como la montmorillonita que tiene una capacidad de intercambio cationico alta se hidrata grandemente y forma suspensiones viscosas a bajas concentraciones de arcilla, particularmente cuando el sodio es la posición de intercambio.

2.7.4 Mecanismos de hidratación de las arcillas.

Todas las arcillas tienen la capacidad de absorber agua , unas en mayor proporción que otras. El grupo de las esméctitas son la que toman mucho mayor volumen de agua debido a su celosía cristalina expandible aunque en las formaciones las arcillas están compuestas por una mezcla de varias arcillas minerales.

Hidratación Cristalina.

A este mecanismo de hidratación también se le conoce como hidratación superficial, resulta de La absorción de moléculas mono polares en la superficie basal de la arcilla. El agua es atraída y retenida a través del ión de hidrógeno el cual queda unido al átomo de oxígeno.

Hidratación Osmótica.

Este tipo de hidratación ocurre por una diferencia de concentraciones de cationes entre las láminas del mineral y la solución, la cual es mayor en las láminas que en el agua. Como consecuencia el agua es atraída entre las láminas incrementado el espaciamiento C. A pesar de que no hay presencia de una membrana semipermeable el mecanismo de este fenómeno es osmótico debido a que se encuentra gobernado principalmente por una diferencia de concentraciones de los electrolitos de los dos medios. Este fenómeno involucra un aumento de volumen mucho mayor que el de la hidratación cristalina.

2.7.5 Arcillas encontradas durante la perforación en pozos de la región sur.

En la región sur de México la perforación de lutitas en el terciario correspondiente a la tercera etapa en la perforación presenta constante problemas de estabilidad de pozos. Estudios realizados sobre núcleos sintéticos obtenidos durante la perforación en esa región ha permitido una clasificación de los campos que la conforman en base al contenido de arcilla y al tipo de arcilla.

La identificación y clasificación de los minerales de arcilla es logrado principalmente mediante:

- Difracción de rayos X
- Procesamiento de registros especiales
- Adsorción isotérmica
- Calculo de la capacidad de intercambio cationico

De la caracterización de los núcleos sintéticos obtenidos en los diferentes campos se han podido clasificar como:

- Arcilla Tipo A.

Esmectita	43 %
Ilita	20 %
Arena	37 %

Campos:

Caparroso, Escuintle, Luna, Iride, Sen, Pijije, Samaria, Tizón, Escarbadado, Cardo, Coster y Palapa.

- Arcilla Tipo B.

Esmectita	34 %
Ilita	17 %
Arena	49 %

Campos:

Agave, Puerto Ceiba, Chinchorro, Yagual, Golpe, Santuario, Mayascate, Chayote, Jujo, Tecominoacan, Catedral y Muspac.

- Arcilla Tipo C.

Esmectita	15 %
Ilita	15 %
Arena	70 %

Campos:

Arroyo prieto, Akot, Crame, Chunnel, Fortuna Nacional, Guanai, Jaguacapa, José Colomo, La Central, Vernet, Usumacinta y Cinco Presidente.

2.8 El efecto de la interacción de los fluidos de perforación en formaciones sensibles al agua.

Es importante mencionar que una formación sensible al agua es aquella que al entrar en contacto con el agua presentan hidratación o bien secado como es el caso de las lutitas. Los mecanismos por los cuales se desarrollan son; la hidratación cristalina donde las presiones de hidratación son altas, pero el incremento de volumen es relativamente pequeño y la hidratación osmótica la cual causa incremento de volúmenes grandes pero las presiones de hidratación son bajas.

2.8.1 Mecanismos de transportes en lutitas

El movimiento de agua que sale y entra en la lutita esta gobernado por muchos mecanismos los dos mas relevantes en este contexto son: La diferencia de la presión hidráulica, (ΔP_h) entre la presión del pozo y la presión de poro, y la diferencial del potencial químico ($\Delta\Phi$), ocasionado por la diferencia en la actividad química entre el lodo de perforación y el fluido de formación contenido en las lutitas.

Basándonos en estos dos mecanismos predominantes podemos decir entonces que el flujo total de agua dentro y fuera de la lutita es

$$q_h \alpha (P_w - P_p) \quad (2.8-1)$$

$$q_\Phi \alpha (\Phi_m - \Phi_{sh}) \quad (2.8-2)$$

$$q_t = q_h + q_\Phi \quad (2.8-3)$$

Debido a la superficie negativa de las arcillas, los cationes absorbidos son restringidos y no se difunde libremente. Cuando, la doble capa o la partícula adyacente se traslapan, la diferencia de concentraciones desarrolladas entre la superficie de la arcilla y el agua intersticial, resulta en un gradiente de presión osmótica. Debido a que los cationes en la interfase no se muevan libremente, el gradiente de presión osmótica no será satisfecho por el movimiento de los cationes de la superficie. Sin embargo el movimiento del agua o el movimiento de los iones pueden reducir el gradiente de presión osmótica. La captación de agua resultará en una hidratación o, bajo un estado de esfuerzos, resultará en un incremento de la presión de poro. La captación relativa de iones o remoción simultánea de agua resultara en una reducción del gradiente de presión osmótica entre el agua intersticial y el agua cerca de la superficie. Esto reducirá la presión de poro, el estado de esfuerzo y el espaciamiento c.

Aunque las fuerzas impulsoras predominantes resultan suficientes para cualquier modelo matemático, su tratamiento requiere del conocimiento de los mecanismos de transporte potenciales por los cuales las moléculas se mueven

hacia dentro o fuera de la lutita. La siguiente tabla nos muestra los mecanismos de trasportes más importantes

Mecanismos	Fuerzas impulsoras	Especie Molecular
Transporte Osmótico (difusión)	Potencial Químico del agua.	H ₂ O hacia dentro y fuera de la lutita.
Ósmosis Inversa	Diferencial de presión hidráulica (Presión de pozo-presión de poro).	H ₂ O hacia dentro de la lutita.
Flujo hidráulico	Diferencial de presión hidráulica (Presión de pozo-presión de poro).	Agua volumétrica (cationes, aniones y agua primaria) hacia dentro de la lutita.
Comunicación abierta	Potencial químico de iones y agua.	Iones y agua dentro y fuera de las lutitas
Combinación de flujo hidráulico y comunicación abierta		

Estos mecanismos difieren en términos de magnitud e importancia dependiendo de la estructura de la garganta de poro, tamaño y la tortuosidad de la matriz de la roca. Es de esperarse que la matriz de roca y sus propiedades cambien con el tiempo, y la profundidad debida a la compactación por lo tanto estos variaran en función de la litología y tiempo.

2.8.3 Sistemas de lodos utilizados para perforar lutitas.

Entre los sistemas de lodos utilizados para perforar lutitas se encuentran los lodos base aceite y lodos base agua. El primero de ellos es el más utilizado debido a que presenta excelentes condiciones para estabilizar lutitas, sin embargo las fuertes restricciones ambientales, ecológicas y económicas nos han llevado a cambiar a lodos base agua.

Los sistemas empleados son:

- Lodos base aceite activamente balanceados
- Lodos base agua inhibidos.

Sus funciones son evitar que las arcillas se hidraten altamente. En principio ambos se basan en mantener una concentración de sal similar o igual al fluido contenido en los poros de la formación. Sin embargo los mecanismos de transporte de especies difieren.

Los lodos base aceite activamente balanceados la fase continua se comporta como una membrana semipermeable ideal es decir solo permite el paso de agua a través de ella por lo que los mecanismo de trasportes son la difusión osmótica e hidráulica. La diferencia entre la energía libre molar del agua en el lodo y la lutita nos proporciona la fuerza que interviene en el movimiento del agua para la hidratación o secado de la lutita.

En el caso de los sistemas base agua, los procesos de interacción entre el fluido de perforación y la lutita se vuelven mas complejos, y esto es debido a que la fase continua es el agua es decir no existe como en el caso de los lodos base aceite una membrana semipermeable ideal, en lugar de ello la lutita es la que se comporta como una membrana semipermeable, pero esta por supuesto no es ideal por lo que la energía libre de todos los constituyentes dentro del fluido de la formación y el fluido de perforación proporcionan las fuerzas impulsoras responsables de la transferencia de muchas especies (agua, cationes, aniones, etc.)

Resulta conveniente restringir los sistemas de lodos base agua a flujo de agua solamente y debido a esto solo a un mecanismo osmótico. Bajo este contexto es clara que la matriz de la lutita no se comporta como una membrana semipermeable la cual nos proporcione una barrera osmótica sin embargo existe evidencia en la literatura que la lutita cuando se sujeta a un estado de esfuerzos grande puede llegar a comportarse como una membrana semipermeable ideal.

Es aceptable entonces el concepto que sedimentos geológicos ricos en arcillas altamente compactados puedan proporcionar la apariencia de una membrana semipermeable por lo que esto nos indica claramente que el flujo total del fluido debido al flujo hidráulico y osmótico alteraran la presión de poro y como consecuencia el estado de esfuerzos efectivos en la cercanía alrededor del pozo.

2.8.4 Modelo constitutivo para el cálculo del incremento de la presión de poro debido al efecto químico para lodos base aceite y lodos base agua.

Es necesario recordar el concepto de la energía libre de Gibbs en un sistema termodinámico, la cual es función de la temperatura, T, la presión, P, y el número de moles, n_i , de cada componente presente es decir

$$G = f(T, p, n_1, n_2, \dots, n_i) \quad (2.8-4)$$

El cambio en la energía libre de Gibbs, con la temperatura, presión y el numero de especies esta dada por

$$dG = \frac{\partial G}{\partial T} dT + \frac{\partial G}{\partial P} dP + \sum \frac{\partial G}{\partial n_i} dn_i \quad (2.8-5)$$

Las derivadas parciales que aparecen en la expresión (2.8-3) tienen los siguientes significados

$$\frac{\partial G}{\partial T} = -S(\text{entropía}), \quad \frac{\partial G}{\partial P} = V(\text{volumen}), \quad \text{y} \quad \frac{\partial G}{\partial n_i} = \Phi_i$$

Si aplicamos la ley cero de la termodinámica a dos puntos 1, 2, dentro de un sistema cerrado significa que la condición para equilibrio térmico es que $T_1 = T_2$, y la condición para equilibrio mecánico es que $P_1 = P_2$. Similarmente, la condición para equilibrio químico es que $\Phi_1 = \Phi_2$.

2.8.5 Presión Osmótica en lodos base aceite.

El fenómeno de hidratación de la lutita puede ser entendido mas fácilmente si consideramos el fenómeno de osmosis del agua (ver Fig. 2.26.) cuando existe una barrera semipermeable; que en el caso de los fluidos base aceite esa membrana semipermeable es proporcionada por la fase continua. Si tenemos agua pura y una solución salina en un contenedor las cuales se encuentran divididas por una membrana semipermeable, ambas soluciones están en equilibrio con su presión de vapor por lo que se puede suponer que el potencial químico tanto en el agua, como en el vapor son iguales al momento de entrar en contacto ambas soluciones, se establecerá un flujo debido a una diferencia de concentraciones ya que las moléculas de agua en la solución salina son menores que la del agua pura, por lo que la dirección del flujo de agua se presenta de una solución menos salina a una solución más salina con la finalidad de diluir la solución salina e incrementar la presión de vapor. Por otra parte la presión de vapor en la solución menos salina es mayor que en la solución más salina, de la misma manera el potencial químico en la solución menos salina es mayor que el potencial químico en la solución con mayor salinidad.

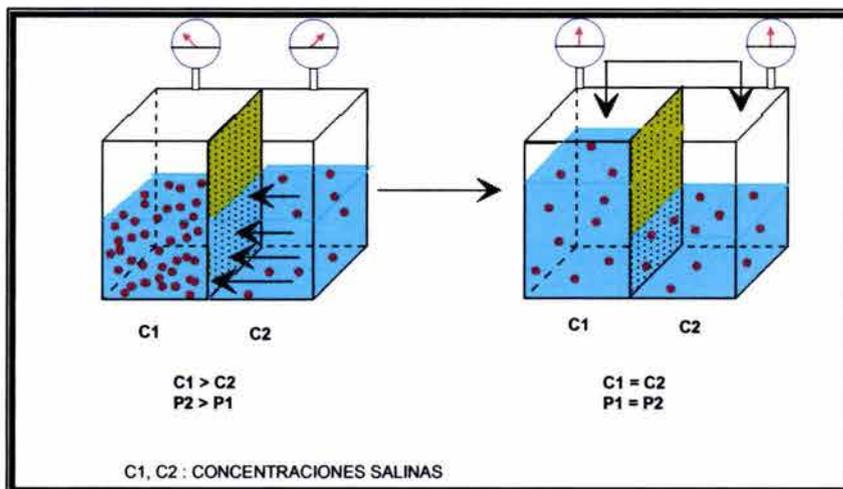


Fig. 2.26. Fenómeno de osmosis del agua.

Para que el agua se mueva de una solución menos salina a una solución más salina a través de una membrana semipermeable se requiere de una presión llamada presión osmótica que finalmente se traduce como un incremento o decremento de la presión de poro.

Los cambios en el potencial químico del agua con la presión están dados por:

$$d\Phi_{qa} = \frac{\partial\Phi_{qa}}{\partial P} dP = \frac{\partial G}{\partial C_a \partial P} dP = \frac{\partial V_a}{\partial C_a} dP \quad (2.8-6)$$

$$d\Phi_{qa} = \bar{V}_a dP \quad (2.8-7)$$

Utilizando la ley de los gases ideales nosotros sabemos que el volumen molar parcial del agua es:

$$\bar{V}_w = \frac{RT}{P_w} \quad (2.8-8)$$

Si sustituimos la ecuación (2.8-7) en la ecuación (2.8-8) e integrando nosotros obtenemos el potencial químico del agua.

$$\int_{\Phi_w^0}^{\Phi_w} d\Phi_w = \int_{P_w^0}^{P_w} \frac{RT}{P_w} dP_w \quad (2.8-9)$$

$$\Phi_w = \Phi_w^0 + RT \cdot \ln \frac{P_w}{P_w^0} \quad (2.8-10)$$

Si el liquido en cada lado se encuentra en equilibrio con la fase vapor la ecuación de arriba puede ser usada para expresar el potencial químico de la fase líquida. Si una suficiente presión hidráulica fuera aplicada para prever que el agua se moviera a través de la membrana, la presión diferencial existente a través de la membrana será la presión osmótica. Esto por supuesto requiere que el potencial químico disminuya debido a que la salinidad ha sido compensada por el incremento en el potencial químico causado por la presión hidráulica impuesta. De manera que para un fluido incompresible nosotros tenemos que:

$$\Delta\Phi_W = \int_{P_1}^{P_2} \bar{V}_w dP = \bar{V}_w \Delta P \quad (2.8-11)$$

Sustituyendo la ecuación 2.8-10 en la ecuación 2.8-11 obtenemos:

$$\Delta P = \frac{RT}{V_w} \ln \frac{P_w}{P_w^0} \quad (2.8-12)$$

Donde V_w puede ser calculada por la siguiente expresión:

$$\bar{V}_a = \frac{M}{\rho} \quad (2.8-13)$$

Ahora bien la presión de absorción de la lutita es análoga a la presión osmótica de una membrana semipermeable donde la lutita juega el papel de la membrana semipermeable. Debido a las simplificaciones realizadas para un sistema ideal, es necesario realizar un cambio de variable "f" el cual representa la presión de vapor imaginaria para un sistema no ideal.

Por lo que en la ecuación (2.7-9), se modifica él término:

$$\frac{P_w}{P_w^0} \Rightarrow \frac{f_i}{f_i^0} = a_i \quad (2.8-14)$$

A este termino se le conoce como actividad del agua y puede ser obtenido de dividir la presión de vapor de formación entre la presión de vapor del agua pura. Por lo tanto la ecuación resultante es:

$$\Delta P = \frac{RT}{V_w} \ln(a_w) \quad (2.8-15)$$

El esfuerzo químico debido a la diferencia en los potenciales químicos entre la lutita y el fluido de perforación puede ser calculada del hecho que el equilibrio entre dos potenciales químicos es igual:

$$\Delta P_a - \Delta P_{df} = \frac{RT}{V_w} \ln(a_w)_a - \frac{RT}{V_w} \ln(a_w)_{df} = 0 \quad (2.8-16)$$

Si la ecuación (2.8-16) es resuelta para los esfuerzos asociados con la lutita entonces obtenemos la ecuación:

$$(P - P_0) = \pm \Delta P = \frac{RT}{V_w} \ln(a_w)_a - \frac{RT}{V_w} \ln(a_w)_{df} \quad (2.8-17)$$

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

2.8.6 Presión Osmótica en lodos base agua.

Para lodos base agua donde se tiene un sistema de membrana no ideal, la presión hidrostática generada por osmosis es diferente a la calculada por la ecuación usada para lodos base aceite activamente balanceados.

Steverman trabajo con sistemas de membranas no ideales y definió un coeficiente de reflexión, como la relación entre la presión osmótica observada y la presión osmótica teórica calculada con la ecuación 2.8-17. De manera que:

$$\sigma = \left[\frac{(\Delta P)_{observada}}{(\Delta P)_{teorica}} \right]_{J_v=0} \quad (2.8-18)$$

El flujo total de la solución a través de la membrana (J_v) es subscripto en la ecuación de arriba para denotar que σ es definido cuando $J_v = 0$. El coeficiente de reflexión mide la capacidad de la lutita de accionar como una membrana semipermeable ideal.

De manera que la ecuación (2.7-17) puede ser escrita para un sistema no ideal como:

$$(P - P_0)_{observado} = \pm(\Delta P_{teorica} \times \sigma) = (\sigma) \times \frac{RT}{V_w} \ln(a_w)_a - \frac{RT}{V_w} \ln(a_w)_{df} \quad (2.8-19)$$

Esta ecuación puede ser generalizada para ambos sistemas de fluidos donde es evidente que si $\sigma=1$, se trata de un sistema de membrana ideal es decir un lodo base aceite, si $\sigma=0$, se trata de un medio poroso que no tiene propiedades de membrana, y para valores entre 0 y 1 se trata de sistema de membranas no ideales, el valor de σ dependerá de muchos factores como son: tipo de arcilla, contenido de arcilla, tamaño y distribución de poro, actividad y resistencia iónica, etc.

2.9. Estabilidad de pozos durante de perforación

La mayoría de las formaciones perforadas en todo los pozos petroleros , son afectadas por formaciones arcillosas es decir formaciones de lutitas. Las lutitas son las formaciones que más presentan problemas de estabilidad y causan por lo menos el 90 % de los problemas de estabilidad en las paredes del agujero, estos problemas se traducen en perdidas de tiempo y en algunas ocasiones hasta la perdida de pozo de acuerdo a las estadísticas, se estima que a nivel mundial, la inestabilidad en el agujero cuesta a la industria mas de 1 billón de dólares por año.

Cuando se perfora una zona arcillosa generalmente se presentan dificultades siendo entre las más comunes: el embolamiento de la barrena, derrumbes, altos filtrados, y reducción del diámetro de agujero y como consecuencia tiempos de retrasos, perdidas de lodo, pesca o perdida de herramienta, sidetrack, incapacidad para meter la tubería de revestimiento y una pobre calidad en los registros y cementaciones.

Las formaciones perforadas se encuentran sujetas bajo un estado de esfuerzos in-situ, estos esfuerzos son la sobrecarga (Esfuerzo vertical), los esfuerzos tectónicos (Esfuerzos horizontales) y bajo una presión de poro. Cuando se perfora un pozo y parte de esa roca es removida la pared del pozo sufrirá una alteración de los esfuerzos originales ya que parte de la roca ha sido removida, si esa roca alrededor del pozo es una roca suave o débil esa concentración de esfuerzo puede conducir a la falla del pozo. Para prevenir el flujo de fluido de la formación hacia el pozo y que la roca falle el pozo es llenado con un fluido de perforación.

En la mayoría de los casos la densidad del lodo es ajustada para que los fluidos de formación no entren hacia el pozo, sin embargo muy poca atención se ha puesto en la estabilidad mecánica del pozo. En el caso de rocas compactas este no representa ningún problema pero en rocas débiles el límite inferior de densidad de lodo es establecido por la estabilidad mecánica para prevenir el colapso de pozo.

Sin embargo hay que poner mucha atención en el incremento de la densidad del lodo ya que este puede causar un fracturamiento hidráulico de la formación y como consecuencia pérdidas de lodo y la posibilidad de un descontrol de pozo.

Un problema adicional es formaciones arcillosas, es la interacción roca fluido de perforación, estableciéndose un flujo de agua hacia dentro de la formación causando un incremento de la presión de poro y como consecuencia un decremento de la resistencia de la roca, esto no significa que un flujo de agua de la formación hacia el pozo sea positivo par mejorar la resistencia de la roca ya que si la presión de poro decrece la presencia de micro fracturas podrían llevarnos a la falla de la roca.

La temperatura en formaciones no permeables también representa un problema potencial en la estabilidad del agujero, ya que los cambios de presión de poro inducidas térmicamente pueden ser significativos, estos cambios de temperatura ocurren cuando se circula el lodo es decir las formaciones son enfriadas debido a que están en contacto con un fluido de menor temperatura. Sin embargo estas fluctuaciones de temperatura también ocurren cuando se tiene o interrumpe la circulación, como consecuencia las formaciones en contacto con el pozo se calentaran.

CAPITULO III

DETERMINACIÓN DE LOS PARAMETROS DE ENTRADA.

En cualquier estudio de estabilidad de pozos es de gran trascendencia el conocer la presión de poro, los esfuerzos in-situ de la formación, las densidades del lodo y la orientación del pozo. Algunos de estos parámetros son determinados a partir de técnicas apropiadas de mediciones directas, otras son obtenidas de lecturas grabadas en el pozo, o cálculos basados en teorías disponibles o correlaciones empíricas.

A la determinación de este grupo de parámetros de entrada es lo que se conoce como caracterización geomecánica.

Registros como el densidades, tiempos de transito de ondas compresionales, ondas de corte, rayos gamma, son de vital importancia en la caracterización geomecánica.

Los estudios en lutitas requieren de muchos parámetros de entrada los cuales podemos agrupar en varios módulos de entradas adicionales debido a los efectos químicos y térmicos asociados a este tipo de formaciones.

Módulos de entrada

MODULO DE ENTRADA	PARAMETROS INCLUIDOS	APROXIMACION PARA OBTENER LOS DATOS DE ENTRADA
Orientación del pozo	<ul style="list-style-type: none"> • Azimut • Inclinación • Profundidad • Radio del pozo • Distancia de interés. 	Historia del pozo, Registro de geometría de pozo.
Esfuerzos insitu	<ul style="list-style-type: none"> • Sobrecarga • Esfuerzo horizontal mínimo. • Esfuerzo horizontal máximo. 	Registro de densidades. pruebas de de goteo, fracturamiento hidráulico
Presión de poro	<ul style="list-style-type: none"> • Presión de poro 	Correlaciones de registros.
Actividad y eficiencia de membrana	<ul style="list-style-type: none"> • Actividad del fluido de perforación • Actividad del fluido contenido en los poros. • Eficiencia de membrana 	Trabajos de laboratorios.

	<ul style="list-style-type: none"> • Gradiente geotérmico. 	
Difusión hidráulica	<ul style="list-style-type: none"> • Porosidad • Permeabilidad • Compresibilidad total • Viscosidad del fluido en los poros • Difusividad hidráulica del fluido 	<p>Presión de pozo, Volumen, temperatura, análisis (PVT)</p> <p>Calculada</p>
Resistencia de la roca	<ul style="list-style-type: none"> • Angulo de fricción interna • Modulo de young • Relación de poisson. • Constante de Biot 	Trabajos de laboratorios o predecidas del registro sonico.
Difusión térmica.	<ul style="list-style-type: none"> • Coeficiente de expansión térmica de la matriz de la roca y el fluido en los poros. • Conductividad térmica, calor específico y densidad de la matriz de la roca, el fluido en los poros y del medio poroso. • Coeficiente de transferencia global de calor en el tubo y el espacio anular. • Gasto de la bomba de lodo temperatura de la superficie de la tierra y temperatura de entrada del lodo. 	Trabajo de laboratorios.

3.1 Orientación del pozo.

La figura 3.1 nos muestra el azimut del pozo, α , el cual es el ángulo formado a partir del esfuerzo horizontal mayor medido en contra de las manecillas del reloj hacia la proyección horizontal del eje del pozo en el fondo. La inclinación

de pozo, i , es el ángulo de desviación del pozo, con respecto al eje de la dirección vertical.

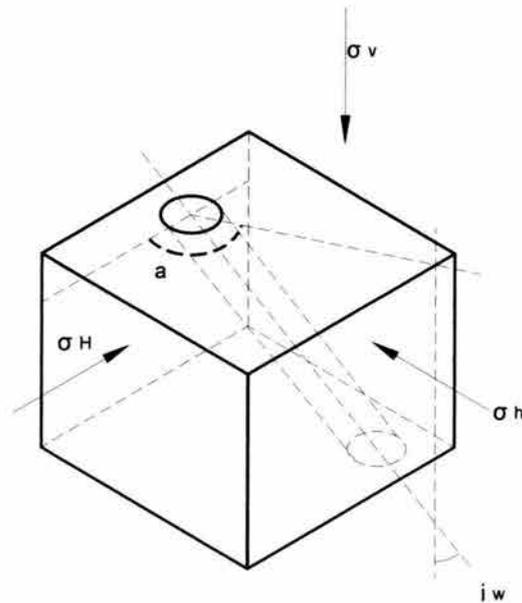


Fig. 3.1 Configuración de la trayectoria de un pozo.

3.2 Determinación de los esfuerzo insitu.

La determinación de estos esfuerzos representa el punto de partida en cualquier análisis de estabilidad de pozo. En la práctica es muy difícil obtener la dirección de estos esfuerzos, además de ser demasiados costosos por lo que se asume que uno de ellos se encuentra en eje vertical y los otros dos se encuentran en el plano horizontal. El esfuerzo vertical o la sobrecarga representa el peso de las capas de las formaciones y puede ser obtenidos a partir de la integración de las densidades de toda las capas que conforman el pozo. Estas densidades son obtenidas del registro de densidades. El esfuerzo horizontal es determinado en la práctica de correlaciones, pruebas de goteo o mediante modelos analíticos.

3.2.1 Esfuerzo de sobrecarga

El esfuerzo de sobrecarga es obtenido de la integración de la densidad volumétrica del registro de densidades a través de la siguiente ecuación:

$$\sigma_v = \int_b^D \rho_b g dD \quad (3.2-1)$$

Cuando se requiere calcular la sobrecarga en áreas costa adentro es necesario integrar esta ecuación en dos partes. La primera parte es desde la superficie, hasta el fondo del océano y la segunda parte del fondo del océano hasta la profundidad de interés.

$$\sigma_V = \int_b^{D_w} \rho_b g dD + \int_{D_w}^D \rho_b g dD \quad (3.2-2)$$

De la superficie al fondo del océano la densidad del agua de mar es 8.5 lbm/gal y la porosidad es 1. Nosotros sabemos que la densidad volumétrica para un medio poroso puede ser expresada matemáticamente como:

$$\rho_b = \rho_g(1-\phi) + \rho_{fl} \quad (3.2-3)$$

Por lo que la ecuación puede ser expresada como:

$$\sigma_V = \rho_w g D_w + \int_{D_w}^D \rho_b g dD \quad (3.2-4)$$

Para un medio poroelástico el esfuerzo vertical efectivo es expresado mediante la siguiente ecuación:

$$\sigma_v^{ef} = \sigma_v - \alpha P_p \quad (3.2-5)$$

Si no hay gradientes de sobrecarga disponible un valor de 1 psi/ft puede ser asumido, sin embargo es de mencionar que esto no es cierto en la mayoría de los casos.

3.2.2 Esfuerzos horizontales máximos y mínimos.

Los esfuerzos horizontales máximos y mínimos pueden ser obtenidos de correlaciones una de ellas es la bien conocida correlación de Breckel y Van Eekelen (1982), el uso de datos de fracturas de varias regiones y determinó relaciones entre el esfuerzo horizontal total y la profundidad, ellos además incluyeron en estas relaciones expresiones que toman en cuenta las presiones de poro anormales. Breckel y Van Eekelen presentaron las siguientes relaciones para las costas del golfo de los E.U.

$$\sigma_{H \min} = 0.197D^{1.145} + 0.46(p_f - p_{fn})$$

$(D \leq 11,500 \text{ ft})$

$$\sigma_{H \min} = 0.167D - 4.596 + 0.46(p_f - p_{fn}) \quad (3.2-6)$$

$(D > 11,500 \text{ ft})$

Donde la profundidad, D, está dada en pies, la presión de formación en psi y el gradiente correspondiente a la presión de poro normal es 0.465 psi/ft.

Las pruebas de goteo comúnmente son utilizadas para verificar que la tubería de revestimiento, la cementación y las formaciones debajo de la zapata puedan resistir la presión de pozo requerida para perforar la siguiente etapa (la profundidad a la que la siguiente TR será colocada). Por consiguiente de esta prueba se puede obtener un gradiente de fractura, y así mismo determinar el esfuerzo horizontal mínimo debido a que la fractura ocurrirá a lo largo de la dirección perpendicular al esfuerzo principal mínimo.

Existen además las pruebas de fracturas las cuales nos permiten determinar de manera directa el esfuerzo principal mínimo. Si se considera que se tiene anisotropía de esfuerzos horizontales, además que la falla por tensión ocurrirá en $\theta=0^\circ$, la cual es la dirección del esfuerzo principal máximo.

