



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

“ANÁLISIS DE IMPACTO EN MATERIALES
COMPUESTOS”

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA MECÁNICA
(MECÁNICA APLICADA)

PRESENTA:

FRANCISCO ANTONIO GODÍNEZ ROJANO



DIRECTORA:

DRA. FLORENCIA SERRANÍA SOTO

MÉXICO, D.F.

2004



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

AGRADECIMIENTOS

Dra. Florencia Serranía Soto

Gracias por su apoyo, conocimientos y amistad para la realización de esta tesis.

Dra. Margarita Navarrete Montesinos

Por su tiempo, apoyo y conocimientos.

Ing. Germán Carmona

Gracias por su gran ayuda y amistad.

M. en I. Mario Acosta Flores

Agradezco su tiempo, confianza y amistad.

A todos mis profesores y jurado, quienes con su dirección contribuyeron al logro de una de mis metas.

Agradezco al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por su valioso apoyo económico.

Al Instituto de Ingeniería por facilitar sus instalaciones y equipos durante algunos experimentos.

A la Universidad Nacional Autónoma de México por brindarme una educación de excelencia.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo mi mamá Alicia y a mi papá Francisco, a quienes amo profundamente.

A mi hermano, con mucho cariño y agradecimiento.

Con mucho amor a mi abuelita Alicia.

Con especial cariño a mis abuelitos Carmen y José, que en paz descansen.

Con mucho afecto a todos mis tíos y primos.

Con mucha estimación a Valeria y Valeri.

A mis amigos:

El tocayo, Bado, Julián, Lucas, Omar, Ulises, Rool.

RESUMEN

En el presente trabajo estudié el comportamiento dinámico de placas de material compuesto laminado al ser sometidas a cargas de impacto por un objeto viajando a baja velocidad.

El problema de impacto fue abordado desde una perspectiva teórica-experimental.

Realicé algunos experimentos de impacto sobre muestras fabricadas a mano y caracterizadas con un método opto-acústico.

Los resultados de tales experimentos junto con algunos otros disponibles en la literatura fueron comparados con ciertos resultados teóricos.

Formulé un modelo analítico masa-resorte de dos grados de libertad que simula con aceptable precisión el comportamiento de placas de material compuesto laminado que no presentan daños apreciables durante el impacto.

La disipación de la energía cinética de impacto debida principalmente al daño sufrido por el material de las muestras fue simulada mediante un modelo viscoelástico no lineal. Las predicciones concuerdan aceptablemente en aquellos casos en los que el material sufrió algún tipo deterioro sin alcanzar el límite de penetración.

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS.....	2
DEDICATORIA.....	3
RESUMEN.....	4
1. INTRODUCCIÓN.....	8
1.1 Planteamiento del problema.....	10
1.2 Objetivos de la tesis.....	11
1.3 Descripción de la tesis.....	11
1.4 Referencias.....	12
2. SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL PROBLEMA DE IMPACTO.....	14
2.1 Método analítico –numérico para la obtención de un modelo lineal útil en el estudio del comportamiento de placas de material compuesto laminado sometidas a impacto de baja velocidad.....	14
2.2 Planteamiento del problema.....	14
2.3 Comparación de la solución lineal con algunos resultados experimentales.....	30
2.4 Conclusiones y recomendaciones.....	41
2.5 Referencias.....	42
3. COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN.....	43
3.1 Obtención de una expresión analítica para calcular el coeficiente de restitución de materiales compuestos laminados sometidos a impactos de baja energía.....	43
3.2 Modelos viscoelásticos no lineales.....	44
3.3 Métodos de perturbación.....	45
3.4 Método de colocación.....	55
3.5 Coeficiente energético de restitución.....	57
3.6 Conclusiones.....	59

	6
3.7 Referencias.....	59
4. DESARROLLO EXPERIMENTAL Y RESULTADOS.....	61
4.1 Fabricación de las muestras de material compuesto laminado.....	61
4.2 Caracterización de las muestras para las pruebas de impacto utilizando un método opto-acústico numérico-experimental.....	62
4.2.1 Preparación de las muestras.....	62
4.2.2 Procedimiento experimental.....	63
4.2.3 Sistema de medición.....	65
4.2.4 Medición de las velocidades.....	65
4.2.5 Obtención numérica de las constantes elásticas.....	67
4.2.6 Modelos teóricos considerados.....	68
4.3 Pruebas de impacto en muestras circulares de material compuesto laminado fibra de vidrio / epóxico.....	71
4.3.1 Preparación de las muestras.....	71
4.3.2 Equipo de medición.....	71
4.3.3 Desarrollo de las pruebas.....	74
4.4 Resultados de las pruebas de impacto.....	76
4.4.1 Daños sufridos por el material de las muestras después de las pruebas de impacto.....	83
4.5 Referencias.....	85
5. COMPARACIÓN DE LOS MODELOS TEÓRICOS CON LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES.....	86
5.1 Comparación de los resultados de las pruebas de impacto contra los modelos elásticos.....	86
5.2 Comparación de los resultados de las pruebas de impacto contra los modelos viscoelásticos.....	91
5.2.1 Estudio de la disipación de energía en materiales compuestos laminados aplicando el modelo de Walton.....	91

5.2.1.1 Comentarios.....	95
5.2.2 Estudio de la disipación de energía en materiales compuestos laminados a plicando el modelo de Simon.....	96
5.3 Comentarios y conclusiones.....	106
5.4 Referencias.....	107
6. CONCLUSIONES GENERALES.....	109
6.1 Aportaciones del trabajo.....	109
6.2 Sugerencias para investigaciones futuras.....	110
6.3 Referencias.....	111
Apéndice A	
Fórmulas para calcular la rigidez de flexión, corte , contacto y membrana del modelo de Shivakumar.....	112
Apéndice B	
Diseño conceptual de un sistema para medir la deformación central de los platos.....	114
Apéndice C	
Cálculo de la matriz de rigidez promedio.....	127

1. INTRODUCCIÓN.

El problema de impacto ha recibido amplia atención desde hace muchos años. El comportamiento dinámico de estructuras automotrices, aeronáuticas y aeroespaciales sometidas a cargas de impacto es un factor importante que debe ser considerado en el diseño; pues aún cuando las cargas impulsivas sean de magnitud pequeña el daño estructural puede ser considerable.

La aproximación básica en el análisis del problema de impacto fue propuesta por Timoshenko [1]. Él combinó la teoría de vigas de Euler y la ley de contacto Hertziana para estudiar la colisión entre una viga elástica en reposo y una esfera de acero viajando a baja velocidad. Dicha aproximación, fue extendida al análisis de placas y cascarones isótropos sometidos a cargas de impacto.

Generalmente los impactos de baja velocidad ocurren cuando la rapidez del proyectil es inferior a 100 m/s. Sin embargo, algunos investigadores consideran que un impacto de baja velocidad corresponde a situaciones en las que durante el tiempo de contacto las ondas de deformación que viajan a través del material del plato llegan a las fronteras de éste y son reflejadas muchas veces [2].

Cuando se estudia la respuesta dinámica de una estructura laminada bajo una carga de impacto deben ser consideradas las propiedades especiales del material compuesto.

Los materiales compuestos son utilizados extensivamente en muchas industrias debido a sus altas relaciones de esfuerzo y rigidez con respecto al peso; sin embargo, éstos son generalmente débiles bajo cargas de impacto[7]. Este problema recibe especial atención por parte de los diseñadores de estructuras aeronáuticas y aeroespaciales. El daño ocasionado por un impacto puede ser indetectable a simple vista aún cuando las propiedades del material hayan sido severamente afectadas [6].

La respuesta de una estructura al impacto no es puramente función de las propiedades del material; depende también de otros factores tales como la geometría, las condiciones de frontera, el tipo de apilamiento, entre otros; por eso es importante tener una idea básica del comportamiento dinámico de la estructura y saber como se ve afectado por diversos parámetros.

Algunos autores como Lee [3], Greszczuk [4] y Shivakumar [5] han desarrollado modelos simplificados del problema de impacto para superar la dificultad de resolver la ecuación integral no lineal causada por la relación no lineal que establece la ley de contacto Hertziana.

A pesar de que se han hecho muchas contribuciones importantes al análisis numérico de la respuesta al impacto de platos laminados [5,9-15], las soluciones analíticas correspondientes son pocas [2]. En general es imposible obtener la solución exacta del problema de impacto; excepto, si en el modelo se ignora la deformación de contacto local o se presupone la fuerza de contacto[9]; también, es posible obtener soluciones analíticas aproximadas generando modelos lineales [22].

Los modelos analíticos son importantes por que con ellos se realizan estudios paramétricos que proveen un fundamento para predecir el daño debido al impacto [8].

Sun y Chattopadhyay [15] utilizaron la teoría de deformación cortante de Mindlin desarrollada por Whitney y Pagano [16] para analizar platos especialmente ortótropos sometidos a un impacto central. Dobyns [17] siguió la misma aproximación; pero, para

evitar la singularidad de la fuerza cortante transversal en el punto de contacto, distribuyó la fuerza de contacto sobre un área delimitada.

Shivakumar [5] propuso un modelo simple para predecir la fuerza y la duración de impacto en platos circulares de material compuesto; en su método el plato fue modelado con un sistema de tres resortes cuyas rigideces deben ser conocidas. Qian y Swanson [18] usaron el método de Rayleigh-Ritz para obtener una solución aproximada para la respuesta al impacto de platos rectangulares anclados en su periferia.

Basados en las técnicas de la transformada de Laplace, Christoforou y Swanson [19] obtuvieron una solución exacta mediante la linealización de la ley de contacto. Mediante la solución de una ecuación diferencial de un parámetro, Olsson [20] obtuvo una solución analítica aproximada de impactos en platos especialmente ortótropos considerados idealmente infinitos.

Abrate [21] estudió un modelo lineal masa-resorte de dos grados de libertad para estudiar el impacto. A partir de este modelo, identificó dos parámetros que controlan la dinámica del impacto: uno de ellos es la relación de masas del proyectil entre el plato y la otra es la relación de rigideces.

Algunos investigadores han analizado la disipación de energía durante el impacto considerando la deformación local y global de la estructura. Tan y Sun [13], Lin y Lee [35] examinaron el problema de impacto en platos laminados utilizando una ley de indentación estática presentada por Tan y Sun [13], en lugar de utilizar la clásica ley de Hertz. Shivakumar [6] predijo el daño global en platos de material compuesto utilizando el criterio de falla de Tsai-Wu [32] y el criterio del esfuerzo máximo. Chung y Ching [23], estudiaron el daño global y local en platos de material compuesto, aplicando el criterio de falla de Hashin [33] y la ley de indentación estática presentada por Tan y Sun [13] respectivamente. El trabajo experimental de impacto en platos de material compuesto es amplio [24-30]; sin embargo es necesario realizar un mayor número de experimentos que permitan validar el trabajo teórico [34].

En el presente trabajo se analiza la respuesta de placas de material compuesto al ser sometidas a una carga de impacto de baja velocidad. Para estudiar la respuesta de placas que durante el impacto no sufren daños (comportamiento elástico), se plantea un modelo analítico masa-resorte que por su sencillez y capacidad de predicción es más fácil de aplicar que algunos modelos numéricos cuya solución conlleva mayor esfuerzo de cómputo.

Cuando la energía de impacto es lo suficientemente grande para sobrepasar el límite elástico el material de las muestras sufre algún tipo de daño y parte de la energía cinética inicial es disipada por diversos mecanismos. Por lo general los modelos numéricos existentes que toman en cuenta los efectos del daño en la respuesta de las muestras, son difíciles de implementar y consumen mucho tiempo de cómputo. Para sortear estos inconvenientes, se aplicó un modelo viscoelástico no lineal relativamente sencillo y de fácil solución numérica.

En este trabajo también se presentan algunos resultados experimentales de impacto sobre placas de material compuesto laminado. El estudio teórico de impacto fue complementado y validado con estos resultados experimentales y con otros resultados disponibles en la literatura.

1.1 Planteamiento del problema:

Analizar el comportamiento dinámico de placas de material compuesto laminado bajo cargas de impacto, mediante la formulación de un modelo analítico masa-resorte y la aplicación de un modelo viscoelástico.

1.1.1 Restricciones:

Modelo analítico masa-resorte:

- 1) Las constantes de rigidez son obtenidas a partir de las propiedades promedio del material laminado.
- 2) El modelo propuesto esta limitado al estudio de placas de material compuesto cuya respuesta al impacto es controlada por las condiciones de frontera (problema de impacto cuasiestático).
- 3) Con el modelo no es posible predecir perdidas de energía durante el impacto; por tal motivo, su aplicación se ve limitada al análisis de placas elásticas o placas que sufren algún tipo de daño muy ligero.

Modelo viscoelástico:

- 1) El modelo es válido para impactos donde la masa del proyectil es mayor que 3.5 veces la masa total de la placa.
- 2) La deformación en la zona de contacto (indentación) entre las superficies del plato y del proyectil es despreciable.
- 3) El modelo es útil para estudiar el problema de impacto casi-estático.
- 4) Con el modelo viscoelástico solo es posible simular los ciclos de histéresis de desplazamiento contra fuerza de impacto correspondientes a las primeras etapas del daño sufrido por el material de las placas.

1.1.2 Hipótesis:

Mediante un modelo lineal masa-resorte de dos grados de libertad es posible simular con buena aproximación la respuesta dinámica de placas elásticas de material compuesto laminado sometidas a cargas de impacto.

Con un modelo viscoelástico es posible estudiar la disipación de energía debida a las fallas del material compuesto durante el impacto.

1.1.3 Premisas:

De síntesis:

- a) Ley de Hertz
- b) Leyes de Newton
- c) Concepto de rigidez promedio
- d) Ley de contacto lineal propuesta por Yigit y Christoforou [22]

1.2 Objetivos de la tesis.

Los objetivos generales de éste trabajo son:

1. Obtener las propiedades de los materiales laminados aplicando un método numérico experimental basado en la técnica opto-acústica.
2. Implementar uno o varios sistemas de medición para registrar la velocidad inicial de impacto.
3. Realizar algunas pruebas de impacto de baja energía en muestras de material compuesto laminado.
4. Confrontar los resultados experimentales de impacto con algunos modelos elásticos disponibles en la literatura.
5. Formular un modelo para estudiar el fenómeno de impacto; cuya solución sea analítica.
6. Modelar la disipación de energía debida a las fallas del material compuesto durante el impacto.

1.3 Descripción de la tesis.

El presente trabajo se organizó en seis capítulos y cinco apéndices. En el capítulo uno se hizo una breve revisión bibliográfica sobre el fenómeno de impacto en materiales compuestos, reuniendo diversos trabajos teóricos y experimentales. En este capítulo se establecieron los objetivos generales de éste estudio y su organización.

En el capítulo dos se construyó un modelo elástico lineal de dos grados de libertad a partir del modelo no lineal sugerido por Shivakumar [5] para estudiar la dinámica de platos laminados al ser sometidos a impactos de baja velocidad. Para lograr la linealización se utilizaron el concepto de rigidez promedio y la ley de contacto lineal propuesta por Yigit y Christoforou [34]. El modelo lineal fue comparado con algunos resultados experimentales encontrados en la literatura.

En el capítulo tres se revisaron algunos modelos viscoelásticos para su aplicación en el análisis de la disipación de energía durante el impacto a baja velocidad.

Se obtuvieron varias soluciones analíticas aproximadas del modelo viscoelástico no lineal sugerido por Walton [36], mediante la aplicación de una técnica residual (método de colocación) y dos métodos de perturbación (Kryloff-Bogoliuboff [37] y Lindsted-Poincare [38]). Las soluciones sirvieron para obtener una expresión analítica del coeficiente de restitución.

En el capítulo cuatro se desarrollo todo el trabajo experimental; pasando por la fabricación de las muestras, su caracterización y preparación para las pruebas de impacto. En este capítulo se presentan todos los resultados experimentales.

En el capítulo 5 se compararon los resultados experimentales con los modelos elásticos y viscoelásticos estudiados.

En el capítulo 6 se establecieron las conclusiones generales del presente trabajo, así como las perspectivas a futuro en ésta línea de investigación.

1.4 Referencias.

- [1] Timoshenko S. P. , “Zur Frague nach der Wirkung eines Stosse auf einer Balken”, *Mathematical Physics* , Vol. 62, (1913), 198-209.
- [2] Serge Abrate, “Impact on Laminated Composite Materials”, *ASME Appl Mech Rev* , Vol. 44, No. 4 (1991), 155-190.
- [3] Lee, E. H., “The Impact of a Mass Striking a Beam”, *ASME Journal of Applied Mechanics* , Vol. 62, (1940), 129-138.
- [4] Greszczuk, L. B., “Damage in Composite Materials due to Low Velocity impact”, In *Impact Dynamics*, ed. Zukas et al., John Wiley & Sons , New York , pp. 55-94.
- [5] Shivakumar K. N. ,Elber W.,Illg W.”Prediction of Impact Force and Duration Due to Low-Velocity Impact on Circular Composite Laminates”, *Journal of Applied Mechanics*, 52 (1985) 674-680.
- [6] K.N. Shivakumar, W. Elber and W. Illg, “Prediction of Low-Velocity Impact Damage in Thin Circular Laminates”, *AIAA Journal*, Vol.23, No.3, (1984) 442-449.
- [7] Larry H. Strait, Mark L. Karasek, “Effects on Seawater Immersion on the Impact resistance of Glass Fiber Reinforced Epoxy Composites”, *Journal of Composite Materials* , Vol. 26, No. 14 , (1992), 2118-2133.
- [8] Michael O. Pierson and Reza Vaziri.”Analytical Solution for Low-Velocity Impact Response of Composite Plates”, *AIAA Journal* , Vol.34,No. 8, (1996) 1633-1640.
- [9] Lu Chun and K. Y. Lam, “Dynamic Response of Fully-Clamped Laminated Composite Plates Subjected to Low-Velocity Impact of a Mass”, *Int. J. Solids Structures* , Vol.35,No. 11,(1998), 963-979.
- [10] Noiser A.,Kapania R. K., and Reddy J.N., “Low Velocity Impact of Laminated Composites Using a Layerwise Theory”, *Computational Mechanics*, Vol. 13, No. 5, (1994), 360-379.
- [11] Williams K.V. and Vaziri R., “Finite Element Analysis of the Impact Response of CFRP Composite Plates”, *Proceedings of the 10th International Conference on Composite Materials (ICCM-10)*(Whistler,BC, Canada),Woodhead Publishing, Cmbridge, England, UK, (1995), pp. V647-V654.
- [12] Sun C. T. And Liou W. J. , “Investigation of Laminated Composite Plates under Impact Loading Using a Three-Dimensional Hybrid Stress Finite Element Mthod”, *Computers and Structures*, Vol. 33, No. 3, (1989),879-884.
- [13] Tan T. M. And Sun C. T. , “Use of Statical Identation Laws in the Impact Analysis of Laminated Composite Plates”, *ASME Journal of Applied Mechanics* , Vol. 52,(1985),6-12.
- [14] Bogdanovich A. E. And Iarve E. V. , “Numerical Analysis of Impact Deformtion and Failure in Composite Plates”, *Journal of Composite Materials*, Vol. 26, No. 4, (1992),520-545.
- [15] Sun C. T. And Chattopadhyay S. , “Dynamic Response of Anisotropic Laminated Plates Under Initial Stress to Impact of a Mass”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 42, (1975),693-698.
- [16] Whitney J.M. and Pagano N. J. , “Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic plates”, *Journal of Applied Mechanics* , Vol. 37,(1970), 1031-1036.
- [17] Dobyns A. L. , “Analysis of Simply-Supported Orthotropic Plates Subject to Static and Dynamic Loads”, *AIAA Journal*, Vol. 19, No.5,(1981), 642-650.

- [18] Qian Y. And Swanson S. R. , “A Comparison of Solution techniques for Impact Response of Composite Plates”, *Composite Structures* ,Vol.14, No.3,(1990),177-192.
- [19] Christoforou A. P. And Swanson S. R., “Analysis of Impact Response in Composite Plates”, *International Journal of Solids and Structures* ,Vol. 23, No. 2, (1991),161-170.
- [20] Olsson R. ”Impact Response of Orthotropic Composite Plates Predicted from a One-Parameter Differential Equation” , *AIAA Journal*, Vol.30, No.6,(1992) 1587-1596.
- [21] S. Abrate ”Modeling of Impacts on Composite Structures” ,*Composite Structures* , 51 (2001), pp. 129-138.
- [22] A.S. Yigit and A.P. Christoforou ”Impact Dynamics of Composite Beams” , *Composite Structures*, Vol.32, (1995) 187-195.
- [23] Chung Yue Wang and Ching H. Yew, “Impact Damage in Composite Laminates”,*Computers and Structures*,Vol. 37, No.6,(1990),967,982.
- [24] Dahsin Liu, Basavaraju B. Raju and Xinglai Dang ”Size Effects on Impact Response of Composite Laminates” ,*Int. J. Impact Engng* , 21 No. 10 (1998), pp. 837-854.
- [25] M. S. Found and I. C. Howard ”Single and Multiple Impact Behaviour of a CFRP Laminate” ,*Composite Structures* , 32 (1995), pp. 159-163.
- [26] T.M. Tan and C. T. Sun ”Use of Statistical Indentation Laws in the Impact Analysis of Laminated Composite Plates” , *Journal of Applied Mechanics*, Vol.52, (1985) 6-12.
- [27] L. Reis, M. Freitas.”Damage Growth Analysis of Low Velocity Impacted Composite Panels”,*Composite Structures*, 38, 1-4 (1997) 509-515.
- [28] Chun,Gong Kim.”Impact Resistance of Composite Laminated Sandwich Plates”, *J. of Composite Materials*, 26 (1992) 2247-2261.
- [29] Shaw Ming Lee , Paul Zahuta,”Instrumented Impact and Static Indentation of Composites”, *J. of Composite Materials*, 25 (1991) 204-222.
- [30] G. Zhou,”The use of experimentally-determined impact force as a damage measure in impact damage resistance and tolerance of composite structures”,*Composite Structures*, 42 (1998) 375-382.
- [31] M. Navarrete,F. Serrania, M. Villagrán, J Bravo,R. Guinovart and R.Rodríguez ”An Experimental-Numerical Technique for Evaluating the Elastic Constants of Unidirectional Laminates by the Optoacoustic Method: Comparison with Some Theoretical Results”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol.9,(2002) 1-17.
- [32] Tsai S. W. And Hahn H. T., “Introduction to Composite Materials”,*Technomic*,Westport, Conn.,(1980).
- [33] Hashin Z. , “Failure Criteria d Unidirectional Fiber Composites”, *J. Applied Mechanics*, Vol. 47,(1980), 329-334.
- [34] Christoforou A. P. And Yigit A.S., “Characterization of Impact in Composite Plates”,*Composite Structures*, Vol. 43,(1998), 15-24.
- [35] Lin H. J. And Lee Y. J. , “Use of Statical Indentation Laws in the Impact Analysis of Composite Laminated subjected to Impact” , *ASME Journal of Applied Mechanics* , Vol. 57, (1990), 787-789.
- [36] O. R. Walton, “Granular Solids Flow Project”,*Rept. UCID-20297-88-1*, Lawrence Livermore National Laboratory,(1992).
- [37] N. Kryloff and N. Bogoliuboff, “Introduction to nonlinear mechanics” , *Princeton University Press* , (1943), USA.
- [38] Ali Hasan Nayfeh ,“Introduction to Perturbation Techniques”, *John Wiley & Sons*, (1981), USA.

2. SOLUCIÓN ANALÍTICA DEL PROBLEMA DE IMPACTO.

2.1 Método Analítico-Numérico para la obtención de un modelo lineal útil en el estudio del comportamiento de placas de material compuesto laminado sometidas a impacto de baja velocidad:

El objetivo de este capítulo se centra en la obtención de un modelo lineal para predecir la respuesta de placas de material compuesto bajo impactos de baja velocidad a partir del modelo masa-resorte no lineal de dos grados de libertad propuesto por K.N. Shivakumar [5]. Dicho modelo, simula la fuerza de contacto F_c entre el proyectil y la superficie del plato mediante la Ley de Hertz ($F_c = n(x_1 - x_2)^{3/2}$, $x_1 - x_2 =$ desplazamiento relativo, $x_1 =$ desplazamiento del proyectil, $x_2 =$ desplazamiento del plato en su centro). En lo que respecta a la fuerza de membrana F_m , el modelo utiliza la expresión $F_m = K_m x_2^3$.

Para linealizar el resorte que simula la fuerza de contacto (Ley de Hertz) se aplicó el concepto de rigidez promedio y una ley de contacto lineal propuesta por Yigit y Christoforou [12]; para la linealización del resorte de membrana, sólo se aplicó el concepto de rigidez promedio. Para aplicar el concepto de rigidez promedio, es necesario resolver numéricamente una ecuación algebraica no lineal; la cual, representa el balance de energía del sistema masa-resorte durante el impacto. La solución de dicha ecuación provee el valor de la deformación máxima del plato y una estimación del desplazamiento relativo máximo.

El modelo linealizado con el proceso anterior, fue resuelto analíticamente y comparado con algunos resultados experimentales encontrados en la literatura.

También fue posible estudiar mediante un ejemplo numérico y la comparación con algunos resultados experimentales, bajo qué combinación de parámetros (cocientes de masa y rigidez del proyectil y el plato) el concepto de rigidez promedio y la ley de contacto propuesta por Yigit representan una mejor opción de linealización.

El problema original que consiste en resolver un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, se redujo a la solución numérica de una ecuación algebraica no lineal.

2.2 Planteamiento del problema:

A partir del diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura (2.2.1), se obtuvieron las siguientes ecuaciones de equilibrio al realizar la sumatoria de fuerzas en la dirección "x".

$$M_1 x_1'' + \lambda n |(x_1 - x_2)|^{1.5} = 0 \quad (2.2.1)$$

$$M_{ep} x_2'' + K_{bs} x_2 + K_m x_2^3 - \lambda n |(x_1 - x_2)|^{1.5} = 0 \quad (2.2.2)$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 && \text{para } x_1 > x_2 \\ \lambda &= -1 && \text{para } x_1 < x_2 \end{aligned}$$

$n =$ constante del resorte para simular el punto de contacto entre el proyectil y el plato

K_b = constante del resorte para simular el efecto de flexión del plato

K_s = constante del resorte para simular el efecto cortante en el plato

$$K_{bs} = \frac{K_b K_s}{K_b + K_s} = \text{constante del resorte equivalente para } K_b \text{ y } K_s \text{ en serie}$$

K_m = constante del resorte para simular el efecto de membrana en el plato

M_1 = masa del proyectil

M_{ep} = masa efectiva del plato (igual a la cuarta parte de la masa total del plato)

$x_1(t)$ = posición del proyectil en función del tiempo

$x_2(t)$ = posición del plato en función del tiempo

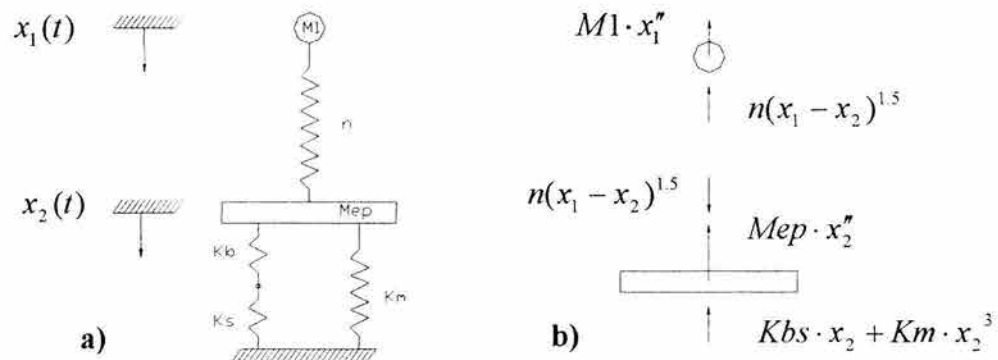


Figura 2.2.1 a) Modelo masa-resorte propuesto por Shivakumar ; b) diagrama de cuerpo libre.

La rigidez promedio (constante promedio del resorte) se define como el cociente entre la fuerza y el desplazamiento en el punto donde el resorte alcanza el desplazamiento máximo. Esto se muestra en la figura (2.2.2) , donde la gráfica fuerza-desplazamiento para el resorte no lineal aparece como una línea curvada. El resorte lineal equivalente seguirá la línea punteada (cuerda) extendiéndose a partir de la posición inicial hasta el desplazamiento máximo. Si el valor local de la constante del resorte para cualquier posición del mismo es $k = (df / dx)$, el valor promedio está dado por

$$\bar{k} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} (df / dx) dx}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (2.2.3)$$

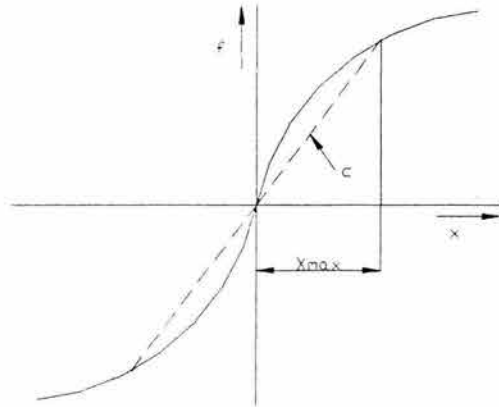


Figura 2.2.2 Diagrama fuerza vs. desplazamiento para un resorte no lineal. La cuerda “c” (línea punteada) representa el resorte lineal equivalente, cuya amplitud máxima es x_{\max} .

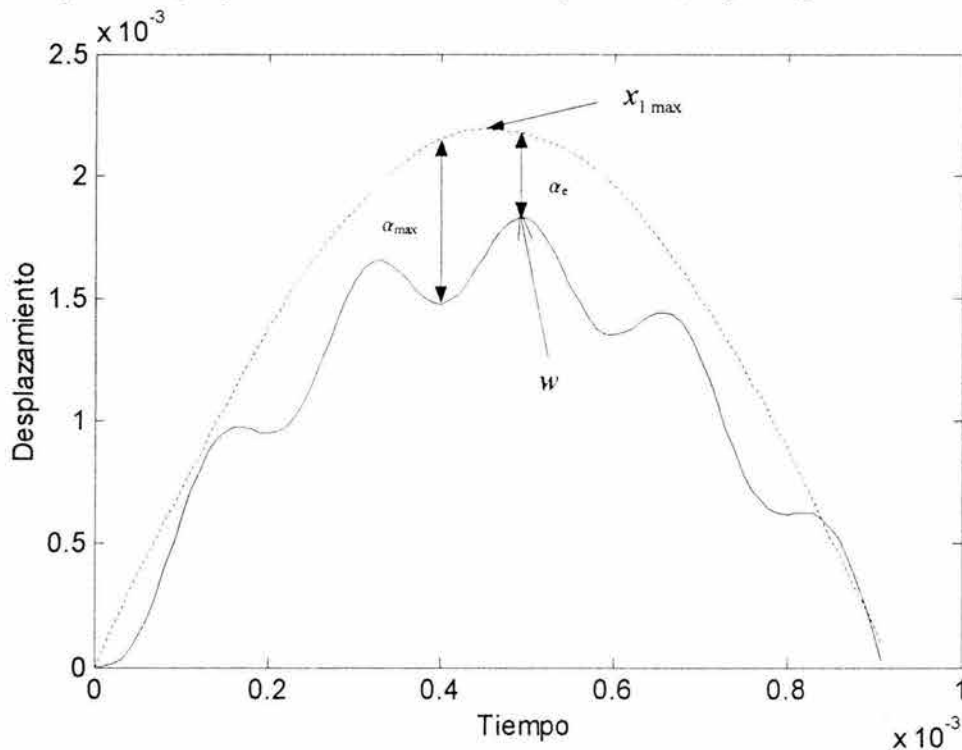


Figura 2.2.3 Diagrama típico desplazamiento vs. tiempo de un proyectil x_1 (línea punteada) y el centro de un plato flexible x_2 (línea continua) obtenido a partir de la solución numérica del modelo no lineal de Shivakumar para un impacto de baja velocidad.

La gráfica (2.2.3) muestra que tanto los desplazamientos del proyectil como del plato describen aproximadamente una trayectoria senoidal; pero es importante hacer notar que por lo general el desplazamiento del plato presentará adicionalmente subarmónicos debido principalmente a la flexibilidad del mismo.

Al aplicar el concepto de la rigidez promedio para linealizar el resorte que simula el efecto de deformación por membrana (ver figura 2.2.4), fue necesario calcular el desplazamiento máximo del plato en su centro. Lo anterior se logró resolviendo numéricamente mediante el

método de Newton-Raphson, el modelo de balance de energía propuesto por Shivakumar que se expresa como:

$$M_I V_0^2 = K_{bs} w^2 + \frac{K_m w^4}{2} + \frac{4}{5} \left[\frac{(K_{bs} w + K_m w^3)^5}{n^2} \right]^{1/3} \quad (2.2.4)$$

Donde :

w = Desplazamiento máximo del plato en su centro.

$P = n\alpha^{3/2}$ = Fuerza de contacto (Ley de Hertz).

$\alpha = x_1 - x_2$ = Desplazamiento relativo entre el proyectil y el centro del plato (indentación).

Ver apéndice (A) para el cálculo de las constantes K_{bs} , K_m y n .

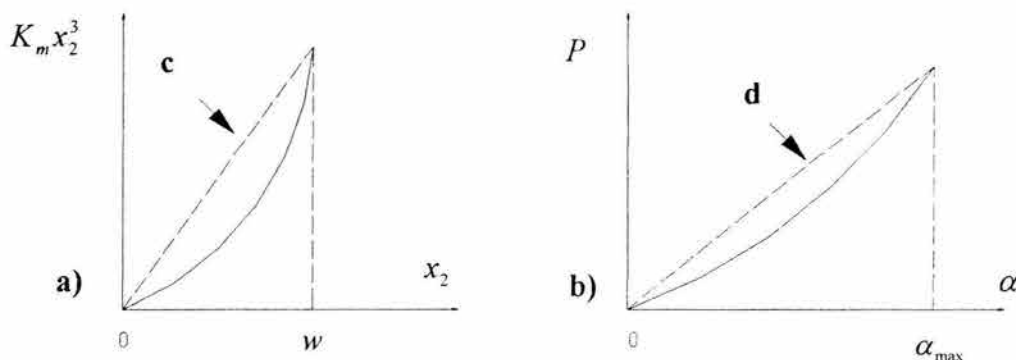


Figura 2.2.4 Diagramas fuerza vs. desplazamiento de los resortes que simulan el efecto de membrana (a) y la ley de Hertz (b) respectivamente. Las líneas c y d representan los resortes lineales correspondientes.

Para linealizar el resorte que simula la fuerza de contacto (Ley de Hertz) fue necesario calcular el desplazamiento relativo máximo entre el proyectil y el centro del plato α_{\max} .

Volviendo a la figura (2.2.3), se pudo observar que por lo general α_{\max} ocurrirá entre uno de los dos mínimos relativos (valles) de la curva x_2 cercanos al desplazamiento máximo del plato (w) y un valor muy cercano al desplazamiento máximo del proyectil $x_{1\max}$.

Como ya se había mencionado, mediante la solución de la ecuación (2.2.4), sólo fue posible obtener el valor del desplazamiento máximo del plato (w) y el de la indentación correspondiente a ese punto α_e (ver figura 2.2.5). Por lo anterior, el valor de α_{\max} se calculó aproximadamente tomando en cuenta la siguiente desigualdad:

$$\alpha_e < \alpha_{\max} < \alpha_r \quad (2.2.5)$$

Donde

α_r = desplazamiento relativo

$$\alpha_e = \left(\frac{5}{4n} \left(M_1 V_0^2 - K_{bs} w^2 - \frac{K_m w^4}{2} \right) \right)^{2/5} \quad (2.2.6).$$

Cuando el desplazamiento máximo del plato w es cero (plato idealmente rígido); el desplazamiento relativo resulta ser :

$$\alpha_r = \left(\frac{5}{4} \frac{M_1 V_0^2}{n} \right)^{2/5} \quad (2.2.7)$$

y por último se propuso

$$\alpha_{\max} = \frac{\alpha_e + \alpha_r}{2} \quad (2.2.8)$$

Por supuesto, esta última ecuación sería analizada para establecer su validez.

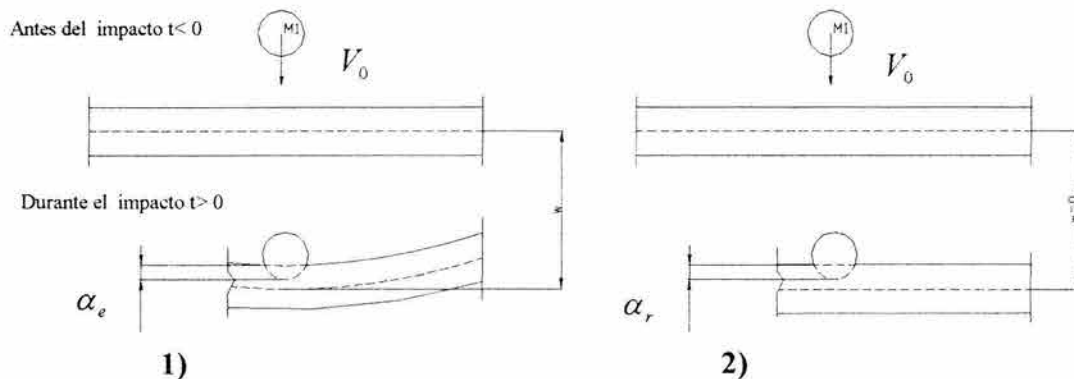


Figura 2.2.5 1) Deformación máxima e indentación de un plato flexible. 2) Si al mismo plato se le considera idealmente rígido su deformación máxima será nula y la indentación producida por el proyectil, α_r , será mayor a α_e .

El modelo lineal correspondiente al modelo no lineal propuesto por Shivakumar quedaría expresado de la siguiente manera:

$$M_1 x_1'' + n_l (x_1 - x_2) = 0 \quad (2.2.9)$$

$$M_{ep} x_2'' + K_{lp} x_2 - n_l (x_1 - x_2) = 0$$

donde

$$n_l = \frac{F_{\max}}{\alpha_{\max}} = \text{rigidez promedio correspondiente a la ley de Hertz}$$

$$F_{\max} = K_{bs}w + K_m w^3 = \text{Fuerza de contacto máxima}$$

$$K_{ml} = \frac{F_{\max}}{w} = \text{rigidez promedio de membrana}$$

$$K_{lp} = K_{bs} + K_{ml} = \text{resorte lineal equivalente}$$

y las condiciones iniciales

$$x_1(0) = 0 ; x_1'(0) = V_i ; x_2(0) = 0 ; x_2'(0) = 0 \quad (2.2.10)$$

donde

V_i = velocidad inicial de impacto

después de aplicar la transformada de Laplace a cada ecuación del sistema (2.2.9) ; y tomando en cuenta la condiciones iniciales (2.2.10) , se obtuvo

$$\left(s^2 + \frac{n_l}{M_1} \right) X_1(s) - \frac{n_l}{M_1} X_2(s) = V_i \quad (2.2.11)$$

$$\left(s^2 + \frac{K_{lp} + n_l}{M_{ep}} \right) X_2(s) - \frac{n_l}{M_{ep}} X_1(s) = 0$$

al resolver el sistema (2.2.11) para $X_1(s)$ y $X_2(s)$ se obtuvo

$$X_1(s) = \frac{n_l M_1 V_i + K_{lp} M_1 V_i + M_1 M_{ep} V_i s^2}{n_l K_{lp} + (n_l M_1 + K_{lp} M_1 + n_l M_{ep}) s^2 + M_1 M_{ep} s^4} \quad (2.2.12)$$

$$X_2(s) = \frac{n_l M_1 V_i}{n_l K_{lp} + (n_l M_1 + K_{lp} M_1 + n_l M_{ep}) s^2 + M_1 M_{ep} s^4} \quad (2.2.13)$$

Multiplicando el numerador y denominador de la ec. (2.2.12) por $(1/n_l M_1 V_i)$ y renombrando algunas constantes se llegó a:

$$X_1(s) = \frac{1 + \phi + \varphi s^2}{as^4 + bs^2 + c} \quad (2.2.14)$$

donde

$$a = \frac{M_{ep}}{n_i V_i}; \quad b = \left(\frac{1}{V_i} + \frac{K_{ip}}{n_i V_i} + \frac{M_{ep}}{M_1 V_i} \right); \quad c = \frac{K_{ip}}{M_1 V_i}; \quad \phi = \frac{K_{ip}}{n_i}; \quad \varphi = \frac{M_{ep}}{n_i}$$

Factorizando el denominador de la ec. (2.2.14) se obtuvo:

$$\frac{1 + \phi + \varphi s^2}{as^4 + bs^2 + c} = \frac{1 + \phi + \varphi s^2}{(as^2 + r)(s^2 + q)} \quad (2.2.15)$$

Mediante fracciones parciales, la ec. (2.2.15) se igualó a:

$$\frac{1 + \phi + \varphi s^2}{(as^2 + r)(s^2 + q)} = \frac{\lambda s + \mu}{(as^2 + r)} + \frac{\zeta s + \eta}{(s^2 + q)} \quad (2.2.16)$$

donde

$$q = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r = \frac{2ac}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Multiplicando la ec. (2.2.16) por $(as^2 + r)(s^2 + q)$ y agrupando términos resultó:

$$\varphi s^2 + \phi + 1 = (\lambda + \zeta a)s^3 + (\mu + \eta a)s^2 + (\lambda q + \zeta r)s + (\mu q + \eta r).$$

Comparando los coeficientes de las potencias de s en ambos miembros de la igualdad anterior se llegó al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \mu q + \eta r &= \phi + 1 \\ \lambda q + \zeta r &= 0 \\ \mu + \eta a &= \varphi \\ \lambda + \zeta a &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

del cual resultó

$$\zeta = 0; \quad \lambda = 0; \quad \eta = \frac{\phi + 1 - \varphi q}{r - aq}; \quad \mu = \frac{a + a\phi - r\varphi}{aq - r}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la ec. (2.2.16) y tomando en cuenta que λ y ζ son cero se obtuvo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 + \phi + \varphi s^2}{(as^2 + r)(s^2 + q)}\right\} = \frac{\mu}{a\sqrt{r/a}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{r/a}}{s^2 + (r/a)}\right\} + \frac{\eta}{\sqrt{q}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{q}}{s^2 + q}\right\}$$

y por último

$$x_1(t) = \frac{\mu}{a\sqrt{r/a}} \text{Sen}(\sqrt{r/a} t) + \frac{\eta}{\sqrt{q}} \text{Sen}(\sqrt{q} t) \quad (2.2.18)$$

Multiplicando el numerador y denominador de la ec. (2.2.13) por $1/nM_1V_i$ y renombrando algunas constantes se llegó a

$$X2(s) = \frac{1}{as^4 + bs^2 + c} \quad (2.2.19)$$

donde a, b y c tienen las mismas expresiones que se obtuvieron para la ec. (2.2.14). Factorizando el denominador de (2.2.19); y mediante fracciones parciales se obtuvo:

$$\frac{1}{as^4 + bs^2 + c} = \frac{1}{(as^2 + r)(s^2 + q)} = \frac{\alpha s + \beta}{(as^2 + r)} + \frac{\gamma s + \delta}{(s^2 + q)} \quad (2.2.20)$$

donde q y r conservan las mismas expresiones que se obtuvieron para la ec. (2.2.16).

Multiplicando la ec. (2.2.20) por $((as^2 + r)(s^2 + q))$ y agrupando términos con respecto a las potencias de s resultó:

$$1 = (\alpha + \gamma a)s^3 + (\beta + \delta a)s^2 + (\alpha q + \gamma r)s + (\beta q + \delta r) \quad (2.2.21).$$

Comparando los coeficientes de las potencias de s en ambos miembros de la igualdad (2.2.21) se llegó al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha q + \gamma r &= 0 \\ \beta q + \delta r &= 1 \\ \beta + \delta a &= 0 \\ \alpha + \gamma a &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

del cual resultó

$$\alpha = 0; \quad \beta = \frac{a}{aq - r}; \quad \gamma = 0; \quad \delta = \frac{1}{r - aq}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la ec. (2.2.20) y tomando en cuenta que α y γ son cero se obtuvo:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(as^2 + r)(s^2 + q)}\right\} = \frac{\beta}{a\sqrt{r/a}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{r/a}}{s^2 + (r/a)}\right\} + \frac{\delta}{\sqrt{q}} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{q}}{s^2 + q}\right\}$$

y por último

$$x_2(t) = \frac{\beta}{a\sqrt{r/a}} \text{Sen}(\sqrt{r/a} t) + \frac{\delta}{\sqrt{q}} \text{Sen}(\sqrt{q} t) \quad (2.2.23)$$

Antes de comparar el modelo masa-resorte de dos grados de libertad (nombrado de aquí en adelante como 2GL Elástico –lineal , cuya solución está representada por las ecuaciones 2.2.18 y 2.2.23) contra algunos resultados experimentales encontrados en la literatura ; se estudió un ejemplo numérico para establecer bajo qué circunstancias la ecuación (2.2.8) propuesta para linealizar la ley de Hertz representa una buena aproximación.

