

01177



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

División de Estudios de Posgrado
FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA

**“MODELO MATEMÁTICO PARA ANALIZAR LA DINÁMICA DEL
FÓSFORO ASIMILABLE EN LOS LAGOS”**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN INGENIERIA

(AMBIENTAL)

P R E S E N T A:

I.Q. CLAUDIA SELENE ASTORGA GRAJEDA

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JORGE LUIS DE VICTORICA ALMEIDA



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Claudia Selene

Astorga Grayeda

FECHA: 13-02-04

FIRMA: [Firma manuscrita]

El presente trabajo se desarrolló en el área ambiental del Instituto de Ingeniería de la UNAM, bajo la dirección del Dr. Jorge Luis de Victorica Almeida y la asesoría del M. en I. Vicente fuentes Gea y el Dr. Víctor Manuel Luna Pabello, quienes formaron parte del comité tutorial

A mi Madre

y

Mis Abuelos

Con Cariño

AGRADECIMIENTOS

Al **Dr. Jorge L. De Victorica Almeida**, director de esta tesis, por su valiosa asesoría y apoyo durante la realización del trabajo.

Al M en I. **Vicente Fuentes Gea** por su asesoría durante la elaboración del programa de computo en todo momento requerido.

Al Dr. **Víctor M. Luna Pabello** por sus acertadas recomendaciones durante la elaboración del presente.

Al cada uno de los integrantes del Jurado, por sus observaciones que mejoraron el trabajo final.

INDICE GENERAL

	Pág.
ÍNDICE DE TABLAS	i
ÍNDICE DE FIGURAS	ii
GLOSARIO DE TÉRMINOS	iii
RESUMEN	iv
1. INTRODUCCIÓN	1
2. OBJETIVOS Y ALCANCES	3
3. ANTECEDENTES	
3.1. Calidad del agua en los lagos y su comportamiento	4
3.2. Dinámica del fósforo en los lagos	7
4. MODELOS PARA EL ESTUDIO DEL FÓSFORO EN LAGOS	
4.1. Antecedentes y Desarrollo Histórico	10
4.2. Ecuaciones generales de los modelos de calidad del agua	15
5. CONFORMACIÓN DEL MODELO DE FÓSFORO ASIMILABLE	18
5.1. Ecuaciones	21
5.2. Solución numérica	28
6. APLICACIÓN DEL MODELO	32
7. IMPORTANCIA RELATIVA DE LOS PRINCIPALES PARÁMETROS CINÉTICOS CONSIDERADOS EN LA ESTRUCTURACIÓN DEL MODELO	35
8. RESULTADOS Y EVALUACIÓN	
8.1. Dinámica de los compuestos de fósforo	37
8.2. Importancia relativa de los principales parámetros cinéticos considerados en la estructuración del modelo	43
9. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	
9.1. Conclusiones	51
9.2. Recomendaciones	52
BIBLIOGRAFÍA	53

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla		Pág.
1	Parámetros cinéticos usados en las simulaciones	33
2	Condiciones iniciales usadas en las simulaciones	33
3	Perfil térmico usado en las simulaciones	34
4	Magnitud de las variaciones en los parámetros cinéticos	36
5	Perfil de concentraciones de las diversas formas de fósforo y tiempo en que se alcanzaron las condiciones estacionarias	41
6	Variabilidad porcentual del fósforo asimilable en la columna de agua	46
7	Variabilidad porcentual del fósforo en fitoplancton en la columna de agua	47
8	Variabilidad porcentual del fósforo en zooplancton en la columna de agua	48
9	Variabilidad porcentual del fósforo orgánico particulado en la columna de agua	49
10	Variabilidad porcentual del fósforo orgánico disuelto en la columna de agua	50

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura		Página
1	Regiones que normalmente conforman un lago estratificado térmicamente	5
2	Principales trayectorias del ciclo de fósforo en los lagos	9
3	Representación de un lago como sistema completamente mezclado	15
4	Discretización de la columna de agua	18
5	Componentes, procesos y variables consideradas en el ciclo simplificado del fósforo	20
6	Rapidez de crecimiento específico como función de la concentración de fósforo	25
7	Dominio de integración del método Runge - Kutta	28
8	Conceptualización del algoritmo de solución	31
9	Resultados de la simulación en el elemento 2	38
10	Resultados de la simulación en el elemento 3	38
11	Resultados de la simulación en el elemento 4	39
12	Comportamiento del fósforo asimilable en los elementos 2, 3 y 4	39
13	Perfil de concentración de fósforo asimilable en la columna de agua, correspondiente a las condiciones estacionarias	42
14	Perfil de concentración de fósforo en fitoplancton y zooplancton, fósforo orgánico particulado y disuelto en la columna de agua, correspondiente a las condiciones estacionarias	42

GLOSARIO DE TÉRMINOS

P_1	Fósforo inorgánico disuelto (fósforo asimilable)
P_2	Fitoplancton en términos de fósforo
P_3	Zooplancton en términos de fósforo
P_4	Fósforo orgánico particulado
P_5	Fósforo orgánico disuelto
k_{sp}	Constante de saturación media de fósforo para la asimilación de fitoplancton
μ_e	Tasa de crecimiento específica de fitoplancton
μ_m	Tasa máxima de crecimiento de fitoplancton
k_{e2}	Tasa de excreción de fitoplancton
D_2	Tasa de mortandad de fitoplancton
G_2	Tasa de pérdida de fitoplancton por depredación de zooplancton
C_m	Tasa de crecimiento máxima de zooplancton
k_{sz}	Constante de saturación media para la ingesta de zooplancton
D_3	Tasa de mortandad de zooplancton
k_{e3}	Tasa de excreción de zooplancton
η_2	Eficiencia de ingesta de detrito por el zooplancton
η_3	Eficiencia de ingesta de fitoplancton por el zooplancton
f_i	Factor de preferencia relativo a la fuente de alimento "i"
k_d	Tasa de descomposición de fósforo orgánico particulado
G_4	Tasa de pérdida de fósforo particulado por depredación de zooplancton
k_h	Tasa de hidrólisis de fósforo orgánico soluble
ω_2	Fracción inorgánica disuelta de excreta del fitoplancton
ω_3	Fracción inorgánica disuelta de excreta del zooplancton
ω_4	Fracción de productos de descomposición de fósforo particulado disponible para el fitoplancton
F	Factor de atenuación en el crecimiento del fitoplancton por efecto de la intensidad de luz disponible
$F(T)$	Efecto de la temperatura sobre la tasa de crecimiento de fitoplancton
$F(P_1)$	Efecto de la concentración de fósforo asimilable sobre la tasa de crecimiento de fitoplancton
I	Intensidad de luz disponible
I_s	Intensidad de saturación de la luz para el fitoplancton
$I(z)$	Intensidad de luz, a la profundidad z
I_0	Intensidad de luz en la superficie del agua
γ	Coefficiente de extinción de la radiación solar debido a las propiedades ópticas del sistema
z	Profundidad en la columna de agua

RESUMEN

En México, los sistemas lacustres constituyen una de las principales fuentes para abastecimiento de agua; sin embargo, también han sido receptores susceptibles a la contaminación mediante la incorporación de materia orgánica y nutrientes; un ejemplo de los últimos, es el fósforo, que en cantidades superiores a las requeridas por los ecosistemas, en algunos casos ha provocado el crecimiento excesivo de plantas acuáticas y con ello, la degradación de la calidad del agua y la eutrofización de estos sistemas.

Este problema, ha inducido a investigaciones tendientes a explicar el comportamiento dinámico de estos sistemas y proponer procedimientos para su restauración. Así, se ha demostrado que los productores primarios, constituyen la base para el estudio de la dinámica de la calidad del agua en lagos.

El comportamiento de la calidad del agua en los sistemas acuáticos está determinado por numerosos factores físicos, químicos y biológicos, que al actuar de manera interrelacionada dan origen a diversos procesos internos. El análisis individual de estos procesos, proporciona un conocimiento limitado de las variaciones de la calidad del agua y por tanto insuficiente para resolver los problemas relacionados con el manejo, prevención y control de la contaminación de los lagos. Una manera de abordar esta problemática, ha sido mediante el uso de modelos matemáticos, los cuales han demostrado ser una herramienta útil que coadyuva a estimar los efectos de las diversas decisiones adoptadas para el manejo y conservación de la calidad del agua en los lagos.

El desarrollo de los modelos matemáticos para el estudio del comportamiento del fósforo en los lagos, inició en la década de los sesentas; sin embargo, la complejidad de los procesos que intervienen en dicho ciclo, el número de parámetros involucrados y la escasa información disponible de tales parámetros para cada sitio de estudio, han limitado su uso. Lo anterior, aunado a lo complicado de la estructura y dinámica de los sistemas acuáticos y a su carácter estocástico natural, ha impedido la formulación de un modelo dinámico completo de aplicación general. Además, en la mayoría de estos modelos, existen discrepancias en cuanto a su estructura y grado de complicación para abordar un mismo problema.

Dada la dificultad de adaptar los modelos ya desarrollados para el estudio de casos particulares, en este trabajo, se estructura un modelo simplificado que permite simular, en una primera aproximación, la dinámica del fósforo asimilable en los lagos. El modelo se desarrolla con base en el principio de conservación de masa y las ecuaciones cinéticas de los procesos bioquímicos de las diferentes formas de fósforo que controlan la fuente de generación y de decaimiento del fósforo asimilable por el fitoplancton; involucrando los efectos de la radiación solar y temperatura que inciden sobre él, aspecto que hace posible discretizar el problema en el sentido vertical (profundidad) de los lagos.

Los componentes de fósforo con que se estructura el modelo, incluyen al fósforo disuelto, orgánico e inorgánico; fósforo orgánico particulado y al fósforo contenido en la biomasa del fitoplancton y del zooplancton.

Para efectos ilustrativos sobre el funcionamiento el modelo, con información tomada de la literatura, se realizaron diversas simulaciones que permitieron conocer el comportamiento, en la columna de agua, de las diferentes formas de de fósforo, sus interacciones y el efecto de las condiciones ambientales externas incluidas en el modelo. Asimismo, se valuó la importancia relativa de los principales parámetros cinéticos contenidos en el modelo.

Los resultados de las simulaciones muestran que con el modelo desarrollado, es posible conocer el comportamiento de las diferentes formas de fósforo, desde el estado transitorio hasta el estacionario en cualquier profundidad y el efecto que causan las condiciones ambientales consideradas sobre la cinética de los procesos involucrados.

Por otra parte, en lo que concierne al análisis de la importancia relativa de los parámetros cinéticos que intervienen en el modelo, el resultado de las simulaciones muestran que aunque el cambio en la magnitud de dichas constantes no afectan sustancialmente el comportamiento cualitativo de los procesos considerados ni a la estabilidad del sistema, sí producen cambios en su magnitud, siendo la cinética del fósforo orgánico disuelto (P_5) el de mayor afectación y la del fósforo asimilable (P_1), el de menor afectación. También, de los resultados de las simulaciones, se establece que las constantes cinéticas de mayor importancia, de acuerdo a los cambios producidos, son en orden decreciente: la tasa máxima de crecimiento para el fitoplancton (μ_m) y zooplancton (C_m) respectivamente; la tasa de mortandad de fitoplancton (D_2), la constante de saturación media para la ingesta de zooplancton (k_{sz}), la constante de saturación media de fósforo para la asimilación de fitoplancton (k_{sp}) y las tasas de excreción del fitoplancton (k_{e2}) y zooplancton (k_{e3}).

Dado el análisis realizado, puede considerarse que el modelo desarrollado, constituye una herramienta útil y punto de partida para estudiar los problemas de calidad del agua, relacionados con la presencia de los compuestos de fósforo en los lagos y embalses, ya que permite conocer la distribución interna de cada componente de fósforo en función del tiempo, de acuerdo con el perfil de la intensidad de la luz y la temperatura en la columna de agua; la evolución y dinámica del fósforo asimilable en términos de la densidad fitoplanctónica, y la profundidad hasta la cual, los diversos componentes de fósforo considerados, desempeñan un papel relevante en la dinámica de la actividad fotosintética.

Finalmente, es recomendable realizar estudios conducentes a incorporar al modelo, otros integrantes del ciclo del fósforo y funciones que tomen en cuenta tanto las variaciones temporales de la radiación solar y la temperatura, como la hidrodinámica y el transporte vertical másico de cada componente de fósforo. También, conviene realizar estudios para determinar la magnitud de las constantes cinéticas contenidas en el modelo, ya que éstas deber ser medidas y no supuestas.

1. INTRODUCCIÓN

El agua, es un recurso indispensable para la vida y necesario para la actividad productiva; no obstante y desafortunadamente, su cantidad y calidad, se ha estado degradando en niveles tales que, en la mayoría de los casos, se ha alterado el equilibrio natural de la vida acuática que soportan y por ende, reducido su aprovechamiento.

En nuestro país, los cuerpos de agua superficial, dentro de los cuales se ubican los lagos, constituyen las fuentes principales de agua para diversos usos; sin embargo, estos cuerpos de agua también han sido los receptores más susceptibles a la contaminación (*De la Lanza y García, 1995*).

Dentro de los principales contaminantes antropogénicos del agua, se encuentra la entrada de materia orgánica y nutrimentos orgánicos e inorgánicos, derivados principalmente de descarga de aguas residuales urbanas y del escurrimiento de fertilizantes y abonos empleados en la agricultura (*Chapman, 1992*). Tal es el caso de los compuestos del fósforo que, aunque esenciales para el desarrollo de la vida acuática, en la mayoría de los casos, se encuentran en cantidades superiores a las requeridas para sustentar la vida de los ecosistemas. Esta situación, si las condiciones ambientales lo permiten, hará que el lago tienda a la eutrofización.

En el proceso anterior, al no haber limitaciones en cuanto a la disponibilidad de nutrientes, se produce un crecimiento desmesurado de fitoplancton, plantas y malezas acuáticas que pueden interferir con las actividades recreativas, o producir grandes variaciones diurnas en la concentración de oxígeno disuelto en la columna de agua, de tal magnitud, que su disminución puede alcanzar niveles que no satisfagan los requerimientos para los procesos de respiración de los microorganismos que llevan a cabo la oxidación biológica de los desechos orgánicos e inducir, además de la anoxia del lago y la mortandad biota aerobia, la generación de olores ofensivos, lo cual restringe o inutiliza sus posibles usos (*Chapman, 1992*).

La magnitud del proceso anterior, suele ser controlado de manera natural por mecanismos de autorregulación entre la producción de oxígeno fotosintético (fenómeno que está íntimamente relacionado con la disponibilidad de nutrientes, dentro de los cuales destaca el fósforo) y la demanda de éste por los organismos aerobios que llevan a cabo la oxidación de la materia orgánica (*De Victorica, 1989*). Esta es la razón por la cual, la base para el entendimiento del fenómeno de eutrofización y por ende el de la dinámica de la calidad del agua en los lagos, está en el de los productores primarios (algas), incluyendo sus fuentes y sumideros.

La estructura y dinámica de los sistemas acuáticos, es de reconocida complejidad; sin embargo, para hacer frente a esta problemática, se han desarrollado nuevas disciplinas y herramientas de trabajo, entre las que destacan los modelos matemáticos que han permitido estimar los riesgos de los efectos adversos que

causa la concentración elevada de fósforo en los lagos. Este enfoque, aún con sus restricciones, ha probado ser una herramienta poderosa que permite la abstracción de las grandes complejidades de la dinámica de los lagos y de la vida que soportan, lo que hace posible conocer, con cierta aproximación, los efectos de las políticas de control, bajo condiciones aún no probadas.

No obstante lo anterior, debe señalarse lo relativo a las dificultades, si no es que a la imposibilidad de adaptar los modelos ya desarrollados para estudios de casos diferentes para los cuales fueron formulados. Esta restricción obedece, principalmente, tanto a la gran cantidad de trabajo que implica su adaptación, como a la carencia de información de entrada que requieren para su uso. En consecuencia, los modelos deben estructurarse de acuerdo con la naturaleza de los problemas por resolver y de la disponibilidad de la información necesaria para su aplicación (*De Victorica, 1995*).

Con base en lo anterior, en este trabajo, se desarrolla un modelo simplificado para el análisis de la dinámica del fósforo en los lagos, en términos de los factores básicos que la controlan. Se pretende que dicho modelo permita un mejor entendimiento de los procesos que intervienen en la dinámica del fósforo y sea el punto de partida para la estructuración de otros más completos de utilidad para el estudio de la dinámica del fósforo en los lagos mexicanos.

