



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESPECTRO TRANSVERSO DE PIONES PARA RAPIDEZES  
FUERA DE LA CENTRAL EN COLISIONES DE IONES PESADOS  
RELATIVISTAS

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

**F I S I C O**

P R E S E N T A :

**RICARDO HUGO ROBLES SILVA**



FACULTAD DE CIENCIAS  
UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSE ALEJANDRO AYALA MERCADO

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR

2004



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA**



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AVENIDA LE  
MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Robles Silva  
Ricardo Hugo  
FECHA: 16 - Feb - 94  
FIRMA: [Firma]

**ACT. MAURICIO AGUILAR GONZÁLEZ**  
**Jefe de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Espectro transverso de piones para rapidezces fuera de la central en colisiones de iones pesados relativistas"

realizado por Robles Silva Ricardo Hugo

con número de cuenta 09304499-2 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis	
Propietario	Dr. José Alejandro Ayala Mercado
Propietario	Dr. Luis Manuel Montaña Zetina
Propietario	Dr. Fernando Matias Moreno Yntriago
Suplente	Dr. Genaro Toledo Sánchez
Suplente	Dr. Eleazar Cuautle Flores

*[Firma]*  
*[Firma]*  
*[Firma]*  
*[Firma]*

Consejo Departamental de Física

*[Firma]*  
**DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE**  
Coordinadora de Licenciatura de Ciencias  
FACULTAD DE CIENCIAS  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

*A María,  
mi compañera del alma.*

*A mi madre,*

*A Toñito,*

*A Lucy.*

*Ahora las más pequeñas partículas de la materia se adhieren mediante las más fuertes atracciones, y componen partículas más grandes de virtud más débil; y muchas de estas pueden adherirse y componer partículas más grandes cuya virtud es aún más débil y así sucesivamente en diversas etapas hasta que la progresión termina en las partículas más grandes de las que dependen las operaciones de la química y los colores de los cuerpos naturales, y que adhiriéndose a su vez, componen cuerpos de magnitud apreciable. Existen así agentes en la naturaleza capaces de hacer que las partículas de los cuerpos se adhieran por muy fuertes atracciones. Y encontrarlas es la tarea de la filosofía experimental..*

*Isaac Newton, Optica.*

## Prefacio

El estudio de las propiedades de la materia nuclear bajo condiciones extremas de densidad y de temperatura es uno de los temas que se encuentran en la frontera de los conocimientos en la física teórica y experimental. Tal estudio es de gran importancia ya que representa la posibilidad de entender un comportamiento que hoy en día después de largos esfuerzos, tanto de físicos teóricos como experimentales, no se ha logrado entender completamente.

Se calcula que el tiempo transcurrido desde el Big-Bang hasta nuestros días es de unos  $10^{18}$  s. Podemos entonces remontarnos al pasado y preguntarnos acerca de las condiciones que prevalecieron poco después del Big-Bang. Si pensamos que toda la materia en el universo fue creada durante el Big-Bang, las condiciones de densidad y de temperatura en el pequeño volumen que ocupaba el universo debieron ser tales que la energía cinética de las partículas, en particular de los quarks y gluones, era tan alta y éstos estaban tan cerca unos de otros que la interacción fuerte no podía ser capaz de mantener a estas partículas confinadas dentro del volumen de un hadrón. Por consiguiente, estos quarks y gluones debieron encontrarse libres, es decir, eran capaces de desplazarse a distancias mayores comparadas con las dimensiones de un hadrón. Conforme el universo se expandió y enfrió, la temperatura y densidad cayeron por debajo de valores críticos permitiendo que la interacción fuerte confinara a los quarks y gluones dentro de los hadrones.

En la actualidad es posible realizar este viaje al pasado y reproducir las condiciones de densidad y temperatura prevalecientes en el universo fracciones de segundo después del Big-Bang mediante las colisiones de núcleos pesados a altas energías. En este tipo de reacciones se comprime la materia nuclear ordinaria inyectándose una enorme cantidad de energía en un volumen de las dimensiones de un núcleo atómico. La expectativa es que los protones y neutrones se disuelvan formando el Plasma de Quarks y Gluones. Aún si este plasma no se llegara a formar será muy importante entender cuales son los procesos que dominan el comportamiento de la materia cuando se le ha sometido a las condiciones extremas ya mencionadas.

La información básica de la dinámica de las reacciones en las colisiones de iones pesados relativistas proviene de los espectros de masa y momento transversos. En este trabajo estudiamos a los piones ya que éstas son las partículas que se producen mas abundantemente durante las colisiones y además una característica muy importante es que sus espectros de momento presentan un aumento a momento transverso alto y bajo. De tal modo que no es posible modelar estos espectros con una simple función exponencial.

Con esta motivación presentamos un modelo de piones que incorpora efectos de un sistema finito que es descrito como un líquido de piones. Se considera una temperatura efectiva con una componente cinética y otra asociada a la temperatura del sistema. También se considera un potencial químico no nulo.

En el capítulo 1 presentamos un breve repaso de la física de partículas elementales



y también presentamos una introducción al estudio de la cinemática de las colisiones de iones pesados relativistas. En el capítulo 2 se describe un modelo esférico de piones que es el fundamento de este trabajo de tesis. Posteriormente en el capítulo 3 se calcula el espectro de piones desde una región de rapidez central. Aquí se incluyen los efectos de expansión hidrodinámica introduciendo un flujo transversal y considerando que no existe flujo longitudinal. Por último, en el capítulo 4 se describe el trabajo central de esta tesis. Aquí presentamos un modelo cilíndrico con el que se calculan espectros de piones producidos en una región de rapidez fuera de la central y que considera tanto flujo transversal como flujo longitudinal.

## Agradecimientos

Agradezco profundamente a mi madre por todo el amor, cariño y comprensión recibidos durante mi vida, por la maravillosa educación que me inculcó y por todo, absolutamente todo.

Agradezco a mis hermanas Genoveva, Leticia y Mary por apoyarme siempre que lo necesité y por aguantarme, también a mi hermano Toño le agradezco su cariño, su apoyo, sus consejos y sus canciones. Agradezco a Mario Delgado, Lupita, Jesus. A todos mis sobrinos y los miembros de mi familia que estuvieron y han estado conmigo, les agradezco todos los momentos bonitos que pasamos.

A María Andrea le agradezco todo su amor, toda su ayuda durante estos años. Gracias por estar, por ser mi equipo, siempre. Gracias por ayudarme a arreglar el mundo.

Quiero agradecer de forma muy especial al Dr. Alejandro Ayala por haber dirigido esta tesis, por todo lo que he aprendido con él, por toda la paciencia, por ocuparse en mi y por motivarme en todos los aspectos. Muchas Gracias Alejandro.

Agradezco al Dr. Matías Moreno, al Dr. Luis Manuel Montaña, al Dr. Eleazar Cuautle y al Dr. Genaro Toledo por haber aceptado formar parte del comité y por ayudarme a perfeccionar esta tesis con sus comentarios y sugerencias.

Quiero agradecer a mis maestros de la facultad de ciencias: Alberto Sánchez, Marcos Ley Koo, Manuel Torres, Mirna Villavicencio y Armando Ortiz por todo el conocimiento que me brindaron.

Agradezco al Fis. Antonio Ramírez Fernández por su valiosa ayuda para realizar programas de computo y por todo su tiempo dedicado incondicionalmente.

Agradezco a la UNAM por la formación que me ha brindado en todos los aspectos. A mis compañeros de la facultad: Julian K Montiel, Emanuel Morlet, Octavio Rico, Alberto Bravo y a Eduardo Caralampio. Gracias por haber estado siempre conmigo y gracias por todos los momentos de alegría que me han regalado.

Gracias a mis amigos los norteños Benjamin Morales, Félix González, Eduardo Peinado y a mi tocayo Ricardo Romero. Por sus valiosos consejos, por la ayuda brindada siempre que lo he necesitado y por que son muy buenas personas.

A Enrique Castro, Xenia Mendoza y Felipe Quintana que me apoyaron cuando esta tesis solo era un sueño.

A todos y cada uno de los miembros de la Familia Ramone.

Agradezco a la Fam. Gutiérrez Campos y la Fam. Chavarin especialmente a mi amigo Oscar Chavarin, su apoyo, su amistad, gracias por escucharme cada que lo necesito.

Apoyo parcial para la realización de éste trabajo ha sido recibido por la DGAPA con fondos del PAPIIT proyecto No. IN108001.

# Índice general

<b>1. Partículas elementales y colisiones de iones pesados</b>	<b>2</b>
1.1. Partículas elementales . . . . .	2
1.2. Física de colisiones de iones pesados relativistas . . . . .	11
1.3. Régimen Transparente y de Frenado . . . . .	13
1.4. Desacoplo . . . . .	14
1.5. Cinemática de colisiones de iones pesados relativistas . . . . .	15
1.5.1. Sistema coordinado . . . . .	15
1.5.2. Rapidez . . . . .	16
<b>2. Modelo de líquido de piones</b>	<b>19</b>
2.1. Descripción del modelo . . . . .	19
2.2. Cálculo de la temperatura crítica . . . . .	20
2.3. Cálculo de la distribución de momento transverso. . . . .	21
<b>3. Modelo de líquido de piones con expansión</b>	<b>29</b>
3.1. Descripción del modelo . . . . .	29
3.2. Cálculo de la distribución de momento . . . . .	33
3.3. Discusión sobre los espectros calculados . . . . .	34
<b>4. Modelo con simetría cilíndrica para rapidez fuera de la central</b>	<b>39</b>
4.1. Descripción del modelo . . . . .	39
4.2. Solución de la ecuación de Klein-Gordon . . . . .	41
4.3. Cálculo de la distribución de momento . . . . .	45
4.4. Sistemática de la distribución . . . . .	46
<b>5. Conclusiones</b>	<b>52</b>

# Capítulo 1

## Partículas elementales y colisiones de iones pesados

### 1.1. Partículas elementales

La visión profunda de los procesos naturales que nos proporciona hoy la ciencia moderna y en especial la física es, en el fondo, el triunfo del pensamiento racional iniciado por los filósofos griegos. A esta racionalidad se incorporó hace unos 500 años, con Galileo, la metodología de la ciencia moderna. Este método consiste en plantear preguntas específicas a la naturaleza y responderlas mediante la realización de experimentos.

Desde principios del siglo XX la teoría de la mecánica cuántica, y la teoría de la relatividad, nos han brindado la posibilidad de entender la estructura de los átomos. La investigación en física fundamental se ha especializado aproximadamente desde la década de los cincuentas en el estudio de las componentes más pequeñas de la materia: las partículas elementales. Concretamente, a partir de la década de los sesentas, se han hecho diversos descubrimientos importantes e interesantes en la física de altas energías o física de partículas elementales. Hoy en día esta rama de la física parece estar muy cerca de dar un gran salto hacia adelante en el estudio de la realidad que nos rodea.

En los laboratorios de altas energías se aceleran partículas a energías tan grandes que éstas se mueven *casi* a la velocidad de la luz sin alcanzarla ya que de acuerdo con la relatividad especial, la velocidad de una partícula tiene que ser siempre menor que la velocidad de la luz. Las partículas aceleradas colisionan contra un blanco que puede ser un trozo de un material específico u otra partícula que también haya sido acelerada. En colisiones de esta naturaleza ocurren reacciones muy complicadas y es la misión del físico experimental averiguar lo que sucede realmente en una colisión de estas características.

Hoy sabemos que existen 4 interacciones fundamentales en la naturaleza: la interacción gravitacional, la electromagnética, la débil y la interacción fuerte. La interacción fuerte es la responsable de la formación de los núcleos atómicos y es aproxima-

damente 100 veces más intensa que la electromagnética, cuya intensidad se describe mediante la constante de estructura fina  $\alpha_e$ . Pero, ¿por qué en la vida cotidiana no experimentamos los efectos de esta fuerza fuerte así como experimentamos los efectos de la fuerza electromagnética?. La respuesta se encuentra en una propiedad interesante de la interacción fuerte, que se refiere a que es una “interacción de corto alcance”, lo cual nos dice que la interacción fuerte sólo se hace presente a una distancia de aproximadamente 1 fm ( $10^{-15}$  m). El alcance limitado impide que sus efectos se manifiesten de forma macroscópica tal y como sucede con la interacción electromagnética o con la gravitacional, las cuales tienen un alcance infinito.

Interacción	Rango	Constante de Acoplamiento
Fuerte	1 fm	1
Electromagnética	$\infty$	$10^{-2}$
Débil	$1/M_W$	$10^{-6}$
Gravitacional	$\infty$	$10^{-39}$

Tabla 1.1: Interacciones fundamentales [1]

En la física de partículas elementales, la clasificación más general de éstas se hace de acuerdo al spin de las partículas: las partículas con spin semientero son conocidas como Fermiones, en honor al físico italiano Enrico Fermi, y tienen la característica de que la función de onda que los describe es antisimétrica ante el intercambio de partículas y además obedecen el principio de exclusión de Pauli. A las partículas que tienen spin entero se les conoce como Bosones y son los mediadores de las interacciones. Entre los bosones se encuentra el fotón, 8 gluones, los bosones  $W^\pm$  y  $Z^0$  y el supuesto gravitón (Tabla 1.2). La función de onda que los describe es simétrica ante el intercambio de partículas.

Bosón	Spin	Masa	Vida media	Carga eléctrica
Fotón ( $\gamma$ )	1	0	estable	0
$W^\pm$	1	80.4 GeV	$10^{-25}$ s	$\pm 1$
Z	1	91.19 GeV	$10^{-25}$ s	0
Gluón (g)	1	0	estable	0

Tabla 1.2: Algunas propiedades de los bosones mediadores [1]

Los Fermiones constituyen a la materia y se dividen en *leptones* y *hadrones*. Los leptones son 6 partículas elementales y sus respectivas antipartículas (ver Tabla 1.3), mientras que los hadrones no son partículas elementales ya que tienen estructura interna y se dividen en mesones y bariones. Los bariones están compuestos por tres quarks mientras que los mesones sólo de pares de quark-antiquark. Los quarks a su vez, están divididos en 6 diferentes sabores (*Up*, *Down*, *Strange*, *Charm*, *Top* y *Bottom*) y cada sabor de quark puede presentarse en tres diferentes tipos (Tabla 1.4).

A esta propiedad se le llama el “color”, propiedad que dio origen a una nueva rama de la física de partículas elementales que es la Cromodinámica Cuántica. El color aquí mencionado no tiene nada que ver con los colores que conocemos en nuestra vida diaria sino con sus propiedades cuánticas, más adelante se hablará sobre este concepto con más detalle.

Nombre	Masa	Vida media	Carga
Electrón ( $e^-$ )	0.511 MeV	estable	-1
Muón ( $\mu^-$ )	105.6 MeV	$2 \times 10^{-5}$ s	-1
Tau ( $\tau^-$ )	1.777 GeV	$3 \times 10^{-13}$ s	-1
Neutrino $e$ ( $\nu_e$ )	$< 3$ eV	estable	0
Neutrino $\mu$ ( $\nu_\mu$ )	$< 0.17$ MeV	estable	0
Neutrino $\tau$ ( $\nu_\tau$ )	$< 18$ MeV	estable	0

Tabla 1.3: Propiedades de los Leptones [1]

Nombre	Masa	Vida media	Carga
Up ( $u$ )	$\approx 5$ MeV	estable	2/3
Down ( $d$ )	$\approx 10$ MeV	variable	-1/3
Strange ( $s$ )	$\approx 100$ MeV	variable	-1/3
Charm ( $c$ )	$\approx 1.5$ GeV	variable	2/3
Bottom ( $b$ )	$\approx 4.7$ GeV	variable	-1/3
Top ( $t$ )	$\approx 170$ GeV	variable	2/3

Tabla 1.4: Algunas propiedades de los Quarks [1]

Si consideramos el espectro de los hadrones, notaremos que existen partículas que pueden ser muy semejantes entre sí en algunas de sus propiedades, aunque en otras sean muy diferentes, como es el caso del protón y del neutrón. Ambos tienen spin  $1/2$ , número bariónico  $+1$  y sus masas son casi iguales aunque el neutrón es un poco más pesado que el protón. Considerando lo anterior, a algunos físicos se les ocurrió la idea de que tal vez la interacción fuerte no distingue entre un neutrón y un protón, es decir, la interacción fuerte es simétrica ante el intercambio de protones y neutrones. A esta invariancia se le dio el nombre de *isospin*. Si la simetría de isospin tiene algún sentido entonces uno podría esperar que los hadrones sean clasificados en distintos conjuntos en los cuales todos tengan el mismo spin, el mismo número bariónico y masas similares, pero cargas eléctricas distintas ya que la interacción electromagnética no respeta la simetría de isospin. Un ejemplo de estos conjuntos son los *multipletes* de isospin como el de los mesones  $\pi^0, \pi^+, \pi^-$  que se muestra en la figura 1.1. Junto con este multiplete existen otros como el grupo de partículas  $\Lambda$ , o los mesones  $\rho$ , que son partículas más pesadas que los piones (ver Tabla 1.5). Parecería

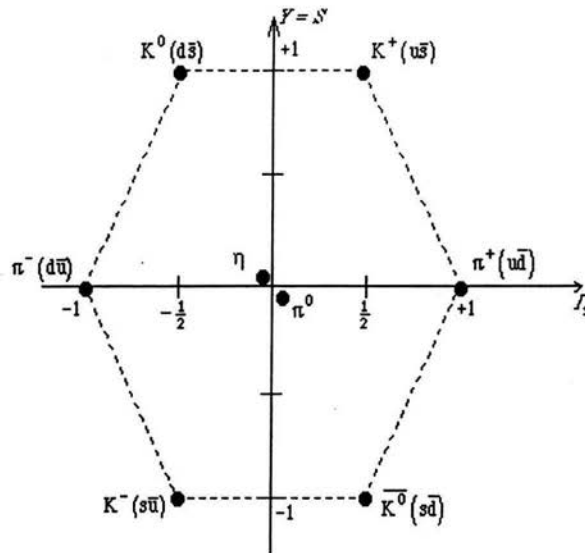


Figura 1.1: Mesones escalares, todos son combinaciones quark-antiquark. Los mesones neutros de extrañeza cero son superposiciones de las configuraciones de los tres sabores de quarks ( $u, d, s$ ) [2].

que esta simetría de isospin se puede entender como una consecuencia de que los hadrones tengan estructura interna basada en quarks.