Al introducir las variables adimensionales $\tau = t \sqrt{\frac{n_l}{M_1}}$ y $y_i = x_i \frac{\sqrt{n_l/M_1}}{V_i}$ tal como lo propusiera Abrate [8], las ecuaciones (2.2.9) correspondientes al modelo lineal se convirtieron en:

$$y_1'' + y_1 - y_2 = 0 \quad (2.2.24)$$

$$y_2'' - \frac{M_1}{M_{ep}} y_1 + \frac{M_1}{M_{ep}} \left(1 + \frac{K_{lp}}{n_l}\right) y_2 = 0$$

y las condiciones iniciales

$$y_1(0) = y_2(0) = 0, \quad y_1'(0) = 1, \quad y_2'(0) = 0.$$

El comportamiento del sistema depende de los dos parámetros adimensionales M_1 / M_{ep} y K_{lp} / n_l ; de acuerdo al valor que éstos tomen se identifican los siguientes casos:

Caso I : Para este caso ($\frac{M_1}{M_{ep}} \ll 1$ y $\frac{K_{lp}}{n_l} \ll 1$), las frecuencias naturales están aproximadas por

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_{lp}}{M_{ep}}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{n_l}{M_1}}$$

en el modo de vibración I , las dos masas se mueven juntas pero $M1$ es despreciable comparada con M_{ep} . Para el modo II , la masa pesada permanece estacionaria y oscila como un sistema de un grado de libertad con rigidez n_l .

Caso II :En este caso ($\frac{M1}{M_{ep}} \gg 1$ y $\frac{K_{lp}}{n_l} \ll 1$) , la masa del plato es pequeña comparada con la masa del proyectil y la rigidez del plato es pequeña comparada con la rigidez de contacto. Las frecuencias naturales están aproximadas por

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_{lp}}{M1}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{n_l}{M_{ep}}}$$

En el modo I , la indentación es despreciable y el proyectil con el plato forman un sistema de un grado de libertad. En el modo II, el proyectil permanece estacionario, la rigidez del plato es despreciable y este mismo oscila como un sistema de un grado de libertad.

Caso III : Para este caso ($\frac{M1}{M_{ep}} \ll 1$ y $\frac{K_{lp}}{n_l} \gg 1$), la rigidez del plato es mucho mayor a la rigidez de contacto , la masa del proyectil es pequeña comparada a la del plato.

Entonces

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{K_{lp}}{M_{ep}}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{n_l}{M1}}$$

Caso IV :En este caso ($\frac{M1}{M_{ep}} \gg 1$ y $\frac{K_{lp}}{n_l} \gg 1$) y la rigidez del plato es mucho mayor a la rigidez de contacto y

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{n_l}{M1}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K_{lp}}{M_{ep}}}$$

En el modo I, el plato permanece estacionario y el proyectil oscila; en el modo II, el movimiento del plato no es afectado por la presencia del proyectil debido al débil acoplamiento proporcionado por la rigidez de contacto.

Para estudiar numéricamente los cuatro casos anteriores, se escogieron muestras circulares de aluminio cuyas propiedades fueron tomadas de la tabla (2.3.1), se variaron el radio de contacto del proyectil R así como el espesor del plato h y se mantuvieron constantes la velocidad de impacto $V_i=2.54\text{m/s}$ así como el radio del plato $r=38\text{mm}$.

En la tabla (2.2.1) se muestra el resultado numérico del tiempo de contacto t_c , la fuerza máxima de impacto F_{\max} y la indentación máxima promedio α_{\max} . Estos parámetros se calcularon a partir del modelo no lineal de Shivakumar (ecs. 2.2.1 y 2.2.2), el modelo lineal 2GL (ecs. 2.2.18 y 2.2.23) y el modelo de energía (ec. 2.2.4).

Tabla 2.2.1 Resultados del experimento numérico con platos circulares de aluminio.

Caso	Modelo	R (m)	h (m)	K_{lp} / n_i	M_1 / M_{ep}	t_c (s)	F_{\max} (N)	α_e (m)	α_r (m)	α_{\max} (m)
I	No lineal	0.0015	0.001	-	0.062	5.471×10^{-4}	1.71	-	-	18.178×10^{-6}
	Energía	0.0015	0.001	-	0.062	-	6.761	4.967×10^{-6}	18.581×10^{-6}	-
	Lineal	0.0015	0.001	0.113	0.062	5.3×10^{-4}	1.75976	-	-	11.774×10^{-6}
	Error rel. %	-	-	-	-	3.125	2.909	-	-	35.229
II	No lineal	0.019	0.001	-	125.358	2.452×10^{-3}	1166.2	-	-	90.273×10^{-6}
	Energía	0.019	0.001	-	125.358	-	1139.971	65.035×10^{-6}	235.355×10^{-6}	-
	Lineal	0.019	0.001	0.0678	125.358	2.21×10^{-3}	859.45	-	-	149.694×10^{-6}
	Error rel. %	-	-	-	-	9.869	26.303	-	-	65.824
III	No lineal	0.003	0.02	-	0.025	67.72×10^{-6}	240	-	-	36.825×10^{-6}
	Energía	0.003	0.02	-	0.025	-	190.213	36.469×10^{-6}	37.161×10^{-6}	-
	Lineal	0.003	0.02	26.207	0.025	65.9×10^{-6}	234.255	-	-	36.815×10^{-6}
	Error rel. %	-	-	-	-	2.687	2.394	-	-	0.027
IV	No lineal	0.025	0.02	-	14.278	4.3×10^{-4}	11400	-	-	275.74×10^{-6}
	Energía	0.025	0.02	-	14.278	-	11200.955	272.265×10^{-6}	309.678×10^{-6}	-
	Lineal	0.025	0.02	3.518	14.278	4.295×10^{-4}	10792.2	-	-	290.971×10^{-6}
	Error rel. %	-	-	-	-	0.116	5.332	-	-	5.523

El error relativo porcentual correspondiente al parámetro α_{\max} (obtenido a partir de los modelos 2GL y Shivakumar) resultó ser inaceptablemente alto en los casos I y II.

Lo anterior sugiere que la ecuación (2.2.8), es una aproximación adecuada para linealizar la ley de Hertz si se aplica en los casos III y IV; los cuales, están asociados con platos altamente rígidos en flexión que absorben la mayor cantidad de la energía de impacto en la zona de contacto. Este hecho se explica claramente observando las siguientes figuras, donde se graficaron la velocidad de impacto vs. indentación y desplazamiento vs. tiempo de contacto correspondientes a cada caso de la tabla (2.2.1).

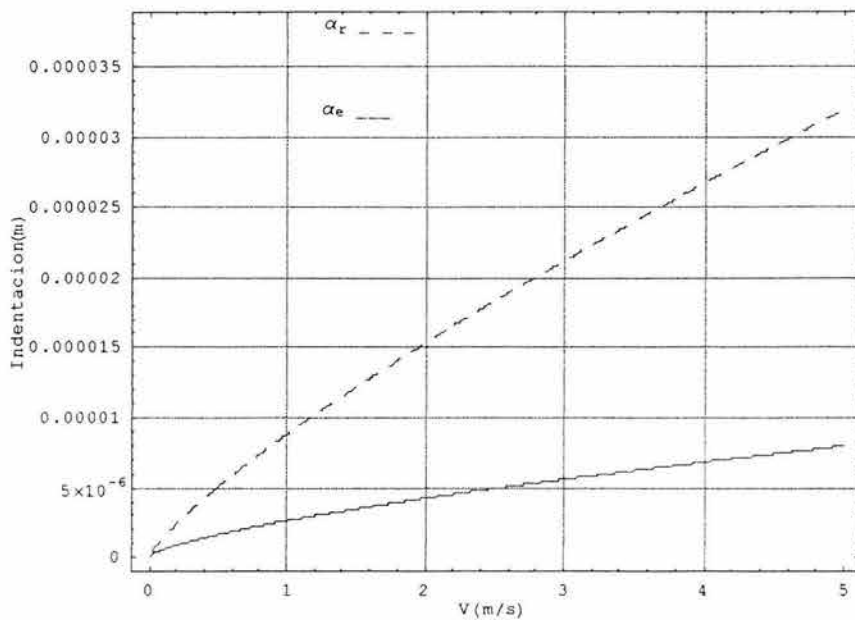
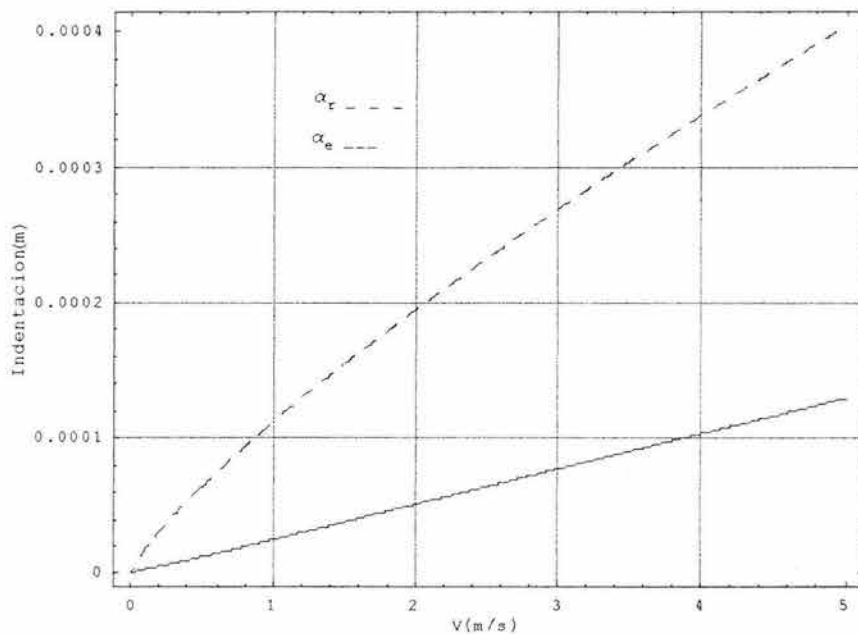
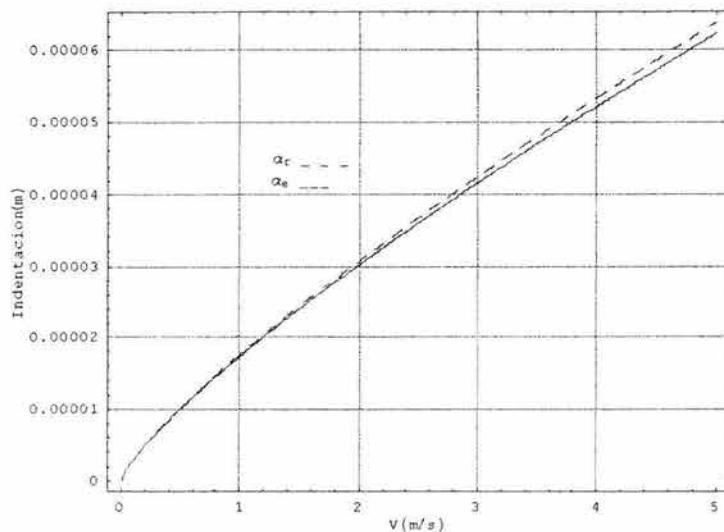
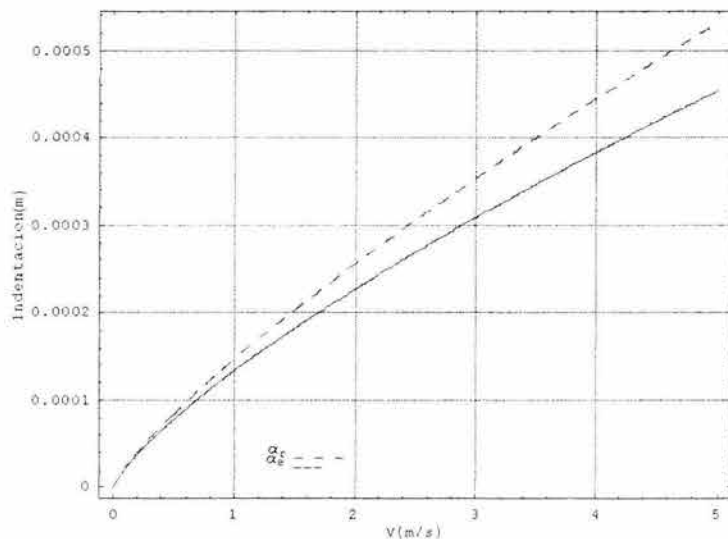
**Caso I****Caso II**

Figura 2.2.6 Gráficas de Indentación vs. velocidad de impacto para los casos I y II. En ambos casos, las curvas que representan α_r y α_e se distancian conforme aumenta la velocidad de impacto acarreado un error cada vez mayor en el cálculo de α_{\max} .



Caso III



Caso IV

Figura 2.2.7 Gráficas de Indentación vs. velocidad de impacto para los casos III y IV.

De acuerdo a la ec. (2.2.8), la indentación máxima $\alpha_{\max} = \frac{\alpha_e + \alpha_r}{2}$ se localiza entre las curvas que representan α_e y α_r . Entre más cercanas se encuentran dichas curvas menor error se genera al calcular α_{\max} ; lo cual, evidentemente ocurre en los casos III y IV.

Sin embargo lo anterior no descarta en su totalidad el uso de la ecuación (2.2.8) en los casos I y II; pues como advierte Abrate [8], entre menor sea la indentación (como es la tendencia estos casos) menor importancia tendrá la ley de contacto que se use para modelar el fenómeno de impacto.

La aplicación de la ec. (2.2.8) en los casos I y II estará justificada, si el valor de la indentación máxima α_{\max} se encuentra por debajo de la indentación crítica α_{cr} establecida

experimentalmente por Tan y Sun [11]; que para materiales laminados con fibra de vidrio $\alpha_{cr} = 0.004$ in y aquellos hechos con fibra de carbono $\alpha_{cr} = 0.00316$ in. Lo anterior, asegura trabajar en el rango elástico y minimiza el error al linealizar la ley de Hertz.

Para los casos en que la indentación crítica es rebasada, se encontró una ley de contacto linealizada propuesta por Yigit y Christoforou [12]; la cuál consta de tres fases de carga:

Fase I: Carga elástica

$$F(\alpha) = K_h \alpha^{3/2} \quad 0 \leq \alpha \leq \alpha_y$$

Fase II: Carga elasto-plástica

$$F(\alpha) = K_y (\alpha - \alpha_y) + K_h \alpha_y^{3/2} \quad \alpha_y \leq \alpha \leq \alpha_m$$

Fase III: Descarga elástica

$$F(\alpha) = K_h (\alpha^{3/2} - \alpha_m^{3/2} + \alpha_y^{3/2}) + K_y (\alpha_m - \alpha_y)$$

Donde:

α = Indentación

K_h = Rigidez Hertziana

$$K_h = \frac{4}{3} \sqrt{RE^*} \quad (2.2.25)$$

R = Radio del proyectil esférico (o de la punta esférica del proyectil).

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1}{E_z}$$

ν_1 = Módulo de Poisson del proyectil.

E_1 = Módulo de elasticidad del proyectil.

$E_z = E_{22}$ = Módulo transversal de la lámina.

$$\alpha_y = \frac{0.68 S_y^2 \pi^2 R}{E^{*2}}$$

α_y = Indentación crítica para producir deformación plástica local .

S_y = Esfuerzo cortante del laminado.

La pendiente para la fase de carga elasto-plástica K_y es igual a la pendiente de la curva de indentación elástica en $\alpha = \alpha_y$ y esta dada por $K_y = 1.5K_h\sqrt{\alpha_y}$.

Y por último la ley de contacto linealizada es

$$F(\alpha) = K_y\alpha \quad (2.2.26)$$

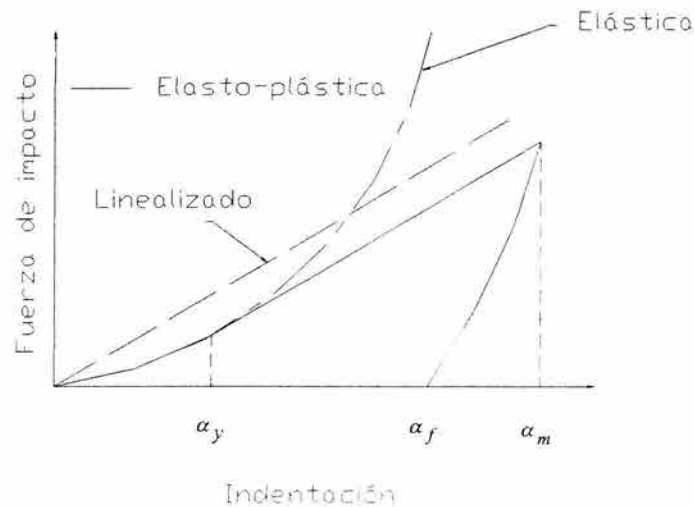


Figura 2.2.8 Ley de contacto propuesta por Yigit y Christoforou.

Si se sustituye únicamente la rigidez de contacto n_t por K_y en las ecuaciones (2.2.9) del modelo lineal (2GL) se habrá obtenido el modelo lineal 2GLC (nombrado así de aquí en adelante), cuya ley de contacto estará regida por la ecuación (2.2.26).

Según Abrate [8], se pueden distinguir dos tipos de impacto; aquellos controlados por las fronteras y los que están controlados por las ondas elásticas de deformación (el efecto de las fronteras es despreciable y las dimensiones del plato se consideran infinitas).

Esta distinción es importante porque permite establecer el tipo de modelo que arroje la mejor predicción al aplicársele a un caso de estudio determinado.

Olsson [13] presentó una solución aproximada para impactos en platos infinitos. Con una ley de contacto Hertziana ($P = n\alpha^{3/2}$), las variables adimensionales tiempo e indentación pueden ser definidos como

$$\bar{t} = \frac{t}{T}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{TV} \quad (2.2.27)$$

donde

$$T = [M/(K_h V^{1/2})]^{2/5}$$

M = masa del proyectil

K_h = rigidez de contacto (eq. 2.2.25)

V = velocidad inicial de impacto.

La indentación adimensional esta gobernada por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\bar{\alpha}}{dt^2} + \lambda \frac{3}{2} \bar{\alpha}^{1/2} \frac{d\bar{\alpha}}{dt} + \bar{\alpha}^{3/2} = 0 \quad (2.2.28)$$

$$\bar{\alpha}(0) = 0, \quad \frac{d\bar{\alpha}(0)}{dt} = 1$$

la cual depende de un solo parámetro adimensional

$$\lambda = K_h^{2/5} V^{1/5} M^{3/5} / (8\sqrt{mD^*}) \quad (2.2.29)$$

donde

m = masa del plato por unidad de área.

$$D^* = \frac{A+1}{2} (D_{11}D_{22})^{1/2}$$

$$A = (D_{12} + 2D_{66}) / (D_{11}D_{22})^{1/2}$$

Dependiendo del valor que tome el parámetro de inelasticidad (λ), es posible establecer qué tanto la energía de impacto es absorbida por la deformación del plato. Cuando $\lambda \ll 1$, la deformación del plato es despreciable; en cambio, si λ es grande, la indentación usa solo una pequeña fracción de la energía de impacto y por tanto no es necesario modelar con demasiado cuidado el fenómeno de contacto.

Durante el impacto en un plato infinito, el frente de onda se considera elíptico. La distancia ' a ' entre el frente de onda y el punto de impacto en la dirección ' x ', puede ser estimada usando

$$a = 2\sqrt{\pi} \left(\frac{D_{11}}{m} \right)^{1/4} [2(A+1)]^{1/8} \sqrt{t} \quad (2.2.30)$$

La ecuación anterior, provee una estimación de la zona deformada durante el impacto.

Si el frente de la onda de deformación no alcanza las fronteras del plato durante el periodo de contacto, el modelo propuesto por Olsson (ecuación 2.2.28) predice con precisión la fuerza de impacto como función del tiempo. Por otro lado; si la deformación alcanza las fronteras y es reflejada muchas veces hasta el punto de contacto mientras dure el impacto, el modelo del plato infinito deja de ser válido y en su lugar es recomendable usar un modelo masa-resorte para predecir con precisión la fuerza como función del tiempo.

2.3 Comparación de la solución lineal con algunos resultados experimentales:

Para estudiar los modelos masa-resorte de dos grados de libertad 2GL y 2GLC propuestos, se utilizaron algunos resultados experimentales encontrados en la literatura. En todos los siguientes casos experimentales de estudio; el cálculo de los parámetros ' λ y a ', validaron la utilización de un modelo masa-resorte para su análisis teórico.

Las propiedades de los platos circulares y el proyectil utilizados en los experimentos de la referencia [6], se resumen en la tabla 2.3.1.

Tabla 2.3.1 Propiedades del material con que fueron construidos el proyectil y los platos de prueba ref. [6].

Propiedades	Acero	Aluminio	Grafito / Epóxico (T300-5208)
E_r , GPa	199.95	68.95	50.81
E_z , GPa	199.95	68.95	11.78
G_r , GPa	75.17	25.92	19.38
G_{zr} , GPa	75.17	25.92	4.11
ν_r	0.33	0.33	0.31
ν_{zr}	0.33	0.33	0.06
ρ , densidad, Kg/m ³	7971.8	2768	1611
D_{11} , Nm	-	-	330.814
D_{12} , Nm	-	-	64.146
D_{22} , Nm	-	-	207.340
D_{66} , Nm	-	-	73.116
D^* , Nm	-	211.289	-
E_{22} , GPa	199.95	68.95	11.78
λ	-	(4.059-17.961) [◊]	(7.001-8.929) [▼]
a ★, m	-	(0.181-1.139) [◊]	(0.98-1.039) [▼]
S_y , MPa	-	100	202
K_h , N/m	-	9.69349×10^5	2.05702×10^5
K_y , N/m	-	9.84437×10^6	1.99451×10^7
K_{lp} , N/m	-	(1.086×10^7 - 3.754×10^9)	2832626.241
K_{lp} / n_l	-	(0.251-32.252)	(0.236-0.315) [■]
K_{lp} / K_y	-	(1.103-381.409)	0.142
M_1 / M_{ep}	-	(19.804-1.863)	34.821

★ Para calcular la distancia a , se partió de la solución numérica de la ec.(2.2.28).

◊ En la tabla se muestra el rango de valores de λ y a , correspondientes a los distintos espesores del plato. En todos los casos resulta aplicable un modelo masa-resorte.

▼ En la tabla se muestra el rango de valores de λ y a , correspondientes a las distintas velocidades de impacto. En todos los casos resulta aplicable un modelo masa-resorte.

■ La tabla proporciona el rango de variación de la relación entre la rigidez de flexión y de la rigidez de contacto linealizada con la ec. (2.2.8).

En la figura (2.3.1) se comparan los resultados teóricos y experimentales [6] de la fuerza de impacto en un plato circular (de material compuesto Grafito / Epóxico T300-5208 [0/+60/-60] casi-isotrópico) simplemente apoyado.

La línea discontinua (segmentos grandes) se obtuvo a partir del modelo no lineal masa-resorte de dos grados de libertad (TDOF) propuesto por Shivakumar; el cual parece predecir mayores fuerzas de impacto comparado con el modelo 2GLC (línea punteada). Por supuesto, lo anterior ocurre porque el modelo 2GLC no es puramente elástico como el modelo de Shivakumar; y en cambio, considera la deformación plástica que sufre el material en la zona de contacto.

La discrepancia que presenta el modelo 2GLC con respecto a los datos experimentales al aumentar la velocidad de impacto, se debe al daño cada vez más severo sufrido por el material del plato presente en forma de grietas, delaminaciones y rompimiento de las fibras que evidente no son consideradas en este análisis.

De acuerdo a las relaciones de masa y rigidez que muestra la tabla 2.3.1 (parte inferior derecha); se caería en el Caso II (Abrate [8]) para todo el rango de velocidades de prueba. Si tomamos en cuenta la indentación crítica de 0.080264 mm, el modelo lineal 2GL tendría validez física hasta una velocidad de aproximadamente 0.66 m/s; sin embargo, con fines de análisis la línea continua que representa este modelo se graficó mas allá de la velocidad correspondiente a la indentación crítica para corroborar el hecho de que al trabajar con un 'Caso II' los modelos 2GL y 2GLC arrojan resultados parecidos cobrando poca importancia la ley de contacto utilizada.

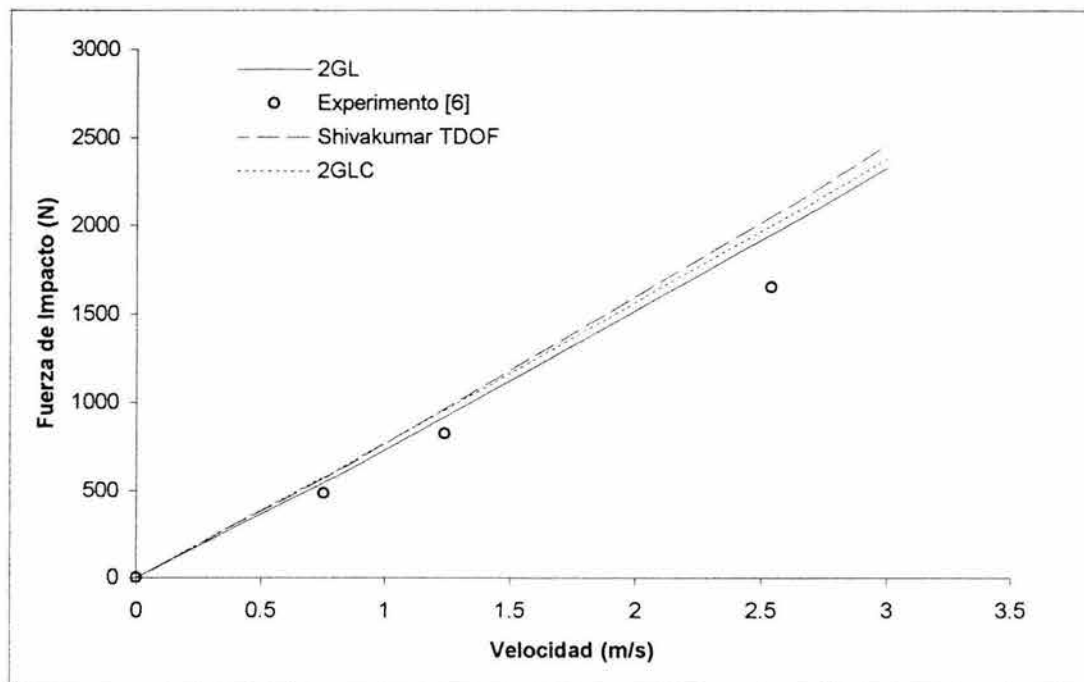


Figura 2.3.1 Fuerza de impacto vs. velocidad de impacto de un plato circular simplemente apoyado (laminado casi-isotrópico grafito/epóxico, proyectil esférico de 19mm de radio, radio del plato $r = 38\text{mm}$, espesor del plato $h = 3.6\text{mm}$).

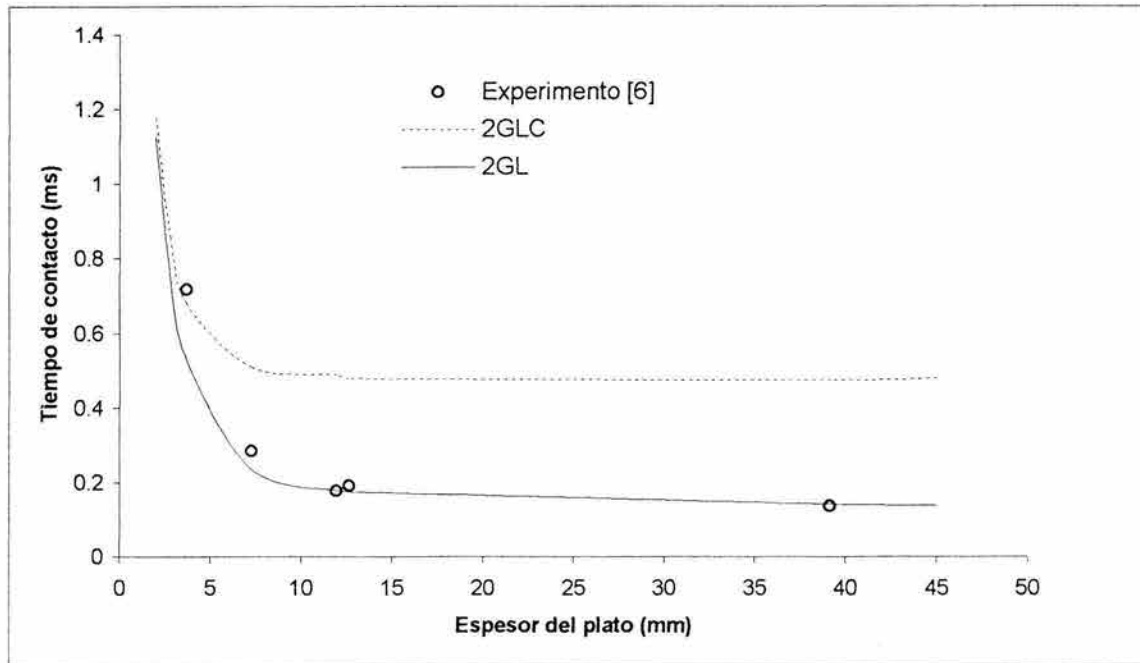


Figura 2.3.2 Influencia del espesor de una placa circular de aluminio sobre la duración de impacto (proyectil esférico de acero con 19mm de radio, velocidad inicial de impacto $V_i = 2.54\text{m/s}$, radio de la placa $r = 38\text{mm}$).

En la figura (2.3.2) se comparan los resultados teóricos y experimentales [6] del tiempo de contacto (definido como el tiempo que tarda el proyectil en alcanzar una velocidad de rebote idéntica a la velocidad inicial con que impactó) en platos de aluminio de varios espesores. La línea continua que representa el modelo 2GL se ajusta razonablemente bien a los resultados de la prueba, mientras que los resultados del modelo lineal 2GLC representados por la línea punteada se alejan a medida que el espesor del plato aumenta hasta alcanzar una tendencia más o menos estable. Este hecho parece confirmar que el tipo de linealización propuesta por Christoforou [11] aplicada a la ley de Hertz, pierde validez al ser utilizada en platos cuya deformación en flexión tiende a ser muy pequeña y la mayor parte de la energía absorbida durante el impacto se da por la indentación en la zona de contacto.

En los siguientes dos casos de estudio ref. [9,10]; algunas de las constantes de rigidez fueron calculadas a partir de ciertos datos experimentales por carecer de información acerca de ciertas propiedades correspondientes a los materiales de prueba.

En la figura (2.3.3) se comparan los resultados teóricos y experimentales [9] de la fuerza de impacto vs. tiempo en un plato cuadrado (fibra de vidrio / epóxico) empotrado en sus cuatro lados. Si se utiliza el tipo de linealización expresado por la ec. (2.2.8) (modelo 2GL), los resultados de la tabla (2.3.2) ($K_{ip} / n_l = 0.277$ y $M_1 / M_{ep} = 228.846$) sugerirían catalogar este experimento como un 'Caso II'.

Aún cuando el límite de validez para aplicar el modelo 2GL impuesto por la indentación crítica (que sería alcanzada a una velocidad de aproximadamente 0.09 m/s) es superado debido a la velocidad de prueba (1.06 m/s) , éste produce una predicción lo suficientemente cercana a la curva experimental; indicando que solo una pequeña fracción de la energía de impacto es absorbida por la zona de contacto.

Al utilizar el tipo de linealización propuesta por Christoforou se obtuvo $K_{ip} / K_y = 0.8$ y $M_1 / M_{ep} = 228.846$; con esta combinación de parámetros cabe la posibilidad de estar trabajando entre los ‘Casos II y IV’ pues la relación K_{ip} / K_y es cercana a uno.

Esta ambigüedad puede indicar con anticipación fallas en las predicciones del modelo. Lo anterior se manifestó a través de la curva fina y continua que representa al modelo 2GLC. Como la rigidez K_{ip} se calculó a partir de datos experimentales y su valor arrojó buenos resultados en el modelo 2GL la principal fuente de error se pudo relacionar con el cálculo teórico de la rigidez de contacto K_y .

Lo antes mencionado cobra sentido si se toma en cuenta que el valor del esfuerzo cortante del laminado S_y , fue tomado de la literatura atribuyéndole un carácter típico tal como lo hicieran Christoforou y Yigit [14].

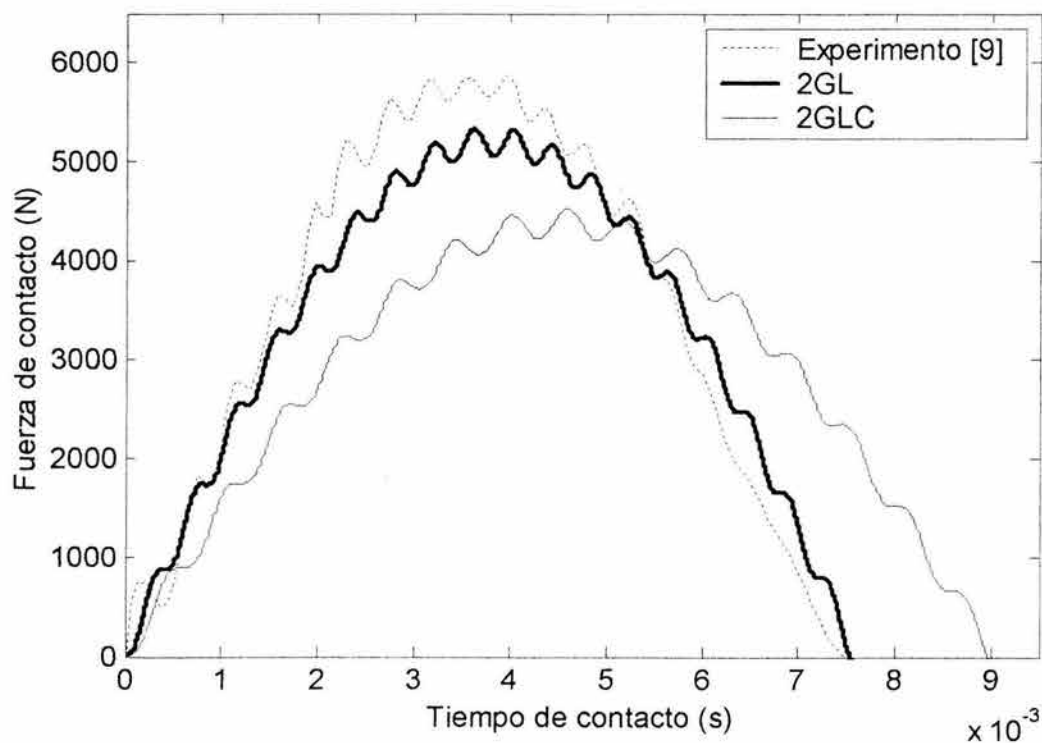


Figura 2.3.3 Fuerza de impacto vs. tiempo de un plato cuadrado empotrado en sus cuatro lados (proyectil de 11.9 Kg. y punta esférica de acero con 6.25mm de radio , velocidad de impacto 1.06 m/s).

Tabla 2.3.2 Propiedades del material con que fueron construidos los platos de prueba referencias [9,10].

Propiedades	Fibra de vidrio 3M / Epóxico ref.[9]	Fibra de carbono T300 / Epóxico 914 ref.[10]
Apilamiento	[0 ₃ /90 ₃ /0 ₃ /...] ₅₁	[0/90,±45,0/90]
Dimensiones, mm	125×125	Muestra circular r =50 mm
Espesor, mm	6.69	0.8
ρ , densidad, Kg/m ³	1990	1580
D_{11} , Nm	661.288	3.188
D_{12} , Nm	54.468	0.174
D_{22} , Nm	526.016	3.188
D_{66} , Nm	103.355	0.285
E_{22} , GPa	8.27	9.72
λ	27.579	90.378
a , m	6.094	10.561
S_y , MPa	100	202
K_h , N/m	8.40748×10^8	5×10^8 *
K_y , N/m	3.23828×10^6	3.35702×10^6
K_{lp} , N/m	2592847 [▼]	120000 [▼]
K_{lp} / n_l	0.277	0.076
K_{lp} / K_y	0.8	0.036
M_1 / M_{ep}	228.846	55.12

* Este dato corresponde al valor experimental de la rigidez de contacto (el valor teórico resultó ser de 1.062×10^9); la cual, se obtuvo al ajustar la Ley de Hertz ($F(\alpha) = K_h \alpha^{3/2}$) a los datos experimentales “indentación α ” y “fuerza de contacto F ”.

▼ Estos valores correspondientes a la rigidez de flexión fueron calculados tomando como base los datos experimentales “energía de impacto U ” y “fuerza máxima de impacto F_{max} ”. La ecuación ajustada a los datos fue $F_{max} = \sqrt{2UK_{lp}}$.

La figura (2.3.4), muestra los resultados teóricos y experimentales [10] de la fuerza de impacto vs. tiempo en un plato circular (fibra de carbono / epóxico) empotrado en su periferia.

Según los resultados de la tabla (2.3.2); al utilizar ambos tipos de linealización de la ley de contacto (ec. 2.2.8 y modelo de Christoforou), las relaciones de rigidez (K_{lp} / n_l , K_{lp} / K_y) y de masa M_1 / M_{ep} indicaron claramente que este experimento se trataba de un ‘Caso II’. Para esta prueba; el límite de indentación crítica utilizando el modelo 2GL, se alcanzaría a una velocidad de 2.83 m/s; asegurando con ello, trabajar en el rango elástico.

Con lo antes expuesto se suponía que los modelos 2GL y 2GLC arrojarían resultados muy parecidos indicando que solo una pequeña fracción de la energía de impacto sería absorbida en la zona de contacto, lo cual fue confirmado observando la figura (2.3.4).

Ambos modelos predijeron con gran aproximación la fuerza máxima de impacto; aunque la predicción del tiempo de contacto fue menor al registrado experimentalmente.

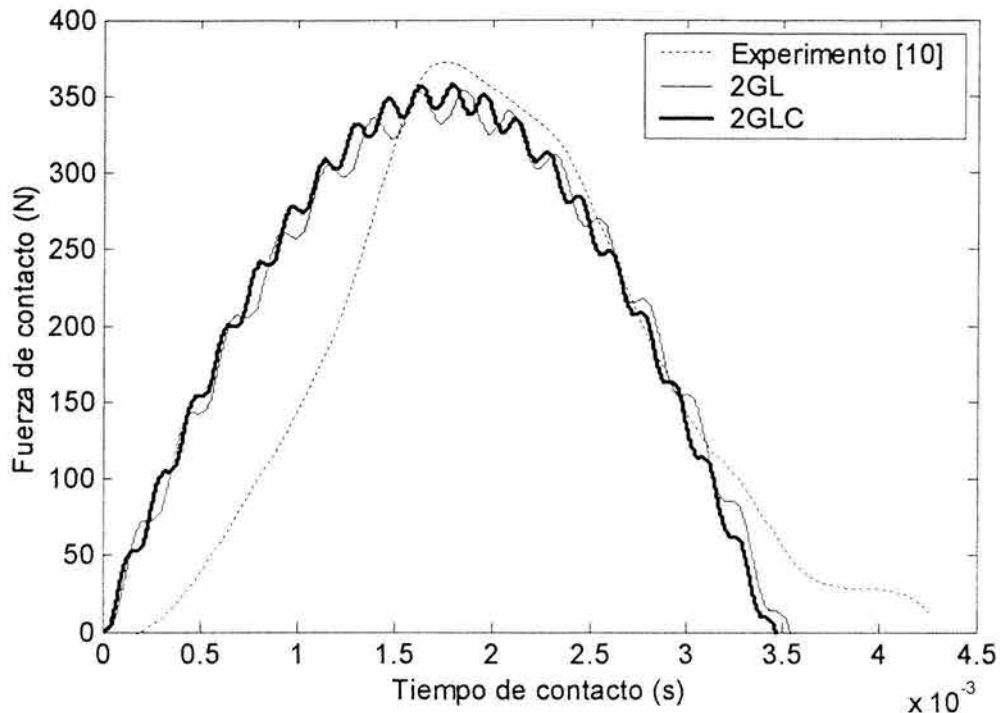


Figura 2.3.4 Fuerza de impacto vs. tiempo en un plato laminado circular empotrado en su periferia (proyctil con punta esférica de acero con un diámetro de 12.7mm y una masa de 0.1368 Kg., velocidad de impacto 2.8 m/s).

Los últimos dos casos experimentales de estudio, fueron expuestos por Pierson y Vaziri [4]. Tanto la rigidez de flexión como la de contacto fueron calculadas teóricamente en ambos casos. Al trabajar con placas laminadas simétricamente (como fue el caso) la ecuación que gobierna la flexión despreciando los términos de inercia (considerando el caso estático) tiene la forma:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \quad (2.3.1)$$

Para resolver la ecuación (2.3.1) aproximadamente, se utilizó el método de Ritz a partir del teorema de la energía potencial estacionaria que tiene la siguiente forma

$$V + Q = \text{Valor estacionario} \quad (2.3.2)$$

donde

V = Energía de deformación ó energía potencial del plato.

Q = Energía potencial de la carga q .

Se obtuvo la siguiente condición de equilibrio

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \{ & D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ & + 4D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2qw \} dx dy = \text{valor estacionario} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Para platos simplemente apoyados , las condiciones de frontera apropiadas fueron:

$$\text{Para } x = 0, A \quad w = 0 \quad M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.3.4)$$

$$\text{Para } y = 0, B \quad w = 0 \quad M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$$

Para aplicar el método de Ritz se buscó una solución en forma de series

$$w = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \phi_i(x) \Theta_j(y) \quad (2.3.5)$$

Donde las funciones $\phi_i(x) = \text{Sen} \frac{i\pi x}{A}$ y $\Theta_j(y) = \text{Sen} \frac{j\pi y}{B}$ se escogieron para satisfacer las condiciones de contorno (2.3.4).

Substituyendo las series (2.3.5) en la condición de energía (2.3.3) , se obtiene un problema de máximos y mínimos con los parámetros a_{ij} por determinar.

Es importante hacer notar que en placas hechas de un material laminado simétricamente, los términos de la matriz B_{ij} son cero.

J.M.Whitney [1] hace notar que para compuestos con alta relación entre E_{11} / G_{12} y una relación ancho-espesor menor a diez el efecto en la deformación debido al cortante puede ser muy significativa alejándose de las predicciones hechas por la teoría clásica.

Para los laminados de la tabla (2.3.3) se obtuvieron las relaciones $E_{11} / G_{12} = 36.857$ y $B/h = 16.387$. La primera de ellas, resultó ser alta por tratarse de un laminado hecho a base de fibra de carbono; en cambio, la segunda relación resultó ser mayor a 10 ; a pesar de que este análisis no fue concluyente se consideró en primera instancia despreciar el efecto por

cortante siguiendo la idea (también expuesta por Whitney) de que éste es pequeño en materiales con baja anisotropía como es el caso (laminado casi-isotrópico).

Tabla 2.3.3 Propiedades de los laminados sometidos a pruebas de indentación estática e impacto Ref. [4].

Sistema: Placas de fibra de carbono y epóxico T800H/3900-2			
Condiciones de frontera: Simplemente apoyadas			
Dimensiones: 127×76.2×4.65 mm			
Secuencia de apilamiento: [45/90/-45/0] _{3s}			
E_{11}	129GPa	G_{12}	3.5GPa
E_{22}	7.5GPa	G_{13}	3.5GPa
ν_{12}	0.33	G_{23}	2.6GPa
h	4.65mm	ρ	1540Kg/m ³
A	127mm	B	76.2
D_{11}	494.694Nm	D_{66}	168.817Nm
D_{12}	160.361Nm	D_{16}	34.684Nm
D_{22}	377.301Nm	D_{26}	34.684Nm

Tabla 2.3.4 platos de prueba referencia [4].

Velocidad, m/s	1.76 (Caso a)	7.7 (Caso b)
λ	31.944	7.201
a, m	5.842	0.993
S_y, MPa	202	202
$K_h, N/m$	1.09049×10^9	1.09049×10^9
$K_y, N/m$	1.33317×10^7	1.33317×10^7
$K_{lp}, N/m$	4962060.668	4962060.668
K_{lp} / n_l	0.32	0.321
K_{lp} / K_y	0.372	0.372
M_1 / M_{ep}	354.979	18.124

Utilizando la primera aproximación; esto es $m = n = 1$, la ec. (2.3.5) fue:

$$w = a_{11} \text{Sen} \frac{\pi x}{A} \text{Sen} \frac{\pi y}{B} \quad (2.3.6)$$

Considerando una carga concentrada 'P' localizada en el centro de cada plato; la energía potencial asociada a ésta fue

$$\int_0^A \int_0^B (P \delta(x - \frac{A}{2}) \delta(y - \frac{B}{2}) a_{11} \text{Sen} \frac{\pi x}{A} \text{Sen} \frac{\pi y}{B}) dy dx = P a_{11} \quad (2.3.7)$$

donde δ representa la función Delta de Dirac.