Para $\theta=0^\circ$ se tiene que la ecuación 2.5-79 se reducen a:

$$\sigma_{\theta(\min)} = 3\sigma_y - \sigma_x - P_w \quad (3.2-3)$$

La condición para iniciar la ruptura/fractura, cuando la roca falla o cede al esfuerzo aplicado es cuando:

$$\sigma_{\theta(\min)} = -T_0 \quad (3.2-4)$$

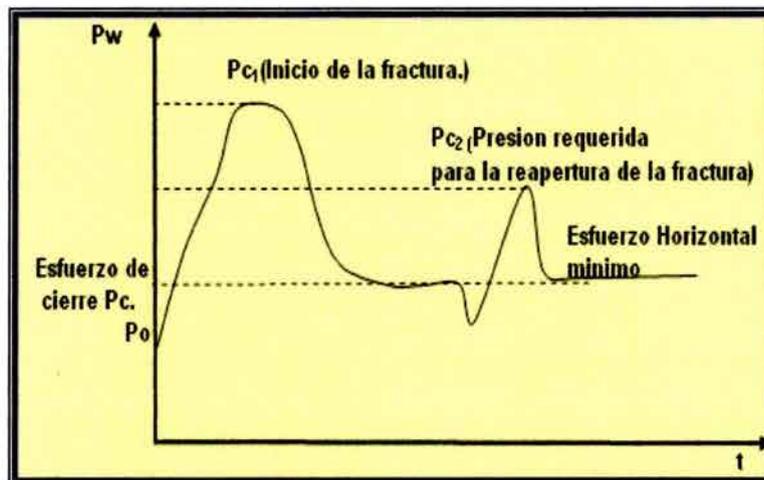


Fig. 3.2 Presión durante la fractura de una roca.

Combinando las ecuaciones 3.2-3 y la ecuación 3.2-4 obtenemos el criterio de falla de la roca:

$$3\sigma_y - \sigma_x - P_{C1} = -T_0 \quad (3.2-5)$$

Haciendo el siguiente cambio de variable y apoyándonos de la figura 3.2, la ecuación 3.2-5 puede ser expresada como:

$$3\sigma_{h(\min)} - \sigma_{h(\max)} - P_{C2} = 0 \quad (3.2-6)$$

$$T_0 = P_{C1} - P_{C2} \quad (3.2-7)$$

Valido para fracturas verticales.

Donde:

$$\sigma_y = \sigma_{h(\min)} = \text{esfuerzo horizontal mínimo}$$

$$\sigma_x = \sigma_{h(\max)} = \text{esfuerzo horizontal máximo}$$

$$\sigma_y = \sigma_{h(\min)} \approx \text{Presión instantánea de cierre} \approx \text{Esfuerzo de cierre.}$$

$$P_{C2} = \text{Presión requerida para reabrir la fractura.}$$

Además el esfuerzo horizontal mínimo puede ser calculado utilizando la siguiente expresión:

$$\sigma_{h \min} = \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_v - \frac{\alpha(1-2\mu)}{1-\mu} P_p \quad (3.2-8)$$

Donde la sobrecarga es obtenida de la integración del registro de densidades y el modulo de poisson de las velocidades de las ondas compresionales y ondas de corte.

3.2.3 Determinación de la Presión de poro

La estimación de la presión de poro puede ser obtenida a partir de registros. Generalmente presiones anormalmente altas son encontradas en todo el mundo y estas ocurren cuando el fluido contenido en el espacio del poro comienza a soportar mas sobrecarga que la que debería soportar.

El principio de detección de las presiones anormales esta basado en que bajo una compactación normal, la porosidad disminuye con el incremento de la profundidad de sepultamiento. Hottman y Jhonson establecieron un procedimiento para poder determinar la primera ocurrencia de las presiones anormales y la relación entre la presión y profundidad. Ellos observaron que para una formación presionada hidrostáticamente en una provincia geológica, una grafica logarítmica del tiempo de transito vs. Profundidad en arcillas es una línea recta. La divergencia del tiempo de transito observado del obtenido con la tendencia normal establecida, es una medida de la presión del fluido en el poro en la lutita y además

de la formación permeable adyacente. Este mismo procedimiento fue utilizado con registros resistivos.

Existen muchos métodos que nos permite determinar la presión de poro y estos pueden ser antes, durante y después de la perforación. La siguiente tabla ilustra estos métodos:

Determinación de la presión de poro	Tiempo de medición
<ul style="list-style-type: none"> • Métodos predictivos <ul style="list-style-type: none"> ▪ Geología regional. ▪ Métodos geofísicos (Registros sísmicos) 	Antes de la perforación
<ul style="list-style-type: none"> • Parámetros durante la perforación. <ul style="list-style-type: none"> ▪ Exponente D. ▪ Exponente D modificado. 	Durante la perforación en tiempo real.
<ul style="list-style-type: none"> • Análisis de recorte <ul style="list-style-type: none"> ▪ Densidad de las arcillas. 	Durante la perforación.
<ul style="list-style-type: none"> • Registros <ul style="list-style-type: none"> ▪ Resistividad / Conductividad ▪ Registro sísmico. ▪ Registro de densidades. 	Durante y después de la perforación.
<ul style="list-style-type: none"> • Pruebas de formación 	Después de la perforación.
<ul style="list-style-type: none"> • Sísmica de Pozo <ul style="list-style-type: none"> ▪ VSP (perfilado sísmico vertical). 	Después de la perforación.

Es este trabajo solo presentamos aquellos métodos que nos permiten determinar la presión de poro por medio de registros geofísicos.

- **Hottman y Jonson.**

Procedimiento

- 1.- Se grafica velocidad o tiempo de transito vs. Profundidad y se establece la línea de tendencia normal.
- 2.-Se localiza el punto superior donde se tiene el inicio de las presiones anormales en la cual los puntos divergen de la tendencia normal.
- 3.-Se toma la diferencia entre el tiempo de transito observado y el tiempo de transito normal.
- 4.-Se convierte la diferencia a gradiente de presión de formación por medio de una curva derivada empíricamente para un área dada.
- 5.-Multiplicar el gradiente obtenido por la profundidad y calcular la presión del fluido de formación a esa profundidad.

- **Eaton**

El propone las siguientes relaciones empíricas para predecir la presión del fluido en el poro.

$$\frac{P}{D} = \frac{S}{D} - \left(\frac{S}{D} - \frac{P_N}{D} \right) * \left(\frac{r_o}{r_n} \right)^{1.2} \quad (3.2-9)$$

$$\frac{P}{D} = \frac{S}{D} - \left(\frac{S}{D} - \frac{P_N}{D} \right) * \left(\frac{C_N}{C_o} \right)^{1.2} \quad (3.2-10)$$

$$\frac{P}{D} = \frac{S}{D} - \left(\frac{S}{D} - \frac{P_N}{D} \right) * \left(\frac{T_N}{T_o} \right)^{3.0} \quad (3.2-11)$$

3.3 Determinación de los parámetros químicos.

Los parámetros de importancia para estimar la contribución que juega el fenómeno químico es el conocimiento de las actividades del agua del fluido de perforación y de las lutitas, así como la eficiencia de membrana del sistema roca-fluido y el gradiente geotérmico. Estos parámetros regularmente son obtenidos en el laboratorio.

3.3.1 Calculo de la actividad del agua en las lutitas

Hale y Mody (1993) midieron las actividades del agua en lodos base-aceite para diferentes concentraciones de sales. Ellos obtuvieron los siguientes resultados:

Concentración Salina (%w/w)	Actividad del agua CaCl ₂	Actividad del agua NaCl	Actividad del agua KCl
0.0	1.00	1.00	1.00
4.0	0.99	0.98	0.98
6.0	0.98	0.97	0.98
8.0	0.97	0.95	0.97
10.0	0.95	0.93	0.96
12.0	0.93	0.92	0.94
14.0	0.91	0.90	0.93
16.0	0.89	0.88	0.92
18.0	0.86	0.85	0.91
20.0	0.83	0.83	0.89
22.0	0.80	0.80	0.88
24.0	0.76	0.78	0.86
26.0	0.72	0.75	0.84
28.0	0.68		
30.0	0.64		

32.0	0.59		
34.0	0.55		
36.0	0.50		
38.0	0.44		
40.0	0.39		

De los resultados obtenidos ellos nos presentan las siguientes correlaciones para obtener las actividades del agua en los lodos base-aceite para diferentes tipos de sales:

CaCl₂

$$a_{wdf} = (1 - 0.00065(\%Sal)) - (0.000438(\%Sal)^2) + (0.00000281(\%Sal)^3) - (0.0000000265(\%Sal)^4) \quad (3.3-1)$$

NaCl

$$a_{wdf} = (1 - 0.00451(\%Sal)) - (0.000199(\%Sal)^2) \quad (3.3-2)$$

KCl

$$a_{wdf} = (0.9999 - 0.003443(\%Sal)) - (0.00009691(\%Sal)^2) \quad (3.3-3)$$

La figura 3.3 nos representa las actividades del agua obtenida para diferentes tipos y concentraciones de sales.

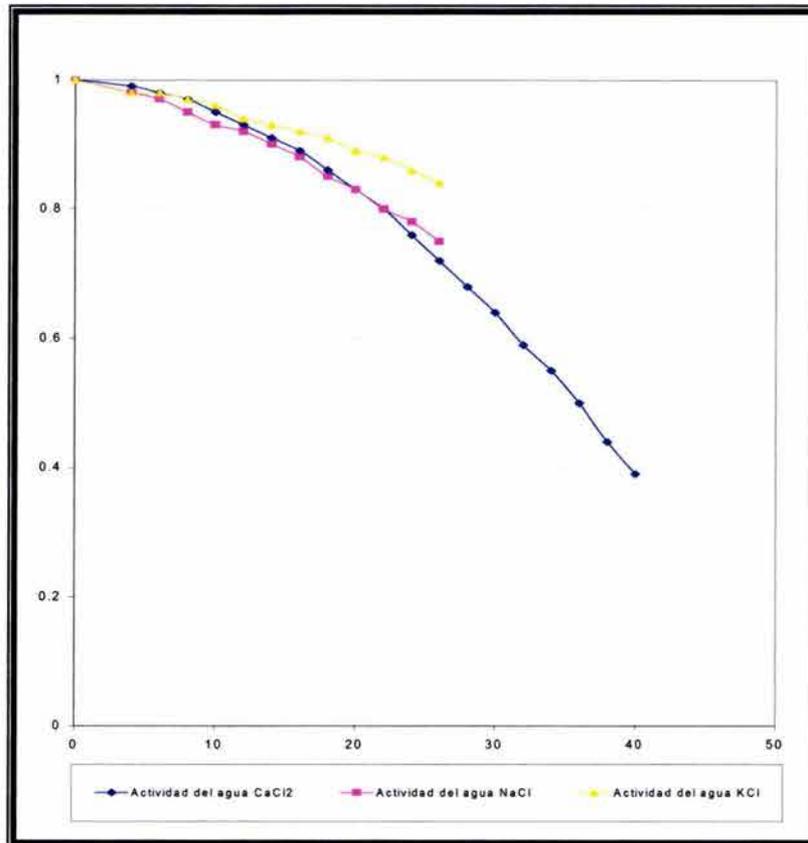


Fig. 3.3 Actividad del agua de los fluidos de perforación en función del %Salinidad para diferentes sales

Nosotros podemos ver que para el caso del NaCl y CaCl₂ para concentraciones de sales menores al 20% ambas sales generan la misma actividad en el fluido de perforación y para actividades menores al 15% las tres sales incluyendo KCl generan la misma actividad.

Mody y Hale (1992) corroboran experimentalmente la influencia de diferentes potenciales químicos entre el fluido de perforación y la lutita bajo condiciones in situ. Ellos observaron una modificación de la presión de poro, es decir hicieron varios desplazamientos con diferentes concentraciones de sales en el lodo de perforación y observaron un incremento en la presión de poro cuando la concentración de sal era menor en el lodo de perforación y una reducción en la presión de poro cuando la concentración era mayor. Sin embargo para concentraciones inferiores al 20% ellos obtuvieron la misma reducción en la presión de poro para diferentes tipos de sales cuando la concentración de sal era de un 6% en la lutita.

Los resultados obtenidos bajo condiciones insitu coinciden con las actividades del agua medida en laboratorio por Hale y Mody (1992) para concentraciones inferiores al 20%, las cuales presentan la misma actividad.

3.3.3 Cálculo de la actividad del agua en las lutitas

El cálculo de la actividad del agua en la lutita resulta ser más difícil de obtener mediante métodos indirectos y en la mayoría de los casos es obtenida de núcleos obtenidos de la formación en los cuales existen diferentes tipos de pruebas para estimar la actividad del agua.

José M Pavón nos presenta una ecuación que nos permite calcular la actividad del agua que contiene las formaciones donde ΔSP , es la lectura del registro SP en alguna arena cerca del cuerpo de la lutitas, la ecuación es:

$$a_{ws} = \frac{e^{\frac{\Delta SP}{K}}}{\left(\frac{R_{mf}}{0.075} - \frac{1}{a_{wf}} \right)} \quad (3.3-1)$$

$$K = 65 + 0.24T(^{\circ}C) \quad (3.3-2)$$

Chenevert (1970) presenta un método para estimar la actividad del agua en las lutitas de los fragmentos perforados recuperados de las formaciones. Para cada formación es realizada una prueba de absorción isotérmica o des-absorción que relaciona las actividades de las lutitas con su contenido de agua. Una vez realizada la prueba, la actividad del agua in-situ es obtenida de la estimación del porcentaje en peso del agua in-situ usando datos de densidad en las lutitas

La siguiente fórmula nos permite calcular el % en peso de agua en la lutita:

$$\%W = \frac{\gamma_{ma} - \gamma_b}{\gamma_b(\gamma_{ma} - 1)} \times 100 \quad (3.3-3)$$

Donde

γ_{ma} = Gravedad específica de la matriz o granos

γ_b = Gravedad específica volumétrica.

Estimación del volumen molar

La siguiente fórmula nos permite calcular el volumen molar:

$$V = \sum \frac{x_i V_{Mi}}{\rho_i} \quad (3.3-4)$$

Donde:

- X_i = Es la fracción del componente.
 V_{Mi} = Es el volumen molar del componente.
 ρ_i = Es la densidad del componente.

3.3.4 Estimación de la eficiencia de membrana.

La estimación de la eficiencia de membrana es obtenida mediante pruebas de laboratorio y es particular del sistema roca-fluido. Para lodos base aceite la eficiencia de membrana es igual a 1.

Para lodos base agua, la eficiencia de membrana deberá ser estimada en el laboratorio para el sistema roca-fluido.

3.3.5 Estimación de la temperatura de formación

La estimación de la temperatura de formación puede ser estimada mediante el gradiente geotérmico de la zona, esto significa que los cálculos son realizados a temperatura constante, para el punto de interés, sin embargo durante los procesos de la perforación la temperatura de la formación es modificada lo que involucra que exista una dependencia de la variable temporal.

Para los cálculos del potencial químico se ha asumido que la temperatura de la formación permanece constante para una profundidad de interés (gradiente geotérmico de la formación).

Sin embargo en esta tesis se propone un modelo que nos permite una variación de la temperatura de formación durante los procesos de perforación.

3.3.6 Cálculo del potencial químico.

El potencial químico puede ser tratado como un potencial hidráulico y puede ser calculado mediante la siguiente expresión.

$$\Delta P = -67\sigma T \ln\left(\frac{a_{wdf}}{a_{ws}}\right) \quad (3.3-5)$$

Donde:

- ΔP = Potencial químico, psi;
 67.0 = Factor de conversión;
 σ = Eficiencia de membrana, fracción;
 T = Temperatura, °K;
 a_{wdf} = Actividad del agua del fluido de perforación;
 a_{ws} = Actividad del agua en la lutita.

3.3.7 Difusión Hidráulica

En la industria petrolera, la difusión masica del fluido es definida como:

$$c = \frac{k}{\phi \mu c_t} \quad (3.3-6)$$

Donde:

- ϕ = Porosidad de la roca,
- k = Permeabilidad de la roca,
- μ = Viscosidad del fluido en el poro,
- c_t = Compresibilidad total del medio poroso.

Considerando la condición drenada y no drenada, Rice y Cleary (1976) deducieron la difusividad del fluido como:

$$c = \frac{2\kappa GB^2(1+v_u)}{9(1-v_u)(v_u-v)} \quad (3.3-7)$$

Donde

$$\kappa = \frac{k}{\mu} \text{ Coeficiente de permeabilidad,} \quad (3.3-8)$$

G = Modulo de corte del medio poroso,

B = Coeficiente de skempton, es una relación de la presión de poro inducida por un cambio en el esfuerzo medio aplicado, bajo condiciones no drenadas,

v_u = Relación de Poisson no drenada,

v = Relación de poisson drenada.

Si los datos obtenidos son correctos ambas definiciones deben generar el mismo valor de difusividad por lo que si combinamos la ecuación nosotros podemos obtener la siguiente expresión:

$$\phi c_t = \frac{9(1-v_u)(v_u-v)}{2GB^2(1+v_u)^2(1-v)} \quad (3.3-9)$$

3.4 Estimación de las propiedades mecánicas de las rocas.

Existen 2 métodos que nos permiten estimar las propiedades mecánicas de las rocas el primero de ellos es mediante experimentos en laboratorio sobre núcleos de formaciones, las propiedades obtenidas se les conoce como propiedades elásticas estáticas, el otro método es mediante el uso de registros tales como el registro sísmico y registro de densidades, a las propiedades obtenidas se les conoce como propiedades elásticas dinámicas.

Existe una controversia en cuando a los resultados obtenidos de las propiedades mecánicas mediante mediciones en núcleos y las mediciones obtenidas de las ondas sísmicas, ya que suelen ser diferentes. Esta diferencia se debe principalmente a que cuando una formación es llevada de una condición in-situ a una condición en superficie o en rocas sujetas a bajos esfuerzos efectivos, se generan microfisuras en la roca, que disminuye las propiedades elásticas de la roca Walsh (1965). Sin embargo esta diferencia disminuye cuando la roca se encuentra sujeta a altos esfuerzos efectivos, por lo que las propiedades elásticas estáticas y dinámicas se encuentran muy cercana debido a que la mayoría de las fisuras se encuentran cerradas, Simmons y Brace (1965).

Myung y Helander (1972) estudiaron la relación que existe entre los módulos elásticos medidos in-situ y aquellos determinados en el laboratorio. Ellos hicieron mediciones de las velocidades de las ondas compresionales y de corte sobre núcleos bajo condiciones simuladas de presiones in-situ y reportaron una concordancia muy cercana con los valores determinados en laboratorio.

Debido a estos resultados obtenidos muchos otros investigadores han usado mediciones acústicas de pozos para determinar los módulos elásticos como método preferido bajo condiciones in-situ.

Existen métodos alternativos los cuales nos permite calcular las propiedades mecánicas de las rocas, estos métodos son el empleo de correlaciones.

3.4.1 Modulo de Corte G, Modulo volumétrico K y Relación de Poisson v

La siguiente ecuación nos permite determinar la velocidad de una onda compresional, el cual es una constante para un material dado:

$$v_p = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}G + K}{\rho_b}} \quad (3.4-1)$$

Conociendo v_p , v_s y la ρ_b , el modulo volumétrico K, el modulo de corte G, y la relación de Poisson ν , puede ser determinada usando las siguientes ecuaciones, además de la ecuación 3.4-1.

La velocidad de las ondas de corte u ondas S son una constante para el material y puede ser determinada como:

$$v_s = \sqrt{\frac{G}{\rho_b}} \quad (3.4-2)$$

La relación de Poisson puede ser calculado por medio de la siguiente expresión:

$$\nu = \frac{v_p^2 - 2v_s^2}{2(v_p^2 - v_s^2)} \quad (3.4-3)$$

Sin embargo en la práctica muy pocas veces se cuenta con las mediciones de las ondas de corte por lo que resulta necesario el empleo de correlaciones que nos permite calcular las ondas de corte a partir de las ondas compresionales.

Jorge Salinas (2002) nos presenta una correlación que nos permite calcular las ondas de corte a partir de las ondas compresionales para lutitas y arenas. Usando las mediciones del registro sísmico.

Arenas

$$\begin{aligned} v_s &= 0.8087v_p - 1231.2 \\ \rho_b &= 1.110617v_s^{0.105} \\ G &= 0.161V_s^{2.105} \end{aligned} \quad (3.4-4)$$

Lutitas

$$\begin{aligned} v_s &= 0.9071v_p - 1360.7 \\ \rho_b &= 1.1451v_s^{0.105} \\ G &= 0.165V_s^{2.105} \end{aligned} \quad (3.4-5)$$

Para el cálculo de los restantes módulos elásticos nosotros podemos hacer uso de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} E &= 2G(1+\nu) \\ K &= \frac{E}{3(1-2\nu)} \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{2\nu G}{(1-2\nu)} \quad (3.4-6)$$

3.4.2 Angulo de fricción interna.

El ángulo de fricción interna puede ser fácilmente determinado usando núcleos en laboratorio mediante la teoría de Mohr mediante pruebas triaxiales. Sin embargo; Lal (1999) nos presenta una correlación que nos permite calcular el ángulo de fricción interna.

$$\phi = \text{ArcoSeno} \left(\frac{v_p - 1}{v_p + 1} \right) \quad (3.4-7)$$

Donde v_p es la velocidad de las ondas compresionales en Km/s .

3.4.3 Resistencia a la compresión uniaxial C_o , y Cohesión de la roca S_o .

La resistencia a la compresión uniaxial de la roca puede ser determinada mediante la siguiente expresión:

$$C_o = 2S_o \frac{\text{Cos} \phi}{1 - \text{Sen} \phi} \quad (3.4-8)$$

La cohesión de la roca puede ser determinada mediante el uso de datos de laboratorio con ayuda de la siguiente expresión:

$$S_o = \left(\sigma_1 - \frac{1 + \text{Sen} \phi}{1 - \text{Sen} \phi} \sigma_3 \right) \frac{1 - \text{Sen} \phi}{2 \text{Cos} \phi} \quad (3.4-9)$$

Lal (1999) determino la resistencia a la compresión uniaxial usando las siguientes ecuaciones:

$$C_o = 10 * (v_p - 1) \quad (3.4-10)$$

$$S_o = \frac{5(v_p - 1)}{\sqrt{v_p}} = 10 \text{Tan} \phi \quad (3.4-11)$$

Coates y Denoo (1981) muestran una correlación entre el modulo de Young y la resistencia a la compresión uniaxial para las tres principales litologías: Arenas, carbonatos y lutitas. La resistencia a la compresión uniaxial puede ser calculada usando la relación de Poisson, la densidad de la formación, las velocidades de las ondas compresionales y el contenido de arcilla.

$$C_o' = 3.3 \cdot 10^{-20} \rho^2 v_p^4 \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right)^2 (1-2\nu)(1+0.78V_{clay}) \quad (3.4-12)$$

Para evaluar el contenido de arcilla nosotros podemos emplear:

El registro de rayos gamma

$$V_{clay} = \frac{GR - GR_{\min}}{GR_{\max} - GR_{\min}} \quad (3.4-13)$$

Los registros de Densidad-Neutron.

$$V_{clay} = \frac{\phi_N - \phi_D}{\phi_{Nclay} - \phi_{Dclay}} \quad (3.4-14)$$

Los dos anteriores son los más comunes para obtener el contenido de arcilla. Sin embargo un último método puede ser empleado si se dispone de los registros sónico y densidad.

$$V_{clay} = \frac{\phi_S - \phi_D}{\phi_{Sclay} - \phi_{Dclay}} \quad (3.4-15)$$

3.4.4 Cálculo de la resistencia a la tensión.

La resistencia a la tensión puede ser calculada del criterio de falla de Mohr-Coulomb, Fjaer (1992); mediante la siguiente expresión:

$$T_o = C_o \frac{1 - \text{Sen}\phi}{1 + \text{Sen}\phi} \quad (3.4-16)$$

Jaeger y Cook (1979) presenta una correlación empírica que permite estimar la resistencia a la tensión como 1/8 a 1/12 de la resistencia a la compresión uniaxial. Un factor de 10 es usado comúnmente. La expresión es:

$$T_o = \frac{1}{10} C_o \quad (3.4-17)$$

3.5 Estimación de las propiedades térmicas de la roca.

En esta sección se presenta una estimación de las principales propiedades térmicas de la roca, las cuales nos permite estudiar el papel de los efectos térmicos en la estabilidad de pozos.

3.5.1 Cálculo de la difusión térmica.

Para el cálculo de la difusión térmica es requerido el conocimiento de la temperatura del medio poroso y del fluido de perforación, sus condiciones de frontera, sus condiciones iniciales, su expansión térmica, el coeficiente de transferencia de calor en el pozo y las difusividades térmicas.

Charlez (1997) menciona que la constante de difusión térmica varía muy poco de una roca a otra.

3.5.2 Estimación de la temperatura de entrada y de frontera

La temperatura de entrada del fluido de perforación y la temperatura de la superficie de la tierra pueden ser medidas fácilmente en la superficie.

La temperatura en la pared del pozo puede ser considerada equivalente a la temperatura del fluido de perforación, en el anular para un agujero descubierto. La temperatura de circulación del lodo puede ser calculado usando flujo transitorio o flujo en estado permanente.

3.5.3 Estimación del coeficiente de expansión térmica volumétrica

Los cambios en temperatura causan cambios en la presión de poro de las formaciones perforadas, causando variaciones en el coeficiente de expansión térmica volumétrica. Métodos experimentales para medir el coeficiente de expansión térmica son presentados por Somerton (1992). Pocos datos fueron obtenidos en lutitas. Prats (1986) lista un promedio volumétrico de los coeficientes de expansión térmica de varios tipos de rocas sedimentarias encontradas en los pozos petroleros dentro de un rango de 4×10^{-5} a $5.9 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{F}^{-1}$

La expansión térmica de la roca es relativamente pequeña en magnitud y usualmente menor que la del agua. Esto tiene un menor efecto en el volumen o densidad volumétrica, pero la diferencia entre la expansión de la roca y la del agua puede afectar la alteración de la presión de poro significativamente para rocas de baja permeabilidad.

3.5.4 Estimación de la difusividad térmica.

La difusividad térmica puede ser definida como:

$$c_o = \frac{\lambda}{\rho_b C_b} \quad (3.5.1)$$

Donde:

- c_o = Difusividad térmica;
- λ = Conductividad térmica del material volumétrico;
- ρ_b = Densidad volumétrica;
- C_b = Calor específico.

Las conductividades térmicas y el calor específico son listadas por Charlez (1991) en las cuales las lutitas están localizadas en el rango de $0.89 \leq \lambda \leq 2.678 \text{ w/m} \cdot ^\circ\text{K}$ y $750 \leq C_b \leq 810 \text{ J/Kg} \cdot ^\circ\text{K}$. Datos experimentales para las capacidades caloríficas de lutitas saturadas con agua sobre un rango de presiones de poro y temperatura no son disponibles. Magnitudes de difusividades térmicas de $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ son mostradas por varias rocas, sin embargo la lutita es una excepción Somerton (1992, p. 116). Cálculos generalizados de capacidades caloríficas para arenas y lutitas con saturaciones de fluidos variables son además presentados.

Las conductividades térmicas del medio poroso puede ser calculado de las propiedades del sólido de la roca y del fluido usando ampliamente el modelo de la ley de las mezclas (Somerton, 1992). Otros modelos empíricos y teóricos son además presentados en el libro de Somerton.

3.5.5 Calculo del coeficiente de transferencia de calor

El coeficiente de transferencia de calor global en la sarta de perforación y en el anular son requeridos para los cálculos de la temperatura en el lodo. Estos parámetros son definidos en Bird, Steward y Lightfoot (1960) y puede ser encontrado en muchas más publicaciones de transferencia de calor. Las ecuaciones del coeficiente de transferencia de calor global para flujo de calor lineal y radial son además descritas. El significado del coeficiente de transferencia de calor global es discutido por Ramey (1962).

3.5.6 Calculo del coeficiente de transferencia de calor por convección forzada en tuberías.

El coeficiente de transferencia de calor por convección forzada es debido al movimiento del fluido, por lo que debe ser calculado para dos regimenes de flujo: laminar y turbulento.

Para flujo laminar se puede utilizar la aproximación asintótica:

$$Nu_D = \frac{hD}{K} = 4.36 \quad (3.5-2)$$

Donde:

h: Coeficiente convectivo de calor forzado.

D: Diámetro de la tubería.

K: Conductividad Térmica del fluido.

Esta correlación es realizada para un tubo circular, caracterizado por un flujo de calor en su superficie uniforme.

Para flujo turbulento dos correlaciones pueden ser utilizadas para el cálculo del coeficiente convectivo; la presentada por Siader y Tate y la correlación de Petukhov.

Correlación de Siader y Tate.

$$Nu_D = 0.027 Re_D^{4/5} Pr^{1/3} \left(\frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14} \quad (3.5-3)$$

$$0.7 \leq Pr \leq 16700$$

$$Re_D \geq 10000$$

$$\frac{L}{D} \geq 10$$

Rango de error en la estimación de 25%.

Correlación de Petukhov modificada.

$$Nu_D = \frac{\left(\frac{f}{8} \right) (Re_D - 1000) Pr}{1 + 12.7 \left(\frac{f}{8} \right) \left(Pr^{\frac{2}{3}} - 1 \right)} \quad (3.5-4)$$

$$0.5 < Pr < 2000$$

$$3000 < Re_D < 5 \times 10^6$$

Rango de error en la estimación de 5%.