Vamos a considerar únicamente a los mesones. Observemos que con 2 diferentes sabores de quarks ( $u$  y  $d$ ), y sus respectivos antiquarks, se pueden construir 4 mesones diferentes formados a partir de elementos de spin  $1/2$  (quarks). Si sólo consideramos sistemas partícula-antipartícula, se forman mesones de spin entero, nótese que al menos se deben considerar dos sabores diferentes de quarks, de lo contrario sólo formaríamos mesones neutros ya que un sistema formado de su partícula y su antipartícula es necesariamente neutro, por ejemplo el  $J/\Psi$  compuesto de  $c\bar{c}$ .

Recordemos que la carga eléctrica de la antipartícula es exactamente igual pero de signo contrario a la carga eléctrica de la partícula. El hecho de que los quarks tengan carga eléctrica fraccionaria permite formar mesones con carga eléctrica entera como es el caso del sistema de mesones  $\pi$ .

De este modo vamos a determinar algunas de las propiedades de los quarks, en particular sus números cuánticos y comenzaremos por el número bariónico. Hemos interpretado a los bariones como conjuntos de tres quarks que forman un nucleón, entonces el número bariónico del quark deberá ser la tercera parte del número bariónico del nucleón, es decir  $1/3$ . De la misma forma funciona la carga eléctrica, por ejemplo, consideremos un neutrón, éste debe tener un  $u$  (con carga  $2/3$ ) y dos  $d$  (con

carga  $-1/3$ ) ya que ésta es la única estructura posible para que el neutrón tenga carga eléctrica igual a cero. Notemos que nos hemos encontrado con partículas que poseen carga y número bariónico semi entero, esto no es tan fácil de aceptar pues los quarks describen a los bariones y mesones observados en la naturaleza de forma muy sencilla, pero nunca se habían observado en los experimentos partículas con carga eléctrica o número bariónico fraccionario como es el caso de los quarks. Otro punto importante es que los sistemas de bariones y mesones sólo aparecen en parejas quark-antiquark o en conjuntos de tres pero nunca en forma quark-quark o en conjuntos de cuatro quarks, etc.

Junto al isospin existe otro número cuántico, al que se denominó “extrañeza”, que es un número que puede asociarse a cada partícula, al igual que el número bariónico. La simetría de isospin la hemos atribuido a la existencia de los quarks  $u$  y  $d$ , lo natural sería relacionar la extrañeza con la existencia de otro quark, el quark “extraño” ( $s$ ). La extrañeza es cero para las partículas como los nucleones, mesones  $\pi$ , etc. Los hadrones que en su estructura contienen como mínimo un quark extraño reciben número cuántico de extrañeza igual a 1 o -1 y se les denomina también *hiperones*.

Las partículas que contienen quarks extraños se denominan así a causa de que cuando fueron descubiertas su comportamiento era paradójico, ya que se creía que eran producidas mediante la fuerza fuerte y por otro lado vivían un tiempo relativamente largo, el cual no era característico de la fuerza fuerte. Esto hacía suponer que tenían que desintegrarse mediante la fuerza débil, por lo que se llegó a la conclusión de que la extrañeza se debe conservar en las reacciones fuertes. Hoy en día se sabe que estas partículas no tienen nada de extraño, sólo se trata del tercer sabor de quarks.

A la descripción de todas las posibles combinaciones de los tres quarks ( $u$ ,  $d$ ,  $s$ ) que se necesitan para construir los hadrones se le conoce como el grupo  $SU(3)$  de sabor, que quiere decir *grupo especial de matrices unitarias de  $3 \times 3$* . Este grupo genera la teoría conocida como la “vía óctuple”, la cual nos dice que todos los hadrones deben pertenecer a representaciones del grupo  $SU(3)$ , específicamente a una de las representaciones con ocho elementos (octete) de este grupo le corresponde el triplete del grupo  $SU(2)$  de isospin (ver figura 1.2).

La construcción del octete empieza por clasificar a los hadrones en familias amplias que tienen en común un mismo valor de spin, posteriormente cada familia de partículas con spin idéntico se representa señalando gráficamente la distribución de otros dos números cuánticos ya mencionados: el isospin y la extrañeza.

A finales de la década de los sesentas existía un problema que no podía ser explicado con los sabores de quarks existentes. Este problema se refería a un tipo de corrientes llamadas “corrientes neutras”. Se había observado que éstas cambiaban el contenido de extrañeza de los hadrones. El proceso es el siguiente: un quark  $s$  se transforma en un quark  $d$  y se emiten un par de leptones (desintegración del mesón  $K$  en muón y antimuón). La necesidad de explicar con claridad este proceso requirió de la postulación de un nuevo sabor de quark, con la misma carga que el quark  $u$  pero más pesado, se le llamó “encantado”.

Hasta aquí podríamos decir que algunos de los problemas que presentaba la teoría



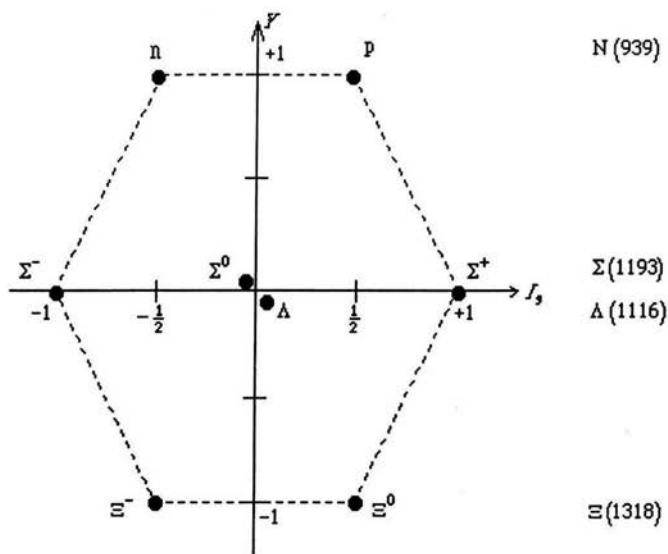


Figura 1.2: Ocho bariones ligeros con spin  $1/2$  constituidos por quarks  $u$ ,  $d$  y  $s$ , forman un octete del grupo  $SU(3)$  [2].

de las interacciones fuertes habían sido resueltos cuando los quarks se presentaban en parejas. A mediados de la década de los setentas, Leon Lederman y su equipo en Fermilab, encontraron pruebas inesperadas de la existencia de una nueva partícula a la que se dio el nombre de Upsilon. El hecho de que ésta nunca antes había aparecido se debía a que la partícula Upsilon era muy pesada comparada con otras, por lo que su estructura debía poseer características diferentes a las partículas conocidas hasta ese momento. Este descubrimiento puso en evidencia la existencia de una nueva familia de quarks y al nuevo quark se le dio el nombre de "Bottom". Debido a este descubrimiento se postuló la existencia del sexto quark que completara la tercer familia. Dicho quark, "Top", fue descubierto hasta marzo de 1995.

Cuando en los experimentos de dispersión inelástica profunda en reacciones electrón-protón se encontró que efectivamente los protones tienen estructura interna, un análisis detallado mostró que en la naturaleza sólo existen partículas con el contenido de quarks discutido anteriormente. Sin embargo, el mayor problema al que se enfrenta el modelo de quarks es el hecho de que éstos no se han podido observar en su calidad de partículas individuales, es decir no ha sido posible separar a los quarks. En este caso debería ser relativamente fácil extraer un quark de una partícula nuclear, así como es fácil separar un nucleón de un núcleo atómico. Esto es lo que se ha intentado hacer en muchos experimentos pero en ningún caso ha sido posible extraer a los quarks como partículas independientes del sistema nucleónico. Los quarks han sido



embargo los quarks parecen violar este principio ya que al producir un barión puede darse el caso en que dos o tres quarks idénticos se presenten en el mismo estado y esto sólo es posible para los bosones. Esto provoca un nuevo dilema pues por un lado los quarks tienen spin semientero y por otro pareciera que obedecen la estadística de Bose-Einstein (para partículas con spin entero). Este problema se solucionó con la introducción de la propiedad del color mencionado anteriormente, esto es, cada sabor de quarks se da en tres variedades con idéntica masa, spin y carga eléctrica pero con distinto color. Sin embargo el precio de la hipótesis de color es que se triplica el número de quarks pues tiene que haber 18 en lugar de 6 entonces con la introducción del número cuántico de color se resuelve el problema de la estadística, pero exige otras leyes en principio arbitrarias como es el hecho de que *todos los hadrones deben presentarse sin color, es decir, los tres diferentes colores deben combinarse para formar singuletes de color* (ver figura 1.3). Esto se puede cumplir al introducirse otro grupo de simetría como el que se ocupa de las combinaciones de los tres sabores de quarks, el nuevo grupo  $SU(3)$  se ocupa de las combinaciones de los tres colores.

En la teoría  $SU(3)$  de color todas las leyes que gobiernan a los quarks se explican. Aquí se pueden construir singuletes de color de dos maneras: una es exigiendo que todas las configuraciones de tres quarks sean totalmente antisimétricas con respecto al número cuántico de color, esto quiere decir que se deben combinar tres quarks o tres antiquarks de tal modo que se incluyan los tres colores. Y para el caso de los mesones se pueden construir combinando un quark de un color y un antiquark con su respectivo anticolor. En estos dos casos los tres colores deben de aparecer con la misma frecuencia, con este método obtenemos precisamente aquellas configuraciones que se observan en la naturaleza, es decir, bariones como configuraciones de tres quarks y los mesones como configuraciones de quark y antiquark. Todas las demás configuraciones están excluidas del estado de singulete, ya que tendrían color neto.

Por último, cabe mencionar que el grupo  $SU(3)$  de color tiene ocho generadores, los cuales están asociados a los ocho gluones de la Cromodinámica Cuántica. Estos son los portadores de las interacciones fuertes y son llamados bosones de *norma*.

De acuerdo con la Cromodinámica Cuántica, la forma como funciona la fuerza de color es la siguiente: cuando un quark emite o absorbe un gluón, el quark cambia de color pero no de sabor. Por ejemplo, si un quark  $u$  con color rojo emite un gluón, el quark se puede transformar en un quark azul o verde pero nunca se convertirá en un quark  $d$  o  $s$ , del color que fuere. Puesto que los gluones de color son los cuantos de la fuerza fuerte, el color es uno de aspectos más importantes en las interacciones fuertes. Esta interacción mantiene pegados (confinados) a los quarks con color dentro de los protones, neutrones, etc. Sin embargo, las interacciones fuertes entre los hadrones que no tienen color, no son más que un remanente de lo que es la verdadera interacción que opera entre los quarks con color. Y el hecho de que sea imposible observar partículas con color, es decir el confinamiento, podría ser simplemente porque la naturaleza de la fuerza fuerte así funciona.

La fuerza electromagnética entre dos partículas se describe según la ley de Coulomb: la fuerza disminuye en proporción directa con el cuadrado de las distancias entre

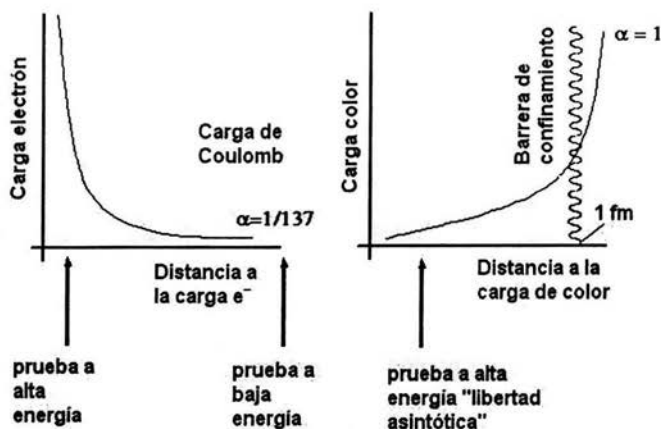


Figura 1.4: Apantallamiento de carga eléctrica y carga de color en teoría cuántica de campos [2].

las cargas. La fuerza de gravedad actúa de forma similar, y a distancias grandes las dos fuerzas disminuyen hasta que se vuelven insignificantes. La fuerza fuerte entre dos quarks con color actúa de forma completamente diferente, ésta no disminuye cuando la distancia aumenta, permanece constante, independientemente de la separación que haya entre los quarks, así que, para separar un quark hace falta una gran cantidad de energía (ver figura 1.4). Se ha calculado que la energía necesaria para separar un quark dos centímetros del protón sería de aproximadamente  $10^{13}$  GeV, pero mucho antes de que se consiguiese este nivel de energía intervendría otro proceso. A partir de la energía empleada en el esfuerzo por extraer un quark se estaría creando otro quark y su respectivo antiquark. El nuevo quark reemplazaría al quark extraído del protón y se volvería a formar la partícula original, mientras que el antiquark se uniría al quark desprendido del protón y se formaría un mesón. El proceso de separar un quark dio como resultado separar nada, la energía invertida en la reacción ha servido para que se forme un mesón sin color. Este mecanismo nos genera mesones pero no se cumple el objetivo de observar a un quark o a un gluón libres (con color). Si esta interpretación del confinamiento de los quarks funciona realmente de la forma aquí descrita, estaríamos llegando al punto en que daríamos por terminada la sucesión aparentemente infinita de las estructuras que constituyen a la materia, esto es, los átomos podrán dividirse en electrones y núcleos, los núcleos en protones y neutrones, y éstos a su vez en quarks y gluones pero el Modelo Estándar de la Física de Partículas Elementales dice que la cadena se detiene aquí; es muy difícil imaginar que una partícula tenga estructura interna cuando ni siquiera puede producirse como tal.

## 1.2. Física de colisiones de iones pesados relativistas

Los experimentos para estudiar la dispersión inelástica de electrones en protones durante la década de los setentas encontraron que los nucleones tienen estructura interna, están constituidos por quarks y gluones. La Cromodinámica Cuántica nos dice que estas partículas no pueden ser estudiadas en forma libre debido a que se encuentran confinadas por la fuerza fuerte a la cual están sujetas.

Los modelos cosmológicos indican que alrededor de  $10 \mu\text{s}$  después del Big-Bang las condiciones de temperatura y densidad eran extremadamente altas por lo que la interacción fuerte no era suficiente para mantener juntos a los quarks y gluones dentro de las dimensiones de un hadrón y la materia se encontraba en un estado en el cual los quarks y gluones estaban libres, formando un estado de la materia diferente, tal estado es el llamado Plasma de Quarks y Gluones (QGP por sus siglas en inglés). Posterior a la formación de este plasma, cuando el universo se estaba expandiendo, la temperatura y densidad disminuyeron, lo que provocó una transición de fase a un estado más frío, durante el cual los quarks se agruparon en tripletes y dobletes, creando la materia confinada tal como se conoce hoy en día (ver Figura 1.5). También se cree que fue durante esta explosión cuando se formaron todos los sabores de quarks que se conocen. Se piensa que en tales circunstancias los procesos dominantes y que

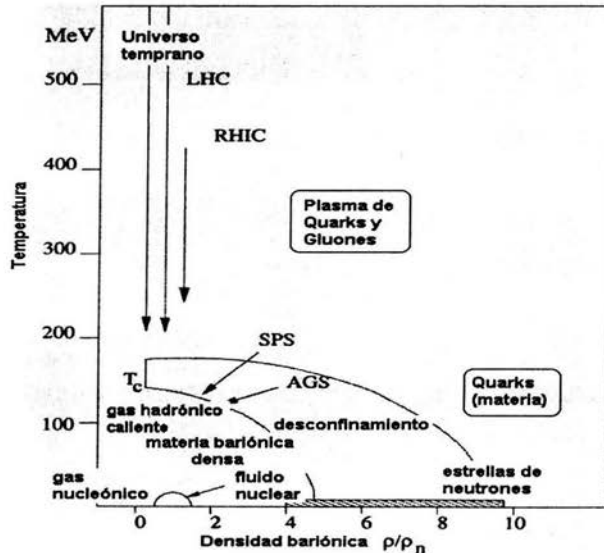


Figura 1.5: Diagrama fase, muestra la fase hadrónica a baja temperatura y densidad bariónica, también muestra la transición de fase y la fase de QGP.

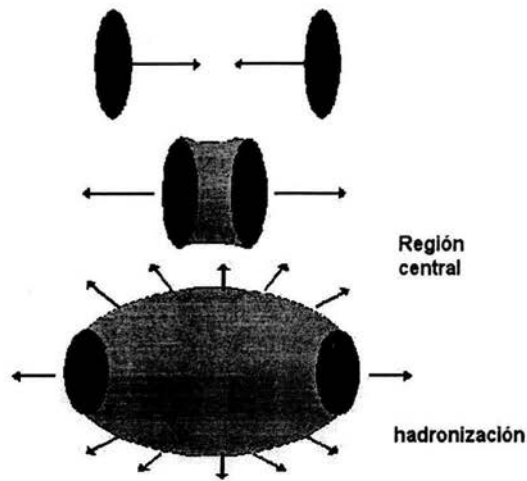


Figura 1.6: Representación esquemática de una colisión de iones pesados.

dieron lugar a la creación de pares quark-antiquark eran los procesos de fusión de gluones, denotados por  $gg \rightarrow q\bar{q}$ , y en consecuencia debieron haberse creado quarks y antiquarks en igual cantidad formándose cantidades iguales de materia y antimateria. Sin embargo, en el universo actual no se observan tales cantidades de simetría entre materia y antimateria [3].