2. OBJETIVOS Y ALCANCES

OBJETIVOS GENERALES

- Formular un modelo que permita simular, en una primera aproximación, los cambios en el tiempo del fósforo asimilable en los lagos.
- Conocer el tipo de resultados que produce el modelo, mediante su aplicación a un lago hipotético con datos tomados de la literatura.

OBJETIVOS PARTICULARES

- Establecer las principales variables que controlan la dinámica del fósforo asimilable en los lagos.
- Definir los parámetros necesarios para la estructuración del modelo.
- Evaluar la importancia relativa de los principales parámetros cinéticos que intervienen en el modelo; por ejemplo μ_m , k_{sp} , k_{sz} .

ALCANCES

La estructuración del modelo se hace con base en las ecuaciones que representan los procesos dominantes y sus interacciones en la asimilación del fósforo por el fitoplancton, considerando las principales variables ambientales que inciden sobre los procesos de asimilación. Posteriormente, con información tomada de la literatura, se hace un ejemplo de aplicación.

3. ANTECEDENTES

3.1. Calidad del agua en los lagos y su comportamiento

Los lagos son sistemas naturales de agua dulce superficial, empleados para múltiples propósitos. La calidad de su agua está determinada por factores físicos, químicos y biológicos que interactúan y varían en escalas de tiempo y espacio (EPA, 1985). Debido al problema progresivo de contaminación del agua, se han requerido investigaciones científicas que expliquen el comportamiento bioquímico del sistema y que ayuden a evaluar las condiciones ambientales del sistema acuático, predecir su evolución, estimar las consecuencias y prevenir los efectos adversos. Muchos de estos estudios, se basan principalmente en la dinámica de la "productividad primaria" de los lagos, debido a que es la base de la cadena trófica y fuente principal de oxígeno, elemento fundamental que determina el estado de salud de los cuerpos de agua. Una amenaza de contaminación de los lagos, involucra al crecimiento excesivo de plantas acuáticas por cantidades excesivas de nutrimentos; el fitoplancton es uno de los principales grupos de los productores primarios, constituido por algas suspendidas y consideradas como plantas microscópicas, que utilizan la energía solar para sintetizar materia orgánica compleja a partir de anhídrido carbónico, agua y nutrimentos. Este proceso fotosintético, está determinado fundamentalmente por la cantidad de luz recibida, la temperatura y la distribución de los nutrimentos asimilables por los organismos acuáticos. La interacción y variabilidad en el tiempo y espacio de estos factores, establecen la rapidez de crecimiento del fitoplancton (Lamb 1985 y Rich, 1973).

Por lo tanto, la variabilidad del comportamiento del agua en los lagos está relacionado con los procesos biológicos y su interacción con los factores físicos y químicos que cambian continuamente de acuerdo a las condiciones ambientales y perturbaciones antropogénicas.

La radiación solar, es fuente principal de calor a la columna de agua y factor determinante de los patrones de viento y el movimiento del agua. La intensidad de la luz en la superficie del lago varía de acuerdo a la estación del año y disminuye con la profundidad a lo largo de la columna de agua de acuerdo con las propiedades ópticas del sistema. La cantidad de luz solar a una determinada profundidad establece dos zonas en la columna de agua, la zona fótica (o eufótica) y la afótica. La primera zona, inicia en la superficie del lago y se extiende hacia abajo hasta el punto donde la intensidad de luz recibida (I) es igual a la intensidad de luz de compensación (I_c), profundidad a la cual, la producción fotosintética neta es nula debido a que el proceso de fotosíntesis iguala al de respiración. La zona afótica, inicia debajo de la zona fótica y llega hasta el fondo del cuerpo de agua (Home, 1994).

La absorción y atenuación de la luz por la columna de agua son los principales factores que controlan la temperatura y el potencial de la fotosíntesis; cambios significativos de penetración de luz en un lago, generan diversos efectos bioquímicos en el sistema.

Por otra parte, la cantidad de calor producido por transformación de la energía solar prevalecientes en la región, establece el patrón de estratificación térmica y regula la rapidez de reacciones químicas y procesos biológicos en los cuerpos de agua. La estratificación térmica es el evento físico mas importante en los ciclos anuales de los lagos y se origina cuando por transferencia de calor, el agua se enfría o calienta causando diferencias de temperatura y por tanto, diferencias de densidad a lo largo de la columna de agua, que inhiben el mezclado. Condición en la cual, pueden distinguirse tres regiones diferentes de actividad fotosintética, como se ilustra en la figura 1; el epilimnio, que es la capa superior de agua caliente y ligera, donde el agua esta bien oxigenada, mezclada e iluminada; el metalimnio o región de la termoclina, que es la capa de agua donde se localiza el gradiente térmico máximo de la columna de agua y por último, el hipolimnio, que es la zona mas profunda, en donde la temperatura del agua es mas fría y densa; predominando los procesos de consumo de oxígeno con tendencia a condiciones anóxicas (*Home, 1994*).

La estratificación térmica de un lago depende de diversos factores, tales como condiciones ambientales del lugar, las características ópticas del agua y el estado trófico del sistema, entre otros (*De Victorica, 1995*).

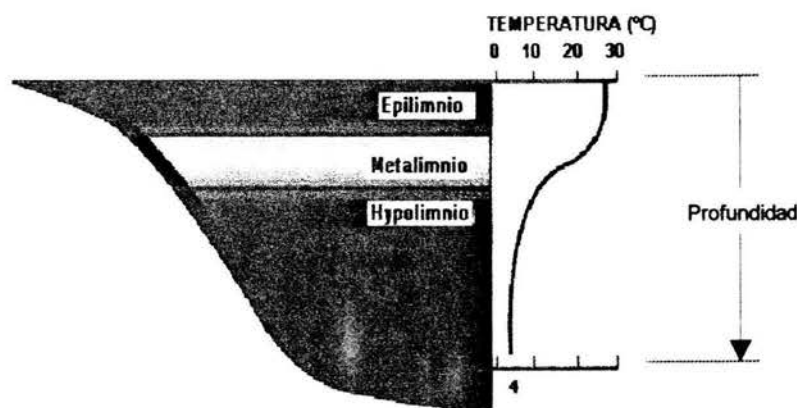


Figura 1.- Regiones que normalmente conforman un lago estratificado térmicamente.

A principios de la **primavera**, el agua a lo largo de la profundidad es fría y casi isotérmica con la profundidad, el agua de la superficie se mantiene a una temperatura menor que la del fondo; sin embargo, a medida que el clima va calentando, la temperatura del agua en la superficie va aumentando y su densidad va disminuyendo. Cuando la temperatura de la superficie del agua va igualando a la temperatura del fondo, muy poca energía puede mezclar el lago completamente, este fenómeno de mezclado se conoce como recirculación del lago.

Conforme pasa el tiempo, el agua de la superficie continua absorbiendo calor hasta que llega a ser mas ligera que la de abajo; por un rato, el agua de ambas capas puede seguirse mezclando, pero eventualmente el agua de la superficie llega a ser tan caliente y ligera que la diferencia de densidad con el agua de abajo es tan grande que, se inhibe el mezclado a cualquier profundidad.

Conforme avanza el **verano**, las diferencias de temperatura y densidad entre la capa superior e inferior son más acentuadas y es cuando los lagos pueden llegar a estratificarse físicamente en las tres diferentes capas identificadas anteriormente como epilimnio, metalimnio e hipolimnio. El cambio de densidad en el agua del metalimnio previene el mezclado del epilimnio y el hipolimnio por meses en el verano.

En el **otoño**, conforme el clima enfría, el agua del epilimnio se enfría y su densidad se acerca al agua del hipolimnio, entonces el agua de ambas regiones puede mezclarse a mayores profundidades. A medida que la temperatura del agua de la superficie y del fondo se acercan a la misma temperatura y densidad, puede mezclarse el lago entero, ocurre nuevamente el fenómeno de recirculación. Posteriormente, la atmósfera empieza a enfriarse, por lo que la temperatura del agua de la superficie disminuye hasta provocar en **invierno** una estratificación térmica, menos estable que la del verano ya que la diferencia de densidad a lo largo de la columna de agua en invierno es menor. En climas templados, es común que en la superficie del lago, se forme una pequeña capa de hielo, lo cual aísla el agua de la atmósfera durante todo el invierno. El agua que se encuentra debajo de la capa de hielo, es mas fría y ligera que la mayoría del agua en la columna, la cual se encuentra en condiciones isotérmicas (Martín y Mc Cutcheon, 1999).

Este fenómeno de "*recirculación en primavera – estratificación en verano – recirculación en otoño – estratificación en invierno*", es típico de lagos templados. Con base en el tipo de estratificación y en las características del mezclado, los lagos reciben una clasificación física. El mezclado en 2 periodos, los distingue como lagos *dimícticos*. Sin embargo, muchos lagos someros, no se estratifican en el verano o se estratifican por periodos cortos; a este tipo de lagos se les conoce como *polimícticos*. Algunos otros, regularmente sólo se mezclan una vez al año por lo que son referidos como *monomícticos*. Por otra parte, los lagos que no se mezclan completamente hasta el fondo sino sólo parcialmente, son referidos como lagos *meromícticos*, para distinguirlos de los *holomícticos* en los que el mezclado es completo. En los lagos

meromícticos, es común que el agua del fondo permanezca estancada y en condiciones anóxicas.

En cuanto a la distribución de los nutrientes disponibles, su variabilidad cualitativa y cuantitativa es un factor crítico del proceso de eutroficación por su efecto en el fitoplancton y se admite que la mayoría de los sistemas lacustres, se encuentran limitados por fósforo (EPA, 1985; CEPIS, 1987; Loehr 1980). Estudios de Bush y Welch (1971), ponen de manifiesto que el fósforo es el elemento más crítico para la formación de la biomasa de algas azul-verdosas, las cuales dominan en lagos eutróficos poco profundos.

El fósforo es un macro nutriente esencial para el desarrollo de organismos acuáticos, y en los cuerpos de agua dulce, se encuentra en forma orgánica e inorgánica, disuelta y particulada. La sensibilidad de adiciones de fósforo en estos sistemas, es tal que su concentración influye en la distribución, abundancia o escasez de algunas especies determinantes de la calidad del agua. Este es el caso de los productores primarios, particularmente del fitoplancton, cuya rapidez de crecimiento depende de la cantidad de fosfato soluble disponible. Su distribución depende de muchos factores, y de alguna manera es típico encontrar que en la estación de la primavera, el fosfato, que se acumula en el invierno, disminuya por el incremento de la actividad fitoplanctónica. En resto del año, todos los compuestos del fósforo, mediante diferentes procesos, son reciclados continuamente. Durante el verano y otoño, el reciclaje es, para los lagos eutróficos, la fuente principal de fósforo para el fitoplancton.

3.2. Dinámica del fósforo en los lagos

El contenido de fósforo en un ecosistema acuático, depende en gran parte, de su naturaleza química, de las propiedades químicas del agua y del patrón de estratificación térmica en el sistema. Los componentes de fósforo más comunes en los estudios de calidad del agua son el fósforo orgánico e inorgánico, ambos en forma disuelta y particulada, fósforo en la biomasa del plancton (generalmente fitoplancton y zooplancton), y fósforo en sedimentos. Sus interacciones y transferencias son la base de los procesos bioquímicos y forman el régimen de funcionamiento y dirección de procesos de transformación y reciclaje del fósforo en el cuerpo acuático (Leonov, 1988).

En muchos lagos, el fosfato es escaso y domina el fósforo orgánico. El fósforo orgánico disuelto (DOP) usualmente representa el fósforo disuelto total y se forma de muchas clases de diferentes compuestos. Pequeñas fracciones de fósforo total (TP) se encuentran en forma coloidal. En muchos ambientes acuáticos, el fósforo total particulado (PTP), se presenta en cantidades mayores que el fósforo soluble (DIP) y está integrado por fósforo en bacterias, plantas y animales, así como el fósforo que

se absorbe o que es parte integral de partículas inorgánicas suspendidas como arcilla y otros minerales (Home, 1994).

La figura 2 muestra las trayectorias principales del ciclo del fósforo en los lagos. En el centro está el fósforo soluble biológicamente asimilable (PO_4^{3-}). Las líneas gruesas indican cargas externas, las líneas punteadas indican cargas internas y las otras líneas indican reciclos internos. Los cuadros indican las mayores cantidades de fósforo y los valores varían de acuerdo a la estación (Home, 1994).

Casi todo el fósforo en el agua del lago esta presente en forma orgánica como biomasa viviente o muerta. El fitoplancton es el grupo funcional principal que remueve fosfato soluble PO_4^{3-} de la columna de agua durante la fotosíntesis y lo convierte en biomasa orgánica disuelta y particulada (Chapra, 1983). El fósforo consumido por las algas, es distribuido a otros organismos acuáticos por medio de la red alimenticia, el zooplancton se alimenta de algas y éste a su vez es alimento de otras especies superiores de zooplancton y los peces.

El fosfato tomado por las algas, es reciclado continuamente por medio de la excreción de los organismos, la actividad de las bacterias, la hidrólisis del fósforo orgánico disuelto y la descomposición del detrito orgánico y sedimentos (EPA, 1985).

Los procesos de excreción del fitoplancton, zooplancton, bacterioplancton y peces, así como la descomposición de plantas y animales muertos son fuentes de fósforo orgánico e inorgánico (EPA, 1985).

El fósforo particulado o detrito representa al grupo de materia sin vida, es también fuente de alimento para el zooplancton y es generado por la excreta particulada de animales acuáticos y la muerte de organismos planctónicos. La descomposición de plantas y animales muertos, liberan DOP y fosfato. El proceso de transformación a fósforo orgánico disuelto puede describirse por una ecuación de primer orden (Chapra, 1983).

Las principales fuentes externas de fósforo a los lagos son el transporte de fragmentos de rocas erosionadas, los influentes de corrientes y ríos, las descargas de aguas residuales y el escurrimiento de las actividades agrícolas. El influjo del fósforo total en los lagos debido a fuentes naturales (erosión, tormentas, inundaciones), contienen un pequeño porcentaje de fósforo soluble (5-10%). Sin embargo, los influentes de corrientes y ríos, aguas residuales y escurrimiento agrícolas contienen mucho fosfato soluble (90-95%) y poco fósforo particulado (menor al 10%) (Home, 1994).

Por otra parte, una pérdida importante de fósforo en la columna de agua de los sistemas lacustres, es la sedimentación de la biota o precipitados químicos (Ca, Al y Fe). La arcilla absorbe fósforo por medio de la interacción química específica del ion fosfato (PO_4^{3-}) con el ión aluminio Al^{3+} y directamente sobre óxidos de aluminio o compuestos de hierro hidratados o de partículas de calcita (CaCO_3) y apatita ($\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$). Mucho de este fósforo llega a ser parte de la acumulación permanente

de los sedimentos, los cuales intervienen de manera importante en el ciclo del fósforo de los lagos, ya que son capaces de tomar grandes cantidades de ortofosfato del agua cuando aumentan las concentraciones y de liberar ortofosfato cuando las concentraciones en el agua disminuyen por la demanda biológica.

El intercambio libre de fósforo entre los sedimentos y el agua del lago ocurre en la interfase sedimento-agua y depende del pH y las concentraciones de oxígeno disuelto en la interfase. Si ésta es anóxica, los iones fosfato pueden atravesar a una velocidad que depende del gradiente de concentración entre ambas fases. Por el contrario, si la interfase es oxigenada, los iones fosfato están precipitados y no pasan libremente al agua del lago. Las reacciones más importantes en los sedimentos son aquellas que cambian el fósforo de una fase sólida a fosfato soluble en el agua intersticial, ya que es el que puede liberarse a las capas de agua superiores (Home, 1994).