La energía potencial del plato resultó

$$\frac{1}{2} \int_0^A \int_0^B \left\{ D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \frac{\pi^4 \alpha_{11}^2 (b^4 D_{11} + a^2 (2b^2 D_{12} + a^2 D_{22} + 4b^2 D_{66}))}{8a^3 b^3}$$

sustituyendo las energías potenciales del plato y de la carga en la ec. (2.3.3) y derivando parcialmente con respecto a α_{11} se obtuvo

$$\frac{\pi^4 \alpha_{11} (B^4 D_{11} + A^2 (2B^2 D_{12} + A^2 D_{22} + 4B^2 D_{66}))}{4A^3 B^3} = P$$

Despejando α_{11} se llegó a

$$\alpha_{11} = \frac{4PA^3 B^3}{\pi^4 (B^4 D_{11} + A^2 (2B^2 D_{12} + A^2 D_{22} + 4B^2 D_{66}))}$$

Como $P = K_{ip} w$, $y = B/2$ y $x = A/2$ se obtuvo

$$K_{ip} = \frac{\pi^4 (B^4 D_{11} + A^2 (A^2 D_{22} + 2B^2 (D_{12} + 2D_{66})))}{4A^3 B^3} \quad (2.3.8)$$

Tomando el valor de los elementos de la matriz de rigidez (Tabla 2.3.3) y de las dimensiones del plato, la ec. (2.3.8) arrojó: $K_{ip} = 5.59179 \times 10^6 (N/m)$. Con este valor se hicieron algunos cálculos preliminares de la fuerza máxima de impacto y el tiempo de contacto utilizando el modelo 2GL, con el fin de establecer el grado de aproximación que brindaba la primera aproximación (haciendo $m = n = 1$ en la ec. 2.3.5). El resultado de los cálculos se resume en las siguientes tablas:

Tabla 2.3.5 Comparación entre resultados teóricos y experimentales
' Caso a' velocidad de impacto 1.76 m/s.

Resultados	Teóricos (Modelo 2GL)	Experimentales ref. [4]	Error relativo porcentual
Fuerza de contacto máxima, F_{\max} (N)	9096.11	7694	18.223 %
Tiempo de contacto, t_c (s)	0.00385	0.004031	4.49 %

Tabla 2.3.6 Comparación entre resultados teóricos y experimentales
'Caso b' velocidad de impacto 7.7 m/s.

Resultados	Teóricos (Modelo 2GL)	Experimentales ref.[4]	Error relativo porcentual
Fuerza de contacto máxima, F_{\max} (N)	9525.43	8752	8.837 %
Tiempo de contacto, t_c (s)	0.000875	0.0009677	9.579 %

Los altos errores porcentuales alcanzados en ambos casos indicaron la necesidad de desarrollar expresiones más precisas para calcular la rigidez de flexión, basadas en un mayor número de términos de la ec. 2.3.5 (haciendo $m > 1$ y $n > 1$). Pero debido a la gran labor algebraica, y a la lenta convergencia que el método de Ritz dejó de manifiesto al trabajar con la segunda aproximación; se decidió buscar otra opción para el cálculo de K_{lp} . En su lugar; se supuso como es común, que los laminados simétricos de la tabla (2.3.3) fueran considerados como laminados especialmente ortotrópicos, lo cual implicaba $D_{16} = D_{26} = 0$.

Para platos rectangulares: especialmente ortotrópicos, apoyados simplemente y sometidos a una carga concentrada; existe una solución exacta para el problema de flexión [2] que sirvió para obtener

$$K_{lp} = (\pi^4) / \{ 4A^2R \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(D_{11}m^4) + 2(mnR)^2(D_{12} + 2D_{66}) + (D_{22}(nR)^4)} \times \text{Sen}[\frac{m\pi x_0}{A}] \text{Sen}[\frac{n\pi y_0}{B}] \text{Sen}[\frac{m\pi x}{A}] \text{Sen}[\frac{n\pi y}{B}] \} \quad (2.3.9)$$

donde

$$R = \frac{A}{B}, \quad y = y_0 = B/2, \quad x = x_0 = A/2.$$

Tomando los nueve primeros términos de la serie 2.3.9 (o sea $m = n = 3$) y los datos de la tabla (2.3.3), se obtuvo un valor de $K_{lp} = 4.962 \times 10^6 (N/m)$. El valor anterior fue considerado como una mejor aproximación con respecto al calculado con la ec. 2.3.8, pues el efecto que tienen los términos que acompañan a D_{16} y D_{26} en la ec. 2.3.1, en general tienden a disminuir la rigidez en flexión del plato [1].

La figura (2.3.5) muestra los resultados teóricos y experimentales [4] de la fuerza de impacto vs. tiempo en un plato rectangular (fibra de carbono / epóxico) simplemente apoyado.

Según los resultados de la tabla (2.3.4); al utilizar ambos tipos de linealización de la ley de contacto (ec. 2.2.8 y modelo de Christoforou), las relaciones de rigidez ($K_{lp} / n_l, K_{lp} / K_y$) y de masa M_1 / M_{ep} indicaron claramente que esta prueba se catalogaba como un 'Caso II'. A pesar de que el límite de indentación crítica utilizando el modelo 2GL se alcanzaría a

una velocidad de 0.2 m/s; valor muy por debajo de la velocidad de prueba (1.76 m/s); no se consideró como un impedimento para su aplicación. Lo anterior quedó justificado al observar la buena aproximación entre la curva teórica del modelo 2GL y la curva registrada experimentalmente.

Por otro lado, el modelo 2GLC predice que una pequeña fracción de la energía de impacto será disipada por la deformación plástica durante el proceso de indentación; esto se refleja claramente en la curva delgada y continua que comparada con la curva 2GL, se encuentra más achatada (predice una disminución en la fuerza de contacto máxima) y más abierta (predice un incremento en el tiempo de contacto) acercándose con gran aproximación a la curva experimental.

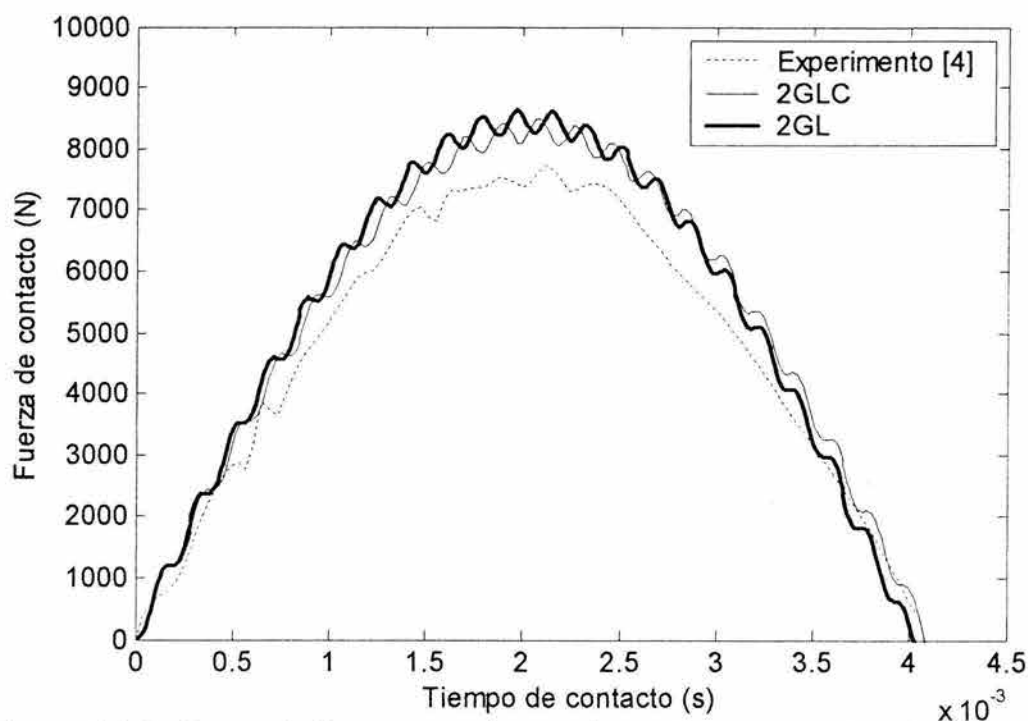


Figura 2.3.5 Fuerza de impacto vs. tiempo de un plato rectangular simplemente apoyado (laminado casi-isotrópico , proyectil de 6.15 Kg , velocidad de impacto 1.76 m/s , el espécimen no presentó daños).

La figura (2.3.6) , muestra los resultados teóricos y experimentales [4] de la fuerza de impacto vs. tiempo en un plato rectangular (fibra de carbono / epóxico) simplemente apoyada.

Según los resultados de la tabla (2.3.4) ; al utilizar ambos tipos de linealización de la ley de contacto, las relaciones de rigidez y de masa indicaron que este experimento se trataba de un 'Caso II'. Aún cuando el límite de indentación crítica utilizando el modelo 2GL fuera alcanzado a una velocidad inferior (0.88 m/s) a la velocidad de prueba (7.7 m/s); la curva que representa a este modelo se acercó mucho a la curva experimental.

Sin embargo el modelo 2GLC fue más fiel a la realidad física; pues comparado con el modelo 2GL, predijo una disminución en la fuerza máxima de impacto y un aumento en el tiempo de contacto.

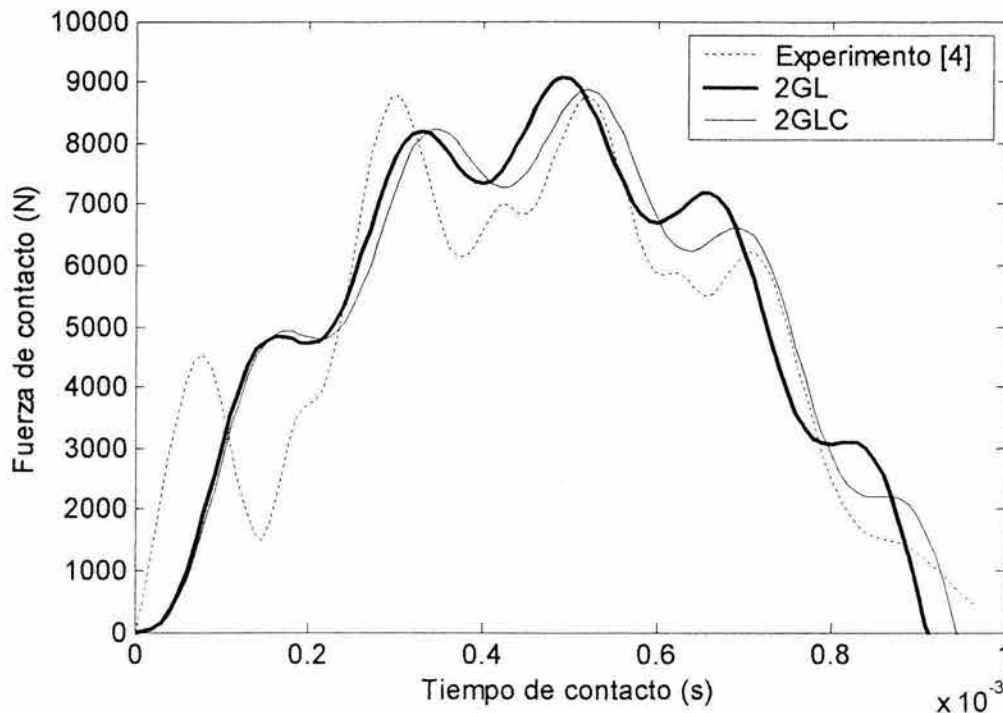


Figura 2.3.6 Fuerza de impacto vs. tiempo de un plato rectangular simplemente apoyado (laminado casi-isotrópico , proyectil de 314 g, velocidad de impacto 7.7 m/s, el espécimen no presentó daños).

2.4 Conclusiones y recomendaciones:

Se construyó un modelo lineal para estudiar el fenómeno de impacto a baja velocidad en materiales compuestos. Se partió del modelo no lineal propuesto por Shivakumar, aplicando dos métodos de linealización; uno basado en el concepto de rigidez promedio y el otro en la ley de contacto lineal expuesta por Christoforou.

El modelo lineal representado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, fue resuelto analíticamente aplicando la transformada de Laplace.

La ley de contacto lineal, basada en la rigidez promedio (modelo 2GL) arroja buenas predicciones si se le aplica en los 'Casos III y IV' (aquellos en los que la mayor parte de la energía de impacto es absorbida en la zona de contacto). En cambio, el tipo de linealización propuesta por Christoforou no arroja buenos resultados en cualquiera de estos dos casos; ya que éste solo considera una pequeña fracción de la energía de impacto disipada en la zona de contacto.

Cuando es posible catalogar con cierta claridad un experimento de impacto dentro del 'Caso II' (muy común en pruebas de impacto reportadas en la literatura), los dos tipos de linealización analizados en este trabajo parecen arrojar predicciones muy similares entre sí y cercanas a los resultados experimentales.

Al aplicar el modelo 2GL a los datos de un experimento catalogado como 'Caso II', normalmente arrojará buenas predicciones aún cuando la indentación crítica sea rebasada ; debido principalmente a que solo una pequeña fracción de la energía de impacto será disipada en la zona de contacto.

Sin embargo, el modelo 2GLC es más fiel a la realidad física ; ya que comparado con el modelo 2GL, predice una disminución en la fuerza de impacto y un aumento en el tiempo de contacto.

Vale la pena revisar aquellos experimentos en donde las relaciones de masa y/o rigidez sean muy cercanas o iguales a la unidad; pues en estas situaciones los dos tipos de linealización de la ley de contacto analizados en este trabajo no parecen arrojar buenas predicciones, porque se pueden presentar a la vez características de uno o varios de los casos estudiados por Abrate.

El método de Ritz utilizado para calcular la rigidez de flexión de platos rectangulares resultó ser impráctico por la gran labor algebraica que implica. En estudios posteriores podría resultar más útil aplicar la versión numérica de este método [2].

2.5 Referencias:

- [1] J.M. Whitney and J.E. Ashton."Theory of Laminated Plates", Technomic, (1970) USA.
- [2] Jean – Marie Berthelot,"Composite Materials-Mechanical Behavior and Structural Analysis", Springer-Verlag, (1999) USA.
- [3] J. M. Whitney and N. J. Pagano."Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates", Journal of Applied Mechanics, Vol.37, (1970) 1031-1036.
- [4] Michael O. Pierson and Reza Vaziri."Analytical Solution for Low-Velocity Impact Response of Composite Plates", AIAA Journal , Vol.34,No. 8, (1996) 1633-1640.
- [5] Shivakumar K. N. ,Elber W.,Illg W."Prediction of Impact Force and Duration Due to Low-Velocity Impact on Circular Composite Laminates", Journal of Applied Mechanics, 52 (1985) 674-680.
- [6] Greszczuk, L.B."Damage in Composite Materials Due to Low Velocity Impact", in Zukas, J. A. , et al. eds.,Impact Dynamics, John Wiley & Sons, New York,1982.
- [7] Lal, K. M."Prediction of Residual Tensile Strength of Transversely Impacted Composite Laminates" , Housner , J. M. , and Noor , A. K. , eds., Research in Structural and Solid Mechanics ,NASA CP 2245 , 1982, pp. 99-112.
- [8] S. Abrate "Modeling of Impacts on Composite Structures" ,Composite Structures , 51 (2001), pp. 129-138.
- [9] Dahsin Liu, Basavaraju B. Raju and Xinglai Dang "Size Effects on Impact Response of Composite Laminates" ,Int. J. Impact Engng , 21 No. 10 (1998), pp. 837-854.
- [10] M. S. Found and I. C. Howard "Single and Multiple Impact Behaviour of a CFRP Laminate" ,Composite Structures , 32 (1995), pp. 159-163.
- [11] T.M. Tan and C. T. Sun "Use of Statistical Indentation Laws in the Impact Analysis of Laminated Composite Plates" , Journal of Applied Mechanics, Vol.52, (1985) 6-12.
- [12] A.S. Yigit and A.P. Christoforou "Impact Dynamics of Composite Beams" , Composite Structures, Vol.32, (1995) 187-195.
- [13] Olsson R. "Impact Response of Orthotropic Composite Plates Predicted from a One-Parameter Differential Equation" , AIAA Journal, Vol.30, No.6,(1992) 1587-1596.
- [14] A.P. Christoforou and A.S. Yigit "Characterization of Impact in Composite Plates" , Composite Structures, Vol.43, (1998) 15-24.

3. COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN.

3.1 Obtención de una expresión analítica para calcular el coeficiente de restitución de materiales compuestos laminados sometidos a impactos de baja energía.

Aún cuando la velocidad de impacto sea muy baja al menos una pequeña parte de la energía cinética que posee originalmente el proyectil es disipada [1]. Por este hecho, vale la pena estudiar algunos modelos viscoelásticos que puedan predecir estas pérdidas de energía relacionadas principalmente con los daños sufridos por el material.

En este capítulo se revisan brevemente algunos modelos viscoelásticos no lineales [4-6] que recrean con buena aproximación la forma de los ciclos de fuerza-desplazamiento obtenidos experimentalmente por algunos investigadores [1-3] al impactar placas de material compuesto laminado con proyectiles rígidos.

En la figura 3.1 se muestran dos ciclos de fuerza-desplazamiento obtenidos experimentalmente por Gong y Sankar [1] y un ciclo teórico generado con un modelo viscoelástico no lineal propuesto por Walton [4].

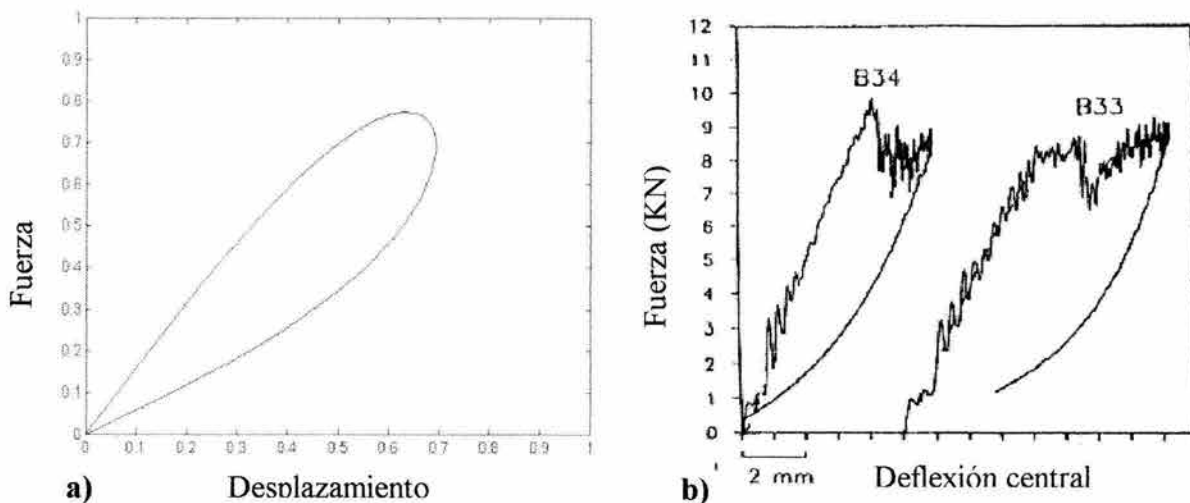


Figura 3.1 a) Curva de histéresis generada con el modelo de Walton, b) Curvas de fuerza-desplazamiento obtenidas experimentalmente por Gong y Sankar [1].

Uno de los objetivos más importantes de este capítulo se centró en la obtención de una expresión analítica para calcular el coeficiente de restitución en materiales compuestos laminados al ser sometidos a cargas de impacto de baja energía. Para lograr este objetivo, se obtuvieron algunas soluciones analíticas aproximadas del modelo de Walton aplicando la técnica de perturbación de Kryloff y Bogoliuboff [7], la técnica de Lindsted-Poincaré [11] y el método de colocación [8,12]. Una vez teniendo las soluciones analíticas, se calculó mediante integración el área inscrita por las curvas de histéresis para estimar las pérdidas de energía durante el impacto [5,9].

3.2 Modelos viscoelásticos no lineales.

Estos modelos principalmente se han utilizado para estudiar la dinámica de impacto entre esferas elásticas; su característica principal es considerar las fuerzas de disipación como una función de la posición y la velocidad.

Modelo de Walton [4]:

Este modelo propone una fuerza normal de contacto F que depende del desplazamiento normal relativo α y de la velocidad relativa α' (la prima se utilizará a lo largo del capítulo para denotar derivación con respecto al tiempo t) como

$$F = -c|\alpha|\alpha' - k\alpha.$$

Por un balance de fuerzas en la dirección del movimiento (ver figura 3.2.1) y tomando las condiciones iniciales $\alpha'(0) = -\alpha'_0 < 0$, $\alpha(0) = 0$ se tiene

$$m\alpha'' - c\alpha\alpha' + k\alpha = 0 \quad (3.2.1)$$

donde

m = masa efectiva

$$m^{-1} = m_1^{-1} + m_2^{-1}$$

c = constante de amortiguación

k = constante de rigidez elástica

$\alpha = x_1 - x_2$ =desplazamiento relativo

Modelo de Hunt y Crossley[5]:

Estos investigadores presentan un modelo de impacto basado en un sistema masa - resorte - amortiguador como el de la figura 3.2.1 , en el que las fuerzas del amortiguador y el resorte son no lineales. Su ecuación de movimiento es

$$m\alpha'' + \beta k\alpha^p\alpha' + k\alpha^p = 0 \quad (3.2.2)$$

donde

β = es un parámetro de amortiguamiento

k = es un parámetro elástico

p = es un exponente arbitrario

$\alpha = x_1 - x_2$ = desplazamiento relativo

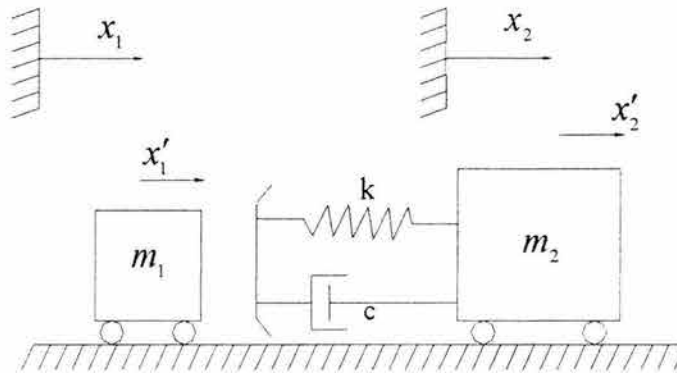


Figura 3.2.1 Colisión entre dos cuerpos.

Modelo de Simon[6]:

Este modelo corresponde a una versión particular del modelo de Hunt con $p = 3/2$; esto es

$$m\alpha'' + k|\alpha|^{1/2}(\alpha - c\alpha\alpha') = 0 \quad (3.2.3)$$

cuyas condiciones iniciales serían $\alpha'(0) = -\alpha'_0 < 0$, $\alpha(0) = 0$; y de la misma forma que el modelo anterior, c es un parámetro de amortiguamiento, k es un parámetro elástico y m es la masa efectiva.

3.3 Métodos de perturbación.

Método de Kryloff y Bogoliuboff [7].

En este subcapítulo, se resolvió analíticamente el modelo de Walton aplicando el método de perturbación de Kryloff y Bogoliuboff [7] partiendo de una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) = 0 \quad (3.3.1)$$

que para el caso particular de oscilaciones cuasi – armónicas (cercanas a la respuesta senoidal)

$$x = a \text{Sen} [\nu t + \Phi]$$

donde

a = amplitud , ν = frecuencia natural y Φ = fase inicial

la ecuación (3.3.1) puede escribirse como

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) = \nu^2 x + \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) \quad (3.3.2)$$

donde ε es un parámetro que caracteriza la pequeña desviación de F con respecto a $\nu^2 x$. Dejando libre a las funciones F y f de la variable explícita t , la ecuación diferencial (3.3.2) queda como

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \nu^2 x + \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = 0 \quad (3.3.3)$$

La primera aproximación para la solución de (3.3.3) es de la forma

$$x = a \text{Sen} [\Psi] \quad (3.3.4)$$

donde la amplitud a y la fase total $\Psi = \nu t + \Phi$ se de terminan a partir de:

$$\frac{da}{dt} = \frac{-\varepsilon}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} f(a\text{Sen}\Phi, a\nu\text{Cos}\Phi) \text{Cos}\Phi d\Phi \quad (3.3.5)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \nu + \frac{\varepsilon}{2\pi a \nu} \int_0^{2\pi} f(a\text{Sen}\Phi, a\nu\text{Cos}\Phi) \text{Sen}\Phi d\Phi \quad (3.3.6)$$

Rescribiendo el modelo de Walton se tiene

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{c}{m}\alpha \frac{d\alpha}{dt} + \frac{k}{m}\alpha = 0 \quad (3.3.7)$$

$$\frac{d\alpha}{dt}(0) = \alpha'_0 > 0 \quad ; \quad \alpha(0) = 0$$

e introduciendo las variables adimensionales

$$\alpha = \frac{\alpha}{(\alpha'_0 / \nu)}; \quad t = \nu \bar{t}; \quad \alpha' = \frac{\alpha'}{\alpha'_0}$$

donde

$$\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

el sistema (3.3.7) se convierte en

$$\ddot{\alpha} + \lambda \alpha \dot{\alpha} + \alpha = 0 \quad (a) \quad (3.3.8)$$

$$\alpha(0) = 1 \quad ; \quad \dot{\alpha}(0) = 0 \quad (b)$$

donde el punto denota la derivada con respecto al tiempo adimensional t , y λ es un parámetro real adimensional que caracteriza la respuesta del sistema y se calcula como:

$$\lambda = \frac{c\alpha'_0}{k} \quad (3.3.9)$$

Comparando (3.3.8 a) contra (3.3.3) se tiene

$$f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = \alpha \dot{\alpha}$$

$$\nu^2 = 1$$

y el parámetro pequeño ε se considera igual a λ ; estableciendo como consecuencia que la fuerza no lineal de amortiguamiento “perturbación” es pequeña. Según Novozhilov [10], un parámetro puede ser considerado pequeño si su valor es menor a 1/3.

Como primera aproximación, la solución de la ecuación (3.3.8 a) según las ecuaciones (3.3.4 ,3.3.5 y 3.3.6) es

$$\frac{da}{d\bar{t}} = \frac{-\lambda}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} a^2 \nu \text{Sen}\Phi \text{Cos}^2\Phi d\Phi = \frac{-\lambda a^2}{2\pi} \left[-\frac{\text{Cos}\Phi}{4} - \frac{\text{Cos}3\Phi}{12} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\frac{d\Psi}{d\bar{t}} = \nu + \frac{\lambda}{2\pi a \nu} \int_0^{2\pi} a^2 \nu \text{Sen}^2\Phi \text{Cos}\Phi d\Phi = \nu + \frac{\lambda a^2}{2\pi a} \left[\frac{\text{Sen}\Phi}{4} - \frac{\text{Sen}3\Phi}{12} \right]_0^{2\pi} = \nu$$

Estos resultados indican que

$$a = \text{constante} = \alpha_m$$

$$\Psi = t + \theta \quad ; \text{ donde } \theta = \Psi_0 = \text{fase inicial}$$

por lo tanto la primera aproximación según (3.3.4) es

$$\alpha = \alpha_m \text{Sen}[t + \theta] \quad (3.3.10)$$

y por último tomando en cuenta las condiciones de frontera (3.3.8 b) se obtiene

$$\alpha = \text{Sen}[t] \quad (3.3.11)$$

o también

$$\alpha = \text{Cos}\left[t - \frac{\pi}{2}\right] \quad (3.3.12)$$

Para construir la segunda aproximación de solución a la ecuación (3.3.8 a), es útil reescribir la ecuación (3.3.3) como

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \nu^2 x + \varepsilon f(x) \frac{dx}{dt} = 0 \quad (3.3.13)$$

en este caso $f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) = f(x) \frac{dx}{dt}$, con respecto a la ecuación (3.3.3).

Comparando (3.3.8 a) contra (3.3.13) se tiene

$$f(x) \frac{dx}{dt} = \alpha \alpha' \quad ; \quad v^2 = 1$$

y el parámetro pequeño $\varepsilon = \lambda$.

Introduciendo la función

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx \quad (3.3.14)$$

que para este caso

$$f(x) = \alpha$$

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha \alpha d\alpha = \frac{\alpha^2}{2}$$

considerando que

$$\alpha = a \text{Cos} \Psi$$

la expresión en series de Fourier de la ecuación (3.3.14) es

$$F(a \text{Cos} \Psi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^*(a) \text{Cos}[n\Psi] \quad (3.3.15)$$

entonces

$$F(a \text{Cos} \Psi) = \frac{a^2 \text{Cos}^2 \Psi}{2} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{\text{Cos}[0\Psi]}{2} + \frac{\text{Cos}[2\Psi]}{2} \right) \quad (3.3.16)$$

comparando (3.3.16) contra (3.3.15) se obtienen las siguientes expresiones

$$F^*_0(a) = \frac{a^2}{4}$$

$$F^*_2(a) = \frac{a^2}{4}$$

$$F^*_n(a) = 0 \quad \text{para } n \neq 0, 2$$

Para la segunda aproximación se tiene

$$x = a \cos[\nu t + \theta] - \frac{\varepsilon}{\nu} \sum_{n=2}^{\infty} F^*_n(a) \text{Sen } n[\nu t + \theta] \quad (3.3.17)$$

donde $\theta = \Phi - \frac{\pi}{2}$ y $\Phi =$ fase constante arbitraria .

Por otro lado a y $\Psi = \nu t + \theta$ deben satisfacer las ecuaciones

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{2} F^*_1(a) \quad (3.3.18)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \nu + \varepsilon^2 B_2(a)$$

con $B_2(a)$ igual a:

$$B_2(a) = -\frac{1}{8a\nu} F^*_1(a) \frac{dF^*_1(a)}{da} - \frac{1}{2\nu a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 F_n^{*2}(a)}{n^2 - 1} \quad (3.3.19)$$

ahora sustituyendo $F^*_1(a) = 0$ y $F^*_2(a) = \frac{a^2}{4}$ en (3.3.18) y (3.3.19) respectivamente se obtiene

$$\frac{da}{dt} = 0 ; \text{ o sea } a = \text{cte} = \alpha_m$$

$$B_2(a) = -\frac{a^2}{2\nu}$$

y entonces

$$\frac{d\Psi}{dt} = \nu - \frac{\varepsilon^2 a^2}{24\nu} \quad (3.3.20)$$

$$\Psi(0) = \Psi_0$$

Resolviendo la ecuación diferencial (3.3.20) se tiene

$$\Psi(t) = \left(\nu - \frac{\varepsilon^2 a^2}{24\nu} \right) t + \Psi_0 \quad (3.3.21)$$

sustituyendo $\varepsilon = \lambda, \nu = 1, a = \alpha_m, \Psi = \nu t + \theta$ y $F^*_2(a) = \frac{a^2}{4}$ en (3.3.17) se obtiene

$$\alpha(t) = \alpha_m \text{Cos}[\Psi] - \frac{\lambda \alpha_m^2}{4} \text{Sen}2[\Psi] \quad (3.3.22)$$

tomando en cuenta las condiciones iniciales (3.3.8 b), finalmente se obtiene

$$\alpha_m = \frac{-2 + \sqrt{4 + 8\lambda}}{2\lambda} \quad (3.3.23)$$

$$\Psi_0 = \theta = -\frac{\pi}{2} \quad (3.3.24)$$

$$\Psi = \left(1 - \frac{\lambda^2 \alpha_m^2}{24} \right) t - \frac{\pi}{2} \quad (3.3.25)$$

En la figura (3.3.1) se comparan las soluciones numérica y analítica (ec. 3.3.22) del modelo de Walton para $\lambda = 0.1$.

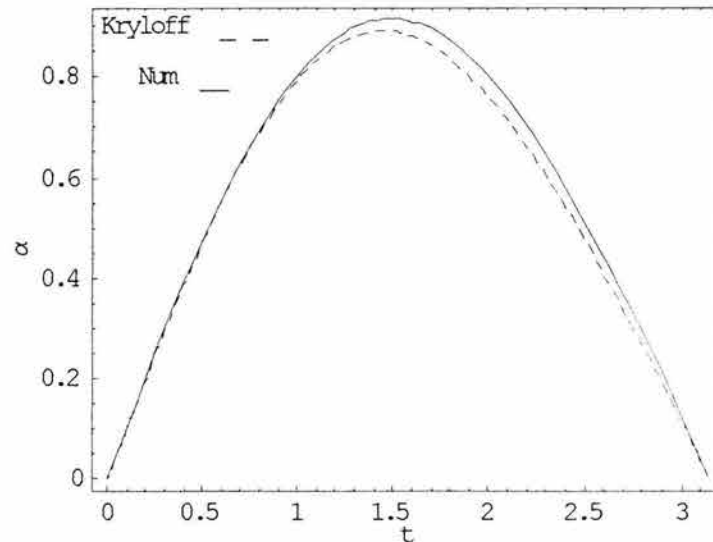


Figura 3.3.1 Soluciones numérica y analítica del modelo de Walton. La línea continua representa la solución numérica utilizando el método de Runge-Kutta y la línea punteada la solución analítica obtenida mediante el método de Kryloff y Bogoliuboff [7].

Técnica Lindsted-Poincaré[11].

Esta técnica asume que la frecuencia angular ν varía como una función de la amplitud α . Para tomar en cuenta dicha dependencia, es útil exhibir explícitamente la frecuencia del sistema en la ecuación diferencial (3.3.8 a). Este objetivo se logra introduciendo la transformación

$$\tau = \nu t \quad (3.3.26)$$

donde ν es una constante que depende del parámetro pequeño λ . Entonces es necesario cambiar la variable independiente t por τ . Aplicando la regla de la cadena, la ecuación (3.3.8 a) se transforma en

$$\nu^2 \alpha'' + \lambda \nu \alpha' \alpha + \alpha = 0 \quad (3.3.27)$$

donde la prima la derivada con respecto a τ .

Ahora la frecuencia del sistema aparece explícitamente en la ecuación (3.3.27); y tanto α como ν son incógnitas. El método propone una solución aproximada para ellas en forma de series de potencia en términos de λ ; tales como

$$\alpha = \alpha_0(\tau) + \lambda \alpha_1(\tau) + \dots \quad (3.3.28)$$

$$\nu = 1 + \lambda \nu_1 + \dots \quad (3.3.29)$$

El primer término de la expansión de ν es la frecuencia natural que en éste caso vale uno. Las correcciones a la frecuencia natural son determinadas a lo largo del análisis manteniendo una expansión uniforme (libre de términos seculares) de α para todo τ . Sustituyendo (3.3.28) y (3.3.29) en (3.3.27) se obtiene

$$\alpha_0'' + \alpha_0 + \lambda(\alpha_1'' + 2\nu_1\alpha_0'' + \alpha_0'\alpha_0 + \alpha_1) + \lambda^2(2\nu_1\alpha_1'' + \nu_1^2\alpha_0'' + \alpha_0'\alpha_1 + \alpha_1'\alpha_0 + \nu_1\alpha_0'\alpha_0) + \dots = 0 \quad (3.3.30)$$

Igualando los coeficientes de λ^0 y λ a cero, se obtiene

$$\alpha_0'' + \alpha_0 = 0 \quad (a) \quad (3.3.31)$$

$$\alpha_1'' + \alpha_1 = -2\nu_1\alpha_0'' - \alpha_0'\alpha_0 \quad (b)$$

La solución general de (3.3.31) es

$$\alpha_0 = a\text{Cos}(\tau + \beta) \quad (3.3.32)$$

donde a y β son constantes.

Sustituyendo (3.3.32) en (3.3.31 a) se llega a

$$\alpha_1'' + \alpha_1 = 2\nu_1 a\text{Cos}(\tau + \beta) + \frac{a^2}{2} \text{Sen}(2\tau + 2\beta) \quad (3.3.33)$$

La solución particular de (3.3.33) es

$$\alpha_1 = \nu_1 a \tau \text{Sen}(\tau + \beta) - \frac{a^2}{6} \text{Sen}(2\tau + 2\beta) \quad (3.3.34)$$

En la ecuación (3.3.34) aparece el término secular $\nu_1 a \tau \text{Sen}(\tau + \beta)$ que produce una expansión no uniforme. Para eliminar dicho término se fija

$$\nu_1 a = 0 \quad (3.3.35)$$

de (3.3.35) se obtienen tres posibilidades

$$a = 0 \text{ y } \nu_1 \neq 0 \quad (3.3.36)$$

$$\nu_1 = 0 \text{ y } a = 0 \quad (3.3.37)$$

$$\nu_1 = 0 \text{ y } a \neq 0 \quad (3.3.38)$$

descartando (3.3.36) y (3.3.37), la solución particular (3.3.34) se convierte en:

$$\alpha_1 = -\frac{a^2}{6} \text{Sen}(2\tau + 2\beta) \quad (3.3.39)$$

Sustituyendo (3.3.39) y (3.3.32) en (3.3.28) se obtiene

$$\alpha = a\text{Cos}(\tau + \beta) - \frac{\lambda a^2}{6} \text{Sen}(2\tau + 2\beta) \quad (3.3.40)$$

sustituyendo (3.3.38) en (3.3.29) se llega a

$$\nu = 1 \quad (3.3.41)$$

como $\tau = \nu t$, la ecuación (3.3.40) se convierte en

$$\alpha = a\text{Cos}(t + \beta) - \frac{\lambda a^2}{6} \text{Sen}(2t + 2\beta) \quad (3.3.42)$$

tomando en cuenta las condiciones iniciales (3.3.8 b) para calcular a y β se obtiene

$$\alpha = \frac{-3 + \sqrt{9 + 12\lambda}}{2\lambda}; \quad \beta = -\frac{\pi}{2} \quad (3.3.44)$$

En la figura (3.3.2) se comparan las soluciones numérica y analítica (ec. 3.3.42) del modelo de Walton para $\lambda = 0.3$.

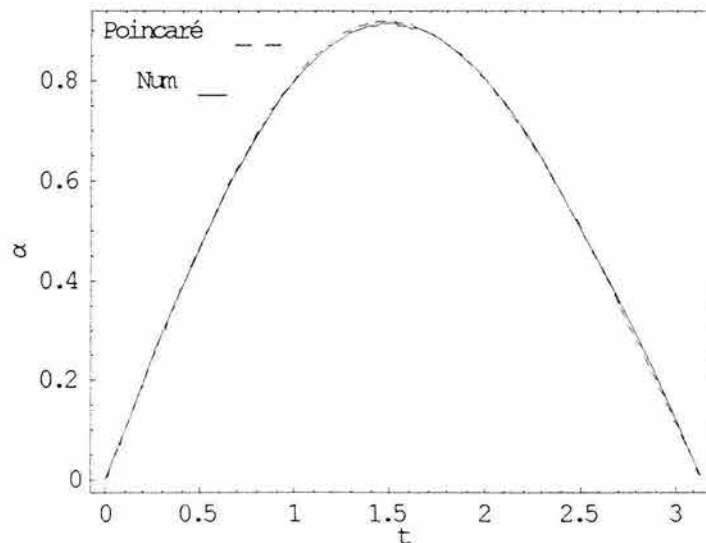


Figura 3.3.2 Soluciones numérica y analítica del modelo de Walton. La línea continua representa la solución numérica utilizando el método de Runge-Kutta y la línea punteada la solución analítica obtenida mediante el método de Lindsted-Poincaré [11].

3.4 Método de colocación [12].

Siguiendo el método, se supone en primera instancia una solución de la ecuación (3.3.8 a) de la forma

$$\alpha = \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(t) \quad (3.4.1)$$

donde las a_i son constantes arbitrarias y las $\phi_i(t)$ son funciones conocidas. Dichas funciones son escogidas según las características físicas del problema tales como: la simetría, el comportamiento asintótico, la periodicidad, etc.

También es necesario que las $\phi_i(t)$ cumplan con las condiciones de contorno impuestas por el problema, que para este caso son

$$\alpha(0) = 0 \quad (3.4.2)$$

$$\alpha(t_c) = 0$$

donde t_c = tiempo de contacto.

Para resolver la ecuación (3.3.8 a) se escogieron dos funciones polinomiales que cumplen las condiciones (3.4.2) y son de la forma

$$\phi_1(t) = t(t_c - t) \quad (3.4.3)$$

$$\phi_2(t) = t^2(t_c - t)$$

y según (3.4.1) se tiene

$$\alpha = a_1 \phi_1(t) + a_2 \phi_2(t) \quad (3.4.4)$$

Al sustituir (3.4.1) en (3.3.8 a) se produce

$$\sum_{i=1}^N a_i \frac{d^2}{dt^2} [\phi_i(t)] + \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \frac{d}{dt} [\phi_i(t)] \phi_j(t) + \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(t) = E(a_i, t) \quad (3.4.5)$$

donde E es el error resultante debido a que la solución supuesta es solo una aproximación. El procedimiento de colocación es para forzar al error a ser cero en N puntos t_k dentro de la región en que la solución es deseada. Usualmente, dichos puntos están igualmente espaciados, y el resultado de este procedimiento es un sistema de N ecuaciones con N coeficientes a_i como incógnitas.

Si la solución exacta fuera usada, el error sería idénticamente cero sobre el intervalo completo.

Por lo tanto si se iguala la ecuación(3.4.5) a cero en los N puntos t_k , se obtiene

$$\sum_{i=1}^N a_i \frac{d^2}{dt^2} [\phi_i(t_k)] + \lambda \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \frac{d}{dt} [\phi_i(t)] \phi_j(t_k) + \sum_{i=1}^N a_i \phi_i(t_k) = 0 \quad (3.4.6)$$

sustituyendo (3.4.4) en (3.4.6); y tomando los puntos

$$t_1 = \frac{t_c}{4} \quad (3.4.7)$$

$$t_2 = \frac{t_c}{2}$$

se obtiene el sistema

$$\left(\frac{t_c^2}{4} - 2\right)a_1 + \left(\frac{t_c^3}{8} - t_c\right)a_2 + \frac{t_c^4 \lambda}{16} a_1 a_2 + \frac{t_c^5 \lambda}{32} a_2^2 = 0 \quad (3.4.8)$$

$$\left(\frac{3t_c^2}{16} - 2\right)a_1 + \left(\frac{3t_c^3}{64} + \frac{t_c}{2}\right)a_2 + \left(\frac{21t_c^4 \lambda}{256}\right)a_1 a_2 + \frac{15t_c^5 \lambda}{1024} a_2^2 = 0$$

la solución de (3.4.8) resulta

$$a_1 = \frac{9\lambda t_c^5 - 40\lambda t_c^3 + \lambda t_c^3 \sqrt{5808t_c^2 + 9t_c^4 - 46016}}{12\lambda^2 t_c^6} \quad (3.4.9)$$

$$a_2 = -\frac{4(t_c^2 - 8)}{\lambda t_c^4} \quad (3.4.10)$$

En la figura (3.4.1) se comparan las soluciones numérica y analítica (ec. 3.4.4) del modelo de Walton [4] para $\lambda = 1$ y $t_c = 3.2224$.

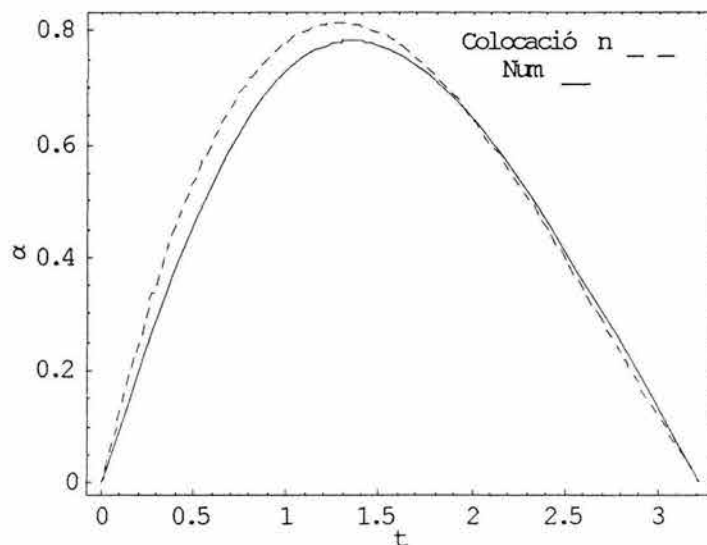


Figura 3.4.1 Soluciones numérica y analítica del modelo de Walton [4]. La línea continua representa la solución numérica utilizando el método de Runge-Kutta y la línea punteada la solución analítica obtenida mediante el método de colocación [12].

La solución representada por las ecuaciones (3.4.4), (3.4.8) y (3.4.9) solo representa una buena aproximación para el rango $0.9 < \lambda < 1.2$.

3.5 Coeficiente energético de restitución.

Para calcular el coeficiente energético de restitución “ e ”, se utilizó la siguiente definición [9]:

$$e^2 = 1 - \frac{2}{m\alpha_0'^2} \int F\left(\frac{d\alpha}{dt}, \alpha, t\right) d\alpha \quad (3.5.1)$$

la integral $\int F\left(\frac{d\alpha}{dt}, \alpha, t\right) d\alpha$, representa la disipación de energía debido a la deformación normal durante la colisión.

Según el modelo de Walton [4], la fuerza de contacto sólo es función de la velocidad $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)$ y el desplazamiento (α) relativos, por lo que

$$\int F\left(\frac{d\alpha}{dt}, \alpha, t\right) d\alpha = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\alpha}{dt} F\left(\frac{d\alpha}{dt}, \alpha\right) dt \quad (3.5.2)$$

los límites de integración de (3.5.2) varían desde $t_1 = 0$ hasta $t_2 = t_c$ (tiempo de contacto).

La figura 3.5.1 muestra que el tiempo de contacto varía poco entre el rango $0 \leq \lambda \leq 0.333$, sobre el que las soluciones analíticas 3.3.22 y 3.3.42 son válidas.