En la actualidad existe una enorme expectación entre los físicos experimentales y teóricos de que, a través de las violentas colisiones producidas entre iones que viajan a casi la velocidad de la luz en los aceleradores, se alcancen densidades de varias veces la densidad nuclear y temperaturas superiores a la energía de confinamiento. Si las condiciones anteriores son creadas se espera producir un nuevo estado de la materia en el que los gluones y quarks se encuentran en libertad (desconfinados). Especialmente, a energías del orden de  $10 - 100$  AGeV un gran número de quarks y gluones son producidos en la zona de reacción y entonces existirá la posibilidad de producir QGP en un volumen de aproximadamente  $(10 - 100 \text{ fm}^3)$  por un corto tiempo,  $2 - 10 \text{ fm}/c$  [4].

Algo que se debe remarcar es que aún si el QGP no se llegara a formar en las reacciones mencionadas, es muy importante estudiar el comportamiento de la materia bajo condiciones extremas de densidad y temperatura las cuales serán alcanzadas en reacciones de iones pesados (ver Figura 1.6) [5]. Cuando nos encontramos en el régimen de bajas energías ( $\approx 100$  A MeV) en un volumen de  $10-100 \text{ fm}^3$  se pueden producir en los estados intermedios de la colisión un promedio de 500 partículas. Si la energía se incrementa al orden de  $100$  A GeV, es posible que la creación de partículas y antipartículas se vuelva mucho más fácil. Aquí el número de partículas involucradas

en la reacción puede aumentar en varios cientos.

Este sistema es, aunque pequeño, suficientemente grande para ser descrito aplicando la física estadística. Como las reacciones de iones pesados son un proceso altamente dinámico, propiedades como el equilibrio térmico de la materia pueden ser estudiados, si bien es cierto que los efectos de equilibrio y/o no-equilibrio no sean siempre fáciles de separar.

Las propiedades termodinámicas de la materia en equilibrio son descritas por una ecuación de estado. Por ejemplo, las propiedades de la transición de fase nuclear de líquido a gas [6] o la compresibilidad de materia nuclear a densidades más altas que la densidad nuclear o la misma transición de fase al QGP.

Uno de los resultados más importantes en la investigación sobre reacciones de iones pesados a altas energías, es el descubrimiento de nuevos fenómenos colectivos. Por ejemplo, se ha encontrado evidencia de que en estas reacciones, cuando la materia nuclear se encuentra lo suficientemente comprimida y caliente se comporta como un fluido compresible y no como un gas diluido, esto debido a que han sido observados efectos dinámicos en estas reacciones. La materia producida en colisiones nucleares periféricas fue observada, primero fluyendo en dirección del plano de reacción, debido a la alta presión que se produce en el impacto. Posteriormente se observó un flujo ortogonal al plano de reacción conforme la materia se va enfriando fuera de la zona entre dos núcleos. Mientras que a baja energía fue observado que el flujo transversal decrece cuando la energía decrece, tendiendo a cero, a aproximadamente 100 A MeV, y volviéndose negativo en reacciones periféricas abajo de esta energía [7]. Esto se debe al hecho de que la atracción nuclear empieza a dominar sobre la presión repulsiva (la cual tiene una gran contribución de presión térmica).

### 1.3. Régimen Transparente y de Frenado

Las colisiones de iones pesados a energías ultrarrelativistas, es decir, a más de 10 GeV por ión, usualmente se dividen en dos regímenes; el *régimen de frenado* y el *régimen transparente*. En el primero los bariones que conforman el haz son frenados formando una región rica en bariones en el centro de la colisión (*región central*). En el régimen transparente la energía de la colisión aumenta de tal modo que las partículas no se frenan mutuamente como en el caso anterior, si no que al contrario, se espera que los núcleos incidentes pasen uno a través del otro y después se alejen. Un hecho importante es que en la región de interacción habrán depositado una cierta cantidad de energía, pero el número bariónico neto en el régimen transparente será cero. Esta densidad de energía en el régimen transparente puede formar un plasma de quarks y gluones. Estas colisiones pueden ser descritas por medio de una separación de las partículas interactuantes en *participantes* y *espectadoras* [8]. Para explicar que significa cada uno de estos dos términos recordemos la definición de *parámetro de impacto*. Supongamos que los nucleones del haz viajan en línea recta y que el parámetro de impacto es diferente de cero. Los nucleones que no colisionan con los otros nucleones del blanco serán los espectadores, los cuales forman en región periférica y los nucleo-



nes que sí colisionan con otros son los participantes. Por último una colisión en la que el parámetro de impacto es cero es llamada colisión *central* y en tal colisión la energía depositada es mayor que cuando el parámetro de impacto es distinto de cero [8].

## Multiplicidad

La multiplicidad es el número de partículas producidas en la colisión. Es conveniente caracterizar a la multiplicidad como función de la energía o del momento. En este trabajo la multiplicidad será utilizada para calcular el potencial químico de nuestras distribuciones, por ejemplo, mencionaré que la multiplicidad en colisiones a 100 MeV es entre 10 y 100, es decir, se producen entre 10 y 100 partículas primarias y secundarias y a energías de 100 GeV el número de partículas producidas es de varios miles.

## 1.4. Desacoplo

Cuando se produce una colisión de iones pesados, el sistema formado por la reacción alcanza densidades muy altas, rápidamente termaliza y se empieza a enfriar al expandirse. El desacoplo se da cuando la temperatura y densidad son suficientemente pequeñas de modo que las interacciones fuertes han cesado. Cuando evoluciona el sistema se presentan dos tipos de desacoplo; el primero ocurre cuando las colisiones inelásticas cesan y a éste se le llama “desacoplo químico”, y por consiguiente la abundancia de partículas de cada especie queda fija. Por otro lado, al instante cuando la abundancia de partículas a llegado a su valor de equilibrio y los procesos elásticos han cesado se le llama “desacoplo cinético”.

Existe un modelo estadístico muy simple que funciona bien para el desacoplo químico. En este modelo se considera que los hadrones forman un gas en equilibrio térmico. De modo que para calcular el número de partículas usamos un ensamble gran canónico y sólo dos parámetros que son la temperatura ( $T$ ) y el potencial químico ( $\mu$ ) al momento del desacoplo o congelamiento químico.

Al hacer un diagrama en el plano  $T$  vs  $\mu$  se puede ver la frontera calculada teóricamente en donde se espera que exista una transición de fase al QGP. Entonces se podrá suponer, al utilizar este diagrama, dependiendo de donde se encuentren los parámetros de desacoplo químico si el sistema estuvo desconfinado o no.

Las condiciones al momento del desacoplo cinético se obtienen de los espectros de momento transverso. Estos presentan un comportamiento casi exponencial con parámetro de pendiente inversa  $T_{ef}$ . En los experimentos se observa que  $T_{ef}$  aumenta cuando la masa aumenta. Esto es una evidencia de flujo, ya que para reproducir los espectros se supone que además del movimiento térmico aleatorio de las partículas existe otra componente la cual se debe a la energía de flujo colectivo de modo que  $T_{ef}$  es

$$T_{ef} = T_0 + \frac{1}{2}m \langle v_{\perp} \rangle^2, \quad (1.1)$$



y los parámetros que caracterizan al desacople cinético son: la temperatura al momento del desacople  $T_0$  a la que se asocia básicamente un valor constante de  $T_0 \approx 130$  MeV [9] y el flujo radial colectivo caracterizado por una velocidad de flujo  $v_{\perp}$ .

## 1.5. Cinemática de colisiones de iones pesados relativistas

A continuación describiremos brevemente algunas definiciones básicas y notación de relatividad especial con el objetivo de definir el concepto de *rapidez* que nos será de mucha utilidad en el desarrollo de este trabajo.

La información más importante de la dinámica de las reacciones en las colisiones de iones pesados proviene de observables tales como los espectros de las partículas producidas, espectros hadrónicos de masa o momento transverso, distribuciones de rapidez, cocientes de partículas y antipartículas, etc. El análisis detallado de estas observables contribuye al entendimiento de la evolución espacio-temporal de las colisiones. En los experimentos que estudian el comportamiento de la materia en situaciones extremas de temperatura y densidad, como las producidas en las colisiones de iones pesados relativistas, se ha observado que las distribuciones de momento transverso se comportan de diferente forma a como se comportan en colisiones protón-protón. Se ha observado que las distribuciones de momento a bajo  $p_{\perp}$  manifiestan un aumento con respecto a cuando se modelan con un decaimiento exponencial.

Por otro lado, se ha observado que a momento transverso alto también ocurre un aumento similar en las distribuciones, estos comportamientos podrían ser una señal de que la materia producida en tales colisiones tiene un comportamiento diferente al de la materia nuclear producida en colisiones a bajas energías, también podría ser una señal de que se haya producido QGP.

### 1.5.1. Sistema coordenado

Es práctico introducir un sistema coordenado especial, donde el eje  $z$  sea paralelo a la dirección del haz proporcionado por acelerador. De modo que un vector de velocidad se podrá descomponer como  $v = (v_{\parallel}, v_{\perp})$  donde  $v_{\perp}$  es denominada componente transversa a la dirección  $z$  y  $v_{\parallel}$  es la componente paralela o longitudinal a la dirección de movimiento.

En general, un vector de posición, descrito en estas coordenadas conectará el centro de la partícula incidente o colisionante con el de la partícula blanco. La componente transversa del vector de posición es llamado el *parámetro de impacto* ( $b$ ) el cual es un vector de dos dimensiones y la dirección en la que apunta éste es usualmente denotada como la dirección del eje  $x$ . El plano formado por los ejes  $x - z$  es llamado plano de la colisión (figura 1.7) [4].

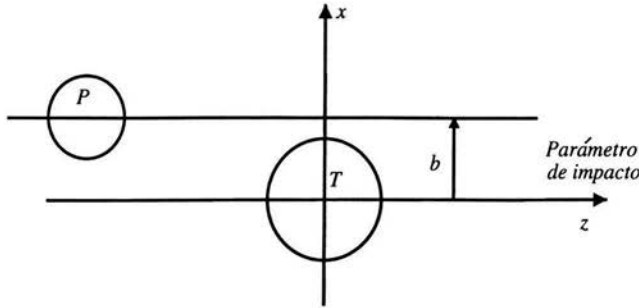


Figura 1.7: Parámetro de impacto ( $b$ ) es el vector que relaciona los centros de los núcleos colisionantes [11].

### 1.5.2. Rapidez

La *rapidez* ( $y$ ) es una generalización relativista de la velocidad, y se define como [4]:

$$y \equiv \tanh^{-1}(v_{\parallel}) = \tanh^{-1}\left(\frac{p_{\parallel}}{E}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{E + p_{\parallel}}{E - p_{\parallel}}\right), \quad (1.2)$$

donde  $E$  es la energía de la partícula,  $p_{\parallel}$  la componente de momento a lo largo de la dirección de movimiento también llamada *momento longitudinal*, y análogamente  $v_{\parallel}$  es la componente de la velocidad en la dirección del movimiento de los haces (figura 1.8). De la Ec. 1.2 se puede observar que para velocidades pequeñas  $y \rightarrow v_{\parallel}$ . Cuando una partícula se mueve después de la colisión en alguna dirección dada con velocidad  $v$  es común dar su posición en el espacio fase por las coordenadas  $(y, \frac{p_{\perp}}{m})$ , ya que el cuadrimomento puede descomponerse en este sistema coordenado como  $p^{\mu} = (p^0, p_{\parallel}, p_{\perp})$ . En el límite para velocidades no relativistas  $(y, \frac{p_{\perp}}{m}) \rightarrow (v_{\parallel}, v_{\perp})$ .

#### Propiedades de la Rapidez

Algunas de las propiedades de la rapidez son las siguientes: la rapidez puede tomar valores positivos y negativos, es una variable adimensional, y es aditiva ante transformaciones de Lorentz. Para ilustrar lo anterior consideremos una rapidez ( $y_1$ ) de una partícula que se mueve en dirección del eje  $z$  de un sistema de referencia  $K_1$  y consideremos ( $y_{\beta}$ ) como la rapidez del sistema  $K_1$  que se mueve en la dirección  $z$  con velocidad  $\beta$  con respecto a otro sistema de referencia  $K_2$ . La rapidez de la partícula medida desde el sistema de referencia  $K_2$  es

$$y' = y_1 + y_{\beta} = y_1 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right). \quad (1.3)$$

Otra propiedad es que, puesto que la velocidad máxima que puede tener una partícula es la velocidad de la luz denotada por  $c$ , (aquí hemos adoptado las unidades naturales, en que  $c = 1$ ), la rapidez puede tener valores entre  $(-\infty, \infty)$ . Esto se ilustra en la figura (1.8)

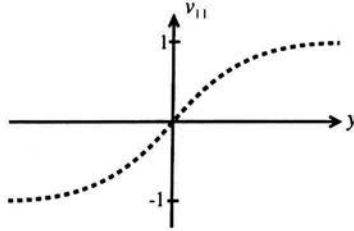


Figura 1.8: La componente de la velocidad paralela al haz,  $v_{||}$  como función de la rapidez  $y$ . Obsérvese que para velocidades pequeñas  $y \approx v_{||}$  [11].

La rapidez máxima en una colisión esta dada por

$$y_{max} \approx \ln \left( \frac{2E_{cm}}{m_n} \right). \quad (1.4)$$

La distribución del número bariónico como función de la rapidez tiene dos valores máximos centrados en  $\pm(y_{m\acute{a}x} - \delta_y)$  donde  $\delta_y$  es el ancho de la distribución Fig.(1.9). En la región entre los dos máximos, el número bariónico es cero en promedio, ésta se le conoce como *región central* mientras que a la zona donde el número bariónico es diferente de cero se le llama *región de fragmentación*.

Para determinar experimentalmente la rapidez de una partícula, es necesario medir el ángulo  $\theta$  con el cual salen las partículas después de una colisión. Considerando que tal ángulo de dispersión y el momento, en el caso de colisiones muy energéticas están relacionados por  $\cos \theta = \frac{P_{||}}{E} \approx \frac{P_{||}}{|P|}$

$$y \approx \ln \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta}} = -\ln \left( \tan \left( \frac{\theta}{2} \right) \right). \quad (1.5)$$

La Ec. 1.5 es ampliamente usada y es conocida como *pseudorapidez*  $\eta$ ,

$$\eta = -\ln \left( \tan \left( \frac{\theta}{2} \right) \right), \quad (1.6)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre el momento total de la partícula ( $p$ ) y el eje del haz. La Ec. 1.6 es conocida como la definición de la pseudorapidez [4]. Podemos finalizar esta parte diciendo que la pseudorapidez es útil para partículas altamente energéticas de tal modo que la masa comparada con el momento se pueda despreciar.

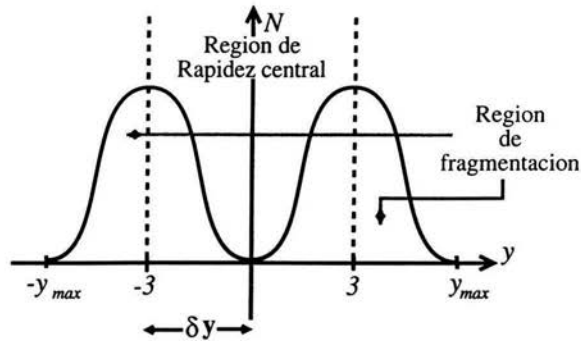


Figura 1.9: Distribución del número bariónico ( $N$ ) como función de la rapidez. Si la energía en centro de masa de los nucleones incidentes es del orden de 100 GeV, las dos regiones no se traslaparán pues el ancho medio de las distribuciones es de aproximadamente 3 unidades de rapidez.

### Masa y Momento Transverso

Además de la rapidez, otras variables útiles para estudiar las colisiones de iones pesados relativistas son la *masa transversa* y el *momento transverso*. Para definir estas dos variables vamos a suponer que el haz viaja en dirección del eje  $z$ , entonces sus componentes de momento son  $p_x$ ,  $p_y$  y  $p_z$ . De modo que el momento total se escribe

$$p^2 = p_{\perp}^2 + p_{\parallel}^2. \quad (1.7)$$

Definimos el momento longitudinal como  $p_{\parallel}^2 = p_z^2$  y el momento transverso ( $p_{\perp}$ ) como

$$p_{\perp}^2 = p_x^2 + p_y^2. \quad (1.8)$$

Por último la masa transversa ( $m_{\perp}$ ) esta dada por

$$m_{\perp}^2 = m^2 + p_{\perp}^2, \quad (1.9)$$

donde  $m$  es la masa invariante de la partícula. Usando las Ecs. 1.2 y 1.9 es posible encontrar una relación para la energía y el momento longitudinal en términos de la rapidez y la masa transversa [4]

$$E = m_{\perp} \cosh y, \quad p_{\parallel} = m_{\perp} \sinh y. \quad (1.10)$$

En los siguientes capítulos se describirá un modelo fenomenológico para calcular los espectros de masa y momento transverso de piones producidos en colisiones de iones pesados relativistas. Para presentar estos espectros y compararlos con datos experimentales utilizaremos algunas de las definiciones vistas en este capítulo.

