

00382



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

“SOBRE LA NO CONMUTATIVIDAD EN  
COORDENADAS ESPACIALES ”

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS

P R E S E N T A:

JUAN MANUEL ROMERO SANPEDRO

DIRECTOR DE TESIS:

DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER

COMITÉ TUTORAL:

DR. RODOLFO P. MARTÍNEZ Y ROMERO

DR. JOSÉ ANTONIO GARCÍA ZENTENO

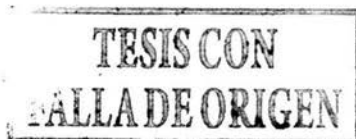
México, D.F. 2004



Posgrado en ciencias físicas  
UNAM



posgrado en ciencias físicas  
UNAM





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA**

# Agradecimientos

Quiero agradecer a Alondra por creer en mí, apesar de los multiples tropiezos y fracasos. Gracias Alondra, en donde quiera que estés.

Agradezco al Dr. José David Vegara por darme la oportunidad de realizar mi tesis bajo su dirección, así como por todos sus comentarios y sugerencias.

También quiero agradecer a los doctores Rodolfo Patricio Martínez y José Antonio García por sus comentarios como parte de mi comité tutorial.

Agradezco al Dr. José Antonio Santiago por permitirme colaborar con el.

Agradezco a los doctores Hector Hugo Morales, Cupatitzio Ramírez . Hector Hugo García Compeán, Manuel Torres y Alberto Güijosa por revisar esta tesis y por todos todos sus comentarios.

A la Universidad Nacional Autónoma de México y al Instituto de Ciencias Nucleares (I.C.N.) de esta Universidad por todas las oportunidades y facilidades dadas para mi formación académica.

A mis compañeros del I.C.N. especialmente a Huitzilín, Sergio, Rafael, Jesús, Ramón, Juan Lius, Gerardo, Ismael, Antígona, Antonio Rodiles, Roberto, Edgar, Paul, Adrián, Marco, etc por brindarme su amistad y compartir sus conocimientos y experiencias.

En los primeros semestres de la realización de este trabajo se contó con un apoyo económico parcial de la DGAPA.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Juan Manuel

Romero Sanpedro

FECHA: 15 Enero 2004

FIRMA: 

## Resumen

En este trabajo se abordan tres problemas relacionados con espacios no conmutativos. La no conmutatividad en una teoría de campos debido a sus condiciones de borde, se propone un nuevo método para abordar este problema. El límite clásico de la mecánica cuántica no conmutativa, se muestra que al considerar una estructura simpléctica consistente con esta mecánica cuántica se obtienen correcciones para la segunda ley de Newton. Por último, se estudian objetos geométricos en un espacios no conmutativos y se muestra que en un espacio no conmutativo de dos dimensiones se cuantiza el área.

## Summary

In this work we study three problems related with noncommutative space. The noncommutative on field theory for their boundary condition, a new method to compute the symplectic structure of a quantum field theory with non trivial boundary conditions is proposed. The classical limit of noncommutative quantum mechanics, we show the corrections to the Newton's second law if we suppose that the phase space has a symplectic structure consistent with the rules of commutation of the noncommutative quantum mechanics. We finally study the geometry on space noncommutative and we show the quantization of the area in a two-dimensional non-commutative space.

# Índice general

0.1. Introducción . . . . .	4
0.2. Física y Geometría . . . . .	4
0.3. Sobre este trabajo . . . . .	7
0.3.1. Condiciones de borde . . . . .	7
0.3.2. Límite clásico y no conmutatividad . . . . .	9
0.3.3. Implicaciones Geométricas . . . . .	10
0.3.4. Organización . . . . .	10
<b>1. Panorama General . . . . .</b>	<b>11</b>
1.1. Geometría no conmutativa . . . . .	11
1.1.1. El aspecto métrico de la geometría no conmutativa . . . . .	14
1.2. Mecánica Cuántica no Conmutativa . . . . .	17
1.3. Operadores de Símbolo y el Producto de Moyal . . . . .	18
1.4. Teoría de Campos no Conmutativos . . . . .	22
1.4.1. Simetrías . . . . .	24
1.4.2. Mezcla de divergencias $IR/UV$ . . . . .	26
1.5. Teoría de Cuerdas . . . . .	28
1.5.1. Aproximación de Integrales de trayectoria . . . . .	31
1.6. Mapeo de Seiberg-Witten . . . . .	34
1.6.1. Teoría de campos no conmutativos y Gravedad . . . . .	35
<b>2. Condiciones de borde como constricciones . . . . .</b>	<b>38</b>
2.1. Introducción . . . . .	38
2.2. No conmutatividad y constricciones . . . . .	40
2.3. Condiciones de Neumann en Mecánica Clásica . . . . .	42
2.4. Condiciones de borde y estructura simpléctica . . . . .	45
2.4.1. Método propuesto . . . . .	46
2.5. Campo escalar con condiciones de Dirichlet y Neumann . . . . .	48

2.5.1.	Campo escalar con condiciones de Dirichlet . . . . .	49
2.5.2.	Campo escalar con condiciones de Neumann . . . . .	50
2.6.	Cuerda bosónica con condiciones de borde mixtas . . . . .	51
2.7.	Ecuación de Klein-Gordon y condiciones de borde mixtas . . . . .	53
2.8.	Conclusiones . . . . .	56
<b>3.</b>	<b>Límite clásico y no conmutatividad</b>	<b>58</b>
3.1.	Introducción . . . . .	58
3.2.	Formulación de la Mecánica clásica no conmutativa . . . . .	60
3.3.	Simetrías . . . . .	62
3.4.	Campo central . . . . .	63
3.5.	El problema de Kepler en un espacio no conmutativo . . . . .	64
3.6.	Constante cosmológica y no conmutatividad, un punto de vista Newtoniano . . . . .	70
3.6.1.	AdS y dS en el límite Newtoniano . . . . .	71
3.6.2.	Caso no conmutativo . . . . .	72
3.6.3.	Límite $\Theta$ fuerte . . . . .	76
3.7.	Conclusiones . . . . .	77
<b>4.</b>	<b>Implicaciones Geométricas</b>	<b>78</b>
4.1.	Introducción . . . . .	78
4.2.	Cuantización del área en un espacio no conmutativo . . . . .	81
4.3.	Fuzzy esfera . . . . .	83
4.4.	Algebra de Virasoro y estados coherentes . . . . .	84
4.5.	Conclusiones . . . . .	87
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>88</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>90</b>
<b>A.</b>	<b>Soluciones exactas</b>	<b>90</b>
A.0.1.	Campo escalar . . . . .	90
A.0.2.	Condiciones mixtas . . . . .	91
<b>B.</b>	<b>Grupo simpléctico no conmutativo</b>	<b>94</b>

## 0.1. Introducción

## 0.2. Física y Geometría

Entre la física y la geometría hay una relación profunda que enriquece a ambas disciplinas. Incluso, Galileo nos dice en *El Ensayador* (1622) que: « el libro de los secretos de la naturaleza está escrito en lengua matemática, y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas sin las cuales nos agitamos vanamente en un oscuro laberinto » [1]. Una postura similar fue adoptada por A. Einstein, quien asume que la geometría es parte de la física [2]. De hecho estas disciplinas nacen juntas, pues, los primeros conocimientos de geometría surgen en Egipto al tratar de medir objetos físicos como la tierra y al estudiar arreglos de mosaicos. Posteriormente la trigonometría surge en la escuela de Alejandría al tratar de medir la posición y movimiento de objetos celestes. Una gran cantidad de conocimientos sobre geometría, acumulados por un largo período de tiempo, fueron condensados en los postulados de Euclides (300 a.de.C). Estos postulados fueron el primer sistema axiomático en la historia de las matemáticas. La geometría no sólo ha sido una herramienta en la física, también ha tenido una influencia estética para diferentes pensadores y artistas. Por ejemplo, los arquitectos griegos diseñaban edificios en forma de rectángulos que satisfacían la proporción divina (.618), extraída de una relación geométrica. Por otra parte, debido a las simetrías de los círculos, algunos de los primeros físicos pensaban que las trayectorias naturales de un objeto deberían ser círculos. Un caso extremo sobre la influencia que ejerce la estética de la geometría sobre algunos físicos lo podemos ver en Galileo quien, como persona cercana a la estética de la pintura del Renacimiento, se niega a ocupar los resultados de Kepler en defensa de sus ideas y su persona, él no podía aceptar que figuras deformes como las elipses fueran las trayectoria de los objetos celeste. Posteriormente I. Newton se dio cuenta que para describir el movimiento de los objetos lo fundamental son la línea y el punto, y las trayectorias curvas son deformaciones debido a una fuerza (1669). En el trabajo de I. Newton se tiene el primer gran logro de la física y en él la geometría Euclidiana juega un papel fundamental.

Durante cerca de 2000 años no surgió una geometría diferente a la Euclidiana. Fue hasta 1829 cuando se desarrolla lo que hoy se conoce como geometría no Euclidiana. Sin embargo, en este caso la geometría tomó la delantera, pues, posteriormente este tipo de geometría fue el marco natural para expresar la Relatividad Especial (1905) y General (1915). Actualmente se mantiene una fuerte relación entre la geometría y la física. Por ejemplo, en las teorías de norma, para los matemáticos la teoría de conexiones, se tiene un ejemplo de esta



relación. En efecto, diferentes propiedades geométricas de espacios de baja dimensión ( $d = 4$ ) recientemente descubiertas por matemáticos como Donaldson fueron demostradas ocupando la acción de la teoría de Yang-Mills. Pues, tal y como lo mostró E. Witten, esa teoría se puede interpretar como una teoría de campos topológica en 3+1 dimensiones. Otro ejemplo lo podemos ver en la teoría de nudos. Curiosamente la teoría de nudos fue una propuesta de Kelvin para ver a los átomos como objetos extendidos y explicar su espectro, hoy sabemos que la teoría adecuada para entender la materia a nivel atómico es la mecánica cuántica. Sin embargo, para los matemáticos esta propuesta dejó una serie de problemas sin resolver, estos problemas están relacionados con las propiedades y clasificación de los nudos. Recientemente Jones desarrolló una teoría matemática que arroja nuevos resultados sobre estos objetos y E. Witten demostró que esta teoría también se puede ver como una teoría de campos topológica en 2+1 dimensiones. Un resumen sobre estos temas, dada por los autores originales, se puede ver en [3], también se puede consultar [4].

Como se mencionó anteriormente la geometría Euclidiana está íntimamente relacionada con la mecánica clásica. Ahora, con el surgimiento de la mecánica cuántica (1925) nace un nuevo concepto de geometría. Esto es natural si apelamos al principio de incertidumbre, pues, este principio no nos permite definir un punto en el espacio fase. Así para la mecánica cuántica el espacio fase es un espacio sin puntos. Esto es muy notable pues la topología, que es la rama más elemental de la geometría, se basa en el concepto de conjunto de puntos. Por lo tanto, es natural preguntarse sobre la geometría en un espacio sin puntos. El desarrollo de esta disciplina se da fuera de la mecánica cuántica, pero está relacionada con ella. Una herramienta importante para entender estos espacios sin puntos es el teorema de Gelfand-Naimark [5]. Este teorema afirma que un espacio topológico se puede mapear en un álgebra conmutativa y que el mapeo inverso también es posible. Un paso más allá de estos resultados se pudo dar al considerar el teorema Gelfand-Naimark en el contexto de álgebras no conmutativas. A esta nueva rama de las matemáticas se le llama *Geometría no conmutativa*. La geometría no conmutativa se centra en el estudio de las propiedades de álgebras no conmutativas que pueden tener significado geométrico. En este sentido la geometría no parte de ningún tipo definido de espacio sino del álgebra. Podemos pensar que estamos estudiando un espacio no conmutativo sin tener que definirlo formalmente. Debemos hacer notar que el hecho de tener un espacio no conmutativo no implica que este sea cuántico.

La idea de los espacios no conmutativos nace del principio de incertidumbre, el cual es válido para variables en el espacio fase. Sin embargo, últimamente

ha llamado mucho la atención la idea de que el espacio físico pueda ser no conmutativo, es decir, que las reglas de conmutación entre coordenadas espaciales sean del tipo

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\hbar\Theta_{ij}. \quad (1)$$

Esta idea fue originalmente propuesta por Heisenberg en 1930 [6], quien creía que el principio de incertidumbre entre coordenadas disminuiría las singularidades a distancias cortas, lo que mejoraría la teoría de campos. Heisenberg comentó esta idea con Peierls. En 1932 Peierls estudia sistemas de electrones en un campo magnético intenso y se da cuenta que en este límite se tiene de manera natural no conmutatividad en las coordenadas [7]. Sin embargo, esta realización fenomenológica de la idea de Heisenberg no la coloca en la física fundamental. Por lo que Peierls le transmite la idea a Pauli, el cual se la hace saber a Oppenheimer, éste sugiere a su estudiante H. Snyder trabajar el tema, éste publicó en 1947 el primer trabajo sobre la materia [8]. Sin embargo, debido al éxito de la teoría cuántica de campos estándar, la propuesta de la no conmutatividad del espacio fue abandonada por un largo período de tiempo. Sin embargo, en la actualidad la propuesta de los espacios no conmutativos se estudia en diversas ramas de la física y con diferentes puntos de vista, como:

- 1) Efecto Hall cuántico [9].
- 2) Vórtices de superfluidos [10].
- 3) Mecánica cuántica no conmutativa [11].
- 4) Teoría de campos no conmutativos [12].
- 5) Teoría de cuerdas y D-branas [13].
- 6) Principio de incertidumbre de cuerdas [14].
- 7) Teoría de campos de cuerdas [15].
- 8) Física matemática [16].

Hay diferentes razones por las que es interesante estudiar sistemas físicos en un espacio no conmutativo. Por ejemplo, en una teoría cuántica que incluya la gravedad, la naturaleza del espacio tiempo debe cambiar a distancias comparables con la longitud de Planck,  $l_P = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 10^{-33} \text{ cm}$ . Esto se debe a que el impulso y la energía requeridos para hacer una medición a esta escala modificaría por sí mismo la geometría del espacio tiempo [17]. A esta escala una posible modificación a la geometría del espacio tiempo es que ya no sea una variedad diferenciable y adquiera propiedades no conmutativas. Por otra parte, una teoría de cuerdas bajo ciertos fondos adquiere de manera natural propiedades no conmutativas [18], estas teorías de cuerdas a bajas energías implican campos en un espacio no conmutativo [13]. No obstante una teoría

de campos en un espacio no conmutativo se puede construir de manera independiente [12]. Esta nueva teoría de campos tiene diferentes propiedades que la hacen interesante. Por ejemplo, debido a que se tiene un espacio de fondo sin puntos, es una teoría no local. Esta no localidad permite una relación entre divergencias infrarrojas y ultravioletas [19], semejante a la que ocurre en teoría de cuerdas. Otra propiedad interesante es que existe un mapeo entre una teoría de norma conmutativa y una teoría de norma no conmutativa [13]. Sin embargo, hasta hoy la única realización fenomenológica de la no conmutatividad se encuentra en el efecto Hall cuántico.

En algunos casos se supone que el parámetro  $\Theta_{ij}$  depende del espacio tiempo. Sin embargo, por lo general se supone que este parámetro es constante, antisimétrico y real, este es el punto de vista que tomaremos en el presente trabajo.

### 0.3. Sobre este trabajo

A continuación se menciona de forma breve el contenido del texto de este trabajo.

#### 0.3.1. Condiciones de borde

Como primer paso veamos como puede surgir no conmutatividad en un sistema físico. Consideremos una partícula no relativista en un campo magnético constante,  $B$ . La Lagrangiana de este sistema es

$$L = \frac{m}{2} \dot{X}^i \dot{X}_i - \frac{B}{2} \epsilon_{ij} \dot{X}^i X^j. \quad (2)$$

En el límite en que el campo magnético es intenso el término cinético de la partícula en la Lagrangiana se puede despreciar. La Lagrangiana se reduce a

$$L = -\frac{B}{2} \epsilon_{ij} \dot{X}^i X^j. \quad (3)$$

Como esta Lagrangiana es invariante bajo reparametrizaciones, la Hamiltoniana canónica es cero. Las constricciones para este caso son:

$$P_i + \frac{B}{2} \epsilon_{ij} X^j = 0, \quad (4)$$

que claramente forman un álgebra de constricciones de segunda clase. Aquí los paréntesis de Dirac son

$$\{X_i, X_j\}^* = -\frac{\epsilon_{ij}}{B}. \quad (5)$$

Por lo tanto, al cuantizar este sistema tendremos un espacio no conmutativo

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = -i\hbar \frac{\epsilon_{ij}}{B}. \quad (6)$$

Este es primer sistema del que se supo tiene una manifestación no conmutativa, el trabajo que lo reporta data de 1932 y se debe a R. Peierls [7].

Para obtener no conmutatividad en teoría de cuerdas debemos agregar un término de la forma (3) a la acción de Polyakov. Por lo tanto, en la norma plana, la nueva acción es

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma [g^{ab}\eta_{\mu\nu} + \epsilon^{ab}B_{\mu\nu}] \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \quad (7)$$

El término extra es un término de borde y no modifica las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, sí se pueden modificar las condiciones de borde. Por ejemplo, podemos dividir las coordenadas en  $X^i$  con  $i = 0, \dots, p$  y  $X^m$  con  $m = p + 1, \dots, 9$  y tomar las condiciones de borde en  $\sigma = 0, \pi$  como

$$\partial_\sigma X^i + B_j^i \partial_\tau X^j = 0, \quad X^m = x_0^m. \quad (8)$$

Ocupando las variables canónicas las condiciones de borde para las coordenadas  $X^i$  se pueden escribir como

$$P^i + (B^{-1}M)_j^i \partial_\sigma X^j = 0 \quad \sigma = 0, \pi \quad (9)$$

con  $M$  una matriz que depende de  $B$ . Como vemos estas condiciones de borde tiene la forma de constricciones y la estructura de la ecuación (4). De donde, al calcular los paréntesis de Poisson estas condiciones de borde resultan ser inconsistentes con la estructura simpléctica estándar. En efecto, al calcular el paréntesis de Poisson de dos coordenadas con la solución exacta del problema y evaluarla en el borde, es decir, en las coordenadas de la D-brana, estos resultan ser diferentes de cero. Esto implica que al cuantizar el sistema las coordenadas en el borde no son conmutativas. Por lo tanto, tendremos D-branas no conmutativas.

Una de las propuestas para resolver la inconsistencia entre la estructura simpléctica en el borde y las condiciones de frontera de las ecuaciones de movimiento está en suponer que las condiciones de borde se pueden tomar como constricciones en el borde. Esta propuesta originalmente dio resultados que concuerdan con los que se obtienen de la solución exacta. Sin embargo, presenta diferentes problemas. Por ejemplo, de la evolución de las constricciones

primarias, que son las condiciones de borde, se obtiene un número infinito de constricciones secundarias. Existen diferentes propuestas para mejorar este método pero aún no se tiene una respuesta final. En la primera parte de este trabajo proponemos un método alternativo que funciona para todos los casos conocidos. Damos sus ventajas y sus problemas.

Los resultados de este trabajo se tiene en proceso de publicación, una versión preliminar se encuentra en la referencia [20].

### 0.3.2. Límite clásico y no conmutatividad

En las reglas de conmutación de un espacio no conmutativo (1) tenemos dos parámetros:  $\Theta$  y  $\hbar$ . Por lo tanto, tenemos dos posibles límites: el límite conmutativo  $\Theta = 0$  y el límite clásico. En el límite conmutativo tenemos la mecánica cuántica estándar, pero en límite clásico debemos tener una nueva mecánica clásica. Un área poco explorada de la física en espacios no conmutativos es límite clásico. De esto se trata la segunda parte del trabajo. Para hacer este estudio tomaremos una estructura simpléctica consistente con las reglas de conmutación de un espacio no conmutativo, un Hamiltoniano estándar, los mezclaremos y veremos que correcciones se tienen para la segunda ley de Newton. Es decir, lo que hacemos es la construcción de una mecánica clásica "no conmutativa". Veremos que la corrección que se obtiene para la segunda ley de Newton resulta ser proporcional al parámetro no conmutativo y a las variaciones del potencial bajo el cual está la partícula. Así, esta nueva fuerza se puede ver como el resultado de una perturbación al espacio provocada por el campo externo. Por ejemplo, se muestra que en el caso particular de un campo central la corrección se puede interpretar como el análogo de una fuerza de Coriolis.

Analizaremos dos casos concretos, el potencial de un oscilador armónico tridimensional y el problema de Kepler. Para el oscilador armónico obtenemos ecuaciones de movimiento que se pueden ver como las de un oscilador cargado en un campo magnético constante del orden del parámetro no conmutativo. Para el problema de Kepler, la fuerza de Coriolis que se obtiene posee la forma de la fuerza de Coriolis que produce un campo gravitacional lejano de un cuerpo masivo rotante. También mostraremos que hay un corrimiento del perihelio de los planetas. Del análisis del corrimiento al perihelio de Mercurio, se puede observar que el sistema planetario es altamente sensible al parámetro no conmutativo  $\Theta_{ij}$ . Pues basta que éste sea del orden de  $10^{-25} s/Kg$  ( $\hbar\Theta_{ij} \approx 10^{-58} m^2$ ) para explicar el corrimiento del perihelio de Mercurio observado. Esto muestra que para este sistema la física a pequeña escala no está desconectada de la física a gran escala. También se obtiene una cota para este parámetro

del orden de  $10^{-30} s/Kg (\sqrt{\hbar\Theta} \approx 5X10^3 L_P)$ , por lo que se tiene la posibilidad de que antes de llegar a la escala de Planck el espacio sea no conmutativo. Además mostraremos que la segunda y tercera ley de Kepler tienen correcciones similares a las que da una partícula en la métrica de Kerr. Los resultados de este trabajo se publicarán en las referencias [21] y [22].

### 0.3.3. Implicaciones Geométricas

Actualmente no tenemos una versión cuántica de la gravedad. Sin embargo, existen algunos indicios teóricos de que en esta teoría algunos objetos geométricos, como el área del horizonte de eventos de un hoyo negro, se deben cuantizar [24]. De hecho, un resultado importante para algunas teorías cuánticas de la gravedad, como la gravedad cuántica de lazos, es la cuantización de objetos geométricos. En esta parte del texto mostramos que en un espacio no conmutativo también es posible cuantizar algunos objetos geométricos. Se comparan estos resultados con los que se obtienen en otras teorías. Los resultados de este trabajo se publicarán en la referencia [23]

### 0.3.4. Organización

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. Primero se da un panorama general sobre diferentes temas que se han desarrollado en torno a los campos no conmutativos. Esa parte no es exhaustiva, sólo se muestran algunos resultados que son interesantes o que se les hace referencia en el texto. Posteriormente se trata el tema de las condiciones de borde y la no conmutatividad en cuerdas, en particular se muestra un método alternativo para tratar a las condiciones de borde como constricciones. En la segunda parte de este trabajo se trata el tema de las implicaciones clásicas que se obtiene por suponer que el espacio es no conmutativo. Por último se muestran algunas implicaciones geométricas que se obtienen por suponer que el espacio es no conmutativo.

# Capítulo 1

## Panorama General

### 1.1. Geometría no conmutativa

La rama más elemental de la geometría es la topología. Incluso, todas las teorías físicas se basan en que el espacio de fondo es un espacio topológico. Si bien no se requiere recurrir a los teoremas topológicos para construir una teoría física, ellos están presentes de forma implícita. Por otra parte, un resultado de esta rama de las matemáticas es que la estructura topológica de un conjunto se refleja en el conjunto de funciones continuas que se pueden definir en él. Ahora, con la multiplicación punto a punto, el conjunto de funciones continuas adquiere una estructura de álgebra conmutativa. Por lo tanto, dado un espacio topológico es posible definir un álgebra de funciones. El problema inverso también es posible, es decir, dada una álgebra de funciones sobre un conjunto es posible inducir una estructura topológica en el conjunto, de tal forma que el álgebra inicial es identificada con el álgebra de funciones definidas en ese espacio topológico. Este es el llamado teorema de Gelfand-Naimark [5]. Incluso se puede mostrar que a cada objeto algebraico le corresponde un objeto geométrico, y a la inversa.

Un paso más allá de estos resultados se puede dar si se consideran el teorema Gelfand-Naimark en el contexto de álgebras no conmutativas. A esta nueva rama de las matemáticas se le llama *Geometría no conmutativa*. La geometría no conmutativa se centra en el estudio de a las propiedades de álgebras no conmutativas que pueden tener significado geométrico en el caso no conmutativo. En este sentido la geometría no conmutativa es una geometría que no parte de la idea de punto. Podemos pensar que estamos estudiando un espacio no conmutativo a través de su álgebra.

Para formular una teoría de campos en un espacio no conmutativo recordemos que los campos,  $\phi$ , son funciones continuas sobre el espacio tiempo, es decir, son elementos de un álgebra continua definida sobre cierta variedad. Dado que el teorema de Gelfand-Naimark nos dice que la variedad se puede recuperar a partir del álgebra de funciones continuas, entonces se puede formular una teoría de campos solamente en términos del álgebra a la cual estos pertenecen, sin ninguna referencia directa al espacio tiempo. Esto también se puede hacer para un álgebra arbitraria, incluso si es no conmutativa. Así, cuando trabajamos con un álgebra no conmutativa en un sentido estamos trabajando en una teoría de campos en un espacio no conmutativo.

Debido a que la geometría no conmutativa fue desarrollada por matemáticos, tiene una formulación matemática muy sofisticada. Por esta razón sólo nos referiremos a los elementos y resultados que tienen interés físico. Existen diversas referencias que pueden ser útiles para una introducción a este tema, por ejemplo [16], [25], [26], [27].

La geometría de un espacio no conmutativo se puede definir con el llamado triplete espectral  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ . Con  $\mathcal{A}$  un álgebra involutiva, es decir, que a cada elemento del álgebra se le puede asociar su “complejo conjugado” y este está en el álgebra. Por lo general  $\mathcal{A}$  es un álgebra no conmutativa.  $\mathcal{H}$  es un espacio de Hilbert separable. Y  $\mathcal{D}$  es un operador autoadjunto que actúa en  $\mathcal{H}$ . Por ejemplo, la geometría Riemanniana se puede obtener del triplete particular

$$\mathcal{A} = C^\infty(M), \quad \mathcal{H} = L^2(S), \quad \mathcal{D} = \gamma^\mu \left( \partial_\mu + \frac{1}{4} \omega_\mu^{ab} \gamma_{ab} \right), \quad (1.1)$$

con  $\mathcal{A} = C^\infty(M)$  el álgebra de las funciones infinitamente diferenciables en la variedad  $M$ ,  $\mathcal{H} = L^2(S)$  el espacio de Hilbert de las funciones cuadrado integrables en  $M$ ,  $\mathcal{D}$  el operador de Dirac fermiónico en  $M$  y  $\omega_\mu^{ab}$  la conexión de espín de la variedad  $M$ .

El elemento más importante de este triplete, desde el punto de vista físico, es el operador de Dirac. Independientemente de la geometría no conmutativa, el estudio de este operador da resultados interesantes. Por ejemplo, el operador de Dirac fermiónico usual (en un espacio curvo) tiene información importante de la geometría del espacio tiempo. En particular los valores propios de este operador son invariantes bajo difeomorfismos [28], es decir, son cantidades invariantes de norma y por lo tanto observables de la relatividad general. De hecho, estos valores propios pueden ser utilizados para formular la relatividad general [29], [30].

