

00365



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMATICAS
FACULTAD DE CIENCIAS

TRENZAS CERRADAS Y SUPERFICIES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A :

EDGAR JASSO RODRIGUEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. MARIO EUDAVE MUÑOZ

MEXICO, D. F.

FEBRERO, 2004.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

20300

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

Con cariño a

Gaby

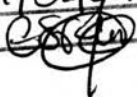
*Por todo tu tiempo
toda tu confianza
y toda tu paciencia.*

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la
UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el
contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: EDGAR JASSO

RODRIGUER

FECHA: 01/03/04

FIRMA: 

Mi señora Madre

*Por hacerme ver
que para llegar lejos
no es necesario alejarse.*

Felipe Jasso

*Por ser más que un padre
un compañero de vida
en las buenas y en las malas.*

Lili y Oscar

*Por que a pesar de los años
y a pesar de los kilómetros
seguimos juntos.*

Agradecimientos

Este trabajo se realizó a lo largo del año 2003 y parte del 2004 bajo la dirección (en gran parte a larga distancia) del Dr. Mario Eudave Muñoz. Quisiera expresar mi profundo agradecimiento a Mario por todos estos años de asesoría y amistad. Gracias!

Aprovecho también para agradecer a mis sinodales:

Del IMATE: *Fico y Max*. A Max en especial le debo agradecer la visión, el tiempo y la paciencia para que este trabajo quedara como se encuentra en su versión final.

Del CIMAT: *Enrique y Víctor*. En particular por aquella provechosa visita a Guanajuato de la cual creo que todos salimos beneficiados.

Durante este tiempo, y desde varios años antes, he tenido la fortuna de ser becario del Instituto de Matemáticas de la UNAM. Quisiera agradecer también al IMATE por brindarme un lugar propicio para el desarrollo de mi trabajo.

A mis compañeros y amigos con quienes compartí y de quienes aprendí antes, durante y después de la Maestría; por que en varias ocasiones *tuvieron* que escucharme hablar de topología en dimensiones bajas y/o acompañarme por un café y/o aguantar los días de pizarrones ocupados con mis dibujos y/o por las *horas extra* de los jueves y viernes (ustedes saben en qué lista caen): Araceli, Beto, Crux, Elohim, Era, Grissel, Isabel, Ivette, Jesús (Winnie), José, Juan Carlos, Manuel, Mito, Montse, Octavio, Olga, Pepe, Sael.

Por último, pero no con menos importancia, quisiera agradecer a la comunidad Polaca de la ciudad de Chicago, Ill. por haberme brindado un apoyo económico muy valioso cuando los tiempos eran difíciles.

TRENZAS CERRADAS Y SUPERFICIES

Edgar Jasso Rodríguez

IMATE-UNAM

Índice general

<u>INTRODUCCIÓN</u>	v
1 <u>TRENZAS CERRADAS Y SUPERFICIES.</u>	1
1. La fibración y posición general	1
2. Máximos y mínimos	6
3. La teselación de S	21
2 <u>CAMBIOS LOCALES.</u>	27
1. Cambio en la foliación	27
2. Estabilización	38
3. Desestabilización	40
4. Movidas de intercambio	43
3 <u>INFORMACIÓN DE S A PARTIR DE LA TESELACIÓN.</u>	51
1. Información global de la teselación	51
2. Gráficas de hojas singulares	55
4 <u>APLICACIONES.</u>	63
1. El Teorema de Markov para enlaces triviales	63
2. Suma conexa y enlaces separables	67
3. El Teorema de Markov para nudos	74
<u>BIBLIOGRAFÍA</u>	83

Introducción

Es un resultado clásico que cualquier enlace en S^3 tiene un representante como cerradura de trenza, pero este representante no es único, pues para empezar podemos tener dos representantes del mismo tipo de enlace pero con distinto índice. El Teorema de Markov para enlaces, [M], dice que cualesquiera dos representantes como cerradura de trenza del mismo tipo de enlace están relacionados por una sucesión finita de movidas elementales:

Isotopías en el complemento del eje de la trenza. En esta movida no se altera el índice.

Estabilización. Este cambio aumenta el índice en uno, y consiste básicamente en introducir un bucle trivial alrededor del eje.

Desestabilización. Este cambio es en algún sentido el inverso del anterior, pues simplifica el encaje al disminuir un bucle trivial alrededor del eje.

Birman y Menasco han desarrollado ciertas técnicas para estudiar superficies ya sea cerradas en el complemento de una trenza, o de Seifert para enlaces que están representando como la cerradura de una trenza, [BM2]. En el presente trabajo se exponen estas técnicas de manera clara y autocontenida siguiendo [BF] y hacemos un recuento de algunos de los resultados que se han podido demostrar siguiendo este camino [BM2], [BM3], [BF], [F], [BM4]. Entre los resultados expuestos se encuentra una demostración novedosa del Teorema de Markov para el caso de nudos, [BM3].

La idea central es que al tener una superficie, ya sea de Seifert o cerrada incompresible en el complemento de la cerradura de una trenza, esta se encuentra de manera natural foliada, donde la foliación esta

dada por la intersección de la superficie con la fibración por discos del complemento del eje de la trenza. Esta foliación contiene un número finito de singularidades que son centros (máximos o mínimos locales) o puntos silla. Si tomamos vecindades de estas hojas singulares, obtenemos una descomposición de la superficie en una cantidad finita de piezas foliadas, donde cada pieza contiene exactamente una hoja singular. Esta descomposición nos da información acerca de la superficie y de hecho, en el caso que la superficie es de Seifert, nos permitirá detectar cuándo son aplicables los cambios descritos por Markov en su teorema.

Existe otro cambio que se realiza en una trenza y consiste en intercambiar, mediante una isotopía, las posiciones relativas a la altura (con respecto al eje) de dos subarcos del enlace. Este se conoce como *movida de intercambio*, y también podemos detectar cuándo es posible su aplicación gracias a la ayuda de la teselación de una superficie incompresible. Este cambio lo usamos, por ejemplo, para dar un resultado análogo al de Markov, pero para enlaces separables, *i.e.* aquellos que admiten una esfera en su complemento, de manera que no sea frontera de una bola. El resultado que probamos es que si empezamos con un enlace separable, entonces es posible pasar de él a un representante del mismo tipo de enlace que es *separable como trenza* por medio de isotopías en el complemento del eje y movidas de intercambio. Por *separable como trenza* queremos decir que es posible escoger a la esfera descrita arriba de modo que intersecte al eje de la trenza en solo dos puntos.

Para la demostración del Teorema de Markov necesitamos además un resultado análogo al anterior para la *suma conexa trezada* de dos enlaces. Decimos que un enlace L es la suma conexa de L_1 y L_2 si existe una esfera $S \subset S^3$, que toca a L en dos puntos y tal que al cortar a L por S , ninguna de las componentes es trivial (añadiendo arcos paralelos a S nos queda una copia de L_1 de un lado y L_2 del otro). Análogamente, el que L sea *suma conexa trezada* de L_1 y L_2 , significa que los enlaces están representados por trenzas cerradas y que la esfera la podemos elegir de manera que corte al eje en dos puntos.

En el capítulo 4 demostramos además de los resultados ya descritos, otros casos especiales del Teorema de Markov: para el nudo trivial y para enlaces triviales. El caso del nudo trivial queda cubierto por el que mostramos al final, pero quisimos dejar la demostración aparte para ilustrar la aplicación de algunos resultados que estudiamos en el

capítulo 3. Como otra aplicación se expone la demostración de que el mínimo índice en que se puede representar a un enlace como trenza cerrada es aditivo menos uno, bajo suma conexa.

En el primer capítulo describimos las herramientas que usamos durante todo el trabajo: la fibración por discos, la foliación de las superficies a estudiar y sus singularidades. Describimos además las condiciones de posición general que asumiremos durante todo el trabajo. Las hojas no singulares de la foliación serán arcos (de dos tipos) o curvas cerradas, las hojas singulares se dan cuando dos hojas regulares se tocan en un punto, o cuando una misma hoja crea un punto singular. Le damos nombre tanto a los tipos de hojas como a las singularidades. Definimos lo que entenderemos por vértices de la teselación, sus valencias, signo y paridad, así como el signo de una singularidad.

La demostración que damos del lema 1.5 es nueva, pues en los trabajos anteriores se dejan casos fuera, [BM1], o se hace referencia a [No] para eliminar la existencia de máximos y mínimos en la foliación de las superficies a estudiar. Pensamos que nuestra exposición es más clara pues queda autocontenida y no se utilizan técnicas ajenas.

En el segundo capítulo se describen los cambios locales del encaje de la trenza o de la superficie, que nos permitirán pasar de un representante como cerradura de trenza a otro. Ya mencionamos la estabilización, desestabilización y movida de intercambio, pero existe otro cambio que involucra al encaje de la superficie que será muy importante, pues nos permite reducir (en algunos casos) la valencia de algunos de los vértices de la teselación. A esta movida la llamamos *cambio en la foliación*. Como ya dijimos, vamos a poder leer a partir de la información de la teselación de S cuándo podemos aplicar estos cambios.

El tercer capítulo está basado en [BF] donde se estudia más detalladamente la información que engloba el acomodo de los vértices de la teselación, acerca del encaje de S . Para ello se considera la gráfica total que tiene por vértices tanto a los vértices de la teselación, como a los puntos singulares de la foliación; y por aristas a subarcos de las hojas singulares. Se definen las gráficas $\mathcal{G}_{\varepsilon, \delta}$ como subgráficas de la gráfica total, donde se consideran vértices de paridad ε y arcos que pasan por puntos singulares de signo δ . Estas gráficas las usamos por ejemplo para la demostración del Teorema de Markov en el caso del nudo trivial.

En el cuarto capítulo aplicamos todo lo anterior para exponer las demostraciones importantes de [BM2] y [BM3]. Las demostraciones de [BM2] se dan más concretas, pues en el tiempo en que salió originalmente aún no se tenía el lenguaje que clarifica los cambios descritos, [BF].

Trenzas cerradas y superficies

En este capítulo describimos las herramientas que estaremos usando a lo largo del trabajo. La idea central es que al tener una superficie en el complemento de una trenza cerrada en S^3 , esta hereda una foliación de manera natural dada por sus intersecciones con la fibración por discos del complemento del eje de la trenza. Esto lo estudiamos en la primera sección. La foliación tendrá una cantidad finita de hojas singulares y estas podrán ser máximos (mínimos) o puntos silla respecto a la fibración de discos. En la segunda sección damos un argumento autocontenido para eliminar máximos y mínimos, para trabajar el resto del trabajo solo con hojas singulares que son puntos silla. Si tomamos vecindades de éstas hojas singulares tenemos una descomposición en piezas foliadas de la superficie, cada pieza conteniendo sólo una hoja singular. La sección 3 describe esta descomposición.

Este enfoque nos servirá también para estudiar superficies de Seifert para enlaces y a lo largo del trabajo se hace esto de manera paralela.

1. LA FIBRACIÓN Y POSICIÓN GENERAL

DEFINICIÓN 1.1. *Diremos que un tipo de enlace \mathcal{L} tiene un representante que es la cerradura de una trenza $\widehat{B} = L$, si existe un nudo trivial $k \subset S^3 \setminus L$ y una fibración \mathcal{H} del toro sólido $S^3 \setminus N(k)$ por discos meridianos, tal que L interseca a cada disco de la fibración transversalmente. Al nudo trivial $k \subset S^3$ le llamaremos el eje de la trenza L .*

Notemos que L intersecta a cada disco meridiano en el mismo número de puntos, digamos n , a este número le llamamos el índice de la trenza y diremos que L es la cerradura de una n -trenza.

En ocasiones será útil considerar el enlace L encajado en \mathbb{R}^3 en lugar de encajado en S^3 , para considerar a la fibrición por semiplanos con ángulo constante en coordenadas polares $\mathcal{H} = \{H_\omega\}_{\omega \in [0, 2\pi]}$.

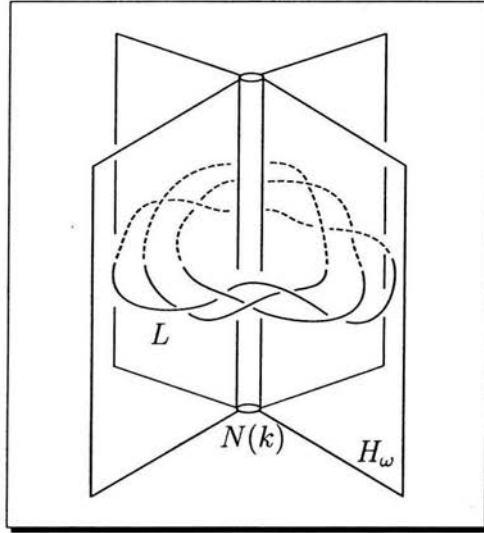


FIGURA 1. La fibrición por semiplanos a partir del eje de la trenza

La idea principal es que al tener una trenza cerrada $\widehat{B} = L \subset S^3$ y una superficie en su complemento, $S \subset S^3 \setminus N(L)$, obtenemos de manera natural una foliación (singular) de S dada por la intersección de S con las fibras de \mathcal{H} .

DEFINICIÓN 1.2. Sea M una 3-variedad y $S \subset M$, $S \neq S^2$, una superficie cerrada encajada en M . Diremos que S es incompresible en M si para todo encaje de un disco $D \subset M$, con $D \cap S = \partial D$ existe un disco $\widetilde{D} \subset S$ con $\partial \widetilde{D} = \partial D$.

Las superficies a las que enfocaremos nuestro estudio serán de dos tipos:

- Superficies cerradas incompresibles en $S^3 \setminus L$.

- Superficies de Seifert para el enlace L , incompresibles, orientadas de manera que el haz normal positivo en cada componente coincida con la orientación inducida por $L = \partial S$.

De aquí en adelante toda superficie a considerar será de alguno de estos dos tipos, haciendo la distinción cuando sea necesario. A continuación describiremos las condiciones de *posición general* que tendrán nuestros objetos y algunas definiciones:

1. Las intersecciones de k y S son finitas y transversales.
2. Existe una vecindad del eje k , $N(k) \subset S^3 \setminus L$, de manera que $S \cap N(k)$ es una colección de discos, $\{D_i\}_{i=1}^m$, y cada D_i está radialmente foliado por los arcos de intersección $D_i \cap \mathcal{H}$.
3. En caso que $\partial S = L$, existe una vecindad del enlace $N(L) \subset S^3$ tal que $N(L) \cap S$ está foliado por arcos que son la intersección de $N(L) \cap S$ con las fibras de \mathcal{H} .
4. Todas excepto un número finito de fibras de \mathcal{H} intersectan a S de manera transversal, y las que no (las fibras singulares) son cada una tangentes a S en solo un punto $p \in \overset{\circ}{S} \cap \overset{\circ}{H}_\omega$. Más aún, cada punto de tangencia es un máximo (o mínimo) local, o un punto silla respecto al ángulo ω . Una hoja singular de la foliación de S será una que contiene un punto de tangencia con una fibra singular H_ω .
5. Cada hoja no-singular de la foliación es o bien un arco, o una curva cerrada.

Denotaremos por $H_\omega \cap S$ a la colección de arcos y curvas cerradas (hojas de la foliación) en que se intersectan la fibra H_ω y S .

Notemos que en caso de que nuestra superficie S sea cerrada, cada hoja no-singular en la foliación que sea un arco, α , deberá tener los dos puntos de su frontera en el eje k , $\partial\alpha \subset k$, pues $S \subset S^3 \setminus N(L)$. En el caso de que $\partial S = L$, una hoja de la foliación que es un arco, en principio, puede tener los puntos de su frontera ya sea en k o en L . El siguiente resultado deja fuera el caso en que ambos puntos frontera pertenecen a L .

LEMA 1.1. Sea S una superficie de Seifert para L . Sea H_ω una fibra no singular de \mathcal{H} y $\alpha \in H_\omega \cap S$ un arco. Entonces $\partial\alpha$ no puede estar totalmente contenido en L .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe $\alpha \in H_\omega \cap S$ tal que $\partial\alpha = \{p_1, p_2\} \subset L$. Tomemos $N_\alpha = N(\alpha) \cap S$ una vecindad de α en S . Entonces tenemos dos arcos $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ en la intersección $N_\alpha \cap L$, con $p_i \in \sigma_i$. Los arcos σ_i deben tener orientaciones opuestas, pues tienen la orientación de la superficie S . Esta situación es imposible pues la orientación de $\partial S = L$ es tal que en cada H_ω hay n puntos de intersección todos intersecando a H_ω en el mismo sentido.

□

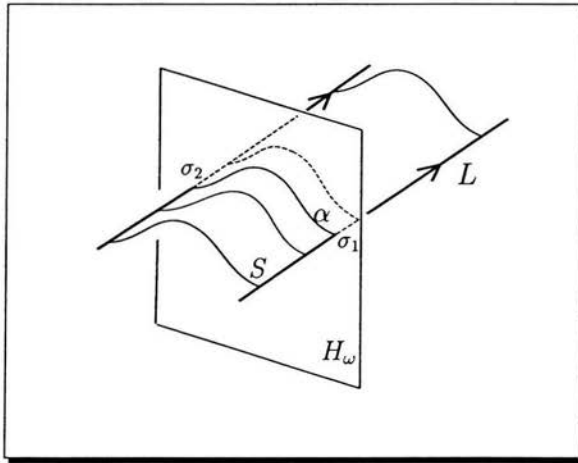


FIGURA 2

Entonces, según el resultado anterior, sólo podrá haber 3 tipos de curvas en las intersecciones $S \cap \mathcal{H}$, i.e. en la foliación de S :

- **a-arcos:** En caso que $\partial S = L$ y $\alpha \in S \cap H_\omega$ es un arco, con frontera $\partial\alpha = \{p_1, p_2\}$, con $p_1 \in k$, $p_2 \in L = \partial S$.
- **b-arcos:** Arcos $\beta \in S \cap H_\omega$ con $\partial\beta \in k$.
- **c-curvas:** Curvas simples cerradas.

Cada b -arco separa a la fibra H_ω en 2 piezas (cada una un disco). Diremos que un b -arco, $\beta \in S \cap H_\omega$, es esencial si cada pieza de $H_\omega \setminus \beta$

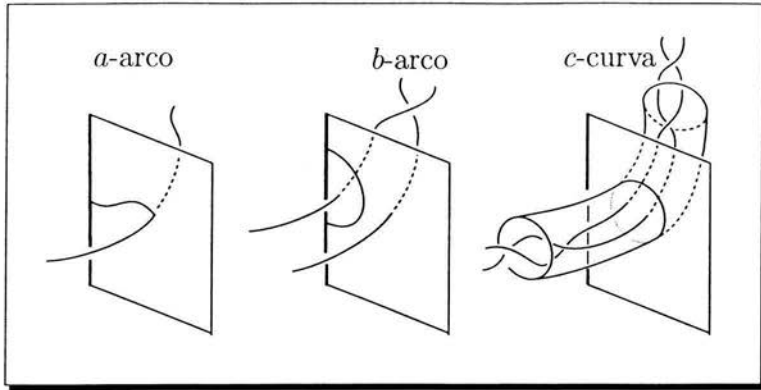


FIGURA 3. tipos de curvas

intersecta a L . En caso contrario diremos que β es *no-esencial*. El *b-arco* que se muestra en la figura (3) es esencial.

Cada *c-curva* $\gamma \in S \cap H_\omega$ es frontera de un disco $D_\gamma \in H_\omega$. Diremos que una *c-curva* es *esencial* si $D_\gamma \cap L \neq \emptyset$, y *no esencial* en caso contrario. La *c-curva* que se muestra en la figura (3) es esencial.

Es importante notar que debemos tener cuidado cuando tengamos una *c-curva* no-esencial, pues aunque $D_\gamma \cap L = \emptyset$, puede suceder que $D_\gamma \cap S \neq \emptyset$, *i.e.* puede haber más *c-curvas* en D_γ .

LEMA 1.2. *Sea $S \subset S^3 \setminus L$ una superficie incompresible foliada por $S \cap \mathcal{H}$ como antes. Existe una superficie S' , isotópica a S (en $S^3 \setminus L$) en cuya foliación no existen *b-arcos* no esenciales.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que la foliación de S contiene *b-arcos* no-esenciales y sea $\beta \in S \cap H_\omega$ uno de ellos. Supongamos además que β es de más adentro, en el sentido de que β , junto con un arco $b \subset k$, son frontera de un disco $D_\beta \subset H_\omega$ y $\overset{\circ}{D} \cap S = \emptyset$. Podemos, mediante una isotopía, *empujar* la superficie S para evitar el cruce con k (el eje de la trenza), al hacer esto evitamos dos puntos de intersección en $S \cap k$.

Como $S \cap k$ consiste de un número finito de puntos, repitiendo el proceso anterior las veces que sean necesarias, llegamos a una foliación de S que no contiene *b-arcos* no esenciales.

□

2. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

En esta sección daremos argumentos para poder eliminar hojas singulares que sean máximos o mínimos respecto al ángulo $\omega \in [0, 2\pi)$. Logramos esto eliminando c -curvas no esenciales de la foliación. El argumento de la demostración del Lema (1.5) no es el que se encuentra en las referencias, pero pensamos que en el contexto del trabajo es mejor incluirlo así para lograr que sea autocontenido. En caso de que S sea de Seifert para L , de hecho no podrán aparecer c -curvas, esenciales o no. De esto trata el resultado siguiente.

LEMA 1.3. *Sea S una superficie incompresible en $S^3 \setminus N(L)$, con $\partial S = L$. S es isotópica a una superficie S' cuya foliación, $S' \cap \mathcal{H}$, no contiene c -curvas.*

DEMOSTRACIÓN. Sea S una superficie incompresible en $S^3 \setminus N(L)$ con $\partial S = L$, y supongamos que en la foliación $S \cap \mathcal{H}$, existen c -curvas; sea γ una de ellas. Podemos asumir que γ pertenece a una fibra no singular H_0 . Sea D_γ el disco en H_0 con $\partial D_\gamma = \gamma$. Asumamos además que γ es de más adentro en D_γ .

Consideremos primero el caso en que γ es esencial, *i.e.* $D_\gamma \cap L \neq \emptyset$. Sea $p_1 \in D_\gamma \cap L$. Ahora bien, como $\partial S = L$, deberá existir un a -arco, α , en la foliación con $p_1 \subset \partial\alpha$. Pero entonces el otro punto frontera de α , p_2 , deberá estar también dentro de D_γ , por lo que el arco α será de los que quedaron descartados en el lema (1.1). Luego, podemos asumir que todas las c -curvas en $S \cap \{H_\omega\}$ son no-esenciales.

Consideremos ahora las curvas γ_ω de la foliación que se obtienen de γ al avanzar en las fibras H_ω a partir de H_0 . Ahora bien, no es posible que toda la superficie S este foliada por c -curvas no esenciales, pues si este fuera el caso tendríamos que S es un toro compresible, por lo que deberá existir una fibra singular H_{ω_0} , con $p_0 \in \gamma_{\omega_0}$, donde p_0 es un punto singular. Existen dos posibilidades:

- p_0 es un centro (máximo o mínimo).
- p_0 es un punto silla.

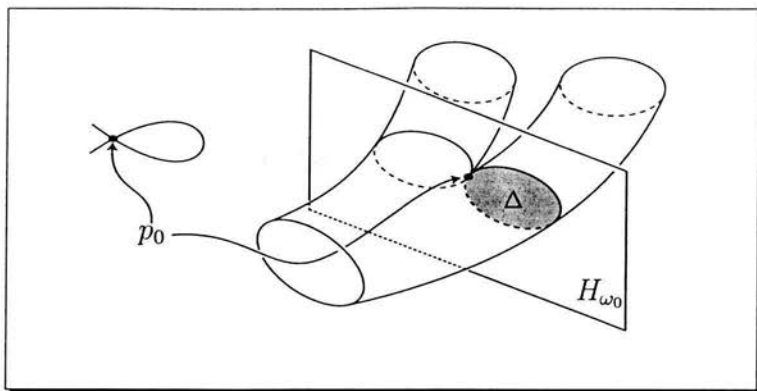


FIGURA 4

En caso que p_0 sea un centro, avanzando en sentido inverso a partir de H_0 , la fibra singular a la que llegamos deberá corresponder a un punto singular que es un punto silla, pues si llegamos a una fibra que corresponde también a un centro, tendríamos que $S \simeq S^2$, lo cual es imposible, por la incompresibilidad de S . Luego basta considerar el caso en que p_0 es un punto silla.

Sabemos, por la condición 4) de posición general, que p_0 es el único punto singular en la fibra H_{ω_0} . Como escogimos desde el principio a γ una curva de más adentro en $D_\gamma \subset H_0$, debemos estar en la situación mostrada esquemáticamente en la figura (4). Luego, γ_{ω_0} es frontera de un disco $\Delta \subset H_{\omega_0}$, donde $\Delta \cap L = \emptyset$, pues ya vimos que todas las c -curvas son no esenciales. Tenemos de nuevo dos posibles casos:

- $\overset{\circ}{\Delta} \cap S = \emptyset$
- $\overset{\circ}{\Delta} \cap S \neq \emptyset$

En el primer caso, $\overset{\circ}{\Delta} \cap S = \emptyset$, γ_0 deberá ser trivial en S , pues en caso contrario Δ sería un disco de compresión para S . Luego γ_0 es frontera de un disco $D \subset S$, y obtenemos una esfera, $D \cup \Delta$, que debe ser frontera de una 3-bola, B , con $\overset{\circ}{B} \cap L = \emptyset$. Podemos ahora empujar D a través de B hasta que evitemos la c -curva γ_0 en la foliación. Después de esta isotopía hemos disminuido en uno los puntos silla de la foliación.