# Capítulo 2

## Modelo de líquido de piones

### 2.1. Descripción del modelo

Uno de los principales objetivos de los experimentos de colisiones de iones pesados relativistas es detectar la transición de fase de materia hadrónica a materia desconfiada (QGP). Es muy probable que una señal de que se haya producido el QGP se encuentre en los espectros de momento transversal de partículas como los piones que son las que se producen de forma más abundante en dichas colisiones. El hecho de que tanto a momento transversal alto como a bajo, exista un incremento en tales distribuciones, comparado con colisiones de  $n$ - $n$  [12, 13, 14, 15, 16], ha llevado a crear un enorme esfuerzo para explicar este hecho, algunos de los modelos que se han elaborado para tratar de explicar estos incrementos son: una superposición de dos distribuciones de Maxwell-Boltzmann con diferente temperatura [17], la existencia de un flujo transversal [18], ajustar un potencial químico no nulo a la distribución de Bose-Einstein (B-E) [19] y efectos de frontera al momento del desacople [20]. Existe un hecho que hasta hace poco tiempo no había sido ampliamente discutido que descansa en la observación de que, cuando la temperatura y densidad del sistema se acerca a valores críticos, los piones (siendo bosones), tienden a juntarse y a agruparse en el estado más bajo de energía [21, 22]. Este fenómeno se conoce como condensación de B-E y esta tendencia podría tener que ver con el incremento de la distribución a bajo momento transversal.

Vamos a considerar el siguiente escenario: en alguna etapa posterior a una colisión de iones pesados relativistas (después de la hadronización), cuando el promedio de separación entre los piones es menor que el rango de la interacción fuerte (1 fm) como es el caso de los piones, resulta en promedio atractiva. La evolución de dicho estado del sistema puede describirse de mejor forma cuando suponemos un líquido de piones en lugar de un gas. Un efecto interesante de esta imagen es la aparición de una tensión superficial, la cual actúa como una frontera reflejante para los piones [23], de tal modo que si los piones se mueven en dirección de dicha frontera, ésta permitirá tener confinado al sistema. Una vez que la separación promedio de los piones es mayor que el rango de la interacción fuerte, se produce una transición de fase de líquido a gas,

de modo que la distribución final de momento estará determinada por las condiciones de frontera justo antes del desacoplo, es decir, cuando las partículas interactuaron de forma fuerte por última vez.

Las funciones de onda satisfacen condiciones de frontera impuestas por la superficie reflejante, y pueden considerarse entonces como formando un conjunto cuyos niveles de energía son discretos, puesto que la densidad de estados que contribuyen a la distribución a alto  $p_{\perp}$  es mayor que en el caso de una distribución de B-E sin frontera. Tal discretización de estados junto con el flujo transversal inicial podrían ser responsables del aumento de la distribución a alto  $p_{\perp}$ .

## 2.2. Cálculo de la temperatura crítica

Consideremos un sistema con una multiplicidad dada, la cual representa un número fijo  $N$  de bosones en equilibrio térmico interactuando a una temperatura  $T$ . Es posible describir las propiedades estadísticas del sistema usando un ensamble gran canónico que obedece a la estadística de B-E. Si  $E_i$  representa la energía de un estado particular, tenemos que el número de partículas  $N$ , el potencial químico  $\mu$  y la temperatura  $T$  están relacionados por medio de la expresión

$$N = \sum_i \frac{g}{e^{(E_i - \mu)/T} - 1}, \quad (2.1)$$

donde  $g$  es el factor de degeneración del estado con números cuánticos  $i$ .

Para realizar el cálculo es necesario tomar en cuenta que el número de partículas con una energía dada no puede ser negativo, por lo que debemos considerar la condición de que el potencial químico debe ser menor que la energía del estado base,  $\mu < E_0$ . Para un número fijo de partículas, el potencial químico  $\mu$  es función de la temperatura  $T$ . De esta forma, en la Ec. 2.1,  $N$  tiene la característica de que cuando la temperatura se aproxima a un valor crítico  $T_c$ , el potencial químico  $\mu$  se aproxima al valor del estado de energía más bajo  $E_0$ , por lo que dicho estado se vuelve el más poblado, ésta es la llamada condensación de B-E. Para calcular la temperatura crítica  $T_c$  se considerará el límite continuo, es decir, resolveremos una integral sobre el espacio de momentos  $p$  y sobre el espacio de configuración  $x$ . Para esto consideremos la función de distribución cuántica para bosones

$$f(p) = \frac{1}{e^{(E_i - \mu)/T} - 1}, \quad (2.2)$$

de modo que la integral a resolver es

$$N = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^3x f(p) = \frac{V4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dp \frac{p^2}{e^{(E_i - \mu)/T} - 1}, \quad (2.3)$$

en donde usamos la relación entre la energía y el momento

$$E^2 = p^2 + m^2 \quad \text{y} \quad p^2 dp = E \sqrt{E^2 - m^2} dE,$$

$V$  es el volúmen y  $c = \hbar = 1$ . Obtenemos

$$N = \frac{V}{(2\pi^2)} \int_m^\infty dE \frac{E\sqrt{E^2 - m^2}}{e^{(E_i - \mu)/T} - 1}. \quad (2.4)$$

Por último, cambiando de variable y utilizando la expansión de la serie geométrica

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-jx}, \quad (2.5)$$

obtenemos finalmente

$$N = \frac{Vm^3}{2\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{T_c}{m_j} \right) e^{mj/T_c} K_2 \left( \frac{m_j}{T_c} \right), \quad (2.6)$$

en donde  $K_2$  es la función de Bessel modificada de segunda clase y de orden 2, y  $m$  es la masa de los bosones. La figura 2.1 que proviene de la referencia [10] muestra la gráfica de  $N$  vs  $T_c$  para diferentes valores del radio ( $R$ ). El valor de  $T_c$  fue calculado a partir de la Ec. 2.6. Notemos que el valor de  $T_c$  para un número de piones de una especie particular entre 100 y 200 es alto y decrece cuando el volumen se incrementa.

Sin embargo, en el cálculo anterior no estamos considerando el estado más bajo de energía, por lo cual, cuando nos acercamos al valor de  $T_c$  debemos de retomar la representación discreta y considerar la contribución individual de los estados de energía. Para esto vamos a hacer una suposición general sobre la evolución del sistema: asumiremos que antes del desacoplamiento el sistema de piones producido después de la colisión está en equilibrio térmico, lo cual corresponde a asumir que la razón total de las interacciones es muy alta comparada con la razón de expansión.

## 2.3. Cálculo de la distribución de momento transverso.

Puesto que nos interesa describir la evolución dinámica de la colisión, necesitamos considerar que al momento del desacoplo el sistema de piones tiene tamaño finito y se encuentra confinado dentro la frontera de un volúmen dado. Es importante mencionar que, dado el gradiente de presión producido durante la colisión, el sistema sufrirá una expansión que tendrá una componente longitudinal así como una transversa, lo que implica que el momento del desacoplo no es necesariamente el mismo sobre todo el volumen. De este modo, si la energía de la colisión es mayor entonces considerar una geometría cilíndrica es lo más apropiado para estudiar la evolución del sistema de piones. Este punto se abordará en el capítulo 5 ya que dicha geometría constituye el tema central de esta tesis.

En este modelo sin expansión, Ayala y Smerzi [10], utilizando una geometría esférica estudian el caso en el cual el tiempo de desacoplo del sistema es el mismo

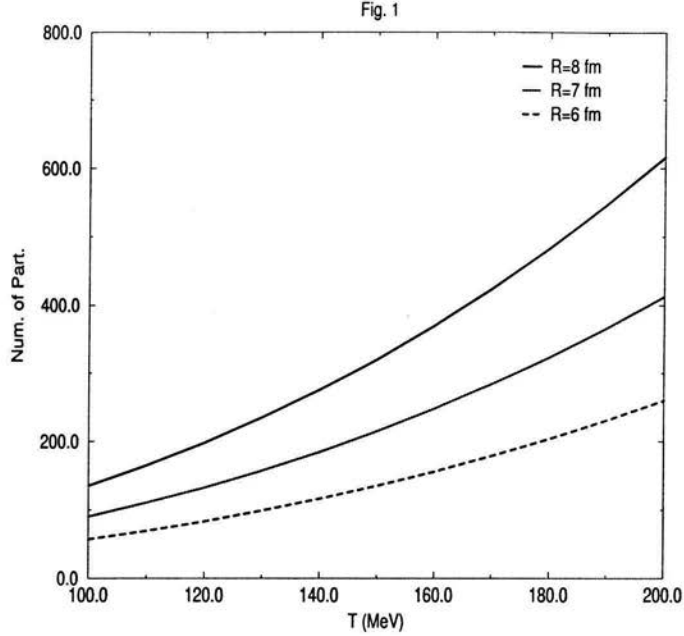


Figura 2.1: Temperatura crítica vs número de partículas para diferentes valores del radio  $R$  al momento del desacoplo.

al estar colocado en el sistema del centro de masa. En resumen, el propósito de este capítulo es utilizar geometría esférica y se está considerando que al momento de desacoplo, cuando las interacciones fuertes han cesado, el sistema es descrito como un líquido de piones de una especie dada. Otra característica es que el sistema se encuentra en equilibrio térmico, está confinado dentro de una esfera de radio  $R$  y el sistema es visto desde el centro de masa de los núcleos colisionantes.

Para calcular la contribución de los estados discretos a la distribución de momento, vamos a resolver la ecuación de onda correspondiente a los estados estacionarios de una partícula libre, con spin 0, dentro de una esfera de radio  $R$ . Empezamos tomando la ecuación de Klein-Gordon

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.7)$$

con la condición de que la función se anule en la frontera



$$\psi(R, t) = 0. \quad (2.8)$$

Esta condición nos describe el confinamiento inicial de la partícula. Como estamos considerando estados dentro de una esfera, para resolver la Ec. 2.7 vamos a escribir el laplaciano en coordenadas esféricas. Una vez planteada la Ec. 2.7 en el sistema esférico de coordenadas separamos variables, obteniendo una ecuación angular  $Y_{lm}$  y otra radial  $Q(\bar{r})$ . La solución de la ecuación angular está asociada con los armónicos esféricos y la constante de separación está asociada con el operador de momento angular de la mecánica cuántica. De este modo la ecuación radial se escribe

$$\frac{1}{r^2} \left( r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial}{\partial r} \right) Q(\bar{r}) + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] Q(\bar{r}) = 0 \quad (2.9)$$

Primero hacemos  $\rho = kr$  y después hacemos el cambio de variable  $Q(r) = \frac{U(\rho)}{\sqrt{\rho}}$  para obtener una ecuación de Bessel de la forma

$$\rho^2 U''(\rho) + \rho U'(\rho) + \left[ \rho^2 - \left( l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] U(\rho) = 0, \quad (2.10)$$

en donde el factor  $(l + \frac{1}{2})$  nos indica que la solución de la ecuación es del tipo  $J_{(l+\frac{1}{2})}$ . Tenemos que la solución de la Ec. 2.10 es

$$\psi_{klm'}(\bar{r}, t) = A Y_{lm'}(\bar{r}) \frac{1}{\sqrt{r}} J_{l+1/2}(kr) e^{iE_{kl}t}. \quad (2.11)$$

Para calcular la constante de normalización  $A$ , vamos a utilizar la siguiente expresión

$$|A|^2 \int \psi_{kl}(\bar{r}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 \psi_{kl}^*(\bar{r}, t) = 1, \quad (2.12)$$

que corresponde a la condición de normalización para que la integral que nos da la densidad de partículas sea igual a uno. Utilizando las propiedades de ortonormalización de los armónicos esféricos así como de las funciones de Bessel obtenemos la solución de la ecuación con su respectiva normalización,

$$\psi_{klm'}(\bar{r}, t) = \frac{1}{R J_{l+3/2}(kR)} \left( \frac{1}{r E_{kl}} \right)^{1/2} Y_{lm'}(\bar{r}) J_{l+1/2}(kr) e^{-iE_{kl}t}, \quad (2.13)$$

en donde el número cuántico  $k$  está dado por la solución de la ecuación de Bessel,  $J_{l+1/2}(ka) = 0$ , mientras que los eigenvalores de la energía están relacionados con  $k$  por medio de  $E_{kl} = \sqrt{k^2 + m^2}$

Para este caso en particular, la integral sobre el volumen de la transformada de Wigner nos da la contribución normalizada de la distribución de momento del estado de energía con números cuánticos  $(k, l, m)$  y es proporcional al cuadrado del valor

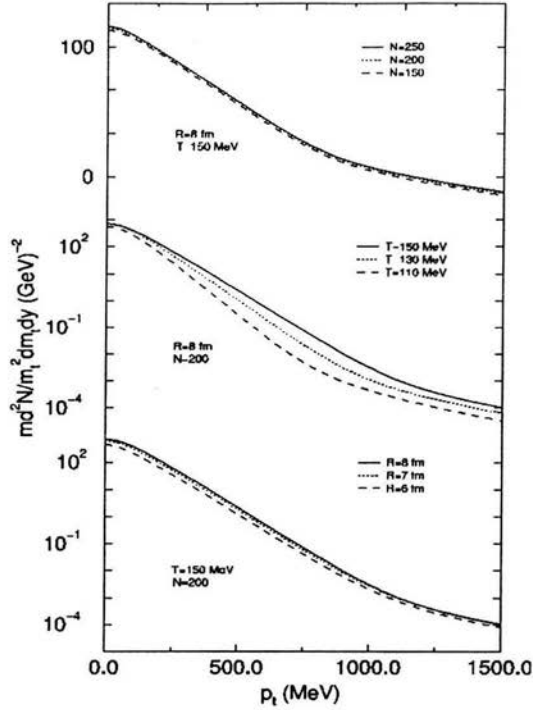


Figura 2.2: Distribución invariante de momento a  $y=1.4$  como función de  $p_{\perp}$  para varios valores de  $R$ ,  $T$ ,  $N$  y con el valor de  $\mu$  calculado con la Ec (2.18).

absoluto de la transformada de Fourier de la solución de la ecuación de Klein-Gordon (2.13). De esta forma el espectro se obtiene pesando cada estado discreto de la energía con la distribución de B-E, por lo que, la distribución de momento estará dada por

$$\frac{d^3 N}{d^3 p} = \sum_{k,l} \frac{\phi_{kl}(p)}{e^{(E_k - \mu)/T} - 1}, \quad (2.14)$$

donde

$$\phi_{klm}(\vec{p}) = (2E_{kl}) |\psi_{klm}(\vec{p})|^2 \quad (2.15)$$

y

$$\psi_{klm}(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 r e^{-i\vec{p}\cdot\vec{r}} \psi_{klm}(\vec{r}). \quad (2.16)$$

Además, dada la simetría esférica del sistema, la función de onda en el espacio de momentos no depende del número cuántico  $m$  sino sólo de la magnitud del momento. En la Ec. 2.14  $\phi_{kl}(p)$  está dada explícitamente por

$$\phi_{kl}(\bar{p}) = \frac{2l+1}{2\pi p} \left[ \frac{k J_{l+1/2}(pR)}{k^2 - p^2} \right]. \quad (2.17)$$

Y el potencial químico fue calculado a partir de

$$N = \sum_{k,l} \frac{2l+1}{e^{(E_{kl}-\mu)/T} - 1}. \quad (2.18)$$

Para graficar los espectros de piones necesitamos escribir la función de distribución de forma invariante

$$E \frac{d^3 N}{d^3 p} = \frac{d^3 N}{p_{\perp} dp_{\perp} d\phi dy}. \quad (2.19)$$

Integrando sobre el ángulo azimutal y usando la Ec. 1.9 obtenemos que

$$p_{\perp} dp_{\perp} = m_{\perp} dm_{\perp},$$

ya que experimentalmente la sección transversa ( $\frac{d\sigma}{p_{\perp} dp_{\perp}}$ ) se describe utilizando una exponencial que depende de  $m_{\perp}$  en lugar de una que depende de  $p_{\perp}$ . La Ec. 2.19 se escribe de la siguiente forma

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d^2 N}{m_{\perp} dm_{\perp} dy} = E \frac{d^3 N}{d^3 p}, \quad (2.20)$$

donde  $\frac{d^3 N}{d^3 p}$  esta dado por la Ec. 2.14 y  $E$  es la energía, de modo que la distribución quedará determinada por la relación

$$\frac{m}{m_{\perp}^2} \frac{d^2 N}{dm_{\perp} dy} = 2\pi E \frac{m}{m_{\perp}} \frac{d^3 N}{d^3 p}. \quad (2.21)$$

En este modelo estudiado por Ayala y Smerzi [10] se calcula la distribución de momento utilizando las Ecs. 2.14 y 2.21. Para una rapidez fija  $y=1.4$  en una reacción  $Au + Au$  a 10.8 A GeV en el AGS. Esta rapidez corresponde a  $y=3$  de los piones en el sistema de laboratorio. La distribución calculada tiene diferentes valores para  $T$ ,  $R$  y  $\mu$  y en sus resultados encuentran un desplazamiento de la curva de la distribución a alto  $p_{\perp}$  con respecto a una exponencial con la misma temperatura.

También con este modelo encuentra que la distribución calculada se desvía de un simple decaimiento exponencial para valores de momento pequeños conforme el radio decrece (ver figura 2.2). Sin embargo, la importancia central de este modelo es haber calculado la distribución de piones de forma aceptable incorporando efectos de densidad y de frontera.