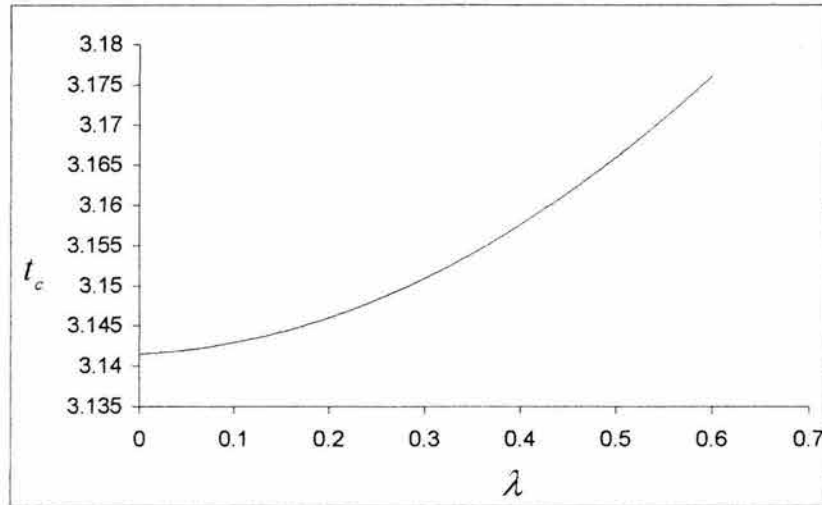


Figura 3.5.1 t_c vs. λ ; los distintos valores del tiempo de contacto fueron obtenidos mediante la solución numérica del modelo de Walton.

Lo anterior sugiere que la energía disipada, E_d , durante medio ciclo pueda ser tomada como

$$E_d \approx \int_0^{\pi} \frac{d\alpha}{dt} F\left(\frac{d\alpha}{dt}, \alpha\right) dt \quad (3.5.3)$$

la expresión 3.5.3 solo resulta válida al trabajar con las soluciones analíticas obtenidas a partir de los métodos de perturbación.

Sustituyendo 3.3.42 y 3.3.43 en 3.5.3 se obtiene

$$E_d \approx \frac{2}{15} a^3 \lambda (5 + a^2 \lambda^2) \quad (3.5.4)$$

tomando en cuenta que la energía disipada adimensional es: $E_d = \frac{v^2}{k\alpha_0^{t_2}} E_d$, y

sustituyendo (3.5.4) en (3.5.1) se llega a

$$e \approx \sqrt{1 - \left(\frac{4}{15} a^3 \lambda (5 + a^2 \lambda^2) \right)} \quad (3.5.5)$$

donde

$$a = \frac{-3 + \sqrt{9 + 12\lambda}}{2\lambda} \quad (3.5.6)$$

3.6 Conclusiones.

Se obtuvieron dos soluciones analíticas aproximadas del modelo de Walton aplicando los métodos de perturbación desarrollados por Kryloff-Bogoliuboff-Mitropolsky y Lindsted-Poincaré; una tercera solución se obtuvo aplicando el método de colocación.

La solución analítica obtenida con la técnica de Lindsted-Poincaré es válida en el rango $0 \leq \lambda \leq 0.333$; y se ajusta mejor a la solución numérica del modelo de Walton, si se compara contra la solución analítica obtenida por el método de Kryloff-Bogoliuboff-Mitropolsky.

Para construir una solución analítica válida del modelo de Walton [4] cuando $\lambda > 1/3$; es posible aplicar otras técnicas como el método de colocación [12].

Siguiendo dicho método se probaron cierto tipo de funciones polinomiales; las cuales no generaron soluciones válidas para cualquier valor de λ .

La solución analítica obtenida en este trabajo utilizando dicho método, resultó ser una aproximación razonable para valores de $0.9 \leq \lambda \leq 1.2$.

Sin embargo, se observó que variando el valor de los N puntos t_k conservando las mismas funciones polinomiales de prueba, es posible generar distintas soluciones que se ajustan bien a rangos pequeños de λ .

Lo anterior sugiere probar otro tipo de funciones que puedan generar soluciones válidas sobre amplios rangos de λ .

Vale la pena hacer notar que el método de colocación no impone restricciones al valor que puedan tomar los parámetros k y c ; en cambio, los métodos de perturbación utilizados sugieren considerar a $\lambda \ll 1$ en la versión normalizada del modelo de Walton.

Para estudiar el fenómeno de impacto en una situación real aplicando los resultados teóricos obtenidos; resulta indispensable tomar en cuenta las condiciones iniciales y estimar el valor de los parámetros k y c que sustenten consideraciones como $\lambda \ll 1$.

Se desarrolló una expresión analítica para calcular el coeficiente de restitución que corresponde a la solución analítica obtenida con la técnica de Lindsted-Poincaré; esta expresión depende únicamente del parámetro adimensional λ .

3.7 Referencias.

[1] J. C. Gong and B. V. Sankar ; "Impact properties of three – dimensional braided graphite / epoxy composites" , Journal of Composite Materials , Vol.25 ,(1991), 715-731.

- [2] D. Liu, B. B. Raju and X. Dang, "Impact Perforation Resistance of Laminated and Assembled Composite Plates", *International Journal of Impact Engineering*, Vol.24, (2000),733-746.
- [3] T. J. Kang and C. Kim, "Energy-Absortion Mechanisms in Kevlar Multiaxial Warp-knit Fabric Composites Under Impact Loading", *Composites Science and Technology* Vol. 60,(2000),773-784.
- [4] O. R. Walton, "Granular Solids Flow Project",Rept. UCID-20297-88-1, Lawrence Livermore National Laboratory,(1992).
- [5] K. H. Hunt and F. R. E. Crossley, "Coefficient of Rstitution Interpreted as Damping in Vibroimpact", *ASME Journal of Applied Mechanics*, (1975),440-445.
- [6] R. Simon, "Development of a Mathematical Tool for Evaluating Golf Club Performance", Presented at ASME Design Engineering Congress, New York, (1967).
- [7] N. Kryloff and N. Bogoliuboff, "Introduction to nonlinear mechanics" , Princeton University Press , (1943), USA.
- [8] Sanford W. Groesberg, "Advanced Mechanics", John Wiley & Sons, Inc.,(1968) USA.
- [9] Stronge W. J. , "Impact Mechanics",Cambridge University Press,(2000),USA.
- [10] I. V. Novozhilov, "Fractional Analysis: Methods of Motion Decomposition", Birkhäuser Boston,(1997),USA.
- [11] Ali Hasan Nayfeh ,"Introduction to Pereturbation Techniques", John Wiley & Sons, (1981), USA.
- [12] Louis A. Pipes, "Applied Mathematics for Engineers and Physicists", Mc. Graw Hill, (1970), USA.

4. DESARROLLO EXPERIMENTAL Y RESULTADOS.

En este capítulo se desarrolló todo el trabajo experimental; pasando por la fabricación de las muestras, su caracterización y preparación para las pruebas de impacto. En este capítulo se presentan todos los resultados experimentales.

4.1 Fabricación de las muestras de material compuesto laminado.

Las muestras para ser caracterizadas (mediante un método opto-acústico numérico-experimental) y sometidas a pruebas de impacto, fueron fabricadas siguiendo los siguientes pasos:

- 1) Se cortaron rectángulos de tela unidireccional de fibra de vidrio S-2 (Aircraft Spruce & Specialty Co.), cuyas dimensiones aproximadas eran de 0.25 mm (espesor) × 27 cm (ancho) × 31 cm (largo).
- 2) Se preparó la mezcla de resina epóxica (Safe T Poxly II) y catalizador siguiendo una proporción de 44 gr. de catalizador por cada 100 gr. de resina. Para lograr que la mezcla se homogeneizara y fuera menos viscosa; fue sumergida en baño maría a 70° C aproximadamente. Las burbujas de aire presentes en la mezcla , fueron removidas utilizando un abate-lenguas.
- 3) Para fabricar paneles de un espesor aproximadamente constante, se usaron dos placas (por cada panel) de vidrio planas de 35cm (largo) × 30cm (ancho). Sobre la superficie de una de las placas se colocó una lámina de poliuretano, y sobre ésta un pedazo de tela para ser bañada (en toda su superficie) por 36 gr de la mezcla resina -catalizador (con ésta cantidad se logró construir los paneles con un 28% de fibra aproximadamente) previamente calentada y libre de burbujas.
- 4) Después, se cubrió la tela impregnada de la mezcla con una segunda lámina de poliuretano (para formar un emparedado de poliuretano-fibra-poliuretano) y con el lomo de un abate-lenguas se frotó sobre la superficie para eliminar las burbujas de aire y distribuir lo más homogéneamente posible la mezcla. El procedimiento anterior se realizó para construir paneles con una capa de fibra; para el caso de los paneles con 2 y hasta 5 capas el proceso solo cambia por el hecho de apilar y pegar (tela con tela) las diferentes capas lo más alineadamente posible (con respecto a la dirección de las fibras).
- 5) El emparedado poliuretano-lamina /s-poliuretano, fue colocado entre las dos placas de vidrio. Un peso de 8 Kg uniformemente distribuido sobre el panel, permitió obtener un espesor más o menos constante.
- 6) Por último, los paneles se curaron a presión y temperatura ambiente durante 8 días.

El procedimiento que se siguió para el cálculo del porcentaje de fibra de cada panel, se ejemplifica tomando como referencia un laminado de cuatro capas:

- a) Se pesaron los cuatro rectángulos de tela resultando un valor de $w_f = 88.67$ gr.

- b) Con el peso total de la fibra y la densidad de la misma ($\rho_f = 2.48 \text{ gr/cm}^3$), se obtuvo el volumen de la tela mediante $V_T = \frac{w_T}{\rho_f} = 9.395 \text{ cm}^3$.
- c) La densidad de la resina se calculó experimentalmente arrojando un valor de $\rho_r = 1.196 \text{ gr/cm}^3$.
- d) El panel de material compuesto (una vez ya curado) fue pesado, arrojando un valor de $w_c = 194.084 \text{ gr}$.
- e) El peso total de resina en el compuesto se obtuvo mediante $w_r = w_c - w_T = 105.414 \text{ gr}$.
- f) El volumen de resina en el compuesto se calculó con $V_r = \frac{w_r}{\rho_r} = 88.193 \text{ gr/cm}^3$.
- g) El volumen total del panel compuesto, es la suma del volumen de fibra con el volumen de resina es decir: $V_c = V_f + V_r = 123.893 \text{ cm}^3$.
- h) Por último; expresado en porcentajes, el volumen de fibra del compuesto fue $V_F = \frac{V_f}{V_c} \times 100 = 28.858 \%$ y el volumen de resina $V_R = \frac{V_r}{V_c} \times 100 = 71.141 \%$.

4.2 Caracterización de las muestras para las pruebas de impacto.

En este subcapítulo se describe la medición de las constantes elásticas de los materiales laminados unidireccionales (considerados como transversalmente isotrópicos) hechos de fibra de vidrio / resina epóxica, utilizando un método opto acústico numérico-experimental [1]. Las constantes ingenieriles ($E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$) se obtuvieron al medir únicamente la velocidad longitudinal (de las ondas elásticas generadas por un pulso láser al incidir en un punto sobre el material) en diferentes direcciones; para luego ser ajustada a las relaciones de esfuerzo deformación para una lámina sometida a esfuerzos en las direcciones $x - y$ fuera de los ejes principales. Las constantes elásticas obtenidas con la técnica numérica-experimental fueron comparadas con algunos modelos teóricos reportados en la literatura; tales como el de Hashin-Rosen y Hashin-Hill.

4.2.1 Preparación de las muestras:

Los materiales usados en este trabajo se obtuvieron de Aircraft Spruce & Specialty Co. Estos materiales fueron fibra de vidrio S-2 unidireccional y resina epóxica Safe T Poxly II; en la tabla (4.2.1.a) se muestran sus propiedades mecánicas.

Se construyeron cinco muestras de forma cuadrada ($150 \times 150 \text{ mm}$) con diferentes espesores (de una capa el más delgado hasta cinco capas el más grueso). Las especificaciones de las muestras se encuentran en la tabla (4.2.1.b).

Tabla 4.2.1.a Propiedades mecánicas de los constituyentes del compuesto [2,3,4].

Material	Fibra de vidrio S-2	Epóxico
Densidad (g/cm ³)	2.48±0.05	1.170±0.03
Espesor (mm)	0.26	-
E_1 (GPa)	86.9	3.42
E_2 (GPa)	86.9	3.42
ν_{12}	0.23	0.34
ν_{21}	0.23	0.34
ν_{23}	0.23	0.34
G_{23} (GPa)	35	1.27
G_{12} (GPa)	35	1.27

Tabla 4.2.1.b Muestras unidireccionales fibra de vidrio S-2 / epóxico

Muestra	V_f	Espesor (mm)	Densidad (g/cm ³)
FV-1.1	0.28461	0.50522 ± 0.05071	1.5614
FV-1.2	0.28283	0.85024 ± 0.05525	1.5591
FV-1.3	0.27796	1.33108 ± 0.02619	1.5529
FV-1.4	0.28858	1.68282 ± 0.04161	1.5665
FV-1.5	0.28952	2.10632 ± 0.05317	1.5677

4.2.2 Procedimiento experimental:

La velocidad de la onda acústica depende de la densidad del material y de una o más de las constantes elásticas para una dirección arbitraria.

Se consideró una lámina ortotrópica con sus ejes materiales principales (1 y 2) orientados un ángulo θ con respecto a los ejes coordenados ($x - y$) como se muestra en la figura (4.2.2.a). La ley de transformación de las constantes ingenieriles de un material transversalmente isotrópico bajo la rotación del sistema de coordenadas alrededor de cualquier eje que pertenezca al plano de isotropía se expresa como:

$$\frac{1}{E_x} = \frac{\cos^4 \theta}{E_1} + \frac{\sin^4 \theta}{E_2} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) \sin^2 2\theta \quad (4.2.2.a)$$

Donde

E_x = módulo de anisotropía aparente

$$E_x = \rho [V_x(\theta)]^2 \quad (4.2.2.b)$$

por otro lado

$$\frac{v_{12}}{E_1} = \frac{v_{21}}{E_2} \quad (4.2.2.c)$$

y

$$\rho V_1^2 = E_1 \quad (4.2.2.d)$$

$$\rho V_2^2 = E_2$$

donde ρ es la densidad, $V_x(\theta)$ es la velocidad a un ángulo θ con respecto a los ejes principales, y V_1, V_2 son las velocidades longitudinales de onda viajando a lo largo de los ejes principales.

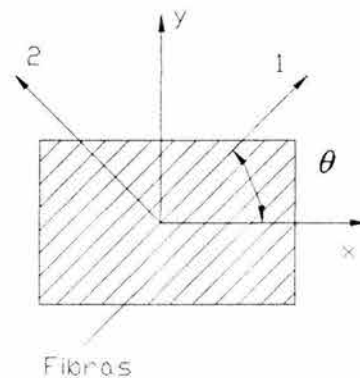


Figura 4.2.2.a Rotación del plano 1-2 de ejes principales un ángulo θ a partir de los ejes coordenados $x - y$.

Las constantes experimentales E_1, E_2, G_{12}, v_{12} y v_{21} fueron calculadas a partir de las ecuaciones (4.2.2.a)- (4.2.2.d).

Las velocidades fueron medidas con la técnica punto fuente (PF) / punto receptor (PR) (ver figura 4.2.2.b). La posición del punto fuente puede ser variada fácilmente para obtener una variedad de datos a lo largo de distintas direcciones en un espécimen.

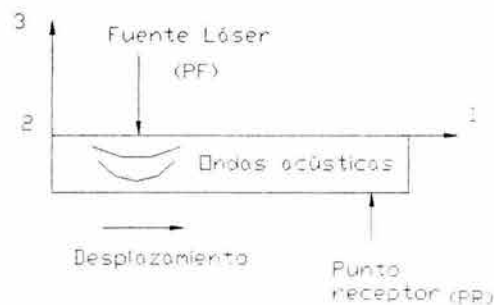


Figura 4.2.2.b Diagrama esquemático de la técnica ultrasónica punto fuente (PF)/ punto receptor (PR).

4.2.3 Sistema de medición:

Un pulso láser enfocado en un punto sobre la superficie de la muestra, fue usado como una fuente térmica para generar ondas elásticas que se propagaran por el material (ver figura 4.2.2.b). La detección y almacenamiento de tales ondas, se realizó empleando el sistema esquematizado en la figura (4.2.3.a).

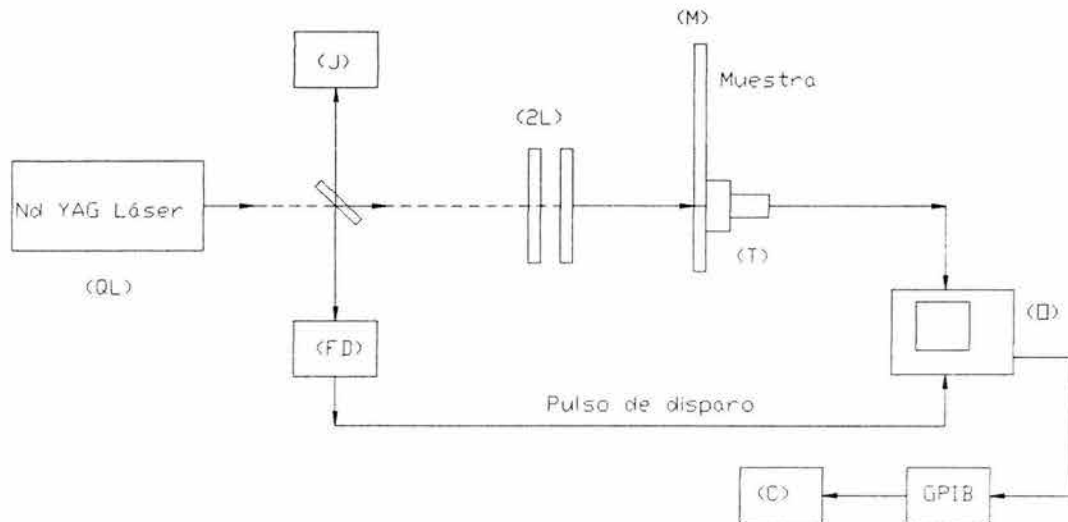


Figura 4.2.3.a Disposición esquemática de los instrumentos de medición.
GPIB= interface.

El láser utilizado, fue un Q-switched Nd:YAG (QL) (Continuum, model Surelite I), generando pulsos de 5 a 8ns de duración y operando a una frecuencia de repetición de 10 Hz con una energía de salida de 100 a 275mJ por pulso.

La energía del láser se midió con un Joulmetro (J) Laser Precision Corp. ,modelo RjP-735 con despliegue RjP-700.

El haz fue enfocado y colimado sobre la muestra (M), utilizando un par de lentes (2L).

La salida de un fotodiodo(con un tiempo de respuesta<1ns) Thorlabs, Inc., modelo 201/579-7227 (FD) recibiendo una parte del rayo láser fue usada para disparar el osciloscopio (O).

Las ondas elásticas fueron detectadas con un transductor piezoeléctrico PZT a 240 KHz (T).Las señales del transductor se grabaron en un osciloscopio de 500 MHz Tektronix TDS540A (O); el cual fue conectado a una computadora personal (C) para la subsecuente grabación y procesamiento de la señal.

4.2.4 Medición de las velocidades:

Los valores de la velocidad se calcularon a partir del gradiente de las curvas de retraso del primer tiempo de arribo con respecto al pulso de disparo (trigger) y la distancia entre la fuente y el transductor. La distancia se varió bajo un ángulo (θ) constante; esto se muestra en la figura (4.2.4.a).

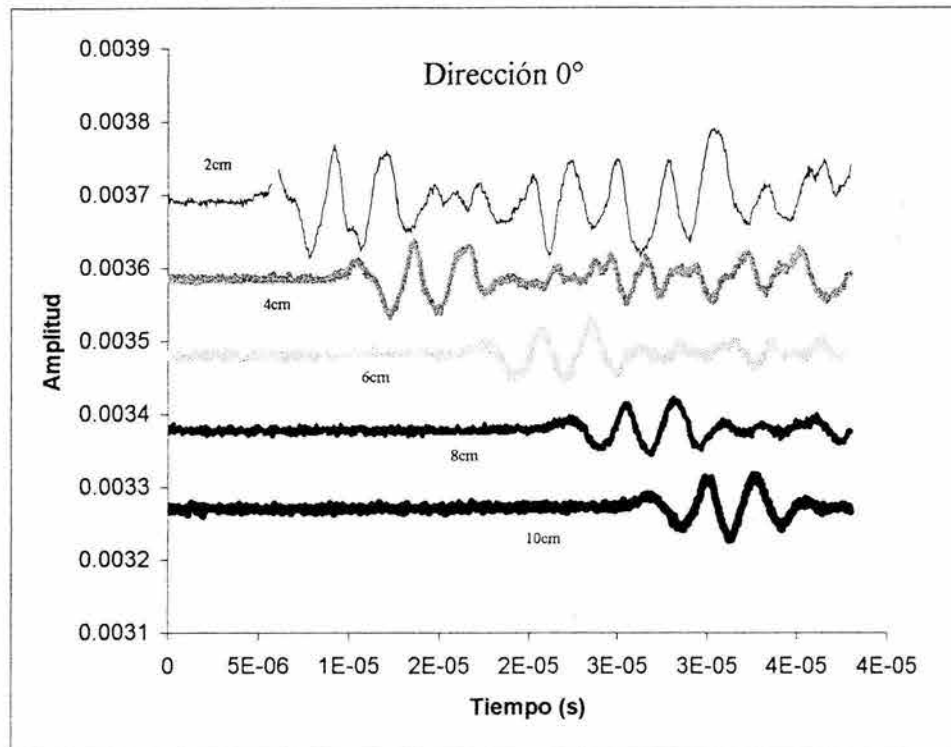


Figura 4.2.4.a Señales de la emisión acústica observada en el espécimen FV-1.2 como una función del tiempo para cinco distancias entre el punto fuente y el punto receptor.

A partir de la figura 4.2.4.b, se calculó la pendiente de las líneas de ajuste correspondiente a la velocidad longitudinal.

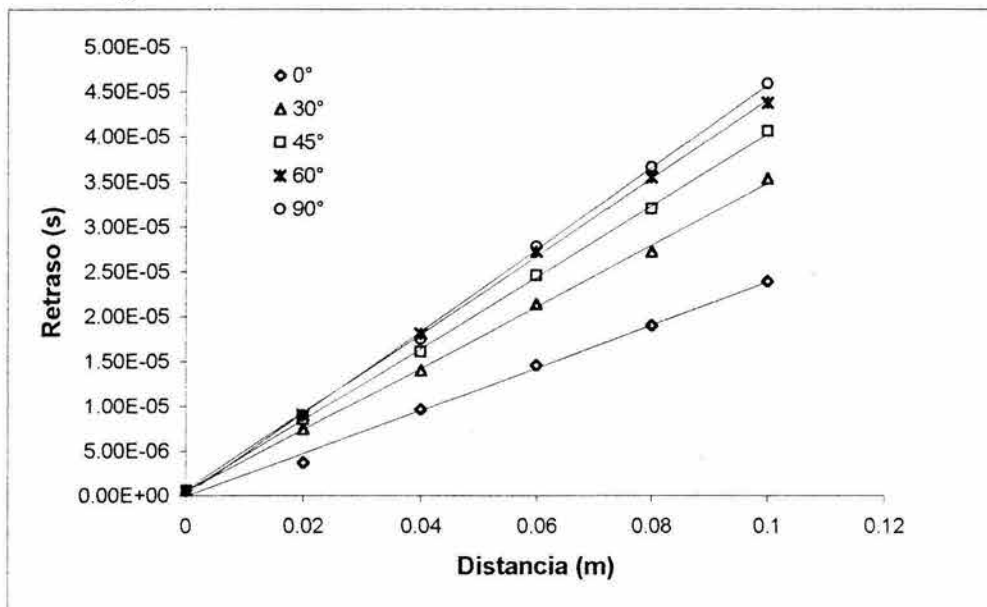


Figura 4.2.4.b Mediciones del primer tiempo de arribo como función de la distancia entre el punto fuente y el punto receptor para cinco direcciones de propagación en un laminado de fibra de vidrio / epóxico con $V_f = 28.461\%$ (espécimen FV-1.1).

La figura (4.2.4.c) muestra las velocidades en FV-1.4 como una función de los ángulos θ , que en este trabajo fueron: 0, 15, 30, 45, 60, 75 y 90°. El valor de la velocidad promedio para estos ángulos (y para cada espécimen) se muestra en la tabla (4.2.4.a).

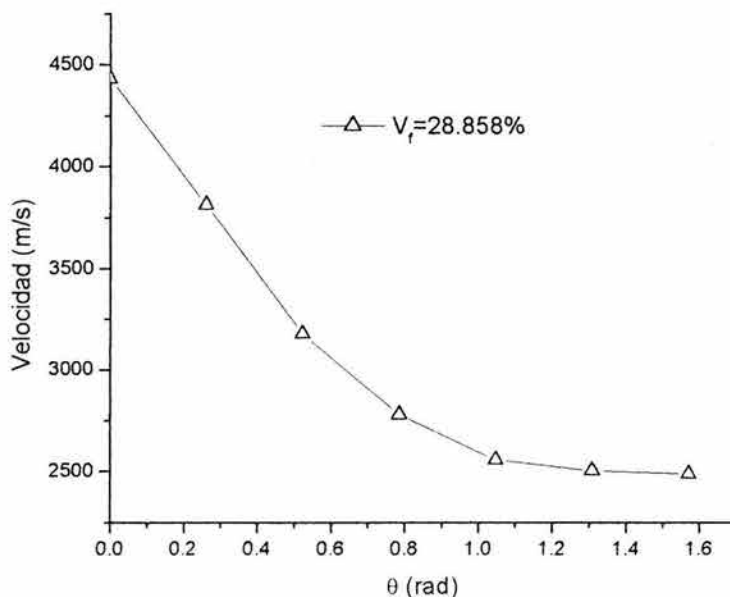


Figura 4.2.4.c Velocidad en función del ángulo θ para la muestra FV-1.4 con un porcentaje de fibra igual a 28.858 %.

Tabla 4.2.4.a Velocidades longitudinales de onda (m/s).

Espécimen	V_f (%)	θ						
		0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
FV-1.1	28.461	4166.9	3508.6	2909.6	2507.6	2301	2202.7	2187.7
FV-1.2	28.283	4119.7	3953.7	3121.1	2687.5	2567.2	2470.3	2468.7
FV-1.3	27.796	4460.1	3981.5	3294.5	2778.5	2556.2	2531.9	2510.6
FV-1.4	28.858	4434.5	3812.1	3176.3	2778.5	2556.2	2503	2486.6
FV-1.5	28.952	4521.3	4026.2	3345.1	2846.6	2569.5	2540.3	2517.9

4.2.5 Obtención numérica de las constantes elásticas:

A partir de los datos experimentales de la velocidad longitudinal de onda; la ecuación (4.2.2.a) puede ser fácilmente resuelta para recobrar las constantes elásticas ($E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$) del material, usando un método no lineal de mínimos cuadrados. El programa Origin 6TM fue utilizado para la solución de la ecuación (4.2.2.a). La curva ajustada para el espécimen FV-1.5 de $1/E_x$ contra θ se muestra en la figura (4.2.5.a).

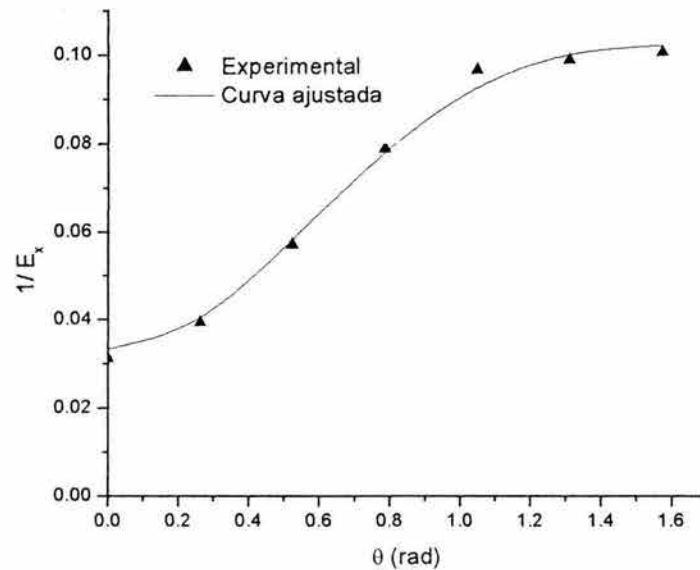


Figura 4.2.5.a Curva ajustada a los datos experimentales obtenidos de la muestra FV-1.5.

4.2.6 Modelos teóricos considerados:

Los modelos teóricos utilizados para calcular las propiedades de los compuestos unidireccionales analizados en este trabajo fueron: las cotas superior e inferior de Hashin – Rosen [6], regla de las mezclas [5] y las cotas superior e inferior de Hashin – Hill [5] ; las expresiones matemáticas están dadas en las referencias citadas para cada modelo.

Para realizar los cálculos , se tomaron las propiedades de cada constituyente (Tabla 4.2.1.a) y se consideró un factor de empaquetamiento del 64% (valor comúnmente observado en micrografías del área transversal de compuestos unidireccionales).

Debido a la buena capacidad de predicción que poseen los modelos teóricos utilizados; las constantes elásticas obtenidas a partir de éstos, fueron utilizadas como una base de comparación con las constantes experimentales.

Las tablas 4.2.6.a - 4.2.6.e muestran los resultados teóricos y experimentales de las constantes elásticas para cada muestra.

Tabla 4.2.6.a Constantes elásticas experimentales y teóricas de la muestra FV-1.1

Constantes	Regla de las mezclas	Hashin - Rosen	Método fotoacústico	Hashin - Hill
E_1 (GPa)	27.1792086	27.1904814	25.44572 ± 0	-
E_2 (GPa)	-	5.9607483	7.47995 ± 0.06005	5.90506754
ν_{12}	0.3086895	0.30260251	0.3 ± 0	-
ν_{21}	-	-	0.08819	0.06706716
ν_{23}	-	-	-	0.4545832
G_{12} (GPa)	-	2.19519938	4.68809 ± 0	2.18427215
G_{23} (GPa)	-	-	-	2.0298143
E_{2-} (GPa)	-	5.9607483	-	5.90506754
E_{2+} (GPa)	-	6.09440635	-	-
G_{12-} (GPa)	-	2.19519938	-	2.18427215
G_{12+} (GPa)	-	2.19519938	-	7.03469535
G_{23-} (GPa)	-	-	-	2.0298143
G_{23+} (GPa)	-	-	-	5.42806071

Tabla 4.2.6.b Constantes elásticas experimentales y teóricas de la muestra FV-1.2

Constantes	Regla de las mezclas	Hashin - Rosen	Método fotoacústico	Hashin - Hill
E_1 (GPa)	27.03058	27.0418504	28.05967 ± 0	-
E_2 (GPa)	-	5.94275751	9.52887 ± 0	5.88662641
ν_{12}	0.3088819	0.3028184	$0.3 \pm .08054$	-
ν_{21}	-	-	0.10188	0.06726723
ν_{23}	-	-	-	0.45464751
G_{12} (GPa)	-	2.18739894	5.41012 ± 0	2.17651341
G_{23} (GPa)	-	-	-	2.02338586
E_{2-} (GPa)	-	5.94275751	-	5.88662641
E_{2+} (GPa)	-	6.07441973	-	-
G_{12-} (GPa)	-	2.18739894	-	2.17651341
G_{12+} (GPa)	-	2.18739894	-	6.99295317
G_{23-} (GPa)	-	-	-	2.02338586
G_{23+} (GPa)	-	-	-	5.39623447

Tabla 4.2.6.c Constantes elásticas experimentales y teóricas de la muestra FV-1.3

Constantes	Regla de las mezclas	Hashin - Rosen	Método fotoacústico	Hashin - Hill
E_1 (GPa)	26.6241008	26.6352009	30.695 ± 0	-
E_2 (GPa)	-	5.89378931	9.79776 ± 0	5.8365577
ν_{12}	0.3094244	0.30341015	0.3 ± 0	-
ν_{21}	-	-	0.09576	0.06783228
ν_{23}	-	-	-	0.45481323
G_{12} (GPa)	-	2.16623534	6.03594 ± 0.03318	2.15546287
G_{23} (GPa)	-	-	-	2.00594742
E_{2-} (GPa)	-	5.89378931	-	5.8365577
E_{2+} (GPa)	-	6.02009735	-	-
G_{12-} (GPa)	-	2.16623534	-	2.15546287
G_{12+} (GPa)	-	2.16623534	-	6.87917101
G_{23-} (GPa)	-	-	-	2.00594742
G_{23+} (GPa)	-	-	-	5.30961951

Tabla 4.2.6.d Constantes elásticas experimentales y teóricas de la muestra FV-1.4

Constantes	Regla de las mezclas	Hashin - Rosen	Método fotoacústico	Hashin - Hill
E_1 (GPa)	27.5106242	27.5219771	30.31555 ± 0	-
E_2 (GPa)	-	6.001055	$9.72214 \pm .07565$	5.94648762
ν_{12}	0.3082528	0.30212175	0.3 ± 0	-
ν_{21}	-	-	0.09621	0.06662958
ν_{23}	-	-	-	0.45443617
G_{12} (GPa)	-	2.21272421	5.54368 ± 0	2.20170325
G_{23} (GPa)	-	-	-	2.04425872
E_{2-} (GPa)	-	6.001055	-	5.94648762
E_{2+} (GPa)	-	6.13924066	-	-
G_{12-} (GPa)	-	2.21272421	-	2.20170325
G_{12+} (GPa)	-	2.21272421	-	7.12809408
G_{23-} (GPa)	-	-	-	2.04425872
G_{23+} (GPa)	-	-	-	5.49937107

Tabla 4.2.6.e Constantes elásticas experimentales y teóricas de la muestra FV-1.5

Constantes	Regla de las mezclas	Hashin - Rosen	Método fotoacústico	Hashin - Hill
E_1 (GPa)	27.5106242	27.600467	32.35435 ± 0	-
E_2 (GPa)	-	6.01063557	9.89048 ± 0.0985	5.95635297
ν_{12}	0.3081494	0.30200807	0.3 ± 0	-
ν_{21}	-	-	0.09171	0.06652797
ν_{23}	-	-	-	0.45440036
G_{12} (GPa)	-	2.21689961	5.96024 ± 0	2.2058563
G_{23} (GPa)	-	-	-	2.04770059
E_{2-} (GPa)	-	6.01063557	-	5.95635297
E_{2+} (GPa)	-	6.14990884	-	-
G_{12-} (GPa)	-	2.21689961	-	2.2058563
G_{12+} (GPa)	-	2.21689961	-	7.15026944
G_{23-} (GPa)	-	-	-	2.04770059
G_{23+} (GPa)	-	-	-	5.51632213

Los resultados anteriores, muestran en general una buena concordancia entre las constantes teóricas y experimentales.

La mayor discrepancia se hizo presente entre los módulos E_1 y E_2 ; lo que en parte pudo ocasionarse por haber utilizado las propiedades de la Tabla (4.2.1.a) obtenidas a partir de la literatura.

En la tabla (4.2.6.f) se muestra el valor promedio (considerando las cinco muestras) de las constantes elásticas que de aquí en adelante serán consideradas en cálculos posteriores. Para el caso de las constantes ν_{23} y G_{23} , se tomó el valor promedio de los resultados teóricos arrojados por el modelo de Hashin – Hill.

Tabla 4.2.6.f Constantes elásticas promedio

Constantes	Método fotoacústico	Hashin - Hill
E_1 (GPa)	29.374 ± 0	-
E_2 (GPa)	9.284 ± 0.0468	-
ν_{12}	0.3 ± 0.0161	-
ν_{21}	0.0948	-
ν_{23}	-	0.455
G_{12} (GPa)	5.528 ± 0.0066	-
G_{23} (GPa)	-	2.03

4.3 Pruebas de impacto en muestras circulares de material compuesto laminado fibra de vidrio/epóxico.

En este subcapítulo, se describen los experimentos de impacto a baja velocidad realizados sobre algunas muestras circulares de material compuesto laminado; utilizando para ello, un impactómetro diseñado y construido en el Instituto de Ingeniería de la UNAM [7].

Dicho dispositivo se compone de un sistema para colocar diferentes tipos de impactor, un porta-muestras con dos sujetadores circulares de 76.2 mm de diámetro interno y una masa de caída libre de 4.515 Kg.

4.3.1 Preparación de las muestras:

Los materiales usados en este trabajo se obtuvieron de Aircraft Spruce & Specialty Co. Estos materiales fueron fibra de vidrio S-2 unidireccional y resina epóxica Safe T Poxy II. Las propiedades mecánicas de estos materiales son las mismas que se proporcionan en la tabla (4.2.1.a). La fabricación de las muestras fue manual, siguiendo el proceso descrito en el subcapítulo 4.1. Se construyeron dieciocho especímenes de forma circular (120mm de diámetro) con diferentes espesores (de una capa el más delgado hasta cinco capas el más grueso). Las especificaciones de las muestras se encuentran en la tabla (4.3.1.a).

Tabla 4.3.1.a Muestras circulares (laminado unidireccional fibra de vidrio S-2 / epóxico).

Muestras	Volumen de fibra (%)	Espesor (mm)	Densidad (gr/cm ³)
FV-1.1, FV-1.2 y FV-1.3	27.940	0.4318	1.442
FV-2.1, FV-2.2 y FV-2.3	28.890	0.762	1.593
FV-3.1, FV-3.2 y FV-3.3	30.220	1.1	1.494
FV-4.1, FV-4.2 y FV-4.3	29.278	1.438	1.515
FV-5.1, FV-5.2, FV-5.3 FV-5.4, FV-5.5 y FV-5.6	27.879	1.9	1.526

4.3.2 Equipo de medición:

Impactómetro:

La fotografía 4.3.2.a muestra la disposición y conexión de los dispositivos de medición utilizados durante las pruebas de impacto.

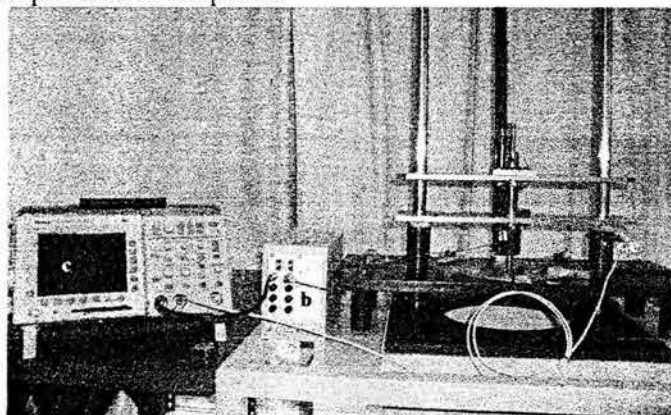


Figura 4.3.2.a Fotografía del impactómetro y de los distintos dispositivos de medición.

El impactor (a) está equipado con un sensor PCB PIEZOTRONICS^{INC.} modelo 208A35 de forma cilíndrica con 47.5 mm de largo y punta de acero semiesférica de 12.7mm de diámetro; calibrado a 224.82 mV/KN. Este sensor va conectado a un acondicionador de señales (b) PCB PIEZOTRONICS^{INC.} modelo 441 A42; el cual a su vez, se conecta a un osciloscopio (c) Tektronix TDS 3032 B de 300MHz donde la señal es registrada y almacenada para su análisis posterior en una computadora personal (d).

Para medir el desplazamiento del impactor (proyector) y del centro del plato; se implementó un dispositivo electrónico que consta de un pequeño sensor de campo magnético (e), una pila, un capacitor y un imán.

En el apéndice B, se muestra el desarrollo del diseño conceptual de un sistema alternativo para medir el desplazamiento central del plato; aún cuando la implementación de éste no se llevó a cabo, vale la pena tomarlo en cuenta para su posible aplicación en estudios posteriores.

La figura 4.3.2.b muestra un esquema de la disposición y conexión de los dispositivos de medición utilizados durante las pruebas de impacto.

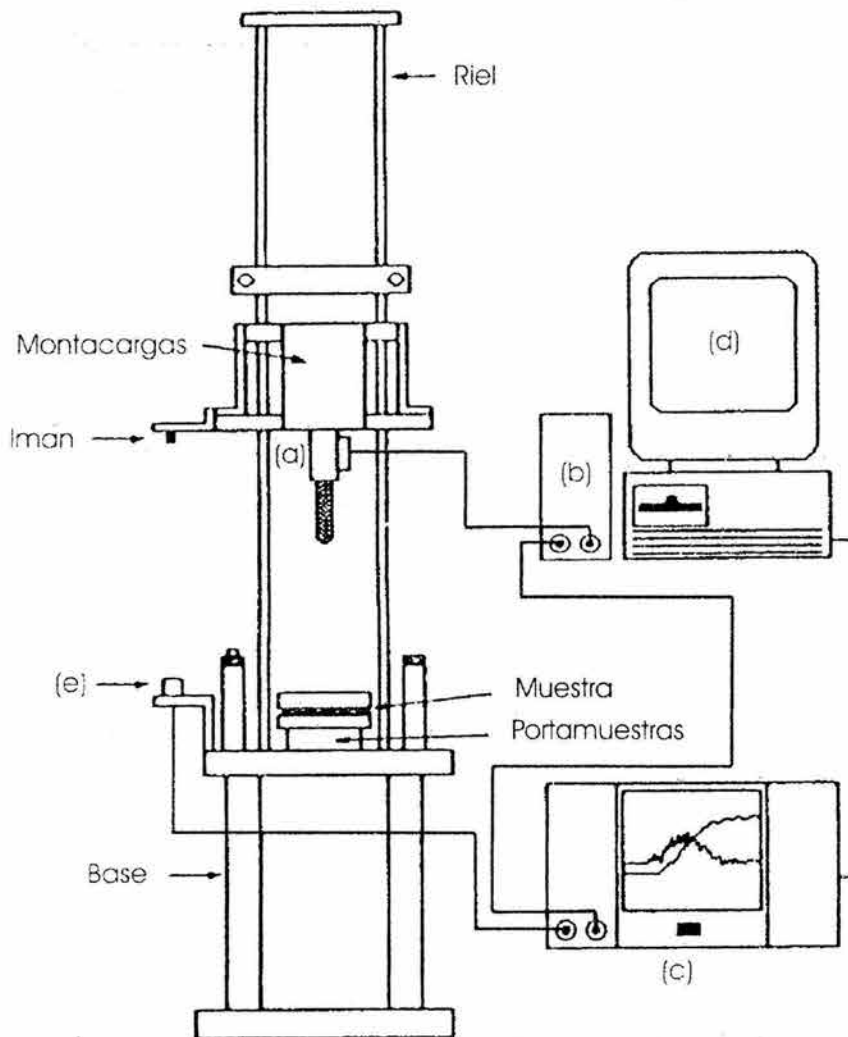


Figura 4.3.2.b Esquema del impactómetro instrumentado.

Sistema electrónico para medir la velocidad y el desplazamiento del proyectil:

La reducción de la velocidad sufrida por el montacargas debido a la fricción entre los bujes y los rieles, hizo necesaria la implementación de un sistema para registrar dicha disminución.

El sistema utilizado consta de un sensor de campo magnético (de efecto Hall) montado en la base del riel derecho del impactómetro, un pequeño imán pegado en una de las esquinas del montacargas (alineado con la posición del sensor) y un capacitor para disminuir el ruido de la señal. En la figura (4.3.2.c) se muestra el sistema que se instaló para medir el desplazamiento del proyectil.

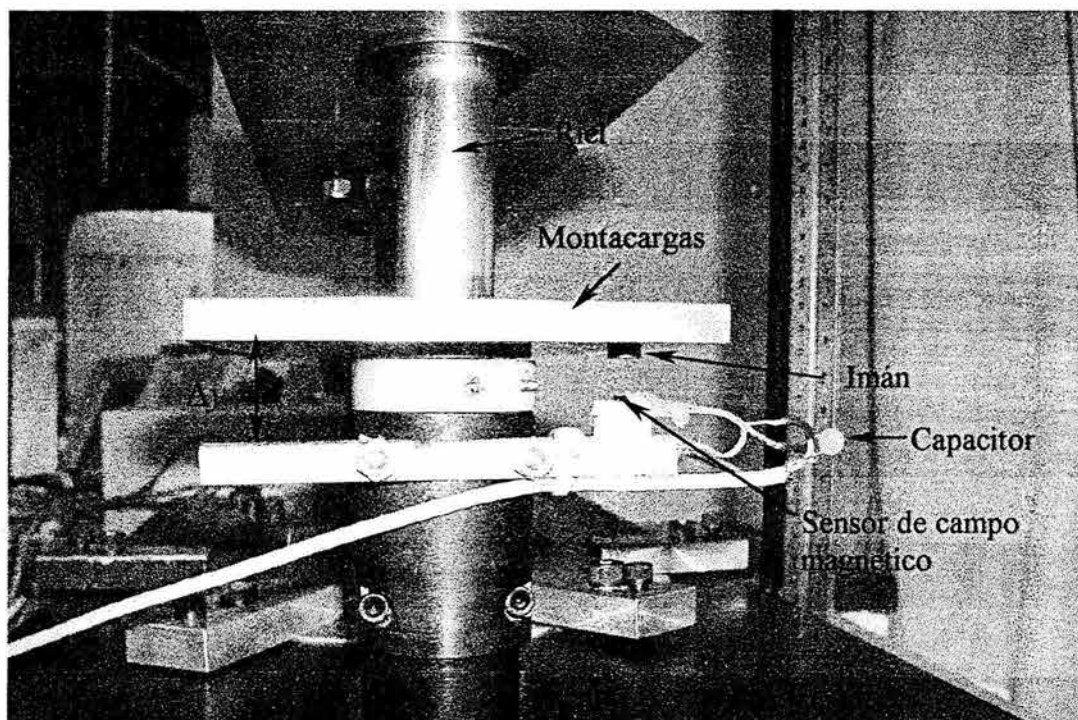


Figura 4.3.2.c Sistema para medir el desplazamiento del proyectil.