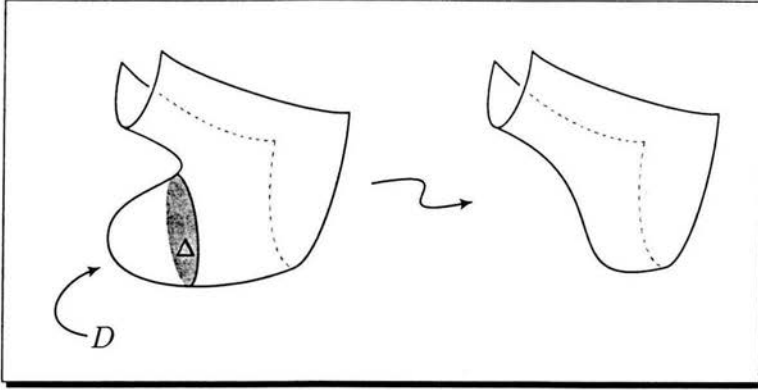


FIGURA 5

Consideremos ahora el segundo caso, $\overset{\circ}{\Delta} \cap S \neq \emptyset$. Como sabemos que en H_{ω_0} no hay más singularidades, las posibles curvas en $\overset{\circ}{\Delta} \cap S$ serán de nuevo hojas de la foliación y, de hecho serán c -curvas. Sea $\tilde{\gamma}$ una c -curva que es de más adentro en Δ , *i.e.* $\tilde{\gamma}$ es frontera de un disco $\tilde{\Delta} \subset H_0$, en cuyo interior no hay más curvas de intersección con S . Como $\tilde{\gamma}$ es no-esencial, aplicando el argumento del caso anterior encontramos una $S^2 \simeq \tilde{\Delta} \cup D$, donde $\tilde{\gamma} = \partial D$, y $D \subset S$. Al hacer la isotopía para eliminar la 3-bola, no aumentamos el número de centros y quizás estemos eliminando algunos puntos silla, dependiendo de cómo estaba encajada la S^2 que eliminamos. En un número finito de pasos eliminamos todas las posibles curvas en $\overset{\circ}{\Delta} \cap S$ y llegamos al caso anterior.

Cambiando de curva inicial γ , llegamos a una superficie S' , isotópica a S , en cuya foliación no existen c -curvas.

□

LEMA 1.4. *Sea $L \subset S^3$ una trenza cerrada y $S \subset S^3 \setminus N(L)$ una superficie incompresible. Una c -curva esencial en la foliación de S es no trivial en S .*

DEMOSTRACIÓN. Sea γ una c -curva esencial en la foliación de S . Supongamos que γ es trivial en S , *i.e.* $\exists D \subset S$, $\partial D = \gamma$. Tenemos también un disco $E \subset H_{\omega}$, con $\partial E = \gamma$. Denotemos por $n = n(L, F)$ el número de intersección algebraica de L con F , donde F es una superficie. Al ser L una trenza y γ una c -curva esencial sabemos que

$n(L, E) \geq 0$. Consideramos dos casos:

- $D \cap H_\omega = \emptyset$. Tenemos entonces que $D \cup E \simeq S^2$. Pero como $D \subset S$, y $L \cap S = \emptyset$; sucede que

$$n(L, S^2) = n(L, E) \geq 0$$

lo cual es una contradicción.

- $D \cap H_\omega \neq \emptyset$. Tomemos una curva α en la intersección de E con H_ω de más adentro en E , i.e. $\alpha = \partial E_\alpha$, con $E_\alpha \subset E$ un disco, y $E_\alpha \cap H_\omega = \emptyset$. Esta curva α también es frontera de un disco $D_\alpha \subset H_\omega$ y $D_\alpha \cap L = \emptyset$, pues de lo contrario obtenemos de nuevo una esfera, $S^2 \simeq E_\alpha \cup D_\alpha$, con $n(S^2, L) \geq 0$. Podemos entonces cortar a E por D_α para evitar la curva de intersección α . Repitiendo esto cada vez para una curva de más adentro en E , llegamos a que $D \cap H_\omega = \emptyset$ y podemos aplicar el argumento del caso anterior.

□

LEMA 1.5. *Sea $S \subset S^3 \setminus N(L)$ una superficie incompresible. Entonces S es isotópica a una superficie $\tilde{S} \subset S^3 \setminus N(L)$ en cuya foliación no existen c -curvas no esenciales.*

DEMOSTRACIÓN. Tomemos γ una c -curva no esencial en la foliación de S . Entonces $\gamma = \partial \Delta \subset H_\omega$, donde Δ es un disco; al ser S incompresible tenemos entonces que γ es frontera de un disco $D \subset S$. El disco D (localmente) queda de un lado del semiplano H_ω , declaramos el sentido positivo del ángulo ω hacia el lado en que $H_{\omega+\epsilon} \cap E = \emptyset$. Igual que en la demostración del Lema (1.3), consideremos a las curvas γ_ω en que se va deformando γ al avanzar en la dirección del ángulo ω . Llamemos p_0 al primer punto crítico que nos encontramos. Si p_0 es un centro tenemos que $S \simeq S^2$, lo cual es imposible; de modo que aseguramos que p_0 es un punto silla. A diferencia del resultado anterior, tenemos ahora que hacer distinción de dos casos:

- i) El punto crítico se forma al juntarse la c -curva γ_ω con otra hoja de la foliación.
- ii) Al aparecer al punto crítico p_0 se ve involucrada únicamente la c -curva γ_ω .

El primer caso lo podemos tratar como en la demostración del Lema (1.3): al menos una de las dos curvas involucradas en la aparición de p_0 es una c -curva no esencial, por lo que es frontera de un disco $\Delta_0 \subset (H_0 \setminus L)$. Tomamos ahora una c -curva γ' de más adentro en Δ_0 (puede suceder que $\overset{\circ}{\Delta}_0 \cap S = \emptyset$, en cuyo caso nos quedamos que γ_0) para cortar a S por el disco $\Delta' \subset \Delta_0$ del cual es frontera. De nuevo, al ser S incompresible sabemos que γ' deberá ser frontera de un disco, $E' \subset S$, por lo que una de las componentes después de cortar será una esfera. Después de eliminar dicha esfera estaremos disminuyendo la cantidad de c -curvas en Δ_0 , y repitiendo el proceso para una c -curva de más adentro en Δ_0 en cada paso, llegamos a que $S \cap \overset{\circ}{\Delta}_0 = \emptyset$. Podemos ahora cortar a S por Δ_0 para eliminar al menos un punto silla y un centro.

Para el segundo caso no podemos aplicar el mismo argumento pues al llegar al punto singular p_0 puede suceder que ninguna de las dos curvas involucradas sea frontera de un disco en $H_0 \setminus L$. Queremos asegurar que (quizás después de aplicar una isotopía a S) el primer punto singular que nos encontramos es del primer tipo.

Para diferenciar los casos que consideraremos les daremos nombres a las nuevas c -curvas que pueden aparecer a partir de γ , siempre avanzando en el sentido positivo acordado antes. Diremos que una c -curva γ' *nace* a partir de γ , (o bien, que es *hija de* γ), si γ' aparece al formarse una singularidad en que sólo se ve involucrada la c -curva γ . Si una c -curva δ nace a partir de otra(s) que es hija(s) de γ , diremos también que δ nació a partir de γ .

Supongamos que para algún ángulo ω_p se forma una singularidad al juntarse γ (o una c -curva que nació a partir de ella) con una hoja que no nació a partir de γ . Sea $\{p_j\}_{j=1}^n$ el conjunto de puntos singulares que aparecen a partir de γ , donde p_n es el primer punto singular donde se ve involucrada una hoja que no nació a partir de γ . Llamaremos $\{H_j\}_{j=1}^n$ a los semiplanos correspondientes.

A continuación estudiaremos las posibilidades para las singularidades $\{p_j\}_{j=1}^n$ a partir de las c -curvas que van apareciendo entre γ y p_n . Seguiremos llamando Δ al disco del cual es frontera nuestra c -curva original γ en H_γ , y $\Delta_t \subset H_t$ al correspondiente en la fibra H_t .

- Existen dos posibilidades para Δ_t al pasar por cada punto singular p_j : se mantiene conexo (se convierte en un disco con hoyos), o se desconecta. En caso que después de pasar por el punto singular el Δ_t correspondiente se desconecte diremos que p_1 es de tipo 0. El primer renglón de la figura (6) muestra este caso.
- Si Δ_t se mantiene conexo, hay varias maneras de que suceda. La primera será que la c -curva original γ creó una singularidad al juntarse consigo misma. A este tipo de singularidad la llamaremos de tipo 1. El segundo renglón de la figura (6) muestra este caso.

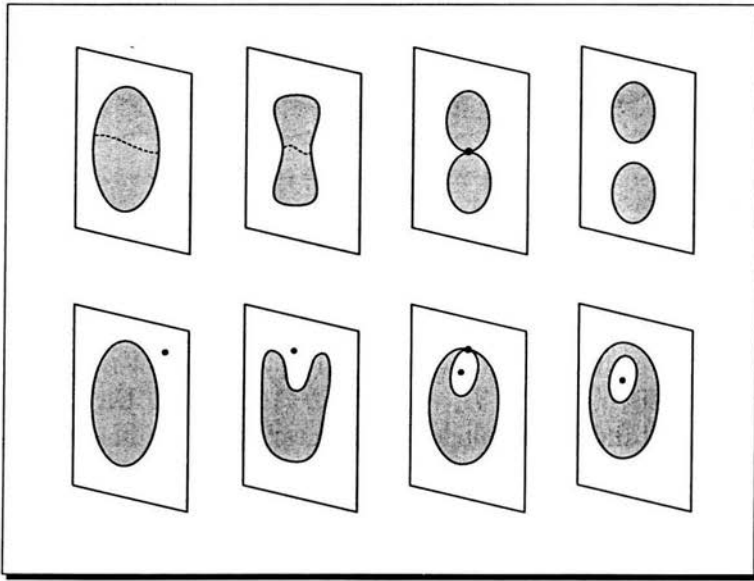


FIGURA 6. Puntos singulares de tipo 0 y 1

- Otra posibilidad es que una c -curva *hija* de γ se haya partido en dos, creando más hoyos en Δ_t . Una manera de que esto suceda es que un hoyo de Δ_t se parta en dos. Este tipo de singularidad es la que se ilustra en el primer renglón de la figura (7) y la llamaremos de tipo 2.
- Puede suceder también que dos c -curvas *hijas* de γ se junten para crear una singularidad. Lo que vemos en Δ_t es que se disminuye el número de hoyos, pues se juntan dos de ellos para

convertirse en uno solo. Este tipo de singularidad se ilustra en el segundo renglón de la figura (7) y la llamaremos de tipo 3.

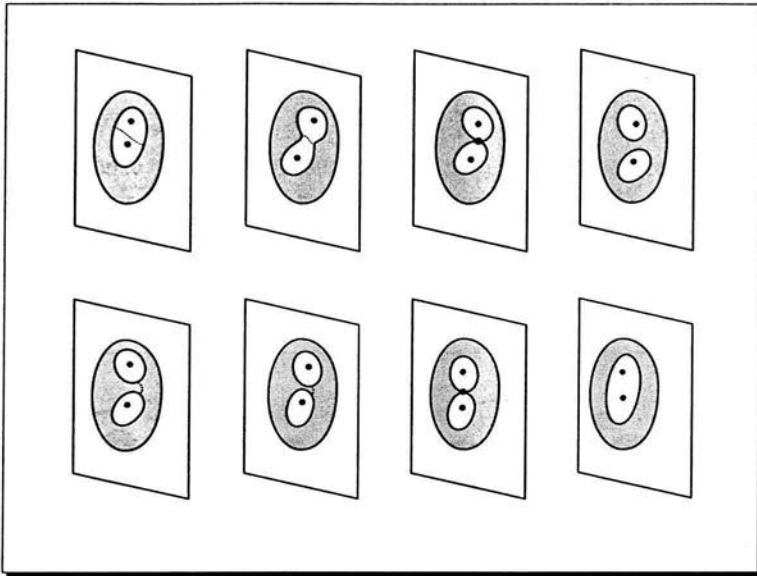


FIGURA 7. Puntos singulares de tipo 2 y 3

- Una c -curva γ' que nació a partir de γ también es frontera de un disco, $\Delta_{\gamma'} \subset H_t$, aunque $L \cap \Delta_{\gamma'} \neq \emptyset$. Un disco de este tipo también se puede desconectar gracias a una singularidad, o le pueden aparecer hoyos. El caso que en que el disco $\Delta_{\gamma'}$ se desconecte quedó cubierto en la singularidad de tipo 3. A un punto singular que hace que un disco de este tipo se convierta en un disco con hoyos, le llamaremos de tipo 4. El primer renglón de la figura (8) es de este tipo.
- Consideremos a γ' y Δ' como en el caso anterior. Supongamos además que existe una c -curva $\delta \subset \Delta'$. Un punto singular será de tipo 5 si las c -curvas δ y γ' se tocan en un punto, para después formar una sola c -curva. El segundo renglón de la figura (8) muestra este caso. Notemos que este caso se diferencia de los demás en que como resultado podemos obtener arcos de L intersectando Δ_t .
- Un caso más es que una c -curva γ' , hija de γ se una a γ para convertirse, madre e hija en una sola c -curva de nuevo. Un

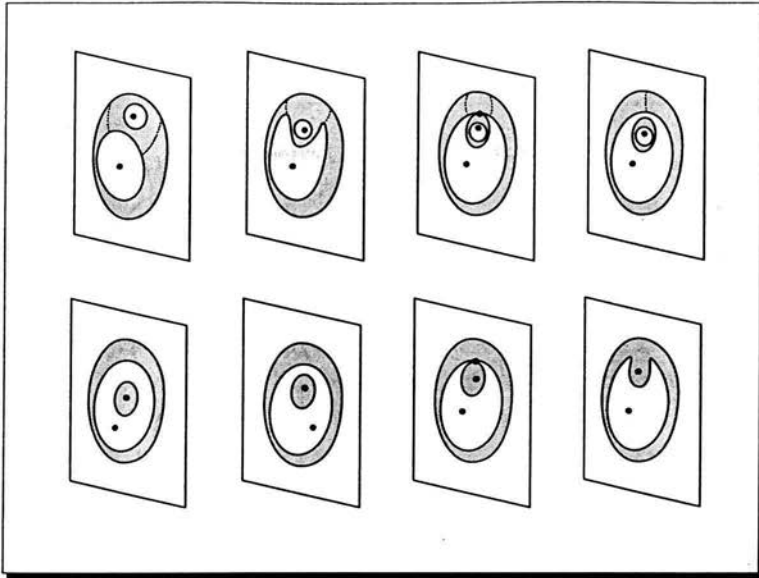


FIGURA 8. Puntos singulares de tipo 4 y 5

punto singular de este tipo será llamado de tipo 6.

En los casos de puntos singulares de tipo 1, 2 y 4; que los podemos caracterizar como en los que *nacen* nuevas c -curvas, podemos suponer que las nuevas c -curvas que aparecen son esenciales, pues en caso contrario podemos aplicar el argumento del Lema (1.3) y disminuir al menos un punto silla y un centro del total de puntos singulares de la foliación de S . En el caso de un punto singular de tipo 4, es necesario que la nueva c -curva *encierre* otra c -curva esencial. Considerando esto podemos decir entonces que un punto singular de tipo 5 necesariamente nos da como resultado el tener $\Delta_t \cap L \neq \emptyset$.

En principio, puede suceder que más adelante en el caso que ocurra una singularidad de tipo 3 o 4, aparezcan puntos singulares, de otro tipo, digamos *más adentro*, juntándose dos c -curvas en otro nivel. Pero veremos que de hecho podemos suponer que no existen singularidades de tipo 3 ni 4, por lo que estos nuevos casos tampoco podrán suceder.

En la figura (9) mostramos, en el encaje de la superficie la aparición de algunos de estos tipos de singularidades: p_0 y p_2 son de tipo 1, p_3 es de tipo 0, p_1 es de tipo 2, mientras que p_4 es de tipo 3. En la figura $n = 5$,

por lo que p_5 es el primer punto singular que aparece involucrando una hoja que no nace a partir de γ .

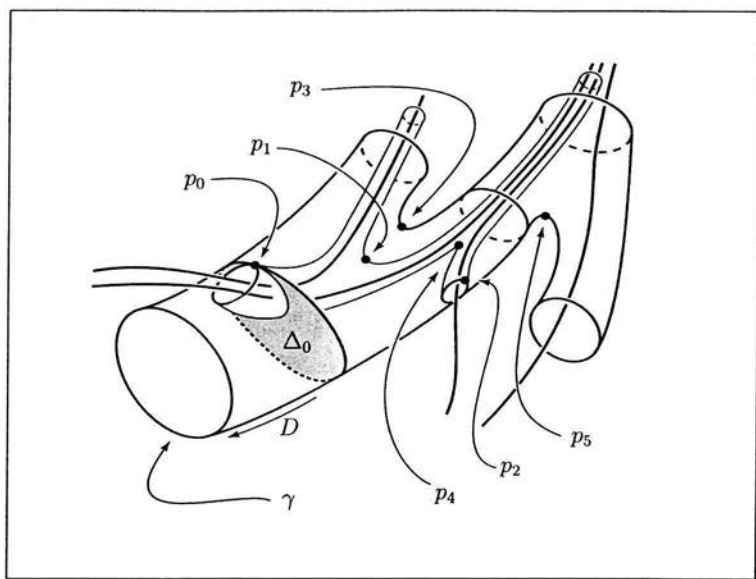


FIGURA 9. Encaje de la S entre p_0 y p_n .

Los puntos singulares de tipo 1 se caracterizan por ser aquellos en los que se crean tubos que *entran* a la bola $\Delta \times I$, que existe entre γ y p_n . Estos tubos *entran* a $\Delta \times I$ precisamente cuando se crean los puntos singulares de tipo 1, lo que en adelante llamaremos las *bases* de los tubos, y salen de $\Delta \times I$ ya sea en otro punto singular, si es de tipo 6, o por la fibra H_n . Notemos que si entre p_1 y p_m solo existen singularidades de tipo 1, *i.e.* dentro de $\Delta \times I$ sólo tenemos varios tubos, podemos suponer que éstos no se trenzan entre sí; pues podemos mover las bases de ellos para anular cualquier cruce que pudiera existir. Llamemos $q \in \{p_j\}_{j=1}^n$ al primer punto singular que ocurre, a partir de γ , que **no** es de tipo 1, *i.e.* q será de tipo i , $i \in \{0, 2, 3, 4, 5\}$. A continuación estudiamos cada caso.

- Supongamos que q es de tipo 0. Por lo argumentado anteriormente, podemos suponer que los posibles tubos que entran a $\Delta \times I$ están rectos, *i.e.* no hay cruces entre ellos. En este caso podemos encontrar un disco E propiamente encajado en $S^3 \setminus (S \cup L)$, cuya frontera consiste de dos arcos, $\partial E = \alpha \cup \beta$; donde $\partial\alpha \subset \gamma$, $q \in \alpha$ y $\beta \subset D$. Podemos asegurar la existencia de este disco viendo que en cada fibra H_t podemos

encontrar un arco propiamente encajado en Δ_t , separando los posibles hoyos (cortes de tubos) que existen. El disco D quedará foliado por estos arcos. En la figura (6) mostramos este arco con la línea punteada que corta en dos a Δ_t . Si cortamos a S por este disco alguna de las dos componentes es una esfera, y después de eliminarla, estaremos disminuyendo al menos un punto silla: el punto q .

- Supongamos ahora que q es de tipo 2. Podemos *empujar* el punto singular q en dirección contraria al ángulo ω , hasta llegar a la base del tubo. Para hacer esto debemos primero hacer que todos los cruces de L , y posibles singularidades de S ocurran antes de entrar al tubo, pero esto siempre es posible. Lo que obtenemos después de efectuar esta isotopía es que en lugar de entrar un tubo y convertirse en dos, entran dos tubos desde el principio y dentro de $\Delta \times I$ ya no se tocan. Al hacer esto no estamos disminuyendo el total de puntos singulares de S , pues estamos cambiando un punto singular de tipo 2 por uno de tipo 1, pero sí estamos disminuyendo la cantidad de puntos singulares que ocurren en $\{p_j\}_{j=1}^n$ que no son de tipo 1.
- Si q es de tipo 3, este punto singular se formó al juntarse dos tubos que entraron a $\Delta \times I$. Podemos suponer como antes que no hay cruces entre los tubos que han entrado a $\Delta \times I$. Podemos entonces encontrar un disco E propiamente encajado en $S^3 \setminus (S \cup L)$, cuya frontera consiste de dos arcos: α que une las dos bases de los tubos involucrados en la formación de q , $q \in \alpha$; y β , un arco que conecta las bases de los tubos por el otro lado, pasando por D . Si llamamos δ a una de las c -curvas esenciales que aparecen al crearse uno de los tubos, tenemos por el Lema (1.4) que δ es no trivial en S . Sin embargo la curva ∂E intersecta a δ en un solo punto, por lo que la curva ∂E también será no trivial en S . Lo anterior nos dice que E es un disco de compresión para S , lo cual es imposible.
- Si sucede que q es de tipo 4 también encontraremos un disco de compresión E , aunque esta vez de manera un poco más complicada. Nos servirá de apoyo la figura (10). Vimos que un punto singular de tipo 4 aparece cuando una c -curva γ' , hija de γ , crea una singularidad al juntarse consigo misma, haciendo que aparezcan hoyos en el disco Δ' correspondiente. Visto

en el encaje de la superficie lo que sucede es que a un tubo dentro de Δ_t , dado por la c -curva γ' le nace un nuevo tubo. Llamemos r al punto singular que aparece en la creación de γ' . Ahora bien, como dijimos que las nuevas c -curvas que aparecen deberán ser esenciales, tenemos que dentro del nuevo tubo debe meterse otro, dado por otra c -curva δ , también hija de γ . Aunque en la figura (10) no lo hemos puesto, recordemos que cada tubo debe traer adentro arcos de L .

Para asegurar que la figura no nos muestra sólo un caso particular notemos lo siguiente: antes de que ocurra el punto singular q , todas las singularidades que aparecen son de tipo 1, *i.e.* solo entran tubos a $\Delta \times I$, y podemos suponer que no hay cruces entre ellos. Llamemos T_i al tubo que aparece con la singularidad p_i , entre H_ω y H_q . Tomemos la base del tubo cuya base está más cercana a H_q , y que no es T_r ; llámémosle T_s . Podemos *deslizarla* hasta que se encuentre entre H_r y H_q . Luego, si el tubo T_s se mete al tubo T_q , como en la figura (10), dejamos ahí la base; en caso contrario la deslizamos hasta que el punto singular s ocurra después de H_q . Hacemos lo mismo ahora para el nuevo tubo cuya base está más cercana a H_q y que no es H_r . Al final de este procedimiento tenemos que, a partir de H_γ la primera singularidad que vemos es H_r , luego todas las singularidades que dan lugar a tubos que se meten al tubo T_q y en seguida la singularidad q .

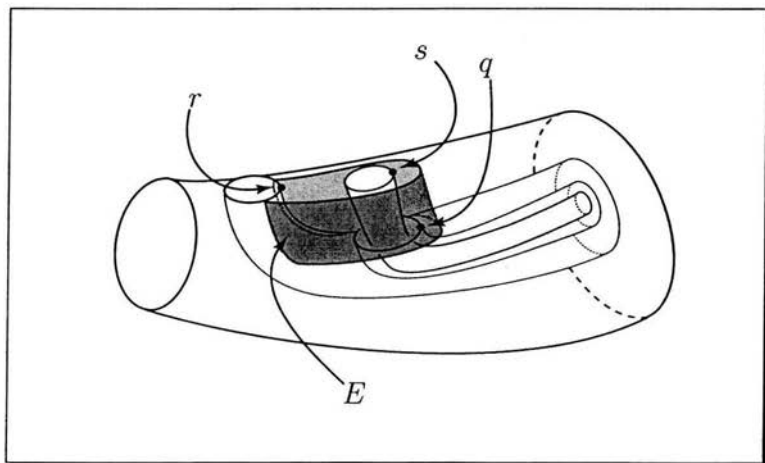


FIGURA 10. El disco de compresión si q es de tipo 4.

El disco de compresión E , que aseguramos existe siempre, está foliado por arcos de la forma $E \cap H_t$, en la figura (8) mostramos estos arcos con líneas punteadas. En cada Δ_t se ven dos arcos de la foliación de E , hasta que se juntan en uno solo después de Δ_q . Visto en el encaje de S , vemos que la frontera de D está formada por dos arcos α y β , donde $\alpha \subset \partial\Delta \times I$, y $\beta \subset T_r$. El arco α rodea a todas las bases de los tubos que se meten a T_q , mientras que el arco β rodea la base del tubo T_q . En la figura (10) mostramos el caso en que solo hay un solo tubo que entra a T_q .