Donde:

$$Nu_D = \frac{hD}{K} : \quad \text{Numero de Nussel,}$$

$$Pr = \frac{C_p \mu}{K} : \quad \text{Numero de Prandtl,}$$

$$Re_D : \quad \text{Numero de Reynolds,}$$

$$f : \quad \text{Factor de fricción de Mody.}$$

3.5.7 Cálculo de los coeficientes de acoplamiento

El coeficiente de acoplamiento entre la presión y temperatura, c' , es definido como (Kurashige, 1989; Wang y Papamichos, 1994)

$$c' = \frac{c}{\kappa} \left[\frac{2\alpha_m(v_u - v)}{B(1+v_u)(1-v)} + \phi_0(\alpha_f - \alpha_m) \right] \quad (3.5-5)$$

Donde:

- $c =$ Difusividad hidráulica del fluido,
- $\alpha_m =$ Coeficiente de expansión térmica volumétrica de la roca porosa, $1/^\circ F$;
- $\alpha_f =$ Coeficiente de expansión térmica del fluido en el poro, $1/^\circ F$;
- $\phi_0 =$ Porosidad de la roca de referencia.

El coeficiente de acoplamiento c_o' , es definido como:

$$c_o' = \frac{\kappa}{\phi_0} \quad (3.5-6)$$

Donde:

$c_o' =$ Coeficiente acoplamiento, $in^2/s - psi$;

$\kappa = \frac{k}{\mu}$ Permeabilidad entre viscosidad del fluido.

Charlez (1997) manifiesta que el acoplamiento entre la presión de poro y la temperatura será despreciable, para rocas que tienen una permeabilidad mayor a los $10\mu D$. Nosotros notamos que la permeabilidad de las lutitas varían de 10^{-12} hasta 10^{-6} Darcy (VanOort, 1994); por lo tanto los efectos térmicos juegan un papel importante en la variación de la presión de poro para las lutitas.

Los coeficientes típicos para diferentes rocas son mostrados en la siguiente tabla (Charlez, 1991; Wang y Papamichos, 1994).

Roca	Difusividad hidráulica c in^2/s	Difusividad térmica c_o in^2/s	Coeficiente de acoplamiento c_o' $in^2/s-psi$	Coeficiente de acoplamiento c' $psi/^\circ F$
Arena weber	3.21E+01	2.53E-03	6.33E-02	32.2
Marble Tennessee	2.02E-02	2.76E-03	3.51E-06	40.3
Lutita	5.28E-07	1.48E-03	7.53E-09	1.0

CAPITULO IV

DESARROLLO DEL MODELO

Los objetivos de esta tesis es plantear un modelo práctico para el análisis de estabilidad de pozos en lutitas que considere la parte mecánica, química y térmica. La incorporación de estos fenómenos; químico y térmico, involucran la variable temporal.

Los beneficios de la tesis en la industria petrolera son: a) Un modelo que nos permite obtener las ventanas operacionales de las densidades de lodos que considera la parte química y térmica en lugar de solo la parte mecánica, b) Nos permite ver las restricciones de estas ventanas operacionales con el tiempo, c) Contar con una metodología de calculo para la estabilidad de pozos, d) La determinación y evaluación de las correlaciones, mediciones de laboratorio de los parámetros de entrada requeridos para el modelo.

4.1 Presión de poro y temperatura de formación acoplada

Cuando nosotros perforamos un pozo, condiciones no isotérmicas son encontradas y regularmente comunes y de gran importancia en el análisis de estabilidad durante la perforación. Los cambios de presión en el medio poroso son debidos además, de la difusión hidráulica y de la ley de Darcy, al flujo de calor. En medios porosos que presentan muy baja permeabilidad como es el caso de las lutitas estos cambios son muy importantes, ya que la conducción es dominada por el proceso de transferencia de calor y la convección de calor en el medio poroso puede ser despreciable ya que la difusión térmica resulta ser mas rápida que la difusión hidráulica, es decir la velocidad de flujo en formaciones de baja permeabilidad es muy baja.

Bajo condiciones no drenadas, rocas de baja permeabilidad; la alteración de la temperatura de la formación causara un incremento en la presión de poro, y será más significativa debido a la diferencia de las expansiones térmica de la roca y del fluido.

Wang y Papamichos (1994) presentaron el problema acoplado del cambio de presión debido a la transferencia de calor por conducción y flujo de fluidos en el medio poroso. Ellos concluyeron que la presión de poro inducida por los cambios en temperatura de las rocas pueden ser muy significativos en medios de muy baja permeabilidad.

Durante la perforación el lodo enfría y calienta las formaciones provocando cambio en la temperatura en la formación cercana al pozo esto reducirá o incrementará la presión de poro y los esfuerzos tangenciales. El calentamiento de la formación traerá como consecuencia un incremento en la inestabilidad de pozo de la misma manera que un enfriamiento relativo de la formación produce un efecto benéfico en la estabilidad de pozo. Sin embargo un enfriamiento bastante

considerable puede traer como consecuencia una presión de fractura más baja en las formaciones provocando pérdidas de circulación y un descontrol de pozo.

El acoplamiento del efecto termo-poroelástico no tiene un impacto en la densidad del lodo crítica instantánea requerida para estabilidad, pero nos establece el límite de tiempo del deterioro de pozo, cuando la pared del pozo es considerada como un punto crítico.

Los procesos de acoplamiento mecánico, hidráulico y térmicos para condiciones drenada y no drenada fueron investigado por Detourné (1995). El concluyo que para tiempo tempranos, después de perforar, la presión de poro en la pared del pozo es la presión de pozo (P_w), la cual es la presión hidrostática generada por la columna de lodo y la presión en cualquier otra parte de la formación es la presión de poro inicial (P_0). La respuesta de la perforación corresponderá a la presión de pozo y no a la presión de poro inicial a tiempos pequeños. Para tiempos largos, después de perforar la presión de poro cerca del pozo corresponderá a la presión de pozo (P_w), la cual corresponde a una condición drenada de redistribución de esfuerzo. Para condiciones no drenadas, un enjarre impermeable puede ser formado en rocas porosas tal que la presión de penetración entre el lodo de perforación y la formación no es permitida (Malean, 1989). Para condiciones drenadas, un pobre enjarre, con una permeabilidad más grande que el de la formación es formado en la pared del pozo, por lo tanto el transporte de masa del fluido puede desarrollarse libremente bajo diferencia térmica, hidráulica y química.

Choi y Tan (1998) presentaron un modelo numérico termo-poroelástico, que nos permite ver los cambios con el tiempo de los esfuerzos y la presión de poro inducida por la difusión hidráulica y térmica. Los resultados del modelo muestran que diferencias de temperatura entre el fluido de perforación y la formación pueden inducir cambios significativos en la presión de poro y los esfuerzos efectivos en la pared del pozo. Ellos concluyen que es importante tomar en cuenta los efectos térmicos cuando se trata con problemas de inestabilidad de pozo.

4.2 Teoría de la termo-poroelásticidad

Biot (1941, 1955 y 1956) desarrollo las ecuaciones que gobiernan un sólido poroelástico saturado con fluido en un estado isotérmico cuasi-estático. Las teorías de Biot fueron extendidas por Rice-Cleary (1976) y sus formulaciones fueron encontradas más convenientes para resolver problemas más relevantes. Kurashige (1989) incorporo el transporte de calor dentro de la teoría de Rice y Cleary y estableció la teoría termo-poroelástica para materiales porosos llenos con fluidos.

El siguiente trabajo es citado por Rice y Cleary (1976), Cleary (1977), Kurashige (1989), y Wan y Papamichos (1994).

4.2.1 Leyes constitutivas

Las leyes constitutivas termo-elásticas son linealizadas como (Cleary, 1977; Kurashige, 1989),

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl} + B_{ij}p + \alpha_{ij}\Delta\theta \quad (4.2-1)$$

$$\Delta\phi = B_{kl}\sigma_{kl} + Dp + \alpha'\Delta\theta \quad (4.2-2)$$

Donde:

$$C_{ijkl} = \frac{1}{4G} \left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2\nu}{1+\nu} \delta_{ij}\delta_{kl} \right) \quad (4.2-3)$$

$$B_{ij} = \frac{3(\nu_u - \nu)}{2GB(1+\nu)(1+\nu_u)}, \alpha_{ij} = \frac{\alpha_m}{3} \delta_{ij}, \alpha' = \phi_0 \alpha_m \quad (4.2-4)$$

$$D = \frac{1}{B} \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{K_s'} \right) - \frac{\phi_0}{K_f} \quad (4.2-5)$$

$$K \equiv \frac{2G(1+\nu)}{(1-2\nu)} \quad (4.2-6)$$

Donde

$\Delta\phi$ = Cambio en el volumen poroso (porosidad);

ϕ_0 = Porosidad inicial;

G = Modulo de corte;

ν = Relación de Poisson;

ν_u = Relación de Poisson no drenada.

K = Modulo volumétrico del esqueleto del sólido;

K_s' = Modulo volumétrico de los constituyentes del sólido;

K_f = Modulo volumétrico del fluido en los poros;

C_{ijkl} = Constantes del material.

α = Coeficiente de expansión térmica lineal de la matriz del poro;

α' = Coeficiente de expansión térmica lineal del espacio de los poros;

α_f = Coeficiente de expansión térmica lineal del fluido en los poros;

α_m = Coeficiente de expansión térmica lineal del espacio de la matriz porosa;

$\Delta\theta$ = Cambio de temperatura;

B = Parámetro de Skempton.

Para un modelo incompresible (Sólido saturado con fluido), $B=1$ y $v_u = 1/2$. En general,

$$0 < B \leq 1, 0 < v_u \leq 1/2$$

Los cambios en la masa del fluido puede ser expresados como:

$$m = \Delta\phi\rho_0 + \phi_0\Delta\rho \quad (4.2-7)$$

La linealización de la curva de presión-densidad-temperatura del fluido en el poro (Smith et al., 1996) es expresada como:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{p}{K_f} - \alpha_f \Delta\theta \quad (4.2-8)$$

Donde α_f es el coeficiente de expansión térmica volumétrica del fluido en el poro.

4.2.2 Leyes de conservación

Ecuaciones de equilibrio

Si no hay fuerzas de cuerpo, las ecuaciones de equilibrio pueden ser escritas usando los esfuerzos totales como

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (4.2-9)$$

La conservación de la masa del fluido (Ecuación de continuidad) es expresada como

$$\frac{\partial m}{\partial t} + q_{j,j} = 0 \quad (4.2-10)$$

La conservación de energía es expresada como:

$$\rho C_p \frac{\partial \Delta\theta}{\partial t} = -h_{i,i} - (Hq_i)_{,i} \quad (4.2-11)$$

Donde ρ es la densidad de la masa total, C_p es el calor específico, y H es la entalpía específica del fluido en el poro. La entalpía específica puede ser escrita como (Kurashige, 1989)

$$H = C_f \Delta T \quad (4.2-12)$$

Donde C_f es el calor específico del fluido en el poro y ΔT es el cambio de temperatura.

Además, si nosotros asumimos que el intercambio de calor entre la matriz de la roca y el fluido en el poro es suficientemente rápido comparado con el calor global y el proceso de difusión del fluido. El equilibrio de calor local puede ser alcanzado, de manera que

$$\rho C_p \Delta \theta = \rho_0 \phi_0 C_f \Delta T \quad (4.2-13)$$

4.2.3 Leyes del transporte

Las relaciones constitutivas asociadas con la difusión de fluido y calor en los procesos de flujo pueden ser expresadas por la ley de Fourier y la ley de Darcy.

Flujo de fluidos-Ley de Darcy.

$$q_i = -\rho_0 \kappa_{ij} p_{,j} \quad (4.2-14)$$

Flujo de calor-Ley de Fick.

$$h_i = -\bar{\kappa}_{ij} \Delta \theta_{,j} \quad (4.2-15)$$

Donde q_i y h_i denota el flujo de masa del fluido y flujo de calor respectivamente. Si la matriz de la roca es isotrópica, la permeabilidad κ_{ij} y la conductividad térmica $\bar{\kappa}_{ij}$ pueden ser reducida a

$$\kappa_{ij} = \kappa \delta_{ij} \quad (4.2-16)$$

$$\bar{\kappa}_{ij} = \bar{\kappa} \delta_{ij} \quad (4.2-17)$$

Para simplificar la derivación un caso isotrópico es asumido para el sistema de interés.

4.2.4 Ecuaciones de Campo

Las ecuaciones constitutivas pueden ser obtenidas por substitución de C_{ijkl} , B_{ij} , α_{ij} , D y K dentro de la primera ecuación de la ley constitutiva termo-elástica linealizada.

$$\sigma_{ij} = 2G \left[\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right] + \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)} p \delta_{ij} + \frac{2G\alpha_m(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \Delta \theta \delta_{ij} \quad (4.2-18)$$

La deformación puede ser expresada por los desplazamientos de la forma:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.2-19)$$

Fijando $i = j$ para la ecuación constitutiva de arriba y entonces introduciendo la expresión de deformación, las ecuaciones de equilibrio son alteradas para originar la ecuación modificada de Navier (en términos de desplazamiento)

$$\nabla^2 u_i + \frac{1}{1-2\nu} u_{k,ki} - \frac{\alpha}{G} p_{,i} + \frac{2\alpha_m(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \Delta\theta_{,i} = 0 \quad (4.2-20)$$

Donde α es la constante de Biot .

Diferenciando la ecuación de arriba después de eliminar ε_{kk} además fijando $i = j$ para la ecuación constitutiva tenemos:

$$\left[\sigma_{ii} - \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu} \alpha p - \frac{4G\alpha_m(1+\nu)}{3(1-\nu)} \Delta\theta \right]_{,jj} = 0 \quad (4.2-21)$$

El cambio en la masa del fluido en el poro puede ser obtenido sustituyendo B_{ij} , D, y K dentro la segunda ecuación constitutiva termo elástica,

$$\begin{aligned} \Delta m &= m - m_0 \\ &= -\frac{3\rho_0(\nu_u - \nu)}{2GB(1+\nu)(1+\nu_u)} \left[\sigma_{kk} - \frac{3}{B} p \right] - \rho_0 \phi_0 (\alpha_f - \alpha_m) \Delta\theta \end{aligned} \quad (4.2-22)$$

Diferenciando Esta última ecuación dos veces con respecto a x_j y eliminando $\sigma_{ii,jj}$ usando la ecuación tenemos:

$$P_{,jj} = \frac{3GB^2(1+\nu_u)^2(1-\nu)}{9\rho_0(\nu_u - \nu)(1-\nu_u)} \left[\Delta m_{,jj} + \rho_0 \left(\frac{2\alpha_m(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu_u)(1-\nu)} + \phi_0 (\alpha_f - \alpha_m) \right) \Delta\theta_{,jj} \right] \quad (4.2-23)$$

Insertando la ecuación de conservación de masa dentro de la última ecuación tenemos:

$$\frac{\partial \Delta m}{\partial t} = c \left[\Delta m_{,jj} + \rho_0 \left(\frac{2\alpha_m(\nu_u - \nu)}{B(1+\nu_u)(1-\nu)} + \phi_0 (\alpha_f - \alpha_m) \right) \Delta\theta_{,jj} \right] \quad (4.2-24)$$

Donde la difusividad masica del fluido c es definida como:

$$c = \frac{2\kappa GB^2(1+\nu_u)^2(1-\nu)}{9(\nu_u - \nu)(1-\nu_u)} \quad (4.2-25)$$

La ley de Fourier y la ley de la conservación de la energía generan la siguiente ecuación de difusión térmica la cual es acoplada con presión de poro

$$\frac{\partial \Delta \theta}{\partial t} = c_0 \Delta \theta_{,jj} + c_0' (\Delta \theta p_{,j})_{,j} \quad (4.2-26)$$

Donde la difusividad térmica c_0 y el coeficiente de transporte de calor c_0' son definidas como:

$$c_0 = \frac{\bar{\kappa}}{\rho^T C^T} \quad (4.2-27)$$

$$c_0' = \frac{\kappa}{\phi_o} \quad (4.2-28)$$

Para un desplazamiento irrotacional tenemos, que las ecuaciones constitutivas y la ecuación tipo Navier generan la siguiente expresión de la presión de poro acoplada

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c p_{,jj} + c' \frac{\partial \Delta \theta}{\partial t} \quad (4.2-29)$$

Debido a esto después de cambiar la variable de temperatura θ por T , el problema acoplado para un sistema radial puede ser expresado como:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c_0 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + c_0' \left(\frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial p}{\partial r} + T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right) \quad (4.2-30)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + c' \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.2-31)$$

Estas mismas ecuaciones pueden ser expresadas en variables adimensionales. Definiendo las siguientes variables adimensionales

$$T_d = \frac{T}{T_0}, P_d = \frac{p}{p_0}, r_d = \frac{r}{r_0}, t_d = \frac{ct}{r_0^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = A_0 \left(\frac{\partial^2 T_d}{\partial r_d^2} + \frac{1}{r_d} \frac{\partial T_d}{\partial r_d} \right) + A_0' \left(\frac{\partial T_d}{\partial r_d} \frac{\partial p_d}{\partial r_d} + T_d \left(\frac{\partial^2 p_d}{\partial r_d^2} + \frac{1}{r_d} \frac{\partial p_d}{\partial r_d} \right) \right) \quad (4.2-32)$$

$$\frac{\partial p_d}{\partial t_d} = \left(\frac{\partial^2 p_d}{\partial r_d^2} + \frac{1}{r_d} \frac{\partial p_d}{\partial r_d} \right) + A' \frac{\partial T_d}{\partial t_d} \quad (4.2-33)$$

Donde

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{c_0}{c} \\
 A_0' &= \frac{c_0'}{c} p_0 = \frac{9 p_0 (v_u - v)(1 - v_u)}{2 G B^2 \phi_0 (1 + v_u)^2 (1 - v)} \\
 A' &= \frac{T_0}{p_0} c' = \frac{G T_0}{p_0} \left[\frac{2 \alpha_m (v_u - v)}{B(1 + v_u)(1 - v_u)} + \phi_0 (\alpha_f - \alpha_m) \right] \frac{2 B^2 (1 + v_u)^2 (1 - v)}{9 (v_u - v)(1 - v_u)} \quad (4.2-34)
 \end{aligned}$$

4.3 Temperatura de la Roca.

Durante las operaciones de perforación, la temperatura del espacio anular y la tubería de perforación varían con la profundidad y el tiempo de circulación del lodo. Estos cambios de temperatura modifican la temperatura de la formación original y como consecuencia modificara los esfuerzos en la formación, y la presión de poro. Existen en la literatura varios modelos analíticos y numéricos para estimar la temperatura del fluido de circulación. Los primeros fueron el modelo de Edwarson y Tragesser aunque ellos no son disponibles como una herramienta de cálculo generalizada debido a que ellos requieren un conocimiento detallado de la historia de la perforación.

Dos aproximaciones, numérica y analítica han aparecido para estimar la temperatura del fluido de circulación. En la aproximación numérica las ecuaciones de gobierno son resueltas por diferencias finitas para problemas de transferencia de calor en estado no permanente. Raymon propone el primer modelo numérico para calcular la temperatura del fluido de circulación durante estado permanente y no permanente. Subsecuentemente otras mejoras han sido hechas por otros autores.

La solución analítica para estimar la temperatura del fluido de circulación fue obtenida para sistemas geométricos de muy baja complejidad, esto es en ausencias de sartas de TR múltiples (Holmes y Smift, 1970). Recientemente modelos más complejos en estado no permanente han sido presentados.

La importancia de estimar la temperatura de circulación del lodo en el espacio anular es que representa una condición de frontera interna para calcular la temperatura en la formación.

4.3.1 Cálculo de la temperatura del fluido de perforación en estado permanente.

Holmes y Smift (1970) nos presenta un modelo que nos permite calcular la temperatura del fluido de perforación en el espacio anular y en la tubería de perforación en una condición de estado permanente. Su modelo esta basado en las siguientes suposiciones; que la transferencia de calor entre el fluido en el

espacio anular y formación se aproxima a una transferencia de calor lineal en estado permanente, el calor generado por la barrena es despreciable y que existe un perfil geotérmico lineal.

$$A = \frac{C_{fl} W_{fl}}{2\pi r_t U_t}$$

$$B = \frac{r_w U_a}{r_t U_t}$$

$$C_1 = \frac{B}{2A} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{B}} \right)$$

$$C_2 = \frac{B}{2A} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4}{B}} \right)$$

$$C_3 = 1 + \frac{B}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{B}} \right)$$

$$C_4 = 1 + \frac{B}{2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4}{B}} \right)$$

$$K_1 = T_i - K_2 - T_{es} + G_g A$$

$$K_2 = \frac{G_g A - (T_i - T_{es} + G_g A) e^{c_1 H} (1 - C_3)}{e^{c_2 H} (1 - C_4) - e^{c_1 H} (1 - C_3)}$$

$$T_a = K_1 C_3 e^{c_1 Z} + K_2 C_4 e^{c_2 Z} + G_g Z + T_{es} \quad (4.3-1)$$

Donde:

C_{fl} = Capacidad de calor del fluido de perforación, Btu/lbm-°F

H = Profundidad total del pozo, ft

G_g = Gradiente geotérmico, °F/ft

r_t = Radio de la tubería, ft

r_w = Radio del pozo, ft

T_a = Temperatura del lodo en el anular, °F

T_{es} = Temperatura en la superficie de la tierra, °F

T_i = Temperatura del lodo de entrada, °F

U_t = Coeficiente de transferencia de calor global a través de la tubería de perforación, btu-ft²-°F-hr

U_a = Coeficiente de transferencia de calor global a través del espacio anular, btu-ft²-°F-hr

W_{fl} = Gasto masico, lbm/hr

Z = Profundidad del pozo especifica, ft

$A, B, C_1, C_2, C_3, C_4, K_1, K_2$ = Constantes adimensionales.

4.3.2 Cálculo de la temperatura del fluido de perforación en estado transitorio.

Kabir y Hasan (1992) presentaron un modelo analítico que permite calcular la temperatura del fluido de circulación en el espacio anular y la tubería de perforación con la profundidad y tiempo de circulación

Ellos asumieron transferencia de calor en estado permanente en el pozo y transferencia de calor transitoria en la formación. El modelo es flexible para diferentes modelos de T_D desarrollados por diferentes autores (Temperatura de la formación).

Kabir (1994) presentó un modelo para calcular la temperatura adimensional T_D , la expresión algebraica en términos de tiempo adimensional es

$$T_D = \left[0.4063 + 0.5 \ln(t_D) \right] \left[1 + \frac{0.6}{t_D} \right] \quad \text{Si } t_D > 1.5 \quad (4.3-2)$$

$$T_D = 1.1281 \sqrt{t_D} (1 - 0.3 \sqrt{t_D}) \quad \text{Si } 10^{-10} \leq t_D \leq 1.5 \quad (4.3-3)$$

Donde:

$$t_D = \frac{ct}{r_w^2} \quad (4.3-4)$$

La expresiones de arriba podemos ver que T_D es discontinua en $t_D = 1.5$. Resulta conveniente para algunas otras aplicaciones tener una función continua para T_D y esta puede ser escrita como:

$$T_D = \ln \left(e^{-0.2t_D} + (1.5 - 0.3719e^{-t_D}) \sqrt{t_D} \right) \quad (4.3-5)$$

Para tiempos grandes, las ecuaciones se reducen a la siguiente expresión:

$$T_D = 0.4063 + \frac{1}{2} t_D \quad (4.3-6)$$

La ecuación de arriba fue primeramente presentada por Ramey. Por lo tanto nosotros podemos concluir que el modelo de Kabir y Hasan es equivalente a los modelos presentados por Ramey y por Edwarson a tiempos grandes, aunque a tiempos pequeños diferencias significativas pueden ocurrir. Además pueden existir diferencias significativas en pozos con diámetros grandes debido a que Ramey aproxima el pozo como una fuente lineal.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{C_{fl}W_{fl}}{2\pi} \left[\frac{K_e + r_w U_a T_D}{r_w U_a K_e} \right] & B &= \frac{C_{fl}W_{fl}}{2\pi r_t U_t} \\
 C_1 &= \frac{1}{2A} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4A}{B}} \right) & C_1 &= \frac{1}{2A} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{4A}{B}} \right) \\
 K_1 &= - \frac{(T_i + BG_g - T_{es})C_2 e^{C_2 H} + G_g}{C_1 e^{C_1 H} - C_2 e^{C_2 H}} & K_2 &= - \frac{(T_i + BG_g - T_{es})C_1 e^{C_1 H} + G_g}{C_1 e^{C_1 H} - C_2 e^{C_2 H}}
 \end{aligned}$$

$$T_a = (1 + C_1 B)K_1 e^{C_1 Z} + (1 + C_2 B)K_2 e^{C_2 Z} + G_g Z + T_{es} \quad (4.3-7)$$

Donde c es la difusividad hidráulica con unidades de in^2/s . Los otros símbolos tienen el mismo significado que el modelo en estado permanente.

4.3.3 Modelo Mecánico para el cálculo de la temperatura del fluido de circulación .

Hasan y Kabir (1996) presentan un modelo mecánico para el cálculo de la temperatura del fluido de circulación, ellos incorporan la variación de la temperatura del fluido en el tanque, removiendo la restricción de temperatura de entrada constante y consideran flujo de calor variable en la interfase pozo-formación, removiendo la condición de frontera de transferencia de calor constante.

$$T_D = [0.4063 + 0.5 \ln(t_D)] \left[1 + \frac{0.6}{t_D} \right]$$

$$T_D = 1.1281 \sqrt{t_D} (1 - 0.3 \sqrt{t_D})$$

$$t_D = \frac{ct}{r_w^2}$$

$$A = \frac{C_{fl}W_{fl}}{2\pi} \left[\frac{K_e + r_w U_a T_D}{r_w U_a K_e} \right]$$

$$B = \frac{C_{fl}W_{fl}}{2\pi r_t U_t}$$

$$W_1 = \frac{Q_{n-1}}{2\pi K_e} T_D (t_{D,n} - t_{D,n-1})$$

$$W_2 = \frac{1}{2\pi K_e} \sum_{i=1}^{n-1} (Q_i - Q_{i-1}) T_D (t_{D,n} - t_{D,i-1})$$

$$Q = -2\pi \left[\frac{r_w U K_e}{K_e + r_w U T_D} \right] [T_{ws} - T_{ei}]$$

$$T_{ws} = T_{ei} - C_0 F(t_D)$$

$$C_0 = T_{ei} - T_{ws0}$$

$$F(t_D) = \left(\frac{\left(\frac{f_1(t_D)}{f_2(t_D)} \right)^{\frac{5.555}{a C_5}}}{f_3(t_D) \frac{3.333}{C_5}} \right)^{-C_4}$$

$$f_1(t_D) = a + \sqrt{t_D} - 1.667$$

$$f_2(t_D) = a - \sqrt{t_D} - 1.667$$

$$f_3(t_D) = a + C_5 \sqrt{t_D} - 0.3 C_5 t_D$$

$$a = \left(2.777 + \left(\frac{3.33}{C_5} \right) \right)^{0.5}$$

$$C_5 = 1.1282 \left(\frac{r_w U}{K_e} \right)$$

$$C_5 = \left(\frac{2\pi}{MC_p} \right) (r_w U) \left(\frac{r^2}{a} \right)$$

$$C_3 = G_g + \frac{w F_{n-1}}{2\pi K_e} - \frac{w}{2\pi K_e} \sum_{i=1}^{n-1} (F_i - F_{i-1}) T_D (t_{D,n} - t_{D,i-1})$$

$$C_1 = -\frac{1}{2A} + \frac{1}{2A} \sqrt{1 + 4(r_w U_a T_D + K_e) \frac{r_l U_l}{r_w U_a K_e}}$$

$$C_2 = -\frac{1}{2A} - \frac{1}{2A} \sqrt{1 + 4(r_c U_a T_D + K_e) \frac{r_t U_t}{r_w U_a K_e}}$$

$$K_1 = -\frac{(T_{ai} - T_{es} + |W_2 - W_1|_{z=0}) C_2 e^{C_2 H} + |C_3|_{z=H} (1 - C_2 B)}{C_1 e^{C_1 H} (1 - C_2 B) - C_2 e^{C_2 H} (1 - C_1 B)}$$

$$K_2 = \frac{(T_{ai} - T_{es} + |W_2 - W_1|_{z=0}) C_1 e^{C_1 H} + |C_3|_{z=H} (1 - C_1 B)}{C_1 e^{C_1 H} (1 - C_2 B) - C_2 e^{C_2 H} (1 - C_1 B)}$$

$$T_a = (1 + BC_1) K_1 e^{C_1 Z} + (1 + BC_2) K_2 e^{C_2 Z} + AZ + T_{es} + W_1 - W_2 \quad (4.3-8)$$

Donde:

Q = Densidad de flujo de calor por unidad de longitud de pozo, $\frac{Btu}{hr - ft}$;

F = Cambio de flujo de calor por unidad de profundidad de pozo, $\frac{Btu}{hr - ft^2}$.

$W_1, W_2, C_3, C_4, C_5, C_0, f_1, f_2, f_3$ son constantes y funciones definidas en las ecuaciones de arriba.

4.3.4 Punto de inversión de la temperatura del fluido y punto neutro.

Durante la circulación del fluido de perforación existirá un punto máximo de temperatura en alguna parte en el espacio anular del fondo hacia arriba. La localización de ese punto máximo puede ser encontrado de diferenciar las ecuaciones con respecto a Z e igualando a cero. $Z_{T_{\max}}$ quedara implícita por lo que será necesario un procedimiento de prueba y error.

