UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"CONSTRUCCION Y PROPIEDADES DE ALGUNAS ALGEBRAS DE BANACH"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

FRANCISCO JAVIER TORRES AYALA

DIRECTOR DE TESIS: DR. GUILLERMO GRABINSKY STEIDER

2004

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

VNIVERSDAD NACIONAL
AVPNºMA DE
MEXICO

ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ
Jefe de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
" Construcción y propiedades de algunas
álgebras de Banach "

realizado por Francisco Javier Torres Ayala

con número de cuenta 9537076-3 , quien cubrió los créditos de la carrera de:

Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario Dr. Guillermo Grabinsky Steider

Propietario Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco

Propietario Dr. Armando García Martínez

Suplente Dr. Francisco Marcos López García

Suplente Mat. César Eduardo Sousa Mondragón

Consejo Departamental de Matemáticas

Dr. José Antonio Gomez Ortega

A mi familia

Índice General

Introducción

En este trabajo presentamos una introducción a los objetos conocidos como álgebras de Banach, dando algunos de los conceptos y proposiciones fundamentales e ilustrándolos con algunos ejemplos.

El trabajo está dividido en tres partes. La primera introduce a las álgebras de Banach y el espectro de los elementos de un álgebra de Banach, una herramienta importante en su estudio, para terminar con algunos ejemplos. La segunda parte esta dedicada al estudio de las medidas de Haar y la tercera parte está dedicada a una álgebra de Banach particular, $L_1(G)$.

En el primer capítulo introducimos el concepto de álgebra. Un álgebra es un espacio vectorial dotado de una operación binaria. Introducimos concetos como son la invertibilidad, ideales, ideales regulares, funcionales lineales multiplicativas, radical de Jacobson, semisimplicidad e involuciones. Queremos destacar cómo los conceptos algebraicos, como la invertibilidad ó los ideales máximos se ven afectados por la presencia de una norma.

En el segundo capítulo presentaremos el espectro. Probaremos que es compacto, no vacío y daremos la fórmula del radio espectral. Además vemos aplicaciones, entre las cuales está el Teorema de Gelfand Mazur y la equivalencia, en el caso conmutativo, entre el hecho de que un elemento esté en el radical de Jacobson del álgebra y que su radio espectral sea cero.

En el tercer capítulo presentaremos la transformada de Gelfand para álgebras de Banach conmutativas con uno y sin uno (en este último caso pidiendo que existan ideales regulares propios). Veremos que la transformada de Gelfand es inyectiva si y sólo si el álgebra es semisimple y daremos un criterio para que la transformada sea una isometría.

En el capítulo 4 nos ocuparemos de manera más detallada de algunos ejemplos de álgebras de Banach. Los ejemplos que vemos son: las funciones continuas sobre un compacto, las funciones continuas sobre un espacio localmente compacto que se anulan en el infinito, las funciones analíticas en el disco unitario y las funciones acotadas casi dondequiera sobre un espacio de medida. En cada ejemplo veremos que la transformada de Gelfand es una isometría.

A partir del capítulo 5 iniciamos la construcción y el estudio de $L_1(G)$. En este capítulo presentaremos a los grupos topológicos localmente compactos ilustrándolos con algunos ejemplos.

En el sexto capítulo presentaremos una prueba, basada en la que da Halmos [Halmos], de la existencia de medidas de Haar sobre grupos topológicos localmente compactos Hausdorff y probaremos la unicidad cuando el grupo es segundo numerable. La motivación de la construcción de la medida de Haar se basa en la dada por Nachbin [Nachbin].

Como su nombre lo indica el capítulo 7 está dedicado a la función modular. Lo incluimos porque pensamos que para entender a $L_1(G)$ es necesario comprender bien las medidas de Haar y cómo se relacionan las medidas derechas e izquierdas con la estructura del grupo.

En el octavo capítulo concretamos algunas de las proposiciones dadas anteriormente. Presentamos explícitamente las medidas de Haar para algunos grupos importantes, como son las matrices invertibles (de 2×2).

En el último capítulo nos ocupamos de $L_1(G)$ presentando la multiplicación en esta álgebra: la convolución. Nos preguntamos cuándo el álgebra es conmutativa, cuándo tiene uno, probamos que siempre tenemos identidades aproximadas, vemos los funcionales lineales multiplicativos y por último la simplicidad de $L_1(G)$.

Parte I

Álgebras de Banach

Capítulo 1

Conceptos básicos

Un álgebra es un espacio vectorial dotado de una operación binaria asociativa, que es distributiva con respecto a la suma y asociativa con respecto al producto por un escalar. Si además el espacio está dotado de una norma que lo hace completo y la norma del producto es menor o igual que el producto de las normas, llamaremos al álgebra un álgebra de Banach. Introducimos los conceptos básicos sobre álgebras y vemos cómo se ven afectados por la presencia de una norma que hace al espacio completo. Si bien los resultados y definiciones presentados en este capítulo y el segundo sirven como una introducción, también son útiles para establecer la estrecha relación entre funcionales lineales multiplicativas e ideales bilaterales regulares máximos así como para presentar la transformada de Gelfand.

Como toda álgebra de Banach es un espacio de Banach utilizaremos muchos conceptos asociados a estos espacios, como las funcionales lineales, la topología débil y la topología débil-$*$. Usaremos también el concepto de red y convergencia de redes, para lo cual vease $A.8$ en el apéndice.

1.1 Propiedades básicas

Comenzamos definiendo nuestro principal objeto de estudio, las álgebras de Banach, ilustrándolas brevemente con algunos ejemplos.

Definición 1.1. *1. Por un álgebra A entendemos un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, dotado de una operación binaria $\cdot : A \times A \to A$ llamada producto o multiplicación que satisface, para $a, b, c \in A$ y z complejo:*

(a) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(b) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *y* $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

(c) $a \cdot (zb) = (za) \cdot b = z(a \cdot b)$

Se dice que A es conmutativa si esta operación es conmutativa y se dice que A tiene uno si existe un neutro para la operación, y a tal neutro lo denotaremos por e o por 1_A.

Un subespacio vectorial B de A se llama subálgebra si es cerrado bajo la multiplicación. En general si A es una álgebra con uno y B es una subálgebra de A, no es necesario que el uno de A esté en B.

2. *Si además el álgebra está dotada de una norma $\|\cdot\|$ de tal forma que el espacio vectorial normado es completo (es decir un espacio de Banach) y esta norma satisfaga*

$$\|a \cdot b\| \leq \|a\|\|b\| \tag{1.1}$$

decimos que el álgebra es un álgebra de Banach.

Si la norma sólo satisface (1.1) decimos que A es un álgebra normada.

Notas: Nos referiremos a (1.1) diciendo que la norma es compatible con la multiplicación; escribiremos ab en lugar de $a \cdot b$; en general se puede hablar de álgebras sobre otro campo que no sean los números complejos, pero para nuestros intereses siempre trabajaremos con el campode los números complejos; se notará que puede darse una definición alternativa de álgebra usando la definición de anillo, pues un álgebra es un anillo que es además espacio vectorial sobre un campo, en nuestro caso el campo de los números complejos.

Para ver algunos ejemplos necesitamos una definición.

Definición 1.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico localmente compacto. Por $C(X)$ denotamos las funciones continuas de X en $\mathbb{C}$ que son acotadas.*

Dada $f \in C(X)$, el soporte de f (denotado $sop(f)$) es la cerradura del conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$; es decir, la cerradura de $f^{-1}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$. Por $C_c(X)$ denotamos el conjunto de funciones continuas de soporte compacto.

Una función $f \in C(X)$ se anula en el infinito si para toda $\varepsilon > 0$ existe $K \subseteq X$ compacto (que depende de ε) tal que para todo $x \in X\backslash K$, $|f(x)| < \varepsilon$. Al conjunto de funciones que se anulan en el infinito las denotaremos por $C_0(X)$. Notamos que toda función en $C_0(X)$ es acotada.

Dada $f \in C(X)$ definimos la norma uniforme o del supremo como

$$\|f\|_{C(X)} = \sup\{|f(x)| : x \in X\} \tag{1.2}$$

Nota: Si X es compacto $C(X)$ y $C_0(X)$ coinciden.

La más conocida álgebra de Banach son los números complejos.

Ejemplo 1.3. *Es fácil verificar que con las operaciones usuales de funciones, $C(X)$ es un álgebra conmutativa y si X es compacto, la función constante uno actúa como uno. Es conocido que $C(X)$ con la norma uniforme es completo (ver por ejemplo [Hewitt-2]). Así, para verificar que $C(X)$ es álgebra de Banach sólo resta probar la compatibilidad de la norma. Pero dadas $f, g \in C(X)$, el número $\|f\|_{C(X)}\|g\|_{C(X)}$ es cota superior de los valores $|f(x)g(x)|$ (variando $x \in X$), así se sigue que $\|fg\|_{C(X)} \leq \|f\|_{C(X)}\|g\|_{C(X)}$.*

Ahora vemos que $C_0(X)$ es también un álgebra de Banach.

Como $C(X)$ es un álgebra de Banach para probar que $C_0(X)$ es un álgebra de Banach es suficiente probar que $C_0(X)$ es un álgebra y es un subconjunto cerrado de $C(X)$.

Primero probamos que $C_0(X)$ *es un álgebra. Sean* $f, g \in C_0(X)$, $z \in \mathbb{C}$ *y* $\varepsilon > 0$.

Sean $K_1, K_2 \subseteq X$ *subconjuntos compactos tales que para todo* $x \in X \setminus K_1$ *y* $y \in X \setminus K_2$

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad |g(y)| < \frac{\varepsilon}{2(|z|+1)}$$

entonces para todo $x \in X \setminus (K_1 \bigcup K_2)$ *tenemos* $|f(x) + zg(x)| < \varepsilon$. *Como* $K_1 \bigcup K_2$ *es compacto concluimos que* $f + zg \in C_0(X)$.

Sean $K_3, K_4 \subseteq X$ *subconjuntos compactos tales que para todo* $x \in X \setminus K_3$ *y* $y \in X \setminus K_4$

$$|f(x)| < \varepsilon^{1/2} \qquad |g(y)| < \varepsilon^{1/2}$$

entonces para todo $x \in X \setminus (K_1 \bigcup K_2)$, $|f(x)||g(x)| < \varepsilon$. *Como* $K_3 \bigcup K_4$ *es compacto concluimos que* $fg \in C_0(X)$.

Vesmos que $C_0(X)$ *es cerrado en* $C(X)$. *Sea* $f \in C(X)$ *y* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *tal que* $\lim_n \|f - f_n\|_{C(X)} = 0$. *Debemos probar que* $f \in C_0(X)$.

Sea $\varepsilon > 0$ *fija y arbitraria.*

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\|f - f_n\|_{C(X)} < \frac{\varepsilon}{2}$. *Entonces para todo* $x \in X$

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + |f_n(x)| \tag{1.3}$$

Como $f_n \in C_0(X)$, *existe* $K \subseteq X$ *subconjunto compacto tal que para todo* $x \in X \setminus K$, $|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. *Por (1.3) tenemos que para todo* $x \in X \setminus K$, $|f(x)| < \varepsilon$.

Definición 1.4. *Sean* $(X, \|\cdot\|_X)$ *y* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *dos espacios vectoriales normados completos, es decir dos espacios de Banach.*

Una función lineal $f : X \to Y$ *se llama* <u>*acotada*</u> *si existe* $M > 0$ *de tal forma que para toda* $x \in X$

$$\|f(x)\|_Y \leq M\|x\|_X \tag{1.4}$$

Definimos la <u>*norma*</u> *de* f *como*

$$\|f\| = \inf\{M > 0 : \|f(x)\|_Y \leq M\|x\|_X \text{ para toda } x \in X \} \tag{1.5}$$

Por $\mathcal{B}(X, Y)$ *denotamos a las funciones lineales de* X *en* Y *que son acotadas.*

Es conocido que (1.5) define una norma que hace a $\mathcal{B}(X, Y)$ completo y que una función lineal $f : X \to Y$ es continua si y sólo si es acotada. Además

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\|_Y : \|x\|_X = 1\} = \sup\{\|f(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1\} \tag{1.6}$$

y que para toda $x \in X$

$$\|f(x)\|_Y \leq \|f\|\|x\|_X$$

(ver [Rudin -2]).

Ejemplo 1.5. *En* $\mathcal{B}(X, X)$ *tenemos estructura de álgebra si definimos la multiplicación como la composición. Dadas* $f, g \in \mathcal{B}(X, X)$ *y* $x \in X$ *tenemos*

$$\|(f \circ g)(x)\|_X \leq \|f\|\|g(x)\|_X \leq \|f\|\|g\|\|x\|_X$$

por lo que $\|f \circ g\| \leq \|f\|\|g\|$. *En consecuencia* $\mathcal{B}(X, X)$ *con la norma (1.5) es un álgebra de Banach.*

Como consecuencia inmediata de la definición de álgebra de Banach obtenemos la siguiente proposición, que nos dice que la multiplicación es continua.

Proposición 1.6. *Sea A un álgebra de Banach.*

1. *La función $p : A \times A \to A$ dada por $p(x, y) = xy$ es continua (en $A \times A$ se toma la topología producto).*
2. *Dado $a \in A$ definimos $\delta_a, \sigma_a : A \to A$ por $\delta_a(x) = xa$ y $\sigma_a(x) = ax$ respectivamente. Entonces, δ_a y σ_a son uniformemente continuas.*

Demostración.
1. Tomemos $(x_0, y_0) \in A \times A$. Note que por la compatibilidad de la norma

$$\begin{aligned} \|p(x,y) - p(x_0,y_0)\| &\leq \|xy - xy_0\| + \|xy_0 - x_0y_0\| \\ &\leq \|x\|\|y - y_0\| + \|y_0\|\|x - x_0\| \end{aligned}$$

así, si $\|x - x_0\| < \min\{1, \varepsilon\}$ y $\|y - y_0\| < \varepsilon$ tenemos

$$\|p(x,y) - p(x_0,y_0)\| < (1 + \|x_0\|)\varepsilon + \varepsilon\|y_0\|$$

2. Por la compatibilidad de la norma con el producto,

$$\|\delta_a(x) - \delta_a(y)\| = \|xa - ya\| = \|(x - y)a\| \leq \|x - y\|\|a\|$$

de donde se sigue la continuidad uniforme de δ_a. La prueba de la continuidad uniforme de σ_a es similar. *Q.E.D.*

Si tenemos un álgebra de Banach con uno, la siguiente proposición nos dice que siempre podemos suponer que la norma del neutro multiplicativo es igual a uno.

Proposición 1.7. *Sea A un álgebra de Banach con uno, al cual denotamos por e. Existe $\|\cdot\|_1$ norma equivalente a $\|\cdot\|$, compatible con la multiplicación de tal forma que $\|e\|_1 = 1$.*

Demostración. Sea σ_a la traslación izquierda por a. Es claro que σ_a es lineal y como

$$\|\sigma_a(x)\| \leq \|a\|\|x\| \tag{1.7}$$

resulta que es acotada y $\|\sigma_a\| \leq \|a\|$ (ver definición 1.4) . Definamos $\|a\|_1 = \|\sigma_a\|$.

Como σ_e es el operador identidad, tenemos que $\|e\|_1 = 1$.

Veamos ahora que las dos normas son equivalentes. Por (1.6)

$$\|\sigma_a\| = \sup\{\|\sigma_a(x)\| : \|x\| \leq 1\}$$

así que

$$\left\|\sigma_a\left(\frac{1}{\|e\|}e\right)\right\| \leq \|\sigma_a\|$$

y entonces $\frac{1}{\|e\|}\|a\| \leq \|\sigma_a\|$. En conclusión

$$\frac{1}{\|e\|}\|a\| \leq \|\sigma_a\| \leq \|a\|$$

por lo que las normas son equivalentes.

Para probar que $\|\cdot\|_1$ es compatible con la multiplicación notamos que $\sigma_{ab} = \sigma_a \circ \sigma_b$. *Q.E.D.*

Definición 1.8. *Sean A y B dos álgebras. Una función $\psi : A \to B$ se llama homomorfismo de álgebras si es lineal y además $\psi(aa') = \psi(a)\psi(a')$ para todas a y a' en A. Si además las álgebras tienen uno, pediremos que $\psi(1_A) = 1_B$. Un homomorfismo de álgebras que además sea biyección lo llamaremos* **isomorfismo** *de álgebras. Si ψ es un homomorfismo de álgebras, por* $\ker\psi$ *denotamos al núcleo de ψ, es decir,* $\ker\psi = \{a \in A : \psi(a) = 0\}$.

A continuación presentamos el concepto algebraico de ideal.

Definición 1.9. *Sea A un álgebra e $I \subseteq A$ un subespacio vectorial.*

1. *I es un ideal izquierdo de A si absorbe la multiplicación por la izquierda, es decir si para toda $x \in A$ y para todo $y \in I$, tenemos $xy \in I$ (esto último lo abreviamos como $AI \subseteq I$). De manera similar I es un ideal derecho si $IA \subseteq I$. Decimos que I es un ideal bilateral si es ideal derecho e izquierdo.*

2. *Un ideal izquierdo J se llama regular si existe $u \in A$ tal que para toda $x \in A$, $xu - x \in J$. Al elemento u se le llama una unidad izquierda módulo J. Un ideal derecho J se llama regular si existe $u' \in A$ tal que para toda $x \in A$, $u'x - x \in J$ (u' es una unidad derecha módulo J). Decimos que J es un ideal bilateral regular si J es un ideal izquierdo y derecho regular.*

3. *Un ideal izquierdo I se llama máximo si $I \neq A$ (es decir, es propio) y siempre que I' sea un ideal izquierdo con $I \subseteq I'$ se tiene que $I' = I$ ó $I' = A$. De manera similar se define que un ideal derecho, bilateral, izquierdo regular, derecho regular o bilateral regular sea máximo.*

Notas: Si A tiene uno todo ideal izquierdo, derecho o bilateral I es regular, pues el uno del álgebra funciona como unidad izquierda y derecha módulo I; si el álgebra es conmutativa los conceptos de ideal izquierdo, derecho y bilateral coinciden, por lo que en el caso conmutativo simplemente hablaremos de ideales.

Proposición 1.10. *Sea A un álgebra.*

1. *Si el álgebra tiene uno (denotémoslo 1_A) e I es un ideal izquierdo con $1_A \in I$ entonces $I = A$.*

2. *Si J es un ideal izquierdo regular y J' es un ideal izquierdo que contiene a J, entonces J' es un ideal izquierdo regular .*

3. *Si J es un ideal izquierdo regular, u una unidad izquierda módulo J con $u \in J$ entonces $J = A$.*

4. *Todo ideal izquierdo regular propio está contenido en un ideal izquierdo regular máximo.*

Demostración. Probemos 1. Utilizando que I es ideal izquierdo tenemos que para toda $x \in A$, $x1_A = x \in I$ por lo que $I = A$.

La prueba de 2 es muy sencilla pues toda unidad izquierda módulo J es una unidad izquierda módulo J'.

Probemos 3. Sea $x \in A$ arbitrario. Usando que u es una unidad izquierda módulo I, $xu - x \in J$ pero $xu \in J$ (ya que $u \in J$ y éste es ideal izquierdo) en consecuencia $-x$ está en J. Al ser x arbitrario concluimos $J = A$.

Para probar 4, usaremos el Lema de Zorn (ver $A.2$ en el apéndice). Sea I un ideal izquierdo regular propio de A. Sea P el conjunto de ideales izquierdos regulares propios de A que contengan a I. P es no vacío (pues I está en P) y si lo ordenamos por la contención obtenemos un conjunto parcialmente ordenado. Notamos que si P tiene un elemento máximo, entonces éste es un ideal izquierdo regular máximo de A.

Para probar que P tiene un elemento máximo verificamos que P cumple con las hipótesis del Lema de Zorn. Sea $\{I_\beta\}_{\beta \in B}$ una cadena en P. Veamos que la cadena tiene una cota en P.

Tomemos $J = \cup_{\beta \in B} I_\beta$. Como cada I_β contiene a I, J contiene a I. Probemos ahora que J es ideal izquierdo regular. J es un espacio vectorial al ser cada I_β espacio vectorial y al ser $\{I_\beta\}_{\beta \in B}$ una cadena. Ahora tomemos $a \in J$ y $b \in A$. Para algún $\beta \in B$, $a \in I_\beta$, entonces al ser I_β ideal izquierdo $ba \in I_\beta$, por lo que $ba \in J$. Esto prueba que J es ideal izquierdo. Además es regular porque contiene a I y éste es regular. Sea u una unidad izquierda módulo I. Si J no fuese propio, es decir si $J = A$ entonces $u \in I_\beta$ para algun β, pero por el inciso 3, esto implica que I_β es todo A, una contradicción, por lo que J es ideal izquierdo regular propio. En conclusión $J \in P$. Por último es claro que J es cota para la cadena. *Q.E.D.*

Nota: Hacemos notar que la Proposición 1.10 sigue siendo válida si hablamos de ideales derechos, bilaterales, ideales derechos regulares ó bilaterales regulares.

Es importante notar que hablamos de que un ideal izquierdo sea máximo no que un ideal sea máximo (a secas) pues puede pasar que un ideal bilateral sea máximo como ideal bilateral pero no lo sea como ideal izquierdo ni derecho, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.11. *Tomemos $A = M_2(\mathbb{C})$. Con las operaciones usuales de suma y producto matricial así como producto escalar, tenemos que A es un álgebra con uno. Considere*

$$I_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \in A : \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\} \qquad I_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in A : \gamma, \delta \in \mathbb{C} \right\}$$

Afirmamos que :

(a) Los únicos ideales bilaterales de A son $\{0\}$ y A (en consecuencia $\{0\}$ es ideal bilateral máximo).

(b) I_1 es ideal izquierdo pero no derecho (en consecuencia $\{0\}$ no es ideal izquierdo máximo) e I_2 es ideal derecho pero no izquierdo (en consecuencia $\{0\}$ no es ideal derecho máximo).

Prueba de (a).

Sea $I \subseteq A$ ideal bilateral y supongamos que $I \neq \{0\}$, entonces existe $T = (t_{ij}) \in I$ distinta de cero. Supongamos que $t_{nm} \neq 0$.

Sean:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $T \in I$ e I es ideal bilateral se tiene que $E_{nn}TE_{mm} = t_{nm}E_{nm} \in I$ y como $t_{nm} \neq 0$ se tiene que $E_{nm} \in I$. Además multiplicando por la derecha o por la izquierda a E_{nm} por $(E_{12}+E_{21})$ podemos intercambiar filas y columnas por lo que usando que I es ideal bilateral, $E_{11}, E_{22} \in I$ y en consecuencia $E_{11} + E_{22} = 1_A \in I$. Pero por la Proposición 1.10 lo anterior implica que $I = A$.

Prueba de (b).

Probamos solamente que I_1 es ideal izquierdo pero no derecho pues la prueba para I_2 es parecida.

Es claro que I_1 es un subespacio vectorial de A. Tome $T \in A, S \in I_1$ digamos

$$T = \begin{pmatrix} \varepsilon & \phi \\ \eta & \kappa \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$TS = \begin{pmatrix} \varepsilon & \phi \\ \eta & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon\alpha + \phi\beta & 0 \\ \eta\alpha + \kappa\beta & 0 \end{pmatrix} \in I_1$$

con lo cual se tiene que I_1 es ideal izquierdo de A.

Pero

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin I_1 \quad \textit{con} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in I_1$$

por lo que I_1 no es un ideal derecho de A.

Proposición 1.12. *Sea $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach $I \subseteq A$ un ideal izquierdo. Entonces $\bar{I}$ es un ideal izquierdo. En particular si además I es regular, $\bar{I}$ también lo es .*

Demostración. Sean $z \in \mathbb{C}$, $x \in A$, $a, b \in \bar{I}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de elementos en I tales que

$$\lim_n \|a_n - a\| = 0 = \lim_n \|b_n - b\|$$

Debemos probar que $za + b \in \bar{I}$.

Como I es subespacio vectorial $(za_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos en I y además

$$\lim_n \|(za_n + b_n) - (za + b)\| \leq \lim_n |z| \, \|a_n - a\| + \lim_n \|b_n - b\| = 0$$

por lo que $za + b \in \bar{I}$. Esto prueba que $\bar{I}$ es un subespacio vectorial.

Veamos que $xa \in \bar{I}$.

Usando que I es un ideal izquierdo obtenemos que $(xa_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos en I y además

$$\lim_n \|xa_n - xa\| \leq \lim_n \|x\| \, \|a_n - a\| = 0$$

por lo que $xa \in \bar{I}$. Esto prueba que $\bar{I}$ es un ideal izquierdo.

Note que el resultado es válido si trabajamos con ideales izquierdos, derechos, etc. *Q.E.D.*

1.2 Adjunción de la identidad

Sea $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach. Puede ocurrir que el álgebra no tenga uno, pero siempre es posible considerarla como una subálgebra cerrada de un álgebra de Banach con uno. En esta sección nos ocuparemos de esto.

Tomemos $A \times \mathbb{C}$ y definamos las operaciones

1. $(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$.
2. $\beta(a, \alpha) = (\beta a, \beta\alpha)$.
3. $(a, \alpha)(b, \beta) = (ab + \beta a + \alpha b, \alpha\beta)$.

Es rutinario verificar que con estas operaciones $A \times \mathbb{C}$ es un álgebra con uno, y el uno es $e = (0, 1)$. También es fácil ver que la función $a \mapsto (a, 0)$ establece un isomorfismo de álgebras entre A y $A \times \{0\}$.

Notación: Al elemento (a, α) lo denotaremos $a + \alpha e$ y al álgebra $A \times \mathbb{C}$ con las operaciones dadas arriba la denotaremos por $A \oplus \mathbb{C}e$.

Ahora queremos dar a $A \oplus \mathbb{C}e$ una norma que la haga un álgebra de Banach.

Definición 1.13. *Para $a + \alpha e$ definimos $\|a + \alpha e\|' = \|a\| + |\alpha|$.*

Afirmamos que $\|\cdot\|'$ es una norma que hace a $A \oplus \mathbb{C}e$ un álgebra de Banach.

Proposición 1.14. *$A \oplus \mathbb{C}e$ con $\|\cdot\|'$ es un álgebra de Banach con uno y A puede verse como una subálgebra cerrada de $A \oplus \mathbb{C}e$.*

Demostración. Lo primero que debemos probar es que $\|\cdot\|'$ es una norma. Tenemos que $\|a + \alpha e\|' = 0$ si y sólo si $\|a\| + |\alpha| = 0$ y esto pasa si y sólo si $\|a\| = 0$ y $|\alpha| = 0$, es decir si y sólo si $a = 0$ y $\alpha = 0$.

Que saque escalares se sigue de

$$\|\beta a\| + |\beta\alpha| = |\beta|(\|a\| + |\alpha|)$$

La desigualdad del triángulo se obtiene de la desigualdad

$$\|a+b\| + |\alpha+\beta| \leq \|a\| + \|b\| + |\alpha| + |\beta|$$

Probemos que $\|\cdot\|'$ es completa.

Sea $(a_n + \alpha_n e)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión $\|\cdot\|'$-Cauchy en $A \oplus \mathbb{C}e$. Entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son de Cauchy en sus respectivos espacios pues dada $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m, n \geq N$

$$\|(a_n + \alpha_n e) - (a_m + \alpha_m e)\|' = \|a_n - a_m\| + |\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$$

En consecuencia, usando la completitud de A y de $\mathbb{C}$ existen $a \in A$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que

$$\lim_n \|a_n - a\| = 0$$
$$\lim_n |\alpha_n - \alpha| = 0$$

pero entonces

$$\lim_n \|(a_n + \alpha_n e) - (a + \alpha e)\|' = \lim_n \|a_n - a\| + \lim_n |\alpha_n - \alpha| = 0$$

es decir, $(a_n + \alpha_n e)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $a + \alpha e$ en la norma $\|\cdot\|'$.

Nos falta probar que $\|\cdot\|'$ es compatible con la multiplicación.

Por la compatibilidad de la norma $\|\cdot\|$ y la desigualdad del triángulo tenemos

$$\begin{aligned} \|(a+\alpha e)(b+\beta e)\|' &= \|ab + \beta a + \alpha b\| + |\alpha\beta| \\ &\leq \|a\|\,\|b\| + |\alpha|\,\|b\| + |\beta|\,\|a\| + |\alpha\beta| \end{aligned}$$

por otro lado

$$\|a+\alpha e\|'\,\|b+\beta e\|' = \|a\|\,\|b\| + |\alpha|\,\|b\| + |\beta|\,\|a\| + |\alpha\beta|$$

así que se concluye $\|(a+\alpha e)(b+\beta e)\|' \leq \|a+\alpha e\|\|b+\beta e\|$.

Hasta este punto $(A \oplus \mathbb{C}e, \|\cdot\|')$ es un álgebra de Banach con uno.

Ahora probaremos que $A \times \{0\}$ es cerrado e isométricamente isomorfo a A.

Si $(a_n + 0e)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $A \times \{0\}$ y $a + \alpha e \in A \oplus \mathbb{C}e$ es tal que

$$\lim_n (\|a_n - a\| + |\alpha|) = \lim_n \|(a_n + 0e) - (a + \alpha e)\|' = 0$$

entonces $|\alpha| = 0$. Esto prueba que $A \times \{0\}$ es cerrada.

Por último es claro que $\psi : A \to A \times \{0\}$ dada por $\psi(a) = a + 0e$ es un isomorfismo isométrico. *Q.E.D.*

1.3 Elementos invertibles y cuasi-invertibles

Si estamos en un álgebra de Banach resulta que todo ideal izquierdo máximo es cerrado (note que aquí entran en relación los conceptos algebraicos con los analíticos, pues el concepto de ideal máximo es puramente algebraico). Los elementos invertibles y los cuasi-invertibles nos ayudarán a probar, entre otras cosas, este resultado.

Definición 1.15. *Sea A un álgebra con uno, al cual denotamos por e y $a \in A$.*

1. *Decimos que a tiene inverso izquierdo si existe $a' \in A$ tal que $a'a = e$. De manera similar decimos que a tiene inverso derecho si $aa' = e$ para algún $a' \in A$. Decimos que a es regular ó invertible si existe $b \in A$ tal que $ab = ba = e$. Es conocido que si tal b existe es único, por lo que lo denotamos a^{-1}.*

Nota: Si a tiene un inverso izquierdo a_1 y un inverso derecho a_2, entonces $a_1 = a_2$, pues
$$a_1 = a_1 e = a_1(aa_2) = (a_1 a)a_2 = ea_2 = a_2$$

Una de las propiedades de los elementos invertibles en las álgebras de Banach es que forman un conjunto abierto, lo cual probaremos a continuación.

Proposición 1.16. *Sea $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach con uno al cual denotamos por e,*
$$G = \{a \in A : a \text{ es invertible}\}$$
y $h : G \to G$ dada por $h(a) = a^{-1}$. Entonces:

1. *Si $\|a\| < 1$ entonces $e - a \in G$,*
$$(e-a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \qquad y \qquad \|(e-a)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|a\|} \tag{1.8}$$

2. *Si $\|a\| < |z|$ entonces $ze - a \in G$ y*
$$(ze-a)^{-1} = \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} a^k/z^{k+1}$$

3. *G es abierto y h es continua.*

Demostración. Antes que nada notamos que G es un grupo.
Prueba de 1.
Supongamos que $\|a\| < 1$, entonces $\sum_{k=0}^{\infty} \|a\|^k < \infty$.
Por otro lado por la compatibilidad de la norma tenemos para todo n:
$$\sum_{k=0}^{n} \|a^k\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|a\|^k$$
es decir, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ es absolutamente sumable por lo que es sumable en A (ver $C.2$ en apéndice). Sea $b = \sum_{k=0}^{\infty} a^k$.

Afirmamos que $b = (e-a)^{-1}$, para lo cual observamos que
$$\left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right)(e-a) - e = \sum_{k=0}^{n} a^k - \sum_{k=1}^{n+1} a^k - e = -a^{n+1}$$

y al tomar norma resulta

$$\left\| \left(\sum_{k=0}^{n} a^k \right) (e-a) - e \right\| \leq \|a\|^{n+1}$$

pero $\|a\| < 1$ así que al hacer n tender a infinito en la ecuación anterior resulta que $b(e-a) = e$. De manera similar tenemos que $(e-a)b = e$. Por último

$$\|(e-a)^{-1}\| = \lim_n \left\| \sum_{k=0}^{n} a^k \right\| \leq \lim_n \sum_{k=0}^{n} \|a\|^k = \frac{1}{1-\|a\|}$$

Prueba de 2.

Supongamos que $\|a\| < |z|$ (en consecuencia $z \neq 0$). Entonces $\left\| \frac{1}{z} a \right\| < 1$ y por el inciso 1, $e - \frac{1}{z}a \in G$. Pero $ze \in G$ (por que $z \neq 0$) y G es grupo, entonces $ze(e - \frac{1}{z}a) = ze - a \in G$.

Además por (1.8) tenemos

$$\left(e - \frac{1}{z} a \right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} a \right)^k$$

y al factorizar z del lado izquierdo obtenemos

$$(ze-a)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{k+1}} a^k$$

Prueba de 3.

Observamos que por 1, $B_1(e) \subseteq G$. (Razón: si $y \in B_1(e)$ entonces $\|e-y\| < 1$ y por 1, $e - (e-y) = y \in G$).

Sea $a \in G$ fijo y arbitrario. Como $B_1(e) \subseteq G$ se sigue que $aB_1(e) \subseteq aG$. Pero $aG \subseteq G$ (al ser G grupo) y entonces $aB_1(e) \subseteq G$.

Para probar que G es abierto probaremos que

$$B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a) \subseteq G \tag{1.9}$$

Tomemos $y \in B_{\frac{1}{\|a^{-1}\|}}(a)$. Entonces $\|a-y\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$ por lo que al usar la compatibilidad de la norma se sigue

$$\left\| e - a^{-1}y \right\| = \|a^{-1}(a-y)\| < 1$$

es decir $a^{-1}y \in B_1(e)$ por lo que $y \in aB_1(e)$. Pero $aB_1(e) \subseteq G$, lo cual prueba (1.9).

Probemos que h es continua.

Primero probamos que h es continua en e.

Sea $x \in A$, con $\|e-x\| < \frac{1}{2}$. Entonces $\frac{1}{1-\|e-x\|} < 2$.

Por (1.8), $\left\| x^{-1} \right\| \leq 1/(1-\|e-x\|)$. Usando $(e-x)x^{-1} = x^{-1} - e$ resulta

$$\left\| x^{-1} - e \right\| \leq \|e-x\| \left\| x^{-1} \right\| \leq \|e-x\| \frac{1}{1-\|e-x\|} \leq 2\|e-x\|$$

Por lo que si $\|e - x\| < \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\}$ entonces $\left\|x^{-1} - e\right\| < \varepsilon$.

Sea $a \in G$ y $\varepsilon > 0$. Usando que h es homomorfismo de grupos y la continuidad de h en e probamos que h es continua en a.

Usando la continuidad de h en e existe $\delta > 0$ tal que $\left\|x^{-1} - e\right\| < \frac{\varepsilon}{\|a^{-1}\|}$ siempre que x cumpla $\|x - e\| < \delta$.

Ahora sea x tal que $\|x - a\| < \delta\|a^{-1}\|^{-1}$. Entonces por la compatibilidad de la norma

$$\left\|a^{-1}x - e\right\| = \left\|a^{-1}(x - a)\right\| \leq \left\|a^{-1}\right\| \|x - a\| < \delta;$$

así, de la continuidad en e resulta $\left\|x^{-1}a - e\right\| < \frac{\varepsilon}{\|a^{-1}\|}$ y por la compatibilidad de la norma $\|x^{-1} - a^{-1}\| < \varepsilon$. Esto prueba la continuidad en a.

Q.E.D.

Corolario 1.17. *Sea A un álgebra de Banach con uno. Todo ideal izquierdo (ó derecho) máximo es cerrado.*

Demostración. Sea I un ideal izquierdo máximo. Por la Proposición 1.12, $\bar{I}$ es un ideal izquierdo que contiene a I, por lo que al ser I máximo $\bar{I} = I$ ó $\bar{I} = A$. Si $\bar{I} = A$ entonces I es denso en A y como el conjunto de los elementos invertibles es abierto y no vacío existe a invertible tal que $a \in I$. Al ser I un ideal izquierdo $a^{-1}a = 1_A \in I$ y por la Proposición 1.10 tenemos $I = A$, lo que contradice que I sea propio. En conclusión $I = \bar{I}$. De manera similar se prueba el corolario para ideales derechos. *Q.E.D.*

A veces, el álgebra con la que trabajamos no tiene uno, en cuyo caso no podemos hablar de elementos invertibles. En estos casos se define un concepto, en algunos aspectos similar al de invertibilidad.

Definición 1.18. *Sea A un álgebra (no necesariamente con uno) y $a \in A$.*

1. *Un <u>cuasi-inverso izquierdo</u> para a es un a' en A tal que $a + a' - a'a = 0$. Análogamente a' es un <u>cuasi-inverso derecho</u> de a si $a + a' - aa' = 0$.*

2. *a se llama <u>cuasi-regular</u> ó <u>cuasi-ivertible</u> si $a + b - ab = 0 = a + b - ba$ para algún b en A. Llamamos al elemento b un <u>cuasi-inverso</u> de a.*

La siguiente proposición muestra cierta semejanza entre los elementos invertibles y los cuasi-invertibles.

Proposición 1.19. *Sea $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach y a un elemento en A que cumpla $\|a\| < 1$. Entonces a es cuasi-invertible.*

Demostración. Al igual que antes tenemos $\sum_{k=1}^{\infty} \|a\|^k < \infty$ por lo que $\sum_{k=1}^{\infty} a^k$ es absolutamente sumable por lo que existe b tal que $b = \sum_{k=1}^{\infty} a^k$.

Afirmamos que $-b$ es cuasi-inverso de a.

Para todo natural n sea $s_n = -\sum_{k=1}^{n} a^k$. Notamos que $\lim s_n = -b$ y $a + s_n - as_n = a^{n+1}$. Al hacer n tender a infinito (tomando en cuenta que $\|a\| < 1$) resulta $a + (-b) - a(-b) = 0$. Análogamente $0 = a + (-b) - (-b)a$, por lo que $-b$ es un cuasi-inverso de a. *Q.E.D.*

Para probar una proposición similar a la 1.17 para álgebras no necesariamente con uno necesitamos un lema.

Lema 1.20. *Sea $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach e $I \subseteq A, I \neq A$ un ideal izquierdo regular y u una unidad izquierda módulo I. Entonces para todo $x \in I$ se cumple $1 \leq \|u - x\|$.*

Demostración. Supongamos que existe $x \in I$ con $\|u - x\| < 1$. Por la Proposición 1.19 existe $y \in A$ tal que $y + (u - x) - y(u - x) = 0$, así que $u = x + yu - y - yx$. Por otro lado $yu - y \in I$ al ser u una unidad izquierda módulo I y $-yx \in I$ al ser I un ideal izquierdo. De lo anterior se concluye que $u \in I$ pero por la Proposición 1.10 esto implica que $I = A$, en contra de la hipótesis. *Q.E.D.*

Corolario 1.21. *Sea $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach. Entonces todo ideal izquierdo regular máximo es cerrado.*

Demostración. Sea $I \subseteq A$ un ideal izquierdo regular máximo y u una unidad izquierda módulo I. Por la proposición 1.12, $\bar{I}$ es un ideal izquierdo regular y ya que $I \subseteq \bar{I}$ tenemos que $\bar{I} = I$ ó $\bar{I} = A$. Supongamos que $\bar{I} = A$. Entonces I es denso por lo que $I \cap B_1(u) \neq \emptyset$ de donde obtenemos que existe $x \in I$ tal que $\|u - x\| < 1$ en contradicción con el Lema 1.20. En consecuencia $\bar{I} = I$. *Q.E.D.*

1.4 Funcionales lineales multiplicativas

En espacios vectoriales tenemos las transformaciones lineales, es decir, transformaciones entre espacios vectoriales que respetan la estructura algebraica. En álgebras tenemos lo mismo, transformaciones que respetan la estructura de álgebra y los llamamos homomorfismos de álgebras ó simplemente homomorfismos, y entre éstos nos interesan aquellos que toman valores en los números complejos.

Definición 1.22. *Sea A un álgebra. Las funcionales lineales multiplicativas son los homomorfismos de A en $\mathbb{C}$ no nulas.*

Notación: Al conjunto de homomorfismos de A en $\mathbb{C}$ lo denotamos por $Hom(A, \mathbb{C})$ y al conjunto de funcionales lineales multiplicativas lo denotamos por $\mathcal{M}_A$, es decir $\mathcal{M}_A = Hom(A, \mathbb{C}) \setminus \{0\}$.

Lema 1.23. *Si el álgebra A tiene uno y $\psi \in \mathcal{M}_A$ entonces $\psi(e) = 1$.*

Demostración. La razón de esto es sencilla: aplicando ψ a $ee = e$ tenemos que $\psi(e) = 0$ ó $\psi(e) = 1$. Ahora, si $\psi(e) = 0$, tenemos que para todo $a \in A$

$$\psi(a) = \psi(ae) = \psi(a)\psi(e) = 0$$

lo que contradice que ψ sea distinta de cero; así pues, $\psi(e) = 1$. *Q.E.D.*

Cuando uno estudia espacios vectoriales tiene que el núcleo de funcionales lineales es un subespacio. Resulta que cuando estudiamos funcionales lineales multiplicativas el núcleo es un ideal bilateral regular máximo.

Proposición 1.24. *Sea A un álgebra. Si $\psi \in \mathcal{M}_A$ entonces* $\ker\psi$ *es un ideal bilateral regular máximo de A.*

Demostración. Denotemos por I al núcleo de ψ. Es claro que I es un subespacio vectorial de A. Tomemos $a \in I$ y b un elemento arbitrario del álgebra. Por la multiplicatividad $\psi(ab) = \psi(a)\psi(b) = 0$, por lo que $ab \in I$. De manera similar $ba \in I$, por lo que I es ideal bilateral.

Note que al ser ψ distinta de cero, existe x tal que $\psi(x) \neq 0$. Entonces si $u = \frac{1}{\psi(x)}x$, tenemos que $\psi(u) = 1$.

Por otro lado, afirmamos que cualquier u que cumpla $\psi(u) = 1$ es una unidad derecha e izquierda módulo I y además $A = I + Au$. Para probarlo notamos que para cualquier x en A tenemos

$$\psi(x - xu) = \psi(x) - \psi(x)\psi(u) = 0 = \psi(x - ux) = \psi(x) - \psi(u)\psi(x)$$

lo que prueba que u es unidad derecha e izquierda módulo I. Además como para cualquier x, $x = (x - xu) + xu$ con $x - xu \in I$ concluimos que $A = I + Au$.

Para probar que I es máximo, tomemos J ideal bilateral que contenga propiamente a I y probemos que $J = A$. Si J contiene propiamente a I entonces tiene un elemento que no está en el núcleo de ψ y en consecuencia tiene un elemento u de tal forma que $\psi(u) = 1$. Pero entonces el ideal $I + Au$ está contenido en J, pero por lo anterior $I + Au = A$ por lo que $J = A$. $Q.E.D.$

Nos interesa es probar, al menos en álgebras conmutativas, es que existe una correspondencia biunivoca entre funcionales lineales multiplicativas e ideales regulares máximos. La siguiente proposición nos acerca a este propósito.

Proposición 1.25. *Sean A un álgebra. Si $\psi, \varphi \in \mathcal{M}_A$ tienen el mismo núcleo entonces $\psi = \varphi$.*

Demostración. Supongamos que las funcionales lineales multiplicativas ψ y φ tienen el mismo núcleo, pero son diferentes. Como son diferentes existe a tal que $\psi(a) \neq \varphi(a)$ y sin pérdida de generalidad $\psi(a) \neq 0$. Entonces $\psi(a)\psi(a)$ y $\psi(a)\varphi(a)$ son distintos, y por lo tanto $\psi(a^2)$ y $\psi(\varphi(a)a)$ también. Así que $a^2 - \varphi(a)a$ no está en el núcleo de ψ que es el mismo que el de φ, por lo que

$$\varphi(a^2 - \varphi(a)a) = \varphi(a)^2 - \varphi(a)^2$$

no es cero, una contradicción. $Q.E.D.$

Entonces, resulta que las funcionales lineales multiplicativas están determinadas por su núcleo, que como ya vimos, es un ideal bilateral regular máximo. La pregunta ahora es, dado un ideal bilateral regular máximo, ¿es posible asociarle una funcional lineal multiplicativa de tal forma que su núcleo sea el ideal dado? En el segundo capítulo veremos que esto es posible en álgebras conmutativas.

Ahora nos ocupamos de la continuidad de las funcionales lineales multiplicativas.

Definición 1.26. *Sea $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach. Una función lineal $f : X \to \mathbb{C}$ se llama funcional lineal si es acotada (ver definición 1.4).*

Por X^* denotamos a las funciones lineales de X a $\mathbb{C}$ que son acotadas.

Definición 1.27. *Dada $x \in X$ definimos $i_x : X^* \to \mathbb{C}$ por $i_x(f) = f(x)$, la evaluación en x. La menor topología que hace a cada función evaluación continua se conoce como la topología débil-* y se le denota por w^*.*

Si estamos en un álgebra de Banach resulta que todos los homomorfismos de A en $\mathbb{C}$ son acotados, como lo prueba la siguiente proposición.

Proposición 1.28. *Sea A un álgebra de Banach. Todo $\psi \in Hom(A, \mathbb{C})$ es acotado y $\|\psi\| \leq 1$. Si además el álgebra tiene uno y $\psi \in \mathcal{M}_A$ entonces $\|\psi\| = 1$.*

Demostración.

Si $\psi = 0$ entonces es acotada y $\|\psi\| \leq 1$. Entonces podemos uponer que $\psi \in \mathcal{M}_A$.

Veamos que para toda $x \in A$, $|\psi(x)| \leq \|x\|$.

Supongamos que existe $a \in A$, con $|\psi(a)| > \|a\|$. Entonces $1 > \left\| \frac{1}{\psi(a)} a \right\|$ y por la Proposición 1.19 existe $b \in A$ cuasi-inverso de $\frac{1}{\psi(a)} a$; es decir,

$$0 = \frac{1}{\psi(a)} a + b - \frac{1}{\psi(a)} ab$$

entonces aplicando ψ y usando que es homomorfismo de álgebras tenemos

$$0 = \frac{1}{\psi(a)} \psi(a) + \psi(b) - \frac{1}{\psi(a)} \psi(a)\psi(b) = 1,$$

una clara contradicción. En consecuencia ψ es acotada y $\|\psi\| \leq 1$.

Si A tiene uno, denotemoslo por e, por la Proposición 1.7 podemos suponer $\|e\| = 1$. Por el Lema 1.23, $\psi(e) = 1$ y en consecuencia por (1.6) $\|\psi\| = 1$. *Q.E.D.*

Por la proposición 1.28, $Hom(A, \mathbb{C}) \subseteq A^*$ por lo que es posible dotarlo de la topología ω^*. Ahora nos ocuparemos de la compacidad de $Hom(A, \mathbb{C})$.

Sea A un álgebra de Banach y definamos

$$S = \{\psi \in A^* : \|\psi\| \leq 1\}$$

Por la Proposición 1.28 tenemos que $Hom(A, \mathbb{C}) \subseteq S$.

Si dotamos a S con la topología ω^* (ver definición 1.27) por el Teorema de Banach-Alaoglu (ver C.10 en el apéndice), S es ω^*-compacto Hausdorff. Así para que $Hom(A, \mathbb{C})$ sea ω^*-compacto es suficiente probar que es un subconjunto ω^*-cerrado de S.

Recordamos que una red $(\psi_\lambda)_{\lambda \in L}$ en A^* converge a $\psi \in A$ relativo a ω^* si y sólo si para toda $a \in A$, $\psi_\lambda(a) \to \psi(a)$.

Proposición 1.29. *Sea A un álgebra de Banach. Entonces $Hom(A,\mathbb{C}) \subseteq S$ es ω^*-cerrado.*

Demostración. Sea $(\psi_\lambda)_{\lambda \in L}$ una red en $Hom(A,\mathbb{C})$ y $\psi \in S$ tal que $\psi_\lambda \to \psi$ relativo a ω^*.

Queremos probar que $\psi \in Hom(A,\mathbb{C})$, para lo cual es suficiente probar que para a, b en A

$$\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$$

pues como $\psi \in S$, ψ es lineal.

Usando que $\psi_\lambda \to \psi$ en S tenemos que

$$\psi_\lambda(a) \to \psi(a) \tag{1.10}$$

$$\psi_\lambda(b) \to \psi(b) \tag{1.11}$$

$$\psi_\lambda(ab) \to \psi(ab) \tag{1.12}$$

Pero $\psi_\lambda(a)\psi_\lambda(b) = \psi_\lambda(ab)$ así que de (1.10) y (1.11) tenemos

$$\psi_\lambda(ab) \to \psi(a)\psi(b)$$

y por (1.12) concluimos $\psi(ab) = \psi(a)\psi(b)$. *Q.E.D.*

Una consecuencia inmediata de la Proposición 1.29 es el siguiente corolario.

Corolario 1.30. *Sea $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach. Entonces $(Hom(A,\mathbb{C}), \omega^*)$ es compacto Hausdorff.*

Ahora, vemos qué pasa con $\mathcal{M}_A$. Como $\mathcal{M}_A \subset Hom(A,\mathbb{C})$, para que $\mathcal{M}_A$ sea ω^*-compacto es suficiente probar que es ω^*-cerrado en $Hom(A,\mathbb{C})$. Probaremos que esto pasa si el álgebra tiene uno.

Una pregunta aparte es cuándo $\mathcal{M}_A$ es no vacío. Veamos el ejemplo 1.11. Sea ψ un homomorfismo de $M_2(\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}$. Por la Proposición 1.24, el núcleo de ψ es un ideal bilateral de $M_2(\mathbb{C})$, pero probamos que los únicos ideales bilaterales son el cero y el total. Si el núcleo de ψ es el cero, ψ es inyectiva, por lo que ψ es un isomorfismo de espacios vectoriales entre $M_2(\mathbb{C})$ y $\mathbb{C}$, lo cual es una contradicción. Entonces el núcleo de ψ debe ser el total, es decir, ψ es cero. Más adelante probaremos que en álgebras de Banach conmutativas con uno existen funcionales lineales multiplicativas.

Proposición 1.31. *Sea A un álgebra de Banach con uno. Entonces $(\mathcal{M}_A, \omega^*)$ es compacto.*

Demostración. Si $\mathcal{M}_A$ es vacío, entonces es ω^*-compacto. Supongamos que es distinto del vacío.

Como hemos dicho anteriormente, es suficiente probar que $\mathcal{M}$ es ω^*- cerrado.

Sea $(\psi_\lambda)_{\lambda \in L}$ una red en $\mathcal{M}_A$ y $\psi \in Hom(A,\mathbb{C})$ tal que ψ_λ converja a ψ relativo a ω^*. Entonces $\psi_\lambda(e) \to \psi(e)$. Pero para toda λ, $\psi_\lambda(e) = 1$, así que $\psi(e) = 1$ y por lo tanto $\psi \in \mathcal{M}_A$. *Q.E.D.*

Vimos que si un álgebra de Banach A tiene uno $(\mathcal{M}_A, \omega^*)$ es compacto. Nos preguntamos ahora cuándo, dada un álgebra de Banach A en general, $(\mathcal{M}_A, \omega^*)$ es compacto.

Como $\mathcal{M}_A \cup \{0\} = Hom(A, \mathbb{C})$ y $Hom(A, \mathbb{C})$ es ω^*-compacto Hausdorff tenemos que $(\mathcal{M}_A, \omega^*)$ es compacto si y sólo si $\mathcal{M}_A \subseteq Hom(A, \mathbb{C})$ es ω^*−cerrado ó equivalentemente $\{0\} \in \omega^*$.

Recuerde que si A tiene uno, $(\mathcal{M}_A, \omega^*)$ es compacto por lo que $\{0\} \in \omega^*$, es más,

$$U(1/2, e, 0) = \{\psi \in Hom(A, \mathbb{C}) : |\psi(e)| < 1/2\} = \{0\}$$

Ahora veremos qué pasa cuando $(\mathcal{M}_A, \omega^*)$ no es compacto, para lo cual usamos la definición de una compactificación unipuntual (ver A.12 en apéndice).

Proposición 1.32. *Sea A un álgebra de Banach y supongamos que $\{0\} \notin \omega^*$. Entonces $(\mathcal{M}_A, \omega^*)$ no es compacto (por lo discutido anteriormente) pero es localmente compacto Hausdorff y $(Hom(A, \mathbb{C}), \omega^*)$ es una compactificación unipuntual de $(\mathcal{M}_A, \omega^*)$.*

El resultado se obtiene del siguiente lema.

Lema 1.33. *Tomamos (X, τ) un espacio topológico compacto Hausdorff y $x_0 \in X$ tal que $\{x_0\} \notin \tau$. Sea $Y = X \setminus \{x_0\}$. Entonces (Y, τ) es localmente compacto Hausdorff y (X, τ) es una compactificación unipuntual de (Y, τ).*

Demostración. Probemos que (Y, τ) es localmente compacto.

Dada $y \in Y$, existen $U_1, U_2 \in \tau$ ajenos con $y \in U_1, x_0 \in U_2$ (usando que (X, τ) es Hausdorff).

Ahora, $\bar{U}_1 \subseteq X$ es cerrado y por tanto compacto. Además si $x_0 \in \bar{U}_1$, como $x_0 \in U_2$ entonces $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. En consecuencia $x_0 \notin \bar{U}_1$ de donde tenemos $\bar{U}_1 \subseteq Y$. Así pues, $\bar{U}_1$ es una vecindad compacta de y.

Entonces todo punto de Y tiene una vecindad con cerradura compacta; es decir, (Y, τ) es localmente compacto.

Sólo resta probar que $\bar{Y} = X$, es decir que Y es denso en X.

Supongamos que existe $U \in \tau$ no vacío tal que $U \cap Y = \emptyset$. Como $Y = X \setminus \{x_0\}$ $U = \{x_0\}$, pero entonces $\{x_0\} \in \tau$, en contradicción con la hipótesis.

En conclusión, X es la compactificación unipuntual de Y. *Q.E.D.*

A continuación vemos cómo se relacionan las funcionales lineales multiplicativas de A con las de $A \oplus \mathbb{C}e$.

Proposición 1.34. *Sea A un álgebra sin uno y supongamos que existen funcionales lineales multiplicativas. Para toda $\psi \in Hom(A, \mathbb{C})$ definamos $\tilde{\psi}(a + \alpha e) = \psi(a) + \alpha$, para toda $a + \alpha e \in A \oplus \mathbb{C}e$. Entonces*

1. *$\tilde{\psi}$ está en $\mathcal{M}_{A \oplus \mathbb{C}e}$*

2. *Sea ψ_0 la funcional cero y sea $\psi_\infty = \tilde{\psi}_0$. Entonces*

$$\mathcal{M}_{A \oplus \mathbb{C}e} = \{\tilde{\psi} : \psi \in \mathcal{M}_A\} \cup \{\psi_\infty\}$$

Demostración. Denotemos $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}e$.
Primero probemos 1.
Como $\tilde{\psi}(0 + 1e) = 1$ tenemos que $\tilde{\psi} \neq 0$.
Probemos que ψ es un homomorfismo de álgebras. Para la linealidad tenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}((a + ze) + (b + we)) &= \psi(a + b) + z + w = \psi(a) + z + \psi(b) + w \\
\tilde{\psi}(a + ze) + \tilde{\psi}(b + we) &= \psi(a) + z + \psi(b) + w \\
\tilde{\psi}(w(a + ze)) &= \tilde{\psi}(wa + wze) = \psi(wa) + wz = w\psi(a) + wz \\
w\tilde{\psi}(a + ze) &= w(\psi(a) + z) = w\psi(a) + wz
\end{aligned}$$

Para ver que es multiplicativa observamos que

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}((a + ze)(b + we)) &= \tilde{\psi}(ab + wa + zb + zwe) \\
&= \psi(a)\psi(b) + w\psi(a) + z\psi(b) + zw
\end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}(a + ze)\tilde{\psi}(b + ze) &= (\psi(a) + z))(\psi(b) + w)) \\
&= \psi(a)\psi(b) + w\psi(a) + z\psi(b) + zw
\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\tilde{\psi}$ es homomorfismo de álgebras y entonces $\tilde{\psi} \in \mathcal{M}_{\tilde{A}}$.

Ahora probemos 2. Sea $\Psi \in \mathcal{M}_{\tilde{A}}$. Defina $\psi(a) = \Psi(a + 0e)$ para toda $a \in A$. Entonces $\psi \in \mathcal{M}_A$ y además

$$\tilde{\psi}(a + ze) = \psi(a) + z = \Psi(a + 0e) + z\Psi(0 + 1e) = \Psi(a + ze)$$

es decir $\tilde{\psi} = \Psi$. *Q.E.D.*

Podemos dar otra cara de la compactificación de $(\mathcal{M}_A, \omega^*)$ con la siguiente proposición.

Proposición 1.35. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa. Si $\tilde{A}$ denota a $A \oplus \mathbb{C}e$ (la adjunción de la identidad) entonces $(Hom(A, \mathbb{C}), \omega^*)$ es homeomorfo a $(\mathcal{M}_{\tilde{A}}, \omega^*)$.*

Demostración. Sea $H : Hom(A, \mathbb{C}) \to \mathcal{M}_{\tilde{A}}$ dada por $H(\psi) = \tilde{\psi}$ con

$$\tilde{\psi}(a + \alpha e) = \psi(a) + \alpha$$

Por la Proposición $1.34-1$, H está bien definida y por $1.34-2$ es suprayectiva. Además, H es inyectiva, pues $\tilde{\psi}$ es igual a ψ en A.

Probemos ahora que H es continua.

Sea $(\psi_\lambda)_{\lambda \in L}$ una red en $Hom(A, \mathbb{C})$ y $\psi \in Hom(A, \mathbb{C})$ tal que $\psi_\lambda \to \psi$ con la topología ω^*.

Queremos probar que $\tilde{\psi}_\lambda \to \tilde{\psi}$ en la topología ω^*. Sea $a + ze \in \tilde{A}$ arbitrario. Tenemos que $\tilde{\psi}_\lambda(a + ze) = \psi_\lambda(a) + z$. Pero $\psi_\lambda(a) \to \psi(a)$, entonces $\psi_\lambda(a) + z \to \psi(a) + z$ es decir $\tilde{\psi}_\lambda(a + ze) \to \tilde{\psi}(a + ze)$. Al ser $a + ze$ arbitrario se concluye que $\tilde{\psi}_\lambda \to \tilde{\psi}$ en la topología ω^*.

Por último, como $(Hom(A, \mathbb{C}), \omega^*)$ y $(\mathcal{M}_{\tilde{A}}, \omega^*)$ son compactos, Hausdorff y H es biyección continua se concluye que H es un homeomorfismo. *Q.E.D.*

Note que con todo lo anteror hemos dado una estructura de espacio topológico a $\mathcal{M}_A$. Lo anterior es interesante pues resulta que cierto tipo de álgebras son isomorfas (como álgebras) y a veces isométricamente isomorfas a una subálgebra de $C_0(\mathcal{M}_A)$. En el capítulo 3 se verá esto, usando la transformada de Gelfand.

1.5 Álgebra cociente

Ahora estudiamos el álgebra obtenida al tomar el cociente de un álgebra módulo un ideal bilateral regular cerrado. Esta sección nos ayudará a asociar una funcional lineal multiplicativa a un ideal bilateral regular máximo.

Sea A un álgebra de Banach e I un ideal bilateral regular cerrado de A. Es fácil probar que la relación en A dada por $a \sim b$ si y sólo si $a - b \in I$ es una relación de equivalencia y que para un elemento a su clase de equivalencia es el conjunto $\{a + x : x \in I\}$ el cual denotamos por $a + I$. Por A/I entendemos el conjunto de todas las clases de equivalencia dadas por esta relación.

También es fácil probar que si en A/I definimos las operaciones

1. $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$.
2. $\alpha(a + I) = (\alpha a) + I$.

obtenemos un espacio vectorial con $0 + I$ como neutro aditivo.

Ahora definimos una norma en A/I. Dada a definimos la norma de $a + I$ como

$$\|a + I\|_{A/I} = \inf\{\|a - x\| : x \in I\} \tag{1.13}$$

Si $a \sim a'$ entonces $a = a' + y$ para algún $y \in I$; por lo tanto, si $x' = x - y$

$$\inf\{\|a - x\| : x \in I\} = \inf\{\|a' + (y - x)\| : x \in I\} = \inf\{\|a' + x'\| : x' \in I\}$$

por lo que la norma de $a + I$ está bien definida. Obsérvese que tomando $x = 0$ en (1.13) resulta que $\|a + I\|_{A/I} \leq \|a\|$. Además note que si H denota la clase de a (es decir $H = a + I$) entonces $\|H\|_{A/I} = \inf\{\|x\| : x \in H\}$.