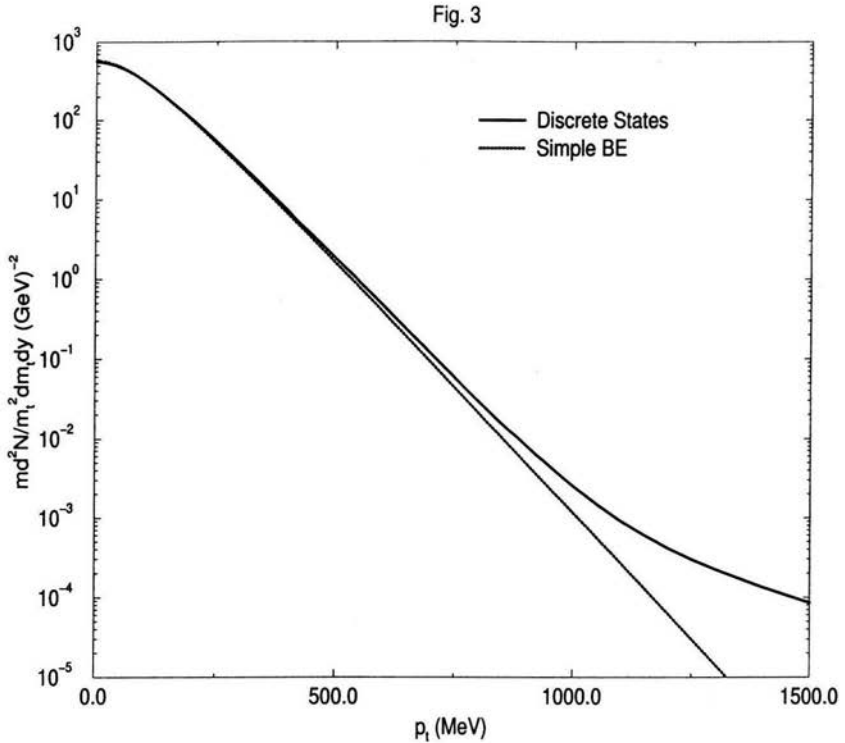


Figura 2.3: Distribución invariante de momento a  $y=1.4$ ,  $R=8$  fm,  $T=150$  MeV y  $N=150$  a los que les corresponde un valor de potencial químico de  $\mu=94.3$  MeV comparado con una distribución de B-E con el mismo conjunto de parámetros y un valor del potencial químico correspondiente de  $\mu=67.4$  MeV.

Cuando se describe al sistema en términos de un conjunto de estados discretos de la energía se están incorporando dos fenómenos: se está considerando un sistema finito y además, si el sistema de piones es producido cerca de la región crítica para la condensación de B-E, considerar los estados discretos de la energía equivale a incluir la contribución de los estados más bajos de energía.

La figura 2.3 muestra la distribución para  $R=8$  fm,  $T=150$  MeV,  $N=150$  comparada con una distribución de B-E con los mismos parámetros, la distribución en términos de los estados discretos de la energía se desvía de la distribución de B-E a alto momento y como los parámetros están alejados de la región crítica para la con-

densación ambas distribuciones coinciden a bajo  $p_{\perp}$ . Esta situación cambia cuando los parámetros se acercan a la región crítica lo cual se puede ver en la figura 2.4 donde se muestra una distribución con  $R=6$  fm,  $T=120$  MeV,  $N=200$ . La diferencia entre el caso continuo y el discreto es que en el último la contribución a la distribución es sobre todos los estados aunque se concentre principalmente en los estados más bajos. En el otro caso la contribución a la distribución está restringida al estado con energía más baja,  $p=0$ .

En el siguiente capítulo se reproduce el cálculo hecho por Ayala et al. [30] en el que además de los efectos de densidad y frontera que incorpora este modelo, se introduce el efecto de una expansión hidrodinámica sobre el sistema para calcular el espectro de piones y se comparan con datos experimentales.

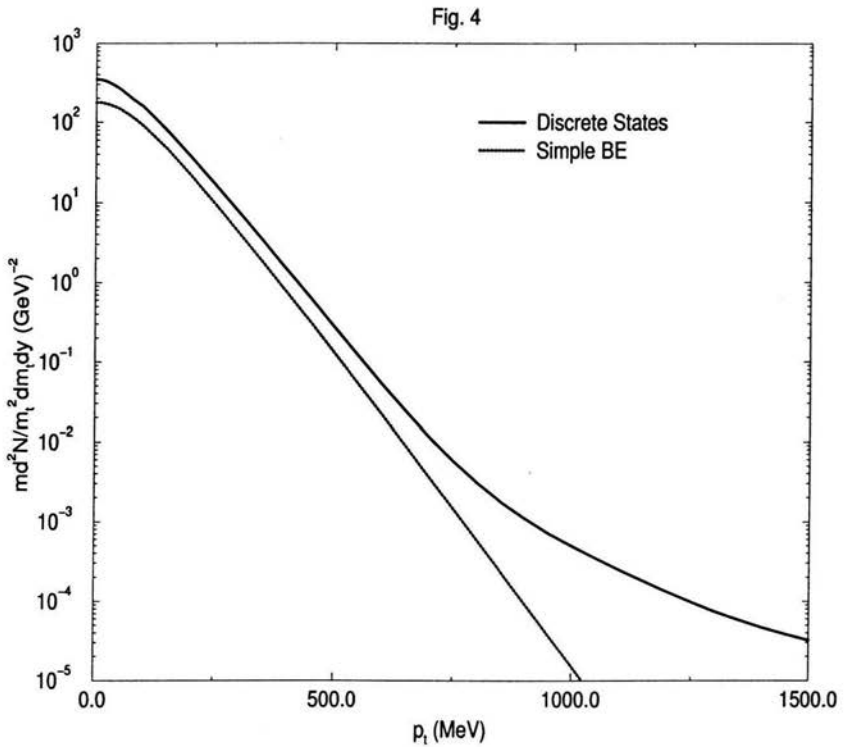


Figura 2.4: Distribución invariante de momento a  $y=1.4$ ,  $R=6$  fm,  $T=120$  MeV y  $N=200$  con un valor del potencial químico correspondiente a  $\mu=169.1$  MeV comparada con una distribución de B-E con el mismo conjunto de parámetros a los que les corresponde un potencial químico de  $\mu=83.5$  MeV.

# Capítulo 3

## Modelo de líquido de piones con expansión

La producción de partículas durante las Colisiones de Iones Pesados Relativistas ha sido ampliamente estudiada, debido a la importancia que representa entender el comportamiento del sistema colisionante en etapas posteriores a la colisión. Se han propuesto un gran número de modelos con el fin de explicar el comportamiento de las partículas generadas en dichas colisiones, particularmente el hecho de que tanto a bajo como a alto momento transverso, el espectro de dicha distribución presenta un acrecentamiento comparado con el espectro en las colisiones de  $p - p$ . Una idea muy importante para explicar tal comportamiento, que ya hemos discutido en el capítulo anterior, es la descripción del sistema después de la colisión utilizando el concepto de líquido de piones discutido por Shuryak [23], el cual nos dice que “cuando el sistema de partículas siente los efectos de una frontera, en su evolución desde los primeros estados de la colisión hasta los últimos, la distribución de momento del sistema se ve afectada debido a la discretización de los niveles de energía, además la diferente densidad de estados introducido por el tamaño finito del sistema antes del desacoplo también produce efectos en la distribución de momento”. En este capítulo se incorporan en la descripción de nuestro modelo los efectos de la expansión hidrodinámica debida a la presencia de un flujo colectivo, así como los efectos de densidad y frontera para calcular la distribución de momento del sistema de piones y analizar el comportamiento de éstas al variar los parámetros involucrados.

### 3.1. Descripción del modelo

Según la colaboración E-802/866, en colisiones de Au-Au a energías de 11.6 AGeV en el AGS, se produce una importante fracción de frenado [24]. En consecuencia para este caso será apropiado considerar que existe una simetría entre la dirección transversa y longitudinal durante la expansión, de modo que nuevamente estaremos considerando el escenario en el que el sistema de piones de una especie al momento del desacoplo se encuentran en equilibrio térmico y confinado dentro de una esfera de

radio  $R$ , y es descrito desde el sistema de centro de masa de los núcleos colisionantes.

Vamos a calcular distribuciones de momento para piones con rapidez central (es decir  $y=0$ ) lo cual nos permitirá hacer la suposición de que el sistema presenta una expansión esférica y además consideraremos que no existe asimetría entre el flujo transversal y el flujo longitudinal de piones, lo cual no afectará el cálculo de las distribuciones. Esto se debe a que para hacer nuestra descripción del sistema después de la colisión estamos en la región central y suponemos que en ésta los piones producidos no presentan flujo longitudinal.

Con la intención de incorporar los efectos del flujo hidrodinámico consideremos la presencia de un movimiento ordenado representado por el cuadvectores de velocidad

$$u^\mu = \gamma(r)(1, \bar{v}(r)), \quad (3.1)$$

cantidad que genera una redistribución de momento en cada celda de fluido cuando el sistema es visto desde un marco de referencia determinado, que para este caso es el centro de masa. Por otra parte, la tendencia de la materia a ocupar un volumen más grande es compensada en cada celda por la distribución de momento volviéndose más estrecha [25]. La distribución causada por el cuadvectores de velocidad se centra alrededor del momento asociado a la velocidad del elemento de fluido, consecuentemente el espectro térmico en cada celda debería ser descrito sobre este flujo colectivo, esto es, referido al elemento de momento del flujo colectivo. Para describir el movimiento colectivo del sistema de piones en expansión con frontera, vamos a sustituir el operador de momento

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - mu^\mu, \quad (3.2)$$

donde  $m$  es la masa del pion y  $mu^\mu$  representa el movimiento colectivo del elemento de fluido de piones. Cuando incorporamos los efectos del flujo hidrodinámico a la ecuación de Klein-Gordon obtenemos la siguiente ecuación

$$\left[ - \left( i \frac{\partial}{\partial t} - m\gamma(r) \right)^2 + \left( -i\nabla - m\gamma(r)\bar{v}(r) \right)^2 + m^2 \right] \psi(\bar{r}, t) = 0. \quad (3.3)$$

Las soluciones de esta ecuación deben satisfacer la condición de frontera que resulta de imponer confinamiento a nuestro sistema de piones en expansión dentro de una esfera de radio  $R$ , y además debe ser finita en el origen,

$$\psi(|\bar{r}| = R, t) = 0. \quad (3.4)$$

La velocidad de flujo transversal se considera como una parametrización del vector tridimensional de velocidad  $v(r)$ . Si suponemos que el sistema presenta una expansión radial que aumenta proporcionalmente con la distancia del elemento de volumen al centro de la bola de fuego, dicha parametrización queda determinada por

$$\bar{v}(r) = \frac{\beta r}{R} \hat{r}, \quad (3.5)$$



donde  $\beta$  es la velocidad de expansión superficial de la bola de fuego.

De este modo hemos asociado el vector de velocidad tridimensional con la velocidad de flujo transverso. Es importante recordar que estamos ignorando cualquier asimetría entre la expansión longitudinal y la expansión transversa. Por otro lado  $\gamma(r)$  de la Ec. 3.1 es el factor de Lorentz que está definido como

$$\gamma(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (3.6)$$

en donde  $v$  es la velocidad de flujo transverso Ec. 3.5. Al introducir el factor  $\gamma$  en la Ec. 3.3 notamos que sólo se puede resolver de forma numérica. Con la intención de obtener una solución analítica vamos a hacer una aproximación de la función  $\gamma(r)$  al primer término de su expansión en serie de Taylor

$$\gamma(r) \approx 1 + \frac{\beta^2 r^2}{2R^2} + \dots \quad (3.7)$$

Para resolver la Ec.3.3, primero vamos a proponer una solución estacionaria de la forma

$$\psi(r, t) = \frac{\phi(r)}{\sqrt{2E}} e^{-iEt}. \quad (3.8)$$

Con el fin de simplificar la parte espacial de la Ec.3.3 y así obtener una solución analítica aproximada, vamos a hacer una transformación de norma [26]. Queremos encontrar una función tal que al aplicar el gradiente sea

$$\nabla \Lambda(r) = \gamma(r) v_{\perp}(r). \quad (3.9)$$

Como  $\Lambda$  y  $\bar{v}_{\perp}$  sólo dependen de  $r$ , entonces la función es

$$\Lambda(r) = \frac{\beta}{R} \int dr \frac{r}{\sqrt{1 - \left(\frac{\beta r}{R}\right)^2}}, \quad (3.10)$$

$$\Lambda(r) \approx -\frac{R}{\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\beta r}{R}\right)^2. \quad (3.11)$$

De esta forma, la ecuación que debemos resolver para posteriormente obtener el espectro de piones es

$$\left[ E(E - 2m) - m(E - m) \frac{\beta^2 r^2}{R^2} + \nabla^2 \right] \phi(r) = 0. \quad (3.12)$$

Para obtener las soluciones primero vamos a escribir el Laplaciano en coordenadas esféricas. Una vez planteada la ecuación en el sistema esférico de coordenadas utilizamos el método de separación de variables y obtenemos una ecuación angular y otra que depende sólo de las coordenadas espaciales. La ecuación angular tiene como solución los armónicos esféricos y la constante de separación esta asociada con el operador

de momento angular de mecánica cuántica, mientras que para la ecuación espacial utilizaremos el hecho de que la derivada se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} r,$$

y haciendo el cambio de variable

$$\phi(r) = \frac{R(r)}{r},$$

obtenemos una ecuación de oscilador armónico isotrópico en tres dimensiones

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \alpha^4 r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} + \epsilon^2 \right] R(r) = 0, \quad (3.13)$$

en donde  $\alpha$  y  $\epsilon$  están definidos como

$$\alpha^4 = m(E - m) \frac{\beta^2}{R^2}, \quad \epsilon^2 = E(E - 2m) \quad (3.14)$$

Queremos obtener una solución de esta ecuación, para lo cual proponemos

$$R(r) = U(r)e^{-r^2\alpha^2/2},$$

junto con el siguiente cambio de variable

$$U(r) = V(r)r^{l+1}.$$

Con el fin de obtener de forma explícita una ecuación hipergeométrica confluyente hacemos

$$W(\rho) = W(\alpha^2 r^2)$$

y obtenemos

$$\left\{ \rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \left[ \left( l + \frac{3}{2} \right) - \rho \right] \frac{d}{d\rho} - \left[ \frac{1}{2} \left( l + \frac{3}{2} \right) - \frac{\epsilon^2}{4\alpha^2} \right] \right\} \omega(\rho) = 0, \quad (3.15)$$

la cual tiene como solución

$$\begin{aligned} \omega(\alpha^2 r^2) = & A {}_1F_1 \left[ \frac{l+3/2}{2} - \frac{\epsilon^2}{4\alpha^2}, \left( l + \frac{3}{2} \right), \alpha^2 r^2 \right] + \frac{B}{(\alpha^2 r^2)^{(l+1/2)}} \times \\ & \times {}_1F_1 \left[ 1 - \frac{l+3/2}{2} - \frac{\epsilon^2}{4\alpha^2}, 2 - \left( l + \frac{3}{2} \right), \alpha^2 r^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Queremos que la solución sea regular en el origen, de este modo  $B=0$ . Por último, para escribir la solución completa debemos considerar todos los cambios de variable y las soluciones propuestas, de modo que la solución es

$$\psi_{nlm}(r, t) = \frac{A}{\sqrt{2E}} e^{-iEt} e^{im\frac{\theta r^2}{2R}} \times Y_{lm}(\hat{r}) e^{-\alpha^2 \frac{r^2}{2}} r^l \times {}_1F_1 \left[ \frac{l+3/2}{2} - \frac{\epsilon^2}{4\alpha^2}, \left( l + \frac{3}{2} \right), \alpha^2 r^2 \right], \quad (3.17)$$

en donde  $Y_{lm}$  son los armónicos esféricos y  $A$  es la constante de normalización que se determina utilizando

$$\int d^3r \psi^*(r, t) \vec{\partial}_0 \psi(r, t) = 1, \quad (3.18)$$

y explícitamente  $A$  es

$$A = \frac{\sqrt{2} \alpha^{\frac{2l+3}{2}}}{\left\{ \int_0^{\alpha^2 R^2} du u^{l+1/2} e^{-u} {}_1F_1 \left[ \frac{l+3/2}{2} - \frac{\epsilon^2}{4\alpha^2}, \left( l + \frac{3}{2} \right), \alpha^2 r^2 \right]^2 \right\}^{1/2}}. \quad (3.19)$$

Mientras tanto el espectro de energía estará determinado por la solución de la ecuación hipergeométrica

$${}_1F_1 \left[ \frac{l+3/2}{2} - \frac{\epsilon^2}{4\alpha^2}, \left( l + \frac{3}{2} \right), \alpha^2 r^2 \right] = 0. \quad (3.20)$$

## 3.2. Cálculo de la distribución de momento

Para calcular la distribución de momento vamos a proceder de la misma forma en que lo hicimos en el capítulo 2, es decir, calcularemos la transformada de Wigner que nos da la contribución normalizada de la distribución en espacio fase del estado de energía con números cuánticos  $(k, l, m)$ , y como ya lo hemos dicho, será proporcional al cuadrado del valor absoluto de la transformada de Fourier de la solución normalizada de la ecuación de Klein-Gordon (3.3), de modo que volveremos a utilizar las ecuaciones propuestas en la sección 2.3 del capítulo 2. La función de onda para este caso es

$$2E|\psi(\vec{p})|^2 = \left( \frac{A^2}{4\pi} \right) \left( \frac{2l+1}{p} \right) \left| \int_0^R dr r^{l+3/2} e^{-\left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{im\theta}{2R}\right)r^2} {}_1F_1 \left[ \frac{l+3/2}{2} - \frac{\epsilon^2}{4\alpha^2}, \left( l + \frac{3}{2} \right), \alpha^2 r^2 \right] J_{l+1/2}(pr) \right|^2. \quad (3.21)$$

En el capítulo anterior presentamos un modelo sin expansión y vimos que la función de onda para describir al sistema en el espacio de momentos no dependía del número cuántico  $m$ , sino que sólo era función de la magnitud del momento. En este caso sucede lo mismo ya que estamos considerando funciones de onda propiamente normalizadas, por lo que también se cumple

$$\psi_{nlm'}(\bar{p}) = \psi_{nl}(p)\delta_{m'0}, \quad (3.22)$$

de modo que la distribución de momentos se obtendrá pesando la contribución de cada estado con el factor de Bose-Einstein y sumando sobre las contribuciones de todos los estados (ver Ec. 2.14) donde  $\phi$  está dado por las Ecs. 2.15 y 3.21. Por último el potencial químico  $\mu$  se obtiene de la expresión

$$N = \sum_{n,l} \frac{2l+1}{e^{(E_{nl}-\mu)/T} - 1}, \quad (3.23)$$

donde  $N$  es el número de partículas y  $2l+1$  representa el factor de degeneración correspondiente al número cuántico  $m$ . Como se puede observar, esta ecuación es la misma que la Ec. 2.18, y por lo tanto podemos decir que el número de partículas es independiente de la función de onda.