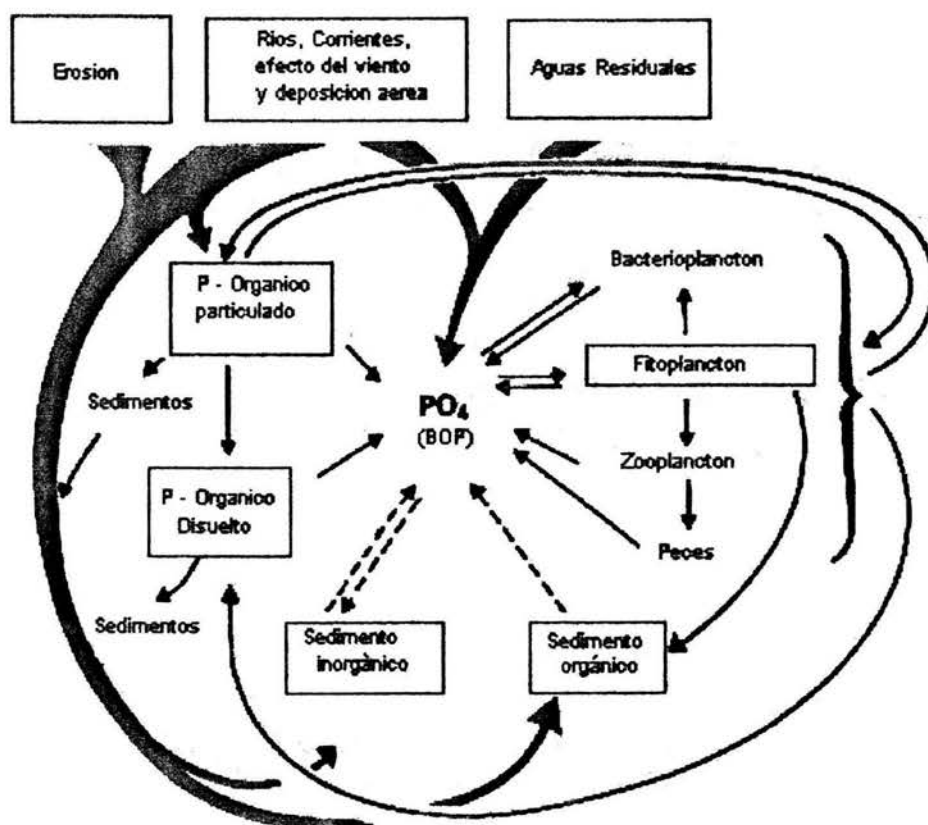


Figura 2. Principales trayectorias del ciclo de fósforo en los lagos.

4. MODELOS PARA EL ESTUDIO DEL FÓSFORO EN LAGOS

4.1. Antecedentes y Desarrollo Histórico

Los modelos matemáticos son *ecuaciones* que describen los procesos e interacciones entre las variables de un sistema; se formulan con base en objetivos específicos y se emplean como herramienta para estudiar el comportamiento o evolución de un sistema o componente de interés, de acuerdo a sus interrelaciones con los factores internos y externos.

Los modelos del fósforo parten de los modelos de calidad del agua, los cuales han permitido conocer las condiciones de calidad de agua de un sistema acuático por efecto de las interacciones entre los contaminantes y los procesos bioquímicos, afectados por ciertos factores físicos incidentes.

El desarrollo de modelos matemáticos de calidad del agua, inició con los estudios de **Streeter-Phelps** quienes en 1925 publican la ecuación de curva de decaimiento del Oxígeno disuelto basado en el análisis de la contaminación y purificación natural del río Ohio en EE.UU. Este modelo, fue modificado por **Thomann** en 1963, para analizar el efecto de cargas múltiples en un estuario.

Estudios posteriores de calidad del agua en ríos, incluían consideraciones ecológicas importantes como fotosíntesis, productividad primaria, compuestos inorgánicos, nutrimentos, microorganismos y sólidos disueltos (*Loehr, 1980*).

Por su parte, los estudios de calidad del agua en los lagos, iniciaron a principios de los años sesentas en Estados Unidos y Canadá por el interés de controlar la contaminación y mantener tales sistemas acuáticos. Entre los problemas de mayor necesidad de solución, se identificaron aquellos que se relacionaban con el enriquecimiento acelerado de nutrimentos.

El fósforo, es uno de los nutrimentos que ha demostrado ser fuente interna importante para el crecimiento del fitoplancton en los lagos, y origen de la eutrofización de tales sistemas. Los modelos del fósforo para el estudio de los lagos, surgieron por la necesidad de incorporar el ciclo de nutrimentos en los modelos ecológicos ya que éstos controlan gran parte del comportamiento del sistema. Los modelos de este tipo son numerosos y cada uno comprende diferentes tipos de variables de control y/o emplean diferentes expresiones matemáticas que representan los procesos predominantes en los lagos. A continuación se presentan algunos modelos simplificados del fósforo, basados en el principio de conservación de masa, que no consideran el estudio hidrodinámico del sistema.

Entre los primeros estudios de sustancias químicas en los lagos, se encuentra el desarrollado por **Biffi** en **1963**, quien estructura un modelo simple derivado de un balance de masas para conocer las concentraciones de fósforo en un lago, considerado como un reactor en agitación continua, con mezcla y reacción completa e instantánea (caja negra). En este trabajo, no se consideran las reacciones bioquímicas, la estratificación ni la sedimentación de fósforo. En estado estacionario, el fósforo es modelado como sustancia conservativa y la concentración de fósforo en el lago es equivalente a la concentración de fósforo en los flujos de entrada y salida.

Desafortunadamente, el fósforo no puede modelarse adecuadamente de esta manera ya que para muchos lagos es importante la fracción de sedimentación y tal enfoque, fue válido sólo para sustancias conservativas (*Scavia, 1979*).

En **1964**, **Piontelli y Tonolli**, incluyeron el término de sedimentación al modelo de caja negra de Biffi y sugirieron que se depositaba en los sedimentos una fracción fija de la masa influente de fósforo. Esa consideración, proporcionó las bases del primer trabajo de **Vollenweider**, quien en 1964 desarrolla un modelo en el que considera la sedimentación de fósforo como función de su concentración dentro del lago. (*Scavia, 1979*).

Vollenweider, es reconocido como el pionero en los estudios de eutrofización, debido a que realizó múltiples trabajos relacionados con el estado trófico de los lagos, la concentración de nutrientes, crecimiento de algas y características de la cuenca. Su primer modelo contiene el término de sedimentación como función de la concentración dentro del lago. En **1969**, enfoca su modelo a los efectos que causa el fósforo en los lagos; supone que la concentración de fósforo dentro del lago es idéntica a la concentración de fósforo a la salida ; el lago es tratado como un sistema en estado estacionario, totalmente mezclado y de volumen constante (*Brezonik, 1994*). Vollenweider, publica modelos estadísticos que relacionan la carga externa de fósforo con el estado trófico de los lagos y las características de la cuenca hidrológica. Fue el primero en formular el criterio de carga de nutriente para el fósforo y el nitrógeno, tomándolo en cuenta su relación con la profundidad media del lago como parámetros principales de más de 100 lagos en Europa y Norte América (*Schnoor, 1994*).

El modelo de Vollenweider, ha sido modificado por muchos investigadores a través del tiempo, para el estudio de sistemas específicos:

O'Melia (1972) y Snodgrass (1974), obtuvieron un modelo que simula algunas transformaciones químicas y biológicas del fósforo debidas a la estratificación térmica. Esta estructura fue denominada por **Simons y Lam (1980)** como "La Aproximación Estacional más Simple" (SSA por sus siglas en inglés). Aunque cada método de aproximación tiene características únicas, ambos se caracterizan porque separa los compuestos de fósforo en dos componentes (fósforo reactivo y no reactivo), el lago se segmenta en capas superiores e inferiores bien mezcladas, divide el año en dos estaciones (verano e invierno) y las ecuaciones diferenciales incluyen el transporte y la cinética que representa el intercambio de masa entre los

componentes. Con el SSA, se inició la representación mas compleja de interacción de sustancias, como por ejemplo las reacciones de asimilación y liberación entre el fósforo reactivo y el fósforo no reactivo. (*Chapra, 1983*).

Dillon - Rigler (1974, 1975) y Rast - Lee (1978), obtuvieron un modelo de fósforo mejorado para lagos que varían en tiempos de retención hidráulico y en fracción de remoción de fósforo (*Loehr, 1980*).

Imboden (1974), desarrolló un modelo de 2 compartimentos para el contenido de fósforo; considera un lago estratificado e incluye entrada, salida e intercambio entre el hipolimnio y epilimnio así como el intercambio con el sedimento, comprende ecuaciones diferenciales para el fósforo disuelto y el particulado. Este modelo es mejorado posteriormente por **Imboden - Gächter (1978) e Imboden (1979)** al incluir las concentraciones del nutrimento y biomasa como función del tiempo y la profundidad, así como remplazar la cinética de primer orden por la cinética de Michaelis- Menten (*Orlob, 1983*).

Snodgrass (1974) y Snodgrass - O'Melia (1975), desarrollaron y verificaron un modelo que predice las concentraciones promedio de fósforo total en un lago, considerando el flujo de entrada de nutrimentos, la profundidad media y la carga hidráulica. Los compuestos de fósforo utilizados son ortofosfatos y fósforo particulado (*Scavia, 1979*).

Larsen et al (1974), formulan un modelo para el epilimnio, de 3 compartimentos que incluye algas como sumidero de fósforo reactivo y conversión de fósforo particulado a fósforo soluble. Además considera en las ecuaciones la fracción de reducción de la tasa de crecimiento específica del fitoplancton debida a la disponibilidad de luz (*Orlob, 1983*).

Lorenz (1974) y Lorenz et. al. (1976), desarrollan un modelo simple de interacción agua-sedimento; considera solo el fósforo disuelto y el fósforo intercambiable en el sedimento; sin embargo, es incapaz de simular el patrón estacional de liberación de sedimentos (*Chapra, 1983*).

Chapra y Tarapchak, en 1976 trabajaron en la estimación de clorofila "a" a partir de la concentración de fósforo total en el lago. **Chapra**, extendió el concepto de Vollenweider a un modelo dinámico (variable en el tiempo), para fósforo total con sedimentación como principal mecanismo de pérdida. El fósforo total, se considera una sustancia no conservativa, sin transformaciones en la columna de agua. Calcula la concentración de fósforo total en el lago en función del tiempo, dada la carga de fósforo, el volumen, la profundidad y el tiempo de retención hidráulico (*Loehr, 1980*).

Lung et al. (1976), divide el fósforo total en fósforo particulado y fracciones de fósforo disuelto para una mejor representación de los procesos que gobiernan las interacciones agua-sedimento. Los sedimentos, se tratan como una serie de capas delgadas, bien mezcladas y utiliza tasas de sedimentación y coeficiente de difusión para definir el transporte entre capas (*Chapra, 1983*).

Reckhow (1977a) y Walker (1977), independientemente examinaron datos de lagos templados del norte y llevan a cabo estudios sobre las relaciones empíricas del fósforo en los lagos. El balance de masa básico del modelo del fósforo se expresó considerando la pérdida de fósforo por medio de la sedimentación y a través del afluyente (*Scavia, 1979*).

El modelo de **Kamp-Nielson (1977)**, distingue entre fósforo disuelto y particulado, dividiendo este último como fracción intercambiable y no intercambiable. Se ha utilizado para simular intercambio sedimento-agua para un sistema de una sola capa y usa relaciones matemáticas derivadas experimentalmente para representar las interacciones cinéticas entre las diferentes formas del fósforo. En subsecuentes trabajos, **Kamp-Nielson (1978)**, incluye al fósforo no intercambiable, intercambiable, disuelto y absorbido. Simula la dinámica del fósforo usando un modelo multicapas similar al de Lung et al (1976).

Jolankai y Szöllösi-Nagy (1978), formulan un modelo sencillo basado en la condición de que la liberación de sedimentos es la principal fuente de fósforo (lago Balton). Maneja tres formas de fósforo, fósforo en el agua, en sedimentos y en algas, pero ignora las limitaciones por luz y temperatura (*Orlob, 1983*).

A finales de los años setentas, se estudian los Grandes Lagos y se utilizan diversos tipos de modelos, los cuales consideran diferentes tipos de procesos y variables determinantes relacionados con la carga de fósforo presente. Los estudios más destacados son los trabajos realizados por **Vollenweider, Chapra, Thomann, DiToro y Biernam (Loehr, 1980)**.

En 1976 la **Organización para la Cooperación Económica y Desarrollo (OECD)**, utilizó el primer modelo de Vollenweider para obtener un modelo simplificado del fósforo con datos de lagos templados. El modelo simplificado de balance de masa para fósforo total utilizó la suposición de lago completamente mezclado, condición de estado de equilibrio, el valor promedio estacional-anual y limitado por fósforo. El modelo de la OECD, predice la concentración esperada de fósforo en un embalse con base en su carga externa y algunos parámetros morfológicos e hidrológicos (*Olvera, 1990*). Su aplicación se ha caracterizado en la identificación de nivel trófico de algunos lagos templados y la obtención de la concentración deseada para un lago o embalse, modificando cualquier componente para controlar el nivel trófico deseado. Algunos ejemplos de aplicación se muestran en los trabajos de Reckhow y Simpson, 1980; Ortiz y Peña, 1984, Thornton et. al., 1986; y Reckhow, 1988 (*Olvera, 1990*).

Posteriormente, siguiendo bases teóricas y logística de OECD, el **Centro Panamericano de Ingeniería Sanitaria y ciencias del Ambiente (CEPIS)** de Perú, en 1981 obtuvo un modelo simplificado del fósforo aplicado en la evaluación de la eutroficación en lagos cálidos tropicales, debido a la diferencia que existe con los lagos templados por sus diferentes condiciones climatológicas y por tanto procesos físicos y biológicos. Este modelo relaciona cantidad de fósforo total con la profundidad promedio del lago, la carga superficial de fósforo. Se ha utilizado para evaluar el estado trófico de lagos cálidos así como para obtener la concentración con

la cual puede controlarse el nivel trófico del ecosistema acuático (CEPIS, 1987). Algunos ejemplos de aplicación en lagos Mexicanos, se muestran en trabajos realizados por el CEPIS, 1987, 1990; Olvera, 1990; Rivero, 1991; Ávila, 1992 y Bravo, 1995.

Por otra parte, **Canale y Effler en 1989**, publican un modelo estocástico de fósforo total que utiliza técnica de simulación de Monte Carlo y un modelo determinístico del fósforo como apoyo analítico para estudiar la calidad del agua del lago Ondoga en NY. Este modelo realiza cálculos de fósforo total tomando en cuenta los cambios aleatorios del flujo, carga y velocidad de sedimentación. El método puede emplearse para investigar las consecuencias de variaciones naturales en el flujo y la carga de fósforo así como la incertidumbre de la representación de la sedimentación neta. (Canale y Effler, 1989).

Recientemente, **Anda Sánchez (2001)**, utilizó un modelo de celdas para cuantificar la masa de fósforo en la columna de agua del lago de Chapala. El modelo se basa en dividir la superficie del lago en celdas cuadradas del mismo tamaño para evaluar en cada una, el contenido de fósforo con la concentración de fósforo calculada por interpolación en la celda y la profundidad media del lago interpolando para cada mes. Las interpolaciones se evalúan con el programa computarizado ARC-INFO. La cantidad presente de fósforo en el lago se evaluó por mes utilizando un algoritmo que incluye la suma de concentración de fósforo calculada en cada celda, la altura de cada celda y el área del lago. Para establecer un criterio de comparación del estado trófico del lago de Chapala, se aplicó el criterio de Vollenweider (1975) y el de Maniak, 1997 que definen el estado trófico de un lago o embalse de acuerdo a la carga total de fósforo y fosfatos respectivamente. (Anda, 2001).

Como puede notarse, hasta ahora existe una gran variedad de modelos para estudiar la dinámica del fósforo en los lagos; sin embargo, algunos de estos modelos solamente son de utilidad para definir el estado trófico de los lagos con base en la cuantificación de la concentración del fósforo total en el agua, sin tomar en cuenta las diferentes formas de fósforo y sus interacciones, las cuales determinan el comportamiento del fósforo total. En otros modelos, aunque en su estructura se consideran otros factores que inciden en la dinámica fósforo, su aplicación se restringe a casos particulares bajo condiciones ambientales específicas, aspectos que dificulta su uso para casos diferentes para los cuales fueron formulados.

De acuerdo con lo anterior y con base en los modelos desarrollados por Imboden-Gächter (Orlob, 1983); Imboden (Orlob, 1983) y Chapra (Chapra, 1983), en este trabajo se formula un modelo simplificado, que permite simular, en una primera aproximación, la dinámica del fósforo en los lagos, en términos de las principales fuentes y sumideros del fósforo asimilable por el fitoplancton, tomando en cuenta los efectos de la intensidad de la radiación solar y la temperatura sobre el proceso fotosintético.