Una vez definido un operador de Dirac, la forma de obtener la física de este



operador es mediante el llamado principio espectral. Este principio asocia al operador de Dirac una acción fermiónica de la forma

$$I_f = (\psi, \mathcal{D}\psi) \quad (1.2)$$

aquí se está tomando el producto escalar del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  y  $\psi$  es un elemento de este espacio. Mientras que para la parte bosónica se toma la acción

$$I_b = Tr \left( \chi \left( \frac{\mathcal{D}^2}{\Lambda^2} \right) \right) \quad (1.3)$$

con  $\chi$  una función que se anula en infinito y  $\Lambda^2$  un parámetro de corte. Para obtener esta acción de forma explícita podemos ocupar el método del kernel de calor. Por ejemplo, para  $d = 4$  y  $\chi(P)$  de la forma  $\chi(P) = \sum_s f_s P^s$ , usando la identidad

$$Tr(P^{-s}) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt \ t^{s-1} Tr(e^{-tP}) \quad (1.4)$$

y la expansión

$$Tr(e^{-tP}) \simeq \sum_{n \geq 0} t^{\frac{n}{2}-2} \int_M a_n(x, P) dv(x) \quad (1.5)$$

se puede mostrar que

$$I_b = f_{-2}a_0 + f_0a_2 + f_2a_4 + \dots \quad (1.6)$$

con los  $a_n$  los coeficientes de Seeley-de Witt [31] y

$$f_2 = \int_0^\infty u \chi(u) du, \quad f_0 = \int_0^\infty \chi(u) du, \quad f_2 = \chi'(0), \dots \quad (1.7)$$

Por ejemplo, para el operador de Dirac sin términos de interacciones de norma se tiene [28]

$$I_b = c_0 \int_M \sqrt{g} d^4x + c_2 \int_M \sqrt{g} R d^4x + \dots \quad (1.8)$$

con  $c_n$  proporcional a  $f_n$ . Así en este caso obtenemos la acción de Einstein-Hilbert con constante cosmológica más términos de orden superior. En esta acción, el término de constante cosmológica es más grande que el término de curvatura, sin embargo esto se puede corregir tomando la función  $\chi$  adecuada [32]. Entonces el primer término que se obtiene es

$$I'_b = c'_2 \int_M \sqrt{g} R d^4 x. \quad (1.9)$$

Para obtener una acción bosónica que contenga términos de campos de Yang-Mills debemos agregar los términos correspondientes al operador de Dirac. Así, por ejemplo, se puede construir un operador de Dirac que nos de tanto el modelo estándar de partículas como la acción de Einstein-Hilbert [33]. El operador de Dirac para el sector leptónico de este modelo es [34]

$$\mathcal{D}_L = \begin{pmatrix} \gamma^\mu (D_\mu - \frac{i}{2} g_2 A_\mu^\alpha \sigma^\alpha) & \gamma_5 k^e H \\ \gamma_5 k H^\dagger & \gamma^\mu (D_\mu + i g_1 B_\mu) \end{pmatrix},$$

y una expresión similar para el operador de Dirac del sector de quarks. La acción bosónica es dada por

$$\begin{aligned} I_b = & \int d^4 x \sqrt{g} [a \Lambda^4 + b \Lambda^2 \left( \frac{5}{4} R - 2y^2 H^\dagger H \right) + c [-18 C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} \\ & + 3y^2 \left( D_\mu H^\dagger D^\mu H - \frac{1}{6} R H^\dagger H \right) + \frac{5}{3} g_2^2 B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + g_2^2 F_{\mu\nu}^\alpha F^{\alpha\mu\nu} \\ & + g_3^2 G_{\mu\nu}^i G^{i\mu\nu} + 3z^2 (H^\dagger H)^2] + \mathcal{O}(1/\Lambda^2) \end{aligned} \quad (1.10)$$

con  $a, b, c$  son proporcionales a  $f_2, f_0, f_2$  respectivamente, y  $y, z$  son funciones de la constante de acoplamiento de Yukawa. Este modelo tiene diferentes propiedades. Por ejemplo, permite una relación de constantes de acoplamiento de la forma  $g_3^2 = g_2^2 = \frac{5}{3} g_1^2$ . También, al ocupar las ecuaciones del grupo de renormalización se tiene una cota para la masa de Higgs  $160 \text{ GeV} < m_H < 200 \text{ GeV}$ . Sin embargo, este modelo tiene algunos problemas de unitariedad [33].

Como vemos, al definir el operador de Dirac se define prácticamente la física del sistema. Por ejemplo, se puede definir un operador de Dirac el cual da la acción del modelo de Randall-Sundrum [35].

### 1.1.1. El aspecto métrico de la geometría no conmutativa

Definiendo el operador de Dirac básicamente se define un operador derivada en nuestro sistema. Por lo tanto, es natural esperar que este operador nos defina la noción de infinitesimal. Esto ocurre así, sin embargo para definir esta noción ocuparemos un operador autoadjunto  $F$  que actúa en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Este operador cumple  $F^2 = 1$ . Dar  $F$  es equivalente a dar una

descomposición de  $\mathcal{H}$  en una suma directa de dos subespacios ortogonales y cerrados de dimensión finita

$$\{\xi \in H; F\xi = \pm\xi\}. \quad (1.11)$$

Ahora definiremos un infinitesimal como

$$da = [F, a], \quad (1.12)$$

donde  $a \in \mathcal{A}$ . Ocupando las propiedades de espacio de Hilbert separable se puede mostrar que esta definición es consistente con la noción de diferencial [16].

Por otra parte, los espacios geométricos de Riemman se definen usualmente como variedades en donde la métrica está dada por la distancia geodésica

$$d_\gamma(x, y) = \inf_\gamma \{\text{longitudes de trayectoria, } \gamma, \text{ de } x \text{ a } y\}. \quad (1.13)$$

Sin embargo, con el objeto de dar una versión algebraica de esta cantidad geométrica y llegar a una formulación que se pueda extender a espacios no conmutativos, se puede dualizar esta ecuación de la siguiente forma:

$$d(x, y) = \sup\{|f(x) - f(y)|; f \in \mathcal{A}, \|\frac{df}{ds}\| \geq 1\}. \quad (1.14)$$

En donde  $\mathcal{A}$  es el álgebra de funciones  $\mathcal{C}^\infty(M)$  sobre  $M$ , y  $ds$  es el elemento de línea de la geometría Riemanniana.

Más aún, utilizando la noción cuántica de diferencial es posible especificar una estructura métrica en un espacio  $X$ , generalmente no conmutativo, definiendo primero una unidad de longitud por medio de un operador de la forma

$$G = \sum_{\mu=1}^q (dx^\mu)^* g_{\mu\nu} (dx^\nu), \quad (1.15)$$

en donde  $\dot{x}^\mu$  son elementos de  $\mathcal{A}$ ,  $dx = [F, x]$ , y  $g_{\mu\nu}$  es un elemento positivo del álgebra de matrices  $M_q(\mathcal{A})$ . Nótese que  $G$  es un infinitesimal positivo por construcción, por lo tanto podemos ver su raíz cuadrada como el elemento de línea en la geometría Riemmaniana:

$$ds = (G)^{1/2}. \quad (1.16)$$

Ahora, por el teorema de Gelfand-Naimark, podemos reemplazar los puntos  $x, y \in X$  por los correspondientes estados puros  $\phi, \chi$  sobre la cerradura de  $\mathcal{A}$ , esto se hace utilizando el mapeo

$$\phi(a) = a(x), \quad \chi(a) = a(y), \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (1.17)$$

Si además suponemos que  $G$  conmuta con  $F$ , de manera que  $dG = 0$ , podemos reescribir la fórmula básica (1.14) como

$$d(\phi, \chi) = \sup\{|\phi(a) - \chi(a)|; a \in \mathcal{A}, \|\frac{F}{G^{1/2}}, a\| \geq 1\}. \quad (1.18)$$

Ahora, podemos definir el operador de Dirac como

$$D = \frac{F}{G^{1/2}} = F(ds)^{-1}, \quad (1.19)$$

y notemos que este operador en  $\mathcal{H}$  es autoadjunto, además que para su definición  $G$  debe ser no singular. Resulta entonces que

$$d(\phi, \chi) = \sup\{|\phi(a) - \chi(a)|; a \in \mathcal{A}, \|[D, a]\| \geq 1\}. \quad (1.20)$$

Obsérvese que tomando el cuadrado del operador  $D$ , y haciendo uso de las propiedades de  $F$ , obtenemos

$$D^2 = FG^{-1/2}FG^{-1/2} = F^2G^{-1} = G^{-1}, \quad (1.21)$$

de modo que

$$|D| = G^{-1/2}, \quad \text{o} \quad D = G|D|. \quad (1.22)$$

Esta última expresión implica que  $F$  es por construcción el signo de  $D$  y como  $G$  está expresada en términos de  $D$  la información sobre la estructura métrica de  $X$  está contenida en el operador autoadjunto y no acotado  $D$  sobre  $\mathcal{H}$ . Por esta razón, resulta más económico tomar como elemento básico el triplete  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ . En resumen, en general en una geometría no conmutativa (1.20) se toma como el análogo de la distancia geodésica.

Estas ideas de la construcción de una acción a partir del operador de Dirac y de distancia fueron útiles para la construcción de un modelo de gravedad de juguete que tiene versión cuántica [36]. Una propiedad interesante que tiene este modelo es que se cuantiza la distancia geodésica.

## 1.2. Mecánica Cuántica no Conmutativa

La mecánica cuántica estándar se construye con las reglas de conmutación

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad \text{y} \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0. \quad (1.23)$$

Ahora, si tenemos un espacio no conmutativo debemos agregar el parámetro de la no conmutatividad en estas relaciones. De donde, para construir la mecánica cuántica en estos espacio debemos tomar

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\hbar\Theta_{ij}, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad \text{y} \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0. \quad (1.24)$$

Nótese que se puede construir una mecánica cuántica más general, pues también se puede pedir que los momentos canónicos sean no conmutativos [37]. Nosotros nos limitaremos a estudiar el caso de espacios no conmutativos (1.24).

Las relaciones de conmutación (1.24) se pueden “abelianizar” con

$$\tilde{x}_i = \hat{x}_i + \frac{1}{2\hbar}\Theta_{ij}\hat{p}_j, \quad \tilde{p}_i = \hat{p}_i, \quad (1.25)$$

donde  $\tilde{x}_i$  y  $\tilde{p}_i$  satisfacen

$$[\tilde{x}_i, \tilde{x}_j] = 0, \quad [\tilde{x}_i, \tilde{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad \text{y} \quad [\tilde{p}_i, \tilde{p}_j] = 0. \quad (1.26)$$

Pero en este caso las coordenadas  $\tilde{x}_i$  dependen de los momentos. Para ver que fenómenos ocurren en esta mecánica cuántica se debe proponer un Hamiltoniano. Por ejemplo, si tenemos un Hamiltoniano de la forma estándar

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_i\hat{p}^i}{2m} + V(\hat{x}). \quad (1.27)$$

Consideremos en particular el potencial de Coulomb, que tiene la forma

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{\sqrt{\hat{x}_i\hat{x}^i}}. \quad (1.28)$$

En las coordenadas (1.25) y a primer orden este potencial toma la forma

$$\begin{aligned} V(r) &= -\frac{Ze^2}{\sqrt{(\tilde{x}_i - \frac{1}{2\hbar}\Theta_{ij}\tilde{p}_j)(\tilde{x}_i - \frac{1}{2\hbar}\Theta_{ij}\tilde{p}_j)}} \\ &= -\frac{Ze^2}{\tilde{r}} - Ze^2\frac{\tilde{x}_i\Theta_{ij}\tilde{p}_j}{2\hbar\tilde{r}^3} + \mathcal{O}(\Theta^2) \\ &= -\frac{Ze^2}{\tilde{r}} - Ze^2\frac{L \cdot \Theta}{4\hbar\tilde{r}^3} + \mathcal{O}(\Theta^2) \end{aligned} \quad (1.29)$$

Con  $\Theta_{ij} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Theta_k$ ,  $L = \vec{r} \times \vec{p}$ . Por lo tanto, tenemos un término de corrección al potencial, dado por

$$\delta V = -Ze^2 \frac{L \cdot \Theta}{4\hbar r^3}.$$

Es interesante observar que esta corrección al potencial tiene la forma de interacción espín órbita. Donde  $\Theta$  toma el papel de espín. Sin embargo, debemos notar que este “espín” tiene carácter global y es el mismo para todas las partículas. De un cálculo perturbativo se puede ver que tomando  $\Theta_i = \delta_{i3}\Theta$

$$\Delta E_{NC} = -\frac{m_e c^2}{4} (Z\alpha)^4 \frac{\Theta}{\lambda^2} j_z \left(1 \mp \frac{1}{2l+1}\right) f_{n,l} \delta_{ll'} \delta_{j_z j'_z} \quad (1.30)$$

para

$$j = l \pm 1/2 \quad \text{y} \quad f_{n,l} = \frac{1}{n^3 l(l + \frac{1}{2})(l + 1)}.$$

Un análisis más detallado de este problema se puede ver en [11]. Otros fenómenos que ocurren en mecánica cuántica no conmutativa se pueden ver en [38] y sus referencias.

### 1.3. Operadores de Símbolo y el Producto de Moyal

Un elemento importante para construir una teoría de campos en un espacio no conmutativo es el producto de Moyal. Para motivar este concepto, recordemos que una de las reglas de la mecánica cuántica es que a cada observable clásico  $O$  le corresponde un observable cuántico  $\hat{O}$ . Es decir, a cada función del espacio fase  $O(q, p)$  le corresponde un operador hermitico,  $\hat{O}$ , que actúa en un espacio de Hilbert  $H$ . A la función  $O(q, p)$  se le llama símbolo del operador  $\hat{O}$  [39]. En concreto, estamos haciendo un mapeo de un espacio de funciones definidas en una variedad a un espacio de operadores que actúan en un espacio de Hilbert. Sin embargo, esta regla de asignación no es única. Por ejemplo, a la cantidad clásica  $pq$  le podemos asignar el operador

$$\hat{p}\hat{q} \quad \text{ó} \quad \hat{q}\hat{p} \quad \text{ó} \quad \frac{(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p})}{2}. \quad (1.31)$$

Además, esta regla de asignación no respeta las propiedades algebraicas de los espacios, pues, por una parte el espacio de las funciones es conmutativo, mientras que, por lo general, el espacio de los operadores no es conmutativo.

Por lo tanto, para darle sentido matemático a este mapeo debemos imponer algunas condiciones extras. Por ejemplo, uno espera que este mapeo sea lineal, que dependa de  $\hbar$ , y que la función  $O = O(q, p)$  sea el límite del operador  $\hat{O}$  cuando  $\hbar \rightarrow 0$ . Por la parte algebraica, esperamos que este mapeo induzca un álgebra en el espacio de las funciones similar al álgebra de operadores. Es decir, que se induzca una función bilineal en el espacio de las funciones,  $\star$ ,

$$\star : (f_1, f_2) \rightarrow f_1 \star f_2, \quad (1.32)$$

que sea un homomorfismo de álgebras. Para que esto ocurra se debe pedir que si  $\hat{f} = \hat{f}_1 \hat{f}_2$ , entonces el símbolo de  $\hat{f}$  es  $f = f_1 \star f_2$ . Dado que el producto entre operadores es asociativo, el producto  $\star$  debe ser asociativo. Por último, podemos pedir que cumpla el principio de correspondencia, este principio se introduce a través de las condiciones

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} (f_1 \star f_2)(q, p) = f_1(q, p)f_2(q, p), \quad (1.33)$$

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar} (f_1 \star f_2 - f_2 \star f_1) = \{f_1, f_2\}. \quad (1.34)$$

Con  $\{f_1, f_2\}$  los paréntesis de Poisson.

Un mapeo que satisface todas las condiciones anteriores está dado por una generalización de la transformada de Fourier. Veamos como ocurre esto. Supongamos que tenemos un espacio abstracto  $\{\hat{x}_i\}$  que satisface las reglas de conmutación

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\hbar\Theta_{ij} \quad (1.35)$$

Ahora, dada una función en término de los símbolos de  $\hat{x}$ ,  $f(x)$ , podemos construir su transformada de Fourier

$$\tilde{f}(k) = \int d^D x e^{-ik_i x^i} f(x).$$

Entonces, el símbolo de Weyl asociado será [40]

$$\hat{W}[f] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_i \hat{x}^i} \tilde{f}(k), \quad (1.36)$$

que es una generalización de la transformada inversa de Fourier. Definiendo el operador Hermitiano

$$\hat{\Delta}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik_i \hat{x}^i} e^{-ik_i x^i}, \quad (1.37)$$

podemos reescribir la ecuación (1.36) como

$$\hat{W}[f] = \int d^D x f(x) \hat{\Delta}(x). \quad (1.38)$$

Notemos que en el caso  $\Theta_{ij} = 0$ , se cumple  $\hat{\Delta}(x) = \delta^D(\hat{x} - x)$  y  $\hat{W}[f] = f(\hat{x})$ . Sin embargo, por lo general  $\hat{W}[f]$  es un operador bastante complicado.

Introduzcamos el operador derivada,  $\hat{\partial}_i$ , a través de un operador anti-Hermitiano y lineal que satisface

$$\left[ \hat{\partial}_i, \hat{x}^i \right] = \delta_i^j, \quad \left[ \hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j \right] = 0. \quad (1.39)$$

De donde podemos deducir que el operador de traslaciones es representado por el operador unitario  $e^{v^i \hat{\partial}_i}$ , que satisface

$$e^{v^i \hat{\partial}_i} \hat{\Delta}(x) e^{-v^i \hat{\partial}_i} = \tilde{\Delta}(x + v). \quad (1.40)$$

Por lo que, ocupando la propiedad cíclica de la traza, concluimos que la traza de  $\hat{\Delta}(x)$  no depende de  $x$ . Así, la traza de  $\hat{W}[f]$  sólo depende de  $f$ . Si tomamos la normalización  $\text{Tr} \hat{\Delta}(x) = 1$ , tenemos

$$\text{Tr} \hat{W}[f] = \int d^D x f(x) \quad (1.41)$$

Otra propiedad importante del operador  $\hat{\Delta}(x)$  es que satisface la relación de ortogonalidad dada por [12]

$$\text{Tr} \left( \hat{\Delta}(x) \hat{\Delta}(y) \right) = \delta^D(x - y). \quad (1.42)$$

Esta identidad nos permite hacer el mapeo inverso de Weyl:

$$f(x) = \text{Tr} \left( \hat{W}[f] \hat{\Delta}(x) \right) \quad (1.43)$$

Ocupando la identidad de Baker-Cambell-Hausdorff, se puede mostrar que

$$\hat{W}[f] \hat{W}[g] = \hat{W}[f \star g] \quad (1.44)$$

con

$$\begin{aligned} (\hat{f} \star \hat{g})(x) &= e^{\frac{i\hbar}{2} \Theta^{ij} \partial_i \partial_j'} f(x) g(x') \Big|_{x=x'} \\ &= f(x) g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{i\hbar}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \Theta^{i_1 j_1} \dots \Theta^{i_n j_n} \partial_{i_1 \dots i_n}^n f(x) \partial_{j_1 \dots j_n}^n g(x). \end{aligned} \quad (1.45)$$



Este es el llamado producto de Groenewold-Moyal o producto estrella [41]. En particular, tenemos

$$[x^i, x^j]_\star = i\hbar\Theta^{ij} \quad (1.46)$$

Se puede mostrar que el producto estrella,  $\star$ , tiene todas las propiedades que hemos pedido. De la ecuación (1.44) y la propiedad cíclica de la traza la integral

$$\text{Tr} \left( \hat{W}[f_1] \cdots \hat{W}[f_n] \right) = \int d^D x f_1(x) \star \cdots \star f_n(x) \quad (1.47)$$

es invariante bajo permutaciones cíclicas. En particular, integrando por partes, obtenemos

$$\int d^D x f_1(x) \star f_2(x) = \int d^D x f_1(x) f_2(x). \quad (1.48)$$

Un resultado interesante sobre los mapeos entre operadores y símbolos es que dada una estructura simpléctica, la condición de asociatividad y el principio de correspondencia, el producto  $\star$  es único [27].

Actualmente existen otras formas de obtener el producto de Moyal. Por ejemplo, uno de los ejemplos más simples de la geometría no conmutativa es de las llamadas deformaciones. Estas consisten en tomar un álgebra de funciones continuas sobre una variedad y deformar el producto estándar sustituyéndolo por otro de la forma

$$(f \star g)(x) = f(x)g(x) + \Theta \frac{i}{2} \{f(x), g(x)\}_{PP} + \mathcal{O}(\Theta^2), \quad (1.49)$$

donde  $\{.,.\}_{PP}$  representa una cierta estructura de Poisson definida sobre la variedad y  $\Theta$  en un parámetro que controla la deformación, tal que cuando este es débil se recupera el límite conmutativo. Se puede demostrar que si se pide que el nuevo producto sea asociativo los términos de orden superior en  $\Theta$  se pueden determinar de forma única para cada estructura de Poisson [27].

Por ejemplo, si tomamos la estructura de Poisson tal que

$$\Theta \{f(x), g(x)\} = \Theta^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu g, \quad (1.50)$$

con  $\Theta^{\mu\nu}$  una matriz real, constante y antisimétrica, se obtiene el producto de Moyal (1.49)

Ahora, definiremos el paréntesis de Moyal como el conmutador de este producto

$$[\hat{f}, \hat{g}]_\star = \hat{f} \star \hat{g} - \hat{g} \star \hat{f}. \quad (1.51)$$

El acento circunflejo sobre las funciones indicará que éstas deben ser multiplicadas usando el producto de Moyal, es decir, que las consideramos como elementos del álgebra deformada. En particular, si consideramos las funciones coordenadas  $\hat{x}_i$  sobre la variedad, el conmutador de Moyal es

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j]_\star = ih\Theta_{ij}, \quad (1.52)$$

que es a lo que nos referiremos como espacio no conmutativo. Por lo tanto, la deformación dada por el producto de Moyal, que a su vez la proporciona una estructura simpléctica, nos da una geometría no conmutativa, en la cual aun tiene algún sentido hablar de “puntos” y “coordenadas”.

## 1.4. Teoría de Campos no Conmutativos

Con el producto de Moyal es posible construir una teoría de campos que consiste en cambiar el producto estándar por el de Moyal. Dada las características del producto de Moyal esta nueva teoría de campos tiene diferentes implicaciones. Por ejemplo, para una teoría escalar libre tenemos

$$S = \int d^{d+1}x [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2]. \quad (1.53)$$

Por lo tanto, su equivalente no conmutativo se escribe como

$$S = \int d^{d+1}x [\partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi - m^2 \phi \star \phi]. \quad (1.54)$$

Sin embargo, de la ecuación (1.48) podemos ver que esta acción toma la forma (1.53). Esta es una de las características de las teorías no conmutativas, las partículas libres no se ven modificadas por la no conmutatividad. Esto no ocurre cuando tenemos interacciones. Por ejemplo, si tenemos la acción

$$\begin{aligned} S &= \int d^{d+1}x \left[ \partial_\mu \phi \star \partial^\mu \phi - m^2 \phi \star \phi + \frac{\lambda^2}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right] \\ &= \int d^{d+1}x \left[ \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi \phi + \frac{\lambda^2}{4!} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right]. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Por lo tanto, el producto de Moyal da una física diferente a la estándar. En particular, la parte de interacción dará importantes modificaciones para la simetría de Lorentz y los diagramas de Feynman. Veamos ahora que ocurre

con un campo de norma. Recordemos que para acoplar un campo de norma a otro campo lo que debemos de hacer es cambiar la derivada estándar,  $\partial_\mu\phi$ , por la derivada covariante:

$$D_\mu\phi = (\partial_\mu - iA_\mu)\phi. \quad (1.56)$$

Mientras que el término cinético del campo  $A_\mu$  está dado por la curvatura definida como:

$$[D_\mu, D_\nu]\phi = -iF_{\mu\nu}\phi. \quad (1.57)$$

Además, las transformaciones de norma de esta teoría son

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\Lambda(x) = e^{i\Lambda}(x)(A_\mu - i\partial_\mu)e^{-i\Lambda}(x), \quad (1.58)$$

$$\phi' = e^{i\Lambda}(x)\phi \quad (1.59)$$

$$(\phi')^\dagger = \phi^\dagger e^{-i\Lambda}(x). \quad (1.60)$$

Por lo tanto, en nuestro caso podemos definir la derivada covariante no conmutativa como

$$\hat{D}_\mu\hat{\phi} = \left(\partial_\mu - i\hat{A}_\mu\star\right)\hat{\phi} \quad (1.61)$$

y la curvatura como

$$[\hat{D}_\mu, \hat{D}_\nu]\hat{\phi} = -i\hat{F}_{\mu\nu}\star\hat{\phi} \quad (1.62)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu\hat{A}_\nu - \partial_\nu\hat{A}_\mu - (\hat{A}_\nu\star\hat{A}_\mu - \hat{A}_\mu\star\hat{A}_\nu) \\ &= \partial_\mu\hat{A}_\nu - \partial_\nu\hat{A}_\mu - [\hat{A}_\nu, \hat{A}_\mu]_\star. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Así, la acción para el campo electromagnético no conmutativo tiene la forma

$$S = \int d^{d+1}x \hat{F}_{\mu\nu}\star\hat{F}^{\mu\nu}. \quad (1.64)$$

Las transformaciones de norma de la teoría están dadas por

$$\hat{A}'_\mu = \hat{U}(x)\star\hat{A}_\mu\star\hat{U}(x)^{-1} - i\hat{U}(x)\star\partial_\mu\hat{U}(x)^{-1}, \quad (1.65)$$

$$\hat{\phi}' = \hat{U}(x)\star\hat{\phi}, \quad (1.66)$$

$$(\hat{\phi}')^\dagger = \hat{\phi}^\dagger\star\hat{U}(x)^{-1}. \quad (1.67)$$

con

$$\hat{U}(x) = (e^{i\Lambda(x)})_{\star} = 1 + i\Lambda(x) + \frac{(i)^2}{2!}\Lambda(x) \star \Lambda(x) + \frac{(i)^3}{3!}\Lambda(x) \star \Lambda(x) \star \Lambda(x) \cdots$$

Como vemos, la acción para el campo electromagnético no conmutativo toma la forma de la acción de un campos de Yang-Mills. El producto de Moyal nos da el término no abeliano. La electrodinámica completa la podemos poner de la forma

$$S = \int d^{d+1}x \left[ \frac{i}{2} \bar{\psi} \star \gamma^{\mu} \hat{D}_{\mu} \star \psi - m \bar{\psi} \star \psi - \hat{F}_{\mu\nu} \star \hat{F}^{\mu\nu} \right], \quad (1.68)$$

### 1.4.1. Simetrías

Dada las relaciones de conmutación

$$[\hat{x}^{\mu}, \hat{x}^{\nu}] = i\Theta^{\mu\nu} \quad (1.69)$$

es claro que el parámetro  $\Theta^{\mu\nu}$  es un tensor que transforma con los índices de Lorentz de forma apropiada. Por lo tanto, dada la definición del producto de Moyal, una acción de campos no conmutativos es un escalar de Lorentz si lo es en su versión conmutativa. Sin embargo, podemos darnos cuenta que las reglas de conmutación (1.69) definen direcciones privilegiadas. Por ejemplo, supongamos que sólo tenemos no conmutatividad es las coordenadas espaciales, es decir, se cumple

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\Theta^{ij} \quad (1.70)$$

y cero en otro caso. Ahora, es claro que en tres dimensiones cualquier tensor antisimétrico se puede escribir de la forma

$$\Theta^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \Theta_3 & -\Theta_2 \\ -\Theta_3 & 0 & \Theta_1 \\ \Theta_2 & -\Theta_1 & 0 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\Theta^{ij} = \epsilon^{ijk} \Theta_k.$$

La dirección del vector  $\Theta_k$  es una dirección privilegiada, veamos como podemos sostener esta afirmación. Sin perdida de generalidad, podemos elegir nuestro

sistema de coordenadas tal que  $\Theta_k$  esté en la dirección de  $x^3$ . Por lo que, las reglas de conmutación (1.70) toman la forma

$$[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = i\Theta, \quad [\hat{x}^3, \hat{x}^i] = 0. \quad (1.71)$$

Así, la no conmutatividad sólo afecta al plano perpendicular a la dirección del vector  $\Theta_k$ , es decir, este vector define una dirección privilegiada. De donde, la no conmutatividad rompe la isotropía del espacio. Un fenómeno similar ocurre al considerar no conmutatividad con la coordenada temporal.