Veamos que (1.13) define una norma.

Proposición 1.36. *La ecuación* (1.13) *define una norma en* A/I.

Es claro que $\|0 + I\|_{A/I} = 0$. Ahora supongamos que $\|a + I\|_{A/I} = 0$. Entonces por (1.13) existe una sucesión de elementos de I, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_n \|a - x_n\| = 0$, lo que implica que a está en la cerradura de I. Pero I es cerrado, por lo que $a \in I$ es decir $a + I = 0 + I$.

Veamos que $\|\cdot\|_{A/I}$ saca escalares. Sea α un número complejo no cero (si es cero, es clara la afirmación). Si tomamos $x' = \frac{1}{|\alpha|}x$ tenemos

$$\inf\{\|\alpha a - x\| : x \in I\} = \inf\{|\alpha|\|a - x'\| : x' \in I\} = |\alpha| \inf\{\|a - x'\| : x' \in I\}$$

La desigualdad del triángulo se sigue de las desigualdades

$$\begin{aligned}\inf\{\|a+b-x\| : x \in I\} &\leq \inf\{\|a-y+b-z\| : z, y \in I\} \\ &\leq \inf\{\|a-y\| : y \in I\} + \inf\{\|b-z\| : z \in I\}.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Proposición 1.37. *A/I con la norma dada en* (1.13) *es un espacio de Banach.*

Demostración. Por la Proposición 1.36, solo falta probar que la norma es completa.

Es suficiente probar que toda serie absolutamente sumable es sumable (ver $C.2$ en apéndice). Sea $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en A/I absolutamente sumable, es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|H_n\|_{A/I} < \infty.$$

Debemos probar que existe $H \in A/I$ tal que $\lim_k \| \sum_{n=1}^{k} H_n - H\|_{A/I} = 0$.

Usando que $\sum_n H_n$ es absolutamente sumable resulta que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\|H_n\|_{A/I} + \frac{1}{2^n} \right) < \infty.$$

Por otro lado, como $\|H_n\|_{A/I} < \|H_n\|_{A/I} + \frac{1}{2^n}$, por la definición de la norma en A/I, existe $a_n \in H_n$ tal que

$$\|H_n\|_{A/I} \leq \|a_n\| < \|H_n\|_{A/I} + \frac{1}{2^n}$$

y en consecuencia

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|H_n\|_{A/I} + \frac{1}{2^n} < \infty$$

Pero entonces la serie $\sum_n a_n$ es absolutamente sumable en A y al ser A espacio de Banach resulta que es sumable (ver apéndice $C.2$); es decir existe a en A tal que

$$\lim_k \left\| \sum_{n=1}^{k} a_n - a \right\| = 0$$

pero utilizando que para todo b en A, $\|b+I\|_{A/I} \leq \|b\|$ resulta que si $H = a + I$

$$\lim_k \left\| \sum_{n=1}^{k} H_n - H \right\|_{A/I} \leq \lim_k \left\| \sum_{n=1}^{k} a_n - a \right\| = 0$$

es decir, $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sumable. *Q.E.D.*

Además de la estructura de espacio vectorial dada a A/I podemos (gracias a la estructura de ideal bilateral de I) darle estructura de álgebra definiendo

$$(a+I)(b+I) = (ab) + I \tag{1.14}$$

Lo primero es ver que la multiplicación no depende del representante. Supongamos que $a \sim a'$ y $b \sim b'$, es decir $a - a', b - b' \in I$. Entonces al ser I ideal bilateral $ab - a'b \in I$ y $a'b - a'b' \in I$, así que sumando ambos elementos resulta $ab - a'b' \in I$ por lo que $ab + I = a'b' + I$ y la multiplicación está bien definida. De las propiedades de álgebra de A se sigue que A/I es un álgebra.

Ahora veremos una condición para que A/I tenga uno.

Proposición 1.38. *Sea A un álgebra e I un ideal bilateral. I es regular si y sólo si A/I tiene uno.*

Demostración. El álgebra A/I tiene uno si y sólo si existe $v \in A$ tal que para cualquier a

$$(a+I)(v+I) = a + I = (v+I)(a+I)$$

equivalentemente si para toda $a \in A$, $a - av$ y $va - a$ están en I es decir, v es una unidad modular izquerda y derecha de I.

Ahora supongamos que I es bilateral regular y sean u y v unidades izquierda y derecha módulo I respectivamente, es decir para cualquier $x \in A$, $xu - x$ y $vx - x$ están en I, equivalentemente

$$(v+I)(x+I) = x + I = (x+I)(u+I);$$

en consecuencia, $u + I = (v+I)(u+I) = v + I$ y entonces $u + I$ es el uno de A/I. Note que probamos que si I es un ideal bilateral regular y u es una unidad izquierda módulo I entonces u es una unidad derecha módulo I. *Q.E.D.*

Ahora supongamos que el ideal con el que hacemos cociente es regular.

Proposición 1.39. *Sea A un álgebra de Banach e I un ideal bilateral regular cerrado de A. Entonces con la multiplicación dada en* (1.14) *y la norma dada en (*1.13*) A/I es un álgebra de Banach con uno.*

Demostración. Por la Proposición 1.37 A/I es un espacio vectorial normado completo y por la Proposición 1.38 A/I es un álgebra con uno. Sólo nos resta probar la compatibilidad de la norma con el producto.

Tomemos $a + I$ y $b + I$ no cero y supongamos que

$$\|a+I\|_{A/I}\|b+I\|_{A/I} < \|(a+I)(b+I)\|_{A/I}$$

y en consecuencia

$$\|a+I\|_{A/I} < \frac{1}{\|b+I\|_{A/I}}\|(a+I)(b+I)\|_{A/I}$$

entonces por (1.13) tenemos que existe $x_1 \in I$ tal que

$$\|a+x_1\| < \frac{1}{\|b+I\|_{A/I}}\|(a+I)(b+I)\|_{A/I}$$

y de manera similar existe $x_2 \in I$ tal que

$$\|a + x_1\|\|b + x_2\| < \|ab + I\|_{A/I}$$

Usando la compatibilidad de la norma en A,

$$\|ab + ax_2 + x_1 b + x_1 x_2\| \leq \|a + x_1\|\|b + x_2\| < \|ab + I\|_{A/I}$$

pero $ax_2 + x_1 b + x_1 x_2 \in I$ al ser I ideal bilateral, lo que contradice la definición de $\|ab + I\|_{A/I}$. En consecuencia debemos tener

$$\|(a + I)(b + I)\|_{A/I} \leq \|a + I\|_{A/I}\|b + I\|_{A/I}.$$

Q.E.D.

1.6 El radical de un álgebra

En esta sección definimos el radical y estudiamos algunas de sus propiedades, para después en el tercer capítulo ver que el radical coincide con el núcleo de la transformada de Galfand (definida en el mismo capítulo).

Definición 1.40 (Radical en álgebras con uno). *Sea A un álgebra con uno.*

1. *Un elemento x_0 en A se llama generalizado nilpotente si $e - xx_0$ tiene inverso izquierdo para todo $x \in A$.*
2. *El radical (de Jacobson) del álgebra A es el conjunto de elementos generalizados nilpotentes. A tal conjunto lo denotamos por $Rad(A)$.*
3. *Un álgebra A se llama semisimple si $Rad(A) = \{0\}$.*

El cero es un ejemplo de elemento generalizado nilpotente.

Antes de continuar veamos una caracterización de los elementos invertibles en terminos de los ideales máximos.

Lema 1.41. *Sea A un álgebra con uno. Un elemento a tiene inverso izquierdo si y sólo si para todo ideal izquierdo máximo I, a no está en I. Un elemento b tiene inverso derecho si y sólo si para todo ideal derecho máximo I, b no está en I.*

Demostración. Sólo probaremos la parte correspondiente a inversos izquierdos, pues para derechos es similar, y lo probaremos por contrapositiva.

Supongamos que a no tiene inverso izquierdo. Tomemos $J = \{xa : x \in A\}$. Es claro que J es un ideal izquierdo y además está contenido propiamente en A (pues el uno de A no está en J). Así que por la Proposición 1.10 inciso 4, existe I ideal izquierdo máximo que contiene a J, por lo que $a \in I$.

Ahora supongamos que existe un ideal izquierdo máximo I tal que $a \in I$. Si a tiene un inverso izquierdo b, al ser I ideal izquierdo tenemos que $e = ba \in I$, pero entonces, de nuevo por la Proposición 1.10 inciso 1, $I = A$, lo que contradice que I sea máximo. Así pues, a no puede tener un inverso izquierdo. *Q.E.D.*

La siguiente proposición muestra la estrecha relación entre los elementos generalizados nilpotentes y los ideales izquierdos máximos del álgebra.

Proposición 1.42. *Sea A un álgebra con uno. Entonces Rad(A) coincide con la intersección de todos los ideales izquierdos máximos del álgebra y en consecuencia es un ideal izquierdo.*

Demostración. La prueba es por complementos. Un elemento x_0 no está en el radical del álgebra si y sólo si existe un elemento x de tal forma que $e-xx_0$ no es invertible. Por el Lema 1.41 esto equivale a la existencia de un ideal izquierdo máximo I de tal forma que $e - xx_0 \in I$ es decir $e \in I + xx_0 \subset I + Ax_0$. Pero $I + Ax_0$ es un ideal izquierdo, entonces que e esté en $I + Ax_0$ equivale a que $A = I + Ax_0$. En resumen, x_0 no está en el radical si y sólo si existe un ideal izquierdo máximo I tal que $A = I + Ax_0$.

Por otro lado afirmamos que dado un ideal izquierdo máximo J, $A = J+Ax_0$ se da si y sólo si x_0 no está en J. Para demostarlo primero notemos que $J+Ax_0$ es un ideal izquierdo que contiene a J pero J es ideal izquierdo máximo, en consecuencia $J + Ax_0 = J$ ó $J + Ax_0 = A$. Pero $J = J + Ax_0$ si y sólo si $Ax_0 \subseteq J$. Como J es ideal izquierdo y A tiene uno, lo anterior equivale a que $x_0 \in J$. Entonces que x_0 no esté en J equivale a que $A = J + Ax_0$.

Para finalizar tenemos que x_0 no está en el radical si y sólo si existe un ideal izquierdo máximo I de tal forma que $A = I + Ax_0$. Pero esto equivale a que existe un ideal izquierdo I de tal forma que x_0 no está en I es decir, x_0 no está en la intersección de los ideales izquierdos máximos. *Q.E.D.*

Note que si el álgebra es conmutativa, el radical coincide con la intersección de los ideales máximos.

La siguiente proposición nos da una caracterización del radical.

Proposición 1.43. *Sea A un álgebra con uno. Un elemento x_0 esta en Rad(A) si y sólo si para todo $x \in A$, $e - xx_0$ es invertible.*

Demostración. Es claro que si para todo x en A $e-xx_0$ es invertible entonces x_0 está en el radical.

Ahora tomemos x_0 en el radical, x en A y probemos que $e-xx_0$ es invertible. Como x_0 está en el radical, existe un inverso izquierdo de $e - xx_0$, escribámoslo como $e - y$. Es decir $(e - y)(e - xx_0) = e$ y en consecuencia

$$y = yxx_0 + xx_0$$

pero al ser el radical un ideal izquierdo, tenemos que y está en el radical y en consecuencia $e-y$ tiene un inverso izquierdo b. Entonces, $e-y$ tiene un inverso izquierdo b y un inverso derecho $e - xx_0$, asi que $e - y$ es invertible. Pero como $(e - y)(e - xx_0) = e$ concluimos que $e - xx_0$ es invertible. *Q.E.D.*

Nuestro propósito ahora es probar que el radical es un ideal bilateral, para lo cual necesitamos del siguiente lema, que junto con la Proposición 1.43 también nos da una definición equivalente del radical.

Lema 1.44. *En un álgebra A con uno, $e - xy$ es invertible si y sólo si $e - yx$ es invertible.*

Demostración. Supongamos que $e - xy$ es invertible y probemos que $e - yx$ lo es. Sea a el inverso de $e - xy$. Afirmamos que $e + yax$ es el inverso de $e - yx$, lo que se sigue de

$$(e + yax)(e - yx) = e + yax - yx - yaxyx = e - yx + ya(e - xy)x = e$$
$$(e - yx)(e + yax) = e - yx + yax - yxyax = e - yx + y(e - xy)ax = e$$

Por simetría se tiene que si $e - yx$ es invertible entonces $e - xy$ también. *Q.E.D.*

Corolario 1.45. *El radical es un ideal bilateral.*

Demostración. Sea I el conjunto de elementos y_0 de A que cumplen que para todo $y \in A$, $e - y_0 y$ tiene inverso derecho. De manera similar a la Proposición 1.42, se prueba que I es intersección de los ideales derechos máximos de A y por lo tanto es un ideal derecho. Además, al igual que la Proposición 1.43, y_0 está en I si y sólo si $e - y_0 y$ es invertible.

En resumen, y_0 está en I si y sólo si $e - y_0 y$ es invertible para todo y. Por el Lema 1.44 esto es equivalente a que $e - yy_0$ sea invertible para todo y y gracias a la Proposición 1.43 esto pasa si y sólo si y_0 está en el radical de A. En conclusión, I es igual al radical del álgebra. Pero I es ideal derecho y $Rad(A)$ es ideal izquierdo, así concluimos que $Rad(A)$ es ideal bilateral. *Q.E.D.*

Gracias a la adjunción de la identidad podemos definir el radical de un álgebra sin uno.

Definición 1.46 (Radical en álgebras sin uno). *Sea A un álgebra sin uno y sea $A \oplus \mathbb{C}e$ la adjunción de la identidad. (Recuerde que puede considerarse $A \subset A \oplus \mathbb{C}e$.) El radical de A se define como $A \cap Rad(A \oplus \mathbb{C}e)$.*

1.7 Álgebras simétricas

Esta sección será importante para el último capítulo. Los resultados por sí mismos son interesantes pues son el inicio del estudio de ciertas álgebras de Banach sumamente importantes, las álgebras C^*.

Definición 1.47. *Un álgebra de Banach A tiene una <u>involución</u> si está dotada de una operación $^* : A \to A$ que satisface*

1. $(\alpha a + b)^* = \bar{\alpha} a^* + b^*$
2. $(ab)^* = b^* a^*$
3. $a^{**} = a$

para cualesquiera $a, b \in A$ y α número complejo.

Si además para toda $a \in A$, $\|a\| = \|a^*\|$, la llamaremos un <u>álgebra simétrica</u>. Notamos la similitud entre la involución y la conjugación en los números complejos.

Ejemplo 1.48. *Sea X un espacio topológico compacto Hausdorff. Con las operaciones usuales de funciones y la norma uniforme (del supremo), $C(X)$ es un álgebra de Banach. Si para $f \in C(X)$ definimos $f^*(x) = \overline{f(x)}$ (conjugación compleja) entonces $*$ define una involución que hace a $C(X)$ un álgebra simétrica.*

Definición 1.49. *Un elemento a de un álgebra con involución se llama hermitiano si $a = a^*$.*

Proposición 1.50. *Todo elemento de un álgebra con involución se puede representar de manera única como $a = a_1 + ia_2$ con a_1 y a_2 hermitianos.*

Demostración. Supongamos que a se puede escribir como $a = a_1 + ia_2$ con a_1 y a_2 hermitianos. Entonces $a^* = a_1^* - ia_2^*$ y en consecuencia

$$a_1 = \frac{a + a^*}{2} \qquad a_2 = \frac{a - a^*}{2i}$$

Esto nos dice que la representación es única (de existir a_1 y a_2 deben ser como en la ecuación anterior). Si definimos a_1 y a_2 como antes es claro que son hermitianos y que $a = a_1 + ia_2$. *Q.E.D.*

Notas: Los elementos de la forma aa^* son hermitianos, pues $(aa^*)^* = a^{**}a^* = aa^*$; si el álgebra tiene uno 1_A, éste es hermitiano ya que por lo anterior $1_a^* = 1_A 1_A^*$ es hermitiano pero $1_A = (1_A^*)^* = 1_A^*$.

Definición 1.51. *Sea A un álgebra con involución. Una funcional lineal f se llama positiva si*

1. *$f(a)$ es real para todo a hermitiano.*

2. *Para toda a, $0 \leq f(a^*a)$.*

Proposición 1.52. *Sea A, un álgebra con involución. Para toda f funcional lineal positiva se cumple*

1. *$f(a^*) = \overline{f(a)}$.*

2. *$f(b^*a) = \overline{f(a^*b)}$.*

3. *Desigualdad de Cauchy: $|f(b^*a)|^2 \leq f(b^*b)f(a^*a)$.*

4. *Si el álgebra A tiene uno, entonces $|f(a)|^2 \leq f(1_A)f(a^*a)$.*

Demostración. Para probar 1, escribimos $a = a_1 + ia_2$ con a_1 y a_2 hermitianos. Entonces $a^* = a_1 - ia_2$, así que usando que $f(a_1)$ y $f(a_2)$ son reales tenemos

$$f(a^*) = f(a_1) - if(a_2) = \overline{f(a_1) + if(a_2)} = \overline{f(a)}$$

Para probar 2, usamos el inciso 1 para obtener $\overline{f(a^*b)} = f((a^*b)^*) = f(b^*a)$. Para probar 3 observemos que por linealidad, para α y β complejos tenemos

$$\begin{aligned} f((\alpha a+\beta b)^*(\alpha a+\beta b)) &= f((\bar{\alpha}a^*+\bar{\beta}b^*)(\alpha a+\beta b)) \\ &= |\alpha|^2 f(a^*a)+\bar{\beta}\alpha f(b^*a)+\bar{\alpha}\beta f(a^*b)+|\beta|^2 f(b^*b) \end{aligned}$$

De la definición 1.51-2 tenemos

$$0 \leq |\alpha|^2 f(a^*a)+\bar{\beta}\alpha f(b^*a)+\bar{\alpha}\beta f(a^*b)+|\beta|^2 f(b^*b) \tag{1.15}$$

Si en (1.15) tomamos $\beta = 1$ y $\alpha = t\gamma$ con t real, y γ unitario resulta

$$0 \leq t^2 f(a^*a)+t(\gamma f(b^*a)+\bar{\gamma}f(a^*b))+f(b^*b) \tag{1.16}$$

Obsérvese que por el inciso 2, $\gamma f(b^*a)+\bar{\gamma}f(a^*b)$ es real. Entonces (1.16) define una parábola real que siempre está por arriba del eje x, así que el discriminante es menor o igual a cero, es decir

$$\gamma^2 f(b^*a)^2+\bar{\gamma}^2 f(a^*b)^2+2f(a^*b)f(b^*a)-4f(b^*b)f(a^*a) \leq 0$$

y usando que $f(b^*a) = \overline{f(a^*b)}$ obtenemos

$$2Re(\gamma^2 f(b^*a)^2)+2|f(b^*a)|^2 \leq 4f(b^*a)f(a^*b) \tag{1.17}$$

para γ cualquier complejo unitario.

Para finalizar, si $f(b^*a) = 0$, de (1.17) resulta que $0 \leq f(b^*a)f(a^*b)$, y se cumple la desigualdad de Cauchy. Si $f(b^*a)$ no es cero tomando $\gamma = \frac{|f(b^*a)|}{f(b^*a)}$ en (1.17) obtenemos

$$|f(b^*a)|^2 \leq f(b^*a)f(a^*b)$$

El ultimo inciso de la proposición se obtiene del tercero, tomando $b = 1_A$ y usando que 1_A es hermitiano. *Q.E.D.*

Para álgebras sin uno, se rescata el último inciso de la proposición 1.52 con el concepto de aproximación de la identidad.

Definición 1.53. *Sea A un álgebra de Banach. Una red $(u_i)_{i\in I}$ en el álgebra tal que*

1. *Para toda i, $\|u_i\| = 1$.*
2. $\lim_i \|au_i - a\| = \lim_i \|u_i a - a\| = 0$ *para toda a,*

se llama una aproximación de la identidad en A.

Proposición 1.54. *Sea A un álgebra simétrica, $(u_i)_{i\in I}$ una aproximación de la identidad en A y f funcional lineal positiva. Entonces para toda a,*

$$|f(a)|^2 \leq \|f\| f(a^*a) \tag{1.18}$$

Demostración. Por la desigualdad de Cauchy (ver Proposición 1.52) tenemos para toda i,

$$|f(u_i a)|^2 \leq f(u_i u_i^*)f(a^*a)$$

Al ser f acotada tenemos $|f(u_i u_i^*)| \leq \|f\|\|u_i\|\|u_i^*\|$, pero como el álgebra es simétrica y $\|u_i\| = 1$, tenemos $|f(u_i a)|^2 \leq \|f\| f(a^*a)$. Por último, usando que $\lim_i \|u_i a - a\| = 0$ y la continuidad de f concluimos de la ecuación anterior que $|f(a)|^2 \leq \|f\| f(a^*a)$. *Q.E.D.*

Capítulo 2

Espectro

En un álgebra de Banach con uno, el espectro de un elemento a es el conjunto de números complejos que cumplen que $ze - a$ no es invertible. En este capítulo probaremos que el espectro es un subconjunto de $\mathbb{C}$ compacto, no vacío y veremos que es una herramienta importante en el estudio de las álgebras de Banach. Por ejemplo, un álgebra con uno tiene división si todo elemento no cero tiene inverso multipicativo, si el álgebra es de Banach y conmutativa, el Teorema de Gelfand-Mazur nos dice, básicamente, que esta álgebra es $\mathbb{C}$. Sabemos que el núcleo de cualquier funcional lineal multiplicativa es un ideal máximo, gracias al Teorema de Gelfand-Mazur resulta que en álgebras de Banach conmutativas con uno, éstos son los únicos ideales máximos.

2.1 Definición y propiedades principales

Durante esta sección $(A, \|\cdot\|)$ denota un álgebra de Banach con uno, al cual denotamos e y por G denotamos los elementos de A que son invertibles.

Definición 2.1. *Sea $a \in A$. El espectro de a en A (denotado por $\sigma_A(a)$) es el subconjunto de $\mathbb{C}$ dado por*

$$\sigma_A(a) = \{z \in \mathbb{C} : ze - a \textit{ no es invertible en } A\}$$

La resolvente de a (denotado por $\rho_A(a)$) es el complemento del espectro de a i.e. $\rho_A(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma_A(a)$.

Por ejemplo, el espectro del 0 son los complejos tal que ze es no invertible, por lo que el espectro de 0 es $\{0\}$.

Notas: Escribiremos $\sigma(a)$ en lugar de $\sigma_A(a)$ si es claro que nos referimos del espectro de a en el álgebra A. Si A es un álgebra con uno y B es subálgebra de A y el uno de A está en B, podemos hablar del espectro en A y en B. En general $\sigma_B(a) \subseteq \sigma_A(a)$.

Notación: Dada $r > 0$, por $D_r(0)$ denotamos al disco abierto con centro en cero y radio r.

Proposición 2.2. *Para toda $a \in A$, $\sigma(a) \subseteq \bar{D}_{\|a\|}(0)$*

Demostración. Lo probaremos por complementos.
Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > \|a\|$. Por la Proposición 1.16, $ze - a$ es invertible i.e. $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$. *Q.E.D.*

En esta sección el resultado principal es probar que para toda $a \in A$, $\sigma(a)$ es compacto no vacío, para lo cual necesitamos algunos preliminares.

Como $\sigma(a) \subseteq \mathbb{C}$ tenemos que $\sigma(a)$ es compacto si y sólo si $\sigma(a)$ es cerrado y acotado. Por la Proposición 2.2, $\sigma(a)$ es acotado así que para probar la compacidad sólo es necesario probar que es cerrado o equivalentemente que $\mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ es abierto.

Proposición 2.3. $\rho(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ *es abierto.*

Demostración. Comenzamos definiendo $f : \mathbb{C} \to A$ por $f(z) = ze - a$. Observamos que f es uniformemente continua pues dados $z, w \in \mathbb{C}$ tenemos

$$\|f(z) - f(w)\| = \|(ze - a) - (we - a)\| = \|(z - w)e\| = |z - w|$$

lo que prueba que f es uniformemente continua.
Además $\rho(a) = f^{-1}(G)$. Para probar esto último observemos que $z \in \rho(a)$ si y sólo si $ze - a \in G$ es decir, si y sólo si $f(z) \in G$.
Por último al ser f continua y G abierto (ver Proposición 1.16) resulta que $\rho(a) = f^{-1}(G)$ es abierto. *Q.E.D.*

Ya sabiendo que $\sigma(a)$ es acotado obtenemos de inmediato el siguiente corolario.

Corolario 2.4. $\sigma(a) \subseteq \mathbb{C}$ *es compacto.*

Ahora, el objetivo es probar que $\sigma(a)$ es no vacío.

Definición 2.5. *Dada $a \in A$ definimos la función resolvente de a como la función $R_a : \rho(a) \to G$ dada por $R_a(z) = (ze - a)^{-1}$.*

Podemos notar rápidamente que R_a es continua pues $R_a = h \circ f$ con $h : G \to G$ dada por $h(x) = x^{-1}$ y $f : \rho(a) \to G$ dada por $f(z) = ze - a$. Ahora h es continua por la Proposición 1.16 y f es continua por la Proposición 2.3.

Proposición 2.6. *[Identidad resolvente] Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene que*

$$R_a(z) - R_a(w) = (w - z)R_a(w)R_a(z)$$

Demostración. Al ser $R_a(z)$ invertible para todo $z \in \rho(a)$, es equivalente probar

$$[R_a(z) - R_a(w)]R_a(z)^{-1}R_a(w)^{-1} = (w - z)e$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} [R_a(z) - R_a(w)]R_a(z)^{-1}R_a(w)^{-1} &= [(ze - a)^{-1} - (we - a)^{-1}](ze - a)(we - a) \\ &= (we - a) - (we - a)^{-1}(ze - a)(we - a) \end{aligned}$$

Pero $(we-a)^{-1}(ze-a)(we-a) = (ze-a)$ (ya que $(ze-a)(we-a) = (we-a)(ze-a)$) por lo que de la ecuación anterior obtenemos

$$[R_a(z) - R_a(w)]R_a(z)^{-1}R_a(w)^{-1} = (we-a) - (ze-a) = (w-z)e.$$

Q.E.D.

Lema 2.7. *1. La función R_a es analítica en $\rho(a)$, es decir, para toda z_0 en $\rho(a)$ se tiene:*

$$\lim_{z\to z_0} \frac{R_a(z) - R_a(z_0)}{z - z_0} = -R_a(z_0)^2. \tag{2.1}$$

2. La función R_a se anula el el infinito, es decir:

$$\lim_{z\to\infty} \|R_a(z)\| = 0. \tag{2.2}$$

Prueba de 1.
Sea $z \in \rho(a)$ con $z \neq z_0$ arbitrario.
Por la identidad resolvente

$$R_a(z) - R_a(z_0) = (z_0 - z)R_a(z_0)R_a(z)$$

por lo que

$$\frac{R_a(z) - R_a(z_0)}{z - z_0} = -R_a(z_0)R_a(z)$$

haciendo tender z a z_0 y teniendo en cuenta la continuidad de R_a obtenemos

$$\lim_{z\to z_0} \frac{R_a(z) - R_a(z_0)}{z - z_0} = -R_a(z_0) \lim_{z\to z_0} R_a(z) = -R_a(z_0)^2$$

Prueba de 2.
Ahora probamos que R_a se anula en el infinito.
Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > \|a\|$, entonces $z \neq 0$ y $z \in \rho(a)$ (por Proposición 2.2). En consecuencia

$$R_a(z) = (ze-a)^{-1} = \frac{1}{z}\left(e - \frac{1}{z}a\right)^{-1}$$

Por otro lado $|z| > \|a\|$ y entonces $1 > \left\|\frac{1}{z}a\right\|$ y por (1.8)

$$\left\|\left(e - \frac{1}{z}a\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \left\|\frac{1}{z}a\right\|} = \frac{|z|}{|z| - \|a\|}$$

por lo que

$$\|R_a(z)\| = \frac{1}{|z|}\left\|\left(e - \frac{1}{z}a\right)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{|z| - \|a\|}$$

y haciendo $|z|$ tender a infinito

$$\lim_{|z|\to\infty} \|R_a(z)\| = \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|z| - \|a\|} = 0.$$

Q.E.D.

Teorema 2.8. *Para toda $a \in A$, $\sigma(a)$ es compacto no vacío.*

Demostración.

Por 2.4 $\sigma(a)$ es compacto. Resta probar que es distinto del vacío.

Supongamos que $\sigma(a)$ es vacío, entonces $\rho(a) = \mathbb{C}$ y en consecuencia el dominio de R_a es todo $\mathbb{C}$.

Sea f una funcional lineal fija y arbitraria y sea $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = f(R_a(z))$.

Afirmamos que g es entera y acotada.

Comencemos probando que g es entera. Sean $z, z_0 \in \mathbb{C}$ $z \neq z_0$, arbitrarios. Usando que f es lineal y continua tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(R_a(z)) - f(R_a(z_0))}{z - z_0} \\ &= f\left(\lim_{z \to z_0} \frac{R_a(z) - R_a(z_0)}{z - z_0} \right) \end{aligned}$$

y por (2.1) se sigue

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = f(-R_a(z_0)^2);$$

entonces g es analítica en z_0 y al ser $z_0 \in \mathbb{C}$ arbitrario se concluye que g es entera.

Ahora probamos que g es acotada.

Por (2.2) existe $M > 0$ tal que si $|z| > M$ entonces $\|R_a(z)\| \leq 1$.

Al ser g analítica, g es continua y entonces $\sup\left\{|g(z)| : z \in \bar{D}_M(0)\right\} = \|g\|_{\bar{D}_M(0)}$ se alcanza.

Afirmamos que $|g| \leq \max\left\{\|f\|, \|g\|_{\bar{D}_M(0)}\right\} = \alpha \in \mathbb{R}$. Para probarlo, tomemos z un número complejo. Si $z \in \bar{D}_M(0)$ es claro que $|g(z)| \leq \alpha$. Ahora, si $|z| > M$ entonces $\|R_a(z)\| \leq 1$ pero

$$|g(z)| = |f(R_a(z))| \leq \|f\| \, \|R_a(z)\| \leq \|f\|$$

asi que $|g(z)| \leq \alpha$.

En conclusión g es entera y acotada, así que por el Teorema de Liouville g es constante por lo que $g(0) = g(1)$ es decir $f((-a)^{-1}) = f((e-a)^{-1})$. Pero f es una funcional lineal arbitraria, así que por un corolario del Teorema de Hahn-Banach (ver apéndice C.3) debemos tener que $(-a)^{-1} = (e-a)^{-1}$ y en consecuencia $e = 0$, una contradicción. Concluimos que $\sigma(a)$ no puede ser vacío. *Q.E.D.*

2.2 Radio espectral

Definición 2.9. *Sea A un álgebra normada (ver definición* 1.1*) y $a \in A$. El radio espectral de a se define como*

$$\inf_{n=1,2,\dots} \{\|a^n\|^{1/n}\} \tag{2.3}$$

Proposición 2.10. *Para todo elemento a en un álgebra normada*

$$\lim_n \|a^n\|^{1/n} = \inf_{n=1,2,\ldots} \{\|a^n\|^{1/n}\} \leq \|a\|.$$

Demostración. Sea $\alpha = \inf_{n=1,2,\ldots}\{\|a^n\|^{1/n}\}$. Por la compatibilidad de la norma es claro que $\alpha \leq \|a\|$.

Ahora tomemos $\varepsilon > 0$ y $k \geq 1$ tal que $\alpha \leq \|a^k\|^{1/k} < \alpha + \varepsilon$. Por el algoritmo de Euclides, para todo $n \geq 1$ existen $p(n)$ y $r(n)$ naturales, con $r(n) < k$, tal que $n = p(n)k + r(n)$. En consecuencia

$$\|a^n\|^{1/n} = \|a^{p(n)k+r(n)}\|^{1/n} \leq \|a^k\|^{\frac{p(n)}{n}} \|a\|^{\frac{r(n)}{n}}$$

Note que $\frac{r(n)}{n} < \frac{k}{n}$. En consecuencia $\frac{r(n)}{n}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito pero $1 = \frac{p(n)k}{n} + \frac{r(n)}{n}$, por lo tanto $\frac{p(n)}{n}$ tiende a $1/k$ cuando n tiende a infinito, así que

$$\lim_n \|a^k\|^{\frac{p(n)}{n}} \|a\|^{\frac{r(n)}{n}} = \|a^k\|^{1/k}$$

Pero $\|a^k\|^{1/k} < \alpha + \varepsilon$, por lo que si n es suficientemente grande

$$\|a^n\|^{1/n} \leq \alpha + \varepsilon$$

y en consecuencia $\limsup_n \|a^n\|^{1/n} \leq \alpha + \varepsilon$. Por otro lado para todo $n \geq 1$, $\alpha \leq \|a^n\|^{1/n}$ por lo que $\alpha \leq \liminf_n \|a^n\|^{1/n}$. Se concluye

$$\alpha \leq \liminf_n \|a^n\|^{1/n} \leq \limsup_n \|a^n\|^{1/n} \leq \alpha + \varepsilon$$

para toda $\varepsilon > 0$. Esto nos dice que $\lim_n \|a^n\|^{1/n}$ existe y es igual a α. *Q.E.D.*

El radio espectral nos da mucha información, en particular nos interesa probar el siguiente resultado, conocido como fórmula del radio espectral.

Teorema 2.11. *Sea A un álgebra de Banach con uno. Para toda $a \in A$ se cumple*

$$\max\{|z| : z \in \sigma(a)\} = \lim_n \|a^n\|^{1/n} \tag{2.4}$$

La herramienta que necesitamos para probar el Teorema 2.11 es el Teorema espectral polinomial.

Sea $p(z) = \sum_{k=1}^n \alpha_k z^k$ con $\alpha_k \in \mathbb{C}$. Dado a en un álgebra con uno, $p(a)$ denota el elemento $\sum_{k=0}^n \alpha_k a^k$. Obsérvese que si p y q son polinomios y r es el producto entonces $r(a) = p(a)q(a)$. Entonces la función de $\mathbb{C}[z]$ a A dada por $p \mapsto p(a)$ es un homomorfismo de álgebras. El Teorema espectral polinomial relaciona el espectro de $p(a)$ con el espectro de a.

Teorema 2.12 (Teorema espectral polinomial). *Sea A un álgebra de Banach con uno. Si p es un polinomio no constante entonces $\sigma(p(a)) = p[\sigma(a)]$, donde $p[\sigma(a)] = \{p(z) : z \in \sigma(a)\}$.*

Demostración. Sea p un polinomio de grado $n \geq 1$ y $w \in \mathbb{C}$. Por el Teorema fundamental del álgebra existen $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$ y $\beta \neq 0$ tal que

$$w - p(z) = \beta(\alpha_1 - z) \cdots (\alpha_n - z)$$

y en consecuencia $we - p(a) = \beta(\alpha_1 e - a) \cdots (\alpha_n e - a)$ (usando que la función $p \mapsto p(a)$ es homomorfismo de álgebras entre $\mathbb{C}[z]$ y A). Note que para cada α_j, $p(\alpha_j) = w$.

Ahora, supóngase que $we - p(a)$ es invertible y sea b su inverso. Usando que $\alpha_i e - a$ conmuta con $\alpha_j e - a$ obtenemos que

$$e = b\beta\left(\Pi_{i \neq j}(\alpha_i e - a)\right)(\alpha_j e - a) \quad \text{y} \quad e = (\alpha_j e - a)\beta\left(\Pi_{i \neq j}(\alpha_i e - a)\right) b$$

por lo que cada $\alpha_j e - a$ es invertible.

A la inversa, si cada $\alpha_j e - a$ es invertible (al ser los invertibles grupo y $\beta \neq 0$) se sigue que $we - p(a)$ es invertible.

En consecuencia $we - p(a)$ es invertible si y sólo si cada $\alpha_j e - a$ es invertible o en otras palabras, $we - p(a)$ no es invertible si y sólo si existe j tal que $\alpha_j e - a$ no es invertible es decir $w \in \sigma(p(a))$ si y sólo si para alguna j, $\alpha_j \in \sigma(a)$. Pero para toda j, $p(\alpha_j) = w$, así que concluimos que $w \in \sigma(p(a))$ si y sólo si $w = p(z)$ para alguna $z \in \sigma(a)$. *Q.E.D.*

Prueba del Teorema 2.11

Suponemos a distinta de cero, pues en este caso la igualdad es clara.

Sea $\rho = \max\{|z| : z \in \sigma(a)\}$.

Primero probaremos que $\rho \leq \lim_n \|a^n\|^{1/n}$. Tomemos z en el espectro de a. Por el Teorema 2.12, para toda $n \geq 1$, z^n está en el espectro de a^n, pero entonces $|z^n| \leq \|a^n\|$ y en consecuencia $|z| \leq \|a^n\|^{1/n}$ para toda $n \geq 1$, de donde se concluye $\rho \leq \lim_n \|a^n\|^{1/n}$.

Ahora probamos que $\lim_n \|a^n\|^{1/n} \leq \rho$ para lo cual dividimos los casos $\rho = 0$ y $\rho > 0$.

Supongamos que $\rho > 0$. Sea D_1 el disco abierto con centro en cero y radio $\frac{1}{\rho}$. Note que para $w \in D_1$ con $w \neq 0$, w^{-1} no está en $\sigma(a)$ (pues $\rho < |w^{-1}|$). En consecuencia $w^{-1}e - a$ es invertible, pero $w \neq 0$, así que $w(w^{-1}e - a) = e - wa$ es invertible, inclusive cuando $w = 0$.

Sea f una funcional lineal fija y arbitraria. Defina $g(w) = f((e - wa)^{-1})$ para $w \in D_1$. Por lo anterior, g está bien definida. Afirmamos que g es analítica en D_1. Primero notamos que para cualesquiera w, w_0 en D_1,

$$(e - wa)^{-1} - (e - w_0 a)^{-1} = (w - w_0)a(e - wa)^{-1}(e - w_0 a)^{-1}$$

(la prueba es igual que en la identidad resolvente, ver Proposición 2.6) y en consecuencia

$$\lim_{w \to w_0} \frac{(e - wa)^{-1} - (e - w_0 a)^{-1}}{w - w_0} = a((e - w_0 a)^{-1})^2$$

Pero al ser f funcional lineal,

$$\lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = f\left(a((e - w_0 a)^{-1})^2\right);$$

así pues, g es analítica en D_1.

Por otro lado, sea D_2 el disco abierto con centro en cero y radio $\frac{1}{\|a\|}$. Como $\rho \leq \lim_n \|a^n\|^{1/n} \leq \|a\|$, tenemos que $D_2 \subset D_1$. Además, para $w \in D_2$, $\|wa\| < 1$ así que por la Proposición 1.16

$$(e - wa)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k a^k$$

y al ser f funcional lineal concluimos que para todo $w \in D_2$ se tiene

$$g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} w^k f(a^k) \tag{2.5}$$

Pero por la unicidad de la serie de Taylor (al ser g analítica en D_1) se sigue que la serie (2.5) es la serie de Taylor con centro en cero para g en D_1, es decir, no sólo para w en D_2 sino para toda w en D_1 se cumple (2.5).

Como consecuencia tenemos que para todo w en D_1, y toda f funcional lineal $\lim_n f(w^n a^n) = 0$. Entonces la serie $(w^n a^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cero en la topología débil (ver apéndice C.4) y entonces (ver apéndice C.6) se sigue que para cada w, la serie es acotada fuertemente, es decir existe $M_w > 0$ tal que para todo n, $|w|^n \|a^n\| \leq M_w$. Si $w \neq 0$ se tiene

$$\|a^n\|^{1/n} \leq \frac{M_w^{1/n}}{|w|}$$

y al tomar límite cuando n tiende a infinito se concluye

$$\lim_n \|a^n\|^{1/n} \leq \frac{1}{|w|}$$

para toda $w \in D_1$ no cero. En consecuencia si w tiende a $\frac{1}{\rho}$ se concluye que $\lim_n \|a^n\|^{1/n} \leq \rho$.

Ahora supongamos que $\rho = 0$. Ahora tome $D_1 = \mathbb{C}$. Como antes para todo $w \neq 0$, $w^{-1}e - a$ es invertible y en consecuencia $w(w^{-1}e - a) = e - wa$ es invertible para todo w (incluso cuando $w = 0$). Siguiendo los mismos pasos del caso anterior se prueba que

$$\lim_n \|a^n\|^{1/n} \leq \frac{1}{|w|}$$

para toda $w \neq 0$, así que si $|w|$ tiende a infinito se concluye que $\lim_n \|a^n\|^{1/n} = 0$. *Q.E.D.*

Para terminar esta sección damos un criterio para saber cuándo $\|a\| = \lim_n \|a^n\|^{1/n}$ para toda a.

Proposición 2.13. *Sea A un álgebra de Banach con uno. Suponga que para toda a, $\|a^2\| = \|a\|^2$, entonces $\lim_n \|a^n\|^{1/n} = \|a\|$. Inversamente, si para toda a, $\lim_n \|a^n\|^{1/n} = \|a\|$ entonces $\|a^2\| = \|a\|^2$.*

Demostración. Supongamos que para toda b,

$$\|b^2\| = \|b\|^2 \tag{2.6}$$

y tomemos a arbitraria. Lo primero que observamos es que para todo $n \geq 1$,

$$\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n} \tag{2.7}$$

Para probar esto procedemos por inducción. Para $n = 1$ se sigue de (2.6). Supongamos que se vale para n y probemos para $n+1$. Usando (2.6), tomando $b = a^{2^n}$ tenemos

$$\|a^{2^{n+1}}\| = \|a^{2^n}\|^2$$

pero por hipótesis de inducción $\|a^{2^n}\| = \|a\|^{2^n}$, así que $\|a^{2^{n+1}}\| = \|a\|^{2^{n+1}}$.

Por último, usando que $\lim_n \|a^n\|^{1/n} = \lim_n \|a^{2^n}\|^{1/2^n}$ y (2.7) se concluye que $\lim_n \|a^n\|^{1/n} = \|a\|$.

Supongamos que $\lim_n \|a^n\|^{1/n} = \|a\|$. De la Proposición 2.10 se sigue que

$$\|a\| = \inf_{n=1,2,\ldots} \{\|a^n\|^{1/n}\}$$

asi que $\|a\|^2 \leq \|a^2\|$. Pero por la compatibilidad de la norma $\|a^2\| \leq \|a\|^2$ por lo que tenemos $\|a^2\| = \|a\|^2$. *Q.E.D.*

2.3 Algunas aplicaciones

A lo largo de esta sección trabajamos principalmente con álgebras conmutativas.

Veamos una consecuencia del Teorema 2.8, para lo cual damos antes una definición.

Definición 2.14. *Un álgebra con división es un álgebra con uno tal que todo elemento no cero es invertible.*

Note que cuando el álgebra A es conmutativa, pedir que sea con división es pedir que A sea no sólo un anillo, sino un campo.

El ejemplo más conocido de álgebra con división es $\mathbb{C}$ y veremos que en el contexto de álgebras de Banach conmutativas $\mathbb{C}$ es, prácticamente, el único ejemplo.

El siguiente lema puede darnos más ejemplos de álgebras con división.

Proposición 2.15. *Dada A un álgebra conmutativa e $I \subseteq A$ un ideal regular máximo tenemos que A/I es un álgebra con división.*

Demostración. Como el álgebra A es conmutativa y el ideal I es regular, tenemos que A/I es un álgebra conmutativa con uno (ver Proposición 1.38).

Sea $a + I \neq 0 + I$, entonces $a \notin I$.

Sea u una unidad módulo I. Queremos probar que $a + I$ es invertible es decir, queremos un elemento b en A de tal forma que

$$(b + I)(a + I) = u + I = (a + I)(b + I)$$

pero como A/I es conmutativa resta probar que $(b+I)(a+I) = u+I$, lo cual puede reescribirse como $ba - u \in I$ ó equivalentemente $u \in I + ba \subset I + Aa$. Pero $I + Aa$ es un ideal regular y u es una unidad módulo $I + Aa$, por lo que pedir $u \in I + Aa$ es quivalente a pedir $I + Aa = A$ (ver la Proposición 1.10).

En conclusión $a + I$ es invertible si y sólo si $I + Aa = A$. Como I es ideal máximo e $I + Aa$ contiene propiamente a I (pues a está en $I + Aa$ y no está en I) resulta que $I + Aa = A$. *Q.E.D.*

Queremos recalcar la necesidad de que el álgebra sea conmutativa. Si queremos extender la proposición para álgebras no necesariamente conmutativas, debemos tomar un ideal bilateral (para dar estructura de álgebra al cociente) y además que sea máximo para tratar de probar que el álgebra cociente es de división. Pero si tomamos A el álgebra de las matrices con entradas complejas de 2×2 sabemos, gracias al ejemplo 1.11, que el único ideal bilateral máximo es el $\{0\}$ y al hacer cociente obtenemos A, que no es álgebra con división.

Ahora enunciamos y probamos el Teorema de Gelfand-Mazur, que nos ayudará a establecer la correspondencia entre funcionales lineales multiplicativas e ideales regulares máximos.

Teorema 2.16 (Teorema de Gelfand-Mazur). *Sea A un álgebra de Banach con división. Entonces A es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$, es decir existe $\psi : A \to \mathbb{C}$ isomorfismo de álgebras que además es una isometría.*

Demostración. Veamos cómo es el espectro de los elementos de un álgebra con división. Como todo elemento distinto de cero es invertible, dado $a \in A$ los números complejos z para los cuales $(ze - a)$ no es invertible son aquellos z para los cuales $ze - a = 0$. Pero usando que el espectro de a es no vacío resulta que existe z complejo tal que $ze - a = 0$, es decir $a = ze$. Además dicho z es único, pues si w es tal que $a = we$ entonces $ze = we$ y en consecuencia $(w - z)e = 0$, es decir $w = z$. En consecuencia hemos probado que el espectro de todo a es un único punto, $\psi(a)$ y que $a = \psi(a)e$.

Debemos probar que la transformación $\psi : A \to \mathbb{C}$ tal que a cada a asigna $\psi(a)$ es un isomorfismo isométrico.

Como $\|a\| = \|\psi(a)e\| = |\psi(a)|$, resulta que ψ es una isometría y por lo tanto inyectiva. Además es claro que ψ es sobre.

Por último de las siguientes igualdades (con $a, b \in A$ y $z \in \mathbb{C}$)

$$
\begin{aligned}
za &= \psi(za)e \\
za &= z(\psi(a)e) = (z\psi(a))e \\
a+b &= \psi(a+b)e \\
a+b &= \psi(a)e + \psi(b)e = (\psi(a) + \psi(b))e \\
ab &= \psi(ab)e \\
ab &= (\psi(a)e)(\psi(b)e) = (\psi(a)\psi(b))e
\end{aligned}
$$

resulta que ψ es un homomorfismo de álgebras. *Q.E.D.*

Ahora veremos la relación que existe entre los núcleos de las funcionales lineales multiplicativas y los ideales regulares máximos.

Proposición 2.17. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa con uno. Denotamos*

$$M_A = \{I \subseteq A : I \quad \text{es ideal máximo}\}$$

Entonces existe una biyección entre $\mathcal{M}_A$ y M_A, es más, I es un ideal máximo si y sólo si es el núcleo de una funcional lineal multiplicativa.

Demostración. Sea $f : \mathcal{M}_A \to M_A$ dada por $f(\psi) = \ker(\psi)$. Por la Proposición 1.24, $\ker(\psi)$ es ideal máximo, así que f está bien definida y además si $f(\psi) = f(\phi)$ entonces $\ker(\phi) = \ker(\psi)$, pero ya sabemos que dos funcionales lineales multiplicativas con el mismo núcleo son iguales (por la proposción 1.25) concluyendo que f es inyectiva.

Para probar que f es suprayectiva utilizamos el Teorema de Gelfand-Mazur. Tomemos I ideal máximo de A (como A tiene uno, I es regular). Queremos una funcional lineal multiplicativa ψ de tal forma que $\ker \psi = I$. Tomemos $\pi : A \to A/I$ la proyección de A en A/I. Es conocido que π es un homomorfismo de álgebras y que su núcleo es I. Entonces, si probamos que A/I es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$, digamos con ϕ, obtenemos un isomorfismo de álgebras no cero de A a $\mathbb{C}$, primero pasando al cociente A/I y luego usando ϕ para pasar de A/I a $\mathbb{C}$, de tal forma que el núcleo es I. Así pues, sólo nos resta justificar porque A/I es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$ y aquí es donde entra el Teorema de Gelfand-Mazur. Sabemos, por la Proposición 2.15, que A/I es un álgebra conmutativa con división (note que en este paso la conmutatividad de A es necesaria para poder asegurar que A/I es de división) y por la Proposición 1.39 es de Banach (con la norma del cociente), entonces por Gelfand-Mazur existe $\phi : A/I \to \mathbb{C}$ isomorfismo isométrico. *Q.E.D.*

Como una consecuencia de esta proposición tenemos que en las álgebras de Banach conmutativas con uno existen funcionales lineales multiplicativas, pues la existencia de funcionales lineales multiplicativas es equivalente a la existencia de ideales máximos y esto último es equivalente por la Proposición 1.10-4, a la existencia de ideales propios. Pero $\{0\}$ es ideal propio de A, así que hemos probado el siguiente resultado.

Corolario 2.18. *Si A es un álgebra de Banach conmutativa con uno, $\mathcal{M}_A$ es no vacío.*

Ahora establecemos un análogo a la Proposición 2.17, pero para álgebras no necesariamente con uno.

Proposición 2.19. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa. De manera similar sea*

$$M_A = \{I \subseteq A : I \quad \text{es ideal regular máximo}\}$$

Al igual que antes existe una biyección entre M_A y $\mathcal{M}_A$. La biyección está dada por $f(\psi) = \ker \psi$.

Demostración. Al igual que la Proposición 2.17, f está bien definida y es inyectiva. La suprayectividad se prueba de manera similar que en la Proposición 2.17, pues lo que usamos para encontrar la funcional lineal multiplicativa dado

I es ver que A/I es isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$ y gracias al Teorema de Gelfand-Mazur, esto lo aseguramos si A/I es álgebra de división, lo que ocurre cuando I es ideal regular máximo. *Q.E.D.*

Al igual que antes, gracias a esta proposición, tenemos que para álgebras de Banach conmutativas con ideales regulares propios, $\mathcal{M}_A$ es no vacío.

Corolario 2.20. *Si A es un álgebra de Banach conmutativa con ideales regulares propios, entonces $\mathcal{M}_A$ es no vacío.*

El siguiente resultado describe el espectro de un elemento en términos de las funcionales lineales multiplicativas del álgebra.

Proposición 2.21. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa con uno y $a \in A$. Entonces*

$$\sigma(a) = \{\psi(a) : \psi \in \mathcal{M}_A\}$$

Demostración. Tomemos z en el espectro de a; entonces $ze-a$ no es invertible, así que por la Proposición 1.41, existe I ideal máximo (recuerde que en álgebras conmutativas ideales bilaterales e ideales izquierdos coinciden) tal que $ze-a \in I$. Pero por el Teorema de Gelfand-Mazur, I es el núcleo de una funcional lineal multiplicativa, digamos ψ, así que $\psi(ze-a) = 0$, de donde se sigue que $z = \psi(a)$.

Recíprocamente, si $z = \psi(a)$ entonces $ze - a$ está en el núcleo de ψ, pero el núcleo de ψ es un ideal máximo, así que de nuevo por la Proposición 1.41 tenemos que $ze - a$ no es invertible, es decir z está en el espectro de a. *Q.E.D.*
Veamos algunas aplicaciones al radical del álgebra.

Proposición 2.22. *Sea A un álgebra de Banach. Para todo a en el radical del álgebra, tenemos que*

$$\lim_n \|a^n\|^{1/n} = 0$$

Demostración. Supongamos que A tiene uno. Si a está en el radical del álgebra, entonces para todo y en A, el inverso de $e - ya$ existe (ver Proposición 1.43). En particular para todo $z \in \mathbb{C}$ no cero, $e - \frac{1}{z}a$ es invertible y en consecuencia $ze - a$ es invertible. En conclusión, al ser el espectro no vacío, tenemos que el espectro de a es el cero, pero por el Teorema 2.11 esto implica que $\lim_n \|a^n\|^{1/n} = 0$.

Ahora, supongamos que el álgebra no tiene uno. Por la definición 1.46, $Rad(A) = A \cap Rad(A \oplus \mathbb{C}e)$. Si a está en $Rad(A \oplus \mathbb{C}e)$ entonces $\lim_n (\|a^n\|')^{1/n} = 0$, donde recordemos que $\|b + \beta e\|' = \|b\| + |\beta|$. Como $\|a\|' = \|a\|$, se concluye que $\lim_n \|a^n\|^{1/n} = 0$. *Q.E.D.*

Si el álgebra es conmutativa la Proposición 2.9 puede mejorarse.

Proposición 2.23. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa con uno. Entonces $a \in Rad(A)$ si y sólo si $\lim_n \|a^n\|^{1/n} = 0$.*

Demostración. Supongamos que $\lim_n \|a^n\|^{1/n} = 0$. Por la Proposición 2.11 esto implica que el espectro de a es el cero y por la Proposición 2.21 tenemos que a está en el núcleo de toda funcional lineal multiplicativa. Por la Proposición

2.17 lo anterior equivale a que a esté en la intersección de los ideales máximos y por la Proposición 1.42 concluimos que $a \in Rad(A)$. *Q.E.D.*

De la Proposición 2.23 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.24. *Sea A un álgebra conmutativa sin uno y suponga que existen ideales regulares propios. Entonces $Rad(A)$ coincide con la intersección de los núcleos de las funcionales lineales multiplicativas y con la intersección de los ideales regulares máximos de A.*

Demostración. Por la Proposición 1.34 tenemos

$$\mathcal{M}_{A\oplus\mathbb{C}e} = \{\tilde{\psi} : \psi \in \mathcal{M}_A\} \cup \{\psi_\infty\}$$

con $\tilde{\psi}(a + \alpha e) = \psi(a) + \alpha$ y $\psi_\infty(a + \alpha e) = \alpha$. En consecuencia, usando que los ideales bilaterales máximos de de $A \oplus \mathbb{C}e$ son precisamente los núcleos de las funcionales lineales multiplicativas (ver Proposición 2.17) y recordando que el radical de un álgebra conmutativa coincide con la intersección de los ideales máximos (vei Proposición 1.42) tenemos

$$Rad(A \oplus \mathbb{C}e) = \left(\cap_{\psi\in\mathcal{M}_A} \ker\tilde{\psi}\right) \cap \ker\psi_\infty$$

y como $Rad(A) = A \cap Rad(A \oplus \mathbb{C}e)$,

$$Rad(A) = \left(\cap_{\psi\in\mathcal{M}_A} (\ker\tilde{\psi} \cap A)\right) \cap (\ker\psi_\infty \cap A)$$

Pero $\ker\tilde{\psi} \cap A = \ker\psi$ y $\ker\psi_\infty \cap A = A$, entonces

$$Rad(A) = \cap_{\psi\in\mathcal{M}_A} \ker\psi$$

Para terminar, usando que los ideales regulares máximos coinciden con los núcleos de las funcionales lineales multiplicativas (por Proposición 2.19) concluimos que el radical de A es la intersección de los ideales regulares máximos. *Q.E.D.*

Ya vimos que el radical está contenido en el núcleo de toda funcional lineal multiplicativa, pero si además el álgebra es simétrica, el radical está contenido en el núcleo de toda funcional lineal positiva.

Proposición 2.25. *Sea A un álgebra simétrica y f una funcional lineal positiva. Para todo a en el radical de A se tiene que $f(a) = 0$.*

Demostración. Primero afirmamos que para todo m natural

$$|f(a)| \leq \|f\|^{\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{2^k}} |f((a^*a)^{2^m})|^{1/2^{m+1}} \tag{2.8}$$

lo cual probamos por inducción.

Para $m = 0$ se sigue de la ecuación (1.18) del capítulo 1.

Supongamos que se vale para m y probemos para $m + 1$.

Usando (1.18) tenemos

$$|f((a^*a)^{2^m})| \leq \|f\|^{1/2}|f(((a^*a)^{2^m})^*(a^*a)^{2^m}|^{1/2}$$

pero $((a^*a)^{2^m})^* = (a^*a)^{2^m}$, al ser a^*a hermitiano, entonces de la desigualdad anterior

$$|f((a^*a)^{2^m})| \leq \|f\|^{1/2}|f((a^*a)^{2^{m+1}})|^{1/2}$$

y sustituyendo esta ecuación en la hipótesis de inducción obtenemos

$$\begin{aligned} |f(a)| &\leq \|f\|^{\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{2^k}}(\|f\|^{1/2}|f((a^*a)^{2^{m+1}})|^{1/2})^{1/2^{m+1}} \\ &= \|f\|^{\sum_{k=1}^{m+2}\frac{1}{2^k}}|f((a^*a)^{2^{m+1}})|^{1/2^{m+2}}. \end{aligned}$$

Esto termina la prueba de (2.8).

Ahora, si en (2.8) usamos $|f((a^*a)^{2^m})| \leq \|f\|\|(a^*a)^{2^m}\|$ obtenemos

$$|f(a)| \leq \|f\|^{\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{2^k}}\|f\|^{1/2^{m+1}}\|(a^*a)^{2^m}\|^{1/2^{m+1}} = \|f\|\left((\|(a^*a)^{2^m}\|)^{1/2^m}\right)^{1/2}$$

(usando que $\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{m+1}} = 1 - \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+1}} = 1$) y en consecuencia

$$|f(a)| \leq \|f\|\left(lim_m\|(a^*a)^{2^m}\|^{1/2^m}\right)^{1/2} \tag{2.9}$$

Por último, si a está en el radical de A, entonces a^*a también está en el radical de A (al ser ideal bilateral) y entonces $lim_n(\|(a^*a)^n\|)^{1/n} = 0$ y en consecuencia $lim_m(\|(a^*a)^{2^m}\|)^{1/2^m} = 0$. De la ecuación (2.9) se concluye que $f(a) = 0$.

Capítulo 3

La transformada de Gelfand

La transformada de Gelfand es un homomorfismo de álgebras entre un álgebra de Banach conmutativa A (con la característica de que $\mathcal{M}_A$ sea no vacío) y $C_0(\mathcal{M}_A)$.

Recuérdese que un espacio de Banach X es isométricamente isomorfo a un subespacio de su doble dual X^{**}, mediante la función $x \mapsto i_x$, donde i_x es la evaluación en x. La transformada de Gelfand de un elemento a en un álgebra es simplemente la restricción de i_a a $\mathcal{M}_A \subset A^*$. Cuando el álgebra A es conmutativa y semisimple, la transformada de Gelfand es un isomorfismo continuo de álgebras, entre A y una subálgebra de $C_0(\mathcal{M}_A)$. En este capítulo, veremos las propiedades básicas de la transformada de Gelfand.

3.1 Para álgebras con uno

Durante esta sección A denota un álgebra de Banach conmutativa con uno.

Definición 3.1. *Recuerde que $C(\mathcal{M}_A)$ denota las funciones continuas de $\mathcal{M}_A$ en los complejos, donde $\mathcal{M}_A$ esta dotado de la topología ω^*. Por la Proposición* 1.31 *sabemos que $\mathcal{M}_A$ es compacto, y con la norma del supremo (uniforme), $C(\mathcal{M}_A)$ es un álgebra de Banach con uno. Dada $a \in A$ definimos la función $\hat{a}$ de $\mathcal{M}_A$ a los complejos, por $\hat{a}(\psi) = \psi(a)$ (la evaluación en a). Entonces es claro que $\hat{a}$ es ω^*-continua.*

La transformada de Gelfand del álgebra A es la función Γ_A de A en $C(\mathcal{M}_A)$ dada por $\Gamma_A(a) = \hat{a}$. Definimos la representación de Gelfand de A como la imagen de Γ_A.

Notas: Por las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\widehat{a+b}(\psi) &= \psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b) = \hat{a}(\psi) + \hat{b}(\psi)\\
\widehat{za}(\psi) &= \psi(za) = z\psi(a) = z\hat{a}(\psi)\\
\widehat{ab}(\psi) &= \psi(ab) = \psi(a)\psi(b) = \hat{a}(\psi)\hat{b}(\psi)
\end{aligned}$$

tenemos que Γ_A es un homomorfismo de álgebras; por el Lema 1.23, $\Gamma_A(e)$ es la función constante uno; al ser Γ_A un homomorfismo de álgebras, tenemos que la representación de Gelfand es subálgebra de $C(\mathcal{M}_A)$.