4.2. Ecuaciones generales de los modelos de calidad del agua

Uno de los principios fundamentales de los que se derivan los modelos de calidad del agua, es el de conservación de la masa, el cual puede aplicarse a cualquier sustancia que se conozca su cinética de transformación. El principio de conservación de masa, establece de manera general que:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Rapidez} \\ \text{de} \\ \text{acumulación} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \text{Rapidez} \\ \text{de flujo} \\ \text{de entrada} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \text{Rapidez} \\ \text{de flujo} \\ \text{de salida} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \text{Rapidez} \\ \text{de} \\ \text{transformación} \end{array} \right\} \quad (1)$$

En los modelos, el balance de masa, se realiza para volúmenes de control de agua definidos sobre un periodo de tiempo específico. Este balance se efectúa por el cálculo de los materiales que entran y salen del volumen de control, más el cálculo de los cambios en masa del constituyente causado por los cambios físicos, químicos o biológicos.

Particularmente en el caso de los lagos, estos se caracterizan porque son sistemas con largos tiempos de residencia hidráulicos que para efectos útiles se describen bajo la consideración de que tal cuerpo de agua se encuentra completamente mezclado.

Para el caso del fósforo considerado en este trabajo, el sistema puede representarse mediante un flujo de fósforo de entrada, otro de salida y las transformaciones internas de tal nutriente como se muestra en la figura 3.

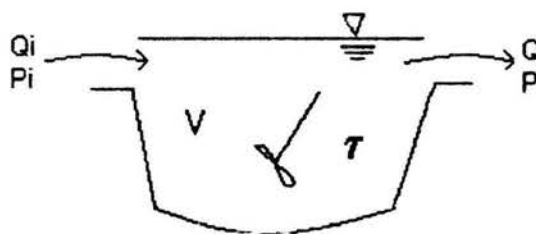


Figura 3 Representación de un lago como sistema completamente mezclado

En la figura anterior, las literales tienen el siguiente significado:

- V : Volumen del lago [L^3]
- P_i : Concentración de fósforo en el influente [$M L^{-3}$]
- Q_i : Flujo volumétrico en el influente [$L^3 T^{-1}$]
- P : Concentración de fósforo en el efluente [ML^{-3}]
- Q : Flujo volumétrico en el efluente [$L^3 T^{-1}$]
- τ_P : Transformaciones químicas del fósforo dentro del sistema [$ML^{-3} T^{-1}$]

La ecuación que cuantifica la rapidez de cambio de la concentración de fósforo en función del tiempo, de acuerdo al principio de conservación de masa es:

$$V \frac{dP}{dt} = Q_i P_i - Q P \pm V \tau_P \quad (2)$$

El lago puede aproximarse al comportamiento de un sistema de flujo completamente mezclado, si se define que el flujo y volumen del sistema son constantes y si además, se hace la suposición de que la concentración promedio de fósforo dentro del lago es igual a la concentración de fósforo en el afluente. De acuerdo con lo anterior, la ecuación 2 puede expresarse en términos del tiempo de retención hidráulico (θ_H):

$$\frac{dP}{dt} = \frac{P_i - P}{\theta_H} + \tau_P \quad (3)$$

En la ecuación anterior, el término $\frac{P_i - P}{\theta_H}$, representa el proceso de transporte referente al flujo del material dentro y fuera del sistema, debido al movimiento del agua, y el término τ_P , representa las transformaciones internas del fósforo en función del tiempo, controladas por los procesos físicos, químicos y biológicos en el ecosistema acuático.

Las relaciones entre variables y componentes, difieren en número y grado de complejidad según el problema específico de estudio y a las descripciones teóricas.

Para un sistema sin flujos de agua en la entrada y salida, la ecuación 3, para un volumen de control en términos de fósforo, se reduce a la siguiente expresión:

$$\frac{dP}{dt} = \tau_p \quad (4)$$

donde τ_p , representa el conjunto de ecuaciones que describen las fuentes y los sumideros del fósforo en el volumen de control; es decir:

$$\frac{dP}{dt} = \tau_p = \sum F - \sum S \quad (5)$$

donde F y S son las fuentes y sumideros respectivamente.

De acuerdo con esto, existen modelos de diferente grado de complicación; los más simplificados se han utilizado más por su condición de menor costo e información de entrada para su aplicación. En estos modelos únicamente se consideran sólo los procesos de mayor relevancia relacionados con el fenómeno por simular, aspecto que también permite simplificar el sistema y la solución numérica de las ecuaciones resultantes.

Debido a que los efectos de la eutrofización está asociada con el crecimiento de algas y por ende, a la escala temporal y espacial del problema, el primer factor considerado al respecto, ha sido la formulación de la cinética del fitoplancton. En los modelos de ingeniería, los niveles superiores de la cadena alimenticia y el bentos, frecuentemente se han incluido de manera simplificada (*Chapra, 1983*).

5. CONFORMACIÓN DEL MODELO DE FÓSFORO ASIMILABLE

El modelo se constituyó, como mas adelante se explica, con el conjunto de ecuaciones cinéticas que describen el cambio temporal de la concentración de cada uno de los componentes del ciclo simplificado del fósforo.

Para los propósitos de este trabajo, las interacciones entre los procesos cinéticos considerados, se determinaron de acuerdo con los perfiles de temperatura y radiación solar en la profundidad. Para el análisis de lo anterior, el cuerpo de agua se discretizó en elementos (j) de un metro de espesor en el sentido vertical, numerados como se ilustra en la figura 4. En cada uno de ellos se supone que hay homogeneidad (concepto de mezclado completo) y se ignora el transporte de masa e hidrodinámica.

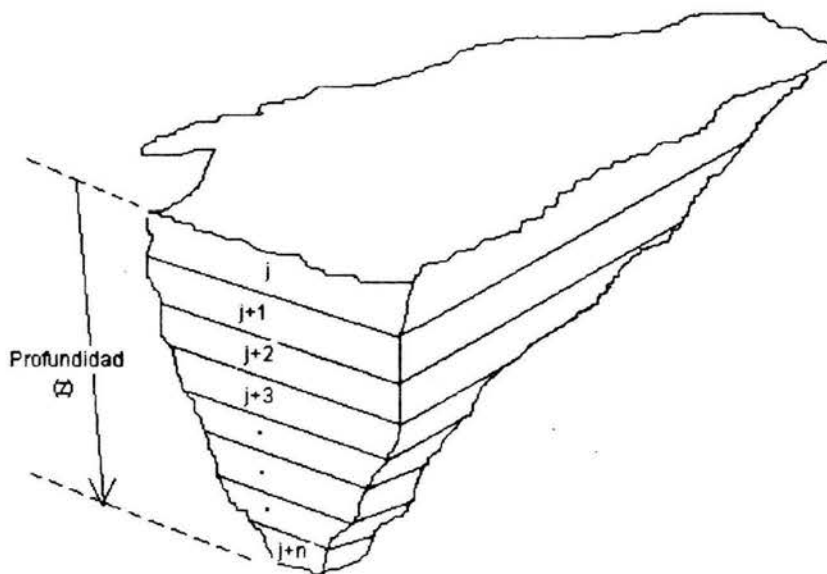


Figura 4 Discretización de la columna de agua

Ahora bien, debido a la complejidad de los procesos que gobiernan la producción y reciclo de los nutrientes y a la disponibilidad de datos experimentales de los procesos y mecanismos que ocurren dentro de los cuerpos acuáticos, es típico que los modelos se desarrollen con base en ciertas simplificaciones que faciliten el estudio de los problemas ambientales en los sistemas acuáticos y se obtengan resultados interpretables.

Dado lo anterior, para establecer el ciclo simplificado del fósforo en aguas lénticas naturales, fue necesario establecer los procesos más importantes que gobiernan la dinámica del fósforo asimilable y las condiciones y características del sistema de estudio.

A continuación, se especifican las características del sistema y los procesos considerados para la conformación del modelo

Características del sistema:

1. El fósforo, es el único nutrimento limitante en el sistema durante todo el tiempo.
2. Para el estudio de su la dinámica, se considera únicamente aquellos elementos en la columna de agua, hasta donde la intensidad de la luz y la temperatura tienen, producen efectos sobre la actividad del fitoplancton
3. No hay aportaciones ni extracciones en el sistema acuático

Procesos incluidos:

4. Asimilación de fósforo inorgánico por el fitoplancton
5. Depredación de fitoplancton por el zooplancton
6. Excreción soluble y mortandad de ambos organismos planctónicos
7. Consumo de fósforo orgánico particulado por el zooplancton
8. Descomposición biológica de fósforo orgánico particulado y su conversión a fósforo inorgánico y orgánico disuelto.
9. Transformación de fósforo orgánico disuelto a fósforo inorgánico.

Cabe señalar que tanto las especies del fitoplancton, como las del zooplancton, se refieren a cultivos mixtos.

Con base en lo anterior, en la figura 5 se presenta en forma de diagrama, el ciclo simplificado del fósforo obtenido; los componentes de estudio son tres formas de fósforo y dos grupos funcionales de la cadena alimenticia. El primer grupo esta compuesto por el fósforo asimilable (P_1), fósforo particulado (P_4) y fósforo orgánico disuelto (P_5); el segundo grupo esta formado por el fitoplancton mixto (P_2) y el zooplancton total (P_3), los cuales en este estudio se representan en términos de contenido de fósforo.

Por otra parte, los procesos biológicos y químicos que intervienen en la transferencia de los diversos componentes del ciclo son: asimilación de fósforo por el fitoplancton (μ_e), consumo de fósforo particulado por el zooplancton (G_4), depredación de

fitoplancton (G_2), mortandad de ambos organismos planctónicos (D_2 y D_3), excreción de organismos planctónicos (k_{e2} y k_{e3}), hidrólisis de fósforo orgánico disuelto (k_h) y descomposición de fósforo orgánico particulado (k_d).

ω_2 , ω_3 y ω_4 , representan las fracciones de fósforo inorgánico disuelto (P_1) que se obtienen de la excreta del fitoplancton, excreta del zooplancton y de la descomposición del fósforo particulado, respectivamente.

La dinámica de cada componente del ciclo simplificado del fósforo de la figura 5, se analiza en el punto intermedio de cada elemento j del sistema de la figura 4 con base en la temperatura (T_j) y la radiación solar (I_j) prevalecientes en cada elemento j .

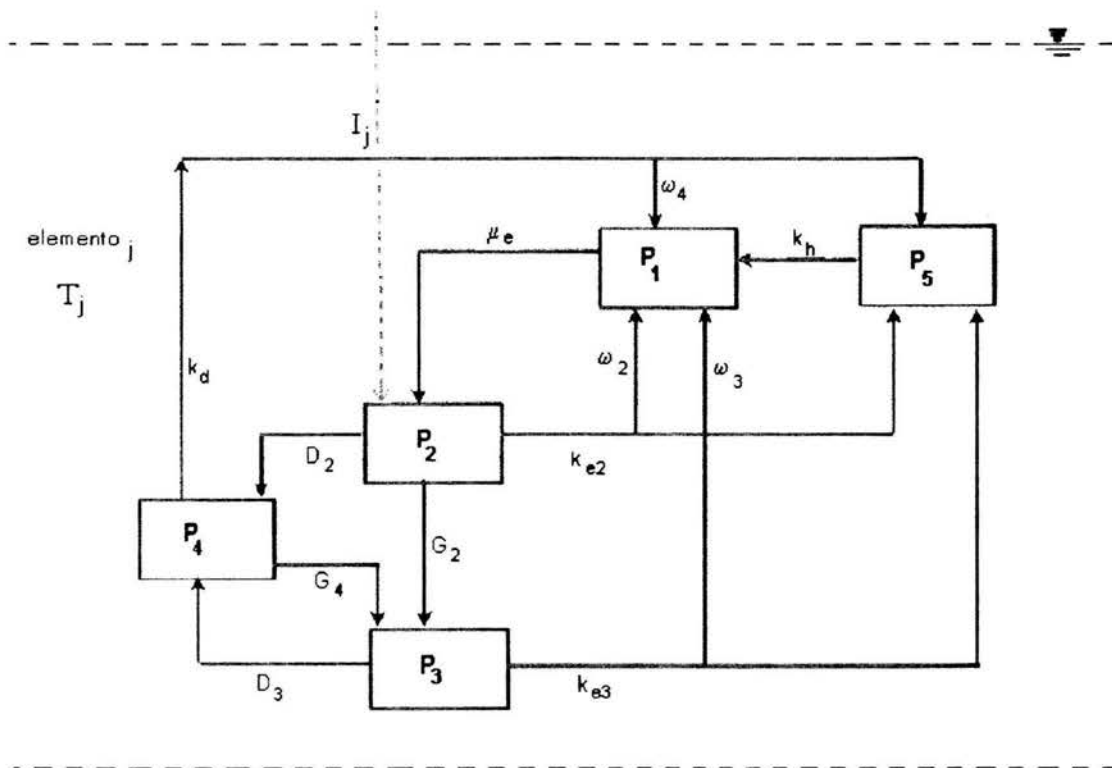


Figura 5 Componentes, procesos y variables consideradas en el ciclo simplificado del fósforo

5.1. Ecuaciones

Las ecuaciones que representan la dinámica del sistema de la figura 5, en función del tiempo, se obtienen a partir de la aplicación del principio de balance de materia a cada componente del ciclo del fósforo. Las transformaciones químicas y biológicas entre los componentes del fósforo, pueden representarse mediante cinéticas de primer orden (*Chapra, 1983*).

Así según los propósitos de este trabajo, la primera ecuación de balance que se plantea, es la del fósforo asimilable (P_1):

5.1.1. Fósforo asimilable

El fósforo asimilable (P_1), se forma de la excreta soluble del fitoplancton y zooplancton así como de los procesos de descomposición de fósforo particulado e hidrólisis de fósforo soluble (*Chapra, 1983*). El sumidero, lo constituye la asimilación de este compuesto, en el proceso de crecimiento del fitoplancton. La ecuación de balance de lo anterior es:

$$\frac{d[P_1]}{dt} = \{\varpi_2 k_{e2}[P_2] + \varpi_3 k_{e3}[P_3] + \varpi_4 k_d[P_4] + k_h[P_5]\} - \mu_e P_2 \quad (6)$$

donde:

- P_1 : Fósforo inorgánico disuelto (fósforo asimilable) $[M / L^3]$
- P_2 : Fitoplancton en términos de fósforo $[M / L^3]$
- P_3 : Zooplancton en términos de fósforo $[M / L^3]$
- P_4 : Fósforo orgánico particulado $[M / L^3]$
- P_5 : Fósforo orgánico disuelto $[M / L^3]$
- k_{e2} : Tasa de excreción de fitoplancton $[T^{-1}]$
- k_{e3} : Tasa de excreción de zooplancton $[T^{-1}]$
- k_h : Tasa de hidrólisis de fósforo orgánico soluble $[T^{-1}]$
- k_d : Tasa de descomposición de fósforo orgánico particulado $[T^{-1}]$
- μ_e : Tasa de crecimiento específica de fitoplancton $[T^{-1}]$
- ϖ_2 : Fracción inorgánica disuelta de excreta del fitoplancton
- ϖ_3 : Fracción inorgánica disuelta de excreta del zooplancton
- ϖ_4 : Fracción de productos de descomposición del fósforo particulado disponible para el fitoplancton

La ecuación de crecimiento del fitoplancton, incluida en el último término de la ecuación anterior, depende de la temperatura, la cantidad de luz recibida y la disponibilidad de fósforo asimilable. Estos tres efectos, comúnmente se expresan mediante una formulación multiplicativa y se encuentran incluidos en la tasa de crecimiento específica del fitoplancton (μ_e):

$$\mu_e = \mu_{mT1} [F(T) \cdot F(I) \cdot F(P)] \quad (7)$$

En donde, los factores $F(T)$, $F(I)$ y $F(P)$, representan el efecto de la temperatura, la luz y la concentración de fósforo sobre la rapidez de crecimiento del fitoplancton. Estas funciones, se describen a continuación.

5.1.1.1. Efecto de la Temperatura

Aunque existen numerosas funciones de ajuste por efectos de temperatura en los procesos bioquímicos de un sistema acuático, la ecuación más aceptada y por lo tanto, con frecuencia utilizada en los modelos, es la relación exponencial de Van't Hoff-Arrhenius, cuya solución para dos coeficientes de rapidez a dos diferentes temperaturas T_1 y T_2 , es :

$$k_{T_2} = k_{T_1} \cdot \theta^{T_2 - T_1} \quad (8)$$

o bien

$$k_{T_2} = k_{T_1} \cdot F(T) \quad (9)$$

donde

- $F(T) = \theta^{(T_2 - T_1)}$
- k_1 : Rapidez de reacción a la temperatura T_1
- k_2 : Rapidez de reacción a la temperatura T_2
- θ : Coeficiente de ajuste de temperatura que puede considerarse constante en determinados intervalos de temperatura.