La mayoría de los modelos existentes para el calculo de la temperatura de circulación han observado que la máxima temperatura no se encuentra en el fondo del pozo, si no que se encuentra entre $1/4$ a $1/3$ de profundidad total del pozo medida a partir del fondo y luego sufre una inversión. La explicación física de este fenómeno es la siguiente durante la circulación directa la temperatura del fluido en la tubería de perforación continuara incrementando debido al calor recibido por el fluido en el espacio anular, alcanzando su máximo en el fondo. En el fondo la temperatura del fluido en la tubería de perforación y en el espacio anular será la misma, sin embargo el fluido ascenderá a través del espacio anular con una temperatura inferior que la temperatura de la formación, por lo que el fluido en el anular ganara calor de la formación. Inicialmente esta ganancia de calor es mayor que las perdidas de calor del fluido hacia la tubería, como resultado habrá un incremento en la temperatura y entalpía del fluido a través del anular. Sin embargo esta ganancia de calor se ve disminuida a medida que el fluido en el anular encuentra formaciones más frías con el decremento en la profundidad y a medida que las pérdidas de calor se incrementan al encontrar un fluido en la tubería de perforación mas frío. Por lo tanto la temperatura máxima ocurrirá en el punto donde las perdidas de calor y la ganancia de calor sean iguales.

Existe además un punto neutro donde no existe transferencia de calor y es el punto donde la temperatura del fluido en el anular es igual a la temperatura de la formación. Ese punto neutro puede ser encontrando haciendo $T_a = T_o$ y T_o puede ser determinado de la temperatura de la formación estática. La profundidad a la que ocurre este punto neutro es de gran interés ya que nos permite ver que parte del pozo esta sujeta a calentamiento y que parte se encuentra sujeta a enfriamiento. Mientras que el calentamiento trae como consecuencia que el pozo sea más susceptible al colapso. Enfriamientos excesivos provocan que la presión de fractura disminuya en las formaciones lo que acarrea problemas de perdidas de circulación y descontrol de pozos.

4.4 Presión de poro y temperatura de la roca.

El problema acoplado de presión de poro y temperatura ha sido presentado por Wang y papamichos (1994) en las ecuaciones 4.2-26 y 4.2-27. Se puede ver que su solución analítica es bastante complicada, sin embargo métodos numéricos han sido utilizados para resolver el problema fácilmente.

En el caso de lutitas el coeficiente c_o' es significativamente menor que c_o por lo que nosotros podemos desacoplar la dependencia de presión en la ecuación 4.2-26, obteniendo:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c_o \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (4.4-1)$$

A esta ecuación se le conoce como la ecuación de difusión térmica la cual ha sido resuelta para condiciones de fronteras constantes. Sin embargo nosotros tenemos una condición de frontera variable debido a que la temperatura del fluido de circulación en el anular varía con el tiempo de circulación.

Para la solución de esta ecuación es necesario el conocimiento de las condiciones de frontera e inicial asociada a la física del problema

$$T(r,0) = G_g * Z + T_s \quad (4.4-2)$$

$$T(\infty, t) = G_g * Z + T_s \quad (4.4-3)$$

$$T(r_w, t) = \frac{h_f}{K_e} (T(t) - T_a(t)) \quad (4.4-4)$$

Si nosotros consideramos que la temperatura del lodo en el anular es equivalente a la temperatura de la roca en la pared del pozo y haciendo un cambio de variable $T_0 = G_g * Z + T_s$ nosotros tenemos que:

$$T(r,0) = T_0 \quad (4.4-5)$$

$$T(\infty, t) = T_0 \quad (4.4-6)$$

$$T(r_w, t) = T_a(t) \quad (4.4-7)$$

Ahora nosotros vamos a resolver el problema considerando condición de frontera constante para posteriormente extender el problema a una condición de frontera variable usando alguna técnica de superposición.

Nosotros podemos simplificar el problema si restamos a la ecuación diferencial y a las condiciones de frontera e iniciales T_0 de manera que se obtiene:

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial t} = c_0 \left(\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta T}{\partial r} \right) \quad (4.4-8)$$

$$\Delta T(r, 0) = 0 \quad (4.4-9)$$

$$\Delta T(\infty, t) = 0 \quad (4.4-10)$$

$$\Delta T(r_w, t) = T_a(t) - T_0 \quad (4.4-11)$$

Nosotros usaremos las transformadas de Laplace para resolver la ecuación diferencial de manera que:

$$\mathfrak{L} \left[\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial r^2} \right] + \mathfrak{L} \left[\frac{1}{r C_0} \frac{\partial \Delta T}{\partial r} \right] = \mathfrak{L} \left[\frac{1}{C_0} \frac{\partial \Delta T}{\partial t} \right] \quad (4.4-12)$$

Donde:

$$\mathfrak{L} \left[\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial r^2} \right] = \frac{\partial^2 \overline{\Delta T}(r, S)}{\partial r^2}$$

$$\mathfrak{L} \left[\frac{\partial \Delta T}{\partial r} \right] = \frac{\partial \overline{\Delta T}(r, S)}{\partial r}$$

$$\mathfrak{L} \left[\frac{\partial \Delta T}{\partial t} \right] = S \overline{\Delta T}(r, S) - \Delta T(r, 0) = S \overline{\Delta T}(r, S) \quad (4.4-13)$$

Por lo que la ecuación diferencial en el dominio de Laplace queda:

$$\frac{\partial^2 \overline{\Delta T}(r, S)}{\partial r^2} + \frac{1}{C_0 r} \frac{\partial \overline{\Delta T}(r, S)}{\partial r} - \frac{S}{C_0} \overline{\Delta T}(r, S) = 0 \quad (4.4-14)$$

Reareglando la ecuación anterior tenemos:

$$\frac{r^2 \partial^2 \overline{\Delta T}(r, S)}{\partial r^2} + \frac{r}{C_0} \frac{\partial \overline{\Delta T}(r, S)}{\partial r} - \frac{r^2 S}{C_0} \overline{\Delta T}(r, S) = 0 \quad (4.4-15)$$

Si nosotros hacemos el siguiente cambio de variable y despejando obtenemos:

$$W^2 = r^2 \frac{S}{C_0}, \quad W = r \sqrt{\frac{S}{C_0}}, \quad r = \sqrt{\frac{C_0}{S}} W, \quad \partial r = \sqrt{\frac{C_0}{S}} \partial W, \quad \partial^2 r = \sqrt{\frac{C_0}{S}} \partial^2 W \quad (4.4-16)$$

Por lo que la ecuación diferencial resultante es:

$$\frac{W^2 \partial^2 \overline{\Delta T}(r, S)}{\partial W^2} + W \frac{\partial \overline{\Delta T}(r, S)}{\partial W} - W^2 \overline{\Delta T}(r, S) = 0 \quad (4.4-17)$$

Esta ecuación diferencial e la ecuación de Bessel modificada de orden cero, cuya solución tipo es:

$$\overline{\Delta T}(r, S) = AI_0(W) + BK_0(W) \quad (4.4-18)$$

Por lo que tenemos:

$$\overline{\Delta T}(r, S) = AI_0\left(\sqrt{\frac{S}{C_0}} r\right) + BK_0\left(\sqrt{\frac{S}{C_0}} r\right) \quad (4.4-19)$$

Nosotros ahora debemos evaluar las constantes A y B para ello requerimos transformar las condiciones de frontera al dominio de Laplace por lo que obtenemos:

$$\overline{\Delta T}(\infty, S) = 0 \quad (4.4-20)$$

$$\overline{\Delta T}(r_w, S) = \frac{T_a - T_o}{S} \quad (4.4-21)$$

Haciendo $r = \infty$ nosotros tenemos:

$$0 = AI_0\left(\sqrt{\frac{S}{C_0}} \infty\right) + BK_0\left(\sqrt{\frac{S}{C_0}} \infty\right)$$

$$\text{Como } I_0 \rightarrow \infty \text{ entonces } A = 0 \quad (4.4-22)$$

Haciendo $r = r_w$ nosotros tenemos:

$$\frac{T_a - T_o}{S} = BK_o \left(\sqrt{\frac{S}{C_0}} r_w \right) \quad B = \frac{T_a - T_0}{S} \cdot \frac{1}{K_o \left(\sqrt{\frac{S}{C_0}} r_w \right)} \quad (4.4-23)$$

Por lo que la solución de la ecuación diferencial en el dominio de Laplace es:

$$\bar{\Delta T}(r, S) = \frac{T_a - T_0}{S} \frac{K_o \left(\sqrt{\frac{S}{C_0}} r \right)}{K_o \left(\sqrt{\frac{S}{C_0}} r_w \right)} \quad (4.4-24)$$

La solución de la ecuación diferencial en el dominio del tiempo puede ser obtenida utilizando una técnica numérica de inversión (algoritmo de Stehfest, 1968).

$$f(t) \approx \frac{\ln 2}{t} \sum_{n=1}^N C_n F \left(n \frac{\ln 2}{t} \right) \quad (4.4-25)$$

Donde:

$$C_n = (-1)^{N/2+i} \sum_{K=\left[\frac{i+1}{2}\right]}^{\text{Min}(i, N/2)} \frac{K^{N/2} (2K)!}{(N/2 - K)! K! (K-1)! (i-K)! (2K-i)!} \quad (4.4-26)$$

Donde los valores típicos de N son 10 a 20.

Sin embargo Carslaw y Jaeger (1959) presento la inversión de una ecuación similar a la ecuación. Por lo que nosotros podemos expresar la solución de la ecuación 4.4-24 en el dominio del tiempo como:

$$\Delta T(r, t) = (T_a - T_0) \left[1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-C_o \zeta^2 t} \frac{J_0(\zeta r) Y_0(\zeta r_w) - J_0(\zeta r_w) Y_0(\zeta r)}{\zeta} d\zeta \right] \quad (4.4-27)$$

Donde

$$\Delta T(r, t) = T(r, t) - T_0 \quad (4.4-28)$$

Por lo tanto la temperatura de la formación en función de la distancia radial y del tiempo puede expresada como:

$$T(r,t) = T_0 + (T_a - T_0) \left[1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-C_o \zeta^2 t} \frac{J_0(\zeta r) Y_0(\zeta r_w) - J_0(\zeta r_w) Y_0(\zeta r)}{\zeta} d\zeta \right] \quad (4.4-29)$$

Nosotros ahora requerimos utilizar una técnica aproximada de superposición para calcular la temperatura de formación cuando la temperatura en la pared del pozo es variable. Por lo que la ecuación de arriba puede ser expresada por:

$$T(r,t) = T_0 + \sum_{i=1}^n (T_{ai}(t) - T_{i-1}(t)) \left[1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-C_o \zeta^2 (t_n - t_{i-1})} \frac{J_0(\zeta r) Y_0(\zeta r_w) - J_0(\zeta r_w) Y_0(\zeta r)}{\zeta} d\zeta \right] \quad (4.4-30)$$

Estimar los cambios de presión de poro en función de la difusión y los cambios de temperatura es de importancia en la estabilidad de pozos la siguiente ecuación nos permite estimarla:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c \left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right) + c' \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.4-31)$$

Para resolver la ecuación anterior es necesario establecer las condiciones de frontera y la condición inicial asociada al problema por lo que

$$P(r,0) = P_0 \quad (4.4-32)$$

$$P(\infty, t) = P_0 \quad (4.4-33)$$

$$P(r_w, t) = P_w - P_\pi \quad (4.4-34)$$

De la misma manera que el caso anterior nosotros podemos restar a la ecuación diferencial y a las condiciones de frontera P_0 por lo que nosotros tenemos

$$\Delta P(r,0) = 0 \quad (4.4-35)$$

$$\Delta P(\infty, t) = 0 \quad (4.4-36)$$

$$\Delta P(r_w, t) = P_w - P_\pi - P_0 \quad (4.4-37)$$

Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación 4.4-31 nosotros obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \overline{\Delta P}(r, S)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{\Delta P}(r, S)}{\partial r} - \frac{S}{C} \overline{\Delta P}(r, S) + S \frac{C'}{C} \overline{\Delta T}(r, S) = 0 \quad (4.4-38)$$

Esta ecuación puede ser resuelta aplicado la técnica de solución homogénea, para posteriormente aplicar la solución particular por lo que

$$\frac{\partial^2 \overline{\Delta P}(r, S)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{\Delta P}(r, S)}{\partial r} - \frac{S}{C} \overline{\Delta P}(r, S) = -S \frac{C'}{C} \overline{\Delta T}(r, S) \quad (4.4-39)$$

$\overline{\Delta P}(r, S) = \text{Solución Homogénea} + \text{Solución Particular}$

$$\frac{\partial^2 \overline{\Delta P}(r, S)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \overline{\Delta P}(r, S)}{\partial r} - \frac{S}{C} \overline{\Delta P}(r, S) = 0 \quad (4.4-40)$$

Reareglando la ecuación 4.4-41 y realizando el siguiente cambio de variable nosotros tenemos:

$$W^2 = \frac{r^2}{C} S, \quad W = \sqrt{\frac{S}{C}} r, \quad r^2 = \frac{C}{S} W^2, \quad r = \sqrt{\frac{C}{S}} W, \quad \partial r = \sqrt{\frac{C}{S}} \partial W \quad (4.4-41)$$

$$\frac{W^2 \partial^2 \overline{\Delta P}(r, S)}{\partial W^2} + W \frac{\partial \overline{\Delta P}(r, S)}{\partial W} - W^2 \overline{\Delta P}(r, S) = 0 \quad (4.4-42)$$

Por lo que la solución a la ecuación es:

$$\overline{\Delta P}(r, S) = AI_0 \left(\sqrt{\frac{S}{C}} r \right) + BK_0 \left(\sqrt{\frac{S}{C}} r \right) \quad (4.4-43)$$

Para evaluar las constantes A, B nosotros requerimos transformar las condiciones de frontera al dominio de Laplace

$$\overline{\Delta P}(\infty, S) = 0 \quad (4.4-44)$$

$$\overline{\Delta P}(r_w, S) = \frac{P_w - P_\pi - P_o}{S} \quad (4.4-45)$$

Para cuando $r \rightarrow \infty$ nosotros tenemos que:

$$\overline{\Delta P}(\infty, S) = AI_0 \left(\sqrt{\frac{S}{C}} \infty \right) + BK_0 \left(\sqrt{\frac{S}{C}} \infty \right) \quad (4.4-46)$$

Como $I_0 \rightarrow \infty$ entonces $A = 0$ (4.4-47)

Para cuando $r \rightarrow r_w$ nosotros tenemos que:

$$\overline{\Delta P}(r, S) = BK_0 \left(\sqrt{\frac{S}{C}} r \right) \quad (4.4-48)$$

Nosotros ahora necesitamos obtener la solución particular. Wang y Papamichos (1994) proponen una solución particular la cual es una función lineal de temperatura

$$\overline{\Delta P}(r, S)_p = \frac{C' \overline{\Delta T}(r, S)}{1 - \frac{C}{C_0}} = \frac{C'}{1 - \frac{C}{C_0}} \cdot \frac{T_a - T_0}{S} \cdot \frac{K_0 \left(\sqrt{\frac{S}{C_0}} r \right)}{K_0 \left(\sqrt{\frac{S}{C_0}} r_w \right)} \quad (4.4-49)$$

Por lo que la solución general de la ecuación 4.4-39 puede ser obtenida combinando la solución homogénea y la solución particular de la ecuación 4.4-49.

$$\overline{\Delta P}(r, S) = BK_0 \left(\sqrt{\frac{S}{C}} r \right) + \frac{C'}{1 - \frac{C}{C_0}} \cdot \frac{T_a - T_0}{S} \cdot \frac{K_0 \left(\sqrt{\frac{S}{C_0}} r \right)}{K_0 \left(\sqrt{\frac{S}{C_0}} r_w \right)} \quad (4.4-50)$$

Para evaluar B se requiere evaluar $r \rightarrow r_w$

$$\overline{\Delta P}(r_w, S) = BK_0 \left(\sqrt{\frac{S}{C}} r_w \right) + \frac{C'}{1 - \frac{C}{C_0}} \cdot \frac{T_a - T_0}{S} \cdot \frac{K_0 \left(\sqrt{\frac{S}{C_0}} r_w \right)}{K_0 \left(\sqrt{\frac{S}{C_0}} r_w \right)} = \frac{P_w - P_\pi - P_o}{S} \quad (4.4-51)$$

$$B = \frac{P_w - P_\pi - P_o}{SK_0 \left(\sqrt{\frac{S}{C}} \right)} \left(1 - \frac{C'}{1 - \frac{C}{C_0}} \right) \quad (4.4-52)$$

Por lo tanto la solución de la ecuación general puede ser expresada por:

$$\bar{\Delta P}(r, S) = \frac{P_w - P_\pi - P_0}{S} \frac{K_0\left(\sqrt{\frac{S}{C}}r\right)}{K_0\left(\sqrt{\frac{S}{C}}r_w\right)} + \frac{C'}{1 - \frac{C}{C_0}} \cdot \frac{T_a - T_0}{S} \left[\frac{K_0\left(\sqrt{\frac{S}{C}}r\right)}{K_0\left(\sqrt{\frac{S}{C_0}}r\right)} - \frac{K_0\left(\sqrt{\frac{S}{C_0}}r_w\right)}{K_0\left(\sqrt{\frac{S}{C_0}}r_w\right)} \right] \quad (4.4-53)$$

Nosotros podemos utilizar también una técnica numérica para transformar la ecuación al dominio del tiempo o bien utilizar la solución analítica similar propuesta por Carlaw y Jaeger (1959)

$$\Delta P(r, t) = \left[(P_w - P_\pi - P_0) - \frac{C'(T_a - T_0)}{1 - \frac{C}{C_0}} \right] \left[1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-C\zeta^2 t} \frac{J_0(\zeta r)Y_0(\zeta r_w) - J_0(\zeta r_w)Y_0(\zeta r)}{J_0^2(\zeta r_w) + Y_0^2(\zeta r_w)} \frac{d\zeta}{\zeta} \right] +$$

$$\left[\frac{C'(T_a - T_0)}{1 - \frac{C}{C_0}} \right] \left[1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-C_0\zeta^2 t} \frac{J_0(\zeta r)Y_0(\zeta r_w) - J_0(\zeta r_w)Y_0(\zeta r)}{J_0^2(\zeta r_w) + Y_0^2(\zeta r_w)} \frac{d\zeta}{\zeta} \right] \quad (4.4-54)$$

o bien puede ser expresado como:

$$\Delta P(r, t) = \left[(P_w - P_\pi - P_0) - \frac{C'(T_{ai}(t) - T_0)}{1 - \frac{C}{C_0}} \right] \left[1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-C\zeta^2 t} \frac{J_0(\zeta r)Y_0(\zeta r_w) - J_0(\zeta r_w)Y_0(\zeta r)}{J_0^2(\zeta r_w) + Y_0^2(\zeta r_w)} \frac{d\zeta}{\zeta} \right] +$$

$$\left[\frac{C'(T_{ai}(t) - T_0)}{1 - \frac{C}{C_0}} \right] \left[1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-C_0\zeta^2 t} \frac{J_0(\zeta r)Y_0(\zeta r_w) - J_0(\zeta r_w)Y_0(\zeta r)}{J_0^2(\zeta r_w) + Y_0^2(\zeta r_w)} \frac{d\zeta}{\zeta} \right] \quad (4.4-55)$$

$$\text{Donde:} \quad \Delta P(r, t) = P(r, t) - P_0 \quad (4.4-56)$$

$$P(r,t) = P_o + \left((P_w - P_\pi - P_o) - \frac{C'(T_{ai}(t) - T_0)}{1 - \frac{C}{C_0}} \right) \left[1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-C\zeta^2 t} \frac{J_0(\zeta r) Y_0(\zeta r_w) - J_0(\zeta r_w) Y_0(\zeta r)}{J_0^2(\zeta r_w) + Y_0^2(\zeta r_w)} \frac{d\zeta}{\zeta} \right] + \left(\frac{C'(T_a(t) - T_0)}{1 - \frac{C}{C_0}} \right) \left[1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-C_0 \zeta^2 t} \frac{J_0(\zeta r) Y_0(\zeta r_w) - J_0(\zeta r_w) Y_0(\zeta r)}{J_0^2(\zeta r_w) + Y_0^2(\zeta r_w)} \frac{d\zeta}{\zeta} \right] \quad (4.4-57)$$

Esta ecuación nos permite estimar la presión de formación en función de la difusión hidráulica y del cambio de temperatura con la distancia radial y el tiempo. Esta ecuación puede ser utilizada para calcular las contribuciones individuales por difusión hidráulica y temperatura de la siguiente manera:

Haciendo $C' = 0$ nosotros tenemos que:

$$\Delta P(r,t) = (P_w - P_\pi - P_o) \left[1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-C\zeta^2 t} \frac{J_0(\zeta r) Y_0(\zeta r_w) - J_0(\zeta r_w) Y_0(\zeta r)}{J_0^2(\zeta r_w) + Y_0^2(\zeta r_w)} \frac{d\zeta}{\zeta} \right] \quad (4.4-58)$$

o bien puede ser expresada como:

$$P(r,t) = P_o + (P_w - P_\pi - P_o) \left[1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-C\zeta^2 t} \frac{J_0(\zeta r) Y_0(\zeta r_w) - J_0(\zeta r_w) Y_0(\zeta r)}{J_0^2(\zeta r_w) + Y_0^2(\zeta r_w)} \frac{d\zeta}{\zeta} \right] \quad (4.4-59)$$

4.5 Estimación de la presión de poro inicial de la formación

Aunque existen muchos métodos para estimar la presión de poro original de la formación, se presenta en este trabajo una nueva metodología que nos permite estimar la presión de poro original de la formación partiendo del concepto de esfuerzo matricial equivalente (Bourgone, 1992).

Partimos del concepto que dos formaciones similares que tienen el mismo valor de porosidad estarán sujetas al mismo esfuerzo matricial y como el tiempo de tránsito, la densidad y resistividad, sus respuestas son funciones de la porosidad del medio, podemos hacer extensivo este concepto.

La figura 4.1 nos presenta este concepto.

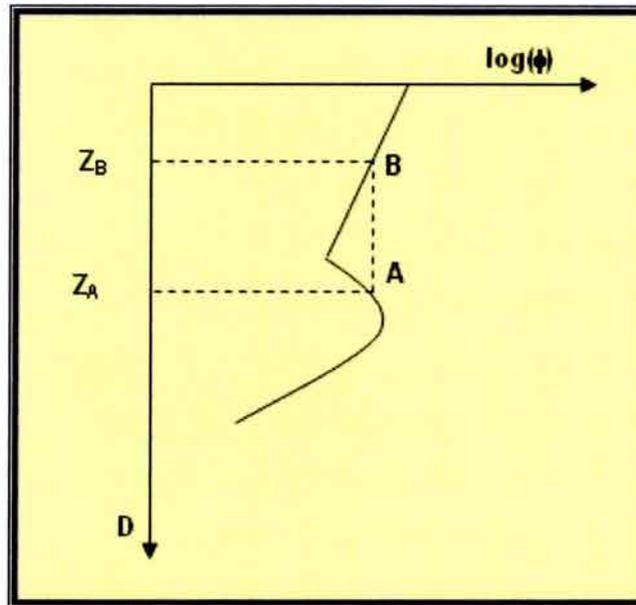


Fig. 4.1 Concepto de esfuerzo matricial equivalente.

Partiendo del concepto de esfuerzo matricial equivalente, el siguiente procedimiento fue implementando para el cálculo de la presión de poro anormal, parámetro de gran trascendencia para planificar correctamente las operaciones de perforación.

Sabiendo que dos formaciones similares que presentan el mismo tiempo de tránsito estarán bajo el mismo esfuerzo efectivo (matricial). Esto significa que una zona con presiones anormales a una profundidad Z_A , tendrá el mismo esfuerzo matricial que una formación con presión de formación normal a una profundidad Z_B .

$$\sigma_A = \sigma_B \quad (4.5-1)$$

Nosotros sabemos que para un medio poroso el esfuerzo matricial está dado por la expresión introducida por Biot.

$$\sigma = S - \alpha P_p \quad (4.5-2)$$

Para propósitos prácticos el factor de Biot se puede considerar que es $\alpha=1$ y expresando la ecuación para el punto A, y B en gradientes de sobrecarga y presión de poro tenemos que:

$$\sigma_B = \frac{S_B}{D_B} D_B - \frac{P}{D_B} \cdot D_B \quad (4.5-3)$$

$$\sigma_A = \frac{S_A}{D_A} D_A - P_A \quad (4.5-4)$$

$$\frac{S_A}{D_A} = \frac{S_B}{D_B} = \frac{S}{D} = \text{Gradiente de sobrecarga} = 1 \text{ psi/ft.} \quad (4.5-5)$$

El gradiente de sobrecarga puede ser estimado de la integración del registro de densidades.

$$\frac{P_B}{D_B} = \frac{P}{D} \text{ Gradiente de presión normal} \quad (4.5-6)$$

$$\frac{S}{D} D_B - \frac{P}{D} D_B = \frac{S}{D} D_A - P_A \quad (4.5-7)$$

Donde D_B es la profundidad equivalente en la zona de presión normal, para el tiempo de tránsito medido en la zona de presión anormal, por lo que D_B puede ser obtenido obteniendo la línea de tendencia en la zona de presiones normales en una grafica lineal o semi-logarítmica de ΔT vs. Profundidad. D_A es la profundidad en la zona de presión anormal sin embargo nos representa una profundidad real por lo que podemos decir que es la profundidad en cualquier punto en el registro de manera que $D_A = D$.

Por lo que la expresión final para determinar la presión de poro en cualquier zona de presiones es:

$$P_D = \left(\frac{S}{D}\right) \cdot D - \left(\frac{S}{D}\right) D_B + \left(\frac{P}{D}\right) \cdot D_B \quad (4.5-8)$$

Donde D_A es obtenida de la ecuación de la línea recta obtenida de la zona de compactación normal en la grafica de ΔT vs. Tiempo.

Para la región en estudio se considera que el gradiente de presión normal para la salinidad del agua intersticial en los poros es 0.463 (psi/ft). o 1.5186 (psi/mts). y el gradiente de sobrecarga para la mayoría de las cuencas sedimentarias es considerada de 1 (psi/ft) o 3.28 (psi/m)

Por lo que una ecuación general para el cálculo de la presión de poro considerando gradiente de sobrecarga variable es:

$$P_D = \left(\frac{S}{D}\right) \cdot D - \left(\frac{S}{D}\right) D_B + 1.5186 D_B \quad (4.5-9)$$

Considerando un gradiente de sobrecarga constante de 1 psi/ft o 3.28 psi/m es:

$$P_D = 3.28D - 1.7614D_B \quad (4.5-10)$$

Donde:

P_D [psi]= Presión de poro a la profundidad D.

D [mts]= Profundidad a la que se requiere la presión.

D_B [mts]= La profundidad equivalente en la zona de compactación normal.

Finalmente D_B es obtenida de la línea de tendencia en la zona de compactación normal de una grafica lineal o semi-logarítmica de [ΔT , Densidad, Porosidad, Resistividad] Vs. Profundidad [mts].

4.6 Acoplamiento de los efectos químicos y térmicos al modelo mecánico.

Los esfuerzos inducidos mecánicamente y debido a la presión del pozo son proporcionados en muchas referencias (Fjaer, 1992) y han sido demostrados en este trabajo (Capítulo 2). Pueden ser calculados usando la siguiente forma:

$$\sigma_r = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} \left(1 - \frac{r_w^2}{r^2}\right) + \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \left(1 + \frac{3r_w^4}{r^4} - \frac{4r_w^2}{r^2}\right) \cos 2\theta + \tau_{xy} \left(1 + 3\frac{a^4}{r^4} - 4\frac{a^2}{r^2}\right) \sin 2\theta + \frac{r_w^2}{r^2} P_w$$

$$\sigma_\theta = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \left(1 + \frac{r_w^2}{r^2}\right) - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \left(1 + \frac{3r_w^4}{r^4}\right) \cos 2\theta - \tau_{xy} \left(1 + 3\frac{r_w^4}{r^4}\right) - \frac{r_w^2}{r^2} P_w$$

$$\sigma_z = \sigma_{zz} - 2\nu(\sigma_x - \sigma_y) \frac{r_w^2}{r^2} \cos 2\theta - 4\nu\tau_{xy} \frac{r_w^2}{r^2} \sin 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \left(1 - \frac{3r_w^4}{r^4} + \frac{2r_w^2}{r^2}\right) \sin 2\theta + \tau_{xy} \left(1 - \frac{3r_w^4}{r^4} + \frac{2r_w^2}{r^2}\right) \cos 2\theta$$

$$\tau_{rz} = (\tau_{xz} \cos \theta + \tau_{yz} \sin \theta) \left(1 - \frac{r_w^2}{r^2}\right)$$

$$\tau_{\theta z} = (-\tau_{xz} \sin \theta + \tau_{yz} \cos \theta) \left(1 + \frac{r_w^2}{r^2}\right) \quad (4.6-1)$$

Considerando un medio homogéneo e isotropico y que la parte más crítica es la pared del pozo nosotros tenemos:

$$\sigma_r = P_w \quad (4.6-2)$$

$$\sigma_\theta = 2\sigma_H - P_w \quad (4.6-3)$$

$$\sigma_z = \sigma_{zz} \approx \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_H \quad (4.6-4)$$

Bourgone (1991) presento la siguiente expresión para calcular el esfuerzo matricial horizontal en función de la sobrecarga

$$\sigma_H' = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_V' \quad (4.6-5)$$

Expresada en esfuerzos totales tenemos entonces:

$$(\sigma_H - \alpha P_0) = \frac{\nu}{1-\nu} (\sigma_V - \alpha P_0) \quad (4.6-6)$$

$$\sigma_H = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_V + \frac{\alpha(1-2\nu)}{1-\nu} P_0 \quad (4.6-7)$$

Es necesario agregar el relajamiento o compresión que sufre la roca con el decremento o incremento de la temperatura como un $\Delta\sigma_t$ por lo que los esfuerzos totales serán:

$$\sigma_r^e = \sigma_{rr}^e + \sigma_{rt}^e$$

$$\sigma_\theta^e = \sigma_{\theta\theta}^e + \sigma_{\theta t}^e$$

$$\sigma_z^e = \sigma_{zz}^e + \sigma_{zt}^e \quad (4.6-8)$$

Criterios de falla en compresión o colapso de la roca.