La figura (4.3.2.d) muestra la curva de calibración del sistema de medición del desplazamiento del impactor. Dicha curva se construyó graficando el voltaje registrado por el sensor de campo contra la distancia de separación Δy .

La curva de ajuste a los datos experimentales está representada por la función:

$$\Delta y = (a + bV)^{-1/c}$$

El valor de las constantes resultó ser:

$$a = -7.8385 \times 10^{-18}, \quad b = 3.2189 \times 10^{-18}, \quad c = 6.06761$$

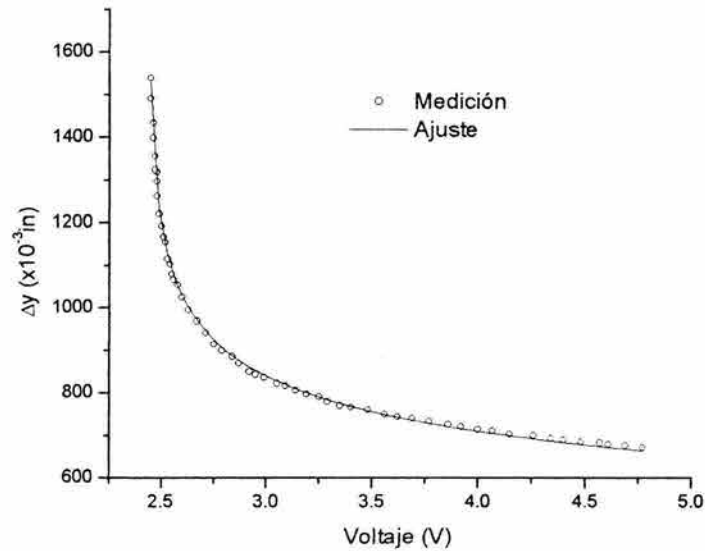


Figura 4.3.2.d Curva de calibración.

Como la relación entre el desplazamiento vertical (Δy) y el voltaje (V) es no lineal, resulta necesario tomar un nivel de referencia para transformar correctamente los datos.

El nivel cero de referencia está representado por la altura donde la punta del impactor se localiza al mismo nivel de la superficie posterior de cualquier plato. Su valor en coordenadas quedó registrado como: ($V = 2.695$ V, $\Delta y = 950 \times 10^{-3}$ in).

4.3.3 Desarrollo de las pruebas:

Todas las muestras laminadas de una, dos, tres y cuatro capas, fueron sometidas a impactos de baja velocidad dejando caer libremente el proyectil desde una altura de 3.175 mm ($1/8$ de pulgada).

De las seis muestras construidas con cinco capas; dos de ellas (FV5.1 y FV5.2) se probaron con una altura de caída libre de 3.175 mm ($1/8$ de pulgada), otras dos (FV5.3 y FV5.4) con una altura de 6.35 mm ($1/4$ de pulgada) y las dos restantes (FV5.5 y FV5.6) con una altura de 9.525 mm ($3/8$ de pulgada).

La altura de caída libre se tomó entre la punta esférica del impactor y la superficie del plato, tal como se observa en la figura (4.3.3a).

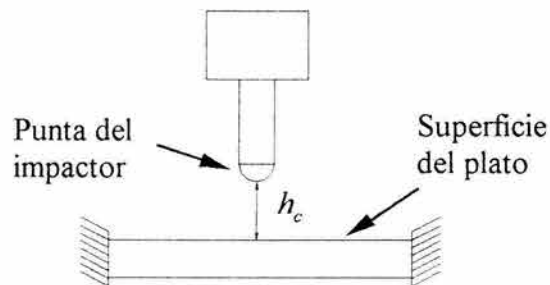


Figura 4.3.3.a Definición de la altura de caída libre.

Todas las muestras fueron colocadas entre dos anillos de aluminio y aprisionadas en su periferia con 6 tornillos, como se muestra en la figura (4.3.3.b):

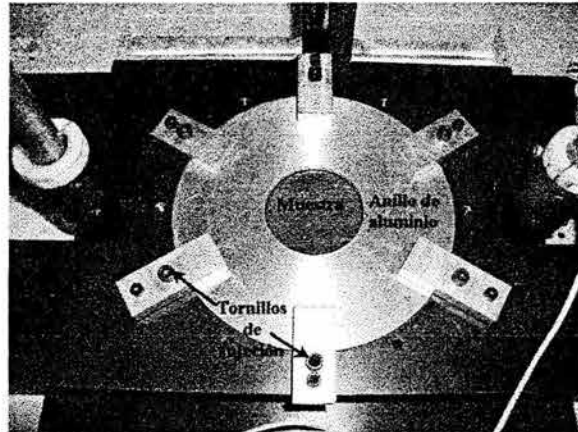


Figura 4.3.3.b Sujeción de las muestras.

Una vez sujeta la muestra, se fijó la altura de caída libre y el peso del montacargas (4.515 Kg) se dejó caer libremente controlando el disparo manualmente; las señales registradas por los sensores de fuerza y posición se visualizaron y almacenaron en el osciloscopio.

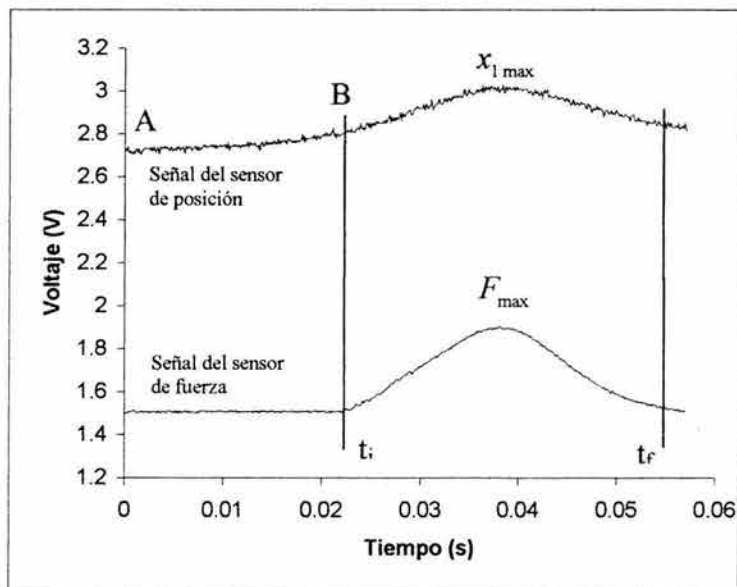


Figura 4.3.3.c Señales típicas de voltaje contra tiempo registradas por el osciloscopio (muestra FV4.1, altura de caída libre 3.175 mm).

El segmento de curva A-B (de la señal captada por el sensor de campo magnético); representa el desplazamiento del proyectil (impactor) desde la altura inicial de caída libre, hasta el punto donde inicia el contacto entre el plato y la punta del sensor.

Para calcular la velocidad inicial de impacto (V_i); se ajustó la conocida ecuación

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + V_0t + x_0 \quad (\text{done } g = 9.81 \text{ m/s}^2; \text{ para estas pruebas } V_0 = 0 \text{ y } x_0 = h_c)$$

a la curva A-B, para después derivar con respecto al tiempo y evaluar la función resultante en $t = t_i$.

El periodo comprendido entre t_f y t_i se consideró como el tiempo de contacto t_c .

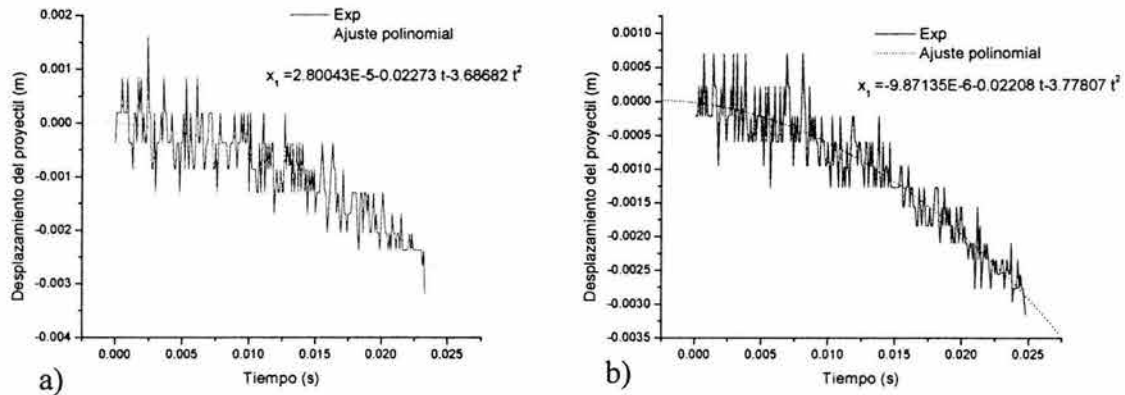


Figura 4.3.3.d Curvas experimentales para calcular la velocidad inicial de impacto; a) muestra FV5.1 , b) muestra FV3.2.

La figura (4.3.3.d) muestra dos curvas de desplazamiento registradas con el sensor de campo magnético y sus respectivas curvas de ajuste.

Las velocidades iniciales de impacto calculadas a partir de las curvas de ajuste, resultaron ser menores a los valores teóricos calculados a partir de $V_i = \sqrt{2gh_c}$. Esto se debe a la fricción entre los bujes guía fijados al montacargas y los rieles.

En general, se observó que en las primeras etapas del recorrido en caída libre todas las curvas experimentales de desplazamiento eran más ruidosas que en las etapas cercanas al punto de contacto. Lo anterior podría atribuirse al accionamiento manual utilizado para dejar caer el montacargas.

4.4 Resultados de las pruebas de impacto.

A continuación se presentan las gráficas de fuerza vs. tiempo y desplazamiento vs. tiempo correspondientes a cada espécimen. En todos los ensayos la masa del impactor fue de 4.515 Kg. La velocidad inicial de impacto (V_i) fue calculada con la señal del sensor magnético.

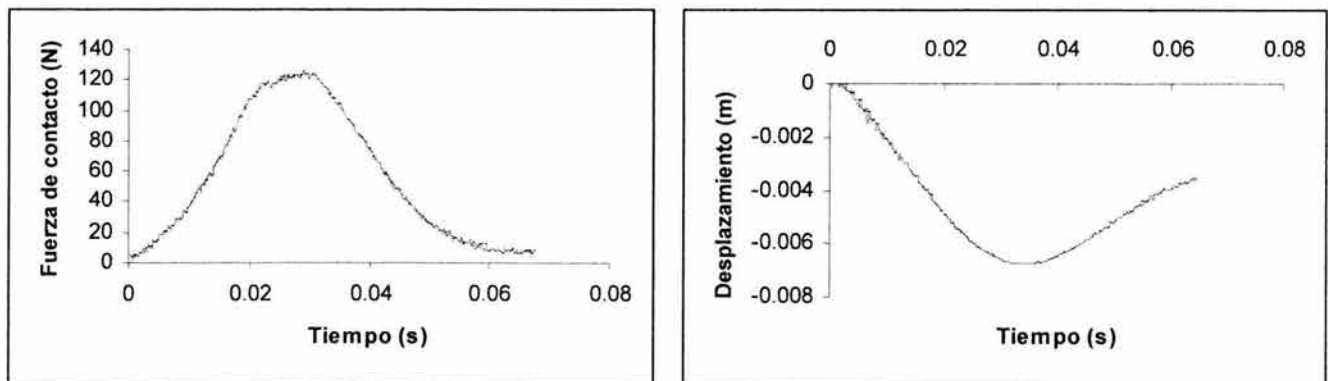


Figura 4.4.1 Muestra FV1.1; velocidad de caída libre $V_i = 0.2214$ m/s.

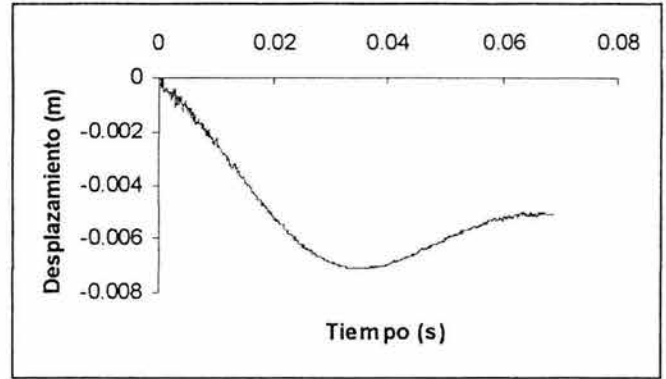
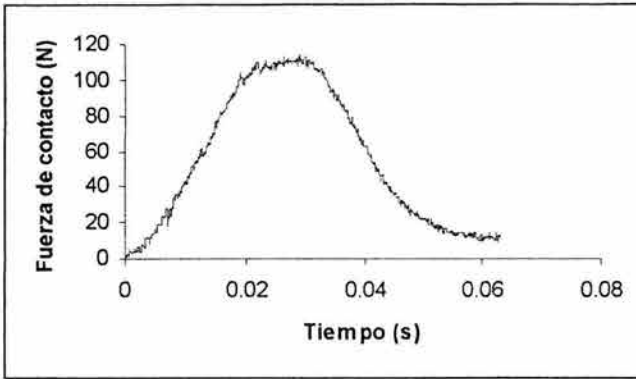


Figura 4.4.2 Muestra FV1.2; $V_i = 0.2194$ m/s.

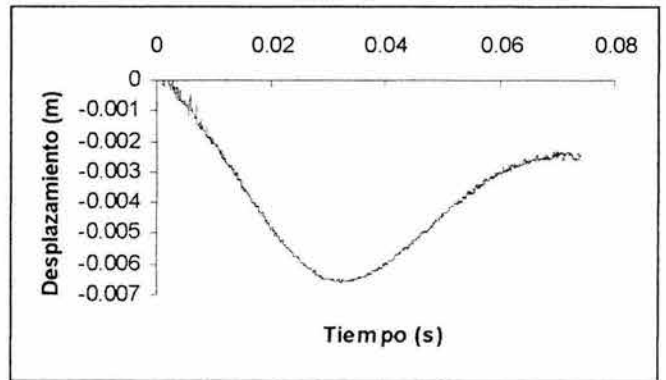
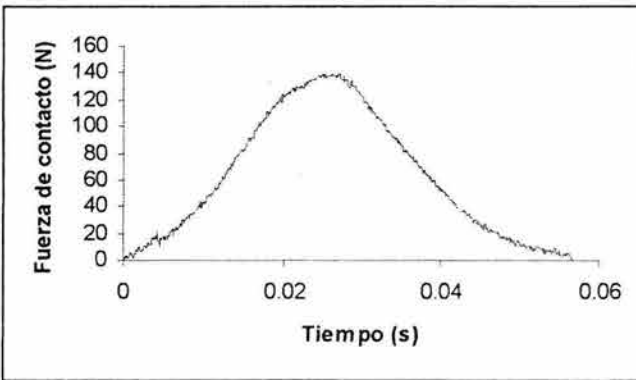


Figura 4.4.3 Muestra FV1.3; $V_i = 0.1945$ m/s.

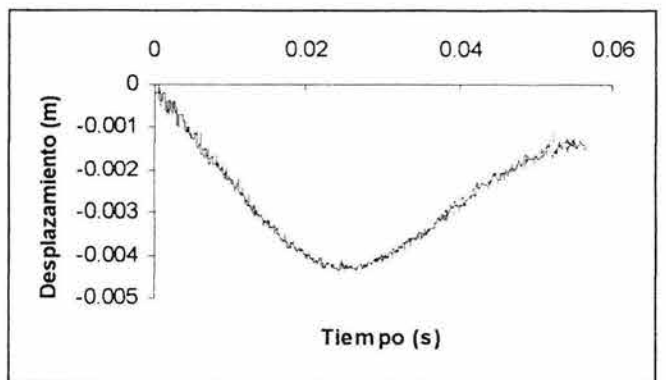
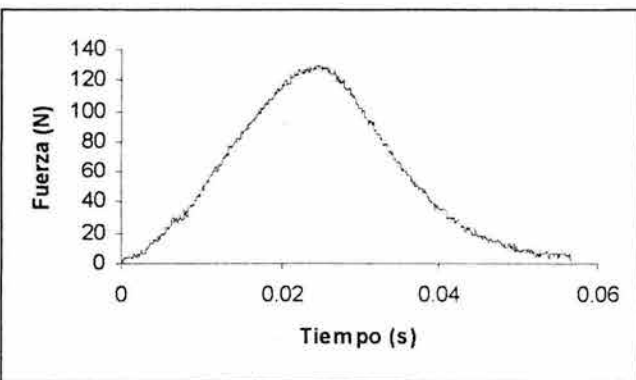


Figura 4.4.4 Muestra FV2.1; $V_i = 0.2082$ m/s.

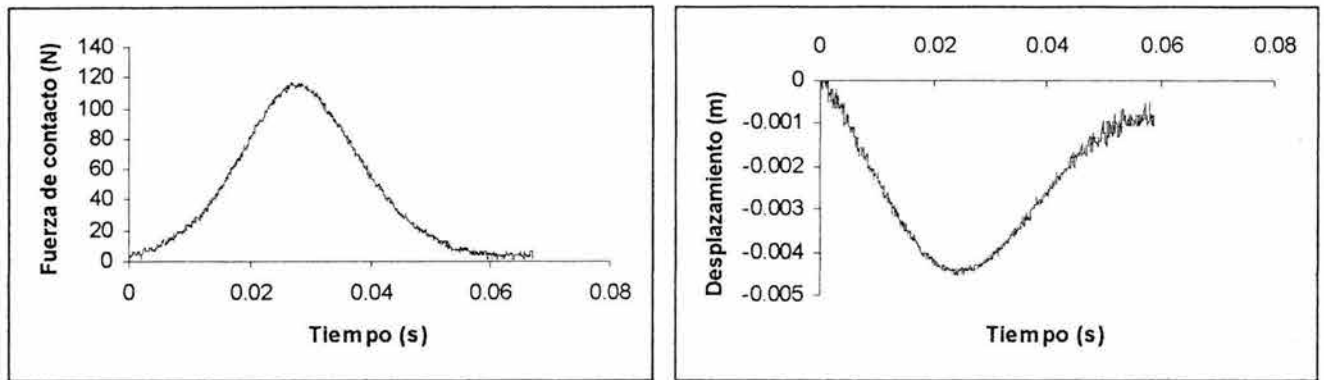


Figura 4.4.5 Muestra FV2.2; $V_i = 0.2351$ m/s.

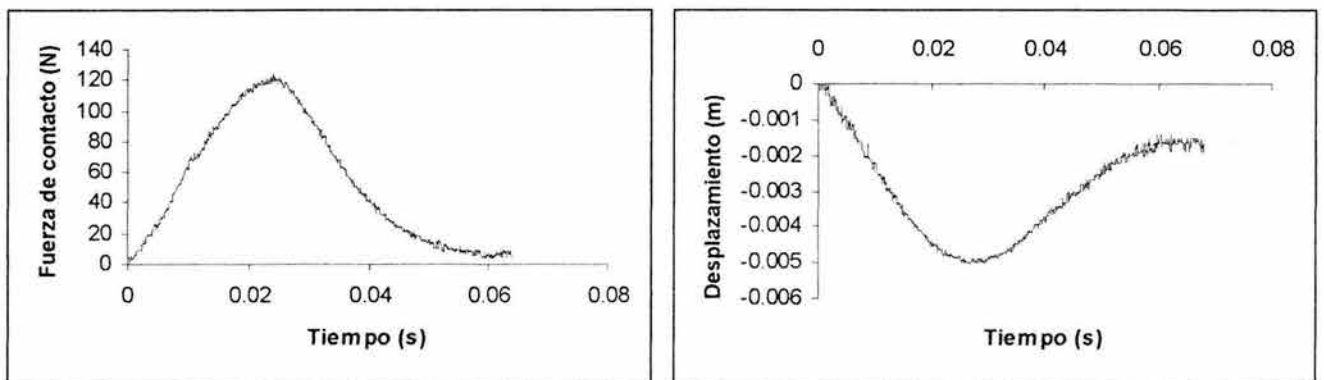


Figura 4.4.6 Muestra FV2.3; $V_i = 0.2316$ m/s.

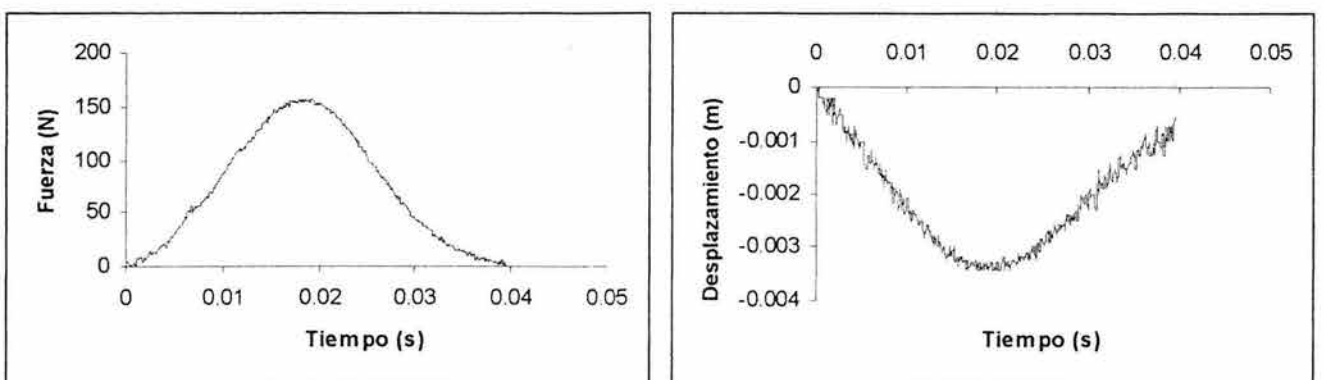


Figura 4.4.7 Muestra FV3.1; $V_i = 0.2216$ m/s.

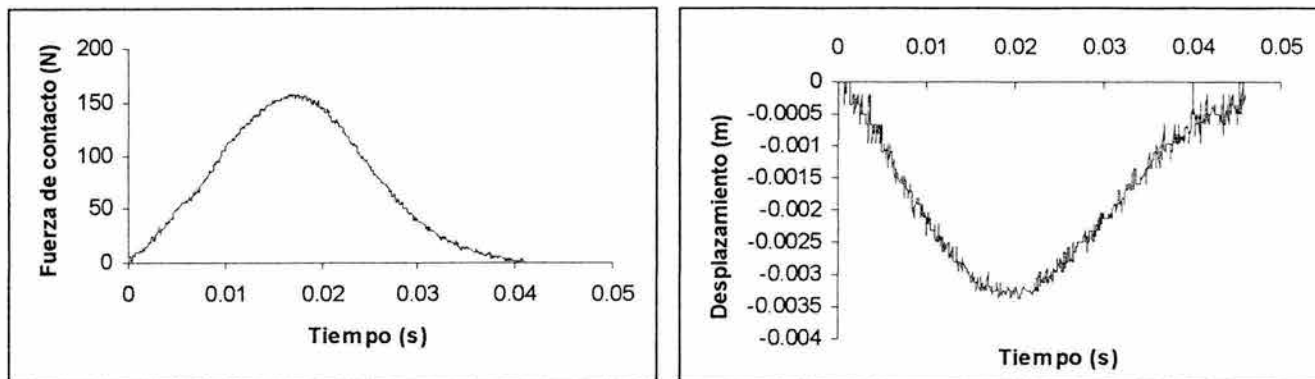


Figura 4.4.8 Muestra FV3.2; $V_i = 0.222$ m/s.

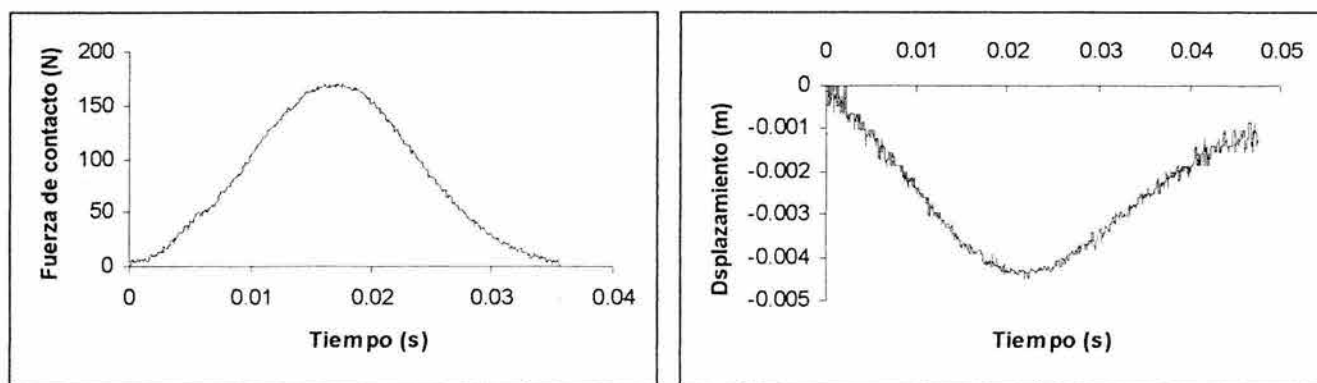


Figura 4.4.9 Muestra FV3.3; $V_i = 0.2227$ m/s.

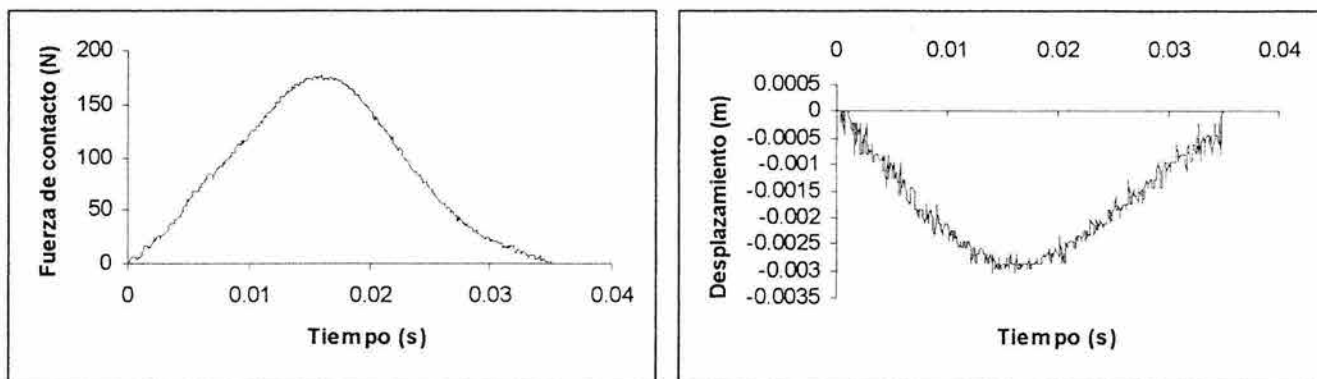


Figura 4.4.10 Muestra FV4.1; $V_i = 0.2171$ m/s.

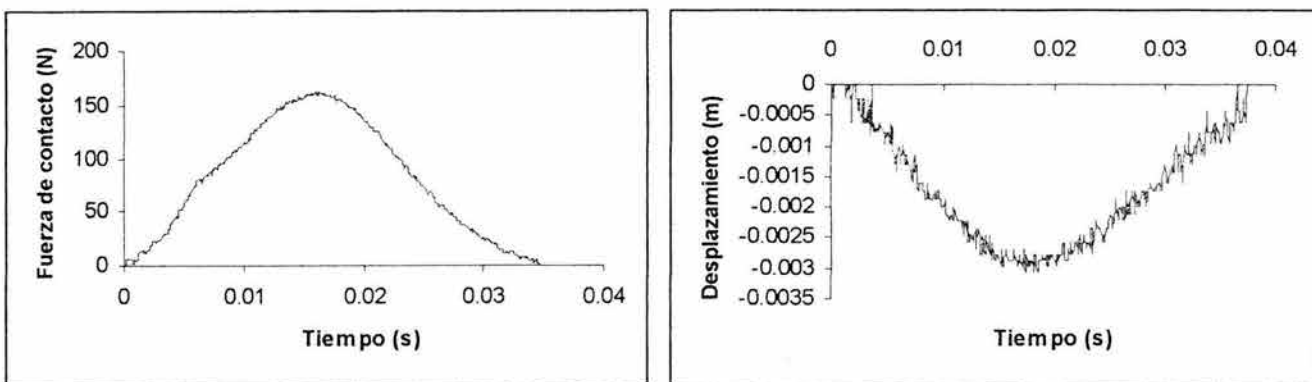


Figura 4.4.11 Muestra FV4.2; $V_i = 0.1632$ m/s.

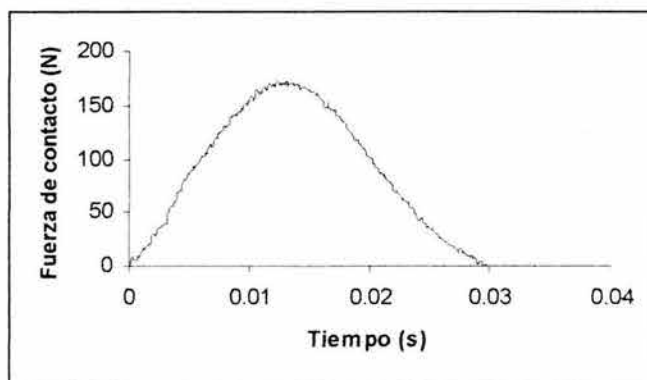


Figura 4.4.12 Muestra FV4.3; la señal de desplazamiento se perdió en este caso.

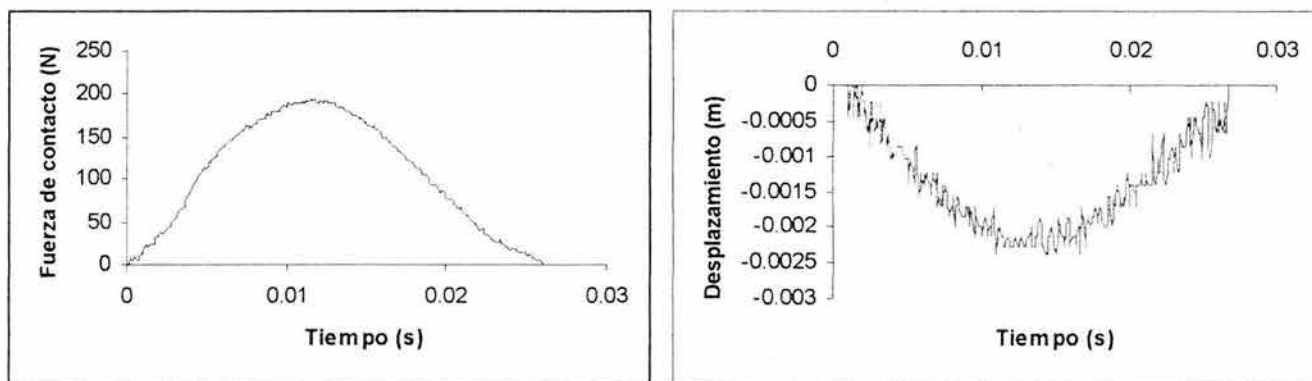


Figura 4.4.13 Muestra FV5.1; $V_i = 0.233$ m/s.

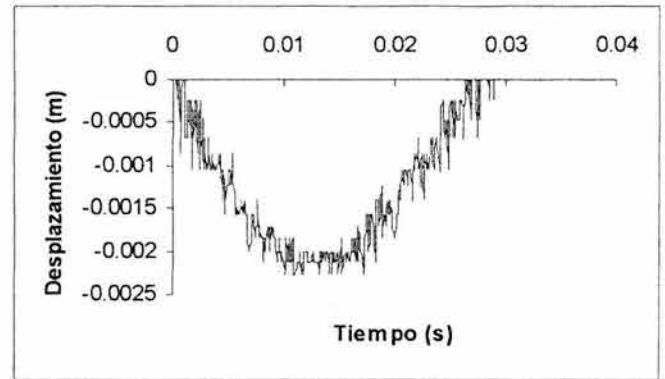
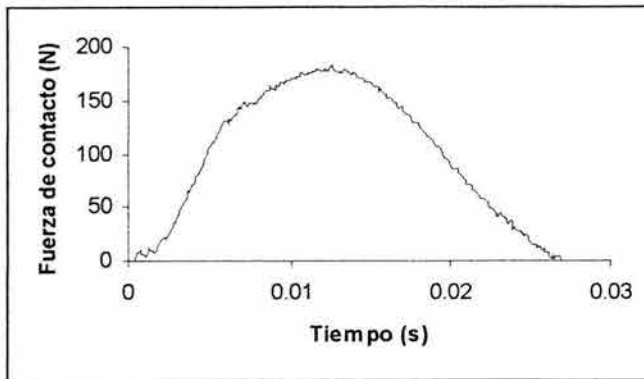


Figura 4.4.14 Muestra FV5.2; $V_i = 0.236$ m/s.

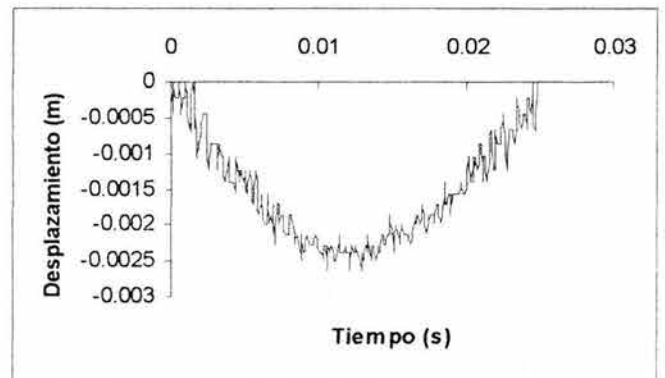
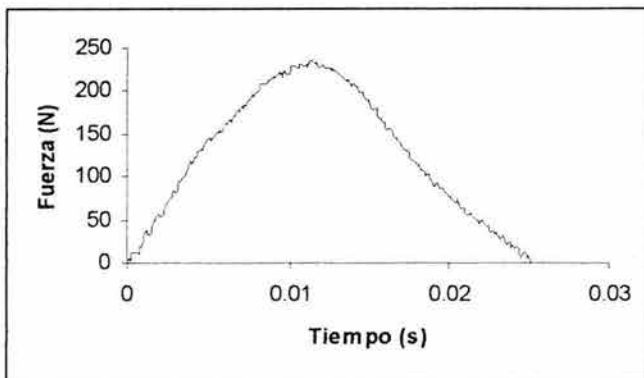


Figura 4.4.15 Muestra FV5.3; $V_i = 0.3289$ m/s.

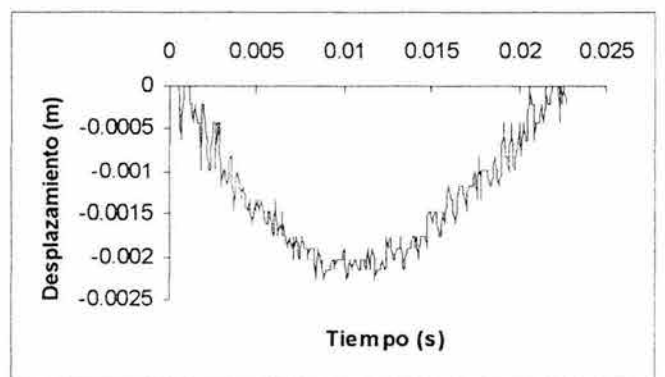
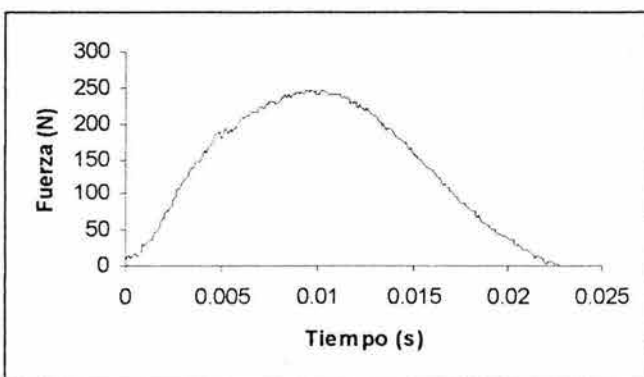


Figura 4.4.16 Muestra FV5.4; $V_i = 0.3269$ m/s.

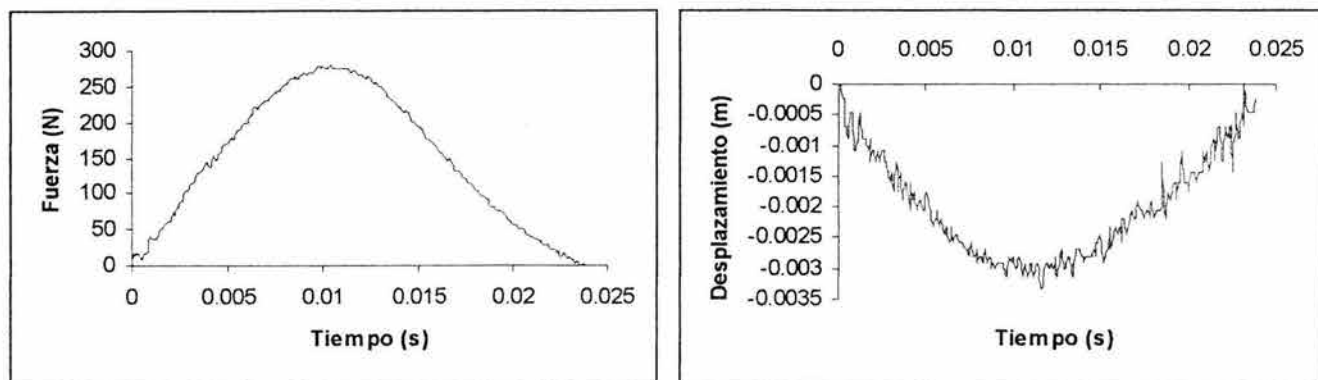


Figura 4.4.17 Muestra FV5.5; $V_i = 0.3667$ m/s.

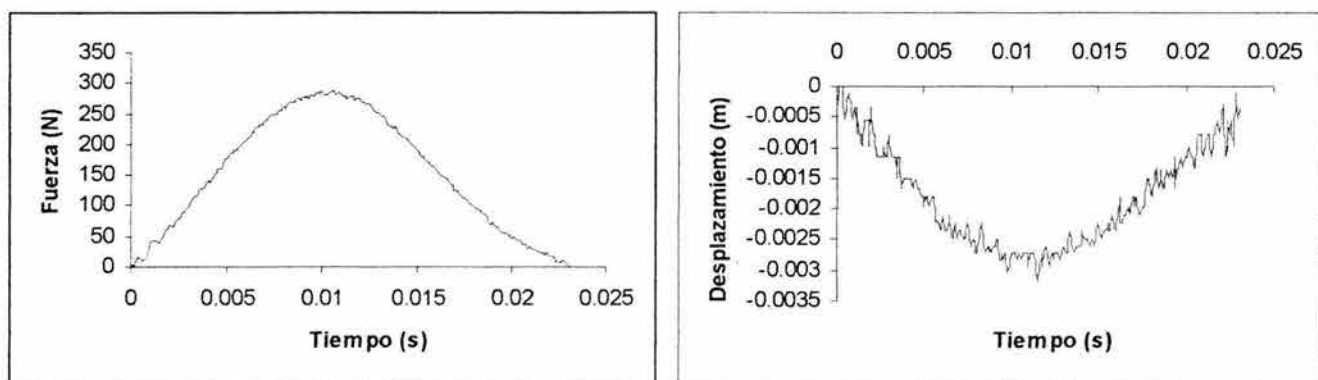


Figura 4.4.18 Muestra FV5.6; $V_i = 0.3742$ m/s.

En las figuras 4.4.19 a 4.4.21 se muestran los ciclos de fuerza vs. desplazamiento correspondientes a las muestras laminadas de cinco capas.

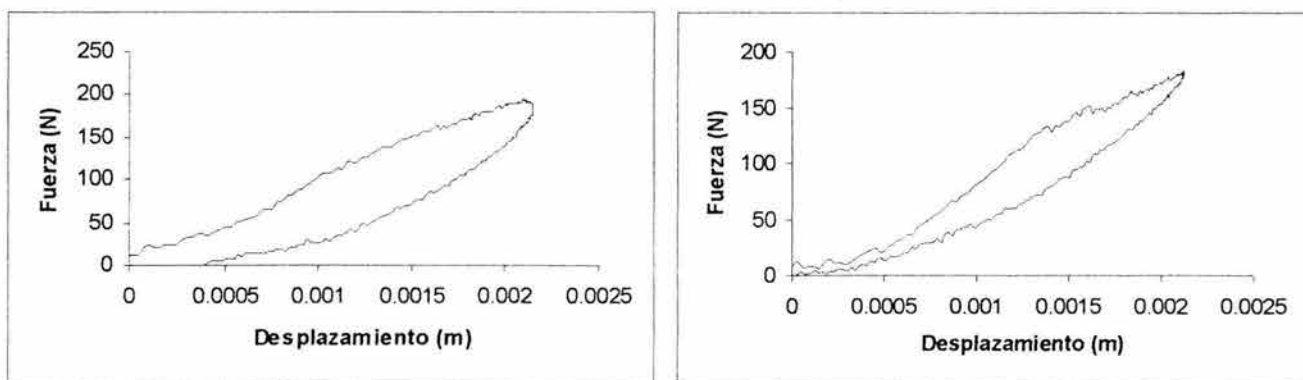


Figura 4.4.19 Muestras: a) FV5.1, b) FV5.2.

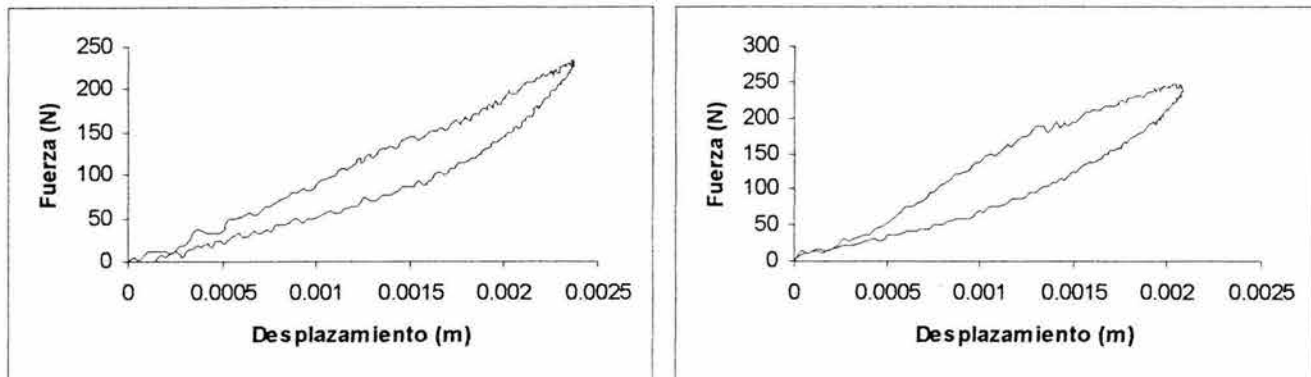


Figura 4.4.20 Muestras: a) FV5.3, b) FV5.4.

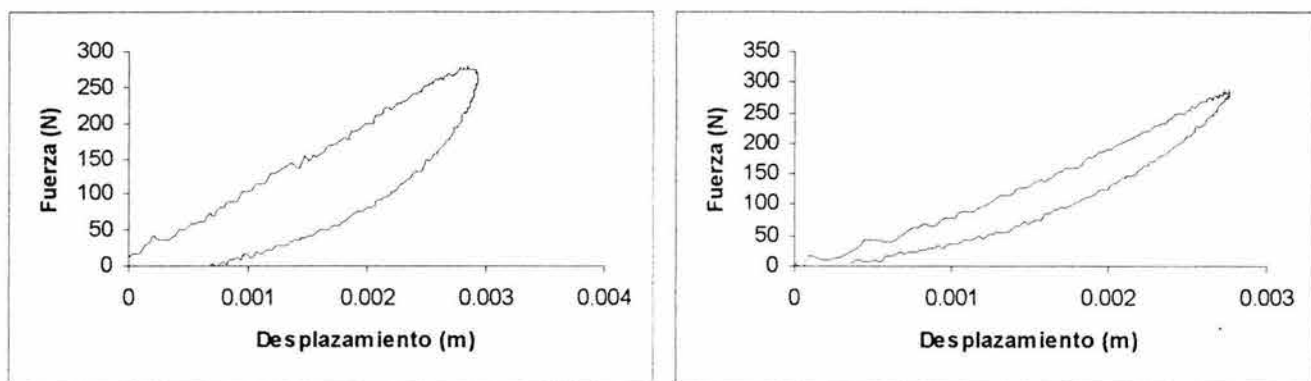


Figura 4.4.21 Muestras: a) FV5.5, b) FV5.6.