Para el caso del fitoplancton, $F(T)$ está incluida en el cálculo de la tasa máxima de crecimiento (μ_m) para condiciones óptimas de luz y exceso de nutrientes:

$$\mu_{e[T_2]} = \mu_{m[T_1]} \cdot \theta^{T_2 - T_1} \quad (10)$$

5.1.1.2. Efecto de la Intensidad de luz

La fotosíntesis realizada por el fitoplancton, es proporcional a la intensidad de luz disponible.

La limitación de la intensidad solar disponible, consta de dos componentes, una que describe el efecto de la intensidad de luz sobre la tasa de crecimiento específica del fitoplancton, y otra que describe la atenuación de la luz en función de la profundidad.

En el primer caso, la dependencia de fotosíntesis con la intensidad de luz, incrementa hasta un valor óptimo llamado Intensidad de saturación, a partir del cual se inhibe el crecimiento. Una expresión matemática de la fotoinhibición comúnmente aceptable es la ecuación de **Steele**, (1965):

$$F(I) = \frac{I}{I_s} \exp\left(1 - \frac{I}{I_s}\right) \quad (11)$$

donde

- $F(I)$: factor de atenuación en el crecimiento del fitoplancton por efectos de la intensidad de luz disponible [adimensional]
- I : Intensidad de luz disponible [Ly d^{-1}]
- I_s : Intensidad de saturación de la luz para el fitoplancton [Ly d^{-1}]

I_s representa la intensidad de la luz a la que la tasa de crecimiento específica del fitoplancton es máxima.

Por otra parte, para aguas naturales, la atenuación de la luz en la profundidad esta definida teóricamente por la ley de **Lambert- Beer**:

$$I_{(z)} = I_0 e^{-\gamma z} \quad (12)$$

donde

- $I_{(z)}$: Intensidad de luz, a la profundidad z [Ly d^{-1}]
- I_0 : Intensidad de luz en la superficie del agua [Ly d^{-1}]
- γ : Coeficiente de extinción de la radiación solar en el agua [m^{-1}]
- z : Profundidad en la columna de agua [m]

Al combinar las ecuaciones 11 y 12, se obtiene la relación de la ecuación 13, que determina la reducción de la tasa de crecimiento, en relación con la atenuación de la luz a una profundidad z . Su aplicación requiere conocer en función del tiempo y espacio, la variabilidad de I_0 , cuya magnitud depende de numerosos factores climatológicos y atmosféricos.

$$F(I)_z = \left\{ \frac{I_0}{I_s} \exp(-\gamma \cdot z) \right\} \exp \left\{ 1 - \frac{I_0}{I_s} \exp(-\gamma \cdot z) \right\} \quad (13)$$

Dado que el comportamiento de la función bajo condiciones en que $I_z > I_s$, no está bien definido y, que existe un nivel en que la tasa de crecimiento iguala a la tasa de mortandad del fitoplancton, es necesario establecer los siguientes límites (De Victorica, 1995):

$$F(I) \begin{cases} 1 & I > I_s \\ 0 & I \leq I_c \end{cases}$$

5.1.1.3. Efecto de la concentración de fósforo

Cuando el fósforo se encuentra en exceso para los organismos, el valor de la tasa de crecimiento específica (μ_e), permanece constante para el fósforo y esos organismos, pero cuando la concentración del fósforo es limitante, entonces el valor de la tasa de crecimiento específica de crecimiento (μ_e), disminuye. Este efecto del nutriente en la μ_e , se ilustra en la figura 6. Su relación se basa en la cinética de Michaelis–Menten (1913), cuya ecuación para el fósforo asimilable como único nutriente limitante, bajo condiciones óptimas de luz y temperatura puede expresarse como:

$$\mu_e = \mu_m \frac{[P_1]}{k_{sp} + [P_1]} \quad (14)$$

donde

- $[P_1]$: Concentración de fósforo asimilable $[ML^{-3}]$
- μ_m : tasa máxima de crecimiento $[T^{-1}]$.
- k_{sp} : constante de saturación; igual a la concentración de fósforo correspondiente a $\frac{\mu_m}{2}$ $[ML^{-3}]$

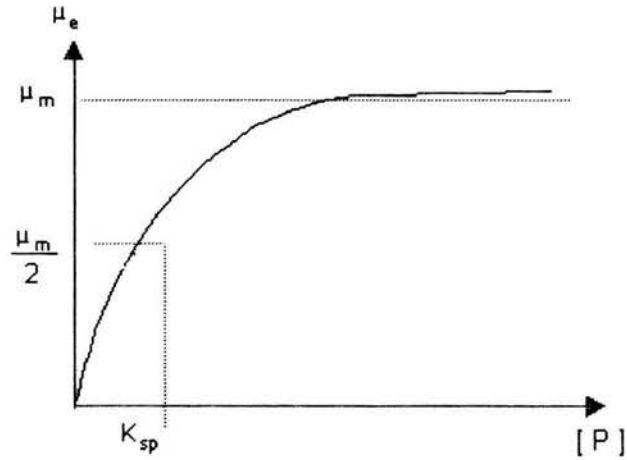


Figura 6 Rapidez de crecimiento específico como función de la concentración de fósforo

Por tanto, haciendo intervenir el efecto de la temperatura en todos los coeficientes cinéticos de todos los términos de la ecuación 6, así como el efecto de la intensidad de luz y la concentración de fósforo en el último término, la ecuación que describe la dinámica del fósforo asimilable en los lagos tiene la siguiente forma:

$$\frac{d[P_1]}{dt} = \{\varpi_2 k_{e2} F(T)[P_2] + \varpi_3 k_{e3} F(T)[P_3] + \varpi_4 k_d F(T)[P_4] + k_h F(T)[P_5]\} - \mu_m F(T) F(I) F(P_1) [P_2] \quad (15)$$

donde:

- $F(T)$: Efecto de la temperatura
- $F(I)$: Efecto de la intensidad de luz
- $F(P_1)$: Efecto de la concentración de fósforo asimilable

La ecuación anterior implica el establecimiento de ecuaciones que definen las variaciones de las concentraciones de P_2 , P_3 y P_5 en el tiempo. Tales ecuaciones se formulan a continuación en el orden que aparecen en la ecuación 15.

5.1.2. Fitoplancton

El fitoplancton es el responsable de la remoción de fósforo biodisponible de la columna de agua y lo convierte en biomasa orgánica. Su dinámica, en términos de fósforo (P_2), está gobernada por los procesos de crecimiento, mortandad, excreción y depredación.

$$\frac{d[P_2]}{dt} = \{ \mu_m F(T) F(I) F(P_1) [P_2] - D_2 F(T) [P_2] \} - k_{e2} F(T) [P_2] - G_2 [P_3] \quad (16)$$

donde:

- D_2 : Tasa de mortandad de fitoplancton [T^{-1}]
- G_2 : Tasa de pérdida de fitoplancton por depredación de zooplancton [$M/L^3 T$]

5.1.3. Zooplancton

De la misma manera que para el fitoplancton, la cinética del zooplancton en términos de fósforo (P_3), es función de su crecimiento, mortandad, depredación y excreción. El zooplancton se alimenta de fitoplancton y detrito; la cinética de Michaelis-Menten, es una forma válida para representar las tasas de pérdida de fitoplancton y detrito por depredación (G_2 y G_4), por lo que las tasas de pérdida respectivas por depredación del zooplancton se representan con la siguiente ecuación (*Chapra, 1983*):

$$G_i = C_m \cdot F(T) \frac{f_i [i]}{k_{sz} + \sum f_i [i]} \quad (17)$$

donde:

- C_m : Tasa de crecimiento máxima de zooplancton [T^{-1}]
- k_{sz} : Constante de saturación media para la ingesta de zooplancton [mgP -zooplancton/ L^3].
- f_i factor de preferencia relativo a la fuente de alimento "i"
- $[i]$: concentración del alimento "i" (P_2 o P_4)

El crecimiento del zooplancton se basa en la conversión del alimento digerido y transformado en nueva biomasa, por tanto, depende de la eficiencia del zooplancton

para asimilar cada alimento "i" (η_i). Entonces, la tasa de producción de biomasa de zooplancton (Z), es $\sum G_i \cdot \eta_i$.

La ecuación de la dinámica del zooplancton resultante del balance correspondiente para este componente es:

$$\frac{d[P_3]}{dt} = \{G_2 \cdot \eta_2 [P_3] + G_4 \cdot \eta_4 [P_3] - D_3 F(T) [P_3] - k_{e3} F(T) [P_3]\} \quad (18)$$

donde

- G_4 : Tasa de pérdida de fósforo particulado por depredación de zooplancton [M/L^3T]
- D_3 : Tasa de mortandad de zooplancton [T^{-1}]
- η_2 : Eficiencia de ingesta de detrito por el zooplancton [adimensional]
- η_3 : Eficiencia de ingesta de fitoplancton por el zooplancton [adimensional]

5.1.4. Fósforo orgánico disuelto

El fósforo orgánico disuelto (P_5), se genera a través de una fracción de las excretas solubles del plancton y la descomposición del fósforo orgánico particulado. Su pérdida la constituye, el proceso de transformación a fósforo asimilable.

$$\frac{d[P_5]}{dt} = \{(1 - \omega_2)k_{e2}F(T)[P_2] + (1 - \omega_3)k_{e3}F(T)[P_3] + (1 - \omega_4)k_dF(T)[P_4] - k_hF(T)[P_5]\} \quad (19)$$

Finalmente, se formula la ecuación de la dinámica de P_4 , requerida para la solución de la ecuación 19.

5.1.5. Fósforo orgánico particulado

La cantidad de fósforo particulado (P_4), depende de mortandad del fitoplancton y zooplancton como fuente, y la pérdida por consumo del zooplancton y descomposición de este componente a fósforo orgánico soluble:

$$\frac{d[P_4]}{dt} = \{D_2F(T)[P_2] + D_3F(T)[P_3] - G_4[P_3] - k_dF(T)[P_4]\} \quad (20)$$

5.2. Solución numérica

La solución del conjunto de ecuaciones diferenciales 15, 16, 18, 19 y 20, se realizó mediante integración numérica, usando el método de Runge - Kutta, cuarto orden.

El procedimiento de Runge - Kutta (1895 y 1901), es un método numérico práctico para la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden; éste consiste en evaluar varias veces la función $f(x,y)$ para obtener una aproximación adecuada de dicha función en el intervalo bajo la curva $f(x,y)$ entre x_n y x_{n+1} (figura 7). El método consiste en encontrar en uno o mas puntos, una solución $y = f(x)$ que pasa por un punto dado (x_n, y_n) , luego se forma una serie de segmentos de línea que aproximan la curva de $y = f(x)$ sobre algún intervalo que comienza en $x = x_n$, y se determinan sus pendientes. El punto extremo derecho de cada segmento es el punto extremo izquierdo del siguiente segmento y la pendiente de cada segmento es un promedio pesado de valores de la función $f(x,y)$ en puntos elegidos.

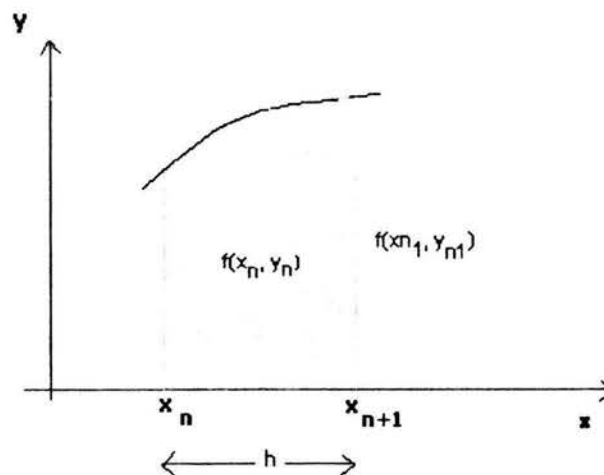


Figura 7 Dominio de integración del método Runge - Kutta

El Método de Runge - Kutta tiene muchas variaciones, pero todas se pueden ajustar a la forma general

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i)h \quad (21)$$

donde $f(x_i, y_i)$ se le conoce como función de incremento y se interpreta como el promedio de la pendiente sobre el intervalo de cálculo.

Se pueden desarrollar varios métodos de Runge-Kutta empleando una cantidad diferente de términos en la función de incremento. Los métodos más populares son los de 4º orden y el que se describe a continuación es conocido como el método clásico Runge-Kutta de 4º orden.

$$y(x+h) = y(x) + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \cdot h \quad (22)$$

El procedimiento de aplicación del método de Runge-Kutta a la ecuación diferencial (21), con la condición inicial $x(t_0) = x_0$, se esquematiza en las ecuaciones siguientes.

$$k_1 = f(x, y) \quad (23)$$

$$k_2 = f\left(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_1\right) \quad (24)$$

$$k_3 = f\left(x + \frac{1}{2}h, y + \frac{1}{2}hk_2\right) \quad (25)$$

$$k_4 = f(x+h, y+hk_3) \quad (26)$$

A partir del valor de y en el instante x , se determina el valor de y en el instante $x+h$, mediante la ecuación (22).

De esta manera, la aproximación de la solución del conjunto de ecuaciones diferenciales que conforman el modelo del ciclo del fósforo propuesto, se obtiene mediante un programa de computación desarrollado para aplicar a cada una de las ecuaciones diferenciales anteriores, los cálculos requeridos por el método de solución descrito.

Para ejecutar el programa, se requiere la siguiente información de entrada:

- a) La magnitud de los parámetros cinéticos involucrados, en d^{-1}
- b) La magnitud de las concentraciones iniciales de cada uno de los componentes de fósforo, en mgP/L
- c) Los valores de las variables ambientales como Intensidad de la luz, en Ly/d, el coeficiente de extinción de la luz en el agua, en m^{-1} y la temperatura en el elemento de evaluación, en $^{\circ}C$
- d) La profundidad hasta la que se desea hacer la simulación, en m
- e) El tiempo total de simulación, en d

Con esta información, el programa obtiene la solución numérica de las ecuaciones diferenciales del modelo, mediante la repetición de los cálculos de las ecuaciones 22-26, en intervalos de 0.2 días, utilizando en cada calculo, el valor generado en la iteración anterior, hasta que el valor supuesto de solución converge con el calculado.

Los resultados finales del programa, representan de manera gráfica la variabilidad de cada uno de los seis componentes de fósforo en el lago de interés, en función del tiempo y discretizando en la profundidad. La figura 8, muestra el diagrama de flujo del programa.