Para ver que la curva $\alpha \cup \beta$ es no trivial en S veremos ninguna de las dos componentes de $S \setminus (\alpha \cup \beta) = S_\gamma \cup S_q$ es un disco, donde S_γ es la componente que contiene a γ y S_q es la componente que contiene a q . Si S_γ fuera un disco, tendríamos que cualquier curva cerrada contenida en S_γ sería también frontera de un disco, sin embargo la c -curva de más afuera en Δ_1 es esencial, luego, por el lema (1.4), es no trivial en S . Por la misma razón tenemos que S_q tampoco es un disco tomando ahora una c -curva dada por el tubo T_s . Concluimos así que q no puede ser de tipo 4.

- Supongamos ahora que q es de tipo 5. Vimos que este caso sucede cuando una c -curva $\delta \subset \Delta'$ se toca con una c -curva γ' que es hija de γ . Ahora bien, como estamos suponiendo que antes de q todas las singularidades son de tipo 1, la c -curva δ tuvo que haberse metido al tubo dado por γ' cuando este nació, *i.e.* la c -curva δ no es hija de γ . Tenemos entonces que $q = p_n$ y trataremos este caso más adelante. En la figura (11) mostramos una isotopía de S donde queda se ilustra la situación de este caso.
- Si q es de tipo 6 vimos que q se forma al juntarse una c -curva γ' de nuevo con γ . Llamemos r al punto singular que da lugar a la c -curva γ' . Podemos suponer, usando el mismo argumento usado en el caso que q es de tipo 4, que la primera singularidad que vemos es precisamente r , seguido de q . Pero entonces tenemos un disco de compresión cuya frontera consiste de dos arcos $\alpha \cup \beta$, con $\alpha \subset T_\gamma$, uniendo las dos bases del tubo T_r y $\beta \subset T_r$. Vemos así que q no puede ser de tipo 6.

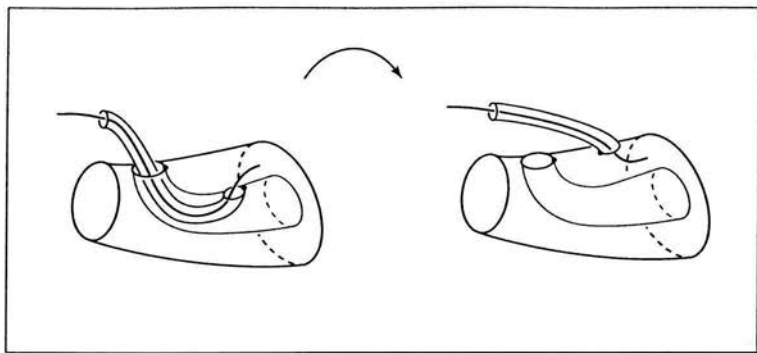


FIGURA 11. Isotopía de S si q es de tipo 5.

Tenemos así un argumento para ir eliminando las posibilidades de la primera singularidad, que no es de tipo 1, entre γ y p_n . Lo que tenemos entonces es que todos los puntos singulares $\{p_j\}_{j=0}^{n-1}$ son de tipo 1, *i.e.* lo que vemos solo son tubos que se meten a $\Delta \times I$. Podemos ahora ir deslizando las bases de los tubos (los puntos singulares), de uno en uno empezando por el más cercano a p_n para que ocurran después de H_n . Una vez hecho esto caemos en el caso descrito al comienzo de la demostración y hemos terminado.

Ahora bien, todo lo anterior fue asumiendo que existía el punto singular p_n que involucraba una hoja de la foliación que no es hija de γ , pero en principio podría suceder que nunca encontráramos un punto singular de este tipo, *i.e.* todos los puntos singulares de S , a partir de γ , se forman con hojas de la foliación que nacieron a partir de γ . Esto nos diría que solo entran tubos a la bola $\Delta \times I$, y por los argumentos anteriores estos no se tocarán, ni podrán salir, lo cual es imposible.

□

LEMA 1.6. *Sea $S \subset S^3 \setminus L$ una superficie de las que tenemos en consideración, y $p_0 \in S \cap H_{\omega_0}$ una singularidad. Entonces p_0 es un punto silla.*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que solo hay dos tipos de singularidades: puntos silla y centros. Supongamos que $p_0 \in S \cap H_{\omega_0}$ es un centro. Si avanzamos en la foliación, en el sentido digamos positivo del ángulo, debemos encontrar una c -curva, $\gamma \in H_0$ que es frontera de un disco $D_\gamma \subset S$, con $p_0 \in \overset{\circ}{D}_\gamma$. La c -curva γ es también frontera de un disco $E \subset H_\gamma$, podemos asumir que γ es esencial, pues

- si $\partial S = L$, el lema (1.3) nos dice que $S \sim \tilde{S}$, donde ninguna hoja de la foliación de \tilde{S} es una c-curva.
- si $\partial S = \emptyset$, el lema (1.5) nos dice que $S \sim \tilde{S}$ donde ninguna hoja de la foliación de \tilde{S} es una c-curva no esencial.

Esto nos dice que $E \cap L \neq \emptyset$. Consideremos la esfera $E \cup D_\gamma$. Como $D_\gamma \cap L = \emptyset$, llegamos a que el enlace L entra y sale de $E \cup D_\gamma$ por $E \subset H_0$, lo cual es imposible. Luego, como p_0 no puede ser un centro, debe ser un punto silla.

□

Ahora bien, ya vimos que cualquier punto singular es un punto silla y éste debe aparecer a partir de hojas no singulares que se van acercando de manera que llega un $\omega_0 \in [0, 2\pi)$ en el que se tocan. Las posibilidades para que aparezcan los puntos singulares se muestran en las figuras (12), (13), (14), (15) y (16), dependiendo del tipo de curvas que se ven involucradas *antes* y *después* de la aparición del punto singular. Esto nos da también una manera de nombrar al tipo de singularidad.

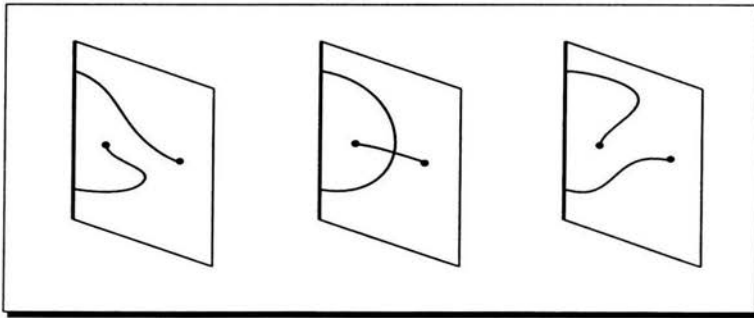
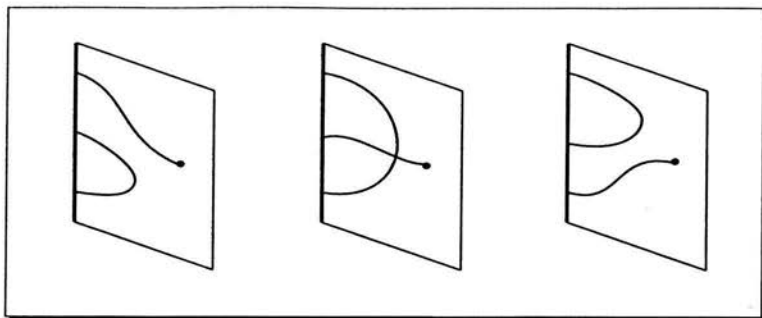
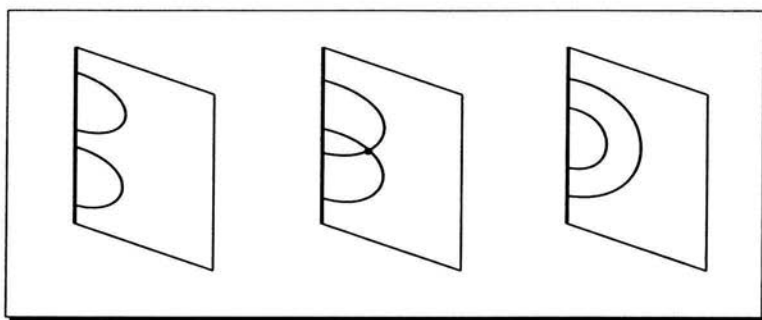
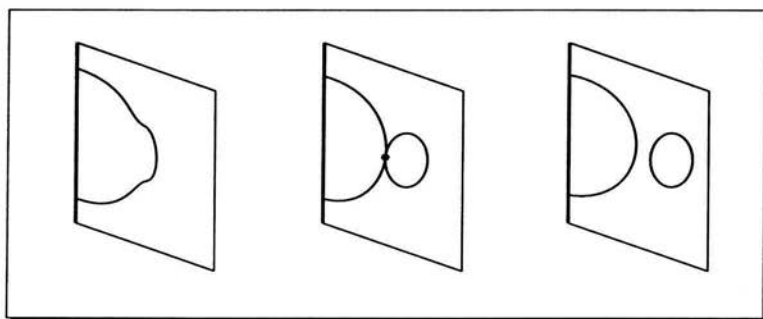


FIGURA 12. Singularidad de tipo aa

Es importante hacer notar que de los últimos dos casos (tipos bc y cc) existen dos versiones: las que se muestran en las figuras (15) y (16), y las versiones que se obtienen avanzando en sentido inverso. Llamaremos a los casos que aparecen en la figuras (15) y (16), tipos $bc - 1$ y $cc - 1$ respectivamente, y a los de sentido inverso tipos $bc - 2$ y $cc - 2$ respectivamente.

FIGURA 13. Singularidad de tipo ab FIGURA 14. Singularidad de tipo bb FIGURA 15. Singularidad de tipo bc

Ya que les hemos dado nombre a los posibles tipos de singularidades, podemos resumir todo lo visto hasta ahora en los siguientes resultados.

TEOREMA 1.1. *Sea S una superficie con $\partial S = L$. Entonces S puede ser escogida de manera que en su foliación $\mathcal{H} \cap S$, las hojas no singulares sean*

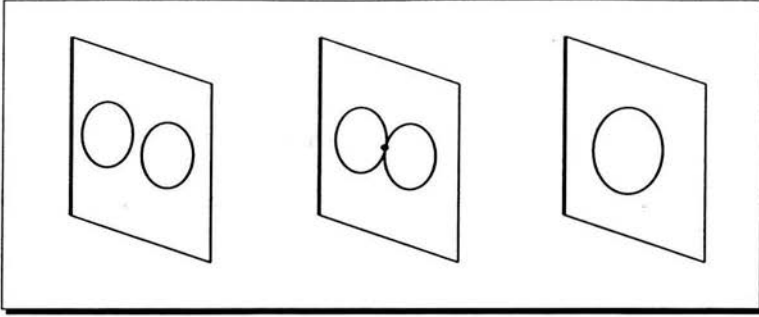


FIGURA 16. Singularidad de tipo cc

- a -arcos, o bien
- b -arcos esenciales.

y sus posibles singularidades sean

- de tipo aa , o bien
- de tipo ab , o bien
- de tipo bb .

TEOREMA 1.2. Sea S una superficie cerrada en $S^3 \setminus L$. Entonces S puede ser escogida de manera que cualquier hoja no singular en su foliación, $\mathcal{H} \cap S$ sea

- un b -arco esencial, o bien
- una c -curva esencial

y cualquier singularidad sea

- de tipo bb , o bien
- de tipo bc , o bien
- de tipo bc .

3. LA TESELACIÓN DE S

Consideremos el caso en que existe una componente F de S en cuya foliación, $\mathcal{H} \cap S$, no existan singularidades. Si F está totalmente foliada por b -arcos entonces F es una esfera y o bien es frontera de una bola, o nuestro enlace es separable. Luego, si consideramos solo enlaces no

separables y S sea cerrada, F deberá ser un toro foliado totalmente por c -curvas, y en caso que $\partial S = L$, F deberá ser un disco foliado totalmente por a -arcos.

Consideremos ahora el caso en que F es una componente de S en cuya foliación $\{\mathcal{H} \cap S\}$ sí existen singularidades, y hagamos

$$\mathcal{U} = \{ \lambda \in \{H_\omega \cap F\} \mid \lambda \text{ es una hoja singular} \}$$

Al tener solo una cantidad finita de fibras singulares en \mathcal{H} , para cada $\lambda \in \mathcal{U}$ podemos escoger una vecindad en S , $N_\lambda = N(\lambda) \cap S$, de manera que $N_\lambda \cap \mathcal{U} = \lambda$. Como ya tenemos descritas todas las posibilidades para λ , *i.e.* de dónde viene, y en qué se transforma, podemos analizar a detalle las vecindades, N_λ , de cada tipo de singularidad λ . Esto es lo que haremos a continuación.

- **Tipo aa.** En este caso tenemos durante todo el proceso dos puntos en $N(k)$, v_1, v_2 , que llamaremos vértices, de donde se originan todos los a -arcos que hay antes y después de la hoja singular λ . La vecindad N_λ es un disco donde el complemento de λ está foliado enteramente por estos a -arcos.

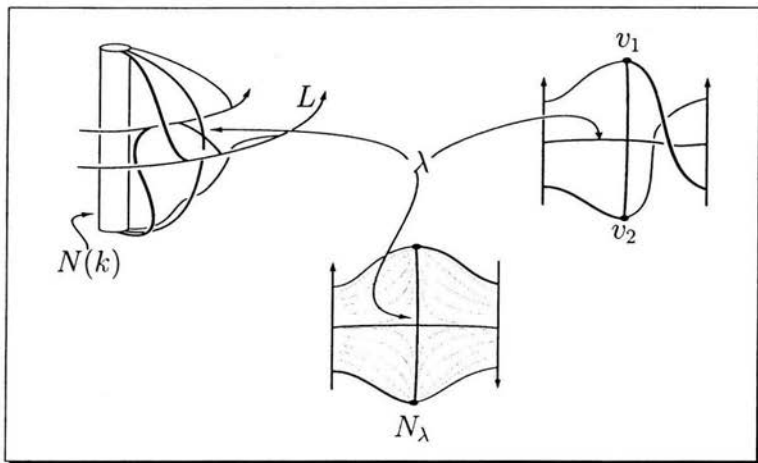


FIGURA 17. Pieza de tipo aa

- **Tipo ab** En este caso tenemos tres vértices en $N(k)$, antes de la hoja singular λ dos de ellos son frontera de b -arcos, y el otro es frontera de a -arcos. Enseguida de la hoja singular λ uno de los dos vértices que era frontera de b -arcos, se convierte en frontera de a -arcos, y la pareja restante es la que es ahora frontera de arcos de tipo b . La vecindad N_λ en este caso es un disco, que es dividido en cuatro regiones por la hoja singular λ , cada una de las cuales está foliada totalmente ya sea por a -arcos, o b -arcos.

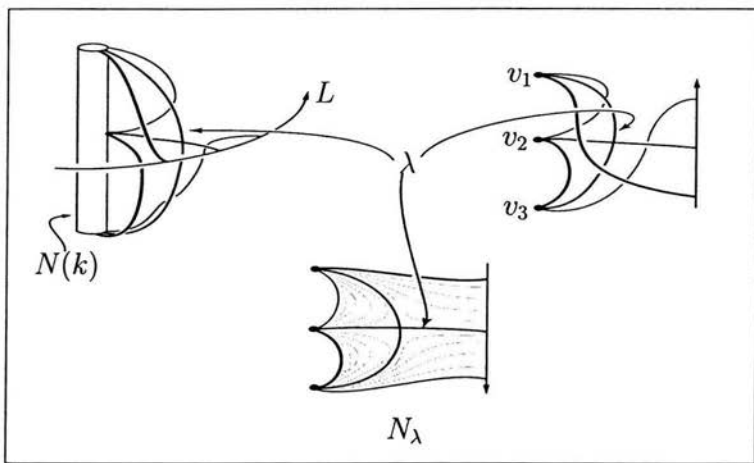
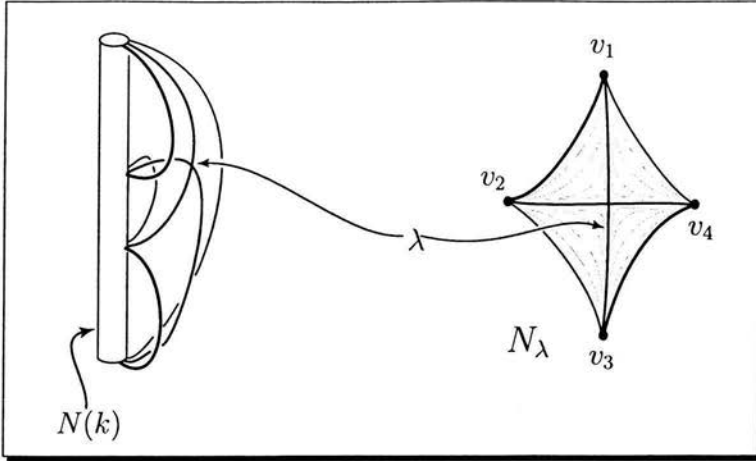
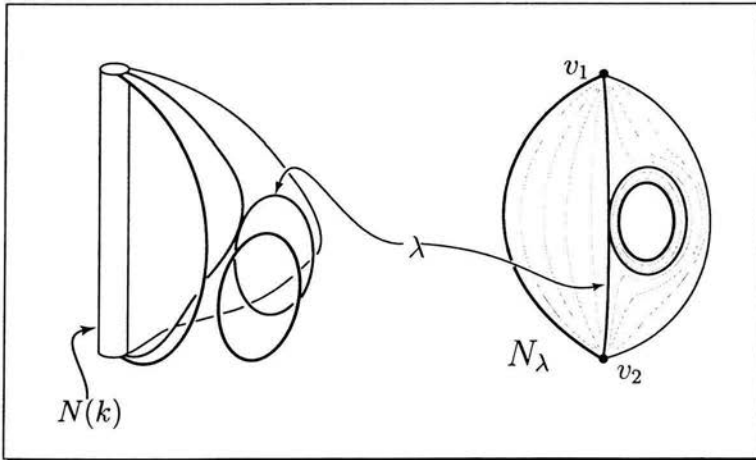
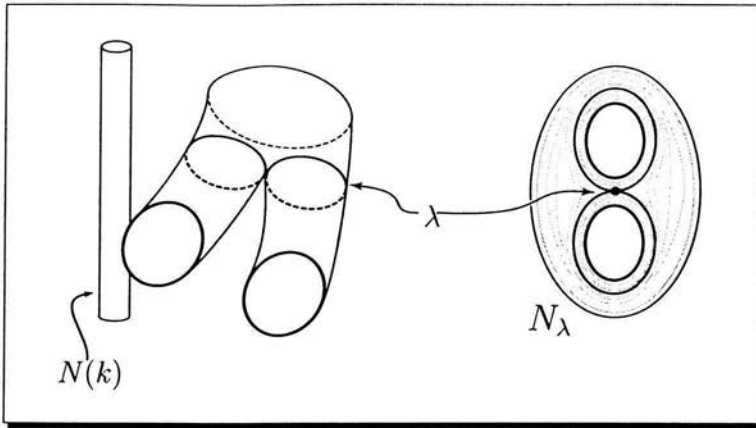


FIGURA 18. Pieza de tipo ab

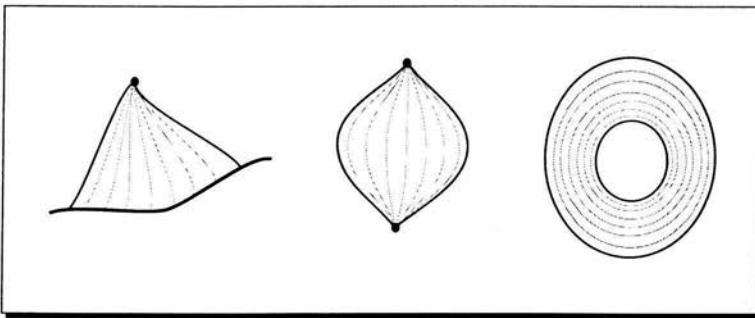
- **Tipo bb** En este caso tenemos cuatro vértices en $N(k)$ que son por parejas frontera de b -arcos. Después de la hoja singular λ , se intercambian las parejas, pero siguen siendo frontera de arcos de tipo b . La vecindad N_λ es de nuevo un disco, y fuera de λ , todas las hojas son b -arcos.
- **Tipo bc** En este caso tenemos dos vértices en $N(k)$ que son frontera de b -arcos, antes y después de la hoja singular λ , pero existe una c -curva, antes de λ , que es absorbida por el arco. Aquí la vecindad N_λ es un anillo que es dividido en tres regiones por la hoja singular. Dos de ellas están totalmente foliadas por b -arcos, y la tercera está totalmente foliada por c -curvas.

FIGURA 19. Pieza de tipo bb FIGURA 20. Pieza de tipo bc

- **Tipo cc** En este caso no aparecen vértices. Antes de la hoja singular λ , la superficie está foliada por parejas de c -curvas, la hoja singular aparece cuando estas dos curvas se tocan, para luego convertirse en una sola. Aquí la pieza N_λ son unos pantalones (disco con dos hoyos), que son divididos en tres piezas por la hoja singular, cada una de las cuales está completamente foliada por c -curvas.

FIGURA 21. Pieza de tipo cc

Ahora bien, el complemento de estas vecindades en F es una colección finita de piezas foliadas **sin** hojas singulares, $\{B_i\}_{i=1}^k$. Las posibilidades para las piezas B_i se muestran en la figura (22). Podemos escoger una hoja en cada B_i y tomarla como *hoja frontera*, obteniendo así una partición de F en piezas, cada una de las cuales contiene solo una hoja singular. Las hojas frontera pueden ser a -arcos, b -arcos o c -curvas.

FIGURA 22. Piezas B_i

Podemos suponer que las fibras de \mathcal{H} tienen la orientación adecuada para que la normal en cada punto coincida con la dirección en que aumenta el ángulo ω . Si p es un punto singular de la foliación, la normal a S en p puede o no apuntar hacia la dirección positiva de ω . Daremos al punto singular p un signo dependiendo de ello. Un punto singular p pertenece a una pieza de la descomposición en regiones de S , daremos

entonces a cada pieza también un signo de acuerdo al del punto singular que contiene.

Cada vértice $v \in \partial\alpha$, de un arco frontera α es en realidad parte de la frontera de una cantidad finita de arcos frontera $\{\alpha_i\}_{i=1}^r$, cada α_i puede ser de tipo a o de tipo b . Alrededor de un vértice v los arcos $\{\alpha_i\}_{i=1}^r$ aparecen en un orden cíclico según la fibración \mathcal{H} , luego, le podemos asociar al vértice v la sucesión $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$, lo que llamaremos el *tipo* del vértice v , y diremos que el vértice v tiene *valencia* r .

El *signo* de v será la sucesión $(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$ donde cada signo es el de la región $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$.

La *paridad* de v será positiva o negativa, dependiendo de si la normal a S en v coincide o no con la orientación de k .

Notemos que si v es frontera de un b -arco entonces, por las orientaciones de L y S , el vértice v deberá tener paridad positiva.

Cambios locales

En esta sección describiremos cuatro posibles cambios locales en la descomposición en piezas, descrita en la sección anterior, de las superficies que estaremos estudiando. Estos cambios nos permitirán ya sea reducir el número de piezas en la teselación de S , reducir o aumentar el índice de la trenza L , o simplemente reacomodar el encaje del enlace y superficie, teniendo control de la teselación.

1. CAMBIO EN LA FOLIACIÓN

El primer cambio que describimos en el resultado siguiente consiste en cambiar de posición respecto al ángulo ω , dos puntos singulares que son adyacentes en la teselación de S . Para efectuar el cambio necesitaremos asegurar que los dos puntos singulares son del mismo signo. En la demostración del Lema (1.5) ya hicimos cambios de este estilo, y de hecho en algunos de los casos los puntos singulares no eran del mismo signo, sin embargo, nos basta dar la existencia de un disco, a lo largo de una vecindad del cual realizamos la isotopía del punto singular. La demostración aquí sigue el mismo estilo y se analizan todos los casos, encontrando en cada uno de ellos el disco correspondiente.

PROPOSICIÓN 2.1. *Sea $S \subset S^3 \setminus N(L)$ una superficie. Supongamos que en su descomposición en piezas, $\{R_j\}_{j=1}^m$, existen dos adyacentes, R_0 y R_1 , con el mismo signo. Supongamos que la hoja frontera común de R_0 y R_1 , γ , es un b-arco, o una c-curva. Entonces existe una isotopía Φ , con $\Phi(S) = S'$ tal que*

- i) $\Phi(R_0 \cup R_1) = R'_0 \cup R'_1$, donde R'_0 y R'_1 son regiones de S' adyacentes y con el mismo signo.