### 3.3. Discusión sobre los espectros calculados

Para graficar los espectros de piones utilizamos una forma invariante de la función de distribución para esto usamos la Ec. 2.20, en donde  $f(p)$  es la distribución de momento  $\frac{d^3N}{d^3p}$  y la energía está escrita en términos de la masa transversa  $m_{\perp}$  y de la rapidez  $y$  (Ec. 1.10).

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d^2N}{m_{\perp} dm_{\perp} dy} = (m_{\perp} \cosh y) f(p) \quad (3.24)$$

para escribir  $f(p)$  como función de  $p_{\perp}$  primero sustituimos la Ec. 1.10 en la Ec. 1.7, después usamos la Ec. 1.9 y así obtenemos la forma de la distribución invariante.

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d^2N}{m_{\perp} dm_{\perp} dy} = (m_{\perp} \cosh y) \frac{d^3N}{d^3p} (\sqrt{p_{\perp}^2 \cosh^2 y + m^2 \sinh^2 y}) \quad (3.25)$$

A continuación vamos a mostrar las distribuciones de momento calculadas a partir del modelo descrito en este capítulo utilizando la Ec. 3.25. Se muestran cuatro gráficas en las que se varían los parámetros involucrados en el modelo.

La gráfica 3.1(a) muestra la distribución calculada para valores fijos de temperatura  $T=120$  MeV, velocidad de expansión  $\beta=0.5$  y el número de partículas  $N=150$ . Aquí el tamaño del radio es el que se ha variado usando los valores  $R=10$  fm,  $R=8$  fm y  $R=6$  fm. En esta gráfica podemos observar que a grandes valores de momento transverso las distribuciones se comportan de igual forma pero a valores bajos de

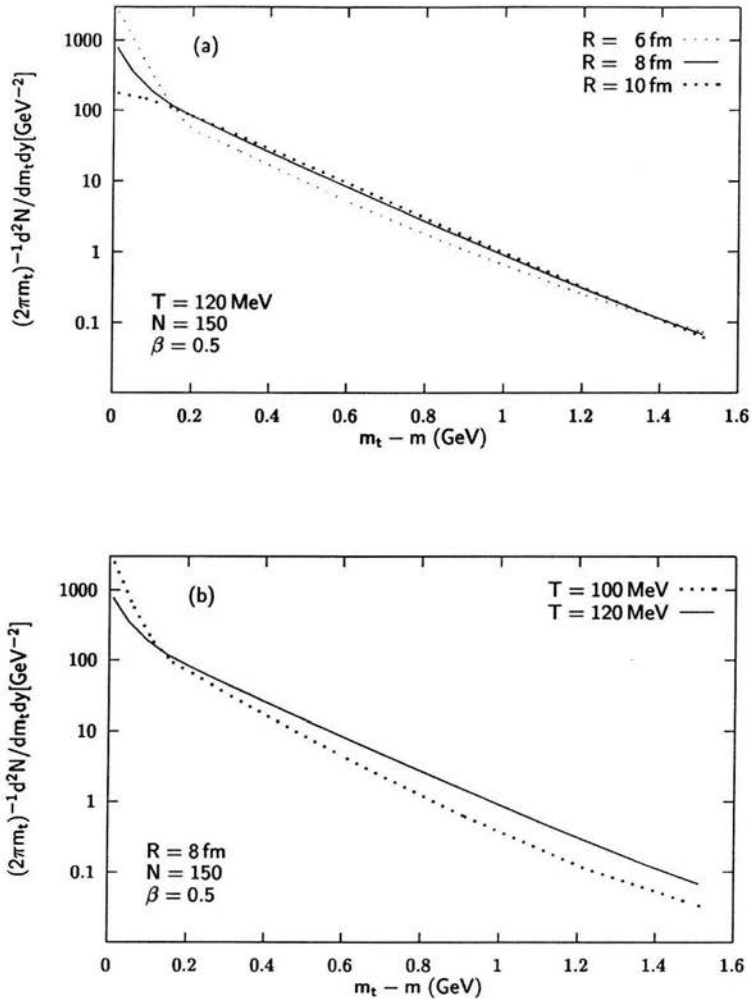


Figura 3.1: Sistemática de la distribución obtenida al variar (a) el radio  $R$  de la bola de fuego y (b) la temperatura, con rapidez central  $y = 0$ .

momento transversal notamos que la convexidad de la curva cambia cuando el valor del radio va disminuyendo. Esto es de esperarse ya que tal y como lo predice el efecto de densidad, cuando consideramos un número fijo de partículas la densidad es inversamente proporcional al radio al cubo.

La gráfica 3.1(b) muestra las distribuciones calculadas al variar la temperatura,

manteniendo fijos los valores del radio ( $R=8$  fm), la velocidad de expansión  $\beta=0.5$  y  $N=150$ . Aquí podemos observar que el efecto principal de variar la temperatura se refleja en la pendiente efectiva de la distribución. Cuando tenemos una distribución a  $T=100$  MeV notamos que muestra un crecimiento mayor cuando nos fijamos en valores bajos de momento transverso, mientras que una distribución a  $T=120$  MeV también muestra un crecimiento, pero éste no es tan pronunciado como en el caso de  $T=100$  MeV. Esto se debe a que estamos considerando un sistema de bosones que a una temperatura crítica se condensarán y una temperatura de  $T=100$  MeV está más próxima a la temperatura crítica.

En la gráfica 3.2(c) se muestran dos distribuciones obtenidas al variar la velocidad de expansión. Los valores para estas velocidades son:  $\beta=0$  y  $\beta=0.5$  con  $R=8$  fm,  $T=120$  MeV y  $N=150$ . El efecto observado al variar la velocidad es que la pendiente inversa efectiva que describe la caída de la distribución es mayor en el caso en que la velocidad de expansión es diferente de cero.

La gráfica 3.2(d) muestra una distribución que fue calculada utilizando una rapidez fuera de la región central con un valor de  $Y_{lab}=3.0$ . Es importante mencionar que distribuciones con rapidez fuera de la central serán calculadas y discutidas en el siguiente capítulo. La importancia del cálculo presentado en este capítulo es que para valores grandes de momento transverso se presenta un abultamiento, es decir, una mayor densidad. Este comportamiento puede ser explicado por el hecho de que a valores propios altos de la energía hay una mayor cantidad de estados cuando confinamos al sistema que cuando lo dejamos expandir libremente.

La gráfica 3.3(a) muestra la distribución invariante de momento comparada con los datos experimentales para piones negativos, arriba de  $m_t - m=0.4$  GeV los datos se ajustan muy bien a la curva. En la gráfica 3.3(b) se compara la distribución con datos experimentales para piones positivos, encontrando de igual forma que los datos se ajustan muy bien para  $m_t - m$  arriba de  $0.4$  GeV.

En el siguiente capítulo se presenta el trabajo central de esta tesis. Se describe un modelo fenomenológico que además de incorporar los efectos más importantes de los modelos teóricos utilizados para explicar el comportamiento de los espectros de piones, incorpora el efecto de una expansión hidrodinámica. Pero a diferencia del modelo descrito en este capítulo, se desarrollará un modelo que considera una asimetría en la dirección de expansión del sistema, de modo que el sistema estará caracterizado por un flujo transverso y un flujo longitudinal.

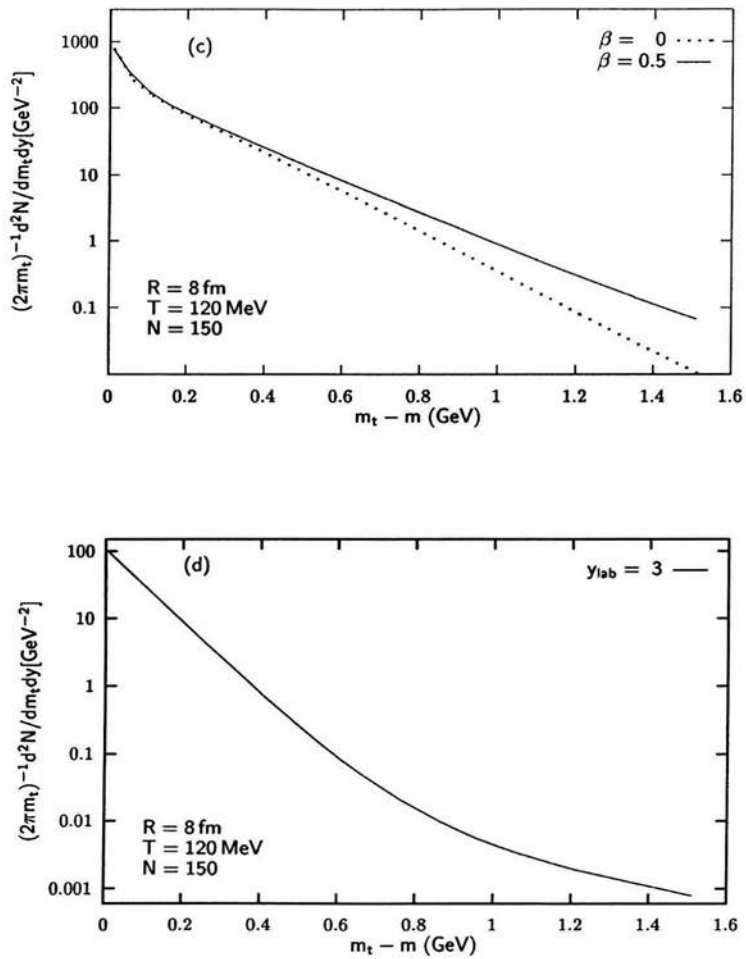


Figura 3.2: Sistemática de la distribución obtenida al variar (c) la velocidad de expansión superficial ( $\beta$ ) con  $y_{cm} = 0$  y (d) distribución para una rapidez en el sistema de laboratorio  $y_{lab} = 3.0$ .

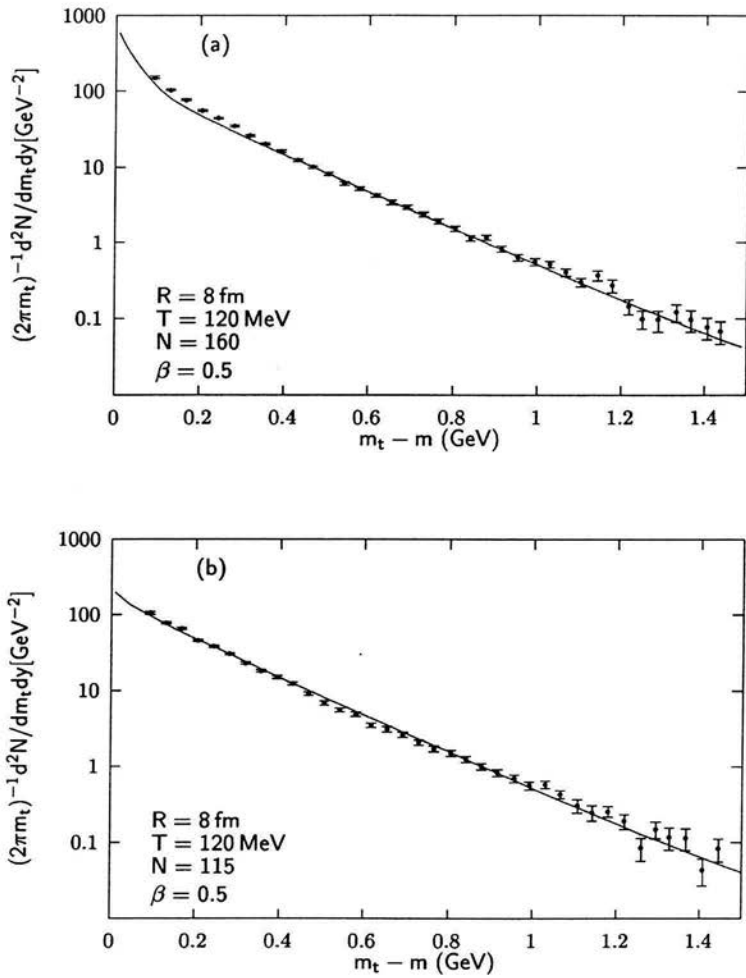


Figura 3.3: Distribución teórica calculada para rapidez en el centro de masa  $y_{cm}=0$  comparada con datos de E-802/866 (a) piones negativos  $N_{\pi^-}=160$  y (b) piones positivos  $N_{\pi^+}=115$ .



## Capítulo 4

# Modelo con simetría cilíndrica para rapidez fuera de la central

### 4.1. Descripción del modelo

Podemos imaginar una colisión del siguiente modo: dos núcleos contraídos debido a los efectos de la relatividad, con radio transverso  $R$  colisionan durante un momento dado. Los dos núcleos se traspasan y empiezan a alejarse uno del otro debido a que, a muy altas energías, el *poder de frenado* es muy bajo comparado con la energía/momento que portan los núcleos. Durante la colisión los núcleos han dejado en la zona de reacción una enorme cantidad de energía y en ésta se espera que se forme una fase en la que los grados de libertad sean los quarks y los gluones (QGP). Como la distancia entre los núcleos colisionantes se incrementa, la expansión longitudinal de cada elemento de volumen provoca una disminución en la densidad de energía/temperatura hasta que ésta es lo suficientemente baja y han cesado las interacciones fuertes entre las partículas de modo que éstas pueden emerger de la bola de fuego. Un aspecto interesante de este escenario es que el número bariónico inicial asociado a cada quark de valencia de los núcleos colisionantes continúa viajando con éstos de modo que la materia producida en la zona de reacción por la colisión tiene número bariónico igual a cero.

Para un tiempo dado después de la colisión, una vez que el sistema alcanza el equilibrio térmico, podemos hacer la suposición de tratar al sistema como si éste fuera un fluido perfecto, donde la entropía se conserva y no hay efectos de disipación. El sistema comienza a evolucionar y entonces asumimos que las partículas involucradas en la colisión se mueven con velocidad de expansión constante ( $\beta$ ). La velocidad de expansión es una consecuencia de que el sistema posee una temperatura efectiva (ver Ec. 1.1), la cual se puede expresar como la temperatura del sistema más la energía de flujo que se transforma en flujo transversal, mientras que el flujo longitudinal depende de que tan transparente u opaca ha sido la colisión.

En el capítulo 3 se describe la colisión desde la región de rapidez central, y bastó con considerar una simetría entre la componente transversa y la componente

longitudinal del flujo. De este modo sólo fue necesario tomar en cuenta una componente: la componente transversa a la velocidad de expansión. Ahora consideramos una colisión de Iones Pesados Relativistas a una energía superior. Mientras más grande es la energía depositada en la colisión será más apropiado introducir una geometría cilíndrica que describa la colisión desde una zona fuera de la región de rapidez central. En ésta la velocidad de expansión tiene componente transversa y longitudinal y para describir la evolución física de la colisión es apropiado considerar las suposiciones mencionadas en los párrafos anteriores y describiremos la colisión desde el sistema de centro de masa.

La velocidad de expansión, visto desde el sistema de centro de masa, será mayor en la zona de rapidez fuera de la central que en la zona de rapidez central. Es importante mencionar que aunque nos estamos situando en rapidez fuera de la central, no estamos describiendo la zona de fragmentación.

Con la intención de incorporar los efectos del flujo hidrodinámico vamos a sustituir el operador de momento por otro que contenga tanto la masa del pion como el momento colectivo del elemento de fluido  $p^\mu \rightarrow p^\mu - mu^\mu$ . Vamos a describir el comportamiento de la expansión del sistema de piones incorporando una frontera, además de escribir la velocidad de flujo como un cuadvectores de velocidad con una componente longitudinal y una componente transversa,

$$u^\mu = \gamma(r)(1, \bar{v}(r)) = \gamma(r)(1, \bar{v}_\perp, \bar{v}_\parallel). \quad (4.1)$$

En la componente transversa estamos considerando la presencia de un flujo ordenado, lo cual quiere decir que sólo el movimiento transverso es colectivo, esto es consecuencia de suponer equilibrio térmico o termalización. La velocidad de flujo transverso se representa por medio de la parametrización del vector  $\bar{v}_\perp$ , del mismo modo que en el caso del modelo esférico con expansión como se ve en Ec. 3.5 [30]. La velocidad de flujo longitudinal  $v_\parallel$  considera el parámetro que involucra la zona de rapidez desde la que estamos describiendo al sistema, además a la velocidad longitudinal  $v_\parallel$  se asocia la velocidad relativista parametrizada mediante el momento longitudinal y la energía en términos de la rapidez,

$$\bar{v}_\parallel(r) = \frac{p_\parallel}{E} = \tanh y. \quad (4.2)$$

Considerando lo anterior, el factor  $\gamma$  de Lorentz queda de la forma

$$\gamma(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - v(r)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - [(\frac{\beta r}{R})^2 + \tanh^2 y]}}. \quad (4.3)$$

En resumen, estamos considerando el caso en el que existe una asimetría entre el flujo longitudinal y el flujo transverso. Entonces tendremos un sistema de piones de una especie dada en equilibrio térmico y confinados en un cilindro de radio transverso  $R$  y de longitud infinita, visto desde el sistema de centro de masa de los núcleos colisionantes. Además estamos suponiendo que el sistema se encuentra en equilibrio térmico al momento del desacoplo.