Como acabamos de ver, debido a que el parámetro  $\Theta^{\mu\nu}$  tiene los índices de Lorentz, para un espacio no conmutativo todos los sistemas de referencia son igualmente válidos. Sin embargo, una vez elegido un sistema de referencia tenemos, por lo menos, una dirección privilegiada. Esta dirección privilegiada trae algunas consecuencias. Por ejemplo, supongamos que elegimos un sistema de referencia y en este tenemos dos partículas libres de las mismas características, una de ellas se mueve únicamente en la dirección  $x^3$ , mientras que la otra se mueve en el plano  $x^1x^2$ . En el caso estándar, espacio conmutativo, estas dos partículas representan al mismo sistema físico. Incluso podemos pasar de una a otra partícula, por ejemplo, si la partícula en el plano se mueve en el eje  $x^1$  mediante una rotación podemos pasar de una partícula a otra y no cambia alguna propiedad del sistema de referencia elegido. Veamos ahora que ocurre en el caso no conmutativo, si nuestro sistema de coordenadas elegido es tal que  $\Theta_k$  está en la dirección  $x^3$ , a la partícula en el eje  $x^3$  no le afecta la no conmutatividad mientras que a la partícula en el plano  $x^1x^2$  sí, es decir, la no conmutatividad hace que estos dos sistemas sean diferentes. Por lo tanto, no es posible plantear una transformación para pasar de una partícula a otra sin que alguna otra cosa se altere. Por ejemplo, si aplicamos la rotación hecha en el caso estándar para pasar de una partícula a otra el tensor de la no conmutatividad se ve alterado. Las transformaciones de Lorentz para pasar de una partícula a otra, manteniendo el sistema de referencia elegido fijo, se llaman “transformaciones de Lorentz entre partículas” y al rompimiento de esta simetría se le suele llamar rompimiento espontáneo de simetría de Lorentz [42]. Algunas de las consecuencias del rompimiento de simetría de Lorentz en una teoría de campos no conmutativos se pueden ver en [43].

En cuanto a las simetrías discretas se puede mostrar que el teorema *CPT* se cumple, ver [44] y [45]. De la relación

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j]_* = i\hbar\Theta_{ij} \quad (1.72)$$

es claro que  $\Theta$  no cambia bajo paridad ( $x_i \rightarrow -x_i$ ). Sin embargo, en algunos casos  $\Theta$  debe cambiar para que la teoría sea invariante bajo simetrías discretas.

Por ejemplo, en la teoría de norma  $U(1)$  no conmutativa para la conjugación de carga  $C$ , se tiene

$$\hat{A}_\mu \rightarrow -\hat{A}_\mu. \quad (1.73)$$

Por otra parte, si nos fijamos en el tensor de Faraday definido en (1.63), la primera parte de este tensor cambia de signo pero no la segunda parte. Por lo tanto, para que la acción de este campo sea invariante bajo  $C$  se debe hacer la modificación

$$\Theta \rightarrow -\Theta. \quad (1.74)$$

Un fenómeno similar ocurre con la simetría  $T$ . Esto implica que la simetría  $CP$  no se conserve.

### 1.4.2. Mezcla de divergencias $IR/UV$

Anteriormente vimos que una teoría de campos libre en un espacio no conmutativo no arroja resultados nuevos. Sin embargo, esto cambia si en las interacciones interviene el producto estrella. Por ejemplo, consideremos una interacción polinómica de la forma

$$\sum_{n=3}^L g_n \int d^{D+1} x \hat{\phi}_1 \star \hat{\phi}_2 \star \dots \star \hat{\phi}_n. \quad (1.75)$$

Lo primero que podemos notar es que la interacción es no local, pues se involucra un número infinito de derivadas. Esto concuerda con lo que se espera de una teoría sin puntos. En el espacio de momentos este término de interacción tiene la forma

$$\delta \left( \sum_i^n p_i \right) e^{\frac{-i}{2} \sum_{i < j} p_{i\mu} \Theta^{\mu\nu} p_{j\nu}} \left[ \tilde{\phi}_1(p_1) \tilde{\phi}_2(p_2) \dots \tilde{\phi}_n(p_n) \right] \quad (1.76)$$

en donde  $p_i$  es el momento que fluye en el vértice a través del  $i$ -ésimo  $\hat{\phi}$ . De esta expresión podemos ver que la única diferencia con el caso estándar es un factor de fase adicional. Debido a esta fase, el vértice que representa esta expresión no es invariante bajo permutaciones arbitrarias de los  $p_i$ , por lo que se debe respetar el orden en el cual las líneas emanan de cada vértice de un

diagrama de Feynman. Tomando en cuenta la conservación del momento, se puede verificar que el vértice es invariante sólo bajo permutaciones cíclicas de los  $p_i$ .

Llamaremos diagramas planos a aquéllos en los que los factores de fase en cada vértice se factorizan del diagrama como un factor común, que involucra solamente los impulsos de las líneas externas y se puede extraer fuera de las integrales. En este caso las integrales que resulten del cálculo de estos diagramas son idénticas a las correspondientes al caso conmutativo. Sin embargo, los diagramas no planos contienen la fase que incluyen momentos de líneas interiores, por lo que no se pueden factorizar de las integrales del diagrama de Feynman.

Veamos como afecta esta fase en la caso de tener la interacción

$$\frac{\lambda}{4!} \hat{\phi} \star \hat{\phi} \star \hat{\phi} \star \hat{\phi}$$

en  $d = 4$ . Del cálculo a un lazo se tiene [19] el diagrama plano

$$\Pi_{\text{plano}}^{(1)}(p) = \frac{1}{3} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2} \sim \Lambda^2 - m^2 \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) \quad (1.77)$$

Mientras que la contribución de los diagramas no planos es

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{no plano}}^{(1)}(p) &= \frac{1}{6} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik_\mu \Theta^{\mu\nu} p_\nu}}{k^2 + m^2} \\ &\sim \frac{1}{p_\mu \Theta_\rho^\mu \Theta^{\rho\nu} p_\nu + 1/\Lambda} + m^2 \ln [m^2 (p_\mu \Theta_\rho^\mu \Theta^{\rho\nu} p_\nu + 1/\Lambda)] \\ &\sim \Lambda_{eff}^2 - m^2 \ln \left( \frac{\Lambda_{eff}^2}{m^2} \right) \end{aligned} \quad (1.78)$$

con

$$\Lambda_{eff}^2 = \frac{1}{p_\mu \Theta_\rho^\mu \Theta^{\rho\nu} p_\nu + 1/\Lambda}. \quad (1.79)$$

Podemos notar que en límite ultravioleta el diagrama no plano es finito. Sin embargo, el diagrama es divergente en la región infrarroja del impulso externo  $p$ . Es decir, si tomamos el límite  $\Lambda \rightarrow \infty$  en (1.79) tenemos

$$\Lambda_{eff}^2 = \frac{1}{p_\mu \Theta_\rho^\mu \Theta^{\rho\nu} p_\nu}.$$

Por lo tanto, el límite infrarrojo de  $p$  corresponderá  $\Lambda_{eff}^2 \rightarrow \infty$  y el diagrama no plano será divergente en ese límite. De manera alternativa podemos tomar

primero el límite infrarrojo en (1.79), entonces  $\Lambda_{eff}^2 = \Lambda^2$  y el límite  $\Lambda \rightarrow \infty$  corresponde a  $\Lambda_{eff}^2 \rightarrow \infty$ . Por lo que, el diagrama no plano será divergente en el ultravioleta. Entonces, podemos decir que las divergencias en la región infrarroja del espectro de  $p$  provienen de la región ultravioleta de integración. Este fenómeno se conoce como mezcla  $IR/UV$ .

Este fenómeno de mezcla de divergencias nos muestra que para una teoría no conmutativa la física de bajas energías no está desconectada de la física de altas energías. En principio esto podría tener consecuencias para algunas constantes a gran escala, como la constante cosmológica [19]. Un fenómeno semejante de mezcla de divergencias se tiene en teoría de cuerdas [46]. De hecho algunos autores sugieren que esta propiedad se requiere para formular una teoría de campos válida a la escala de la gravedad cuántica [47].

## 1.5. Teoría de Cuerdas

En esta sección analizaremos el espacio no conmutativo que surge de cuerdas abiertas en un campo constante de Neveu-Schwarz  $B_{\mu\nu}$ . Veremos que este término no afecta las ecuaciones de movimiento pero sí puede afectar las condiciones de borde para una cuerda abierta. En particular la estructura simpléctica se modifica en el borde, esto tiene implicaciones relevante a nivel cuántico y para bajas energías.

Comenzaremos con el análisis de una partícula. Supongamos que tenemos la Lagrangiana

$$L = \frac{m}{2} \dot{X}^i \dot{X}_i - \frac{B}{2} \epsilon_{ij} \dot{X}^i X^j. \quad (1.80)$$

En el límite en que el campo magnético,  $B$ , es intenso el término cinético de la partícula en la Lagrangiana se puede despreciar. La Lagrangiana para este caso se puede tomar como

$$L = -\frac{B}{2} \epsilon_{ij} \dot{X}^i X^j. \quad (1.81)$$

Como esta Lagrangiana es invariante bajo reparametrizaciones la Hamiltoniana canónica es cero. Las constricciones para este caso son:

$$P_i + \frac{B}{2} \epsilon_{ij} X^j = 0 \quad (1.82)$$



Que claramente forman un álgebra de segunda clase. Aquí los paréntesis de Dirac son

$$\{X_i, X_j\}^* = -\frac{\epsilon_{ij}}{B}. \quad (1.83)$$

Por lo tanto, al cuantizar este sistema tendremos un espacio no conmutativo.

Ahora veamos que ocurre con la acción de Polyakov con un término similar a un campo magnético constante. En este caso la acción de Polyakov es

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma (\sqrt{g}g^{ab}\eta_{\mu\nu}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu - 2\pi\alpha'\epsilon^{ab}B_{\mu\nu}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu). \quad (1.84)$$

Al campos  $B_{\mu\nu}$  se le llama de Neveu-Schwarz. Podemos ver que el término adicional es una derivada total y no afecta las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, sí puede afectar las condiciones de borde y, por lo tanto, al propagador. Ahora, en la norma conforme la acción toma la forma

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma (g^{ab}\eta_{\mu\nu}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu - 2\pi\alpha'\epsilon^{ab}B_{\mu\nu}\partial_a X^\mu\partial_b X^\nu). \quad (1.85)$$

Podemos ver que hora tenemos dos posibles condiciones de borde

$$n_a (g_{\mu\nu}\partial^a X^\mu + 2\pi\alpha'\epsilon^{ab}B_{\mu\nu}\partial_b X^\mu) |_{\partial\Sigma} = 0, \quad (1.86)$$

$$\delta X^\nu |_{\partial\Sigma} = 0. \quad (1.87)$$

Por simplicidad, tomaremos la primera condición para  $p$  coordenadas,  $X^i$  con  $i = 1, \dots, p$  y la segunda condición de borde para las coordenadas restantes. También supondremos que el tensor  $B_{\mu\nu}$  es diferente de cero sólo para los índices  $i, j \leq p$ . En el análisis que vamos hacer solo nos interesan las coordenadas  $X^i$ , para este caso la dinámica se puede extraer de la acción

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma (g^{ab}\eta_{ij}\partial_a X^i\partial_b X^j - 2\pi\alpha'\epsilon^{ab}B_{ij}\partial_a X^i\partial_b X^j). \quad (1.88)$$

Cuyas ecuaciones de movimiento son

$$\square X^i = 0 \quad (1.89)$$

con las condiciones de borde

$$\partial_\sigma X^i + T_j^i \partial_\tau X^j = 0 \quad \sigma = -\pi, \pi \quad (1.90)$$

con  $T_{ij}$  proporcional a  $B_{ij}$ . Ocupando las variables canónicas las condiciones de borde se pueden escribir como

$$P^i + (T^{-1}M)_j^i \partial_\sigma X^j = 0 \quad \sigma = -\pi, \pi \quad (1.91)$$

con  $M_{ij} = (1 - T^2)_{ij}$ . Claramente estas condiciones de borde tienen forma de constricciones. Por otra parte, la estructura simpléctica estándar tiene la forma

$$\begin{aligned} \{X_i(x, t), X_j(x', t)\} &= 0, & \{X_i(x, t), P_j(x', t)\} &= \delta_{ij} \delta(x - x'), \\ \{P_i(x, t), P_j(x', t)\} &= 0. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Por lo tanto, se puede esperar que en el borde esta estructura simpléctica no sea consistente con las condiciones de frontera (1.91).

La solución general para las ecuaciones de movimiento en este caso tiene la forma

$$X^i(x, t) = A_i + C_i t + T_{ij} C_j x + \sum_{n \geq 1} \frac{q_{ni}(t)}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) - \frac{T_{ij} p_{nj}(t)}{n\sqrt{\pi}} \sin(nx).$$

En donde  $A_i, C_i, q_{ni}(t), p_{ni}(t)$  son coeficientes de Fourier. Además se satisfacen las ecuaciones  $\dot{q}_{ni} = p_{ni}(t)$  y  $\dot{p}_{ni}(t) = -n^2 q_{ni}(t)$ . De la definición de los momentos canónicos tenemos

$$P_i(x, t) = M_{ij} [C_j + \sum_{n \geq 1} \frac{p_{ni}(t)}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)].$$

Por lo tanto, los coeficientes de Fourier se pueden escribir como

$$q_{ni}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx X_i(x, t) \cos(nx), \quad (1.93)$$

$$p_{ni}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx M_{ij}^{-1} P_j(x, t) \cos(nx), \quad (1.94)$$

$$C_i = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx M_{ij}^{-1} P_j(x, t), \quad (1.95)$$

$$A_i = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx [\phi_i(x, t) - M_{ij}^{-1} P_j(x, t)]. \quad (1.96)$$

Ocupando la estructura simpléctica (1.92) se puede mostrar que se cumplen los siguientes paréntesis de Poisson

$$\{q_{in}(t), p_{jm}(t)\} = M_{ij}^{-1} \delta_{nm}, \quad \{A_i, C_j\} = \frac{M_{ij}^{-1}}{2\pi}$$

y cero en cualquier otro caso. Ahora, introduciendo la solución exacta en la estructura simpléctica, tenemos

$$\begin{aligned}\{X_i(x, t), P_j(x', t)\} &= \delta_{ij} \left[ \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 1} \cos(nx') \cos(nx) \right] = \delta_{ij} \delta(x - x'), \\ \{X_i(x, t), X_j(x', t)\} &= (M^{-1}T)_{ij} \left[ \frac{(x + x')}{2\pi} + \sum_{n \geq 1} \frac{\text{senn}(x + x')}{n\pi} \right].\end{aligned}$$

En particular en la frontera

$$\{X_i(\pm\pi, t), X_j(\pm\pi, t)\} = \pm(M^{-1}T)_{ij}.$$

Por lo tanto, al cuantizar este sistema también tendremos coordenadas no conmutativas, solo que en este caso en la frontera. Esto es relevante, pues en los bordes de una cuerda viven en una  $D$ -brana y en las  $D$ -branas se tienen los términos de norma. Por lo tanto, se espera que a bajas energías se obtengan teorías de norma no conmutativas.

### 1.5.1. Aproximación de Integrales de trayectoria

Veamos ahora que ocurre a nivel cuántico con esta cuerda y en particular su límite a bajas energías. La acción (1.88) se puede poner de la forma

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma (g^{ab}\eta_{ij}\partial_a X^i \partial_b X^j - 2i\pi\alpha' \epsilon^{ab} B_{ij} \partial_a X^i \partial_b X^j). \quad (1.97)$$

Aquí, hemos hecho una rotación de Wick, por lo que la métrica en la hoja de mundo es  $g_{ab} = \text{dia}(1, 1)$ . Ahora, las condiciones de borde de esta cuerda tienen la forma

$$(\partial_\sigma X^i + 2\pi i \alpha' B_j^i \partial_\tau X^j) |_{\partial\Sigma} = 0. \quad (1.98)$$

Veamos que ocurre en un proceso dispersivo a nivel árbol. A este orden la topología de la hoja de mundo es la del disco. El disco puede ser mapeado conformalmente a la parte superior del plano; en esta descripción las condiciones de borde toman la forma

$$\eta_{ij}(\partial - \bar{\partial})X^j + 2\pi\alpha' B_{ij}(\partial + \bar{\partial})X^j |_{z=\bar{z}} = 0. \quad (1.99)$$

El propagador con estas condiciones de borde tiene la forma [13]

$$\begin{aligned}\Delta^{ij}(z, z') &= \langle X^i(z) X^j(z') \rangle = -\alpha[\eta^{ij} \log |z - z'| - \eta^{ij} \log |z - \bar{z}'| \\ &+ G^{ij} \log |z - \bar{z}'|^2 + \frac{\Theta^{ij}}{2\pi\alpha} \log \frac{z - \bar{z}'}{\bar{z} - z'} + D^{ij}].\end{aligned} \quad (1.100)$$

Con

$$\begin{aligned}
G^{ij} &= \left( \frac{1}{\eta + 2\pi\alpha' B} \right)_S^{ij} = \left( \frac{1}{\eta + 2\pi\alpha' B} \eta \frac{1}{\eta - 2\pi\alpha' B} \right)^{ij}, \\
G_{ij} &= \eta_{ij} - (2\pi\alpha')^2 (B\eta^{-1}B)_{ij}, \\
\Theta^{ij} &= 2\pi\alpha' \left( \frac{1}{\eta + 2\pi\alpha' B} \right)_A^{ij} = -(2\pi\alpha')^2 \left( \frac{1}{\eta + 2\pi\alpha' B} B \frac{1}{\eta - 2\pi\alpha' B} \right)^{ij},
\end{aligned} \tag{1.101}$$

aquí  $()_S$  y  $()_A$  denotan la parte simétrica y antisimétrica de la matriz. El tensor  $D^{ij}$  es contante y solo puede depender de  $B$ , esta constante no tiene un papel relevante y se puede fijar de manera conveniente. Podemos ver que el propagador evaluado en la frontera (eje real) tiene la forma

$$\Delta^{ij}(\tau, \tau') = -\alpha G^{ij} \log(\tau - \tau')^2 + \frac{i\Theta^{ij}}{2} \epsilon(\tau - \tau'). \tag{1.102}$$

Con  $\epsilon(\tau)$  la función que es 1 o  $-1$  para  $\tau$  positivo o negativo. Al primer término del propagador en la frontera lo podemos identificar como el asociado a una métrica efectiva  $G^{ij}$ , es decir, como si cambiáramos la métrica original por  $G_{ij}$ . El otro término del propagador es completamente nuevo.

Veamos que implicaciones tiene el nuevo término del propagador (1.102) a bajas energías, para hacer este análisis se requiere de calcular procesos dispersivos con estados que viven en la frontera. Ahora, para calcular amplitudes de dispersión en teoría de cuerdas se requiere de los operadores de vértice asociados a los estados dispersados. Por ejemplo, para un estado con impulso  $p$ , los operadores de vértice tienen la forma general

$$V_p(\sigma_\alpha) =: P(\partial X, \partial^2 X^A, \dots) e^{p \cdot X} :, \tag{1.103}$$

donde  $P$  es un polinomio en las derivadas de los campos  $X^A(\sigma_\alpha)$ , que dependerá del estado de la cuerda. Aquí la definición del orden normal tiene la forma

$$: X^i(z) X^j(z') := X^i(z) X^j(z') + \Delta^{ij}(z, z')$$

Como ejemplo, consideremos el producto de dos operadores de vértice del taquión con impulsos  $p$  y  $q$  evaluados en el borde de la hoja de mundo:

$$\begin{aligned}
:e^{ip \cdot X(\tau)} :: e^{iq \cdot X(\tau')} : &= e^{-\Delta^{ij}(\tau, \tau') p_i q_j} : e^{ip \cdot X(\tau)} e^{iq \cdot X(\tau')} : \\
&= (\tau - \tau')^{2\alpha' p_i G^{ij} p_j} e^{-\frac{i}{2} p_i \Theta^{ij} p_j \epsilon(\tau - \tau')} : e^{ip \cdot X(\tau)} e^{iq \cdot X(\tau')} : \\
&= e^{-\frac{i}{2} p_i \Theta^{ij} p_j \epsilon(\tau - \tau')} : e^{ip \cdot X(\tau)} :: e^{iq \cdot X(\tau')} :
\end{aligned} \tag{1.104}$$

Donde  $\vdots\vdots$  es el orden normal calculado según la fórmula estándar, pero usando el propagador

$$\Delta_0^{ij}(\tau, \tau') = -\alpha' G^{ij} \log(\tau - \tau')^2, \quad (1.105)$$

en lugar del propagador completo. Este coincide con el propagador del problema sin campo magnético,  $B_{ij} = 0$ , con la única diferencia que  $G_{ij}$  aparece en lugar de  $\eta_{ij}$ .

Por lo tanto, este producto de operadores de vértice se reduce al producto de operadores usual, salvo que se debe cambiar la métrica  $\eta_{ij}$  por la métrica de cuerdas abiertas  $G_{ij}$  y aparece el factor de fase

$$e^{-\frac{i}{2} p_i \theta^{ij} p_j \epsilon(\tau - \tau')}$$

como vemos este factor de fase es característico del producto de Moyal escrito en el espacio de momentos, por lo que es natural esperar que la teoría efectiva a bajas energías sea no conmutativa.

En cuanto al producto de operadores de vértice más generales (asociados a estados excitados de la cuerda), se debe observar que como el segundo término en el propagador de contiene  $\epsilon(\tau - \tau')$ , para  $\tau > \tau'$  no contribuirá a las contracciones de las derivadas de  $X^i$ , de donde, se puede ver que un producto arbitrario de operadores de vértice será

$$\prod_{n=1}^k : P_n(\partial X(\tau_n), \partial^2 X(\tau_n), \dots) e^{ip^n \cdot X(\tau_n)} : \quad (1.106)$$

$$= e^{-\frac{i}{2} \sum_{n>m} p_i^n \theta^{ij} p_j^m \epsilon(\tau_n - \tau_m)} \prod_{n=1}^k : P_n(\partial X(\tau_n), \partial^2 X(\tau_n), \dots) e^{ip^n \cdot X(\tau_n)} : \quad (1.107)$$

Por lo tanto, el producto de operadores de vértice coincide con el usual, salvo el factor de fase dependiente de los impulsos y el cambio de la métrica  $\eta_{ij}$  por  $G_{ij}$ . La conservación de momento asegura que el factor de fase sólo depende del orden cíclico de los  $\tau_n$  en el borde del disco.

Para calcular una amplitud de dispersión tenemos

$$\begin{aligned} S_{i \rightarrow f}(G_{\mu\nu}, \Theta^{\mu\nu}) &= \int \prod_{n=1}^k d\tau_n \left\langle \prod_{n=1}^k : P_n(\partial X(\tau_n), \partial^2 X(\tau_n), \dots) e^{ip^n \cdot X(\tau_n)} : \right\rangle \\ &= e^{-\frac{i}{2} \sum_{n>m} p_i^n \theta^{ij} p_j^m} S_{i \rightarrow f}(G_{\mu\nu}, \Theta^{\mu\nu} = 0). \end{aligned} \quad (1.108)$$

Por lo tanto, para encontrar la teoría de campos efectiva para este proceso se procede de la manera estándar, en nuestro caso sólo debemos agregar el término de fase extra en cada vértice. Como vimos en la sección anterior, este término extra indica que tenemos una teoría no conmutativa. Por ejemplo, en el caso de tener taquiones, el vértice del diagrama de Feynman se construye con el término de interacción

$$\int d^D x \phi_{i_1} \star \phi_{i_2} \star \cdots \star \phi_{i_n}. \quad (1.109)$$

Es decir, a bajas energías tenemos una teoría de campos no conmutativa.

## 1.6. Mapeo de Seiberg-Witten

Cuando ponemos de fondo un campo de norma la acción original (1.97) se modifica con la suma del término

$$S_{\text{norma}} = \int_{\partial\sigma} dt n_\alpha \epsilon^{\alpha\beta} A_A(X) \partial_\beta X^A. \quad (1.110)$$

Integrando por partes, se puede ver que este término es equivalente a sumar al campo  $B_{AB}$  la contribución  $F_{AB}[A]$ . Alternativamente, podríamos absorber el campo  $B_{AB}$  en el campo de norma mediante un término  $1/2 B_{AB} X^A$ . Esta ambigüedad se fija mediante la condición  $F_{AB}[A] \rightarrow 0$  cuando  $X \rightarrow \infty$ , por lo que cualquier constante en  $F_{AB}[A]$  se considera parte de  $B_{AB}$ .

La suma del nuevo término de interacción convierte al modelo de cuerdas en un modelo sigma no lineal. Por lo tanto, las interacciones darán origen a infinitos, los cuales deberán ser regularizados.

Clásicamente el término de la acción (1.110) es invariante bajo las transformaciones de norma

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda. \quad (1.111)$$

Sin embargo, en la integral funcional evaluada con esta acción, es necesario regularizar los infinitos originados por el producto de operadores en el mismo punto. De hecho la acción regularizada no es invariante bajo estas transformaciones de norma. La parte que ayuda a cancelar los infinitos tiene términos que no son invariante de norma. La acción regularizada es invariante bajo las transformaciones de norma

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda + [A_\mu, \lambda]_\star \quad (1.112)$$

Esto muestra que la simetría de norma en la Brana es una simetría de norma no conmutativa. Sin embargo, Seiberg y Witten [13] muestran que ocupando

el método de regularización de Pauli-Villars la transformación de norma que se obtiene es la estándar (1.111). Como el resultado difiere por el hecho de ocupar diferentes métodos de regularización, esto indica que debe existir un mapeo entre los dos campos de norma, es decir, entre una teoría de norma conmutativa y una no conmutativa.