Proposición 3.2. *La transformada de Gelfand Γ_A cumple:*

1. *Γ_A es lineal acotada y de norma igual a uno.*
2. *a es invertible en A si y sólo si $\hat{a}$ es invertible en $C(\mathcal{M}_A)$.*
3. *Para toda a, $\sigma_A(a) = \sigma_{C(\mathcal{M}_A)}(\hat{a})$.*
4. *$\ker \Gamma_A$ es la intersección de los ideales máximos de A.*
5. *Γ_A es inyectiva si y sólo si A es semisimple.*
6. *Si para toda a, $\|a^2\| = \|a\|^2$ entonces Γ_A es una isometría.*
7. *La representación de Gelfand de A es una subálgebra de funciones de $C(\mathcal{M}_A)$ que tiene a la función constante uno y separa los puntos de $\mathcal{M}_A$.*
8. *Si además A es un álgebra con involución, y para toda $\psi \in \mathcal{M}_A$, $\psi(b) \in \mathbb{R}$ para cualquier b hermitiano, entonces para toda $a \in A$ $\Gamma_A(a^*) = \overline{\Gamma_A(a)}$.*

Demostración.
Prueba de 1. Usando que para toda $\psi \in \mathcal{M}_A$, $|\psi(a)| \leq \|a\|$ tenemos

$$\|\Gamma_A(a)\|_{C(\mathcal{M}_A)} = \sup_{\psi \in \mathcal{M}_A} \{|\hat{a}(\psi)|\} = \sup_{\psi \in \mathcal{M}_A} \{|\psi(a)|\} \leq \|a\|$$

por lo que la norma es menor ó igual a uno y como Γ_A valuada en el uno de A es la función constante uno, resulta que la norma de Γ_A es uno.

Prueba de 2. Probaremos este inciso por contrapositiva.

Note que como $\mathcal{M}_A$ es ω^*-compacto, $\hat{a}$ alcanza su valor mínimo y por lo tanto $\hat{a}$ es no invertible si y sólo si existe ψ tal que $\hat{a}(\psi) = \psi(a) = 0$, es decir si a está en el núcleo de alguna funcional lineal multiplicativa. Pero los núcleos de las funcionales lineales multiplicativas son precisamente los ideales máximos (ver Proposición 2.17), así que tenemos que $\hat{a}$ no es invertible si y sólo si existe un ideal máximo tal que a pertenezca a este ideal. Pero por el Lema 1.41, esto es equivalente a que a no sea invertible.

Prueba de 3. Por complementos. Dado z número complejo tenemos (gracias al inciso 2) que $ze - a$ es invertible si y sólo si $\widehat{ze - a}$ es invertible, pero $\widehat{ze - a} = z - \hat{a}$. En conclusión $ze - a$ es invertible si y sólo si $z - \hat{a}$ es invertible.

Prueba de 4. a está en el núcleo de Γ_A si y sólo si está en el núcleo de toda funcional lineal multiplicativa (al ser $\hat{a}$ la evaluación en a) ó, equivalentemente (por la Proposición 2.17) a está en todo ideal máximo del álgebra.

Prueba de 5. Es inmediata del inciso anterior.

Prueba de 6. Debemos probar que $\|\Gamma_A(a)\|_{C(\mathcal{M}_A)} = \|a\|$. Por la Proposición 2.21, $\sigma(a) = \{\psi(a) : \psi \in \mathcal{M}_A\}$ en consecuencia

$$\begin{aligned}\|\Gamma(a)\|_{C(\mathcal{M}_A)} &= \sup_{\psi\in\mathcal{M}_A}\{|\psi(a)|\}\\ &= \sup_{z\in\sigma(a)}\{|z|\}\end{aligned}$$

Por el Teorema 2.11 tenemos

$$\sup_{z\in\sigma(a)}\{|z|\} = \max_{z\in\sigma(a)}\{|z|\} = \lim_n \|a^n\|^{1/n}$$

Pero como $\|a^2\| = \|a\|^2$, de la Proposición 2.13 se sigue $\lim_n \|a^n\|^{1/n} = \|a\|$, por lo que $\|\Gamma_A(a)\|_{C(\mathcal{M}_A)} = \|a\|$.

Prueba de 7. Como Γ_A es un homomorfismo de álgebras, la representación de Gelfand es una subálgebra de $C(\mathcal{M}_A)$ y note que $\Gamma_A(e)$ es la función constante uno. Para probar que separa los puntos de $\mathcal{M}_A$ si $\psi \neq \varphi$ entonces existe $a \in A$ donde valen distinto y en consecuenia $\hat{a}(\psi) \neq \hat{a}(\varphi)$.

Prueba de 8. Dado a, escribámoslo como $a = a_1 + ia_2$, con a_j hermitianos. Tomemos $\psi \in \mathcal{M}_A$. Debemos probar $\widehat{a^*}(\psi) = \overline{\psi(a)}$, es decir, que $\psi(a^*) = \overline{\psi(a)}$. Pero al ser $\psi(a_1)$ y $\psi(a_2)$ reales tenemos $\overline{\psi(a)} = \psi(a_1) - i\psi(a_2) = \psi(a^*)$. *Q.E.D.*

Notas: Gracias a la Proposición 1.42 el inciso 4 se puede reescribir como $\ker\Gamma_A = Rad(A)$; como consecuencia del inciso 5 toda álgebra de Banach conmutativa con uno semisimple, es isomorfa (vía la transformada de Gelfand) a una subálgebra de $C(\mathcal{M}_A)$.

Gracias a esta proposición podemos ver algunas condiciones bajo la cual la transformada de Gelfand en suprayectiva.

Corolario 3.3. *Si A es un álgebra con involución y para toda $\psi \in \mathcal{M}_A$ tenemos que $\psi(b) \in \mathbb{R}$ para cualquier b hermitiano entonces la representación de Gelfand de A es uniformemente densa en $C(\mathcal{M}_A)$. Si además $\|a^2\| = \|a\|^2$ para cualquier a, entonces Γ_A es sobreyectiva.*

Demostración. Probamos que $\Gamma_A[A]$ es una subálgebra de $C(\mathcal{M}_A)$ que tiene a la función constante uno y que separa los puntos de $\mathcal{M}_A$. Entonces para probar que es uniformente densa en $C(\mathcal{M}_A)$, por el Teorema de Stone-Weierstrass es suficiente probar que es cerrada bajo conjugación compleja. Pero por el inciso 8 tenemos que para cualquier a, $\overline{\Gamma_A(a)} = \Gamma_A(a^*)$, lo que prueba que $\Gamma_A[A]$ es cerrada bajo conjugación. Ahora supongamos que para cualquier a, $\|a^2\| = \|a\|^2$. Por el inciso 6 esto implica que la transformada de Gelfand es una isometría, así que la imagen de Γ_A es cerrada en $C(\mathcal{M}_A)$, pero como sabemos que es uniformemente densa en $C(\mathcal{M}_A)$, resulta $\Gamma_A[A] = C(\mathcal{M}_A)$. *Q.E.D.*

3.2 Para álgebras sin uno

En esta sección extendemos la transformada de Gelfand y veremos cómo rescatar algunas de las proposiciones de la sección anterior.

Para el caso de álgebras de Banach conmutativas con uno, la transformada de Gelfand establece un homomorfismo de álgebras entre A y $C(\mathcal{M}_A)$. Por lo que si queremos establecer un análogo en álgebras sin uno, al menos debemos pedir que $\mathcal{M}_A$ sea no vacío ó equivalentemente (ver Proposición 2.19) que existan ideales regulares máximos. Pero por la Proposición 1.10 − 4 la existencia de ideales regulares máximos es equivalente a la existencia de ideales regulares propios. Así para poder hablar de la transformada de Gelfand en lugar de pedir que el álgebra tenga uno, podemos pedir que existan ideales regulares propios.

Al igual que en el caso de álgebras con uno, dada $a \in A$, definimos $\hat{a}$ la función de $\mathcal{M}_A$ a $\mathbb{C}$ como la evaluación. Como $\mathcal{M}_A$ tiene la topología ω^* es claro que $\hat{a}$ es continua. Pero además cada $\hat{a}$ se anula en el infinito.

Proposición 3.4. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa que contenga ideales regulares propios. Sea $a \in A$ y $\hat{a}$ como en la sección anterior, entonces $\hat{a} \in C_0(\mathcal{M}_A)$.*

Demostración.
Sea $\varepsilon > 0$ y $U = \{\psi \in Hom(A, \mathbb{C}) : |\psi(a)| < \varepsilon\}$, entonces $U \in \omega^*$ y en consecuencia $K = Hom(A, \mathbb{C}) \setminus U$ es ω^*-cerrado en $Hom(A, \mathbb{C})$. Pero $Hom(A, \mathbb{C})$ es ω^*-compacto Hausdorff (por la Proposición 1.30), por lo tanto K es ω^* compacto. Además $K \subseteq \mathcal{M}_A$ (lo que puede comprobarse obteniendo los complementos con respecto a $Hom(A, \mathbb{C})$ y usando que la funcional cero está en U). Por último, dada $\psi \in \mathcal{M}_A \setminus K$ se tiene $|\psi(a)| = |\hat{a}(\psi)| < \varepsilon$, por lo que se concluye que $\hat{a} \in C_0(\mathcal{M}_A)$. *Q.E.D.*

En consecuencia, la transformada de Gelfand de A establece un homomorfismo de álgebras entre A y $C_0(\mathcal{M}_A)$.

Ahora, rescatamos algo de la Proposición 3.2:

Proposición 3.5. *Sea A álgebra de Banach conmutativa sin uno que contenga ideales regulares propios. Entonces:*

1. *Γ_A es lineal acotada y de norma menor ó igual a uno.*
2. *La representación de Gelfand de A es una subálgebra de funciones de $C_0(\mathcal{M}_A)$ que separa los puntos de $\mathcal{M}_A$.*
3. *$\ker \Gamma_A$ coincide con la intersección de los ideales regulares máximos.*
4. *A es semisimple si y sólo si Γ_A es inyectiva.*

Demostración. La prueba del inciso 1 es análoga a la de 3.2. La prueba de que la representación de Gelfand separa los puntos de $\mathcal{M}_A$ es similar a la de 3.2 y que esté contenida en $C_0(\mathcal{M}_A)$ es consecuencia de la Proposición 3.4.

Ahora, el núcleo de Γ_A son los puntos de A que están en el núcleo de todas las funcionales lineales multiplicativas, pero por la Proposición 2.19 esto es equivalente a que estén en todos los ideales regulares máximos. Por último, por el inciso anterior, Γ_A es inyectiva si y sólo si la intersección de los ideales regulares máximos es cero, que es equivalente (usando la Proposición 2.24) a que el radical sea cero. *Q.E.D.*

Capítulo 4

Ejemplos de álgebras de Banach

Presentamos cuatro ejemplos de álgebras de Banach con sus transformadas de Gelfand: las funciones continuas sobre un espacio topológico compacto, las funciones continuas que se anulan en el infinito sobre un espacio topológico localmente compacto, las funciones analíticas sobre el disco unitario denotadas por $A(D)$ y las funciones esencialmente acotadas en un espacio de medida denotadas por $L_\infty(X)$. Veremos las funcionales lineales multiplicativas de $C(X)$ y $A(D)$, donde $A(D)$ nos proporciona un ejemplo de que las funcionales lineales multiplicativas no pueden extenderse como pasa con las funcionales lineales. En cada ejemplo probaremos que la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico.

4.1 $C(X)$, X compacto

Sea (X, τ) un espacio topológico compacto Hausdorff, $A = C(X)$ y $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{C(X)}$ (la norma uniforme en X). Por el ejemplo 1.3, $C(X)$ con la norma uniforme es un álgebra de Banach conmutativa con uno.

Queremos encontrar las funcionales lineales multiplicativas de $C(X)$. Entre las funcionales lineales más sencillas están las evaluaciones. Dada $x \in X$ denotamos por i_x la evaluación en x. Es sencillo probar que i_x es lineal y acotada. Además, dadas dos funciones a y b en A tenemos

$$i_x(ab) = (ab)(x) = a(x)b(x) = i_x(a)i_x(b)$$

por lo que $i_x \in Hom(A, \mathbb{C})$. Pero, si e denota a la función constante uno, entonces $i_x(e) = 1$, por lo que i_x no es cero y entonces i_x es una funcional lineal multiplicativa. Afirmamos que las evaluaciones son todas las funcionales lineales multiplicativas. Como las funcionales lineales multiplicativas están determinadas por su núcleo y los núcleos de éstas son ideales máximos, para demostrar la afirmación probaremos que todo ideal máximo es el núcleo de una evaluación.

Proposición 4.1. *Recordemos que M_A denota los ideales máximos de A. Entonces*

$$M_A = \{\ker i_x : x \in X\}$$

Demostración. Ya tenemos que todo $\ker i_x$ es un ideal máximo, al ser i_x una funcional lineal multiplicativa.

Sea I un ideal máximo de A. Para mostrar que $I = \ker i_x$ para alguna $x \in X$, es suficiente probar que $I \subseteq \ker i_x$, pues de ser así al ser I máximo y $\ker i_x \neq A$, concluimos que $I = \ker i_x$.

Probemos que $I \subseteq \ker i_x$, para alguna $x \in X$ por contradicción.

Supongamos que para toda $x \in X$, $I \nsubseteq \ker i_x$. Entonces para toda $x \in X$ existe $a_x \in I$ con $a_x(x) \neq 0$.

Como a_x es continua y $a_x(x) \neq 0$, existe U_x abierto que tiene a x tal que a_x restringido a U_x no se anula.

Tenemos que $X = \cup_{x\in X} U_x$. Al ser X compacto existen $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq X$ tal que $X = \cup_{i=1}^n U_{x_i}$.

Sea $a = \sum_{i=1}^n a_{x_i}\bar{a}_{x_i} = \sum_{i=1}^n |a_{x_i}|^2$. Usando que $\{a_{x_i}\} \subseteq I$, que cada $\bar{a}_{x_i}$ es continua y que I es ideal se tiene que $a \in I$. Pero a es invertible, pues dado $x \in X = \cup_{i=1}^n U_{x_i}$, $x \in U_{x_j}$ para alguna j por lo que $a_{x_j}(x) \neq 0$, de donde $|a_{x_j}(x)|^2 > 0$ y por consiguiente $|a(x)| > 0$. Al ser a invertible e I un ideal resulta que el uno de A está en I; por lo tanto, $I = A$ (ver Proposición 1.10), en contradicción con que I sea máximo.

Entonces debe pasar que $I \subseteq \ker i_x$, para alguna $x \in X$. *Q.E.D.*

Ahora podemos determinar cómo son todas las funcionales lineales multiplicativas.

Corolario 4.2. $\mathcal{M}_A = \{i_x : x \in X\}$.

Demostración. Ya vimos que toda i_x es funcional lineal multiplicativa.

Dada $\psi \in \mathcal{M}_A$ sabemos que $\ker\psi$ es un ideal máximo de A, entonces por la Proposición 4.1, $\ker\psi = \ker i_x$ para algún $x \in X$. Pero dos funcionales lineales multiplicativas con el mismo núcleo son iguales (ver Proposición 1.25) por lo que $\psi = i_x$. *Q.E.D.*

Proposición 4.3. *La función $h : (X, \tau) \to (\mathcal{M}_A, \omega^*)$ dada por $h(x) = i_x$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Por el corolario 4.2, h es sobreyectiva.

Probemos que h es continua.

Sea $(x_\lambda)_{\lambda\in L}$ una red en X y $x \in X$ tal que $x_\lambda \to x$ en X. Por continuidad, para toda $a \in A$, $a(x_\lambda) \to a(x)$ en $\mathbb{C}$, es decir $i_{x_\lambda}(a) \to i_x(a)$, por lo tanto $h(x_\lambda) \to h(x)$ en la topología ω^*. Esto prueba que h es continua.

Veamos que h es inyectiva. Sean $x, y \in X$ con $x \neq y$. Como (X, τ) es compacto Hausdorff, se tiene que (X, τ) es regular (ver A.4 en el apéndice.) En consecuencia, por el Lema de Urysohn existe $a \in A$ tal que $i_x(a) = a(x) = 1$ y $i_y(a) = a(y) = 0$ y entonces $h(x) \neq h(y)$.

Por último, como h es una biyección continua y (X, τ) es compacto Hausdorff, se concluye que h es un homeomorfismo (ver A.5 en el apéndice.) $Q.E.D.$

Veamos ahora la transformada de Gelfand de $C(X)$.

Proposición 4.4. *Γ_A es un isomorfismo isométrico.*

Demostración. Por la Proposición 4.2 tenemos que para toda $a \in A$,

$$\|\hat{a}\|_{C(\mathcal{M}_A)} = \sup_{\psi \in \mathcal{M}_A} \{|\hat{a}(\psi)|\} = \sup_{x \in X} \{|a(x)|\} = \|a\|_X$$

es decir, la transformada es una isometría y por lo tanto inyectiva.

Para probar que es sobreyectiva, dada $f \in C(\mathcal{M}_A)$, tomamos $a(x) = f(i_x)$. Note que a es la composición de h y f, si h es el homeomorfismo dado en la Proposición 4.3, en consecuencia a es continua y $\hat{a}(i_x) = f(i_x)$ para toda x, por lo que $\hat{a} = f$. $Q.E.D.$

La Proposición 4.4 nos indica que $\Gamma_{C(X)}$ es un isomorfismo isométrico entre $C(X)$ y $C(\mathcal{M}_{C(X)})$. Como $\mathcal{M}_{C(X)}$ es homeomorfo a X tenemos que prácticamente la representación de Gelfand de $C(X)$ es $C(X)$.

Como corolario tenemos que $C(X)$ es semisimple, al ser Γ_A inyectiva (ver Proposición $3.2 - 5$).

4.2 $C_0(X)$, X localmente compacto

Ahora analizamos $C_0(X)$ cuando X no es compacto pero es localmente compacto Hausdorff (ver definición 1.2). Al igual que antes, sea $A = C_0(X)$ y $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{C(X)}$ (la norma uniforme). Por el ejemplo 1.3, $C_0(X)$ es un álgebra de Banach conmutativa sin uno.

Será util trabajar con la compactificación unipuntual de X (ver definición A.12 en apéndice).

Notación: Sea Y la compactificación unipuntual de X (ver Proposición A.13 en el apéndice). De aquí en adelante, en esta sección, denotamos por B al álgebra $C(Y)$.

Veamos la relación entre $C_0(X)$ y $C(Y)$.

Definición 4.5. 1. *Para toda $a \in A$ definimos $\tilde{a} : Y \to \mathbb{C}$ de tal forma que coincida con a en X y $\tilde{a}(\infty) = 0$.*

2. *Para toda $b \in B$ definimos $b' : X \to \mathbb{C}$ por $b'(x) = b(x) - b(\infty)$.*

Lema 4.6. 1. *Para toda $a \in A$, se tiene que $\tilde{a} \in B$.*

2. *Para toda $b \in B$ con $b(\infty) = 0$, la restricción de b a X está en A. En particular para toda $b \in B$, se tiene que $b' \in A$.*

Demostración. Para probar 1 debemos probar que a es continua en ∞. Sea $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar un abierto $U \subseteq Y$ que tiene a ∞ tal que para toda $y \in U$, $|a(y)| < \varepsilon$. Pero usando que $a \in C_0(X)$, existe un compacto $K \subseteq X$ tal que para toda $x \in X \backslash K$, $|a(x)| < \varepsilon$, así pues tomamos $U = Y \backslash K$.

Probemos 2. Sea $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de b en ∞ existe U una vecindad de ∞, de tal forma que $|b(y) - b(\infty)| < \varepsilon$ para toda $y \in U$. Pero $U = Y \setminus K$ con K un subconjunto compacto de X y $b(\infty) = 0$ por lo que para toda $x \in X \setminus K$, $|b(x)| < \varepsilon$. *Q.E.D.*

Probaremos que todas las proposiciones de la sección anterior siguen siendo válidas para $C_0(X)$.

Recuerde que $A \oplus \mathbb{C}e$ denota la adjunción de la identidad de A (ver Proposición 1.14).
Denotemos $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}e$. Veamos que $\tilde{A}$ es isomorfo a B.

Proposición 4.7. *Sea $g : \tilde{A} \to B$ dada por $g(a + ze)(y) = \tilde{a}(y) + z$. Entonces*

1. *g es un homomorfismo de álgebras.*

2. *g es una biyección con inversa dada por $g^{-1}(b) = b' + (b(\infty))e$.*

3. *g es acotada de norma menor ó igual a uno, es decir $\|g(a)\|_B \leq \|a\|'$.*

Demostración. Lo primero que notamos es que por el Lema 4.6-1, g está bien definida.
Que g sea homomorfismo de álgebras se sigue de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} g((a + ze) + (b + we)) &= a + b + z + w \\ g(a + ze) + g(b + we) &= a + z + b + w \\ g(w(a + ze)) &= wa + wz \\ wg(a + ze) &= w(a + z) \\ g((a + ze)(b + ze)) &= ab + wa + zb + zw \\ g(a + ze)g(b + we) &= (a + z)(b + w) = ab + wa + zb + zw. \end{aligned}$$

Probemos 2. Sea $h(b) = b' + (b(\infty)e)$, note que por el Lema $4.6 - 2$ h está bien definida. Sean $a \in A$, $z \in \mathbb{C}$ y $b \in B$.
Observemos que para toda $y \in Y$

$$g(h(b))(y) = g(b' + (b(\infty)e))(y) = b'(y) + b(\infty)$$

Si $y \in X$ entonces $g(h(b))(y) = b(y) - b(\infty) + b(\infty) = b(y)$. Si $y = \infty$ entonces $g(h(b))(\infty) = b(\infty)$. Por lo tanto $g(h(b)) = b$.
Por otro lado, para todo $x \in X$

$$g(a + ze)'(x) = \tilde{a}(x) + z - (\tilde{a}(\infty) + z) = a(x),$$

es decir $g(a + ze)' = a$. Entonces

$$h(g(a + ze)) = a + (g(a + ze)(\infty))e = a + ze.$$

Concluimos que h es la inversa de g.

Probemos que g es acotada. Notamos que

$$\|g(a + ze)\|_B = \sup_{y\in Y} \{|\tilde{a}(y) + z|\} \leq \sup_{y\in Y} \{|\tilde{a}(y)|\} + |z|$$

pero $\tilde{a}(\infty) = 0$, por lo que

$$\|g(a + ze)\|_B \leq \sup_{x\in X} \{|a(x)|\} + |z| = \|a + ze\|'.$$

Q.E.D.

Al igual que en el caso compacto, las funcionales lineales multiplicativas coinciden con los funciones evaluación.

Proposición 4.8. $\mathcal{M}_A = \{i_x : x \in X\}$.

Demostración.

$\subseteq$] Sea g igual que en la Proposición 4.7. Como g es isomorfismo de álgebras tenemos que

$$\mathcal{M}_B = \{\psi \circ g^{-1} : \psi \in \mathcal{M}_{\tilde{A}}\}$$

Por la Proposición 1.34

$$\mathcal{M}_{\tilde{A}} = \{\tilde{\psi} : \psi \in Hom(A, \mathbb{C})\}$$

con $\tilde{\psi}(a + ze) = \psi(a) + z$.

Además, por la Proposición 4.2

$$\mathcal{M}_B = \{i_y : y \in Y\}$$

Entonces, conluimos que

$$\{i_y : y \in Y\} = \{\tilde{\psi} \circ g^{-1} : \psi \in \mathcal{M}_A\} \tag{4.1}$$

Tomemos $\psi \in \mathcal{M}_A$. Por (4.1) tenemos que existe $y \in Y$ tal que $\tilde{\psi} \circ g^{-1} = i_y$ y entonces para toda $a \in A$ y $z \in \mathbb{C}$

$$\psi(a) + z = \tilde{\psi}(g^{-1}(g(a + ze))) = i_y(g(a + ze)) = \tilde{a}(y) + z;$$

en consecuencia, $\psi(a) = \tilde{a}(y)$. Pero $y \in X$, pues si $y = \infty$ entonces para toda $a \in A$, $\psi(a) = \tilde{a}(\infty) = 0$ por lo que $\psi = 0$ una contradicción. Por lo tanto $\psi(a) = a(y)$ para toda $a \in A$.

$\supseteq$]Sea $x \in X$. Al igual que en la sección anterior $i_x \in Hom(A, \mathbb{C})$.

Como (Y, ρ) es compacto Hausdorff se sigue que es normal y por el Lema de Urysohn (ya que $x \neq \infty$) existe $a \in C(Y)$ tal que $a(x) = 1$ y $a(\infty) = 0$. Por el Lema 4.6 $-$ 2, $a \in C_0(X) = A$. Por último como $1 = a(x) = i_x(a)$ obtenemos que $i_x \neq 0$ y entonces $i_x \in \mathcal{M}_A$. *Q.E.D.*

Corolario 4.9. $M_A = \{\ker i_x : x \in X\}$.

Demostración. Sabemos que $M_A = \{\ker \psi : \psi \in \mathcal{M}_A\}$ y por la proposición 4.8 $\mathcal{M}_A = \{i_x : x \in X\}$, en consecuencia $M_A = \{\ker i_x : x \in X\}$. *Q.E.D.*

Proposición 4.10. *$h : X \to \mathcal{M}_A$ dada por $h(x) = \ker i_x$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Por la Proposición 4.8, h es sobreyectiva. De la misma forma que en la Proposición 4.3, h es continua.

Probemos que h es inyectiva. Sean x y y en X distintos. Como X es localmente compacto Hausdorff podemos tomar abiertos ajenos con cerradura compacta U y V de tal forma que $x \in U$ y $y \in V$. Como $\overline{U}$ es compacto Hausdorff resulta que es regular y por el Lema de Uryshon existe una función continua a de tal forma que $a(x) = 1$ y a restringida a ∂U vale cero. Extendamos a a todo X definiendo a igual a cero en el complemento de U. Entonces a es una función continua en todo X. Ahora, como V está contenido en el complemento de U resulta que $a(y) = 0$ por lo que $a \in \ker i_y$ pero a no está en el núcleo de i_x y entonces $h(x) \neq h(y)$.

Nos resta probar que $h^{-1} : \mathcal{M}_A \to X$ es continua.

Sea $(i_{x_\lambda})_{\lambda \in L}$ una red en $\mathcal{M}_A$ e i_x tal que $i_{x_\lambda} \to i_x$ en la topología ω^*. Debemos probar que $h^{-1}(i_{x_\lambda}) \to h^{-1}(i_x)$ en X, es decir $x_\lambda \to x$.

Supongamos lo contrario, entonces existe $U \in \tau$ con cerradura compacta, tal que $x \in U$ y $(x_{\lambda_\mu})_{\mu \in N}$ una subred de $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ tal que para toda $\mu \in N$, $x_{\lambda_\mu} \notin U$.

Como Y es regular, existe una función $a \in C(Y)$ de tal forma que $a(x) = 1$ y a se anula en $Y \setminus U$. Como $a(\infty) = 0$, podemos considerar $a \in C_0(X)$. Ahora, como $i_{x_\lambda} \to i_x$ en la topología ω^* tenemos que $i_{x_{\lambda_\mu}}(a)$ converge a $i_x(a)$. Pero $i_{x_{\lambda_\mu}}(a) = 0$ para toda μ y $i_x(a) = 1$, una contradicción. En conclusión, $x_\lambda \to x$. *Q.E.D.*

Al igual que en el caso compacto, resulta que la representación de Gelfand de $C_0(X)$ es de nuevo $C_0(X)$.

Proposición 4.11. *Γ_A es un isomorfismo isométrico.*

La prueba es similar a la de la Proposición 4.4 por lo que la omitimos.

4.3 A(D)

Tomemos $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ y

$$A(D) = \{a \in C(D) : a \text{ es analítica en int(D)}\}$$

(donde $C(D)$ denota las funciones continuas de D a $\mathbb{C}$). Dado $a \in A(D)$ tomamos $\|a\| = \|a\|_{C(D)}$ (la norma uniforme en D).

Proposición 4.12. *$A(D)$ es un álgebra de Banach conmutativa con uno.*

Demostración. Con las operaciones usuales es claro que $A(D)$ es un álgebra conmutativa con uno. Al igual que en el ejemplo 1.3, la multiplicación es compatible con $\|\cdot\|$. Para probar que $A(D)$ es un álgebra de Banach sólo resta probar que $A(D)$ con la norma uniforme es completo.

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $A(D)$, Cauchy uniforme. Usando que $C(D)$ es completo con la norma uniforme, existe $a \in C(D)$ con $lim_n \|a_n - a\| = 0$. Debemos probar que $a \in A$; es decir, que a es analítica en $int(D)$.

Pero el Teorema de Morera dice:

Teorema 4.13 (Teorema de Morera). *Sea $C \subset \mathbb{C}$ abierto conexo y $f : C \to \mathbb{C}$ continua. Suponga que para toda curva cerrada de clase C^1 γ contenida en C, $\int_\gamma f(z)dz = 0$. Entonces f es analítica en C y $f = g'$ para alguna g función analítica en C.*

Por lo tanto es suficiente probar que para toda curva cerrada de clase C^1 por partes γ, contenida en $int(D)$, $\int_\gamma a(z)dz = 0$.

Sea $\gamma : [a, b] \to int(D)$ de clase C^1 por partes tal que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Observamos que

$$\lim_n \int_\gamma a_n(z)dz = \int_\gamma a(z)dz \tag{4.2}$$

ya que para todo $z \in \gamma[[a, b]]$ se tiene $|a_n(z) - a(z)| \leq \|a_n - a\|$, en consecuencia

$$\left|\int_\gamma a_n(z)dz - \int_\gamma a(z)dz\right| \leq \|a_n - a\|\, long(\gamma)$$

por lo tanto

$$\lim_n \left|\int_\gamma a_n(z)dz - \int_\gamma a(z)dz\right| \leq \lim_n \|a_n - a\|\, long(\gamma) = 0$$

lo que prueba (4.2).

Al ser a_n analítica en $int(D)$ para toda n, tenemos que $\int_\gamma a_n(z)dz = 0$, por lo que de (4.2) se concluye $\int_\gamma a(z)dz = 0$. *Q.E.D.*

Al igual que en $C(X)$ y $C_0(X)$, en $A(D)$ el conjunto de las funcionales lineales multiplicativas coincide con el conjunto de las evaluaciones. Para probarlo necesitamos un lema.

Lema 4.14. *Los polinomios son densos en $A(D)$.*

Demostración. Sea $a \in A$ y $\varepsilon > 0$. Queremos probar que existe un polinomio p tal que $\|a - p\| < \varepsilon$.

Dado $r \in (0, 1)$ definimos $a_r(z) = a(rz)$ para $z \in D$.

Para probar el lema, primero demostramos que existe $s \in (0, 1)$ tal que $\|a - a_s\| < \varepsilon/2$.

Por el Teorema del módulo máximo tenemos que para todo $r \in (0, 1)$, $\|a - a_r\| = \max_{|z|=1} \{|a(z) - a(rz)|\}$.

Como a es continua en el compacto D, es uniformemente continua así que existe $\delta > 0$ tal que si $z, w \in D$ y $|z - w| < \delta$ entonces $|a(z) - a(w)| < \varepsilon/2$.

Sea $s \in (0,1)$ tal que $|s - 1| < \delta$. Entonces para todo z con $|z| = 1$ tenemos que $|sz - z| < \delta$ y por lo tanto $|a(sz) - a(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$. En consecuencia

$$\max_{|z|=1} \{|a(sz) - a(z)|\} = \|a_s - a\| < \varepsilon/2 \tag{4.3}$$

Sea $t \in (s, 1)$ fijo.

Como a es analítica en $D_t(0)$ por el Teorema de Taylor existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m \geq n$ y para todo w con $|w| < t$

$$\left| a(w) - \sum_{k=0}^{m} \frac{a^{(k)}(0)}{k!} w^k \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

De donde obtenemos (notando $\bar{D}_s(0) \subseteq D_t(0)$) que para todo $w \in \bar{D}_s(0)$

$$\left| a(w) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^{(k)}(0)}{k!} w^k \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Pero $\bar{D}_s(0) = sD$, por lo que para todo $z \in D$ tenemos

$$\left| a(sz) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a^{(k)}(0)}{k!} (sz)^k \right| = |a_s(z) - p(z)| < \varepsilon/2$$

(con $p(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^{(k)}(0)s^k}{k!} z^k$)) y por lo tanto

$$\max_{|z|=1} \{|a_s(z) - p(z)|\} = \|a_s - p\| < \varepsilon/2 \tag{4.4}$$

Por último de (4.3) y de (4.4) obtenemos que $\|a - p\| < \varepsilon$. *Q.E.D.*

Notación: Por a_I denotamos la función de D a D dada por $a_I(z) = z$. Es claro que $a_I \in A(D)$.

Notas: Dada cualquier $a \in A$ podemos hablar del ideal generado por a, es decir, del menor ideal que tiene a a. En el caso de a_I, el ideal generado es el conjunto de los polinomios. Por el Lema 4.14 el ideal generado por a_I es denso en $A(D)$.

Proposición 4.15. *$\mathcal{M}_{A(D)} = \{i_z : z \in D\}$ donde i_z es la evaluación en z.*

Demostración.

$\supseteq$] Al igual que en $C(X)$, para todo $z \in D$, $i_z \in \mathcal{M}_{A(D)}$.

$\subseteq$] Sea $\psi \in \mathcal{M}_A$. Notamos que $|\psi(a_I)| \leq \|\psi\| \, \|a_I\| = 1$, así que $\psi(a_I) \in D$. Sea $\tilde{z} = \psi(a_I)$.

Afirmamos que $\psi = i_{\tilde{z}}$.

Paso 1: Es claro que $i_{\tilde{z}}(a_I) = \psi(a_I)$.

Paso 2: Para todo polinomio p, $i_{\tilde{z}}(p) = \psi(p)$. Demostración:

Sea p un polinomio entonces $p = \sum_{k=0}^{n} w_k a_I^k$.
Usando que $i_{\bar{z}}$ y ψ son homomofismos de álgebras obtenemos

$$\begin{aligned} i_{\bar{z}}(p) &= \sum_{k=0}^{n} w_k i_z(a_I^k) \\ \psi(p) &= \sum_{k=0}^{n} w_k \psi(a_I^k) \end{aligned}$$

pero por el caso 1, $\psi(a_I) = i_{\bar{z}}(a_I)$, de donde se sigue que $i_{\bar{z}}(p) = \psi(p)$.
Paso 3: Caso general.
Sea $a \in A$. Debemos demostrar que $i_z(a) = \psi(a)$.
Por el Lema 4.14 existe una sucesión de polinomios $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$, de tal forma que $\lim_n \|p_n - a\| = 0$ y por la continuidad de ψ se sigue que $\lim_n |\psi(p_n) - \psi(a)| = 0$. Análogamente tenemos $\lim_n |i_z(p_n) - i_z(a)| = 0$. Pero por el paso 2, $i_z(p_n) = \psi(p_n)$ para todo natural asi que $i_z(a) = \psi(a)$. *Q.E.D.*

Un corolario inmediato de la proposición 4.15 (usando que M_A coincide con los núcleos de las funcionales lineales multiplicativas) es el siguiente.

Corolario 4.16. *Los ideales máximos de A son de la forma $\{a \in A : a(z) = 0\}$ con $z \in D$.*

Demostración. Como todo ideal máximo es el núcleo de una funcional lineal multiplicativa y éstas son las evaluaciones obtenemos que los ideales máximos son de la forma $\{a \in A : a(z) = 0\}$. *Q.E.D.*

Otro corolario de la proposición 4.15 es el siguiente.

Corolario 4.17. *La función $f : D \to \mathcal{M}_A$ dada por $f(z) = i_z$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Demostraremos que f es continua. Sea $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión en D y $z \in D$ tal que $\lim_n |z_n - z| = 0$. Entonces para toda $a \in A$, $\lim_n |a(z_n) - a(z)| = 0$, es decir para toda $a \in A$, i_{z_n} converge a $i_z(a)$ en la topología ω^*.
Por la proposición 4.15 f es sobre. Como D es compacto, para probar que f es homeomorfismo resta probar que f es inyectiva pero si $z \neq w$ (con $z, w \in D$) se tiene que $i_z(a_I) \neq i_w(a_I)$, por lo que $i_z \neq i_w$. *Q.E.D.*

Al igual que en el caso de las funciones continuas sobre un compacto, la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico entre $A(D)$ y $C(\mathcal{M}_{A(D)})$. Lo anterior nos dice que la transformada de Gelfand es $A(D)$. La prueba es totalmente análoga, asi que la omitimos.
El Teorema de Hahn-Banach nos permite extender las funcionales lineales. Pero para funcionales lineales multiplicativas no tenemos un análogo y $A(D)$ nos proporciona un ejemplo de esto.
Sea $B = C(\partial D)$. Sabemos que B con la norma uniforme es un álgebra de Banach conmutativa con uno.

Sea $h : A(D) \to B$ tal que $h(a)$ es la restricción de a a ∂D. Entonces es claro que h es un homomorfismo de álgebras. Pero además es una isometría pues $\|h(a)\| = \max_{|z|=1} \{|a(z)|\}$ y por el Teorema del módulo máximo, $\|a\| = \max_{|z|=1} \{|a(z)|\}$.

Sea $A' = h[A(D)] \subseteq B$. Entonces A' es isométricamente isomorfa a $A(D)$ y en consecuencia es fácil verificar que $\mathcal{M}_{A'} = \{i_z \circ h^{-1} : z \in D\}$.

Ejemplo 4.18. *Si $z \in int(D)$ entonces $i_z \circ h^{-1} \in \mathcal{M}_{A'}$ no se puede extender a B. Prueba: Supongamos lo contrario; entonces existe $\psi \in \mathcal{M}_B$ tal que ψ restringida a A' coincide con $i_z \circ h^{-1}$. Pero $\mathcal{M}_B = \{i_w : w \in \partial D\}$ (ver Proposición 4.2), en consecuencia existe $w \in \partial D$ tal que i_w coincide con $i_z \circ h^{-1}$ en A'. Entonces $i_w(h(a_I)) = i_z(h^{-1}(h(a_I))$ por lo que $w = z$ lo cual es una contradicción, pues $z \in int(D)$ y $w \in \partial D$. En conclusión no es posible extender $i_z h^{-1}$.*

4.4 $L_\infty(X)$

Durante esta sección (X, S, μ) denota un espacio de medida.

Definición 4.19.

1. *Un conjunto $E \in S$ se llama μ-nulo si $\mu(E) = 0$.*

2. *Una función $f : X \to \mathbb{C}$, S-medible se llama acotada casi donde quiera relativa a μ (abreviado acotada c.d. rel. μ) si existe un número $M > 0$ tal que*
$$\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > M\}\right) = 0$$
Al conjunto de funciones acotadas c.d. lo denotamos por $\mathcal{L}_\infty(X, S, \mu)$.

3. *Dos funciones $f, g : X \to \mathbb{C}$ son <u>iguales casi dondequiera</u> relativo a μ si $\mu(\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.*

4. *Dada $f \in \mathcal{L}_\infty(X, S, \mu)$ definimos la norma infinito de f (llamada también supremo esencial de f) por*
$$\|f\|_\infty = \inf\{r > 0 : \mu(x \in X : |f(x)| > r) = 0\} \tag{4.5}$$

Recordamos (ver [Cohn] por ejemplo) que los conjuntos μ-nulos son cerrados bajo uniones numerables y diferencias, es decir, son un σ-anillo.

Proposición 4.20.

1. *$\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$ es μ-nulo.*

2. *$\mathcal{L}_\infty(X, S, \mu)$ es un espacio vectorial.*

3. *$\|\cdot\|_\infty$ es seminorma.*

4. *Sean $f, g \in \mathcal{L}_\infty(X, S, \mu)$. $f = g$ c.d. rel. μ si y sólo si $\|f - g\|_\infty = 0$.*

Demostración.

Prueba de 1.

Sea $f \in \mathcal{L}_\infty(X, S, \mu)$.

Por (4.5) podemos tomar $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sucesión decreciente de números positivos que converja a $\|f\|_\infty$ tal que

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| > M_n\}) = 0$$

El resultado se obtiene de la siguiente igualdad

$$\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\} = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{x \in X : |f(x)| > M_n\}$$

y utilizando que los conjuntos μ-nulos son cerrados bajo uniones numerables.

Prueba de 2 y 3.

Tomemos $f, g \in \mathcal{L}_\infty(X, S, \mu)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Sean

$$A = \{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\} \qquad B = \{x \in X : |g(x)| > \|g\|_\infty\}$$

Por el inciso 1 sabemos que A y B son μ-nulos.

De la contención

$$\{x \in G : |f(x) + g(x)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\} \subseteq A \cup B$$

(que se puede verificar por complementos) se sigue que

$$\mu(\{x \in G : |f(x) + g(x)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\}) = 0$$

y entonces $f + g$ es acotada c.d. rel. μ y $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Tomemos α un escalar. Si α es cero entonces αf es acotada y $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty$. Supongamos que $\alpha \neq 0$. Es claro que si $|\alpha f(x)| > |\alpha|\|f\|_\infty$ entonces $x \in A$, lo que implica que αf es acotada c.d. y que además

$$\|\alpha f\|_\infty \leq |\alpha|\|f\|_\infty \tag{4.6}$$

Si ahora en (4.6) intercambiamos α por α^{-1} y después f por αf (que ya sabemos que es acotada c.d.) obtenemos $\|\alpha f\|_\infty \geq |\alpha|\|f\|_\infty$, lo que prueba $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty$.

La prueba del último inciso es sencilla usando el inciso 1 y observando que $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\} = \{x \in X : |f(x) - g(x)| > 0\}$. *Q.E.D.*

A $\mathcal{L}_\infty(X, S, \mu)$ podemos darle estructura de álgebra con involución tomando el producto usual de funciones y la involución como la conjugación compleja, como lo prueba la siguiente proposición.

Proposición 4.21. *Sean $f, g \in \mathcal{L}_\infty(X, S, \mu)$. Entonces*

1. *fg está en $\mathcal{L}_\infty(X, S, \mu)$ y $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty\|g\|_\infty$.*
2. *$\|f^2\|_\infty = \|f\|_\infty^2$.*
3. *$\overline{f} \in \mathcal{L}_\infty(X, S, \mu)$ y $\|f\|_\infty = \|\overline{f}\|_\infty$.*

Demostración. 1. Obsérvese que

$$\{x \in X : |f(x)g(x)| > \|f\|_\infty \|g\|_\infty\}$$

está contenido en la unión de $\{x \in X : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$ y $\{x \in X : |g(x)| > \|g\|_\infty\}$, pues si $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ y $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ entonces $|f(x)g(x)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$. Así $\{x \in X : |f(x)g(x)| > \|f\|_\infty \|g\|_\infty\}$ es μ-nulo, por lo que fg es acotada c.d. y $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.

Ahora, probemos que $\|f^2\|_\infty = \|f\|_\infty^2$. Por lo que acabamos de probar tenemos $\|f^2\|_\infty \leq \|f\|_\infty^2$. Si la desigualdad es estricta, por la definición de $\|f^2\|_\infty$ podemos encontrar $r > 0$ con $\|f^2\|_\infty \leq r < \|f\|_\infty^2$, tal que

$$\mu(\{x \in X : |f(x)|^2 > r\}) = 0$$

Pero entonces $\mu(\{x \in X : |f(x)| > r^{1/2}\}) = 0$, por lo que $\|f\|_\infty \leq r^{1/2}$, es decir $\|f\|_\infty^2 \leq r$, lo cual es una contradicción

Para probar 3 notamos que

$$\{x \in X : |\overline{f(x)}| = |f(x)| > \|f\|_\infty\} = \{x \in X : |f(x)| = |\overline{f(x)}| > \|\overline{f}\|_\infty\}.$$

Q.E.D.

Es conocido (ver [Cohn]) que en $\mathcal{L}_\infty(X, S, \mu)$ la relación

$$f \sim g \Leftrightarrow \|f - g\|_\infty = 0$$

(es decir, identificar funciones iguales c.d.) es de equivalencia. Sea $L_\infty(X, S, \mu)$ el cociente dado por esta relación (denotamos por $[f]$ la clase de f). Si tomamos $\|[f]\|_\infty = \|f\|_\infty$, entonces $\|\cdot\|_\infty$ define una norma en $L_\infty(X, S, \mu)$ que lo hace espacio vectorial normado completo (ver [Cohn]). La estructura de álgebra de $\mathcal{L}_\infty(X, S, \mu)$ induce una estructura de álgebra en $L_\infty(X, S, \mu)$ como lo prueba el siguente lema.

Lema 4.22. *Sea f, f_1, g y g_1 en $\mathcal{L}_\infty(X, S, \mu)$ tales que $f \sim f_1$ y $g \sim g_1$. Entonces $fg \sim f_1g_2$ y $\overline{f} \sim \overline{f_1}$*

Demostración. Para probar $fg \sim f_1g_2$ debemos probar

$$\mu(\{x \in X : f(x)g(x) \neq f_1(x)g_1(x)\}) = 0$$

Sabemos que

$$A = \{x \in X : f(x) \neq f_1(x)\} \quad B = \{x \in X : g(x) \neq g_1(x)\}$$

son μ-nulos. Además notamos que

$$\{x \in X : f(x) = f_1(x)\} \cap \{x \in X : g(x) = g_1(x)\} \subseteq \{x \in X : f(x)g(x) = f_1(x)g_1(x)\}$$

así que al tomar complementos tenemos que

$$\{x \in X : f(x)g(x) \neq f_1(x)g_1(x)\} \subseteq A \cup B$$

como A y B son μ-nulos, resulta que $\{x \in X : f(x)g(x) \neq f_1(x)g_1(x)\}$ es μ-nulo.

Es claro que $\overline{f} \sim \overline{f_1}$.

Proposición 4.23. *En $L_\infty(X,S,\mu)$ definimos $[f][g] = [fg]$ y $[f]^* = [\overline{f}]$. Con estas operaciones $L_\infty(X,S,\mu)$ es un álgebra de Banach simétrica conmutativa con uno.*

Demostración. Por el Lema 4.22 las operaciones están bien definidas.

Es conocido que $L_\infty(X,S,\mu)$ con $\|\cdot\|_\infty$ es completo (ver [Cohn]) y por la Proposición 4.21 el producto es compatible con la norma. Además la clase de la función constante uno es el uno del álgebra. Por otro lado es claro que $[f]^* = [\overline{f}]$ define una involución y por la Proposición 4.21 − 3 el álgebra es simétrica. *Q.E.D.*

En el caso de $L_\infty(X,S,\mu)$ también mostraremos que la transformada de Gelfand es un isomorfismo isométrico , pero en este caso no vamos a encontrar a las funcionales lineales mutliplicativas, sino que usaremos el espectro de lo elementos y la característica de que $\|[f]\|_\infty^2 = \|[f]^2\|_\infty$.

La siguiente proposición nos ayudará a caracterizar el espectro de los elementos de $L_\infty(X,S,\mu)$.

Definición 4.24. *Para toda $f \in \mathcal{L}_\infty(X,S,\mu)$ denotamos*

$$U_f = \bigcup \{U \subseteq \mathbf{C} : U \text{ es abierto y } \mu(f^{-1}(U)) = 0\}$$

Definimos el rango esencial de f (denotado por $RE(f)$) como $RE(f) = \mathbf{C} \setminus U_f$.

Proposición 4.25. *Si $f \sim g$ entonces $RE(f) = RE(g)$.*

Demostración. Si $f \sim g$ entonces $\mu(x \in X : f(x) \neq g(x)) = 0$.

Sea $U \subseteq \mathbf{C}$ abierto tal que $\mu(f^{-1}(U)) = 0$.

Notamos que

$$g^{-1}(U) = \big(g^{-1}(U) \cap \{x \in X : f(x) = g(x)\}\big) \cup \big(g^{-1}(U) \cap \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}\big)$$

entonces

$$g^{-1}(U) = \big(f^{-1}(U) \cap \{x \in X : f(x) = g(x)\}\big) \cup \big(g^{-1}(U) \cap \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}\big)$$

por lo tanto

$$g^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(U) \cup \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$$

así que al tomar medida tenemos

$$\mu\left(g^{-1}(U)\right) \leq \mu\left(f^{-1}(U)\right) + \mu\left(x \in X : f(x) \neq g(x)\right) = 0$$

Análogamente, si $\mu\left(g^{-1}(U)\right) = 0$ entonces $\mu(f^{-1}(U)) = 0$. En consecuencia los abiertos cuya imagen inversa bajo f es μ-nulo son los mismos abiertos cuya imagen inversa bajo g son μ-nulos, por lo que $RE(f) = RE(g)$. *Q.E.D.*

Dada $[f] \in L_\infty(X,S,\mu)$, definimos el rango esencial de $[f]$ (denotado por $RE([f])$) como $RE(f)$. La Proposición 4.25 muestra que $RE([f])$ está bien definido.

El rango esencial de $[f]$ nos permite calcular el espectro de $[f]$ mediante la siguiente proposición.

Proposición 4.26. *Para toda* $f \in \mathcal{L}_\infty(X,S,\mu)$, $RE(f) = \sigma([f])$.

Demostración. Sea $f \in \mathcal{L}_\infty(X,S,\mu)$. Probaremos $RE(f) = \sigma([f])$ por complementos.

$\subseteq]$ Si $z \in U_f$ entonces existe $U \subseteq \mathbf{C}$ abierto tal que $z \in U$ y $\mu(f^{-1}(U)) = 0$.

Como $z \in U$, existe $r > 0$ tal que $D_r(z) \subseteq U$, por lo que $\mu(f^{-1}(D_r(z))) = 0$. Sea $B = X \backslash f^{-1}(D_r(z))$.

Sea $g : X \to \mathbf{C}$ dada por $g(x) = \left(\frac{1}{z-f(x)}\right)\chi_B(x)$. Es sencillo probar que g es S-medible y además es acotada c.d. pues si $x \in X\backslash f^{-1}(D_r(z))$ entonces $r \leq |f(x) - z|$, asi que $|g(x)| \leq \frac{1}{r}$.

Note que $(z - f)g = 1$ c.d. rel. μ. Entonces $[g](z[1] - [f]) = [1]$, por lo que $z \in \mathbb{C}\backslash\sigma([f])$.

$\supseteq$ Sea $z \in \mathbb{C}\backslash\sigma([f])$ entonces existe $[g] \in L_\infty(X,S,\mu)$ tal que $(z[1]-[f])[g] = [1]$, es decir $(z - f)g = 1$ c.d. rel. μ. Como $\|g\|_\infty > 0$ tenemos que

$$|z - f(x)| \geq \frac{1}{\|g\|_\infty} \text{ c.d. rel. } \mu$$

así que la medida del conjunto $\{x \in X : |z - f(x)| < \frac{1}{\|g\|_\infty}\}$ es cero, pero este último conjunto es igual a $f^{-1}(D_r(z))$, si $r = \frac{1}{\|g\|_\infty}$. En consecuencia, $z \in U_f$. *Q.E.D.*

Ahora veremos la transformada de Gelfand.

Proposición 4.27. *Sea* $A = L_\infty(X,S,\mu)$. $\Gamma_A : A \to C(\mathcal{M}_A)$ *es un isomorfismo isométrico.*

Demostración.

Veamos que Γ_A es una isometría. Por la Proposición 3.2-6 es suficiente probar que para toda $a \in A$

$$\left\|a^2\right\|_\infty = \|a\|_\infty^2$$

pero esto se sigue de la Proposición 4.21.

Para la suprayectividad usaremos el corolario 3.3. Como A es un álgebra de Banach simétrica conmutativa con uno y para toda $a \in A$, $\|a^2\|_\infty = \|a\|_\infty^2$, para probar que la transformada de Gelfand es suprayectiva nos resta probar que para toda funcional lineal multiplicativa ψ, $\psi(a) \in \mathbb{R}$ para todo a hermitiano.

Tomemos $a \in A$ hermitiano. Si $a = [f]$ entonces $f^* = f$ c.d. rel. μ. Como $f = \bar{f}$ c.d. rel. μ, resulta que

$$\{x \in X : f(x) \neq \bar{f}(x)\} = f^{-1}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R})$$

tiene medida cero. Pero $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ es abierto, así que $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subseteq U_f$ y en consecuencia $RE([f])$ está contenido en $\mathbb{R}$.

Ya que A es un álgebra de Banach conmutativa con uno por la Proposición 2.21 tenemos

$$\sigma(a) = \{\psi(a) : \psi \in \mathcal{M}_A\}$$

Pero $\sigma(a) = RE([f])$ (por la Proposición 4.26) y como $RE([f])$ está contenido en los reales se sigue que para toda $\psi \in \mathcal{M}_A$, $\psi(a)$ es real. *Q.E.D.*

Parte II

Medida de Haar

Capítulo 5

Grupos topológicos

Presentamos los conceptos básicos de la teoría de grupos topológicos localmente compactos Hausdorff. Los resultados de este capítulo son fundamentales en la prueba de la existencia de una medida regular sobre los borelianos del grupo, que sea invariante bajo traslaciones izquierdas (ó derechas) es decir, una medida izquierda (ó derecha) de Haar.

Definición 5.1. *Un grupo topológico (G, τ) es un grupo G junto con una topología τ de tal forma que las funciones*

$$\text{de } G \times G \text{ a } G \text{ dada por: } (a, b) \mapsto ab \tag{5.1}$$

$$\text{de } G \text{ a } G \text{ dada por: } a \mapsto a^{-1} \tag{5.2}$$

son continuas (en $G \times G$ se toma la topología producto).

Si (G, τ) es un espacio topológico localmente compacto Hausdorff, decimos que el grupo es localmente compacto Hausdorff.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos 5.2. *1. Dado cualquier grupo G es posible darle estructura de grupo topológico asignándole la topología discreta.*

2. Si tomamos a $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ como grupo aditivo y la topología usual tenemos un grupo topológico localmente compacto.

3. Definimos $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \backslash \{0\}$ y $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Como grupos multiplicativos y la topología usual ambos son grupos topológicos localmente compactos.

4. Sea $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra de Banach y G el subconjunto de elementos invertibles. Entonces G es un grupo, es abierto y las operaciones de producto e inversión son continuas (en sus respectivos espacios de definición) así que G es un grupo topológico (ver proposiciones $1.16 - 3$ y $1.6 - 1$ en el capítulo 1).

5. *Tomemos $G = GL_n(\mathbb{R})$ (el grupo de matrices invertibles de n por n con coeficientes reales). Es conocido que G es un grupo (y si $n > 1$ es no conmutativo). Notamos que G es el grupo de elementos invertibles en el álgebra de Banach de las matrices con coeficientes reales de n por n, así que por el ejemplo anterior resulta que G es un grupo topológico. Además podemos identificar los puntos de G con los puntos de $\mathbb{R}^{n^2}$ y entonces G es abierto y por lo tanto es localmente compacto.*

6. *Sea G el conjunto de matrices reales de 2 por 2 de la forma*

$$\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $r > 0$.

Es fácil verificar que con la multiplicación de matrices usual, G es un subgrupo de las matrices invertibles de 2 por 2. Podemos identificar los puntos de G con los puntos del semiplano $\{(r, s) \in \mathbb{R}^2 : r > 0\}$ y por lo tanto dar a G la topología de subespacio de $\mathbb{R}^2$ que lo hace grupo topológico localmente compacto.

Definición 5.3. *Sea (X, τ) un espacio topológico y $x \in X$. Una vecindad de x es un subconjunto abierto U, de tal forma que $x \in U$.*

Notación: Por $N(e)$ denotamos al conjunto de vecindades de la identidad. A las funciones $\delta_a, \sigma_a : G \to G$ dadas por $\delta_a(x) = xa$ y $\sigma_a(x) = ax$, las llamamos traslaciones por a derecha e izquierda respectivamente; dada $a \in G$ y $A, B \subseteq G$ denotamos

1. $aB = \{ax : x \in B\}$, $Ba = \{xa : x \in B\}$
2. $B^{-1} = \{x^{-1} : x \in B\}$
3. $AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$

De la definición de grupo topológico se desprenden algunas sencillas consecuencias.

Proposición 5.4. *Sea $a \in G$. Las funciones δ_a, σ_a, h de G en G dadas por $\delta_a(x) = xa, \sigma_a(x) = ax$ y $h(x) = x^{-1}$ respectivamente, son homeomorfismos.*

Demostración. Por (5.1), se tiene que tanto δ_a como σ_a son continuas para todo a en G y además sus inversas son $\delta_{a^{-1}}$ y $\sigma_{a^{-1}}$ respectivamente, las cuales son continuas. Por último h es su propia inversa y es continua por (5.2.) *Q.E.D.*

Hagamos algunas observaciones sobre esta proposición. Si U es una vecindad de e entonces xU es un abierto que tiene a x. A la inversa, dada V cualquier vecindad de x, V se puede ver como xU para alguna vecindad de e (por ejemplo tome $U = x^{-1}V$). Así pues para conocer la colección de vecindades en cada punto sólo es necesario conocer la colección de vecindades en la identidad.

Definición 5.5. *Una $V \in N(e)$ se llama simétrica si $V = V^{-1}$.*

Proposición 5.6. *Sea $U \in N(e)$. Existen $V, W \in N(e)$ tales que*

1. *$WW \subseteq U$.*
2. *$V = V^{-1}$ y $V \subseteq W$.*

Demostración. Como $e \cdot e = e$, por la continuidad del producto existen $W_1, W_2 \in N(e)$ de tal forma que $W_1 W_2 \subseteq U$. Si tomamos $W = W_1 \cap W_2$ entonces $W \in N(e)$ y $WW \subseteq W_1 W_2 \subseteq U$. Como $h(x) = x^{-1}$ es homeomorfismo tenemos que W^{-1} es abierto así que si tomamos $V = W \cap W^{-1}$ obtenemos lo que deseamos. $Q.E.D.$

Una consecuencia de la Proposición 5.6 es que e tiene una base de vecindades simétricas.

Lema 5.7. *Sea (G, τ) un grupo topológico Hausdorff. Sean U un abierto y C un compacto no vacío contenidos en G. Existen V y W vecindades simétricas de la identidad de tal forma que $VC \subseteq U$ y $CW \subseteq U$.*

Demostración. Sólo probaremos la existencia de V, pues la prueba de la existencia de W es similar. Por la continuidad del producto, para cada $x \in C$ existen $V_1(x)$ y $V_2(x)$, vecindades de e y de x respectivamente, de tal forma que

$$V_1(x)V_2(x) \subseteq U$$

Como $\{V_2(x) : x \in C\}$ es una cubierta de C y éste es compacto, podemos encontrar $x_1, \ldots, x_n$ en C de tal forma que

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_2(x_i) \tag{5.3}$$

Por la Proposición 5.6 existe V vecindad simétrica de e de tal forma que $V \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} V_1(x_i)$. Resta probar que $VC \subseteq U$. Tomemos $v \in V$ y $x \in C$. Por (5.3) $x \in V_2(x_j)$ para alguna j, y como $v \in V_1(x_i)$ para cualquier i resulta que

$$vx \in V_1(x_j)V_2(x_j) \subseteq U.$$

$Q.E.D.$

El siguiente teorema nos da un criterio para que un grupo topológico sea Hausdorff.

Proposición 5.8. *Un grupo topológico (G, τ) es Hausdorff si y sólo si $\{e\}$ es cerrado.*

Demostración. Sólo es necesario probar el regreso pues si G es Hausdorff todo punto es cerrado. Notamos que la condición de que $\{e\}$ sea cerrado es equivalente a que todo punto sea cerrado pues por la Proposición 5.4 si $\{e\}$ es cerrado, $x\{e\} = \{x\}$ también es cerrado.

Tomemos dos puntos distintos x, y. Queremos encontrar vecindades ajenas que los separen. Usando que $x \neq y$ tenemos que e está en $G \backslash \{y^{-1}x\}$ y como $\{y^{-1}x\}$ es cerrado existe $U \in N(e)$ tal que $y^{-1}x \notin U$. Ahora por la Proposición 5.6 encontramos $W \in N(e)$ tal que $WW \subseteq U$ y $V \in N(e)$ tal que $V = V^{-1}$ y $V \subseteq W$. Tomemos xV y yV. Sabemos que son vecindades de x y de y respectivamente y además si $z \in (xV) \cap (yV)$ entonces $z = xv_1 = yv_2$ por lo que $y^{-1}x = v_2v_1^{-1} \in VV^{-1} = VV \subseteq WW \subseteq U$ lo que es una contradicción. Así pues, xV y yV son ajenas. *Q.E.D.*

Como corolario inmediato tenemos que todo grupo topológico T_0 (es decir, donde los puntos son cerrados) es Hausdorff.

Veamos ahora un poco los sugbrupos.