4.4.1 Daños sufridos por el material de las muestras después de las pruebas de impacto.

Todas las muestras sometidas a prueba, presentaron daños principalmente en forma de agrietamiento de la matriz en la dirección de las fibras.

En las figuras 4.4.1.a, 4.4.1.b y 4.4.1.c se muestran la longitud de las grietas formadas en especímenes de distinto espesor.

Se observó claramente cómo la longitud de la grieta fue disminuyendo conforme el espesor de la muestra aumentaba.

Para el caso de las muestras más delgadas, la longitud de la grieta rebasó incluso el área circular efectiva marcada en cada fotografía.

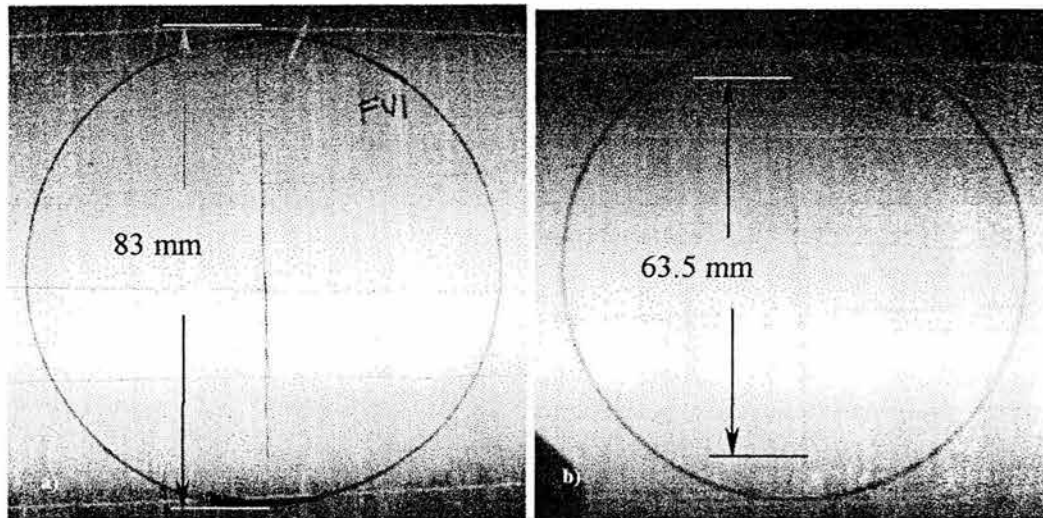


Figura 4.4.1.a Largo de las grietas; a) muestra FV1.1, b) muestra FV2.1.

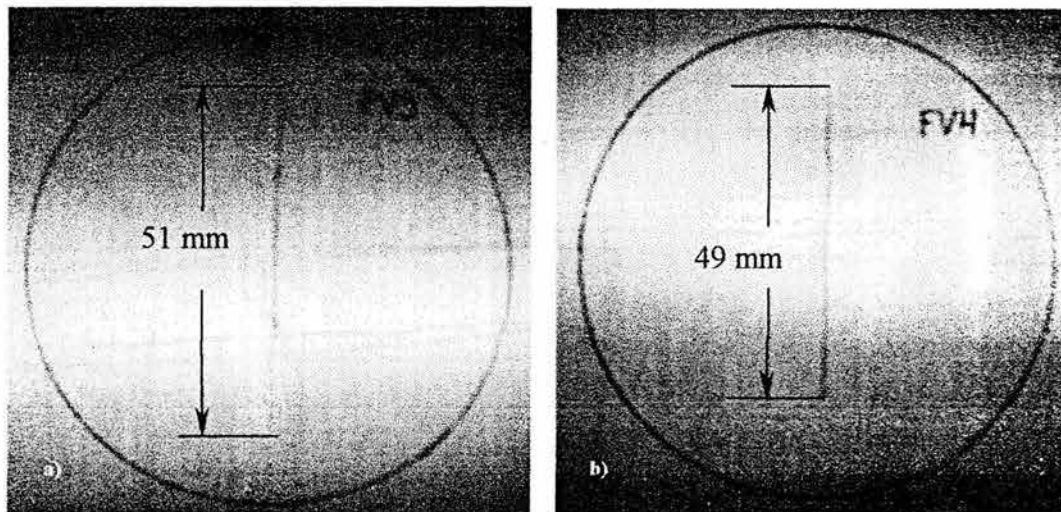


Figura 4.4.1.b Largo de las grietas; a) muestra FV3.1, b) muestra FV4.1.

En la tabla (4.4.1.a) se proporcionan las longitudes de grieta registradas después del impacto.

Tabla 4.4.1.a Longitud de la grieta.

Muestra	Largo de la grieta (mm)	Muestra	Largo de la grieta (mm)	Muestra	Largo de la grieta (mm)
FV1.1	83	FV3.1	51	FV5.1	43
FV1.2	98	FV3.2	53.5	FV5.2	46.8
FV1.3	96.8	FV3.3	55	FV5.3	48.6
FV2.1	63.5	FV4.1	49	FV5.4	52
FV2.2	77	FV4.2	44	FV5.5	56.5
FV2.3	63	FV4.3	43	FV5.6	55.8

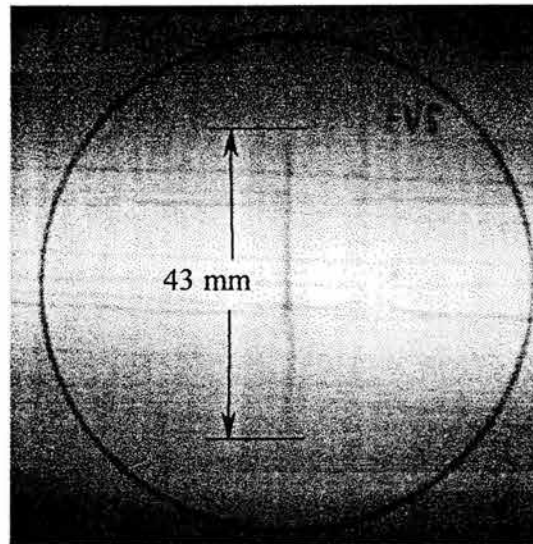


Figura 4.4.1.c Largo de la grieta en la muestra FV5.1.

4.5 Referencias:

- [1] M. Navarrete, F. Serrania, M. Villagrán, J. Bravo, R. Guinovart and R. Rodríguez "An Experimental-Numerical Technique for Evaluating the Elastic Constants of Unidirectional Laminates by the Optoacoustic Method: Comparison with Some Theoretical Results", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol.9,(2002) 1-17.
- [2] S. Nemat-Naser and M. Hori, "Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials", 2d ed., pp.428-439, Elsevier, (1998) North Holland, Amsterdam.
- [3] B. A. Auld, "Acoustic Fields and Waves in Solids", 2d ed., Krieger, Malabar, (1998) FL.
- [4] R.M. Jones, "Mechanics of Composite Materials", 2d ed., pp.80-81, Taylor & Francis, (1999) Philadelphia.
- [5] Jean - Marie Berthelot, "Composite Materials-Mechanical Behavior and Structural Analysis", Springer-Verlag, (1999) USA.
- [6] A. E. Bogdanivich and C. N. Pastore, "Mechanics of Textile and Laminated Composites. With Applications Structural Analysis", Chapman & Hall, (1996) London.
- [7] Navarrete, M.; Godínez, F. A.; Serrania, F.; "Diseño y Construcción de un Impactómetro de Baja Velocidad" Memorias del congreso SOMI XVI, (2001).
- [8] A. J. Wnuk, J. E. McGrath and T. C. Ward, "Design and Application of an Instrumented Falling Weight Impact Tester", *Polymer Engineering and Science*, Vol.21, No. 6 (1981) 313-324.
- [9] L. Reis, M. Freitas, "Damage Growth Analysis of Low Velocity Impacted Composite Panels", *Composite Structures*, 38, 1-4 (1997) 509-515.
- [10] Shaw Ming Lee, Paul Zahuta, "Instrumented Impact and Static Indentation of Composites", *J. Of Composite Materials*, 25 (1991) 204-222.
- [11] Serge Abrate, "Impact on Laminated Composite Materials", *ASME Appl Mech Rev*, Vol.44, No. 4, (1991) 155-190.

5. COMPARACIÓN DE LOS MODELOS TEÓRICOS CON LOS RESULTADOS EXPERIMENTALES.

5.1 Comparación de los resultados de las pruebas de impacto contra los modelos elásticos.

En este subtema se comparan los resultados de las pruebas de impacto (del capítulo 4) contra los modelos elásticos: de energía, 2GLC, 2GL y Shivakumar.

En la tabla (5.1.1) se proporcionan las propiedades del material laminado con el que se construyeron los platos circulares sometidos a las pruebas de impacto.

En el apéndice C, se explica brevemente la forma en que se calcularon las propiedades promedio en el plano $r-\theta-Z$ (E_r, E_z , etc.).

Tabla 5.1.1 Propiedades del material con que fueron construidos los platos de prueba.

Propiedades	Acero	FV-1.1 a FV-1.3	FV-2.1 a FV2.3	FV-3.1 a FV-3.3	FV-4.1 a FV-4.3	FV-5.1 y FV-5.2
ρ , densidad, Kg/m ³	7971.8	1561.52	1561.52	1561.52	1561.52	1561.52
D_{11} , Nm	-	0.2028	1.115	3.351	7.492	17.281
D_{12} , Nm	-	0.01923	0.1057	0.3177	0.7104	1.638
D_{22} , Nm	-	0.06411	0.3523	1.059	2.368	5.462
D_{66} , Nm	-	0.03708	0.2038	0.6128	1.369	3.159
E_{22} , GPa	199.95	9.284	9.284	9.284	9.284	9.284
S_y , MPa	-	100	100	100	100	100
E_r , GPa	199.95	17.788	17.788	17.788	17.788	17.788
E_z , GPa	199.95	10.2236	10.2236	10.2236	10.2236	10.2236
G_r , GPa	75.17	6.5258	6.5258	6.5258	6.5258	6.5258
G_{zr} , GPa	75.17	3.779	3.779	3.779	3.779	3.779
ν_r	0.33	0.243	0.243	0.243	0.243	0.243
ν_{rz}	0.33	0.358	0.358	0.358	0.358	0.358
ν_{zr}	0.33	0.206	0.206	0.206	0.206	0.206

En las tablas 5.1.2 a 5.1.4 se proporciona el valor de las constantes de rigidez de los distintos modelos elásticos para llevar a cabo la simulación.

En la figura 5.1.1, se graficó el desplazamiento central máximo de cada plato contra el espesor de las muestras.

La figura 5.1.2, muestra la variación del tiempo de contacto con respecto al espesor de las muestras.

En la gráfica 5.1.3 se muestra a la fuerza máxima de impacto como una función del espesor de las muestras.

Tabla 5.1.2 Datos de simulación para las muestras FV-1 y FV-2

Muestra	FV-1.1 ; FV-1.2 y FV-1.3	FV-2.1 ; FV-2.2 y FV-2.3
$V_i, \text{m/s}$	0.213	0.213
$n, \text{N/m}^{1.5}$	$1.319786726145 \times 10^9$	$1.319786726145 \times 10^9$
$K_{bs}, \text{N/m}$	4384.823	33339.334
$K_m, \text{N/m}^3$	$1.0389449359256 \times 10^{10}$	$1.8334322398688 \times 10^{10}$
$K_y, \text{N/m}$	3.29009×10^6	3.29009×10^6
$K_{lp}, \text{N/m}$	63999.030	88078.116
K_{lp} / n_l	0.0318	0.0411
K_{lp} / K_y	0.0194	0.0123
M_1 / M_{ep}	5873.38	3328.25

Tabla 5.1.3 Datos de simulación para las muestras FV-3 y FV-4

Muestra	FV-3.1 ; FV-3.2 y FV-3.3	FV-4.1 ; FV-4.2 y FV-4.3
$V_i, \text{m/s}$	0.213	0.213
$n, \text{N/m}^{1.5}$	$1.319786726145 \times 10^9$	$1.319786726145 \times 10^9$
$K_{bs}, \text{N/m}$	71944.234	159786.854
$K_m, \text{N/m}^3$	$2.6466869604405 \times 10^{10}$	$3.4599416810123 \times 10^{10}$
$K_y, \text{N/m}$	3.29009×10^6	3.29009×10^6
$K_{lp}, \text{N/m}$	124586.086	197432.73
K_{lp} / n_l	0.0549	0.0756
K_{lp} / K_y	0.0378	0.06
M_1 / M_{ep}	2305.57	1763.65

Tabla 5.1.4 Datos de simulación para las muestras FV-5

Muestra	FV-5.1 y FV-5.2
$V_i, \text{m/s}$	0.213
$n, \text{N/m}^{1.5}$	$1.319786726145 \times 10^9$
$K_{bs}, \text{N/m}$	494553.666
$K_m, \text{N/m}^3$	$5.0679724350138 \times 10^{10}$
$K_y, \text{N/m}$	3.29009×10^6
$K_{lp}, \text{N/m}$	513598.261
K_{lp} / n_l	0.136
K_{lp} / K_y	0.156
M_1 / M_{ep}	1204.05

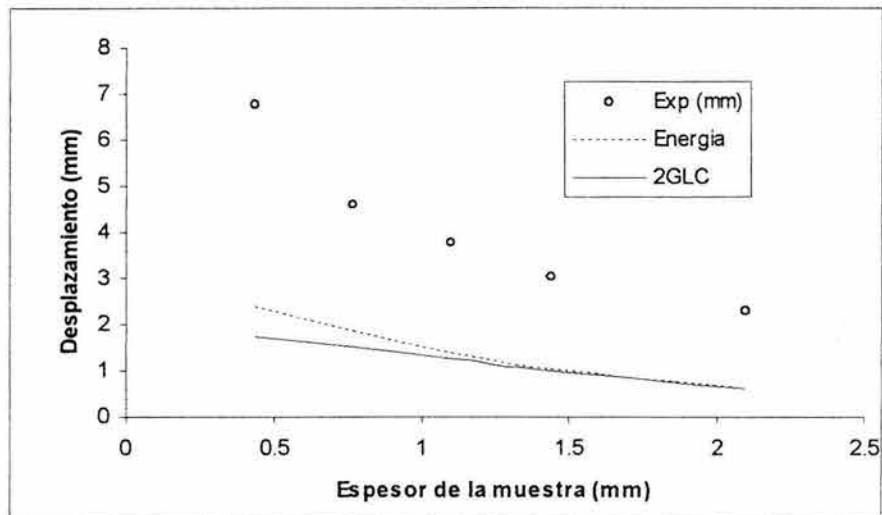


Figura 5.1.1 Desplazamiento central máximo del plato vs. espesor de la muestra.

En la figura 5.1.1 se observa una clara discrepancia entre los resultados teóricos y experimentales. A pesar de ello, los modelos elásticos de energía y 2GL predicen la tendencia exponencial decreciente que siguen los datos experimentales.

La incapacidad de los modelos elásticos para tomar en cuenta ciertos procesos de disipación de energía durante el impacto como el daño visible en forma de agrietamiento de la matriz observado en todas las muestras, ver capítulo 4), explica el por qué los desplazamientos teóricos se encuentran por debajo de los valores experimentales.

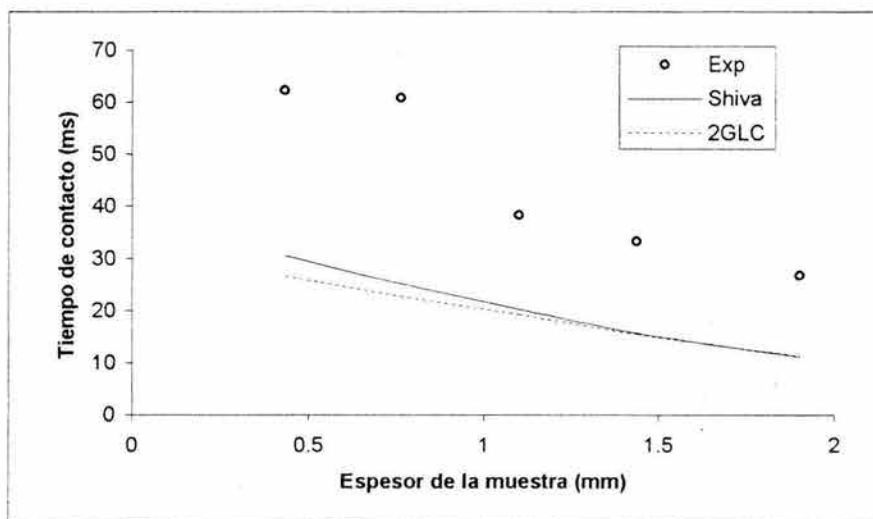


Figura 5.1.2 Tiempo de contacto vs. espesor de la muestra.

En la figura 5.1.2 se observa cómo los modelos elásticos de Shivakumar y 2GLC logran predecir la tendencia que siguen los resultados experimentales. Como ya se ha hecho notar, la discrepancia observada se debe a la incapacidad de ambos modelos para considerar los distintos mecanismos de disipación de energía presentes durante el impacto.

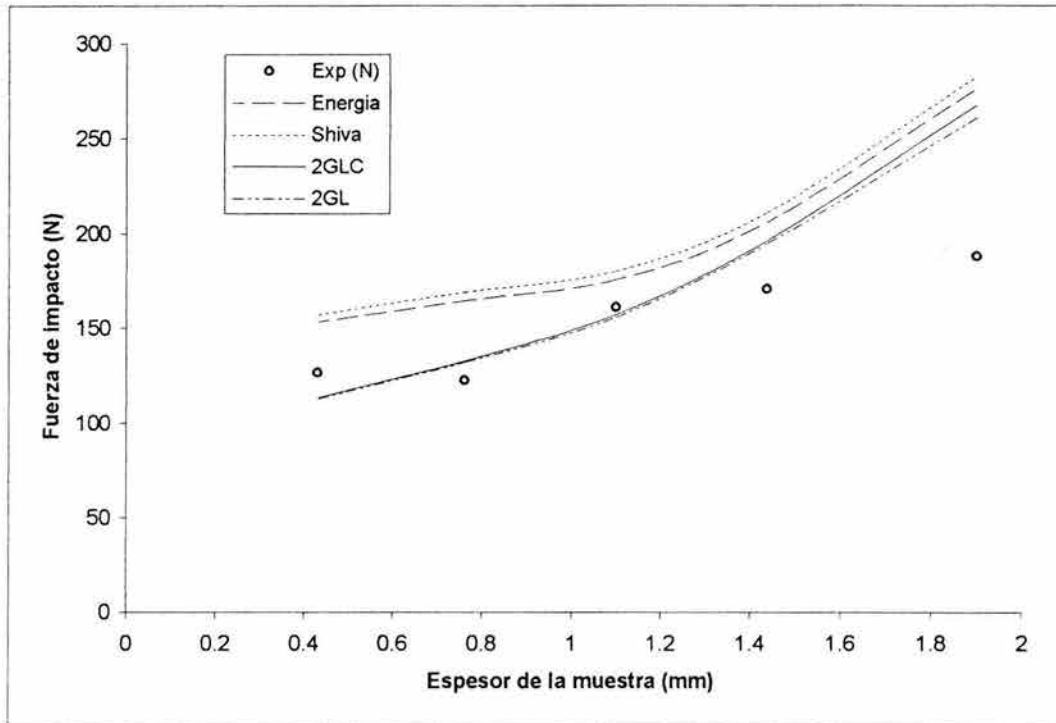


Figura 5.1.3 Fuerza máxima de impacto vs. espesor de la muestra.

En la figura 5.1.3 se aprecia que los modelos de energía y Shivakumar predicen fuerzas de impacto mayores a las registradas experimentalmente; y de nueva cuenta esto se explica por el daño que el material de las muestras sufrió durante el impacto.

También en la figura 5.1.3 se observa que los modelos 2GL y 2GLC prácticamente arrojan los mismos resultados.

Por otro lado, el comportamiento de los modelos 2GL y 2GLC discrepa de los modelos de energía y Shivakumar cuando el espesor de las muestras tiende a ser más pequeño e incluso pareciera concordar aceptablemente con los puntos experimentales. Pero esto último, solo evidencia los fallos que producen los conceptos de linealización utilizados (ver capítulo 2).

En las tablas 5.1.5 a 5.1.9 se presentan los resultados teóricos y experimentales de las pruebas de impacto.

En cada tabla se proporciona el valor promedio (calculado con tres muestras del mismo espesor) de los parámetros: $x_{2\max}$, F_{\max} y t_c ; representan un valor promedio calculado por cada tres muestras del mismo espesor.

Para las muestras de cinco capas (tabla 5.1.9), el valor promedio de dichos parámetros se calculó tomando solo dos muestras.

Para todos los cálculos teóricos se consideró una velocidad inicial de impacto promedio igual a 0.213 m/s.

Tabla 5.1.5 Resultados teóricos y experimentales promedio de las muestras FV-1.1, FV-1.2 y FV-1.3..

Modelo	2GL	2GLC	Energía	Shivakumar	Experimento
$x_{2\max}$,m	0.00176502	0.0017246	0.0023954	0.0024165	0.006797
F_{\max} ,N	112.959	113.577	153.303	157.23	126.619
t_c ,s	0.0268	0.0266	-	0.0305	0.0623

Nota: $x_{2\max}$ =desplazamiento máximo central del plato, F_{\max} =fuerza máxima de impacto y t_c =tiempo de contacto

Tabla 5.1.6 Resultados teóricos y experimentales promedio de las muestras FV-2.1 , FV-2.2 y FV-2.3.

Modelo	2GL	2GLC	Energía	Shivakumar	Experimento
$x_{2\max}$,m	0.00149854	0.00150881	0.00186913	0.0018899	0.0046026
F_{\max} ,N	131.989	132.893	164.63	169.15	122.467
t_c ,s	0.0229	0.0227	-	0.0251	0.0608

Tabla 5.1.7 Resultados teóricos y experimentales promedio de las muestras FV-3.1 , FV-3.2 y FV-3.3.

Modelo	2GL	2GLC	Energía	Shivakumar	Experimento
$x_{2\max}$,m	0.00125197	0.00126291	0.0014103	0.0014301	0.003771
F_{\max} ,N	155.978	157.341	175.705	180.29	161.017
t_c ,s	0.0194	0.0192	-	0.0202	0.0383

Tabla 5.1.8 Resultados teóricos y experimentales promedio de las muestras FV-4.1 , FV-4.2 y FV-4.3.

Modelo	2GL	2GLC	Energía	Shivakumar	Experimento
$x_{2\max}$,m	0.000986275	0.000993783	0.0010431	0.001061	0.0030565
F_{\max} ,N	194.723	196.205	205.941	210.9	170.506
t_c ,s	0.0155	0.0154	-	0.0156	0.0332

Tabla 5.1.9 Resultados teóricos y experimentales promedio de las muestras FV-5.1 y FV-5.2.

Modelo	2GL	2GLC	Energía	Shivakumar	Experimento
$x_{2\max}$,m	0.000592124	0.000591652	0.00061301	0.0006256	0.002326
F_{\max} ,N	304.114	303.871	314.842	322	188.595
t_c ,s	0.0099	0.01	-	0.00964	0.0271

5.2 Comparación de los resultados de las pruebas de impacto contra modelos visco-elásticos.

5.2.1 Estudio de la disipación de energía en materiales compuestos laminados aplicando el modelo de Walton [10]:

Se consideró la aplicación del modelo de Walton[10] para cuantificar la disipación de energía debida principalmente a los daños sufridos por las muestras de material compuesto laminado de cinco capas durante el impacto a bajas velocidades.

En este subcapítulo se comparan las soluciones analíticas del modelo de Walton [10] (obtenidas aplicando dos técnicas de perturbación diferentes, ver capítulo 3) contra los resultados experimentales correspondientes a las muestras de material laminado de cinco capas.

Inicialmente la elección de dicho modelo fue motivada por la forma de los ciclos de fuerza vs. desplazamiento obtenidos experimentalmente; cuya área interna representa precisamente la energía disipada durante el fenómeno de impacto.

La figura (5.2.1.a) muestra un ciclo experimental obtenido para la muestra FV-5.2.

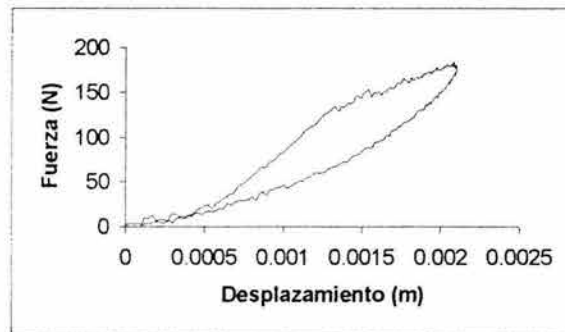


Figura 5.2.1.a Ciclo experimental de la muestra FV-5.2.

Adicionalmente se hicieron algunas suposiciones para la aplicación del modelo de Walton[10] a las pruebas de impacto realizadas sobre las muestras circulares de material compuesto con un espesor de 1.9 mm (muestras FV5.1 a la FV5.6).

- El sistema masa-resorte formado por el proyectil y el plato al momento del impacto, fue tomado con un grado de libertad despreciando la masa del plato. Lo anterior es sugerido por Shivakumar [2] y Abrate [3] cuando la masa del proyectil es mayor que 3.5 veces la masa total del plato.
- El modelo de Walton de un grado de libertad, fue sugerido originalmente para estudiar el impacto entre esferas elásticas; relacionando la fuerza de contacto (F) y el desplazamiento relativo (α) de la siguiente manera: $F = -c|\alpha|\alpha' - k\alpha$ (donde k = constante de rigidez elástica, c = constante de amortiguación y la prima indica derivación con respecto al tiempo t). Para aplicar dicho modelo al problema de impacto entre el proyectil y el plato, las nociones de fuerza de contacto y desplazamiento relativo fueron reemplazadas por la fuerza de resistencia a la flexión del plato (F_f) y el desplazamiento del proyectil (x_1) respectivamente.

- En concordancia con los puntos anteriores, se supuso que el desplazamiento del plato (x_2) sería igual al desplazamiento del proyectil ($\alpha = x_1 - x_2 = 0$).
- Se consideró que mediante el término ($-c|\alpha|\alpha'$) se simularían todas las pérdidas de energía durante el impacto; sin hacer distinción entre los diversos mecanismos de disipación presentes, como el daño sufrido por el material (en forma de agrietamientos de la matriz y fractura de las fibras principalmente) y la propagación de ondas elásticas a través del plato Moon [5].

En la figura (5.2.1.b) se muestra el sistema masa- resorte que representa al proyectil y el plato al momento del impacto.

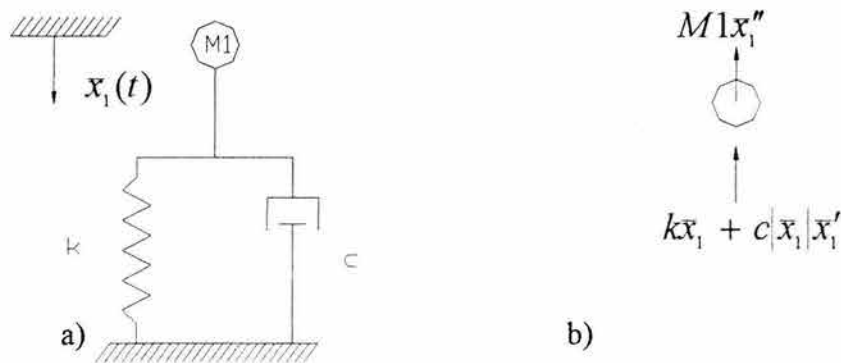


Figura 5.2.1.b a) Modelo masa resorte de un grado de libertad , b) diagrama de cuerpo libre del proyectil.

Las constantes de rigidez (k) y amortiguamiento (c) presentes en el modelo de Walton, se obtuvieron ajustando numéricamente mediante el método de mínimos cuadrados, la relación funcional entre la fuerza y el desplazamiento (expresada adimensionalmente por $F = -\lambda x_1 \frac{dx_1}{dt} - x_1$) a cada uno de los ciclos experimentales.

La figura (5.2.1.c) muestra dos curvas de ajuste con sus respectivas curvas experimentales.

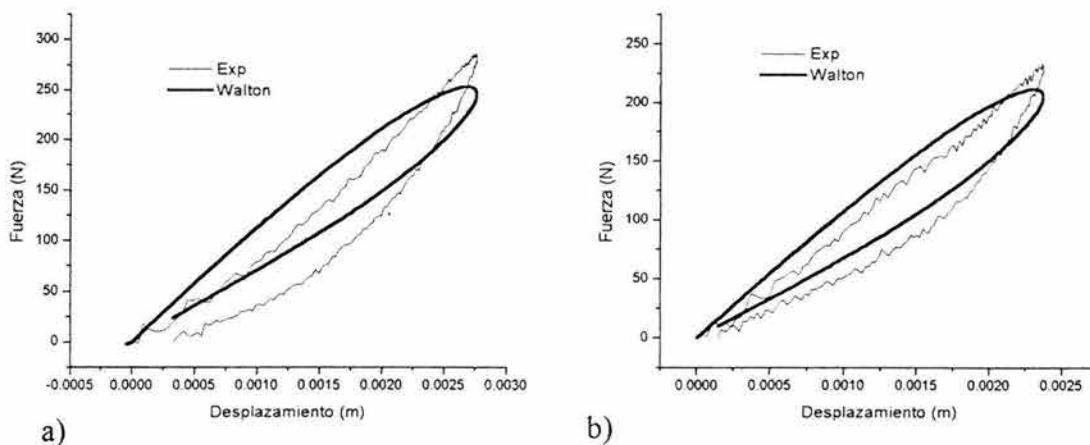


Figura 5.2.1.c Curvas de ajuste obtenidas con Origin[®]: a) muestra FV-5.6, b) muestra FV-5.3.

En la tabla (5.2.1.a) se proporciona el valor de los coeficientes k y c , calculados numéricamente.

Tabla 5.2.1.a Valores de k y c , obtenidos mediante el ajuste numérico.

Coefficientes	κ (N/m)	c (Kg/m.s)	λ
Muestra FV-5.1	78186.902	144091.779	0.4321
Muestra FV-5.2	78421.869	80170.177	0.2397
Muestra FV-5.3	88694.445	74103.914	0.2739
Muestra FV-5.4	111046.505	111015.643	0.3278
Muestra FV-5.5	83578.404	116648.63	0.5625
Muestra FV-5.6	88896.734	61994.838	0.2811

En las figuras 5.2.1.d - 5.2.1.g, se comparan las curvas teóricas y experimentales de desplazamiento vs. tiempo en forma adimensional.

Las curvas teóricas se construyeron a partir de las ecuaciones 3.3.22 y 3.3.42 desarrolladas en el capítulo 3 y únicamente válidas para $0 \leq \lambda \leq 0.333$.

La solución obtenida con el método de Kryloff, Bogoliuboff y Mitropolsky (KBM, ec. 3.3.22) se representa en todos los casos con línea punteada; la solución analítica obtenida con la técnica de Lindsted-Poincaré (L-P, ec. 3.3.42) se representa con línea gruesa y continua.

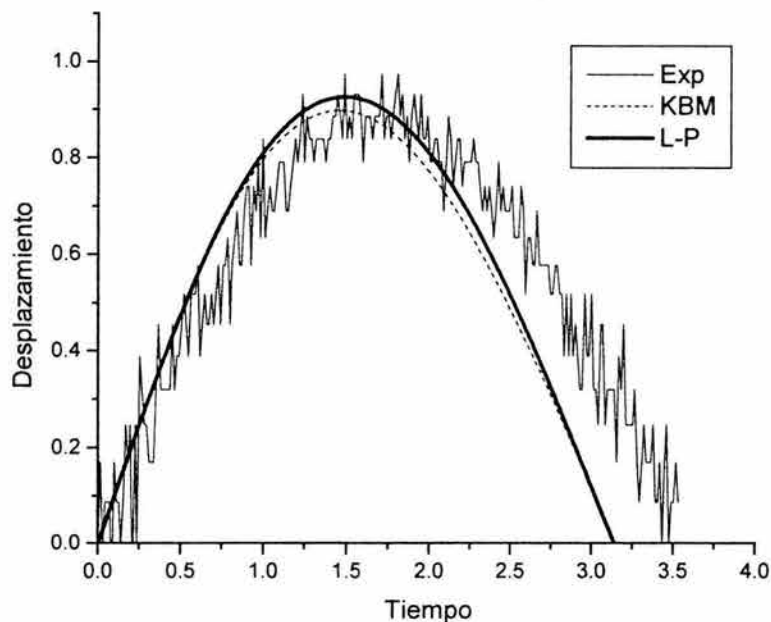


Figura 5.2.1.d Curvas teórico-experimentales de desplazamiento vs. tiempo, correspondientes a la muestra FV-5.3 con $\lambda=0.2739$.

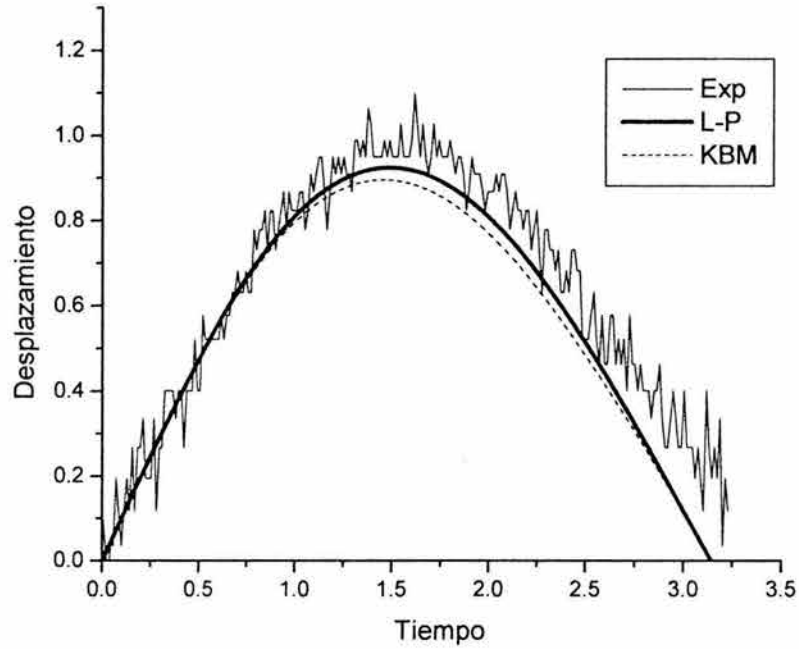


Figura 5.2.1.e Curvas teórico experimentales de desplazamiento vs. tiempo, correspondientes a la muestra FV-5.6 con $\lambda=0.2811$.

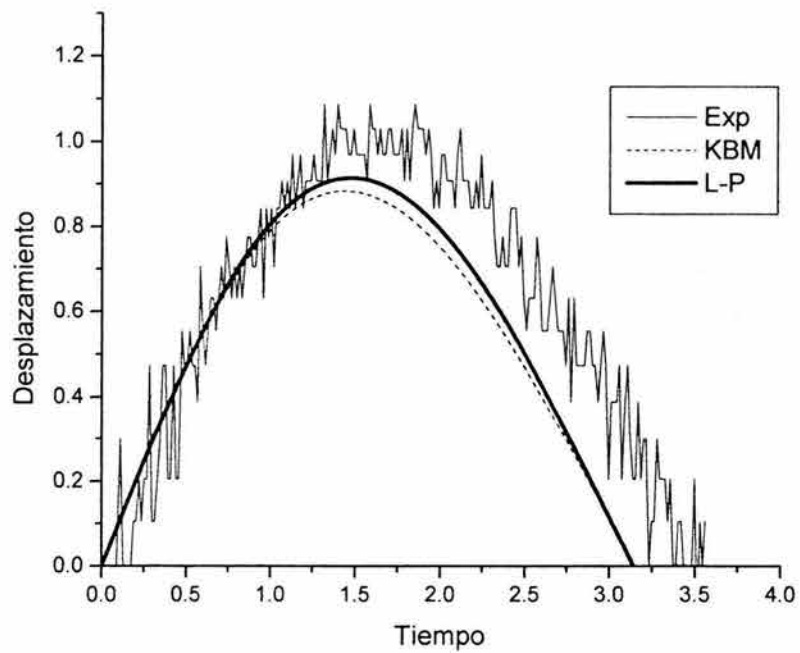


Figura 5.2.1.f Curvas teórico experimentales de desplazamiento vs. tiempo, correspondientes a la muestra FV-5.4 con $\lambda=0.3278$.

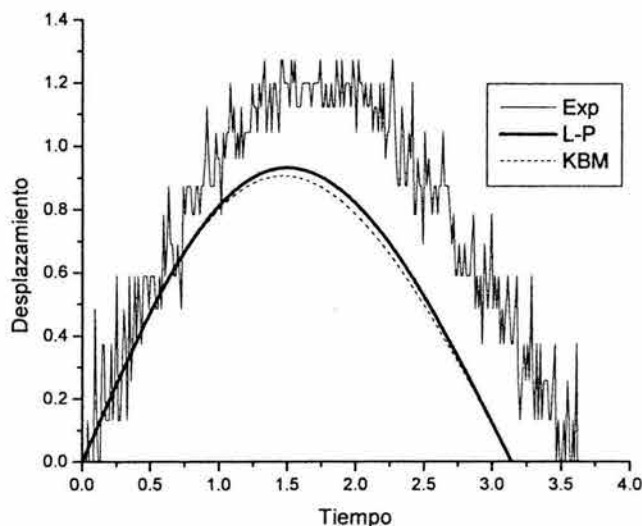


Figura 5.2.1.g Curvas teórico experimentales de desplazamiento vs. tiempo, correspondientes a la muestra FV-5.2 con $\lambda = 0.2397$.

En la tabla 5.2.1.b se resumen los resultados teóricos y experimentales referentes a la energía disipada calculada con la ecuación 3.5.4 y al coeficiente de restitución ec. 3.5.5 ambas correspondientes a la solución analítica desarrollada con la técnica de Lindsted-Poincaré.

Tabla 5.2.1.b Resultados teóricos y experimentales referentes a la energía disipada y el coeficiente de restitución durante el impacto.

Parámetros	α'_0 (m/s)	E_i (J)	E_d (J)		e	
			Exp	L-P* (ec.3.5.4)	Exp	L-P (ec. 3.5.5)
Muestra FV5.2	0.2345	0.1241	0.0577	0.0323	0.7316	0.8601
Muestra FV5.3	0.3279	0.2425	0.0789	0.0704	0.8215	0.8425
Muestra FV5.4	0.3279	0.2425	0.0957	0.0813	0.7783	0.8156
Muestra FV5.6	0.4031	0.3668	0.1167	0.1087	0.8257	0.8388

5.2.1.1 Comentarios:

Se observó que los ciclos de fuerza desplazamiento generados por el modelo de Walton no se ajustan con buena aproximación a los ciclos de histéresis experimentales correspondientes a los laminados de cinco capas; sin embargo, el coeficiente de restitución calculado a partir de ellos parece arrojar buenas predicciones.

Por otro lado, las curvas de desplazamiento vs. tiempo simuladas con el modelo de Walton se ajustan bien con las curvas experimentales en las primeras etapas del impacto hasta poco antes de alcanzar el desplazamiento máximo; después, presentan un desfase con respecto las curvas experimentales.

A pesar de las discrepancias observadas, el modelo de Walton podría utilizarse como una primera aproximación para estimar las pérdidas energía en materiales compuestos durante impactos de baja velocidad.

5.2.2 Estudio de la disipación de energía en materiales compuestos laminados aplicando el modelo de Simon [7]:

En el subcapítulo (5.2.1) se observó que el modelo de Walton [10] no se ajusta tan bien a la forma de los ciclos de histéresis de fuerza vs. desplazamiento correspondientes a las muestras FV-5.1 a la FV-5.6; en cambio, el modelo propuesto por Simon [7] para explicar la dinámica de contacto entre esferas elásticas parece tener mayor capacidad para simular la forma de tales ciclos. Esta capacidad se centra en la posibilidad de tomar en cuenta el efecto no lineal de membrana elevando el desplazamiento a una potencia n (igual a $3/2$ para el modelo de Simon).

La figura (5.2.2.a) muestra el ciclo fuerza –desplazamiento generado por el modelo de Simon.

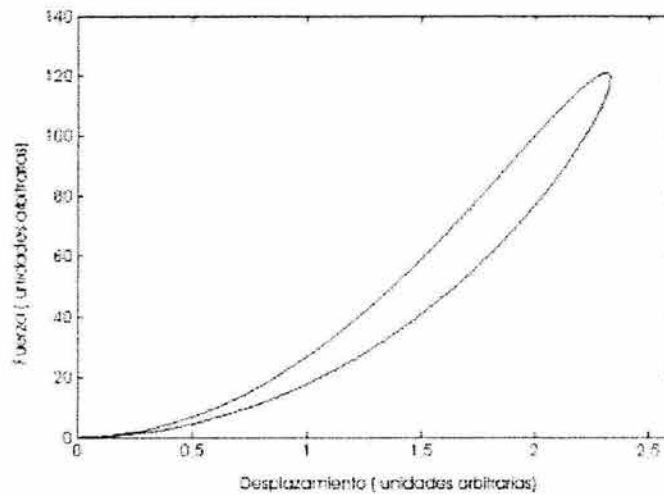


Figura 5.2.2.a Ciclo fuerza vs. desplazamiento generado por el modelo de Simon.

La figura (5.2.2.b) muestra los ciclos experimentales obtenidos para las muestras FV-5.3 y FV-5.4.

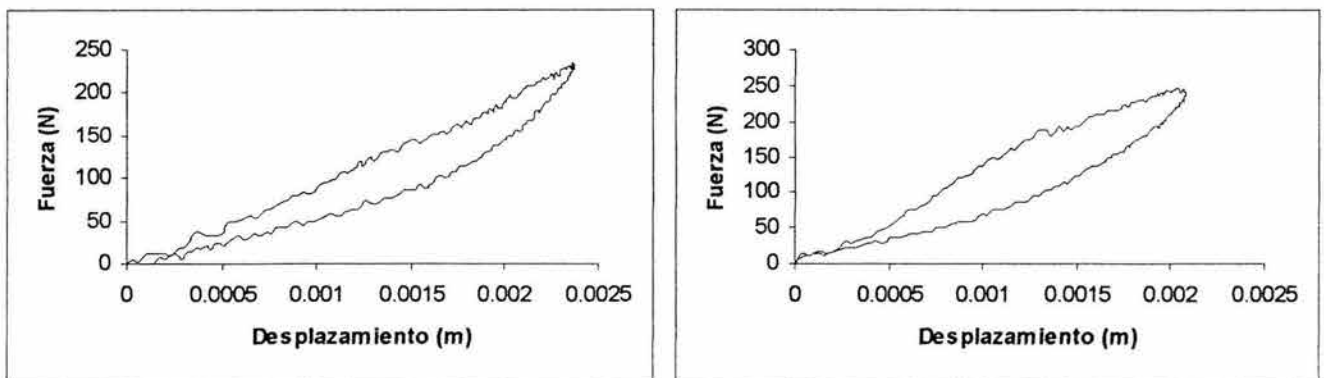


Figura 5.2.2.b Muestras: a) FV-5.3, b) FV-5.4.

Adicionalmente se hicieron algunas suposiciones para la aplicación del modelo de Simon a las pruebas de impacto realizadas sobre las muestras circulares de material compuesto con un espesor de 1.9 mm (muestras FV-5.1 a la FV-5.6).

- El sistema masa-resorte formado por el proyectil y el plato al momento del impacto, fue tomado con un grado de libertad despreciando la masa del plato. Lo anterior es sugerido por Shivakumar [2] y Abrate [3] cuando la masa del proyectil es mayor que 3.5 veces la masa total del plato.
- El modelo de Simon de un grado de libertad, fue sugerido originalmente para estudiar el impacto entre esferas elásticas; relacionando la fuerza de contacto (F) y el desplazamiento relativo ($\bar{\alpha}$) de la siguiente manera: $F = -k|\bar{\alpha}|^{1/2}(\bar{\alpha} + c|\bar{\alpha}|\bar{\alpha}')$ (donde k = constante de rigidez elástica, c = constante de amortiguación y la prima indica derivación con respecto a t). Para aplicar dicho modelo al problema de impacto entre el proyectil y el plato, las nociones de fuerza de contacto y desplazamiento relativo fueron reemplazadas por la fuerza de resistencia a la flexión del plato (F_f) y el desplazamiento del proyectil (x_1) respectivamente.
- En concordancia con los puntos anteriores, se supuso que el desplazamiento del plato (x_2) sería igual al desplazamiento del proyectil ($\bar{\alpha} = x_1 - x_2 = 0$).
- Se consideró que mediante el término ($-kc|\bar{\alpha}|^{3/2}\bar{\alpha}'$) se simularían todas las pérdidas de energía durante el impacto; sin hacer distinción entre los diversos mecanismos de disipación presentes, como el daño sufrido por el material (en forma de agrietamientos de la matriz y fractura de las fibras principalmente) y la propagación de ondas elásticas a través del plato Moon [5].

En la figura (5.2.2.c) se muestra el sistema masa- resorte que representa al proyectil y el plato al momento del impacto.