Veamos en particular una teoría con simetría de norma  $U(1)$ . En el caso estándar tenemos las transformaciones de norma

$$\delta_\lambda A_\mu = \partial_\mu \lambda \quad (1.113)$$

Mientras que en el caso no conmutativo,  $U(1)_*$  tenemos

$$\hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{A}_\mu = \partial_\mu \hat{\lambda} + \left[ \hat{\lambda}, \hat{A}_\mu \right]_* \quad (1.114)$$

Debido a que se deben respetar las simetrías de cada lado de la transformación, para cada un cambio infinitesimal de norma  $\lambda$  de la teoría conmutativa debe existir un  $\hat{\lambda}$  en la teoría no conmutativa tal que

$$\hat{A}_\mu[A_\mu + \delta_\lambda A_\mu] = \hat{A}_\mu[A_\mu] + \hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{A}_\mu[A_\mu]. \quad (1.115)$$

Uno espera que el mapeo entre los dos tipos de campos dependa de  $\Theta$ , y cuando este parámetro es nulo el mapeo debe ser la identidad. Los términos de mayor orden en  $\Theta$  sólo pueden ser combinaciones locales de  $A_\mu$  y sus derivadas que respeten (1.115). Por ejemplo, por sustitución directa se puede verificar que el mapeo correcto es

$$\hat{A}_\mu[A] = A_\mu - \frac{\Theta^{\rho\sigma}}{2} A_\rho (\partial_\sigma A_\mu + F_{\sigma\mu}) + \mathcal{O}(\Theta^2), \quad (1.116)$$

$$\hat{\lambda}[\lambda, A] = \lambda + \frac{\Theta^{\rho\sigma}}{2} \partial_\rho \lambda A_\sigma + \mathcal{O}(\Theta^2). \quad (1.117)$$

Por lo tanto, con este mapeo nos podemos pasar de una teoría de norma no conmutativa a una conmutativa

### 1.6.1. Teoría de campos no conmutativos y Gravedad

Una de las motivaciones por las que se proponen la no conmutatividad espacial es por que se espera que ésta sea útil para la unificación de la gravedad con otros campos. Sin embargo, a pesar de diferentes propuestas hechas, hasta ahora, no existe una formulación final de la gravedad en espacios no conmutativos. No obstante un resultado inesperado en este sentido fue dado por V. Rivelles [48]. A continuación presentamos un resumen breve de su trabajo.

Supongamos que tenemos el campo electromagnético el cual esta acoplado a un campo escalar

$$\hat{D}_\mu \hat{\phi} = \partial_\mu \hat{\phi} - iA_\mu \star \hat{\phi}. \quad (1.118)$$

En este caso la acción está dada por

$$s = \int d^4x \hat{D}^\mu \hat{\phi} \star \hat{D}_\mu \hat{\phi}^\dagger \quad (1.119)$$

Ahora, si ocupamos el mapeo de Seiberg-Witten,

$$\hat{A}_\mu = A_\mu - \frac{1}{2} \Theta^{\alpha\beta} A_\alpha (\partial_\beta A_\mu + F_{\beta\mu}) + \mathcal{O}(\Theta^2), \quad (1.120)$$

$$\hat{\phi} = \phi - \frac{1}{2} \Theta^{\alpha\beta} A_\alpha \partial_\beta \phi + \mathcal{O}(\Theta^2) \quad (1.121)$$

Con este mapeo a primer orden en  $\Theta$  la acción (1.119) toma la forma

$$S = \int d^4x [(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi)^\dagger - \frac{1}{2} \left( \Theta^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + \Theta^{\nu\alpha} F_\alpha^\mu + \frac{1}{2} \eta^{\nu\mu} \Theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) (\partial_\nu \phi)(\partial_\mu \phi)^\dagger] \quad (1.122)$$

Por otra parte, la acción de un campo complejo  $\phi$  en un fondo curvo con métrica  $g_{\mu\nu}$  es

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi^\dagger. \quad (1.123)$$

Ahora, si consideramos una métrica de la forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu} + h_{\nu\mu} + \eta_{\nu\mu} h, \quad (1.124)$$

es decir, si suponemos que la métrica plana es perturbada infinitesimalmente por  $h_{\nu\mu}$ , la acción (1.123) tiene la forma

$$S = \int d^4x [(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi)^\dagger - h^{\mu\nu} (\partial^\mu \phi)(\partial_\nu \phi)^\dagger + 2h (\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi)^\dagger]. \quad (1.125)$$

De donde, podemos hacer la identificación

$$h^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \Theta^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + \Theta^{\nu\alpha} F_\alpha^\mu + \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \Theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right). \quad (1.126)$$



Podemos observar que esta métrica no tiene traza, es decir,  $h = 0$ . Por lo tanto, la acción (1.122) tiene la misma estructura que (1.123). La métrica completa tiene la forma

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left( \Theta^{\mu\alpha} F_{\alpha}^{\nu} + \Theta^{\nu\alpha} F_{\alpha}^{\mu} + \frac{1}{2} \eta^{\alpha\mu} \Theta^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right). \quad (1.127)$$

Por lo tanto, a este orden, esta teoría de campos no conmutativa puede ser interpretada como una teoría de campos normal con fondo curvo generado por el campo de norma.

## Capítulo 2

# Condiciones de borde como constricciones

En este capítulo proponemos un nuevo método para calcular la forma en que las condiciones de borde afectan la estructura simpléctica de una teoría de campos. El nuevo método se aplica a diferentes ejemplos tratados en la literatura, en particular a la cuerda bosónica en un fondo de ondas *PP*. Para este ejemplo se obtienen resultados diferentes a los reportados por otros autores, se dan argumentos del porque los resultados que obtenemos son los correctos. Además se muestran las ventajas que tiene este método respecto a otros.

Los resultados de este trabajo se encuentran en proceso de publicación, una versión preliminar se tiene en la referencia [20].

### 2.1. Introducción

Generalmente al trabajar con una teoría de campos se consideran las condiciones de borde al infinito, por esta razón no es importante ver si las condiciones de borde modifican la estructura simpléctica. Sin embargo, si la teoría está definida en un espacio finito y las condiciones de borde son no triviales la situación puede cambiar. Ya que es posible que la estructura simpléctica estándar no sea consistente con las condiciones de borde. Debido a que hay dos sistemas físicos en los que este problema es importante, recientemente éste adquirió interés para diferentes autores. El primer sistema al que nos referimos está en el contexto de la teoría de cuerdas. En esta teoría se mostró que una cuerda abierta en un campo magnético constante tiene paréntesis de Poisson no triviales en los bordes [18]. Esto implica que a nivel cuántico los bordes presentan no conmutatividad, además, como los bordes de la cuerda abierta viven

en una  $D$ -brana, tendremos  $D$ -branas con coordenadas no conmutativas. A bajas energías esto implica campos no conmutativos [13]. Así, en este sistema encontramos una relación entre la teoría de cuerdas y la teoría de campos no conmutativos. El otro sistema al que nos referimos está dentro del estudio de las propiedades térmicas de los hoyos negros en  $(2 + 1)$  dimensiones. Aquí algunos autores han tomado la propuesta de tomar al horizonte de eventos de un hoyo negro como una frontera física [49]. Esto modifica el álgebra de los generadores de las transformaciones de norma, dando lugar a una carga central clásica en el borde [50]. Así, siguiendo a Cardy [51], con la carga central se puede determinar el comportamiento asintótico de la densidad de estados y con esto obtener la entropía para un hoyo negro en  $(2 + 1)$  dimensiones. La entropía obtenida de esta forma concuerda con la de Bekenstein-Hawking.

En este trabajo nos limitaremos al primer sistema. La acción de este sistema difiere de la acción de la cuerda normal por un término de borde, que no modifica las ecuaciones de movimiento pero sí las condiciones de borde. Ocupando la solución exacta de las ecuaciones de movimiento se mostró que en los bordes de la cuerda hay no conmutatividad [18]. Este resultado dejó en claro que en una teoría de campos las condiciones de borde de las ecuaciones de movimiento pueden afectar a la estructura simpléctica. Una propuesta para obtener la modificación de la estructura simpléctica debido a las condiciones de borde se basa en suponer que las condiciones de borde se pueden tomar como constricciones y se aplican el Método de Dirac para sistemas que tienen constricciones [52]. Esta propuesta es particularmente interesante pues de ser correcta nos permitiría obtener la forma en que se deben modificar los paréntesis de Poisson en los bordes sin recurrir a la solución exacta de las ecuaciones de movimiento, lo que sería útil para sistemas con ecuaciones de movimiento complicadas. Además de que en el borde los paréntesis de Poisson tendrían las propiedades de un paréntesis de Dirac. Los resultados que arrojó este método al aplicarse al sistema de la cuerda abierta en un campo magnético constante fueron los correctos. No obstante el método tiene algunos problemas, por ejemplo: al aplicar el Método de Dirac no se pueden despejar los multiplicadores de Lagrange lo que después da lugar a un número infinito de constricciones, todas de segunda clase, esto implica que en el borde tenemos un número infinito y negativo de grados de libertad. En la literatura existen varias propuestas que han intentado resolver los problemas de este método [53], [54], [55], [56], [57] y [58]. Las modificaciones propuestas al método original obtienen los resultados correctos para el sistema en cuestión, mas la mayoría sólo funcionan para este caso en particular, por lo que no se puede aplicar directamente a otros sistemas. Así, encontrar el método para obtener la modificación a la estruc-

tura simpléctica debido a las condiciones de borde es aún un problema abierto.

Si bien en este trabajo no vamos a dar la solución al problema general, proponemos un método alternativo que no presenta inconsistencias y funciona para los casos que se han tratado en la literatura de cuerdas. En la propuesta original dada en [52] se propone tomar las condiciones de borde como si fueran constricciones en un punto. Por esta razón al tratar de obtener el álgebra de constricciones o sacar su evolución se obtienen deltas de Dirac evaluadas en un punto, y de aquí, infinitos. El método alternativo se basa en la idea original de la referencia [52], sólo que suponemos que las constricciones, condiciones de borde, son válidas en toda la región del dominio de la teoría. Claramente estamos cambiando de problema, entonces argumentamos que las propiedades de los paréntesis de Dirac en el interior del problema modificado son las mismas que las de los paréntesis de Poisson del problema original. Mostramos que los resultados que se obtienen para diferentes casos son correctos (campo escalar con condiciones de Neumann y Dirichlet, cuerda abierta en campo magnético constante). Posteriormente se aplica el método a el caso de una cuerda abierta con fondo de ondas  $PP$  y campo magnético constante, los resultados que se obtienen difieren ligeramente de los de otros autores [59], sin embargo se muestra que la estructura simpléctica que aquí se obtiene sí es consistente. Por último se da una discusión de los resultados obtenidos y del método propuesto.

## 2.2. No conmutatividad y constricciones

Antes de entrar en materia veamos un ejemplo concreto en donde se obtiene no conmutatividad debido a constricciones. Consideremos una partícula no relativista en un campo magnético constante,  $B$ . La Lagrangiana de este sistema es

$$L = \frac{m}{2} \dot{X}^i \dot{X}_i - \frac{B}{2} \epsilon_{ij} \dot{X}^i X^j. \quad (2.1)$$

En el límite en que el campo magnético es intenso el término cinético de la partícula en la Lagrangiana se puede despreciar. La Lagrangiana se reduce a

$$L = -\frac{B}{2} \epsilon_{ij} \dot{X}^i X^j. \quad (2.2)$$

De donde los momentos canónicos están dados por

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i} = P_i = -\frac{B}{2} \epsilon_{ij} X^j. \quad (2.3)$$

Claramente la matriz

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{X}_i \partial \dot{X}_j} \quad (2.4)$$

no es invertible. Además la Hamiltoniana canónica

$$H_c = \dot{X} \cdot P - L \quad (2.5)$$

es nula. En general, cuando la matriz  $W_{ij}$  no es invertible existen relaciones entre las coordenadas y los momentos canónicos de la forma

$$\phi_\alpha(X, P) = 0, \quad (2.6)$$

a estas relaciones se les llama constricciones. En nuestro caso es claro que tenemos las relaciones

$$\chi_i = P_i + \frac{B}{2} \epsilon_{ij} X^j = 0. \quad (2.7)$$

Cuando se tienen este tipo de relaciones el método natural para construir el formalismo canónico es el llamado Método de Dirac [60]. El Método de Dirac clasifica las constricciones en las de primera clase  $\phi_I$  y las de segunda clase. Las de primera clase satisfacen

$$\{\phi_I, \phi_\alpha\} = M_{I\alpha}{}^\beta \phi_\beta. \quad (2.8)$$

Es decir, una restricción es de primera clase si el paréntesis de Poisson entre ésta y cualquier otra restricción se anula, módulo restricciones. Por otra parte, una restricción es de segunda clase si no es de primera clase. En nuestro ejemplo particular tenemos

$$\{\chi_i, \chi_j\} = B \epsilon_{ij}, \quad (2.9)$$

por lo tanto, sólo hay constricciones de segunda clase.

Según el método de Dirac, cuando se tienen constricciones de segunda clase los paréntesis de Poisson se deben de cambiar por los paréntesis de Dirac. Estos paréntesis se definen como

$$\{A, B\}^* = \{A, B\} - \{A, \chi_\alpha\} C^{\alpha\beta} \{\chi_\beta, B\} \quad (2.10)$$

con  $A$  y  $B$  funciones arbitrarias del espacio fase y  $C^{\alpha\beta}$  la inversa de la matriz  $C_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \chi_\beta\}$ . En el caso de nuestro ejemplo los paréntesis de Dirac para las coordenadas son

$$\{X_i, X_j\}^* = -\frac{\epsilon_{ij}}{B}. \quad (2.11)$$

Ahora, cuando se cuantiza un sistema que tiene constricciones, los paréntesis que se promueven a conmutadores son los de Dirac. Por lo tanto, a nivel cuántico nuestro sistema tendrá los conmutadores

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = -i\hbar \frac{\epsilon_{ij}}{B}. \quad (2.12)$$

De donde, a nivel cuántico tendremos un espacio no conmutativo. Este es primer sistema del que se supo tiene una manifestación no conmutativa en las coordenadas, el trabajo que lo reporta data de 1932 y se debe a R. Peierls [7].

Como vemos cuando tenemos relaciones de la forma

$$\chi_i = P_i + \frac{B}{2} \epsilon_{ij} X^j = 0 \quad (2.13)$$

es posible tener no conmutatividad en las coordenadas. Posteriormente veremos que en una teoría de campos con condiciones de borde de esta forma se tiene no conmutatividad en el borde.

## 2.3. Condiciones de Neumman en Mecánica Clásica

Por lo general en mecánica clásica al aplicar el principio de acción se imponen condiciones de borde de Dirichlet y éstas son consistentes con la estructura simpléctica estándar. Sin embargo, si imponemos condiciones de Neumman tenemos sorpresas. Veamos porque. Supongamos que tenemos la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q(t), \dot{q}(t)), \quad (2.14)$$

al hacer una variación obtenemos

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right) \Big|_{t_1}^{t_2} \quad (2.15)$$

El principio de acción se puede aplicar con las condiciones

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (\text{Dirichlet}) \quad \text{ó} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t_1) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t_2) = 0 \quad (\text{Neumman}).$$

Consideremos sólo el segundo caso, condiciones de Neumman, y veamos que ocurre con el formalismo Hamiltoniano. Por la definición del momento canónico

$$p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}},$$

las condiciones de borde toman la forma

$$p(t_1) = p(t_2) = 0.$$

Claramente esto no implica que la transformación de Legendre para pasar del espacio de configuraciones al espacio fase no esté bien definida. Sin embargo, las condiciones de borde toman la forma de constricciones. Veamos que ocurre con las ecuaciones de movimiento y la estructura simpléctica para este caso. La acción Hamiltoniana es

$$S_H = \int_{t_1}^{t_2} dt [p\dot{q} - H(p, q)]. \quad (2.16)$$

Al hacer una variación tenemos

$$\delta S_H = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ \delta p \left( \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) - \delta q \left( \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \right) \right] + p \delta q(t) \Big|_{t_1}^{t_2}. \quad (2.17)$$

Así, con las condiciones de borde de Neumann obtenemos las ecuaciones de movimiento que, con la estructura simpléctica estándar, se pueden escribir como

$$\dot{q}(t) = \{q(t), H\}, \quad (2.18)$$

$$\dot{p}(t) = \{p(t), H\} \quad (2.19)$$

$$\text{con } p(t_1) = p(t_2) = 0. \quad (2.20)$$

Si cuantizamos a este sistema de la forma estándar tendremos inconsistencias, pues la cuantización canónica establece

$$[\hat{q}(t), \hat{q}(t)] = [\hat{p}(t), \hat{p}(t)] = 0 \quad (2.21)$$

$$\text{y } [\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = i \quad (2.22)$$

Por otra parte, en el borde se debe cumplir

$$[\hat{q}(t), \hat{p}(t)] \Big|_{t=t_1, t_2} = [\hat{q}(t = t_1, t_2), 0] = 0. \quad (2.23)$$

Veamos ejemplos concretos.

·) La partícula libre.

El operador Hamiltoniano para este caso es

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

y las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{d\hat{q}(t)}{dt} = \frac{\hat{p}(t)}{m}, \quad \frac{d\hat{p}(t)}{dt} = 0 \quad (2.24)$$

$$\text{con } \hat{p}(t_1) = \hat{p}(t_2) = 0. \quad (2.25)$$

La solución resulta ser

$$\tilde{q}(t) = \hat{q}(t_1) = \text{cte} \quad \hat{p}(t) = 0$$

que cumplen

$$[\tilde{q}(t), \hat{q}(t)] = [\hat{p}(t), \hat{p}(t)] = [\tilde{q}(t), \hat{p}(t)] = 0$$

que son diferentes a las reglas estándar de conmutación.

·) Oscilador armónico.

Cuyo operador Hamiltoniano es

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{\omega^2}{2} \hat{q}(t)^2$$

y las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{d\hat{q}(t)}{dt} = \hat{p}(t), \quad \frac{d\hat{p}(t)}{dt} = -\omega^2 \hat{q}(t) \quad (2.26)$$

$$\text{con } \hat{p}(t_1) = 0 = \hat{p}(t_2) = 0. \quad (2.27)$$

La solución resulta ser

$$\tilde{q}(t) = \hat{q}(t_1) \cos(\omega t), \quad \hat{p}(t) = -\hat{q}(t_1) \omega \sin(\omega t)$$

para este caso  $\omega$  sólo puede ser de la forma

$$\omega = \frac{2\pi n}{t_2}$$

Así, las reglas de conmutación son

$$[\tilde{q}(t), \hat{q}(t)] = [\hat{p}(t), \hat{p}(t)] = [\tilde{q}(t), \hat{p}(t)] = 0$$

que son diferentes a las reglas canónicas de conmutación.

En esencia en este caso todo conmuta y no hay principio de incertidumbre, por lo tanto tampoco mecánica cuántica.

En resumen, podemos concluir que cuando imponemos condiciones de borde de Neumann en mecánica clásica la estructura simpléctica estándar no es consistente con el sistema.



## 2.4. Condiciones de borde y estructura simpléctica

En las secciones anteriores vimos que si un sistema tiene relaciones del tipo

$$\chi_i = P_i + \frac{B}{2}\epsilon_{ij}X^j = 0 \quad (2.28)$$

se puede tener no conmutatividad a nivel cuántico. Además, que las condiciones de borde pueden hacer incompatible la estructura simpléctica estándar con el sistema. Todo esto a nivel de mecánica clásica. Ahora veremos que ocurre en una teoría de campos con condiciones de borde espaciales.

Supongamos que tenemos la teoría de campos definida en  $M = \Sigma \times \mathfrak{R}$  de  $(d + 1)$  dimensiones, donde  $\Sigma$  es una variedad con frontera  $\partial\Sigma$ . Ahora, recordemos la forma en que obtenemos las condiciones de borde partiendo del principio de acción. Sea la acción

$$S = \int_M dx^d L(\phi_a(x), \partial_\alpha \phi_a(x)), \quad (2.29)$$

entonces, al hacer una variación de esta acción obtenemos

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_M dx^d \left[ \frac{\partial L}{\partial \phi_a(x)} - \partial_\alpha \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha \phi_a(x))} \right) \right] \delta \phi_a(x) \\ &+ \int_M dx^d \partial_\alpha \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha \phi_a(x))} \right) \delta \phi_a(x) \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Si el sistema no tiene frontera el segundo término no existe en la variación, en el caso contrario tenemos dos opciones para eliminar el segundo término. Podemos pedir que

$$\delta \phi_a(x)|_{x \in \partial\Sigma} = 0 \quad \text{o} \quad \left( \frac{\partial L}{\partial (\partial_\alpha \phi_a(x))} \right)(x)|_{x \in \partial\Sigma} = 0. \quad (2.31)$$

El primer caso corresponde a las condiciones de Dirichlet y el segundo al de las de Neumann. Al pasar al formalismo canónico ambas condiciones tendrán la forma

$$F_a(\phi, \partial\phi, \Pi, \partial\Pi)(x)|_{x \in \partial\Sigma} = 0.$$

Así, en el formalismo canónico tendremos la Hamiltoniana canónica

$$H_c = \int_\Sigma dx^{d-1} H_c(\phi, \partial\phi, \Pi, \partial\Pi), \quad (2.32)$$

la estructura simpléctica

$$\{\phi_a(x, t), \phi_b(x', t)\} = \{\Pi_a(x, t), \Pi_b(x', t)\} = 0 \quad (2.33)$$

$$\{\phi^a(x, t), \Pi_b(x', t)\} = \delta_b^a \delta(x - x'), \quad (2.34)$$

y las condiciones de borde

$$F_a(\phi, \partial\phi, \Pi, \partial\Pi)|_{x \in \partial\Sigma} = 0. \quad (2.35)$$

Podemos suponer que las igualdades de los paréntesis de Poisson son válidas en  $\Sigma$ , salvo un conjunto de medida cero. Por lo tanto, la teoría puede admitir una modificación de esta estructura en un conjunto de medida cero sin ser afectada en su totalidad. Como se comentó en la introducción, las condiciones de borde pueden no ser consistentes con la estructura simpléctica, por ejemplo, supongamos que el principio de acción arroja la condición de borde

$$F_a = [\Pi_a(x) - \phi_a(x)]|_{x \in \partial\Sigma} = 0,$$

esta condición de borde es claramente inconsistente con (2.34). Por lo que se debe modificar la estructura simpléctica de tal forma que ésta y las condiciones de borde sean consistentes. En principio, existen varias estructuras simplécticas modificadas en el borde consistentes con las condiciones a la frontera de las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, no todas estas estructuras simplécticas modificadas son consistentes con la solución exacta de las ecuaciones de movimiento del sistema. Entonces, el propósito de este trabajo es proponer un nuevo método que de la estructura simpléctica modificada consistente con la solución exacta del problema. El Método que proponemos se aplica sólo para sistemas sin libertad de norma o con las condiciones de norma fijas.

### 2.4.1. Método propuesto

Veamos con exactitud lo que se propone. Siguiendo la propuesta original de los autores [52], asumimos que las condiciones de borde son constricciones primarias en el sentido del método de Dirac. Sin embargo, nosotros tratamos el problema de manera consistente con este método. Primero suponemos que las condiciones de borde son constricciones primarias válidas en toda la región del problema. Por lo que, consideraremos el problema que tiene como Hamiltoniana canónica (2.32) y constricciones primarias

$$F_a(\phi, \partial\phi, \Pi, \partial\Pi)|_{x \in \Sigma} \approx 0. \quad (2.36)$$

Las constricciones primarias las podemos escribir como

$$F_a[N] = \int_{\Sigma} dx^{d-1} N(x) F_a(\phi, \partial\phi, \Pi, \partial\Pi) \approx 0.$$

Con  $N$  una función arbitraria de soporte compacto<sup>1</sup>. (Notemos que al tomar funciones de soporte compacto eliminamos la frontera). Por lo tanto, mapeamos nuestro problema original con las condiciones de borde (2.35) y Hamiltoniana canónica (2.32) por otro problema que tiene las constricciones primarias (2.36) y Hamiltoniana total dada por

$$H_T = H_c + \int_{\Sigma} dx^{d-1} \lambda^a F_a. \quad (2.37)$$

A partir de aquí aplicamos el método de Dirac [60]. Esto implica que debemos estabilizar la evolución de las constricciones primarias. La evolución se debe tomar con la Hamiltoniana total (2.37). Como en el problema original las condiciones de borde no generan libertad de norma, al final del proceso sólo debemos tener constricciones de segunda clase, es decir, se deben determinar todos los multiplicadores de Lagrange. Por otra parte, al sólo haber constricciones de segunda clase, cuyo conjunto total lo denotamos como

$$\chi_{\alpha}(\phi, \partial\phi, \pi, \partial\pi)|_{x \in \Sigma} \approx 0,$$

podemos construir la matriz invertible

$$C_{\alpha\beta}(x, x') = \{\chi_{\alpha}(x), \chi_{\beta}(x')\}. \quad (2.38)$$

Por lo que podemos construir el paréntesis de Dirac

$$\{A(x), B(x')\}^* = \{A(x), B(x')\} - \{A(x), \chi_{\alpha}(y)\} C^{\alpha\beta}(y, z) \{\chi_{\alpha}(z), B(x')\}.$$

Podemos notar que estos paréntesis de Dirac son evaluados en  $\Sigma$ , pero no tenemos las funciones soporte compacto en ellos. Estas funciones de soporte compacto en esencia nos eliminan la contribución de la frontera, pues son nulas en la frontera.

Ahora, para regresar al problema original y obtener la estructura simpléctica deformada que nos interesa, suponemos que la siguiente suposición es válida. Afirmamos que la modificación que debemos hacer a la estructura simpléctica

<sup>1</sup>Es importante tomar funciones de peso de soporte compacto, pues en este caso podemos ocupar propiedades de la delta de Dirac como  $\partial_x \delta(x - x') = -\partial_{x'} \delta(x - x')$ .

en el borde de nuestro problema original tiene la misma forma que los paréntesis de Dirac en el interior del problema modificado. Es decir, calculamos los paréntesis de Dirac del problema modificado y los evaluamos en el interior de  $\Sigma$ , que es  $\Sigma - \partial\Sigma$ , esto implica que debemos quitar de los paréntesis de Dirac la parte que solo es válida en la frontera. Este paso lo hacemos por el hecho de que las funciones de peso que estamos considerando para calcular el álgebra son de soporte compacto y éstas no son tomadas en cuenta para calcular los paréntesis de Dirac. Finalmente, debemos notar que el mapeo definido de esta forma no es univaluado. Por ejemplo, para un problema definido en una recta finita, el interior de  $\Sigma$  es una recta abierta y la frontera es un punto. Por lo tanto, para hacer el mapeo de forma univaluada, proyectaremos los paréntesis definidos en el interior de  $\Sigma$  sobre la frontera.

No damos una prueba rigurosa de que nuestra propuesta es correcta. Sin embargo, mostramos que al ser aplicada a diversos ejemplos de la literatura los resultados que se obtiene coinciden con los que dan las soluciones exactas. Además, tratamos el problema de la cuerda bosónica en un fondo de ondas  $PP$  y campo magnético constante, mostramos que los resultados que obtenemos están en desacuerdo con los reportados en la literatura. Pero mostramos que los resultados que obtenemos no presentan las inconsistencias que muestran la estructura simpléctica reportada en [59].

## 2.5. Campo escalar con condiciones de Dirichlet y Neumann

Para introducir el método propuesto consideraremos un caso simple, el campo escalar. Este ejemplo es útil para nuestros propósitos, pues, tiene solución exacta con las condiciones de borde de Dirichlet y de Neumann. Mostramos que nuestro método reproduce correctamente la estructura simpléctica en ambos casos.