Proposición 5.9. *Un subgrupo H de G es abierto si y sólo si existe $U \in N(e)$ tal que $U \subseteq H$.*

Demostración. Sólo es necesario probar el regreso. Supongamos que U es una vecindad de e contenida en H. Para todo $x \in H$, xU es una vecindad de x y además como $U \subseteq H$ y H es subgrupo se sigue que $xU \subseteq H$ por lo que H es abierto. *Q.E.D.*

La Proposición 5.9 nos dice que para que un subgrupo sea abierto es suficiente que el neutro sea un punto interior del subgrupo.

Proposición 5.10. *Si H es un subgrupo abierto de G entonces también es cerrado.*

Demostración. Sean $\{H_i\}_{i \in I}$ las clases laterales izquierdas de H. Sabemos que para toda i en $H_i = a_iH$ para alguna $a_i \in G$ así que cada clase lateral izquierda también es abierta (al ser las traslaciones homeomorfismos). Ahora utilizando que $\{H_i\}_{i \in I}$ es una partición tenemos que si $H = H_j$ para alguna $j \in I$ entonces $H = G \backslash (\cup_{i \neq j} H_i)$ pero $\cup_{i \neq j} H_i$ es abierto (unión arbitraria de abiertos), así que H es cerrado. *Q.E.D.*

Corolario 5.11. *Si G es conexo entonces G no tiene subgrupos abiertos propios.*

Las funciones continuas de soporte compacto nos ayudarán a probar varios resultados, para lo cual nos será útil la siguiente proposición.

Proposición 5.12. *Sea (G, τ) un grupo topológico y $f \in C_c(G)$. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $U \in N(e)$ simétrica tal que si $y^{-1}x \in U$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Demostración. Por la continuidad de f, para todo $x \in sop(f)$ existe $V(x) \in N(e)$ tal que para toda $y \in xV(x)$ se tiene

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{5.4}$$

Por la Proposición 5.6 existe $U(x) \in N(e)$ tal que $U(x)U(x) \subseteq V(x)$.

Por otro lado usando la compacidad de $sop(f)$ existen $x_1, \ldots, x_n \in sop(f)$ tal que los conjuntos $x_iU(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, cubren a $sop(f)$.

Gracias a la Proposición 5.6 podemos tomar $U \in N(e)$ simétrica tal que $U \subseteq \cap_{i=1}^{n} U(x_i) \in N(e)$. Notamos que al ser U simétrica se tiene que $y^{-1}x \in U$ si y sólo si $x^{-1}y \in U$.

Ahora sean x, y tal que $y^{-1}x \in U$. Debemos probar que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Caso 1: $y \in sop(f)$. Usando que $x_iU(x_i)$, $i = 1, ..., n$, cubren a $sop(f)$ existe j tal que $y \in x_jU(x_j)$ así que $y = x_ju$ para algún $u \in U(x_j)$ y por (5.4) tenemos $|f(y) - f(x_j)| < \varepsilon$. Pero $y^{-1}x \in U \subseteq U(x_j)$ así que

$$x \in yU(x_j) = x_juU(x_j) \subseteq x_jU(x_j)^2 \subseteq x_jV(x_j)$$

y de nuevo por (5.4) tenemos que $|f(x) - f(x_j)| < \varepsilon$. En consecuencia obtenemos que $|f(y) - f(x)| < 2\varepsilon$.

Caso 2: $y \notin sop(f)$ entonces $f(y) = 0$. Si $x \notin sop(f)$ entonces $f(x) = 0$ y hemos terminado. Así pues podemos suponer que $x \in sop(f)$. Al ser U simétrica tenemos que $x^{-1}y \in U$ y entonces podemos aplicar el caso 1. *Q.E.D.*

La Proposición 5.12 puede ser reescrita usando la siguiente definición.

Definición 5.13. *Una función $f : G \to \mathbb{C}$ se llama uniformemente continua por la izquierda si para toda $\varepsilon > 0$ existe U vecindad de e (U sólo depende de ε) tal que para cualesquiera x, y tales que $x \in yU$ (equivalentemente $y^{-1}x \in U$) se tiene que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. De manera similar diremos que f es uniformemente continua por la derecha si para toda $\varepsilon > 0$ existe U vecindad de e (U sólo depende de ε) tal que para cualesquiera x, y tales que $x \in Uy$ (equivalentemente $xy^{-1} \in U$) se tiene que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

La Proposición 5.12 nos dice que toda función de $C_c(G)$ es uniformemente continua por la izquierda y es claro que de manera similar se puede probar que también es uniformemente continua por la derecha.

Proposición 5.14. *Sea (G, τ) un grupo topológico localmente compacto Hausdorff. Existe un subgrupo H de G que es abierto, cerrado y σ-compacto.*

Demostración. Como el espacio es localmente compacto Hausdorff podemos tomar V vecindad de e con cerradura compacta. Tomemos $C = (\bar{V}) \cap (\bar{V}^{-1})$ entonces C es compacto (pues C es un cerrado contenido en el compacto $\bar{V}$) que tiene a e y que $C = C^{-1}$. Ahora sea $C^n = \{c_1c_2 \cdots c_n : c_i \in C, i = 1, ..., n\}$ para todo $n \geq 1$ y notemos que $(C^n)^{-1} = C^n$. Además tenemos que cada C^n es compacto pues si p denota la función producto tenemos que $C^2 = p[C \times C]$ y en general $C^{n+1} = p[C \times C^n]$.

Por último tomamos $H = \cup_{n=1}^{\infty} C^n$. Entonces es claro que H es cerrada bajo productos y usando que $(C^n)^{-1} = C^n$ resulta que es cerrada bajo inversos de modo que H es un subgrupo de G. Además como cada C^n es compacto resulta que H es $\sigma-$compacto.

Dado que $V \cap V^{-1}$ es una vecindad de e y $V \cap V^{-1} \subseteq C \subseteq H$, por la Proposición 5.9 se sigue que H es abierto y por lo tanto cerrado (Proposición 5.10.) *Q.E.D.*

Capítulo 6

Medida de Haar

Por una medida de Haar izquierda sobre un grupo topológico localmente compacto Hausdorff, entenderemos una medida regular (ver definición 6.6) sobre los borelianos de G (ver definición 6.5) que sea invariante bajo traslaciones izquierdas. En este capítulo aseguramos la existencia de tal medida en cualquier grupo topológico localmente compacto Hausdorff y vemos que es única salvo múltiplos positivos.

También vemos algunas propiedades básicas de la medida de Haar, como la equivalencia de que el grupo sea compacto (ó σ-compacto) y que el espacio sea de medida finita (ó σ-finito).

6.1 Existencia (primera parte)

El propósito de esta sección es dar un primer acercamiento a la existencia de una medida regular no cero μ sobre los borelianos de G de tal forma que para toda $a \in G$ y para todo boreliano E, se cumpla $\mu(aE) = \mu(E)$, es decir μ es invariante bajo traslaciones izquierdas. A una medida con dichas propiedades se le conoce como medida de Haar izquierda. Si cambiamos la condición de que la medida sea invariante bajo traslaciones izquierdas por la de ser invariante bajo traslaciones derechas la llamaremos medida de Haar derecha. Nótese que para el caso de $G = \mathbb{R}$ como grupo aditivo, la medida de Lebesgue es una medida de Haar derecha e izquierda.

Durante esta sección (G, τ) denota un grupo topológico localmente compacto Hausdorff fijo.

Motivación: Sea μ una medida de Haar izquierda. Veamos algunas de sus propiedades.

Tomamos $U \subseteq G$ con $e \in int(U)$, y sea $C \subseteq G$ un conjunto compacto arbitrario. Notamos que $\{xU : x \in C\}$ es una cubierta de C, luego por la compacidad de C existen $x_1, x_2, ..., x_n$ elementos de C de tal forma que C está contenido en $\bigcup_{i=1}^{n} x_i U$. Así podemos hablar del mínimo número natural n tal que C es cubierto por n traslaciones de U, el cual denotaremos como $(C : U)$

(convenimos que $C = \emptyset$ si y sólo si $(C : U) = 0$). Ahora usando la invariancia de μ obtenemos $\mu(C) \leq (C : U)\mu(U)$, por lo que el número $(C : U)$ nos da una cierta información de que "tan grande" es C con respecto a U. El número $(C : U)$ nos ayudará a encontrar la medida que buscamos.

Primero comenzamos con algunas propiedades del número $(C : U)$ como función de C. Notamos que tiene algunas semejanzas con una medida; en concreto es monótona, subaditiva y en el vacío se anula.

Proposición 6.1. *Sean C, D subconjuntos compactos de G, U subconjunto de G con e en su interior.*

1. *Si $C_1 \subseteq G$ es compacto y $e \in int(C_1)$ entonces $(C : U) \leq (C : C_1)(C_1 : U)$.*
2. *Si $C \subseteq D$ entonces $(C : U) \leq (D : U)$.*
3. *$(\emptyset : U) = 0$.*
4. *$(C \cup D : U) \leq (C : U) + (D : U)$.*
5. *Para toda $a \in G$, $(aC : U) = (C : U)$.*
6. *Si $(CU^{-1}) \cap (DU^{-1}) = \emptyset$ entonces $(C \cup D : U) = (C : U) + (D : U)$.*

Demostración.

Prueba de 1. Para probar este inciso debemos probar que C es cubierto por $(C : C_1)(C_1 : U)$ traslaciones de U. Pero C es cubierto por $(C : C_1)$ traslaciones de C_1 y cada traslación de C_1 es cubierta por $(C_1 : U)$ traslaciones de U, por lo que C es cubierto por $(C : C_1)(C_1 : U)$ traslaciones de U.

Prueba de 2. Como $C \subseteq D$ tenemos que si D es cubierto por $(D : U)$ traslaciones de U entonces C también, por lo que $(C : U) \leq (D : U)$.

Prueba de 3. Es claro.

Prueba de 4. Supongamos que

$$C \subseteq \bigcup_{x \in X} xU \quad D \subseteq \bigcup_{y \in Y} yU$$

con $X, Y \subseteq G$ tales que $|X| = (C : U)$ y $|Y| = (D : U)$.

Entonces

$$C \cup D \subseteq \bigcup_{z \in X \cup Y} zU$$

así que

$$(C \cup D : U) \leq |X \cup Y| \leq |X| + |Y| = (C : U) + (D : U).$$

Prueba de 5.

$\leq]$ Sea $X \subseteq G$ tal que $|X| = (C : U)$ y

$$C \subseteq \bigcup_{x \in X} xU$$

Entonces
$$aC \subseteq \bigcup_{x\in X} axU = \bigcup_{z\in aX} zU$$
de donde se sigue $(aC : U) \leq |aX| = |X| = (C : U)$.

$\geq$] Aplicando la desigualdad anterior a aC en lugar de C y a a^{-1} en lugar de a obtenemos $(a^{-1}(aC) : U) \leq (aC : U)$ es decir $(C : U) \leq (aC : U)$.

Prueba de 6. Supongamos que $(CU^{-1}) \cap (DU^{-1}) = \emptyset$.

Sea $Z \subseteq G$ con $|Z| = (C \cup D : U)$ tal que $C \cup D \subseteq \bigcup_{z\in Z} zU$.

Por el inciso 4, es suficiente demostrar que $(C : U) + (D : U) \leq (C \cup D : U)$. Obsérvese que $C \cap (zU) \neq \emptyset$ si y sólo si $z \in CU^{-1}$. (Razón: $y \in C \cap (zU)$ si y sólo si $y \in C$ y $y = zu$ para algún $u \in U$ ó equivalentemente $z = yu^{-1} \in U$). Análogamente $D \cap (zU) \neq \emptyset$ si y sólo si $z \in DU^{-1}$.

Sean $Z_1 = \{z \in Z : C \cap (zU) \neq \emptyset\}$, $Z_2 = \{z \in Z : D \cap (zU) \neq \emptyset\}$. Por lo anterior tenemos que $Z_1 \subseteq CU^{-1}$ y $Z_2 \subseteq DU^{-1}$ y entonces por la hipótesis $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$.

Por otro lado es claro que $(C : U) \leq |Z_1|$ y que $(D : U) \leq |Z_2|$ por lo que $(C : U) + (D : U) \leq |Z_1| + |Z_2|$.

Pero como son Z_1 y Z_2 ajenos
$$|Z_1| + |Z_2| = |Z_1 \cup Z_2| \leq |Z| = (C \cup D : U)$$
y concluimos $(C : U) + (D : U) \leq (C \cup D : U)$. *Q.E.D.*

Notación: Denotaremos a los subconjuntos compactos de G por $\mathcal{C}$.

Nuestro propósito ahora es encontrar una función de $\mathcal{C}$ en $[0, \infty)$ que sea monótona, subaditiva, aditiva, invariante bajo traslaciones izquierdas y no cero para después tratar de extenderla a los borelianos de G, conservando la invariancia por la izquierda.

Nota: De aquí en adelante C_1 es un subconjunto compacto de G fijo con $e \in int(C_1)$.

Para cada $U \in N(e)$ definimos $\lambda_U : \mathcal{C} \to [0, \infty)$ mediante $\lambda_U(C) = \frac{(C:U)}{(C_1:U)}$. Note que como $C_1 \neq \emptyset$ tenemos que $(C_1 : U) > 0$.

De la Proposición 6.1 obtenemos los siguientes resultados.

Proposición 6.2. *Sea $U \in N(e)$.*

1. $\lambda_U(C) \leq (C : C_1)$, $\lambda_U(C_1) = 1$.
2. *Si $C \subseteq D$ entonces $\lambda_U(C) \leq \lambda_U(D)$.*
3. $\lambda_U(\emptyset) = 0$.
4. $\lambda_U(C \cup D) \leq \lambda_U(C) + \lambda_U(D)$.
5. *Para toda $a \in G$, $\lambda_U(aC) = \lambda_U(C)$.*
6. *Si $C, D \in \mathcal{C}$ son tales que CU^{-1} y DU^{-1} son ajenos, entonces*
$$\lambda_U(C \cup D) = \lambda_U(C) + \lambda_U(D)$$

El propósito ahora es asegurar la existencia de una $\lambda : \mathcal{C} \to [0, \infty)$ no cero que cumpla con los incisos 1.- 5. de la Proposición 6.2 y que además sea aditiva (note que a las λ_U sólo les falta la aditividad).

Empezamos con un lema de separación de subconjuntos ajenos.

Lema 6.3. *Sean $C, D \in \mathcal{C}$ ajenos. Existe $U \in N(e)$ tal que para toda $V \in N(e)$ con $V \subseteq U$, $(CV^{-1}) \cap (DV^{-1}) = \emptyset$.*

Demostración. Tenemos que $C \cap D = \emptyset$, de modo que $e \notin D^{-1}C$ es decir e está en $G \backslash (D^{-1}C)$. Notemos que $G \backslash (D^{-1}C)$ es abierto (esto se sigue de que C y D^{-1} son compactos y de la continuidad del producto). Por la Proposición 5.6 existe $U \in N(e)$ vecindad simétrica, con

$$UU \subseteq G \backslash (D^{-1}C)$$

Supongamos que $(CU^{-1}) \cap (DU^{-1}) \neq \emptyset$ entonces existe $x \in (CU^{-1}) \bigcap (DU^{-1})$ tal que $x = cu^{-1} = dv^{-1}$ con c, d en C, D respectivamente y u, v en U. En consecuencia, $d^{-1}c = v^{-1}u$. Pero entonces

$$v^{-1}u \in U^{-1}U = UU \subseteq G \backslash (D^{-1}C)$$

así que $d^{-1}c \in G \backslash (D^{-1}C)$ lo cual es una contradicción. En consecuencia $(CU^{-1}) \cap (DU^{-1}) = \emptyset$. La conclusión del resultado es evidente. *Q.E.D.*

El Lema 6.3 nos dice que para dos compactos ajenos C, D existe $U \in N(e)$ de tal manera que la familia de funciones $\{\lambda_V : V \in N(e), V \subseteq U\}$ solucionan el problema de la aditividad sólo en C y D. Nuestro problema ahora es obtener una función λ que resuelva el problema de la aditividad en todos los subconjuntos compactos de G y la idea para obtener tal λ es usar el Teorema de Tychonoff.

Proposición 6.4. *Existe $\lambda : \mathcal{C} \to [0, \infty)$ que cumple*

1. $\lambda(C) \leq (C : C_1)$, $\lambda(C_1) = 1$.
2. *Si* $C \subseteq D$ *entonces* $\lambda(C) \leq \lambda(D)$.
3. $\lambda(C \cup D) \leq \lambda(C) + \lambda(D)$.
4. *Para toda* $a \in G$, $\lambda(aC) = \lambda(C)$.
5. $\lambda(C \cup D) = \lambda(C) + \lambda(D)$ *si* $C \cap D = \emptyset$.

Demostración. Dado $C \in \mathcal{C}$ tomamos $I_C = [0, (C : C_1)]$ entonces I_C es compacto y por $6.2 - 1$ tenemos que para toda $U \in N(e)$, $\lambda_U(C) \in I_C$. Sea $I = \prod_{C \in \mathcal{C}} I_C$. Sabemos que I es Hausdorff y por el Teorema de Tychonoff I con la topología producto es compacto. Note que para toda $U \in N(e)$, se tiene $\lambda_U \in I$.

Para $U \in N(e)$ sea $\Delta(U) = \{\lambda_V : V \in N(e),\ V \subseteq U\} \subseteq I$.

Afirmamos que $\{\Delta(U) : U \in N(e)\}$ tiene la propiedad de la intersección finita.

Razón: tomemos $U_1, U_2, ..., U_n \in N(e)$. Queremos demostrar que $\cap_{i=1}^{n} \Delta(U_i) \neq \emptyset$. Sea $U_0 = \bigcap_{i=l}^{n} U_i$ entonces $U_0 \in N(e)$ y λ_{U_0} está en $\bigcap_{i=1}^{n} \Delta(U_i)$.

Usando la compacidad de I y la propiedad de la intersección finita existe $\lambda \in \bigcap\{\overline{\Delta(U)} : U \in N(e)\}$. Probaremos que λ cumple 1. – 5.

Sea $U \in N(e)$ arbitrario. Como $\lambda \in \overline{\Delta(U)}$, existe $(\lambda_{U_l})_{l\in L}$ una red en $\Delta(U)$ tal que $\lambda_{U_l} \to \lambda$ en I por lo que para todo $C \in \mathcal{C}$ se tienen $\lambda_{U_l}(C) \to \lambda(C)$.

1): Probemos que $\lambda(C) \leq (C : C_1)$ y $\lambda(C_1) = 1$.

Usando que para todo $l \in L$, $\lambda_{U_l}(C_1) = 1$, se obtiene que $\lambda(C_1) = 1$.

Por otro lado supongamos $(C : C_1) < \lambda(C)$. Ya que $\lambda_{U_l}(C) \to \lambda(C)$, existe $l \in L$ tal que $(C : C_1) < \lambda_{U_l}(C)$, pero $\lambda_{U_l}(C) \leq (C : C_1)$ (por la Proposición 6.2), una contradicción. En conclusión debemos tener $\lambda(C) \leq (C : C_1)$.

2: Veamos que λ es monótona.

Tomemos compactos C y D con $C \subseteq D$. Supongamos que $\lambda(D) < \lambda(C)$ y sea $r > 0$ tal que $\lambda(D) < r < \lambda(C)$.

Usando que $\lambda_{U_l}(C) \to \lambda(C)$ existe l_1 en L tal que para todo $l \geq l_1$ se tiene $r < \lambda_{U_l}(C)$.

Usando que $\lambda_{U_l}(D) \to \lambda(D)$ existe l_2 en L tal que para todo $l \geq l_2$ se tiene $\lambda_{U_l}(D) < r$.

Sea $l \geq l_1$ y $l \geq l_2$. Entonces $\lambda_{U_l}(D) < r < \lambda_{U_l}(C)$. Pero $C \subseteq D$ así que la Proposición 6.2-2 tenemos $\lambda_{U_l}(C) \leq \lambda_{U_l}(D)$ lo cual es una contradicción. En conclusión $\lambda(C) \leq \lambda(D)$.

3: Veamos que λ es subaditiva.

Supongamos $\lambda(C) + \lambda(D) < \lambda(C \cup D)$ y sea r tal que

$$\lambda(C) + \lambda(D) < r < \lambda(C \cup D)$$

Como $\lambda_{U_l}(C) \to \lambda(C)$ y $\lambda_{U_l}(D) \to \lambda(D)$ por la continuidad de la suma en $\mathbb{R}$ existe $l_1 \in L$ tal que para todo $l \geq l_1$, $\lambda_{U_l}(C) + \lambda_{U_l}(D) < r$.

Por otro lado usando $\lambda_{U_l}(C \cup D) \to \lambda(C \cup D)$ existe $l_2 \in L$ tal que para todo $l \geq l_2$, $r < \lambda_{U_l}(C \cup D)$.

Sea $l \geq l_1$ y $l \geq l_2$. Entonces $\lambda_{U_l}(C) + \lambda_{U_l}(D) < r < \lambda_{U_l}(C \cup D)$. Pero como λ_{U_l} es monótona tenemos que $\lambda_{U_l}(C \cup D) \leq \lambda_{U_l}(C) + \lambda_{U_l}(D)$ lo cual contradice lo anterior. Entonces debe pasar $\lambda(C \cup D) \leq \lambda(C) + \lambda(D)$.

4: La invariancia de λ bajo traslaciones por la izquierda se sigue de inmediato de la invariancia de cada λ_U ya que $\lambda_{U_l}(C) = \lambda_{U_l}(aC)$ y usando

$$\lambda_{U_l}(aC) \to \lambda(aC) \quad y \quad \lambda_{U_l}(C) \to \lambda(C)$$

se aigue $\lambda(aC) = \lambda(C)$.

5: Veamos que λ es aditiva. Es aquí donde utilizaremos el lema.

Sean C y D compactos ajenos. Por el Lema 6.3 existe $U_0 \in N(e)$ que cumple $(CV^{-1}) \cap (DV^{-1}) = \emptyset$, para todo $V \in N(e)$ con $V \subseteq U_0$.

Por el inciso 6 de la Proposición 6.2, $\lambda_V(C \cup D) = \lambda_V(C) + \lambda_V(D)$. Pero como $U_l \subseteq U_0$ tenemos que para toda l se tiene $\lambda_{U_l}(C \cup D) = \lambda_{U_l}(C) + \lambda_{U_l}(D)$ y al tomar el límite de la red concluimos que $\lambda(C \cup D) = \lambda(C) + \lambda(D)$. $Q.E.D.$

Recapitulemos lo que hemos conseguido hasta este punto. Aseguramos la existencia de una función $\lambda : \mathcal{C} \to [0,\infty)$ distinta de cero, monótona, subaditiva y aditiva. A una función con estas características se le llama contenido.

Nuestro propósito ahora es asegurar que podemos inducir mediante λ una medida regular, sobre los borelianos de G, invariante bajo traslaciones izquierdas.

6.2 Medida inducida por un contenido

Durante esta sección (X,τ) denota un espacio topológico localmente compacto Hausdorff.

Definición 6.5. *Los borelianos de X es la σ-álgebra de subconjuntos de X generada por los abiertos de X. Por $\mathbf{B}_X$ denotamos a los borelianos de X.*

Definición 6.6. *Sea S una σ-álgebra que contiene a los borelianos de X. Una medida μ sobre S se llama regular si satisface*

1. *Para todo $K \subseteq X$ compacto, $\mu(K)$ es finita.*

2. *Todo $A \in S$ satisface*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U,\ U \text{ es abierto}\}$$

3. *Para todo U abierto*

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subset U,\ K \text{ es compacto}\}$$

Definición 6.7. *Una medida exterior sobre X es una función de la potencia de X a $[0,\infty]$ que es monótona, σ-subaditiva y que se anula en el vacío.*

Definición 6.8. *Por $\mathcal{C}$ denotamos los subconjuntos compactos de X. Un contenido es una función no nula $\lambda : \mathcal{C} \to [0,\infty)$ que cumple para todos $C, D \in \mathcal{C}$,*

1. *Monotonía, si $C \subseteq D$ entonces $\lambda(C) \leq \lambda(D)$.*

2. *Subaditividad, $\lambda(C \cup D) \leq \lambda(C) + \lambda(D)$.*

3. *Aditividad, si $C \cap D = \emptyset$ entonces $\lambda(C \cup D) = \lambda(C) + \lambda(D)$*

Notamos que como consecuencia de 3, $\lambda(\emptyset) = 0$.

Ejemplos 6.9. 1. *Tomemos $\mathbb{N}$ con la topología discreta, entonces los subconjuntos compactos son simplemente los subconjuntos finitos. Tomemos $\lambda(C) = |C|$, la cardinalidad de C. Es claro que λ es un contenido.*

El siguiente ejemplo nos da una forma de obtener un contenido a partir de uno ya dado.

2. *Sea (X, τ) un espacio topológico localmente compacto, T un homeomorfismo de X y $\lambda : \mathcal{C} \to [0, \infty)$ un contenido. Entonces λ' definida por $\lambda'(C) = \lambda(T(C))$ es un contenido. Note que por la continuidad de T, $T(C) \in \mathcal{C}$ para todo C compacto, por lo que λ' está bien definida.*

   Veamos que λ' es un contenido. Como λ no es cero existe C' compacto tal que $\lambda(C') \neq 0$. Entonces $\lambda'(T^{-1}(C)) = \lambda(C) \neq 0$, así que λ' no es cero ($T^{-1}(C)$ es compacto al ser T^{-1} continua). De la subaditividad y monotonía de λ se sigue de inmediato que λ' es monótona y subaditiva.

   Por último usando que T es biyección tenemos que dados $C, C' \in \mathcal{C}$ ajenos $T(C)$ y $T(C')$ son ajenos por lo que

$$\lambda(T(C') \cup T(C)) = \lambda(T(C')) + \lambda(T(C))$$

   de donde se sigue la aditividad de λ'.

Empecemos con el proceso de inducir una medida a partir de un contenido, para lo cual necesitaremos del siguiente lema.

Lema 6.10. *Dado $C \in \mathcal{C}$ tal que $C \subseteq U \cup V$, existen $D, E \in \mathcal{C}$ tal que $D \subseteq U$, $E \subseteq V$ y $C = D \cup E$.*

Demostración. Sean $V_1 = C \setminus V$ y $U_1 = C \setminus U$. Tanto V_1 como U_1 son compactos al ser cerrados contenidos en un compacto. Debido a que $C \subseteq U \cup V$ resulta que son ajenos y además $U_1 \subseteq V$ y $V_1 \subset U$. Como U_1 y V_1 son compactos ajenos existen abiertos ajenos U_2 y V_2 tales que $U_1 \subseteq U_2 \subseteq V$ y $V_1 \subseteq V_2 \subseteq U$. Proponemos $D = C \setminus U_2$ y $E = C \setminus V_2$. Entonces D y E son compactos. Como $C \subseteq U \bigcap V$ y $U_2 \subseteq V$ y $V_2 \subseteq U$ entonces $D = C \setminus U_2 \subseteq U$ y $E = C \setminus V_2 \subseteq V$. Resta probar que $C = D \cup E$ y como D y E están contenidos en C, resta ver que $C \subset D \cup E$. Sea $x \in C$. Si x no está en U_2 entonces $x \in D$ y si x está en U_2 entonces no puede estar en V_2, al ser ajenos, por lo que $x \in E$. *Q.E.D.*

Proposición 6.11. *Dado un contenido $\lambda : \mathcal{C} \to [0, \infty)$ definimos $\lambda_* : \tau \to [0, \infty]$ como*

$$\lambda_*(U) = \sup\{\lambda(C) : C \in \mathcal{C},\ C \subseteq U\} \tag{6.1}$$

Entonces

1. *λ_* es monótona.*

2. *λ_* es $\sigma-$subaditiva.*

3. *λ_* es $\sigma-$aditiva.*

4. *$\lambda_*(int(C)) \leq \lambda(C)$, con $C \in \mathcal{C}$, la desigualdad estricta puede darse.*

5. *Si $C \in \mathcal{C} \cap \tau$ entonces $\lambda(C) = \lambda_*(C)$.*

Demostración. Primero notamos que al ser el espacio localmente compacto Hausdorff, todo abierto contiene un compacto, por lo que λ_* está bien definida. Además la definición es natural si queremos inducir una medida regular. Por último notamos que λ_* no es nula.

1: La monotonía de λ es clara pues si U y V son dos abiertos con V contenido en U entonces $\{C \in \mathcal{C} : C \subseteq V\} \subseteq \{C \in \mathcal{C} : C \subseteq U\}$ y al tomar supremos $\lambda_*(V) \leq \lambda_*(U)$.

2: Veamos la σ-subaditividad.

Paso 1: λ_* es finito subaditiva.

Sean $U, V \in \tau$. Debemos demostrar que $\lambda_*(U \cup V) \leq \lambda_*(U) + \lambda_*(V)$ es decir

$$\sup\{\lambda(C) : C \in \mathcal{C},\, C \subset U \cup V\} \leq \lambda_*(U) + \lambda_*(V)$$

ó equivalentemente, que para todo compacto C contenido en $U \cup V$,

$$\lambda(C) \leq \lambda_*(U) + \lambda_*(V)$$

Tomemos C compacto contenido en $U \cup V$. Por el Lema 6.10 existen D y E compactos $D \subseteq U, E \subseteq V$ tal que $C = D \cup E$. Usando la subaditividad de λ obtenemos $\lambda(C) \leq \lambda(D) + \lambda(E)$. Pero $\lambda(D) \leq \lambda_*(U)$ y $\lambda(E) \leq \lambda_*(V)$ así que $\lambda(C) \leq \lambda_*(U) + \lambda_*(V)$.

Por inducción se sigue que λ_* es finito subaditiva.

Paso 2: λ_* es σ-subaditiva. Sea $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de abiertos. Debemos probar que

$$\sup\left\{\lambda(C) : C \in \mathcal{C},\, C \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i\right\} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_*(U_i)$$

es decir, que para todo compacto C contenido en $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$

$$\lambda(C) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_*(U_i)$$

Sea $C \in \mathcal{C}$ con $C \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$. Por compacidad $C \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$, de donde se sigue $\lambda(C) \leq \lambda_*\left(\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}\right)$. Pero usando que λ_* es finito subaditiva obtenemos

$$\lambda(C) \leq \lambda_*\left(\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}\right) \leq \sum_{j=i}^{n} \lambda_*(U_{i_j}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_*(U_i)$$

3: Probemos que λ_* es σ-aditiva.

Paso 1: λ_* es finito aditiva.

Sean U, V dos abiertos ajenos. Sólo hace falta mostrar que $\lambda_*(U) + \lambda_*(V) \leq \lambda_*(U \cup V)$.

Sean $D \subseteq U$, $E \subseteq V$ compactos, entonces D y E son ajenos.

Tenemos que $D \cup E$ es un compacto contenido en $U \cup V$ con D y E ajenos así que $\lambda(D) + \lambda(E) = \lambda(D \cup E) \leq \lambda_*(U \cup V)$. En consecuencia $\lambda_*(U \cup V)$ es cota superior de $\{\lambda(D) + \lambda(E) : D, E \in \mathcal{C}, D \subseteq U, E \subseteq V\}$ y entonces

$$\sup\{\lambda(D) + \lambda(E) : D, E \in \mathcal{C}, D \subseteq U, E \subseteq V\} \leq \lambda_*(U \cup V)$$

Pero

$$\sup\{\lambda(D) + \lambda(E) : D, E \in \mathcal{C}, D \subseteq U, E \subseteq V\} = \lambda_*(U) + \lambda_*(V)$$

Por lo que $\lambda_*(U) + \lambda_*(V) \leq \lambda_*(U \cup V)$.
Por inducción se sigue que λ_* es finito aditiva.

Paso 2: λ_* es σ-aditiva.
Sea $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de abiertos ajenos.
Gracias a la finito aditividad y monotonía tenemos que para todo natural n

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_*(U_i) = \lambda_* \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i \right) \leq \lambda_* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right)$$

y al tomar el límite cuando n tiende a infinito obtenemos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_*(U_i) \leq \lambda_* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right)$$

Lo cual es suficiente para probar la σ-aditividad pues λ_* es σ-subaditiva.

4: Sea $C \in \mathcal{C}$. Probemos que $\lambda_*(int(C)) \leq \lambda(C)$.

Supongamos que $\lambda(C) < \sup\{\lambda(D) : D \in \mathcal{C}, D \subseteq int(C)\}$, entonces existe $D \in \mathcal{C}, D \subseteq int(C)$ con $\lambda(C) < \lambda(D)$. Pero $D \subseteq int(C) \subseteq C$ así que por la monotonía de λ tenemos $\lambda(D) \leq \lambda(C)$, en contradicción con lo anterior. En consecuencia $\lambda_*(int(C)) \leq \lambda(C)$.

Para ver que puede darse la desigualdad estricta en $\lambda_*(int(C)) \leq \lambda(C)$ tomemos $\mathbb{R}$ con la topología usual, λ la restricción de la medida de Lebesge a los compactos y C un conjunto de tipo Cantor de medida positiva. Por un lado $int(C) = \emptyset$ por lo que $\lambda_*(int(C)) = 0$ y por otro $\lambda(C) > 0$.

5: Veamos que λ es la restricción de λ_* a $\mathcal{C} \cap \tau$.

Sea $C \in \mathcal{C} \cap \tau$. Queremos demostrar que $\lambda(C) = \lambda_*(C)$.

Claramente $\lambda(C) \leq \lambda_*(C)$.

Por el inciso 4, $\lambda_*(C) = \lambda_*(int(C)) \leq \lambda(C)$. *Q.E.D.*

Ahora procederemos a extender λ_* a una medida exterior para después usar el Teorema de extensión de Carathéodory y obtener una medida sobre los borelianos del espacio. La forma de extender a λ es la usual si queremos obtener una medida regular.

Proposición 6.12. *Sean λ un contenido y λ_* como en (6.1).*
Definimos $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ como

$$\mu^*(E) = \inf\{\lambda_*(U) : E \subseteq U \in \tau\} \tag{6.2}$$

Entonces,

1. *μ^* restringida a τ coincide con λ_* (así que μ^* extiende a λ_* y por lo tanto μ^* no es cero).*

2. *μ^* es una medida exterior que es finita en los compactos de X.*

3. (a) Para todo abierto U se cumple $\mu^*(U) = \sup\{\mu^*(C) : C \in \mathcal{C}, C \subseteq U\}$.

(b) Para todo conjunto E se cumple $\mu^*(E) = \inf\{\mu^*(U) : U \in \tau, E \subseteq U\}$.

Demostración.

Prueba de 1.

Sea $U \in \tau$, entonces $\mu^*(U) \leq \lambda_*(U)$. Por otro lado si $U \subseteq V \in \tau$ por la monotonía de λ_* tenemos que $\lambda_*(U) \leq \lambda_*(V)$ así que $\lambda_*(U)$ es cota inferior de $\{\lambda_*(V) : U \subseteq V \in \tau\}$ y entonces $\lambda_*(U) \leq \mu^*(U)$.

Prueba de 2.

i.) Es claro que $\lambda_*(\emptyset) = 0$, pero $\emptyset$ es abierto y así por 1 se sigue que $\mu^*(\emptyset) = \lambda_*(\emptyset) = 0$.

ii.) Veamos que μ^* es monótona.

Sean E, F subconjuntos de X, $E \subseteq F$. Entonces $\{U \in \tau : F \subseteq U\}$ está contenido en $\{U \in \tau : E \subseteq U\}$ así que

$$\mu^*(E) = \inf\{\lambda_*(U) : E \subseteq U \in \tau\} \leq \inf\{\lambda_*(U) : F \subseteq U \in \tau\} = \mu^*(F)$$

iii.) Probemos que μ^* es σ-subaditiva.

Sea $(E_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X.

Por demostrar $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$.

Podemos suponer que $\mu^*(E_i) < \infty$ para cada i, pues de lo contrario la desigualdad es clara.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por definición de μ^* para cada $i \in \mathbb{N}$ existe $U_i \in \tau$, $E_i \subseteq U_i$ tal que $\lambda_*(U_i) < (\varepsilon/2^i) + \mu^*(E_i)$. Entonces usando la $\sigma-$subaditividad de λ_* tenemos

$$\lambda_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_*(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty}((\varepsilon/2^i) + \mu^*(E_i)) = \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

pero $\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ es un abierto que contiene a $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, por lo que

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leq \lambda_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) < \varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

Al ser $\varepsilon > 0$ arbitrario se obtiene la σ-subaditividad.

Por i),ii) y iii), tenemos que μ^* es una medida exterior.

Resta probar que para todo compacto $C, \mu^*(C) < \infty$.

Tomemos C un compacto. Como el espacio es localmente compacto Hausdorff para todo $c \in C$ existe U_c abierto con $c \in U_c$ tal que $\bar{U}_c$ es compacta. Por lo tanto existen $c_1, ..., c_n \in C$ tales que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{c_i}$. Sea $D = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{U}_{c_i}$, entonces D es compacto y $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{c_i} \subseteq int(D)$. Pero μ^* coincide con λ_* en τ así que al ser D compacto y gracias a la Proposición 6.11-4.

$$\mu^*(int(D)) = \lambda_*(int(D)) \leq \lambda(D) < \infty$$

de lo que se sigue que $\mu^*(C) < \infty$.

Prueba de 3.

Prueba de (a).

Sea $U \in \tau$. Probemos que $\mu^*(U) = \sup\{\mu^*(C) : C \in \mathcal{C}, C \subseteq U\}$.

Como $\mu^*(U)$ es cota superior de $\{\mu^*(C) : C \in \mathcal{C}, C \subseteq U\}$ tenemos que

$$\mu^*(U) \geq \sup\{\mu^*(C) : C \in \mathcal{C}, C \subseteq U\}$$

Si la desigualdad anterior es estricta entonces usando que $\mu^*(U) = \lambda_*(U)$ resulta

$$\lambda_*(U) > \sup\{\mu^*(C) : C \in \mathcal{C}, C \subseteq U\}$$

y usando (6.1) existe C_0 un subconjunto compacto de U tal que $\lambda(C_0) > \sup\{\mu^*(C) : C \in \mathcal{C}, C \subseteq U\}$, por lo que $\lambda(C_0) > \mu^*(C_0)$.

Lo que hacemos es continuar de "bajadita".

Como $\mu^*(C_0) = \inf\{\lambda_*(V) : V \in \tau, C_0 \subseteq V\}$ y $\lambda(C_0) > \mu^*(C_0)$ resulta que existe $V_0 \in \tau, C_0 \subseteq V_0$ tal que

$$\lambda(C_0) > \lambda_*(V_0)$$

Por (6.1) tenemos $\lambda_*(V_0) \geq \lambda(C_0)$, en contradicción con la desigualdad anterior.

En conclusión la desigualdad estricta no se da por lo que tenemos la igualdad.

El inciso b) se sigue de 6.2 y de 1. *Q.E.D.*

Ahora, a partir de μ^* obtenemos una medida regular sobre los borelianos de X, para lo cual recordamos antes lo que es un subconjunto μ^*-medible.

Definición 6.13. *Un $E \subseteq X$ se llama μ^*-medible si para todo $B \subseteq X$*

$$\mu^*(B) = \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \backslash E)$$

Notas: Por la subaditividad de μ^*, $\mu^*(B) \leq \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \backslash E)$ para todo $B \subseteq X$. En consecuencia para que $E \subseteq X$ sea μ^*-medible es suficiente pedir que para todo $B \subseteq X$, $\mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \backslash E) \leq \mu^*(B)$; el conjunto de los μ^*-medibles es una σ-álgebra.

Ya sabiendo que μ^* es medida exterior podemos usar el Teorema de extensión de Carathéodory para inducir una medida sobre los μ^*-medibles y el inciso 3 de la Proposición 6.12 nos hace pensar que esta medida será regular, lo único que necesitamos probar es que los abiertos son μ^*-medibles.

Ahora veremos un criterio para que un conjunto sea μ^*-medible.

Proposición 6.14. *Sea μ^* como en (6.2) y S la σ-álgebra de los μ^*-medibles. Entonces,*

1. *E es μ^*-medible si y sólo si para todo abierto U*

$$\mu^*(U) \geq \mu^*(U \cap E) + \mu^*(U \backslash E)$$

2. *Sea $E \in S$ un conjunto σ-finito. Dado $\varepsilon > 0$ existe $G = G(\varepsilon)$ un conjunto abierto tal que $E \subseteq G$ y $\mu^*(G \backslash E) < \varepsilon$.*

Demostración.

Prueba de 1.

Tomemos E de tal forma que para todo abierto U

$$\mu^*(U) \geq \mu^*(U \cap E) + \mu^*(U \backslash E)$$

y supongamos que E no es μ^*-medible; es decir que para algún subconjunto B tenemos $\mu^*(B) < \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \backslash E)$. Por (6.2) existe U_0 abierto tal que $B \subseteq U_0$ y $\lambda_*(U_0) < \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \backslash E)$. Como $\lambda_*(U_0) = \mu^*(U_0)$ se concluye que

$$\mu^*(U_0) < \mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \backslash E)$$

Pero por la monotonía de μ^* tenemos que

$$\mu^*(B \cap E) + \mu^*(B \backslash E) \leq \mu^*(U_0 \cap E) + \mu^*(U_0 \backslash E)$$

y de las dos últimas desigualdades se sigue $\mu^*(U_0) < \mu^*(U_0 \cap E) + \mu^*(U_0 \backslash E)$, lo cual contradice la hipótesis.

La necesidad es inmediata de la definición de los conjuntos μ^*-medibles.

Prueba de 2.

Sea E μ^*-medible y σ-finito.

Sea $\varepsilon > 0$, veamos que existe G abierto, $E \subseteq G$ tal que $\mu^*(G \backslash E) < \varepsilon$.

Caso 1: $\mu^*(E) < \infty$.

Usando la Proposición 6.12-3-*b*, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $U_n \in \tau$, $E \subseteq U_n$ tal que $\mu^*(U_n) < \mu^*(E) + \varepsilon/(2^{n+1})$.

Como $\mu^*(E) < \infty$ de lo anterior se sigue que $\mu^*(U_n \backslash E) < \varepsilon/(2^{n+1})$. Proponemos $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Como cada U_n es abierto se sigue que G es abierto. Además por la σ-subaditividad de μ^*

$$\mu^*(G \backslash E) = \mu^*\left(\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n\right) \backslash E\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(U_n \backslash E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon/(2^{n+1}) = \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Caso 2: $\mu^*(E) = \infty$.

Sea $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en S tal que $E = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ y $\mu^*(E_n) < \infty$ para todo n.

Por el caso 1 para toda n existe G_n abierto, $E_n \subseteq G_n$ tal que $\mu^*(G_n \backslash E_n) < \varepsilon/(2^{n+1})$. Proponemos $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Entonces es claro que G es abierto y $E \subseteq G$. Además por monotonía y σ-subaditividad de μ^* tenemos

$$\mu^*(G \backslash E) \leq \sum_{n=i}^{\infty} \mu^*(G_n \backslash E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(G_n \backslash E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon/(2^{n+1}) = \varepsilon/2 < \varepsilon$$

. *Q.E.D.*

Proposición 6.15. *Sea μ^* como en (6.2), S la σ-álgebra de los μ^*-medibles y $\mathbf{B}_X$ los borelianos de X. Entonces:*

1. $\mathbf{B}_X \subseteq S$.

2. *Si μ es la restricción de μ^* a $\mathbf{B}_X$ entonces $(X, \mathbf{B}_X, \mu)$ y (X, S, μ^*) son espacios de medida regulares, con (X, S, μ^*) completo.*

Demostración.

Prueba de 1.

Como los borelianos son la σ-álgebra generada por los abiertos de X es suficiente probar que $\tau \subseteq S$. Tomemos U un subconjunto abierto y probemos que es μ^*-medible. Por la Proposición $6.14 - 1$ es suficiente probar que para todo abierto V se cumple

$$\mu^*(V \backslash U) + \mu^*(V \cap U) \leq \mu^*(V)$$

y como μ^* coincide con λ_* en los abiertos lo anterior equivale a probar que

$$\mu^*(V \backslash U) + \lambda^*(V \cap U) \leq \lambda_*(V)$$

y para probar esto último probaremos que para cualquier $\varepsilon > 0$

$$\mu^*(V \backslash U) + \lambda_*(V \cap U) - 2\varepsilon \leq \lambda_*(V)$$

Tomemos $\varepsilon > 0$. Por definición de λ_* podemos encontrar C, un subconjunto compacto contenido en $U \cap V$, de tal forma que $\lambda^*(V \cap U) - \varepsilon < \lambda(C)$ y entonces

$$\mu^*(V \backslash U) + \lambda_*(V \cap U) - 2\varepsilon < \mu^*(V \backslash U) - \varepsilon + \lambda(C) \tag{6.3}$$

De manera similar al ser $V \setminus C$ abierto podemos encontrar un subconjunto D, compacto contenido en $V \setminus C$, de tal forma que $\lambda_*(V \setminus C) - \varepsilon < \lambda(D)$. Pero como $V \setminus C$ es un abierto que contiene a $V \setminus U$ (pues C está contenido en U) tenemos $\mu^*(V \backslash U) \leq \lambda_*(V \cap U)$ y en consecuencia, de (6.3)

$$\mu^*(V \backslash U) + \lambda_*(V \cap U) - 2\varepsilon \leq \lambda(D) + \lambda(C) \tag{6.4}$$

Pero C y D son compactos ajenos y su unión está contenida en V, así que por la aditividad de λ, $\lambda(D) + \lambda(C) = \lambda\left(D \bigcap C\right) \leq \lambda_*(V)$ por lo que de (6.4) concluimos

$$\mu^*(V \backslash U) + \lambda_*(V \cap U) - 2\varepsilon \leq \lambda_*(V).$$

Prueba de 2.

Por el Teorema de extensión de Carathéodory, (X, S, μ^*) es un espacio de medida completo (ver B.14 en el apéndice). Además gracias a que $\mathbf{B}_X \subseteq S$, por la Proposición 6.12-3 tenemos que (X, S, μ^*) es un espacio de medida regular.

Como $\mathbf{B}_X$ es una σ-álgebra y μ es la restricción de μ^* a $\mathbf{B}_X$ tenemos que $(X, \mathbf{B}_X, \mu)$ es un espacio de medida y la regularidad se debe a la Proposición 6.12. *Q.E.D.*

La siguiente proposición nos ayuda a saber un poco más de los μ^*-medibles cuando el espacio de medida (X, S, μ^*) es σ-finito.

Proposición 6.16. *Sea (X, τ) espacio topológico localmente compacto Hausdorff, μ^* la medida exterior generada por un contenido (ver Proposición 6.12), (X, μ^*, S) como en la Proposición 6.15 y μ la restricción de μ^* a $\mathbf{B}_X$. Si (X, S, μ^*) es σ-finito entonces S es la completación de $(X, \mathbf{B}_X, \mu)$.*

Demostración.

Supongamos que (X, S, μ^*) es σ-finito (note que gracias a la Proposición 6.14 esto pasa si el espacio es σ-compacto), entonces todo conjunto en S es σ-finito.

Sea $\mathcal{N}(\mu^*) = \{E \in S : \mu^*(E) = 0\}$.

Queremos demostrar que

$$S = \{A \subseteq X : \text{existen}\, F, G \in \mathbf{B}_X \,\text{con}\, F \subseteq A \subseteq G \,\text{y}\, G \setminus F \in \mathcal{N}(\mu^*)\}$$

$\subseteq$] Sea $A \in S$. Por la Proposición $6.14 - 2$ para todo n existe G_n abierto que contiene a A tal que $\mu^*(G_n \backslash A) < 1/n$.

Sea $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Entonces $G \in \mathbf{B}_X$ y además $A \subseteq G$. Por la monotonía de μ^* tenemos que

$$\mu^*(G \backslash A) \leq \mu^*(G_n \backslash A) < 1/n$$

para todo n, por lo que $\mu^*(G \backslash A) = 0$.

De manera similar, para $B = X \setminus A$, existe E boreliano de X que contiene a B y tal que $\mu^*(E \setminus B) = 0$. Sea $F = X \setminus E$, entonces $F \subseteq A$, F es boreliano y $E \setminus B = A \setminus F$, por lo que $\mu^*(A \setminus F) = 0$.

Por último, $F \subseteq A \subset G$ con $\mu^*(G \setminus F) \leq \mu^*(G \setminus A) + \mu^*(A \setminus F) = 0$.

$\supseteq$] Se sigue de que $\mathbf{B}_X \subseteq S$ y de que (X, S, μ) es completo. *Q.E.D.*

La siguiente proposición nos ayudará a obtener la invariancia izquierda que andamos buscando.

Proposición 6.17. *Sea (X, τ) espacio topológico localmente compacto Hausdorff $\lambda : \mathcal{C} \to [0, \infty)$ un contenido y T un homeomorfismo de X.*

Si λ' es el contenido dado por $\lambda'(C) = \lambda(T(C))$ y μ y μ' las medidas dadas por (6.2) mediante λ y λ' respectivamente, entonces para todo boreliano E se tiene $\mu(T(E)) = \mu'(E)$.

Demostración.

Caso 1: $E \in \tau$.

En este caso por la Proposición $6.12 - 1$ tenemos

$$\mu'(E) = \sup\{\lambda'(C) : C \in \mathcal{C}, C \subseteq E\} = \sup\{\lambda(T(C)) : C \in \mathcal{C}, C \subseteq E\}$$

pero $\{\lambda(T(C)) : C \in \mathcal{C}, C \subseteq E\} = \{\lambda(C) : C \in \mathcal{C}, C \subseteq T(E)\}$, al ser T homeomorfismo, de donde

$$\mu'(E) = \sup\{\lambda(C) : C \in \mathcal{C}, C \subseteq T(E)\} = \lambda_*(T(E)) = \mu(T(E))$$

Caso 2: Caso general:

Por la regularidad de μ' y el caso 1 tenemos

$$\mu'(E) = \inf\{\mu'(U) : U \in \tau, E \subseteq U\} = \inf\{\mu(T(U)) : U \in \tau, E \subseteq U\}$$

pero $\{\mu(T(U)) : U \in \tau, E \subseteq U\} = \{\mu(U) : U \in \tau : U \subseteq T(E)\}$, así que por la regularidad de μ se sigue

$$\mu'(E) = \sup\{\mu(U) : U \in \tau, U \subseteq T(E)\} = \mu(T(E))$$

. *Q.E.D.*

Para acabar esta sección queremos hacer énfasis en que para extender un contenido λ necesitamos cada una de sus propiedades (monótonía, subaditividad y aditividad.) En concreto, el siguiente ejemplo muestra que la aditividad es fundamental.

Ejemplo 6.18. *Tomemos* $\mathbf{Z}$ *con la topología discreta, entonces los subconjuntos compactos son los subconjuntos finitos.*

Defina $\lambda : \mathcal{C} \to [0, \infty)$ *por* $\lambda(C) = \max\{|n| : n \in C\}$. *Entonces es inmediato que* λ *es distinta de cero, es monótona no negativa y además subaditiva.*

Si intentamos seguir el camino descrito anteriormente, tomamos λ_* *definida en los abiertos como* $\lambda_*(U) = \sup\{\lambda(C) : C \in \mathcal{C}, C \subseteq U\}$. *Pero como estamos con la topología discreta,* λ_* *está definida para todo subconjunto de* $\mathbf{Z}$*; lo que es más, tenemos que* $\lambda_* = \mu^*$ *y como los* μ^**-medibles contienen a los abiertos resulta que todo subconjunto de* $\mathbf{Z}$ *es* μ^**-medible. Veamos que* μ^* *no es aditiva (por lo que no puede ser una medida). Sean* $C = \{1, 2\}, D = \{-1, -2\}$ *(ajenos.) Es claro que* $\lambda(C \cup D) = 2$*; sin embargo* $\lambda(C) = 2 = \lambda(D)$ *por lo que* $\lambda(C \cup D) \neq \lambda(C) + \lambda(D)$.

Este simple ejemplo pone de manifiesto la importancia de la aditividad para poder extender un contenido como lo hemos hecho y además nos da una razón de por qué no basta un λ_U *(monótono y subaditivo) y había que buscar una función* λ *monótona, subaditiva y aditiva.*

6.3 Existencia (última parte)

Volvamos a la existencia de una medida de Haar izquierda . Ya con lo construido será muy sencillo.

Teorema 6.19. *Sea* (G, τ) *un grupo topológico localmente compacto Hausdorff. Existe* μ *medida regular sobre los borelianos de* G *que es invariante bajo tralaciones izquierdas.*

Demostración.

Tomemos (G, τ) un grupo topológico localmente compacto Hausdorff. Hemos garantizado la existencia de un contenido λ invariante bajo traslaciones izquierdas (ver Proposición 6.4). Gracias a la sección anterior es posible extender λ a una medida regular μ (distinta de cero) sobre los borelianos de G. Sólo nos resta probar que μ es invariante bajo traslaciones izquierdas.

Sea $a \in G$ y $T : G \to G$ dada por $T(x) = ax$. Sabemos entonces que T es un homeomorfismo y por lo tanto $\lambda' : \mathcal{C} \to [0, \infty)$ dado por $\lambda'(C) = \lambda(T(C))$ es un contenido; pero como λ es invariante bajo traslaciones izquierdas resulta que $\lambda = \lambda'$ y por lo tanto si μ y μ' son las medidas inducidas por λ y λ' respectivamente tenemos que $\mu = \mu'$. Por otro lado por la Proposición 6.17 tenemos que para todo boreliano E se tiene que $\mu(T(E)) = \mu'(E)$ y en consecuencia $\mu(aE) = \mu(E)$, lo que prueba la invariancia izquierda de μ. *Q.E.D.*

Para asegurar la existencia de una medida de Haar derecha es claro que podríamos seguir un argumento similar al que usamos para encontrar una medida de Haar izquierda, pero veremos cómo obtener una medida derecha a partir de una izquierda y también veremos que es equivalente resolver el problema para medidas derechas ó izquierdas.

Lema 6.20. *Sea (X, τ) espacio topológico localmente compacto Hausdorff, $\mu : \mathbf{B}_X \to [0, \infty]$ una medida regular y $T : X \to X$ un homeomorfismo entonces $\nu : \mathbf{B}_X \to [0, \infty]$ dada por $\nu(E) = \mu(T(E))$ es una medida regular.*

Demostración. Usando que T es una biyección obtenemos que ν es una medida.

Ahora probaremos la regularidad. Como T es continuo tenemos que si C es compacto entonces $T(C)$ es compacto así que (usando que μ es finita en compactos) resulta que ν es finita en compactos.

Tomemos $U \in \tau$ y $E \in \mathbf{B}_X$ fijos. Para completar la prueba de la regularidad notamos que, como T es homeomorfismo,

$$\begin{array}{llll} C \in \mathcal{C}, C \subseteq T(U) & \text{si y sólo si} & C = T(D) & \text{para algún} \quad D \in \mathcal{C}, D \subseteq U \\ V \in \tau, T(E) \subseteq V & \text{si y sólo si} & V = T(W) & \text{para algún} \quad W \in \tau, E \subseteq W \end{array}$$

para obtener

$$\sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{C}, C \subseteq T(U)\} = \sup\{\mu(T(D)) : D \in \mathcal{C}, D \subseteq U\}$$
$$\inf\{\mu(V) : V \in \tau, T(E) \subseteq V\} = \inf\{\mu(T(W)) : W \in \tau, E \subseteq W\}$$

y de la regularidad de μ y la definición de ν se concluye que

$$\nu(U) = \sup\{\nu(D) : D \in \mathcal{C}, D \subseteq U\}$$
$$\nu(E) = \inf\{\nu(W) : W \in \tau, E \subseteq W\}$$

lo cual termina la prueba del lema. *Q.E.D.*

Proposición 6.21. *Sea (G, τ) un grupo topológico localmente compacto Hausdorff y sea μ una medida de Haar izquierda.*

Definamos $\nu : \mathbf{B}_G \to [0, \infty]$ por $\nu(E) = \mu(E^{-1})$. Entonces ν es una medida de Haar derecha.

Demostración. Sea $h(a) = a^{-1}$. Sabemos que h es homeomorfismo de G y además tenemos que $\nu(E) = \mu(h(E))$ para todo boreliano E así que por el Lema 6.20 se tiene que ν es una medida regular (y como μ no es idénticamente cero, tampoco ν). Así que sólo nos resta probar que es invariante bajo traslaciones derechas pero esto se sigue de las siguientes identidades:

$$\nu(Ea) = \mu((Ea)^{-1}) = \mu(a^{-1}E^{-1}) = \mu(E^{-1}) = \nu(E).$$

Q.E.D.

Notación: En general, dada μ medida de Haar denotamos por $\check{\mu}$ a la medida dada por $\check{\mu}(A) = \mu(A^{-1})$.

El siguiente ejemplo nos muestra que es indispensable que el grupo topológico sea localmente compacto para asegurar la existencia de una medida de Haar izquierda ó derecha.

Ejemplo 6.22. *Tomemos $G = \mathbb{Q}$ como grupo aditivo y la topología de subespacio de $\mathbb{R}$. Entonces es sencillo probar que G es grupo topológico.*

(i)*Primero veremos que G no es localmente compacto.*

Supongamos que G es localmente compacto. Afirmamos que existen $a, b \in \mathbb{R}$ de tal forma que $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ es compacto. La razón de esto es como sigue: si G fuese localmente compacto, 0 tendría una vecindad compacta V pero como los intervalos abiertos son una base de la topología resulta que existen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ tal que $(a, b) \cap \mathbb{Q} \subseteq V$ y por lo tanto la cerradura de $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ es compacta i.e. $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ es compacto. Pero entonces $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ compacto y por lo tanto es cerrado y acotado, pero claramente no es cerrado, una contradicción.

Así pues, G no es localmente compacto.

(ii) *Ahora probaremos que toda medida regular invariante bajo traslaciones debe ser idénticamente nula.*

Sea $\mu : \mathbf{B}_{\mathbb{Q}} \to [0, \infty]$ una medida regular invariante bajo traslaciones.

Comenzamos observando que para todo $B \subseteq \mathbb{Q}$ finito se tiene que $\mu(B) = \mu\{0\}\,|B|$. Para todo x, $\mu(\{x\}) = \mu(\{0\}+x) = \mu(\{0\})$ por la invariancia de la medida y en consecuencia

$$\mu(B) = \mu\left(\cup_{x \in B}\{x\}\right) = \sum_{x \in B} \mu(\{x\}) = \sum_{x \in B} \mu(\{0\}) = \mu(\{0\})|B| \tag{6.5}$$

Afirmamos que $\mu(\{0\}) = 0$. Supongamos que $\mu(\{0\}) > 0$.

Veamos que para todo boreliano B se cumple (6.5).

La identidad se da si B es finito. Cuando B es infinito entonces para todo $n \geq 1$ se tiene que existe $B_n \subseteq B$ de cardinalidad n; entonces

$$\mu(B) \geq \mu(B_n) = \mu(\{0\})|B_n| = \mu(\{0\})n$$

por lo que $\mu(B) = \infty$ y como $\mu(\{0\}) > 0$, $\mu(B) = \mu(\{0\})|B|$.

Ahora por regularidad $\mu(\{0\}) = \inf\{\mu(U) : 0 \in U, U$ abierto$\}$ y como $\mu(\{0\}) < \infty$ (al ser $\{0\}$ compacto) podemos obtener $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de abiertos que tienen al cero de tal forma que

$$\mu(\{0\}) = \lim_{n \downarrow \infty} \mu(U_n) = \lim_{n \downarrow \infty} \mu(\{0\})|U_n| = \mu(\{0\}) \lim_{n \downarrow \infty} |U_n|$$

pero como $\mu(\{0\}) > 0$ resulta que $1 = \lim_{n \downarrow \infty} |U_n|$ por lo que para alguna m, $|U_m| = 1$ pero $0 \in U_m$, así que $U_m = \{0\}$ i.e. $\{0\}$ es abierto lo cual es una contradicción. En conclusión debe tenerse que $\mu(\{0\}) = 0$, lo que termina la afirmacion.

Como consecuencia de la afirmación y (6.5) tenemos que todo subconjunto finito tiene medida cero, pero $\mathbb{Q}$ puede verse como unión creciente de subconjuntos finitos por lo que $\mu(\mathbb{Q})$ =0 i.e. μ es idénticamente cero.

6.4 Algunas propiedades de una medida de Haar

.

El último ejemplo de la sección anterior nos da cierta idea para probar la siguiente proposición.

Proposición 6.23. *Sea (G,τ) grupo topológico localmente compacto Hausdorff y $\mu : \mathbf{B}_G \to [0,\infty]$ una medida de Haar izquierda. Entonces: (G,τ) es discreto si y sólo si existe $x \in G$ tal que $\mu(\{x\}) > 0$.*

Demostración.