- ii) La descomposición de $S' \setminus (R'_0 \overset{\circ}{\cup} R'_1)$ coincide con la descomposición de $S \setminus (R_0 \overset{\circ}{\cup} R_1)$.
- iii) Sea p_j la singularidad de R_j , $j = 0, 1$. Entonces $\Phi(p_j) = p'_j$, donde p'_j es la singularidad de R'_j . Además el orden en que aparecen en la foliación se invierte, i.e., $(p_0, \gamma, p_1) \mapsto (p'_1, \gamma', p'_0)$.
- iv) Si $\partial S \neq \emptyset$, $\partial S = L$, entonces Φ disminuye en uno la valencia de cada vértice en $\partial\gamma$.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer, fijando una orientación para S , que ambas singularidades en cuestión son positivas. Tenemos varios casos, dependiendo de qué tipo son las piezas R_j . Consideraremos primero los casos en que γ es una c -curva.

- $R_0 = cc1$, $R_1 = cc1$.

En este caso cada R_j es un pantalón y están unidos por una de sus curvas frontera, γ . Tomemos dos fibras, H_0 , H_1 , justo después de las fibras singulares que contienen a los puntos p_0 , p_1 , respectivamente. Parametrizamos las fibras en \mathcal{H} , entre H_0 y H_1 , por $\{H_t\}_{t \in [0,1]}$. Llamaremos γ_t , $t \in [0, 1]$, a la c -curva en H_t , en que va cambiando γ . Supongamos que $\gamma \subset H_{\frac{1}{2}}$. Llamaremos también D_t y A_t a los discos o anillos que se encuentran en H_t , con $\partial A_t = \partial D_t = \gamma_t$, $t \in [0, 1]$. Llamemos H_{t_1} a la fibra singular a la que pertenece el punto singular p_1 . En la fibra $H_{\frac{1}{2}}$, la región R_1 tiene dos curvas de intersección, una de ellas es $\gamma = \gamma_{\frac{1}{2}}$, llamemos $\delta = \delta_{\frac{1}{2}}$ a la otra curva de intersección. Podemos suponer que la curva $\delta_{\frac{1}{2}}$ viene desde antes de H_0 , i.e., que tenemos un cilindro de la forma $\delta_0 \times I$, de curvas de intersección entre H_0 y H_1 . Para cada $t \in (0, 1)$, la curva $\delta_t = \delta \times \{t\}$ es frontera de un disco $E_t \subset H_t$, de manera que obtenemos un cubo con dos asas G de la forma $[H_0 \setminus (D_0 \cup E_0)] \times (0, 1)$.

Tomemos $\alpha_0 \subset H_0$ un arco propiamente encajado en D_0 , con $\alpha_0 \overset{\circ}{\cap} (L \cup S) = \emptyset$. Notemos que $L \cap (D_0 \setminus \alpha_0) \neq \emptyset$ y, posiblemente, $S \cap (D_0 \setminus \alpha_0) \neq \emptyset$.

Consideremos ahora la bola B foliada por los discos $D_t \subset H_t$, $t \in [0, 1]$. Si en B no existen singularidades de S ni trenzado de L , no tenemos ningún impedimento para construir

un disco $\alpha_0 \times I$, con $\alpha_0 = \alpha \times \{0\} \subset H_0$, $\alpha \times \{1\} \subset H_1$ y $\alpha_t = \alpha \times \{t\}$ satisfaciendo $\overset{\circ}{\alpha}_t \cap (L \cup S) = \emptyset$, para cada $t \in (0, 1)$. Este disco nos servirá para empujar p_0 a lo largo de él, hasta llegar a tener $p_1 \in H_1$. En caso que sí existan singularidades de S o trenzado de L en B , necesitamos primero empujar $\overset{\circ}{B} \cap (L \cup S)$ en dirección de H_1 , hasta que se encuentre fuera de B . Este desplazamiento se hace en dirección transversal a cada fibra, de modo que, después de efectuarlo, L se mantiene transversal a la fibración \mathcal{H} , y las posibles partes afectadas de S tienen la misma descomposición que antes. Una vez hecho esto podemos considerar el disco $\alpha \times I$ descrito antes y efectuar la isotopía para que $p_0 \subset H_1$.

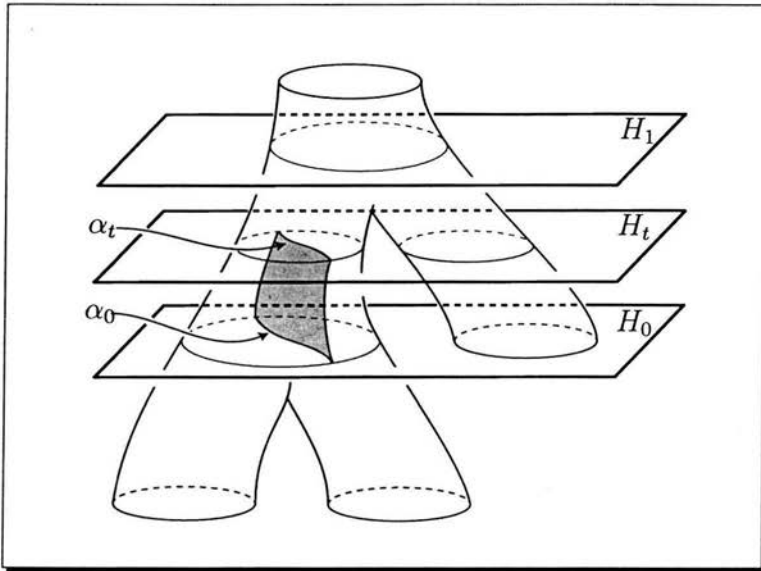


FIGURA 1. Caso $cc - cc$

Hemos obtenido así un disco $\alpha_0 \times I$, podemos ahora empujar la superficie S a lo largo de una vecindad pequeña de él, de manera que los puntos singulares p_0, p_1 aparecen en orden inverso respecto a la dirección positiva de ω . La superficie S' será pues, la que obtenemos después de efectuar esta isotopía y claramente cumple *i*), *ii*) y *iii*) del teorema.

- $\underline{R_0 = cc2, R_1 = cc2.}$

Este caso es idéntico al anterior, solo que el sentido positivo de la fibrición cambia. El argumento anterior se aplica al pie de la letra.

- $\underline{R_0 = cc1, R_1 = bc2.}$

En este caso tenemos un pantalón, R_0 , pegado por $\gamma \subset \partial R_1$ al anillo R_1 . Llamemos igual que antes γ_t a la curva en H_t , $t \in [0, 1]$, con H_0, H_1 las fibras que contienen a los puntos singulares p_1, p_2 , respectivamente. Supongamos de nuevo que $\gamma = \gamma_{\frac{1}{2}}$, y llamamos $D_t \subset H_t$ el disco del que es frontera γ_t , $t \in (0, 1)$. Igual que antes, tomamos un arco α , propiamente encajado en D_0 con $\overset{\circ}{\alpha} \cap (S \cup L) = \emptyset$. El argumento anterior nos permite encontrar un disco $\alpha \times I$ que nos servirá para empujar el punto singular p_0 después de H_1 .

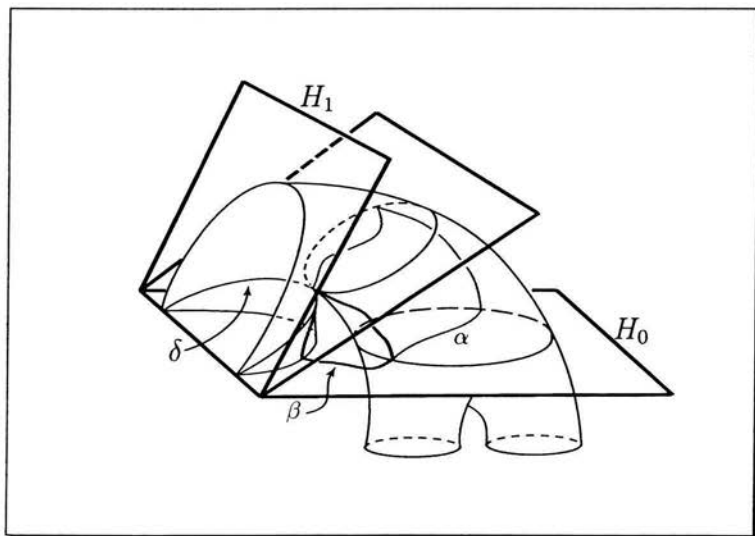


FIGURA 2. Caso $cc - bc$

- $\underline{R_0 = cc2, R_1 = bc2.}$

Este caso no entra dentro de nuestras hipótesis pues las dos regiones son de signo distinto.

- $R_0 = bc1, R_1 = cc1.$

Este caso es idéntico al caso $R_0 = cc1$ y $R_1 = bc2$, sólo tomando el sentido positivo de t contrario al de aquel caso. El argumento es idéntico.

- $R_0 = bc1, R_1 = cc2.$

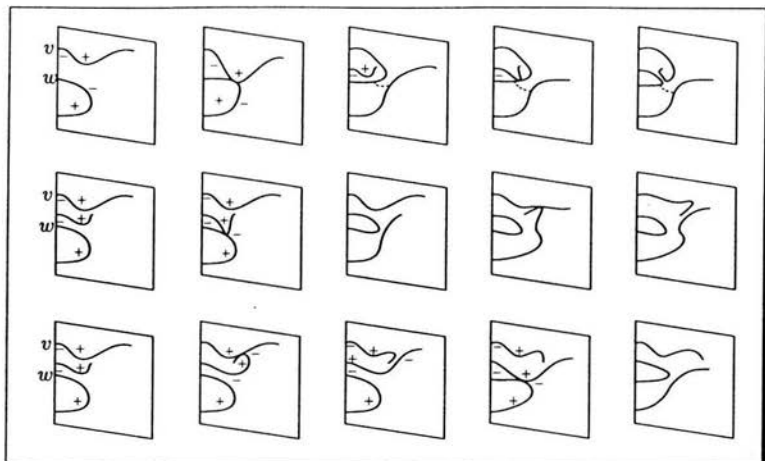
Este caso no entra dentro de nuestras hipótesis pues para que sean adyacentes tiene que suceder que las dos regiones son de signo distinto.

A continuación analizaremos los casos en que R_0 y R_1 son adyacentes en un b -arco.

- $R_0 = ab, R_1 = ab$

En este caso, dado que las singularidades que estamos considerando deben ser del mismo signo, debemos tener la situación del primer renglón de la figura (3), donde cada *cuadro* representa un semiplano, H_ω , avanzando de izquierda a derecha. La región R_0 se muestra en los primeros tres cuadros y la región R_1 en los últimos tres. El cuadro de en medio es donde *termina* la primera región y *comienza* la segunda, teniendo como frontera común al b -arco con vértices v y w .

Debemos encontrar un arco α , como en los casos anteriores para formar un disco foliado de la forma $\alpha \times I$, y efectuar la isotopía a través de él. En la figura (3) se muestra también el arco α que usaremos para encontrar dicho disco. El arco lo podemos encontrar inmediatamente después de la primera singularidad y tenemos una copia de él en cada semiplano entre las fibras singulares, de modo que obtenemos el disco foliado que necesitamos. Las observaciones de los casos anteriores acerca del desplazamiento transversal a la foliación, tanto del enlace como de la superficie, se aplican de manera análoga y obtenemos la isotopía que satisface *i)* *ii)* y *iii)* del teorema.

FIGURA 3. Caso $ab - ab$

En los siguientes dos renglones de la figura (3) mostramos las posibilidades que existen para la parte afectada de la superficie después de efectuar la isotopía. Existen dos posibilidades básicamente por la siguiente razón: antes de efectuar la isotopía, la segunda singularidad aparece cuando se tocan el b -arco $\bar{v}\bar{w}$ y el a -arco δ que forma parte de la región R_1 . Al hacer la isotopía esta singularidad es la que aparecerá primero (siguiendo el sentido positivo de ω), de modo que tenemos que ver que δ se debe de tocar con otra hoja *antes* de que los vértices v y w sean frontera de un b -arco (pues esto pasa hasta después de la segunda singularidad). Las dos opciones son entonces que el a -arco δ se toque con la hoja que contiene al vértice v , o con la hoja que contiene al vértice w .

Estamos en el caso en que $\partial S = L$, de modo que nos falta probar *iv*). Para ello basta ver que cada uno de los vértices, v y w , en el primer renglón de la figura (3) participa en dos singularidades, mientras que en cualquiera de los siguientes dos renglones, *i.e.* después de efectuar la isotopía, cada uno participa solo en una singularidad; de modo que el número de hojas frontera que terminan en ellos se ve disminuido en uno, y por tanto la valencia de cada uno también.

- $R_0 = ab, R_1 = bb$

En este caso tenemos la situación mostrada en el primer renglón de la figura (4), donde las regiones R_0 y R_1 son adyacentes en el b -arco β . En el cuadro central de este renglón se muestra el arco que nos servirá para encontrar el disco por el que realizaremos la isotopía. Igual que en el caso anterior, cada uno de los últimos dos renglones de la figura (4) muestran las opciones para después de realizada la isotopía. Verificamos de la misma manera que cada vértice disminuye en uno el número de singularidades en las que participa, de modo que la valencia de los vértices se ve disminuido en uno de igual manera.

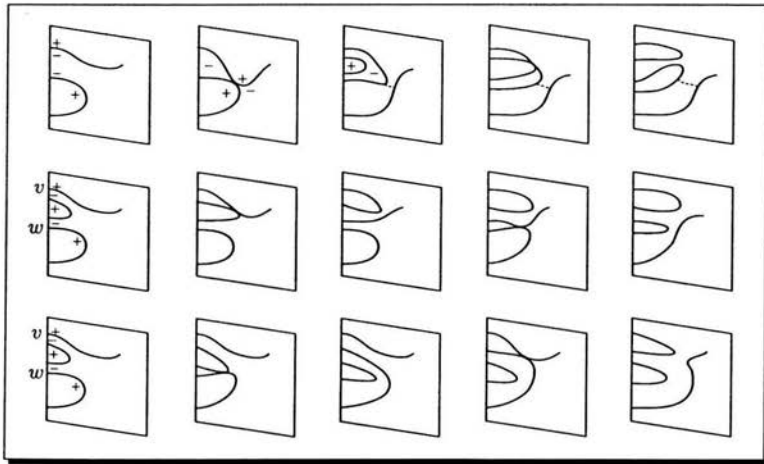
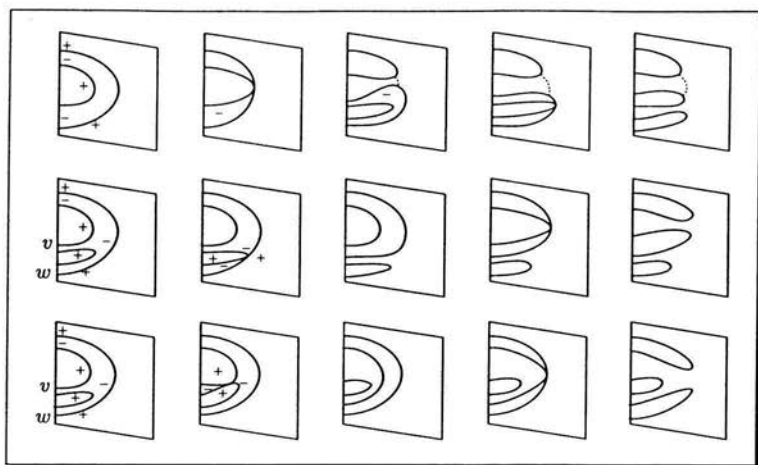


FIGURA 4. Caso $ab - bb$

- $R_0 = bb, R_1 = bb.$

En este caso estamos en la situación mostrada en el primer renglón de la figura (5), donde de igual manera mostramos el arco buscado para realizar la isotopía y los siguientes dos renglones tienen el mismo significado que antes.

Notemos que en este caso **no** sabemos que $\partial S = L$ y sin embargo se sigue cumpliendo que cada uno de los vértices v y w disminuye su valencia en uno.

FIGURA 5. Caso $bb - bb$

- $R_0 = bb, R_1 = bc1.$

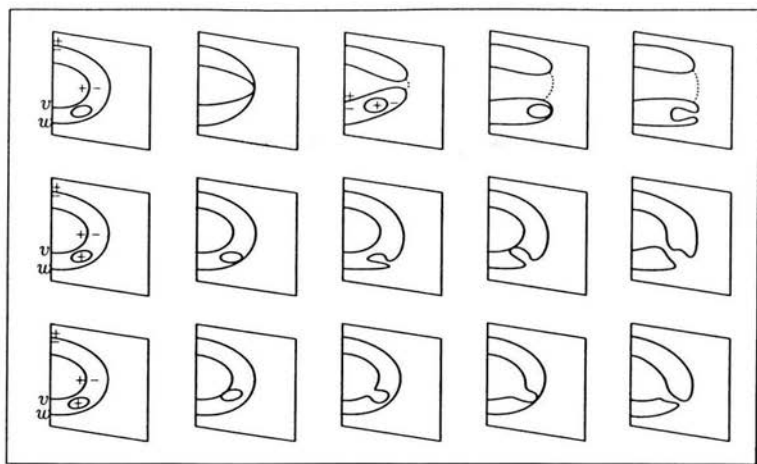
En este caso estamos en la situación mostrada en el primer renglón de la figura (6), donde de igual manera mostramos el arco buscado para realizar la isotopía y los siguientes dos renglones tienen el mismo significado que antes.

Notemos que en este caso después de efectuar la isotopía con la opción del segundo renglón disminuye la valencia de v , pero no de w ; mientras que la opción del tercer renglón disminuye la valencia de w , pero no de v . Sin embargo, al haber c -curvas en la foliación, podemos asumir por el Lema (1.3) que S es cerrada, por lo que esto no afecta la conclusión del teorema.

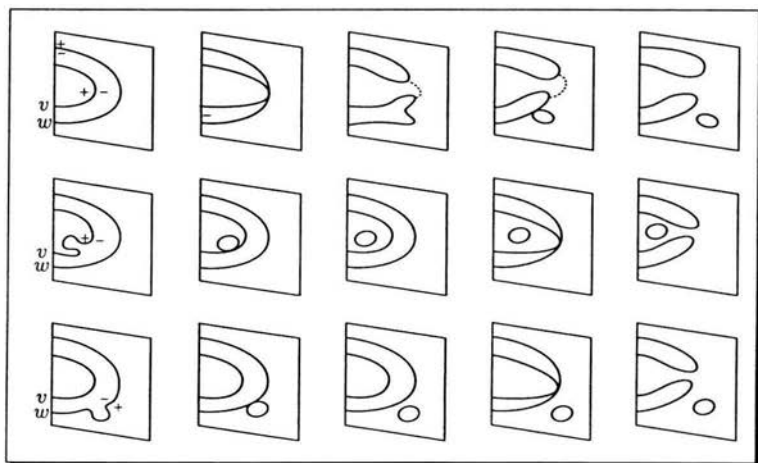
- $R_0 = bb, R_1 = bc2.$

En este caso estamos en la situación mostrada en el primer renglón de la figura (7), donde de igual manera mostramos el arco buscado para realizar la isotopía y los siguientes dos renglones tienen el mismo significado que antes.

Notemos que en este caso después de efectuar la isotopía con la opción del segundo renglón disminuye la valencia de w ,

FIGURA 6. Caso $bb - bc1$

pero no de v ; mientras que la opción del tercer renglón disminuye la valencia de v , pero no de w . Sin embargo, al haber c -curvas en la foliación, de igual manera, podemos asumir por el Lema (1.3) que S es cerrada, por lo que esto no afecta la conclusión del teorema.

FIGURA 7. Caso $bb - bc2$

- $R_0 = bc1, R_1 = bc1.$

En este caso estamos en la situación mostrada en el primer renglón de la figura (8), donde de igual manera mostramos el arco buscado para realizar la isotopía y los siguientes dos renglones tienen el mismo significado que antes.

En este caso en cualquiera de las dos opciones de efectuar la isotopía, no se disminuyen las valencias de los vértices v y w . Sin embargo, de nuevo al haber c -curvas, podemos asumir por el Lema (1.3) que S es cerrada.

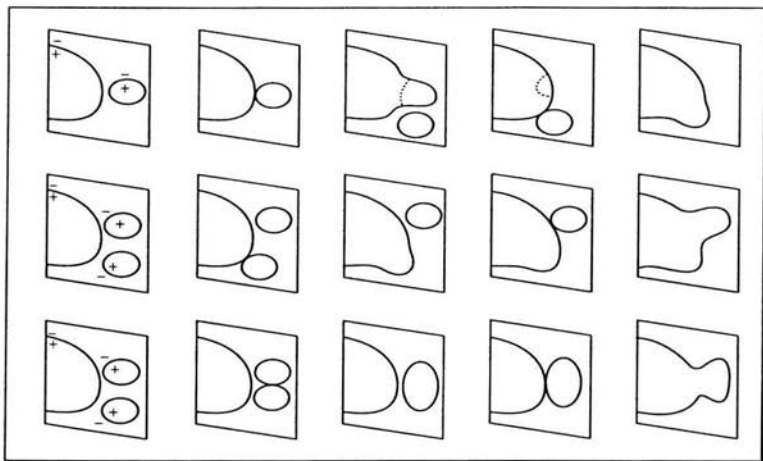
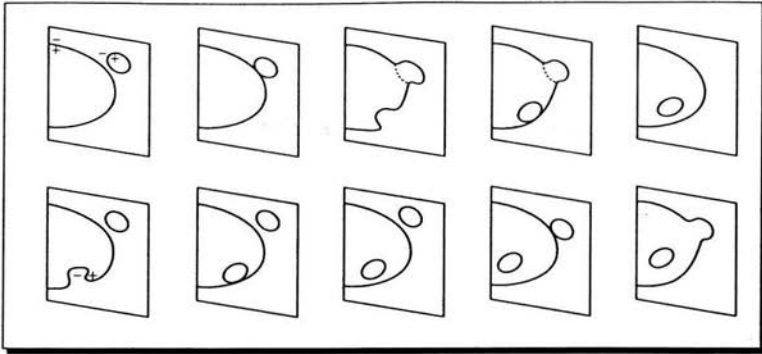


FIGURA 8. Caso $bc1 - bc1$

- $R_0 = bc1, R_1 = bc2.$

En este caso estamos en la situación mostrada en el primer renglón de la figura (9), donde de igual manera mostramos el arco buscado para realizar la isotopía y aquí solo hay una manera de efectuar la isotopía, por lo que solo existe un segundo renglón en la figura (9).

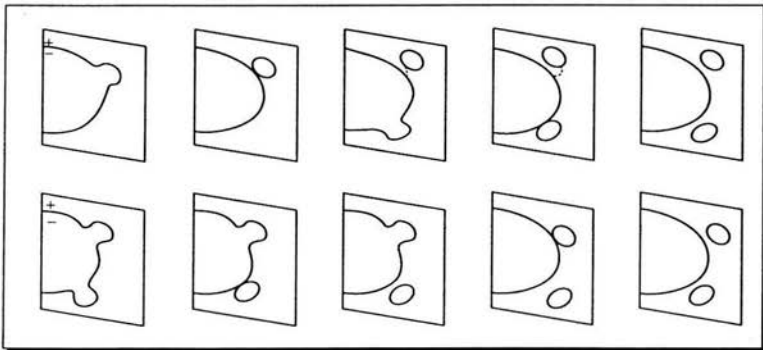
En este caso después de efectuar la isotopía no se disminuyen las valencias de los vértices v y w , pero de igual manera, al haber c -curvas podemos asumir que S es cerrada, por lo que esto no nos genera ningún problema.

FIGURA 9. Caso $bc1 - bc2$

- $R_0 = bc2, R_1 = bc2$.

En este caso estamos en la situación mostrada en el primer renglón de la figura (10), donde de igual manera mostramos el arco buscado para realizar la isotopía y de nuevo solo hay una manera de efectuar la isotopía, por lo que solo existe un segundo renglón en la figura (10).

En este caso después de efectuar la isotopía no se disminuyen las valencias de los vértices v y w , pero de igual manera, al haber c -curvas podemos asumir que S es cerrada, por lo que esto no nos genera ningún problema.

FIGURA 10. Caso $bc2 - bc2$

2. ESTABILIZACIÓN

En esta sección describimos un cambio en la posición del enlace L y de una superficie de Seifert para L , S , que nos permite eliminar un vértice de la teselación de S (y por lo tanto una pieza de la teselación), pagando a cambio el incrementar el índice de la trenza en uno. Este cambio se conoce como *estabilización*. Dado que para este trabajo, queremos hacer este cambio *sin* alterar la superficie, necesitamos información de la teselación de S , para realizar la estabilización. La modificación la haremos en una pieza de tipo (a, b) de la teselación, por lo que nos referiremos a este cambio como una *estabilización a lo largo de una pieza de tipo (a, b)* .