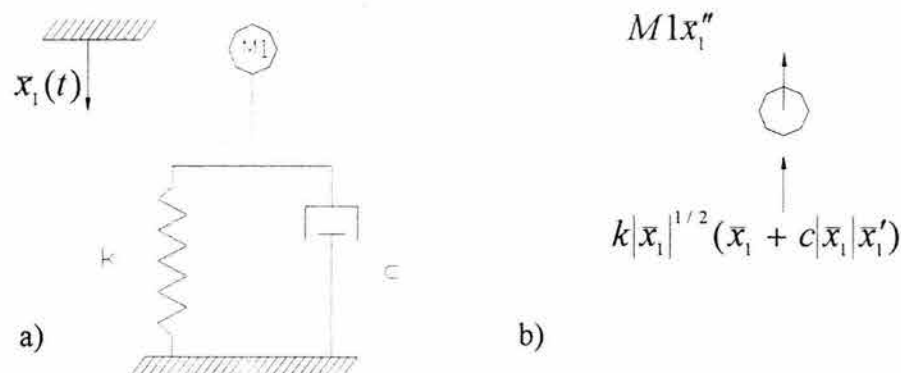


Figura 5.2.2.c a) Modelo masa resorte de un grado de libertad , b) diagrama de cuerpo libre del proyectil.

Realizando la suma de fuerzas en la dirección de movimiento y considerando que $x_1' < 0$; se obtuvo la siguiente ecuación:

$$\ddot{x}_1 = \dot{x}_1 \frac{d\dot{x}_1}{dx_1} = -M1^{-1} k |x_1|^{1/2} (x_1 - c x_1 \dot{x}_1) \quad (5.2.2.a)$$

y cuyas condiciones iniciales son

$$\dot{x}_1(0) = -V_i ; x_1(0) = 0 \quad (5.2.2.b)$$

Para analizar la respuesta dinámica del sistema, resulta útil introducir algunas variables adimensionales como propusiera W. J. Stronge [1].

$$X_1 = x_1 / R_f, \quad \tau = (cR_f)^{-1} t, \quad Z_1 = dX_1 / d\tau = \dot{x}_1 \quad (5.2.2.c)$$

donde

X_1 = Desplazamiento adimensional del proyectil.

Z_1 = Velocidad adimensional del proyectil.

τ = Tiempo adimensional.

R_f = Radio de la punta esférica del impactor.

Con estas variables, la respuesta del sistema depende de un solo parámetro adimensional ζ que representa la pérdida de energía. La ecuación diferencial ordinaria para el desplazamiento del proyectil puede ser expresada en forma adimensional como:

$$Z_1 \frac{dZ_1}{dX_1} = \zeta |X_1|^{3/2} (1 - Z_1) \quad (5.2.2.d)$$

donde

$$\zeta = \frac{kc^2 R_f^{5/2}}{M1} \quad (5.2.2.e)$$

Después de integrar y aplicar las condiciones iniciales $X_1(0) = 0$ y $Z_0 \equiv Z_1(0) < 0$, la velocidad adimensional del proyectil es:

$$Z_1 - Z_0 + \ln \frac{1 - Z_1}{1 - Z_0} = \frac{2}{5} \zeta X_1^{5/2} \quad (5.2.2.f)$$

El desplazamiento del proyectil a cualquier velocidad adimensional, queda expresado por:

$$X_1 = -\left\{ \frac{5}{2\zeta} \left[Z_1 - Z_0 + \ln \frac{1 - Z_1}{1 - Z_0} \right] \right\}^{2/5} \quad (5.2.2.g)$$

La expresión para calcular la fuerza adimensional es:

$$F / kR_I^{3/2} = |X_1|^{3/2} (1 - Z) \quad (5.2.2.h)$$

La figura (5.2.2.d) muestra la fuerza de impacto como una función del desplazamiento. Lo fundamental en este caso es observar cómo un aumento en la velocidad inicial de impacto implica un aumento en el tamaño del ciclo, lo que se traduce en una mayor disipación de energía.

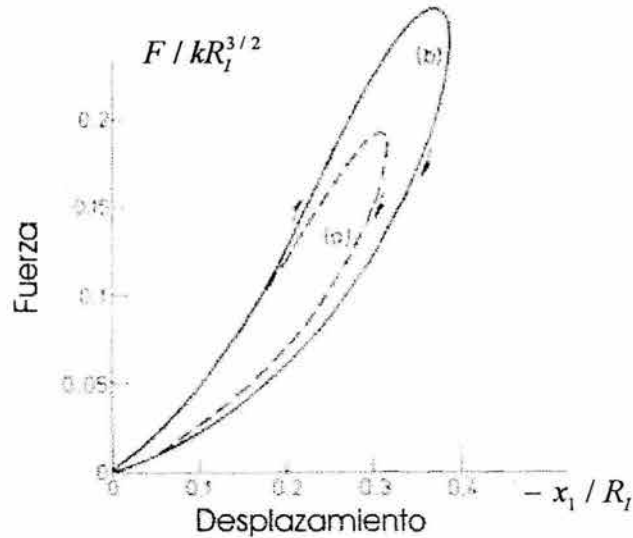


Figura 5.2.2.d Curva fuerza-desplazamiento del modelo viscoelástico no lineal:

a) $Z_0 = -0.38, \zeta = 2.5$ (línea continua) y b) $Z_0 = -0.5, \zeta = 2.5$ (línea punteada).

La velocidad de rebote (Z_f) o el coeficiente de restitución ($e_* = -Z_f / Z_0$), pueden ser obtenidos a partir de la ecuación (5.2.2.g) tomando en cuenta que $X_1 = 0$ cuando la fuerza de impacto es cero. Por lo tanto la velocidad de separación (Z_f) es una raíz de la ecuación :

$$Z_f - Z_0 = -\ln \left(\frac{1 - Z_f}{1 - Z_0} \right), \quad 0 \leq Z_f \leq -Z_0 \quad (5.2.2.i)$$

La figura (5.2.2.e) muestra la variación del coeficiente de restitución con respecto a la velocidad inicial de impacto.

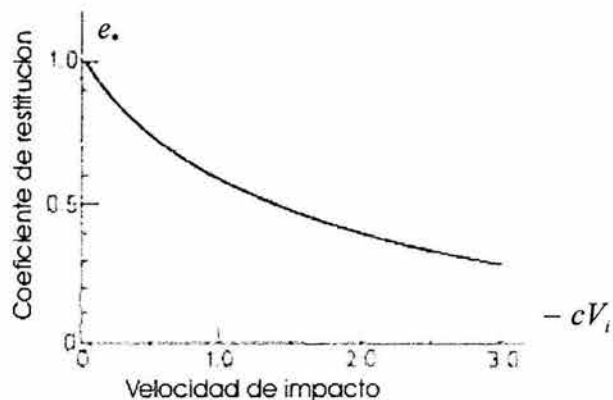


Figura 5.2.2.e El coeficiente de restitución calculado con el modelo de Simon, disminuye conforme la velocidad de impacto aumenta.

Chatterjee [8] ha identificado una aproximación muy cercana a esta curva:

$$e. \approx (-Z_0 + e^{0.4Z_0})^{-1} \quad (5.2.2.j)$$

Para altas velocidades de impacto ($Z_0 \ll -1$) el coeficiente de restitución es inversamente proporcional a la velocidad de impacto ($e. \sim -Z_0^{-1}$).

Para realizar la simulación de los experimentos, era necesario estimar el valor de los coeficientes de rigidez (k) y amortiguamiento (c). Lo anterior se logró ajustando numéricamente (mediante el paquete Origin[®] que implementa el método de mínimos cuadrados) la relación funcional entre la fuerza y el desplazamiento sugerida por Simon ($F = -k|\bar{x}_1|^{1/2}(\bar{x}_1 + c|\bar{x}_1|\bar{x}_1')$), a cada uno de los ciclos experimentales. Este procedimiento numérico fue similar al utilizado por R.H. Sues [6], al estudiar el comportamiento dinámico de estructuras de concreto armado.

La figura (5.2.2.f) muestra dos curvas de ajuste con sus respectivas curvas experimentales.

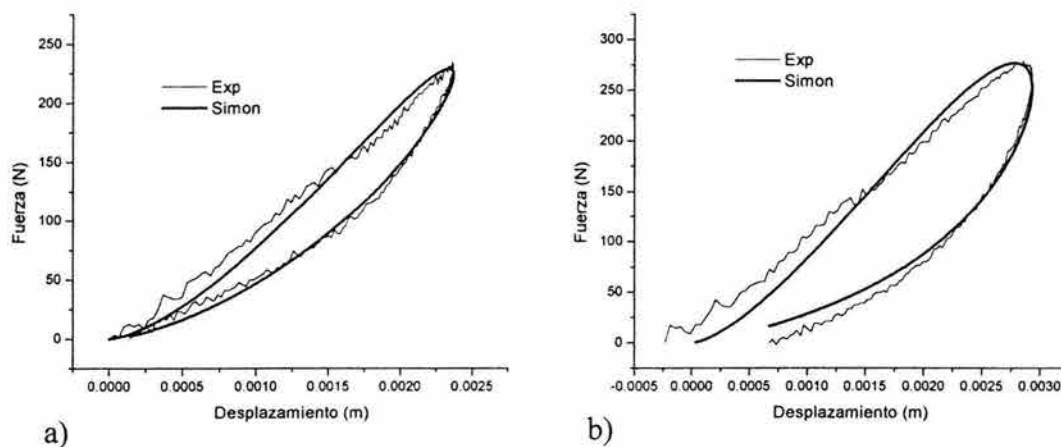


Figura 5.2.2.f Curvas de ajuste obtenidas con Origin[®]: a) muestra FV5.3, b) muestra FV5.5.

En la tabla (5.2.2.a) se proporciona el valor de los coeficientes k y c ; calculados numéricamente.

Tabla 5.2.2.a Valores de k y c , obtenidos mediante el ajuste numérico.

Coeficientes	κ ($\text{N m}^{-3/2}$)	c (s/m)
Muestra FV5.1	1838779	1.987
Muestra FV5.2	1856847	1.109
Muestra FV5.3	1988902	0.887
Muestra FV5.4	2654202	1.201
Muestra FV5.5	1701228	1.536
Muestra FV5.6	1855905	0.749
Coeficientes promedio	1982644	1.245

La figura (5.2.2.g) muestra la relación entre el coeficiente de amortiguamiento y la velocidad inicial de impacto. La línea continua representa al coeficiente c como una constante, cuyo valor promedio es igual a 1.245 (s/m). Un ajuste menos burdo sobre los datos experimentales esta representado por la línea recta discontinua, cuya pendiente sugiere que el coeficiente de amortiguamiento disminuye conforme la velocidad inicial de impacto aumenta.

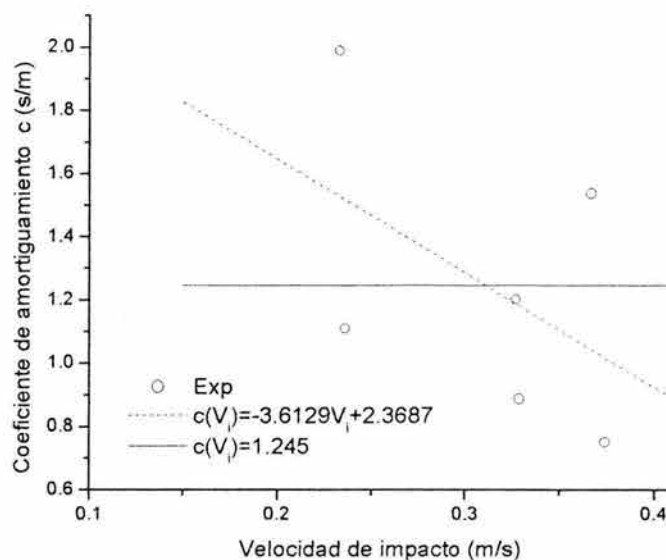


Figura 5.2.2.g Coeficiente de amortiguamiento vs. velocidad inicial de impacto.

La figura (5.2.2.h) muestra la relación entre el coeficiente de rigidez y la velocidad inicial de impacto. La pequeña pendiente de la línea discontinua, dio pie a considerar al coeficiente de rigidez como una constante promedio (representada por la línea continua). La poca o prácticamente nula dependencia de la rigidez de flexión (de materiales compuestos unidireccionales) con respecto a la velocidad de impacto, ha sido reportada por otros investigadores como D. Liu [9] utilizando incluso rangos de velocidad más amplios que los empleados en este trabajo.

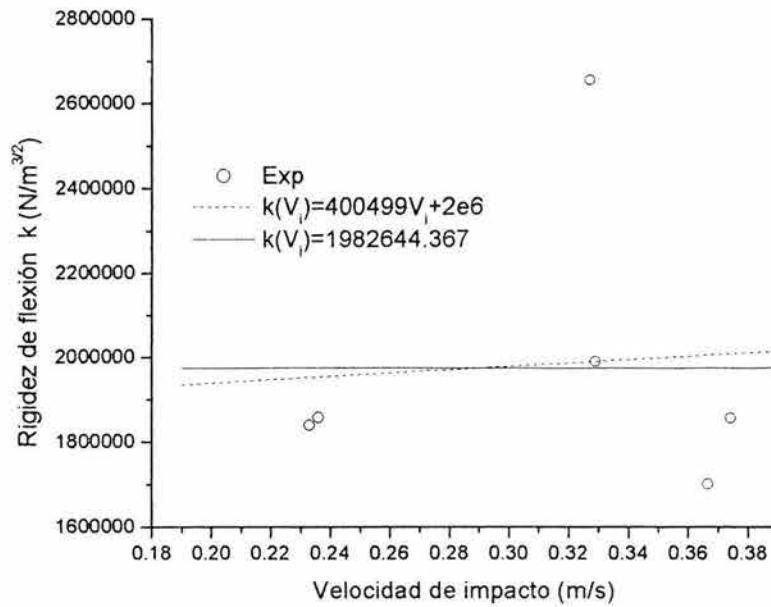


Figura 5.2.2.h Coeficiente de rigidez vs. velocidad inicial de impacto.

El modelo de Simon representado por la ecuación (5.2.2.a), fue resuelto con SIMULINK de MATLAB[®] utilizando el método numérico de Adams. Las tablas 5.2.2.b y 5.2.2.c, compara los resultados experimentales y teóricos de algunos parámetros de interés como: el tiempo de contacto (t_c), la fuerza máxima de impacto (F_{\max}) y el desplazamiento del impactor ($x_{1\max}$).

Tabla 5.2.2.b Resultados teóricos y experimentales.

Parámetros	t_c (s)						F_{\max} (N)					
	Exp	Simon	2GLC	2GL	Ener	Shiva	Exp	Simon	2GLC	2GL	Ener	Shiva
Muestras FV-5.1 y FV-5.2	0.0271	0.0244	0.01	0.0099	/	0.00964	188.595	150.5	335.503	339.076	346.874	356.65
Muestras FV-5.3 y FV-5.4	0.02275	0.0229	0.0098	0.0096	/	0.00945	240.1915	224	476.58	485.618	514.945	515
Muestras FV-5.5 y FV-5.6	0.02345	0.0219	0.0096	0.0094	/	0.00932	282.8925	287.8	593.122	610.513	641.657	652

Tabla 5.2.2.c Resultados teóricos y experimentales.

Parámetros	$x_{1\max}$ (m)					
	Exp	Simon	2GLC	2GL	Ener	Shiva
Muestras FV-5.1 y FV-5.2	0.002326	0.001744	0.0006485	0.0006514	0.0006705	0.0006878
Muestras FV-5.3 y FV-5.4	0.0024495	0.0022652	0.0008816	0.0008983	0.00095264	0.000953
Muestras FV-5.5 y FV-5.6	0.003192	0.0026825	0.0010574	0.0010884	0.00114401	0.001158

Nota: Los valores experimentales de cada parámetro son el promedio de dos mediciones. El parámetro ($x_{1\max}$) que representa el desplazamiento máximo del proyectil (impactor), se consideró equivalente al desplazamiento máximo del plato ($x_{2\max}$).

En la figura (5.2.2.i), se compara la curva experimental de fuerza vs. tiempo con su correspondiente curva teórica calculada con el modelo de Simon. El modelo predice con gran fidelidad la primera etapa de carga hasta alcanzar la fuerza máxima, después se observa un desfase entre las curvas. La figura (5.2.2.j) muestra las curvas teórica y experimental del desplazamiento del proyectil contra tiempo. También en este caso el modelo logra predecir con buena aproximación la primer fase del desplazamiento hasta llegar a su máximo valor; después se observa un ligero desfase entre las curvas.

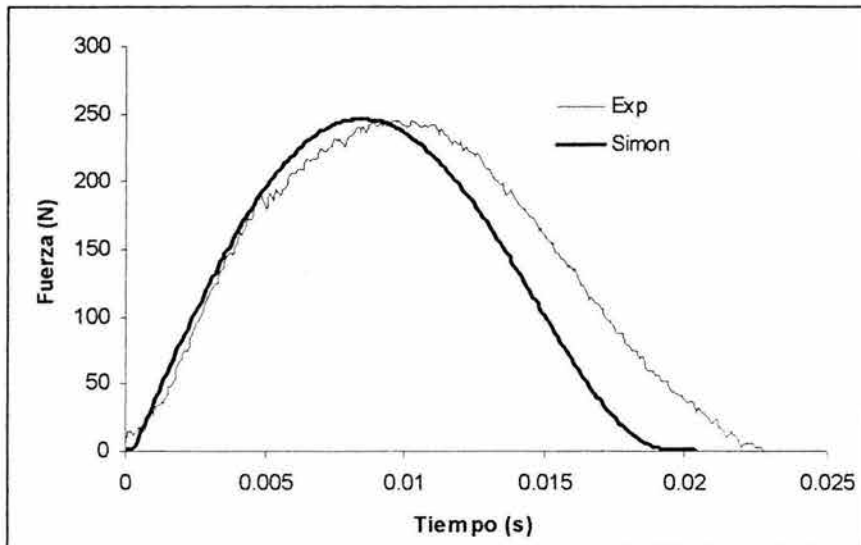


Figura 5.2.2.i Fuerza de impacto vs. tiempo; la curva experimental fue registrada al impactar la muestra FV-5.4 , la curva teórica se construyó utilizando $c = 1.201$ (s/m) y $k = 2654202.332$ (N/m^{3/2}).

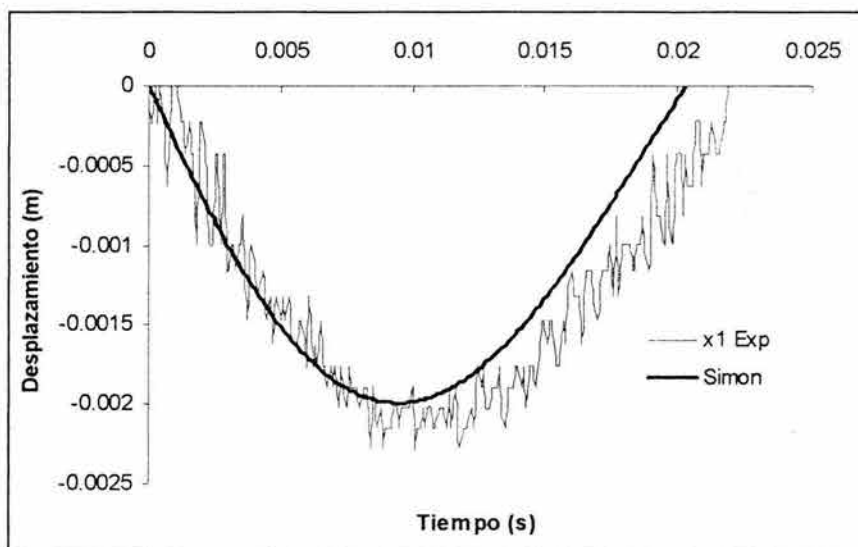


Figura 5.2.2.j Desplazamiento del proyectil vs. tiempo; la curva experimental se obtuvo con la muestra FV-5.4 , la curva teórica se construyó utilizando $c = 1.201$ (s/m) y $k = 2654202.332$ (N/m^{3/2}).

Los datos teóricos y experimentales contenidos en las tablas 5.2.2.b y 5.2.2.c fueron graficados en las figuras 5.2.2.k, 5.2.2.l y 5.2.2.m.

En las figuras 5.2.2.k y 5.2.2.l se observa como el modelo de Simon se ajusta con buena aproximación a los datos experimentales.

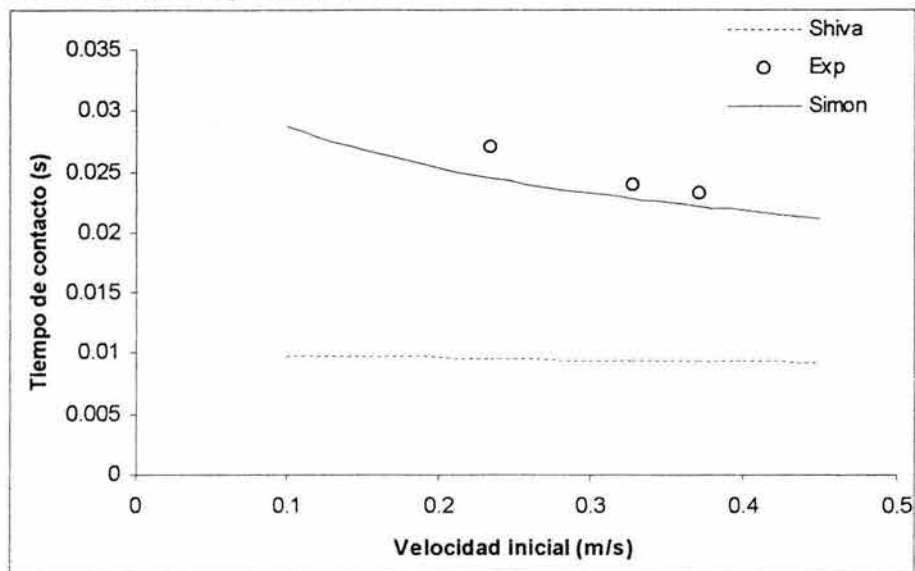


Figura 5.2.2.k Tiempo de contacto vs. velocidad inicial de impacto.

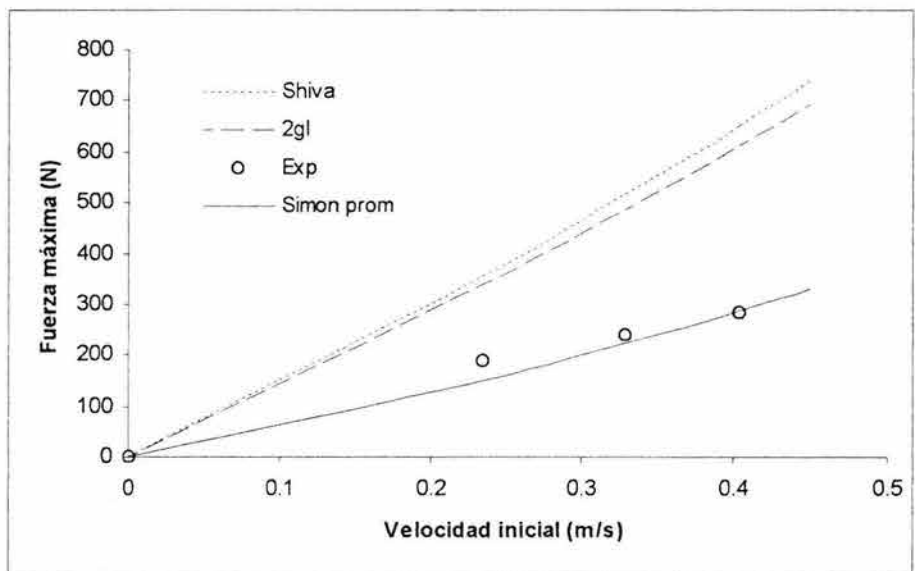


Figura 5.2.2.l Fuerza máxima de impacto vs. velocidad inicial de impacto.

En la figura (5.2.2.m) se observa que el modelo subestima los valores experimentales del desplazamiento máximo del impactor. Esto probablemente se debe a la consideración inicial que establece una igualdad entre la deformación máxima del plato y la deformación máxima proyectil ($x_{1\max} = x_{2\max}$). Si se lograra corregir el modelo considerando el fenómeno de indentación, se obtendría un aumento en el valor teórico del desplazamiento máximo del proyectil ($x_{1\max} = \alpha + x_{2\max}$).

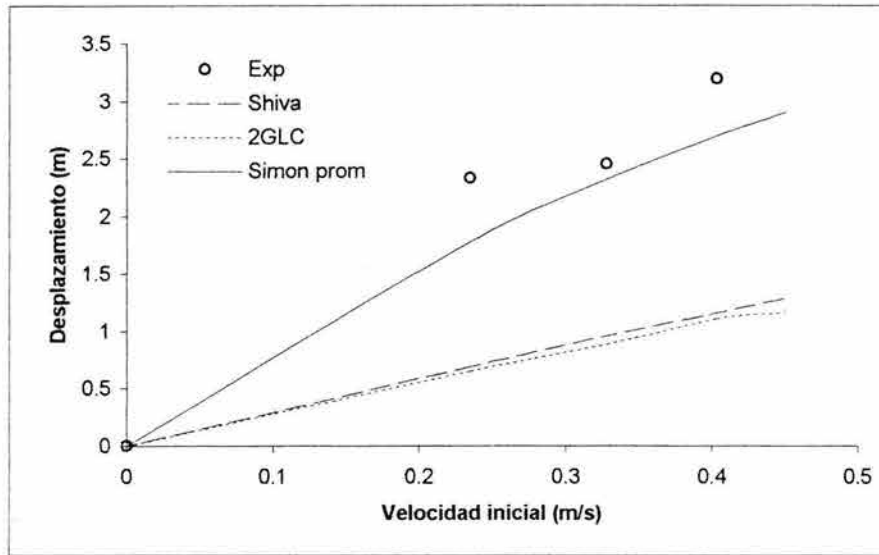


Figura 5.2.2.m Desplazamiento del proyectil vs. velocidad inicial de impacto.

Para estudiar la forma en que los materiales de prueba disipan la energía de impacto, se construyó una grafica similar a la figura (5.2.2.n). Esta figura fue bautizada por D. Liu [9] como “perfil total de energía”. Cuando la energía disipada por el material es similar a la energía inicial de impacto, se alcanza el umbral de penetración donde el impactor no rebota quedando prácticamente pegado al plato. Mientras la penetración avanza (durante el intervalo de energías similares), el impactor se introducirá en el material venciendo la fricción hasta que es perforado (umbral de perforación). Rebasado el límite de perforación; por más que se aumente la energía de impacto, la energía disipada por el material se mantendrá constante.

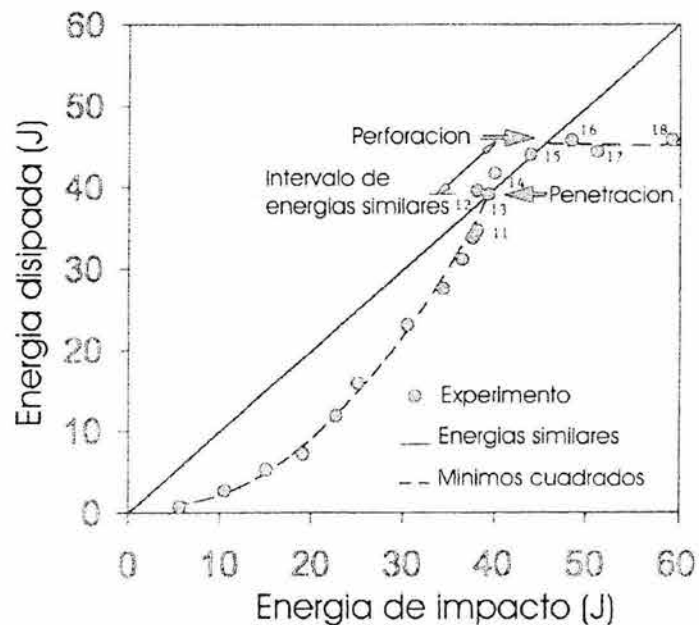


Figura 5.2.2.n Perfil total de energía de muestras rectangulares laminadas; D. Liu [9].

En la figura (5.2.2.ñ), se graficó un perfil de energía parcial correspondiente a las muestras FV-5.1 a la FV-5.6. El perfil obtenido solo fue parcial; porque las muestras sometidas a prueba presentaron daños en forma de agrietamiento de la matriz que no fueron lo suficientemente severos para alcanzar los umbrales de penetración y perforación. La curva teórica representada con línea continua, subestima los valores experimentales de la energía disipada (E_d) posiblemente por que el modelo de Simon no toma en cuenta la disipación de energía producto del fenómeno de indentación.

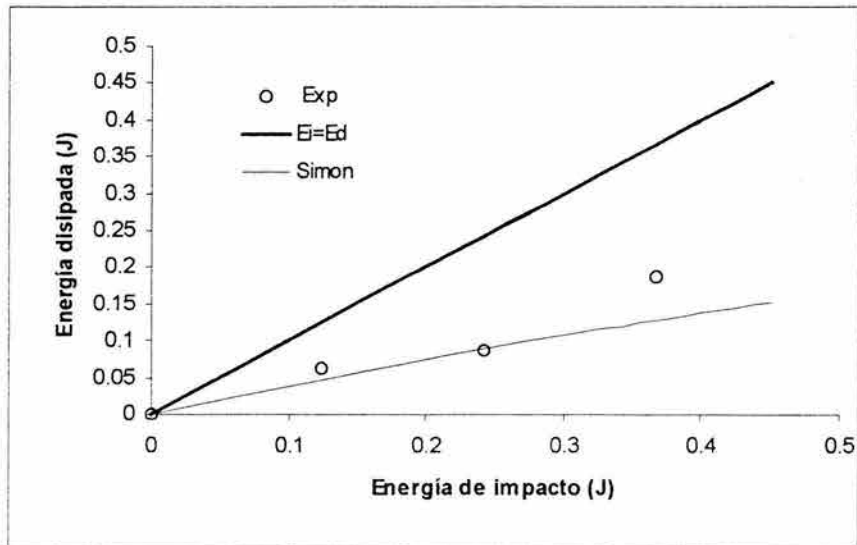


Figura 5.2.2.ñ Perfil parcial de energía de las muestras FV-5.1 a la FV-5.6.

La tabla (5.2.2.d), contiene los resultados teóricos de las energías de impacto (E_i) y disipación E_d .

Tabla 5.2.2.d Resultados teóricos y experimentales.

Parámetros	V_i (m/s)	E_i (J)	E_d (J)	
Modelos	Exp	Exp	Exp	Simon
Muestras FV-5.1 y FV-5.2	0.2345	0.1241	0.06371	0.0432
Muestras FV-5.3 y FV-5.4	0.3279	0.2425	0.08734	0.0898
Muestras FV-5.5 y FV-5.6	0.4031	0.3668	0.18689	0.1307

5.2.2.1 Comentarios:

El modelo de Simon propuesto originalmente para estudiar el contacto entre esferas elásticas, puede ser aplicado exitosamente para estudiar la dinámica del impacto entre platos de material compuesto laminado y proyectiles esféricos. Tal modelo, predijo con aceptable aproximación la fuerza máxima y el tiempo de contacto registrados en las pruebas de impacto.

Se observó cierta discrepancia entre el modelo y los datos experimentales correspondientes al desplazamiento del proyectil. Se podrían realizar correcciones al modelo, considerando la indentación sufrida por el material durante el impacto. Una manera de hacerlo, sería realizando pruebas de indentación estática y/o dinámica para estudiar la forma en que ésta se desarrolla.

Otro fenómeno de disipación de energía que el modelo de Simon no considera, es la propagación de ondas elásticas a través del material.

El método numérico que se utilizó en este trabajo para calcular los coeficientes k y c , podría ser reemplazado por métodos experimentales y/o teóricos.

Experimentalmente, sería posible calcular el coeficiente de amortiguación a partir de la figura (5.2.2.e) con las mediciones de la velocidad inicial y la velocidad de rebote durante el impacto; tal como sugiere W. J. Stronge [1].

El coeficiente de rigidez, podría ser calculado a partir de una gráfica “fuerza de flexión vs. desplazamiento del plato”. Los datos de dicha gráfica serían obtenidos al someter cada plato, con las dimensiones y condiciones de frontera requeridas, a una carga concentrada y casi-estática en su centro.

Si el método experimental antes descrito resultase confiable, no sería necesario utilizar sensores de fuerza durante las pruebas de impacto; sólo bastaría con medir el desplazamiento o la velocidad del plato a lo largo del fenómeno.

Para construir una expresión analítica que permita calcular el coeficiente de amortiguación, se tendría que tomar en cuenta la fuerte dependencia que éste presentó con respecto a la velocidad inicial de impacto (ver figura 5.2.2.g). Resulta necesario realizar más pruebas con diversos materiales y rangos de velocidad que permitan establecer con mayor precisión dicha relación funcional.

También habría que tomar en cuenta que el coeficiente de amortiguación depende de ciertos mecanismos de disipación de energía como el tipo de daño sufrido por el material y la propagación de ondas elásticas entre otros.

En lo que respecta al coeficiente de rigidez; no parece depender de la velocidad inicial de impacto, pero será función de la geometría, las condiciones de frontera y el material de las muestras.

5.2.2.2 Referencias:

- [1] W.J. Stronge, “IMPACT MECHANICS”, pp.91-93, Cambridge University Press,(2000) USA.
- [2] Shivakumar K. N. ,Elber W.,Illg W. “Prediction of Impact Force and Duration Due to Low-Velocity Impact on Circular Composite Laminates”, Journal of Applied Mechanics, 52 (1985) 674-680.
- [3] Serge Abrate, “Localized impact on sandwich structures with laminated facings”, Applied Mech Rev, Vol.50,no.2 (1997) 69-82.
- [4] J.C. Gong and B.V. Sankar, “Impact properties of three-Dimensional Braided Graphite/Epoxy Composites”, Journal of COMPOSITE MATERIALS, Vol.25 (1991) 715-731.
- [5] F.C. Moon, “One-Dimensional Transient Waves in Anisotropic Plates”, Journal of Applied Mechanics,(1973) 485-490.
- [6] R.H. Sues, S. T. Mau and Y.K. Wen, “Sistems Identification of Degrading Hysteretic Restoring Forces”, Journal of Engineering Mechanics ASCE, Vol.114,No.5 (1988) 833-845.

- [7] Simon, R. "Development of a mathematical tool for evaluating golf club performance", ASME Design Engineering Congress, New York, (1967).
- [8] Chatterjee, A. "Rigid body collisions: some general considerations, new collision laws and some experimental data", PhD Dissertation, Cornell Univ., Ithaca, NY, (1997).
- [9] Dahsin Liu, Basavaraju B. Raju and Xinglai Dang, "Impact Perforation Resistance of Laminated and Assembled Composite Plates", International Journal of Impact Engineering, 24, (2000) 733-746.
- [10] O. R. Walton, "Granular Solids Flow Project", Rept. UCID-20297-88-1, Lawrence Livermore National Laboratory, (1992).

6. CONCLUSIONES GENERALES.

- Las propiedades del material laminado fibra de vidrio/epóxico, fueron obtenidas aplicando un método numérico-experimental basado en la técnica optoacústica.

El valor experimental de las propiedades mostró buena cercanía con los valores teóricos arrojados por los modelos de Hashin – Rosen [1], regla de las mezclas [2] y las cotas superior e inferior de Hashin – Hill [2].

- Se construyó un modelo lineal para estudiar el fenómeno de impacto a baja velocidad en placas de material compuesto laminado. Se partió del modelo no lineal propuesto por Shivakumar [3], aplicando dos métodos de linealización; uno basado en el concepto de rigidez promedio y el otro en la ley de contacto lineal expuesta por Yigit y Christoforou [4]. El modelo lineal representado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, fue resuelto analíticamente aplicando la transformada de Laplace.

El modelo linealizado resultó válido en el estudio del fenómeno de impacto controlado por las fronteras; dicho de otra forma, en esta clase de impactos las ondas de deformación que viajan a través del material alcanzan las fronteras de la muestra y son reflejadas muchas veces hacia el punto inicial de contacto mientras éste dure. Además, dicho modelo solo resulta válido para estudiar la dinámica de platos que no sufren daños visibles durante el impacto, o cuando su comportamiento puede considerarse elástico.

La ley de contacto lineal, basada en la rigidez promedio arroja buenas predicciones en aquellos casos en los que la mayor parte de la energía de impacto es absorbida en la zona de contacto. En cambio, la ley de contacto lineal sugerida por Yigit y Christoforou [4] no arroja buenas predicciones en tales casos.

- Los modelos propuestos originalmente por Simon [5] y Walton [6] para estudiar la colisión entre esferas elásticas, pueden utilizarse en el análisis de la disipación de energía durante el fenómeno de impacto a baja velocidad entre proyectiles esféricos de acero y platos laminados de material compuesto; siempre y cuando, la energía disipada en la zona de contacto pueda ser considerada nula. Es posible estimar el valor de los parámetros de rigidez (k) y amortiguamiento (c) presentes en dichos modelos, utilizando un ajuste numérico sobre las ciclos experimentales de fuerza-desplazamiento.

El modelo viscoelástico de Walton [6] predijo con buena aproximación el coeficiente de restitución de los platos laminados de cinco capas; sin embargo, los ciclos de fuerza vs. desplazamiento generados teóricamente, no se ajustan con mucha precisión a la forma de los ciclos experimentales. En cambio, el modelo de Simon [5] no solo predijo con razonable aproximación la disipación de energía; también, se ajustó mucho mejor a la forma de los ciclos experimentales de histéresis.

6.1 Aportaciones del trabajo.

Las contribuciones realizadas a lo largo de este trabajo se resumen a continuación:

- Se diseñó conceptualmente un sistema sencillo para medir el desplazamiento central de platos laminados durante cargas de impacto; este dispositivo está basado en la utilización de un extensómetro eléctrico.

- Se implementó un dispositivo basado en la utilización de un sensor magnético de efecto Hall para medir el desplazamiento del proyectil antes y durante el impacto. Este dispositivo es sencillo y económico comparado con otros sistemas comerciales de medición de desplazamiento como: las cámaras fotográficas de alta velocidad y el LVDT.
- Se obtuvo una solución analítica del problema de impacto a partir de un modelo lineal de dos grados de libertad. La validez de dicha solución en el estudio de ciertos platos laminados sometidos a impactos elásticos y casi-elásticos fue determinada por comparación con distintos resultados experimentales.
- Se estableció bajo qué casos de impacto la ley de contacto lineal propuesta por Yigit y Christoforou [4] es válida.
- Se aplicó un modelo de un grado de libertad no lineal de fácil solución numérica, para estudiar la disipación de energía durante la colisión entre un proyectil y un plato laminado de material compuesto. Para que el modelo sea válido, la masa del proyectil debe ser varias veces mayor a la masa del plato.
- Se obtuvieron tres soluciones analíticas aproximadas del modelo de Walton [6]; dos de ellas utilizando los métodos de perturbación propuestos por Krilov-Bogoliubov-Mitropolski [7] y Lindsted-Poincaré [8]; la otra solución se obtuvo aplicando el método de colocación [9].
- Se obtuvo una expresión analítica para calcular el coeficiente de restitución a partir de la solución con el método Lindsted-Poincaré [8].

6.2 Sugerencias para investigaciones futuras.

- El método de ajuste numérico que se utilizó para estimar el valor de los coeficientes de rigidez (k) y amortiguamiento (c) correspondientes a los modelos de Simon [5] y Walton [6]; podría sustituirse por métodos experimentales, métodos teóricos o una combinación de ambos. Experimentalmente sería posible medir el coeficiente k a partir de pruebas de flexión bajo carga casi-estática; el coeficiente c puede ser inferido a partir de las mediciones de las velocidades inicial y final de impacto.

- El modelo de Simon utilizado en este trabajo para estudiar los laminados de cinco capas de espesor podría utilizarse en una versión más general para simular los ciclos de fuerza-desplazamiento de los laminados de menor espesor. Una propuesta sería:

$$M1x_1'' + k|x_1|^n(x_1 - cx_1x_1') = 0$$

donde la potencia “ n ”, variaría en función del espesor de la muestra.

- La aplicación de modelos viscoelásticos no lineales en el análisis de impacto brinda la posibilidad de formular una ley de contacto dinámica, en contraste con la ley elastoplástica de contacto establecida por Tan y Sun [10] a partir de pruebas de indentación casi-estática.

- Resultaría muy útil establecer un modelo de dos grados de libertad tomando en cuenta las leyes de contacto dinámico que básicamente recrearían los ciclos de fuerza-desplazamiento observados experimentalmente en la zona de contacto y globalmente en la estructura.

Básicamente se retoma el modelo de Shivacumar [3] añadiendo un amortiguador no lineal como el del modelo de Walton [6] en la zona de contacto y uno más para considerar los efectos viscosos dentro del material; esto sería:

$$M_1 x_1'' + \lambda n |\alpha|^{3/2} + c_c |\alpha| \alpha' = 0$$

$$M_{ep} x_2'' - \lambda n |\alpha|^{3/2} - c_c |\alpha| \alpha' + c_g |x_2| x_2' + k_m x_2^3 + k_{bs} x_2 = 0$$

Donde:

c_c , c_g ; serían las constantes de amortiguación de la zona de contacto y de la estructura respectivamente.

6.3 Referencias.

- [1] A. E. Bogdanivich and C. N. Pastore, "Mechanics of Textile and Laminated Composites. With Applications Structural Analysis", Chapman & Hall, (1996) London.
- [2] Jean - Marie Berthelot, "Composite Materials-Mechanical Behavior and Structural Analysis", Springer-Verlag, (1999) USA.
- [3] Shivakumar K. N. ,Elber W.,Illg W."Prediction of Impact Force and Duration Due to Low-Velocity Impact on Circular Composite Laminates", Journal of Applied Mechanics, 52 (1985) 674-680.
- [4] T.M. Tan and C. T. Sun "Use of Statistical Indentation Laws in the Impact Analysis of Laminated Composite Plates" , Journal of Applied Mechanics, Vol.52, (1985) 6-12.
- [5] R. Simon, "Development of a Mathematical Tool for Evaluating Golf Club Performance", Presented at ASME Design Engineering Congress, New York, (1967).
- [6] O. R. Walton, "Granular Solids Flow Project",Rept. UCID-20297-88-1, Lawrence Livermore National Laboratory,(1992).
- [7] N. Kryloff and N. Bogoliuboff, "Introduction to nonlinear mechanics" , Princeton University Press , (1943), USA.
- [8] Ali Hasan Nayfeh , "Introduction to Perturbation Techniques", John Wiley & Sons, (1981), USA.
- [9] Louis A. Pipes, "Applied Mathematics for Engineers and Physicists", Mc. Graw Hill, (1970), USA.
- [10] A.S. Yigit and A.P. Christoforou "Impact Dinamics of Composite Beams" , Composite Structures, Vol.32, (1995) 187-195.

Apéndice A
Fórmulas para calcular la rigidez de flexión , de corte , de contacto y de membrana del modelo de Shivakumar.

Todas las expresiones siguientes se aplican en platos circulares anclados en su periferia:

Rigidez de flexión:

$$K_b = \frac{4\pi E_r h^3}{3(1 - \nu_r^2)r^2}$$

Rigidez de corte:

$$K_s = \frac{4\pi G_{zr} h}{3} \left(\frac{E_r}{E_r - 4\nu_{rz} G_{zr}} \right) \left(\frac{1}{4/3 + \log a / 0.5h} \right)$$

Rigidez de membrana:

$$K_m = \frac{(353 - 191\nu_r)\pi E_r h}{648(1 - \nu_r)r^2}$$

Rigidez de contacto "Ley de Hertz":

$$n = \frac{4\sqrt{R_l}}{3\pi(K_1 + K_2)}$$

$$K_1 = \left(\frac{1 - \nu_l^2}{\pi E_l} \right); \quad K_2 = \frac{\sqrt{A_{22}} \left[(\sqrt{A_{11} A_{22}} + G_{zr})^2 - (A_{12} + G_{zr})^2 \right]^{1/2}}{2\pi \sqrt{G_{zr}} (A_{11} A_{22} - A_{12}^2)}$$

$$A_{11} = E_z(1 - \nu_r)\beta; \quad A_{22} = \frac{E_r \beta (1 - \nu_{zr}^2 \delta)}{(1 + \nu_r)}; \quad A_{12} = E_r \nu_{zr} \beta$$

$$\beta = \frac{1}{1 - \nu_r - 2\nu_{zr}^2 \delta}$$

$$\delta = \frac{E_r}{E_z}$$

Donde:

h = espesor del plato

r = radio del plato

R_I = radio de la punta esférica del impactor.

Las constantes: E_r , G_{rz} , ν_r y ν_{rz} son las propiedades promedio del compuesto laminado.

Las constantes E_I y ν_I , son respectivamente los módulos de Young y de Poisson del impactor.

Apéndice B

Diseño conceptual de un sistema para medir el desplazamiento central de placas circulares sometidas a cargas de impacto.

Algunos investigadores como B.V. Sankar [1] y C. T. Sun [2], han medido el desplazamiento (debido a la flexión y a la indentación) central de diversos platos de material compuesto bajo cargas casi-estáticas utilizando distintos arreglos de transformadores (LVDT "linear variable differential transformer"). También es posible estudiar el movimiento del plato usando cámaras de alta velocidad. Sin embargo, los equipos de medición antes mencionados son costosos.

Otra alternativa es la instrumentación de cada plato con varios extensómetros eléctricos tal como lo reportan J.F. Doyle [3] y S.R. Swanson [4].