Primero observamos que para todo $B \in \mathbf{B}_G$ finito se tiene que $\mu(B) = \mu(\{e\})|B|$ (al igual que en el ejemplo 6.22)

$\Rightarrow$] *Supongamos que (G,τ) es discreto. Como μ es regular y no idénticamente nula tenemos que existe C compacto tal que $\mu(C) > 0$. Pero al ser (G,τ) discreto tenemos que C debe ser finito y por la observación previa tenemos que $\mu(\{e\})|C| > 0$ y en consecuencia $\mu(\{e\}) > 0$.*

$\Leftarrow$] *Supongamos que existe $x \in G$ tal que $\mu(\{x\}) > 0$; entonces*

$$\mu(\{e\}) = \mu(x^{-1}\{x\}) = \mu(\{x\}) > 0$$

Afirmamos que para todo $B \in \mathbf{B}_G$ se cumple $\mu(B) = \mu(\{e\})|B|$ (la prueba es igual que en el ejemplo 6.22).

Como $\mu(\{e\}) = \inf\{\mu(U) : e \in U \in \tau\}$ y como $\mu(\{e\}) < \infty$ (al ser $\{e\}$ compacto) se tiene que existe $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesión de elementos de $N(e)$ tal que

$$\mu(\{e\}) = \lim_{n\downarrow\infty} \mu(U_n) = \lim_{n\downarrow\infty} \mu(\{e\})|U_n| = \mu(\{e\}) \lim_{n\downarrow\infty} |U_n|$$

y como $\mu(\{e\}) > 0$, para algún m, $|U_m| = 1$ por lo que $U_m = \{e\}$, así $\{e\} \in \tau$ pero como δ_x (la multiplicación izquierda por x) es un homeomorfismo resulta que para todo $x \in G, \{x\} \in \tau$, i.e. (G,τ) es discreto. Q.E.D.

En $\mathbb{R}$ todo subconjunto abierto tiene medida positiva bajo la medida de Lebesgue. En grupos topológicos localmente compactos Hausdorff pasa lo mismo con una medida de Haar.

Proposición 6.24. *Sea (G,τ) grupo topológico localmente compacto Hausdorff y μ una medida de Haar izquierda. Entonces para todo abierto no vacío U se tiene que $\mu(U) > 0$.*

Demostración. Como μ no es idénticamente nula y por la regularidad existe C compacto con $\mu(C) > 0$.

Sea $U \in \tau$ no vacío. Por la compacidad de C existen $x_1, ..., x_n \in X$ tal que $\{x_iU : i = 1, ..., n\}$ es una cubierta de C y por la invariancia izquierda de μ se concluye que $\mu(C) \leq n\mu(U)$ por lo que $\mu(U) > 0$. *Q.E.D.*

Ahora veamos algunas relaciones entre el grupo topológico (G, τ) con el espacio de medida $(G, \mathbf{B}_G, \mu)$.

Proposición 6.25. *Sea (G, τ) un grupo topológico localmente compacto y μ una medida de Haar izquierda. Entonces μ es finita si y sólo si G es compacto.*

Demostración. Si G es compacto, por la regularidad μ es finita.

Supongamos que $\mu(G) < \infty$ y tomemos $C \subseteq G$ compacto de medida positiva (por ejemplo una vecindad compacta de la identidad). Tomemos $A \subseteq G$ tal que la familia $\{aC : a \in A\}$ sea ajena. Lo primero que notamos es que al tener el espacio medida finita la cardinalidad de A es finita y entonces por la invariancia de μ

$$\mu\left(\bigcup_{a\in A} aC\right) = \mu(C)|A| \leq \mu(G) < \infty$$

En conclusión, los subconjuntos A para los cuales $\{aC : a \in A\}$ es ajena tienen cardinalidad a lo más $\frac{\mu(G)}{\mu(C)}$ por lo que podemos tomar $A \subseteq G$ de cardinalidad máxima tal que $\{aC : a \in A\}$ sea disjunta. Notamos que para todo $x \in G$, xC debe intersectar a $\bigcup_{a\in A} aC$ (para no contradecir la elección de A) y por lo tanto $x \in (\bigcup_{a\in A} aC)C^{-1}$ así que $G \subseteq (\bigcup_{a\in A} aC)C^{-1}$ pero $\left(\bigcup_{a\in A} aC\right) C^{-1}$ es compacto (por la continuidad de la operación producto del grupo) por lo tanto G es compacto. *Q.E.D.*

Nota: Cada grupo topológico G compacto Hausdorff poseé una medida de Haar izquierda y como $0 < \mu(G) < \infty$ podemos tomar $\frac{1}{\mu(G)}\mu$ que también es una medida de Haar izquierda, así que dado un grupo compacto Hausdorff podemos tomar la medida normalizada de Haar izquierda.

A continuación mejoramos la Proposición 6.25.

Proposición 6.26. *Sea (G, τ) un grupo topológico localmente compacto Hausdorff y μ una medida de Haar izquierda.*

$(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ es σ-finito si y sólo si (G, τ) es σ-compacto.

Al igual que antes, por la regularidad de μ, si el espacio es σ-compacto entonces μ es σ-finita.

Supongamos que $(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ es σ-finito, i.e. existe $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de borelianos de medida finita tal que $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Obsérvese que podemos tomar U_n abierto que contenga a E_n de medida finita (pues $\mu(E_n)$ es el ínfimo de $\mu(U)$ con U abierto que contiene a E_n) y por lo tanto $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

Sea $H \subseteq G$ subgrupo abierto cerrado, σ-compacto (ver Proposición 5.14) y sean $\{H_i\}_{i\in I}$ las clases de equivalencia módulo H. Entonces cada H_i es abierta, cerrada y σ-compacta pues son homeomorfas a H (recordamos que cada H_i es de la forma a_iH_i, para alguna $a_i \in G$).

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $I_n = \{i \in I : U_n \cap H_i \neq \emptyset\}$ y para cada $r \in (0, \infty) \cap \mathbb{Q}$ tomemos $I_n(r) = \{i \in I_n : \mu(U_n \cap H_i) > r\}$. Afirmamos que $I_n(r)$ es finito, pues de lo contrario para todo natural m existen $i_1, ..., i_m \in I_n(r)$ distintos. Tomemos la familia $\{U_n \cap H_i : i \in \{i_1, ..., i_m\}\}$. Como los i_j son distintos, la familia es ajena y como cada $i_j \in I_n(r)$ tenemos

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{m} U_n \cap H_{i_j}\right) = \sum_{j=1}^{m} \mu(U_n \cap H_{i_j}) \geq mr$$

Por otro lado $\bigcup_{j=1}^{n} U_n \cap H_{i_j} \subseteq U_n$ así que de la desigualdad anterior tenemos que $\mu(U_n) \geq mr$ y esto se vale para todo m natural lo que contradice que la medida de U_n sea finita. Entonces $I_n(r)$ es finito.

Notamos que $I_n = \bigcup\{I_n(r) : r \in (0,\infty) \cap \mathbb{Q}\}$. Para esto, dado $i \in I_n$, se tiene que $U_n \cap H_i$ es abierto no vacío por lo que $\mu(U_n \cap H_i) > 0$ (por la Proposición 6.24) por lo que existe $r > 0$ racional tal que $\mu(U_n \cap H_i) > r$. En consecuencia I_n es contable.

Sea $J = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$, ya que cada I_n es contable tenemos que J es contable.

Afirmamos que $G \subseteq \bigcup_{i\in J} H_i$. Razón: Sea $a \in G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, entonces $a \in U_n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$. Pero $\{H_i\}_{i\in I}$ es una partición de G así que también existe $i \in I$ tal que $a \in H_i$ y en consecuencia $a \in U_n \cap H_i$ pero entonces $i \in I_n \subseteq J$ así que $a \in \bigcup_{i\in J} H_i$.

Por último como cada H_i es σ-compacto se concluye que G es σ-compacto. *Q.E.D.*

6.5 Unicidad de la medida de Haar

A partir de esta sección y en los capítulos posteriores, trabajaremos con grupos topológicos localmente compactos Hausdorff que tengan una base numerable para su topología (es decir, segundo numerable). La razón para trabajar con estos grupos es, principalmente para poder usar el Teorema de Fubini.

Dado un grupo topológico localmente compacto Hausdorff segundo numerable, no existe una única medida de Haar izquierda, pues si μ es una medida de Haar izquierda entonces cualquier múltiplo positivo también lo es. Es más, probaremos que bajo las hipótesis antes mencionadas, los multiplos son las únicas medidas izquierdas de Haar.

Para comparar las medidas usamos el Teorema de Fubini, para lo cual recordamos algunas definiciones.

Definición 6.27. *Sea (X,τ) un espacio topológico localmente compacto Hausdorff. La σ-álgebra producto de $\mathbf{B}_X$, denotada por $\mathbf{B}_X \otimes \mathbf{B}_X$ es la σ-álgebra generada por los rectángulos borel medibles; es decir*

$$\mathbf{B}_X \otimes \mathbf{B}_X = \sigma(\{A \times B : A, B \in \mathbf{B}_X\})$$

Definición 6.28. *Sea X un conjunto no vacío. Un π-sistema en X es una familia de subconjuntos de X que es cerrada bajo intersecciones finitas y un λ-sistema $\mathcal{L}$ es una familia de subconjuntos que cumple*

1. $X \in \mathcal{L}$

2. *Si* $A, B \in \mathcal{L}$ *con* $B \subset A$ *entonces* $A \backslash B \in \mathcal{L}$

3. *Si* $\{A_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ *es una sucesión creciente de elementos de* $\mathcal{L}$ *entonces* $\cup_{n\in\mathbf{N}} A_n \in \mathcal{L}$

Lema 6.29. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico localmente compacto Hausdorff.*

$$\mathbf{B}_X \otimes \mathbf{B}_X = \sigma(\{U \times V : U, V \in \tau\}) \tag{6.6}$$

Demostración. Sea S la σ-álgebra del lado derecho en (6.6).

Como para cualesquiera $U, V \in \tau$, $U \times V \in \mathbf{B}_X \otimes \mathbf{B}_X$, $S \subseteq \mathbf{B}_X \otimes \mathbf{B}_X$.

Para probar la otra contención es suficiente probar que dados cualesquiera dos borelianos A y B, $A \times B \in S$.

Para todo $U \in \tau$ sea

$$\mathcal{L}_U = \{E \subseteq X : U \times E \in S\}$$

Probemos que $\mathcal{L}_U$ es un λ-sistema para toda $U \in \tau$.

Sea $U \in \tau$ fijo y arbitrario.

Como X es abierto y U también $X \in \mathcal{L}_U$.

Sean $E, F \in \mathcal{L}_U$ con $E \subseteq F$. Entonces $(U \times F) \setminus (U \times E) \in S$, pero $(U \times F) \setminus (U \times E) = U \times (F \setminus F)$ por lo que $F \setminus E \in \mathcal{L}_U$.

Sea $(E_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una sucesión creciente de elementos de $\mathcal{L}_U$. Entonces $U \times E_n \in S$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por lo que

$$U \times \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U \times E_n \in S$$

y entonces $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} E_n \in \mathcal{L}_U$. Esto termina la prueba de que $\mathcal{L}_U$ es un λ-sistema.

Observamos que al ser U abierto, $\tau \subseteq \mathcal{L}_U$. Ahora ya que τ es un π-sistema y $\mathcal{L}_U$ es un λ-sistema, por el Lema de las clases monótonas (ver apéndice B.4) tenemos

$$\mathbf{B}_X = \sigma(\tau) \subseteq \mathcal{L}_U \tag{6.7}$$

Ahora sea $B \in \mathbf{B}_X$ fijo y arbitrario y sea

$$\mathcal{L}_B = \{E \subseteq X : E \times B \in S\}$$

Afirmamos que $\mathcal{L}_B$ es un λ-sistema.

Tomando $U = X$ en (6.7) tenemos que $X \in \mathcal{L}_B$. La prueba de que $\mathcal{L}_B$ es cerrada bajo diferencias propias y uniones crecientes es similar a la de $\mathcal{L}_U$ por lo que la omitimos.

Al ser $U \in \tau$ arbitraria en (6.7) concluimos que $\tau \subseteq \mathcal{L}_B$ y por el Lema de las clases monótonas tenemos

$$\mathbf{B}_X = \sigma(\tau) \subseteq \mathcal{L}_B$$

por lo tanto dado $A \in \mathbf{B}_X$, $A \in \mathcal{L}_B$ es decir $A \times B \in S$. *Q.E.D.*

Proposición 6.30. *Sea (X,τ) espacio topológico localmente compacto Hausdorff segundo numerable y λ una medida regular sobre los borelianos de X. Entonces:*

1. $\mathbf{B}_{X\times X} = \mathbf{B}_X \otimes \mathbf{B}_X$.
2. $(X, \mathbf{B}_X, \lambda)$ *es σ-finito.*

Demostración.
Prueba de 1.
Por τ_p denotamos la topología producto de $X \times X$. Por definición, $\mathbf{B}_{X\times X}$ es la σ-álgebra generada por τ_p.
$\supseteq$] Por (6.6)

$$\mathbf{B}_X \otimes \mathbf{B}_X = \sigma(\{U \times V : U, V \in \tau\})$$

pero $\{U \times V : U, V \in \tau\} \subseteq \tau_p$ así que $\sigma(\{U \times V : U, V \in \tau\}) \subseteq \sigma(\tau_p)$ i.e.

$$\mathbf{B}_X \otimes \mathbf{B}_X \subseteq \mathbf{B}_{X\times X}$$

Note que esta contención siempre se da, sin importar el espacio X.
$\subseteq$] Sea $\mathcal{B}$ una base numerable para la topología de X, entonces $\{U \times V : U, V \in \mathcal{B}\}$ es una base numerable para τ_p; i.e. todo abierto de $X \times X$ es unión numerable de elementos de $\{U \times V : U, V \in \mathcal{B}\}$ en consecuencia

$$\tau_p \subseteq \sigma(\{U \times V : U, V \in \mathcal{B}\})$$

pero

$$\sigma(\{U \times V : U, V \in \mathcal{B}\}) \subseteq \sigma(\{U \times V : U, V \in \tau\}) = \mathbf{B}_X \otimes \mathbf{B}_X$$

por lo que $\tau_p \subseteq \mathbf{B}_X \otimes \mathbf{B}_X$ de donde concluimos que $\mathbf{B}_{X\times X} \subseteq \mathbf{B}_X \otimes \mathbf{B}_X$.
Prueba de 2.
Si probamos que todo abierto es unión numerable de compactos, por la regularidad tenemos que todo abierto es unión numerable de conjuntos de medida finita bajo λ, lo que prueba que el espacio es σ-finito.
Así las cosas, probemos que todo abierto es unión numerable de compactos. Sea $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base para τ y $U \in \tau$. Usando que el espacio es localmente compacto Hausdorff para todo $x \in U$ existe $V_x \in \tau$ tal que $x \in V_x$, $\bar{V}_x \subseteq U$ y $\bar{V}_x$ compacto (ver Lema A.7 de apéndice). Pero como $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base existe U_j tal que $x \in U_j \subseteq V_x$ (note que $\bar{U}_j \subseteq \bar{V}_x \subseteq U$ por lo que $\bar{U}_j$ es compacto). En conclusión para todo $x \in U$ existe U_j tal que $x \in U_j \subseteq \bar{U}_j \subseteq U$, $\bar{U}_j$ compacto, de modo que U es unión numerable de compactos. *Q.E.D.*
Durante esta sección μ y ν denotan dos medidas de Haar izquierdas fijas.
Veamos una consecuencia de la Proposición 6.30. Ya que $(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ y $(G, \mathbf{B}_G, \nu)$ son σ-finitos es posible tomar la medida producto $\mu \otimes \nu$ definida sobre $\mathbf{B}_{G\times G}$.
Recordemos que dado $L \in \mathbf{B}_{G\times G}$

$$(\mu \otimes \nu)(L) = \int \nu(L_x) d\mu(x) = \int \mu(L^y) d\nu(y)$$

donde $L_x = \{y \in G : (x,y) \in L\}$ y $L^y = \{x \in G : (x,y) \in L\}$.

Ahora nuestro propósito principal será probar el siguiente resultado.

Teorema 6.31. *Sea (G,τ) un grupo topológico localmente compacto Hausdorff segundo numerable y sean μ y ν medidas de Haar izquierdas. Dado $C \subseteq G$ compacto con interior no vacío y $f : \mathbf{B}_G \to \mathbb{R}$ medible no negativa se tiene que*

$$\int f(x) d\mu(x) = \mu(C) \int \frac{f(y^{-1})}{\nu(Cy)} d\nu(y) \tag{6.8}$$

Antes de demostrar el Teorema 6.31 necesitamos probar algunos lemas previos, interesantes por sí mismos.

Lema 6.32. *Sean $S,T : G \times G \to G \times G$ dadas por $S(x,y) = (x, xy)$ y $T(x,y) = (yx, y)$. Note que S y T son homeomorfismos, pues ellas y sus inversas ($S^{-1}(x,y) = (x, x^{-1}y), T^{-1}(x,y) = (y^{-1}x, y)$) son continuas al ser (G,τ) grupo topológico, por lo que también son $\mathbf{B}_{G\times G}$-medibles.*

Para todo $L \in \mathbf{B}_{G\times G}$ se tiene

$$\begin{array}{ll} (\mu\otimes\nu)(S(L)) = (\mu\otimes\nu)(L) & (\mu\otimes\nu)(S^{-1}(L)) = (\mu\otimes\nu)(L) \\ (\mu\otimes\nu)(T(L)) = (\mu\otimes\nu)(L) & (\mu\otimes\nu)(T^{-1}(L)) = (\mu\otimes\nu)(L) \end{array}$$

Demostración.

Empezamos probando la parte referente a S y a S^{-1}.

Observamos que $(S(L))_x = x(L_x)$. Para probarlo notemos que y está en $(S(L))_x$ si y sólo si $(x,y) \in S(L)$ y al ser S biyección esto pasa si y sólo si $S^{-1}(x,y) = (x, x^{-1}y) \in L$, es decir, si y sólo si $x^{-1}y \in L_x$ ó equivalentemente si $y \in x(L_x)$. En conclusión $(S(L))_x = x(L_x))$.

Por construcción de $\mu \otimes \nu$ y la invariancia izquierda de ν tenemos

$$(\mu\otimes\nu)(S(L)) = \int \nu((S(L))_x)\mu(x) = \int \nu(x(L_x))\mu(x) = \int \nu(L_x)\mu(x) = (\mu\otimes\nu)(L)$$

De manera similar, tenemos que $(S^{-1}[L])_x = x^{-1}(L_x)$ pues $y \in (S^{-1}[L])_x$ si y sólo si $S(x,y) = (x, xy) \in L$ ó, lo que es equivalente, si $y \in x^{-1}(L_x)$. Por la invariancia de ν obtenemos

$$\begin{aligned} (\mu\otimes\nu)(S^{-1}(L)) = \int \nu((S^{-1}(L))_x)\mu(x) &= \int \nu(x^{-1}(L_x))\mu(x) \\ &= \int \nu(L_x)\mu(x) = (\mu\otimes\nu)(L) \end{aligned}$$

La prueba para T y T^{-1} es similar usando las identidades $(T[L])^y = y(L^y)$ y $(T^{-1}[L])^y = y^{-1}(L^y)$. *Q.E.D.*

El Lema 6.32 puede reescribirse mediante la siguiente definición.

Definición 6.33. *Sea (X, S, λ) un espacio de medida. Una función $Q : X \to X$ S-medible preserva a λ si cumple que para todo $A \in S$, $\lambda(Q^{-1}(A)) = \lambda(A)$.*

El Lema 6.32 nos dice que S, T, T^{-1} y S^{-1} preservan a $\mu \otimes \nu$.

Las transformaciones que preservan medida tienen las siguientes propiedades que usaremos frecuentemente.

Lema 6.34. *Sea (X, S, λ) un espacio de medida y $Q, Q_1 : X \to X$ funciones S-medibles, que preservan a λ.*

1. *$Q \circ Q_1$ preserva a λ. Esto nos dice que las funciones que preservan a λ son un grupo bajo la composición.*

2. *Si f es una función S-medible no negativa entonces $\int f d\lambda = \int f \circ Q d\lambda$.*

3. *Sea $f : X \to \mathbb{C}$ una función $\mathbf{B}_X$-medilbe. Entonces*

$$\int |f| d\lambda = \int |f \circ Q| d\lambda.$$

Demostración. Para probar 1, tenemos que si Q y Q_1 preservan a λ entonces

$$\lambda((Q \circ Q_1)^{-1}(A)) = \lambda(Q_1^{-1}(Q^{-1}(A))) = \lambda(Q^{-1}(A)) = \lambda(A)$$

Prueba de 2.
Procedemos por casos.
Caso 1: $f = \chi_A$ para algún A en S. Como $f(T(x)) = \chi_{T^{-1}(A)}(x)$ entonces

$$\int f \circ Q d\lambda = \lambda(T^{-1}(A)) = \lambda(A) = \int f d\lambda$$

Caso 2: f es función simple no negativa. Entonces

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$$

para algunos números no negativos a_i y algunos A_i en S. Entonces $f \circ T = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{T^{-1}(A_i)}$, así que

$$\int f \circ Q d\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(T^{-1}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(A_i) = \int f d\lambda$$

Caso general: Tomemos $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones S-simples no negativas crecientes tales que $s_n \leq f$ y $\lim_n s_n = f$. Entonces por el Teorema de la convergencia monótona

$$\lim_n \int s_n d\lambda = \int f d\lambda$$

Pero $(s_n \circ T)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones S-simples no negativas, crecientes con $s_n \circ T \leq f \circ T$ y con $\lim_n s_n \circ T = f \circ T$, así que de nuevo por el Teorema de la convergencia monótona

$$\lim_n \int s_n \circ T d\lambda = \int f \circ T d\lambda$$

pero por el caso dos, $\int s_n \circ T d\lambda = \int s_n d\lambda$, concluyendo que $\int f \circ T d\lambda = \int f d\lambda$.

Prueba de 3.

Tome $h(x) = |f(x)|$. Entonces h es medible y no negativa. El resultado se obtiene de aplicar el inciso anterior a h. *Q.E.D.*

Lema 6.35. *Para todo boreliano B de medida positiva existe un boreliano $E \subseteq B^{-1}$ tal que $\mu(E) > 0$ y por lo tanto $\mu(B^{-1}) > 0$.*

Demostración.

Tomemos $Q = S^{-1}RS$ con R dada por $R(x,y) = (y,x)$ (entonces R es homeomorfismo y $R = R^{-1}$). Como S, S^{-1} y R son continuas resulta que Q es homeomorfismo y por lo tanto $\mathbf{B}_{G\times G}$-medible. Observamos que $Q(a,b) = (ab, b^{-1})$ y en consecuencia $Q = Q^{-1}$.

Empezamos observando que Q preserva a $\mu \otimes \mu$. Por la proposición 6.34, S y S^{-1} preservan a $\mu \otimes \mu$ entonces por la Proposición 6.32 es suficiente probar que R la preserva. Pero como $(R[L])_x = L^x$ tenemos que

$$(\mu \otimes \mu)(R[L]) = \int \mu(R[L])_x)\mu(x) = \int \mu(L^x)\mu(x) = (\mu \otimes \mu)(L).$$

Lo segundo que probamos es que para cualesquiera $A, B \in \mathbf{B}_G$,

$$(Q(A \times B))_x = B^{-1} \cap (x^{-1}A) \tag{6.9}$$

La razón de esto es como sigue: $y \in (Q(A \times B))_x$ si y sólo si $(x,y) \in Q(A \times B)$ pero $Q = Q^{-1}$ así que esto último es equivalente a que $(xy, y^{-1}) \in A \times B$ es decir $xy \in A, y^{-1} \in B$ ó equivalentemente $y \in x^{-1}A, y \in B^{-1}$.

Ahora, sean $A, B \in \mathbf{B}_X$ tales que $\mu(A)\mu(B) > 0$. Como Q^{-1} preserva a $\mu \otimes \mu$,

$$0 < \mu(A)\mu(B) = (\mu \otimes \mu)(A \times B) = (\mu \otimes \mu)(Q(A \times B))$$

por otro lado por (6.9) tenemos

$$(\mu \otimes \mu)(Q(A \times B)) = \int \mu\left((Q(A \times B))_x\right)\mu(x) = \int \mu\left(B^{-1} \cap (x^{-1}A)\right)\mu(x)$$

por lo que

$$0 < \mu(A)\mu(B) = \int \mu\left(B^{-1} \cap (x^{-1}A)\right)\mu(x), \tag{6.10}$$

de modo que la función $x \mapsto \mu\left(B^{-1} \cap (x^{-1}A)\right)$ no es idénticamente nula por lo que existe $x_0 \in G$ tal que

$$\mu\left(B^{-1} \cap (x_0^{-1}A)\right) > 0$$

Para terminar, si $A = B$ entonces tomamos $E = B^{-1} \cap (x_0^{-1}B)$. *Q.E.D.*
Veamos una consecuencia de (6.10).

Proposición 6.36. *Sea $B \in \mathbf{B}_X$ con $\mu(B) > 0$. Entonces BB^{-1} contiene un boreliano de medida positiva.*

Si $B \in \mathbf{B}_G$ tiene medida positiva también B^{-1} (por la Proposición 6.35) por lo que de (6.10)

$$0 < \mu(B^{-1})\mu(B) = \int \mu\left(B \cap (x^{-1}B)\right) \mu(x)$$

de donde obtenemos que $\left\{x \in G : \mu\left(B \cap (x^{-1}B)\right) > 0\right\}$ tiene medida positiva, pero

$$\{x \in G : \mu(B \cap (x^{-1}B)) > 0\} \subseteq BB^{-1} \tag{6.11}$$

Para probar (6.11) supongamos que $\mu\left(B \cap (x^{-1}B)\right) > 0$. En consecuencia $B \cap (x^{-1}B)$ es no vacío y existe $b \in B \cap (x^{-1}B)$. Pero entonces $b = x^{-1}b'$ para alguna $b' \in B$ y así $x = b'b^{-1} \in BB^{-1}$. En conclusión, dado B boreliano de medida positiva, el conjunto BB^{-1} contiene un boreliano de medida positiva. *Q.E.D.*
Mas adelante veremos como mejorar lo anterior.

Continuamos con otros lemas necesarios para probar el Teorema 6.31

Lema 6.37. *Para todo boreliano B de medida positiva y para todo $y \in G$ se tiene que By tiene medida positiva.*

Demostración. Tomemos $B \in \mathbf{B}_G$ con $\mu(B) > 0$ y $y \in G$.
Por el Lema 6.35 existe $E \in \mathbf{B}_G$ de medida positiva tal que $E \subseteq B^{-1}$. Por la invariancia de μ, $\mu(y^{-1}E) = \mu(E) > 0$ así que de nuevo por el Lema 6.35 existe $F \in \mathbf{B}_G$ de medida positiva tal que $F \subseteq (y^{-1}E)^{-1} = E^{-1}y$ pero $E \subseteq B^{-1}$ así que $F \subseteq By$ y entonces By tiene medida positiva. *Q.E.D.*

Lema 6.38. *Dado $B \in \mathbf{B}_G$ la función $x \mapsto \nu(Bx)$ es $\mathbf{B}_G$-medible.*

Demostración. Sea $P : G \times G \to G \times G$ dada por $P(x, y) = (x, yx)$. Notamos que P es invertible y que $P^{-1}(x, y) = (x, yx^{-1})$. Al ser (G, τ) grupo topológico tenemos que P y P^{-1} son continuas y por lo tanto $\mathbf{B}_{G\times G}$-medibles.
Observación: Para $L \in \mathbf{B}_G \otimes \mathbf{B}_G$, $(P(L))_x = (L_x)x$. Razón: al ser P una biyección, que $y \in (P(L))_x$ es equivalente a que $P^{-1}(x, y) = (x, yx^{-1}) \in L$ es decir $yx^{-1} \in L_x$ ó equivalentemente $y \in (L_x)x$.
Tomemos $L = G \times B$. Ya que el espacio $(G, \mathbf{B}_G, \nu)$ es σ-finito tenemos que $x \mapsto \nu((P[L])_x)$ es medible (ver apéndice $B.6$), pero $(P[L])_x = (L_x)x = Bx$. Entonces, $x \mapsto \nu(Bx)$ es medible. *Q.E.D.*

Ahora probamos el Teorema 6.31.

Prueba del Teorema 6.31:

Tomemos C compacto con interior no vacío. Entonces, $\nu(C) > 0$ (ver Proposición 6.24)

Por el Lema 6.38, la función $y \mapsto \nu(Cy)$ es medible pero como Cy es compacto resulta esta función que no toma valores extendidos y además por el Lema 6.37 es positiva (ya que $\nu(C) > 0$). En consecuencia la función $x \mapsto \frac{1}{\nu(Cx)}$ está bien definida y es medible positiva.

Sea f, $\mathbf{B}_G$-medible positiva y tomemos $g(y) = \frac{f(y^{-1})}{\nu(Cy)}$, entonces g es $\mathbf{B}_G$-medible y positiva.

Debemos probar que $\int f(x)\mu(x) = \mu(C)\int g(y)\nu(y)$.

Como g es medible no negativa, por el Teorema de Tonelli (ver B.8 en apéndice) podemos escribir

$$\mu(C)\int g(y)d\nu(y) = \int \chi_C(x)g(y)d(\mu\otimes\nu)(x,y) \tag{6.12}$$

Definamos $h : G\times G \to \mathbb{R}$ por $h(x,y) = \chi_C(x)g(y)$ entonces h es $\mathbf{B}_{G\times G}$-medible y no negativa. Por (6.12) es suficiente probar que $\int h(x,y)d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int f(x)d\mu(x)$.

Comenzamos observando que

$$h(yx,x^{-1}) = \chi_C(yx)g(x^{-1}) = \chi_{Cx^{-1}}(y)\frac{f(x)}{\nu(Cx^{-1})}$$

por lo que al integrar en ambos lados y usar Tonelli obtenemos

$$\begin{aligned}\int h(yx,x^{-1})d(\mu\otimes\nu)(x,y) &= \int \chi_{Cx^{-1}}(y)\frac{f(x)}{\nu(Cx^{-1})}d\nu(y)d\mu(x)\\ &= \int f(x)d\mu(x) \end{aligned}\tag{6.13}$$

Por otro lado si T y S^{-1} son como en la Proposición 6.32 tenemos que $S^{-1}T$ preserva a $\mu\otimes\mu$ y $S^{-1}T(x,y) = (yx,x^{-1})$, por lo que

$$\int h(yx,x^{-1})d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int h(x,y)d\mu\otimes\mu(x,y) \tag{6.14}$$

en consecuencia de (6.13) y de (6.14) obtenemos que $\int h(x,y)d\mu\otimes\mu(x,y) = \int f(x)d\mu(x)$. *Q.E.D.*

Corolario 6.39. *Sea (G,τ) un grupo topológico localmente compacto Hausdorff segundo numerable. Cualesquiera dos medidas de Haar izquierdas difieren por una constante positiva.*

Demostración. Tomemos μ y ν dos medidas de Haar izquierdas.

Sea $C \subseteq G$ compacto con interior no vacío. El Teorema 6.31 nos dice que el cociente $\frac{1}{\mu(C)}\int f(x)d\mu(x)$ no depende de μ por lo que $\frac{1}{\mu(C)}\int f(x)d\mu(x) =$

$\frac{1}{\nu(C)}\int f(x)d\nu(x)$, entonces si tomamos $f = \chi_B$ (con $B \in \mathbf{B}_G$) obtenemos que $\mu(B) = \left(\frac{\mu(C)}{\nu(C)}\right)\nu(B)$; i.e. $\mu = c\nu$ con $c = \left(\frac{\mu(C)}{\nu(C)}\right)$ una constante positiva. *Q.E.D.*

Nota: Se puede probar que la hipótesis de que el grupo sea segundo numerable no es necesaria pero entonces necesitamos la ayuda del Teorema de representación de Riesz para poder obtener una medida producto sobre los borelianos de $G\times G$ y algunos resultados sobre integración sobre espacios topológicos localmente compactos (ver [Cohn]).

Hasta aquí llegan los resultados referentes a la medida de Haar, pero antes de terminar aprovechamos parte de lo que hemos probado para demostrar el Teorema de Steinhauss.

Lema 6.40. *Para todo $B \in \mathbf{B}_G$, $\mu(B) = \sup\{\mu(C) : C \subseteq B, C \text{ compacto}\}$*

Demostración. Tomemos $B \in \mathbf{B}_G$.

Caso 1: $\mu(B) < \infty$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por la regularidad de μ existe U abierto que contiene a B tal que $\mu(U) < \mu(B) + \frac{\varepsilon}{2}$ y como la medida de B es finita resulta que $\mu(U\backslash B) < \frac{\varepsilon}{2}$. De manera similar (ya que los compactos tienen medida finita) podemos tomar $C \subseteq U$ compacto tal que $\mu(U\backslash C) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por otro lado ya que $\mu(U\backslash B) < \frac{\varepsilon}{2}$ existe $V \in \tau$ tal que $U\backslash B \subseteq V$ y

$$\mu(V\backslash(U\backslash B)) = \mu\left((V\backslash U)\bigcup(B\cap V)\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Consideremos $D = C\backslash V$ entonces D es un conjunto compacto y además $D \subseteq B$ ya que

$$D = C\backslash V \subseteq U\backslash V \subseteq B$$

Afirmamos que $\mu(B\backslash D) < \varepsilon$. Para esto notamos

$$B\backslash D = (B\backslash C)\bigcup(B\cap V) \subseteq (U\backslash C)\bigcup(V\backslash U)\bigcup(B\cap V)$$

pero $\mu(U\backslash C)$, $\mu((V\backslash U)\bigcup(B\cap V)) < \frac{\varepsilon}{2}$ con lo que terminamos la demostración de la afirmación.

Como la medida de D es finita de lo anterior se sigue que $\mu(B) - \varepsilon < \mu(D)$. Al ser ε arbitraria se concluye el caso 1.

Caso 2: $\mu(B) = \infty$.

Como $(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ es $\sigma-$finito B puede escribirse como la unión creciente de una sucesión $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con B_n de medida finita, entonces $\lim_n \mu(B_n)$ es infinito, por lo que dada $M > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(B_n) > M$. Pero por el caso 1

$$\mu(B_n) = \sup\{\mu(C) : C \subseteq B_n, C \text{ compacto}\}$$

por lo que existe $D \subseteq B_n \subseteq B$ compacto tal que $\mu(B_n) \geq \mu(D) > M$ y al ser $M > 0$ arbitraria se concluye que

$$\sup\{\mu(C) : C \subseteq B, C \text{ compacto}\} = \infty = \mu(B)$$

Teorema 6.41 (Teorema de Steinhauss). *Para todo boreliano B de medida positiva, BB^{-1} contiene una vecindad de la identidad.*

Demostración. Sea $B \in \mathbf{B}_G$ de medida positiva. Por (6.11) tenemos que

$$\{x \in G : \mu(B \cap (x^{-1}B)) > 0\} \tag{6.15}$$

está contenido en BB^{-1}. Para probar el Teorema de Steinhauss probaremos que e (el neutro del grupo) es punto interior de (6.15).

Por el Lema 6.40 existe $C \subseteq B$ compacto de medida positiva.

Por la regularidad existe $U \in \tau$ tal que $C \subseteq U$ y $\mu(U) < 2\mu(C)$.

Por el Lema 5.7 podemos tomar $V \in \tau$ vecindad de la identidad tal que $V \subseteq U$.

Afirmamos que si $x \in V$ entonces $\mu(C \cap (xC)) > 0$, lo cual probaremos por contradicción. Supongamos que existe $x \in V$, de tal forma que $C \cap (xC)$ tiene medida cero. Entonces usando

$$\mu(C \bigcup (xC)) = \mu(C) + \mu(xC) - \mu(C \cap (xC))$$

y la invariancia de μ tenemos

$$\mu(C \bigcup (xC)) = 2\mu(C) \tag{6.16}$$

Por otro lado, $C \bigcup (xC) \subset C \bigcup VC \subseteq U$, por lo que $\mu(C \bigcup (xC)) \leq \mu(U)$. Pero entonces de (6.16) concluimos que $2\mu(C) \leq \mu(U)$, lo que contradice la elección de U.

En conclusión, V es una vecindad de e contenida en

$$\{x \in G : \mu(B \cap (x^{-1}B)) > 0\}$$

es decir, e es un punto interior. *Q.E.D.*

Capítulo 7

Función modular

La función modular es lo que nos permite pasar de una medida izquierda de Haar a una medida derecha de Haar. Veremos algunas condiciones para que las medidas izquierdas y derechas coincidan, las cuales serán útiles para poder definir una involución en $L_1(G)$ (cuando el grupo es conmutativo).

Tomemos (G, τ) un grupo topológico localmente compacto Hausdorff segundo numerable y μ una medida izquierda de Haar. Para toda $a \in G$ la traslación derecha por a ($\delta_a(x) = xa$), es un homeomorfismo, por lo que si definimos $\mu_a(B) = \mu(\delta_a(B)) = \mu(Ba)$ para todo boreliano B de G obtenemos una medida regular (Lema 6.20) que claramente es invariante bajo traslaciones izquierdas. Por la unicidad de la medida de Haar tenemos que existe un único número positivo denotado $\Delta(a)$ de tal forma que $\mu_a = \Delta(a)\mu$. El número $\Delta(a)$ no depende de la medida μ con la que comenzamos, pues si ν es otra medida izquierda de Haar tenemos $\nu = c\mu$ para algún número positivo c y entonces $\nu_a = c\mu_a = c\Delta(a)\mu = \Delta(a)\nu$.

Definición 7.1 (Función modular). *La función $\Delta : G \to (0, \infty)$ se conoce como función modular de G.*

Antes de comenzar recordaremos algunas definiciones.

Definición 7.2.

1. *Una función $\mathbf{B}_G$-medible $f : G \to \mathbb{R}$, se llama <u>integrable con respecto a μ</u> ó <u>μ-integrable</u>, si $\int |f| d\mu < \infty$. Por $\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ denotamos al conjunto de funciones μ-integrables que toman valores reales.*

2. *Una función $\mathbf{B}_G$-medible $f : G \to \mathbb{C}$ se llama <u>integrable con respecto a μ</u> ó <u>μ-integrable</u> si y sólo si el módulo de f ($|f|$) es μ integrable; es decir, $\int |f|\, d\mu$ es finita. Por $\mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ denotamos las funciones integrables respecto a μ que toman valores complejos.*

Notas: Recordamos que $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ si y sólo si las integrales de la parte positiva (f^+) y la parte negativa (f^-) son finitas; además $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ si y sólo si la parte real de f ($Re(f)$) y la parte imaginaria de f ($Im(f)$) están en $\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ (ver [Cohn]).

Enseguida enunciamos algunas propiedades de la función modular.

Proposición 7.3. *Sean (G,τ) un grupo topológico localmente compacto Hausdorff segundo numerable y μ una medida izquierda de Haar. Entonces*

1. *Δ es homomorfismo de grupos entre G y el grupo multiplicativo $(0,\infty)$.*

2. *$\Delta : G \to (0,\infty)$ es continua.*

3. *El centro $(z(G))$, el conmutador $(c(G))$ y la torsión $(t(G))$ de G están contenidos en el núcleo de Δ.*

4. *Si ν es una medida derecha de Haar entonces para todo boreliano B se tiene que*
$$\nu(xB) = \frac{1}{\Delta(x)}\nu(B)$$

5. *Dada $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbf{C}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ ó f medible no negativa, $B \in \mathbf{B}_G$ y $y \in G$ se tiene*
$$\int_{By} f(x)d\mu(x) = \Delta(y)\int_B f(xy)d\mu(x) \tag{7.1}$$

6. *Dada $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbf{C}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ ó f medible no negativa y B boreliano, se tiene que*
$$\int_{B^{-1}} f(x)d\mu(x) = \int_B \frac{f(x^{-1})}{\Delta(x)}d\mu(x) \tag{7.2}$$

Demostración.
Prueba de 1.
Es claro que $\Delta(e) = 1$. Tomemos $C \subseteq G$ compacto con interior no vacío (entonces $0 < \mu(C) < \infty$). Notamos que
$$\Delta(xy)\mu(C) = \mu(C(xy)) = \mu((Cx)y) = \Delta(y)\mu(Cx) = \Delta(y)\Delta(x)\mu(C)$$
por lo que cancelando $\mu(C)$ obtenemos que $\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$.
Como consecuencia tenemos que $1 = \Delta(x)\Delta(x^{-1})$ por lo que $\Delta(x^{-1}) = \Delta(x)^{-1}$.
Prueba de 2.
Es suficiente probar que Δ es continua en e. Razón: Supongamos que Δ es continua en e, sea $x \in G$. Probemos la continuidad en x:
Sea $\varepsilon > 0$. Debemos probar la existencia de una vecindad U de x, tal que si $y \in U$ entonces $|\Delta(x) - \Delta(y)| < \varepsilon$.
Por la continuidad de Δ en e existe $V \in N(e)$ tal que si $y \in V$ entonces $|\Delta(y) - 1| < \frac{\varepsilon}{\Delta(x)}$.
Tomemos $U = xV$; entonces U es una vecindad de x. Además si tomamos $y \in U$, $y = xz$ para alguna $z \in V$, por lo que $|\Delta(z) - 1| < \frac{\varepsilon}{\Delta(x)}$ de donde por

la multiplicatividad de Δ se tiene $|\Delta(zx) - \Delta(x)| = |\Delta(y) - \Delta(x)| < \varepsilon$, lo cual termina la demostración de la continuidad en x.

Ahora queremos demostrar que Δ es continua en e. Tomemos C compacto con interior no vacío y $\varepsilon > 0$. Por la regularidad de μ existe U abierto con $C \subseteq U$, tal que $\mu(U) < (1+\varepsilon)\mu(C)$. Ahora sea V vecindad simétrica de e tal que $CV \subseteq U$ (ver Proposición 5.7).

Afirmamos que si $x \in V$ entonces $|\Delta(x) - 1| < \varepsilon$.

Tomemos $x \in V$, entonces $Cx \subseteq U$ por lo que

$$\Delta(x)\mu(C) = \mu(Cx) \leq \mu(U) < (1+\varepsilon)\mu(C)$$

de donde obtenemos

$$\Delta(x) - 1 < \varepsilon \tag{7.3}$$

Si ahora tomamos $x = y^{-1}$ con $y \in V$, ya que V es simétrica tenemos por lo anterior $\Delta(y^{-1}) - 1 = \frac{1}{\Delta(y)} - 1 = \frac{1-\Delta(y)}{\Delta(y)} < \varepsilon$, de donde

$$1 - \Delta(y) < \varepsilon\Delta(y) \tag{7.4}$$

Por último:

Si $\Delta(x) = 1$ entonces $|\Delta(x) - 1| = 0 < \varepsilon$.

Si $\Delta(x) > 1$ entonces por (7.3), $|\Delta(x) - 1| = \Delta(x) - 1 < \varepsilon$.

Si $\Delta(x) < 1$ entonces por (7.4), $|\Delta(x) - 1| = 1 - \Delta(x) < \varepsilon\Delta(x) < \varepsilon$.

Lo que termina la demostración de la continuidad de Δ en e.

Prueba de 3.

Primero veamos que $t(G) \subseteq \ker\Delta$. Tomemos $x \in t(G)$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = e$. Como Δ es homomorfismo tenemos que $1 = \Delta(x)^n$ por lo que $\Delta(x) = 1$; i.e. $x \in \ker\Delta$.

Veamos que $z(G) \subseteq \ker\Delta$. Sea $x \in z(G)$ entonces para todo boreliano B, $Bx = xB$ y por la invariancia de μ y la definición de Δ

$$\mu(B) = \mu(xB) = \mu(Bx) = \Delta(x)\mu(B)$$

así que si B es compacto no vacío tenemos que $\Delta(x) = 1$. En particular si el grupo es conmutativo ($z(G) = G$) tenemos que Δ es idénticamente uno.

Por último probemos que $c(G) \subseteq \ker\Delta$. Recordemos que $c(G)$ es el subgrupo generado por los elementos de la forma $xyx^{-1}y^{-1}$. En consecuencia, es suficiente probar que para cualesquiera x y y, $xyx^{-1}y^{-1} \in \ker\Delta$. Pero por la multiplicatividad de Δ,

$$\Delta(xyx^{-1}y^{-1}) = \Delta(x)\Delta(y)\Delta(x^{-1})\Delta(y^{-1}) = \Delta(x)\Delta(x)^{-1}\Delta(y)\Delta(y)^{-1} = 1$$

Prueba de 4.

Sea ν una medida derecha de Haar y Γ el equivalente derecho de Δ; es decir, para todo x en el grupo y todo boreliano B se cumple $\nu(xB) = \Gamma(x)\nu(B)$.

Debemos mostrar que $\Gamma = \frac{1}{\Delta}$.

Definamos $\check{\nu}(B) = \nu(B^{-1})$. Entonces $\check{\nu}$ es una medida izquierda de Haar. Sea C un subconjunto compacto de tal forma que $e \in int(C)$. De las identidades:

$$\nu(C) = \nu(xx^{-1}C) = \Gamma(x)\check{\nu}(C^{-1}x) = \Gamma(x)\Delta(x)\check{\nu}(C^{-1}) = \Gamma(x)\Delta(x)\nu(C)$$

obtenemos que $1 = \Gamma(x)\Delta(x)$; es decir, $\Gamma = \frac{1}{\Delta}$.
Prueba de 5.
Sean $B \in \mathbf{B}_G$ y $y \in G$.
Primero probamos (7.1) para cuando f es medible y no negativa.
Caso 1: $f = \chi_E$ para algún $E \in \mathbf{B}_G$.
Notamos que $\chi_E(xy) = \chi_{Ey^{-1}}(x)$, entonces

$$\begin{aligned}
\Delta(y)\int_B f(xy)d\mu(x) &= \Delta(y)\int \chi_B(x)\chi_{Ey^{-1}}(x)d\mu(x) \\
&= \Delta(y)\mu(B \cap (Ey^{-1})) \\
&= \Delta(y)\mu(((By) \cap E)y^{-1}) \\
&= \Delta(y)\Delta(y^{-1})\mu((By) \cap E) \\
&= \int_{By} f(x)d\mu(x)
\end{aligned}$$

Caso 2: Por la linealidad de la integral, (7.1) se vale para cuando f es una funcion $\mathbf{B}_G$-simple no negativa.
Caso 3: Caso general.
Tomemos $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones $\mathbf{B}_G$-simples no negativas tales que $s_n \leq f$ y $s_n \to f$. Por el Teorema de la convergencia monótona tenemos que

$$\int_{By} s_n(x)d\mu(x) \to \int_{By} f(x)d\mu(x) \tag{7.5}$$

Pero por el caso 2 tenemos que $\int_{By} s_n(x)d\mu(x) = \Delta(y)\int_B s_n(xy)d\mu(x)$ y de nuevo por Teorema de la convergencia monótona tenemos

$$\Delta(y)\int_B s_n(xy)d\mu(x) \to \Delta(y)\int_B f(xy)d\mu(x), \tag{7.6}$$

así que de (7.5) y de (7.6) obtenemos $\int_{By} f(x)d\mu(x) = \Delta(y)\int_B f(xy)d\mu(x)$.

Para probar (7.1) en el caso de que $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(G, \mathbf{B}_G, \mu))$, aplicamos lo anterior a f^+ y a f^-. Por último, si $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ aplicamos el caso real a $Re(f)$ y a $Im(f)$.

Prueba de 6.
Por el Teorema 6.31 y usando que $\mu(Bx) = \Delta(x)\mu(B)$ se tiene que

$$\int f(x)d\mu(x) = \mu(C)\int \frac{f(x^{-1})}{\mu(Cx)}d\mu(x) = \int \frac{f(x^{-1})}{\Delta(x)}d\mu(x)$$

para f $\mathbf{B}_G$-medible no negativa y C compacto con interior no vacío

Ahora, si $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ entonces aplicando lo anterior a f^+ y a f^- se sigue cumpliendo (7.2). Si $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ aplicamos el caso real a $Re(f)$ y a $Im(f)$. *Q.E.D.*

Notamos que los incisos 5 y 6 son fórmulas de cambio de variable. En el inciso 5 el cambio de variable es $\delta(x) = xy$ y el que juega el papel del jacobiano es $\Delta(y)$. En el inciso 6 el cambio de variable es $h(x) = x^{-1}$ y el que sirve como jacobiano es $\frac{1}{\Delta}$. Si la función modular es idénticamente uno los cambios de variable se simplifican.

Definición 7.4. *Un grupo topológico localmente compacto Hausdorff segundo numerable (G, τ) se llama unimodular si la función modular es constante (igual a uno).*

Por ejemplo, si el grupo G es conmutativo entonces para todo x, $\mu(xB) = \mu(Bx) = \mu(B)$; por lo que $\Delta(x) = 1$ para todo x, por lo que G es unimodular. Más adelante daremos ejemplos de grupos no abelianos unimodulares.

La siguiente proposición identifica algunos grupos unimodulares.

Proposición 7.5. *Sea (G, τ) grupo topológico compacto Hausdorff segundo numerable; entonces G es unimodular.*

Demostración. Al ser Δ continua y G compacto se sigue que $\Delta(G) \subseteq (0, \infty)$ es compacto y por lo tanto acotado.

Si existe $x \in G$ tal que $\Delta(x) > 1$ entonces $\{\Delta(x)^n = \Delta(x^n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ no está acotado lo cual es una contradicción. Si existe $x \in G$ con $\Delta(x) < 1$, al ser Δ homomorfismo obtenemos que $\Delta(x^{-1}) > 1$ y volvemos al caso anterior. En conclusión debemos tener que para todo $x \in G, \Delta(x) = 1$. *Q.E.D.*

Supongamos que G es conexo. Al ser Δ continua su imagen es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$, es decir, un intervalo. Si G es unimodular el intervalo se reduce a $\{1\}$, pero si G no es unimodular entonces el intervalo es $(0, \infty)$.

Proposición 7.6. *Si G es conexo no unimodular entonces Δ es suprayectiva.*

Demostración. Al ser G conexo y Δ continua tenemos que $\Delta(G)$ es conexo en $\mathbb{R}$ y por lo tanto un intervalo. Usando que G no es unimodular existe $x \in G$ con $\Delta(x) \neq 1$ y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\Delta(x) > 1$ y por lo tanto $\Delta(x^{-1}) < 1$. Entonces la sucesión de intervalos $([\Delta(x^{-1})^n, \Delta(x)^n])_{n\in\mathbb{N}}$ cubre $(0, \infty)$. Ahora, como $\Delta(x^n) = \Delta(x)^n$, $\Delta(x^{-n}) = \Delta(x^{-1})^n$ y $\Delta(G)$ es conexo tenemos que $[\Delta(x^{-1})^n, \Delta(x)^n]$ está contenido en $\Delta(G)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, en consecuencia $\Delta(G) = (0, \infty)$. *Q.E.D.*

La siguiente proposición nos da una muestra más de cómo la función modular relaciona las medidas derechas e izquierdas.

Proposición 7.7. *Sea (G, τ) un grupo topológico localmente compacto Hausdorff segundo numerable, μ y ν medidas de Haar izquierda y derecha respectivamente y $B \in \mathbf{B}_G$.*

1.

$$\mu(B^{-1}) = \int_B \frac{1}{\Delta(x)} d\mu(x). \tag{7.7}$$

2. *Recordamos que* $\check{\mu}(A) = \mu(A^{-1})$. *Si* f *es una función* $\mathbf{B}_G$*-medible no negativa ó* $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ *entonces*

$$\int_B f(x)d\check{\mu}(x) = \int_B \frac{f(x)}{\Delta(x)}d\mu(x). \tag{7.8}$$

3.

$$\nu(B^{-1}) = \int_B \Delta(x)d\nu(x). \tag{7.9}$$

Demostración.
Para probar el inciso 1 hacemos $f = 1$ en (7.2).
Prueba de 2.
Primero demostramos (7.8) para f $\mathbf{B}_G$-medible no negativa.
Caso 1: $f = \chi_A$ para algún $A \in \mathbf{B}_G$. En este caso

$$\int_B f(x)d\check{\mu}(x) = \check{\mu}(A \cap B) = \mu((A \cap B)^{-1}))$$

pero por (7.7) tenemos

$$\mu((A \cap B)^{-1})) = \int_{A\cap B} \frac{1}{\Delta(x)}d\mu(x) = \int_B \frac{f(x)}{\Delta(x)}\mu(x)$$

lo que termina la prueba del caso 1.

Caso 2: f es una función $\mathbf{B}_G$-simple no negativa. Este caso se sigue de la linealidad de la integral y del caso 1.

Caso 3: Caso general. Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathbf{B}_G$-simples no negativas tales que $s_n \leq f$ y $\lim_n s_n = f$. Por el Teorema de la convergencia monótona tenemos

$$\lim_n \int_B s_n d\check{\mu}(x) = \int_B f(x)d\check{\mu}(x) \tag{7.10}$$

$$\lim_n \int_B \frac{s_n(x)}{\Delta(x)}d\mu(x) = \int_B \frac{f(x)}{\Delta(x)}d\mu(x) \tag{7.11}$$

pero por el caso 2, $\int_B s_n(x)d\check{\mu}(x) = \int_B \frac{s_n(x)}{\Delta(x)}d\mu(x)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia de (7.10) y de (7.11) concluimos que f satisface (7.8).

Ahora supongamos que $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$. Si escribimos $f = f^+ - f^{-1}$ y aplicamos lo anterior a f^+ y a f^- obtenemos que f cumple (7.8). Por último, cuando $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ aplicamos el caso real a $Re(f)$ y a $Im(f)$.

Probemos el inciso 3. Si tomamos $f(x) = \Delta(x)$ en (7.8) obtenemos que

$$\int_B \Delta(x)d\check{\mu}(x) = \check{\mu}(B^{-1}) \tag{7.12}$$

Por 6.21, $\check{\mu}$ es una medida derecha de Haar, por lo que existe $c > 0$ de tal forma que $\nu = c\check{\mu}$. Es fácil probar que para toda g $\mathbf{B}_G$-medible no negativa, $\int_B g(x)\nu = c\int_B g(x)d\check{\mu}(x)$; por lo tanto, si multiplicamos (7.12) por c obtenemos (7.9.) *Q.E.D.*

Corolario 7.8. *Sean (G,τ) grupo topológico localmente compacto Hausdorff μ y ν medidas izquierda y derecha de Haar respectivamente. Entonces dado $B \in \mathbf{B}_G$, $\mu(B) = 0$ si y sólo si $\nu(B) = 0$, i.e. $\nu \ll \mu$ y $\mu \ll \nu$.*

Demostración. Por la proposición 7.7 tenemos que $\check{\mu} \ll \mu$. Por otro lado, al ser $\check{\mu}$ medida derecha de Haar existe $c > 0$ tal que $\check{\mu} = c\nu$, de donde $\nu \ll \mu$. De igual forma $\mu \ll \nu$. $Q.E.D.$

Corolario 7.9. *Sea (G,τ) un grupo topológico localmente compacto Hausdorff y μ una medida derecha de Haar. Entonces:*

$$\frac{d\check{\mu}}{d\mu} = \frac{1}{\Delta}$$

Demostración. Se sigue de (7.7.) $Q.E.D.$

Capítulo 8

Ejemplos de medidas de Haar

La intención de este capítulo es exhibir ejemplos concretos de medidas de Haar. Estudiaremos medidas de Haar para el grupo multiplicativo $\mathbb{R}^+$, para el grupo de matrices invertibles de 2×2 (el cual nos da un ejemplo de un grupo unimodular no conmutativo) y para el grupo $\mathbf{Z}_2^{\mathbf{N}}$. El ejemplo 8.11 (tomado de [Hewitt-1]) es particularmente interesante, pues generaliza varios ejemplos anteriores y nos dice cómo calcular la función modular de varios grupos.

Antes de ver ejemplos de medidas de Haar damos una proposición que nos proporciona un criterio para saber cuándo dos medidas son iguales. Depués daremos una proposición que simplifica la prueba de que una medida regular sea medida de Haar.

Lema 8.1. *Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ y $(X, \mathcal{S}, \nu)$ dos espacios de medida finita con $\nu(X) = \mu(X)$.*

Supongamos que $\mathbf{P}$ es un π-sistema (ver definición 6.28) tal que la σ-álgebra generada por $\mathbf{P}$ ($\mathcal{S}(\mathbf{P})$) es $\mathcal{S}$ y tal que μ y ν coincidan en $\mathbf{P}$. Entonces $\nu = \mu$.

Demostración. Tomemos $\mathcal{L} = \{A \in \mathcal{S} : \nu(A) = \mu(A)\}$. Por hipótesis tenemos que $\mathbf{P} \subseteq \mathcal{L}$, así que si probamos que $\mathcal{L}$ es un λ-sistema, por el Lema de las clases monótonas (ver apéndice B.4) tendremos que $\mathcal{S}(\mathbf{P}) \subseteq \mathcal{L}$, pero $\mathcal{S}(\mathbf{P}) = \mathcal{S}$, lo que prueba el lema.

Queremos demostrar que $\mathcal{L}$ es un λ-sistema.

Como $\nu(X) = \mu(X)$ resulta que $X \in \mathcal{L}$.

Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión creciente de elementos de $\mathcal{L}$. Entonces:

$$\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \nu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

así pues $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{L}$.

Tomemos $B \subseteq A$, con $B, A \in \mathcal{L}$. Al ser ν y μ finitas tenemos que

$$\mu(A\backslash B) = \mu(A) - \mu(B) = \nu(A) - \nu(B) = \nu(A\backslash B)$$

por lo que $A\backslash B \in \mathcal{L}$. *Q.E.D.*

Corolario 8.2. *Sean $(X, \mathcal{S}, \mu)$ y $(X, \mathcal{S}, \nu)$ dos espacios de medida. Sea $\mathbf{P}$ un $\pi-$sistema tal que ν y μ coinciden en $\mathbf{P}$ y además la σ-álgebra generada por $\mathbf{P}$ es $\mathcal{S}$. Supongamos que existe $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión creciente de elementos de $\mathbf{P}$ con medida finita bajo μ y ν tal que $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Entonces $\nu = \mu$.*

Demostración. Definamos $\nu_n, \mu_n : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ por $\nu_n(A) = \nu(A \cap X_n)$ y $\mu_n(A) = \mu(A \cap X_n)$. Entonces ν_n y μ_n son medidas finitas y coinciden en $\mathbf{P}$, así que por el Lema 8.1 $\nu_n = \mu_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

Por último, dado $A \in \mathcal{S}$ tenemos

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \cap X_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(A) = \lim_{n\to\infty} \nu(A \cap X_n) = \nu(A).$$

Q.E.D.

Corolario 8.3. *Sea (G, τ) grupo topológico localmente compacto Hausdorff y $\mathbf{P}$ un π-sistema tal que $\mathcal{S}(\mathbf{P}) = \mathbf{B}_G$.*

Sea $\mu : \mathbf{B}_G \to [0, \infty]$ medida regular.

Supongamos que:

i) Existe (G_n) sucesión creciente de elementos de $\mathbf{P}$ con medida finita tal que su unión es todo G.

ii) Para todo $a \in G$ y para todo $A \in \mathbf{P}$ se tiene que $\mu(aA) = \mu(A)$

Entonces μ es una medida izquierda de Haar.

Demostración. Sea $a \in G$. Queremos demostrar que para todo A boreliano de G, $\mu(aA) = \mu(A)$.

Tomemos $\nu(A) = \mu(aA)$ para todo $A \in \mathbf{B}_G$. Entonces ν es una medida y por hipótesis ν restringida a $\mathbf{P}$ coincide con μ, así que por el corolario 8.2 $\nu = \mu$; i.e. para todo $A \in \mathbf{B}_G$, $\mu(aA) = \mu(A)$. *Q.E.D.*

Lema 8.4. *Sea (X, τ) espacio topológico localmente compacto Hausdorff, μ una medida regular sobre los borelianos de X y $f : X \to (0, \infty)$ continua. Definamos $\nu : \mathbf{B}_X \to [0, \infty]$ por $\nu(E) = \int_E f(x)d\mu(x)$. Entonces ν es una medida regular.*

Demostración.

Dado que f es continua en X y positiva tenemos que ν es una medida. Resta probar que ν es regular.

Primero veremos que es finita en compactos. Dado $C \subseteq X$ compacto al ser f continua en X tenemos que $\|f\|_C < \infty$ y entonces $\nu(C) = \int_C f(x)d\mu(x) \leq \|f\|_C \mu(C)$ pero $\mu(C) < \infty$ al ser μ regular. Entonces $\nu(C) < \infty$.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$, sea $V_n = f^{-1}((\frac{1}{n}, n))$. Notamos que $V_n \subseteq V_{n+1}$, $V_n \in \tau$ (al ser f continua) y además $X = \bigcup_{n\geq 2} V_n$. Observamos que

$$\nu(U) = \lim_{n\to\infty} \nu(U \cap V_n) \tag{8.1}$$

Queremos demostrar que para todo U abierto

$$\nu(U) = \sup\{\nu(C) : C \subseteq U,\ C \text{ compacto }\}$$

Afirmamos que es suficiente probar que para todo $n \geq 2$

$$\nu(U \cap V_n) = \sup\{\nu(C) : C \subseteq U \cap V_n,\ C \text{ compacto}\} \tag{8.2}$$

La razón de esto es la siguiente:

Si $\nu(U) = \infty$ entonces, gracias a la ecuación (8.1), para toda $M > 0$ existe n, con $\mu(U \cap V_n) > M$. Pero usando (8.2) podemos encontrar $C \subseteq U \cap V_n \subseteq U$ compacto con $\mu(C) > M$.