El siguiente resultado describe la modificación a la que nos referimos:

PROPOSICIÓN 2.2. *Sea $L \subset S^3$ un enlace que es la cerradura de una n -trenza, y S una superficie de Seifert para L . Supongamos que en la teselación de S existe una pieza R de tipo (a, b) . Entonces existe una isotopía Φ , tal que:*

- i) El vértice negativo de la pieza R , v , desaparece en $\Phi(S)$.*
- ii) La pieza R de S , no aparece en la teselación de $\Phi(S)$.*
- iii) Toda pieza de tipo (a, b) (distinta de R) en la teselación de S que contenía a v como vértice, se convierte en una pieza de tipo (a, a) en $\Phi(S)$.*
- iv) Una pieza de tipo (b, b) que contenía a v como vértice en S , se convierte en una pieza de tipo (a, b) en $\Phi(S)$.*
- v) La teselación de $\Phi(S)$ coincide con la teselación de S , fuera de las piezas que contenían a v como uno de sus vértices.*
- vi) El representante de $\Phi(L)$ como trenza cerrada es de índice $n+1$ y se obtiene al añadir un bucle trivial alrededor del eje k .*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos una pieza R de tipo (a, b) en la teselación de S y llamemos λ a la hoja singular de R . Sea v el vértice de R que no es frontera de un a -arco (v es el único vértice de paridad negativa en R). Consideremos el arco $\beta \subset \lambda$ que une v con L . Tomemos $N(\beta)$ una vecindad en S de β , y hagamos $\alpha = L \cap N(\beta)$. Podemos deslizar α a lo largo del disco $N(\beta)$ evitando así la intersección en v entre S y k . En la figura (11) mostramos una región de S donde hemos hecho este cambio en una pieza de tipo (a, b) . Notemos que al cruzar α más allá de v , estamos rodeando k . Para aclarar esto notemos lo siguiente: La hoja singular λ descompone a la pieza R en 4 regiones y

estas aparecen (dos a dos) en un intervalo $[\omega_1, \omega_2]$ del ángulo ω de la fibrición. Podemos reparametrizar y suponer que el intervalo involucrado en la pieza R es el $[0, \frac{\pi}{2}]$, y que la hoja singular λ aparece en la fibra $H_{\frac{\pi}{4}}$. Antes de efectuar la isotopía el arco α cortaba solo las fibras correspondientes al intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Después de efectuar la isotopía, el nuevo subarco $\tilde{\alpha}$ corta transversalmente las fibras correspondientes a los ángulos $[0, \frac{\pi}{4}]$ (al cruzar la primera región de R), $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ (al cruzar la segunda región de R), $[\frac{\pi}{2}, 0]$ (al cortar por todas las demás regiones adyacentes a v), $[0, \frac{\pi}{4}]$ (al cruzar la tercera región de R) y $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ (al cruzar la cuarta región de R). Esto nos dice que el nuevo subarco $\tilde{\alpha}$, le da una vuelta (trivial) al eje k , aumentando así el índice de la trenza.

La figura (11) nos muestra que después de efectuar la estabilización en una pieza R de tipo (a, b) , la pieza R desaparece de la teselación de S , pues lo que permanece de ella después de la estabilización está totalmente foliado por hojas no singulares, por lo que lo podemos considerar como parte de las piezas adyacentes. Además, las piezas que tienen a v como vértice se ven afectadas de la siguiente manera:

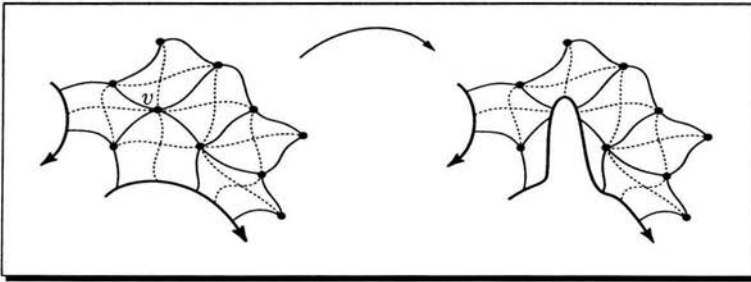


FIGURA 11. Estabilización vista en la teselación

- Una pieza de tipo (a, b) que contenía a v como vértice (distinta a R), se convierte en una pieza de tipo (a, a) .
- Una pieza de tipo (b, b) que contenía a v como vértice se convierte en una pieza de tipo (a, b) .

Ademas,

- Las demás piezas en la teselación de S no se ven afectadas por la estabilización.

□

En la figura (12) se muestra, visto en el encaje de la superficie, la isotopía involucrada en una estabilización, y nos muestra claramente cómo se enrolla trivialmente el enlace para aumentar el índice de la trenza.

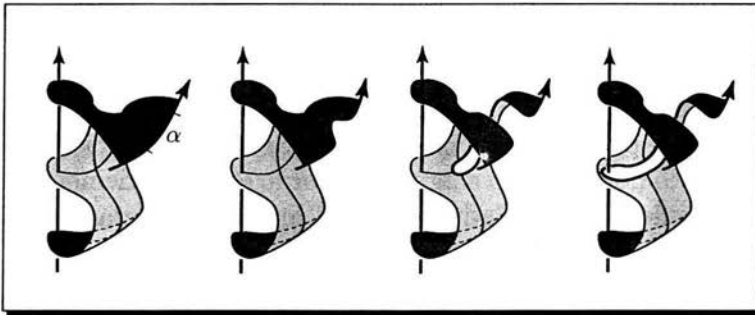


FIGURA 12. Estabilización en una pieza de tipo (a, b)

3. DESESTABILIZACIÓN

El cambio en el encaje del enlace y superficie de Seifert para L que describiremos en esta sección es, en algún sentido el inverso del cambio anterior, se conoce como *desestabilización*. La desestabilización se puede hacer cuando existe un *bucle* trivial alrededor del eje en el encaje de la trenza, que se puede evitar con lo que se conoce como una movida I de Reidemeister, por lo que nos disminuye en uno el índice de la trenza. Este cambio nos disminuirá además en uno la cantidad de vértices en la teselación de S .

Para poder enunciar de manera más clara la isotopía que queremos, veremos antes el siguiente lema.

LEMA 2.1. *Sea $L \subset S^3$ un enlace que es la cerradura de una n -trenza, y S una superficie de Seifert para L . Supongamos que en la teselación de S existe un vértice v de valencia 1. Entonces v es de tipo (a) .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que tenemos un vértice v en la teselación de S que es de valencia 1. Tenemos dos posibles casos: v es de tipo (a) , o v es de tipo (b) . Un vértice de este tipo solo puede aparecer si en una pieza de tipo (a, a) , (a, b) o (b, b) , se identificaron dos aristas que son a -arcos, o dos aristas que son b -arcos. Examinemos cada caso.

- **v de tipo (a)** que aparece al identificarse dos a -arcos frontera adyacentes en una pieza de tipo (a, a) . Este caso es posible y de hecho como veremos más adelante, será el único. El encaje de la pieza se muestra en el extremo izquierdo de la figura (14).
- **v de tipo (b)** que aparece al identificarse los dos b -arcos frontera en una pieza de tipo (a, b) . Es fácil convencernos de que este caso no es posible, pues al hacer la identificación nos queda una pieza con solo dos vértices, v y w . La hoja singular consistiría entonces en un arco que va del vértice v a L , y otro arco que conecta w consigo mismo. Esto contradice el hecho de que el vértice $w = S \cap k$ tiene una vecindad en S radialmente foliada.
- **v de tipo (b)** que aparece al identificarse dos b -arcos frontera adyacentes en una pieza de tipo (b, b) . Este caso es análogo al anterior, pues al hacer la identificación nos queda una pieza con 3 vértices que son frontera de b -arcos, de modo que en una fibra no singular saldrían dos b -arcos de un mismo vértice. Esto de nuevo nos contradice la existencia de una vecindad radialmente foliada de $S \cap k$.

Llegamos pues a que si existe un vértice v de valencia 1 en la teselación de S , este deberá ser de tipo (a) , y ocurre cuando en una pieza R de tipo (a, a) se identifican dos a -arcos frontera que son adyacentes. La parte de la izquierda de la figura (13) nos muestra una pieza R con estas características, vista en la teselación de S . Cabe hacer mención que las piezas adyacentes a R deben ser también de tipo (a, a) .

□

PROPOSICIÓN 2.3. *Sea $L \subset S^3$ un enlace que es la cerradura de una n -trenza y S una superficie de Seifert para L . Supongamos que en la teselación de S existe un vértice v de valencia 1. Entonces existe una isotopía Φ tal que*

- i) La pieza R de tipo (a, a) a la que pertenece v no aparece en la descomposición de $\Phi(S)$.*
- ii) El vértice v no aparece en la teselación de $\Phi(S)$.*
- iii) La teselación de $\Phi(S \setminus R)$ coincide con la teselación de S .*
- iv) El representante como trenza cerrada $\Phi(L)$ es de índice $n - 1$, y se obtiene de L al remover un bucle trivial alrededor del eje k .*

DEMOSTRACIÓN. Sabemos por el lema anterior, que si v tiene valencia 1, pertenece a una pieza de tipo (a, a) , donde se han identificado dos a -arcos frontera adyacentes, como nos muestra la parte izquierda de la figura (13).

Notemos que existe un disco $D \subset R$ cuya frontera es un subarco $\alpha \subset L$ junto con un subarco de la hoja singular que conecta L con L . Usamos este disco para realizar la isotopía. Lo que haremos es empujar el subarco α a través de D , evitando así la hoja singular y el vértice v . Llegamos así a que después de realizada una desestabilización la región R que se ve involucrada se elimina de la teselación de S , pues de nuevo, lo que permanece de R después de la isotopía se puede incluir en una de las regiones adyacentes, ya que está completamente foliado por a -arcos.

Para ver que al hacer la desestabilización estamos disminuyendo en uno el índice de la trenza, notemos que el arco original α corta todos los planos H_ω , $\omega \in [0, 2\pi)$. Para ver esto basta notar que basados en que existe el disco foliado que es una vecindad de $v = S \cap k$, de v emanan hojas de la foliación que corresponden a todas las fibras H_ω , $\omega \in [0, 2\pi)$. Pero estas hojas terminan todas en α , lo que nos dice precisamente que α está intersectando a cada fibra, y por lo tanto, se está enrollando una vez alrededor de k . Después de haber realizado la desestabilización (derecha de la figura (13)), el arco $\tilde{\alpha}$, que reemplaza a α no hace este recorrido a través de todas las fibras en \mathcal{H} , por lo que, en efecto, el índice de la trenza se ve disminuido en uno.

Es claro que para realizar esta isotopía no se ve involucrada ninguna otra pieza de la teselación de S , por lo que podemos asegurar que, fuera de R , la teselación de S después de efectuar la desestabilización

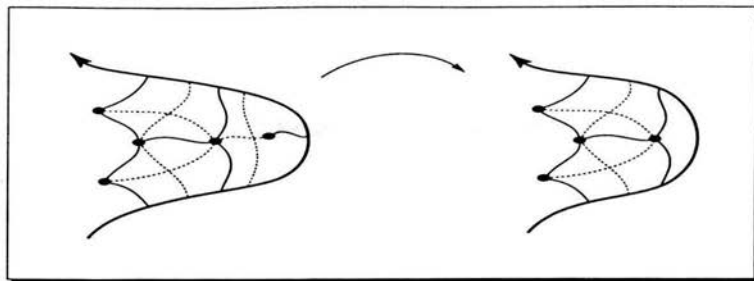


FIGURA 13. Desestabilización vista en la teselación

es la misma que antes de haberla efectuado.

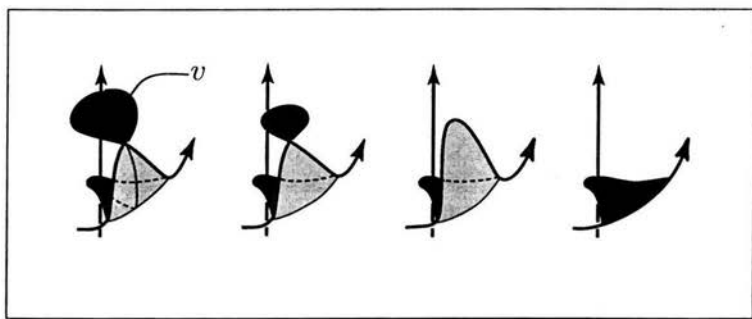


FIGURA 14. Desestabilización vista en el encaje

En la figura (14) se muestra la desestabilización vista en el encaje de la pieza.

□

4. MOVIDAS DE INTERCAMBIO

El cambio en la posición de una trenza cerrada que describiremos en esta sección se conoce como *movida de intercambio* y consiste básicamente en intercambiar mediante una isotopía, las posiciones relativas a la altura de dos sub-arcos con peso, $\alpha_1, \alpha_2 \subset L = \partial S$. En la figura (15)

mostramos este cambio en la posición de la trenza. Los pesos n_j significan que esa porción del enlace consiste de n_j arcos paralelos. Notemos que para realizar este cambio es necesario perder la posición de trenza en algún momento, pues la isotopía no se realiza en el complemento del eje k ; sin embargo no altera el índice de la trenza.

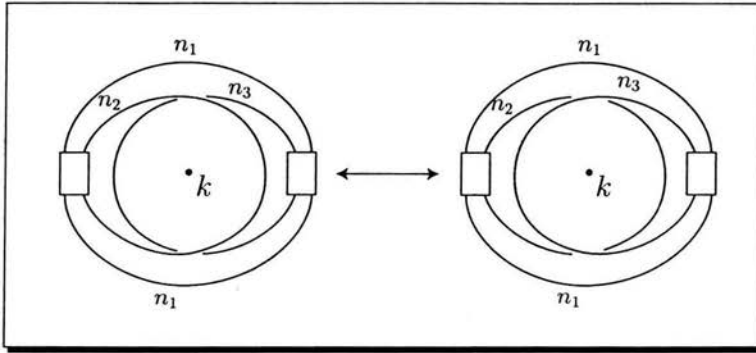


FIGURA 15. Movida de intercambio

Como antes, queremos identificar piezas en la teselación de S que nos aseguren que es posible efectuar la isotopía. Tendremos dos criterios para identificar que el encaje de la superficie y enlace admite una movida de intercambio, y ambos se basan en la existencia de un vértice de valencia 2. La isotopía del segundo tipo se vale hacer tanto en el caso en que estemos estudiando una superficie de Seifert para L , como para el caso de superficies cerradas incompresibles en $S^3 \setminus L$. Enunciamos las isotopías deseadas en los dos resultados siguientes.

PROPOSICIÓN 2.4. *Sea $L \subset S^3$ un enlace que es la cerradura de una n -trenza y S una superficie de Seifert para L . Supongamos que en la teselación de S existe un vértice v de valencia 2, tipo (a, b) y signo (\pm, \mp) . Entonces existe una isotopía Φ tal que*

- i) $\Phi(L)$ se obtiene de L al empujar a través de un disco $D \subset S$ que es la vecindad de un disco E contenido en la unión de dos piezas de tipo (a, b) de la descomposición de S .*
- ii) La teselación de $\Phi(S \setminus D)$ coincide con la teselación de $S \setminus D$.*
- iii) La teselación de $\Phi(S)$ contiene dos vértices menos que la de S .*
- iv) $\Phi(L)$ sigue siendo una n -trenza.*
- v) La isotopía $L \rightarrow \Phi(L)$ es una movida de intercambio (figura (15)).*

DEMOSTRACIÓN. Sea v un vértice de la teselación de S de valencia 2, tipo (a, b) y signo (\pm, \mp) . En el disco radialmente foliado que es la vecindad en S de $v = S \cap k$ vemos solo dos arcos frontera, uno de ellos, α es un a -arco, y el otro, β , es un b -arco. Sea w el otro vértice en $\partial\beta$. Entonces, las dos regiones R_1, R_2 , que aparecen alrededor de v son de tipo (a, b) y tienen como frontera común a los arcos α y β . Sea λ_j la hoja singular en R_j , con singularidad p_j , $j = 1, 2$. Podemos suponer que p_1 es positivo, y por tanto p_2 será negativo. Consideremos los subarcos de las hojas singulares λ_j que conectan L con el vértice w , quienes, junto con un sub-arco de L son frontera de un disco $E \subset R_1 \cup R_2$. Tomemos un disco pequeño, $D \subset S$, que contenga a E . Sea $\alpha = D \cap L$. Todo esto se muestra en la parte izquierda de la figura (16). La isotopía Φ consistirá en empujar α a través del disco E , evitando así las dos singularidades y los dos vértices, v y w . Al hacer esto estamos cambiando el sub-arco $\alpha \subset L$ por uno nuevo, $\tilde{\alpha} = \partial D \setminus \alpha$, que se mantiene transversal a las fibras en \mathcal{H} , por lo que $\Phi(L)$ sigue siendo una trenza.

Este cambio en la posición de L afecta a las regiones de la teselación de S de la siguiente manera:

- Una pieza de tipo (a, b) que contenía a w como vértice se convierte en una pieza de tipo (a, a) .
- Una pieza de tipo (b, b) que contenía a w como vértice se convierte en una pieza de tipo (a, b) .
- Toda pieza R que no contenía a w como vértice se mantiene como pieza de la teselación de $\Phi(S)$.

Para ver que $\Phi(L)$ sigue siendo una n -trenza notemos que el sub-arco original, α , cortaba todas las fibras H_ω , $\omega \in [0, 2\pi)$, pues cortaba transversalmente a cuatro regiones (2 en R_1 y 2 en R_2), que corresponden a las cuatro regiones alrededor de v . El nuevo subarco, $\tilde{\alpha}$ hace lo mismo, pero ahora a distinta *altura*, lo hace al nivel en que se encontraba el vértice w , por lo que en efecto, no estamos alterando el índice de la trenza y $\Phi(L)$ también es de índice n .

A partir de toda esta información podemos reconstruir el encaje de las piezas R_1, R_2 (esto lo explicamos más detalladamente en el resultado siguiente), obteniendo el encaje que se muestra en la parte izquierda de la figura (17). Hemos ilustrado mediante una sola flecha, la porción

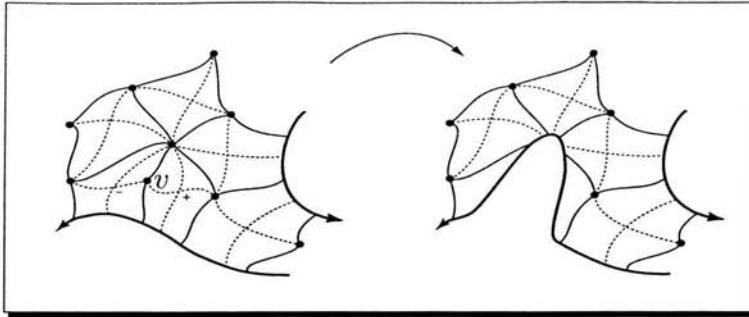


FIGURA 16. Movida de intercambio en una pieza de tipo (a, b) y signo $(+, -)$

de L que debe existir para que el b -arco β sea esencial, pero debemos tener en mente que esto es solo una porción de L y que puede consistir de n arcos que podemos suponer paralelos. La imagen de la derecha en la figura (17) nos muestra la pieza después de haber efectuado la isotopía. Vemos aquí que efectivamente, el efecto de la isotopía en el encaje de L es lo que se conoce como una movida de intercambio.

□

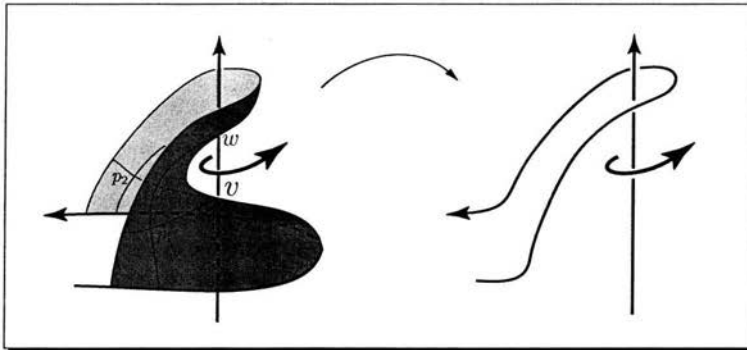


FIGURA 17. Encaje antes y después de la movida de intercambio en una pieza de tipo (a, b) y signo $(+, -)$.

Antes de continuar notemos lo siguiente:

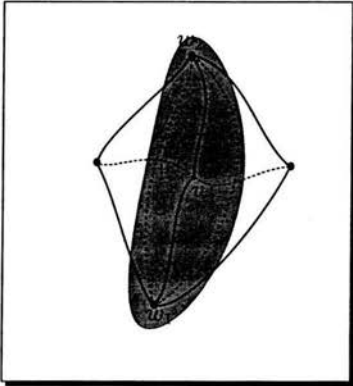
OBSERVACIÓN 2.1. *Existe una manera canónica de encajar una porción de S correspondiente a una vecindad de cada b -arco y, conociendo el signo de la singularidad correspondiente, también existe una*

manera canónica de encajar una porción de S correspondiente a una vecindad de una hoja singular.

PROPOSICIÓN 2.5. Sea $L \subset S^3$ un enlace que es la cerradura de una n -trenza y S una superficie, ya sea de Seifert para L , o cerrada incompresible en $S^3 \setminus L$. Supongamos que en la teselación de S existe un vértice v de valencia 2, tipo (b, b) y signo (\pm, \mp) . Entonces existe una isotopía Φ tal que

- i) La teselación de $\Phi(S)$ coincide con la teselación de S , fuera de las dos piezas de tipo (b, b) a las que pertenece v .
- ii) La teselación de $\Phi(S)$ contiene dos vértices y dos piezas menos que la de S .
- iii) $\Phi(L)$ sigue siendo una n -trenza.
- iv) La isotopía $L \rightarrow \Phi(L)$ es una movida de intercambio (figura (15)).

DEMOSTRACIÓN. Sea v un vértice en la teselación de S de valencia 2, tipo (b, b) y signo (\pm, \mp) . En el disco radialmente foliado que es la vecindad en S de $v = S \cap k$, vemos solo dos arcos frontera, b_1, b_2 , y ambos son b -arcos. Sean R_1, R_2 las dos piezas que aparecen alrededor de v . Entonces cada R_j es una pieza de tipo (b, b) , y tienen como frontera común a los arcos b_1, b_2 , que son contiguos en cada pieza R_j .



La figura de al lado muestra el pegado de estas dos piezas. Sea λ_j la hoja singular en la pieza R_j , $j = 1, 2$, y p_j el correspondiente punto singular. Podemos suponer que p_1 es positivo, por lo que p_2 será negativo. Sea w_j el otro vértice en la frontera del b -arco b_j . La unión de los dos subarcos de λ_j que conectan w_1 con w_2 son frontera de un disco $E \subset R_1 \cup R_2$. Sea $D \subset S$ un disco que es una vecindad de E .

A partir de toda la información de las piezas R_j y dado 2.1 podemos reconstruir el encaje del disco E en S^3 de la siguiente manera (ver figura (18)):

Comenzamos colocando los vértices (w_1, v, w_2) , en este orden sobre el eje de la trenza, k , y alrededor de cada uno la

porción de S correspondiente al disco radialmente foliado existente, que denotaremos D_{w_1}, D_v, D_{w_2} .

Podemos suponer que las hojas singulares λ_1, λ_2 , pertenecen a las fibras H_0 y H_π , respectivamente. Colocamos porciones de S correspondientes a vecindades de estas hojas singulares.

Colocamos ahora porciones de S correspondientes a vecindades de b -arcos, que van de D_v a D_{w_1} , para $\omega \in (0, \pi)$, y de D_v a D_{w_2} para $\omega \in (\pi, 2\pi)$.

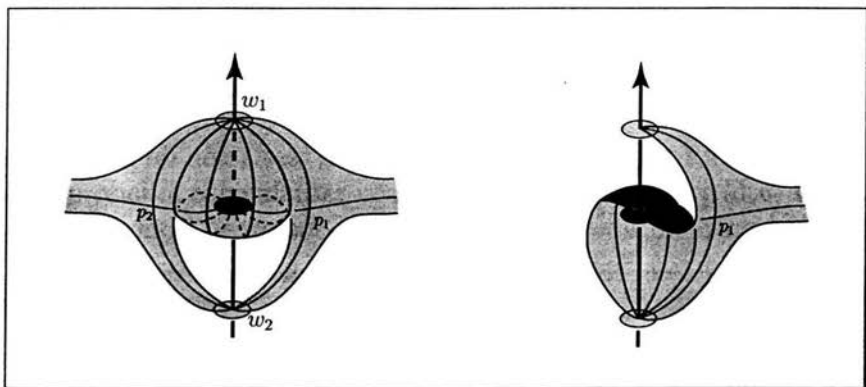


FIGURA 18. Construcción del encaje de la pieza de tipo (b, b) y signo $(+, -)$

Obtenemos con lo anterior el encaje presentado, en dos porciones, en la figura (18). Notemos que la parte derecha de la figura nos muestra que D , junto con porciones de las fibras H_0 y $H_{2\pi}$ son frontera de una bola, B . Juntando las dos porciones, y deformando un poco la posición de los puntos singulares, llegamos al encaje del disco D mostrado en la parte izquierda de la figura (19), y nos muestra a la bola B que ahora es delimitada por D y un disco \tilde{D} que es transversal a la fibricación, con $\partial D = \partial \tilde{D}$. Notemos que los dos b -arcos frontera, b_j , deben ser esenciales, por lo que hemos mostrado porciones de L que cortan los discos delimitados por ellos y k en la fibra H_ω correspondiente.