Este sistema tiene la acción

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_{t_1}^{t_2} dx dt [(\partial_t \phi(x, t))^2 - (\partial_x \phi(x, t))^2],$$

y las ecuaciones de movimiento

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\phi(x, t) = 0.$$

Aquí las dos posibles condiciones de borde espaciales son:

$$\phi(x, t)|_{x=\pi, 0} = 0 \quad \text{de Dirichlet,} \quad (2.39)$$

$$(\partial_x \phi)(x, t)|_{x=\pi, 0} = 0 \quad \text{de Neumann,} \quad (2.40)$$

y la Hamiltoniana canónica es

$$H_c = \frac{1}{2} \int_0^l dx [(\Pi(x, t))^2 + (\partial_x \phi(x, t))^2]. \quad (2.41)$$

### 2.5.1. Campo escalar con condiciones de Dirichlet

Primero trabajaremos con las condiciones de Dirichlet. La condición de borde son

$$\phi(\pi, t) = \phi(0, t) = 0.$$

Entonces, según el método que proponemos, debemos considerar como constricción primaria a

$$\phi(x, t) \approx 0,$$

que la podemos escribir como

$$\Phi^{(1)}(N) = \int_0^\pi dx N(x) \phi(x, t) \approx 0.$$

Por lo que la Hamiltoniana total será

$$H_T = H_c + \int_0^\pi dx \lambda(x) \phi(x, t).$$

La evolución de la constricción primaria implica la constricción secundaria

$$\Phi^{(2)}(M) = \int_0^\pi dx M(x) \Pi(x, t) \approx 0.$$

Además, tenemos

$$\{\Phi^{(1)}(N), \Phi^{(2)}(M)\} = \int_0^\pi dx M(x) N(x) \neq 0.$$

Por lo tanto, sólo hay constricciones de segunda clase y se determinan todos los multiplicadores de Lagrange. Para este caso se tiene

$$\lambda(x) = \partial_x^2 \phi(x, t).$$

Así, al calcular los paréntesis de Dirac para este sistema obtendremos

$$\{\phi(x, t), \phi(x', t)\}^* = \{\Pi(x, t), \Pi(x', t)\}^* = 0, \quad (2.42)$$

$$\{\phi(x, t), \Pi(x', t)\}^* = 0. \quad (2.43)$$

Entonces, según el método propuesto, los paréntesis de Poisson del problema original deben cumplir:

$$\{\phi(x, t), \phi(x', t)\}|_{x=0, \pi} = \{\Pi(x, t), \Pi(x', t)\}|_{x=0, \pi} = 0, \quad (2.44)$$

$$\{\phi(x, t), \Pi(x', t)\}|_{x=0, \pi} = \delta(x - x')|_{x=0, \pi} = 0. \quad (2.45)$$

Esto coincide con lo que se obtiene al calcular los paréntesis de Poisson con la solución exacta. También podemos ver que, según el método de Dirac, en el borde el número de grados de libertad es cero. Por lo tanto, para este caso el método propuesto funciona.

### 2.5.2. Campo escalar con condiciones de Neumann

Veamos ahora el caso de las condiciones de Neumann. Tenemos la misma Hamiltoniana canónica (2.32), pero ahora la constricción primaria es

$$\partial_x \phi(x, t) \approx 0,$$

que la podemos escribir como

$$\Phi^{(1)}(N) = \int_0^\pi dx N(x) \partial_x \phi(x, t) \approx 0.$$

La evolución de  $\Phi^{(1)}$  implica la constricción secundaria

$$\Phi^{(2)}(M) = \int_0^\pi dx M(x) \partial_x \Pi(x, t) \approx 0.$$

Además

$$\{\Phi^{(1)}(N), \Phi^{(2)}(M)\} = - \int_0^\pi dx M(x) \partial_x^2 N(x) \neq 0.$$

Por lo tanto, la evolución de la constricción secundaria determinan el multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda(x) = 0.$$

También podemos ver que sólo tenemos constricciones de segunda clase. Para este caso la matriz (2.38) tiene la forma

$$C_{\alpha\beta}(x, x') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \partial_x \partial_{x'} \delta(x - x') \quad \text{y} \quad C^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F(x, x'),$$

con  $F(x, x')$  una función de soporte compacto que satisface

$$\partial_{x'}^2 F(x, x') = -\delta(x - x'). \quad (2.46)$$

La solución para esta ecuación es

$$F(x, x') = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 \pi} \text{sen}(nx) \text{sen}(nx'). \quad (2.47)$$

Entonces, tendremos los siguientes paréntesis de Dirac

$$\{\phi(x, t), \phi(x', t)\}^* = \{\Pi(x, t), \Pi(x', t)\}^* = 0, \quad (2.48)$$

$$\{\phi(x, t), \Pi(x', t)\}^* = \Delta(x - x') \quad (2.49)$$

$$\text{con} \quad \Delta(x - x') = \delta(x - x') - \partial_x \partial_{x'} F(x, x'). \quad (2.50)$$

A la función  $\Delta(x - x')$  le llamaremos delta de Dirac transversa, pues tiene la propiedad

$$\partial_x \Delta(x - x') = \partial_{x'} \Delta(x - x') = 0$$

Esto implica que

$$\{\partial_x \phi(x, t), \Pi(x', t)\}^* = \{\phi(x, t), \partial_{x'} \Pi(x', t)\}^* = \{\partial_x \phi(x, t), \partial_{x'} \Pi(x', t)\}^* = 0.$$

Así, de acuerdo con el método propuesto, los paréntesis de Poisson del problema original deben cumplir

$$\{\phi(x, t), \phi(x', t)\}|_{x=0, \pi} = \{\Pi(x, t), \Pi(x', t)\}|_{x=0, \pi} = 0 \quad (2.51)$$

$$\{\partial_x \phi(x, t), \Pi(x', t)\}|_{x=0, \pi} = \partial_x \delta(x - x')|_{x=0, \pi} = 0. \quad (2.52)$$

Esto coincide con lo que se obtiene con la solución exacta, ver apéndice A.

## 2.6. Cuerda bosónica con condiciones de borde mixtas

Ahora consideraremos el caso de una cuerda bosónica en un campo magnético constante. La acción para esta cuerda en la norma conforme es [52], [18]:

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{t_1}^{t_2} dx dt [(\partial_t \phi_i(x, t))^2 - (\partial_x \phi_i(x, t))^2 + F_{ij} \partial_t \phi_i(x, t) \partial_x \phi_j(x, t)],$$

con  $F_{ij}$  una matriz antisimétrica. Las ecuaciones de movimiento son

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \phi_i(x, t) = 0$$

y las condiciones de Neumann espaciales:

$$(\partial_x \phi_i + T_{ij} \partial_t \phi_j)(x, t)|_{x=\pm\pi} = 0 \quad \text{con} \quad T_{ij} = \frac{F_{ij}}{2}. \quad (2.53)$$

Para este caso tenemos la Hamiltoniana canónica

$$H_c = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx [\{\Pi_i(x, t) - T_{ij} \partial_x \phi_j(x, t)\}^2 + (\partial_x \phi_i(x, t))^2].$$

Entonces, las constricciones primarias que debemos considerar tienen la forma

$$\Theta_i^{(1)}(x, t) = M_{ij} \partial_x \phi_j(x, t) + T_{ij} \Pi_j(x, t) \approx 0, \quad \text{con} \quad M_{ij} = (I - T^2)_{ji}. \quad (2.54)$$

Definamos

$$\bar{\Theta}_i^{(1)}[N] = \int_{-\pi}^{\pi} dx N(x) \Theta_i^{(1)}(x, t),$$

de donde

$$\{\bar{\Theta}_i^{(1)}[N], \bar{\Theta}_j^{(1)}[M]\} = 0. \quad (2.55)$$

Al sacar la evolución de estas constricciones obtenemos las constricciones primarias

$$\bar{\Theta}_i^{(2)}[M] = \int_{-\pi}^{\pi} dx M(x) \partial_x \Pi_i(x, t) \approx 0. \quad (2.56)$$

Para este caso tenemos el álgebra:

$$\{\bar{\Theta}_i^{(1)}[N], \bar{\Theta}_i^{(2)}[M]\} \neq 0, \quad (2.57)$$

es decir, todas las constricciones son de segunda clase y se determinan los multiplicadores de Lagrange. Por otra parte, la matriz (2.38) tiene la forma

$$C_{\alpha\beta}(x, x') = \begin{pmatrix} 0 & M \\ -M & 0 \end{pmatrix} \partial_x \partial_{x'} \delta(x - x') \quad \text{y} \quad C^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -M^{-1} \\ M^{-1} & 0 \end{pmatrix} F(x, x').$$



con  $F(x, x')$  definida en (2.47). Así, tenemos los siguientes paréntesis de Dirac

$$\{\phi_i(x, t), \phi_j(x', t)\}^* = -(TM^{-1})_{ij}[\partial_{x'}F(x, x') + \partial_x F(x, x')] \neq 0, \quad (2.58)$$

$$\{\Pi_i(x, t), \Pi_j(x', t)\}^* = 0, \quad (2.59)$$

$$\{\phi_i(x, t), \Pi_j(x', t)\}^* = \delta_{ij}\Delta(x - x'). \quad (2.60)$$

Por otra parte, tomado en cuenta (2.47) y comparándola con  $A(x, x')$  definida en (A.12), tenemos:

$$\partial_{x'}F(x, x') + \partial_x F(x, x') = A(x, x') - \frac{(x + x')}{2\pi}. \quad (2.61)$$

Para comparar con la solución exacta de nuestro problema original no tomaremos en cuenta la parte que sólo toma valores diferentes de cero en la frontera y en la parte restante tomaremos el límite cuando  $x = x'$  y tienden a la frontera, en este caso  $\pm\pi$ . Considerando lo anterior tenemos

$$\{\phi_i(x = \pm\pi, t), \phi_j(x' = \pm\pi, t)\}^* = \pm(TM^{-1})_{ij}. \quad (2.62)$$

Por lo tanto, el método propuesto nos dice que los paréntesis de Poisson del problema original deben cumplir

$$\{\phi_i(x, t), \phi_j(x', t)\}|_{x'=x=\pm\pi} = \pm(TM^{-1})_{ij}, \quad (2.63)$$

$$\{\Pi_i(x, t), \Pi_j(x', t)\}|_{x'=x=\pm\pi} = 0, \quad (2.64)$$

$$\{\partial_x \phi_i(x, t), \Pi_j(x', t)\}|_{x'=x=\pi} = \delta_{ij}\partial_x \delta(x - x')|_{x'=x=\pm\pi}. \quad (2.65)$$

con la primeras derivadas de la delta de Dirac nulas en la frontera. Esto concuerda con la solución exacta calculada en [18].

## 2.7. Ecuación de Klein-Gordon y condiciones de borde mixtas

En esta sección estudiaremos el caso de una cuerda abierta en un fondo curvo de ondas planas  $PP$ . Este ejemplo ha sido estudiado recientemente en [59]. En este caso la acción bosónica para la cuerda abierta en la norma del cono de luz es:

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{t_1}^{t_2} dx dt [(\partial_t \phi_i(x, t))^2 - (\partial_x \phi_i(x, t))^2 - m^2(\phi_i(x, t))^2 + F_{ij} \partial_t \phi_i(x, t) \partial_x \phi_j(x, t)].$$

Para este caso tenemos la Hamiltoniana canónica

$$H_c = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx [(\Pi_i(x, t) - T_{ij} \partial_x \phi_i(x, t))^2 + (\partial_x \phi_i(x, t))^2 + m^2(\phi_i(x, t))^2]$$

y las constricciones primarias están dadas por (2.54). Al considerar la evolución de éstas tendremos las constricciones secundarias

$$\bar{\Theta}_i^{(2)}[M] = \int_{-\pi}^{\pi} dx M(x) [\partial_x \Pi_i(x, t) - m^2 T_{ib} \phi_b(x, t)] \approx 0. \quad (2.66)$$

Que satisfacen

$$\{\bar{\Theta}_i^{(2)}[N], \bar{\Theta}_j^{(2)}[M]\} = 0.$$

Pero

$$\{\Theta_i^{(1)}(x, t), \Theta_j^{(2)}(x', t)\} = (M \partial_{x'} \partial_x - m^2 T^2)_{ij} \delta(x - x').$$

Por lo tanto, el conjunto de constricciones es de segunda clase. Para este caso la matriz (2.38) tiene la forma

$$C_{\alpha\beta}(x, x') = \begin{pmatrix} 0 & (M \partial_{x'} \partial_x - m^2 T^2)_{ij} \\ -(M \partial_{x'} \partial_x - m^2 T^2)_{ij} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Entonces, proponemos la inversa como

$$C^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -R_{ij}(x, x') \\ R_{ij}(x, x') & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.68)$$

con  $R_{ij}(x, x')$  una función de soporte compacto que satisfice

$$(M \partial_x^2 + m^2 T^2)_{ib} R_{bj}(x, x') = -\delta_{ij} \delta(x - x'). \quad (2.69)$$

La solución para este problema es

$$R_{ij}(x, x') = \left( \sum_{n \geq 1} \frac{\text{sen}(nx) \text{sen}(nx')}{\pi [M n^2 - m^2 T^2]} \right)_{ij} \quad (2.70)$$

Así, tenemos los paréntesis de Dirac:

$$\{\phi_i(x, t), \phi_j(x', t)\}^* = -T_{ia} [\partial_{x'} R_{aj}(x, x') + \partial_x R_{aj}(x, x')] \neq 0, \quad (2.71)$$

$$\{\Pi_i(x, t), \Pi_j(x', t)\}^* = -m^2 (MT)_{ia} [\partial_x R_{aj}(x, x') + \partial_{x'} R_{aj}(x, x')], \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} \{\phi_i(x, t), \Pi_j(x', t)\}^* &= \delta_{ij}(x - x') + m^2 T_{ib}^2 R_{bj}(x, x') \\ &\quad - \partial_x \partial_{x'} R_{ib}(x, x') M_{bj}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Como vemos, estos resultados implican que el término de masa afecta a todas las reglas de conmutación en la frontera. Para comparar con la solución exacta veamos el término

$$\begin{aligned}
\partial_x R_{aj}(x, x') + \partial_{x'} R_{aj}(x, x') &= \left( \sum_{n \geq 1} \frac{n \text{senn}(x + x')}{[\pi M n^2 - m^2 T^2]} \right)_{aj} \\
&= \left( M^{-1} \sum_{n \geq 1} \left[ \frac{m^2 M^{-1} T^2}{n \pi [n^2 - m^2 M^{-1} T^2]} + \frac{1}{n \pi} \right] \text{senn}(x + x') \right)_{aj} \\
&= \left( M^{-1} \left[ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \pi} \text{senn}(x + x') + \sum_{n \geq 1} \frac{m^2 M^{-1} T^2 \text{senn}(x + x')}{n \pi [n^2 - m^2 M^{-1} T^2]} \right] \right)_{aj}
\end{aligned}$$

Ocupando  $A(x, x')$  definida en (A.12)

$$\begin{aligned}
\partial_x R_{aj}(x, x') + \partial_{x'} R_{aj}(x, x') &= M_{ab}^{-1} \left[ -\frac{(x + x')}{2\pi} + A(x, x') \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n \geq 1} \frac{m^2 M^{-1} T^2 \text{senn}(x + x')}{n \pi [n^2 - m^2 M^{-1} T^2]} \right]_{bj}
\end{aligned} \tag{2.74}$$

Cómo de esta expresión sólo nos interesa los valores en el interior de  $[-\pi, \pi]$ , para comparar (2.71)-(2.72) con la solución exacta debemos ignorar los términos que sólo toman valores en la frontera. Ahora, si suponemos que el tercer término de (2.74) no contiene una componente que sólo cuenta en la frontera, entonces el único término que hay que quitar cuando tomemos el límite a la frontera es  $A(x, x')$ . Así,

$$[\partial_x R_{aj}(x, x') + \partial_{x'} R_{aj}(x, x')]_{\pm\pi} = \pm M_{oj}^{-1} \tag{2.75}$$

Entonces, los términos que tenemos que comparar con la solución exacta son

$$\{\phi_i(x = \pm\pi, t), \phi_j(x' = \pm\pi, t)\}^* = \pm (TM^{-1})_{ij}, \tag{2.76}$$

$$\{\Pi_i(x = \pm\pi, t), \Pi_j(x' = \pm\pi, t)\}^* = \mp m^2 T_{ij}, \tag{2.77}$$

$$\{\partial_x \phi_i(x = \pm\pi, t), \Pi_j(x' = \pm\pi, t)\}^* = \mp m^2 (TM^{-1})_{ij} \tag{2.78}$$

Ahora veamos lo que se tiene en la literatura, los resultados los tomaremos de la referencia [59], que está hecha para  $i = 1, 2$ . Los resultados reportados son

$$\{\phi_i(x, t), \phi_j(x', t)\}|_{x'=x \in \Sigma} \sim \pm(TM^{-1})_{ij}, \quad (2.79)$$

$$\{\Pi_i(x, t), \Pi_j(x', t)\}|_{x'=x \in \Sigma} \sim \pm m^2 T_{ij}, \quad (2.80)$$

$$\{\phi_i(x, t), \Pi_j(x', t)\} = \delta_{ij} \delta(x - x') \quad (2.81)$$

con  $\partial_x \delta(x - x')|_{x \in \Sigma} = 0$ . Aquí tenemos coincidencia sólo en los dos primeros paréntesis de Poisson. Veamos que ocurre con el tercero. Tomando en cuenta (2.81) tenemos

$$\{\partial_x \phi_i(x, t), \Pi_j(x', t)\}|_{x \in \Sigma} = \delta_{ij} \partial_x \delta(x - x')|_{x \in \Sigma} = 0.$$

Por otra parte, ocupando la condición de borde y sustituyéndola en (2.80) resulta

$$\{\partial_x \phi_i(x, t), \Pi_j(x', t)\}|_{x \in \Sigma} \sim \pm m^2 (M^{-1} T^2)_{ij}.$$

Claramente estos resultados no son consistentes. Esto no ocurre en nuestro caso. A (2.81) le falta un término que depende de  $m$  para que la estructura simpléctica sea consistente en el borde.

## 2.8. Conclusiones

En este capítulo vimos que un sistema que tiene constricciones de segunda clase puede tener no conmutatividad en las coordenadas. Además, que las condiciones de borde de un sistema mecánico pueden hacer incompatible la estructura simpléctica estándar con el sistema. Por ejemplo, de acuerdo con diferentes sistemas encontrados en la literatura, hay teorías de campos con condiciones de borde de Neumann que tienen no conmutatividad en el borde, lo que no es consistente con la estructura simpléctica estándar. Este resultado es de interés para la teoría de cuerdas, pues los bordes de una cuerda definen una  $D$ -brana. Por lo que, algunas teorías de cuerdas pueden tener  $D$ -branas no conmutativas. Por lo tanto, para las teorías de campos se requiere construir un método que proporcione una estructura simpléctica consistente con sus condiciones de borde.

Encontrar un método que construya la forma en que se debe modificar la estructura simpléctica dadas unas condiciones de borde es un problema abierto. Una idea original para resolver este problema fue tomar las condiciones de borde como constricciones y aplicar el método Dirac. A pesar de que esta idea da resultados correctos para algunos casos tiene diversos problemas. Por ejemplo, se tienen un número infinito de constricciones secundarias y no se

pueden despejar los multiplicadores de Lagrange.

En esta sección propusimos un método alternativo para resolver este problema. Lo que proponemos es definir un problema modificado que consiste en tomar a las condiciones de borde como constricciones primarias definidas en toda la región del problema, no sólo en el borde, y aplicar el método de Dirac. Posteriormente mapeamos los paréntesis de Dirac obtenidos en este problema modificado al problema original.

Aplicamos este método a diferentes ejemplos que tienen solución exacta conocida y mostramos que los resultados encontrados son consistentes. Además, este método no presentó los problemas que tiene el método original. También aplicamos el método desarrollado al caso de una teoría de cuerdas en el fondo de ondas  $PP$  en la norma del cono de luz, nuestro resultado en este caso no coincide con el reportado en la literatura. Sin embargo, mostramos que el resultado que reportado en la literatura muestra una inconsistencia que no tiene el nuestro.

## Capítulo 3

# Límite clásico y no conmutatividad

Considerando una estructura simpléctica consistente con las reglas de conmutación de la mecánica cuántica no conmutativa, se muestran algunas correcciones clásicas que se obtienen al suponer que el espacio es no conmutativo. En particular mostramos las correcciones que se tienen para la segunda ley de Newton. En este contexto se analiza el problema de Kepler y el corrimiento del perihelio que se obtiene para Mercurio. Se muestra que un parámetro no conmutativo del orden de  $10^{-58}(\text{metros})^2$  da correcciones observables en el sistema solar. Por lo que, para este caso, la Física a pequeñas distancias implica modificaciones a grandes distancias, este fenómeno es análogo a la mezcla de divergencias  $UV/IR$  que ocurre en la teoría de campos no conmutativos.

Los resultados de este trabajo se encuentran publicados en las referencias [21] y [22].

### 3.1. Introducción

Como mencionamos anteriormente, los espacios no conmutativos se caracterizan porque sus operadores de coordenadas espaciales satisfacen:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = ih\Theta_{ij}. \quad (3.1)$$

Con el parámetro de la no conmutatividad dado por  $h\Theta_{ij}$ . Este parámetro es constante, real y antisimétrico. Para construir la mecánica cuántica no conmutativa sólo debemos agregar las reglas de conmutación relacionadas con los momentos canónicos:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = ih\Theta_{ij}, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = ih\delta_{ij} \quad \text{y} \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0. \quad (3.2)$$

De esta mecánica cuántica se tienen diversos resultados interesantes que se pueden ver en [11]. Hay diferentes razones por las que es interesante estudiar un sistema en un espacio no conmutativo. Por ejemplo, desde el punto de vista puramente matemático, se puede construir una nueva teoría de campos cambiando en la acción el producto estándar por el producto (Weyl-Moyal)

$$(f * g)(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\Theta_{ij}\partial_i^x\partial_j^y\right)f(x)g(y)|_{x=y}, \quad (3.3)$$

con  $f$  y  $g$  dos funciones infinitamente diferenciables. A esta nueva teoría se le llama teoría de campos no conmutativos. Una de las propiedades más interesantes de esta teoría es que se tiene una relación entre divergencias infrarrojas y ultravioletas (mezcla  $UV/IR$ ) [19]. De hecho una propiedad semejante puede ser requerida para la formulación de una teoría de campos válida a pequeñas y grandes distancias [47]. De un análisis dimensional podemos ver que  $\hbar\Theta_{ij}$  debe tener unidades de área, por lo tanto  $\Theta_{ij}$  tiene unidades de [tiempo/masa]. También podemos observar que las únicas constantes fundamentales requeridas para obtener las unidades de esta cantidad son  $c$  y  $G$  ( $G/c^3$ ). Esto puede indicar que hay algún efecto semejante al de la gravedad en estos sistemas, de hecho, en teoría de campos no conmutativos esto ocurre con algunos campos de norma [48]. Por lo general, se supone que  $\hbar\Theta_{ij}$  es del orden del área de Planck,  $L_p^2 = \hbar G/c^3$ , entonces el tensor  $\Theta_{ij}$  debe ser del orden de  $G/c^3$ . Sin embargo, en este trabajo mostraremos una cota mayor, que da la posibilidad que el espacio sea no conmutativo antes de llegar a la escala de Planck.

En este capítulo nos ocuparemos de un tema simple, qué tipo de física se obtiene si se supone una estructura simpléctica consistente con las reglas de conmutación (3.2). Tomaremos una estructura simpléctica consistente con las reglas de conmutación (3.2), una Hamiltoniana estándar, y obtendremos las ecuaciones de movimiento. Se mostrará que hay una corrección a la segunda ley de Newton. Veremos que la corrección que se obtiene resulta ser proporcional al parámetro no conmutativo y al potencial bajo el cual está la partícula. Así, esta nueva fuerza se puede ver como el resultado de una perturbación al espacio provocada por el campo externo. Por ejemplo, se muestra que en el caso particular de un campo central la corrección se puede interpretar como el análogo de una fuerza de Coriolis. Una de las características de los sistemas en espacios no conmutativos es que se rompe la simetría de Lorentz [43], en nuestro caso la corrección a la segunda ley de Newton rompe la simetría de rotación para campos centrales.

Analizaremos dos casos concretos, el potencial de un oscilador armónico tridimensional y el problema de Kepler. Para el oscilador armónico obtenemos

ecuaciones de movimiento que se pueden ver como las de un oscilador cargado en un campo magnético constante del orden del parámetro no conmutativo. Para el problema de Kepler, el término de corrección en la fuerza posee la forma de la fuerza de Coriolis que produce un campo gravitacional lejano de un cuerpo masivo rotante. También mostraremos que hay un corrimiento del perihelio de los Planetas. Del análisis del corrimiento al perihelio de Mercurio, se puede observar que el sistema planetario es altamente sensible al parámetro no conmutativo,  $\Theta_{ij}$ , pues, basta que éste sea del orden de  $10^{-25} s/Kg$  ( $\hbar\Theta_{ij} \approx 10^{-58} m^2$ ) para explicar el corrimiento del perihelio de Mercurio observado. Esto muestra que para este sistema la física a pequeña escala no está desconectada de la física a gran escala. Este fenómeno se puede ver como un reflejo de la mezcla *UV/IR* que ocurre en la teoría de campos no conmutativos. Se obtiene una cota para este parámetro del orden de  $10^{-30} s/Kg$  ( $\sqrt{\hbar\Theta} \approx 5 \times 10^3 L_P$ ). Por lo tanto, es posible que el espacio muestre propiedades no conmutativas antes de llegar a la escala de Planck. También se muestra que la segunda y tercera ley de Kepler tienen correcciones similares a las que da la métrica de Kerr en aproximación débil. Por último, se muestran algunas implicaciones cosmológicas.

### 3.2. Formulación de la Mecánica clásica no conmutativa

En general, si tenemos un espacio de variables  $\zeta^a$ , con  $a = 1, \dots, 2n$ , y una matriz antisimétrica  $\Lambda^{ab} = \{\zeta^a, \zeta^b\}$ . Entonces, si  $F$  y  $G$  son funciones de  $\zeta^a$  podemos definir una estructura simpléctica como [61]

$$\{F, G\} = \{\zeta^a, \zeta^b\} \frac{\partial F}{\partial \zeta^a} \frac{\partial G}{\partial \zeta^b}. \quad (3.4)$$

Con  $\Lambda^{ab}$  una matriz tal que se cumpla la identidad de Jacobi. Con esta estructura simpléctica, junto con una función Hamiltoniana,  $H = H(\zeta^a)$ , podemos definir una dinámica a través de las ecuaciones de movimiento

$$\dot{\zeta}^a = \{\zeta^a, H\}. \quad (3.5)$$

Así, para cualquier función de este espacio tenemos

$$\dot{F} = \{F, H\}. \quad (3.6)$$

Nosotros consideraremos el caso del espacio fase dado por  $\zeta^a = (x_i, p_i)$ , con  $i = 1, 2, 3$ .