Supongamos $\nu(U) < \infty$ y sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por (8.1) encontramos n tal que $\nu(U) - \nu(U \cap V_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Después, usando (8.2) encontramos $C \subseteq U \cap V_n \subseteq U$ con $\nu(U \cap V_n) - \nu(C) < \frac{\varepsilon}{2}$ de donde tenemos $\nu(U) - \nu(C) < \varepsilon$.

Ahora probamos (8.2). Tomemos $U_n = U \cap V_n$.

Caso 1: $\nu(U_n) < \infty$.

Usando $\frac{1}{n}\chi_{U_n} \leq f\chi_{U_n}$ obtenemos $\frac{1}{n}\mu(U_n) \leq \nu(U_n) < \infty$, así $\mu(U_n) < \infty$.

Al ser μ regular tenemos que existe $(C_m)_{m\geq 2}$ sucesión compactos contenidos en U_n tal que

$$\mu(U_n) - \mu(C_m) = \mu(U_n \backslash C_m) < \frac{1}{m}$$

Sea $C = \bigcup_{m\geq 2} C_m$, entonces $C \subseteq U_n$ y $\mu(U_n \backslash C) \leq \mu(U_n \backslash C_m) < \frac{1}{m}$ para todo $m \geq 2$ i.e. $\mu(U_n \backslash C) = 0$ y por lo tanto $\nu(U_n \backslash C) = 0$ así que

$$\nu(U_n) = \nu(C) = \lim_{m\to\infty} \nu\left(\cup_{i=1}^{m} C_i\right)$$

Pero para cada $m \geq 2$, $\bigcup_{i=2}^{n} C_i \subseteq U_n$ es compacto, entonces $\nu(U_n) = \sup\{\nu(C) : C \subseteq U_n,\ C \text{ compacto }\}$.

Caso 2: $\nu(U_n) = \infty$.

Usando $f\chi_{U_n} \leq n\chi_{U_n}$ obtenemos $\infty = \nu(U_n) = n\mu(U_n)$; i.e. $\mu(U_n) = \infty$ y por la regularidad de μ dado $M > 0$ existe $C \subseteq U_n$ compacto con $nM < \mu(C)$; pero usando $\frac{1}{n}\chi_C \leq f\chi_C$ se sigue que $M < \frac{\mu(C)}{n} \leq \nu(C)$.

Queremos demostrar que para todo $B \in \mathbf{B}_X$

$$\nu(B) = \inf\{\nu(U) : U \in \tau \quad \text{y} \quad B \subseteq U\} \tag{8.3}$$

Es claro que podemos suponer que $\nu(B) < \infty$ y en consecuencia, para todo $n \geq 2$, $\nu(B \cap V_n) < \infty$.

Primero probaremos que dada ε y $n \geq 2$, existe $W_n \subseteq V_n$ abierto que contiene a $B \cap V_n$, de tal forma que

$$\nu(W_n \setminus (B \cap V_n)) < \frac{\varepsilon}{2^n} \tag{8.4}$$

Como $\frac{1}{n}\chi_{B\cap V_n} \leq f\chi_{B\cap V_n}$ y $\nu(B \cap V_n)$ es finita, resulta que $\mu(B \cap V_n)$ es finita. Por la regularidad de μ, podemos tomar un abierto W_n' que contiene a

$B \cap V_n$ de tal forma que $\mu(W_n') < \mu(B \cap V_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$, y como $\mu(B \cap V_n)$ es finita obtenemos que $\mu(W_n' \setminus (B \cap V_n)) < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Proponemos $W_n = W_n' \cap V_n$. Entonces W_n es abierto y a $B \cap V_n \subseteq W_n \subseteq V_n$. Además, como W_n está contenido en W_n' se tiene que $\mu(W_n \setminus (B \cap V_n)) < \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Ahora tomemos $W = \cup_{n \in \mathbb{N}} W_n$. Entonces W es abierto y contiene a B. Probaremos que $\nu(W) < \nu(B) + \varepsilon$, con lo cual (al ser ε arbitraria) concluimos (8.3).

Para $n \geq 2$ tome $W_n'' = \cup_{k=2}^n W_k$. Entonces W es la unión creciente de W_n'', por lo que $\nu(W) = \lim_n \nu(W_n'')$.

Por otro lado, como $(B \cap V_n)_{n \geq 2}$ es creciente, tenemos

$$W_n'' \setminus (B \cap V_n) \subseteq \cup_{k=2}^n W_k \setminus (B \cap V_k)$$

por lo que de (8.4) y usando que $\nu(B \cap V_n)$ es finita obtenemos

$$\nu(W_n'') \leq \nu(B \cap V_n) + \sum_{k=2}^{n} \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Por último, como $\lim_n \nu(B \cap V_n) = \nu(B)$ resulta

$$\nu(W) = \lim_n \nu(W_n'') \leq \lim_n \nu(B \cap V_n) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} < \nu(B) + \varepsilon.$$

Q.E.D.

Ejemplo 8.5. *Tomemos el grupo multiplicativo $G = (0, \infty)$ y sea λ la medida de Lebesgue restringida a los borelianos de G.*

Definamos $\mu : \mathbf{B}_G \to [0, \infty]$ dada por $\mu(A) = \int_A \frac{1}{t} d\lambda(t)$.

Como la función $t \mapsto t^{-1}$ $(t \in G)$ es continua y positiva tenemos que μ es una medida regular (ver Proposición 8.4), resta probar que es invariante izquierda.

Sea $\mathbf{P} = \{[a, b) : a, b \in G\}$, entonces $\mathbf{P}$ es un $\pi-$sistema que genera a $\mathbf{B}_G$.

Vamos a encontrar la medida bajo μ de los elementos de $\mathbf{P}$.

Al ser $x \mapsto x^{-1}$ continua en G, la integral de Riemann coincide con la de Lebesgue en $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y entonces

$$\int_{[a,b)} \frac{1}{t} d\lambda(t) = \int_a^b \frac{1}{t} dt = \ln(b) - \ln(a) \tag{8.5}$$

Ahora, $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n}, n)$ con $([\frac{1}{n}, n))_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión creciente de elementos de $\mathbf{P}$. Además por (8.5) cada $[\frac{1}{n}, n)$ es de medida finita.

Por corolario 8.3 es suficiente probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $c \in G$ se cumple que $\mu(c[a, b)) = \mu([a, b))$. Pero por (8.5)

$$\int_{[ca,cb)} \frac{1}{t} d\lambda(t) = \int_{ca}^{cb} \frac{1}{t} dt = \ln(c) + \ln(b) - \ln(c) - \ln(a) = \int_{[a,b)} \frac{1}{t} \lambda(t)$$

i.e. $\mu(c[a, b)) = \mu([a, b))$.

Ejemplo 8.6. *Tomemos el grupo*

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : r, s \in \mathbb{R}, r > 0 \right\}$$

con la multiplicación usual de matrices (ver ejemplo 5.2-6) y sea λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^2$..

Sea $H_1 = \{(r,s) \in \mathbb{R}^2 : r > 0\}$ (un semiplano abierto en $\mathbb{R}^2$.) Identificamos los puntos de G con los de H_1 mediante

$$\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto (r,s)$$

Definamos $\mu : \mathbf{B}_G \to [0,\infty]$ dada por $\mu(A) = \int_A \frac{1}{x^2} d\lambda(x,y)$.

Afirmamos que μ es una medida izquierda de Haar.

Dado que $x \mapsto x^{-2}$ $(x > 0)$ es una función continua y positiva tenemos que μ es una medida regular (ver Proposición 8.4).

Tomemos $\mathbf{P} = \{[r,s) \times [u,v) : r,s,u,v \in \mathbb{R}, r,s > 0\}$; entonces $\mathbf{P}$ es un $\pi-$sistema que genera a $\mathbf{B}_G$. Veamos que $\mathbf{P}$ satisface las hipótesis del Corolario 8.3.

Primero calculamos la medida de los elementos de $\mathbf{P}$.

Al ser $x \mapsto x^{-2}$ continua en el semiplano abierto H_1, tenemos que las integrales de Riemann y Lebesgue coinciden en subconjuntos compactos de H_1. Por el Teorema de Fubini:

$$\int_{[r,s)\times[u,v)} \frac{1}{x^2} d\lambda(x,y) = \int_u^v \int_r^s \frac{1}{x^2} dxdy = (v-u)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right) \tag{8.6}$$

Es claro que $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\frac{1}{n}, n) \times [-n,n)$ con $([\frac{1}{n}, n) \times [-n,n))_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión creciente de elementos de $\mathbf{P}$. Cada $[\frac{1}{n}, n) \times [-n,n)$ tiene medida finita por (8.6).

Nos resta probar que para toda $a \in G$ y toda $A \in \mathbf{P}, \mu(aA) = \mu(A)$.

Tomemos $[r,s) \times [u,v) \in \mathbf{P}$ y

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G \quad A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : (x,y) \in [r,s) \times [u,v) \right\}$$

Entonces

$$aA = \left\{ \begin{pmatrix} x\alpha & y\alpha + \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : (x,y) \in [r,s) \times [u,v) \right\}$$

que podemos reescribir como

$$aA = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : (z,w) \in [\alpha r, \alpha s) \times [\alpha u + \beta, \alpha v + \beta) \right\}$$

Al igual que en (8.6) tenemos

$$\begin{aligned}\int_{[\alpha r,\alpha s)\times[\alpha u+\beta,\alpha v+\beta)}\frac{1}{x^2}\lambda(x,y)=\int_{\alpha u+\beta}^{\alpha v+\beta}\int_{\alpha r}^{\alpha s}\frac{1}{x^2}dxdy &= (\alpha v-\alpha u)\left(\frac{1}{\alpha r}-\frac{1}{\alpha s}\right)\\ &= (v-u)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{s}\right)\end{aligned}$$

de donde tenemos que $\mu(aA)=\mu(A)$.

Así pues por el corolario μ *es una medida izquierda de Haar.*

Ahora sea $\nu:\mathbf{B}_G\to[0,\infty]$ *dada por* $\nu(A)=\int_A\frac{1}{x}d\lambda(x,y)$.

Afirmamos que ν *es una medida derecha de Haar. La prueba es un razonamiento parecido al anterior, tomamos* $\mathbf{P}$ *el mismo* $\pi-$*sistema de antes y sólo nos resta probar dos cosas: que los conjuntos* $[r,s)\times[u,v)$ *tienen medida finita bajo* ν *y que* $\nu(Aa)=\nu(A)$ *para toda* $a\in G$ *y toda* $A\in\mathbf{P}$

Para ver que $\nu([r,s)\times[u,v))$ *es finita usamos que* $t\longmapsto t^{-1}$ *es continua (y así las integrales de Lebesgue y Riemann coinciden) y el Teorema de Fubini para obtener*

$$\int_{[r,s)\times[u,v)}\frac{1}{x}d\lambda(x,y)=\int_u^v\int_r^s\frac{1}{t}dt=(v-u)(\ln(s)-\ln(r)) \tag{8.7}$$

Tomemos $a\in G$ *y* $A\in\mathbf{P}$ *como antes, entonces*

$$Aa=\left\{\begin{pmatrix}x\alpha & x\beta+y\\ 0 & 1\end{pmatrix}:(x,y)\in[r,s)\times[u,v)\right\}$$

Sea $E=\{(x\alpha,x\beta+y):(x,y)\in[r,s)\times[u,v)\}$ *y* $f,g:[r\alpha,s\alpha)\to\mathbb{R}$ *dadas por*

$$f(t)=\frac{\beta}{\alpha}t+u \qquad g(t)=\frac{\beta}{\alpha}t+v$$

la gráfica de f *es una recta que une* $(r\alpha,\beta r+u)$ *con* $(s\alpha,\beta s+u)$ *y la gráfica de* g *es una recta que une* $(r\alpha,\beta r+v)$ *con* $(s\alpha,\beta s+v)$.

Note que $E=\{(z,\frac{z}{\alpha}\beta+y):(z,y)\in[r\alpha,s\alpha)\times[u,v)\}$ *y entonces*

$$E=\{(z,w):z\in[r\alpha,s\alpha),f(z)\le w\le g(z)\}$$

y por el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\int_E\frac{1}{z}dz=\int_{\alpha r}^{\alpha s}\int_{f(z)}^{g(z)}\frac{1}{z}dwdz=\int_{\alpha r}^{\alpha s}\frac{1}{z}(g(z)-f(z))dz &= \int_{\alpha r}^{\alpha s}\frac{v-u}{z}dz\\ &= (v-u)(\ln(s)-\ln(r))\end{aligned}$$

Pero dado que $t\mapsto t^{-1}$ *es continua las integrales de Lebesgue y de Riemann coinciden y así gracias a (8.7)*

$$\nu(Aa) = \int_{Aa} \frac{1}{x} d\lambda(x,y) = \int_E \frac{1}{x} dx = (v-u)(\ln(s) - \ln(r)) = \nu(A)$$

Este ejemplo nos proveé de conjuntos con medida finita bajo una medida izquierda pero infinita bajo una medida derecha. Por ejemplo tomemos A la franja $[1,\infty) \times [0,1)$. Entonces A es la unión creciente de $A_n = [1,n) \times [0,1)$ por lo que $\nu(A) = \lim_n \nu(A_n)$ y $\mu(A) = \lim_n \mu(A_n)$.

Por otro lado usando (8.6) y (8.7)

$$\mu(A_n) = 1 - \frac{1}{n}, \; \nu(A_n) = \ln(n)$$

así que $\mu(A) = 1$ y $\nu(A) = \infty$.

Ejemplo 8.7. *Consideremos el grupo aditivo $\mathbf{Z}_2$ con la topología discreta y el grupo $G = \mathbf{Z}_2^{\mathbb{N}}$ con las operaciones coordenada a coordenada y la topología producto. Es sencillo probar que G es grupo topológico (conmutativo) y además es compacto pues es producto de compactos. Así pues podemos tomar μ la medida de Haar normalizada i.e. $\mu(G) = 1$.*

Recordemos cómo son los abiertos básicos de G. Si $p_i : G \to \mathbf{Z}_2$ es la $i-$ésima proyección entonces $p_i^{-1}(U) \subseteq G$ es abierto básico con $U \subseteq \mathbf{Z}_2$. Los básicos de G son de la forma $\bigcap_{j=1}^n p_{i_j}^{-1}(U_{i_j})$ con $U_{i_j} \subseteq \mathbf{Z}_2$.

El siguiente resultado determina la medida de los elementos de una base de vecindades.

Proposición 8.8. *Dados $\{i_j\}_{j=1}^k \subseteq \mathbb{N}$ y $(n_j)_{j=1}^k \in \mathbf{Z}_2^k$ fijos se tiene que*

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^k p_{i_j}^{-1}(\{n_j\})\right) = \frac{1}{2^k} \tag{8.8}$$

ó de manera equivalente

$$\mu(a \in G : a(i_j) = n_j, \; j \in \{1, ..., k\}) = \frac{1}{2^k}$$

Demostración. *Primero probamos que para cualesquiera $(n_j)_{j=1}^k, (m_j)_{j=1}^k \in \mathbf{Z}_2^k$ se cumple*

$$\mu\left(\bigcap_{j=1}^k p_{i_j}^{-1}(\{n_j\})\right) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^k p_{i_j}^{-1}(\{m_j\})\right) \tag{8.9}$$

Por la invariancia de μ es suficiente probar que uno es traslación del otro, pero afirmamos que

$$\bigcap_{j=1}^k p_{i_j}^{-1}(\{n_j\}) + b = \bigcap_{j=1}^k p_{i_j}^{-1}(\{m_j\}) \tag{8.10}$$

con b *dado por* $b(i_j) = n_j + m_j \bmod 2$ *si* $i_i \in \{i_1, ..., i_k\}$ *y cero en otro caso. Probemos* (8.10)*.*

$\subseteq$] *Tomemos* $c \in \bigcap_{j=1}^{k} p_{i_j}^{-1}(\{n_j\})$ *y* i_j *en* $\{i_1, \ldots, i_k\}$*, entonces*

$$(c + b)(i_j) = c(i_j) + b(i_j) = n_j + (n_j + m_j) = m_j$$

por lo que $c + b \in \bigcap_{j=1}^{k} p_{i_j}^{-1}(\{m_j\})$.

$\supseteq$]*Sea* $c \in \bigcap_{j=1}^{k} p_{i_j}^{-1}(\{m_j\})$ *y tomemos* $a \in \bigcap_{j=1}^{k} p_{i_j}^{-1}(\{n_j\})$ *dada por* $a(i) = c(i)$ *si* $i \notin \{i_1, ..., i_k\}$. *Entonces si* $i = i_j$ *para alguna* j *en* $\{1, \ldots, k\}$, $(a + b)(i_j) = n_j + (n_j + m_j) = m_j = c(i_j)$. *Si* i *no está en* $\{i_1, \ldots, i_k\}$ *entonces* $(a + b)(i) = c(i)$. *En conclusión* $a + b = c$. *Esto termina la prueba de (8.10).*

Por (8.9)*, probar* (8.8) *es equivalente a probar*

$$\mu(\cap_{j=1}^{k} p_{i_j}^{-1}(\{0\})) = 1/2^k$$

lo cual haremos por inducción sobre k.

$k = 1$. *Veamos que* $\mu(p_{i_1}^{-1}(\{0\})) = 1/2$.

Notamos que G *es la unión ajena de* $p_{i_1}^{-1}(\{0\})$ *y* $p_{i_1}^{-1}(\{1\})$ *y como* $\mu(G) = 1$ *se sigue que* $1 = \mu(p_{i_1}^{-1}(\{0\})) + \mu(p_{i_1}^{-1}(\{1\}))$. *Pero por la observación tenemos que* $\mu(p_{i_1}^{-1}(\{0\})) = \mu(p_{i_1}^{-1}(\{1\}))$ *por lo que se concluye que* $\mu(p_{i_1}^{-1}(\{0\})) = 1/2$.

Supongamos que $\mu(\bigcap_{j=1}^{k} p_{i_j}^{-1}(\{0\})) = 1/2^k$ *y probemos la igualdad para* $k+1$. *Notamos que* $\bigcap_{j=1}^{k} p_{i_j}^{-1}(\{0\})$ *es igual a*

$$\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k} p_{i_j}^{-1}(\{0\})\right) \bigcap p_{i_{k+1}}^{-1}(\{0\})\right) \bigcup \left(\left(\bigcap_{j=1}^{k} p_{i_j}^{-1}(\{0\})\right) \bigcap p_{i_{k+1}}^{-1}(\{1\})\right)$$

donde la unión es ajena y además los dos conjuntos de la unión tienen la misma medida (por la observación) así que por la hipótesis de inducción se tiene que

$$\frac{1}{2^k} = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{k} p_{i_j}^{-1}(\{0\})\right) = 2\mu\left(\bigcap_{j=1}^{k+1} p_{i_j}^{-1}(\{0\})\right)$$

de donde se concluye que $\mu\left(\bigcap_{j=1}^{k+1} p_{i_j}^{-1}(\{0\})\right) = 1/2^{k+1}$. *Q.E.D.*

Corolario 8.9. *Existen* $K, L \subseteq G$ *subconjuntos compactos tales que* $\mu(K) = 0 = \mu(L)$ *y* $K \bigoplus L = G$.

Demostración. *Sean*

$$K = \{a \in G : a(2i) = 0, i \in \mathbb{N}\} \quad y \quad L = \{a \in G : a(2i - 1) = 0, i \in \mathbb{N}\}$$

Notamos que

$$K = \mathbf{Z}_2 \times \{0\} \times \mathbf{Z}_2 \times \{0\} \times \mathbf{Z}_2 \times \cdots, \quad L = \{0\} \times \mathbf{Z}_2 \times \{0\} \times \mathbf{Z}_2 \times \{0\} \times \cdots$$

por lo que K y L son producto de compactos en $\mathbb{Z}^2$ *y por lo tanto son compactos en* G.

Además, como $K \subseteq \bigcap_{j=1}^{k} p_{2j}^{-1}(\{0\})$ *para todo natural* k *se sigue de la proposición (8.8) que* $\mu(K) \leq 1/2^k$ *para todo* k, *por lo que* $\mu(K) = 0$. *De manera similar se tiene que* $\mu(L) = 0$.

Nos resta probar que $K + L = G$.

Sea $a \in G$ *y sean* $b \in K, c \in L$ *dados por* $b(2i-1) = a(2i-1)$ *y* $c(2i) = a(2i)$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$. *Entonces* $b + c = a$. *Esto prueba que* $K + L = G$, *pero como* $K \cap L = \{0\}$ *tenemos que* $K \bigoplus L = G$. *Q.E.D.*

A continuación veremos cierta relación entre μ *y la medida de Lebesgue en* $[0,1]$.

Para $n \geq 1$ *sea* $N_n = \bigcap_{j=n}^{\infty} p_j^{-1}(\{1\}) = \{a \in G : \text{para todo}\, j \geq n, a(j) = 1\}$ *y* $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$.

Por la Proposición 8.8 se sigue que $\mu(N_n) = 0$ *para todo* n *y por lo tanto* $\mu(N) = 0$.

Sea $\tilde{G} = G \backslash N$ *y* $f : \tilde{G} \to [0,1]$ *dada por* $f(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a(i)/2^i$.

Como todo número en $[0,1]$ *admite un desarrollo binario sin colas de unos concluimos que* f *es sobre. Además como no tenemos colas de unos* f *resulta ser inyectiva; para probarlo supongamos que* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a(i)}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b(i)}{2^i}$ *y que* $0 = a(1) < b(1) = 1$. *Entonces*

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{b(i)}{2^i} = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a(i)}{2^i} < \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2}$$

donde la segunda desigualdad es estricta ya que a *no tiene cola de unos. Entonces no puede pasar que* $a(1) < b(1)$. *De la misma forma llegamos a una contradicción si* $b(1) < a(1)$ *por lo que* $a(1) = b(1)$. *Por inducción tenemos que* $a(n) = b(n)$ *para todo* n *por lo que* $a = b$.

Afirmamos que f *es continua.*

Sea $(a_\lambda)_{\lambda \in L}$ *una red en* $\tilde{G}$ *y* $a \in \tilde{G}$ *tal que* $a_\lambda \to a$ *en* $\tilde{G}$. *Queremos demostrar que* $f(a_\lambda) \to f(a)$ *en* $[0,1]$.

Sea $\varepsilon > 0$. *Como* $\sum_{i=1}^{\infty} 1/2^i < \infty$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $\sum_{i=n+1}^{\infty} 1/2^i < \varepsilon/2$.

Por otro lado ya que $(\{a(1)\} \times \cdots \times \{a(n)\} \times \mathbf{Z}_2^I) \cap \tilde{G}$, *(con* $I = \mathbb{N} \backslash \{1, ..., n\}$*) es un abierto de* $\tilde{G}$ *que tiene a* a *y usando que* $a_\lambda \to a$ *resulta que existe* λ_0 *de tal manera que para todo* $\lambda \geq \lambda_0$, $a_\lambda(i) = a(i)$ *para todo* $i \in \{1, ..., n\}$. *Se sigue que para todo* $\lambda \geq \lambda_0$

$$\begin{aligned} |f(a_\lambda) - f(a)| = \left| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_\lambda(i) - a(i)}{2^i} \right| &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|a_\lambda(i)| + |a(i)|}{2^i} \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{2^i} < 2(\varepsilon/2) = \varepsilon \end{aligned}$$

lo cual prueba la continuidad de f.

De la continuidad de f se sigue que para todo B boreliano del $[0,1]$ se tiene que $f^{-1}(B) \in \mathbf{B}_G$.

Proposición 8.10. *λ denota la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Afirmamos que para todo boreliano B del $[0,1]$ se cumple $\lambda(B) = \mu(f^{-1}(B))$.*

Demostración. *Definamos $\lambda' : \mathbf{B}_{[0,1]} \to [0,\infty)$ por $\lambda'(B) = \mu(f^{-1}(B))$. Sabemos que λ' es una medida y además $\lambda'([0,1]) = \mu(G) = 1 = \lambda([0,1])$. Si encontramos un $\pi-$sistema que genere a los borelianos del $[0,1]$ de tal forma que λ y λ' coincidan en este $\pi-$sistema tendremos que $\lambda = \lambda'$.*

Para todo $m \in \mathbb{N}$ tomamos

$$P_m = \left\{ \left[\frac{l}{2^m}, \frac{l+1}{2^m}\right) : l \in \{0, ..., 2^m - 1\} \right\}$$

y $\mathbf{P} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} P_m \bigcup\{\emptyset\}$.

Sea $D_m = \{\frac{l}{2^m} : l \in \{0, ..., 2^m\}\}$. Los intervalos de P_m son los intervalos semicerrados con extremos consecutivos en D_m. Al conjunto $D = \cup_{m\in\mathbb{N}} D_m$ se le conoce como el conjunto de los números diádicos y es conocido que es denso en $[0,1]$.

Observamos que cada P_m consta de una colección de intervalos ajenos. Además, para todo q natural, $P_{m+q} \subset P_m$ y cada intervalo de P_m es la unión de 2^q intervalos de P_{m+q}.

Tomemos $A, B \in \mathbf{P}$ y veamos que $A \cap B \in \mathbf{P}$. Si $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$ entonces es claro que $A \cap B \in \mathbf{P}$. Entonces podemos suponer

$$A = \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right) \quad B = \left[\frac{l}{2^m}, \frac{l+1}{2^m}\right)$$

y sin pérdida de generalidad suponemos que $n \leq m$. Entonces $B \in P_m$ es la unión de 2^{m-n} intervalos de P_n. Como $A \in P_n$ tenemos dos casos: A está entre los intervalos cuya unión es B. En este caso, $A \cap B = A \in \mathbf{P}$; si A no está entre los intervalos cuya unión es B, entonces $A \cap B = \emptyset \in \mathbf{P}$.

Ahora probemos que $S(\mathbf{P}) = \mathbf{B}_{[0,1]}$.

$\subseteq$]*Como $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{B}_{[0,1]}$ resulta que $S(\mathbf{P}) \subseteq \mathbf{B}_{[0,1]}$.*

$\supseteq$]*Sea $\mathbf{E} = \{(a,b) : a, b \in [0,1]\}$. Como $S(\mathbf{E}) = \mathbf{B}_{[0,1]}$ es suficiente probar que $\mathbf{E} \subseteq S(\mathbf{P})$.*

Tomemos $a < b, a, b \in [0,1]$. Usando la densidad de D en el $[0,1]$, es posible encontrar $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}, (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sucesiones de diádicos tales que converjan a a y a b respectivamente y

$$a < x_{n+1} < x_n < y_n < y_{n+1} < b$$

En consecuencia $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [x_n, y_n)$. Por lo tanto para que $(a,b) \in S(\mathbf{P})$, es suficiente probar que dados $x, y \in D$ con $x < y$, se tiene que $[x,y) \in S(\mathbf{P})$.

Sean $x, y \in D$ con $x \in D_n$ y $y \in D_m$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $n \leq m$. Si $n \leq m$ entonces $D_n \subset D_m$, por lo que $x, y \in D_m$, es *decir* $x = \frac{k}{2^m}$ *y* $y = \frac{l}{2^m}$. *Pero entonces*

$$[x, y) = \bigcup_{i=k}^{l-1} \left[\frac{i}{2^m}, \frac{i+1}{2^m}\right)$$

por lo tanto, $[x, y) \in S(\mathbf{P})$.

Lo último que nos falta para terminar la prueba de la Proposición 8.10 *es demostrar que*

$$\frac{1}{2^n} = \lambda\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) = \lambda'\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right)$$

Tomemos el diádico $\frac{k}{2^n}$ *y escribámoslo en desarrollo binario como* $\frac{k}{2^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{2^i}$ *con* $l_i \in \{0, 1\}$.

Si probamos que

$$f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) = \bigcap_{j=1}^{n} p_j^{-1}(\{l_j\}) \tag{8.11}$$

habremos terminado, pues usando la proposición 8.8 y la definición de λ' *tenemos*

$$\lambda'\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right)\right) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{n} p_j^{-1}(\{l_j\})\right) = \frac{1}{2^n}$$

*Veamos la igualdad (*8.11*)*

$\subseteq]$ *Tomemos* $a \in \tilde{G}$ *tal que* $f(a) \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a(i)}{2^i} < \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{2^i} + \frac{1}{2^n} \tag{8.12}$$

Primero afirmamos que $l_1 \leq a(1)$ *y para probarlo primero suponemos que* $0 = a(1) < l_1 = 1$ *entonces*

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=2}^{n} \frac{l_i}{2^i} \leq \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a(i)}{2^i} < \frac{1}{2}$$

(donde la segunda desigualdad es estricta ya que a no tiene cola de unos) lo que es una contradicción. Así pues, $l_1 \leq a(1)$.

Ahora veamos que $l_1 = a(1)$, *para lo cual suponemos que* $0 = l_1 < a(1) = 1$. *Ya que* $a(1) = 1$ *se tiene que* $f(a) \in [\frac{1}{2}, 1]$. *Por otro lado ya que* $l_1 = 0$ *resulta que el diádico* $\frac{k}{2^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{2^i} \in [0, \frac{1}{2})$ *pero entonces* $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}) \subseteq [0, \frac{1}{2})$ *y así* $f(a) \in [\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ *lo cual contradice lo anterior. Así pues,* $l_1 = a(1)$ *y (8.12) se reescribe como*

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{l_i}{2^i} \leq \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a(i)}{2^i} < \sum_{i=2}^{n} \frac{l_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}$$

y podemos repetir el argumento para encontrar que $l_2 = a(2),..., l_n = a(n)$.

$\supseteq$] *Tomemos* $a \in \bigcap_{j=1}^{n} p_j^{-1}(\{l_j\})$. *Es claro que* $\sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{2^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a(i)}{2^i}$. *Además como a no tiene cola de unos tenemos*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a(i)}{2^i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{2^i} + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{a(i)}{2^i} < \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i}{2^i} + \frac{1}{2^n}$$

lo cual termina la demostración de la proposición. Q.E.D.

Como consecuencia de la proposición podemos dar dos compactos en $[0,1]$, C *y* D *de medida cero de tal forma que* $C + D = [0,1]$. *Para esto tomamos* $C = f[K]$ *y* $D = f[L]$ *con* K *y* L *como en el corolario 2 (notemos que* $K, L \subseteq \tilde{G}$). *Al ser* f *continua,* K *y* L *compactos resulta que* C *y* D *son compactos. Para mostrar que* $C + D = [0,1]$ *dado* $x \in [0,1]$ *lo descomponemos en desarrollo binario* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$ *de tal forma que no tenga cola de unos. Entonces tomamos* $a \in K, b \in L$ *tal que* $a(2i-1) = x_{2i-1}$ *y* $b(2i) = x_{2i}$. *De esta manera* $f(a)+f(b) = x$. *Por último para probar que tanto* C *como* D *tienen medida cero, usando la Proposición 8.10 y que* f *es biyectiva tenemos que* $\lambda(C) = \mu(f^{-1}(f[K])) = \mu(K) = 0$. *Si uno intenta visualizar los conjuntos* C *y* D *resulta que son de tipo Cantor, sólo que en vez de quitar terceras partes quitamos mitades.*

Ejemplo 8.11. *Este ejemplo generaliza dos de los ejemplos anteriores y nos ayuda a ver algunos más.*

Sea (G, τ) *un grupo topológico con las siguientes propiedades:*

1. $G \subseteq \mathbb{R}^n$ *es abierto.*

2. $p : G \times G \subseteq \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $p(x,y) = (p_1(x,y), \ldots, p_n(x,y))$ *con* $x = (x_1, ..., x_n)$ *y* $y = (y_1, ..., y_n)$ *es tal que*

$$\frac{\partial p_j}{\partial x_i}, \frac{\partial p_j}{\partial y_k}$$

son continuas en $G \times G$, *i.e.* p *es clase* C^1.

Falta una tercera condición, pero antes recordemos que las traslaciones izquierda y derecha por a (σ_a, δ_a *respectivamente) son continuas. En este caso son clase* C^1, *pues tenemos que para todo* $x \in G$

$$\frac{\partial(\sigma_a)_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial p_j}{\partial x_i}(a,x), \ \frac{\partial(\delta_a)_j}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial p_j}{\partial x_i}(x,a) \tag{8.13}$$

por lo que $\frac{\partial(\sigma_a)_j}{\partial x_i}$ *y* $\frac{\partial(\delta_a)_j}{\partial x_i}$ *son continuas. Aún podemos decir más: tenemos que* σ_e *es la función identidad en* G *y que* $\sigma_a\sigma_b = \sigma_{ab}$, *así que* σ_a *es invertible, su inversa es* $\sigma_{a^{-1}}$ *y es clase* C^1 *por lo que* σ_a *es un difeomorfismo y en consecuencia el Jacobiano de* σ_a *no se anula en ningún punto de* G. *Lo mismo podemos decir de* δ_a *(notamos que* $\{\sigma_a : a \in G\}$ *y* $\{\delta_a : a \in G\}$ *forman subgrupos del grupo de difeomorfismos de* G *en* G*).*

3. *La tercera condición que pedimos es que el Jacobiano de σ_a y de δ_a sólo dependa de a. Si por $J(\sigma_a)$ ($J(\delta_a)$) denotamos el Jacobiano de σ_a (δ_a) tomamos $S(a) = |J(\sigma_a)|$ ($D(a) = |J(\delta_a)|$).*

Una primera observación es que las funciones $a \mapsto S(a)$ y $a \mapsto D(a)$ son continuas. Para esto tomamos un $x \in G$ fijo y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en G de tal forma que $\lim_n a_n = a$. Debemos probar que $\lim_n S(a_n)$ es igual a $S(a)$. Usando (8.13) y la continuidad de las derivadas parciales obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial p_j}{\partial x_i}(a_n, x) = \frac{\partial p_j}{\partial x_i}(a, x) = \frac{\partial (\sigma_a)_j}{\partial x_i}(x).$$

Cada entrada de la matriz

$$\left(\frac{\partial (\sigma_{a_n})_j}{\partial x_i}(x)\right)_{j,i}$$

converge, cuando n tiende a infinito, a la respectiva entrada de la matriz

$$\left(\frac{\partial (\sigma_a)_j}{\partial x_i}(x)\right)_{j,i}$$

y por la continuidad del Jacobiano $\lim_n J(\sigma_{a_n})(x) = \lim_n J(\sigma_a)(x)$. Como suponemos que $J(\sigma_{a_n})(x)$ sólo depende de a se concluye que $\lim_n S(a) = S(a)$. Se argumenta similarmente para D.

Continuando con las observaciones tenemos que tanto S como D son homomorfismos entre el grupo G y el grupo multiplicativo $(0, \infty)$. Para esto recordamos que $\sigma_a \sigma_b = \sigma_{ab}$, por lo que de la multiplicatividad del determinante se sigue $J(\sigma_a \sigma_b) = J(\sigma_a) J(\sigma_b)$ de donde $S(ab) = S(a)S(b)$.

Proposición 8.12. *Las funciones $\mu, \nu : \mathbf{B}_G \to [0, \infty]$ dadas por*

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{S(x)} d\lambda(x), \ \nu(A) = \int_A \frac{1}{D(x)} d\lambda(x)$$

(con λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$) son medidas izquierda y derecha de Haar respectivamente.

Además $\Delta(a) = \frac{D(a)}{S(a)}$.

Demostración. *Como las funciones $x \mapsto \frac{1}{S(x)}$, $x \mapsto \frac{1}{D(x)}$ son continuas, por la Proposición 8.4 tenemos que μ y ν son medidas regulares. Resta probar la invariancia bajo traslaciones. Sólo lo hacemos para μ, pues para ν es similar. Tomemos $a \in G$, como σ_a es difeomorfismo por el Teorema del cambio de variable (ver B.1 en apéndice), resulta que*

$$\int_{\sigma_a(A)} \frac{1}{S(x)} d\lambda(x) = \int_A \frac{1}{S(\sigma_a(x))} |J(\sigma_a)(x)| \, d\lambda(x) = \int_A \frac{1}{S(ax)} |J(\sigma_a)(x)| \, d\lambda(x)$$

pero $J(\sigma_a)(x)$ sólo depende de a y S es homomorfismo de grupos, por lo que

$$\int_{\sigma_a(A)} \frac{1}{S(x)} d\lambda(x) = \int_A \frac{1}{S(a)S(x)} S(a) d\lambda(x) = \int_A \frac{1}{S(x)} d\lambda(x)$$

lo que prueba la invariancia izquierda de μ. Q.E.D.

Ahora examinemos la función modular. De nuevo utilizando que δ_a es difeomorfismo y el Teorema del cambio de variable tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\delta_a(A)} \frac{1}{S(x)} d\lambda(x) = \int_A \frac{1}{S(xa)} D(a) d\lambda(x) &= \int_A \frac{1}{S(x)S(a)} D(a) d\lambda(x) \\ &= \frac{D(a)}{S(a)} \int_A \frac{1}{S(x)} d\lambda(x)\end{aligned}$$

de donde se sigue que $\mu(Aa) = \frac{D(a)}{S(a)}\mu(A)$ y que $\Delta(a) = \frac{D(a)}{S(a)}$.

Con este ejemplo nos es posible encontrar la función modular del ejemplo 2.

Tomemos G el grupo topológico del ejemplo 2 identificado con el semiplano abierto de $\mathbb{R}^2$ $\{(r,s) \in \mathbb{R}^2 : r > 0\}$, por lo que se cumple la condición 1. Encontremos las parciales de $p : G \times G \to \mathbb{R}^2$.

$$p((r,s),(t,u)) = (rt, ru + s)$$

entonces

$$\begin{array}{llll} \frac{\partial p_1}{\partial r} = t & \frac{\partial p_1}{\partial s} = 0 & \frac{\partial p_1}{\partial t} = r & \frac{\partial p_1}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial p_2}{\partial r} = u & \frac{\partial p_2}{\partial s} = 1 & \frac{\partial p_2}{\partial t} = 0 & \frac{\partial p_2}{\partial u} = r \end{array}$$

de modo que todas son continuas, por lo que se cumple la condición 2.

Seguimos con la obtención de S y D empezando con las parciales de σ_a y δ_a. Tomemos $a = (r,s) \in G$ entonces

$$\frac{\partial(\sigma_a)_1}{\partial t}(t,u) = r, \ \frac{\partial(\sigma_a)_1}{\partial u}(t,u) = 0 \tag{8.14}$$

$$\frac{\partial(\sigma_a)_2}{\partial t}(t,u) = 0, \ \frac{\partial(\sigma_a)_2}{\partial u}(t,u) = r \tag{8.15}$$

de (8.14) y (8.15) obtenemos que $J(\sigma_a) = \frac{1}{r^2}$ (que sólo depende de a) y $S(a) = \frac{1}{r^2}$. Ahora tomemos $b = (t,u) \in G$, entonces

$$\begin{gathered}\frac{\partial(\delta_a)_1}{\partial r}(r,s) = t, \ \frac{\partial(\delta_a)_1}{\partial s}(r,s) = 0 \\ \frac{\partial(\delta_a)_2}{\partial r}(r,s) = u, \ \frac{\partial(\delta_a)_2}{\partial s}(r,s) = 1\end{gathered}$$

por lo que $J(\delta_b) = \frac{1}{t}$ y $D(b) = \frac{1}{t}$. En consecuencia

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{t^2} d\lambda(t), \ \nu(A) = \int_A \frac{1}{t} d\lambda(t)$$

son medida izquierda y derecha de Haar respectivamente. Esto ya lo sabíamos, pero podemos obtener la función modular

$$\Delta((r,s)) = \frac{D(a)}{S(a)} = \frac{r^{-1}}{r^{-2}} = r$$

Como consecuencia podemos obtener que $\mu(A^{-1}) = \nu(A)$ para todo boreliano A, pues por la Proposición 7.7

$$\mu(A^{-1}) = \int_A \frac{1}{\Delta(r,s)} d\lambda(r,s) = \int_A \frac{1}{r} d\lambda(r,s) = \nu(A)$$

Por último obtenemos un ejemplo en el que $\mu(A)$ es finita pero $\mu(A^{-1})$ no lo es. Tomemos $A = [1,\infty) \times [0,1)$. En el ejemplo 8.6 *obtuvimos que $\mu(A) = 1$ y $\mu(A^{-1}) = \nu(A) = \infty$. Compare lo anterior con la Proposición 6.35, que dice que si $\mu(A)$ es positiva entonces también lo es $\mu(A^{-1})$.*

Ejemplo 8.13. *Tomemos el grupo topológico $G = GL(\mathbb{R}^2) \subseteq \mathbb{R}^4$ (el grupo de matrices invertibles). Entonces G es abierto en $\mathbb{R}^4$ (pues puede verse como la imagen inversa bajo la función determinante del abierto $\mathbb{R}\backslash\{0\}$) por lo que se cumple la condición* 1 *del ejemplo 8.11.*

Encontremos las parciales de p (la multiplicación). Tomemos

$$a = \begin{pmatrix} x & y \\ w & z \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

en el grupo. Entonces

$$ab = \begin{pmatrix} xr + yt & xs + yu \\ zr + wt & zs + wu \end{pmatrix}$$

y las parciales son

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{\partial p_1}{\partial x} = r & \frac{\partial p_1}{\partial y} = t & \frac{\partial p_1}{\partial z} = 0 & \frac{\partial p_1}{\partial w} = 0 & \frac{\partial p_1}{\partial r} = x & \frac{\partial p_1}{\partial s} = 0 & \frac{\partial p_1}{\partial t} = y & \frac{\partial p_1}{\partial u} = 0 \\
\frac{\partial p_2}{\partial x} = s & \frac{\partial p_2}{\partial y} = u & \frac{\partial p_2}{\partial z} = 0 & \frac{\partial p_2}{\partial w} = 0 & \frac{\partial p_2}{\partial r} = 0 & \frac{\partial p_2}{\partial s} = x & \frac{\partial p_2}{\partial t} = 0 & \frac{\partial p_2}{\partial u} = y \\
\frac{\partial p_3}{\partial x} = 0 & \frac{\partial p_3}{\partial y} = 0 & \frac{\partial p_3}{\partial z} = r & \frac{\partial p_3}{\partial w} = t & \frac{\partial p_3}{\partial r} = z & \frac{\partial p_3}{\partial s} = 0 & \frac{\partial p_3}{\partial t} = w & \frac{\partial p_3}{\partial u} = 0 \\
\frac{\partial p_4}{\partial x} = 0 & \frac{\partial p_4}{\partial y} = 0 & \frac{\partial p_4}{\partial z} = s & \frac{\partial p_4}{\partial w} = u & \frac{\partial p_4}{\partial r} = 0 & \frac{\partial p_4}{\partial s} = z & \frac{\partial p_4}{\partial u} = w & \frac{\partial p_4}{\partial t} = 0
\end{array}$$

todas continuas y de donde obtenemos

$$J(\sigma_a) = \det \begin{pmatrix} x & 0 & y & 0 \\ o & x & 0 & y \\ z & 0 & w & 0 \\ 0 & z & 0 & w \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 \\ z & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & z & w \end{pmatrix} = \det(a)^2 = S(a)$$

(donde la segunda igualdad se obtiene intercambiando los renglones 2 y 3 y después las columnas 2 y 3). Además

$$J(\delta_b) = \det \begin{pmatrix} r & t & 0 & 0 \\ s & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & t \\ 0 & 0 & s & u \end{pmatrix} = \det(b)^2 = D(b)$$

De esto obtenemos dos cosas: la primera que el grupo es unimodular (pues $S = D$) y entonces tenemos un ejemplo de un grupo unimodular que no es ni abeliano ni compacto; la segunda cosa es que

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{(\det x)^2} d\lambda(x)$$

es medida de Haar sobre G.

Parte III

$L_1(G)$

Capítulo 9

$L_1(G)$

Comenzaremos a trabajar con las funciones integrables sobre un grupo topológico respecto a una medida de Haar; es decir con $L_1(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ espacio que denotaremos por $L_1(G)$. Definiremos la multiplicación en $L_1(G)$ como la convolución y veremos que con esta multiplicación $L_1(G)$ es un álgebra de Banach que es conmutativa si y sólo si G es conmutativo. Además probaremos que es equivalente que $L_1(G)$ tenga uno y que G sea discreto. Por último estudiaremos las funcionales lineales multiplicativas, los caracteres de G y la semisimplicidad de $L_1(G)$.

9.1 Funciones continuas de soporte compacto

Durante esta sección (G, τ) denota un grupo topológico localmente compacto Hausdorff segundo numerable fijo y μ una medida regular sobre los borelianos de G. Empezaremos recordando unos conceptos, suponiendo los conocimientos básicos de integración sobre espacios de medida.

Definición 9.1. *1. Si p es un número en $[1, \infty)$, decimos que una función $\mathbf{B}_G$-medible f es p-integrable si $\int |f|^p d\mu < \infty$. Por $\mathcal{L}_p^{\mathbb{R}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ y $\mathcal{L}_p^{\mathbb{C}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ denotamos los subconjuntos de funciones $\mathbf{B}_G$-medibles (con valores reales o complejos respectivamente) que son p-integrables.*

Es conocido que $\mathcal{L}_p^{\mathbb{R}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ y $\mathcal{L}_p^{\mathbb{C}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ respectivamente y que $\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$ define una seminorma (ver por ejemplo [Cohn] capítulo 3).

Si establecemos la relación en $\mathcal{L}_p^{\mathbb{C}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ dada por $f \sim g$ si y sólo si $\|f - g\|_p = 0$, obtenemos una relación de equivalencia en $\mathcal{L}_p^{\mathbb{C}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ cuyo cociente denotaremos por $L_p^{\mathbb{C}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$. Gracias a este proceso (identificando funciones iguales casi dondequiera relativo a μ), a partir de la seminorma $\|\cdot\|_p$ podemos obtener una norma en $L_p^{\mathbb{C}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ simplemente tomando la norma de una clase como la norma de uno (ó de cualquiera) de sus representantes (notamos que la definición no depende del representante, ya que si $f \sim g$ las normas p son iguales). Es conocido que entonces obtenemos un espacio vectorial normado completo, es decir un espacio de Banach.

Las funciones continuas de soporte compacto tienen propiedades bastante útiles. Vimos en la Proposición 5.12 que son uniformente continuas por la derecha y por la izquierda. Además son p-integrables, pues si f es continua de soporte compacto, usando que $|f(x)| \leq \|f\|_G \chi_{sop(f)}(x)$ obtenemos

$$\int |f(x)|^p d\mu(x) \leq \|f\|_G^p \mu(sop(f))$$

pero $\mu(sop(f))$ es finita, al ser el soporte de f compacto. Entonces $\int |f|^p d\mu$ es finita.

Otra propiedad que tienen las funciones continuas de soporte compacto es que son $\|\cdot\|_p$-densas en las funciones p-integrables.

Lema 9.2. *Dado $C \subseteq G$ compacto y $U \in \tau$ tal que $C \subseteq U$ existe $g : G \to [0,1]$ continua de soporte compacto, con $\chi_C \leq g \leq \chi_U$ y $sop(g) \subseteq U$.*

Demostración. Sea $C \subseteq U \in \tau$ con C compacto y sea $V \in \tau$ tal que $C \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ con $\bar{V}$ compacto (ver apeńdice A.7). Como $\bar{V}$ es compacto Hausdorff resulta que es normal. Ahora, C y $\bar{V} \backslash V$ son cerrados ajenos en $\bar{V}$, en consecuencia por el Lema de Urysohn (ver apéndice A.6) existe $g : \bar{V} \to [0,1]$ continua tal que g restringida a C es uno y restringida a $\bar{V} \backslash V$ es cero. Extendamos g a G haciéndola cero en $G \backslash V$. Lo primero que notamos es que g restringida a los dos cerrados $\bar{V}$ y $(G \backslash V)$ es continua (en el segundo es cero) así que g es continua en G. Ya que g restringida a C es uno tenemos que $\chi_C \leq g$. Por otro lado, si $x \notin U$ entonces $x \notin \bar{V}$; en consecuencia $g(x) = \chi_U(x) = 0$. Como g está acotada por uno tenemos que $g \leq \chi_U$. Por último, como g vale cero en $G \backslash \bar{V}$ los puntos donde no se anula g están contenidos en $\bar{V}$ y entonces $sop(g) \subseteq \bar{V}$, por lo que se concluye que el soporte de g es compacto. $Q.E.D.$

Proposición 9.3. *Sea $p \in [1, \infty)$. Recordamos que $C_c^{\mathbb{R}}(G)$ y $C_c^{\mathbb{C}}(G)$ denotan los conjuntos de funciones continuas sobre G con soporte compacto que toman valores reales y complejos respectivamente. Entonces:*

1. *$C_c^{\mathbb{R}}(G)$ es $\|\cdot\|_p$-densa en $\mathcal{L}_p^{\mathbb{R}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$*
2. *$C_c^{\mathbb{C}}(G)$ es $\|\cdot\|_p$-densa en $\mathcal{L}_p^{\mathbb{C}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$*

Demostración.

Prueba de 1.

Primero probaremos que las funciones simples son $\|\cdot\|_p$-densas en $\mathcal{L}_p^{\mathbb{R}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$. Para esto, sea $f \in \mathcal{L}_p^{\mathbb{R}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ y tomemos una sucesión de funciones $\mathbf{B}_G$−simples $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $|s_n(x)| \leq |f(x)|$ y $\lim_n s_n(x) = f(x)$ para toda $x \in G$. Entonces:

(a) $|s_n - f|^p \leq (|s_n| + |f|)^p \leq 2^p |f|^p$,

(b) $\lim_n |s_n - f|^p = 0$.

Por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\lim_n \|s_n - f\|_p = 0$$

lo que prueba que las funciones $\mathbf{B}_G$-simples son $\|\cdot\|_p$ –densas en $\mathcal{L}_p^{\mathbb{R}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$.

Por otro lado afirmamos que los subconjuntos que aparecen en la descomposición canónica de cada s_n son de medida finita. Para probar esto escribimos $s_n = \sum_{i=1}^{m_n} \alpha_i(n)\chi_{A_i(n)}$ con $\alpha_i(n) \neq 0$, $A_i(n) \in \mathcal{A}$ ajenos. Entonces:

$$|s_n|^p = \sum_{i=1}^{m_n} |\alpha_i(n)|^p \chi_{A_i(n)}$$

pero $|s_n|^p \leq |f|^p$ y $f \in \mathcal{L}_p^{\mathbb{R}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$, por lo que resulta

$$\sum_{i=1}^{m_n} |\alpha_i(n)|^p \mu(A_i(n)) \leq \int |f|^p d\mu < \infty$$

y como cada $\alpha_i(n) \neq 0$ se tiene que $\mu(A_i(n)) < \infty$.

Para terminar la demostración de la primera parte de la proposición es suficiente probar que dada $\varepsilon > 0$ y $A \in \mathbf{B}_G$ con $\mu(A) < \infty$ existe g continua de soporte compacto tal que $\|g - \chi_A\|_p < \varepsilon$.

Como A es de medida finita, por la regularidad de μ existe $U \in \tau$ tal que $A \subseteq U$ y $\mu(U \backslash A) < \frac{\varepsilon}{2}$. De nuevo por la regularidad de μ, existe $C \subseteq U$ compacto tal que $\mu(U \backslash C) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ahora como $(A \backslash C) \cup (C \backslash A) \subseteq (U \backslash C) \cup (U \backslash A)$ resulta que $\mu(A \triangle C) < \varepsilon$.

Gracias al Lema 9.2 existe g continua de soporte compacto tal que $\chi_C \leq g \leq \chi_U$ y $sop(g) \subseteq U$.

De las desigualdades

$$|g - \chi_A|^p \leq (|g - \chi_C| + |\chi_C - \chi_A|)^p \leq 2^p (|g - \chi_C|^p + \chi_{C\triangle A})$$

se sigue que

$$\int |g - \chi_A|^p d\mu \leq 2^p \left(\int |g - \chi_C|^p d\mu + \int \chi_{C\triangle A} d\mu \right)$$

pero $|g - \chi_C|^p \leq |\chi_U - \chi_C|^p = \chi_{U\backslash C}$ (pues $sop(g) \subseteq U$), por lo que tenemos

$$\|g - \chi_A\|_p^p \leq 2^p \left(\int \chi_{U\backslash C} d\mu + \int \chi_{C\triangle A} d\mu \right) = 2^p \left(\frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon \right) = 2^{p-1} 3\varepsilon$$

Esto termina la demostración de la primera parte de la proposición.

Prueba de 2.

Sea $f \in \mathcal{L}_p^{\mathbb{C}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ y escribamos $f = f_1 + i f_2$ con cada f_i en $\mathcal{L}_p^{\mathbb{R}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$.

Por 1. existen g_1 y g_2 continuas de soporte compacto tal que $\int |g_i - f_i|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$. Si tomamos $g = g_1 + i g_2$ tenemos que g es continua de soporte compacto y

$$\int |f - g|^p d\mu \leq 2^p \left(\int |f_1 - g_1|^p d\mu + \int |f_2 - g_2|^p d\mu \right) < 2^p \varepsilon$$

de donde $\|f-g\|_p < 2\varepsilon^{1/p}$. *Q.E.D.*

Lema 9.4. *Sean $(X,\tau),(Y,\rho)$ dos espacios topológicos con X compacto.*
Si $f: X\times Y \to \mathbb{R}$ es continua, dada $\varepsilon > 0$ y $y_0 \in Y$ existe V vecindad de y_0 tal que para todo $x \in X$ y para todo $y \in V$ se tiene que $|f(x,y) - f(x,y_0)| < \varepsilon$.

Demostración. Por la continuidad de f para todo $x \in X$ existe $U(x)$ vecindad de x y $V(x)$ vecindad de y_0 tal que si $(z,w) \in U(x)\times V(x)$ entonces $|f(z,w) - f(x,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Por la compacidad de X existen $x_1,...,x_n$ puntos en X tal que $X = \bigcup_{i=1}^n U(x_i)$. Tomemos $V = \bigcap_{i=1}^n V(x_i)$ y $y \in V$. Entonces V es vecindad de y_0. Ahora dado $x \in X$, tenemos que $x \in U(x_j)$ para alguna j y entonces

$$|f(x,y) - f(x_j,y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad |f(x,y_0) - f(x_j,y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

(pues $(x,y),(x,y_0) \in U(x_j)\times V(x_j)$) de donde se tiene que

$$|f(x,y) - f(x,y_0)| < |f(x,y) - f(x_j,y_0)| + |f(x,y_0) - f(x_j,y_0)| < \varepsilon.$$

Q.E.D.

Definición 9.5. *Sean $x,y \in G$ y sean $i_x, i^y : G \to G\times G$ dadas por*

$$i_x(z) = (x,z), i^y(z) = (z,y)$$

Es claro que tanto i_x como i^y son continuas. Dada una función $h: G\times G \to \mathbb{C}$ definimos $h_x, h^y : G \to \mathbb{C}$ mediante $h_x = h\circ i_x$ y $h^y = h\circ i^y$.

Proposición 9.6. *Sean $h \in K_{\mathbb{C}}(G\times G)$. Entonces:*

1. *Para cualesquiera $x,y \in G$, $h_x, h^y \in C_c^{\mathbb{C}}(G)$.*
2. *Las funciones $\phi,\psi : G \to \mathbb{C}$ dadas por $\phi(x) = \int h_x(y)d\mu(y)$ y $\psi(y) = \int h^y(x)d\mu(x)$ son continuas de soporte compacto.*

Demostración. Sean p_1, p_2 las proyecciones de la primera y segunda coordenada de $G\times G$ en G respectivamente.

Por definición $h_x = h\circ i_x$ y $h^y = h\circ i^y$. En consecuencia h_x y h^y son continuas. Además $h^y(z) \neq 0$ si y sólo si $h(z,y) \neq 0$, por lo que

$$(h^y)^{-1}(\mathbb{C}\backslash\{0\}) \times \{y\} \subseteq h^{-1}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$$

Al tomar la cerradura obtenemos $sop(h^y)\times\{y\} \subseteq sop(h)$. Tomando la primera proyección resulta

$$sop(h^y) \subseteq p_1[sop(h)] \tag{9.1}$$

por lo que $sop(h^y)$ es compacto. De manera similar se prueba que h_x tiene soporte compacto.

Denotemos por K_i a $p_i[sop(h)]$ y notemos que por lo anterior $sop(h_x) \subseteq K_2$ y $sop(h^y) \subseteq K_1$ para cualesquiera x e y.

Ahora probaremos que $\psi \in C_c^{\mathbb{C}}(G)$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $y_0 \in Y$.

Usando el Lema 9.4 tomamos V vecindad de y_0 que cumpla que para todo $y \in V$ y $x \in K_1$, $|h(x,y) - h(x,y_0)| < \varepsilon$. En consecuencia, para toda $y \in V$

$$\int_{K_1} |h^y(x) - h^{y_0}(x)|\, d\mu(x) \leq \varepsilon\mu(K_1) \tag{9.2}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que para todo y, $sop(h^y) \subseteq K_1$ tenemos

$$|\psi(y) - \psi(y_0)| \leq \int |h^y(x) - h^{y_0}(x)|\, d\mu(x) = \int_{K_1} |h^y(x) - h^{y_0}(x)|\, d\mu(x) \tag{9.3}$$

Si $y \in V$, por (9.2) obtenemos que $|\psi(y) - \psi(y_0)| \leq \varepsilon\mu(K_1)$, lo que prueba la continuidad de ψ. Además si $y \notin K_2$, para todo $x, (x,y) \notin sop(h)$ por lo que h^y es idénticamente cero, en consecuencia $sop(\psi) \subseteq K_2$ y entonces el soporte de ψ es compacto. *Q.E.D.*

Terminamos la sección con un lema que será util más adelante.

Lema 9.7. 1. *Sean ε, δ funciones $\mathbf{B}_G$-medibles acotadas c.d. rel. μ tal que para toda $f \in C_c^{\mathbb{R}}(G)$ se cumpla*

$$\int f\varepsilon d\mu = \int f\delta d\mu;$$

entonces $\varepsilon = \delta$ c.d. rel μ.

2. *Si μ es una medida de Haar izquierda y ε, δ son funciones continuas tales que $\varepsilon = \delta$ c.d. rel μ entonces $\varepsilon = \delta$.*

Demostración.

Prueba de 1.

Es equivalente probar que si una función $\mathbf{B}_G$-medible acotada c.d. ε cumple

$$\int f\varepsilon d\mu = 0 \tag{9.4}$$

para toda $f \in C_c^{\mathbb{R}}(G)$, entonces $\|\varepsilon\|_\infty = 0$.

Para probar que $\|\varepsilon\|_\infty = 0$ probaremos que $\|Re(\varepsilon)\|_\infty = 0$ y $\|Im(\varepsilon)\|_\infty = 0$. De (9.4) obtenemos que para toda $f \in C_c^{\mathbb{R}}(G)$

$$\int fRe(\varepsilon)d\mu = 0 \qquad \int fIm(\varepsilon)d\mu = 0 \tag{9.5}$$

Afirmamos que para todo boreliano B de medida finita se tiene que

$$\int_B Re(\varepsilon)d\mu = 0 \qquad \int_B Im(\varepsilon)d\mu = 0 \tag{9.6}$$

Para lo cual observamos que si B es un boreliano de medida finita, $\chi_B \in \mathcal{L}_1(G)$. Como las funciones continuas de soporte compacto son $\|\cdot\|_1$-densas en $\mathcal{L}_1(G)$, existe $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de funciones continuas de soporte compacto tal que $lim_n\|f_n - \chi_B\|_1 = 0$.

Pero usando la desigualdad

$$\left|\int \chi_B Re(\varepsilon)d\mu - \int f_n Re(\varepsilon)\mu\right| \leq \|Re(\varepsilon)\|_\infty \|f_n - \chi_B\|_1$$

y la hipótesis de que $\int f_n Re(\varepsilon)d\mu = 0$ para toda n (gracias a (9.5)) obtenemos que $\int \chi_B Re(\varepsilon) = 0$. De manera similar, $\int \chi_B Im(\varepsilon) = 0$.

Ahora, usando (9.6) probaremos que $\|Re(\varepsilon)\|_\infty = 0$ y $\|Im(\varepsilon)\|_\infty = 0$.

Supongamos que $\|Re(\varepsilon)\|_\infty > 0$ y tomemos $r \in (0, \|Re(\varepsilon)\|_\infty)$ arbitrario.