La falla de colapso de la roca ocurrirá cuando los esfuerzos de la roca excedan la resistencia de la roca.

Nosotros podemos utilizar el criterio de Druker-Prager o el criterio de Mohr-Coulomb para obtener la falla de colapso de la roca.

Nuestro análisis esta enfocado en la cara del pozo, ya que los esfuerzos son máximos en ese punto. Tomando el criterio de falla de Mohr-Coulomb tenemos que para colapso inferior el esfuerzo tangencial es mayor que el esfuerzo radial es decir:

$$\sigma_{\theta} > \sigma_r \quad (4.6-9)$$

Donde para la cara del pozo y un medió homogéneo e isotropico tenemos que $\sigma_{\theta}, \sigma_r$ son:

$$\sigma_r = P_w \quad (4.6-10)$$

$$\sigma_{\theta} = 2\sigma_H - P_w \quad (4.6-11)$$

$$\sigma_z = \sigma_{zz} \approx \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_H \quad (4.6-12)$$

Para colapso inferior $\sigma_{\theta} > \sigma_z > \sigma_r$

$$\sigma_1^e = C_0 + \sigma_3^e \tan^2 \beta \quad (4.6-13)$$

$$((2\sigma_H - P_w - P_0) + \Delta\sigma_t) = C_0 + (P_w - P_0) \tan^2 \beta \quad (4.6-14)$$

Si nosotros agregamos los cambios de presión debido a la parte térmica y a la parte química al criterio de falla obtenemos:

$$((2\sigma_H - P_w - (P_0 + \Delta P_{\pi} + \Delta P_t)) + \Delta\sigma_t) = C_0 + (P_w - (P_0 + \Delta P_{\pi} + \Delta P_t)) \tan^2 \beta \quad (4.6-15)$$

Despejando P_w y reareglado términos finalmente obtenemos:

$$P_w = \frac{1}{\tan^2 \beta} \left[2\sigma_H + \Delta\sigma_t + P_0 (\tan^2 \beta - 1) + \Delta P_{\pi} (\tan^2 \beta - 1) + \Delta P_t (\tan^2 \beta - 1) - C_0 \right] \quad (4.6-20)$$

Para colapso superior $\sigma_r > \sigma_z > \sigma_{\theta}$

$$\sigma_1^e = C_0 + \sigma_3^e \tan^2 \beta \quad (4.6-21)$$

$$(P_w - P_0) = C_0 + (((2\sigma_H - P_w) - P_0) + \Delta\sigma_t) \tan^2 \beta \quad (4.6-22)$$

Si tomamos en cuenta el cambio de la presión de poro por la parte química y térmica la ecuación anterior queda como

$$(P_w - (P_o + \Delta P_\pi + \Delta P_t)) = C_o + (((2\sigma_H - P_w) - (P_o + \Delta P_\pi + \Delta P_t)) + \Delta\sigma_t) \tan^2 \beta \quad (4.6-23)$$

Despejando P_w y reareglando términos finalmente obtenemos:

$$P_w = \frac{1}{1 + \tan^2 \beta} \left[2\sigma_H \tan^2 \beta - P_o (\tan^2 \beta - 1) - \Delta P_\pi (\tan^2 \beta - 1) - \Delta P_t (\tan^2 \beta - 1) + \Delta\sigma_t \tan^2 \beta + C_o \right] \quad (4.6-24)$$

El siguiente criterio es el de Druker-Prager presentado en el capítulo 2:

$$\tau_{oct} = C_2 + C_1 \bar{\sigma}_{oct} \quad (4.6-25)$$

Donde:

$$\tau_{oct} = \left[\frac{1}{6} \left[(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 - (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 \right] \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.6-26)$$

$$\bar{\sigma}_{oct} = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z}{3} - P_o \quad (4.6-27)$$

Para la interfase pozo/formación tenemos:

$$\sigma_r = P_w \quad (4.6-28)$$

$$\sigma_\theta = 2\sigma_H - P_w \quad (4.6-29)$$

$$\sigma_z = \sigma_{zz} \approx \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_H \quad (4.6-30)$$

Por lo tanto sustituyendo en la ecuación 4.6-22 y 4.6-23 obtenemos:

$$\tau_{oct} = \left[\frac{1}{6} \left[(P_w - (2\sigma_H - P_w))^2 - ((2\sigma_H - P_w) - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - P_w)^2 \right] \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.6-31)$$

$$\overline{\sigma}_{oct} = \frac{P_w + (2\sigma_H - P_w) + \sigma_{zz}}{3} - P_0 \quad (4.6-32)$$

Sustituyendo las ecuaciones 4.6-27 y 4.6-23 en la ecuación 4.6-21 y despejando P_w nosotros obtenemos:

$$P_w = \sigma_H \pm \sqrt{\frac{8}{3} \sigma_H \sigma_{zz} - \frac{4}{3} (\sigma_H^2 + \sigma_{zz}^2) + \frac{4}{9} (3C_2 + C_1 (2\sigma_H + \sigma_{zz} - 3P_0))^2} \quad (4.6-33)$$

Donde:

$$C_1 = -\frac{\text{Sen}\phi}{\sqrt{3}\sqrt{4 - \text{Cos}^2\phi}} \quad (4.6-34)$$

$$C_2 = -\frac{C_0 \sqrt{3} \text{Cos}\phi}{\sqrt{4 - \text{Cos}^2\phi}} \quad (4.6-35)$$

Esta ecuación nos proporciona dos curvas de colapso, las cuales son equivalentes a las curvas de colapso inferior y superior del criterio de Mohr-Coulomb.

Nosotros presentamos a continuación la reformulación de este criterio de falla para colapso de pozo considerando el efecto químico y térmico.

Para el esfuerzo de corte octaedral tenemos:

$$\tau_{oct} = \left[\frac{1}{6} \left[(P_w - (2\sigma_H - P_w) - \Delta\sigma_\theta)^2 - ((2\sigma_H - P_w) - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} + \Delta\sigma_{zt} - P_w)^2 \right] \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.6-36)$$

Para el esfuerzo de corte normal tenemos:

$$\overline{\sigma}_{oct} = \frac{P_w + (2\sigma_H - P_w) + \sigma_{zz}}{3} + \frac{2}{3} \Delta\sigma_t - P_0 - \Delta P_\pi - \Delta P_l \quad (4.6-37)$$

Despejando P_w y reareglando la ecuación anterior tenemos:

$$P_w = (\sigma_H + \Delta\sigma_t) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8}{3} \sigma_H \sigma_{zz} - \frac{4}{3} (\sigma_H^2 - 2\Delta\sigma_t^2) + \frac{16}{3} \sigma_H \Delta\sigma_t - \frac{4}{3} \sigma_{zz} - \frac{4}{3} \sigma_{zz} \Delta\sigma_t + \frac{4}{9} (3C_2 + C_1 (2\sigma_H + \sigma_{zz} + 2\Delta\sigma_t - 3(P_0 + \Delta P_\pi + \Delta P_l)))^2}$$

$$C_1 = -\frac{\text{Sen}\phi}{\sqrt{3}\sqrt{4 - \text{Cos}^2\phi}} \quad C_2 = -\frac{C_0 \sqrt{3} \text{Cos}\phi}{\sqrt{4 - \text{Cos}^2\phi}} \quad (4.6-38)$$

4.6.2 Criterio de Falla en tensión

Para estimar la presión de fractura nosotros utilizamos el criterio de falla en tensión dado por la teoría lineal elástica.

En la pared del pozo nosotros tenemos que:

$$\sigma_{\theta} = 2\sigma_H - P_w \quad \sigma_r = P_w \quad (4.6-39)$$

Por lo tanto:

$$2\sigma_H - P_w - P_0 = 0 \quad (4.6-40)$$

$$P_w = 2(\sigma_H - P_0) + P_0 \quad (4.6-41)$$

La predicción de la presión de fractura basada en esta relación frecuentemente da valores altos no reales (Fjaer, 1992), las posibles razones son que las soluciones pueden ser modificadas, si las propiedades elásticas son dependientes del tiempo y además normalmente grietas y fracturas mínimas en la pared del agujero están presentes. Es decir la presión de fractura calculada representa el límite superior.

$$P_w = 2\sigma_{H'} + P_0 \quad (4.6-42)$$

En la práctica solo se considera el esfuerzo horizontal mínimo (Bourgone, 1992) de manera que la presión de fractura puede ser expresada como:

$$P_{ff} = \sigma_{H \min} + P_0 \quad (4.6-43)$$

$$P_{ff} = \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_z' + P_0 \quad (4.6-44)$$

$$P_{ff} = \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_V - P_0) + P_0 \quad (4.6-45)$$

Si nosotros tomamos en cuenta la parte térmica entonces al esfuerzo tangencial será necesario adicionar un delta de esfuerzo tangencial debido a la parte térmica

$$\sigma_{\theta} = 2\sigma_H - P_w + \Delta\sigma_{\theta} \quad (4.6-46)$$

Aplicando el criterio de falla en tensión tenemos que:

$$((2\sigma_H - P_w) - P_0) + \Delta\sigma_{\theta} = 0 \quad (4.6-47)$$

$$P_w = 2\sigma_H - P_0 + \Delta\sigma_{\theta} \quad (4.6-48)$$

$$P_w = 2\sigma_H - P_0 + \Delta\sigma_{\theta} \quad (4.6-49)$$

$$P_w = 2(\sigma_H - P_0) + P_0 + \Delta\sigma_{\theta} \quad (4.6-50)$$

$$P_w = 2\sigma_H' + P_0 + \Delta\sigma_{\theta} \quad (4.6-51)$$

De la misma manera que Bourgone solo toma en cuenta en la práctica el esfuerzo horizontal mínimo podemos expresar la ecuación como:

$$P_{ff} = \sigma_{H \min}' + P_0 + \Delta\sigma_{\theta} \quad (4.6-52)$$

$$P_{ff} = \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_z' + P_0 + \Delta\sigma_{\theta} \quad (4.6-53)$$

$$P_{ff} = \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_v - P_0) + P_0 + \Delta\sigma_{\theta} \quad (4.6-54)$$

Si nosotros además adicionamos el incremento de la presión de poro debido a la parte térmica y química tenemos

$$P_{ff} = \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_v - (P_0 + \Delta P_{\pi} + \Delta P_t)) + (P_0 + \Delta P_{\pi} + \Delta P_t) + \Delta\sigma_{\theta} \quad (4.6-55)$$

$$P_{ff} = \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_v + \frac{1-2\nu}{1-\nu} P_0 + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \Delta P_{\pi} + \Delta\sigma_{\theta} + \frac{1-2\nu}{1-\nu} \Delta P_t |_n \quad (4.6-56)$$

4.7 Esfuerzos inducidos por la presión de poro y cambios de Temperatura de la roca.

Los esfuerzos inducidos térmicamente en un cuerpo sólido fueron introducidos por Timoshenko (1946) en su tratado clásico de la Teoría de la elasticidad. Es bien conocido que los incrementos de temperatura causan dilatación de los cuerpos y los decrementos de temperatura causan contracción de los cuerpos. Cuando estas contracciones o dilataciones de los cuerpos no son permitidas causan esfuerzo en los cuerpos.

Tang y Luo (1998) presentaron un modelo donde introducen a los esfuerzos totales efectivos, la contribución del esfuerzo térmico utilizando la teoría mecánica de la elasticidad térmica presentada por Timoshenko para cuerpos sólido, considerando que esa parte sólida es la matriz de la roca. Nosotros podemos ver el capítulo 2 para la derivación y cálculo de los esfuerzos térmicos.

Sin embargo el análisis para estimar los esfuerzos térmicos presentados por Timoshenko y Tang y Luo, no consideran que el medio es poroso por lo que se requiere un análisis Termo-poroelástico. Las Leyes constitutivas de la Teoría termo-poroelástica para un medio poroso lleno con fluidos fueron presentadas por Kurashige (1989).

Yu, Chen, Chenevert y Sharman (2001) presentaron los esfuerzos inducidos por la presión de poro y los cambios de temperatura de la formación utilizando la teoría termo-poroelástica presentada por Kurashige.

Los esfuerzos de pozos inducidos por la temperatura y los cambios en la presión de poro pueden ser resueltas utilizando las ecuaciones constitutivas, ecuaciones de equilibrio en términos de esfuerzo, relaciones de esfuerzo de desplazamiento-deformación y condiciones de fronteras.

Las ecuaciones constitutivas son mostradas en las ecuaciones 4.2-18, en la forma de esfuerzo totales como

$$\sigma_{rr} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) + \frac{3(\nu_u - \nu)}{B(1-2\nu)(1+\nu_u)} p \delta_{ij} + \frac{2G\alpha_m(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \Delta\theta \delta_{ij} \quad (4.7.1)$$

o puede ser expresada como

$$\sigma_{rr} = 2G \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) + \alpha p \delta_{ij} + \frac{2G\alpha_m(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \Delta\theta \delta_{ij} \quad (4.7-2)$$

Las ecuaciones de arriba pueden ser además escritas en su forma extendida como:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[\frac{du}{dr} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{u}{r} \right] + \alpha p + \frac{2G\alpha_m(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \Delta\theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[\frac{\nu}{1-\nu} \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right] + \alpha p + \frac{2G\alpha_m(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \Delta\theta \\ \sigma_{zz} &= \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} \right] + \alpha p + \frac{2G\alpha_m(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \Delta\theta\end{aligned}\quad (4.7-3)$$

Las ecuaciones de equilibrio para un sistema cilíndrico simétrico pueden ser escrita como:

$$\sigma_{rr,r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \quad (4.7-4)$$

Donde

$$\sigma_{rr,r} = \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left[u_{,rr} + \frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{u_{,r}}{r} + \frac{u}{r^2} \right) \right] + \alpha p_{,r} + \frac{2G\alpha_m(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \Delta\theta_{,r} \quad (4.7-5)$$

Insertando $\sigma_{rr,r}$ dentro de la ecuación 4.7-4, y sustituyendo P_r y $\Delta\theta_r$ dentro ΔP_r y ΔT_r y reareglando tenemos:

$$-\left(\frac{1}{r} (ur)_{,r} \right) = \frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)E} \Delta P_r + \frac{2G\alpha_m(1+\nu)^2}{3E(1-\nu)} \Delta T_r \quad (4.7-6)$$

Integrando la ecuación de arriba con respecto a "r" tenemos.

$$-\frac{1}{r} (ur)_{,r} = \frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)E} \Delta P + \frac{2G\alpha_m(1+\nu)^2}{3E(1-\nu)} \Delta T + C_1 \quad (4.7-7)$$

Integrando nuevamente con respecto a r y reareglando obtenemos:

$$u = -\frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)E} \frac{1}{r} \int_w \Delta P r dr - \frac{\alpha_m(1+\nu)}{3(1-\nu)} \frac{1}{r} \int_w \Delta T r dr - \frac{C_1}{2} r - \frac{C_2}{r} \quad (4.7-8)$$

Donde C_1 , C_2 son constantes de integración las cuales pueden ser evaluadas usando las condiciones de frontera.

$$\text{Condición de frontera 1: } r \rightarrow \infty, u \rightarrow 0, C_1 = 0 \quad (4.7-9)$$

Las componentes de deformación pueden ser calculadas como

$$\varepsilon_{rr} = u_{,r} = -\frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)E} \left(\Delta P - \frac{1}{r^2} \int_w^r \Delta P r dr \right) - \frac{\alpha_m(1+\nu)}{3(1-\nu)} \left(\Delta T - \frac{1}{r^2} \int_w^r \Delta T r dr \right) + \frac{C_2}{r^2}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} = -\frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)E} \frac{1}{r^2} \int_w^r \Delta P r dr - \frac{\alpha_m(1+\nu)}{3(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \int_w^r \Delta T r dr - \frac{C_2}{r^2} \quad (4.7-10)$$

Insertando la deformación tangencial y radial en la primera ecuación de las ecuaciones 4.7-3 tenemos:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\alpha(1-2\nu)(1+\nu)}{(1-\nu)E} \frac{1}{r^2} \int_w^r \Delta P r dr + \frac{\alpha_m(1+\nu)}{3(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \int_w^r \Delta T r dr + \frac{C_2}{r^2} \right] \quad (4.7-11)$$

La segunda condición de frontera es $r \rightarrow r_w$, $\sigma_{rr} = P_w$ por lo tanto:

$$C_2 = \frac{1+\nu}{E} P_w r_w^2 \quad (4.7-12)$$

Por lo tanto los esfuerzos inducidos pueden ser obtenidos como:

$$\sigma_{rr} = \frac{\alpha(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \int_w^r \Delta P r dr + \frac{E\alpha_m}{3(1-\nu)} \frac{1}{r^2} \int_w^r \Delta T r dr + \frac{r_w^2}{r^2} P_w$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\alpha(1-2\nu)}{1-\nu} \left(\Delta P - \frac{1}{r^2} \int_w^r \Delta P r dr \right) + \frac{E\alpha_m}{3(1-\nu)} \left(\Delta T - \frac{1}{r^2} \int_w^r \Delta T r dr \right) - \frac{r_w^2}{r^2} P_w$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\alpha(1-2\nu)}{1-\nu} \Delta P + \frac{E\alpha_m}{3(1-\nu)} \Delta T \quad (4.7-13)$$

Los esfuerzos de corte no serán afectados por la difusión hidráulica y difusión térmica causada por los cambios de temperatura o los cambios en la presión de poro.

En la pared del pozo, todas las integrales de las ecuaciones se desvanecen, debido a que estas ecuaciones se reducen a valores constantes para las tres componentes de esfuerzo por lo que tenemos:

$$\sigma_{rr} = P_w$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\alpha(1-2\nu)}{1-\nu} \Delta P + \frac{E\alpha_m}{3(1-\nu)} \Delta T - P_w$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\alpha(1-2\nu)}{1-\nu} \Delta P + \frac{E\alpha_m}{3(1-\nu)} \Delta T \quad (4.7-14)$$

Nótese que el término P_w en las ecuaciones de arriba ya son consideradas en las ecuaciones de los esfuerzos mecánicos por lo que este término deberá ser eliminado por lo tanto:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\alpha(1-2\nu)}{1-\nu} \Delta P + \frac{E\alpha_m}{3(1-\nu)} \Delta T$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\alpha(1-2\nu)}{1-\nu} \Delta P + \frac{E\alpha_m}{3(1-\nu)} \Delta T \quad (4.7-15)$$

CAPITULO V

APLICACIÓN Y VALIDACIÓN DEL MODELO CON DATOS DE CAMPO.

Es este capítulo nosotros presentamos la aplicación del modelo que considera la parte mecánica, química y térmica para estabilidad en lutitas. Nosotros nos apoyaremos del capítulo 3; para obtener la caracterización geomecánica del pozo, como primer paso en un estudio de estabilidad.

El campo de estudio es el Sen debido a que se cuenta con información de registros de pozos y a que presenta una sección grande de lutitas.

5.1 Calculo de la presión de poro original mediante la nueva metodología.

La presión de poro fue estimada utilizando la nueva metodología presentada en este trabajo. EL procedimiento es el siguiente: 1) Utilizando el registro sísmico realizar una grafica de tiempo de transito vs. Profundidad para obtener la línea de tendencia de compactación normal para nuestro campo se obtiene $D_B = -33.696DT + 5544.9$, 2) Utilizamos la ecuación $P_D = 3.28D - 1.7614D_B$ para obtener la presión de poro a cualquier profundidad.

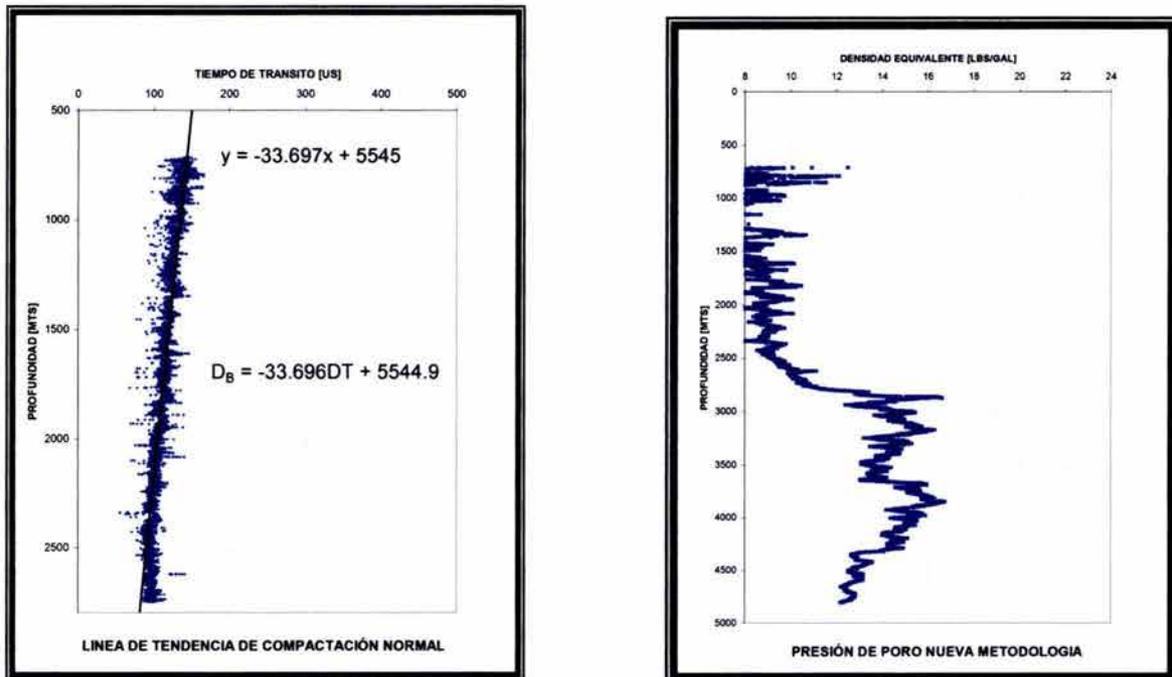


Fig. 5. 1. presión de poro de formación utilizando la nueva metodología, La grafica de la izquierda representa el calcula D_B en la zona de compactación normal y a la derecha se presenta la presión de pozo estimada para todo el pozo.

Se puede ver que el pozo presenta dos secciones importantes con presiones anormales, comprendidas ambas en el intervalo de 2800 a 4300 metros.

5.2 Calculo de la sobrecarga.

La sobrecarga puede ser fácilmente estimada del registro de densidades, sin embargo en los pozos de la región sur, en la mayoría de los casos no se cuenta con dicho registro, en las primeras tres etapas debido a que los intervalos productores son profundos y a que técnicamente las herramientas de densidades no miden correctamente en diámetros grandes.

Jorge salinas presenta una correlación que nos permite obtener la densidad de la formación a partir de la velocidad de las ondas de corte. Este procedimiento es una muy buen alternativa cuando se carece del registro completo de densidades.

Para obtener la sobrecarga solo es necesario integrar el registro de densidades. El procedimiento es sencillo, el primer paso es calcular la sobrecarga para el primer punto en el registro mediante la siguiente formula:

$$S = 0.052\rho D_0$$

Seguidamente se procede a realizar la integración de los demás puntos, mediante la siguiente formula.

$$S = 0.052\left(\frac{\rho_{anterior} + \rho}{2}\right)(\Delta D) + S_{anterior} \qquad \Delta D = D - D_{anterior}$$

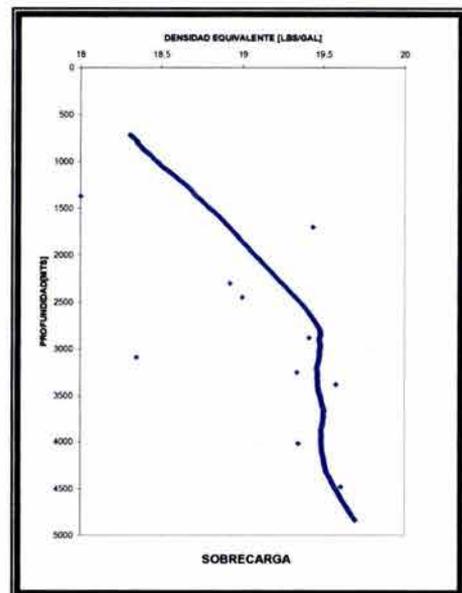
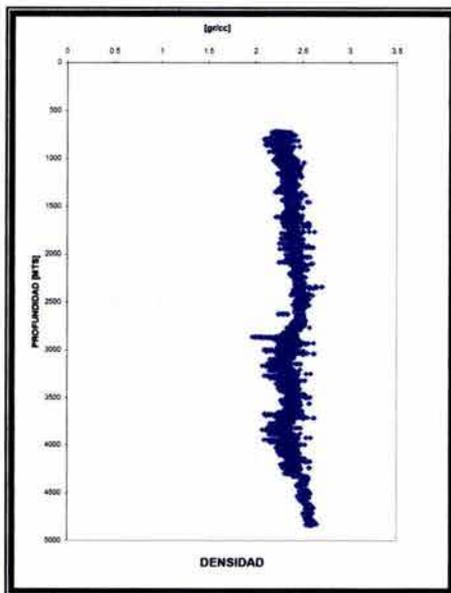


Fig. 5.2 Densidad equivalente de sobrecarga para el campo Sen Vs. Profundidad obtenida a partir del registro de densidad.

5.3 Cálculo de las propiedades elásticas dinámicas

El registro DSI nos proporciona las velocidades de las ondas compresionales y las ondas de corte las cuales nos permiten estimar las propiedades mecánicas de las formaciones se recomienda contar con este registro.

Nosotros sin embargo podemos carecer de un registro DSI y solo tener un registro completo de ondas compresionales (Registro sónico). Podemos emplear la correlación de Jorge Salinas para la obtención de las ondas de corte y el módulo de corte.

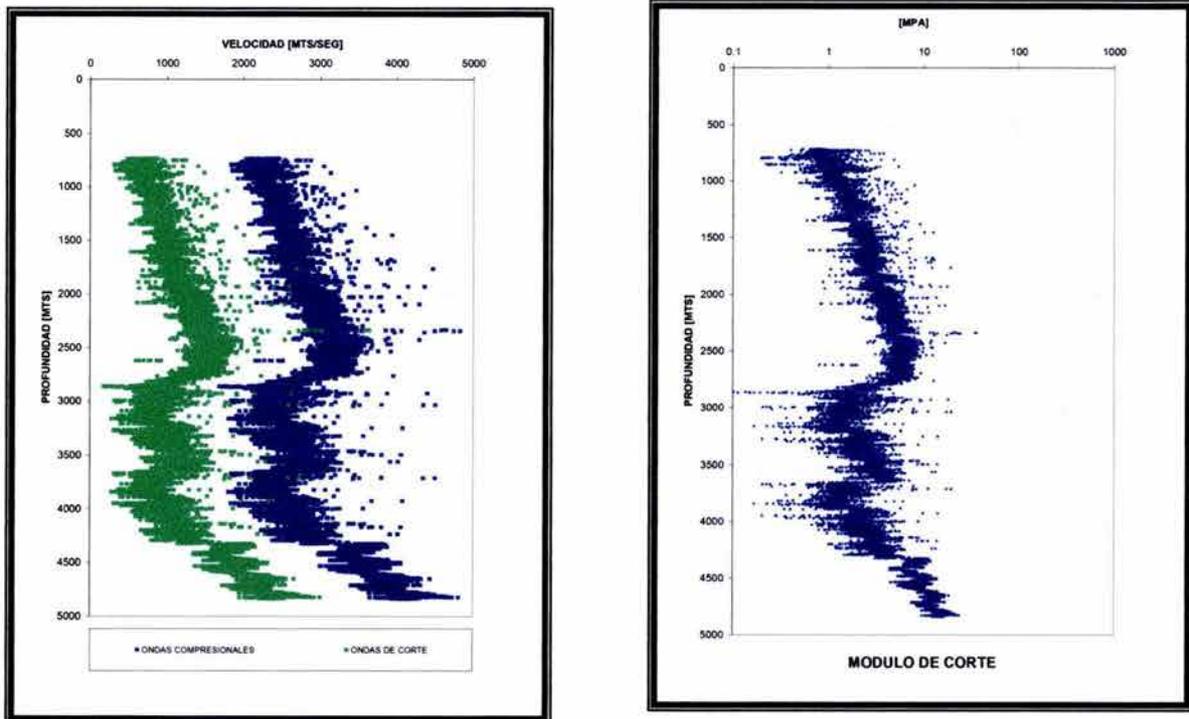


Fig. 5.3 Velocidad de ondas de corte y módulo de corte vs. Profundidad obtenida de la correlación de Salinas para el campo Sen.

La relación de Poisson y el módulo de Young pueden ser obtenidos a partir de la teoría de la propagación de las ondas acústicas en rocas y las restantes de las relaciones existentes entre los módulos elásticos.

La figura 5.4 nos muestra el cálculo de todos los módulos elásticos restantes.