Dentro de B pueden existir componentes de \hat{S} , y todas ellas deberán ser paralelas a $\partial B \cap S$. Podemos suponer que $L \cap B$ consiste de arcos paralelos (sin cruces) que se enrollan en k , pues si existieran cruces o

arcos que no se enrollaran, los podemos empujar hacia afuera de B . Ahora bien, todas las componentes de $L \cap B$ que aparecen *abajo* de w_2 , las podemos sacar de B mediante una isotopía paralela a la dirección de k , en sentido contrario al de k , de modo que todas las componentes de $S \cap B$ se encuentren entre v y w_2 .

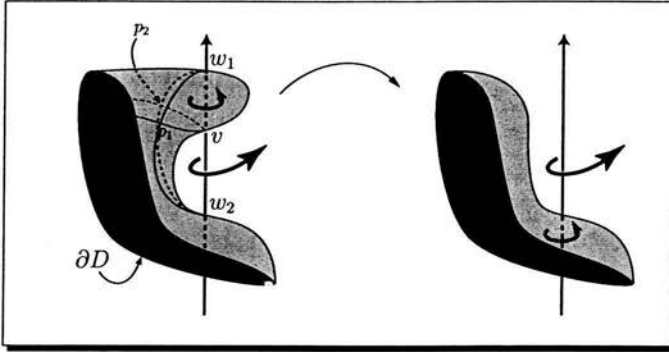


FIGURA 19. Movida de intercambio en una pieza de tipo (b, b) y signo $(+, -)$.

Podemos ahora efectuar una isotopía que consiste en cambiar de posición relativa al eje k , a la porción de L que está en B (entre v y w_2), para que aparezca *abajo* de w_2 , como se ve en la parte derecha de la figura (19). Al hacer esto, hay un paso intermedio en que *perdemos* la posición de L como trenza cerada, pero al final recuperamos esta posición.

Después de efectuar la isotopía anteriores, el b -arco b_1 (y todos los correspondientes a posibles componentes de $\overset{\circ}{S} \cap B$) es no esencial, por lo que podemos efectuar una isotopía como la descrita en el lema 1.2 y llegar a una superficie isotópica, que seguiremos llamando S , como la mostrada en la parte derecha de la figura (19).

□

Información de S a partir de la teselación

Notemos que, dado que la orientación de L debe coincidir con la de ∂S , podemos suponer que todo vértice que es frontera de un a -arco es positivo, y que los dos vértices que forman la frontera de un b -arco son de signo contrario. En este capítulo explotamos estas ideas y cómo el acomodo de vértices y puntos singulares nos da información acerca del encaje de S .

En primera sección estudiamos el orden cíclico de los puntos singulares (con signo) alrededor de un vértice. Para ello definimos vértices cercanos, vértices interiores, y probamos algunos resultados que usamos en la segunda sección.

En la segunda sección definimos las gráficas $\mathcal{G}_{\epsilon, \delta}$, que tienen por vértices a los vértices de la teselación de S y sus aristas son subarcos de las hojas singulares de la foliación.

1. INFORMACIÓN GLOBAL DE LA TESELACIÓN

DEFINICIÓN 3.1. *Sea $L \subset S^3$ un enlace que es la cerradura de una n -trenza y S una superficie de Seifert para L . Supongamos además que S es incompresible en $S^3 \setminus L$. Sea v un vértice en la teselación de S .*

- i) Diremos que un vértice v_i es cercano a v , si existe un b -arco b_i en la foliación de S , con $\partial b_i = \{v, v_i\}$.*

ii) Diremos que un punto singular p_i es cercano a v , si $p_i \in \lambda_i$, donde λ_i es una hoja singular con $v \in \partial\lambda_i$.

iii) Definimos

$$v^* = \{ v_i, p_j \mid v_i, p_j \text{ son cercanos a } v \}$$

iv) Diremos que un vértice w es un vértice interior si no es frontera de algún a -arco.

LEMA 3.1. Si v es un vértice en la teselación de S que es un vértice interior, entonces v^* contiene puntos singulares negativos y puntos singulares positivos.

DEMOSTRACIÓN. Sea v un vértice en la teselación de S que es un vértice interior. Podemos asumir, después de cambiar la orientación de k si es necesario, que v es positivo. Denotemos por $\{v_j\}_{j=1}^k$ a los vértices en v^* , respetando el orden en que aparecen en el eje k . Mostraremos que existe al menos un punto singular de cada signo en v^*

Existe otra manera de ordenar los vértices en v^* , que es el orden en que aparecen los b -arcos, saliendo de v , que conectan v con v_j , según el sentido positivo del ángulo ω . Sea $v_0 \in \{v_j\}_{j=1}^k$, el vértice que aparece antes de v_1 según este nuevo orden. Sea $p \in v^*$ el punto singular que queda en la región determinada por los b -arcos $\overline{vv_0}$ y $\overline{vv_1}$.

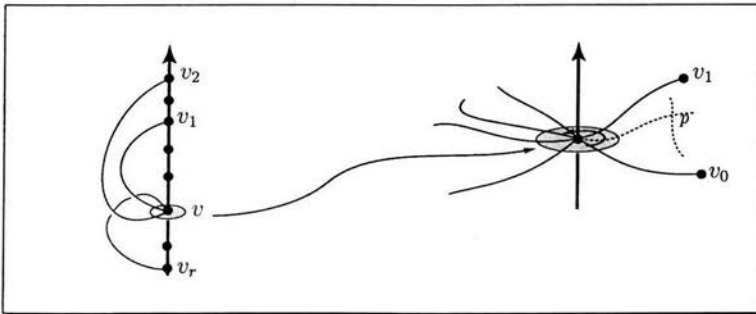
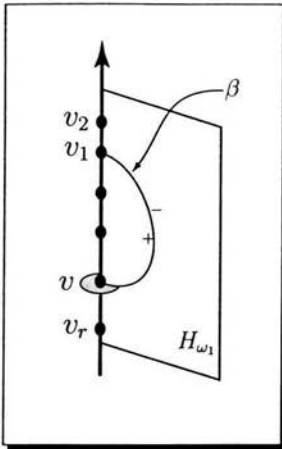
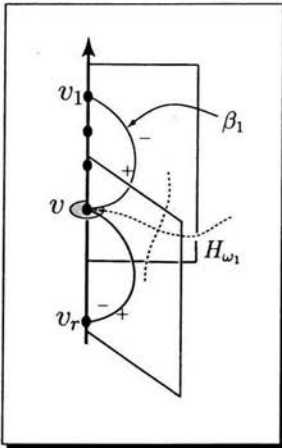


FIGURA 1. Las dos maneras de ordenar a los vértices en v^* .



Tomemos H_{ω_1} una fibra no singular que contiene un b -arco β_1 con $\partial\beta_1 = \{v, v_1\}$. El b -arco β_1 corta a H_{ω_1} en dos discos, que llamaremos $H_{\omega_1}^+$, $H_{\omega_1}^-$, donde el signo queda determinado por el lado de S que corta al disco. Notemos entonces que como v es positivo, v_1 tiene que ser negativo, pues juntos son la frontera de un b -arco. De aquí que $\{v_j\}_{j=2}^k \subset H_{\omega_1}^-$. Podemos concluir entonces que la siguiente singularidad (en el segundo tipo de orden) a partir de β_1 debe ser positivo.



Nos falta mostrar la existencia de un punto singular negativo en v^* . Para ello consideremos ahora los b -arcos β_j , con $\partial\beta_j = \{v, v_j\}$, $j = 0, 1$. El orden en que aparecen estos elementos en la fibración es (β_0, p, β_1) . Sea λ la hoja singular a la que pertenece p . Podemos con esto concluir que el punto singular p es negativo, pues v_0 deberá ser negativo, y las fibras consecutivas alrededor de la fibra singular que contiene a λ , deberán estar como en la figura de al lado.

□

LEMA 3.2. *Después de efectuar varias veces cambios en la foliación, movidas de intercambio e isotopías en $S^3 \setminus k$, podemos suponer que ningún vértice interior en la teselación de S tiene signo $(+, +, \dots, -, -)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $V(S)$ el conjunto de todos los vértices en la teselación de S . Supongamos que existe un vértice interior $v \in V(S)$, con signo $(+, +, \dots, -, -)$. Al ser vértice interior, todos los arcos frontera que terminan en v son b -arcos. Luego, podemos aplicar cambios en la foliación (Proposición 2.1), para cambiar piezas adyacentes del mismo signo, y en este caso, el vértice v disminuye su valencia en uno cada vez. Después de aplicar el cambio varias veces llegamos a que v tiene valencia 2, tipo (b, b) y signo $(+, -)$. Eso es justo lo que necesitamos para aplicar la movida de intercambio de la Proposición 2.5, y de

este modo eliminamos el vértice v y las dos piezas de tipo (b, b) a las que pertenecía.

Aplicamos lo anterior a cada vértice interior de signo $(+, +, \dots, -, -)$ existente, y como en cada paso disminuimos en uno $|V(S)|$, este proceso eventualmente termina, y llegamos a que S no contiene vértices interiores con signo $(+, +, \dots, -, -)$.

□

LEMA 3.3. *Después de efectuar un número finito de cambios en la foliación, movidas de intercambio, isotopías en $S^3 \setminus k$ y desestabilizaciones en vértices de tipo (a) , podemos suponer que si existe un vértice de tipo $(b, b, \dots, b, a, b, \dots, b)$, entonces existen singularidades de signo distinto en v^* .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe un vértice $v \in V(S)$ de tipo $(b, b, \dots, b, a, b, \dots, b)$ tal que en v^* todas las singularidades son del mismo signo. Podemos aplicar entonces cambios en la foliación (Proposición 2.1), disminuyendo cada vez la valencia de v , hasta llegar a que v tiene tipo (a) . Podemos ahora aplicar una desestabilización en el vértice v (Proposición 2.3) para eliminar a v , disminuyendo así $|V(S)|$.

Aplicando lo anterior a cada vértice de este tipo, llegamos a una superficie isotópica a S que cumple lo deseado.

□

LEMA 3.4. *Después de efectuar un número finito de cambios en la foliación, movidas de intercambio, isotopías en $S^3 \setminus k$, y desestabilizaciones en vértices de tipo (a) , podemos asumir que ningún vértice v en la teselación de S tiene tipo $(b, \dots, b, a, b, \dots, b)$, y signo $(+, \dots, +, - \dots, -)$, donde uno de los cambios de signo corresponde a singularidades en v^* de signo contrario en piezas de tipo (a, b) con arco frontera común el a -arco que termina en v .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que existe un vértice $v \in V(S)$, de tipo $(b, \dots, b, a, b, \dots, b)$ y signo $(+, \dots, +, - \dots, -)$, donde uno de los cambios de signo corresponde a singularidades en v^* de signo contrario en piezas de tipo (a, b) con arco frontera común el a -arco que termina en v .

Podemos aplicar cambios en en la foliación (Proposición 2.1), por cada par de piezas adyacentes en un b -arco, que del mismo signo, y

cada vez que aplicamos el cambio, disminuye en uno la valencia de v , por lo que después de un número finito de veces llegamos a que v tiene valencia 2, es de tipo (a, b) y signo $(+, -)$. En esta situación podemos aplicar la movida de intercambio descrita en la Proposición 2.4, y uno de los dos vértices que se eliminan es precisamente v .

Repetimos los pasos anteriores por cada vértice de este tipo y llegamos a una superficie S' , isotópica a S , en cuya teselación no existen vértices de este tipo.

□

2. GRÁFICAS DE HOJAS SINGULARES

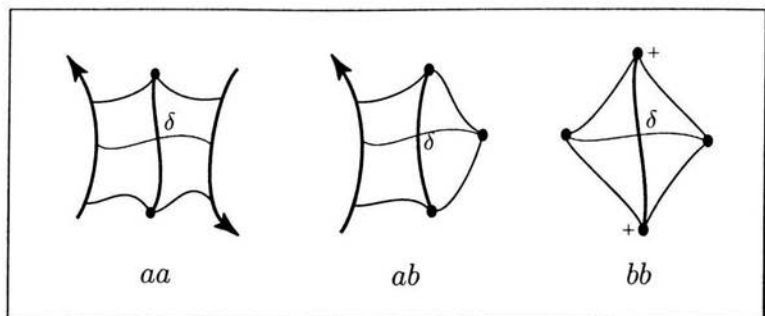
Vamos ahora a estudiar 4 gráficas asociadas a la teselación de una superficie S , con $\partial S = L$, donde L es como antes, la cerradura de una n -trenza. Estas gráficas contienen información codificada acerca de las ciertas propiedades de S . Las gráficas tendrán como aristas a subarcos de hojas singulares de la teselación de S , y como vértices, a subconjuntos de vértices de la teselación.

DEFINICIÓN 3.2. *La gráfica $\mathcal{G}_{+,\delta}$, $\delta = \pm$, tiene por aristas a aquellos subarcos de hojas singulares que unen los 2 vértices positivos de una pieza de tipo (a, a) , (a, b) o (b, b) , con singularidad δ .*

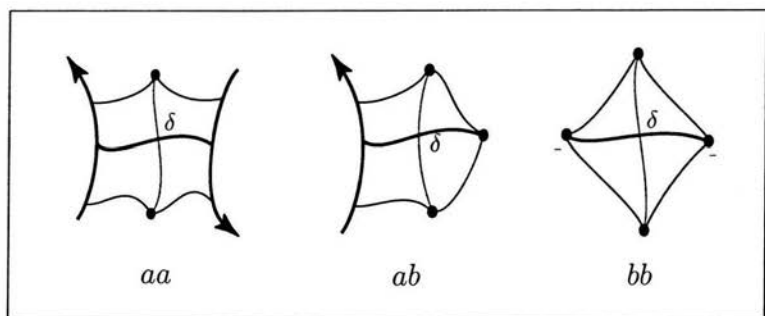
Los vértices de $\mathcal{G}_{+,\delta}$ son los puntos finales de estas aristas, junto con todos los vértices positivos en la teselación de S que no son adyacentes a puntos singulares de signo δ .

DEFINICIÓN 3.3. *La gráfica $\mathcal{G}_{-,\delta}$, $\delta = \pm$ tiene por aristas a aquellos subarcos de hojas singulares que*

- *unen dos vértices negativos en una pieza de tipo (b, b) de signo δ .*
- *unen el vértice negativo de una pieza de tipo (a, b) de signo δ , con ∂S .*
- *unen ∂S con ∂S en una pieza de tipo (a, a) de signo δ .*

FIGURA 2. Aristas de la gráfica $\mathcal{G}_{+,\delta}$.

Los vértices de $\mathcal{G}_{-,\delta}$ son los puntos finales de estas aristas junto con los vértices negativos de la teselación que no son adyacentes a puntos singulares de signo δ .

FIGURA 3. Aristas de la gráfica $\mathcal{G}_{-,\delta}$.

OBSERVACIÓN 3.1. Notemos que existen vértices en las gráficas $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta}$ que no son vértices de la teselación de S . En ocasiones será necesario hacer esta distinción para referirnos a un vértice v .

LEMA 3.5. Sea S una superficie de Seifert para un enlace L que es la cerradura de una n -trenza, y consideremos las gráficas $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta}$ recién definidas. Entonces

- i) $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta} \cap \mathcal{G}_{-\varepsilon,-\delta} = \emptyset$
- ii) Todo punto singular de S Pertenece a $\mathcal{G}_{+,+}$ o a $\mathcal{G}_{-,-}$ (y por tanto a $\mathcal{G}_{+,-}$ o a $\mathcal{G}_{-,+}$).

- iii) Todo vértice de la teselación de S es un vértice de $\mathcal{G}_{+,+}$ o de $\mathcal{G}_{-,-}$ (y por tanto de $\mathcal{G}_{+,-}$ o de $\mathcal{G}_{-,+}$).

DEMOSTRACIÓN. Basta probar las afirmaciones para las gráficas $\mathcal{G}_{+,+}$ y $\mathcal{G}_{-,-}$, pues los otros dos casos se obtienen al cambiar la orientación de las fibras en \mathcal{H} .

- i) La gráfica $\mathcal{G}_{-,-}$ contiene vértices en L , pero estos no pueden estar en $\mathcal{G}_{+,+}$, pues todos los vértices de esta última son vértices de la teselación. Los vértices de la teselación en las gráficas $\mathcal{G}_{+,+}$ y $\mathcal{G}_{-,-}$ tienen signo contrario, por lo que no puede haber intersección en el conjunto de vértices.

Las aristas tampoco se pueden intersectar, pues cada arista contiene un punto singular, y estos son de signo distinto en las gráficas consideradas.

- ii) Sea p un punto singular de S . Entonces p pertenece a una pieza, R , de tipo (a, a) , (a, b) o (b, b) . Si la pieza R es positiva, entonces p pertenece a una arista de $\mathcal{G}_{+,+}$; si la pieza R es negativa entonces p pertenece a una arista de $\mathcal{G}_{-,-}$.

- iii) Sea v un vértice de la teselación de S . Supongamos que v es positivo (negativo). Si v^* contiene singularidades positivas (negativas), entonces $v \in \mathcal{G}_{+,+}$ ($\mathcal{G}_{-,-}$). Si todas las singularidades en v^* son negativas (positivas), también $v \in \mathcal{G}_{+,+}$ ($\mathcal{G}_{-,-}$).

□

DEFINICIÓN 3.4. Llamaremos a un vértice $v \in \mathcal{G}_{\varepsilon,\delta}$, un vértice aislado si no es el punto final de una arista de $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta}$.

LEMA 3.6. Ninguna gráfica $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta}$ puede contener un vértice aislado que sea vértice interior en la teselación de S .

DEMOSTRACIÓN. Supongamos, por el contrario, que existe una gráfica $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta}$ que contiene un vértice aislado v que es a su vez un vértice interior de la teselación de S . Al ser v un vértice aislado, todas las singularidades en v^* deberán tener signo $-\delta$, por lo que v tiene signo $(-\delta, \dots, -\delta)$. Pero como v es vértice aislado, esto contradice el Lema 3.1.

□

DEFINICIÓN 3.5. Un punto final de una gráfica $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta}$, es un vértice de $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta}$ que pertenece exactamente a una arista de $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta}$.

LEMA 3.7. *Sea $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta}$ una gráfica para la teselación de S . Después de efectuar cambios en la foliación, movidas de intercambio e isotopías en $S^3 \setminus k$, podemos asumir que $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta}$ no tiene puntos finales que sean a la vez vértices interiores de la teselación de S .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que para $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta}$, existe un vértice v , que es punto final y a la vez es vértice interior de la teselación de S . Aplicando el Lema 3.2, podemos suponer que v no tiene signo $(+, +, \dots, --)$.

Supongamos que después de efectuar los cambios del Lema 3.2 v sigue siendo punto final de $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta}$. Entonces en v^* existe una sola singularidad de signo δ , i.e. v tiene signo $(-\delta, \delta, -\delta, \dots, -\delta)$ lo cual es una contradicción.

□

LEMA 3.8. *Después de efectuar cambios en la foliación, movidas de intercambio e isotopías en $S^3 \setminus k$, podemos asumir que:*

- i) *Ningún camino cerrado en $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta}$ es frontera de un disco en S .*
- ii) *Ningún camino cerrado formado por una trayectoria en $\mathcal{G}_{\varepsilon,+}$ y una trayectoria en $\mathcal{G}_{\varepsilon,-}$, es frontera de un disco en S .*
- iii) *Después de efectuar desestabilizaciones en vértices de tipo (a), ningún camino cerrado formado por una trayectoria en $\mathcal{G}_{-,\delta}$ y un subarco de L , es frontera de un disco en S .*
- iv) *Después de efectuar desestabilizaciones en vértices de tipo (a), ningún camino cerrado formado por una trayectoria en $\mathcal{G}_{-,+}$, una trayectoria en $\mathcal{G}_{-,-}$ y un subarco de L , es frontera de un disco en S .*

DEMOSTRACIÓN. Por los Lemas 3.1, 3.6 y 3.7, podemos asumir que, después de efectuar cambios en la foliación, movidas de intercambio e isotopías en $S^3 \setminus k$, ninguna gráfica $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta}$ contiene un vértice interior de la teselación de S con signo $(+, \dots, +, -, \dots, -)$ y que ninguna gráfica $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta}$ contiene vértices interiores o puntos finales que son a su vez vértices interiores de la teselación de S .

Supongamos que i) o ii) es falso, i.e. existe un camino cerrado c , ya sea con aristas en $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta}$ o formada por una trayectoria en $\mathcal{G}_{\varepsilon,+}$ y una trayectoria en $\mathcal{G}_{\varepsilon,-}$, que es frontera de un disco $D \subset S$. Supongamos

además que c es de *más adentro*, *i.e.* que no existe otro camino cerrado como en *i*) o *ii*) que es frontera de un subdisco propio de D .

Notemos ahora que las componentes de $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta} \cap \overset{\circ}{D}$ tienen que ser árboles con puntos frontera en c , pues:

- Si existe un camino cerrado en $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta} \cap \overset{\circ}{D}$ estaríamos contradiciendo la elección de c .
- Si existe un vértice aislado en $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta} \cap \overset{\circ}{D}$ tendría que ser vértice interior de la teselación de S , pues $D \cap L = \emptyset$, lo cual estamos suponiendo ya hemos eliminado.
- Si existe un punto final de $p \in \mathcal{G}_{\varepsilon,\delta} \cap \overset{\circ}{D}$ tenemos dos casos:
 - $\underline{p^* \cap c \neq \emptyset}$. Este caso no es posible, pues la paridad de p , al ser la misma que la de los vértices en c , hace que p pertenezca a una pieza con tres vértices de la misma paridad (ε), lo cual es imposible.
 - $\underline{p^* \cap c = \emptyset}$. En este caso p sería un punto final de $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta}$ que es un vértice interior de la teselación, pues al estar en D , no puede ser frontera de un a -arco. Pero estamos suponiendo que ya hemos eliminado a todos los vértices de este tipo.

Vemos así que en efecto, las posibles componentes de $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta} \cap \overset{\circ}{D}$ son árboles, con puntos finales en c . Ahora bien, en principio, pudiera ser que una componente de $\mathcal{G}_{\varepsilon,\delta} \cap \overset{\circ}{D}$, T , se vea cortada por c en una singularidad, *i.e.* que exista una singularidad s , tal que $s \in T \cap c$. Pero este también implica que el vértice $z \in T$ que está *justo antes* de s , pertenece a una pieza R en la teselación en la que hay 3 vértices con la misma paridad. Por lo tanto, concluimos que cualquier componente $T \subset \mathcal{G}_{\varepsilon,\mu} \cap \overset{\circ}{D}$ es un árbol cuyos puntos finales pertenecen al conjunto de vértices de c . Pero esto también nos lleva a una contradicción con la elección de c , pues entonces alguno de los dos discos en que c corta a D satisface *i*) o *ii*). Concluimos entonces que $\mathcal{G}_{\varepsilon,\mu} \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset$.

El argumento anterior se aplica de igual manera para $\mathcal{G}_{\varepsilon, -\delta} \cap \overset{\circ}{D}$, de modo que también $\mathcal{G}_{\varepsilon, -\delta} \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset$.

Supongamos ahora que existe un punto singular p de signo $-\delta$ en $\overset{\circ}{D}$. Entonces p debe pertenecer a una pieza de tipo (b, b) contenida en $\overset{\circ}{D}$, pues $\overset{\circ}{D} \cap L = \emptyset$. Pero entonces en esta pieza, el subarco de la hoja singular que pasa por p y que une los dos vértices de paridad ε pertenece a $\mathcal{G}_{\varepsilon, -\delta}$, contradiciendo lo dicho anteriormente, por lo que podemos concluir que no existen singularidades de signo $-\delta$ en $\overset{\circ}{D}$. Pero entonces, por *ii*) del Lema 3.5 llegamos a que no existen singularidades en $\overset{\circ}{D}$.

Sea e una arista de c . Entonces e pertenece a $\mathcal{G}_{\varepsilon, \mu}$ para $\mu = \pm$. Luego, como $D \cap L = \emptyset$, podemos ver las posibilidades en la figura (2) y concluir que e pertenece a una pieza R de la teselación que contiene un vértice w de paridad $-\varepsilon$, y este vértice debe estar en $\overset{\circ}{D}$. Entonces $w \in \mathcal{G}_{-\varepsilon, \mu}$, donde μ es $+$ o $-$, dependiendo de dónde vive la arista e . Por lo visto anteriormente llegamos a que todas las singularidades de w pertenecen a c , y todo vértice de c está unido a w por un b -arco. Esto nos dice que w es de tipo (b, \dots, b) y signo $(+, \dots, +)$, en caso que $c \subset \mathcal{G}_{\varepsilon, +}$, o signo $(+, \dots, +, -, \dots, -)$ en caso que c estaba formado por una trayectoria en $\mathcal{G}_{\varepsilon, +}$ y una trayectoria en $\mathcal{G}_{\varepsilon, -}$. Pero ya habíamos aplicado los cambios necesarios para asegurar que no existen vértices con estas características. Concluimos así que no existe un camino cerrado c como en *i*) o como en *ii*).