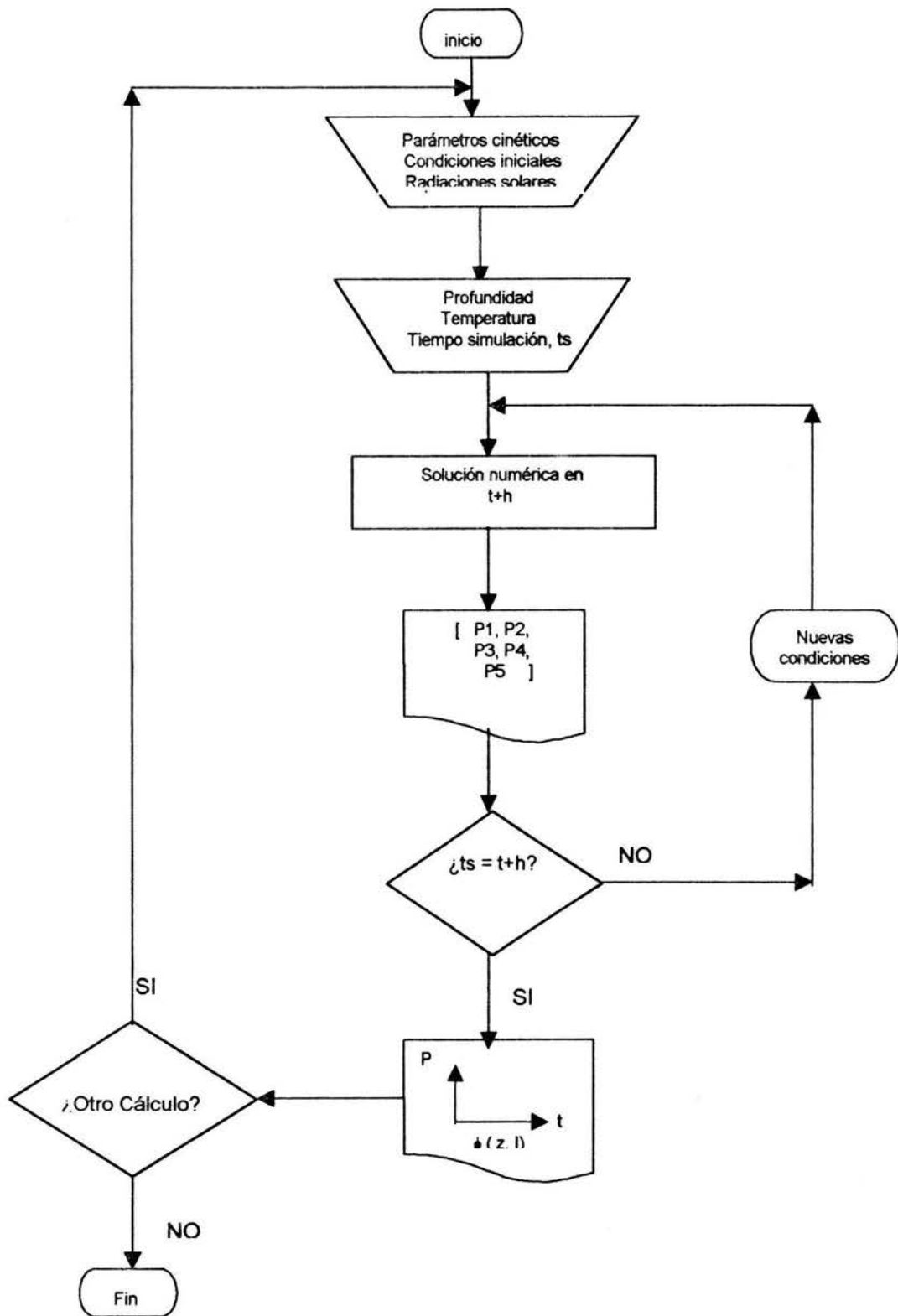


Figura 8 Conceptualización del algoritmo de solución

6. APLICACIÓN DEL MODELO

Para el ejemplo de aplicación del modelo, se propone la existencia de un lago en el que se cumplen las condiciones y características establecidas en el capítulo 5.

Dado que en México la información requerida para alimentar al modelo es escasa o prácticamente no existe, la mayor parte de ella procedió de estudios realizados en otros países tales como Estados Unidos y Canadá. También, cabe aclarar que en algunos casos, la selección de la magnitud de los parámetros fue difícil, debido a que aún en el extranjero, su disponibilidad es limitada; sin embargo, en otros casos, la dificultad estuvo en seleccionar de entre varios, la magnitud de los parámetros. Los únicos datos de parámetros cinéticos obtenidos de trabajos realizados en o para lagos Mexicanos, corresponden a los siguientes:

- a) Parámetro cinético de crecimiento máximo de fitoplancton (μ_m)
- b) Coeficiente de temperatura para el crecimiento del fitoplancton (θ),
- c) Concentración inicial de Fitoplancton ($[P_2]_0$),
- d) Perfil de temperatura a lo largo de la columna de agua,
- e) Intensidad de luz media diaria mensual (I_0),
- f) Intensidad de saturación para el fitoplancton (I_s),
- g) Intensidad de compensación fotosintética (I_c) y
- h) Coeficiente de extinción de la luz en la columna de agua (γ).

En las tablas 1 y 2, se muestran las magnitudes de los parámetros usados en las simulaciones.

Tabla 1 Parámetros cinéticos usados en las simulaciones

Parámetro	Magnitud	Unidades	Referencia
μ_m	1.886	[d ⁻¹]	(32)
k_{sp}	0.05	[mgP/l]	(27)
k_{sz}	0.05	[mgP/l]	Supuesto
D_2	0.09	[d ⁻¹]	(27)
D_3	0.05	[d ⁻¹]	(13)
C_m	0.86	[d ⁻¹]	(7)
k_h	0.075	[d ⁻¹]	(7)
k_d	0.09	[d ⁻¹]	(13)
k_{e2}	0.025	[d ⁻¹]	(7)
k_{e3}	0.07	[d ⁻¹]	(27)
ω_2	0.8		(7)
ω_3	0.8		(7)
ω_4	0.1		Supuesto
η_{P2}	1		Supuesto
η_{P4}	1		Supuesto
f_2	1		(7)
f_4	1		(7)

Para las condiciones iniciales, se tomó la información presentada en la tabla 2, cuyas magnitudes se usaron para todo el perfil de la columna de agua.

Tabla 2 Condiciones Iniciales usadas en las simulaciones

Componente	Magnitud	Unidades	Referencia
P_1	0.013	[mgP/L]	Supuesto
P_2	0.012844 *	[mgP/L]	(30)
P_3	0.004 **	[mgP/L]	(27)
P_4	0.002	[mgP/L]	Supuesto
P_5	0.005	[mgP/L]	Supuesto

*equivalente a 1.97×10^8 organismos/l

**equivalente a 0.2 mg /l (biomasa seca)

En la tabla 3, se muestra el perfil térmico usado en las simulaciones. Esta información se obtuvo de un estudio realizado en la presa "La Boca" (De Victorica, 1989).

Tabla 3. Perfil térmico usado en las simulaciones

z (m)	T °C)	z (m)	T °C)
0.5	30	7.5	21.5
1	29	8	21.4
1.5	28	8.5	21.2
2	25	9	21
2.5	24	9.5	20
3	23.5	10	19.5
3.5	22	10.5	19
4	22	11	18.5
4.5	22	11.5	18
5	22	12	17.5
5.5	22	12.5	17
6	22	13	16.5
6.5	22	13.5	16
7	22	14	15

El factor de atenuación en el crecimiento del fitoplancton por efecto de la intensidad de luz disponible, dentro del sistema acuático, se calculó mediante la ecuación 13, para cada profundidad. Aunque la evaluación de $F(I)_z$, estrictamente tiene variaciones en el tiempo de acuerdo a la intensidad solar que llega a la superficie del agua, en este trabajo se consideró como constante durante todo el tiempo de simulación. De igual manera, durante el tiempo de simulación, se consideraron como constantes tanto la magnitud del coeficiente de atenuación de la luz (γ) como las de la intensidad de la luz de saturación (I_s) y la de compensación para el fitoplancton (I_c). Dado que los valores de I_o normalmente son mayores a los de I_s , en los primeros metros de profundidad, se tendrían valores iguales de $F(I)_z$, según las condiciones establecidas de la ecuación 13. Por tanto, para las simulaciones de este ejemplo de aplicación, se utilizó el valor de I_o igual al de I_s , con la finalidad de obtener un perfil de atenuación de la luz consecutivo desde la superficie hasta la profundidad seleccionada. La magnitud de los parámetros referidos son los siguientes:

- $I_o = I_s = 20.1 \text{ Ly/d}$
- $I_c = 0.7584 \text{ Ly/d}$
- $\gamma = 0.6\text{m}^{-1}$

Dados los valores anteriores de intensidad de luz, la profundidad máxima a la que se realizaron las simulaciones corresponde a los 5.5m, ya que de acuerdo con la ecuación 12 (Lamber-Beer), corresponde a la profundidad en donde la intensidad de luz iguala a la intensidad de compensación fotosintética y por tanto el efecto de la actividad fitoplanctónica es nulo.

7. IMPORTANCIA RELATIVA DE LOS PRINCIPALES PARÁMETROS CINÉTICOS CONSIDERADOS EN LA ESTRUCTURACIÓN DEL MODELO.

En esta etapa del trabajo, se determina el efecto que ocasiona en la variable de respuesta, la variación de la magnitud de algunos de los parámetros cinéticos incluidos en el modelo. El procedimiento consistió en variar cada uno de los parámetros cinéticos de manera individual en un porcentaje constante y luego, realizar la simulación correspondiente en cada elemento del sistema desde la superficie hasta el elemento 6, donde se encuentra ubicada la profundidad de compensación. Para este caso, se utilizaron incrementos y decrementos del 10% sobre la magnitud de cada uno de los parámetros cinéticos evaluados, se realizaron las simulaciones en cada elemento, hasta la profundidad de compensación y se analizaron los resultados correspondiente a las condiciones estacionarias. En la tabla 4 se muestran los parámetros cinéticos principales que se evaluaron en este estudio, donde los signos (+) y (-) se refieren a los incrementos y decrementos del 10% sobre el valor inicialmente asignado.

En las tablas 6 a 9, se presentan los resultados en "porcentaje de variación" de los compuesto del fósforo en la condición de estabilidad, respecto a los resultados obtenidos de la simulación con los valores de los parámetros cinéticos sin variación.

Tabla 4 Magnitud de las variaciones en los parámetros cinéticos

Variable	Variación 10 %	Valor
k_{sp}	(+)	0.055
	(-)	0.045
k_{sz}	(+)	0.055
	(-)	0.045
μ_m	(+)	2.0746
	(-)	1.6974
D_2	(+)	0.099
	(-)	0.081
k_{e2}	(+)	0.0275
	(-)	0.0225
C_m	(+)	0.946
	(-)	0.774
D_3	(+)	0.055
	(-)	0.045
k_{e3}	(+)	0.077
	(-)	0.063
k_d	(+)	0.099
	(-)	0.081
k_h	(+)	0.0825
	(-)	0.0675

8. RESULTADOS Y EVALUACIÓN

8.1 Dinámica de los compuestos de fósforo

En las figuras 9 a 11 se ilustra, para los segmentos 2, 3 y 4, los resultados de simular, con pasos de tiempo de 4.8 horas, el comportamiento de las cinco formas de fósforo consideradas en el modelo; en la figura 12 el comportamiento del fósforo inorgánico disuelto (fósforo asimilable, P_1) en los segmentos arriba señalados, y en la tabla 5 el tiempo requerido para lograr las condiciones estacionarias y concentraciones correspondientes alcanzadas de cada una de las formas de fósforo en todos los segmentos en que fue discretizada la profundidad.

En principio, puede apreciarse como en la medida que transcurre el tiempo, las concentraciones de las diferentes formas de fósforo en los primeros 4 elementos, se comportan de manera similar (figuras 9 a 11); esto es, al inicio el comportamiento es oscilatorio (estado transitorio) para luego, después de un determinado tiempo, llegar a las condiciones estacionarias; sin embargo, también puede apreciarse, que en cada uno de los elementos, dichas condiciones se producen en magnitudes y tiempos diferentes; por ejemplo, en la figura 9 se observa que las condiciones transitorias para el fósforo asimilable (P_1), prevalecen aproximadamente durante 120 días, mientras que dicho comportamiento en el elemento 4 (figura 11) se mantiene aproximadamente durante 230 días. Estas diferencias en magnitud reflejan el efecto de las condiciones ambientales (intensidad luminosa y temperatura) sobre los procesos cinéticos considerados, cuyas magnitudes decrecen en la medida que se avanza en la profundidad. Razón por la cual, en los elementos 5 y 6, la dinámica del fitoplancton se encuentra restringida, prevaleciendo su decaimiento y por lo tanto el incremento del fósforo asimilable.

Lo anterior, puede apreciarse con mayor claridad, tomando en cuenta la información presentada en la tabla 5 y en la figura 12, en la que se presenta el comportamiento del fósforo asimilable (P_1) en tres profundidades diferentes (elementos 2 a 4). Así, puede verse que aunque cualitativamente el comportamiento de esta forma de fósforo es similar en todos los elementos, no así los tiempos para alcanzar las condiciones estacionarias, ya que mientras estas condiciones se alcanzan en un lapso de 357 días en el elemento 2, tales condiciones se logran en 611 días y 652 días en los elementos 3 y 4 respectivamente.