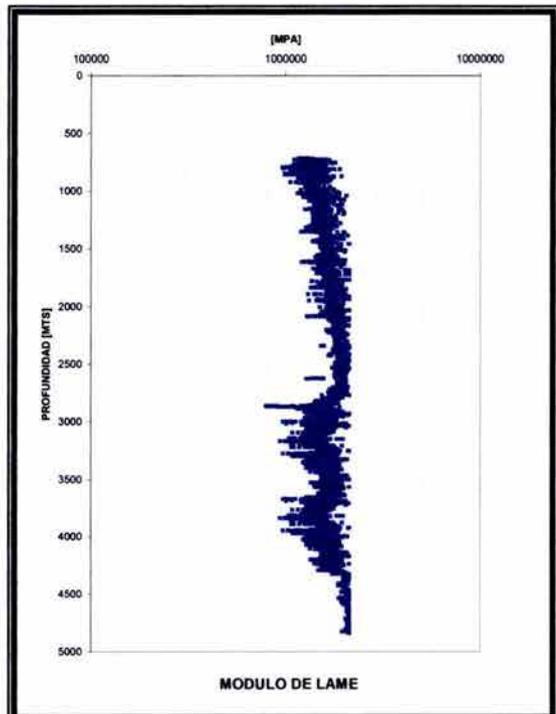
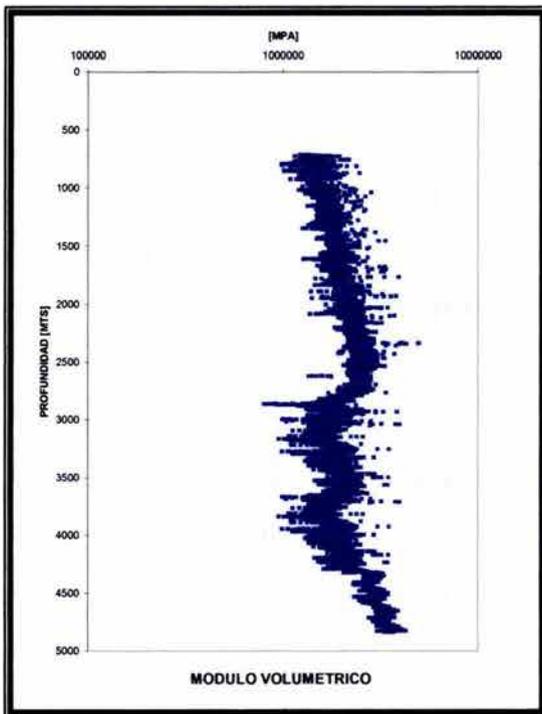
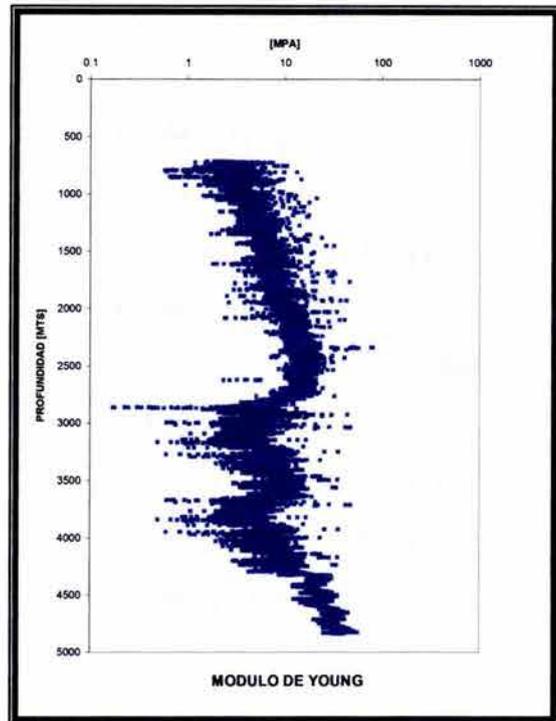
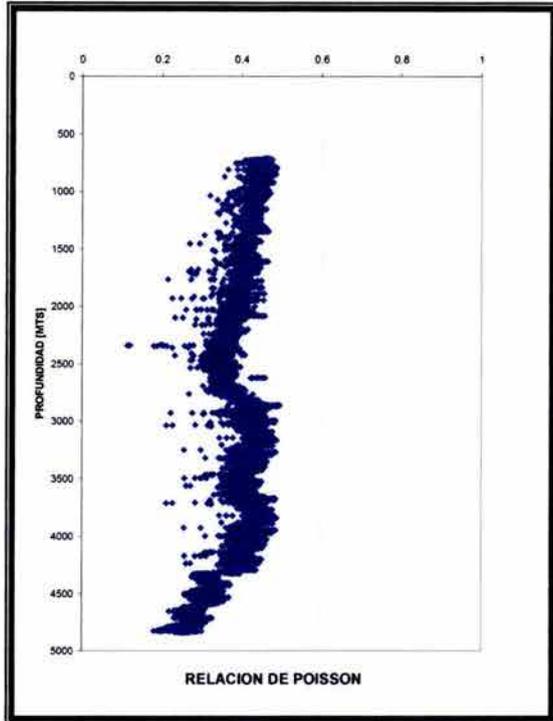


Fig. 5.4 Propiedades Mecánicas dinámicas de las rocas obtenidas a partir de la propagación de ondas acústicas y relaciones entre módulos para el campo Sen.

5.4 Calculo del Angulo de fricción interna y resistencia a la compresión uniaxial

Es bastante importante en cualquier estudio de estabilidad contar con la resistencia cohesiva de la lutitas así como con el ángulo de fricción interna. En nuestro estudio el ángulo de fricción interna es cálculo por la correlación presentado por Lal (1999) y la resistencia cohesiva obtenida utilizando el criterio de Mohr Coulomb una vez que el Angulo de fricción interna es conocido.

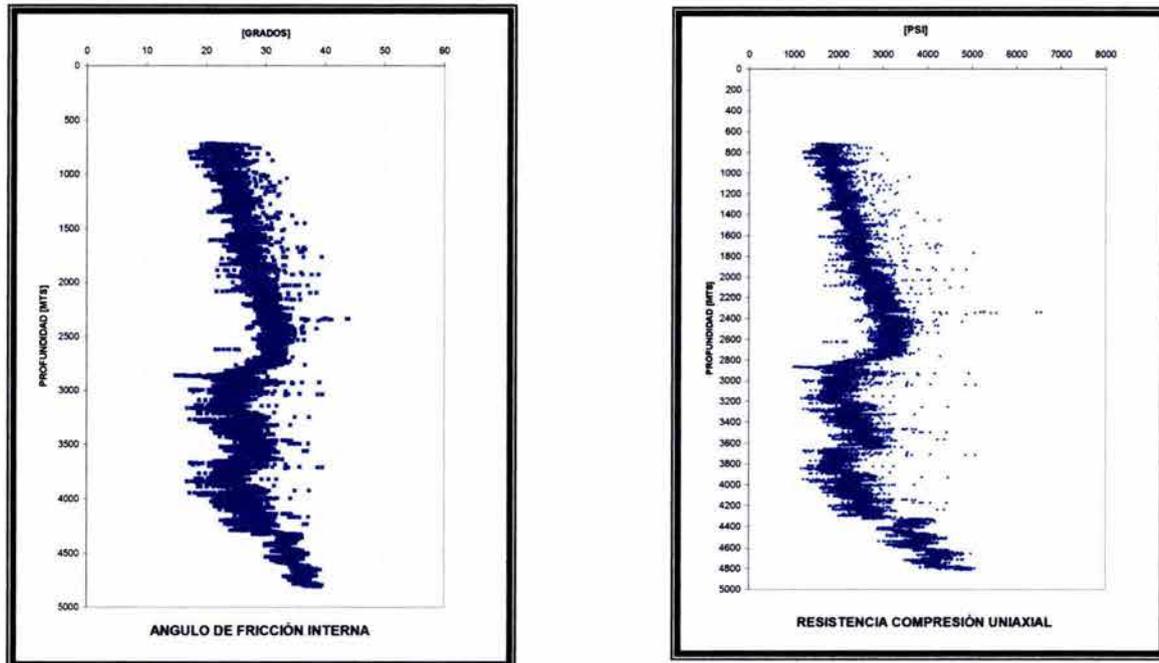


Fig. 5.5 Resistencia a la compresión uniaxial y ángulo de fricción interna vs. profundidad para el campo Sen.

Nosotros podemos apreciar que el intervalo de 2800-4200 metros tenemos ángulos de fricción interna de 18 a 30 ° y resistencia a la compresión uniaxial de 1200-3000 PSI. Es claro que se trata de rocas débiles susceptible de falla. Por lo que es de esperar que requiera de densidades de lodos más altas sobre todo aquellas cuyo ángulo de fricción interna y resistencia a la compresión sean más bajos.

La curva de densidad equivalente de colapso inferior se vea incrementada con ángulos de fricción más pequeño, la curva de densidad de fractura no se ve afectada por los cambios del ángulo de fricción, aunque esta puede ser afectada si la resistencia a la tensión es considerada en el criterio de fractura.

5.5 Calculo del colapso de pozo y presión de fractura (efecto mecánico)

Nosotros presentamos una grafica de densidad equivalente del lodo contra profundidad para colapso inferior, colapso superior, presión de fractura y presión de poro como se muestra en la figura 5.6. Se utilizó los criterios de estabilidad de Druker-Prager y Mohr-Coulomb para colapso de pozo, se puede ver que ambos criterios presentan una tendencia en las curvas de colapso muy similares, sin embargo la mayor complejidad en los cálculos que involucra el criterio de Druker-Prager puede ser evitada ya que vemos los valores que con el modelo de Mohr-Coulomb son obtenidos son los bastantes similares, además se puede apreciar que el criterio de Mohr-Coulomb exige mayores densidades del lodo para perforar, aunque esta pudiera ser una desventaja desde el punto de vista económico, el criterio nos permite establecer una especie de factor de seguridad.

El colapso superior no es importante para este campo ya que a lo largo de todo el pozo se encuentra por arriba de la presión de fractura lo que significa que antes que se presente el colapso superior es decir un derrumbamiento de pozo por una presión de pozo excesiva, existirá un fracturamiento de la formación y como consecuencia la perdida de lodo.

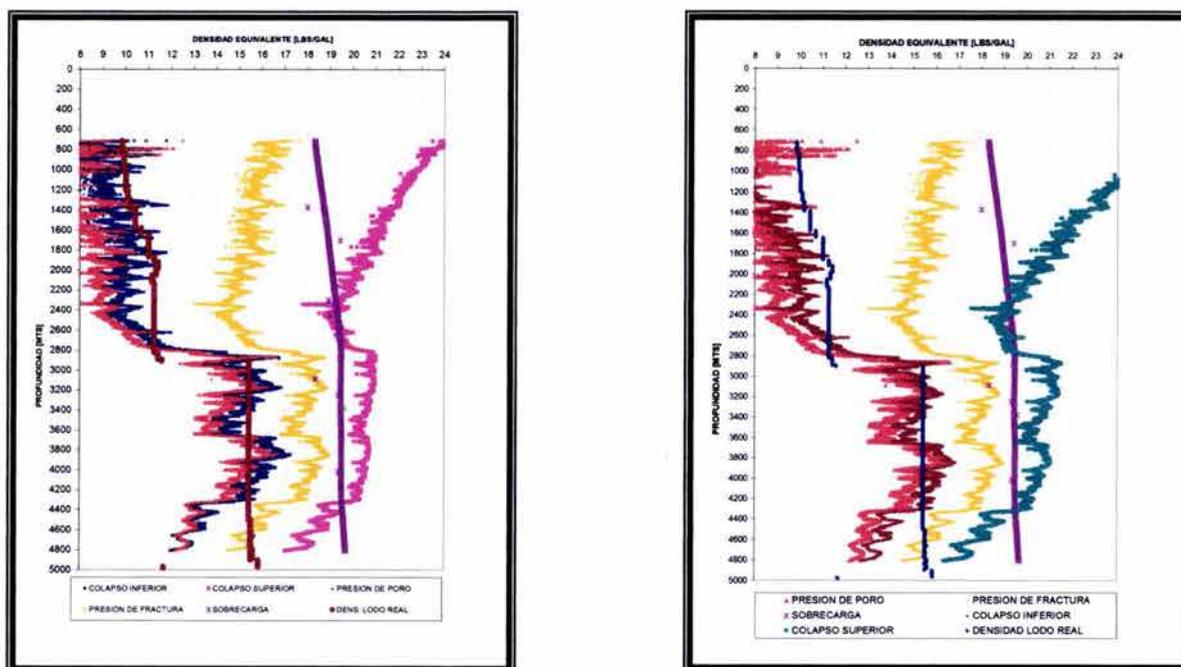


Fig. 5.6 Comparación entre el criterio de estabilidad Mecánica de Druker-Prager a la derecha y el criterio de falla de Mohr-Coulomb a la izquierda.

Para el cálculo de la presión de fractura nosotros hemos utilizado la ecuación de Hubber y Willis en su forma generalizada, es de notarse una tendencia inversa debido al efecto de la relación de Poisson en el intervalo de 700-2000 metros, resultado de no utilizar la simplificación que el esfuerzo horizontal mínimo es 1/3 de la sobrecarga para sedimentos jóvenes.

La explicación razonable que se tengan valores altos de la relación de poisson en formaciones poco profundas obtenidas a partir de propagación de ondas es que estas generalmente tiende hacer mayores debido al efecto generado por las micro fracturas en la roca.

Es importante señalar que el colapso de pozo se encuentra muy cercano a la presión de poro, por lo que si nosotros diseñamos en este caso para presión de poro, se diseña para colapso inferior, además el campo presenta una ventana operacional del lodo lo bastante estrecha en el intervalo de 2800-4200 metros de alrededor de 1 lb/gal mínima hasta 3 lb/gal máxima, lo que lo hace lo bastante susceptible a efectos químicos y a los efectos térmicos.

Nosotros además presentamos las densidades del lodo reales utilizados durante la perforación del campo por lo que se puede verificar que la caracterización realizada es lo bastante buena y que además existen dos zonas potenciales que pudieron sufrir colapso de pozo y son los intervalos de 2800-3200 metros y 3700-4100 metros ya que fueron utilizadas densidades del lodo por debajo de la densidad equivalente para evitar el colapso. Nosotros verificamos una vez más nuestra caracterización con la figura 5.7, el cual es un registro de calibración de diámetro de pozo.

El reporte de perforación además muestra que en la perforación de la tercera etapa existieron problemas de atrapamiento de la sarta de perforación.

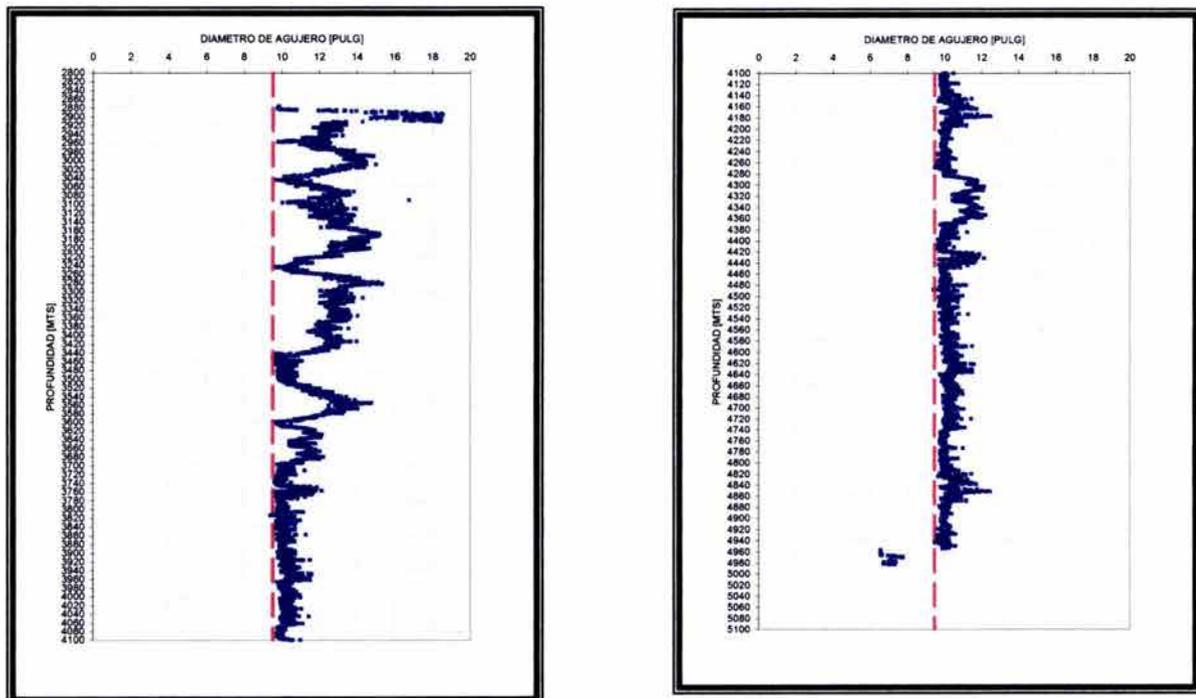


Fig. 5.7 Registro de calibración de diámetro de pozo el cual nos muestra zonas que sufrieron derrumbamiento por colapso de pozo.

Aunque no es objeto de este estudio podemos mencionar dos hechos el primero es que existe una región de 1300-2200 metros con problemas de estabilidad mecánica y este es corroborado por el reporte de perforación donde hubo un incremento en la densidad del lodo por observarse empacamiento de la sarta de perforación.

El segundo hecho es que el intervalo de 4600-5023 metros se tuvo problemas de entrada de fluidos controlando pozo y posteriormente perdidas parciales bajando densidad finalmente a 1.63 gr/cc o 13.6 lb/gal por lo que se puede ver que la caracterización es la correcta para esta etapa.

5.6 Análisis de sensibilidad de parámetros

Existen varios parámetros que afectan la inestabilidad en lutitas, los cuales son examinados para determinar su sensibilidad en la falla de pozo.

5.6.1 Actividad del lodo

La actividad del lodo esta relacionada por su % en contenido de sal. Nosotros podemos ver que una actividad alta incrementara la fuerza conductora para el flujo de fluido hacia la formación lo cual por supuesto, no es deseado en el control de la estabilidad del pozo. Igualmente puede verse que una actividad del lodo más baja es decir; una más alta salinidad trae como consecuencia un flujo de fluidos de la formación hacia el pozo lo cual tiene el efecto de reducir la presión de poro cercana alrededor del pozo.

Este ultimo efecto puede ser aprovechado para evitar el colapso de pozo una actividad del lodo más baja puede ser utilizada en lugar de un incremento en la densidad del lodo en el diseño del lodo para estabilizar el agujero. Sin embargo esta densidad del lodo debe ser escogida del tal forma que la ventana operacional no sea reducida grandemente debido a una reducción en la presión de fractura de la formación lo cual trae problemas de perdidas del lodo.

Finalmente nosotros podemos verificar la importancia de la actividad del lodo en el control de la estabilidad en lutitas. Nosotros consideramos para propósitos de esta tesis una actividad de la lutita de 0.86 de datos obtenidos en laboratorios. Si nosotros usamos un lodo activamente balanceado lo que significa que la actividad de lodo es de 0.86, es posible despreciar el efecto químico y los resultados serían los mostrados en la figura 5.6. Ahora si nosotros consideramos un lodo con una actividad de .93 es decir un lodo con una concentración de sal del 10% se puede ver que existirá un incremento en la presión de poro cercana al pozo y por lo tanto un incremento en los esfuerzos de colapso ver figura 5.8, Si por el contrario se utiliza un lodo con una actividad de 0.71 es decir un lodo con una concentración de 28% la cual puede ser alcanzados en la practica con sales de CaCl_2 se ve una reducción en la presión de poro y decremento en los esfuerzo de colapso, pero también una reducción en la presión de fractura, por lo que se

deberá tener cuidado en la actividad del fluido de perforación utilizada ver figura 5.8.

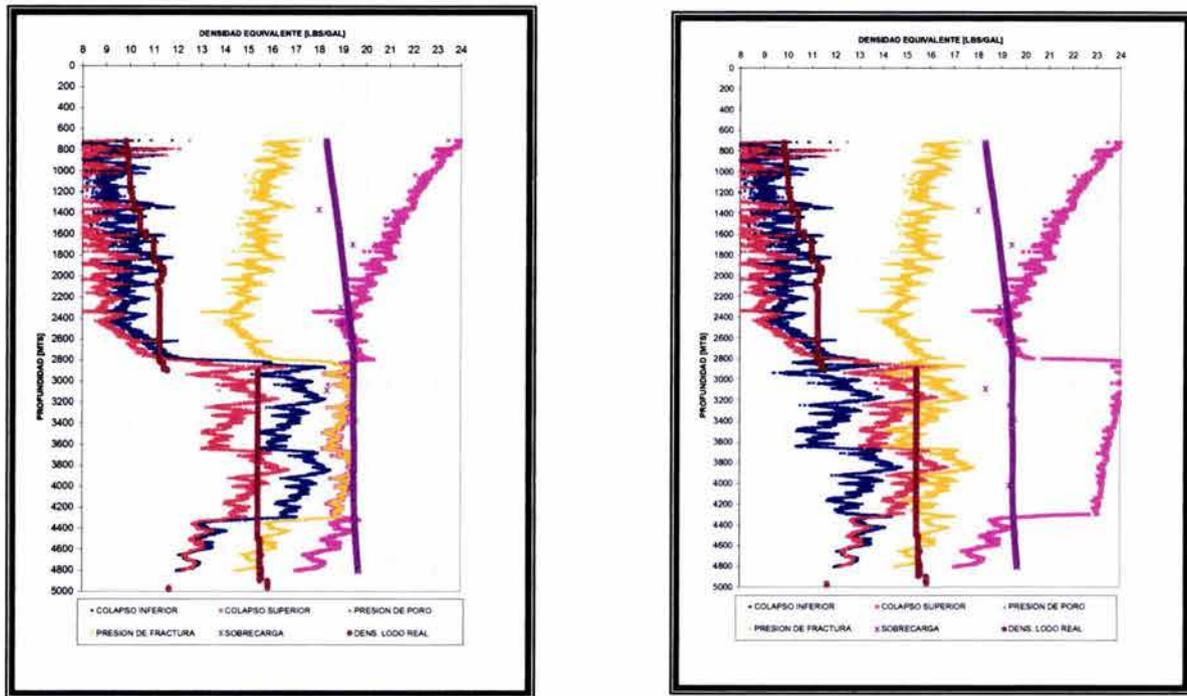


Fig. 5.8. Muestra el efecto de la actividad del agua del fluido de perforación (Base-Aceite) para una actividad en la lutita de .86, a la izquierda tenemos un fluido de perforación de 100,000 PPM de NaCl, y a la derecha un fluido de perforación de 270,000 PPM de CaCl₂.

5.6.2 Eficiencia de membrana

La eficiencia de membrana es directamente proporcional al potencial químico para un sistema roca-fluido, como se muestra en la ecuación 3.3-5. Sistemas roca-fluido con eficiencias de membranas altas son más efectivos para comportarse como una membrana semipermeable ideal. Los lodos base aceite presentan la ventaja de formar sistemas roca-fluido con eficiencias de membranas altas sobre los lodos base agua. Bajo condiciones de esfuerzo in-situ el sistema roca-fluido base aceite se comporta como una membrana semipermeable ideal es decir $I_m=1$. Por el contrario los lodos base agua alcanza eficiencias de membrana de 0.1 a 0.3 en la actualidad aunque algunos artículos mencionan sistemas roca-fluido base agua con eficiencia de membrana de 0.5, lo cierto que en la actualidad sean logrado con certeza 0.3, ver figuras 5.8 y 5.9. A simple vista se puede ver que los sistemas base aceite son mejores que los sistemas base agua para estabilizar lutitas, sin embargo; debido a cuestiones ambientales los lodos base aceite presentan mayores problemas para su manejo en superficie y un mayor costo para su tratamiento para la industria por lo que lodos base agua con eficiencia de membrana mayores tienen que ser un compromiso para las compañías de lodos, para lograr mejores controles en la estabilidad de pozo.

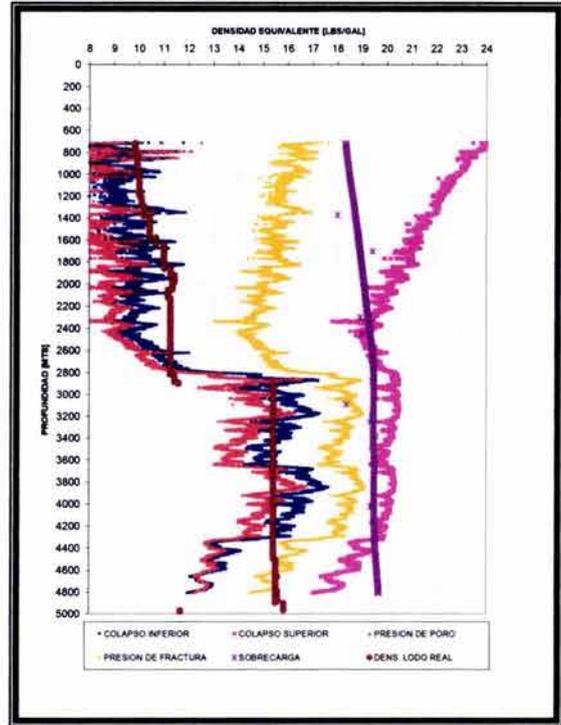
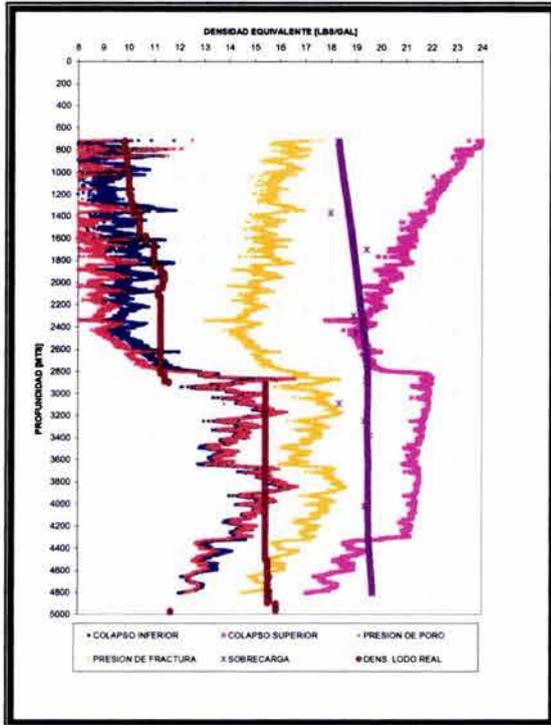


Fig. 5.8 Efecto de un fluido de perforación base agua con una eficiencia de membrana del sistema roca fluido de 0.3 para actividades del agua del fluido de perforación de 0.71 el de la izquierda y 0.935 el de la derecha.

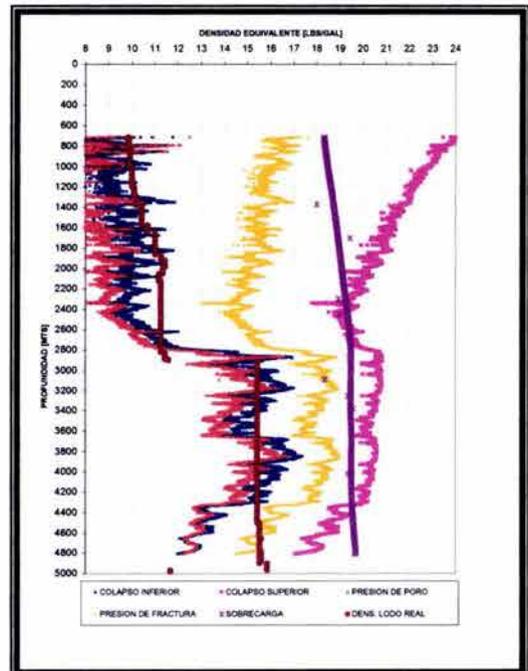
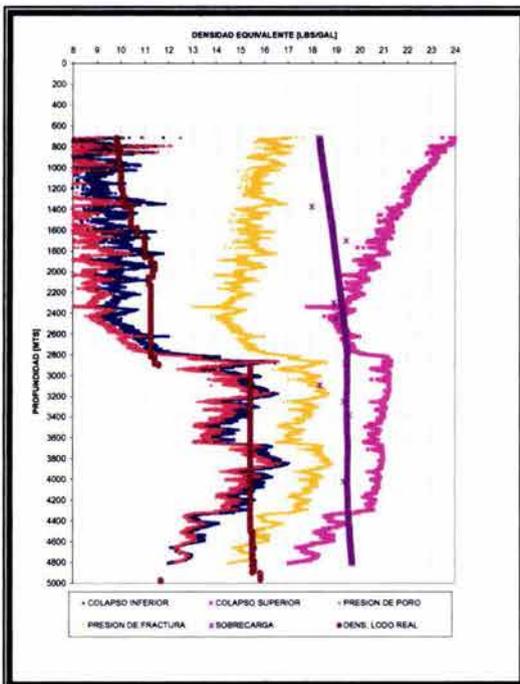


Fig. 5.9 Efecto de un fluido de perforación base agua con una eficiencia de membrana del sistema roca fluido de 0.1.

5.6.3 Presión de pozo.

La presión de pozo, o la densidad del lodo estática es uno de los más importantes factores en el control de la estabilidad de un pozo, por lo que es necesario determinar la ventana operacional de densidad de lodo de trabajo para evitar la falla de colapso o la falla por fractura de la formación. La presión de pozo al igual que el potencial químico, son las principales fuerzas que intervienen en el transporte de fluido a través del pozo y de las formaciones de lutitas y son el resultado de la alteración de la presión de poro en las lutitas.