Veremos ahora que no puede existir un camino cerrado como en *iii*) o *iv*). Supongamos que después de haber realizado los cambios necesarios para tener las conclusiones de los Lemas 3.3 y 3.4, seguimos teniendo un camino cerrado c formado ya sea por una trayectoria en $\mathcal{G}_{-\delta}$ y un subarco de L , o bien por una trayectoria en $\mathcal{G}_{-, +}$, una trayectoria en $\mathcal{G}_{-, -}$ y un subarco de L . Supongamos además que el camino cerrado c es de más adentro de este tipo.

Veremos, de manera análoga a los casos anteriores, que $\mathcal{G}_{-\delta} \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset$, $\delta = \pm$. Supongamos que, por el contrario, que $\mathcal{G}_{-\delta} \cap \overset{\circ}{D} \neq \emptyset$. Por *i*), sabemos que no existen caminos cerrados en $\mathcal{G}_{-\delta} \cap \overset{\circ}{D}$. Además, como todos los vértices en $\mathcal{G}_{-\delta}$ son negativos, ninguno de ellos puede ser

frontera de un a -arco, por lo que cualquier vértice en $\mathcal{G}_{-, \delta} \cap \overset{\circ}{D}$ tiene que ser vértice interior de la teselación de S . De aquí que, al suponer los lemas anteriores, no puede haber vértices aislados o puntos finales en $\mathcal{G}_{-, \delta} \cap \overset{\circ}{D}$. De modo que, igual que en los casos anteriores, todas las componentes de $\mathcal{G}_{-, \delta} \cap \overset{\circ}{D}$ serán árboles, con puntos finales en c .

Sea T una componente de $\mathcal{G}_{-, \delta} \cap \overset{\circ}{D}$. De nuevo, ningún punto final de T puede ser una singularidad de c , pues esto nos daría una pieza en la teselación de S con 3 vértices negativos. De modo que T tiene sus puntos finales en el conjunto de vértices de c ($\mathcal{V}(c)$), o sobre L .

Pero entonces existe una trayectoria $\alpha \subset T$ cuyos puntos finales, p_1, p_2 , tienen las siguientes opciones:

- a) $p_j \in \mathcal{V}(c)$, $j = 1, 2$.
- b) $p_1 \in \mathcal{V}(c)$, $p_2 \in L$.
- c) $p_j \in L$, $j = 1, 2$.

Pero a) nos da una contradicción a i) o ii), b) y c) nos contradicen la minimalidad de c . Concluimos así que $\mathcal{G}_{-, \delta} \cap \overset{\circ}{D} = \emptyset$, $\delta = \pm$, como habíamos afirmado anteriormente.

Afirmamos ahora que no hay singularidades de ningún tipo dentro de $\overset{\circ}{D}$. Para ello veremos que no hay singularidades que pertenezcan a $\mathcal{G}_{+, +}$ en $\overset{\circ}{D}$. Supongamos que existe una singularidad $p \in \mathcal{G}_{+, +}$ en $\overset{\circ}{D}$. Las posibilidades para p son que pertenezca a una pieza de tipo (a, a) , (a, b) o (b, b) , y el subarco de la hoja singular λ a la que pertenece deberá estar contenida en $\overset{\circ}{D}$. Pero entonces la hoja singular completa deberá estar contenida en $\overset{\circ}{D}$, lo cual nos daría que $\mathcal{G}_{-, -} \cap \overset{\circ}{D} \neq \emptyset$, contrario a lo que vimos antes. Luego, por ii) del Lema 3.5 podemos concluir que no hay singularidades de ningún tipo en $\overset{\circ}{D}$, como habíamos afirmado.

Sea e una arista de c . Examinando las opciones vemos que e puede ser alguna de las aristas enlistadas en la figura (3). En cualquier caso podemos afirmar que e pertenece a una pieza de la teselación en la que existe un vértice w con paridad positiva, por lo que $w \in \overset{\circ}{D}$. Como no existen singularidades en $\overset{\circ}{D}$, tenemos que todas las singularidades de w^* están en c , y cada vértice en c está unido a w por un b -arco, por lo

que w será de tipo $(b, \dots, b, a, b, \dots, b)$.

Si c es como en *iii*), entonces todas las singularidades en w^* son del mismo signo, y si es como en *iv*) w tiene signo $(+, \dots, +, -, \dots, -)$, contradiciendo, en cualquier caso, alguno de los Lemas 3.3 y 3.4 que habíamos supuesto.

□

Aplicaciones

En este capítulo mostramos la utilidad de las técnicas estudiadas en los capítulos anteriores demostrando algunos resultados importantes para la teoría de nudos. Mostramos algunos casos particulares del Teorema de Markov, y el caso general para nudos. El caso particular para enlaces triviales se puede demostrar sin usar estabilizaciones, pues pasamos de un representante que no es el trivial, al trivial, de modo que no es necesario aumentar el índice; aunque sí usamos movidas de intercambio, para las cuales ya vimos es necesario perder la posición de trenza cerrada. También aplicamos los resultados anteriores para estudiar el comportamiento del índice mínimo de una trenza bajo suma conexa.

1. EL TEOREMA DE MARKOV PARA ENLACES TRIVIALES

DEFINICIÓN 4.1. *Sea $L \subset S^3$ un enlace que es la cerradura de una n -trenza, y $S \subset S^3$ una superficie de Seifert para L .*

- i) Diremos que S es de Markov para L , si S es de género mínimo.*
- ii) Diremos que S es una superficie especial de Markov si además, en su teselación solo hay piezas de tipo (a, a) .*

TEOREMA 4.1. *Sea \mathcal{L} un tipo de enlace en S^3 . Existe un representante como trenza cerrada de L que es frontera de una superficie especial de Markov.*

DEMOSTRACIÓN. Sea L un representante como trenza cerrada de \mathcal{L} , y S una superficie de Markov para L . Nuestro objetivo es, mediante cambios de los estudiados en las secciones anteriores, llevar a S a una superficie \tilde{S} , en cuya foliación existan solo piezas de tipo (a, a) .

Supongamos que en la teselación de S existen piezas de tipo (a, b) . Aplicamos estabilizaciones a lo largo de cada una de estas piezas (Prop. 2.2), eliminando cada vez un vértice negativo de $\mathcal{V}(S)$. Al aplicar estos cambios se crean nuevas piezas de tipo (a, b) , que aparecen de las piezas de tipo (b, b) que contenían a los vértices que eliminamos en cada paso. Pero también, en cada paso estamos disminuyendo en 1 el número total de piezas de la teselación de S , por lo que, después de un número finito de pasos logramos eliminar todas las piezas de tipo (a, b) de la teselación de S .

Llegamos así a un nuevo representante de L , que llamaremos \tilde{L} , con índice mayor que L , y a una superficie \tilde{S} , que sigue siendo de Markov para \tilde{L} , en cuya teselación no hay piezas de tipo (a, b) . Pero entonces tampoco podrá haber piezas de tipo (b, b) , pues si existiera una pieza R de tipo (b, b) , al no haber de tipo (a, b) , tampoco podrá haber de tipo (a, a) , pues se necesita una pieza de tipo (a, b) entre una de tipo (a, a) y R . Entonces R deberá pertenecer a una componente cerrada $S_1 \subset \tilde{S}$ que está totalmente foliada por piezas de tipo (b, b) , contradiciendo el hecho de que \tilde{S} era de género mínimo.

Concluimos así que la teselación de \tilde{S} consiste solamente de piezas de tipo (a, a) , como queríamos.

□

El siguiente resultado es el Teorema de Markov, en el caso especial del nudo trivial.

COROLARIO 4.1. *Sea U un representante estándar como cerradura de trenza del nudo trivial. Dado T , cualquier representante del nudo trivial como trenza, existe una sucesión finita de representantes como cerraduras de trenzas*

$$T = T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow \dots \rightarrow T_r = U$$

y un natural $p \leq r$ tal que

- i) Para $i \leq p$, T_i se obtiene de T_{i-1} por una estabilización en una pieza de tipo (a, b) .

ii) Para $p < i$, T_i se obtiene de T_{i-1} por una desestabilización a lo largo de un vértice de tipo (a).

DEMOSTRACIÓN. Sea T un representante como cerradura de trenza del nudo trivial, y tomemos S , una superficie de Markov para T , i.e. S es un disco.

Aplicamos el teorema anterior y obtenemos, después de una cantidad finita de estabilizaciones, digamos p , una sucesión de representantes como cerraduras de trenzas de T

$$T = T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow \dots T_p$$

donde T_i se obtiene de T_{i-1} estabilizando en una pieza de tipo (a, b), y T_p es frontera de una superficie especial de Markov S_p , i.e. S_p sigue siendo un disco, pero en su teselación existen solo piezas de tipo (a, a).

Consideremos ahora las gráficas $\mathcal{G}_{+,+}$ y $\mathcal{G}_{+,-}$ para S_p . Notemos que en vista del Lema 3.8, y dado que S_p es un disco, ninguna de ellas puede tener un camino cerrado. Por el mismo resultado sabemos que tampoco puede existir un camino cerrado formado por una trayectoria en $\mathcal{G}_{+,+}$ y una trayectoria en $\mathcal{G}_{+,-}$. Sea $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{+,+} \cup \mathcal{G}_{+,-}$. Entonces \mathcal{G} también debe ser un árbol, pues en cada pieza R , (R es de tipo (a, a)) podemos ver que el subarco de la hoja singular correspondiente separa a R en dos regiones, cada una de las cuales contiene un arco de $\alpha \subset \partial S_p = T_p$, por lo que, de haber un camino cerrado en \mathcal{G} , este separaría a $\partial S_p = T_p$, lo cual no es posible, pues estamos suponiendo que T_p es un nudo.

Entonces todo vértice final $v \in \mathcal{G}$, deberá ser de tipo (a), por lo que mediante una desestabilización (Prop. 2.3) podemos eliminar cada uno, eliminando en cada paso una pieza de tipo (a, a). Repitiendo este proceso por cada nuevo vértice final, después de una cantidad finita de desestabilizaciones, llegamos a una superficie S_r y a un representante T_r , donde S_r está totalmente foliado por a -arcos, sin singularidades, por lo que S_r es un disco radialmente foliado, y por ende, T_r es el representante estándar del nudo trivial.

□

El siguiente resultado es el Teorema de Markov sin Estabilización, en el caso especial en que L es el n -enlace trivial.

TEOREMA 4.2. *Todo representante como cerradura de trenza, L , del enlace trivial de n -componentes puede ser reducido al representante*

estándar, \mathcal{U}_n , mediante una sucesión finita de cambios de los siguientes tipos:

- i) movidas de intercambio.
- ii) isotopía de L en $S^3 \setminus k$.
- iii) desestabilizaciones a lo largo de vértices de tipo (a).

DEMOSTRACIÓN. Sea L un representante como cerradura de trenza del enlace trivial de n componentes, y $S \subset S^3$ una superficie de Markov para L , i.e. S es una colección de n discos ajenos $\{D_j\}_{j=1}^n$.

Consideremos ahora las gráficas $\mathcal{G}_{\varepsilon, \delta}$ para $S = \bigcup_{j=1}^n D_j$. Por el Lema 3.8 sabemos que ninguna de las gráficas $\mathcal{G}_{\varepsilon, \delta}$ contiene un camino cerrado, pues sería frontera de un disco en algún D_j . Luego, cada componente de $\mathcal{G}_{\varepsilon, \delta}$ deberá ser o bien un vértice aislado, o un árbol. Por el mismo resultado podemos suponer que no existe un disco $E \subset S$ cuya frontera está formada por un subarco de L y una trayectoria en $\mathcal{G}_{-, \delta}$.

Todos los vértices en la gráfica $\mathcal{G}_{-, -}$ son vértices interiores, pues ningún vértice de paridad negativa puede ser frontera de un b -arco. Luego, por el Lema 3.6, $\mathcal{G}_{-, -}$ no puede contener vértices aislados, por lo que consiste sólo de componentes que son árboles. Sea T uno de ellos. Por el Lema 3.7 los puntos finales de \mathcal{G} deberán pertenecer a $L = \partial S$. Sea $\alpha \subset T$ una trayectoria que une dos puntos finales de T . Entonces la trayectoria α corta a algún D_j en dos discos, cuya frontera está formada por una trayectoria en $\mathcal{G}_{-, -}$ y un subarco de L , pero habíamos supuesto que ya no existían. Concluimos así que $\mathcal{G}_{-, -} = \emptyset$, y por ii) del Lema 3.5 llegamos a que no hay singularidades negativas, ni vértices de paridad negativa en la foliación de S .

Tomemos ahora un árbol $T_0 \subset \mathcal{G}_{+, +}$, y sea v un vértice final de T_0 . Al ser vértice final de $\mathcal{G}_{+, +}$ sabemos que en v^* solo hay un vértice de paridad positiva, pero ya vimos que S no tiene singularidades negativas, por lo que v tendrá valencia 1. Luego por el Lema 2.1, llegamos a que v es de tipo (a), por lo que podemos eliminarlo mediante una desestabilización, (Prop. 2.3). Repitiendo este proceso por cada vértice final que nos va apareciendo en lo que queda de T_0 , y cada árbol $T_i \subset \mathcal{G}_{+, +}$, llegamos a una gráfica $\mathcal{G}_{+, +}$ que contiene sólo vértices aislados.

Pero entonces, como $\mathcal{G}_{-, -} = \emptyset$, y $\mathcal{G}_{+, +}$ contiene sólo vértices aislados, por ii) del Lema 3.5, concluimos que no hay singularidades en la

foliación de S . Luego, cada vértice (aislado) de la foliación está conectado a L mediante un a -arco, por lo que cada disco D_j estará radialmente foliado, y por ello, el representante correspondiente es precisamente \mathcal{U}_n .

□

2. SUMA CONEXA Y ENLACES SEPARABLES

DEFINICIÓN 4.2. *Sea L un representante como cerradura de trenza del enlace separable \mathcal{L} . Diremos que L es separable como trenza si existe una esfera $S \subset S^3 \setminus L$ tal que ninguna de las dos componentes de $(S^3 \setminus L) \setminus S$ es una bola, y S intersecta a k en dos puntos.*

TEOREMA 4.3. *Sea L un representante como cerradura de n -trenza de un enlace separable. Entonces existe un representante de L , \tilde{L} , que es separable como trenza, y una sucesión finita de trenzas cerradas*

$$L = L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow \dots \rightarrow L_m = \tilde{L}$$

de manera que L_{j+1} se obtiene de L_j por medio de una isotopía en el complemento del eje k , o por una movida de intercambio.

DEMOSTRACIÓN. Tomemos S una esfera separante para L . Podemos considerar la foliación de S inducida por la fibración, aunque notemos que al ser una esfera, es un caso que tenemos que tratar con cuidado, pues hasta ahora estábamos considerando solo superficies cerradas incompresibles en $S^3 \setminus L$. Queremos lograr mediante una sucesión de los cambios de los ya estudiados, que S intersecte a el eje en solo dos puntos.

Supongamos primero que en la foliación de S existen c -curvas, y por tanto regiones ya sea de tipo (c, c) o de tipo (b, c) . Sea $\gamma = H_\omega \cap S$ una c -curva e igual que en la demostración del Lema (1.3), avancemos en la fibración y consideremos las c -curvas γ_t en que se va deformando γ hasta llegar a una hoja singular. Seguiremos llamando γ a la hoja singular correspondiente. Supongamos que hemos elegido a γ de manera que es de más adentro en la fibra singular H_ω , y sea $\Delta \subset H_\omega$ el disco del cual es frontera. Vista en S , la curva γ es frontera de dos discos, D_1 y D_2 , con los que podemos formar dos esferas $S_j = \Delta \cup D_j$. Podemos

asegurar con esto que $\Delta \cap L = \emptyset$, pues en caso contrario tendríamos que una componente de L corta a una de las esferas, digamos S_1 , en número impar de veces, lo cual es una contradicción puesto que L corta transversalmente y siempre en el mismo sentido al disco $\Delta \subset H_\omega$, y $(L \cap S_1) \subset (L \cap S) = \emptyset$. Además, al menos una de las esferas, digamos S_1 sigue separando componentes de L , pues en caso contrario, la esfera original no era separante, de modo que podemos quedarnos con S_1 y desechar S_2 . En este momento S_1 no satisface las condiciones de posición general que dimos al principio del trabajo, pero mediante una pequeña isotopía podemos lograrlo. Notemos que con este cambio hemos disminuido la cantidad de piezas en la teselación de tipo (b, c) o (c, c) . Repetimos el proceso ahora para una posible c -curva en la foliación de S_1 , y eventualmente llegamos a una esfera separante, que seguiremos llamando S , en cuya foliación no existen c -curvas.

La teselación de S consiste ahora solo de b -arcos y, posiblemente, singularidades de tipo (b, b) . Nuestro objetivo es llegar a una superficie en que no existan singularidades, y así, al estar foliada totalmente por b -arcos, tendremos que $S \cap k$ consiste solo de dos puntos: la frontera de cada b -arco. Para ello queremos efectuar cambios en la foliación y movidas de intercambio, y para efectuarlas debemos asegurar la existencia de piezas adyacentes del mismo signo, o vértices de valencia 2, tipo (b, b) y signo (\pm, \mp) . Para esto analizaremos la teselación de S con más cuidado.

Sabemos hasta ahora que la teselación de S consiste solo de piezas de tipo (b, b) , *i.e.* discos, marcados con 4 vértices, 4 aristas y una cara cada uno. Sean V , A , y C la cantidad de vértices, aristas y caras en la teselación de S . Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\chi(S) &= V - A + C \\ &= 2\end{aligned}$$

Pero cada arista pertenece exactamente a 2 caras, y cada cara tiene exactamente 4 aristas en su frontera, así que $A = \frac{4C}{2}$, de donde tenemos que

$$\begin{aligned}2 &= V - A + \frac{A}{2} \\ &= V - \frac{A}{2}\end{aligned}$$

De aquí que $2V - A = 4$. Sea V_i el número de vértices de valencia i en la teselación de S . Notemos que $V_1 = 0$, pues ya en la demostración del

Lema (2.1) vimos que es imposible que aparezcan vértices de valencia uno a partir de piezas de tipo (b, b) . Como tenemos sólo una cantidad finita de aristas, sabemos que existe una cota en las posibles valencias de los vértices. Podemos entonces contar todos los vértices en la teselación de S como

$$V = \sum_{j=2}^m V_j$$

Por otro lado, si contamos en cada vértice la cantidad de aristas que emanan de él, estaremos contando cada arista dos veces, de aquí que

$$2A = \sum_{j=2}^m jV_j.$$

Recordemos que $4 = 2V - A$. Jutando esto con lo anterior obtenemos

$$\begin{aligned} 8 &= 4V - 2A \\ &= 4 \left(\sum_{j=2}^m V_j \right) - \sum_{j=2}^m jV_j \\ &= \sum_{j=2}^m (4 - j)V_j \\ &= 2V_2 + V_3 + \sum_{j=5}^m (4 - j)V_j \end{aligned}$$

De modo que tenemos la igualdad

$$8 + \sum_{j=5}^m (j - 4)V_j = 2V_2 + V_3$$

donde cada lado es positivo. Con esto podemos afirmar que existe al menos un vértice de valencia 2 o 3. En caso que exista un vértice v de valencia 3, tenemos que dos regiones adyacentes son del mismo signo, por lo que podemos efectuar un cambio en la foliación (Prop. (2.1)). Notemos que en la demostración del caso que estamos usando (R_1 y R_2 regiones de tipo (b, b)) se vió que en este caso también se disminuye en uno la valencia de cada vértice involucrado. Así que ahora el vértice es de valencia 2 y tipo (b, b) . En caso que ambas regiones tengan el mismo signo, podemos volver a efectuar un cambio en la foliación, si son de signo contrario podemos aplicar ahora una movida de intercambio (Prop. (2.5)), y en cualquier caso estamos disminuyendo la valencia del vértice v , y al no poder haber de valencia uno (2.1), v tendrá que ser

de valencia cero. Hacemos lo anterior por cada vértice de valencia 3 o 2 que exista en la teselación de S , para convertirlo en uno de valencia cero. Pero la igualdad mostrada antes se vale en cada paso, de modo que al no haber vértices de valencia 2 ni 3, tampoco podrá haber de valencia más grande, *i.e.* todos los posibles vértices en la teselación de S serán de valencia cero. Pero si w es un vértice de valencia cero, entonces de él emanan b -arcos esenciales para cada fibra H_w , *i.e.* no hay singularidades en la foliación de S y solo podrá haber dos de tales vértices.

□

DEFINICIÓN 4.3. Sean L_1 y L_2 representantes como cerraduras de trenzas de los nudos \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 respectivamente. Diremos que L es la suma conexa trezada de L_1 y L_2 , si L es un representante de $\mathcal{L}_1 \# \mathcal{L}_2$, y existe una esfera $S \subset S^3$ que separa L_1 de L_2 , intersectando a L en dos puntos y al eje en dos puntos.

TEOREMA 4.4. Sean L_1 y L_2 dos trenzas cerradas y L un representante como cerradura de n -trenza de $L_1 \# L_2$. Entonces existe un representante de L , \tilde{L} , que es la suma conexa trezada de L_1 y L_2 , y una sucesión finita de trenzas cerradas

$$L = L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow \dots \rightarrow L_m = \tilde{L}$$

de manera que L_{j+1} se obtiene de L_j por medio de una isotopía en el complemento del eje k , o por una movida de intercambio.

DEMOSTRACIÓN. Igual que en el resultado anterior empezamos con una esfera S que intersecta L en dos puntos y realiza la composición de L_1 con L_2 . Notemos que de nuevo este caso no entra en lo estudiado anteriormente pues estábamos solo estudiando superficies cerradas contenidas en el complemento de L , mientras que aquí S intersecta a L en dos puntos. Debemos tener cuidado con la aplicación de los resultados anteriores, pero en general podremos hacerlo, pues solo hay dos puntos de intersección de S con L y podemos tener control sobre ellos.

Queremos encontrar una superficie isotópica a S , que siga realizando la composición de L_1 con L_2 pero tal que en su foliación no existan puntos singulares, *i.e.* que cada hoja sea un b -arco.

Comencemos por analizar las posibles c -curvas en la foliación. Supongamos que existen piezas de tipo (b, c) o (c, c) , y sea una $\gamma = S \cap H_w$ una c -curva que pertenece a una hoja singular H_w , como en la demostración del Lema (1.3) y el Teorema (4.3). Supongamos además

que γ es de más adentro en H_ω y llamemos $\Delta \subset H_\omega$ al disco con $\partial\Delta = \gamma$. La curva γ es frontera de dos discos en S , que llamaremos D_1 y D_2 . La diferencia de este caso con la demostración del Teorema (4.3) es que, en principio, puede suceder que $L \cap \Delta \neq \emptyset$. Sabemos que $S \cap L = \{p_1, p_2\}$, y para estos puntos existen las posibilidades siguientes:

- $\{p_1, p_2\} \subset D_1$
- $p_1 \in D_1, p_2 \in D_2$

En el primer caso notemos que la esfera $S_2 = \Delta \cup D_2$ no puede intersectar a L , pues en caso que $S_2 \cap L \neq \emptyset$, los posibles puntos de intersección deberán estar en $\Delta \subset H_\omega$. Pero entonces, el número de intersección algebraica de L con Δ sería distinto de cero, lo cual contradice el hecho de que L está en posición de trenza cerrada respecto al eje k . Podemos asegurar entonces que $\Delta \cap L = \emptyset$ y tomar como nuestra esfera a $S_1 = \Delta \cup D_1$. Esta deberá seguir siendo una que realice la composición de L_1 con L_2 , pues en caso contrario nuestra esfera original S no lo sería. Escogemos a S_1 como nuestra nueva esfera y seguimos adelante.

En el segundo caso necesariamente $L \cap \Delta \neq \emptyset$, pero la intersección consiste de solo un punto. Para ver esto basta ver que el número de intersección algebraica de L con cada S_j está dado por el número de puntos en que L corta a Δ menos el número de puntos en que L corta a D_j , y este último es 1. Como el resultado nos tiene que dar cero, tenemos que $|L \cap \Delta| = 1$. Al menos una de las dos esferas seguirá realizando la descomposición de S , y escogemos a esta para lo que sigue.

En cualquiera de los dos casos estamos disminuyendo en uno la cantidad de piezas de tipo (b, c) o (c, c) , y después de un número finito de veces llegamos a una esfera, que seguiremos llamando S , que sigue realizando la composición de L_1 con L_2 y en cuya teselación solo existen piezas de tipo (b, b) .