Si consideramos las reglas de conmutación para una mecánica cuántica no conmutativa (3.2), la estructura simpléctica consistente con estas reglas de conmutación se define como:

$$\{x^i, x^j\} = \Theta_{ij}, \quad \{x^i, p_j\} = \delta_j^i \quad \text{y} \quad \{p_i, p_j\} = 0. \quad (3.7)$$

Ahora, si  $F$  y  $G$  son dos funciones del espacio fase y ocupamos (3.7) tendremos los siguientes paréntesis de Poisson modificados

$$\{F, G\} = \Theta_{ij} \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial G}{\partial x^j} + \left( \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial x^i} \right). \quad (3.8)$$

Si consideremos una Hamiltoniana de la forma

$$H = \frac{p_i p^i}{2m} + V(x),$$

las ecuaciones de movimiento con esta estructura simpléctica son:

$$\dot{x}_i = \frac{p_i}{m} + \Theta_{ij} \frac{\partial V}{\partial x^j}, \quad (3.9)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial V}{\partial x^i}, \quad (3.10)$$

es decir,

$$m\ddot{x}^i = -\frac{\partial V}{\partial x^i} + m\Theta_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial x^j \partial x^k} \dot{x}^k. \quad (3.11)$$

Esta ecuación es la nueva segunda ley de Newton. Al segundo término de (3.11) lo podemos ver como una corrección debida a la no conmutatividad del espacio. El nuevo término es generado tanto por el espacio de fondo, a través del factor de la no conmutatividad, como por variaciones del potencial. Es como si el campo externo perturbara de alguna manera al espacio y produjera esta nueva fuerza. Esto es parecido a lo que ocurre con la fuerza que produce un campo gravitacional generado por un campo externo. También podemos ver que para el caso de una campo gravitacional constante el término de corrección se anula, por lo que se cumple el principio de equivalencia débil. Sin embargo, si se toma el potencial de Kepler de un campo gravitacional, la aceleración de una partícula de prueba depende de su masa. Este hecho sugiere que el campo gravitacional en espacios no conmutativos puede tener modificaciones relevantes.

### 3.3. Simetrías

En esta sección veremos que simetrías tiene la ecuación (3.11). De la estructura simpléctica (3.7) es claro que si hacemos la transformación de Paridad

$$x_i \longrightarrow -x_i$$

el parámetro  $\Theta_{ij}$  no cambia. Con estas reglas de transformación se puede ver que la segunda ley de Newton modificada (3.11) es invariante bajo Paridad. También podemos ver que si hacemos la transformación de inversión temporal

$$t \longrightarrow -t$$

la ecuación de movimiento (3.11) se ve modificada. Esto significa que la no conmutatividad implica una flecha en el tiempo. Sin embargo, si se impone que bajo inversión temporal se cumpla

$$\Theta_{ij} \longrightarrow -\Theta_{ij},$$

la ecuación (3.11) es invariante bajo inversión temporal. Este tipo de comportamiento bajo simetrías discretas también se tiene a nivel de teoría de campos [44].

Por otra parte, al igual que en el caso estándar, la Hamiltoniana  $H$  se conserva. Sin embargo, debido al término de corrección de la ecuación de movimiento (3.11), para un campo central el momento angular,  $L_i = m\epsilon_{ijk}x_i\dot{x}_k$ , ya no se conserva. Además, ocupando (3.7), se puede ver que esta cantidad no genera rotaciones. No obstante, podemos construir la cantidad

$$L_\Theta = \Theta_{ij}x_i p_j + \frac{1}{2}\Theta_{ij}p_j\Theta_{ik}p_k,$$

ésta genera las transformaciones:

$$\delta x_i = \{x_i, L_\Theta\} = \Theta_{ik}x_k \quad \text{y} \quad \delta p_i = \{p_i, L_\Theta\} = -\Theta_{ik}p_k. \quad (3.12)$$

Para el caso de un campo central  $L_\Theta$  se conserva. Ahora, en tres dimensiones, cualquier matriz antisimétrica se puede escribir como

$$\Theta_{ij} = \epsilon_{ijk}\Theta_k$$

Así, las transformaciones (3.12) toman la forma de rotaciones en la dirección del vector  $\Theta_i$ . Es decir, tenemos una simetría axial.

También podemos ver que le término de corrección puede romper la simetría de Galileo. Esto no ocurre con la partícula libre o una partícula en un campo constante. En este caso no se pierde la simetría, sin embargo los generadores del grupo de Galileo ahora tienen la forma

$$G_i = mx_i - p_i + m\Theta_{ij}p_j. \quad (3.13)$$

Un estudio de estas transformaciones se puede ver en [62]. La forma general de las simetrías de la ecuación (3.11) depende del potencial y de  $\Theta$ , este tema lo trataremos en un trabajo posterior.

### 3.4. Campo central

Para el caso de un potencial central,  $V(x) = V(r)$ , el término de corrección a la segunda ley de Newton se puede escribir de forma más sugestiva. Consideremos el tensor  $\Theta_{ij} = \epsilon_{ijk}\Theta_k$ . Entonces, para un potencial central el momento definido por la ecuación (3.9) es

$$p_i = m\dot{x}_i + m\epsilon_{ijk}\Omega_j x_k \quad \text{con} \quad \Omega_j = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \Theta_j, \quad (3.14)$$

que tiene la misma forma que el momento de una partícula vista desde un sistema de referencia no inercial con velocidad angular  $\Omega_j$  [63]. Además la ecuación (3.11) para el caso que estamos considerando es:

$$m\ddot{x}_i = -\frac{x_i}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + m\epsilon_{ijk}\dot{x}_j \Omega_k + m\epsilon_{ijk}x_j \dot{\Omega}_k. \quad (3.15)$$

El segundo término de esta ecuación es el análogo de la fuerza de Coriolis debido a una rotación, mientras que el tercer término es el análogo a una fuerza inercial producida por la no uniformidad de la rotación. Claramente los términos de corrección rompen la invariancia bajo rotaciones para un campo central.

Veamos ahora dos ejemplos de campo central, primero consideremos el potencial de un oscilador armónico tridimensional  $V(r) = \frac{m\omega^2}{2}r^2$ . Para simplificar los cálculos tomaremos  $\Theta_i = \delta_{i3}\Theta$ . Entonces,

$$m\ddot{x}_i = -m\omega^2 x_i + m^2\omega^2 \Theta \epsilon_{ij3} \dot{x}_j. \quad (3.16)$$

Si apelamos al teorema de Larmor podemos ver que la perturbación debido este potencial tiene la forma de un campo magnético constante en la dirección del

vector  $\Theta_i$ . La ecuación (3.16) tiene solución conocida, sobre el eje  $x_3$  tenemos oscilaciones con frecuencia  $\omega$ , mientras que en el plano perpendicular a este eje la frecuencia de las oscilaciones, a primer orden en  $\Theta$ , tiene la forma

$$\omega_\Theta \approx \omega \left(1 \pm \frac{\Theta m \omega}{2}\right).$$

Ahora veamos el potencial de Kepler  $V(r) = \frac{-k}{r}$ . En este caso la velocidad angular es

$$\Omega_i = \frac{k}{r^3} \Theta_i,$$

y las ecuaciones de movimiento son:

$$m\ddot{x}_i = -\frac{x_i}{r} \frac{k}{r^2} + m\epsilon_{ijk}\dot{x}_j\Omega_k + m\epsilon_{ijk}x_j\dot{\Omega}_k \quad (3.17)$$

Posteriormente resolveremos de forma perturbativa esta ecuación. Por el momento podemos ver algunas propiedades importantes. La primera es que, debido a la dependencias de la velocidad angular en  $r$ , la fuerza de Coriolis resultante es semejante a la que se obtiene al considerar el campo gravitacional lejano de un cuerpo masivo que rota [64] y [65], aquí el vector  $\Theta_i$  es el análogo del momento angular del cuerpo rotante. Mientras que el otro término de la corrección se puede ver como una fuerza producida por una rotación no uniforme del mismo cuerpo [66].

### 3.5. El problema de Kepler en un espacio no conmutativo

En esta sección resolveremos de manera perturbativa la ecuación (3.15) para el problema de Kepler. Esta ecuación nos dará información de la forma en que las trayectorias se modifican debido a la nueva estructura simpléctica. Para facilitar los cálculos nos conviene tomar  $\Theta_i = \delta_{i3}\Theta$  y trabajar en coordenadas esféricas. Con estas consideraciones (3.15) toma la forma:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2(\theta)) = -\frac{dV}{dr} + mr\Omega\dot{\phi}\sin^2(\theta), \quad (3.18)$$

$$m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) - mr^2\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\phi}^2 = mr^2\Omega\dot{\phi}\sin(\theta)\cos(\theta), \quad (3.19)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}\sin^2(\theta)) = -mr\sin(\theta)\frac{d}{dt}(r\Omega\sin(\theta)). \quad (3.20)$$

En este caso las trayectorias son más generales que en el caso estándar, sin embargo podemos restringirnos a estudiar órbitas planas. Esto significa tomar la solución  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , que es válida para todo tiempo. De donde, las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = -\frac{dV}{dr} + mr\Omega\dot{\phi}, \quad (3.21)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = -mr\frac{d}{dt}(r\Omega). \quad (3.22)$$

Antes de continuar, es conveniente ver que forma toman las constantes de movimiento en estas coordenadas. Por la forma particular del parámetro no conmutativo que estamos considerando,  $\Theta_{ij} = \epsilon_{ijk}\Theta_k$  y  $\Theta_k = \delta_{k3}\Theta$ , tenemos

$$L_{\Theta} = \Theta \left[ xp_y - yp_x - \Theta mV(r) - \Theta \frac{p_z^2}{2} + \Theta mH \right]. \quad (3.23)$$

De donde, la cantidad

$$M = xp_y - yp_x - \Theta mV(r) - \Theta \frac{p_z^2}{2} \quad (3.24)$$

es una constante de movimiento. Ahora, en coordenadas polares y con  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $M$  toma la forma

$$M = mr^2(\dot{\phi} + \Omega) - \Theta mV. \quad (3.25)$$

De esta expresión podemos ver que la ecuación (3.22) se puede poner como  $\dot{M} = 0$ . En resumen, para el problema de Kepler las constantes de movimiento toman la forma

$$M = mr^2\dot{\phi} + \frac{2mk\Theta}{r}, \quad (3.26)$$

$$E = H = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} - \frac{k\Theta M}{r^3} + \frac{k^2\Theta^2 m}{2r^4}. \quad (3.27)$$

Mientras que la ecuación de movimiento radial es:

$$m\ddot{r} - \frac{M^2}{mr^3} + \frac{k}{r^2} + \frac{3kM\Theta}{r^4} - \frac{2\Theta^2 k^2 m}{r^5} = 0 \quad (3.28)$$

Lo primero que podemos notar es que la ecuación (3.26) es muy parecida a

$$M_z = mr^2\dot{\phi} + \frac{2mma}{r},$$

donde  $M_z$  es el momento angular en dirección  $z$  para una partícula de masa  $m$  que sigue una órbita plana en un campo gravitacional de un hoyo negro de Kerr [67]. En ese caso  $ma$  es el momento angular geométrico del hoyo negro y  $M_z$  se conserva. Como vemos estas cantidades se pueden identificar si consideramos

$$mma = mk\Theta.$$

De hecho, para obtener las correcciones a la segunda ley de Kepler en nuestro caso debemos analizar la ecuación (3.26). Por lo tanto, la segunda y tercera ley de Kepler para nuestro sistema se modifican de forma análoga a una partícula en una métrica de Kerr. Así, debido a la corrección del parámetro  $\Theta$ , no se recorren áreas iguales en tiempos iguales, es decir, en este caso no se cumple la segunda ley de Kepler y, por lo tanto, tampoco la tercera. En particular, a primer orden en  $\Theta$ , el área barrida por el radio vector de la partícula es

$$A = \frac{2MT}{m} + 2\pi \frac{kb\Theta}{M\sqrt{1-e^2}}. \quad (3.29)$$

Con  $b$  y  $e$  definidos en la ecuación (3.32)

Por otra parte, la ecuación (3.28) nos da  $r$  en términos del tiempo. Sin embargo, es más interesante poner  $r$  en términos de  $\phi$ , para ello ocuparemos la variable

$$u = \frac{1}{r}.$$

Ahora, como

$$\dot{r} = -\frac{M - 2\Theta kmu}{m} \left( \frac{du}{d\phi} \right), \quad (3.30)$$

la ecuación (3.28) se reduce a

$$\begin{aligned} \frac{(M - 2\Theta kmu)^2}{m} \frac{d^2u}{d\phi^2} + 2\Theta km \frac{(M - 2\Theta kmu)}{m} \left( \frac{du}{d\phi} \right)^2 \\ + \frac{M^2}{m} u - 3\Theta kMu^2 + 2\Theta^2 k^2 mu^3 - k = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

A orden cero en  $\Theta$  y con los parámetros del problema de Kepler estándar,

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{mk^2}} \quad \text{y} \quad b = \frac{M^2}{mk}, \quad (3.32)$$

esta ecuación toma la forma

$$\frac{d^2u_0}{d\phi^2} + u_0 - \frac{1}{b} = 0, \quad (3.33)$$

cuya solución es

$$u_0 = \frac{(1 + e \cos \phi)}{b}. \quad (3.34)$$

Al siguiente orden en  $\Theta$  proponemos

$$u = u_0 + u_1$$

Por lo que  $u_1$  debe cumplir

$$\frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + u_1 = \frac{\Theta m k M}{M^2 b^2} \left( 2e \cos \phi - 3e^2 \cos 2\phi + \frac{e^2 + 6}{2} \right) \quad (3.35)$$

cuya solución es

$$u_1 = \frac{\Theta m k M}{M^2 b^2} \left( \frac{e^2 + 6}{2} + e\phi \sin \phi - e^2 \cos \phi \right). \quad (3.36)$$

A este orden en  $\Theta$  tenemos

$$u = \frac{[1 + e \cos \phi (1 - \frac{\delta}{b})]}{b} + \left( \frac{\delta}{b^2} \right) \left[ \frac{e^2 + 6}{2} - e^2 \cos 2\phi \right] \quad (3.37)$$

con  $\delta = \frac{\Theta m k M}{M^2}$ . De esta ecuación se puede calcular la desviación del perihelio, que está dada por

$$\delta \phi_{NC} = \frac{2\pi \delta}{b} = 2\pi \Theta \left( \frac{mk}{b^3} \right)^{1/2} \quad (3.38)$$

Por otra parte, podemos ocupar la variable

$$a = \frac{r_{max} + r_{min}}{2} = \frac{b}{1 - e^2}.$$

Además

$$k = m \mathbf{m} G$$

con  $\mathbf{m}$  la masa del Sol. Por lo tanto:

$$\delta \phi_{NC} = 2\pi \Theta \left( \frac{m^2 \mathbf{m} G}{a^3 (1 - e^2)^3} \right)^{1/2} \quad (3.39)$$

Es interesante observar que de esta ecuación las únicas constantes que no determina el sistema son  $G$  y  $\Theta$ .

La corrección que da la relatividad general, con la métrica de Schwarzschild, al perihelio es

$$\delta\phi_{RG} = 6\pi \frac{Gm}{c^2 a(1 - e^2)} \quad (3.40)$$

En este caso las constantes fundamentales que no determina el sistema son  $c$  y  $G$ . Por lo tanto aquí  $\Theta$  toma el papel de constante fundamental.

Ahora en este caso particular veamos que ocurre cuando el planeta observado es Mercurio. Para ello debemos considerar los siguientes datos:

$$a \approx 6 \times 10^{10} \text{metros} \quad (3.41)$$

$$e \approx 0,2 \quad (3.42)$$

$$m \approx 3,3 \times 10^{23} Kg \quad (3.43)$$

$$m \approx 2 \times 10^{30} Kg \quad (3.44)$$

$$G \approx 7 \times 10^{-11} \frac{(\text{metros})^3}{s^2 Kg} \quad (3.45)$$

$$h \approx 6,6 \times 10^{-34} Js. \quad (3.46)$$

De donde, el perihelio de mercurio debería cambiar por

$$\delta\phi_{NC} \approx 2\pi\Theta(3 \times 10^{17}) \frac{Kg}{s}. \quad (3.47)$$

Debido a que las correcciones por la no conmutatividad deben ser pequeñas y que el número  $3 \times 10^{17}$  es muy grande la ecuación (3.47) implica que el parámetro  $\Theta$  tiene que ser muy pequeño. Esto muestra que el sistema planetario es altamente sensible al parámetro  $\Theta$ , pues, no conmutatividad a distancias muy pequeñas implican cambios a muy grandes distancias. Es decir, en este caso la física a pequeña escala no está desconectada de la física a gran escala. Este fenómeno se puede ver como un reflejo de la mezcla de divergencias ultravioletas e infrarrojas que ocurre en la teoría de campos no conmutativos.

Para Mercurio el corrimiento del perihelio observado es

$$\delta\phi_{obs} = 2\pi(7,98734 \pm 0,00037) \times 10^{-8} \frac{\text{radianes}}{\text{revolución}}. \quad (3.48)$$

Entonces, si suponemos  $\delta\phi_{NC} \approx \delta\phi_{obs}$

$$\Theta \approx 3 \times 10^{-25} \frac{Kg}{s}. \quad (3.49)$$



Es decir,

$$\hbar\Theta \approx 2 \times 10^{-58} \text{metros}^2, \quad (3.50)$$

$$\sqrt{\hbar\Theta} \approx 1 \times 10^{-29} \text{metros}. \quad (3.51)$$

Por otra parte, para Mercurio tenemos

$$\delta\phi_{RG} = 2\pi(7,987344) \times 10^{-8} \frac{\text{radianes}}{\text{revolución}}. \quad (3.52)$$

Entonces, una forma de acotar el parámetro  $\Theta$  es pidiendo que

$$|\delta\phi_{NC}| \leq |\delta\phi_{GR} - \delta\phi_{obs}| \approx 2\pi(1 \times 10^{-12}) \frac{\text{radianes}}{\text{revolución}}. \quad (3.53)$$

De donde,

$$\Theta \leq 3 \times 10^{-30} \frac{Kg}{s}.$$

Así,

$$\hbar\Theta \leq 21 \times 10^{-64} \text{metros}^2,$$

$$\sqrt{\hbar\Theta} \leq (5 \times 10^3) L_P.$$

En unidades naturales, esta cota se expresa como

$$4 \times 10^{15} GeV \leq 1/(\sqrt{\hbar\Theta}).$$

Que es un orden de magnitud mayor a la cota que se obtiene con el Modelo Estándar [69]. Sin embargo, para una mejor comparación se debe tratar el problema de Kepler no conmutativo en un espacio curvo. No obstante, el tamaño de la cota remarca el hecho de que la no conmutatividad a distancias muy pequeñas implica cambios a distancias muy grandes, que es consistente con lo que se conjetura en [19]. Es notable que cuando se ha tratado el problema de Kepler con una estructura simpléctica deformada se tiene un comportamiento similar. Por ejemplo, en la referencia [14] se trabaja con una estructura simpléctica más complicada a la aquí considerada, y en ese caso el perihelio de Mercurio acota al parámetro de deformación a ser del orden de  $10^{-68}$  metros, que es mucho menor a la escala de Planck.

En un trabajo reciente se trató este problema [70], pero en otras coordenadas. Las coordenadas que ocuparon son

$$x_i = \tilde{x}_i - \frac{\Theta_{ij}}{2} p_j, \quad p_i = \tilde{p}_i \quad (3.54)$$

Con los paréntesis de Poisson

$$\{\tilde{x}_i, \tilde{x}_j\} = 0, \quad \{\tilde{x}_i, \tilde{p}_j\} = \delta_{ij}, \quad \{\tilde{p}_i, \tilde{p}_j\} = 0 \quad (3.55)$$

En estas coordenadas tenemos

$$\tilde{r} = \sqrt{\tilde{x}_i \tilde{x}_i} = r - \frac{\Theta \cdot L}{2\tilde{r}} + \mathcal{O}(\Theta^2), \quad (3.56)$$

con

$$L_i = \epsilon_{ijk} \tilde{x}_i \tilde{p}_j$$

Por lo tanto el Hamiltoniano tiene la forma

$$H = \frac{p_i p^i}{2m} + V(r) = \frac{\tilde{p}_i \tilde{p}^i}{2m} + V(\tilde{r}) - \frac{\Theta \cdot L}{2\tilde{r}} \frac{dV}{d\tilde{r}} + \mathcal{O}(\Theta^2). \quad (3.57)$$

Es interesante observar que en estas coordenadas tenemos una corrección que tiene la forma de interacción espín órbita. Sólo que en este caso el “espín” es el mismo para todos. Este término se puede obtener por la precesión de Thomas [71].

En este caso para el problema de Kepler la corrección a primer orden en  $\Theta$  al perihelio de una órbita elíptica es:

$$\delta\phi = \Theta \frac{2\pi k^2 m^2 \cos(\gamma)}{L^3} \quad (3.58)$$

Que coincide con el resultado obtenido anteriormente. Sin embargo, debemos tomar en cuenta que estamos suponiendo que las coordenadas espaciales físicas satisfacen

$$\{x_i, x_j\} = \Theta_{ij}.$$

Por lo tanto, la trayectoria de una partícula debe estar en términos de las  $x_i$ , y no de las  $\tilde{x}_i$ . Por lo que resulta natural que existan diferencias a ordenes más altos en diferentes cantidades físicas. Por ejemplo, el Hamiltoniano (3.57) tiene todos los ordenes en  $\Theta$ , mientras que el Hamiltoniano (3.27) sólo tiene término de segundo orden en  $\Theta$ , pues, está calculado para diferentes variables.

### 3.6. Constante cosmológica y no conmutatividad, un punto de vista Newtoniano

Un problema importante en la física actual está en la constante cosmológica. Pues, desde el punto de vista observacional existe datos que sugieren que el universo se expande con una constante cosmológica positiva [72], para una

revisión ver [73]. Además uno de los resultados teóricos más interesante se encuentra en la dualidad *AdS/CFT* que relaciona una teoría de cuerdas con una teoría de norma [74] y esta dualidad se establece en un espacio con constante cosmológica negativa. Sin embargo, a pesar de la importancia de esta constante en la física, aún existen diversos aspectos de la física relacionada con esta constantes que no son entendidos. Por ejemplo, ningún modelo predice un valor de esta constante que concuerde con los datos obtenidos observacionalmente, de hecho lo valores predichos y los observados difieren en varios ordenes de magnitud [75]. Por esta razón se requiere entender la física relacionada con la constante cosmológica desde diferentes ángulos.

En esta sección estudiaremos la ecuación (3.11) para un modelo cosmológico Newtoniano. Al considerar una constante cosmológica negativa, al igual que en el caso estándar, se obtienen soluciones que oscilan en el origen. Sin embargo ahora la frecuencia de oscilación se modifica por el parámetro no conmutativo. Si se considera una constante cosmológica positiva en el caso estándar las trayectorias son líneas rectas que dependen exponencialmente del tiempo y la distancia del origen a la posición de la partícula como función del tiempo crece exponencialmente. En nuestro caso las trayectorias que se obtienen son espirales que se alejan del origen. Además, al igual que en el caso estándar, la distancia de la partícula al origen como función del tiempo crece exponencialmente, pero ahora el parámetro no conmutativo genera pequeñas oscilaciones. El periodo de estas oscilaciones resulta ser inversamente proporcional al parámetro no conmutativo, por lo que es un tiempo largo. En ese periodo la distancia crece exponencialmente, por lo que no conmutatividad a pequeñas distancias, es decir un parámetro no conmutativo pequeño, tiene influencia a distancias muy grandes. Fenómeno que es similar al de la mezcla de divergencias *UV/IR* de teoría de campos. También se obtiene una corrección a la constante de Hubble del modelo. Por otra parte, en el límite  $\Theta$  fuerte se tiene una relación con una métrica tipo-Gödel.

### 3.6.1. AdS y dS en el límite Newtoniano

Las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica,  $\Lambda$ , en el vacío son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (3.59)$$

La solución de estas ecuaciones con máxima simetría tiene la forma

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)} + r^2 d\Omega^2. \quad (3.60)$$

Si  $\Lambda$  es negativa se tiene el espacio de *anti de Sitter* y si  $\Lambda$  es positiva se tiene el espacio de *de Sitter*. En el límite Newtoniano,  $c \rightarrow \infty$  y  $\Lambda \rightarrow 0$  pero  $c\Lambda \rightarrow$  finito, la métrica (3.60) general el potencial

$$V = -\frac{\Lambda mc^2}{6}r^2. \quad (3.61)$$

Veamos que ocurre con una partícula de prueba en este potencial. El Hamiltoniano del sistema es

$$H = \frac{p^i p_i}{2m} - \frac{\Lambda mc^2}{6}r^2. \quad (3.62)$$

Tomando la estructura estándar obtenemos las ecuaciones de movimiento

$$m\ddot{x} = m\frac{\Lambda c^2}{3}x, \quad m\ddot{y} = m\frac{\Lambda c^2}{3}y, \quad m\ddot{z} = m\frac{\Lambda c^2}{3}z. \quad (3.63)$$

En el caso  $\Lambda$  negativa se tiene una fuerza atractiva y la partícula oscila en el origen. Pero si  $\Lambda$  es positiva se tiene una fuerza repulsiva y la partícula se aleja de forma exponencial del origen. Para el primer caso la distancia del origen a la posición de la partícula como función del tiempo tiene la forma  $r_{\Lambda < 0}(t) = A|\sin \sqrt{\Lambda}t|$ . Mientras que en el caso  $\Lambda$  positiva esta distancia tiene la forma es  $r_{\Lambda > 0}(t) = Be^{\sqrt{\Lambda}t}$ , debido al crecimiento exponencial de la distancia con respecto al tiempo a este caso se le denomina cosmología “inflacionaria”. El comportamiento de la distancia como función del tiempo para ambos casos se muestra en la figura 3.1.

Además, podemos ver que el caso  $\Lambda$  positiva se cumple la relación

$$\dot{r} = Hr, \quad H = \sqrt{\Lambda}. \quad (3.64)$$

Esta relación representa la ley de Hubble, con  $H$  la constante de Hubble.

### 3.6.2. Caso no conmutativo

Ahora consideraremos el Hamiltoniano (3.62) y la estructura simpléctica deformada (3.7). Como vimos anteriormente, una modificación importante que se tiene por considerar la nueva estructura simpléctica es que la cantidad

$$L_i = \epsilon_{ijk}x_j p_k$$

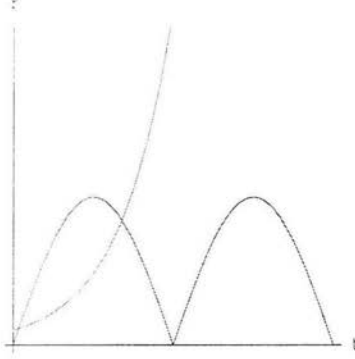


Figura 3.1: Comportamiento de la distancia al origen de una partícula de prueba en la comología newtoniana.

no genera rotaciones y tampoco es una cantidad conservada. Sin embargo, se conserva la cantidad

$$L_{\Theta} = \Theta_{ij}x_i p_j + \frac{1}{2}\Theta_{il}p_l \Theta_{ik}p_k.$$

Ahora, si se considera  $\Theta_{ij} = \epsilon_{ijk}\Theta_k$ , se puede ver que  $L_{\Theta}$  genera rotaciones alrededor de la dirección  $\vec{\Theta}$ . En este caso podemos decir que la dirección que define  $\vec{\Theta}$  es una dirección privilegiada. Por ejemplo, si tomamos este vector en dirección  $z$ ,  $\Theta_k = \delta_{k3}\Theta$ , de los paréntesis de Poisson (3.7) podemos ver que en este caso la no conmutatividad solo afecta al plano perpendicular a este eje.