Con el dispositivo que se propone a continuación, sólo es necesario utilizar un extensómetro eléctrico (pegado a la viga de medición) para medir el desplazamiento de varios platos; y además, su implementación resulta ser muy sencilla. El diseño de este sistema, se basa en la aplicación de la teoría clásica de vigas isotrópicas sometidas a cargas estáticas concentradas.

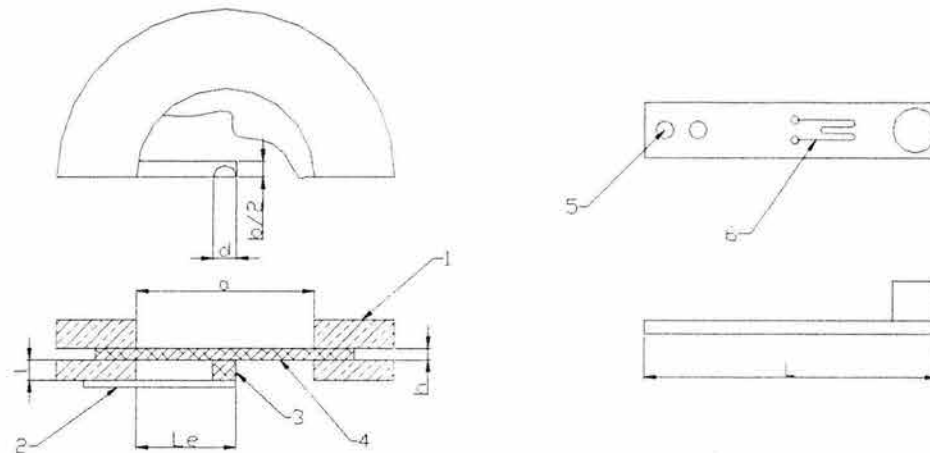


Fig.1B Esquema del sistema de medición. 1) Anillos de sujeción, 2) viga de medición en cantilever, 3) pivote de unión entre el centro del plato y el extremo derecho de la viga, 4) plato circular, 5) agujeros de unión entre el extremo izquierdo de la viga y el anillo inferior de sujeción, 6) extensómetro eléctrico conectado a un puente de Wheatstone y un osciloscopio.

Resulta evidente que la respuesta dinámica del plato se verá afectada al unir el extremo derecho de la viga de medición al centro de éste.

Intuitivamente, resulta atractivo pensar que entre más ligera y menos rígida sea la viga de medición, menor será la perturbación que esta provoque al movimiento del plato. Para estudiar cualitativamente este efecto, se utilizó el modelo masa-resorte propuesto por K.N. Shivakumar [5] con el que estudió la dinámica de platos circulares sometidos a cargas de impacto (de distintos materiales y dimensiones).

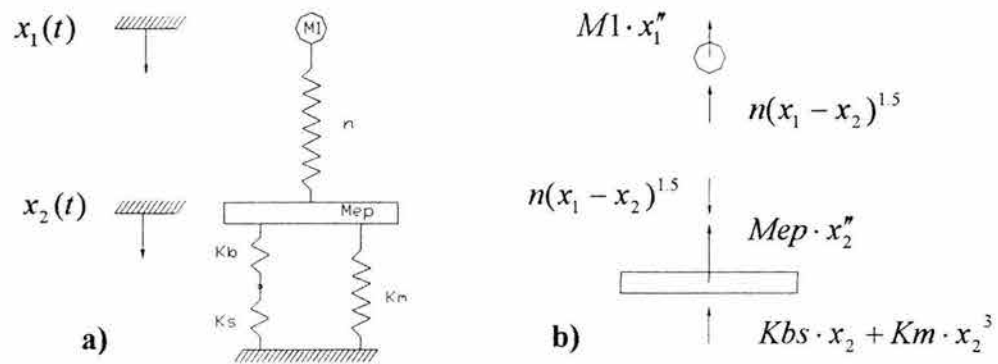


Fig.2B a) Modelo masa-resorte propuesto por Shivakumar ; b) diagrama de cuerpo libre.

A partir del diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 2B , se obtubieron las siguientes ecuaciones de equilibrio al realizar la sumatoria de fuerzas en la dirección “ x ”.

$$M1 \cdot x_1'' + \lambda n |(x_1 - x_2)|^{1.5} = 0 \quad (1B)$$

$$Mep \cdot x_2'' + Kbs \cdot x_2 + Km \cdot x_2^3 - \lambda n |(x_1 - x_2)|^{1.5} = 0 \quad (2B)$$

y

$$\lambda = 1 \quad \text{para } x_1 > x_2$$

$$\lambda = -1 \quad \text{para } x_1 < x_2$$

donde

n = constante del resorte para simular el punto de contacto entre el proyectil y el plato

Kb = constante del resorte para simular el efecto de flexión del plato

Ks = constante del resorte para simular el efecto cortante en el plato

$Kbs = \frac{Kb \cdot Ks}{Kb + Ks}$; Kbs = constante del resorte equivalente para Kb y Ks en serie

Km = constante del resorte para simular el efecto de membrana en el plato

$M1$ = masa del proyectil

Mep = masa efectiva del plato (igual a la cuarta parte de la masa total del plato)

$x_1(t)$ = posición del proyectil en función del tiempo

$x_2(t)$ = posición del plato en función del tiempo

El modelo masa-resorte que se propuso para estudiar el sistema de medición, fue el siguiente:

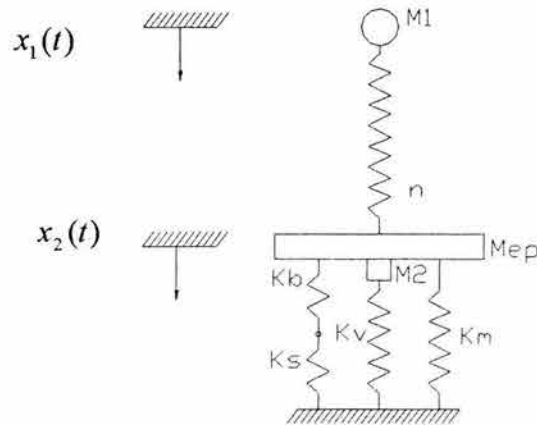


Figura 3B Modelo masa-resorte para estudiar el sistema de medición.

donde

K_v = constante del resorte para simular la flexión de la viga

M_2 = masa del pivote de unión (m_p) + la masa efectiva de la viga (m_{ev})

Vale la pena hacer notar, que el resorte para simular la flexión de la viga se colocó en paralelo con respecto a K_b y K_m por que el diseño propuesto establece que tanto el centro del plato como el pivote y el extremo de la viga habrían de moverse juntos.

Por supuesto, las ecuaciones de equilibrio construidas a partir del modelo propuesto en la figura 3B solo cambiaron con respecto a las obtenidas por Shivakumar en el valor de Mep (sustituido por Ms) y Kbs (sustituido por Kp); esto fue:

$$M_1 \cdot \ddot{x}_1 + \lambda n |x_1 - x_2|^{1.5} = 0 \quad (3B)$$

$$Ms \cdot \ddot{x}_2 + Kp \cdot x_2 + Km \cdot x_2^3 - \lambda n |x_1 - x_2|^{1.5} = 0 \quad (4B)$$

y

$$\lambda = 1 \quad \text{para } x_1 > x_2$$

$$\lambda = -1 \quad \text{para } x_1 < x_2$$

donde

$$Kp = Kbs + Kv$$

$$Ms = M_2 + Mep$$

Diseño de la viga de medición:

Una lámina de material compuesto unidireccional de fibra de vidrio / epóxico resultó ser una buena opción para construir la viga de medición; debido a que este material presentó buena rigidez en flexión (D_{11}) y una baja densidad en contraste con otros materiales que también pudieron utilizarse para este fin (tales como el acero en láminas delgadas). Las dimensiones que se propusieron para construir la viga fueron (ver Fig. 1B):

$$L = 54(\text{mm}) ; L_e = 39.6(\text{mm}) ; b = 10 (\text{mm}) ; t = 0.5 (\text{mm})$$

Donde

L = longitud total de la viga; L_e = longitud efectiva de la viga

b = ancho de la viga; t = espesor de la viga

para el caso de una viga construida con una lámina de material compuesto fibra de vidrio / epóxico se tiene

$$\rho_c = 1561.4 (\text{Kg/m}^3) ; E_{11} = 25.44572(\text{Gpa}) ; \nu_{12} = 0.3 ; \nu_{21} = 0.08819$$

$$m_v = \rho_c \cdot b \cdot L_e \cdot t = 0.000309157(\text{Kg})$$

$$I = \frac{1}{12} \cdot b \cdot t^3 = 1.0416 \times 10^{-13}(\text{m}^4)$$

$$D_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \cdot \frac{t^3}{12} = 0.27226(\text{N}\cdot\text{m})$$

$$K_v = \frac{3 \cdot b \cdot D_{11}}{L_e^3} = 131.528(\text{N/m})$$

$$m_{ev} = 0.23 \cdot m_v = 0.000071106(\text{Kg})$$

donde

ρ_c = densidad del compuesto; m_v = masa de la viga

$E_{11}; \nu_{12}; \nu_{21}$ = propiedades elásticas de la lámina

D_{11} = rigidez de flexión en la dirección de las fibras

I = momento de inercia de la sección transversal

K_v = constante del resorte equivalente de la viga (según ref. [7] y ref. [8])

m_{ev} = masa efectiva de la viga (según ref. [6])

para el caso de una viga construida con una lámina delgada de acero (con las mismas dimensiones que el caso anterior) se tiene

$$\rho_a = 7978.1(\text{Kg/m}^3) ; E = 199.950(\text{Gpa})$$

$$m_v = \rho_a \cdot b \cdot Le \cdot t = 0.00157966(\text{Kg})$$

$$K_v = \frac{3 \cdot E \cdot I}{Le^3} = 1006.139(\text{N/m})$$

$$m_{ev} = 0.23 \cdot m_v = 0.000363322(\text{Kg})$$

donde

ρ_a = densidad del acero

E = módulo de elasticidad del acero

Diseño del pivote de unión:

La función principal de este elemento, fue la de transmitir el movimiento del centro del plato hacia uno de los extremos de la viga de medición. Esta pieza se construyó de aluminio para obtener gran ligereza y resistencia mecánica. Las dimensiones propuestas fueron (ver fig. 1B):

$$d = 3 \text{ (mm)} ; l = 6 \text{ (mm)}$$

donde

d = diámetro del pivote; l = espesor del anillo de sujeción inferior = largo del pivote

$$\rho_{al} = 2768(\text{Kg/m}^3)$$

$$m_p = \rho_{al} \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot l = 0.000117395(\text{Kg})$$

m_p = masa del pivote; ρ_{al} = densidad del aluminio

Calibración:

La calibración del dispositivo se hizo variando la carga estática “P” localizada en el extremo de la viga de medición (ver Fig. 4B).

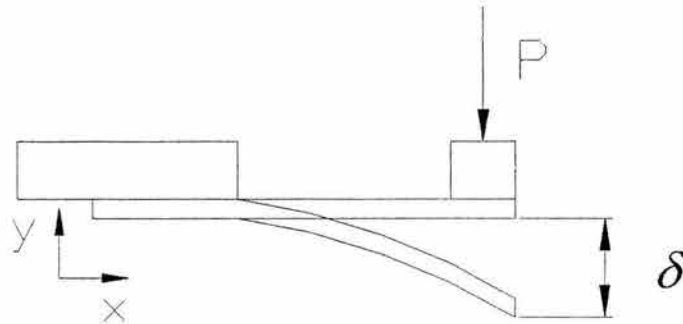


Figura 4B Calibración estática del dispositivo.

Para cada carga “P”, se registró la deformación ε_x (mediante el extensómetro) y se ajustó una curva a los puntos experimentales para establecer una relación funcional $P = f(\varepsilon_x)$.

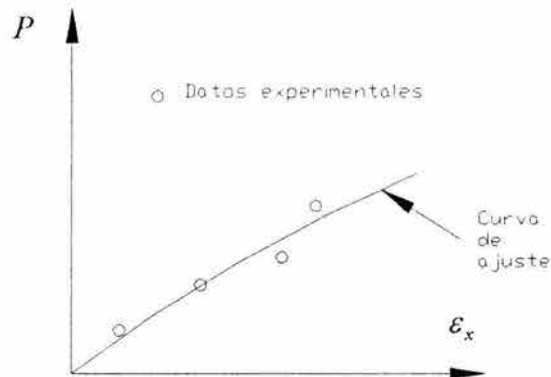


Figura 5B Gráfica de puntos experimentales P vs. ε_x .

Por último, el desplazamiento del extremo derecho de la viga se calculó utilizando las siguientes expresiones:

$$\delta = \frac{P \cdot L e^3}{3 \cdot E \cdot I} \quad (\text{para la viga de acero}) \quad (5B)$$

$$\delta = \frac{P \cdot L e^3}{3 \cdot b \cdot D_{11}} \quad (\text{para la viga de material compuesto}) \quad (6B)$$

La calibración del dispositivo se hizo estáticamente por considerar que a bajas velocidades la respuesta de la viga de medición es predominantemente elástica; o en otras palabras, la magnitud de la deflexión que sufre la viga no depende de la rapidez con que se aplique la carga (solo de la magnitud de ésta).

Cálculo del desplazamiento máximo admisible:

En primer lugar se calculó la deflexión máxima admisible (sin que el material presente daños) del extremo derecho de la viga construida con material compuesto, aplicando el criterio de falla propuesto por Hashin [9] para iniciar el daño en la matriz. En segundo lugar se calculó la deflexión máxima admisible de la viga hecha con acero.

Cabe mencionar, que todas las ecuaciones utilizadas en este apartado son para el caso de vigas “anchas” ; las cuales se caracterizan por presentar un espesor mucho menor al ancho $t \ll b$.

Tanto la curvatura como la deformación en la dirección “x” se calcularon a partir de:

$$\kappa_x = \frac{M_x}{D_{11}} ; \quad \varepsilon_x = z\kappa_x \quad (\text{para la viga de material compuesto}) \quad (7B)$$

donde

M_x = Momento flector máximo

$$M_x = P \cdot Le \quad (8B)$$

$$z = \frac{t}{2} \quad (\text{la mitad del espesor de la lámina}) \quad (9B)$$

La deformación transversal se calculó a partir de:

$$\varepsilon_y = \kappa_y = 0$$

Las deformaciones fueron transformadas en la dirección de las fibras utilizando:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [R] \cdot [T] \cdot [R^{-1}] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 0 \end{Bmatrix}$$

como el material compuesto de la viga fue unidireccional se obtuvo

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10B)$$

los esfuerzos en la lámina se calcularon con

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [Q] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (11B)$$

de las expresiones 10B y 11B se obtuvo

$$\sigma_1 = Q_{11} \cdot \varepsilon_x ; \sigma_2 = Q_{21} \cdot \varepsilon_x ; \tau_{12} = 0 \quad (12B)$$

Sustituyendo 7B , 8B y 9B en 12B se llegó a:

$$\sigma_1 = \frac{Q_{11} \cdot t \cdot P \cdot Le}{2 \cdot D_{11}} \quad (13B)$$

$$\sigma_2 = \frac{Q_{21} \cdot t \cdot P \cdot Le}{2 \cdot D_{11}} \quad (14B)$$

El criterio de falla propuesto por Hashin [9], establece que:

$$F_2 \sigma_2 + F_{22} \sigma_2^2 + F_{66} \tau_{12}^2 = 1 \text{ (para iniciar daño en la matriz)} \quad (15B)$$

donde

$$F_2 = 1/Y_t + 1/Y_c ; F_{22} = -1/Y_t Y_c ; F_{66} = 1/S^2$$

Y_t = resistencia de la lámina en tensión (transversal a las fibras)

Y_c = resistencia de la lámina en compresión (transversal a las fibras)

S = resistencia de la lámina al cortante

Las propiedades del material propuesto fueron:

$$E_{11} = 25.44572(\text{Gpa}) ; E_{22} = 7.48019(\text{Gpa}) ; G_{12} = 4.68809(\text{Gpa}) ; \nu_{12} = 0.3 ;$$

$$\nu_{21} = 0.08819 ; Y_t = 0.0448 (\text{GPa}) ; Y_c = 0.1744 (\text{GPa}) ; S = 0.0448 (\text{GPa})$$

los elementos de la matriz de rigidez resultaron ser

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = 26.137 (\text{GPa}) ; Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = 7.683(\text{GPa}) ; Q_{66} = G_{12} = 4.68809(\text{GPa})$$

$$Q_{21} = \frac{\nu_{12} \cdot E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = 2.305(\text{GPa}) ; Q_{12} = \frac{\nu_{21} \cdot E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = 2.305(\text{GPa})$$

Para calcular la fuerza máxima admisible que la viga puede soportar se resolvió la ecuación 15B tomando en cuenta que se redujo a:

$$F_2 \sigma_2 + F_{22} \sigma_2^2 = 1 \quad (16B)$$

y se obtuvo

$$\sigma_{2,1} = 4.74212 \times 10^7; \sigma_{2,2} = 1.69137 \times 10^8$$

tomando la menor de estas dos raíces; sustituyéndola en 13B y despejando "P" produjo

$$P = \frac{2 \cdot D_{11} \cdot \sigma_{2,1} \cdot b}{Q_{21} \cdot t \cdot Le} = 5.657(\text{N})$$

con esta fuerza se calculó el desplazamiento máximo admisible para la viga de material compuesto que según la ec. 6B resultó ser

$$\delta = \frac{P \cdot Le^3}{3 \cdot b \cdot D_{11}} = 43.009(\text{mm})$$

Para el cálculo de la viga de acero, se utilizó la siguiente ecuación

$$\sigma_{adm} = \frac{M_x \cdot z}{I} \quad (17B)$$

Donde

σ_{adm} = esfuerzo admisible; $\sigma_y = 520(\text{Mpa})$ esfuerzo de fluencia para un acero laminado

$\sigma_u = 860(\text{Mpa})$ esfuerzo último para un acero laminado

F.S.=3 (factor de seguridad propuesto)

De lo anterior resultó

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_u}{F.S.} = 287(\text{MPa}); \text{ y además se cumplió con}$$

$\sigma_{adm} < \sigma_y$ (esfuerzo admisible menor al esfuerzo de fluencia)

Sustituyendo 8B y 9B en 17B; y despejando "P" se llegó a:

$$P = \frac{2 \cdot I \cdot \sigma_{adm}}{Le \cdot t} = 3.0195(\text{N})$$

con esta fuerza se calculó el desplazamiento máximo admisible para la viga de acero que según la ec. 5 resultó ser

$$\delta = \frac{P \cdot Le^3}{3 \cdot E \cdot I} = 3.001(\text{mm})$$

Resultados y análisis de la simulación:

La solución gráfica y numérica del modelo de Shivacumar se obtuvo mediante el paquete Simulink 4.0 de MATLAB. La siguiente tabla contiene el valor teórico (ver ref. 5 para mayor detalle) de las constantes utilizadas por el modelo para dos platos con las mismas dimensiones pero fabricados con distinto material.

Tabla 1B Constantes usadas en la simulación

	Plato de aluminio e Indentor de acero	Plato de material compuesto T300/5208 e Indentor de acero
n (N/m ^{1.5})	$1.057423789 \times 10^{10}$	2.173576477×10^9
Kb (N/m)	7354940.74	7.607776174×10^6
Ks (N/m)	254580148	2.378030751×10^7
Km (N/m ³)	$3.206049241 \times 10^{11}$	$2.614853052584 \times 10^{11}$
Kbs (N/m)	7148419.524	5.763819757×10^6
$M1$ (Kg)	0.229037084	0.229037084
V_i (m/s)	2.54	2.54
Mep (Kg)	0.010045537	0.006577413
a (m)	0.038	0.038
h (m)	0.0032	0.0036

Nota: V_i = velocidad del proyectil antes del impacto

a = radio del plato y h = espesor del plato.

Se estudiaron diez diferentes casos con la intención de entender el efecto que tienen algunos parámetros en la dinámica del plato.

En los casos: **i**, **j**, **b** y **c** se tomaron en cuenta la rigidez y la masa de la viga; así como la masa del pivote. Los casos **d** y **e**, se consideraron ideales por que en ellos no se tomaron en cuenta las masas de la viga y del pivote. Una situación similar ocurrió en los casos **f** y **g**; para los cuales, no se consideró la rigidez de la viga. Por último, vale la pena mencionar que en todos los casos se consideraron la masa y las constantes de rigidez del plato.

Las tablas dos y tres resumen los resultados de la simulación presentando tres parámetros de gran interés que fueron: $x_{2\max}$ = desplazamiento máximo del plato, t_{\max} = tiempo en el que se alcanzó el desplazamiento máximo del plato, t_c = tiempo total de contacto.

Tabla 2B Resultados de la simulación para el plato de aluminio

	a) Plato de aluminio sin viga	b) Plato de aluminio y viga de acero	c) Plato de aluminio y viga de material compuesto	d) Plato de aluminio y viga de acero	e) Plato de aluminio y viga de material compuesto	f) Plato de aluminio y viga de acero	g) Plato de aluminio y viga de material compuesto
M_s (Kg)	0.010045537	0.010526254	0.010234038	0.010045537	0.010045537	0.010526254	0.010234038
M_2 (Kg)	0	0.000480717	0.000188501	0	0	0.000480717	0.000188501
K_v (N/m)	0	1006.139	131.528	1006.139	131.528	0	0
$x_{2\max}$ (m)	4.5136×10^{-4}	4.5025×10^{-4}	4.5099×10^{-4}	4.5133×10^{-4}	4.5135×10^{-4}	4.5029×10^{-4}	4.51×10^{-4}
t_{\max} (s)	3.1198×10^{-4}	3.1835×10^{-4}	3.1471×10^{-4}	3.1214×10^{-4}	3.1239×10^{-4}	3.1839×10^{-4}	3.147×10^{-4}
t_c (s)	5.97×10^{-4}	6.0521×10^{-4}	6.0027×10^{-4}	5.9698×10^{-4}	5.97×10^{-4}	6.0523×10^{-4}	6.0028×10^{-4}

Tabla 3B Resultados de la simulación para el plato de material compuesto

	h) Plato de material compuesto sin viga	i) Plato de material compuesto con viga de acero	j) Plato y viga de material compuesto
M_S (Kg)	0.006577413	0.00705813	0.006765914
M_2 (Kg)	0	0.000480717	0.000188501
K_V (N/m)	0	1006.139	131.528
$x_{2\max}$ (m)	4.5136×10^{-4}	4.5025×10^{-4}	4.5099×10^{-4}
t_{\max} (s)	3.1198×10^{-4}	3.1835×10^{-4}	3.1471×10^{-4}
t_c (s)	5.97×10^{-4}	6.0521×10^{-4}	6.0027×10^{-4}

Comparando los resultados numéricos de los casos **d** y **e** entre ellos; es posible observar una diferencia poco apreciable, con lo cual sería prudente afirmar que aún cuando la rigidez de la viga entre un caso y otro crezca en un factor de 7.6 aproximadamente no parece representar una perturbación considerable. Confirmando aún más este hecho, si comparamos los casos **d** y **e** contra el caso **a** tampoco se observa una diferencia notable.

Al comparar los resultados numéricos de los casos **f** y **g** entre ellos; es posible observar una diferencia más apreciable que entre los casos **d** y **e**. Lo anterior da pie a pensar que la masa de la viga produce un efecto de mayor perturbación en la dinámica del plato de lo que produce su rigidez.

En la figuras 6B y 7B, se ven representadas las curvas del desplazamiento central del plato correspondientes a los casos **a**, **b**, **c** y **h**, **i**, **j** respectivamente.

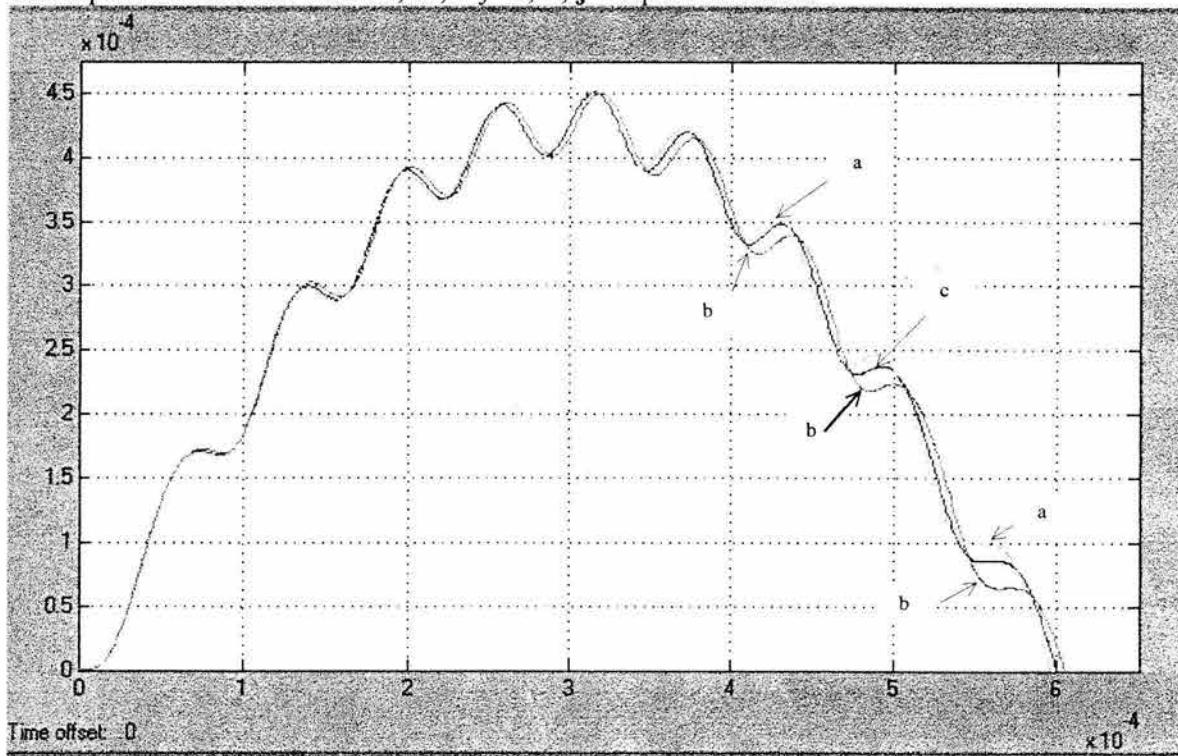


Figura 6B Resultado gráfico de la simulación (comparación entre los casos **a**, **b** y **c**).

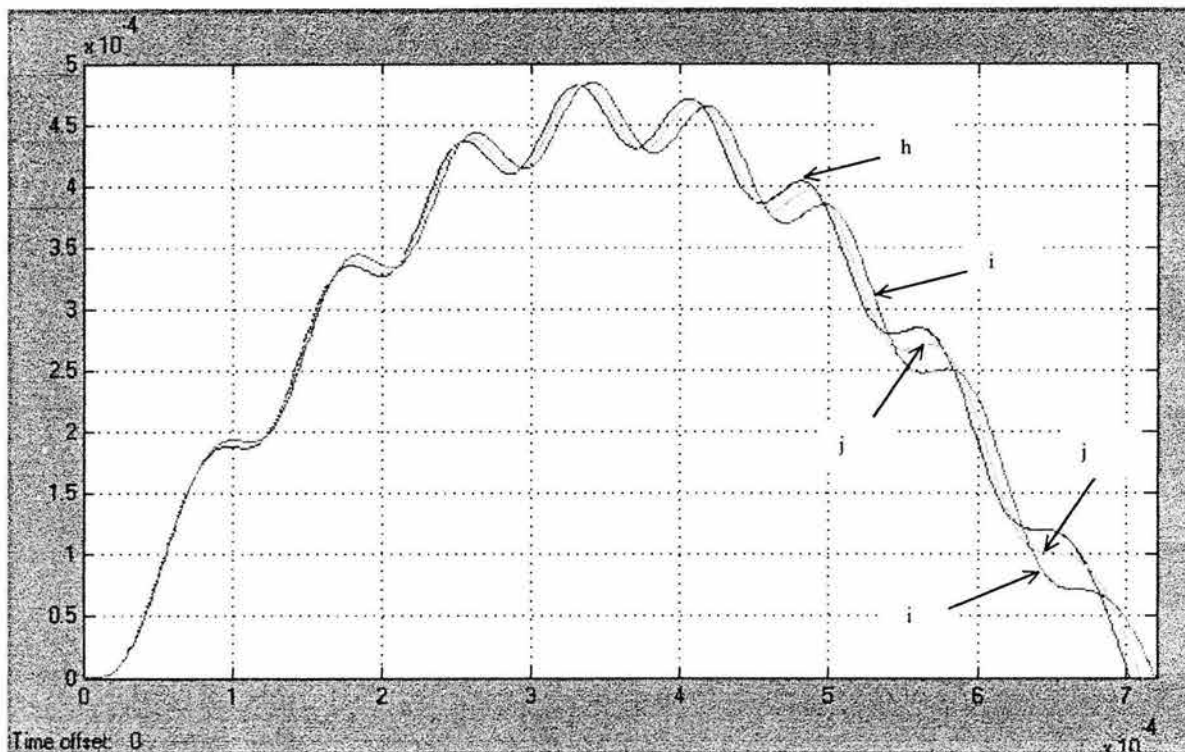


Figura 7B Resultado gráfico de la simulación (comparación entre los casos **i**, **j** y **h**)

La figura 7B, muestra las tres curvas del desplazamiento central del plato correspondientes a los casos **i**, **j** y **h**. Al igual que en la figura 6B; es posible observar que desde el desplazamiento inicial (igual a cero) y hasta antes del desplazamiento máximo, las tres curvas prácticamente describen la misma trayectoria. Después del desplazamiento máximo, las curvas pertenecientes a los casos **j** (plato con viga de material compuesto) e **i** (plato con viga de acero) se comienzan a separar de la curva perteneciente al caso **h** (plato sin viga). Sin embargo, es claro que la curva del caso **i** se desvía en mayor proporción de lo que la curva del caso **j** lo hace respecto a la curva **h**. Lo anterior confirma que entre menor sea la rigidez y la masa de la viga, menor será la perturbación que ésta provoque en la respuesta dinámica del plato.

Conclusiones y recomendaciones:

* Se diseñó un dispositivo de bajo costo y fácil implementación para registrar el desplazamiento central de platos circulares sometidos a impactos de baja velocidad.

* Los resultados teóricos obtenidos a partir del modelo de Shivakumar (en especial la fuerza máxima de impacto y el tiempo de contacto, ver ref. 5) resultaron estar en buena concordancia con los datos experimentales obtenidos por Grezczuck y Lal .

La fuerza máxima de impacto ocurre cuando el plato alcanza la deformación máxima en t_{\max} ; por otro lado, cuando se alcanza el tiempo de contacto, el desplazamiento central del plato se hace cero. Por todo lo anterior, se puede afirmar que el dispositivo diseñado en este

trabajo (bajo la teoría desarrollada por Shivakumar), registra con apreciable exactitud el desplazamiento máximo del plato y el tiempo en el que este ocurre.

* Tomando en cuenta que la masa de la viga es el parámetro que más puede afectar la dinámica del plato, es posible mejorar el diseño aquí propuesto mediante la utilización de una lámina de fibra de carbono/epóxico para construir la viga; por su gran ligereza y alta rigidez en flexión resulta ser mejor candidata que la fibra de vidrio/epóxico y el acero.

* La rigidez de la viga es un parámetro que cobra importancia cuando fuera necesario hacer la medición de platos que tiendan a presentar grandes deflexiones. En tal caso; quizás sería recomendable la utilización de una viga de acero.

* Para un trabajo a futuro, resultaría interesante comparar las curvas teóricas de $x_2(t)$ (desplazamiento del plato en función del tiempo) obtenidas a partir del modelo de Shivakumar con las curvas experimentales para valorar la capacidad predictiva del modelo. Si el modelo resultara ser una buena aproximación; entonces sería válido afirmar que el dispositivo de medición diseñado bajo esta teoría, sería capaz de registrar con precisión la posición central del plato a cualquier instante (aplicando por supuesto algún tipo de corrección a la señal).

Referencias:

- [1] J. C. Gong, B. V. Sankar. "Impact Properties of Three-Dimensional Braided Graphite/Epoxy Composites", *J. of Composite Materials*, 25 (1991) 715-731.
- [2] Sun, C. T. and Tan, T.M., "Use of Static Indentation Laws in the Impact Analysis of Laminated Composite Plates", *Journal of Applied Mechanics*, 52 (1985) 6-12.
- [3] J. F. Doyle. "Experimentally Determining the Contact Force During the Transverse Impact of an Orthotropic Plate", *Journal of Sound and Vibration*, 118(3), (1987) 441-448.
- [4] Y. Qian, S. R. Swanson. "Experimental Measurement of Impact Response in Carbon / Epoxy Plates", *AIAA JOURNAL*, 28(6) (1990) 1069-1074.
- [5] Shivakumar K. N., Elber W., Illg W. "Prediction of Impact Force and Duration Due to Low-Velocity Impact on Circular Composite Laminates", *Journal of Applied Mechanics*, 52 (1985) 674-680.
- [6] Weaver Young. "Vibration Problems in Engineering", USA, (1990).
- [7] F. P. Beer y E. R. Johnston "Mecánica de Materiales", Colombia, Mc Graw-Hill (1981).
- [8] Stephen R. Swanson. "Introduction to Design and Analysis with Advanced Composite Materials", USA, Prentice Hall (1997).
- [9] Hashin Z. "Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites", *J. Appl. Mech.* 102(1980), 329-334.

Apéndice C

Cálculo de la matriz de rigidez promedio.

Para determinar las propiedades promedio de los laminados de prueba; se calculó la matriz de rigidez tridimensional basada en las propiedades de cada lámina (E_{11}, E_{22}, G_{12} , etc.), rotándola en el plano X-Y (cualquier cantidad de ángulos entre 0 y 90°), sumándola y promediándola a través del espesor total del plato Lagace [1], Chung [2], Shivakumar [3]. Las coordenadas y numeración de los laminados y sus interfaces se muestran en la figura 1C:

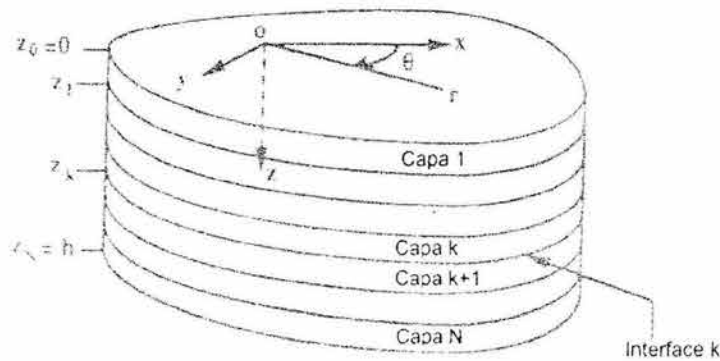


Figura 1C Sistema coordenado y numeración de las capas y sus interfaces.

El plato se fabrica uniendo N capas delgadas de material ortotrópico (ver capítulo 4). La siguiente figura muestra la definición de los ejes principales (1, 2 y 3) para la n -ésima capa; así como el ángulo α correspondiente a la orientación de las fibras.

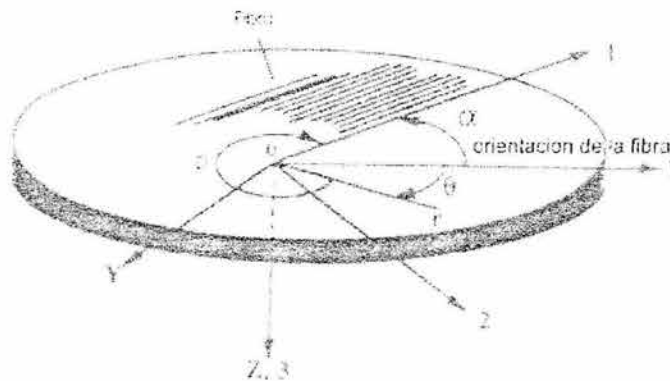


Figura 2C Definición de las direcciones principales (1,2,3) para la k -ésima capa del compuesto.

Para el cálculo de la matriz de rigidez ($Q_{p_{ij}}$), se desarrolló un programa (Script) escrito en **MATLAB**[®] que realiza el proceso señalado al inicio de este apéndice.


```

1 %Rigidmatriz
2 % Datos
3  $\alpha$ =[0 0 0];
4  $\theta$ =[0 45 90];
5  $h_k$ =[.3666 .3666 .3666];
 $a=(\pi/180)*\alpha$ ;
 $t1=(\pi/180)*\theta$ ;
 $t=(2*\pi)-a-t1$ ;
9 E11=29.374;
10 E22=9.284;
11 E33=E22;
12 Nu12=.3;
13 Nu13=Nu12;
14 G12=5.528;
15 G13=G12;
16 G23=2.03;
17 Nu23=.455;
% Calculo de los elementos de la matriz de rigidez
Nu21=(E22*Nu12)/E11
Nu32=(Nu23*E33)/E22
Nu31=(Nu13*E33)/E11
D=1-(Nu21*Nu12)-(Nu23*Nu32)-(Nu31*Nu13)-(2*Nu21*Nu32*Nu13);
Q11=(E11*(1-(Nu23*Nu32)))/D;
Q22=(E22*(1-(Nu31*Nu13)))/D;
Q33=(E33*(1-(Nu12*Nu21)))/D;
Q44=G23;
Q55=G13;
Q66=G12;
Q12=((Nu21+(Nu31*Nu23))*E11)/D;
Q21=Q12;
Q13=((Nu31+(Nu21*Nu32))*E11)/D;
Q31=Q13;
Q23=((Nu32+(Nu12*Nu31))*E22)/D;
Q32=Q23;

Q=[ Q11 Q12 Q13 0 0 0
    Q21 Q22 Q23 0 0 0
    Q31 Q32 Q33 0 0 0
    0 0 0 Q44 0 0
    0 0 0 0 Q55 0
    0 0 0 0 0 Q66]

k=length(teta);
for j=1:k
n=length(alfa);
for i=1:n
% Matrices de rotación

```

```

48 T=[ (cos(t(i)))^2      (sin(t(i)))^2      0      0      0      2*sin(t(i))*cos(t(i))
49      (sin(t(i)))^2      (cos(t(i)))^2      0      0      0      -2*sin(t(i))*cos(t(i))
50      0      0      1      0      0      0
51      0      0      0      cos(t(i))      -sin(t(i))      0
52      0      0      0      sin(t(i))      cos(t(i))      0
53 -sin(t(i))*cos(t(i))  sin(t(i))*cos(t(i))  0      0      0      ((cos(t(i)))^2)-((sin(t(i)))^2)];
Tinv=inv(T);

```

```

Tt=[(cos(t(i)))^2      (sin(t(i)))^2      0      0      0      -sin(t(i))*cos(t(i))
      (sin(t(i)))^2      (cos(t(i)))^2      0      0      0      sin(t(i))*cos(t(i))
      0      0      1      0      0      0
      0      0      0      cos(t(i))      sin(t(i))      0
      0      0      0      -sin(t(i))      cos(t(i))      0
      2*sin(t(i))*cos(t(i))  -2*sin(t(i))*cos(t(i))  0      0      0      ((cos(t(i)))^2)-((sin(t(i)))^2)];

```

```
% promediación a través del espesor
```

```
Ttinv=inv(Tt);
```

```
Q1=Tinv*Q;
```

```
Qr=Q1*Ttinv
```

```
A1=2*hk(i)*Qr;
```

```
68 if (i==1)
```

```
69   L=zeros(6,6);
```

```
70   A=A1+L;
```

```
71 else L=A;
```

```
72   A=A1+L;
```

```
73 end
```

```
75 if (i==n)
```

```
76   A=A1+L
```

```
77   Qprom=(1/(2*n*hk(n)))*A
```

```
78   end
```

```
end
```

```
% promediación de la rotación en el plano X-Y
```

```
82 if (j==1)
```

```
83   M=zeros(6,6);
```

```
84   Qpro=Qprom+M;
```

```
85 else M=Qpro;
```

```
86   Qpro=Qprom+M;
```

```
87 end
```

```
89 if (j==k)
```

```
90   Qpro=Qprom+M
```

```
91   Qp=(1/(k))*Qpro
```

```
92   end
```

```
end
```

En la línea 3 se introducen los ángulos de apilamiento (en grados) de cada lámina; el vector de la línea 4, corresponde a los ángulos (entre 0 y 90°) sobre los que se realiza el promedio de propiedades en el plano X-Y. En la línea 5 se introduce el vector que contiene el espesor nominal de cada lámina en mm.

A partir de la línea 9 ; y hasta la línea 17, se introducen las propiedades de cada lámina.

La corrida de este programa para los datos correspondientes a las muestras unidireccionales FV3; arrojó la siguiente matriz de rigidez promedio:

$$Q_{p \text{ ij}} = \begin{bmatrix} 21.7513 & 6.7039 & 6.0129 & 0 & 0 & -1.6748 \\ 6.7039 & 21.7513 & 6.0129 & 0 & 0 & -1.6748 \\ 6.0129 & 6.0129 & 12.7006 & 0 & 0 & 0.1023 \\ 0 & 0 & 0 & 3.7790 & -0.5830 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5830 & 3.7790 & 0 \\ -1.6748 & -1.6748 & 0.1023 & 0 & 0 & 6.5258 \end{bmatrix}$$

Una vez calculada la matriz de rigidez, se resolvió el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el comando **FindRoot** de **MATHEMATICA**® para encontrar las propiedades del laminado en el sistema de coordenadas cilíndricas r-θ-Z.

FindRoot

$$\begin{aligned} & (E_r * (1 - \nu_{\theta z} * \nu_{z\theta})) / \\ & (1 - (\nu_{r\theta} * \nu_{\theta r}) - (\nu_{\theta z} * \nu_{z\theta}) - (\nu_{zr} * \nu_{rz}) - (2 * \nu_{\theta r} * \nu_{z\theta} * \nu_{rz})) == \\ & Q_{p11r} \\ & (E_{\theta} * (1 - \nu_{rz} * \nu_{zr})) / \\ & (1 - (\nu_{r\theta} * \nu_{\theta r}) - (\nu_{\theta z} * \nu_{z\theta}) - (\nu_{zr} * \nu_{rz}) - (2 * \nu_{\theta r} * \nu_{z\theta} * \nu_{rz})) == \\ & Q_{p22r} \\ & (E_z * (1 - \nu_{r\theta} * \nu_{\theta r})) / \\ & (1 - (\nu_{r\theta} * \nu_{\theta r}) - (\nu_{\theta z} * \nu_{z\theta}) - (\nu_{zr} * \nu_{rz}) - (2 * \nu_{\theta r} * \nu_{z\theta} * \nu_{rz})) == \\ & Q_{p33r} \\ & (E_r * (\nu_{\theta r} + (\nu_{zr} * \nu_{z\theta}))) / \\ & (1 - (\nu_{r\theta} * \nu_{\theta r}) - (\nu_{\theta z} * \nu_{z\theta}) - (\nu_{zr} * \nu_{rz}) - (2 * \nu_{\theta r} * \nu_{z\theta} * \nu_{rz})) == \\ & Q_{p12r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (E_r * (v_{zr} + (v_{\theta r} * v_{z\theta}))) / \\
& (1 - (v_{r\theta} * v_{\theta r}) - (v_{\theta z} * v_{z\theta}) - (v_{zr} * v_{rz}) - (2 * v_{\theta r} * v_{z\theta} * v_{rz})) = \\
& Q_{p13}, \\
& (E_{\theta} * (v_{z\theta} + (v_{r\theta} * v_{zr}))) / \\
& (1 - (v_{r\theta} * v_{\theta r}) - (v_{\theta z} * v_{z\theta}) - (v_{zr} * v_{rz}) - (2 * v_{\theta r} * v_{z\theta} * v_{rz})) = \\
& Q_{p23}, (E_{\theta} * v_{r\theta}) = (E_r * v_{\theta r}), (E_z * v_{\theta z}) = (E_{\theta} * v_{z\theta}), \\
& (E_z * v_{rz}) = (E_r * v_{zr}), \{v_{r\theta}, .6\}, \{v_{\theta r}, .02\}, \{v_{\theta z}, .3\}, \\
& \{v_{z\theta}, .3\}, \{v_{zr}, .02\}, \{v_{rz}, .28\}, \{E_r, 90\}, \{E_{\theta}, 20\}, \\
& \{E_z, 11\}
\end{aligned}$$

Y el resultado fue:

$$\begin{aligned}
& \{v_{r\theta} \rightarrow 0.243031, v_{\theta r} \rightarrow 0.243031, v_{\theta z} \rightarrow 0.358375, \\
& v_{z\theta} \rightarrow 0.205975, v_{zr} \rightarrow 0.205975, v_{rz} \rightarrow 0.358375, \\
& e_r \rightarrow 17.788, e_{\theta} \rightarrow 17.788, e_z \rightarrow 10.2236\}
\end{aligned}$$

Referencias:

- [1] D. S. Cairns and P.A. Lagace, "Thick Composite Plates Subjected to Lateral Loading", Journal of Applied Mechanics, Vol.54,(1987) 611-616.
- [2] Chung- Yue Wang and Ching H. Yew, "Impact Damage in Composite Laminates", Computers & Structures, Vol.37, No.6 , (1990) 967-982.
- [3] K.N. Shivakumar, W. Elber and W. Illg, "Prediction of Low-Velocity Impact Damage in Thin Circular Laminates", AIAA Journal, Vol.23, No.3, (1984) 442-449.