5.6.4 Difusividad masica del fluido.

La presión de poro en las lutitas es muy sensible a cambios en el contenido de fluidos debido a sus muy bajas permeabilidades. Nosotros sabemos que el flujo de fluido es directamente proporcional a la difusividad masica del fluido, como es mostrado por la ley de Darcy. Obviamente una difusividad más alta puede llevarnos a un flujo de fluido más grande y como consecuencia un cambio en la presión de poro más significativo.

5.6.5 Difusividad térmica.

La difusión térmica como se menciona antes es mucho más rápida que la difusividad hidráulica en formaciones de lutitas, la cual contribuye a alterar la presión de poro y la distribución de esfuerzo de la roca.

5.6.6 Cambios de temperatura.

El efecto de enfriamiento debido al fluido circulado durante las operaciones de perforación es capaz de decrecer la presión de poro cerca del pozo, al mismo tiempo la roca sufrirá un relajamiento de los esfuerzos efectivos en su matriz. Ambos efectos provocan un decremento de la densidad equivalente de colapso de la roca por lo que las condiciones de estabilidad son mejoradas.

Sin embargo es importante recalcar que la densidad equivalente de fractura decrece debido a ambos efectos es decir un decremento de la presión alrededor del pozo trae como consecuencia que la formación cercana al pozo sea más fácilmente fracturada. De la misma manera que un decremento en el esfuerzo efectivo de la roca provocara el mismo efecto.

Por su parte un calentamiento en las formaciones provocaría; un incremento de la presión de poro y un incremento es los esfuerzos efectivos de la roca, lo cual traería como consecuencia que la densidad equivalente de colapso se incremente empeorando las condiciones de estabilidad de pozo y provocando un incremento en la curva de densidad equivalente de fractura lo cual sería benéfico.

Bajo condiciones operativas generalmente las formaciones superiores se encuentran sujetas a calentamiento, por el mismo proceso de circulación. Para las

condiciones operativas del campo de estudio el punto neutro se encuentra muy cercano al asentamiento de la última zapata por lo que no causa problema en la estabilidad de pozo ya que las formaciones se encuentran entubadas.

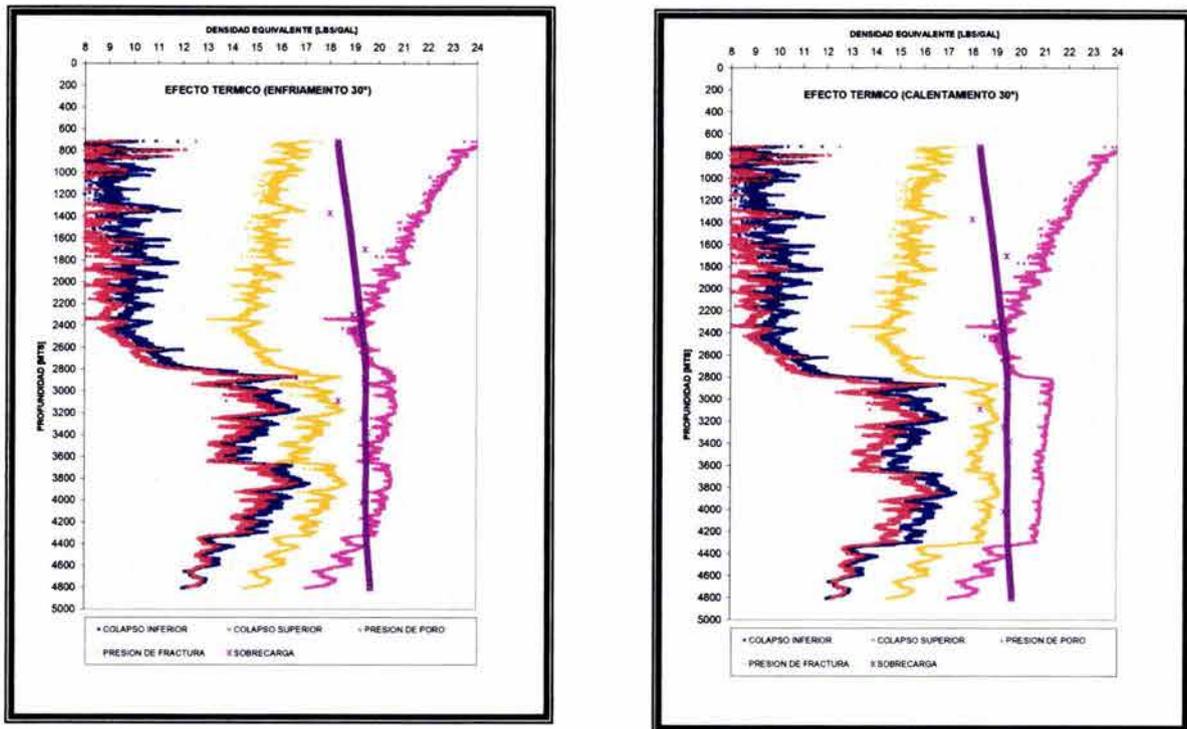


Fig. 5.10 Efectos de los cambios de Temperatura en la pared el pozo en el caso que la formación sufriera un calentamiento o que estuviera expuesta a un enfriamiento.

5.6.7 Coeficiente acoplamiento mecánico-térmico

Es improbable que el coeficiente de acoplamiento térmico, c' , sea negativo debido a que el fluido es más expansible volumétricamente que los granos de la roca bajo variaciones de temperatura, por lo tanto; un lodo de perforación más frío que las lutitas tienden a decrecer la presión de formación debido a la segunda parte en la ecuación 4.4-55, es siempre negativa, si las formaciones son enfriadas por el fluido de perforación.

Para nuestro caso; la sección de agujero descubierto se encuentra sujeta a enfriamiento debido a la circulación del fluido de perforación, el cual es más frío que la formación. Si el coeficiente de acoplamiento es grande este causara un decremento grande en la presión de poro. Si el coeficiente de acoplamiento es pequeño este decremento de presión será menor, es decir; será más cercana a la presión de formación original.

5.7 Dependencia del tiempo de la estabilidad en un pozo.

Hemos visto que la presión de poro y la temperatura de la formación son funciones de la distancia radial y del tiempo. Donde la temperatura del lodo en el anular representa una condición de frontera interna la cual en esta tesis sea considerado que es la temperatura de la formación en la pared del pozo por simplificación.

La dependencia de tiempo de la presión de poro y de la temperatura de la formación hace que el colapso de pozo y la presión de fractura de la formación también lo sean.

5.7.1 Calculo de la temperatura en el anular.

En el capítulo 4 se presentaron varios métodos que nos permite calcular la temperatura del lodo en el anular durante las operaciones de perforación, hemos trabajado con dos de ellos; el modelo permanente y el modelo transitorio, para los datos del pozo.

La tabla 5.1 presenta los datos del pozo que fueron utilizados en el cálculo del perfil de la temperatura en el anular.

<i>Datos de entradas</i>	
<i>Profundidad del pozo, ft</i>	16500.000
<i>Diametro interno de la TP, in</i>	3.825
<i>Tamaño de la barrena, in</i>	9.500
<i>Gasto de circulación, bbl/hr</i>	400.000
<i>Temperatura del lodo de entrada, °F</i>	105.000
<i>Viscosidad del lodo lb/ft-hr</i>	110.000
<i>Conductividad termica del lodo, Btu/(ft. °F-hrs)</i>	1.000
<i>Calor especifico del lodo, Btu/(lb-°F)</i>	0.400
<i>Densidad del lodo, lb/gal</i>	15.600
<i>Conductividad termica de la formación, Btu/(ft. °F-hrs)</i>	1.300
<i>Calor especifico de la formación, Btu/(lb-°F)</i>	0.200
<i>Densidad de la formación, lb/ft3</i>	165.000
<i>Temperatura de la superficie de la tierra, °F</i>	89.000
<i>Gradiente geotermico, °F/ft</i>	0.013
<i>Coficiente de transferencia de calor (TP)</i>	30.000
<i>Coficiente de transferencia de calor (Anular)</i>	1.000

Tabla 5.1 Parámetros de entrada para el calculo de la temperatura del lodo en el anular.

Con los datos de la tabla 5.1 y las ecuaciones 4.3-1 y 4.3-7 se obtuvieron las temperatura en el anular para diferentes tiempos los resultados son mostrados en la figura 5.11

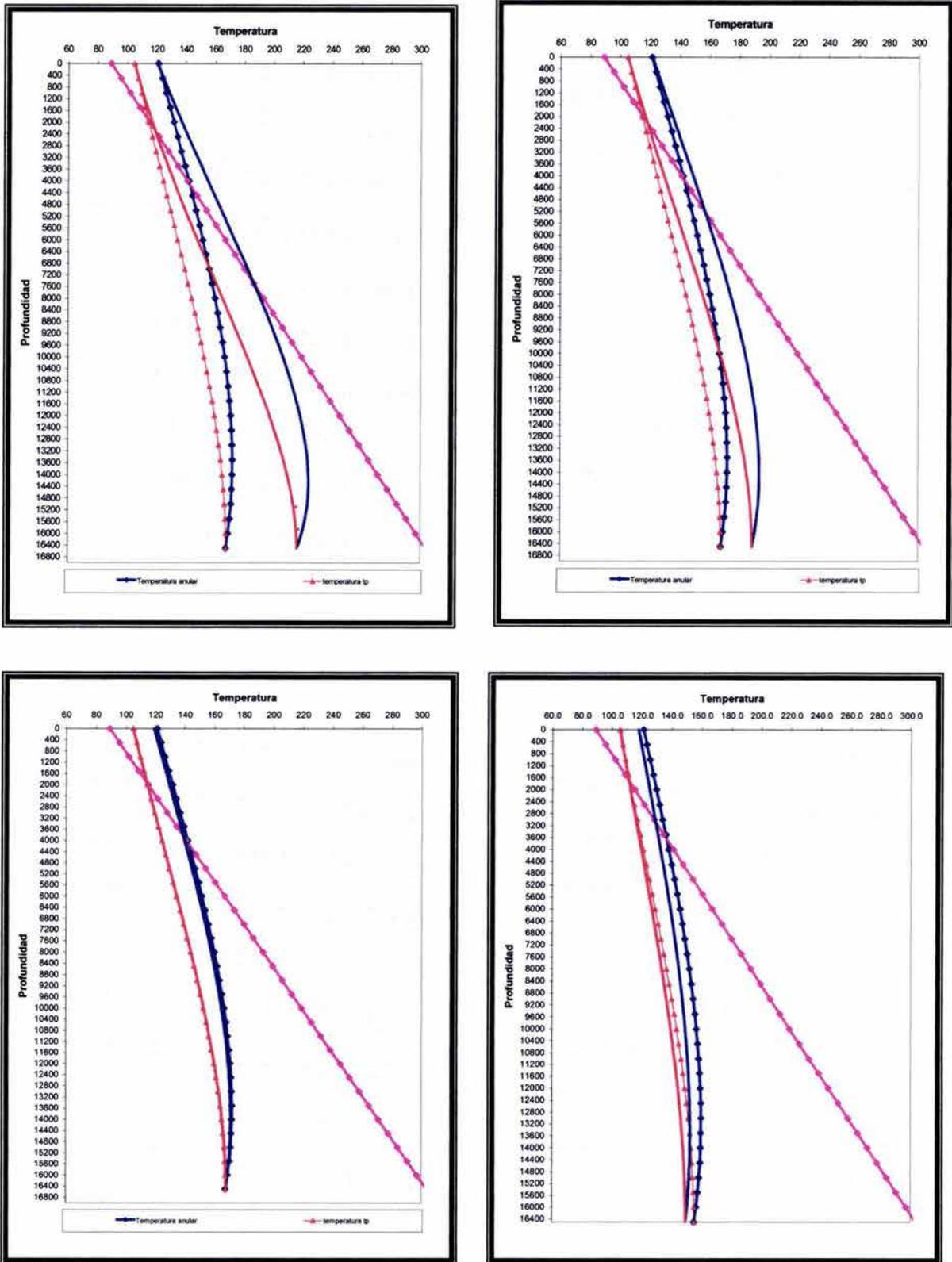


Fig. 5.11 Efecto del cambio de temperatura (°F) en el anular del fluido de perforación con el tiempo de circulación y la profundidad (Pies), para 1, 10, 88, 200, hrs., respectivamente.

5.7.2 Temperatura de la formación para una profundidad específica.

La temperatura de la formación es función de la distancia radial y del tiempo. Nosotros mostramos el efecto de la modificación de la temperatura de la formación para el fondo del pozo a 5000 metros y para el punto de máxima temperatura en el anular el cual se encuentra a 4024 metros. Se puede ver de las figuras 5.12 y 5.13 que el punto que presenta el cambio de temperatura más grande es la pared del pozo, lo cual nos corrobora que es el punto más susceptible a falla. Podemos apreciar que la temperatura de la formación alrededor de pozo decrece con el tiempo de la misma manera que lo hace la temperatura en la pared del pozo la cual ha alcanzado el permanente para este ejemplo. Vemos que la región cercana al pozo a medida que trascorra el tiempo se aproximará a la temperatura del anular.

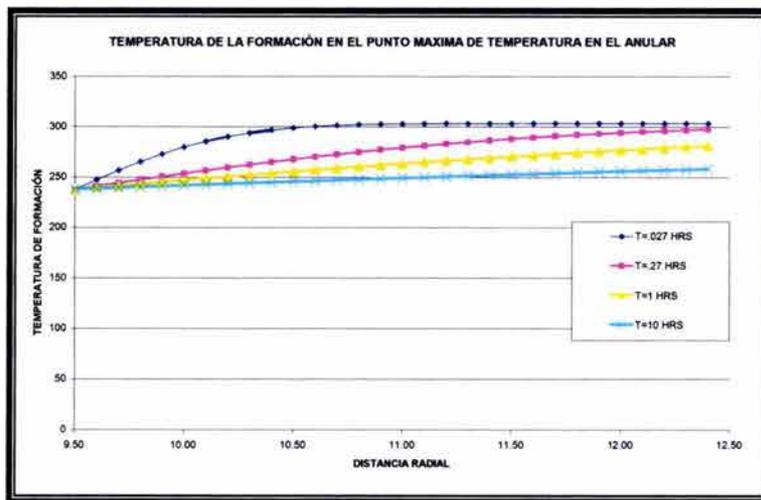


Fig. 5.12 Cambio de temperatura en la formación para una profundidad específica de 5000 metros, en función de tiempo y distancia radial.

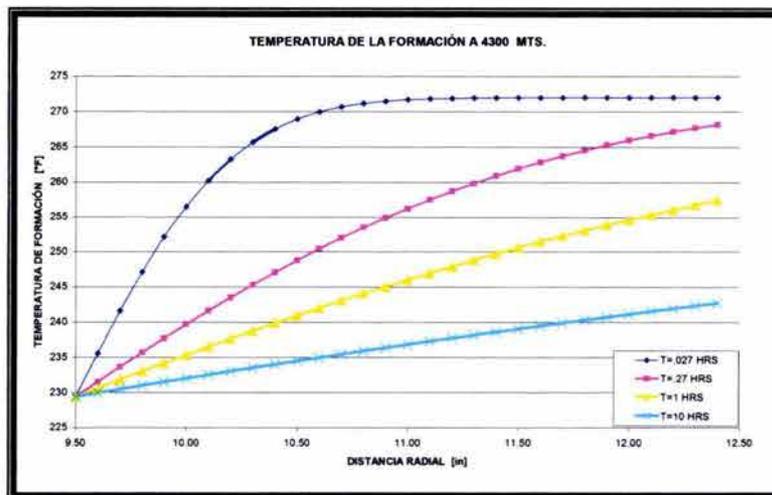


Fig. 5.13 Cambio de temperatura en la formación para una profundidad de 4024 metros, donde se alcanza la máxima temperatura en el anular, en función de tiempo y distancia radial.

Del análisis realizado para el cálculo de la temperatura del fluido de perforación en el anular en función del tiempo observamos que la sección de agujero descubierto de 2800-5000 metros se encuentra durante la circulación del fluido en enfriamiento generalmente. Solo una pequeña parte cerca de zapata o última TR asentada para ciertas condiciones operativas está bajo un muy ligero calentamiento. La figura 5.14 nos muestra este caso, se puede observar que la temperatura de la formación se incrementa en la pared e incrementa la temperatura de la formación cercana al pozo este incremento de temperatura alrededor del pozo se va haciendo mayor con el tiempo.

Presentamos este último caso ya que para otros campos puede tener importancia y provocar problemas de colapso de pozo

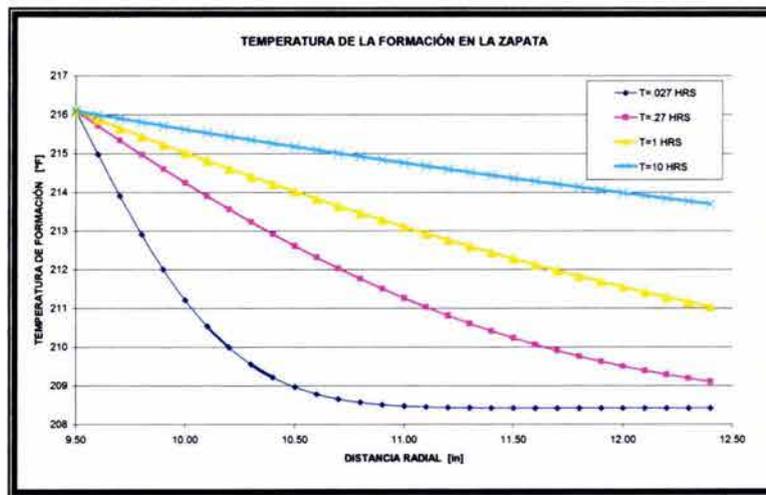


Fig. 5.14 Efecto térmico cuando la temperatura de la pared del pozo por la circulación del lodo es más caliente que la formación.

5.7.3 Presión de poro de la formación para una profundidad específica.

La presión de poro de formación es una función de la distancia radial y del tiempo. Las principales fuerzas que modifican la presión de poro alrededor del pozo son el potencial químico e hidráulico. Para formaciones de baja permeabilidad la temperatura jugará un papel importante y causará una alteración adicional a la presión de poro.

La difusión hidráulica para las lutitas es alrededor de $5.27 \times 10^{-7} \text{ in}^2/\text{s}$ y el coeficiente de acoplamiento es de alrededor de $1 \text{ PSI}/^\circ\text{F}$ y la difusión térmica es de $1.57 \times 10^{-3} \text{ in}^2/\text{s}$. Hemos adoptado estos datos como nuestros valores para nuestro campo

El cambio de la presión de poro debido al efecto químico en la formación puede ser observado, si consideramos que el coeficiente de acoplamiento térmico es igual a cero. La figura 5.15 muestra este caso y se puede

ver que la presión debido al efecto químico toma cerca de alrededor de 2 días para estabilizarse alrededor del pozo.

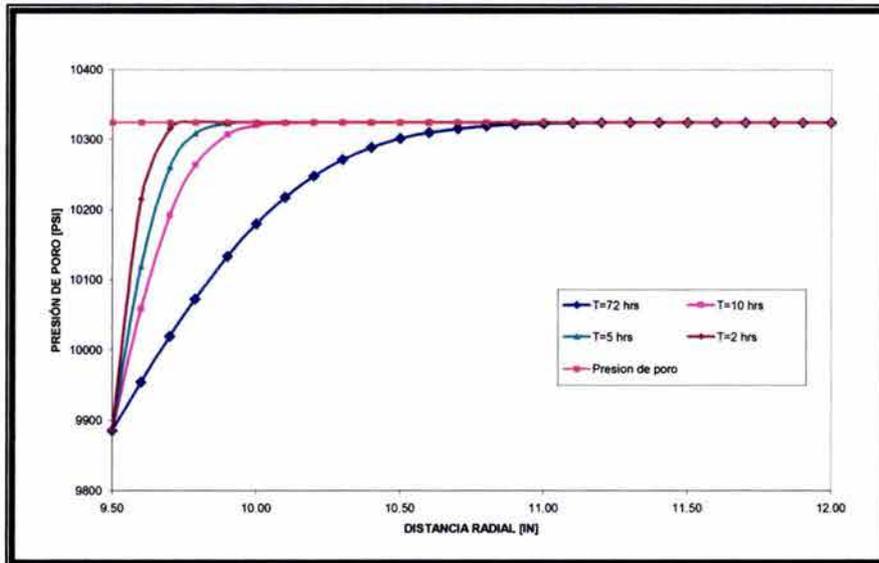


Fig. 5.15 Efecto de la presión poro alrededor del pozo debido al potencial químico sin efecto de temperatura para la profundidad de 4300 metros.

La figura 5.16 muestra la presión de poro acoplada al el efecto térmico, considerando un coeficiente de acoplamiento de 1 PSI/°F. Se puede ver dos cosas la primera es que el cambio en la presión de poro se transmite más rápidamente y que existirá un mayor decremento de la presión de poro alrededor del pozo e inclusive puede llegar a ser menor que la presión en la cara del pozo para coeficiente de acoplamiento altos (Figuras 5.17 y 5.18).

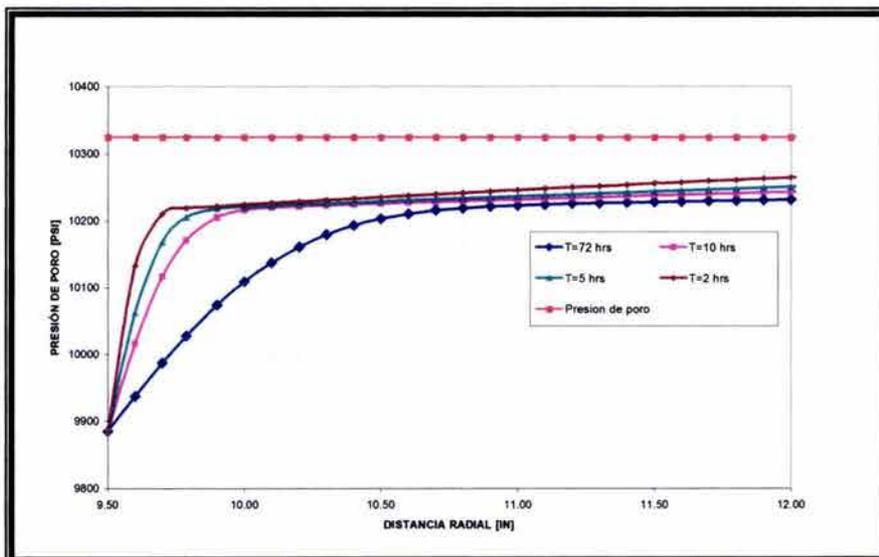


Fig. 5.16. Efecto de la temperatura acoplada a la presión de poro para la profundidad de 4300 metros, para un coeficiente de acoplamiento de 1PSI/°F.

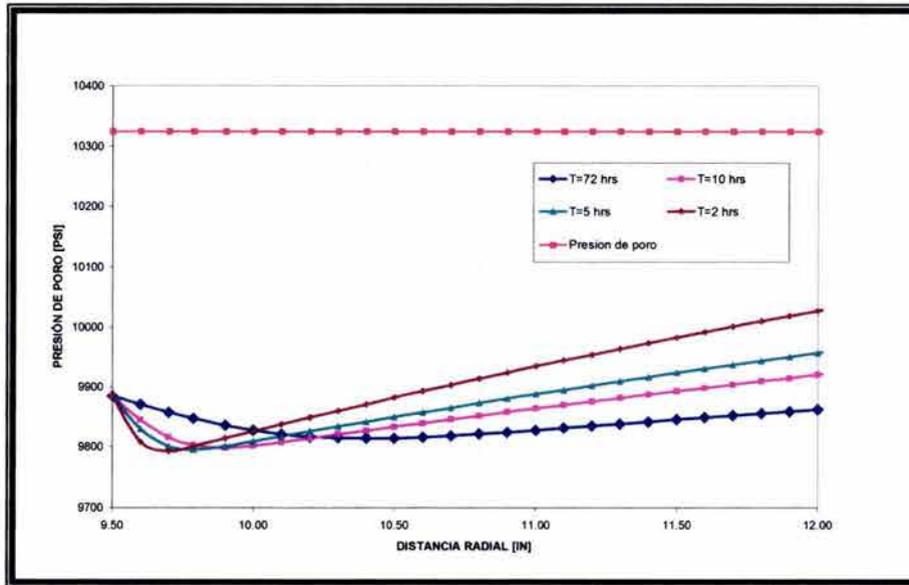


Fig. 5.17 Efecto de la temperatura acoplada a la presión de poro para la profundidad de 4300 metros, para un coeficiente de acoplamiento de 5PSI/°F.

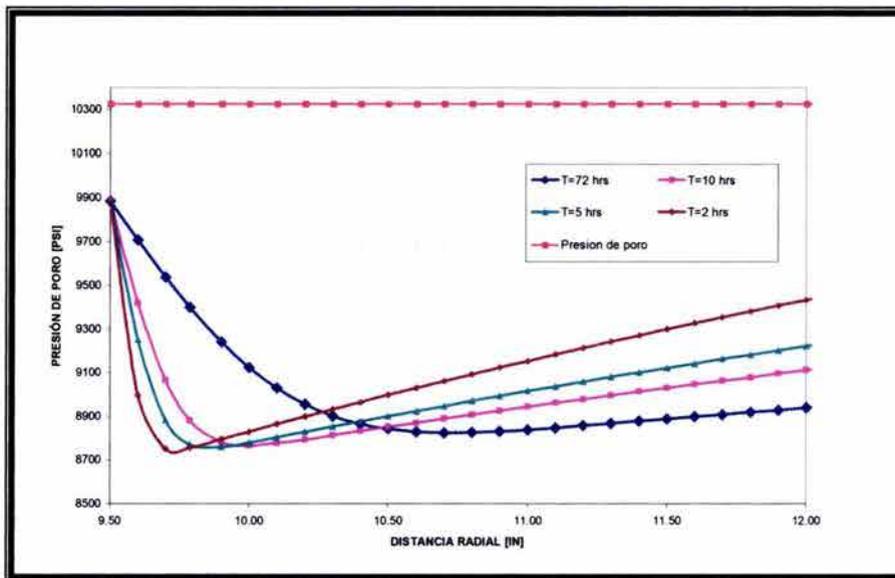


Fig. 5.18 Efecto de la temperatura acoplada a la presión de poro para la profundidad de 4300 metros, para un coeficiente de acoplamiento de 15PSI/°F.

La razón de una más rápida transmisión de la presión de poro es que la difusividad térmica es mucho más rápida que la química.

De igual forma un calentamiento de la formación provocara un rápido cambio de la presión de poro alrededor de la formación y este puede llegar a ser mayor; una pulgada adentro de la pared. Esto trae como consecuencia un pozo más inestable.

5.8 Densidad equivalente de colapso y presión de fractura de pozo.

La presión de colapso de pozo y la presión de fractura son funciones de tiempo y de la distancia radial por la dependencia que existe con la presión de poro y la temperatura de la formación.

Una presión de poro más baja causara mejora en la estabilidad (colapso), lo que se traducirá en una densidad equivalente de lodo más baja para perforarla. La Fig. 5.19 nos muestra el efecto que provoca el enfriamiento de la temperatura de la formación por el proceso de la circulación del lodo, se puede observar una mejora en la estabilidad, provocada por la reducción de la presión de poro cercana al pozo.

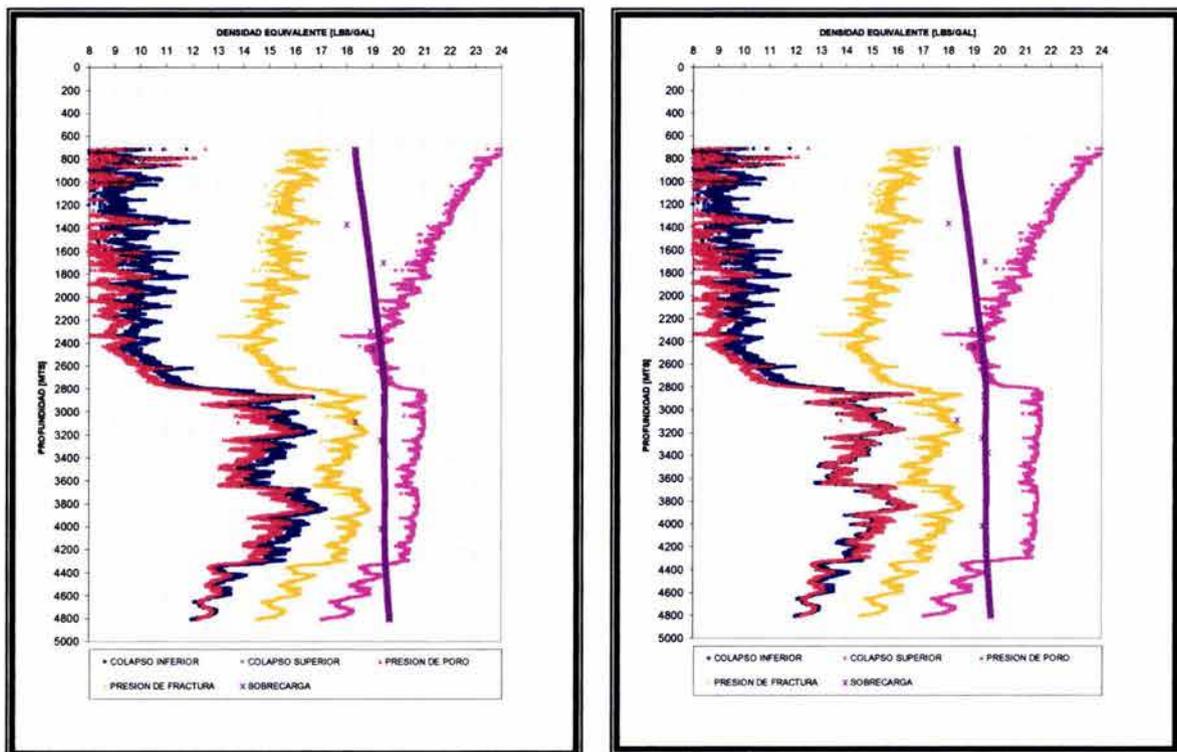


Fig. 5.19 Efecto del incremento de presión debido a la parte térmica en la curvas de densidad equivalente de colapso de pozo, presión de fractura para un coeficiente de aplomamiento de 1 PSI/°F, (Figura de la izquierda) y 15 PSI/°F, (Figura de la derecha).