Necesitamos verificar ahora ahora las movidas realizadas en el Teorema (4.3) se siguen valiendo. Se sigue cumpliendo la igualdad

$$8 + \sum_{j=5}^m (j-4)V_j = 2V_2 + V_3$$

De modo que tenemos la existencia de un vértice de valencia dos o tres, pero necesitamos tener cuidado, pues en principio las piezas

involucradas en los cambios que queremos hacer pueden tener intersección no vacía con L . Llamemos una pieza R en la teselación (necesariamente de tipo (b, b)) *regular* si $R \cap L = \emptyset$. Necesitamos asegurar entonces la existencia de vértices de valencia 2 o 3 que pertenezcan a regiones *regulares*, un vértice de este tipo lo llamaremos regular también. Supongamos que los puntos $\{p_i, p_2\} = L \cap S$ no pertenecen a hojas singulares de la foliación. Entonces cada p_j corta a una región de tipo (b, b) en una de las 4 subregiones en que se ve cortada ésta por la hoja singular correspondiente. A una subregión pertenecen 2 vértices, y como habrá a lo más dos de dichas subregiones, podrán existir a lo más 4 vértices no regulares. De aquí que si $V_2 + V_3 \geq 5$, tenemos asegurada la existencia de un vértice regular de valencia 2 o 3, y podemos aplicar los cambios descritos en la demostración del Teorema (4.3) a las piezas involucradas y disminuir la cantidad de piezas en la teselación.

Supongamos ahora que $V_2 + V_3 \leq 4$. En particular tendremos que $V_2 \leq 4$ y la igualdad usada para concluir la existencia de vértices de valencia 2 o 3 nos dice que

$$2V_2 + V_3 \geq 8$$

por lo que de no haber vértices regulares de valencia 2 o 3 estaremos en el caso muy particular en que $V_2 = 4$, $V_3 = 0$, y por tanto $V_j = 0$ para $j \geq 4$. Lo que nos dice esto es que solo habrá dos piezas en la teselación de S , necesariamente de signo contrario, (1), y 4 vértices necesariamente no regulares. Pero entonces podemos ver que el encaje de la superficie nos da una esfera (ver figura (1)) y un subdisco es exactamente como en la demostración de la Proposición (2.4), por lo que después de una movida de intercambio llegamos precisamente a que la foliación de S contiene sólo dos vértices y al no tener singularidades, es la esfera que buscábamos.

□

DEFINICIÓN 4.4. Sea $L \subset S^3$ un enlace. Definimos $B(L)$ como el mínimo índice n para el que L se puede encajar como la cerradura de una n -trenza.

COROLARIO 4.2. Sean $L_1, L_2 \subset S^3$ dos enlaces, entonces

$$B(L_1 \# L_2) = B(L_1) + B(L_2) - 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que L_1 y L_2 son representantes como trenzas cerradas de índice $n_1 = B(L_1)$ y $n_2 = B(L_2)$ respectivamente. A partir de L_1 y L_2 podemos obtener un representante de índice

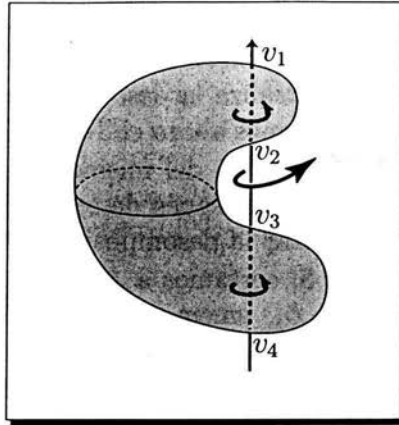


FIGURA 1. La esfera encajada con sólo 4 vértices.

$n_1 + n_2 - 1$ de la manera siguiente: colocamos L_1 al lado de L_2 con ejes paralelos k_1 y k_2 . Podemos suponer que todo el trenzado de L_1 aparece lejos de L_2 , y viceversa, en el sentido de que vemos, lado a lado n_1 arcos parelos a n_2 arcos. A partir de aquí efectuamos la suma conexas de L_1 con L_2 usando los arcos que nos han quedado más afuera, ver figura 2. Tomamos ahora como nuevo eje a k , paralelo a k_j y en medio de k_1 y k_2 . Hacemos que los $n_1 - 1$ arcos de L_1 se encuentren en posición de trenza cruzando trivialmente a k . Hacemos lo mismo con los $n_2 - 1$ arcos que vienen de L_2 , pasando por encima de los arcos que vienen de L_1 . La trenza resultante se muestra en la figura 2 y es de índice $n_1 + n_2 - 1$.

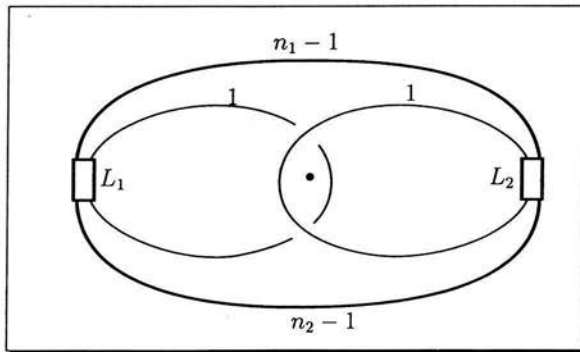


FIGURA 2. $L_1 \# L_2$ de índice $n_1 + n_2 - 1$.

Supongamos ahora que existe L , un representante como cerradura de trenza de $L_1 \# L_2$, de índice $m < n_1 + n_2 - 1$. Sea S una esfera que corta a L en dos puntos y realiza la descomposición de L como suma conexa de L_1 con L_2 . Aplicamos ahora el Teorema 4.4 y obtenemos un nuevo representante \tilde{L} de $L_1 \# L_2$ del mismo índice, pues los cambios descritos en 4.4 no lo altera. Después de los cambios obtenemos una esfera que además de realizar la descomposición de L_1 con L_2 , toca al eje k en sólo dos puntos. Si cortamos a \tilde{L} por esta esfera, para volver a obtener los dos enlaces L_j , tenemos que al menos uno de ellos deberá ser de índice menor que n_j , lo cual es una contradicción, pues habíamos supuesto precisamente que $B(L_j) = n_j$.

□

LEMA 4.1. *Sea K un representante como cerradura de trenza de un nudo y U un representante como cerradura de trenza del nudo trivial. Llamemos $K \# U$ a la suma conexa de trenzada de K y U . El teorema de Markov es válido para $K \# U$ y K .*

DEMOSTRACIÓN. Sean F y D superficies de Markov para los nudos F y U . Al ser U el nudo trivial tenemos que D es un disco. Entonces la superficie dada por la suma conexa de ellas, $F \# D \simeq S$ es una superficie de Markov para el nudo $K \# U$.

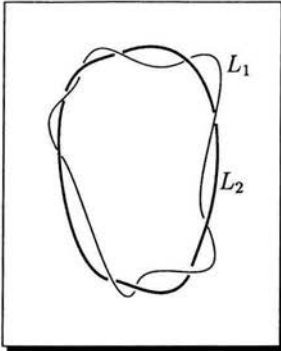
Podemos aplicar el Teorema (4.4) y encontrar una esfera S que realice la descomposición de la suma conexa de K con U , y que sólo tenga dos puntos de intersección con k . Pero entonces estamos viendo al nudo trivial, podemos suponer que también su superficie, el disco D ; de un lado de S y luego lo podemos encajar de manera trivial. Al tenerlo así, aplicamos una desestabilización, eliminando el nudo trivial y el disco.

□

3. EL TEOREMA DE MARKOV PARA NUDOS

LEMA 4.2. *Sean L_1 y L_2 dos trenzas cerradas. Supongamos que L_2 es una longitud preferente de L_1 . Entonces se cumple el teorema de Markov para L_1 y L_2*

DEMOSTRACIÓN.



Sean L_1 y L_2 dos trenzas cerradas con L_2 una longitud preferente de L_1 . Sabemos que existe una superficie de Seifert $S \subset S^3$ con $S \cap \partial N(L_1) = L_2$. Supongamos además que S es de género mínimo. Sea $A \subset S$ el anillo con $\partial A = L_1 \cup L_2$. Notemos que como L_2 es también una trenza cerrada, tiene la misma orientación que L_1 , por lo que la curva orientada que es parte de ∂S es $-L_2$.

Vamos a analizar el comportamiento de L_2 al cortar las piezas de la teselación de S , para ello examinaremos todas las posibilidades en cada una de las piezas de la teselación de S , estas se muestran enumeradas en la figura (3).

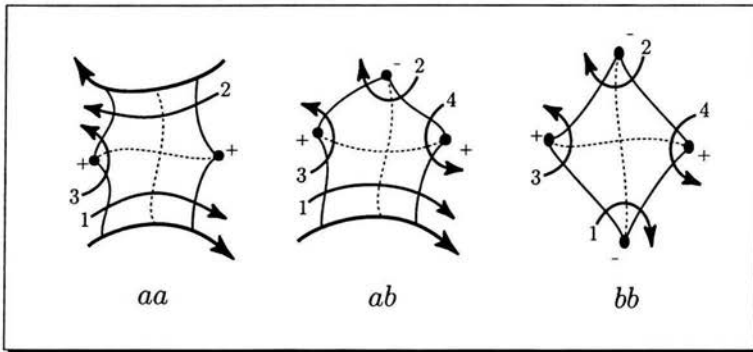


FIGURA 3. Intersecciones de A con las piezas de la teselación.

Al tener la misma orientación que L_1 , vemos que si recorremos L_2 , el anillo A nos queda siempre a la derecha, mientras que si recorremos L_1 nos queda siempre a la izquierda, de aquí que no pueden aparecer de los 4 tipos de arcos en una sola pieza. De modo que si R es una pieza de la teselación de S y su intersección con L_2 tiene más de una componente, entonces la intersección consiste exactamente de dos arcos y estos deberán ser, o bien de tipo 1) y 2), o bien de tipo 3) y 4). Además, en una pieza de tipo (a, a) no puede haber arcos de tipo 3) y 4) pues

los subarcs de las hojas singulares, serían dos curvas propiamente encajadas en el anillo A , cada uno con frontera en la misma componente de ∂A , intersectándose en un solo punto, lo cual es imposible.

Las posibilidades entonces se reducen a 11 casos posibles: 2 para piezas de tipo (a, a) , 5 para piezas de tipo (a, b) y 4 para piezas de tipo (b, b) . Estos casos se muestran en las figuras (4), (5) y (6), donde el área sombreada representa la porción de A en la pieza respectiva.

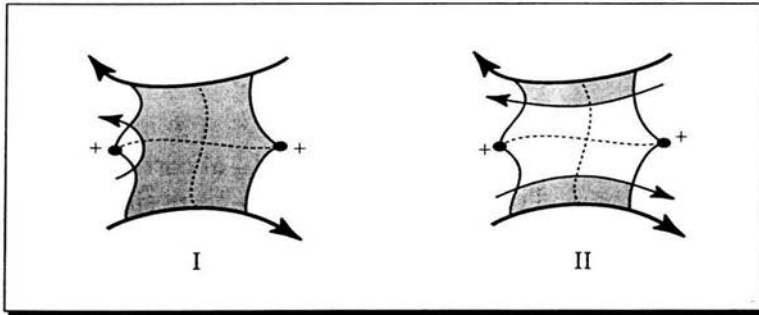


FIGURA 4. Intersección de A con una pieza de tipo (a, a) .

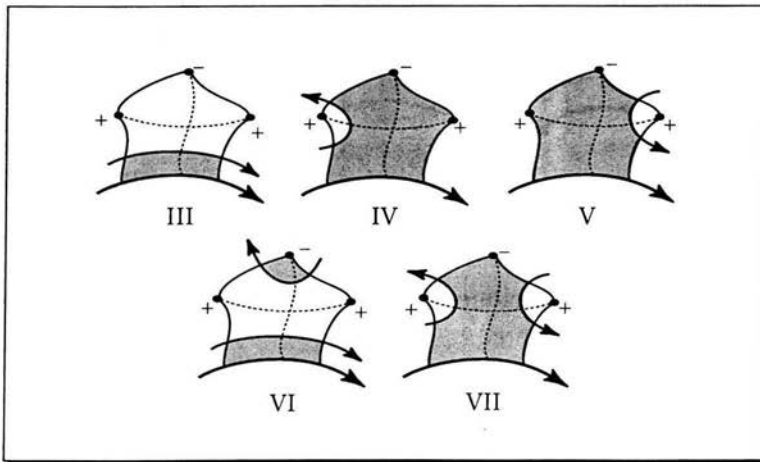


FIGURA 5. Intersección de A con una pieza de tipo (b, b) .

En las piezas de tipo IV, V y VII, podemos efectuar estabilizaciones (Prop. (2.2)), de modo que la isotopía involucre solo al anillo

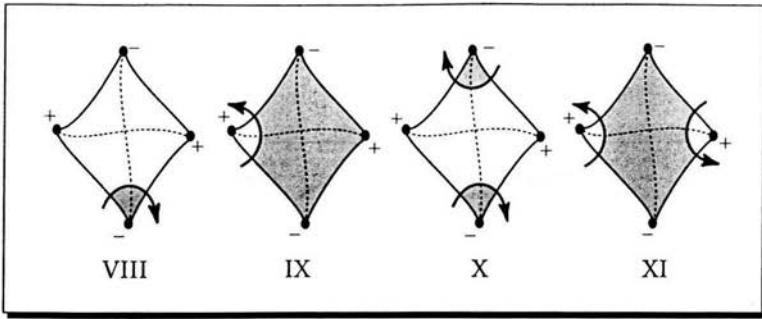


FIGURA 6. Intersección de A con una pieza de tipo (b, b) .

A . Podemos caracterizar estas piezas como aquellas en las que hay un subarco de una hoja singular que conecta un vértice de paridad negativa con L_1 , dentro de A . Al hacer las estabilizaciones es posible que nos aparezcan nuevas piezas con estas características, pero como en cada paso estamos disminuyendo en uno la cantidad de vértices de paridad negativa en A , llega un momento en que hemos eliminado todas las piezas que contienen un subarco de una hoja singular que conecta un vértice negativo con L_1 .

Después de efectuar todas las estabilizaciones anteriores podemos asegurar que no hay vértices negativos en A , pues notemos que de las piezas restantes que contienen vértices negativos (tipos VI, VIII, IX, X y XI) solo la de tipo VI tiene intersección no vacía con L_1 ; y cualquier acomodo entre ellas nos daría una componente cerrada de L_2 , pero estamos suponiendo que es un nudo, por lo que esto no es posible.

Pero entonces los únicos vértices que restan dentro de A serán positivos (piezas de tipo I, II y III). Consideremos ahora la gráfica $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{+,+} \cup \mathcal{G}_{+,-}$, y sea $v \in \mathcal{G} \setminus A$ un vértice positivo que pertenece a una pieza R de tipo I. A partir de v , recorramos un camino en $c \subset \mathcal{G}$, donde el siguiente vértice pertenece a A . Será imposible que c vuelva a salir de A , pues si este fuera el caso, c junto con un subarco de L_2 sería frontera de disco, lo cual es imposible pues en principio, en R , vemos que L_1 está a ambos lados de c . Esto muestra que c debe tener un punto final en A , *i.e.* un vértice de valencia uno. Podemos eliminar dicho vértice por medio de una desestabilización, Prop. (2.3). Repetimos el proceso por cada punto final que nos va surgiendo, hasta que llega el momento en que la pieza R desaparece (ver figura (7)). Eliminamos de este modo todas las piezas de tipo I, y concluimos que en la teselación

de A hay solo piezas de tipo II y III. Pero esto significa que, como trenzas cerradas, los nudos L_1 y L_2 son el mismo.

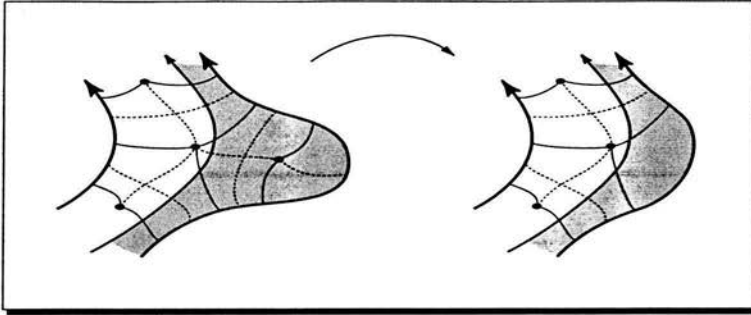
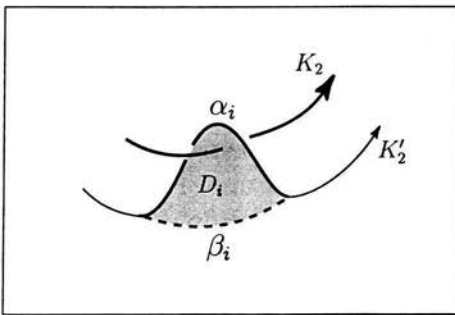


FIGURA 7. Desestabilización en el anillo A .

□

TEOREMA 4.5. Sean K_1 y K_2 dos representantes como cerraduras de trenza del mismo nudo. Entonces K_2 se puede obtener a partir de K_1 efectuando isotopías en el complemento del eje, un número finito de estabilizaciones y un número finito de desestabilizaciones.

DEMOSTRACIÓN. Podemos suponer que tenemos encajados K_1 y K_2 en \mathbb{R}^3 de manera que existe un plano Σ que los separa, quedando K_2 encima de Σ , y K_1 debajo de Σ . Tomemos S_2 una superficie de Seifert para K_2 y sea K'_2 la longitud preferente para K_2 dada por S_2 , i.e. $K_2 = F_2 \cap \partial N(K_2)$. Por el lema anterior, podemos suponer que después de efectuar una cantidad finita de estabilizaciones y desestabilizaciones, K'_2 es una trenza cerrada que vive en una vecindad anular de K_2 .



Podemos suponer además que K'_2 permanece *debajo* de K_2 a excepción de donde tiene que cruzar *encima* de K_2 , y que en estos cruces existe un disco D_i con $\partial D_i = \alpha_i \cup \beta_i$, donde α_i es un arco de K'_2 (la parte de K'_2 que pasa por encima de K_2), y β_i es un arco que permanece debajo de K_2 (ver figura).

Supondremos además que existe un plano Π que separa a K_2 de K'_2 , con $K_2 \subset \mathbb{R}^3_+$, $K'_2 \setminus \{\alpha_i\} \subset \mathbb{R}^3_-$, y $\alpha_i \cap \Pi = \{p_i, q_i\}$, donde \mathbb{R}^3_{\pm} son los semiespacios delimitados por Π .

Si empujamos los arcos α_i a través de los discos D_i , para reemplazarlos por los arcos β_i , obtenemos un nuevo representante del mismo nudo. Llamemos a este K''_2 . Podemos suponer además que K''_2 también está en posición de trenza cerrada, *i.e.* los arcos β_i los escojemos transversales a la fibración. El plano Π corta a cada disco D_i en dos discos que llamaremos D_i^{\pm} , de acuerdo al semiespacio en que viven (ver figura (8)).

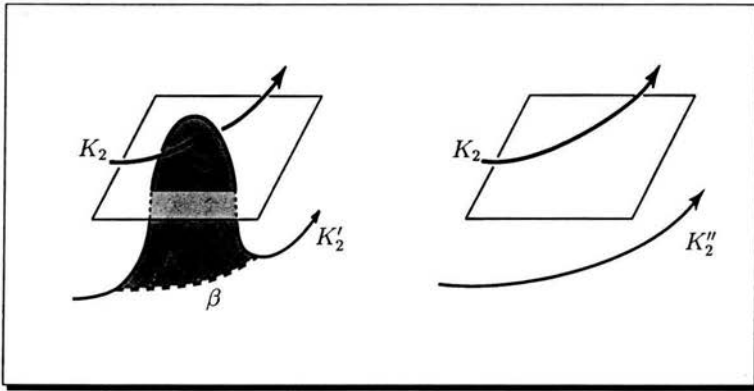


FIGURA 8. Los discos D_i^{\pm} y el nudo K''_2 .

Si denotamos por $K_1 \sim K_2$ el que K_2 se pueda obtener a partir de K_1 por medio de movidas como las descritas en el enunciado del teorema, tenemos hasta ahora que $K''_2 \sim K'_2 \sim K_2$. Por otro lado, como K_2 y K_1 representan el mismo nudo, sabemos que existe un homeomorfismo (isotópico a la identidad)

$$H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

tal que $H(K''_2) = K_1$

Pero como $K_1, K''_2 \subset \mathbb{R}^3_+$, podemos suponer que

$$H|_{\Pi} = I$$

y $H|_{\mathbb{R}^3_+} = I$

Vamos a seguir los discos $\{D_i\}$ al aplicar el homeomorfismo H . Hagamos

$$\begin{aligned} e_i &= H(D_i^-) \\ E_i &= e_i \cup D_i^+ \\ \beta'_i &= H(\beta_i) \subset K_1 \end{aligned}$$

Estos nuevos discos se muestran en la figura (9).

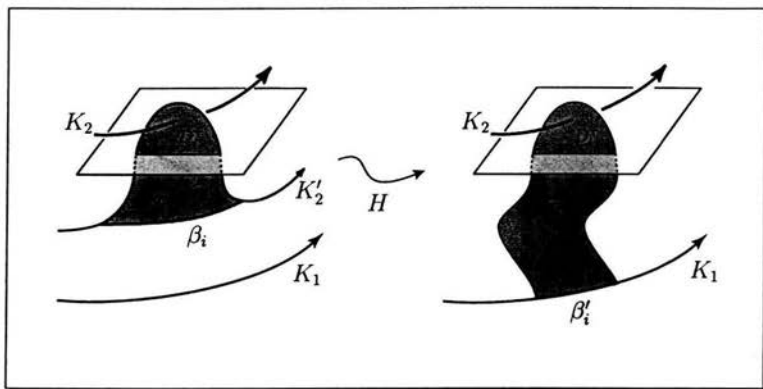


FIGURA 9. Los discos e_i y E_i .

Como $D_i \cap D_j = \emptyset$ para $i \neq j$, y H es un homeomorfismo, tenemos que $e_i \cap e_j = \emptyset$, $E_i \cap E_j = \emptyset$ también, para $i \neq j$. Hagamos ahora

$$K_3 = (K_1 \setminus \{\beta'_i\}) \cup \{\partial E_i \setminus \beta'_i\}$$

Tenemos entonces que

$$H^{-1}(K_2 \cup K_3) = K_2 \cup K_2'$$

por lo que el enlace $K_2 \cup K_3$ es del mismo tipo que el enlace $K_2 \cup K_2'$. Podemos concluir entonces que K_3 es una longitud preferente de K_2 , pues recordemos que K_2' lo es. Tenemos además que K_3 es la suma conexa de K_1 con n copias del nudo trivial: las fronteras de los discos E_i , luego, por el teorema (4.4) tenemos que $K_3 \sim K_1$.

Si sucede que K_3 está en posición de trenza cerrada, lo cual no es el caso general, hemos terminado, pues

- Al ser K_3 la suma conexas de K_1 con n copias del nudo trivial, por el Lema 34, tenemos que $K_1 \sim K_3$.
- El nudo K_3 una longitud preferente para K_2 , pero también podemos considerar que K_2 es una longitud pferente de K_3 . Sea F_3 una superficie de Seifert para K_3 . Podemos suponer entonces que $K_2 \subset F_3$, y luego, por el Lema 4.2 tenemos que $K_3 \sim K_2$

Concluimos así que

$$K_1 \sim K_3 \sim K_2$$

En el caso más general sucederá que K_3 no es isotópico en el complemento del eje a una trenza cerrada, pues puede ocurrir que los arcos $\partial e_i \setminus \beta \cup \beta'_i$ no sean transversales a la fibrición. Para terminar la demostración nos falta solo *reacomodar* K_3 de modo que este en posición de trenza cerrada respecto al eje que ya tenemos. Este reacomodo es siempre posible, [A1], y lo logramos empujando segmentos de K_3 (los que no son transversales a la fibrición) a través de discos que no tocan K_2 , e intersectan al eje de la trenza en un punto. De modo que después de efectuadas las isotopías el enlace formado por K_2 y K_3 es del mismo tipo que antes. Pero ahora K_3 sí está en posición de trenza cerrada y podemos aplicar el argumeto anterior, quedando demostrado el teorema.

□

Bibliografía

- [Al] J. W. Alexander. A lemma on systems of knotted curves. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 9 (1923), 93-95.
- [BF] J. Birman, E. Finkelstein. Studying surfaces via closed braids. Journal of Knot Theory and its Ramifications, Vol 7, No. 3 (1998) 267-334.
- [BM1] J. Birman, W. Menasco. Studying links via closed braids I: A finiteness theorem. Pacific Journal of Mathematics 134 (1992), 17-36.
- [BM2] J. Birman, W. Menasco. Studying links via closed braids IV: composite links and split links. Inventiones Mathematicae 102, Fasc. 1 (1990) 115-139.
- [BM3] J. Birman, W. Menasco. On Markov's Theorem. KNOTS 2000 Korea, Vol 1. Journal of Knot Theory and its Ramifications, Vol 11, No. 3 (2002) 295-310.
- [BM4] J. Birman, W. Menasco. Stabilization in the braid groups I: MTWS. Preprint.
- [F] E. Finkelstein. Closed incompressible surfaces in closed braid complements. Journal of Knot Theory and its Ramifications, Vol 7, No. 3 (1998) 335-379.
- [M] A. A. Markov. Über die freie Äquivalenz geschlossener Zöpfe. Recueil Mathématique Moscou, 1 (1935), 73-78.
- [No] T. Nowik. Intersection of Surfaces in 3-manifolds. Topology and its Applications 92 (1999), 15-61.