Sea $A = \{x \in G : |Re(\varepsilon)(x)| > r\}$ y note que A es la unión ajena de A_1 y A_2 con

$$A_1 = \{x \in G : Re^+(\varepsilon)(x) > r\} \qquad A_2 = \{x \in G : Re^-(\varepsilon)(x) > r\}$$

Como A no es μ-nulo existe B boreliano de medida finita tal que $\mu(B \cap A) > 0$ y en consecuencia $\mu(B \cap A_1) > 0$ ó $\mu(B \cap A_2) > 0$.

Por otro lado, gracias a (9.6) tenemos

$$0 = \int_{B\cap A_1} Re(\varepsilon)d\mu = \int_{B\cap A_1} Re^+(\varepsilon)d\mu \geq r\mu(B \cap A_1)$$

$$0 = \int_{B\cap A_1} Im(\varepsilon)d\mu = -\int_{B\cap A_1} Re^-(\varepsilon)d\mu \leq -r\mu(B \cap A_2)$$

y como $r \neq 0$ se sigue que $\mu(B \cap A_1) = 0$ y $\mu(B \cap A_2) = 0$, lo cual es una contradicción.

En conclusión, $\|Re(\varepsilon)\|_\infty = 0$ y de manera similar $\|Im(\varepsilon)\|_\infty = 0$.

Prueba de 2.

Sea $A = \{x \in G : |\varepsilon(x) - \delta(x)\}| > 0\}$. Al ser ε y δ continuas resulta que A es abierto. Además A es μ-nulo. Obsérvese que $G \setminus A$ es denso en G, pues de lo contrario existe un abierto U no vacío contenido en el complemento de $G \setminus A$, es decir, contenido en A. Pero los abiertos no vacíos tienen medida positiva bajo una medida de Haar, lo que contradice que A sea de medida cero. Entonces $G \setminus A$ es denso, pero también es cerrado, por lo que $G \setminus A = G$ y en consecuencia $A = \emptyset$. *Q.E.D.*

Nota: En general trabajaremos con funciones μ-integrables o continuas de soporte compacto que toman valores complejos y las denotaremos simplemente por $\mathcal{L}_1(G)$ y $C_c(G)$ respectivamente.

9.2 Convolución

Antes de definir la convolución queremos hacer algunas observaciones. Al ser el grupo segundo numerable y localmente compacto, por la Proposición 6.30 tenemos que G es σ-finito y $\mathbf{B}_G \otimes \mathbf{B}_G = \mathbf{B}_{G\times G}$; por lo tanto podemos usar el Teorema de Fubini.

Ahora definiremos lo que será el producto en $L_1(G)$, es decir, la convolución.

Definición 9.8. *Dadas f, g funciones $\mathbf{B}_G-$medibles, se define la* <u>*convolución*</u> *de f y g en $y \in G$ (denotado$(f * g)(y)$) como*

$$(f * g)(y) = \begin{cases} \int f(x)g(x^{-1}y)d\mu(x), & \text{si } x \mapsto f(x)g(x^{-1}y) \text{ es } \mu \text{ integrable} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La siguiente proposición nos ayudará a probar que la convolución es una multiplicación en $\mathcal{L}_1(G)$.

Proposición 9.9. *Sean f, g y h funciones $\mathbf{B}_G$-medibles.*

1. *Si f y g son continuas de soporte compacto, entonces $f * g$ es continua de soporte compacto y*
$$sop(f * g) \subseteq sop(f)sop(g)$$

2. *Si f y g están en $\mathcal{L}_1(G)$, entonces para casi toda y, la función $x \mapsto f(x)g(x^{-1}y)$ es μ integrable, $f * g$ está en $\mathcal{L}_1(G)$ y $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$, es decir, $\|\cdot\|_1$ es compatible con la convolución..*

3. *Si f_1 y g_1 están en $\mathcal{L}_1(G)$ y $f = f_1$, $g = g_1$ c.d. rel μ, entonces $f * g = f_1 * g_1$.*

4. *Si f, g y h están en $\mathcal{L}_1(G)$ entonces $\alpha(f * g) = (\alpha f) * g = f * (\alpha g)$, $f * (g + h) = f * g + f * h$ y $(g + h) * f = g * f + h * f$ c.d. rel. μ. Además $f * (g * h) = (f * g) * h$ c.d. rel. μ.*

Demostración.
Tomemos $k : G \times G \to G$ dada por $k(x, y) = f(x)g(y)$. La función k nos ayudará a lo largo de la demostración. Primero veamos que k es $\mathbf{B}_{G\times G}$-medible.

Caso 1: $f = \chi_A$ y $g = \chi_B$, para algunos borelianos A y B. Entonces $k(x, y) = \chi_A(x)\chi_B(y) = \chi_{A\times B}(x, y)$. Como A y B están en $\mathbf{B}_G$, $A \times B$ está en $\mathbf{B}_G \otimes \mathbf{B}_G = \mathbf{B}_{G\times G}$, por lo que k es $\mathbf{B}_{G\times G}$-medible.

Caso 2: f y g son $\mathbf{B}_G$-simples, entonces

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i} \quad g = \sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{B_j}$$

y en consecuencia

$$k(x, y) = \sum_{i,j} a_ib_j\chi_{A_i}(x)\chi_{B_j}(y) = \sum_{i,j} a_ib_j\chi_{A_i\times B_i}(x, y)$$

así que por el caso 1, k es $\mathbf{B}_{G\times G}$-medible.

Caso general: Sean $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de funciones $\mathbf{B}_G$-simples tales que $\lim_n s_n = f$ y $\lim_n t_n = g$. Entonces $\lim_n s_n(x)t_n(y) = k(x, y)$. Pero por el caso 2 para cada n, la función $(x, y) \mapsto s_n(x)t_n(y)$ es $\mathbf{B}_{G\times G}$-medible; en consecuencia, k es $\mathbf{B}_{G\times G}$-medible.

Sea $S(x, y) = (x, xy)$. Recuerde que del Lema 6.32 se tiene que S es un homeomorfismo, $S^{-1}(x, y) = (x, x^{-1}y)$ y que S^{-1} preserva a $\mu \otimes \mu$. Tomemos

$h(x,y) = k(S^{-1}(x,y))$. Como k es $\mathbf{B}_{G\times G}$-medible y S^{-1} es homeomorfismo resulta que h es $\mathbf{B}_{G\times G}$-medible. Además observe que $h^y(x) = f(x)g(x^{-1}y)$, el integrando en la definición de la convolución.

Prueba de 1.

Supongamos que f y g son continuas de soporte compacto. Entonces k es continua de soporte compacto y

$$sop(k) \subseteq sop(f) \times sop(g) \tag{9.7}$$

Como S^{-1} es homeomorfismo y h es continua de soporte compacto tenemos

$$sop(h) \subseteq S[sop(f) \times sop(g)]$$

Por la Proposición 9.6 h^y es continua de soporte compacto para todo y, por lo que es integrable respecto a μ. En consecuencia $f * g$ se calcula como

$$(f*g)(y) = \int f(x)g(x^{-1}y)d\mu(x) = \int h^y(x)fd\mu(x) = \psi(y)$$

con ψ igual a la de la Proposición 9.6. Entonces $f * g = \psi$. Por la Proposición 9.6 tenemos que $\psi = f * g$ es continua de soporte compacto.

Ahora probemos que $sop(f * g) \subseteq sop(f)sop(g)$ ó equivalentemente, que $sop(\psi) \subseteq sop(f)sop(g)$. Por (9.1)

$$sop(\psi) \subseteq p_2[sop(h)]$$

pero $sop(h) \subseteq S[sop(f) \times sop(g)]$ (con p_2 la proyección en la segunda coordenada), por lo que es suficiente probar

$$p_2[S[sop(f) \times sop(g)]] \subseteq sop(f)sop(g) \tag{9.8}$$

Si y está en $p_2[S[sop(f)\times sop(g)]]$, entonces para alguna x, $S^{-1}(x,y) = (x, x^{-1}y)$ está en $sop(f) \times sop(g)$ y en consecuencia $y \in xsop(g) \subseteq sop(f)sop(g)$. Esto termina la prueba de (9.8).

Prueba de 2.

Supongamos que f y g están en $\mathcal{L}_1(G)$. Veamos primero que k está en $\mathcal{L}_1(G \times G)$. Si probamos que

$$\int |k(x,y)|d\mu \otimes \mu(x,y) = \int |f(x)|d\mu(x) \int |g(y)|d\mu(y) \tag{9.9}$$

habremos acabado. Empezamos suponiendo que $f = \chi_A$ y $g = \chi_B$; entonces

$$k(x,y) = \chi_A(x)\chi_B(y) = \chi_{A\times B}(x,y)$$

y (9.9) se cumple.

Por linealidad se tiene que si f y g son funciones $\mathbf{B}_G-$simples, (9.9) se sigue cumpliendo.

Por último para f y g arbitrarias encontramos $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ y $(t_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sucesión de funciones $\mathbf{B}_G$-simples crecientes no negativas con $s_n \leq |f|$, $t_n \leq |g|$ y

$$\lim_n s_n = |f| \quad \lim_n t_n = |g|$$

Entonces si tomamos $r_n(x,y) = s_n(x)t_n(y)$ obtenemos una sucesión de funciones $\mathbf{B}_{G\times G}$−simples no negativas crecientes tal que $\lim_n r_n = |k|$ y entonces por el Teorema de la convergencia monótona tenemos que $\lim_n \int r_n d\mu\otimes\mu = \int |k| d\mu \otimes \mu$. Por otro lado, por el caso anterior $\int r_n d\mu \otimes \mu = \int s_n d\mu \int t_n d\mu$ pero

$$\lim_n \int s_n d\mu = \int |f| d\mu \quad \lim_n \int t_n d\mu = \int |g| d\mu$$

concluyendo que $\int |k| d\mu \otimes \mu = \int |f| d\mu \int |g| d\mu < \infty$ lo que prueba (9.9).

Usando que S^{-1} preserva a $\mu\otimes\mu$ se tiene que $h \in \mathcal{L}_1(G\times G)$ y en consecuencia por el Teorema de Fubini tenemos que $h^y \in \mathcal{L}_1$ c.d. rel μ; i.e. la función $x \mapsto f(x)g(x^{-1}y)$ es μ-integrable para casi toda y. Por otro lado, de nuevo por el Teorema de Fubini $y \mapsto \int h^y(x)d\mu(x)$ esta en $\mathcal{L}_1(G)$. Pero $\int h^y(x)d\mu(x) = (f*g)(y)$ así pues $f*g \in \mathcal{L}_1(G)$.

Por último

$$\int |(f*g)|(y)d\mu(y) = \int \left|\int h(x,y)d\mu(x)\right| d\mu(y) \leq \int\int |h(x,y)| d\mu(x)d\mu(y)$$

y por Fubini

$$\int\int |h(x,y)|d\mu(x)d\mu(y) = \int |h(x,y)| d\mu\otimes\mu(x,y) = \int |k(x,y)| d\mu \otimes \mu(x,y)$$

donde la segunda igualdad se debe a que S^{-1} preserva a $\mu\otimes\mu$. Usando (9.9) y las dos ecuaciones anteriores concluimos

$$\int |(f*g)(y)| d\mu(y) \leq \int |f(x)| d\mu(x) \int |g(y)| d\mu(y)$$

Prueba de 3.

Tomemos $k_1(x,y) = f_1(x)g_1(y)$ y $h_1(x,y) = k_1(S^{-1}(x,y))$. Al igual que antes, h_1 es $\mu\otimes\mu$-integrable.

Afirmamos que para toda $y \in G$,

$$h^y = h_1^y \text{ c.d. rel. } \mu. \tag{9.10}$$

Tomemos

$$N = \{x \in G : f(x) \neq f_1(x)\}$$
$$M = \{x \in G : g(x) \neq g_1(x)\}$$

Entonces M y N son μ-nulos y en consecuencia $G \times N$ y $M \times G$ son $\mu\otimes\mu$-nulos. Notamos que $k = k_1$ en el complemento de $(N\times G)\cup(G\times M)$. Tomemos

$L = (N \times G) \bigcup (G \times M)$ y notemos que $h = h_1$ en el complemento de $S(L)$, de donde se sigue que dada $y \in G$, $h^y = h_1^y$ en el complemento de $(S(L))_y$. Para probar nuestra afirmación es suficiente probar que para toda y en G, el conjunto $(S(L))_y$ es μ-nulo. Para lo cual primero observamos

$$S(L) = S(N \times G) \bigcup S(G \times M)$$

Ahora

$$S(N \times G) = \{(x, xy) : (x, y) \in N \times G\} = N \times G$$
$$S(G \times M) = \{(x, xy) : (x, y) \in G \times M\} = p^{-1}(M)$$

con p dada por $p(x, y) = xy$. De aquí obtenemos que $(S(L))_y$ es la unión de N con $\left(p^{-1}(M)\right)_y$, pero N es μ-nulo, así que resta probar que para toda y, $\left(p^{-1}(M)\right)_y$ es μ−nulo.

Pero $x \in \left(p^{-1}(M)\right)_y$ si y sólo si $xy \in M$, i.e. si y sólo si $x \in My^{-1}$ por lo que $\left(p^{-1}(M)\right)_y = My^{-1}$. Por último, $\mu(My^{-1}) = \Delta(y^{-1})\mu(M) = 0$, lo que termina la demostración de (9.10).

De (9.10) se desprende que para toda $y \in G$, h^y es μ integrable si y sólo si h_1^y es μ integrable, en cuyo caso $\int h^y d\mu = \int h_1^y d\mu$ y en consecuencia por la definición de la convolución para toda y, $(f * g)(y) = (f_1 * g_1)(y)$

Prueba de 4.

Por 1., existe N μ-nulo tal que para toda y fuera de N

$$(f * g)(y) = \int f(x)g(x^{-1}y)d\mu(x)$$
$$(f * h)(y) = \int f(x)h(x^{-1}y)d\mu(x)$$
$$(f * (g + h))(y) = \int f(x)(g + h)(x^{-1}y)d\mu(x)$$

De la linealidad de la integral se sigue que para toda y fuera de N

$$(f * (g + h))(y) = (f * g)(y) + (f * h)(y)$$

De manera similar se prueba el resto de la primera parte el inciso 4.

Para probar que $(f * g) * h = f * (g * h)$ c.d. rel. μ, por la densidad de las funciones continuas de soporte compacto y la compatibilidad de $\|\cdot\|_1$ es suficiente probar la asociatividad de $*$ para las funciones continuas de soporte compacto.

Tenemos que

$$((f * g) * h)(y) = \int\int f(z)g(z^{-1}x)h(x^{-1}y)d\mu(z)d\mu(x) \quad (9.11)$$
$$(f * (g * h))(y) = \int\int f(z)g(x)h(x^{-1}z^{-1}y)d\mu(x)d\mu(z) \quad (9.12)$$

Pero $(x,z) \mapsto f(z)g(z^{-1}x)h(x^{-1}y)$ es continua de soporte compacto, así que está en $\mathcal{L}_1(G \times G)$ y entonces podemos aplicar Fubini a (9.11) para obtener

$$((f*g)*h)(y) = \int\int f(z)g(z^{-1}x)h(x^{-1}y)d\mu(x)d\mu(z)$$

pero usando la invariancia izquierda de μ (con $x \mapsto zx$, para z fijo) tenemos

$$((f*g)*h)(y) = \int\int f(z)g(x)h(z^{-1}x^{-1}y)d\mu(x)d\mu(z)$$

así que comparando con (9.12) tenemos

$$((f*g)*h)(y) = (f*(g*h))(y).$$

Q.E.D.

La Proposición 9.9 nos dice que para dos funciones μ-integrables f y g, existe un boreliano N μ-nulo de tal forma que afuera de N, $f*g$ se calcula como

$$(f*g)(y) = \int f(x)g(x^{-1}y)d\mu(x) \tag{9.13}$$

y que si f y g son continuas de soporte compacto, tal conjunto N es vacío. Debido a esto, es usual usar (9.13) como definición de $f*g$.

Existen otras formas de calcular $f*g$ como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 9.10. *La convolución de f con g puede calcularse como*

$$\begin{aligned}(f*g)(y) &= \int f(yx)g(x^{-1})d\mu(x)\\ &= \int f(yx^{-1})g(x)\frac{1}{\Delta(x)}d\mu(x)\\ &= \int f(x^{-1})g(xy)\frac{1}{\Delta(x)}d\mu(x)\end{aligned}$$

Demostración. Sea N un boreliano μ-nulo tal que para todo y en el complemento de N

$$(f*g)(y) = \int f(x)g(x^{-1}y)d\mu(x) \tag{9.14}$$

Tomemos $y \notin N$ fija. Como la función $x \mapsto yx$ preserva a μ, se sigue que

$$\int f(x)g(x^{-1}y)d\mu(x) = \int f(yx)g(x^{-1})d\mu(x)$$

Como consecuencia tenemos que la función $x \mapsto f(yx)g(x^{-1})$ es μ-integrable.

Probemos

$$\int f(yx)g(x^{-1})d\mu(x) = \int f(yx^{-1})g(x)\frac{1}{\Delta(x)}d\mu(x) \tag{9.15}$$

Sea $h(x) = f(yx)g(x^{-1})$. Por lo anterior, h es μ-integrable. Ahora, por (7.2), en la Proposición 7.3 tenemos

$$\int h(x)\mu(x) = \int h(x^{-1})\frac{1}{\Delta(x)}d\mu(x)$$

pero $h(x^{-1}) = f(yx^{-1})g(x)$, lo que prueba (9.15). Se sigue que la función $x \mapsto f(yx^{-1})g(x)\frac{1}{\Delta(x)}$ es μ-integrable.

Probemos

$$\int f(yx^{-1})g(x)\frac{1}{\Delta(x)}d\mu(x) = \int f(x^{-1})g(xy)\frac{1}{\Delta(x)}d\mu(x) \tag{9.16}$$

Sea $h(x) = f(yx^{-1})g(x)\frac{1}{\Delta(x)}$. Por lo anterior, h es μ-integrable. De (7.1), en la Proposición 7.3 tenemos

$$\Delta(y)\int h(xy)d\mu(x) = \int h(x)d\mu(x)$$

pero

$$h(xy) = \frac{1}{\Delta(xy)}f(y(xy)^{-1})g(xy) = \frac{1}{\Delta(x)\Delta(y)}f(x^{-1})g(xy)$$

lo que prueba (9.16.) *Q.E.D.*

Veamos más propiedades de la convolución.

Proposición 9.11. *Sean f y g funciones $\mathbf{B}_G$-medibles.*

1. *Si f es μ-integrable y g es acotada c.d. rel. μ, entonces para toda y la función $x \mapsto f(x)g(x^{-1}y)$ es μ integrable y $|(f * g)(y)| \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$.*

2. *Si $f \in \mathcal{L}_1(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ y $g \in C_c^{\mathbb{C}}(G)$ entonces $f * g$ es uniformemente continua por la izquierda y si el grupo es unimodular entonces $g * f$ es uniformemente continua por la derecha.*

3. *Si $f \in \mathcal{L}_1(G)$ y $g \in \mathcal{L}_\infty(G)$ entonces $f * g$ es continua.*

Prueba de 1.
Tomemos y fija. Basta probar que

$$|g(x^{-1}y)| \leq \|g\|_\infty \quad \text{c.d. rel. } \mu \tag{9.17}$$

Notamos que

$$\{x \in G : |g(x^{-1}y)| > \|g\|_\infty\} = y\left(\{z \in G : |g(z)| > \|g\|_\infty\}\right)^{-1}$$

Ahora, gracias a la invariancia izquierda de μ, la Proposición 7.7 y usando que $\{z \in G : |g(z)| > \|g\|_\infty\}$ es μ-nulo tenemos

$$\mu\left(y\left(\{z \in G : |g(z)| > \|g\|_\infty\}\right)^{-1}\right) = \int_{\{z\in G:|g(z)|>\|g\|_\infty\}} \frac{1}{\Delta(w)}d\mu(w) = 0$$

y en consecuencia $\{x \in G : |g(x^{-1}y)| > \|g\|_\infty\}$ es μ-nulo, lo que prueba (9.17).

Prueba de 2.

Como consecuencia de 1. tenemos que para todo z,

$$(f * g)(z) = \int f(w)g(w^{-1}z)d\mu(w).$$

Probemos que $f * g$ es uniformemente continua por la izquierda. Tenemos

$$|(f * g)(y) - (f * g)(z)| \leq \int |f(w)| \left|g(w^{-1}y) - g(w^{-1}z)\right| d\mu(w)$$

Pero g es uniformemente continua por la izquierda, por lo que dada $\varepsilon > 0$ existe U vecindad de e tal que si $z^{-1}y \in U$ entonces $|g(y) - g(z)| < \varepsilon$. Como para todo w tenemos $(w^{-1}z)^{-1}(w^{-1}y) = z^{-1}y$, se sigue que si $z^{-1}y \in U$ entonces

$$|(f * g)(y) - (f * g)(z)| \leq \varepsilon \int |f(w)|\, d\mu(w)$$

lo que prueba que $f * g$ es uniformemente continua por la izquierda.

Ahora veamos que $g * f$ es uniformemente continua por la derecha suponiendo que G es unimodular. De manera similar al inciso 1, afirmamos que para toda y fija, la función

$$x \mapsto g(yx^{-1})f(x) \quad \text{es } \mu\text{-integrable.} \tag{9.18}$$

Para probarlo, al igual que en el inciso 1, es suficiente probar que dada y fija

$$|g(yx^{-1})| \leq \|g\|_\infty \quad \text{c.d. rel. } \mu \tag{9.19}$$

Para probar (9.19) observamos que

$$\{x \in G : |g(yx^{-1})| > \|g\|_\infty\} = \left(\{z \in G : |g(z)| > \|g\|_\infty\}\right)^{-1} y$$

Pero el grupo es unimodular y $\{z \in G : |g(z)| > \|g\|_\infty\}$ es μ-nulo, así que al igual que en el inciso 1, por la Proposición 7.7 tenemos que $\{x \in G : |g(yx^{-1})| > \|g\|_\infty\}$ es μ-nulo, lo que prueba (9.19).

Como consecuencia de (9.18) y usando la Proposición 9.10 tenemos que para todo z

$$(g * f)(z) = \int g(zw^{-1})f(w)d\mu(w)$$

y en consecuencia

$$|(g * f)(y) - (g * f)(z)| \leq \int \left|g(yw^{-1}) - g(zw^{-1})\right| |f(w)|\, d\mu(w)$$

Por otro lado, al ser g uniformemente continua por la derecha, dada $\varepsilon > 0$ existe U vecindad de U tal que si $yz^{-1} \in U$ entonces $|g(y) - g(z)| < \varepsilon$. Pero para toda w, $(yw^{-1})(zw^{-1})^{-1} = yz^{-1}$, así que $\left|g(yw^{-1}) - g(zw^{-1})\right| < \varepsilon$ para toda w y por lo tanto

$$|(g * f)(y) - (g * f)(z)| \leq \varepsilon \int |f(w)|\, d\mu(w)$$

lo que prueba que $g * f$ es uniformemente continua por la derecha.

Prueba de 3.

Ahora veamos que $f * g$ es contiua en $w \in G$.

Caso 1. Supongamos que f es una función continua de soporte compacto.

Usando que $(f * g)(z) = \int f(zy)g(y^{-1})d\mu(y)$ (ver Proposición 9.10) y que $|g(y^{-1})| \leq \|g\|_\infty$ c.d. rel. μ obtenemos

$$|(f * g)(z) - (f * g)(w)| \quad \leq \quad \|g\|_\infty \int |f(zx) - f(wx)|d\mu(x). \qquad (9.20)$$

Pero para z fija, la función $x \mapsto f(xz)$ es continua de soporte compacto y su soporte es $sop(f)z^{-1}$. Entonces la ecuación (9.20) se puede reescribir como

$$|(f * g)(z) - (f * g)(w)| \leq \|g\|_\infty \int_{(sop(f))w^{-1} \bigcup (sop(f))z^{-1}} |f(zx) - f(wx)|d\mu(x)$$

Como f es uniformemente continua por la derecha, dada $\varepsilon > 0$ existe V vecindad de e de tal forma que si $zw^{-1} \in V$ entonces $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$, y entonces para toda x, $(zx)(wx)^{-1} = zw^{-1} \in V$, así que de la desigualdad anterior obtenemos

$$|(f * g)(z) - (f * g)(w)| \leq \|g\|_\infty \varepsilon \left(\frac{1}{\Delta(z)} + \frac{1}{\Delta(w)}\right) \mu(sop(f)) \qquad (9.21)$$

Ahora, usando que $\frac{1}{\Delta}$ es continua en w, existe U vecindad de w tal que para todo $z \in U$, $|\frac{1}{\Delta(z)} - \frac{1}{\Delta(w)}| < \frac{1}{\Delta(w)}$ por lo que $\frac{1}{\Delta(z)} < \frac{2}{\Delta(w)}$. Entonces si en (9.29) z está en U obtenemos que

$$|(f * g)(z) - (f * g)(w)| \leq \|g\|_\infty \varepsilon \mu(sop(f)) \frac{3}{\Delta(w)}$$

Notamos que si el grupo es unimodular, entonces $f * g$ resulta ser uniformemente continua derecha.

Caso 2. Caso general.

Tomemos $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión de funciones continuas de soporte compacto tales que $lim_n \|f_n - f\|_1 = 0$ (por la densidad de $C_c(G)$ en $\mathcal{L}_1(G)$). Tenemos que

$$\begin{aligned} |(f * g)(z) - (f * g)(w)| \quad &\leq \quad |(f * g)(z) - (f_n * g)(z)| + |(f_n * g)(z) - (f_n * g)(w)| \\ &+ \quad |(f_n * g)(w) - (f * g)(w)| \qquad (9.22) \end{aligned}$$

Usando que la convolución distribuye sumas y el inciso uno tenemos que

$$|(f * g)(z) - (f_n * g)(z)| = |((f - f_n) * g)(z)| \leq \|f - f_n\|_1 \|g\|_\infty$$

Pero $lim_n \|f_n - f\|_1 = 0$, así que existe m tal que $\|f_m - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Ahora, usando que $f_m * g$ es continua, encontramos V vecindad de w tal que si $z \in V$ entonces $|(f_m * g)(z) - (f_m * g)(w)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Así pues si en (9.22) tenemos que $n = m$ y $z \in V$ obtenemos que $|(f * g)(z) - (f * g)(w)| < \varepsilon$. *Q.E.D.*

9.3 Estructura de álgebra

Veamos algunas consecuencias de la Proposición 9.9. Los incisos 2 y 4 nos dicen que la convolución es una operación que hace a $\mathcal{L}_1(G)$ un álgebra y el inciso 3 nos dice que podemos pasar esta operación al cociente y como la convolución es compatible con la norma $\|\cdot\|_1$ obtenemos que $L_1(G)$ es un álgebra de Banach. Además el inciso 1 nos dice que $C_c(G)$ es una subálgebra de $L_1(G)$ que es densa. Como consecuencia, hemos probado la siguiente proposición.

Proposición 9.12. *$L_1(G)$ con la convolución es un álgebra de Banach.*

Ahora, veamos un criterio para que el álgebra $L_1(G)$ tenga uno.

Proposición 9.13. *$L_1(G)$ tiene uno si y sólo si G es discreto.*

Demostración.

$\Leftarrow$] Sabemos que si G es discreto entonces $\mu(\{e\}) > 0$ y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mu(\{e\}) = 1$. Tomemos $f = \chi_{\{e\}}$. Afirmamos que f es el uno. Sea $g \in \mathcal{L}_1(G)$. Entonces:

$$(f * g)(x) = \int_{\{e\}} g(y^{-1}x)d\mu(y) = g(x)$$

Además

$$(g * f)(x) = \int g(xy)f(y^{-1})d\mu(y) = \int_{\{e\}} g(xy)d\mu(y) = g(x)$$

$\Rightarrow$] Tomemos $f \in \mathcal{L}_1(G)$ el uno y $U = \{e\}$. Entonces

$$1 = \chi_U(e) = (\chi_U * f)(e) = \int \chi_U(y)f(y^{-1}e)d\mu(y) = \int_U f(y^{-1})d\mu(y) = f(e)\mu(\{e\})$$

entonces $\mu(\{e\}) > 0$ y por la Proposición 6.23) el grupo es discreto. *Q.E.D.*

Como hemos visto en esta Proposición el álgebra $L_1(G)$ tiene uno sólo en casos muy específicos, pero en general sí tenemos una aproximación de la identidad (ver definición 1.53).

Proposición 9.14. *Recuerde que $N(e)$ denota las vecindades de la identidad. Sea $(\psi_\lambda)_{\lambda \in L}$ una red de funciones no negativas en $\mathcal{L}_1(G)$ tal que*

1. *Para toda λ, $\|\psi_\lambda\|_1 = 1$.*
2. *Para toda $x \in G$ y para toda λ, $\psi_\lambda(x) = \psi_\lambda(x^{-1})$.*
3. *Para toda $U_0 \in N(e)$, existe $\lambda_1 \in L$ de tal forma que para toda $\lambda \geq \lambda_1$, $sop(\psi_\lambda) \subseteq U_0$.*

Entonces para toda $f \in \mathcal{L}_1(G)$,

$$\lim_\lambda \|f * \psi_\lambda - f\|_1 = \lim_\lambda \|\psi_\lambda * f - f\|_1 = 0 \tag{9.23}$$

Demostración. Lo primero que observamos es que si (9.23) se cumple para toda $f \in C_c(G)$ entonces se cumple para toda $f \in \mathcal{L}_1(G)$. Para probarlo tomemos $g \in \mathcal{L}_1(G)$ y $f \in C_c(G)$. Usando $\|\psi_\lambda\|_1 = 1$ y la compatibilidad de la norma tenemos

$$\begin{aligned} \|g * \psi_\lambda - g\|_1 &\leq \|g * \psi_\lambda - f * \psi_\lambda\|_1 + \|f * \psi_\lambda - f\|_1 + \|f - g\| \\ &\leq 2\|g - f\|_1 + \|f * \psi_\lambda - f\|_1 \end{aligned} \tag{9.24}$$

lo que prueba (9.23) para g, utilizando que $C_c(G)$ es denso en $\mathcal{L}_1(G)$ y que $\lim_\lambda \|f * \psi_\lambda - f\|_1 = 0$.

Sea $f \in C_c(G)$. Usando la Proposición 9.10 resulta

$$\int |(f * \psi_\lambda)(y) - f(y)|\, d\mu(y) \leq \int\int \left|f(yx)\psi_\lambda(x^{-1}) - f(y)\psi_\lambda(x)\right| d\mu(x)d\mu(y)$$

Pero utilizando el inciso 2 y después Fubini tenemos

$$\begin{aligned} \int |(f * \psi_\lambda)(y) - f(y)|\, d\mu(y) &\leq \int\int |f(yx) - f(y)|\, \psi_\lambda(x)d\mu(x)d\mu(y) \\ &= \int_{sop(\psi_\lambda)} \psi_\lambda(x) \int |f(yx) - f(y)|\, d\mu(y)d\mu(x) \end{aligned}$$

Como f es continua de soporte compacto, f es uniformemente continua por la izquierda, por lo que dado $\varepsilon > 0$ existe $U_0 \in N(e)$ con cerradura compacta tal que si $z^{-1}w \in U_0$ entonces $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$. Pero como para toda $y, y^{-1}(yx) = x$, si tomamos $x \in U_0$ aseguramos que $|f(yx) - f(y)| < \varepsilon$ para toda y, por lo que

$$\int |(f * \psi_\lambda)(y) - f(y)|\, d\mu(y) \leq \varepsilon \int_{sop(\psi_\lambda)} \psi_\lambda(x)d\mu(x) = \varepsilon$$

siempre y cuando $sop(\psi_\lambda) \subseteq U_0$. Por el inciso 3, existe $\lambda_1 \in B$ de tal forma que para toda $\lambda \in B$, $\lambda \geq \lambda_1$, $sop(\psi_\lambda) \subseteq U_0$. En consecuencia, para toda $\lambda \geq \lambda_1$, $\|(f * \psi_\lambda) - f\|_1 \leq \varepsilon$. En conclusión, $\lim_\lambda \|f * \psi_\lambda - f\|_1 = 0$. De manera similar tenemos que $\lim_\lambda \|\psi_\lambda * f - f\|_1 = 0$. *Q.E.D.*

Corolario 9.15. *Existe una red $(\psi_U)_{U\in B}$ de funciones continuas no negativas con soporte compacto de tal forma que*

1. *Para toda U, $\|\psi_U\|_1 = 1$.*

2. $\lim_U \|f * \psi_U - f\|_1 = 0 = \lim_U \|\psi_U * f - f\|_1$

Demostración. Sea B el conjunto de vecindades simétricas de e. Si ordenamos a B mediante $U \leq V$ si y sólo si $V \subseteq V$, hacemos de B un conjunto dirigido. Sabemos que B es una base de e. Dado $U \in B$ existe $V \in B$ con la cerradura de V compacta tal que $\bar{V} \subseteq U$. Por el Lema 9.2 existe $f_U \in C_c(G)$ tal que $sopf_U \subseteq U$ y $\chi_{\bar{V}} \leq f_U \leq \chi_U$. Pero f puede fallar en que $f_U(x) = f_U(x^{-1})$, así que tomamos $\psi_U(x) = f_U(x)f_U(x^{-1})c_U^{-1}$ con $c_U = \int f_U(x)f_U(x^{-1})d\mu > 0$. Entonces es claro que $(\psi_U)_{U\in B}$ cumple 1 y 2 de la Proposición 9.14. Además

$$\psi_U^{-1}(\mathbb{C}\backslash\{0\}) = (f_U^{-1}(\mathbb{C}\backslash\{0\}))\bigcap((f_U^{-1}(\mathbb{C}\backslash\{0\}))^{-1}$$

por lo que al tomar cerradura tenemos

$$sop(\psi_U) \subseteq (sopf_U)\bigcap(sopf_U)^{-1} \subseteq U\bigcap U^{-1} = U$$

Para probar 3 tomamos $U_0 \in N(e)$. Al ser B base de e existe $U_1 \in B$ tal que $U_1 \subset U_0$. Entonces para todo $U \in B$ con $U \subseteq U_1$, $sop(\psi_U) \subseteq U \subseteq U_0$. Q.E.D.

Ejemplo 9.16. *Tomemos el grupo aditivo $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue. Sea*

$$\phi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-\|x\|}\right) & si\ \|x\| \leq 1 \\ 0\ si\ \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

Es conocido que $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y que $sop(\phi) = \bar{B}_1(0)$.

Sea $\psi = \frac{1}{c}\phi$ con $c = \int \phi(x)d\lambda(x)$.

Para $n \in \mathbb{N}$ definamos $\psi_n(x) = \frac{1}{n}\psi(nx)$. Lo primero que notamos es que $\psi(-x) = \psi(x)$ (cumpliendose así el inciso (2) de la Proposición 9.14). Además $\psi_n^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\}) = \frac{1}{n}\psi^{-1}(\mathbb{C}\setminus\{0\})$ por lo que al tomar la cerradura tenemos que

$$sop(\psi_n) = \frac{1}{n}\overline{B_1(0)} = \overline{B_{\frac{1}{n}}(0)}$$

Como el conjunto de $\{\overline{B_{\frac{1}{n}}(0)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de vecindades simétricas para cero tenemos que se cumple el inciso (3) de la proposición 9.14.

Por último, por el Teorema del cambio de variable tenemos

$$\int \psi_n(x)d\lambda(x) = \int \frac{1}{n}\psi(T(x))d\lambda(x) = \int \frac{1}{n}\psi(x)nd\lambda(x) = 1$$

por lo que se cumple el inciso (1) de la Proposición 9.14 .

Ahora, nos concentramos en la conmutatividad del álgebra.

Proposición 9.17. *$L_1(G)$ es conmutativa si y sólo si G es conmutativo.*

Demostración. Supongamos que G es conmutativo y probemos que la convolución es conmutativa. Al ser G conmutativo, G es unimodular, así que de la Proposición 9.10 tenemos

$$(f * g)(x) = \int f(xy^{-1})g(y)d\mu(y)$$

pero $xy^{-1} = y^{-1}x$, por lo que

$$(f * g)(x) = \int g(y)f(y^{-1}x)d\mu(y) = (g * f)(x)$$

Supongamos ahora que $L_1(G)$ es conmutativa.

Si G es no conmutativo existen x y y tales que $xy \neq yx$. Al ser el grupo Hausdorff existen W_1 y W_2 vecindades ajenas de xy y yx respectivamente. Por continuidad del producto existen U_1 y V_1 vecindades de x y y respectivamente tales que $U_1V_1 \subseteq W_1$. De manera similar existe U_2 y V_2 vecindades de x y y respectivamente tales que $V_2U_2 \subseteq W_2$. Si tomamos $U = U_1 \cap U_2$ y $V = V_1 \cap V_2$ obtenemos vecindades de x y y respectivamente con $UV \subseteq W_1$ y $VU \subset W_2$, por lo que UV y VU son ajenas.

Ahora, sean f_U y f_V funciones continuas no negativas, de soporte compacto con $sop(f_U) \subseteq U$, $sop(f_V) \subseteq V$, $f_U(x) = 1$ $f_V(y) = 1$ (ver Lema 9.2). Por la Proposición 9.9, $f_U * f_V$ es continua de soporte compacto y

$$sop(f_U * f_V) \subseteq sop(f_U)sop(f_V) \subseteq UV$$

Pero al ser la convolución conmutativa tenemos $f_U * f_V = f_V * f_U$, así que de nuevo por la Proposición 9.9 tenemos

$$sop(f_V * f_U) \subseteq sop(f_V)sop(f_U) \subseteq VU$$

por lo que $sop(f_U * f_V) \subseteq (UV) \cap (VU) = \emptyset$ y en consecuencia $f_U * f_V$ es nula.

Por otro lado, al ser $f_U * f_V$ idénticamente nula, $f_U * f_V(xy) = 0$, es decir

$$\int f_U(z)f_V(z^{-1}xy)d\mu(z) = 0$$

y usando que f_U y f_V son no negativas resulta que la función $z \mapsto f_U(z)f_V(z^{-1}xy)$ es cero c.d. rel. μ. Pero al ser las funciones f_U y f_V continuas resulta que la función $z \mapsto f_U(z)f_V(z^{-1}xy)$ es idénticamente nula, por lo tanto, si $z = x$ resulta que $f_U(x)f_V(x^{-1}xy) = f_V(y) = 0$, pero $f_V(y) = 1$, una contradicción.

Concluimos que para cualesquiera x y y, $xy = yx$. $Q.E.D.$

9.4 Funcionales lineales multiplicativas

Ahora queremos estudiar las funcionales lineales multiplicativas en $L_1(G)$. Como cada una de ellas es una funcional lineal primero estudiaremos las funcionales lineales.

Primero identifiquemos algunas funcionales lineales.

Dada $[g] \in L_\infty(G)$ definamos $T_{[g]}([f]) = \int gfd\mu$. Es claro que $T_{[g]}$ no depende de los representantes y que es lineal. Por la desigualdad de Hölder

$$\left|\int gfd\mu\right| \leq \|g\|_\infty \|f\|_1 ; \tag{9.25}$$

por lo tanto, $T_{[g]}$ es acotada con $\|T_{[g]}\| \leq \|g\|_\infty$, pero podemos decir más.

Proposición 9.18. $\|T_{[g]}\| = \|g\|_\infty$.

Demostración. Por lo anterior sólo tenemos que mostrar que $\|T_{[g]}\| \geq \|g\|_\infty$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $A = \{x \in G : |g(x)| > \|g\|_\infty - \varepsilon\}$. Por definición de $\|g\|_\infty$, A no es μ−nulo. Como el espacio es σ-finito, existe un boreliano F de medida finita tal que $B = A \cap F$ tiene medida positiva y finitia.

Recordemos que dado $\alpha \in \mathbb{C}$, $sgn(\alpha) = \frac{\alpha}{|\alpha|}$ si $\alpha \neq 0$ y 0 si $\alpha = 0$.

Tomemos $h(x) = \overline{sgn(g(x))}\chi_B(x)$ (donde la barra indica conjugación compleja.) Entonces h es medible y $\int |h|\, d\mu = \mu(B) < \infty$, por lo que $h \in \mathcal{L}_1(G)$.

Ahora usando $gh = |g|\,\chi_B$ tenemos

$$T_{[g]}([h]) = \int |g|\,\chi_B \geq (\|g\|_\infty - \varepsilon)\,\mu(B)$$

Por otro lado

$$T_{[g]}([h]) \leq \|T\|\,\|h\|_1 = \|T\|\,\mu(B)$$

tomando en cuenta que $\mu(B) \in (0,\infty)$, concluimos que $\|T\| \geq \|g\|_\infty - \varepsilon$. Al ser ε arbitraria tenemos $\|T\| \geq \|g\|_\infty$. *Q.E.D.*

Resulta que todas las funcionales lineales son de la forma $T_{[g]}$ con g en $\mathcal{L}_\infty(G)$.

Proposición 9.19. *La transformación $T : L_\infty(G) \to (L_1(G))^*$ dada por $T([g]) = T_{[g]}$ es un isomorfismo isométrico.*

Demostración. Hemos visto que T está bien definida y es isometría. Falta ver que T es sobre.

Tomemos $L \in (L_1(G))^*$.

Parte 1: μ es una medida finita.

Note que al ser μ medida finita, χ_B está en $\mathcal{L}_1(G)$ para todo boreliano B. Definamos $\nu : \mathbf{B}_G \to \mathbb{C}$ por $\nu(B) = L([\chi_B])$.

Afirmamos que ν es una medida compleja absolutamente continua con respecto a μ.

Es claro que $\nu(\emptyset) = 0$. Ahora, sea $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión disjunta de borelianos y $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$. Observamos que

$$\lim_n \left|\chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} - \chi_A\right| = 0 \qquad \left|\chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} - \chi_A\right| \leq \chi_G$$

ya que $\chi_G \in \mathcal{L}_1(G)$ y $\chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i}$ por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue obtenemos que

$$\lim_n \int \left|\sum_{i=1}^n \chi_{A_i} - \chi_A\right| = \lim_n \left\|\sum_{i=1}^n \chi_{A_i} - \chi_A\right\|_1 = 0$$

pero L es continua y lineal, por lo tanto

$$\lim_n \sum_{i=1}^n L([\chi_{A_i}]) = L([\chi_A])$$

es decir $\nu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$.

Por último, si $\mu(A) = 0$ entonces $[\chi_A] = [0]$ por lo que $\nu(A) = L([0]) = 0$. En conclusión $\nu \ll \mu$, lo que termina la demostración de la afirmación (ver apéndice $B.12$).

Ahora, como μ es finita por el Teorema de Radon-Nykodim (ver B.13 en apéndice) existe $g \in \mathcal{L}_1(G)$ tal que $\nu(A) = \int_A g d\mu$.

Debemos probar que $g \in \mathcal{L}_\infty(G)$. Tenemos que

$$\left|\int_A g d\mu\right| = |\nu(A)| = |L([\chi_A])| \leq \|L\| \, \mu(A)$$

de donde se sigue que

$$\begin{aligned}
\left|\int_A Re(g) d\mu\right| &\leq |\nu(A)| \leq \|L\| \, \mu(A) \\
\left|\int_A Im(g) d\mu\right| &\leq |\nu(A)| \leq \|L\| \, \mu(A)
\end{aligned}$$

y entonces por el Lema del promedio (ver apéndice $B.2$) $|Re(g)|, |Im(g)| \leq \|L\|$ c.d. rel. μ por lo que $|g| \leq 2\|L\|$ c.d. rel. μ por lo tanto $g \in \mathcal{L}_\infty(G)$ y $\|g\|_\infty \leq 2\|L\|$.

Por último, tenemos que para todo boreliano A

$$T[g]([\chi_A]) = \nu(A) = L([\chi_A]),$$

Por la linealidad de $T_{[g]}$ y L resulta que tanto $T_{[g]}$ como L coinciden en las funciones simples. Pero éstas son densas en $L_1(G)$ y tanto $T_{[g]}$ como L son continuas, por lo tanto $L = T_{[g]}$.

Parte 2: μ es una medida σ-finita.

Sea $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión ajena de borelianos de medida finita tal que $G = \cup_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

Para cada n sea $\mathbf{B}_n = \{B \in \mathbf{B}_G : B \subseteq G_n\}$ es decir $\mathbf{B}_G$ restringida a G_n y μ_n la restricción de μ a $\mathbf{B}_n$. Notamos entonces que $(G_n, \mathbf{B}_n, \mu_n)$ es un espacio de medida finita.

Para $f \in \mathcal{L}_1(G_n, \mathbf{B}_n, \mu_n)$ definimos $L_n([f]) = L([\tilde{f}])$ donde $\tilde{f}$ es la función que coincide con f en G_n y se anula en el complemento de G_n. Es fácil probar que L_n define una funcional lineal y que $\|L_n\| \leq \|L\|$. Por la parte uno, existe $g_n \in \mathcal{L}_\infty(G_n, \mathbf{B}_n, \mu_n)$ tal que $L_n = T_{[g_n]}$ y $\|g_n\|_\infty = 2\|L_n\| \leq 2\|L\|$.

Sea $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \chi_{G_n}$. Entonces g es $\mathbf{B}_G-$medible. Debemos probar que g está en $\mathcal{L}_\infty(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ y que $T_{[g]} = L$.

Probemos que $g \in \mathcal{L}_\infty(G, \mathbf{B}_G, \mu)$.

Tomemos $A = \{x \in G : |g(x)| > \|L\|\}$. Como la sucesión $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cubre a G y es disjunta tenemos que

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in G_n : |g_n(x)| > \|L\|\}$$

pero cada $\{x \in G_n : |g_n(x)| > \|L\|\}$ es μ_n–nulo, así que A es μ–nulo por lo que g es acotada c.d. rel μ y $\|g\|_\infty \leq 2\|L\|$.

Demostremos que $T_{[g]} = L$.

Tomemos $f \in \mathcal{L}_1(G)$ y $f_n = \sum_{i=1}^n f\chi_{G_i}$. Entonces $\lim_n(f_n - f) = 0$ y $|f_n - f| \leq 2|f|$. En consecuencia, por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue tenemos que $\lim_n \|f_n - f\|_1 = 0$ y al ser L continua resulta $L([f]) = \lim_n L([f_n])$. Pero

$$L([f_n]) = \sum_{i=1}^n L_i([f\mid_{G_i}]) = \sum_{i=1}^n \int g_i\chi_{G_i} f d\mu_i = \int \left(\sum_{i=1}^n g_i\chi_{G_i}\right) f d\mu$$

Por otro lado, de nuevo por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue y usando que $|(\sum_{i=1}^n g_i\chi_{G_i}) f| \leq |fg|$ tenemos

$$\lim_n \int \left(\sum_{i=1}^n g_i\chi_{G_i}\right) f d\mu = \int \lim_n \left(\sum_{i=1}^n g_i\chi_{G_i}\right) f d\mu = \int g f d\mu$$

de donde se concluye que $L([f]) = T_{[g]}([f])$. *Q.E.D.*

Identifiquemos las funciones acotadas c.d. rel. μ que inducen funcionales lineales multiplicativas.

Proposición 9.20. *Para toda $\psi : L_1(G) \to \mathbb{C}$ funcional lineal multiplicativa existe $\gamma : G \to \mathbb{S}^1$ homomorfismo continuo de grupos tal que $\psi([f]) = \int f\gamma d\mu$.*

Demostración. Tomemos ψ funcional lineal multiplicativa. Al ser funcional lineal, sabemos que existe una función acotada c.d. γ tal que la funcional lineal se calcula como $\int f\gamma d\mu$ para toda f en $\mathcal{L}_1(G)$.

Al ser ψ funcional lineal multiplicativa resulta que para cualesquiera f y g en $\mathcal{L}_1(G)$ se cumple $\psi([f * g]) = \psi([f])\psi([g])$, es decir

$$\int (f * g)(x)\gamma(x)d\mu(x) = \left(\int f(y)\gamma(y)d\mu(y)\right)\left(\int g(x)\gamma(x)d\mu(x)\right) \tag{9.26}$$

Primero veamos el lado izquierdo de (9.26). Este es igual a

$$\int\int f(y)g(y^{-1}x)\gamma(x)d\mu(y)d\mu(x) \tag{9.27}$$

Tomemos la función $(x, y) \mapsto f(y)g(y^{-1}x)\gamma(x)$ y notemos que

$$|f(y)||g(y^{-1}x)||\gamma(x)| \leq |f(y)||g(y^{-1}x)|\|\gamma\|_\infty$$

para (x, y) en el complemento de $A \times G$ con $A = \{x \in G : |\gamma(x)| > \|\gamma\|_\infty\}$. Ya que A es μ-nulo se tiene que $A \times G$ es $\mu \otimes \mu$-nulo. Así pues, $f(y)g(y^{-1}x)\gamma(x)$ está acotada c.d. rel. $\mu\otimes\mu$ por la función $|f(y)||g(y^{-1}x)|\|\gamma\|_\infty$, pero ésta última es $\mu \otimes \mu$-integrable (ver Proposición 9.9. Podemos aplicar Fubini a (9.27) para obtener que (9.27) es igual a

$$\int f(y) \int g(y^{-1}x)\gamma(x)d\mu(x)d\mu(y)$$

Ahora tomemos $\varepsilon(y) = \int g(y^{-1}x)\gamma(x)d\mu(x)$ (observe que diferentes g inducen diferentes ε). Lo primero que notamos es que ε es acotada, pues por la desigualdad de Hölder, usando que la función $x \mapsto g(y^{-1}x)$ es μ-integrable y que tiene la misma norma en $L_1(G)$ que g (gracias a la invariancia izquierda de μ) obtenemos

$$|\varepsilon(y)| \leq \|g\|_1 \|\gamma\|_\infty$$

Además si $g \in C_c(G)$ entonces ε es continua. Para probarlo tenemos que

$$|\varepsilon(y) - \varepsilon(z)| \leq \|\gamma\|_\infty \int |g(y^{-1}x) - g(z^{-1}x)| d\mu(x)$$

pe1o al ser g continua de soporte compacto, dada $\eta > 0$ existe U_0 vecindad simétrica de $\{e\}$ de tal forma que para todos y y z que cumplan $yz^{-1} \in U$, tenemos $|g(y) - g(z)| < \eta$ y en consecuencia, $|\varepsilon(y) - \varepsilon(z)| \leq \|\gamma\|_\infty \eta$.

Gracias a la invariancia izquierda de μ, $\varepsilon(y) = \int g(x)\gamma(yx)d\mu(x)$. Así, el lado izquierdo de (9.26) es igual a

$$\int f(y)\varepsilon(y)d\mu(y) \tag{9.28}$$

Por otra parte, el lado derecho de (9.26) es igual a

$$\int f(y)\delta(y)d\mu(y) \tag{9.29}$$

con $\delta(y) = \gamma(y) \int g(x)\gamma(x)d\mu(x)$. Obsérvese que $\delta = \psi([g])\gamma$. P or lo tanto δ es acotada c.d.

Como f es arbitraria en (9.29) y en (9.28), de (9.26) se sigue que para toda función μ-integrable f,

$$\int f(y)\varepsilon(y)d\mu(y) = \int f(y)\delta(y)d\mu(y)$$

y entonces por el Lema 9.7-1 se sigue que

$$\varepsilon = \delta \quad \text{c.d. rel. } \mu \tag{9.30}$$

De (9.30) lo primero que obtenemos es la continuidad de γ como sigue: como $C_c(G)$ es denso en $\mathcal{L}_1(G)$ y $\psi \neq 0$, existe $g \in C_c(G)$ tal que $\psi([g]) \neq 0$. De (9.30) se sigue que $\gamma = (\psi([g]))^{-1}\varepsilon$ c.d. rel. μ, pero ε es continua (al ser g continua de soporte compacto.) En consecuencia podemos suponer que γ es continua. Como γ es continua y acotada c.d. es fácil probar que γ es acotada.

Enseguida probamos que γ es un homomorfismo de grupos.

Como suponemos que γ es continua, δ también lo es y entonces por el Lema 9.7-2 tenemos que para toda y

$$\varepsilon(y) = \int g(x)\gamma(yx)d\mu(x) = \gamma(y)\int g(x)\gamma(x)d\mu(x) = \delta(y)$$

siempre y cuado $g \in C_c(G)$. Entonces por el Lema 9.7-1, tenemos para toda y fija

$$\gamma(yx) = \gamma(y)\gamma(x) \quad \text{c.d. rel. } \mu$$

Pero las funciones $x \mapsto \gamma(yx)$ y $x \mapsto \gamma(y)\gamma(x)$ son continuas, por lo que de nuevo por el Lema 9.7-2, tenemos que para toda x, $\gamma(xy) = \gamma(y)\gamma(x)$, lo que prueba que γ es un homomorfismo de grupos.

Para finalizar, probaremos que para todo $x \in G$, $|\gamma(x)| = 1$. Si existe x tal que $|\gamma(x)| > 1$, entonces

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\{|\gamma(x^n)|\} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|\gamma(x)|^n\} = \infty$$

lo que contradice que γ sea acotada. De manera similar, si existe x tal que $|\gamma(x)| < 1$ entonces $|\gamma(x^{-1})| > 1$ y volvemos al caso anterior. *Q.E.D.*

Las funciones acotadas que inducen las funcioneales lineales multiplicativas reciben un nombre especial.

Definición 9.21. *Sea (G,τ) un grupo topológico. Una función $\gamma : G \to \mathbb{S}^1$ se llama un caracter de G si es un homomorfismo continuo de grupos. Al conjunto de caracteres de G lo denotamos por $\Gamma(G)$.*

Hacemos algunas observaciones sobre los caracteres.

1. Si $\gamma \in \Gamma(G)$ entonces $\overline{\gamma(x)} = \gamma(x^{-1})$. La razón de esto se sigue de que

$$1 = |\gamma(x)|^2 = \gamma(x)\overline{\gamma(x)}$$

por lo que $\overline{\gamma(x)} = \gamma(x)^{-1}$ pero al ser γ homomorfismo $\gamma(x)^{-1} = \gamma(x^{-1})$.

2. Dados γ y δ dos caracteres de G, tenemos que el producto $\gamma\delta$ es de nuevo un caracter. La función constante igual a uno es un caracter. Dado $\gamma \in \Gamma(G)$, la función $\delta(x) = \gamma(x^{-1})$ es un caracter de G y $\delta\gamma = 1$. En consecuencia los caracteres de G forman un grupo llamado grupo de caracteres de G.

3. Para todo $\gamma \in \Gamma(G)$, el conmutador de G está contenido en $\gamma^{-1}(\{1\})$. Como el conmutador de G es el subgrupo generado por los elementos de la forma $xyx^{-1}y^{-1}$ y $\gamma^{-1}(\{1\})$ es un subgrupo, es suficiente probar que $\gamma(xyx^{-1}y^{-1}) = 1$, pero esto es claro al ser γ homomorfismo.

Vemos ahora la correspondencia entre funcionales lineales multipicativas y caracteres.

Teorema 9.22. *Dada $\gamma \in \Gamma(G)$ denotamos ψ_γ a la función de $L_1(G)$ a $\mathbb{C}$ dada por*

$$\psi_\gamma([f]) = \int f\gamma d\mu$$

La correspondencia $\gamma \mapsto \psi_\gamma$ es una biyección entre las funcionales lineales multiplicativas y los caracteres de G.

Demostración. Lo primero que debemos probar es que $\psi_\gamma \in \mathcal{M}_{L_1(G)}$. Por la ecuación (9.25) sabemos que ψ_γ es funcional lineal acotada no nula, así que sólo resta probar que es multiplicativa, para lo cual observamos que aplicando Fubini (al igual que en la Proposición 9.20) tenemos

$$\psi([f * g]) = \int f(y) \int g(y^{-1}x)\gamma(x)d\mu(x)d\mu(y) \tag{9.31}$$

Usando la invariancia izquierda de μ y que γ es homomorfismo de grupos obtenemos $\int g(y^{-1}x)\gamma(x)d\mu(x) = \int g(x)\gamma(yx)d\mu(x)$ y gracias a (9.31) concluimos

$$\psi_\gamma([f * g]) = (\int f(y)\gamma(y)d\mu(y))(\int g(x)\gamma(x)d\mu(x)) = \psi_\gamma([f])\psi_\gamma([g])$$

lo que prueba que ψ_γ es multiplicativa.

Que la correspondencia sea sobreyectiva se sigue de la Proposición 9.20.

Para la inyectividad, supongamos que $\psi_\gamma = \psi_\delta$; entonces para toda f en $C_c(G)$ se tiene $\int f\gamma d\mu = \int f\delta d\mu$, y gracias al Lema 9.7-2, lo anterior implica que $\gamma = \delta$. *Q.E.D.*

9.5 Ejemplos de caracteres

En esta sección nos ocuparemos de caracterizar el grupo de caracteres de varios grupos topológicos, como son $\mathbb{R}^n$ o el grupo de matrices invertibles de 2×2.

Ejemplo 9.23. *El primer ejemplo es $\mathbb{R}$ con la suma.*

Lema 9.24. *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $e^{it\alpha} = e^{it\beta}$ (exponencial compleja) para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces $\alpha = \beta$.*

Demostración. Si $e^{it\alpha} = e^{it\beta}$ entonces $e^{it(\alpha-\beta)} = 1$ por lo que $t(\alpha - \beta) \equiv 0 \mod 2\pi$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \neq \beta$ tomando $t = (\alpha - \beta)^{-1}$ resulta que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $1 = 2n\pi$, lo cual contradice que π es irracional. En consecuencia, $\alpha = \beta$. *Q.E.D.*

Proposición 9.25. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ definamos $\gamma_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por $\gamma_\alpha(t) = e^{it\alpha}$.*

1. *Para toda α, $\gamma_\alpha \in \Gamma(\mathbb{R})$.*
2. *Definimos $\Psi : \mathbb{R} \to \Gamma(\mathbb{R})$ por $\Psi(\alpha) = \gamma_\alpha$. Entonces Ψ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Prueba de 1.

Es claro que γ_α es continua. Además

$$\gamma_\alpha(s+t) = e^{i(s+t)\alpha} = e^{it\alpha}e^{is\alpha}$$

por lo que γ_α es un homomorfismo de grupos entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}^1$.

Prueba de 2.

La inyectividad se sigue del Lema 9.24.

Obsérvese que

$$\Psi(\alpha+\beta)(t) = e^{it(\alpha+\beta)} = e^{it\alpha}e^{it\beta} = \Psi(\alpha)(t)\Psi(\beta)(t)$$

por lo que Ψ es homomorfismo de grupos.

Sólo resta probar que Ψ es suprayectiva. Tomemos γ caracter de $\mathbb{R}$. Como $\gamma(0) = 1$ (al ser homomorfismo de grupos) y γ es continua, existe $\delta > 0$ y $r > 0$ tal que para toda $y \in (-\delta, \delta)$, $Re(\gamma)(y) > r$. Entonces

$$\int_\delta^\delta Re(\gamma)(y)dy \geq 2r\delta > 0$$

por lo que $s = \int_{-\delta}^\delta \gamma(t)dt \neq 0$.

Ahora por el Teorema del cambio de variable (al ser γ homomofismo tenemos)

$$\gamma(x)s = \int_{-\delta}^{\delta} \gamma(t+x)dt = \int_{-\delta+x}^{\delta+x} \gamma(t)dt$$

de donde se sigue que γ es diferenciable.

Calculando la derivada de γ obtenemos

$$\gamma'(t) = lim_{h\to 0}\frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{\gamma(t)\gamma(h)-\gamma(t)}{h} = \gamma(t)\gamma'(0) \quad (9.32)$$

Escribamos $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ con γ_1 y γ_2 las partes real e imaginaria de γ respectivamente. Como γ es diferenciable entonces también lo son γ_1 y γ_2. Además por (9.32) γ_1' y γ_2' son continuas, en consecuencia γ_1 y γ_2 de clase C^1. Por otro lado como $|\gamma(x)| = 1$ para todo x resulta que $\gamma_1^2(x) + \gamma_2^2(x) = 1$ para todo x y derivando esta última igualdad resulta que (γ_1', γ_2') es perpendicular a (γ_1, γ_2). En consecuencia existe un único $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\gamma' = i\alpha\gamma$. Concluimos que γ satisface la ecuación diferencial $\gamma' = i\alpha\gamma$, por lo que $\gamma(t) = e^{it\alpha}$. *Q.E.D.*

Ejemplo 9.26. *Recordamos que $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$. Con la topología usual y la multiplicación, $\mathbb{R}^+$ es un grupo topológico. Como $(\mathbb{R}, +)$ es isomorfo a $(\mathbb{R}^+, \cdot)$ (mediante $t \mapsto e^t$)es fácil establecer que $\Gamma(\mathbb{R}^+)$ es también isomorfo a $\mathbb{R}$, lo cual probamos en seguida.*

Proposición 9.27. *Dada $\alpha \in \mathbb{R}$, sea $\gamma_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ definida por $\gamma_\alpha(s) = e^{i\alpha\ln(s)}$.*

1. *Para todo α, $\gamma_\alpha \in \Gamma(\mathbb{R}^+)$.*

2. Definamos $\Psi(\alpha) = \gamma_\alpha$. Entonces Ψ es un isomorfismo de grupos entre $\mathbb{R}$ y $\Gamma(\mathbb{R}^+)$.