Además del incremento de la presión de poro, el efecto térmico provoca un relajamiento de los esfuerzos de la roca. La Fig. 5.20 nos muestra el efecto del relajamiento de los esfuerzos en la roca por el efecto de enfriamiento de la temperatura de la formación, debido a la circulación del lodo sobre las densidades equivalentes de colapso y presión de fractura una vez que se ha alcanzado el permanente en la temperatura en el anular.

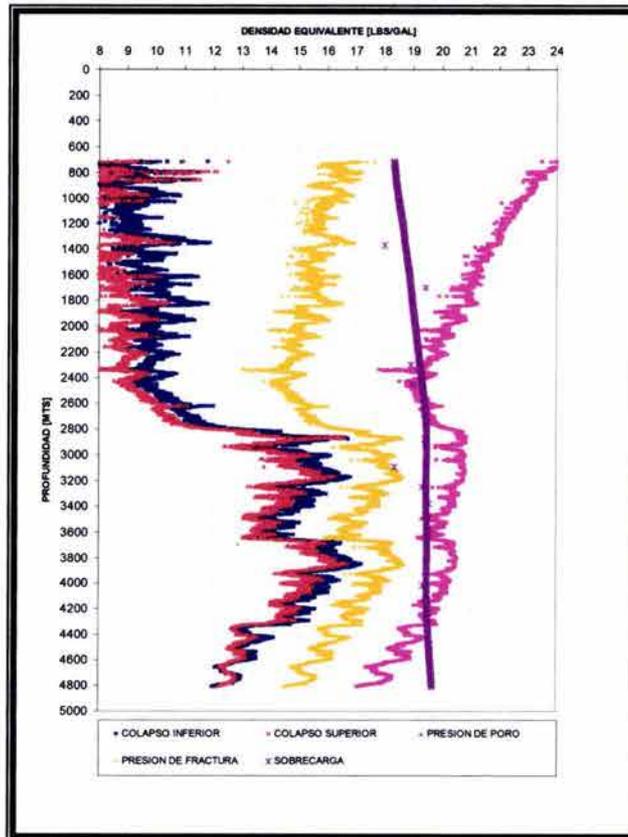


Fig. 5.20 Efecto del relajamiento de los esfuerzos debido al enfriamiento de la temperatura de la formación en las curvas de colapso y presión de fractura.

El efecto químico modifica la presión de poro en la pared del pozo y no es modificada por efecto térmico es decir que permanece constante. Sin embargo para la región cercana al pozo la difusión térmica e hidráulica modificarán la presión de poro. Lo anterior no quiere decir que el efecto térmico no cause cambios en la densidad equivalente de colapso para perforar ya que la matriz de la roca sufrirá un relajamiento del esfuerzo debido al fluido de perforación más frío que la formación.

La presión de fractura también es función de la distancia radial y del tiempo. En la pared del pozo es reducida debido a la parte térmica y a la parte química como se puede ver en las figura 5.19 y 5.20.

En la figura 5.21 mostramos el efecto combinado del efecto mecánico, térmico y químico en la estabilidad de pozo. Algunas de las consideraciones son que se perforo con un lodo base agua, con una eficiencia de membrana de 0.3, con una actividad del agua del fluido de perforación de 0.71 equivalente a una concentración de 28 % de CaCl_2 , que la temperatura en el anular ha alcanzado el

permanente, y que toda la tercera etapa se encuentra en enfriamiento por el proceso de circulación.

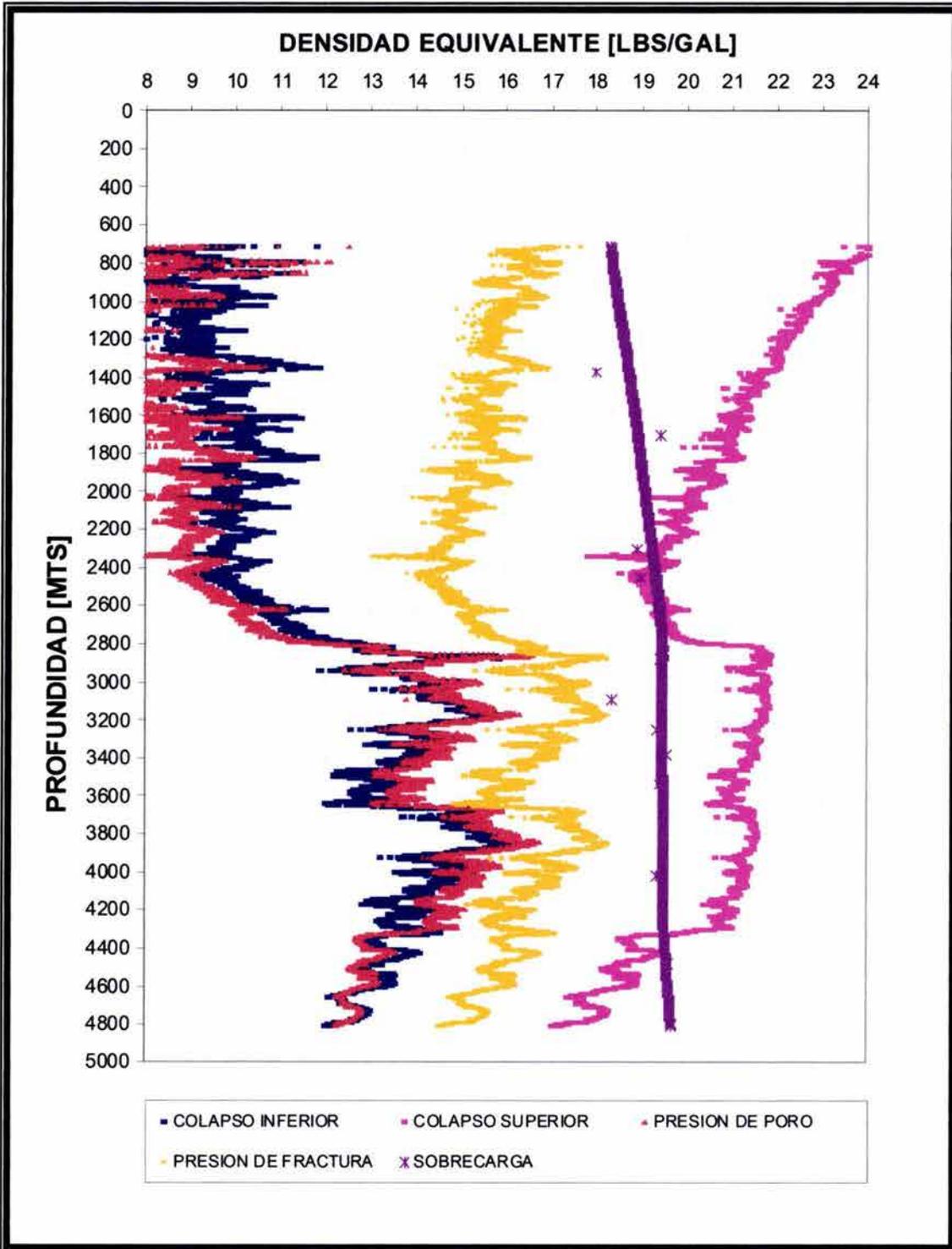


Fig. 5.21 Efecto combinado de la contribución mecánica, térmica y química en las densidades equivalentes de colapso y presión de fractura en la estabilidad de pozo, resultado de aplicar el modelo propuesto.

En este estudio además se consideró que la resistencia a la compresión uniaxial de las lutitas es constante, lo cual no es cierto ya que cuando una lutita es expuesta a un fluido de perforación, la resistencia de la lutita varía, causando una reducción en su resistencia con el tiempo de exposición, originando una dependencia de tiempo adicional en la estabilidad de pozo en la pared. Reducciones hasta de un 40% en la resistencia de la lutita son alcanzadas después de un tiempo de estabilización. Existen modelos en la literatura que nos permite calcular la resistencia de la lutita con el tiempo de exposición y los parámetros de entrada son obtenidos de pruebas de laboratorio. Sea visto que aun cuando las lutitas son expuestas por largos periodos de tiempo, reduciendo su resistencia estas no tiene un cambio significativo en la densidad equivalente de lodo para evitar el colapso de pozo.

5.9 Colapso de pozo por pérdida de la resistencia cohesiva de la roca.

Los constantes ciclos de circulación del fluido de perforación durante la perforación de un pozo hacen que las formaciones de abajo sean enfriadas, originando micro fracturas ya que la presión de poro disminuye y por consiguiente su presión de fractura.

Lo anterior significa que el enfriamiento de las formaciones cuando el fluido de perforación esta siendo circulado y posteriormente el calentamiento de la roca cuando la circulación es parada debilitan las rocas, sobre todo en lutitas frágiles. El debilitamiento de la roca hace que disminuya la resistencia cohesiva de los granos de la roca y por consiguiente su resistencia a la compresión.

Es claro el papel que juega el efecto térmico en este caso ya que puede llegar a ser importantes a tiempos largos.

La figura 5.22 muestra el efecto de colapso de pozo cuando la resistencia cohesiva de la roca es perdida (cero) por la circulación del fluido de perforación durante un tiempo largo. Las consideraciones son las mismas que fueron hechas para la figura 5.21, sin embargo; se puede apreciar al comparar los resultados con los obtenidos en la figura 5.21 que una vez que sea perdido la resistencia cohesiva de la roca, la ventana operacional se vuelve más crítica y como consecuencia las condiciones de estabilidad empeoran.

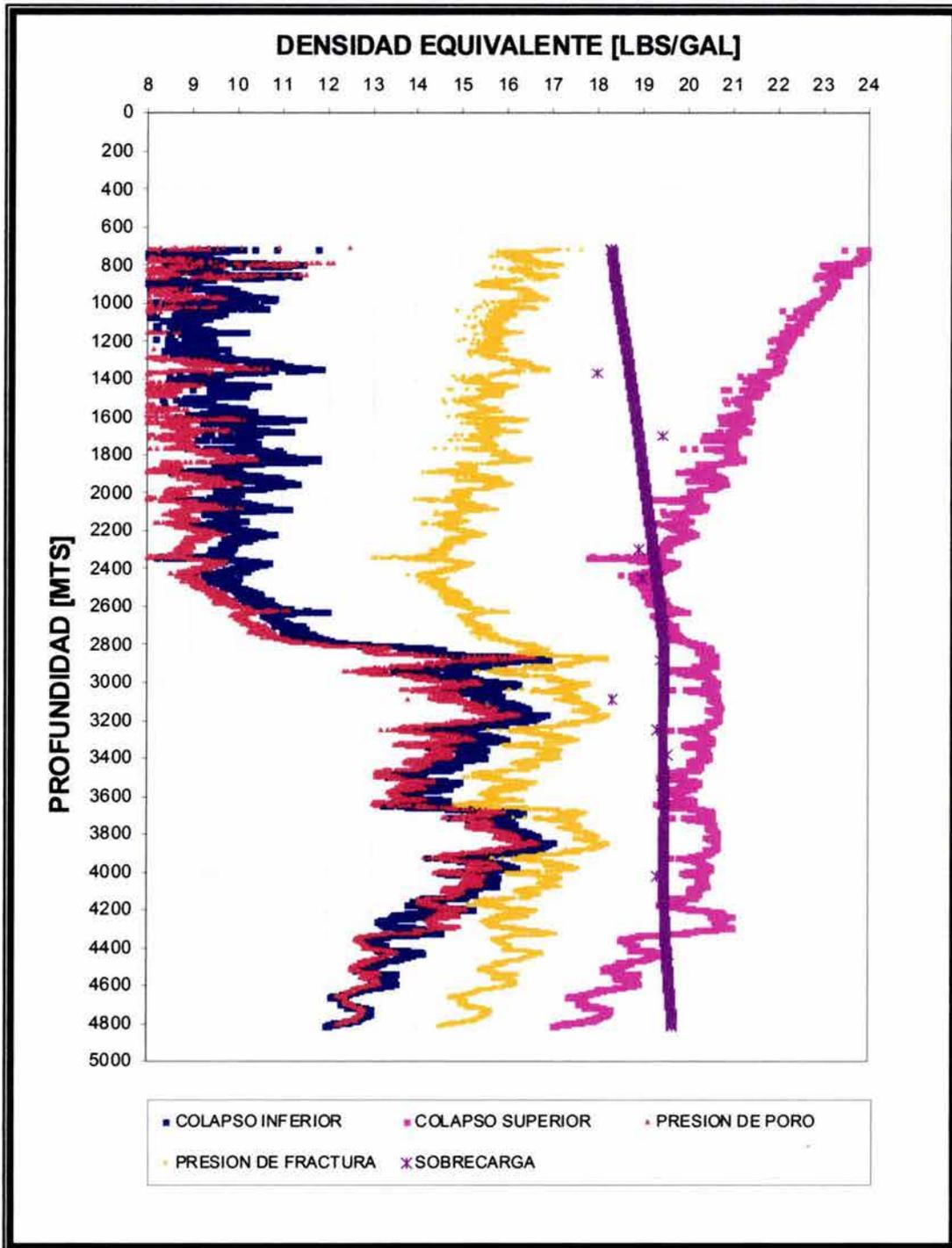


Fig. 5.22 Efecto de la pérdida de la resistencia cohesiva de la roca debido a la circulación del lodo de perforación.

CAPITULO VI

Resumen, Conclusiones Y Recomendaciones.

Se desarrollo un modelo en tres dimensiones que considera los efectos químicos, térmicos y mecánicos para el análisis de estabilidad en lutitas durante la perforación.. La presión de poro de formación fue acoplada a los efectos térmicos considerando solo conducción. Además la temperatura de la formación es desacoplada de la presión de poro debido a que el coeficiente de acoplamiento es muy bajo comparada con la difusividad térmica de las lutitas. El problema desacoplado es resuelto analíticamente con las condiciones iniciales y de frontera apropiadas usando las transformadas de Laplace.

Fueron examinadas las fallas en tensión y de corte para determinar las densidades de lodo apropiadas para estabilizar un pozo. Los criterios de falla de Mohr-Coulomb y el Druker-Prager fueron usados para determinar las condiciones de falla de corte, estos criterios además fueron modificados para incluir las contribuciones de la parte química y térmica. La falla en tensión es considerada que ocurrirá una vez que el esfuerzo principal compresivo menor excede la resistencia en tensión de la roca. El criterio de Mohr-Coulomb es preferido en esta tesis ya que se obtienen densidades de lodo críticas más conservativas, además de requerir un análisis menos complejo por la incorporación de la parte química y térmica.

Son presentadas gráficas de densidades de lodos equivalentes contra profundidad, para colapso de pozo y presión de fractura las cuales nos permite seleccionar los requerimientos de densidades y salinidades del lodo para estabilizar un pozo. La distribución de la presión de poro es además presentada para una profundidad específica en la región cercana al pozo.

Este estudio revela que la falla de pozo puede ocurrir dentro de la región cercana al pozo antes de que ocurra en la pared, lo que significa que la pared del pozo puede no ser la posición más inestable. Por lo anterior un análisis de estabilidad en la región cercana al pozo es necesario. Esfuerzos de colapso altos mayores a la resistencia de la roca llevan a la falla en la pared de pozo.

Los efectos poroelásticos, químicos y térmicos, son examinados para ver sus efectos en la falla de la roca.

Una actividad del lodo más grande que la actividad del agua en las lutitas genera flujo de agua hacia la formación lo cual no es deseado. Regularmente la incorporación de sales al fluido de perforación baja su actividad por debajo de la actividad del agua en las lutitas mejorando la estabilidad. La eficiencia de membrana es además un factor importante para controlar la osmosis química. El incremento de la eficiencia de membrana para obtener una membrana semipermeable idealizada, es una alternativa para mejorar la actividad en las lutitas.

Fue realizado un análisis de sensibilidad para la presión de pozo, actividad del lodo, la eficiencia de membrana, la difusividad hidráulica, la difusividad térmica, el efecto de enfriamiento del fluido de perforación. El estudio de sensibilidad es realizado manteniendo constante todos los parámetros de entrada y variando solo el de interés.

El efecto térmico es iniciado por el desbalance entre el fluido de perforación y las formaciones de lutitas. La distribución de la temperatura no cambia significativamente con el tiempo durante la circulación del fluido, por lo tanto la aproximación en estado permanente fue utilizada aquí para calcular la temperatura del lodo a diferentes profundidades y variaciones de temperatura de la roca. El enfriamiento de las formaciones, lo cual es usual durante la perforación de la tercera etapa en el campo se encontró que es de gran ayuda para mantener la estabilidad del agujero. Lodos fríos reducen la densidad de lodo requerida para colapso de pozo y presión de fractura. Lodos calientes pueden producir inestabilidad en las lutitas y no son deseados en las operaciones de perforación. El efecto de acoplamiento de la temperatura de la roca en la presión de poro es controlado por el coeficiente de acoplamiento el cual es siempre positivo, para las lutitas. Los valores experimentales de los coeficientes de acoplamiento de las arcillas son muy pequeños (1psi/°F), estos son considerados como el límite más bajo para las lutitas. Por lo tanto las formaciones de lutitas con coeficientes de acoplamientos positivos determinan que enfriamiento de la formación nos lleva a un mejoramiento de la estabilidad en lutitas. Estos análisis son útiles para obtener la temperatura del lodo óptima, particularmente cuando lodos fríos son usados como una alternativa para lograr estabilidad en las lutitas.

Los siguientes parámetros fueron encontrados que son sensibles cuando son modelados en estabilidad de pozos: La Eficiencia de membrana del sistema roca-fluido, la relación entre la actividad del agua del fluido de perforación y la actividad del agua en las lutitas, la presión de pozo, la relación entre la difusividad térmica e hidráulica de las lutitas, el coeficiente de acoplamiento térmico, la expansión térmica y la diferencia de temperatura entre las lutitas y el fluido en los poros.

De los resultados del modelo es importante resaltar el papel del efecto térmico ya que es el responsable de lograr la estabilidad cerca del pozo. Aunque el efecto químico representa la fuerza impulsora para lograrlo, es la parte térmica la responsable de transmitirla rápidamente en la región cercana al pozo. Sin embargo la parte térmica puede no ser positiva cuando la formación es calentada en lugar de ser enfriada.

Es importante realizar un mayor esfuerzo en la determinación y medición de los parámetros de entrada para cada campo, sobre todo en aquellos donde la parte térmica juega un papel importante, con la finalidad de obtener mejores resultados que logren una mayor estabilidad de pozo y ahorros económicos durante la perforación.

REFERENCIAS.

- Aadnoy, B. S., Chenevert M. E., (1987), " Stability of Highly Inclined Boreholes", SPE/IADC 16052, Presented at SPE Drilling Conference in New Orleans, March 15-18, pp. 25-41.
- Biot, M. A., (1956), " General Solution of the Equations of Elasticity and Consolidation for a porous Material," Journal Applied Mechanics, Vol. 23, March, pp. 91-96.
- Bird, R. B. Stewart, W.E. and Lightfoot, E. N., (1960), "Transport Phenomena," John Wiley & Sons. Inc.
- Bol, G. M., Wong, Davidson, Woodland, (1994), "Borehole Stability in Shales," SPE 25975, Presented at the SPE European Petroleum Conference in Cannes, November 16-18, pp. 87-94.
- Bourgoyne A. T., Millheim K.K., Chenevert M.E., Young F. S., (1991), "Applied Drilling Engineering," SPE Textbooks Series, Vol. 2, SPE, Richardson, TX.
- Bradley W.B. "Failure of inclined Boreholes," Journal of Energy Resource Technology , February 19, pp. 92-102.
- Bradley W.B. "Mathematical Concept – Stress Cloud Can Predict Borehole Failure," The Oil and Gas Journal , Transactions of the ASME, Vol. 101 December, pp. 232-239.
- Breckels, I.M., Van Eekelen, H.A.M., (1981), "Relationship Between Horizontal Stress and Depth in sedimentary Basins," JPT /SPE 10336, Presented at the SPE Annual Technology Conference in San Antonio, October 5-7, pp. 2191-2199.
- Carslaw, H.S. and Jaeger, J. C., (1959), "Conduction of Heat in Solids," 2nd editions, Clarendon Press.

- Chen G. Ewy, R. T., (2002), " Investigation of the Undrained Loading Effect and Chemical Effect on Shale Stability," SPE/ISRM 78164, Presented at the SPE/ISRM Rock Mechanics Conference in Irving, Texas, October 20-23, pp. 1-10.
- Chenevert, M. E., (1970), "Shale Control with Balance-Activity Oil-Continuous Muds," SPE 2559, presented at SPE 44th Annual Fall Meeting in Denver, Colorado., September 20- October 1, pp. 1309-1316.
- Choi, S. K., (1996), "Modeling of Effects of Drilling Fluid Temperature on Wellbore Stability," SPE/ISRM 47304, presented at the SPE/ISRM Eurock 98 in Trondheim, Norway, July 8-10, pp. 471-477.
- Coates G. R. and Denoo, S. A., (1981), " Mechanical Properties Program Using Borehole Analysis and Mohrs Circle," SPWLA 22nd Annual Logging Symposium.
- Cui, L., Abousleiman, Y., Cheng, A. H., Roegiers, J. C., (1999) "Time-Dependent Failure Analysis of Inclined Boreholes in Fluid-Saturated Formations," Journal of Energy Resources Technology, Vol. 121, March 1999, pp. 31-39.
- Darley, H. C. H., Gray, George R., (1991), "Composition and Properties of Drilling and Completion Fluid," Gulf Publishing Company, Fifth Edition.
- Detournay, E., Cheng, H. D., (1988), "Poroelastic Response of a Borehole in a Non-hydrostatic Stress Field, " Int. Journal Rock Mechanic Min. Sci. & Geomech., Vol.25 No.3, pp. 171-182.
- Druker, D. C. and Prager, W., (1952), "Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design," Quat. Of Applied. Math., Vol. 10, pp, 157-165.
- Edwardson, M. J., " Calculation of Formation Temperature Disturbances Caused by Mud Circulation", SPE 124, presented at the 36th Annual Fall Meeting of SPE in Dallas, October 8-11, pp.416-426.
- Fjaer, E., "Petroleum Related Rock Mechanics" Publicado por Elsevier Science 1992.

- Fjaer, Erling., Holt, Rune M., (2002), "Mud Chemistry Effects on Time-Delayed Borehole Stability Problems in Shales," SPE/ISRM 78163, Presented at the SPE/ISRM Rock Mechanics Conference in Irving, Texas, October 20-23, pp. 1-7.
- García Valenzuela Carlos, "Estabilidad de Pozos," Tesis DEPMI UNAM 1992. Dir. Dr. Daniel García Gavito.
- Hale, A. H., Mody, F. K., (1992), "The Influence of chemical Potential on Wellbore Stability," SPE23885, presented at the IADC/SPE Drilling Conference in New Orleans, February 18-21, pp.207-216.
- Holmes, Charles S., Swift, Samuel C., (1970), "Calculation of Circulating Mud Temperatures," JPT/SPE 2318, Presented at the SPE 43rd Annual Fall Meeting in Houston, Texas, September 29 - October 2, pp. 670-674.
- Hottmann, C.E., Johnson R.K., (1965), "Estimation of Formation Pressures from Log-Derived Shale Properties", JPT/SPE 1110, presented at 40th Annual SPE Fall Meeting in Denver Colorado, October 3-6, pp. 717-722.
- Jaer, J. C., "Fundamental of Rock Mechanics " Publicado por Chapman and Hall, 3ed. Ed. 1979.
- Jones, J. F., Barree R. D., (1996), "Mechanical Stability Analysis from Drilling Data Alone," SPE 36443, Presented at the 71st Annual Technical Conference and Exhibition in Denver, Colorado, October 6-9, pp. 287-293.
- Kabir, C. S., Hasan A. R., (1992), "Determining Circulating Fluid Temperature in Drilling, Workover and Well Control Operations," SPE 24581, presented at the 67th Annual Technical Conference and Exhibition of the SPE in Washington, DC., October 4-7, pp. 341-351.
- Kabir, C. S., Hasan A. R., (1996), "A Mechanistic Model for Circulating Fluid Temperature," SPE 27848, presented at the SPE Journal, June , pp. 133-143.

- Kurashige, M., (1989), "A Thermoelastic Theory of Fluid -Filled Porous Materials," *International Journal Solids Struct.*, 25(9), pp. 1039-1052.
- Lal, M. (1999), "Shale Stability: Drilling Fluid Interaction and Shale Strength," SPE 54356, Presented at the SPE Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference in Caracas, Venezuela, April 21-23, pp. 1-10.
- Lomba, Rosana F. T., Chenevert M. E., Sharma, Mukul M., (2000), " The Ion-selective Membrane Behavior of Native Shales," *Journal Petroleum Science & Engineering*, Vol. 25, pp.9-23.
- Lomba, Rosana F. T., Chenevert M. E., Sharma, Mukul M., (2000), " The Role of Osmotic Effects in Fluid Flow through Shales," *Journal Petroleum Science & Engineering*, Vol. 25, pp.25-35.
- Matthews W.R., Kelly John, (1967), "How to Predict Formation Pressure and Fracture Gradient," *The Oil and Gas Journal*, February 20, pp. 92-106.
- Maury, Vincent., Guenot, Alain., (1993), "Practical Advantages of Mud Cooling System For Drilling," SPE 25732, Presented SPE/IADC Drilling Conference in Amsterdam, February 23-25, pp. 42-48.
- Mclean, M.R., Addis, M.A., (1990), " Wellbore stability Analysis: A Review of Current Methods of Analysis and Their Field Application," IADC/SPE 19941, Presented at the IADC/SPE Drilling Conference in Houston, Texas, February 27- March 2, pp. 261-274.
- Mody, F. K., Hale, A. H., (1993), "Borehole Stability Model to Couple the Mechanics and Chemistry of Drilling Fluid/Shale Interactions," SPE 25728, Presented at the SPE Drilling Conference in Amsterdam, February 23-25, pp. 473-490.
- Pavón Prevé José Manuel, " Estabilidad mecánica de pozos en lutita" Tesis DEPMI UNAM 1992. Dir. Dr. Vicente Casariego.
- Ramey, H. J., (1962), " Wellbore Heat Transmission," SPE 96, Presented at 36th Annual Fall Meeting of SPE in Dallas, October 8-11, pp. 427-435.

- Raymond, L. R., (1969), "Temperature Distribution in a Circulating Drilling Fluid," SPE 2320, Presented at SPE Symposium on Drilling and Rock Mechanics in Austin, Texas, June 14-15, pp. 333-341.
- Rice, J. R. and Cleary, M. P., (1976), "Some Basic Stress Diffusion Solutions for Fluid-Saturated Elastic Porous Media with Compressible Constituents," Reviews of Geophysics and Space Physics, Vol. 14, No.2, pp. 227-241.
- Santarelli, F. J., Aquitaine, Elf, Chenevert, Osisanya, "On the Stability of Shales and Consequences in Terms of Swelling and Wellbore Stability," IADC/SPE 23886, presented at the IADC/SPE Drilling Conference in New Orleans, February 18-21, pp. 391-400.
- Somerton, W. H., (1992), "Thermal Properties and Temperature-Related Behavior of Rock/Fluid Systems," Development in petroleum Science, 37, Elsevier Science Publishing Company, Inc.
- Tang, Lin., Luo, P., (1998), "The Effect of the Thermal Stress on Wellbore Stability," SPE 39505, Presented at the SPE India Oil and Gas Conference and Exhibition in New Delhi, India, February 17-19, pp. 85-94.
- Timoshenko., "THEORY OF ELASTICITY" Publicado por McGraw-Hill Book Company Inc. Second Edition 1951.
- Tragesser, A. F., Crawford, Paul. B., Crawford, Horace R., (1967), "A Method for Calculating Circulating Temperatures," SPE 1484, Presented at SPE 41st Annual Fall Meeting in Dallas, Texas, October 2-5, pp. 1507-1512.
- Wang Hebert F., (2000), "Theory of Linear Poroelasticity with Applications of Geomechanics and Hydrogeology," Published by Princeton University Press.
- Wang, Y., Papamichos, E., (1994), "Conductive Heat Flow and thermally induced Fluid Flow around a Well Bore in a Poroelastic Medium," Water Resources Research, Vol. 30, No. 12, December 1994, pp. 3375-3384.
- Yew, C. H., Liu, G., (1992), "Pore Fluid and Wellbore Stabilities," SPE 22381, Presented at the SPE International Meeting On Petroleum Engineering in Beijing, China, March 24-27, pp. 519-527.

- Yoshida, C., Ikeda, B., Eaton, B.A., (1996), "An Investigative Study of recent Technologies Used for prediction, Detection, and Evaluation of Abnormal Formation Pressure and Fracture Pressure in North and South American," IADC/SPE 36381 Presented at the IADC/SPE Asia Pacific Drilling Technology Conference, September 9-11, pp. 131-141.
- Yu, M., Chen, G., Chenevert, M. E., Sharma, M. M., (2001), " Chemical and Thermal Effects on Wellbore Stability of Shale Formations," SPE 71366 Presented at the SPE Annual Technical Conference and Exhibition in New Orleans, Louisiana, September 30 – October 3, pp. 1-11.