Por otra parte, dado el Hamiltoniano (3.62), la estructura simpléctica (3.7) y el parámetro no conmutativo  $\Theta_{ij} = \epsilon_{ij3}\Theta$ , las ecuaciones de movimiento son

$$m\ddot{x} = \frac{m\Lambda c^2}{3}x - \frac{\Lambda c^2}{3}m^2\Theta\dot{y}, \quad (3.65)$$

$$m\ddot{y} = \frac{m\Lambda c^2}{3}y + \frac{\Lambda c^2}{3}m^2\Theta\dot{x}, \quad (3.66)$$

$$m\ddot{z} = \frac{m\Lambda c^2}{3}z. \quad (3.67)$$

Estas ecuaciones tienen la forma de un oscilador en un campo magnético constante en dirección  $z$ . Podemos ver que el movimiento en el eje  $z$  no se ve afectado. Sin embargo, para el plano perpendicular a  $z$  se tienen modificacio-

nes.

Para estudiar los fenómenos que ocurren cuando el parámetro  $\Theta$  es importante, al menos que se especifique lo contrario, en nuestro siguiente análisis supondremos que en la dirección  $z$  se toma la solución  $z(t) = 0$ . Ahora, tomando soluciones de la forma  $x = x_0 e^{\omega t}$  y  $y = y_0 e^{\omega t}$ , encontramos que

$$\omega = \sqrt{\alpha} \left[ \left(1 - \frac{\beta^2}{2\alpha}\right) \pm \sqrt{\left(1 - \frac{\beta^2}{2\alpha}\right)^2 - 1} \right]^{1/2}, \quad (3.68)$$

$$y_0 = x_0 \frac{\beta\omega}{\alpha - \omega^2}, \quad (3.69)$$

con  $\alpha = \Lambda c^2/3$  y  $\beta = m\Theta\alpha$ . A segundo orden en  $\Theta$  se obtiene

$$\omega = \sqrt{\alpha} \left( 1 - \frac{\beta^2}{4\alpha} \mp \frac{\beta}{2\alpha} \sqrt{-\alpha} \right). \quad (3.70)$$

De la ecuación (3.70) podemos ver que para el caso  $\Lambda < 0$ , al igual que en el caso estándar el movimiento es completamente oscilatorio. Sin embargo, ahora las oscilaciones se modifican por el término no conmutativo. Es decir, la constante cosmológica adquiere una corrección del parámetro no conmutativo. Por otra parte, si tomamos  $\Lambda > 0$ , a diferencia del caso estándar, se tienen frecuencias complejas y no sólo reales:

$$\omega = \omega_R \pm \omega_I = \sqrt{\alpha} \left( 1 - \frac{\beta^2}{4\alpha} \right) \pm i \frac{\beta}{2}. \quad (3.71)$$

En este caso el parámetro no conmutativo,  $\Theta$ , contribuye a la frecuencia con un término imaginario. Esto implica que una partícula de prueba se aleja del origen pero también tiene movimiento oscilatorio en el plano. Al orden que estamos considerando, las trayectorias linealmente independientes en el plano  $xy$  son de la forma

$$(x, y) = e^{\omega_R t} \left( \cos(\omega_I t), \left(1 - \frac{\beta^2}{8\alpha}\right) \sin(\omega_I t) \right), \quad (3.72)$$

$$(x, y) = e^{\omega_R t} \left( \sin(\omega_I t), -\left(1 - \frac{\beta^2}{8\alpha}\right) \cos(\omega_I t) \right). \quad (3.73)$$

Por lo tanto, en este caso las trayectorias no son rectas, sino espirales. Por ejemplo, para la solución (3.73) las trayectorias que se tienen son similares a

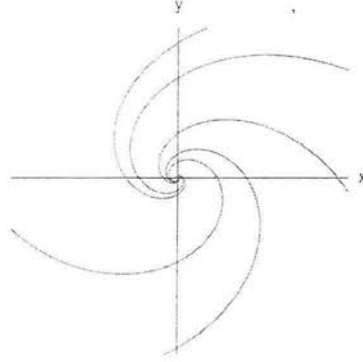


Figura 3.2: Trayectorias modificadas para el caso de constante comológica positiva.

las mostradas en la gráfica 3.2 . Por otra parte, para esta solución (3.73) la distancia de la partícula al origen al tiempo  $t$  tiene la forma

$$r(t) = Ae^{\omega_R t} \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4\alpha} \cos^2 \omega_I t}. \quad (3.74)$$

A primer orden en  $\Theta$  el crecimiento de esta distancia es exponencial. El comportamiento de  $r(t)$  como función del tiempo es similar al mostrado en la gráfica 3.3. En la gráfica 3.3 también se compara este comportamiento de  $r(t)$  con el que se tiene a primer orden.

De la ecuación (3.74) podemos ver que el efecto de la no conmutatividad en  $r(t)$  es más notable cuando se cumple la relación  $\omega_I t = n\pi$ , es decir, cuando

$$t = \frac{n\pi}{\omega_I} = \frac{3n\pi}{m\Theta\Lambda c^2}. \quad (3.75)$$

por lo que, debido a que  $\Theta$  y  $\Lambda$  deben ser pequeños, este tiempo muy grande. Además, como el crecimiento de  $r(t)$  es exponencial, en ese tiempo la partícula recorrerá una distancia muy larga. Por lo tanto, no conmutatividad a distancias muy pequeñas tiene consecuencias a distancias muy largas. Este fenómeno es similar a la mezcla de divergencias  $UV/IR$  que ocurre en una teoría de campos en espacios no conmutativos. También podemos ver que el tiempo definido en (3.75) es proporcional al tiempo que requiere la partícula para dar  $n$  vueltas al origen. Es ese mismo tiempo la partícula recorre una distancia muy grande.

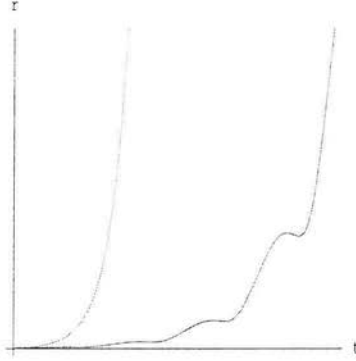


Figura 3.3: Distancia del origen a la posición de la partícula como función del tiempo en el caso no conmutativo.

Ahora, para este caso, segundo orden, la constante cosmológica tiene la forma

$$H = \sqrt{\omega_R} = \sqrt{\alpha} \left(1 - \frac{\beta^2}{4\alpha}\right). \quad (3.76)$$

Por lo tanto, a este orden tenemos una corrección a la constante de Hubble, a ordenes mayores tenemos una constante Hubble que depende del tiempo.

### 3.6.3. Límite $\Theta$ fuerte

El límite  $\Theta$  fuerte en el sistema de ecuaciones (3.65)-(3.67) lo podemos tomar como  $(m\Lambda c^2/3) \rightarrow 0$  y  $\Theta \rightarrow \infty$ , pero  $(m\Lambda c^2/3)m\Theta \rightarrow$  finito. Así, obtenemos que

$$m\ddot{x} = -\frac{\Lambda c^2}{3} m^2 \Theta \dot{y}, \quad (3.77)$$

$$m\ddot{y} = \frac{\Lambda c^2}{3} m^2 \Theta \dot{x}, \quad (3.78)$$

$$m\ddot{z} = 0. \quad (3.79)$$

Ahora, consideremos la métrica

$$ds^2 = - \left( dt + \frac{\Omega \sinh^2 l \rho}{l^2} d\phi \right)^2 + \frac{\sinh^2 2l\rho}{4l^2} d\phi^2 + d\rho^2 + dz^2. \quad (3.80)$$



Si tomamos límite  $l \rightarrow 0$  y expresamos la métrica en términos de las coordenadas

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi,$$

las ecuaciones de las geodésicas de esta métrica tiene la forma de las ecuaciones de movimiento (3.77)-(3.79). En donde  $\Omega$  juega el papel del parámetro  $\Theta (\Lambda c^2/3)$ . Debido a que cuando se considera el caso  $l^2 = 2\Omega$ , se tiene la métrica de Gödel [76], a la métrica (3.80) se le llama de tipo-Gödel. Esta métrica es solución de un espacio con constante cosmológica y tensor de energía momento diferente de cero. Algunas propiedades de esta métrica se pueden ver en [77]. Una relación interesante de este espacio con el problema de Landau se puede ver en [78] y [79].

A las ecuaciones (3.77)-(3.79) también las podemos ver como las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada en un campo magnético en dirección  $z$ . En este caso  $\Lambda$  toma el papel de la carga y  $\Theta$  el del campo magnético. Si la velocidad de la partícula en el eje  $z$  es cero, ésta se mueve en un círculo con centro en  $(x_0, y_0)$ . Sin embargo, en el caso general la partícula se mueve en una hélice.

### 3.7. Conclusiones

En este trabajo mostramos las correcciones que se tiene para la segunda ley de Newton por considerar la estructura simpléctica consistente con las reglas de conmutación de una mecánica cuántica no conmutativa. Un resultado interesante es que el término de corrección es proporcional tanto al campo en que está una partícula como al parámetro no conmutativo. Esto nos permite interpretar a la fuerza resultante como un efecto debido a una perturbación del campo externo al espacio. Otro resultado interesante fue que para el caso del potencial de un oscilador tridimensional las ecuaciones de movimiento se pueden ver como las de un oscilador cargado en un campo magnético constante y que para el problema de Kepler se obtiene una fuerza con la forma de la que produciría un campo gravitacional lejano generado por un cuerpo masivo rotante. Además, se mostró que en un campo central el término de corrección rompe la simetría de rotaciones, pero el generador de rotaciones en la dirección del parámetro no conmutativo se conserva. Con el análisis del corrimiento del perihelio de Mercurio se encontró una cota para el parámetro no conmutativo del orden de  $10^{-58}(\text{metros})^2$ . Por último se mostraron algunas implicaciones cosmológicas en el límite newtoniano.

# Capítulo 4

## Implicaciones Geométricas

En este capítulo veremos que en un espacio con coordenadas no conmutativas es posible la cuantización de objetos geométricos. Se comparan estos resultados con los de otras teorías.

Los resultados de este trabajo se encuentran publicados en la referencia [23].

### 4.1. Introducción

Un resultado importante de la mecánica cuántica es que algunas cantidades físicas, como la energía y el momento angular, deben tener espectro discreto. De hecho con la hipótesis de Planck sobre los quantum de luz nace esta teoría. Inicialmente la explicación de estos espectros discretos se dio mediante reglas como las de Bohr-Sommerfeld, que son un límite semiclásico de la mecánica cuántica. Sin embargo, la explicación de estos espectros se da de manera natural con las ecuaciones de Heisenberg (o la ecuación de Schrödinger), es decir, al asociar operadores no conmutativos a cantidades del espacio fase. Por ejemplo, la energía se cuantiza debido a la dinámica cuántica, a través del Hamiltoniano. Sin embargo, otras cantidades, como el espín, no representan propiedades dinámicas, si no cantidades propias de las partículas. La cuantización del espín no es consecuencia de una ecuación dinámica si no del álgebra de los operadores que representa esta cantidad. Por lo tanto, en algunos casos la cuantización de las cantidades se da únicamente por el álgebra no conmutativa de los operadores. En este capítulo veremos que al suponer un espacio de configuraciones no conmutativo se pueden cuantizar cantidades geométricas como el área.

Veamos por que cuantizar objetos geométricos puede ser interesante. Uno

de los retos importantes de la física teórica está en aplicar las reglas de la mecánica cuántica a la Relatividad General de forma consistentes. Aún no se tiene la solución de este problema. Sin embargo, existen argumentos teóricos que sugieren que a este nivel algunos objetos geométricos sólo pueden tomar valores discretos. En efecto, una de las cantidades geométricas más importantes en gravedad cuántica es el área del horizonte de eventos de un hoyo negro, esto se debe a que ésta es proporcional a la entropía del hoyo negro [80]. Así al notar que el área del horizonte de eventos de un hoyo negro no extremal es un invariante adiabático clásico y tomar en cuenta el principio de Ehrenfest [81] (éste establece que a todo invariante adiabático clásico le corresponde un espectro discreto en su versión cuántica) Bekenstein propone que el área de un hoyo negro debe tener un espectro discreto a nivel cuántico [24]. Bekenstein propone un espectro de la forma

$$A_n \approx \bar{\gamma} l_p^2 n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

Recientemente S. Hod [82], a partir del principio de correspondencia de Bohr, mostró que la constante de proporcionalidad es  $\bar{\gamma} = 4 \ln 3$ .

Por otra parte, una de las propuestas para cuantizar la gravedad está en la *Gravedad Cuántica de Lazos* [83]. En esta teoría se tienen bien definidos operadores de cantidades geométricas como el volumen o el área. Además, en ciertos casos estos operadores adquieren espectro discreto. Por ejemplo, para estos caso, el operador de área de superficies tiene el espectro

$$A(j_i) = 8\pi\gamma L_p^2 \sqrt{j_i(j_i + 1)} \quad (4.2)$$

donde  $\{j_i\}$  toma valores enteros y semienteros;  $\gamma$  es una constante de proporcionalidad, llamada parámetro de Immirzi, que no puede determinar la teoría. Este operador y su espectro es importante para la gravedad cuántica de lazos. Sin embargo, considerando análisis numéricos de modelos de “spin foam” [84] es posible que la fórmula correcta no esté dada por (4.2), sino por

$$A(j_i) = \gamma l_p^2 (j_i + 1/2). \quad (4.3)$$

Este espectro para el área fue originalmente propuesto por los autores de la referencia [85].

En la geometría no conmutativa existen diferentes versiones de la gravedad, dependiendo del triplete espectral,  $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, \mathcal{D})$ , que se propone. Sin embargo, la mayoría de estas propuestas no tienen versión cuántica. En este formalismo, un modelo de juguete que simula algunos aspectos de la gravedad y que tiene

versión cuántica fue dado por C. Rovelli [36]. Un resultado notable de este modelo es que se cuantiza la pseudodistancia. Veamos de forma somera como ocurre esto. La acción para este modelo es de la forma

$$S[\mathcal{D}] = \frac{1}{2} \text{Tr}[\mathcal{D} \tilde{M} \mathcal{D}] \quad (4.4)$$

con  $\mathcal{D}$  el operador de Dirac definido como

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ \bar{m} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m_1 \\ 0 & 0 & m_2 \\ \bar{m}_1 & \bar{m}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

y  $\tilde{M}$  es una matriz de  $3 \times 3$  que determina las ecuaciones de movimiento. Como vemos esta acción tiene la forma una acción para un modelo de matrices. Las variables  $m$  y  $\bar{m}$  satisfacen los paréntesis de Poisson

$$\{m, \bar{m}\} = iG \quad (4.5)$$

con  $G$  la constante gravitacional. Por otra parte, recordemos que la distancia geodésica entre dos puntos en el formalismo de A. Connes está dada por

$$d(p, p') = \sup_{\{a \in \mathcal{A}, \|\mathcal{D}\pi(a)\| \leq 1\}} |p(a) - p'(a)|. \quad (4.6)$$

En particular, en el modelo de C. Rovelli esta distancia toma la forma

$$d(p, p') = \frac{1}{\sqrt{2m\bar{m}}}. \quad (4.7)$$

Ahora, a nivel cuántico se deben imponer las relaciones de conmutación

$$[\hat{m}, \hat{m}^\dagger] = \hbar G \quad (4.8)$$

que definen un álgebra de operadores de creación aniquilación. Con estos operadores se puede formar el operador de número

$$\hat{N} = \frac{\hat{m}^\dagger}{\sqrt{\hbar G}} \frac{\hat{m}}{\sqrt{\hbar G}}. \quad (4.9)$$

De donde, a la cantidad clásica  $m\bar{m}$  le podemos asociar la cantidad cuántica:

$$\frac{\hat{m}\hat{m}^\dagger + \hat{m}^\dagger\hat{m}}{2} = \hbar G(\hat{N} + 1/2) \quad (4.10)$$

Por lo tanto, el espectro del operador distancia  $\hat{d}$  en el formalismo cuántico tiene la forma

$$d_N = \frac{L_p}{\sqrt{2N+1}}. \quad (4.11)$$

Como vemos las reglas de conmutación (4.8) implican que la pseudodistancia adquiera un espectro discreto. Por lo tanto, es posible que en un modelo de geometría no conmutativa más realista con versión cuántica se puedan cuantizar otros objetos geométricos

Por otra parte, aún no se tiene una versión final de la gravedad en espacio con coordenadas no conmutativas, la mayoría de las versiones existentes son para una gravedad topológica o con torsión [86]. Tampoco es claro que en estos espacios se pueda cuantizar la gravedad. Sin embargo, estos espacios tienen propiedades interesantes para este tema, pues, como veremos en la próxima sección, en estos espacio se pueden cuantizar objetos geométricos.

## 4.2. Cuantización del área en un espacio no conmutativo

En esta sección veremos algunas implicaciones geométricas que se obtienen por suponer que un espacio de dos dimensiones espaciales es no conmutativo. También veremos algunas relaciones con los resultados de gravedad cuántica de lazos.

Para iniciar, consideremos

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\hbar\Theta \quad \text{con} \quad \Theta > 0. \quad (4.12)$$

Entonces, podemos formar los operadores

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Theta}}(\hat{x}_1 + i\hat{x}_2) \quad \text{y} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Theta}}(\hat{x}_1 - i\hat{x}_2), \quad (4.13)$$

que satisfacen

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (4.14)$$

Con estos operadores podemos definir el operador de número

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a},$$

de donde

$$[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \quad \text{y} \quad [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}.$$

Por lo que,  $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{a}$  son operadores de creación y aniquilación, respectivamente. Por otra parte, en términos de las coordenadas  $\hat{N}$  tiene la forma

$$\hat{N} = \frac{1}{2\hbar\Theta} [(\hat{x}_1)^2 + (\hat{x}_2)^2 - \hbar\Theta]. \quad (4.15)$$

Es decir, podemos definir el operador

$$\frac{\hat{A}}{\pi} = [(\hat{x}_1)^2 + (\hat{x}_2)^2] = 2\hbar\Theta[\hat{N} + \frac{1}{2}].$$

Como  $\hat{A}/\pi$  es un operador positivo,  $\hat{N}$  debe tener un mínimo. Por lo tanto  $\hat{A}/\pi$  está cuantizada en niveles igualmente espaciados por el intervalo  $2\hbar\Theta$ :

$$\frac{\hat{A}}{\pi}|n\rangle = \frac{\hat{A}}{\pi}|n\rangle = 2\hbar\Theta(n + \frac{1}{2})|n\rangle. \quad (4.16)$$

con

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle \quad (4.17)$$

Es tentador tomar a  $\sqrt{\hat{A}/\pi}$  como un operador de distancia. Sin embargo, para hablar de distancia se requieren al menos dos puntos y dado que las coordenadas espaciales no conmutan, no tenemos una definición de punto en el espacio. Por esta razón creemos que es más conveniente relacionar este operador con el área de un círculo. El área de un círculo está definida como

$$A = \pi[(x_1)^2 + (x_2)^2].$$

Entonces, la versión cuántica de esta cantidad tiene la forma

$$\hat{A} = \pi[(\hat{x}_1)^2 + (\hat{x}_2)^2].$$

Por lo tanto,  $\hat{A}$  está cuantizada en términos de  $2\pi\hbar\Theta$ :

$$A_n = 2\pi\hbar\Theta(n + \frac{1}{2}). \quad (4.18)$$

Podemos ver que, a pesar de que el área se cuantiza, las coordenadas espaciales no necesariamente toman sólo valores discretos. La discretización de cantidades geométricas también ocurre en el modelo original de Snyder [8].

Como vemos el espectro para el área de un círculo obtenida en un espacio no conmutativo (4.18) es semejante al que se obtiene para un hoyo negro (4.1).

Además, contiene una parte del espectro (4.3), que corresponde al operador de área que se propone en [85]. Esto puede indicar una relación entre las dos teorías. Sin embargo, hay que notar que la gravedad cuántica de lazos es válida al orden de la escala de Planck, mientras que las cotas para la no conmutatividad, en energía, son menores [68], [69].

### 4.3. Fuzzy esfera

Otra propuesta de espacio no conmutativo está dado por la llamada fuzzy esfera. Consideremos el álgebra  $SU(2)$ :

$$[L_i, L_j] = \epsilon_{ijk} L_k, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.19)$$

De donde  $L^2$  tiene los valores propios

$$L^2 = j(j+1) \quad j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots \quad (4.20)$$

Por lo tanto si formamos las variables

$$\hat{x}_i = \sqrt{\frac{\Theta}{L}} L_i \quad (4.21)$$

Este espacio satisface las reglas de conmutación

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = \frac{\Theta}{r} \epsilon_{ijk} \hat{x}_k, \quad (4.22)$$

con  $r^2 = \hat{x}_i \hat{x}^i$ . Estas son las reglas de conmutación de la Fuzzy esfera. De la definición (4.21) podemos ver que los valores propios de  $r^2$  son

$$r^2 = \Theta \sqrt{j(j+1)} \quad (4.23)$$

Así, el área para una esfera tiene los valores propios

$$A(j) = 4\pi r^2 = 4\pi \sqrt{j(j+1)} \quad j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots \quad (4.24)$$

que es similar al espectro dado por gravedad cuántica de lazos (4.2). Sin embargo, en el caso de la fuzzy esfera este espectro sólo es para una esfera. Además de que en el caso de  $\Theta$  débil las coordenadas (4.21) se anulan. Hay una extensa literatura sobre el estudio de este espacio, una buena referencia se encuentra en [87].

## 4.4. Álgebra de Virasoro y estados coherentes

En esta sección veremos que con coordenadas no conmutativas se puede construir una representación del álgebra de Virasoro. Hecho que tiene cierto interés.

Supongamos que tenemos las reglas de conmutación

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\hbar\Theta \quad \text{con } \Theta > 0. \quad (4.25)$$

Entonces, podemos formar los operadores

$$\tilde{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Theta}}(\hat{x}_1 + i\hat{x}_2) \quad \text{y} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Theta}}(\hat{x}_1 - i\hat{x}_2), \quad (4.26)$$

que satisfacen

$$[\tilde{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (4.27)$$

El operador de traslaciones en este espacio se puede poner de la forma

$$U(\sigma_1, \sigma_2) = e^{\frac{i}{\hbar\Theta}(\sigma_2\hat{x}_1 - \sigma_1\hat{x}_2)} = e^{\frac{i}{\hbar\Theta}\epsilon_{ij}\hat{x}_i\sigma_j}, \quad (4.28)$$

pues,

$$U(\sigma_1, \sigma_2)\hat{x}_i\bar{U}(\sigma_1, \sigma_2) = \hat{x}_i + \sigma_i. \quad (4.29)$$

Ahora, definamos

$$z = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\Theta}}(\sigma_1 + i\sigma_2), \quad (4.30)$$

entonces, ocupando los operadores de creación y aniquilación, tenemos

$$U(\sigma_1, \sigma_2) = U(z) = e^{(z\hat{a}^\dagger - z^*\hat{a})} \quad (4.31)$$

Por otra parte, con los operadores de creación y aniquilación construidos podemos formar los operadores

$$\tilde{l}_n = -\hat{a}(\hat{a}^\dagger)^{n+1} \quad \text{con } n \geq -1, \quad (4.32)$$

que satisfacen

$$[\tilde{l}_n, \tilde{l}_m] = (n-m)\tilde{l}_{n+m}. \quad (4.33)$$

Por lo tanto, tenemos una subálgebra del álgebra de Virasoro, llamada álgebra de Witt. El álgebra de Virasoro está definida por (4.33) con  $n$  y  $m$  corriendo en los enteros. Esta álgebra es central en la teoría de cuerdas ya que genera la



simetría conforme, que es la simetría de norma de la teoría [46].

Con los generadores del álgebra de Witt podemos definir un operador genérico de la forma

$$\hat{A}(\omega) = \sum_{n \geq -1} c_n \omega^{n+2} \hat{l}_n \quad (4.34)$$

con  $\omega$  una variable compleja. Entonces, si tomamos  $c_n = 1/n!$  y  $\omega = z$ , el operador  $\hat{A}(\omega)$  tiene la forma explícita

$$\hat{A}(z) = z \hat{a} e^{z \hat{a}^\dagger} \quad (4.35)$$

Entonces, para  $z \neq 0$  podemos definir un estado coherente como

$$\frac{\hat{A}(z)}{z^2} |0\rangle = |z\rangle.$$

Además, si tomamos  $c_n = 1$  y  $\omega = 1/z$  tenemos

$$A(z) = T(z) = \sum_{n \geq -1} \frac{1}{z^{n+2}} \hat{l}_n$$

Que es el generador de las transformaciones conformes, de donde,  $\hat{l}_n$  se puede poner como una integral de contorno.

$$\hat{l}_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z). \quad (4.36)$$

Por otra parte, ocupando el operador de área tenemos

$$\hat{l}_n = -(\hat{a}^\dagger)^n \left[ \hat{N} + (n+1) \right] \quad (4.37)$$

$$= -(\hat{a}^\dagger)^n \left[ \frac{\hat{A}}{2\Theta \hbar \pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right) \right], \quad n \geq 0. \quad (4.38)$$

También podemos construir los operadores

$$\hat{L}_n = (\hat{x}_1)^{n+1} \hat{x}_2 \quad n \geq -1 \quad (4.39)$$

que cumplen el álgebra

$$[\hat{L}_n, \hat{L}_m] = i\Theta(n-m)\hat{L}_{n+m}. \quad (4.40)$$

Sin embargo, no es la única realización del álgebra conforme. Por ejemplo, si definimos

$$\tilde{x}_1 = \frac{\hat{x}_1}{\sqrt{\hbar\Theta}} \quad \text{y} \quad \tilde{x}_2 = \frac{\hat{x}_2}{\sqrt{\hbar\Theta}}, \quad (4.41)$$

las cantidades

$$H = \frac{1}{2} \left[ (\tilde{x}_2)^2 + \frac{g}{(\tilde{x}_1)^2} \right], \quad (4.42)$$

$$D = \frac{1}{2} [\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + \tilde{x}_2 \tilde{x}_1], \quad (4.43)$$

$$K = \frac{1}{2} (\tilde{x}_1)^2 \quad (4.44)$$

satisfacen el álgebra

$$[D, H] = 2iH, \quad [D, K] = -2iK, \quad \text{y} \quad [H, K] = -iD. \quad (4.45)$$

$D$  es el generador de dilatación,  $K$  el generador de las transformaciones conformes especiales. Ahora, si tomamos la combinación lineal

$$L_{\pm 1} = \frac{1}{2} (H - K \mp iD), \quad (4.46)$$

$$L_0 = \frac{1}{2} (H + K), \quad (4.47)$$

tenemos el álgebra en la forma de Virasoro

$$[L_1, L_{-1}] = 2L_0 \quad \text{y} \quad [L_0, L_{\pm 1}] = \mp L_{\pm 1}. \quad (4.48)$$

En particular tenemos

$$L_0 = \frac{1}{4} \left[ (\tilde{x}_2)^2 + (\tilde{x}_1)^2 + \frac{g}{(\tilde{x}_1)^2} \right] \quad (4.49)$$

que es un operador positivo, por lo que sus valores propios deben ser positivos. Por otra parte, de la ecuación (4.48) podemos ver que  $L_{+1}$  actúa como operador de aniquilación mientras que  $L_{-1}$  es un operador de creación para los estados propios de  $L_0$ . Por lo tanto,  $L_0$  tiene un espectro discreto con un mínimo.