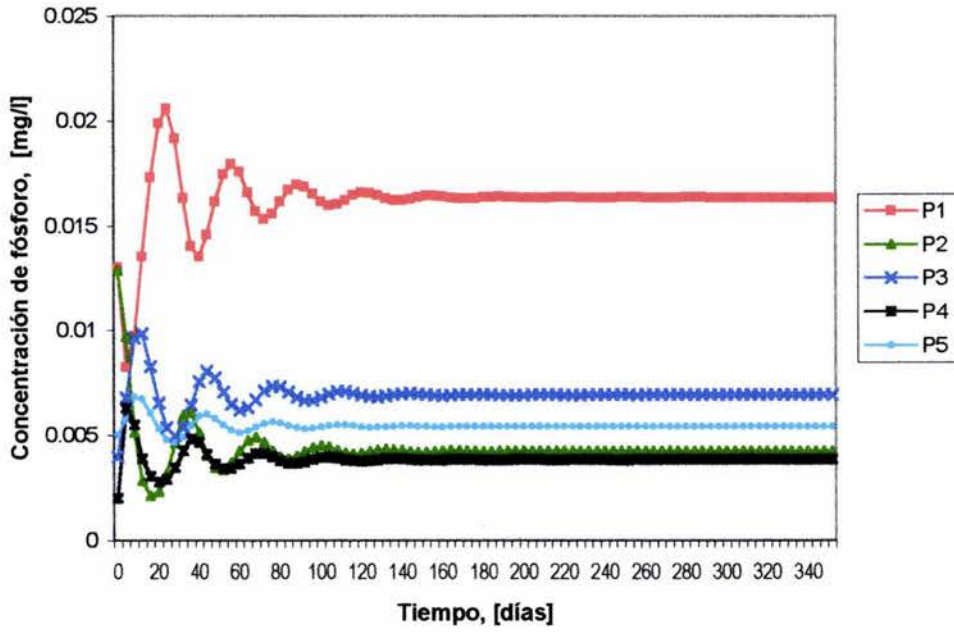


Figura 9 Resultados de la simulación en el elemento 2

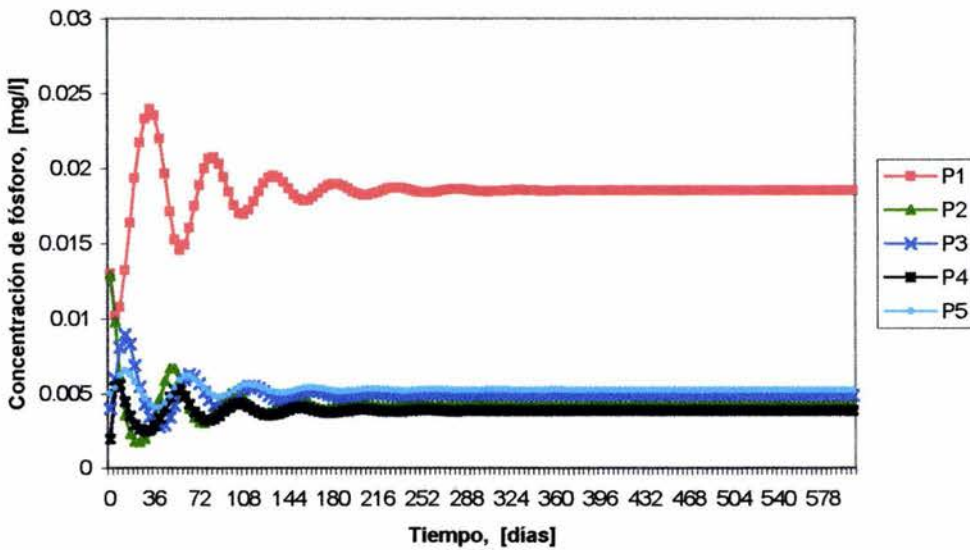


Figura 10 Resultados de la simulación en el elemento 3

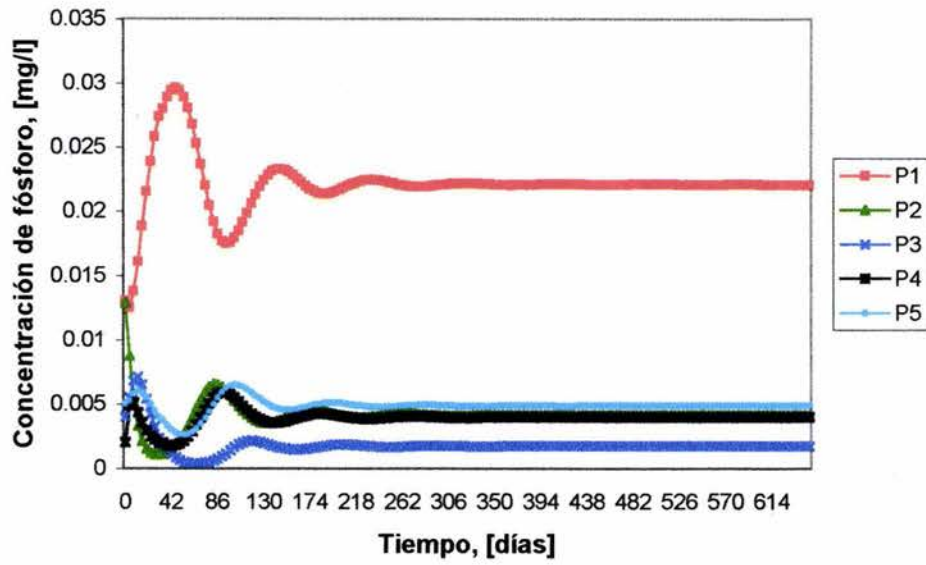


Figura 11 Resultados de la simulación en el elemento 4

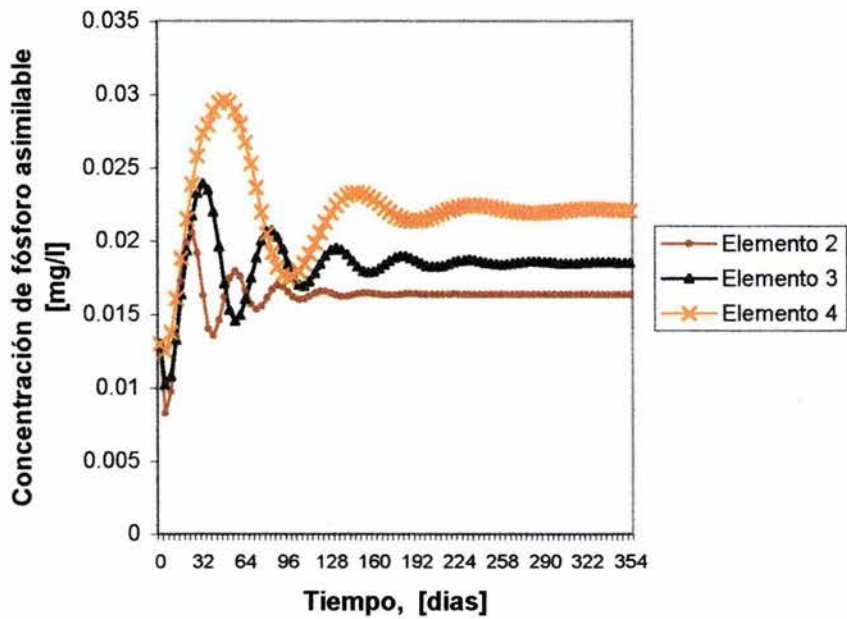


Figura 12 Comportamiento del fósforo asimilable en los elementos 2, 3 y 4.

Por otra parte, en la región del estado transitorio, puede notarse la dependencia de las diferentes formas del fósforo. Así, por ejemplo, en la figura 9 se observa cómo al inicio de las simulaciones, la disponibilidad de fósforo asimilable, tiende sensiblemente a decaer, para luego incrementar su concentración de manera notable (aproximadamente de 0.008 mg/l a 0.021 mg/l). Esta situación se debe a que al dar inicio los procesos, la concentración de P_1 disminuye debido a la actividad fitoplanctónica; organismos que a su vez, deberían crecer de acuerdo con la ecuación 16, en la misma proporción en que consumen el P_1 ; sin embargo, esta situación se observa después de 20 días de haber iniciado el proceso. Esta discrepancia se debe a que aunque el fitoplancton consume P_1 para su crecimiento, éste lo hace bajo las condiciones de la cinética de Michaelis-Menten (nutrimento limitante) dada la concentración inicial del P_1 y a que desde el inicio del proceso, el fitoplancton es depredado por el zooplancton, sumidero principal de tales organismos. Lo anterior, como puede observarse en la figura, se traduce en un incremento en la concentración de zooplancton y con ello, la generación del fósforo disuelto y el particulado, los cuales mediante los procesos de hidrólisis y descomposición biológica, respectivamente, promueven el incremento de P_1 en la columna de agua y con ello, la disponibilidad de esta forma de fósforo para el sustento y crecimiento del fitoplancton, aspecto que también se observa en la figura 9.

El comportamiento descrito anteriormente, continua durante la fase transitoria, en la cual ocurren incrementos y decaimientos en la concentración de cada uno de los compuestos del fósforo, dadas las interacciones establecidas según los procesos cinéticos considerados. Desde el punto de vista cualitativo, tal comportamiento es similar en todos los elementos considerados en la columna de agua hasta la profundidad donde se ubicó la intensidad de la luz de compensación; sin embargo, como ya ha sido aclarado, sólo difieren en tiempo e intensidad de acuerdo a las condiciones ambientales imperantes en cada uno de los elementos.

Entonces, de manera general, se tiene que la concentración del fitoplancton (P_2), disminuye por la carencia de sustento alimenticio y por el contrario, aumenta cuando existe suficiente fósforo asimilable por tales organismos.

Por otra parte, en lo que concierne al comportamiento del zooplancton (P_3), se observa que al inicio de los procesos, su concentración se incrementa a expensas del fitoplancton y del fósforo particulado, proceso que varía de acuerdo a la magnitud de las variaciones de P_2 y P_4 , que son las formas de fósforo que utiliza para su crecimiento

En cuanto al fósforo orgánico particulado (P_4), como puede apreciarse en la figura 9, éste se genera en la medida en que se producen los detritos originados por la muerte del fitoplancton y zooplancton, y se reduce de acuerdo con la magnitud en que éste es asimilado por el zooplancton y transformado biológicamente a las formas de fósforo inorgánico y orgánico disueltos.

Finalmente se tiene que, los cambios de concentración que ocurren durante la fase transitoria del fósforo orgánico disuelto (P_5), están gobernados a su vez por las dinámicas del fósforo orgánico particulado y de ambos organismos acuáticos considerados.

De lo anterior, puede notarse que la dinámica de los componentes del ciclo del fósforo, queda condicionada por cada uno de los procesos involucrados y gobernada según la magnitud de los parámetros cinéticos y condiciones iniciales de los compuestos de fósforo considerados. Así por ejemplo, se tiene que el fósforo asimilable (P_1), depende principalmente de la actividad fitoplanctónica, misma que está condicionada, en primer término, por la cantidad de fósforo asimilable presente en el sistema y luego, por el proceso de depredación y el efecto de las condiciones ambientales externas e internas, como la intensidad de la luz y la temperatura del cuerpo de agua.

Por otra parte, en las figuras 13 y 14 se muestran los perfiles de concentración de las diversas formas de fósforo correspondientes a las condiciones estacionarias hasta los 5.5 metros de profundidad, lugar en que quedo ubicada la intensidad de compensación de la luz; y en la tabla 5, se muestran las concentraciones de dichas formas de fósforo y el tiempo requerido para alcanzar las condiciones estacionarias en cada uno de los elementos.

Tabla 5. Perfil de concentraciones de las diversas formas de fósforo y tiempo en que se alcanzaron las condiciones estacionarias.

Elemento	t_e^* (días)	Formas del fósforo (mgP/l)				
		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
1	267	0.01465	0.00428	0.008523	0.003828	0.005564
2	357	0.016361	0.00426	0.006939	0.003848	0.005435
3	611	0.018527	0.004231	0.004933	0.003877	0.005276
4	652	0.022114	0.004134	0.001749	0.003974	0.004873
5	1428	0.036842	0.000001	0	0.000001	0.000001
6	146	0.036844	0	0	0	0

t_e^* : Tiempo requerido para alcanzar las condiciones estacionarias

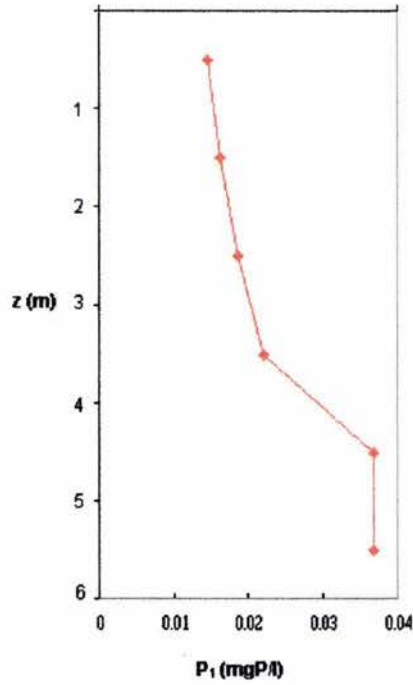


Figura 13 Perfil de concentración de fósforo asimilable en la columna de agua, correspondiente a las condiciones estacionarias

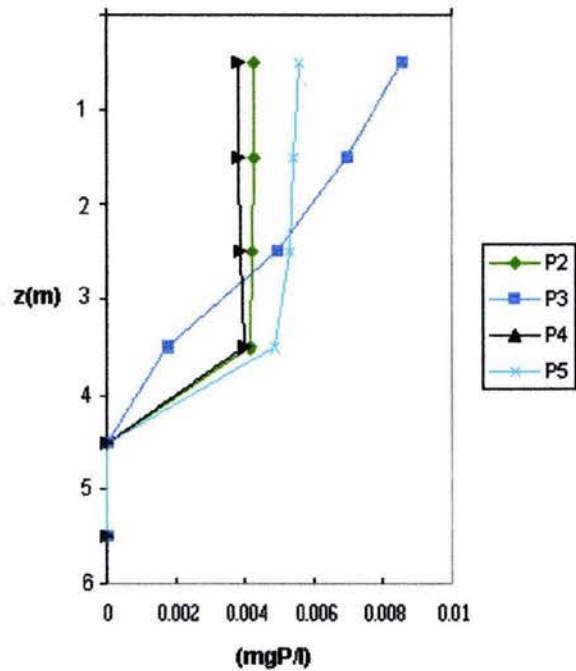


Figura 14 Perfil de concentración de fósforo en fitoplancton y zooplancton, fósforo orgánico particulado y disuelto en la columna de agua, correspondiente a las condiciones estacionarias

En la figura 13 puede observarse cómo la concentración de fósforo asimilable aumenta gradualmente conforme se avanza en la profundidad. Este comportamiento se debe, como más adelante se explica, al decaimiento de la actividad fotosintética en la profundidad (sumidero de esta forma de fósforo), causada por la reducción de la temperatura y atenuación de la luz, que inician a partir de la superficie del agua hasta las zonas más profundas.

En la figura 14, puede apreciarse que el componente del fitoplancton, disminuye a mayores profundidades; comportamiento congruente con las condiciones ambientales que prevalecen en cada uno de los segmentos en que fue discretizado el cuerpo de agua. En los primeros metros, la intensidad de la luz y la temperatura, son favorables para el crecimiento del fitoplancton, al contrario de lo que sucede en las zonas más profundas, en las que el decaimiento de tales factores llegan a ser de tal magnitud, que inhiben el proceso fotosintético.

En el caso del zooplancton, éste también disminuye conforme se avanza en la profundidad, comportamiento que obedece correctamente a la dependencia de éste con la dinámica del fitoplancton en la profundidad, ya que estos organismos son parte importante de la generación de la biomasa zooplanctónica.

El lo que concierne al las formas de fósforo orgánico particulado y orgánico disuelto, también varían de manera cualitativa correcta, según la dinámica de los organismos planctónicos, ya que ambos constituyen la fuente generadora del fósforo particulado y disuelto a través de los procesos de mortandad y excreción respectivamente.

8.2 Importancia relativa de los principales parámetros cinéticos considerados en la estructuración del modelo

En las tablas 6 a 10, se presentan los efectos, en porcentaje, que producen las variaciones de las constantes cinéticas sobre las concentraciones de las diversas formas de fósforo correspondientes a las condiciones estacionarias.

En dichas tablas, los valores contenidos en la parte superior e inferior de cada fila, corresponden al porcentaje de variación en las concentraciones de los compuestos de fósforo, causados por el incremento y decremento en un 10 %, de la magnitud de los parámetros cinéticos.

De manera general, se puede decir que aunque los cambios en la magnitud de los parámetros cinéticos, no modificó el comportamiento cualitativo ni la estabilidad del sistema, si se produjeron cambios de diferente magnitud en los compuestos de fósforo, cuyo grado de afectación en forma decreciente corresponde al orden siguiente: fósforo orgánico disuelto (P_5) > fósforo en fitoplancton (P_2) > fósforo orgánico particulado (P_4) > fósforo en zooplancton (P_3) > fósforo asimilable (P_1).

La variación de mayor importancia se produjo en el elemento 5 para el fósforo orgánico disuelto (P_5), fósforo en fitoplancton (P_2) y fósforo orgánico particulado (P_4) provocado principalmente por los cambios en la magnitud de la constante de saturación media de fósforo para la asimilación de fitoplancton (k_{sp}), la tasa máxima de crecimiento de fitoplancton (μ_m), la tasa de mortandad de fitoplancton (D_2) y la tasa de excreción de fitoplancton (k_{e2}).

Asimismo, en las tablas puede observarse que no hubo cambios manifiestos en el elemento 6. Esto era de esperarse, ya que a la profundidad donde se ubica dicho elemento, la producción fotosintética quedó limitada por las condiciones ambientales prevalecientes en esa zona.

También, se observa que el cambio de los parámetros cinéticos, de manera individual, producen en cada uno de los compuestos de fósforo, variaciones porcentuales de magnitud similar en los primeros metros de la columna de agua; por ejemplo, para el fósforo en fitoplancton (P_2), fósforo orgánico particulado (P_4) y fósforo orgánico disuelto (P_5), esto se cumple en los elementos 1 a 4 y, para el caso de fósforo en fitoplancton (P_3), únicamente para los elementos 1-3. Para los primeros, tal comportamiento probablemente se deba al efecto de las condiciones ambientales prevalecientes sobre el elemento 5, y para el caso del zooplancton, tal comportamiento puede deberse a que la concentración del sustrato para el zooplancton, es tal que no satisface sus necesidades y por ende, bajo tales condiciones prevalece su decaimiento.

Por otra parte y de manera particular para cada uno de los componentes del fósforo, en la tabla 6, puede verse que las variaciones en la concentración del fósforo asimilable, son relativamente pequeñas en los primeros 4 elementos, y prácticamente nulas para los elementos 5 y 6. De estas variaciones, la de mayor magnitud (11%) se observó en el elemento 5, dado el incremento en la tasa máxima de crecimiento de fitoplancton (μ_m). Asimismo, de estos resultados puede establecerse que para el fósforo asimilable, las constantes cinéticas de mayor importancia son la tasa máxima de crecimiento de fitoplancton (μ_m), la tasa de crecimiento máxima de zooplancton (C_m), la tasa de mortandad de fitoplancton (D_2) y la constante de saturación media para la ingesta de zooplancton (k_{sz}).

Por otra parte, en la tabla 7 se muestran los resultados para el caso del fitoplancton; en ella, se observa que las mayores variaciones de esta forma de fósforo se presentaron sólo en el elemento 5 cuando se realizaron, de manera independiente, los cambios de la tasa máxima de crecimiento de fitoplancton (μ_m), la tasa de mortandad de fitoplancton (D_2), la constante de saturación media de fósforo para la asimilación de fitoplancton (k_{sp}) y la tasa de excreción de fitoplancton (k_{e2}). Lo anterior probablemente puede explicarse porque el elemento 5, corresponde a una profundidad en donde las condiciones ambientales restringen el crecimiento del fitoplancton y también dichos parámetros son determinantes en la generación o decaimiento de la biomasa fitoplanctónica, por lo que el cambio de tales parámetros cinéticos, afectan de manera directa y considerable, la dinámica del fitoplancton. Adicional a lo anterior, los parámetros cinéticos de relevancia, por su efecto sobre

los elementos 1 a 4, resultaron ser la tasa de crecimiento máxima de zooplancton (C_m), la constante de saturación media para la ingesta de zooplancton (k_{sz}) y la tasa de excreción de zooplancton (k_{e3}).