## 4.2. Solución de la ecuación de Klein-Gordon

Con la intención de obtener los estados estacionarios de la energía para una partícula libre dentro de un cilindro vamos a resolver la ecuación de Klein-Gordon,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \psi(\bar{r}, t) = 0. \quad (4.4)$$

Incorporando las modificaciones hechas al introducir los efectos de flujo transverso y longitudinal descritos anteriormente, la ecuación de Klein-Gordon a resolver es

$$\left[ - \left( i\partial_t - m\gamma(r) \right)^2 + \left( -i\nabla_{\perp} - m\gamma(r)\bar{v}_{\perp}(r) \right)^2 + \left( -i\partial_z - m\gamma(r)\bar{v}_{\parallel}(z) \right)^2 + m^2 \right] \psi(\bar{r}, t) = 0. \quad (4.5)$$

La solución deberá satisfacer la condición de que la función se anule en la frontera y que sea finita en el origen.

$$\psi(|\bar{r}_{\perp}| = R, t) = 0. \quad (4.6)$$

La Ec. 4.5 no tiene solución analítica. Con el fin de obtener una solución analítica aproximada vamos a hacer una expansión en serie de Taylor alrededor del cero sobre el factor  $\gamma$  de Lorentz. Como desde el punto de vista físico sólo queremos un resultado aproximado, al sustituir el factor  $\gamma$  en la Ec. 4.5 consideraremos hasta el segundo orden en las velocidades,

$$\gamma(r) \approx 1 + \left[ \frac{\beta^2 r^2}{2R^2} + \frac{\tanh^2 y}{2} \right] + \dots \quad (4.7)$$

Esta aproximación es válida para pequeñas velocidades de expansión ( $\beta$ ).

Con la intención de simplificar la Ec. 4.5 vamos a hacer una transformación de norma [26]. De igual forma que en la sección 3.1 (Ec. 3.9). En este caso la función  $\Lambda(r)$  estará relacionada con la función de onda mediante

$$\psi(\bar{r}, t) = e^{im\Lambda(r)} \bar{\psi}(\bar{r}, t). \quad (4.8)$$

Como  $\Lambda(r)$  y  $\bar{v}_{\perp}$  sólo dependen de  $r$ , entonces la función en este caso es

$$\Lambda(r) = \frac{\beta}{R} \int dr \frac{r}{\sqrt{1 - \left[ \frac{\beta^2 r^2}{R^2} + \tanh^2 y \right]}}, \quad (4.9)$$

al resolver la integral obtenemos

$$\Lambda(r) = -\frac{R}{\beta} \left(1 - \left[\left(\frac{\beta r}{R}\right)^2 + \tanh^2 y\right]\right)^{1/2}, \quad (4.10)$$

y al considerar la expansión sobre el factor  $\gamma$ . Obtenemos

$$\Lambda(r) \approx -\frac{R}{\beta} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\beta^2 r^2}{R^2} + \tanh^2 y \right]. \quad (4.11)$$

Los términos que no dependen de  $r$  se consideran como una fase constante, la cual se puede omitir. Ahora vamos a hacer la misma transformación con la parte que involucra a la velocidad longitudinal, de modo que el término que se escribirá directamente en la fase será

$$\partial_z \zeta(z) = \gamma(r) \tanh y. \quad (4.12)$$

Resolvemos la integral,

$$\zeta(z) = \frac{z \tanh y}{\sqrt{1 - \left[\frac{\beta^2 r^2}{R^2} + \tanh^2 y\right]}}. \quad (4.13)$$

Considerando la expansión en el factor  $\gamma$  de Lorentz obtenemos la función

$$\zeta(z) \approx z \tanh y. \quad (4.14)$$

Con este procedimiento obtenemos la siguiente ecuación, que se resolverá sólo numéricamente para obtener los estados discretos de la energía,

$$\begin{aligned} - \left[ \left( i\partial_t - m \right)^2 + \left( \frac{\beta^2 r^2}{2R^2} + \tanh^2 y \right) m \left( m - i\partial_t \right) + (i\nabla_\perp)^2 + \right. \\ \left. + (i\partial_z)^2 + m^2 \right] \psi(\bar{r}, t) = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Primero consideramos una solución estacionaria de la forma

$$\psi(r, t) = \frac{\psi(r)}{\sqrt{2E}} e^{-iEt}, \quad (4.16)$$

en donde el factor  $\frac{1}{\sqrt{2E}}$  fue introducido para normalizar la solución. De modo que la Ec. 4.15 se convierte en

$$\left[ E(E - 2m) - m(E - m) \left( \frac{\beta^2 r^2}{2R^2} + \tanh^2 y \right) + (i\nabla_\perp)^2 + (i\partial_z)^2 \right] \psi(\bar{r}) = 0. \quad (4.17)$$

Dado que el sistema es finito, los estados de energía son discretos. Definimos las siguientes constantes

$$\alpha_{nl}^4 = m(E_{nl} - m) \frac{\beta^2}{R^2}, \quad \epsilon_{nl}^2 = E_{nl}(E_{nl} - 2m), \quad (4.18)$$

$$\xi_{nl}^2 = m(E_{nl} - m) \tanh^2 y.$$

Para abreviar la notación a partir de este párrafo omitiré los subíndices  $n$  y  $l$ . De este modo hemos llegado a la ecuación con la que se obtendrán los espectros y que será resuelta con las condiciones de frontera mencionadas anteriormente. La ecuación en coordenadas cilíndricas es

$$\left[ (\epsilon^2 - \alpha^4 r^2 - \xi^2) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi(\bar{r}) = 0. \quad (4.19)$$

Resolvemos esta ecuación utilizando el método de separación de variables. La solución de la ecuación que sólo depende de  $z$  es una onda libre que viaja en dirección positiva y la constante de separación está asociada con el momento longitudinal

$$Z(z) = Ae^{ip_{\parallel}z}. \quad (4.20)$$

Por otro lado, la solución de la ecuación angular se obtendrá utilizando la condición de periodicidad de modo que la constante de separación corresponda al caso que describe funciones periódicas entre  $\theta=0$  y  $\theta=2\pi$  y está asociada al momento angular

$$\Theta(\theta) = Ae^{i\ell\theta} + Be^{-i\ell\theta}. \quad (4.21)$$

Es importante mencionar que para el estado base  $\ell=0$ , la solución es de la forma

$$\Theta(\theta) = A + Be^{i\ell\theta}. \quad (4.22)$$

Por otra parte, la ecuación radial queda de la forma

$$\left[ (\epsilon^2 - \alpha^4 r^2 - \xi^2)r + \frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} R(r) \right) - p_{\parallel}^2 r - \frac{\ell^2}{r} \right] = 0. \quad (4.23)$$

Con el fin de modificar esta ecuación y así llegar a la de un oscilador armónico hacemos el siguiente cambio de variable

$$R(r) = \frac{U(r)}{\sqrt{r}},$$

y ahora la Ec. 4.23 se escribe de la siguiente manera

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \left( \ell^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{1}{r^2} - \alpha^4 r^2 + \epsilon^2 - \xi^2 - p_{\parallel}^2 \right] U(r) = 0. \quad (4.24)$$

La solución de esta ecuación es

$$U(r) = V(r)r^{l+1/2},$$

y al sustituir en la Ec. 4.24, obtenemos

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2(l+1/2)}{r} \frac{d}{dr} + \left( \epsilon^2 - p_{\parallel}^2 - \xi - \alpha^4 r^2 \right) \right] V(r) = 0. \quad (4.25)$$

Como queremos obtener una ecuación de tipo hipergeométrica confluyente hacemos el siguiente cambio de variable

$$V(r) = \phi(r)e^{-r^2\alpha^2/2},$$

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + 2 \left( \frac{(l+1/2)}{r} - \alpha^2 r \right) \frac{d}{dr} + \left( \epsilon^2 - p_{\parallel}^2 - \xi - \alpha^2 \left( 2(l+1/2) + 1 \right) \right) \right] V(r) = 0. \quad (4.26)$$

Posteriormente haciendo el cambio

$$\rho = \alpha^2 r^2 \quad \text{y} \quad \phi(r) = \phi(\rho),$$

llegamos a

$$\left\{ \rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \left[ (l+1) - \rho \right] \frac{d}{d\rho} - \left[ -\frac{\epsilon^2 - p_{\parallel}^2 - \xi^2}{4\alpha^2} + \frac{1}{2} (l+1) \right] \right\} \phi(\rho) = 0, \quad (4.27)$$

la cual tiene como solución [27] la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \phi(\rho) = & C {}_1F_1 \left[ \frac{l+1}{2} - \frac{(\epsilon^2 - p_{\parallel}^2 - \xi^2)}{4\alpha^2}, (l+1), \rho \right] + \\ & + \frac{D}{\rho^{-l}} {}_1F_1 \left[ 1 - \frac{l+1}{2} - \frac{(\epsilon^2 - p_{\parallel}^2 - \xi^2)}{4\alpha^2}, l-1, \rho \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Las condiciones de frontera nos dicen que la solución debe ser finita en el origen de modo que el segundo sumando debe ser igual a cero y la solución 4.28 queda de la siguiente forma

$$\phi(\rho) = C {}_1F_1 \left[ \frac{l+1}{2} - \frac{(\epsilon^2 - p_{\parallel}^2 - \xi^2)}{4\alpha^2}, (l+1), \rho \right]. \quad (4.29)$$

La Ec. 4.4 impone la condición de que  $\phi(\rho) = 0$ . De este modo se calcularán los estados discretos de la energía que depende de los números cuanticos  $n$  y  $l$ . Considerando los cambios de variable realizados en el desarrollo, tenemos finalmente la solución general de la ecuación de Klein-Gordon con expansión

$$\begin{aligned} \psi_{nl}(r, t) = & \frac{A}{\sqrt{2E}} \left[ e^{i\theta} + \frac{B}{A} e^{-i\theta} \right] \times \\ & \exp \left[ -iEt + im \frac{\beta r^2}{2R} + imz \tanh y + ip_{\parallel}^2 z - \alpha_{nl}^2 \frac{r^2}{2} \right] \times \\ & r^l {}_1F_1 \left[ \frac{l+1}{2} - \frac{(\epsilon^2 - p_{\parallel}^2 - \xi^2)}{4\alpha^2}, \left( l+1 \right), \alpha^2 r^2 \right], \end{aligned} \quad (4.30)$$

en donde  $A$  y  $B$  son constantes de normalización que se calculan con la expresión [28]

$$|A|^2 \int d^3r \psi^*(r, t) \overleftrightarrow{\partial}_t \psi(r, t) = 1. \quad (4.31)$$

Un hecho importante de remarcar es que la solución de la ecuación angular es diferente para el estado base y para los estados excitados, la condición de periodicidad nos dice que para el estado base la constante de normalización  $B$  es igual a cero, mientras que para estados excitados  $B$  es diferente de cero. Tal hecho implica que al calcular la normalización, la integral angular contribuirá con un peso diferente para los estados excitados que para el estado base, en concreto, los estados con momento angular diferente de cero tendrán una contribución del doble de la que tiene el estado base, como se ve en las ecuaciones 4.21 y 4.22

Haciendo el cambio de variable  $u = r^2 \alpha^2$  obtenemos la normalización

$$A = \frac{\alpha^{(l+1)}}{\left\{ \sqrt{2\pi} \int_0^{\alpha^2 R^2} du u^l e^{-u} {}_1F_1 \left[ \frac{l+1}{2} - \frac{(\epsilon^2 - p_{\parallel}^2 - \xi^2)}{4\alpha^2}, l+1, \alpha^2 r^2 \right]^2 \right\}^{1/2}}. \quad (4.32)$$

### 4.3. Cálculo de la distribución de momento

La distribución de partículas en el espacio fase se obtiene utilizando la función de Wigner [28]. Una de las propiedades de la función de Wigner es que si integramos sobre las coordenadas espaciales obtenemos la densidad de probabilidad en el espacio de momentos, de este modo encontramos que la distribución de Wigner se reduce a una transformada de Fourier

$$\psi_{nl}(\bar{p}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3r e^{-i\bar{p}\cdot\bar{r}} \psi_{nl}(\bar{r}). \quad (4.33)$$

La contribución de estado de energía con números cuánticos  $n$  y  $l$  a la distribución de momento está dada en términos del cuadrado del valor absoluto de la transformada de Fourier

$$2E|\psi(\vec{p})|^2 = A^2(2\pi)^4 \left( \frac{1}{2\alpha^{2+i}} \right)^2 \left| \int_0^{\alpha^2 r^2} dr r^{l/2} e^{-\left(\frac{\epsilon^2}{2} - \frac{im\phi}{2R}\right)r^2} J_l \left( p \frac{\sqrt{r}}{\alpha} \right) {}_1F_1 \left[ \frac{l+1}{2} - \frac{(\epsilon^2 - p_{\parallel}^2 - \xi^2)}{4\alpha^2}, l+1, \alpha^2 r^2 \right] \right|^2. \quad (4.34)$$

De modo que el espectro de piones se obtiene pesando cada estado de energía con la distribución de Bose

$$\frac{d^3 N}{d^3 p} = \sum_{n,l} \frac{\phi_{nl}(p)}{e^{(E_{nl}-\mu)/T} - 1}, \quad (4.35)$$

donde  $\phi$  está dada por

$$\phi(\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3} 2E|\psi(\vec{p})|^2. \quad (4.36)$$

El potencial químico se calcula integrando la distribución de momentos para un número de partículas dado y utilizando el hecho de que la función de onda en el espacio de momentos está normalizada

$$N = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \sum_{n,l} \frac{|\phi(\vec{p})|^2}{e^{(E_{nl}-\mu)/T} - 1}. \quad (4.37)$$

## 4.4. Sistemática de la distribución

Es necesario escribir la distribución de momento transverso usando una distribución invariante en términos del número de partículas [8]. Utilizamos la Ec. 2.19 de modo que para este cálculo dicha ecuación queda escrita como

$$E \frac{d^3 N}{d^3 p} = \frac{m_{\perp} \cosh y d^3 N}{p_{\perp} dp_{\perp} d\phi dp_z}. \quad (4.38)$$

Utilizando el hecho de que  $p_{\perp} dp_{\perp} = m_{\perp} dm_{\perp}$  y que  $dp_z = m_{\perp} \cosh y dy$ , obtenemos la expresión para calcular los espectros

$$E \frac{d^3 N}{d^3 p} = \frac{1}{2\pi m_{\perp}} \frac{d^2 N}{dm_{\perp} dy}, \quad (4.39)$$

en donde  $\frac{d^3 N}{d^3 p}$  es la distribución de momento y está dada como función del momento transverso (Ec. 1.9).



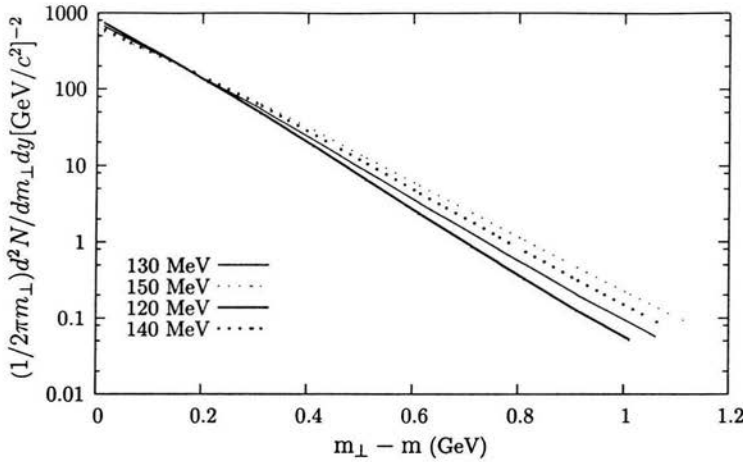


Figura 4.1: Sistemática de la distribución para radio  $R=8$  fm, velocidad de expansión  $\beta=0.5$  y número de piones  $N_{\pi^-}=4$  en el intervalo de rapidez centrado en  $y=0.8$  con  $\Delta y=\pm 0.1$ , para diferentes valores de temperatura.

Esta distribución es invariante siempre que se consideren los mismos intervalos para la rapidez en el sistema de referencia del centro de masa.

Las gráficas 4.1-4.4 muestran la sistemática obtenida al variar los parámetros involucrados en el cálculo de la distribución invariante de momento. Los parámetros involucrados en el modelo son la temperatura al momento del desacople  $T=120$  MeV, la multiplicidad  $N_{\pi^-}=130$  [29], el radio del núcleo de oro  $R=8$  fm y la velocidad de expansión  $\beta=0.5$ . Las distribuciones fueron calculadas utilizando  $y_{cm}=0.8$  pues consideramos que las distribuciones se ajustaran mejor a este valor ya que el modelo cilíndrico presentado contempla rapidez fuera de la central y la expansión del sistema piones considera flujo longitudinal así como flujo transversal.

El potencial químico se obtuvo fijando el número de partículas que reporta la colaboración E895 para piones negativos  $N_{\pi^-}=40$  [29] multiplicado por el intervalo de rapidez. De este modo sólo se consideran a los piones producidos en la región de rapidez ( $\Delta y=0.1$ ) en la que estamos calculando las distribuciones.