Demostración. De manera similar que en la Proposición 9.25 se prueba que γ_α es un caracter de $\mathbb{R}^+$ y que Ψ es un homomorfismo de grupos.

Como para todo $t \in \mathbb{R}$ $t = ln(e^t)$, por el Lema 9.24 se concluye la inyectividad de Ψ.

Resta probar que Ψ es sobreyectiva. Tomemos γ caracter de $\mathbb{R}^+$ y notemos que la función $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\delta(t) = \gamma(e^t)$ es un caracter de $\mathbb{R}$. Por la Proposición $9.25 - 2$ existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\delta(t) = e^{it\alpha}$. Si $s \in \mathbb{R}^+$ y $t = \ln(s)$ tenemos $\gamma(s) = \delta(t)$ es decir $\gamma(s) = e^{i\alpha \ln(s)}$. *Q.E.D.*

Este ejemplo ilustra que si G y G' son grupos topológicos isomorfos (es decir que existe un homeomorfismo h que además es homomorfismo de grupos), entonces los grupos de caracteres son isomorfos.

Ejemplo 9.28. *Por $\mathbb{R}^*$ denotamos a los reales no cero. Es claro que con el producto, $\mathbb{R}^*$ es un grupo y con la topología de subespacio de $\mathbb{R}$ es un grupo topológico. Queremos encontrar sus caracteres, para lo cual nos ayudaremos de los caracteres de $\mathbb{R}^+$. Notamos que si $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R}^*)$ entonces $\gamma(-1) \in \{1, -1\}$.*

Proposición 9.29. *Sea $\gamma \in \Gamma(\mathbb{R}^*)$. Entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

1. *Si $\gamma(-1) = 1$ entonces $\gamma(t) = e^{i\alpha \ln(|t|)}$.*
2. *Si $\gamma(-1) = -1$ entonces $\gamma(t) = sgn(t)e^{i\alpha \ln(|t|)}$, donde $sgn(t)$ denota el signo de t.*

Demostración. Observemos que si $t < 0$ entonces

$$\gamma(t) = \gamma((-1)(-t)) = \gamma(-1)\gamma(|t|)$$

Si $\gamma(-1) = 1$ tenemos que para cualquier t, $\gamma(t) = \gamma(|t|)$ y si $\gamma(-1) = -1$ tenemos que para todo t, $\gamma(t) = sgn(t)\gamma(|t|)$. Así, es suficiente restringir γ a los reales positivos, pero si restringimos γ a $\mathbb{R}^+$ obtenemos un caracter de $\mathbb{R}^+$, y por 9.27 existe α tal que para todo $t > 0$, $\gamma(t) = e^{i\alpha \ln(t)}$. Esto termina la demostración de la proposición. *Q.E.D.*

Ahora, calculemos $\Gamma(\mathbb{R}^*)$.

Proposición 9.30. *$\Gamma(\mathbb{R}^*)$ es isomorfo a $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2$.*

Demostración. Dado $(\alpha, j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2$ denotemos $\gamma_{\alpha,j}$ el caracter de $\mathbb{R}^*$ dado por

$$\gamma_{\alpha,j}(t) = (sgn(t))^j e^{i\alpha \ln(|t|)}$$

Definamos $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2 \to \Gamma(\mathbb{R}^*)$ por $\Psi((\alpha, j)) = \gamma_{\alpha,j}$. Sabemos que Ψ está bien definida y por la Proposición 9.29 sabemos que Ψ es sobreyectiva.

Para la inyectividad supongamos que $\gamma_{\alpha,j} = \gamma_{\beta,k}$. Entonces para todo t real

$$(sgn(t))^j e^{i\alpha \ln(|t|)} = (sgn(t))^k e^{i\alpha \ln(|t|)} \tag{9.33}$$

Si $j = 0$ y $k = 1$, entonces tomando $t = -1$ en (9.33) tenemos que el lado izquierdo es positivo y el lado derecho es negativo, una contradicción. De manera similar, no puede pasar que $j = 1$ y $k = 0$. En conclusión debemos tener $j = k$. Como $j = k$, podemos cancelar $sgn(t)^j$ en (9.33) para obtener que $e^{i\alpha \ln(|t|)} = e^{i\beta \ln(|t|)}$ para todo t, y al igual que en la Proposición 9.27 esto implica que $\alpha = \beta$.

Por último de las identidades

$$\begin{aligned}
\Psi((\alpha, j) + (\beta, k))(t) &= (sgn(t))^{i+k} e^{i(\alpha+\beta)\ln(|t|)} \\
&= (sgn(t))^j e^{i\alpha \ln(|t|)} (sgn(t))^k e^{i\beta \ln(|t|)} \\
&= \Psi((\alpha, j))\Psi((\beta, k))
\end{aligned}$$

resulta que Ψ es homomorfismo de grupos. *Q.E.D.*

Ejemplo 9.31. *$\mathbb{R}^n$ con la suma y la topología usual es un grupo topológico. Al igual que en el caso de $\mathbb{R}$ resulta que $\Gamma(\mathbb{R}^n)$ es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Proposición 9.32. *Dada $\alpha \in \mathbb{R}^n$ definimos $\gamma_\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^1$ por $\gamma_\alpha(x) = e^{i(x \cdot \alpha)}$, donde $(x \cdot \alpha)$ denota el producto punto en $\mathbb{R}^n$.*

1. *Para toda α, γ_α es un caracter de $\mathbb{R}^n$.*

2. *La función $\Psi(\alpha) = \gamma_\alpha$ es un isomorfismo de grupos entre $\mathbb{R}^n$ y $\Gamma(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Es fácil verificar que para toda α, γ_α es un caracter de $\mathbb{R}^n$.

Por $\{e_1, \ldots, e_n\}$ denotamos la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Supongamos que $\Psi(\alpha) = \Psi(\beta)$ y escribamos $\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j$, $\beta = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j$. Si valuamos γ_α y γ_β en te_j con $t \in \mathbb{R}$ arbitrario tenemos que $e^{it\alpha_j} = e^{it\beta_j}$ para todo t real, pero por el Lema 9.24 lo anterior implica que $\alpha_j = \beta_j$ para todo j por lo que $\alpha = \beta$.

De las siguientes igualdades resulta que Ψ es un homomorfismo de grupos.

$$\gamma_{\alpha+\beta}(x) = e^{i(x \cdot (\alpha+\beta))} = e^{i(x\cdot\alpha)} e^{i(x\cdot\beta)} = \gamma_\alpha(x)\gamma_\beta(x).$$

Nos falta probar que la correspondencia es sobreyectiva.

Sea γ caracter de $\mathbb{R}^n$ y notemos que

$$\gamma(x) = \Pi_{j=1}^n \gamma(x_j e_j) \tag{9.34}$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Ahora si $\gamma_j(t) = \gamma(te_j)$ para t real, resulta que γ_j es un caracter de $\mathbb{R}$. Por la Proposición 9.25 existe α_j real tal que $\gamma_j(t) = e^{it\alpha_j}$, por lo que si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ entonces de (9.34) resulta

$$\gamma(x) = \Pi_{i=j}^n e^{ix_i\alpha_i} = e^{\left(i\left(\sum_{j=1}^n x_j\alpha_j\right)\right)} = e^{i(x\cdot\alpha)}.$$

Esto prueba la suprayectividad y se sigue el resultado. *Q.E.D.*

Ejemplo 9.33. *Ahora veremos los caracteres de los enteros, $(\mathbb{Z}, +)$.*

Proposición 9.34. *Para $z \in \mathbb{S}^1$ definimos $\gamma_z : \mathbb{Z} \to \mathbb{S}^1$ por $\gamma_z(n) = z^n$.*

1. *Para toda $z \in \mathbb{S}^1$, $\gamma_z \in \Gamma(\mathbb{Z})$.*
2. *La función $\Psi(z) = \gamma_z$ es un isomorfismo de grupos entre $\mathbb{S}^1$ y $\Gamma(\mathbb{Z})$.*

Demostración.
Como $z^{n+m} = z^n z^m$ para cualesquiera $n, m \in \mathbb{Z}$, resulta que $\gamma_z \in \Gamma(\mathbb{Z})$.
Ahora tomemos $\gamma \in \Gamma(\mathbb{Z})$.
Para $n > 0$ tenemos

$$\gamma(n) = \gamma\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) = \gamma(1)^n$$

Si $n < 0$, usando que $\gamma(-1) = \gamma(1)^{-1}$ tenemos

$$\gamma(n) = \gamma\left(\sum_{j=1}^{n} -1\right) = \gamma(1)^n$$

Como $\gamma(0) = 1$, concluimos que para todo entero n, $\gamma(n) = \gamma(1)^n$ y por lo tanto todo caracter de $\mathbb{Z}$ tiene la forma $\gamma(n) = \alpha^n$ con $\alpha = \gamma(1) \in \mathbb{S}^1$; es decir, está determinado por su valor en 1 y en consecuencia Ψ es sobreyectiva.

La inyectividad de Ψ es clara pues si $\Psi(z) = \Psi(w)$ entonces valuando en 1 obtenemos que $z = w$.

Por último como

$$\Psi(zw)(n) = (zw)^n = z^n w^m = \Psi_z(n)\Psi_w(n)$$

se sigue que Ψ es un homomorfismo de grupos. *Q.E.D.*

Ejemplo 9.35. *Con el producto $\mathbb{S}^1$ es un grupo y con la topología de subespacio de $\mathbb{C}$ es un grupo topológico. Afirmamos que $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Proposición 9.36. *Para todo $n \in \mathbb{Z}$ definimos $\gamma_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ por $\gamma_n(z) = z^n$.*

1. *Para todo $n \in \mathbb{Z}$, $\gamma_n \in \Gamma(\mathbb{S}^1)$.*
2. *La función $\Psi(n) = \gamma_n$ es un isomorfismo de grupos entre $\mathbb{Z}$ y $\Gamma(\mathbb{S}^1)$.*

Demostración.
Como $z^n w^n = (zw)^n$ tenemos que $\gamma_n \in \Gamma(\mathbb{S}^1)$.

Probemos que Ψ es suprayectiva. Sea γ un caracter de $\mathbb{S}^1$ y definamos $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ por $\delta(t) = \gamma(e^{it})$. Es claro que δ es continua y que es homomorfismo de grupos (al ser composición de homomorfismos), es decir δ es un caracter de $\mathbb{R}$. Por la Proposición 9.25 tenemos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\delta(t) = e^{it\alpha}$ y en consecuencia para todo t real

$$\gamma(e^{it}) = e^{it\alpha}$$

así que usando $1 = \gamma(1) = \gamma(e^{i2\pi})$ tenemos $1 = e^{i2\pi\alpha}$ por lo que $\alpha 2\pi \equiv 0$ módulo 2π de modo que $\alpha \in \mathbb{Z}$ y $\gamma(z) = z^\alpha$.

Probemos que Ψ es inyectiva. Si $\Psi_n = \Psi_m$ valuando ambas funciones en e^{it} (con t real arbitrario) obtenemos que $e^{itn} = e^{itm}$ para todo t real y por el Lema 9.24 concluimos que $n = m$.

Como

$$\gamma_{n+m}(z) = z^{n+m} = z^n z^m = \gamma_n(z)\gamma_m(z)$$

concluimos que Ψ es un isomorfismo de grupos. *Q.E.D.*

Ejemplo 9.37. *Encontramos los caracteres del grupo topológico G de las matrices*

$$\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde r y s son reales con r positivo (ver ejemplo $5.2-6$)

Lema 9.38. *1. El conmutador de G es el subgrupo de matrices de la forma*

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.35}$$

variando t en $\mathbb{R}$.

2. Sea H' el conjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con $x > 0$. Entonces H' es un subgrupo de G y G es el producto directo de H' y el conmutador de G.

Demostración.

Prueba de 1.

Recuerde que el conmutador de G (denotado por $c(G)$) es el subgrupo generado por los elementos de la forma $aba^{-1}b^{-1}$. Sea H el subconjunto de matrices de G de la forma (9.35). Queremos probar que $H = c(G)$.

Tomemos

$$a = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{pmatrix} z & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} z & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} xz & y+wx \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{xz} & \frac{-w}{xz} - \frac{y}{x} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -w - yz + y + wx \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9.36) \end{aligned}$$

por lo que todo elemento de la forma $aba^{-1}b^{-1}$ está en H y $c(G) \subseteq H$.

Ahora sea $c \in H$ con

$$c = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si en (9.36) tomamos $y = t$, $z = w = x = 0$ resulta que $c = aba^{-1}b^{-1}$, por lo que $c \in c(G)$, es decir $H \subseteq c(G)$. En conclusición, $H = c(G)$.

Prueba de 2.

Es fácil varificar que H' es subgrupo de G. Note que H' es isomorfo a $\mathbb{R}^+$ pues la función

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es un isomorfismo.

De 1. tenemos que $H' \cap c(G) = \{1_G\}$. Por último usando que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.37}$$

para cualquier elemento de G, obtenemos que G es el producto directo de $c(G)$ y de H'. *Q.E.D.*

Proposición 9.39. *Para todo $\gamma \in \Gamma(G)$ existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\gamma\left(\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = e^{iln(r)\alpha}.$$

Demostración.

Por (9.37) tenemos que cualquier matriz en G puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con el primer factor en el conmutador de G, pero como en el conmutador γ vale uno tenemos

$$\gamma\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \gamma\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \tag{9.38}$$

es decir, el valor de γ en cualquier matriz sólo depende del valor de la entrada 1-1 de la matriz.

Definamos $\delta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{S}^1$ por

$$\delta(t) = \gamma\left(\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Es fácil verificar que δ es un caracter, en consecuencia por la Proposición 9.27 existe α real tal que $\delta(t) = e^{i\ln(t)\alpha}$ y por (9.38) tenemos

$$\gamma\left(\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \gamma\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = e^{i\ln(x)\alpha}$$

de donde se sigue el resultado. *Q.E.D.*

De manera similar a la Proposición 9.27, se puede probar que $\Gamma(G)$ es isomorfo a $\mathbb{R}$.

Ejemplo 9.40. *Queremos encontrar los caracteres del grupo de matrices invertibles de 2 por 2 con coeficientes reales, denotado por $GL_2(\mathbb{R})$.*

Recuerde que $SL_2(\mathbb{R})$ denota las matrices con determinante igual a 1.

Lema 9.41. *1. $SL_2(\mathbb{R})$ es generado por las matrices de la forma*

$$T_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad T^\mu = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

variando μ y λ en $\mathbb{R}$.

2. El centro de $GL_2(\mathbb{R})$ es $SL_2(\mathbb{R})$.

3. Si H es el conjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

variando t en los reales no nulos, entonces H es un subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$ y $GL_2(\mathbb{R})$ producto directo de $SL_2(\mathbb{R})$ y H.

Demostración.
Nota: la prueba del lema se basa en [Rotman].
Prueba de 1.
Notamos que

$$(T_\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix} \qquad (T^\mu)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además observamos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a\mu + b \\ c & c\mu + d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c + a\lambda & d + b\lambda \end{pmatrix}$$

por lo tanto al multiplicar una matriz $M \in GL_2(\mathbb{R})$ por T^μ ó por T_λ por la derecha o la izquierda, respectivamente, obtenemos que sumamos un múltiplo de una columna de M a la otra o un múltiplo de un renglón de M al otro.

Sea $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $ad - bd = 1$.

Caso 1: $c \neq 0$.
Si tomamos $\mu = \frac{1-d}{c}$ tenemos

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b' \\ c & 1 \end{pmatrix}$$

con $b' = \frac{a}{c}(1-d) + b$.
Ahora

$$\begin{pmatrix} a & b' \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - cb' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pero $a - cb' = a - a(1-d) - cb = ad - bc = 1$. En conclusión

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en consecuencia

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{d-1}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T^{b'} T_c T^{\frac{d-1}{c}}$$

Caso 2: $c = 0$. Como $ad - bc = 1$ debemos tener que $d = \frac{1}{a}$.
Observamos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ a & b + \frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

Como $\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ a & b + \frac{1}{a} \end{pmatrix}\right) = 1$ y $a \neq 0$ por el caso 1 existen reales μ_1, μ_2 y λ tales que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a & b + \frac{1}{a} \end{pmatrix} = T^{\mu_1} T_\lambda T^{\mu_2}$$

en consecuencia

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = T_{-1} T^{\mu_1} T_\lambda T^{\mu_2}.$$

Prueba de 2.

Como el conmutador es generado por las matrices de la forma $ABA^{-1}B^{-1}$, las cuales tienen determinante 1, resulta que el conmutador está contenido en $SL_2(\mathbb{R})$. Para probar la otra contención, en virtud del inciso uno, sólo tenemos que probar que las matrices T_λ y T^μ están en el conmutador. Para demostrar esto tomemos

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ s & t \end{pmatrix} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$SAS^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - t^2 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.39}$$

por lo que

$$ASA^{-1}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t^2 - 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{9.40}$$

Si $1 \leq \lambda$, tomemos $t = \sqrt{\lambda - 1}$ en A para obtener de (9.40) que T_λ está en el conmutador. Si $\lambda \leq 1$, tomamos $t = \sqrt{1 - \lambda}$ en A para obtener de (9.39) que obtener que T_λ esta en el conmutador.

De manera análoga, para ver que T^μ está en el conmutador transponemos en las ecuaciones (9.39) y (9.40).

Prueba de 3.

Es fácil verificar que H es un subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$. Es más, H es isomorfo a $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ con el producto, pues la función

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

es un isomorfismo.

Sea $A \in GL_2(\mathbb{R})$ con

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y notemos que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{c}{\det(A)} & \frac{d}{\det(A)} \end{pmatrix} \tag{9.41}$$

con el segundo factor en $SL_2(\mathbb{R})$.

Por último es claro que $SL_2(\mathbb{R}) \cap H = \{Id\}$ y por (9.41) concluimos que $SL_2(\mathbb{R})$ es producto directo de $GL_2(\mathbb{R})$ y H. *Q.E.D.*

Proposición 9.42. *Por J denotamos a la matriz* $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Dado un caracter de $GL_2(\mathbb{R})$ γ, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

1. *Si $\gamma(J) = 1$, entonces $\gamma(\det(A)) = e^{i\alpha \ln(|\det(A)|)}$.*
2. *Si $\gamma(J) = -1$, entonces $\gamma(\det(A)) = sgn(\det(A))e^{i\alpha \ln(|\det(A)|)}$.*

Demostración. Sea γ un caracter de $GL_2(\mathbb{R})$.

Por (9.41) para toda matriz $A \in GL_2(\mathbb{R})$ tenemos

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{\det(A)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{\det(A)} \\ c & \frac{d}{\det(A)} \end{pmatrix}$$

y como el segundo factor está en $SL_2(\mathbb{R})$, es decir en el conmutador del grupo, se sigue que

$$\gamma\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \gamma\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix}\right) \tag{9.42}$$

por lo que el valor de γ en A sólo depende de $\det(A)$.

Sea $\delta : \mathbb{R}^* \to \mathbb{S}^1$ definida por

$$\delta(t) = \gamma\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\right)$$

Es sencillo probar que δ es un caracter de $\mathbb{R}^*$. Por la Proposición 9.29 existe α real tal que:

Si $\delta(-1) = 1$ entonces $\delta(t) = e^{i\alpha \ln(|t|)}$.

Si $\delta(-1) = -1$ entonces $\delta(t) = sgn(t)e^{i\alpha \ln(|t|)}$.

Como $\delta(-1) = \gamma(J)$ de (9.42) se sigue el resultado. *Q.E.D.*

9.6 Semisimplicidad

En esta sección probaremos que si $L_1(G)$ es conmutativa, entonces es semisimple. Recordamos que gracias a la Proposición 9.17, $L_1(G)$ es conmutativa si y sólo si G es conmutativo.

El resultado principal de esta sección es el siguiente.

Teorema 9.43. *Supongamos que G es conmutativo. Entonces $L_1(G)$ es semisimple.*

Antes de probar el teorema veremos que cuando el grupo es conmutativo, $L_1(G)$ tiene estructura de álgebra simétrica, lo que nos ayudará a probar la semisimplicidad.

Si G es conmutativo entonces es unimodular, así que gracias a (7.2) tenemos que para toda $f \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(G, \mathbf{B}_G, \mu)$ ó f $\mathbf{B}_G$-medible no negativa,

$$\int f(x)d\mu(x) = \int f(x^{-1})d\mu(x) \tag{9.43}$$

La primera consecuencia de (9.43) es que la transformación $x \mapsto x^{-1}$ preserva a μ (es decir $\mu(B) = \mu(B^{-1})$ para todo boreliano B).

Otra consecuencia de (9.43) es que la función $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$ está en $\mathcal{L}_1(G)$ siempre que f lo esté y que la función en $L_1(G)$ dada por $[f]^* = [f^*]$ está bien definida. Lo importante es que cuando el grupo es conmutativo la función $f \mapsto f^*$ hace a $L_1(G)$ un álgebra de Banach conmutativa con involución.

Proposición 9.44. *Si el grupo topológico G es unimodular, entonces $f \mapsto f^*$ es una involución en $L_1(G)$*

Demostración.

1. Para todo $x \in G$ y $\alpha \in \mathbb{C}$
$$(f + \alpha g)^*(x) = \overline{f(x^{-1}) + \alpha g(x^{-1})} = f^*(x) + \overline{\alpha} g^*(x)$$
por lo que $(f + \alpha g)^* = f^* + \overline{\alpha} g^*$.

2. Es claro que $f^{**} = f$.

3. Ahora, debemos probar que $(f * g)^* = g^* * f^*$ c.d. rel. μ. Tomemos N un boreliano μ-nulo tal que para toda x en el complemento de N ocurra
$$(g^* * f^*)(x) = \int g^*(y) f^*(y^{-1}x)d\mu(y)$$
$$(f * g)(x) = \int g(y)f(y^{-1}x)d\mu(y)$$

Sea $N_1 = N \bigcup N^{-1}$. Entonces N_1 es μ-nulo y para toda x en el complemento de N_1
$$(f * g)(x^{-1}) = \int f(y)g(y^{-1}x^{-1})d\mu(y)$$

Usando la invariancia izquierda de la μ (con $y \mapsto xy$) tenemos, para x en el complemento de N_1, que

$$\begin{aligned}(g^* * f^*)(x) &= \int \overline{g(y^{-1})f(x^{-1}y)}d\mu(y)\\ &= \int \overline{g(y^{-1}x^{-1})f(y)}d\mu(y)\end{aligned}$$

pero

$$(f * g)^*(x) = \overline{(f * g)(x^{-1})} = \int \overline{f(y)g(y^{-1}x^{-1})}$$

y entonces $(f * g)^* = g^* * f^*$ c.d. rel. μ.

Prueba del Teorema 9.43.

Recordemos que $Rad(L_1(G))$ denota el radical de $L_1(G)$ y que es un ideal. Ahora tomemos f en el radical. Debemos probar que $f = 0$ c.d. rel. μ.

Por la Proposición 9.15 existe una red de funciones continuas de soporte compacto $(\psi_U)_{U \in B}$ que satisface

1. Para toda $U \in B$, $\|\psi_U\|_1 = 1$.

2. $lim_U \|f * \psi_U - f\| = 0$.

Gracias a 2. resulta que si probamos que para toda $U \in B$, $f * \psi_U = 0$ c.d. rel. μ, obtendremos que $f = 0$ c.d. rel. μ.

Sea $U \in B$ fija, arbitraria y sea $g = f * \psi_U$. Hagamos algunas observaciones acerca de g. Sabemos que $g \in \mathcal{L}_1(G)$ (al ser convolución de dos funciones en $\mathcal{L}_1(G)$). Usando que ψ_U es acotada tenemos que g es continua y acotada (ver Proposición 9.11). Por último, ya que $Rad(L_1(G))$ es un ideal y que $g = f * \psi_U$ con f en el radical de $L_1(G)$, resulta que $g \in Rad(L_1(G))$.

Como $g \in \mathcal{L}_1(G) \cap \mathcal{L}_\infty(G)$ tenemos (por la desigualdad de Hölder) que $\int |g|^2 d\mu < \infty$ y en consecuencia

$$(g^* * g)(e) = \int g(x)g^*(x^{-1})d\mu(x) = \int |g(x)|^2 d\mu \tag{9.44}$$

Notamos que cualquier función en $\mathcal{L}_1(G) \cap \mathcal{L}_\infty(G)$ satisface (9.44). Así pues, mostrar que $g = 0$ c.d. rel. μ es equivalente a probar que $g^* * g$ es identicamente cero.

Pongamos atención en la función $g^* * g$. Gracias a que g es acotada c.d. rel. μ y que $g^* \in \mathcal{L}_1(G)$ tenemos de nuevo por (9.11) que $g^* * g$ es continua y $g^* * g \in \mathcal{L}_1(G) \cap \mathcal{L}_\infty(G)$. Usando de nuevo que $Rad(L_1(G))$ es un ideal, tenemos que $g^* * g$ está en el radical. Además note que $(g^* * g)^* = g^* * g$.

Tomemos $F : L_1(G) \to \mathbb{C}$ dada por

$$F([h]) = (h * g^* * g)(e)$$

Gracias a que $g^* * g \in \mathcal{L}_1(G)$, resulta que F está bien definida y como la función $y \mapsto (g^* * g)(y^{-1})$ está en $\mathcal{L}_\infty(G)$, $F([h])$ se calcula como

$$F([h]) = \int h(x)(g^* * g)(y^{-1})d\mu(y)$$

Lo importante de la función F es que usando $g^* * g \in \mathcal{L}_1(G) \cap \mathcal{L}_\infty(G)$, (9.44) y $(g^* * g)^* = g^* * g$ tenemos que

$$F([g^* * g]) = ((g^* * g)^* * (g^* * g))(e) = \int |(g^* * g)(y)|^2 d\mu(y)$$

Ahora, si probamos que $g^* * g$ está en el núcleo de F obtendremos (de la ecuación anterior) que $g^* * g = 0$ c.d. rel. μ, pero al ser $g^* * g$ continua concluimos que $(g^* * g)(x) = 0$ para toda x.

Nuestro objetivo ahora es probar que F se anula en $g^* * g$. Para esto probaremos que F es funcional lineal positiva, pues por la Proposición (2.25) sabemos que toda funcional lineal positiva se anula en el radical de $L_1(G)$ y $g^* * g \in Rad(L_1(G))$.

Es claro que F es lineal. Ya que la norma infinito de $y \mapsto (g^* * g)(y^{-1})$ es igual a la norma infinito de $y \mapsto (g^* * g)(y)$ (pues $y \mapsto y^{-1}$ preserva a μ) resulta

$$|(h * g^* * g)(e)| \leq \int |h(y)||(g^* * g)(y^{-1})|d\mu(y) \leq \|[h]\|_1 \|[g^* * g]\|_\infty$$

así que F es acotada.

Para verificar que F es positiva sólo nos falta probar dos cosas: que $F([h])$ es real para toda h tal que $h^* = h$ y que para toda h, $0 \leq F([h] * [h^*])$.

Supongamos que $h = h^*$. Por definición de F

$$F([h^*]) = \int \overline{h(y^{-1})}(g^* * g)(y^{-1})d\mu(y)$$

Como la transformación $y \mapsto y^{-1}$ preserva a μ tenemos que lo anterior se escribe como

$$F([h^*]) = \int \overline{h(y)}(g^* * g)(y)d\mu(y)$$

y entonces

$$\overline{F([h^*])} = \int h(y)\overline{(g^* * g)(y)}d\mu(y) = \int h(y)(g^* * g)^*(y^{-1})d\mu(y) = (h * (g^* * g)^*)(e)$$

pero $(g^* * g)^* = g^* * g$, asi que

$$\overline{F([h^*])} = h * (g^* * g)(e) = F([h])$$

En consecuencia, tenemos $\overline{F([h])} = F([h^*])$ y usando que $h = h^*$ tenemos que $F([h]) = \overline{F([h])}$, por lo que $F([h])$ es real.

Probemos que $0 \leq F([h] * [h^*])$. Es en esta parte donde usamos la conmutatividad en $\mathcal{L}_1$ para obtener

$$F([h] * [h^*]) = ((h * g)^* * (h * g))(e)$$

pero $h * g^* * g \in \mathcal{L}_1(G) \cap \mathcal{L}_\infty(G)$ (usando que $g^* * g \in \mathcal{L}_\infty(G)$ y 9.11-1) y entonces por (9.44) tenemos

$$F([h] * [h^*]) = \int |h * g|^2 d\mu \geq 0$$

Esto termina la prueba de que F es funcional lineal acotada, y por lo tanto la prueba del Teorema 9.43. *Q.E.D.*

Veamos algunos corolarios del Teorema 9.43.

Corolario 9.45. *Suponga que G es conmutativo. Sean f y g en $L_1(G)$ tal que para toda γ en $\Gamma(G)$*

$$\int f(x)\gamma(x)d\mu(x) = \int g(x)\gamma(x)d\mu(x) \tag{9.45}$$

Entonces $f = g$ c.d. rel. μ.

Demostración. Sean f y g en $\mathcal{L}_1(G)$, tal que 9.45 se cumpla. Entonces para todo γ caracter de G

$$\int (f(x) - g(x))\gamma d\mu(x) = 0$$

Usando la Proposición 9.22, tenemos que $[f - g]$ está en el núcleo de toda funcional lineal multiplicativa. Pero por 2.24, esto es equivalente a que $[f - g]$ esté en el radical de $L_1(G)$, es decir, $f = g$ c.d. rel. μ. *Q.E.D.*

Corolario 9.46. *Si G es conmutativo, $\Gamma(G)$ separa los puntos de G.*

Demostración. Sean x, y dos puntos en G distintos, entonces $xy^{-1} \neq e$. Si encontramos γ caracter tal que $\gamma(xy^{-1}) \neq 1$, entonces γ separa x de y. En conclusión, es equivalente probar que dada $x \neq e$, existe γ caracter con $\gamma(x) \neq 1$.

Supongamos que $x \in G$ es tal que para todo $\gamma \in Gamma(G)$ $\gamma(x) = 1$ y que $x \neq e$.

Sea f función continua de soporte compacto fija y arbitraria. Por la invariancia de μ, tenemos que para todo $\gamma \in \Gamma(G)$

$$\int f(y)\gamma(y)d\mu(y) = \int f(xy)\gamma(xy)d\mu(y) = \int f(xy)\gamma(y)\gamma(x)d\mu(y)$$

pero, $\gamma(x) = 1$, y por el Corolario 9.45, resulta que $f(xy) = f(y)$ c.d. rel. μ. Al ser f continua tenemos que para todo y, $f(xy) = f(y)$ por lo que $f(x) = f(e)$. Pero como $x \neq e$, existe U vecindad de e tal que $x \notin U$. Por el Lema 9.2 existe f función continua de soporte compacto tal que $f(e) = 1$ y $f(x) = 0$ lo que contradice que $f(x) = f(e)$. *Q.E.D.*

Corolario 9.47. *Recordamos que $L_2(G)$ es un espacio de Hilbaert si tomamos $\langle f, g\rangle = \int f\bar{g}d\mu$.*

Supongamos que G es conmutativo y que $\mu(G)$ es finita. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mu(G) = 1$. Entonces $\Gamma(G)$ es una base de Hilbert de $L_2(G)$.

Demostración. Lo primero que notamos es que al ser μ finita y cada caracter acotado, tenemos que $\Gamma(G)$ está contenido en $\mathcal{L}_2(G)$.

Para que $\Gamma(G)$ sea una base de Hilbert, es equivalente probar que $\Gamma(G)$ es una familia ortonormal completa (ver apéndice C.12).

Como

$$\int \gamma(y)\bar{\gamma}(y)d\mu(y) = \int \gamma(y)\gamma(y^{-1})d\mu(y) = \mu(G) = 1$$

tenemos que para cada γ, $\|\gamma\|_2 = 1$.

Veamos ahora que los caracteres son ortogonales. Para esto sean γ y δ dos caracteres. Observamos que por la invariancia, para toda x tenemos

$$\begin{aligned}\int \gamma(y)\bar{\delta}(y)d\mu(y) &= \int \gamma(xy)\bar{\delta}(xy)d\mu(y)\\ &= \gamma(x)\delta(\bar{x})\int \gamma(y)\bar{\delta}(y)d\mu(y).\end{aligned}$$

En consecuencia, si $\int \gamma\bar{\delta}d\mu \neq 0$ entonces $\gamma(x)\bar{\delta}(x) = 1$ para toda x, o equivalentemente para toda x, $\gamma(x) = \delta(x)$ (usando que $\bar{\delta}(x) = \delta(x^{-1})$). En consecuencia tenemos que si $\gamma \neq \delta$ entonces $\int \gamma\bar{\delta}d\mu = 0$, es decir, γ y δ son ortogonales.

Para terminar de probar que $\Gamma(G)$ es completa debemos tomar f en $\mathcal{L}_2(G)$ tal que sea ortogonal a todos los elementos de $\Gamma(G)$ y probar que $f = 0$ c.d. rel. μ. Que f sea ortogonal a todo elemento de $\Gamma(G)$ es equivalente a que $[f]$ esté en el radical de $L_1(G)$. Como $L_1(G)$ es semisimple, concluimos que $[f] = 0$, es decir, $f = 0$ c.d. rel. μ. *Q.E.D.*

Apéndice A

Topología

Varios de los resultados de este apéndice pueden ser consultados en [Engelking] o en [Willard].

Definición A.1. *1. Un conjunto parcialmente ordenado es un conjunto P junto con una relación $\leq$ que satisface, para $a, b, c \in P$:*

   (a) $a \leq a$.

   (b) Si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.

   (c) Si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$.

2. Una cadena en un conjunto parcialmente ordenado P es un subconjunto $C \subseteq P$ de tal forma que para cualesquiera $a, b \in C$ se cumple que $a \leq b$ ó $b \leq a$. La cadena C está acotada superiormente en P si existe $x \in P$ tal que $c \leq x$ para todo $c \in C$.

3. Un elemento máximo en un conjunto parcialmente ordenado P es un elemento de P, llamémoslo m, de tal forma que no existe $a \in P$ tal que $m \leq a$ y $a \neq m$.

Lema A.2 (Lema de Zorn). *Si $(P, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, de tal forma que toda cadena en P está acotada superiormente en P, entonces P tiene un elemento máximo.*

Recordemos algunas definiciones. Por (X, τ) denotamos un espacio topológico fijo.

Definición A.3. *1. (X, τ) se llama T_2 ó Hausdorff si para todo par de puntos distintos de X, x y y, existen U, V en τ ajenos tales que $x \in U$ y $y \in V$.*

2. (X, τ) se llama T_3 ó regular si los puntos son cerrados y para cualesquiera $F \subseteq X$ cerrado y $x \in X$ con $x \notin F$ existen U y V abiertos ajenos de tal forma que $x \in U$ y $F \subseteq V$.

3. (X, τ) *se llama* T_4 *ó normal si los puntos son cerrados y para cualesquiera* E *y* F *cerrados ajenos en* X*, existen* U*,* V *abiertos ajenos en* X *de tal forma que* $E \subseteq A$ *y* $F \subseteq V$.

4. (X, τ) *se llama localmente compacto si para todo punto de* x *en* X *existe* U *en* τ *con* $x \in U$ *y con la cerradura de* U *compacta.*

Proposición A.4. *Si* (X, τ) *es un espacio compacto Hausdorff entonces es normal.*

Proposición A.5. *Supongamos que* (X, τ) *y* (Y, ρ) *son espacios con* (X, τ) *compacto y* (Y, ρ) *Hausdorff. Si* $f : X \to Y$ *es continua y biyectiva, entonces* $f^{-1} : Y \to X$ *es continua.*

Lema A.6 (Lema de Urysohn). *Sea* (X, τ) *un espacio topológico normal. Dados* E *y* F *cerrados ajenos en* X*, existe* $g : X \to [0, 1]$*, continua tal que* g *restringida a* E *es cero y restringida a* F *es uno.*

Lema A.7. *Sea* (X, τ) *un espacio localmente compacto Hausdorff. Dado un abierto no vacío* U *y un punto* x *en* U *existe un abierto* V *que tiene a* x *con cerradura compacta y tal que* $\bar{V} \subseteq U$.

Definición A.8.

1. *Un conjunto dirigido* $(L, \leq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado de tal forma que para cualesquiera* $l_1, l_2 \in L$ *existe* $l_3 \in L$ *de tal forma que* $l_1 \leq l_3$ *y* $l_2 \leq l_3$.

2. *Sean* L*,* M *dos conjuntos dirigidos y* $\psi : L \to M$*. La función* ψ *se llama cofinal si para cada* $m \in M$ *existe* $l \in L$ *de tal forma que* $m \leq \psi(l)$*;* ψ *se llama creciente si siempre que* $l_1 \leq l_2$ *tenemos* $\psi(l_1) \leq \psi(l_2)$.

3. *Una red en un espacio* (X, τ) *es una función* $r : L \to X$*, donde* L *es un conjunto dirigido. Usualmente denotamos a* $r(l)$ *por* x_l *y a la red la denotamos por* $(x_l)_{l \in L}$*. Una subred de una red* $r : L \to X$ *es una composición* $r \circ \psi : M \to X$ *con* M *un conjunto dirigido* $\psi : M \to L$ *una función creciente y cofinal. Denotamos por* $(x_{\psi(m)})_{m \in M}$ *a la subred* $r \circ \psi$.

4. *Sea* $(x_l)_{l \in L}$ *una red en* (X, τ)*. Decimos que* $(x_l)_{l \in L}$ *converge a* $x \in X$ *(denotado* $x_l \to x$*) si para toda* $U \in \tau$ *con* $x \in U$ *existe* $l_0 \in L$ *de tal forma que para toda* $l \geq l_0$ *tenemos que* $x_l \in U$.

Proposición A.9. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico Hausdorff y* $(x_l)_{l \in L}$ *una red en* X *de tal forma que converge a* $x \in X$*. Si* $(x_{\psi(m)})_{m \in M}$ *es una subred de* $(x_l)_{l \in L}$ *entonces* $(x_{\psi(m)})_{m \in M}$ *converge a* x.

Proposición A.10. *Sea* (X, τ) *un espacio topológico Hausdorff y* $E \subseteq X$*. Un punto* x *está en la cerradura de* E *si y sólo si existe una red* $(x_l)_{l \in L}$ *con* $x_l \in E$ *para toda* $l \in L$ *de tal forma que* $x_l \to x$.

Proposición A.11. *Sean* (X, τ) *y* (Y, ρ) *dos espacios topológicos Hausdorff y* $f : X \to Y$*.* f *es continua en* $x \in X$ *si y sólo si para toda red* $(x_l)_{l \in L}$ *en* X *tal que* $x_l \to x$ *tenemos que* $f(x_l) \to f(x)$.

Definición A.12. *Sea (X, τ) un espacio topológico localmente compacto Hausdorff. Una compactificación unipuntual de X es un espacio topológico compacto Hausdorff Y y una función continua e inyectiva $h : X \to Y$ de tal forma que $h(X)$ es denso en Y.*

Notas: Para todo espacio topológico localmente compacto Hausdorff siempre es posible encontrar una compactificación unipuntual y se prueba que cualesquiera dos compactificaciones unipuntuales son homeomorfas, por lo que podemos hablar de la compactificación unipuntual de un espacio dado (ver [Engelking]). Presentamos una construcción de la compactificación unipuntual, sin probar los detalles (para verlo rigurosamente puede consultar [Engelking]).

Proposición A.13. *Sea (X, τ) un espacio localmente compacto Hausdorff. Definimos $Y = X \cup \{\infty\}$, con ∞ un punto que no esté en X.*

Sea x en X. El conjunto de vecindades de x en Y es simplemente el conjunto de vecindades de x en X. Las vecindades de ∞ son el conjunto

$$\{Y \setminus C : C \subset X \text{ y } C \text{ es compacto}\} \tag{A.1}$$

Entonces lo anterior define una topología en Y que lo hace espacio compacto Hausdorff y de tal forma que X es denso en Y.

Apéndice B

Teoría de la medida

Una demostración de los resultados en este apéndice puede consultarse en [Cohn], [Halmos] y [Grabinsky].

Teorema B.1. *Sean λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ subconjuntos abiertos y $T : U \to V$ una biyección de tal forma que T y T^{-1} son de clase C^1. Por J_T denotamos el jacobiano de T. Si $f : V \to \mathbb{R}$ es borel medible entonces*

$$\int_V f(x)d\lambda(x) = \int_U f(T(x))|J_T(x)|d\lambda(x).$$

Proposición B.2. *Sea (X, S, μ) un espacio de medida, f en $\mathcal{L}_1(X)$ y $0 \leq k$ constante tal que*

$$\left|\frac{1}{\mu(E)}\int_E f d\mu\right| \leq k$$

para todo $E \in S$ con $0 < \mu(E) < \infty$. Entonces $|f| \leq k$ c.d. rel. μ.

Demostración.
Es suficiente probar que $f^+ \leq k$ y $f^- \leq k$ c.d. rel. μ.
Como f^+ es μ-integrable tenemos que para todo $a > 0$

$$a\mu\left(\{x \in X : f^+(x) > a\}\right) \leq \int f^+ d\mu < \infty$$

por lo que $\mu\left(\{x \in X : f^+(x) > a\}\right)$ es finita.

Para todo $n \in \mathbb{N}$ sea $A_n = \{x \in X : f^+(x) > k + \frac{1}{n}\}$. Afirmamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) = 0$, pues en caso contrario

$$k + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\mu(A_n)}\int_{A_n} f^+ = \left|\frac{1}{\mu(A_n)}\int_{A_n} f d\mu\right| \leq k$$

lo que es una contradicción. Por último, como $A = \{x \in X : f^+(x) > k\}$ es la unión de los A_n resulta que $\mu(A) = 0$ y entonces $f^+ \leq k$ c.d. rel. μ. De manera similar, $f^- \leq k$ c.d. rel. μ. *Q.E.D.*

Definición B.3. *Sea X un conjunto no vacío. Un* <u>*π-sistema*</u> *en X es una familia de subconjuntos de X que es cerrada bajo intersecciones finitas y un* <u>*λ-sistema*</u> *$\mathcal{L}$ es una familia de subconjuntos que cumple*

1. $X \in \mathcal{L}$
2. *Si $A, B \in \mathcal{L}$ con $B \subset A$ entonces $A \backslash B \in \mathcal{L}$*
3. *Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de elementos de $\mathcal{L}$ entonces $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{L}$*

Lema B.4 (Lema de las clases monótonas). *Sean $\mathbf{P}$ un π-sistema y $\mathcal{L}$ un λ-sistema tal que $\mathbf{P} \subseteq \mathcal{L}$. Entonces la σ-álgebra generada por $\mathbf{P}$ está contenida en $\mathcal{L}$.*

Definición B.5. *Sean (X, S, μ) y (Y, T, ν) espacios de medida σ-finitos.*

1. *Por $S \otimes T$ denotamos la σ-álgebra generada por los conjuntos $E \times F$, con $E \in S$ y $F \in T$.*
2. *Dados $x \in X$, $y \in Y$ y $L \in S \otimes T$ definimos*

$$L_x = \{w \in Y : (x, w) \in L\} \quad L^y = \{z \in X : (z, y) \in L\}$$

3. *Dada $h : X \times Y \to \mathbb{C}$, $x \in X$ y $y \in Y$ definimos $h_x(z) = h(x, z)$ y $h^y(w) = (w, y)$.*

Proposición B.6. *Sean (X, S, μ) y (Y, T, ν) dos espacios de medida σ-finitos y L en $S \otimes T$. Las funciones dadas por $f(x) = \nu(L_x)$ y $g(y) = \mu(L^y)$ son S y T medibles respectivamente.*

Teorema B.7. *Sean (X, S, μ) y (Y, T, ν) dos espacios de medida σ-finitos. Existe una única medida $\mu \otimes \nu$ sobre $S \otimes T$ tal que*

1. *Para cualesquiera $A \in S$ y $B \in T$*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$$

2. *Para cualquier $L \in S \otimes T$*

$$(\mu \otimes \nu)(L) = \int \nu(L_x) d\mu(x) = \int \mu(L^y) d\nu(y).$$

Teorema B.8 (Teorema de Tonelli). *Sean (X, S, μ) y (Y, T, ν) dos espacios de medida σ-finitos, h una función $S \otimes T$-medible no negativa, $A \in S$ y $B \in T$.*

1. *Si definimos $f(x) = \int h_x(y) d\mu(y)$ y $g(y) = \int h^y(x) d\mu(x)$ entonces f es S-medible y g es T-medible.*

2.

$$\int_{A\times B} hd(\mu\otimes\nu) = \int_A fd\mu = \int_B gd\nu$$

Teorema B.9 (Teorema de Fubini (caso real)). *Sean $A \in S$, $B \in T$ y $h \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(X\times Y, S\otimes T, \mu\otimes\nu)$.*

1. *h_x está en $\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\nu)$ c.d. rel. μ y h^y está en $\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\mu)$ c.d. rel. ν.*
2. *Si definimos $f(x) = \int_B h_x d\nu$ c.d. y $g(y) = \int_A h^y d\mu$ entonces f está en $\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\mu)$ y g está en $\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\nu)$.*
3. *$\int_{A\times B} hd(\mu\otimes\nu) = \int_A fd\mu = \int_B gd\nu$.*

Teorema B.10 (Teorema de Fubini (caso complejo)). *Sean $A \in S$, $B \in T$ y $h \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(X\times Y, S\otimes T, \mu\otimes\nu)$.*

1. *h_x está en $\mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(\nu)$ c.d. rel. μ y h^y está en $\mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(\mu)$ c.d. rel. ν.*
2. *Si definimos $f(x) = \int_B h_x d\nu$ c.d. y $g(y) = \int_A h^y d\mu$ entonces f está en $\mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(\mu)$ y g está en $\mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(\nu)$.*
3. *$\int_{A\times B} hd(\mu\otimes\nu) = \int_A fd\mu = \int_B gd\nu$.*

Demostración.

Recuerde que $h \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(X\times Y, S\otimes T, \mu\otimes\nu)$ si y sólo si $Re(h), Im(h) \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(X\times Y, S\otimes T, \mu\otimes\nu)$. Por el caso real tenemos que $Re(h)_x$ y $Im(h)_x$ están en $\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\nu)$ c.d. rel. μ y $Re(h)^y$ y $Im(h)^y$ están en $\mathcal{L}_1^{\mathbb{R}}(\mu)$ c.d. rel. ν. En consecuencia h_x es ν-integrable para casi toda x y h^y es μ-integrable para casi toda y.

Por otro lado por el caso real las funciones $f_1(x) = \int_B Re(h)_x d\nu$ y $f_2(x) = \int_B Im(h)_x d\nu$ son integrables respecto a μ. En consecuencia,

$$f(x) = \int_B h_x d\nu = \int_B Re(h)_x d\nu + i\int_B Im(h)_x d\nu$$

es integrable con respecto a μ. De manera similar, usando que las funciones $g_1(y) = \int_A Re(h)^y d\mu$ y $g_2(y) = \int_A Im(h)^y d\mu$ son integrables con respecto a ν tenemos que g es integrable con respecto a ν.

Por último usando que

$$\int_{A\times B} hd\mu\otimes\nu = \int_{A\times B} Re(h)d\mu\otimes\nu + i\int_{A\times B} Im(h)d\mu\otimes\nu$$

y

$$\int_{A\times B} Re(h)d\mu\otimes\nu = \int_A f_1 d\mu = \int_B g_1 d\nu$$
$$\int_{A\times B} Im(h)d\mu\otimes\nu = \int_A f_2 d\mu = \int_B g_2 d\nu$$

concluimos que

$$\int_{A\times B} hd\mu \otimes \nu = \int_A fd\mu = \int_B gd\nu.$$

Q.E.D.

Definición B.11. *Sea (X, S) un espacio medible.*

1. *Una medida compleja μ es una función de S a $\mathbb{C}$ que es σ-aditiva y $\mu(\emptyset) = 0$.*

2. *La variación de μ en $A \in S$, denotada $|\mu|(A)$, es el supremo de los números $\sum_{i=1}^{n} |\mu(A_i)|$, donde $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ varía sobre todas las particiones de A en conjuntos S-medibles.*

3. *Dadas dos medidas complejas μ y ν, decimos que ν es absolutamente continua con respecto a μ si para todo $A \in S$ que satisfaga $|\mu|(A) = 0$ tenemos que $|\nu|(A) = 0$.*

Proposición B.12. *Sean ν y μ dos medidas complejas. Tenemos que μ es absolutamente continua con respecto a ν si y sólo si para todo A en S que satisfaga $\mu(A) = 0$ se tiene que $\nu(A) = 0$.*

Teorema B.13 (Radon-Nikodym). *Sea (X, S) un espacio medible, μ una medida σ-finita no negativa sobre S y ν una medida compleja sobre S. Si ν es absolutamente continua con respecto a μ, entonces existe $g \in \mathcal{L}_1^{\mathbb{C}}(X, S, \mu)$ que satisface $\nu(A) = \int_A gd\mu$ para todo $A \in S$.*

Teorema B.14. *Sea (X, S) un espacio medible y $\rho : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ una medida exterior. Sea*

$$S^* = \{E \subseteq X : \textit{para todo } B \subseteq X,\ \rho(B) = \rho(B \cap E) + \rho(B \setminus E)\}.$$

Entonces

1. *S^* es una σ-álgebra.*

2. *La restricción de ρ a S^* es una medida completa.*

Apéndice C

Análisis Funcional

Los resultados de análisis funcional pueden ser consultados en [Rudin-2] y en [Hewitt-2].

Definición C.1. *1. Un espacio vectorial normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach si la métrica inducida por la norma es completa.*

2. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X se llama sumable si existe $x \in X$ tal que

$$\lim_n \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i - x \right\| = 0.$$

3. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X se llama absolutamente sumable si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge.

Proposición C.2. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. X es un espacio de Banach si y sólo si toda serie absolutamente sumable es sumable.*

Demostración.

Supongamos que X es un espacio de Banach y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de X absolutamente sumable. Para toda $n \in \mathbb{N}$ sea $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$. Como $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ converge dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de tal forma que para todos $m > n \geq N$ $\sum_{k=n}^{m} \|x_k\| < \varepsilon$. Entonces si $m > n \geq N$, $\|s_{n+q} - s_n\| \leq \sum_{n+1}^{m} \|x_k\| < \varepsilon$. Como X es completo y ε arbitraria concluimos que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, es decir, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es sumable.

Ahora supongamos que toda serie absolutamente sumable es sumable y probemos que el espacio es completo.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy y encontremos $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de tal forma que para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\|x_{n_{m+1}} - x_{n_m}\| < \frac{1}{2^m} \tag{C.1}$$

Sea $y_m = x_{n_{m+1}} - x_{n_m}$. Por $(C.1)$, $\sum_{k=1}^{m} \|y_m\| < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^m}$, por lo que de la hipótesis se sigue que $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es absolutamente sumable; es decir, existe $x \in X$ tal que

$$\lim_m \left\| \sum_{k=1}^{m} y_k - x \right\| = 0$$

pero $\sum_{k=1}^{m} y_k = x_{m+1} - x_1$ en consecuencia $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge y por lo tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también. $Q.E.D.$

Proposición C.3. *Sea X un espacio de Banach. Dados $x \neq y$ en X, existe f en X^* tal que $f(x) \neq f(y)$. Equivalentemente, si para toda f en X^*, $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$.*

Definición C.4. *Sea X un espacio de Banach. La topología débil en X, denotada por ω, es la menor topología que hace continua a todo función en X^**

.

Proposición C.5. *Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, converge a $x \in X$ en la topología ω si y sólo si para toda $f \in X^*$, $\lim_n f(x_n) = f(x)$.*

Proposición C.6. *Suponga que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge en la topología ω. Entonces existe $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$, para todo n natural.*

Dado $x \in X$, tomamos i_x la función de X^* a $\mathbb{C}$ dada por $i_x(f) = f(x)$, la evaluación en x.

Proposición C.7. *Para todo x, $i_x \in X^{**}$. Es decir, i_x es función lineal acotada de X^* a $\mathbb{C}$.*

Definición C.8. *Sea X un espacio de Banach. La topología débil estrella, denotada por ω^*, es la menor topología que hace a toda i_x continua en X^*.*

Proposición C.9. *Una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X^*, converge a $f \in X^*$ en la topología ω^* si y sólo si para toda $x \in X^*$, $\lim_n f_n(x) = f(x)$.*

Teorema C.10 (Alaoglu). *Sea $S = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}$. S es ω^*-compacto.*

Definición C.11.

1. *Un espacio con producto interior $(H, \langle\cdot\rangle)$ es un espacio de Hilbert si la métrica inducida por el producto interior lo hace completo.*
2. *Una familia de vectores β se llama ortonormal si todo elemento de β tiene norma uno y si para todos x, y distintos en β, $\langle x, y\rangle = 0$.*
3. *Una base de Hilbert para H es un conjunto ortonormal máximo, en el sentido de que si agregamos un nuevo vector, ésta deja de ser ortonormal.*
4. *Un conjunto β ortonormal es completo si para todo x que cumpla que $\langle x, y\rangle = 0$ para todo y en β, tenemos que $x = 0$.*

Proposición C.12. *Sea $(H, \langle\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert y β un conjunto ortonormal. Son equivalentes:*

1. *β es una base de Hilbert*
2. *β es un conjunto ortonormal completo.*

Epílogo

Hemos dado apenas una modesta introducción a lo que son las álgebras de Banach y más concretamente a $L_1(G)$. Como es de esperarse quedan muchos aspectos que no hemos tocado pero queremos mencionar.

Una parte importante, y con grandes aplicaciones dentro de la misma teoría de las álgebras de Banach, es la del cálculo simbólico. Recordamos que dado un polinomio $p(z) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i z^i$, con coeficientes complejos y a un elemento en un álgebra de Banach con uno, por $p(a)$ entendemos $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i$. Pues bien, el cálculo simbólico generaliza lo anterior, tomando ahora en vez de un polinomio p una función analítica en una vecindad del espectro de a y la vía para hacer ésto es mediante la introducción de integrales con valores vectoriales, llamadas integrales de Bochner. Como consecuencia también se generaliza el Teorema espectral polinomial como sigue: si f es analítica en una vecindad del espectro de a, entonces $\sigma(f(a)) = f[\sigma(a)]$. Una aplicación del cálculo simbólico es en el estudio de álgebras de operadores sobre espacios de Hilbert.

En el capítulo 5 empezamos a trabajar con grupos localmente compactos Hausdorff segundo numerables, principalmente para poder usar el teorema de Fubini. Notamos que si el grupo G no es segundo numerable no podemos asegurar que $\mathbf{B}_{G\times G}$ coincida con $\mathbf{B}_G \otimes \mathbf{B}_G$ y por lo tanto $\mu \otimes \mu$ no está definida para todos los borelianos de $G \times G$ y entonces no todas las funciones continuas son $\mathbf{B}_G \otimes \mathbf{B}_G$-medibles. Para solucionar estos problemas y trabajar con grupos localmente compactos Hausdorff arbitrarios necesitamos extender Fubini para espacios que no necesariamente sean σ-finitos. Una vía para hacer esto es no trabajar con la medida producto $\mu\otimes\mu$, sino trabajar con una medida regular sobre $\mathbf{B}_{G\times G}$ que rescate el teorema de Fubini para funciones que se anulan afuera de un rectángulo de lados σ-finitos. Tal medida está dada por el Teorema de representación de Riesz. Para ver esto con detalle el lector puede revisar [Cohn]. Una vez dicho esto mencionamos que todos los resultados del último capítulo permanecen válidos para grupos no necesariamente segundo nemerables.

En el último capítulo presentamos el grupo de caracteres de un grupo topológico localmente compacto Hausdorff. Sólo vimos la estructura de $\Gamma(G)$ como grupo, pero resulta que si lo dotamos de la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos compactos hecemos de $\Gamma(G)$ un grupo topológico localmente compacto Hausdorff que es homeomorfo a $\mathcal{M}_{L_1(G)}$ (esto se puede revisar en [Rudin-1]). Una vez que sabemos que $\Gamma(G)$ es un grupo topológco localmente compacto Hausdorff, podemos preguntarnos quén es $\Gamma(\Gamma(G))$. La respuesta está dada por el Teorema de Pontrjagin, que nos dice que $\Gamma(\Gamma(G))$ es isomorfo como grupo topológico a G, donde el isomorfismo consiste en mandar cada elemento x de G a su evaluación. Por ejemplo, sabemos que $\Gamma(\mathbb{R})$ es isomorfo a $\mathbb{R}$ como grupos, por lo que podemos pensar que $\Gamma(\Gamma(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$. Como consecuencia de este teorema tenemos el principio de dualidad de Pontrjagin (ver por ejemplo [Folland] y [Rudin-1]), que dice: si $\Gamma(G)$ es compacto entonces G es discreto y si $\Gamma(G)$ es discreto entonces G es compacto. Para ilustrar este principio note que $\Gamma(\mathbf{Z}) = \mathbb{C}$ y $\Gamma(\mathbb{C}) = \mathbf{Z}$. Queremos mencionar cómo probar una parte del principio de dualidad de Pontrjagin, utilizando que $\Gamma(G)$ es homeomorfo a $\mathcal{M}_{L_1(G)}$: Si suponemos que G es discreto, entonces sabemos que $L_1(G)$ tiene uno, así que $\mathcal{M}_{L_1(G)}$ es compacto, pero éste último es isomorfo (como espacio topológico) a $\Gamma(G)$, por lo que $\Gamma(G)$ es compacto.

Por último queremos mencionar cómo la transformada de Gelfand generaliza a la transformada de Fourier. Ya mencionamos en el párrafo anterior que con la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos compactos, $\Gamma(G)$ es isomorfo como grupo topológico a $\mathcal{M}_{L_1(G)}$. En el caso concreto de $\mathbb{R}^n$, sabemos que $\Gamma(\mathbb{R}^n)$ es isomorfo como grupo a $\mathbb{R}^n$ pero también se puede probar que el isomorfismo es un morfismo de grupos topológicos. En consecuencia tenemos que $\mathcal{M}_{L_1(\mathbb{R}^n)}$ y $\mathbb{R}^n$ son homeomorfos como espacios topológicos, así que podemos pensar la transformada de Gelfand como un homomorfismo de álgebras entre $L_1(\mathbb{R}^n)$ y $C_0(\mathbb{R}^n)$. Echemos un vistazo a la transformada de Gelfand. Dada $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}([\psi]) = \psi(f)$ donde ψ es una funcional lineal multiplicativa. Pero como toda funcional lineal multiplicativa está inducida por un caracter γ y cada caracter es de la forma $\gamma(t) = e^{i(\alpha\cdot t)}$, para un único vector α, podemos pensar $\hat{f}(\psi)$ como $\hat{f}(\alpha)$ para obtener

$$\hat{f}(\alpha) = \int f(t)e^{i(\alpha\cdot t)}d\lambda(t).$$

Por lo tanto, la transformada de Gelfand de una función f en $L_1(\mathbb{R}^n)$ coincide (excepto por un isomorfismo) con la transformada de Gelfand de f.

Bibliografía

[Cohn] Cohn, Donald L. *Measure Theory*, Birkhaüser, 1980.

[Engelking] Engelking, Ryszard. *General Topology*, Heldermann, 1989.

[Folland] Folland, Gerald B. *A course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press 1995.

[Grabinsky] Grabinsky, Guillermo. *Notas de Teoría de la medida*, ITAM 2003.

[Halmos] Halmos, Paul Richard. *Measure Theory*, Springer-Verlag 1974.

[Hewitt-1] Hewitt Edwin; Ross Kennet A. *Abstract Harmonic Analysis vol. I*, Springer-Verlag 1920.

[Hewitt-2] Edwin Hewitt; Karl Stromberg. *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, 1920.

[Larsen] Larsen, Ronald. *Banach Algebras an introduction*, Marcel Dekker, Inc. 1973.

[Nachbin] Nachbin, Leopoldo. *The Haar integral*, Princeton: D. Van Nostrand, 1965.

[Naimark] Naimark, M.A. *Normed Algebras*, Wolters-Noordhoff Publishing Goningen 1972.

[Rotman] Rotman, Joseph J. *An introduction to the Theory of Groups*, Springer-Verlag 1999.

[Rudin-1] Rudin, Walter. *Fourier Analysis on Groups*, Interscience Publishers, 1962.

[Rudin-2] Rudin, Walter. *Functional Analysis*, Mc. Graw Hill, 1991.

[Willard] Willard, Stephen. *General Topology*, Addison-Wesley, 1941.