En la tabla 8, se aprecia que para el zooplancton (P_3), no existen variaciones en la región de los 5m, dado que a esta profundidad la estabilidad de este parámetro se alcanza más rápido que los demás componentes involucrados. No obstante, las mayores variaciones (11% a 44%), se encuentran en el elemento 4, generadas por el cambio de la constante de saturación media para la ingesta de zooplancton (k_{sz}), la tasa de excreción de zooplancton (k_{e3}), la tasa de crecimiento máxima de zooplancton (C_m), la constante de saturación media de fósforo para la asimilación de fitoplancton (k_{sp}), la tasa de mortandad de fitoplancton (D_2), y la tasa máxima de crecimiento de fitoplancton (μ_m). En relación con los resultados de las simulaciones realizadas en los elementos 1 a 3, se observa que los parámetros cinéticos que más influyen sobre el comportamiento de P_3 , son D_2 , k_{sp} y μ_m ; que como puede observarse, producen variaciones del orden de 5% a 18% sobre las concentraciones de la forma de fósforo arriba citada.

En cuanto a las variaciones del fósforo orgánico particulado (P_4) y fósforo orgánico disuelto (P_5), en las tablas 9 y 10 respectivamente, puede verse con claridad cómo estos componentes, al igual que el fitoplancton, en el elemento 5 son fuertemente afectados por las variaciones de la tasa máxima de crecimiento de fitoplancton (μ_m), la tasa de mortandad de fitoplancton (D_2), la constante de saturación media de fósforo para la asimilación de fitoplancton (k_{sp}) y la tasa de excreción de fitoplancton (k_{e2}). Este comportamiento se debe, como era de esperarse, a que estos compuestos de fósforo están íntimamente relacionados con la dinámica del fitoplancton. También, en los elementos 1 a 4, el comportamiento de ambas formas de fósforo P_4 y P_5 , resultan afectados por los cambios realizados en la magnitud de los parámetros cinéticos C_m , k_{sz} , D_3 y k_{e3} para el caso de P_4 y los parámetros C_m , k_h , k_{sz} , y k_{e3} para P_5 .

Tabla 6 Variabilidad porcentual del fósforo asimilable en la columna de agua

Elemento	1	2	3	4	5	6
Parámetro	Porcentaje de variación					
k_{sp}	5	4	4	2	-	-
	6	5	4	3	5	-
μ_m	6	6	5	4	11	-
	7	7	5	4	-	-
D_2	3	2	2	2	-	-
	3	2	2	2	9	-
k_{e2}	1	1	1	1	-	-
	1	1	1	1	-	-
k_{e2}	7	6	6	5	-	-
	8	7	6	5	-	-
C_m	8	7	7	5	-	-
	9	8	8	6	-	-
D_3	2	2	2	2	-	-
	2	2	2	2	-	-
k_{e3}	3	3	3	3	-	-
	3	3	3	3	-	-
k_d	1	1	1	1	-	-
	1	1	1	1	-	-
k_h	2	2	2	1	-	-
	2	2	2	2	-	-

El signo "-", representa los valores con magnitudes de variación menores al 1%

Tabla 7 Variabilidad porcentual del fósforo en fitoplancton en la columna de agua

Elemento	1	2	3	4	5	6
Parámetro	Porcentaje de variación					
k_{sp}	-	-	-	-	100	-
	-	-	-	-	62100	-
μ_m	-	-	-	1	124800	-
	-	-	1	1	100	-
D_2	3	4	4	5	100	-
	4	4	4	5	107900	-
k_{e2}	-	-	-	-	100	-
	-	-	-	-	100	-
k_{e2}	10	10	10	10	-	-
	10	10	10	10	-	-
C_m	10	10	10	10	-	-
	13	13	13	13	-	-
D_3	3	3	4	4	-	-
	3	3	3	4	-	-
k_{e3}	8	8	8	7	-	-
	8	8	8	7	-	-
k_d	3	3	3	4	-	-
	3	3	3	4	-	-
k_h	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-

El signo "-", representa los valores con magnitudes de variación menores al 1%

Tabla 8 Variabilidad porcentual del fósforo en zooplancton en la columna de agua

Elemento	1	2	3	4	5	6
Parámetro	Porcentaje de variación					
k_{sp}	8	9	12	28	-	-
	9	10	13	31	-	-
μ_m	10	12	17	41	-	-
	11	14	18	44	-	-
D_2	5	7	10	30	-	-
	5	7	10	30	-	-
k_{e2}	1	2	3	8	-	-
	1	2	3	8	-	-
k_{sz}	3	3	3	11	-	-
	2	1	2	8	-	-
C_m	2	2	2	8	-	-
	4	4	5	15	-	-
D_3	3	4	4	8	-	-
	3	4	4	8	-	-
k_{e3}	5	5	6	11	-	-
	5	5	5	11	-	-
k_d	2	2	2	3	-	-
	2	2	2	4	-	-
k_h	3	3	3	6	-	-
	3	4	4	7	-	-

El signo "-", representa los valores con magnitudes de variación menores al 1%

Tabla 9 Variabilidad porcentual del fósforo orgánico particulado en la columna de agua

Elemento	1	2	3	4	5	6
Parámetro	Porcentaje de variación					
k_{sp}	-	-	-	-	100	-
	1	-	-	-	62100	-
μ_m	1	-	-	1	124800	-
	-	-	1	1	100	-
D_2	4	4	4	5	100	-
	4	4	4	5	97100	-
k_{e2}	-	-	-	-	100	-
	-	-	-	-	100	-
k_{sz}	10	10	10	10	-	-
	11	10	10	10	-	-
C_m	11	11	11	11	-	-
	14	14	14	14	-	-
D_3	6	7	6	6	-	-
	7	7	6	6	-	-
k_{e3}	5	6	6	7	-	-
	5	5	6	6	-	-
k_d	3	3	4	4	-	-
	3	4	4	5	-	-
k_h	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-

El signo "-", representa los valores con magnitudes de variación menores al 1%

Tabla 10 Variabilidad porcentual del fósforo orgánico disuelto en la columna de agua

Elemento	1m	2m	3m	4m	5m	6m
Parámetro	Porcentaje de variación					
k_{sp}	1	1	2	1	100	-
	2	2	2	2	71200	-
μ_m	2	2	2	2	143100	-
	2	2	2	2	100	-
D_2	2	2	2	2	100	-
	2	2	2	2	112100	-
k_{e2}	-	-	-	-	100	-
	-	-	-	-	100	-
k_{e2}	8	8	8	9	-	-
	8	8	8	9	-	-
C_m	8	9	9	10	-	-
	10	10	11	12	-	-
D_3	4	5	5	5	-	-
	4	5	5	5	-	-
k_{e3}	5	6	6	6	-	-
	5	6	6	6	-	-
k_d	5	5	5	5	-	-
	5	5	5	5	-	-
k_h	9	9	9	9	-	-
	10	10	11	11	-	-

El signo "-", representa los valores con magnitudes de variación menores al 1%

9. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

9.1 Conclusiones

1. En este trabajo, se obtuvo un modelo de tipo determinista, unidimensional, de primer orden, constituido por las ecuaciones cinéticas que describen a los procesos bioquímicos de cada componente del ciclo del fósforo considerado.
2. Dado que la distribución interna de las concentraciones de los componentes de fósforo en la columna de agua, siguen un comportamiento que podría ser explicado teóricamente según las ecuaciones cinéticas de los procesos considerados y sus interrelaciones; el modelo desarrollado, aún con sus simplificaciones, constituye una herramienta útil y punto de partida, para estudiar los problemas de calidad del agua en los lagos y embalses, relacionados con la presencia de los compuestos de fósforo en dichos cuerpos de agua.
3. De los resultados de las simulaciones realizadas, se concluye que tanto el comportamiento de la luz disponible y la temperatura en la columna de agua, determinan el tiempo requerido para alcanzar las condiciones de estabilidad de los procesos considerados y que dicho tiempo, se incrementa en la medida en que se avanza en la profundidad.
4. Por su estructura y de los resultados de las simulaciones realizadas, el modelo permite conocer el siguiente comportamiento de las diversas formas de fósforo:
 - La distribución interna de cada componente de fósforo en función del tiempo.
 - La distribución interna de cada componente de fósforo en la profundidad, en relación con la variabilidad de la luz y la temperatura en la columna de agua.
 - La evolución del fósforo asimilable en el tiempo, en términos de la densidad fitoplanctónica y su dinámica.
 - La profundidad hasta la cual, los diversos componentes de fósforo considerados, desempeñan un papel relevante en la dinámica de la actividad fotosintética.
5. Del análisis de la importancia relativa de los parámetros cinéticos incluidos en el modelo, se obtiene que los más importantes sobre la dinámica del fósforo asimilable (P_1) son: la constante de saturación media de fósforo para la asimilación de fitoplancton (k_{sp}), la tasa de crecimiento máxima de zooplancton (C_m) y la tasa de mortandad de fitoplancton (D_2), dada su relación directa con la dinámica del fitoplancton.

6. Las interacciones mas importantes del sistema son la del fósforo asimilable con el fitoplancton y la del fitoplancton tanto con el fósforo asimilable como con el zooplancton

9.2 Recomendaciones

Aunque el modelo desarrollado en este trabajo, produce resultados cualitativos acorde con lo que teóricamente puede esperarse, la carencia de información relativa a los parámetros cinéticos que en él intervienen, impide su aplicación a casos reales, por lo que es recomendable realizar estudios conducentes a la determinación de tales parámetros.

No obstante que en la estructura del modelo solamente se consideran algunas de las formas de fósforo del ciclo correspondiente, es posible la inclusión de otras fuentes y sumideros de este parámetro, como los de la región bentónica; sin embargo, para ello es recomendable realizar estudios para conocer la dinámica de los procesos que permiten la incorporación del fósforo de los sedimentos a la columna de agua.

Asimismo, como un segundo paso para obtener un modelo mas completo, se recomienda incluir en la conformación de este modelo, el transporte vertical de materia de los componentes del fósforo que así lo requieran.

También, se recomienda mejorar la estructura del modelo, mediante la incorporación de otros que permitan tomar en cuenta las variaciones estacionales en la columna de agua, tanto de la temperatura como de la radiación solar (fotoperiodo) para cualquier región geográfica.

Finalmente, es recomendable acoplar a las ecuaciones cinéticas del modelo desarrollado, ecuaciones que permitan conocer la hidrodinámica de los lagos, con lo que se tendrá un modelo que permita conocer las variaciones espacio-temporales de los compuestos de fósforo dentro del cuerpo de agua y con ello, obtener resultados más apegados a la realidad.

BIBLIOGRAFÍA

- 1 Ávila G. E. 1992, **Evaluación del nivel trófico del lago Nabor Carrillo, Méx.** Tesis, Facultad de Ciencias, UNAM, México.
- 2 Bravo I. L. 1995, **Estudio limnológico de presa Madin, Méx. con énfasis en su estado trófico y manejo de la cuenca.** Tesis de Maestría en Ciencias, UNAM, México.
- 3 Brezonik P. L. 1994, **Chemical kinetics and Process Dynamics in Aquatic Systems.** Boca Ratón, Florida: Lewis
- 4 Bush R. M. y Welch E. B. 1971, **Plankton associations and related factors in a hypertrophic lake.** University of Washington (pp257-274)
- 5 CEPIS, 1987, **Memoria cuarto encuentro del proyecto regional Desarrollo de metodologías simplificadas para la evaluación de eutroficación en lagos cálidos tropicales.** Centro Panamericano de Ingeniería Sanitaria y Ciencias del Ambiente, San Juan de Puerto Rico, Dic, 1987
- 6 Chapman D., 1992, **Water Quality Assessments A guide to the use of Biota, sediments and water in environmental monitoring.** First Edition, Great Britain, Chapman & Hall
- 7 Chapra S. C y. Reckhow K. H, 1983, **Engineering Approaches for lakes management.** Vol. 2. Butterworth Publishers, An Ann Arbor Science Book
- 8 Chapra S. C y. Canale R., 1988, **Métodos numéricos para ingenieros. Con aplicaciones en computadoras personales.** México: McGraw-Hill
- 9 De Anda S. J., 2001, **Contaminación por fósforo en el lago de Chapala.** Tesis de Doctorado en Ciencias, Facultad de Ciencias, UNAM, México.
- 10 De la Lanza E. G. y García C. J. (compiladores), 1995, **Lagos y Presas de México.** México, Centro de Ecología y Desarrollo, A. C.
- 11 De Victorica A. J., 1995, **Análisis de la dinámica de la calidad del agua en lagos y embalses.** Tesis de doctorado, División de estudios de posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM, México.
- 12 De Victorica A. J. y Olvera C., 1989, **Simulación numérica de la productividad primaria en embalses.** Informe elaborado para el Instituto de Ingeniería, UNAM, México Proyecto 8337.
- 13 Environmental Protection Agency, U.S., 1985, **Rates, constants and kinetics formulations in surface water quality modeling.** 2º edition, EPA/600/3-85/040 Environment Research Laboratory Office of research and development. U.S. Environmental Protection Agency. Athens, Georgia 30613

- 14 Henderson- B.- Sellers, 1989, **Water Quality Modeling. Vol. IV Ed. Brian Henderson-Sellers**
- 15 Home A. J. y. Goldman C. R, 1994, **Limnology. Second Edition McGraww-Hill, New York.**
- 16 Ibarra A. A., 1997, **Distribución y abundancia del plancton superficial en el embalse Valle de Bravo, México y su relación con la calidad del agua. Tesis de maestría en Biología y recursos acuáticos, UNAM, México.**
- 17 Jiménez C. F., 1994, **Determinación experimental del coeficiente "teta" de la expresión de Van't-Hoff-Arrhenius para el ajuste del crecimiento fitoplanctónico por efectos de la temperatura, Tesis, Iztacala, UNAM, México.**
- 18 King, K. N., 1996, **C Programming, a modern approach. New York: W.W. Norton.**
- 19 Lamb J. C., 1985, **Water Quality and its Control. USA, Jonh Wiley & Sons**
- 20 Leonov A.V., 1986, **Dynamics of phosphorus forms under various water regimes in the ecosystem of lake kubenkoe. Plenum Publishing Corporation (pp333-342)**
- 21 Loehr R.C., Martin C.S y Rast W., 1980, **Phosphorus Management Strategies for lakes. Ann Arbor, Michigan: Ann Arbor Science.**
- 22 Marcus D.A., 1995, **Ecuaciones diferenciales. México CECSA**
- 23 Martin J. L y Mc Cutcheon Steven C., 1999, **Hydrodynamics and Transport for Water Quality modeling. Lewis Publishers, Boca Raton Florida.**
- 24 Mc Cutcheon S. C., 1989, **Water Quality Modeling. Vol. I Ed. Brian Henderson-Sellers**
- 25 Mukai T., Takimoto K., Shibata T y Abe H., 1985, **Simulation Study of Euthophication in Hiroshima Bay. Water Res. Vol. 19, No. 4 (pp 511-525). Gran Bretaña**
- 26 Olvera V. V., 1990, **Estudio de eutroficación del embalse Valle de Bravo, México. Tesis de Maestría en Ciencias Biológicas, UNAM, México.**
- 27 Orlob, G. T., 1983, **Mathematical modeling of water quality Streams, Lakes and Reservoirs. Chinchester, Gran Bretaña: J. Wiley**
- 28 Rich L. G., 1973, **Environmental Systems Engineering. McGraw-Hill, México.**
- 29 Rivero G. C., 1991, **Estudio de eutroficación en el lago Tequesquitengo, Morelos. Tesis, Facultad de Ciencias, UNAM, México.**
- 30 Rojas V. N., 1992, **Evaluación experimental del efecto de la variación de la luz sobre la productividad fitoplanctónica de un cultivo mixto. Tesis, Iztalala, UNAM, México.**

- 31 Rojiani, KB., 1996, **Programming in C with numerical methods for engineers.** *Upper saddle river, New Jersey: Prentice Hall*
- 32 Ruiz C. S., 1994, **Evaluación experimental de las constantes cinéticas de relación nutrimento-crecimiento planctónico.** *Tesis, Facultad de Ciencias, UNAM, México.*
- 33 Scavia D. y Robertson A., 1979, **Perspectives on lake ecosystem modeling.** *Ann Arbor, Mich: Ann Arbor Science*
- 34 Schnoor J. L., 1996, **Environmental Modeling Fate and transport of pollutants in water, air and soil.** *New York: J. Wiley C.*
- 35 Stumm W., 1985, **Chemical Processes in lakes.** *New York: J. Willey C.*
- 36 Tchobanoglous George y Schroeder Edward D., 1985, **Water Quality.** *Reading, Massachusetts, Mexico City Addison-Wesley.*
- 37 Thomann Robert V., 1972, **Systems Analysis y Water Quality Management.** *New York: McGraw-Hill.*
- 38 Thomann R. V. Y Mueller J. A., 1987, **Principles of Surface Water Quality Modeling and Control.** *New York: Harper Collins.*