La gráfica 4.1 muestra el comportamiento de la distribución al variar la temperatura  $T$  y manteniendo fijos los parámetros  $R=8$  fm, la velocidad superficial de expansión  $\beta=0.5$  y el número de partículas  $N_{\pi^-} \approx 4$  ara un intervalo de rapidez de 0.1. El efecto principal se manifiesta en la pendiente efectiva que describe la caída de la distribución. También se puede ver que la curva a una temperatura de  $T=120$  MeV crece más rápido que para una temperatura mayor  $T=130$  MeV,  $T=140$  MeV ó  $T=150$  MeV. Este efecto se debe a que las partículas tienen una energía mayor cuando aumenta la temperatura de modo que habrá mayor densidad de partículas a

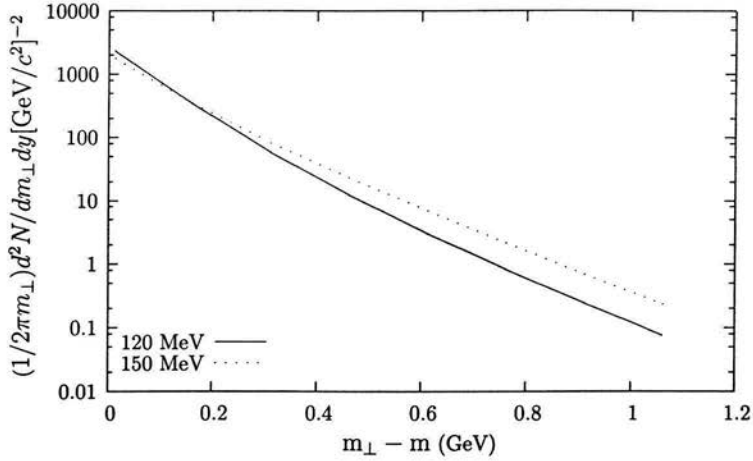


Figura 4.2: Distribuciones obtenidas para un radio de  $R=3$  fm, velocidad de expansión  $\beta=0.5$  y variando la temperatura  $T=120$  MeV y  $T=150$  MeV.

momento transversal alto.

En la gráfica 4.2 se puede observar el mismo efecto que en la gráfica 4.1 donde se varía la temperatura. La diferencia entre las dos gráficas es que en la última distribución fue calculada para una densidad de partículas mayor. Se puede observar que el comportamiento a bajo momento es diferente ya que en el caso de la gráfica 4.1 tenemos una distribución convexa en la región de bajo momento mientras en la gráfica 4.2 en la misma región de momento la distribución es cóncava. Esto se debe a que el número de partículas es mayor en la gráfica 4.2.

La gráfica 4.3 muestra el comportamiento de la distribución para dos diferentes valores del radio  $R=8$  fm y  $R=3$  fm a una temperatura  $T=120$  MeV. La velocidad superficial de expansión es de  $\beta=0.5$  y una densidad total de partículas fija ( $\frac{d^2 N_{\pi^-}}{d^3 p} \approx 4$ ). Para un radio grande ( $R=8$  fm), el valor del potencial químico está próximo al estado base, de modo que los estados con energía más baja contribuyen con un peso más significativo mientras que para un radio menor ( $R=3$  fm) el número de partículas es muy pequeño y el valor del potencial químico está muy alejado del primer estado de energía. El efecto de variar el radio provoca un cambio en la densidad ya que si tenemos un número fijo de partículas la densidad es inversamente proporcional al radio.

En la gráfica 4.4 se muestran las distribuciones obtenidas al variar el número de partículas dejando fijo el radio. Es importante mencionar que el efecto producido en este caso debe ser el mismo que cuando variamos el radio y se fija el número de partículas, sin embargo, en este caso es más evidente el efecto de densidad. En la gráfica 4.4 se ve de forma clara la convexidad de la curva a bajos momentos en el

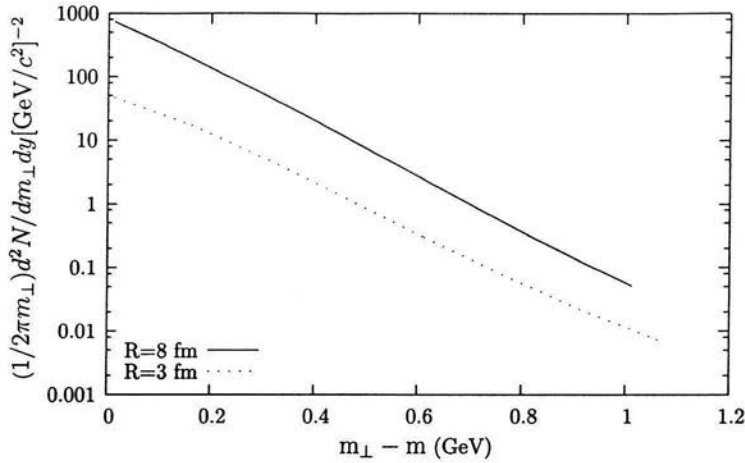


Figura 4.3: Distribuciones obtenidas al variar el radio ( $R$ ), manteniendo constante la velocidad de expansión  $\beta=0.5$ , la densidad de partículas y la temperatura  $T=120$  MeV.

caso de  $N_{\pi^-} \approx 7$ , mientras que en la misma región de momento para el caso en que  $N_{\pi^-} \approx 0.2$  se nota que la curva ha cambiado a cóncava.

En la gráfica 4.5 se compara el modelo esférico con el modelo cilíndrico para rapidez central. Se puede ver que en el caso cilíndrico la pendiente inversa es menor que en el caso esférico. Esto puede deberse a la distinta geometría de las fronteras pues en el caso esférico la frontera envuelve todo el volumen de la reacción, mientras que en el caso cilíndrico la frontera no incluye las tapas del cilindro y, por consiguiente, en el modelo esférico esperamos que la densidad de estados sea mayor que el modelo cilíndrico a alto  $p_{\perp}$  y es en este aspecto en el que nos encontramos trabajando actualmente.

Finalmente en la gráfica 4.6 se compara el caso de simetría esférica [30] con el caso de simetría cilíndrica para rapidez fuera de la central ( $y=0.8$ ). Notemos que la distribución calculada con el modelo esférico se ajusta de manera aceptable a los datos experimentales [29]. En cambio, la distribución calculada con el modelo cilíndrico se aleja considerablemente de estos datos. De aquí se puede decir que el modelo con geometría esférica funciona bien para energías del AGS, y se espera que el modelo con geometría cilíndrica funcione mejor para energías de RHIC.

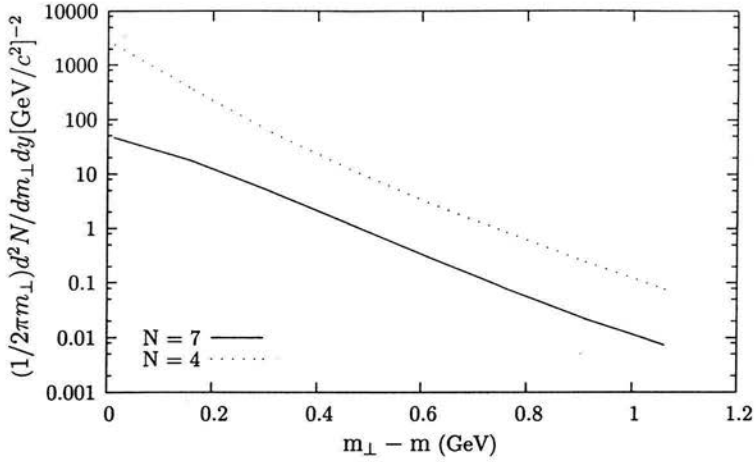


Figura 4.4: Sistemática obtenida al variar el número de partículas, dejando fijo el radio  $R=8$  fm, la velocidad de expansión  $\beta=0.5$  y la temperatura  $T=120$  MeV.

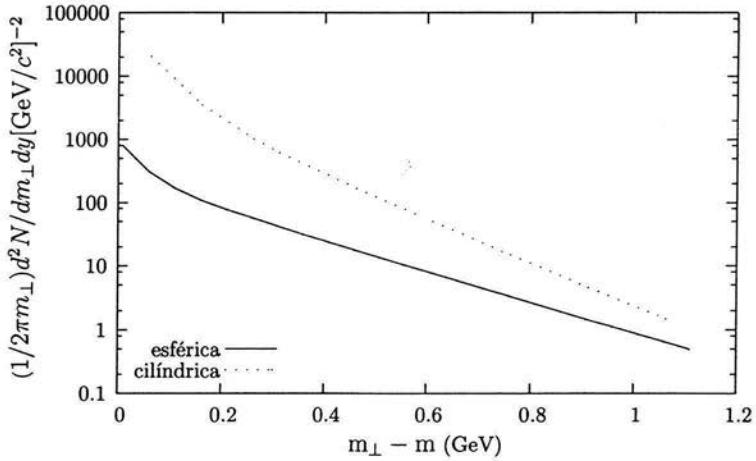


Figura 4.5: Comparación de las distribuciones obtenidas con el modelo esférico y el modelo cilíndrico para rapidez central usando los parámetros  $R=8$  fm,  $\beta=0.5$  y  $T=120$  MeV en ambos casos.

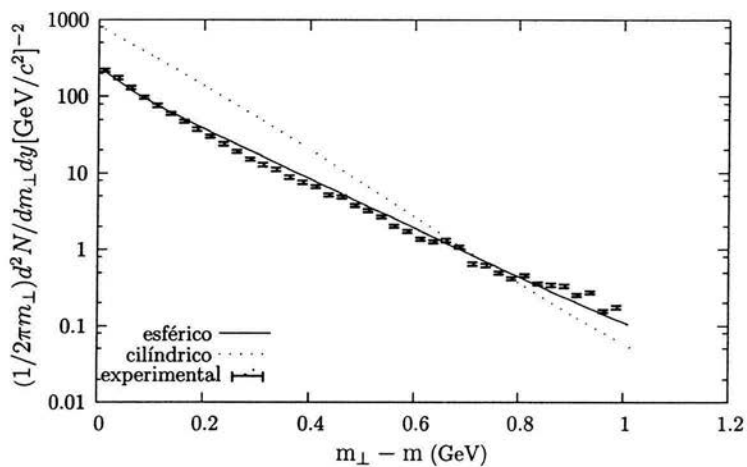


Figura 4.6: Comparación de las distribuciones obtenidas con el modelo esférico y el modelo cilíndrico para rapidez fuera de la central ( $y=0.8$ ) usando los parámetros  $R=8$  fm,  $\beta=0.5$  y  $T=120$  MeV en ambos casos. Los puntos experimentales corresponden a colisiones Au+Au a 8 A GeV reportados por la colaboración E895 del AGS-BNL [29]. Las barras de error corresponden a errores sistemáticos.

# Capítulo 5

## Conclusiones

La producción y estudio de materia nuclear bajo condiciones extremas de densidad y de temperatura en colisiones de iones pesados relativistas es uno de los temas de mayor interés en la actualidad dentro del campo de la física de altas energías. Se espera que estas colisiones, mediante el análisis de espectros de partículas producidas durante la colisión, demuestren la existencia del QGP. Para describir dichas colisiones existen varios modelos ampliamente aceptados, por ejemplo el de Björken [31]. Independientemente si se forma o no el QGP, es importante conocer el comportamiento de la materia en etapas posteriores a la colisión. Por ejemplo, la etapa de enfriamiento, que es justo cuando se da el proceso de hadronización y el promedio de separación entre los piones es menor que el rango de la interacción fuerte (1 fm), la cual resulta en promedio atractiva. La evolución de dicho estado del sistema puede describirse de mejor forma cuando suponemos un líquido de piones en lugar de un gas. Un efecto interesante de este esquema es la aparición de una tensión superficial que actúa como una frontera reflejante para los piones [23], de modo que si los piones se mueven en dirección de dicha frontera, ésta permitirá tener confinado al sistema. Introducir una frontera provoca que el número de estados sea mayor que un sistema de piones sin frontera. Se ha encontrado que las distribuciones calculadas con estas suposiciones se ajustan aceptablemente a las distribuciones experimentales.

Los piones que se encuentran confinados dentro de la frontera experimentan una gran cantidad de dispersiones. Además en colisiones de Au-Au a energías de 11.6 GeV A en el AGS se reporta una importante fracción de frenado [24]. Es por esto que Ayala et al. [30] encontraron conveniente introducir un modelo que tomara en cuenta el modelo de líquido de piones con frontera y que considerara efectos producidos por una expansión hidrodinámica con simetría entre la dirección transversa y longitudinal de la expansión. Estos autores calcularon distribuciones de momento para piones con rapidez central (es decir  $y=0$ ) lo cual les permitió hacer la suposición de que el sistema presenta una expansión esférica. Éste modelo se comparó con datos experimentales obteniendo una aproximación aceptable.

En el presente trabajo se consideró una colisión de iones pesados relativistas a energía superiores a 20 GeV A. Se consideró apropiado introducir una geometría

cilíndrica que describa la colisión desde una región de rapidez fuera de la central. Es importante mencionar que en la expansión se considera una asimetría de modo que el flujo tiene una componente longitudinal distinta de la componente transversa. Para describir la evolución física de la colisión se supuso que en el desacople el sistema de piones está en equilibrio térmico. Lo anterior corresponde a asumir que la razón total de las interacciones es alta comparada con la razón de expansión. La distribución invariante de momento está determinada por las condiciones de frontera justo antes del desacople, es decir, cuando las partículas interactuaron de forma fuerte por última vez.

Para incluir los efectos del flujo hidrodinámico describimos el comportamiento de la expansión del sistema de piones incorporando una frontera. También escribimos la velocidad de flujo como un cuádrivector de velocidad con una componente longitudinal y una componente transversa. En esta última componente consideramos la presencia de un flujo ordenado, con lo cual suponemos que sólo el movimiento transverso es colectivo, y a su vez esto último es consecuencia de suponer equilibrio térmico o termalización. La velocidad de flujo transverso es una parametrización del vector de velocidad  $v(r)$ . Esta parametrización considera que el sistema presenta una expansión radial que es proporcional a la distancia del elemento de volumen al centro de la bola de fuego.

En la dirección longitudinal consideramos el caso simple descrito por el escalamiento de Björken tal que la velocidad longitudinal del elemento de fluido es proporcional a la distancia al centro de la bola de fuego.

A partir de la solución hemos descrito la sistemática de los espectros para rapideces fuera de la central y comparado con la solución encontrada en el caso en que la simetría es esférica.

Para el futuro inmediato haremos de comparar nuestros resultados con datos experimentales a energías del AGS y de RHIC, esperando que la geometría cilíndrica se ajuste mejor a los datos experimentales.

# Bibliografía

- [1] D. H. Perkins, *Introduction to high energy physics*, Addison-Wesley (1972).
- [2] F. Halzen, A. D. Martin, *Quarks and leptons: an introductory course in modern particle physics*, John Wiley & Sons (1984).
- [3] E. Quercigh, J. Rafelski, *A strange quark plasma*, *Physics World*, 37, (Oct. 2000).
- [4] L. P. Csernai, *Introduction to relativistic heavy ion collisions*, John Wiley & Sons (1994).
- [5] *The Nuclear Equation of State*, Parts A and B, eds W. Greiner and H. Stöcker, NATO Asi Series, Peniscola, Spain, (1989).
- [6] J. Maruhn and W. Greiner, *Phys. Rev. Lett.*, **44** (1980) 725.
- [7] Quark Gluon Plasma, ed. R. Hwa, *Advanced series on Directions in High Energy Physics*, World scientific Publishing Co. Pte. Ltd. **Vol. 1.6** (1990).
- [8] H. R. Schmidt and J. Schukraft, *J. Phys. G*, **19** (1984) 1705.
- [9] S. Esumi, S. Chapman, H. van Hecke and N. Xu. *Phys. Rev. C*, **55** (1997) R2163.
- [10] A. Ayala and A. Smerzi. *Phys. Lett.* **B405** (1997) 20.
- [11] L.P. Csernai and D. Strottman, *Relativistic Heavy Ion Physics*, *International Review of Nuclear Physics* **Vols. 5-6 p.1** (World scientific, 1991).
- [12] Strobele et al, (NA35 Collaboration), *Z.Phys.* **C38** (1988) 89.
- [13] R. Albrecht et al, (WA80 Collaboration), *Z.Phys.* **C47** (1990) 367.
- [14] F. Videbaek et al, (E802/866 Collaboration), *Nucl. Phys* **A590** (1995) 249c.
- [15] J. Barrette et al, (E877 Collaboration), *Nucl. Phys* **A590** (1995) 259c.
- [16] J. Barrette et al, (E814 Collaboration), *Phys. Lett.* **B351** (1995) 93.
- [17] B.-A. Li and Bauer, *Phys.Lett.* **B254** (1991) 335.
- [18] Lee and U. Heinz, *Z. Phys. C* **43** (1989) 425.



- [19] M. Kataja and P.V. Ruus Kanen, *Phys.Lett.* **B243** (1990) 181.
- [20] M.G.-H. Mostafa and C.-Y. Wong, *Phys.Rev.C* **51** (1995) 2135
- [21] P. Gerber and H. Leutwyler, *Phys. Lett.* **B246** (1990) 513.
- [22] S. Pratt, *Phys. Lett.* **B301** (1993) 159.
- [23] E.V. Shuryak, *Phys.Rev.*, **D42** (1990) 1764.
- [24] L. Ahle et al, (E802/866 Collaboration), *Phys. Rev.*, **C57(2)** (1998) R466.
- [25] P.J. Siemens and J.O. Rasmussen, *Phys. Rev. Lett.*, **42(14)** (1979) 880.
- [26] J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley (1994).
- [27] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press Inc. (1985)
- [28] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Dover Publications Inc., (1999)
- [29] J. Klay et al, *Charged Pion Production in 2 to 8 AGeV Central Au+Au Collisions*, nucl-ex/0306033.
- [30] A. Ayala, et al, *Phys. Rev.* **C60** (1999) 041.
- [31] J.D. Björken, *Phys. Rev.*, **D27** (1983) 140.
- [32] T. W. Atwater, et al. *Phys.Lett.* **B199** (1987) 30.