Como vemos, es posible construir una representación del álgebra conforme con coordenadas espaciales no conmutativas. Aun no es clara la utilidad de esta álgebra en estos espacios, sin embargo debido a su importancia en otras áreas de la física es posible que posteriormente se encuentre una aplicación.

## 4.5. Conclusiones

En este capítulo vimos que en un espacio no conmutativo de dos dimensiones es posible cuantizar el área. Es decir, hay espacios no conmutativo que tienen cantidades geométricas que sólo pueden tomar valores discretos. Este resultado, a pesar de ser trivial, es interesante, pues existen algunas indicaciones teóricas de que a nivel cuántico la gravedad implica que algunos objetos geométricos, como el área del horizonte de eventos de un hoyo negro, se deben cuantizar.

# Capítulo 5

## Conclusiones

En este trabajo se abordaron tres problemas relacionados con espacios de coordenadas no conmutativas. De estos problemas se tienen algunos resultados interesantes, sin embargo también se tienen preguntas por responder.

El primer problema tratado está relacionado con la forma en que las condiciones de bordes de una teoría de campos afectan la estructura simpléctica. Este tema es de interés pues hay condiciones de borde que implican no conmutatividad en la frontera del problema. En teoría de cuerdas esto produce campos no conmutativos a bajas energías. Tomando la idea de que las condiciones de borde se pueden tomar como constricciones, en esta sección propusimos un método alternativo para resolver el problema de encontrar la forma en que se modifica la estructura simpléctica dadas unas condiciones de borde. La propuesta hecha se basa en definir un problema donde las condiciones de borde se toman como constricciones válidas en toda la región del problema y aplicar el método de Dirac, posteriormente la estructura resultante se mapea al problema original. La propuesta funciona para diversos ejemplos conocidos. Sin embargo, no se da una prueba de que este es el método que resuelva el problema. Tampoco es claro que funcione para sistemas con libertad de norma. Para resolver este problema en general se deberá estudiar más a fondo las propiedades locales del espacio fase de un problema con frontera. Un buen inicio sería tratar de encontrar la estructura simpléctica consistente con la mecánica clásica con condiciones de borde de Neumann.

El segundo problema que se abordó en este trabajo fue estudiar el límite clásico de un espacio no conmutativo. Para ello se construyó una mecánica clásica con la estructura simpléctica consistente con las reglas de conmutación de la mecánica cuántica no conmutativa. En esta mecánica clásica se tiene

una corrección para la segunda ley de Newton. Un resultado interesante es que el término de corrección es proporcional tanto al campo en que está una partícula como al parámetro no conmutativo. Esto nos permite interpretar a la fuerza resultante como un efecto debido a una perturbación del campo externo al espacio. Para el problema de Kepler la corrección tiene la forma de la fuerza que produce un campo gravitacional lejano generado por un cuerpo masivo rotante. Se mostró que en un campo central el término de corrección rompe la simetría de rotaciones. Se estudió el corrimiento del perihelio de Mercurio y se encontró una cota para el parámetro no conmutativo del orden de  $10^{-58}(\text{metros})^2$ . Esta cota es más fuerte que algunas encontradas en sistemas de altas energías y es dos ordenes mayor que la mejor cota encontrada para este parámetro. Por último se mostraron algunas implicaciones cosmológicas en el límite newtoniano. En este trabajo queda pendiente obtener el límite clásico de un espacio que es curvo y no conmutativo. Este límite es de particular interés ya que podría dar correcciones en sistemas como un hoyo negro o en el problema de la constante cosmológica.

El tercer problema abordado fue estudiar objetos geométricos en un espacio no conmutativo. Se mostró que en un espacio no conmutativo de dos dimensiones el operador de área se cuantiza. Este resultado, a pesar de ser simple, es interesante, pues existen algunas indicaciones teóricas de que a nivel cuántico la gravedad implica que algunos objetos geométricos, como el área del horizonte de eventos de un hoyo negro, se deben cuantizar. Otro teoría que obtiene objetos geométricos discretos es la gravedad cuántica de lazos. Por lo tanto, se tiene la pregunta de si los espacios no conmutativos están relacionados con la gravedad cuántica de lazos. Por otra parte, en un espacio no conmutativo se pierde la noción de punto, por lo que se tendría que analizar si en estos espacios se debe modificar el concepto de sistema de referencia.

# Apéndice A

## Soluciones exactas

En este apéndice mostramos los paréntesis de Poisson que se obtienen al ocupar las soluciones exactas.

### A.0.1. Campo escalar

Para el caso del campo escalar y condiciones de Dirichlet la solución general a la ecuación de movimiento es

$$\phi(x, t) = \sum_{n \geq 1} q_n(t) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sen}(nx). \quad (\text{A.1})$$

Aquí

$$\ddot{q}_n(t) = -n^2 q_n(t).$$

Se puede mostrar que:

$$q_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^l dx \phi(x, t) \text{sen}(nx). \quad (\text{A.2})$$

Entonces, introduciendo (A.2) en (A.1) encontramos

$$\phi(x, t) = \int_0^\pi dx' \phi(x', t) \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \text{sen}(nx') \text{sen}(nx) = \int_0^l dx' \phi(x', t) \delta(x - x'),$$

de donde

$$\delta(x - x') = \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \text{sen}(nx') \text{sen}(nx)$$

Además, el momento canónico es

$$\Pi(x, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}(x, t)} = \dot{\phi}(x, t) = \sum_{n \geq 1} \dot{q}_n(t) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{sen}(nx). \quad (\text{A.3})$$

Ahora, sea  $\dot{q}_n(t) = p_n(t)$ , entonces

$$\begin{aligned}\Pi(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n \geq 1} p_n(t) \text{sen}(nx), \\ p_n(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi dx \Pi(x, t) \text{sen}(nx).\end{aligned}\quad (\text{A.4})$$

Por otra parte, los paréntesis de Poisson canónicos de este sistema son:

$$\{\phi(x, t), \phi(x', t)\} = 0, \quad \{\phi(x, t), \Pi(x', t)\} = \delta(x - x'), \quad \{\Pi(x, t), \Pi(x', t)\} = 0.$$

De donde se obtiene que

$$\{q_n(t), q_m(t)\} = \{p_n(t), p_m(t)\} = 0 \quad \text{y} \quad \{q_n(t), p_m(t)\} = \delta_{nm}.$$

Ahora, si calculamos los paréntesis Poisson con la solución exacta (A.1) y (A.3) obtenemos

$$\{\phi(x, t), \Pi(x', t)\} = \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \text{sen}(nx') \text{sen}(nx) = \delta(x - x')$$

que está de acuerdo con las condiciones a la frontera. Por lo tanto no hay contradicción. Con la condición de borde de Neumann ocurre lo mismo. Al calcular los paréntesis de Poisson con la solución exacta se obtiene

$$\{\phi(x, t), \Pi(x', t)\} = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \cos(nx') \cos(nx) = \delta(x - x') \quad (\text{A.5})$$

$$\{\partial_x \phi(x, t), \Pi(x', t)\}|_{x=\pi, 0} = 0 = \partial_x \delta(x - x')|_{x=\pi, 0}. \quad (\text{A.6})$$

Por lo tanto no hay contradicción entre los paréntesis de Poisson y las condiciones de borde cuando se toma la solución exacta.

## A.0.2. Condiciones mixtas

En este caso la solución general para las ecuaciones de movimiento tiene la forma

$$\phi_i(x, t) = M_i + B_i t + T_{ij} B_j x + \sum_{n \geq 1} \left[ \frac{q_{ni}(t)}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) - \frac{T_{ij} p_{nj}(t)}{n\sqrt{\pi}} \text{sen}(nx) \right].$$

Con  $\ddot{q}_i(t) = -q_i(t)$  y  $\dot{q}_i = p_i(t)$ . Además, de la definición de los momentos canónicos tenemos

$$\Pi_i(x, t) = M_{ij} \left[ B_j + \sum_{n \geq 1} \frac{p_{ni}(t)}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right].$$

**Faltan páginas**

**N° 91-94**



simpléticas. Pongamos un poco de claridad en estas afirmaciones. Supongamos que tenemos la matriz

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Si pedimos que  $M$  sea una matriz que cumpla (B.3), se debe cumplir que

$$A^T \Theta A + A^T C - C^T A = \Theta, \quad (\text{B.4})$$

$$A^T \Theta B + B^T D - C^T B = I, \quad (\text{B.5})$$

$$B^T \Theta A + B^T C - D^T A = -I, \quad (\text{B.6})$$

$$B^T \Theta B + B^T D - D^T B = 0. \quad (\text{B.7})$$

Ahora, si consideramos el caso  $B = C = 0$ ,  $M$  representa una transformación de coordenadas en el espacio de configuraciones. En el caso estándar,  $\Theta = 0$ , toda transformación de coordenadas en el espacio de configuraciones es una transformación canónica. Sin embargo, si  $\Theta$  es diferente de cero, de (B.4) podemos ver que no cualquier transformación de coordenadas en el espacio de configuraciones es una transformación canónica. Por lo tanto, el grupo simpléctico sólo permite cierto tipo de transformaciones de coordenadas en el espacio de configuraciones. Por ejemplo, en el caso de un espacio de configuraciones de dos o tres dimensiones, las transformaciones de coordenadas que respetan la estructura simpléctica son las transformaciones que dejan invariante el área del plano no conmutativo.

Por otra parte, para encontrar las funciones generadoras de las transformaciones canónicas debemos recurrir a la acción Hamiltoniana. De la acción

$$S = \int dt \left[ (\dot{x}^i + \frac{1}{2} \Theta_{ij} \dot{p}_j) p_i - H \right], \quad (\text{B.8})$$

se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} - \Theta_{ij} \dot{p}_j, \quad (\text{B.9})$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (\text{B.10})$$

Estas ecuaciones se pueden escribir como

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \Theta_{ij} \frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad (\text{B.11})$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (\text{B.12})$$

Estas son las mismas ecuaciones que se obtienen considerando una Hamiltoniana  $H = H(x, p)$  y una estructura simpléctica de la forma

$$\{x^i, x^j\} = \Theta^{ij}, \quad \{x^i, p_j\} = \delta_j^i, \quad \{p_i, p_j\} = 0. \quad (\text{B.13})$$

Es decir, (B.8) es la acción para a un sistema mecánico con la estructura simpléctica (B.13).

Ahora, supongamos que hacemos una transformación de coordenadas en el espacio fase:

$$x^i = x^i(Q, P), \quad p_i = p_i(Q, P), \quad (\text{B.14})$$

tal que la acción toma la forma

$$S = \int dt \left[ (\dot{Q}^i + \frac{1}{2}\Theta_{ij}\dot{P}_j)P_i - K(P, Q, t) + \frac{d}{dt}F(Q, P, t) \right]. \quad (\text{B.15})$$

De donde, se tiene la igualdad

$$(\dot{x}^i + \frac{1}{2}\Theta_{ij}\dot{p}_j)p_i - H = (\dot{Q}^i + \frac{1}{2}\Theta_{ij}\dot{P}_j)P_i - K(P, Q, t) + \frac{d}{dt}F(Q, P, t) \quad (\text{B.16})$$

De aquí es claro que las funciones generadoras de las transformaciones canónicas sufrirán cambios debido al parámetro  $\Theta$ . La modificación general de estas funciones generadoras la dejaremos para un trabajo posterior. Sin embargo, otra forma de atacar el problema es hacer una transformación no canónica de la forma

$$\zeta_i = x_i + \frac{1}{2}\Theta_{ij}p_j \quad \bar{p}_i = p_i. \quad (\text{B.17})$$

Con estas coordenadas del espacio fase se tienen los paréntesis de Poisson

$$\{\zeta^i, \zeta^j\} = 0, \quad \{\zeta^i, \bar{p}_j\} = \delta_j^i, \quad \{\bar{p}_i, \bar{p}_j\} = 0 \quad (\text{B.18})$$

y la Hamiltoniana toma la forma

$$\bar{H}(\zeta, \bar{p}) = H(\zeta_i - \frac{1}{2}\Theta_{ij}\bar{p}_j, \bar{p}_i) \quad (\text{B.19})$$

En estas nuevas coordenadas la acción (B.8) se escribe

$$S = \int dt \left[ \dot{\zeta}^i \bar{p}_i - \bar{H}(\zeta, \bar{p}) \right]. \quad (\text{B.20})$$

Por lo tanto, en estas nuevas variables las funciones generadoras de las transformaciones canónicas toman la forma habitual.

# Referencias

- [1] Galileo Galilei, *Il Saggiatore*, (1622).  
Galileo. *Antología*, Ediciones Península Barcelona, (1991).
- [2] A. Einstein, *Sobre la teoría de la relatividad especial y general*, Alianza Editorial (1996).
- [3] M. Atiyah, D Iagolnitzer (Editores), *Fields Medals Medallists' Lectures*, World Scientific (1997).
- [4] C. Nash, *Topology and physics— a historical essay*, hep-th/9709135.
- [5] M. A. Naimark, *Normed Algebras*, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen The Netherlands (1972).
- [6] R. Jackiw, *Physical Instances of Noncommuting Coordinates*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **108** (2002) 30-36; Phys. Part. Nucl. **33** (2002) S6-S11, hep-th/0110057; J. Polchinski, *M Theory: Uncertainty and Unification*, hep-th/0209105.
- [7] R. Peierls, *On the Theory of Diamagnetism of Conduction Electrons*, Z. Phys. **80**, 763-791 (1933).
- [8] H. Snyder, *Quantized Space-Time*, Phy. Rev. **71**, 38 (1947).
- [9] Z.F. Ezawa, *Quantum Hall Effects: Field Theoretical Approach and Related Topics* (World Scientific, 2000).
- [10] M. J. Schankel. *Quantum Phase Transitions in 2d Quantum Liquids*, cond-mat/0003269.
- [11] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, *Hydrogen Atom Spectrum and the Lamb Shift in Noncommutative QED*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001) 2716, hep-th/0010175.

- [12] R. J. Szabo, *Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces*, hep-th/0109162.
- [13] N. Seiberg, E. Witten, *String Theory and Noncommutative Geometry*, JHEP 9909 (1999) 032, hep-th/9908142.
- [14] S. Benczik, L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, S. Rayyan, T. Takeuchi, *Short Distance vs. Long Distance Physics: The Classical Limit of the Minimal Length Uncertainty Relation*, Phys. Rev. D **66** (2002) 026003, hep-th/0204049.
- [15] I. Bars, Y. Matsuo *Computing in String Field Theory Using the Moyal Star Product*, Phys. Rev. D **66** (2002) 06600. hep-th/0204260
- [16] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, 1994.
- [17] B. DeWitt, en *Gravitation*, Edited by L. Witten, (1962) 266.
- [18] Chong-Sun Chu, Pei-Ming Ho, *Noncommutative Open String and D-brane*, Nucl. Phys. **B 550** (1999) 151-168, hep-th/9812219.
- [19] Shiraz Minwalla, Mark Van Raamsdonk, Nathan Seiberg *Noncommutative Perturbative Dynamics*, JHEP 0002 (2000) 020, hep-th/9912072.
- [20] J. M. Romero, J. D. Vergara, *Boundary conditions as constraints*, hep-th/0212035.
- [21] J. M. Romero, J.A. Santiago, J. D. Vergara, *Newton's Second Law in a Noncommutative Space*, Phys. Lett. **A 310** (2003) 9, hep-th/0211165.
- [22] J. M. Romero, J. D. Vergara, *The Kepler problem and non commutativity*, Mod. Phys. Lett. **A 18** (2003) 1673, hep-th/0303064.
- [23] J. M. Romero, J.A. Santiago, J. D. Vergara, *A note about the quantum of area in a non-commutative space*, Phys. Rev. **D 68** (2003) 067503, hep-th/030508.
- [24] J. D. Bekenstein, Lett. Nuovo Cimento **11**, 467 (1974).
- [25] Giovanni Landi, *An Introduction to Noncommutative Spaces and their Geometry*, hep-th/9701078.
- [26] Joseph C. Varilly, *An Introduction to Noncommutative Geometry*, physics/9709045.

- [27] L. Castellani *Noncommutative geometry and physics: a review of selected recent results*, Class. Quant. Grav. **17** (2000) 3377-3402, hep-th/0005210.
- [28] A. Connes, *Gravity coupled with matter and foundation of non-commutative geometry*, Commun. Math. Phys. **182** (1996) 155, hep-th/9603053.
- [29] G. Landi, C. Rovelli, *General Relativity in terms of Dirac Eigenvalue*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 3051, gr-qc/9612034.
- [30] I. V. Vancea, *Observables of the Euclidean Supergravity*, Phys. Rev. Lett. **79** (1997) 3121, gr-qc/9707030.
- [31] P. Gilkey, *Invariance Theory, the Heat Equation and the Atiyah-Singer Index Theorem*, Dilmington, Publish or Perish, 1984.  
D. V. Vassilevich, *Heat kernel expansion: user's manual*, hep-th/0306138.
- [32] G. Landi, C. Rovelli *Gravity from Dirac Eigenvalues*, Mod. Phys. Lett. **A 13** (1998) 479, gr-qc/9708041.
- [33] A. H. Chamseddine, A. Connes, *Universal Formula for Noncommutative Geometry Actions: Unification of Gravity and the Standard Model*, Phys. Rev. Lett. **77**, (1996) 4868, hep-th/9606056.
- [34] A. H. Chamseddine, *Noncommutativity Gravity*, hep-th/0301112.
- [35] F. Lizzi, G. Mangano, G. Miele, *Another Alternative to Compactification: Noncommutative Geometry and Randall-Sundrum Models*, Mod. Phys. Lett. **A 16** (2001) 1, hep-th/0009180.
- [36] C. Rovelli *Spectral Noncommutative and Quantization: A Simple Example*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1079-1083, gr-qc/9904029.
- [37] V.P. Nair, A.P. Polychronakos, *Quantum mechanics on the noncommutative plane and sphere*, Phys. Lett. **B 505** (2001) 267, hep-th/0011172.
- [38] S. Bellucci, A. Nersessian, C. Sochichiu, *Two phases of the noncommutative quantum mechanics*, Phys. Lett. **B 522** (2001) 345-349, hep-th/0106138.  
P. M Ho, H.C. Kao, *Noncommutative Quantum Mechanics from Non-commutative Quantum Field Theory*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 151602, hep-th/0110191.

- [39] F. A. Berezin, M. A. Shubin, *The Shrödinger Equation*, Klumer Academic Publishers (1991).
- [40] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover (1931).
- [41] H. J. Groenewold, *On the Principles of Elementary Quantum Mechanics*, Physica **12** (1946) 405;  
J.E Moyal, *Quantum Mechanics as a Statistical Theory*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45** (1949) 99.
- [42] D. Colladay, A. Kostelecky, *CPT Violation and the Standard Model*, Phys. Rev. **D 55** (1997) 6760, hep-ph/9703464.  
A. Kostelecky, C. Lane, A. Pickering, *One-Loop Renormalization of Lorentz-Violating Electrodynamics*, Phys. Rev. **D 65** (2002) 056006, hep-th/0111123.
- [43] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C.D. Lane, T. Okamoto, *Noncommutative Field Theory and Lorentz Violation*, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 141601, hep-th/0105082.
- [44] M.M. Sheikh-Jabbari, *Discrete Symmetries (C,P,T) in Noncommutative Field Theories*, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 5265-5268, hep-th/0001167
- [45] N. Mahajan, *PCT Theorem in Field Theory on Noncommutative Space*, hep-th/0305105
- [46] J. Polchinski, *String Theory*, Vol. I y Vol. II, Cambrige University Press (1998).
- [47] A. G. Cohen, D. B. Kaplan, A. E. Nelson, *Effective Field Theory. Black Holes, and the Cosmological Constant*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 4971-4974, hep-th/9803132.
- [48] V. O. Rivelles *Noncommutative Field Theories and Gravity*, hep-th/0212262.
- [49] S. Carlip, *Black Hole Entropy from Horizon Conformal Field Theory*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **88** (2000) 10-16, gr-qc/9912118.
- [50] J.D. Brown, Marc Henneaux, *Central Charges In The Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three Dimensional Gravity*, Commun. Math. **104** (1986) 207-226.

- [51] J. A. Cardy, Nucl. Phys. **B270** (1986) 186.
- [52] M. M. Sheikh-Jabbari, A. Shirzad, *Boundary Conditions as Dirac Constraints*, Eur.Phys.J. C19 (2001) 383, hep-th/9907055.
- [53] Nelson R. F. Braga, Cresus F. L. Godinho, *Symplectic Quantization of Open Strings and Noncommutativity in Branes*, Phys.Rev. D65 (2002) 085030, hep-th/0110297.
- [54] Ken-Ichi Tezuka *Relations between Non-Commutative and Commutative Spacetime*, 0104059.
- [55] Won Tae Kim, John J. Oh, *Noncommutative open strings from Dirac quantization*, Mod.Phys.Lett. A15 (2000) 1597-1604, hep-th/9911085.
- [56] Maxim Zabzine, *Hamiltonian systems with boundaries*, JHEP 0010 (2000) 042, hep-th/0005142.
- [57] Taejin Lee, *Canonical Quantization of Open String and Noncommutative Geometry*, Phys.Rev. D62 (2000) 024022, hep-th/9911140.
- [58] M. A. De Andrade, M. A. Santos, I. V. Vanea, *Unconstrained Variables of Non-Commutative Open Strings*, JHEP 0106 (2001) 026, hep-th/0104154.
- [59] Chong-Sun Chu, Pei-Ming Ho, *Noncommutative D-brane and Open String in pp-wave Background With B-field*, hep-th/0203186.
- [60] M. Heananeux, C. Teitelboim, *Quantization of gauge systems*, Princeton University Press, 1992.
- [61] J.E. Marsden, T.S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry*, Springer-Verlag (1999).
- [62] C. Duval, P.A. Horváthy, *Exotic galilean symmetry in the non-commutative plane, and the Hall effect*, J. Phys. A **34** (2001) 10097-10108, hep-th/0106089
- [63] Landau y Lifshitz, *Mecánica*, Editorial Reverté (1991).
- [64] Landau y Lifshitz, *Teoría Clásica de Campos*, Editorial Reverté (1991).
- [65] I. Ciufolini, J.A Wheeler, *Gravitation and Inertia*. Princeton University Prees (1995).

- [66] Lorenzo Iorio, *A Gravitomagnetic Effect on the Orbit of a Test Body due to the Earth's Variable Angular Momentum*, Int. J. Mod. Phys. **D 11** no.5 (2002) 781, gr-qc/0110115.
- [67] R. Adler, M. Bazin, M. Schiffer, *Introduction To General Relativity*, McGraw-Hill (1975).
- [68] C. E. Carlson, C. D. Carone, R. F. Lebed *Bounding noncommutative QCD*, Phys. Lett. **B 518** (2001) 201, hep-ph/0107291.
- [69] I. Mocioiu, M. Pospelov, R. Roiban, *Low-energy Limits on the Antisymmetric Tensor Field Background on the Brane and on the Noncommutative Scale*, Phys. Lett. **B 489** (2000) 390-396, hep-ph/0005191.
- [70] B. Mirza, M. Dehghani, *Noncommutative geometry and the classical orbits of particles in a central force potential*, hep-th/0211190.
- [71] J. D. *Classical Electrodynamics*, John Wiley (1999).
- [72] S. Perlmutter *et al*, *Measurements of the Cosmological Parameters Omega and Lambda from the First 7 Supernovae at  $z \geq 0.35$* , Astrophys. J. **483** (1997) 565, astro-ph/9608192;  
 S. Perlmutter *et al*, *Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae*, Astrophys. J. **517** (1999) 565-586, astro-ph/9812133;  
 A. G. Riess *et al*, *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*, Astron. J. **116** (1998) 1009-1038, astro-ph/9805201;  
 C.L. Bennett *et al*, *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results*, astro-ph/0302207.
- [73] P. J. E. Peebles, B. Ratra, *The Cosmological Constant and Dark Energy*, Rev. Mod. Phys. **75** (2003) 559, astro-ph/0207347;  
 T. Padmanabhan, *Cosmological Constant - the Weight of the Vacuum*, Phys. Rept. **380** (2003) 235, hep-th/0212290.
- [74] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, Y. Oz, *Large N Field Theories, String Theory and Gravity*, Phys. Rept. **323** (2000) 183, hep-th/9905111.
- [75] S. Weinberg, *The cosmological constant problem*, Rev. Mod. Phys. **61**, (1989) 1-23.



- [76] Kurt Gödel, *An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation*, Rev. Mod. Phys. **21**, (1949) 447.
- [77] M.J. Reboucas, J. Tiomno, *On the Homogeneity of Riemannian Space-Times of Gödel type*, Phys. Rev. **D28** (1983) 1251.
- [78] Y. Hikida, S-J. Rey, *Can branes travel beyond CTC horizon in Godel Universe?* Nucl. Phys. **B 669** (2003) 57, hep-th/0306148.
- [79] N. Drukker, B. Fiol, J. Simón, *Goedel-type Universes and the Landau Problem*, hep-th/0309199.
- [80] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. **D 7** *Black Holes and Entropy*, (1973) 2333; S. Hawking, *Particle creation by black holes*, Commun. Math. Phys. **43** (1975) 199-220.
- [81] P. Ehrenfest, *Collected Scientific Paper*, Edited by M. J. Klein, (North-Holland Pub. Co. 1959).
- [82] S. Hod, *Bohr's Correspondence Principle and the Area Spectrum of Quantum Black Holes*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998) 4293; O. Dreyer, *Quasinormal Modes, the Area Spectrum, and Black Hole Entropy*, Phys. Rev. Lett. **90** (2003) 081301, gr-qc/0211076; E. Abdalla, K. H. C. Castello-Branco, A. Lima-Santos, *Area Quantization in Quasi-Extreme Black Holes*, gr-qc/0301130.
- [83] S. Carlip, *Quantum Gravity: a Progress Report*, Rept. Prog. Phys. **64** (2001) 885, gr-qc/0108040
- [84] J.C. Baez, J.D. Christensen, T.R. Halford, D.C. Tsang *Spin Foam Models of Riemannian Quantum Gravity*, Class. Quant. Grav. **19** (2002) 4627-4648, gr-qc/0202017
- [85] A. Alekseev, A. P. Polychronakos, M. Smedbäck. *On area and entropy of a black hole*, hep-th/0004036.
- [86] S. Cacciatori, A.H. Chamseddine, D. Klemm, L. Martucci, W.A. Sabra, D. Zanon *Noncommutative Gravity In Two Dimension*, Class. Quant. Grav. **19** (2002) 4029-4042, hep-th/0203038; M. A. Cardella, D. Zanon *Noncommutative deformation of four dimensional Einstein gravity*, Class. Quant. Grav. **20** (2003) L95-L104, hep-th/0212071;

M. Bañados, O. Chandia, N. Grandi, F.A. Schaposnik, G.A. Silva *Three-dimensional Noncommutative Gravity*, Phys. Rev. D *64* (2001) 084012, hep-th/0104264;

H. Garcia-Compean, O. Obregon, C. Ramirez, M. Sabido, *Noncommutative Topological Theories of Gravity*, hep-th/0210203.

[87] J. Madore *The Fuzzy Sphere*, Class. Quant. Grav. **9** (1992) 69-88.

[88] J. A. Harvey, *Komaba Lectures on Noncommutative Solitons and D-Branes*, hep-th/0102076.