



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ATOMOS EN REDES OPTICAS.
UN MODELO TRIDIMENSIONAL SENCILLO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
F I S I C O
P R E S E N T A :
ENRIQUE BALLEZA DAVILA



DIRECTORA DE TESIS: DRA. ROCIO JAUREGUI RENAUD





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA



UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional,
NOMBRE: Enrique Balleza Dávila

FECHA: 13/01/04

FIRMA: Enrique Balleza Dávila

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Átomos en Redes Ópticas. Un Modelo Tridimensional Sencillo"

realizado por Balleza Dávila Enrique

con número de cuenta 09432266-6 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de Tesis
Propietario

Propietario

Propietario

Suplente

Suplente

DRa. Rocío Jáuregui Renaud

Dr. Wolf Luis Mochán Backal

Dr. Octavio Héctor Castaños Garza

Dr. José Francisco Recamier Angelini

Dra. Karen Volke

Rocio Jáuregui Renaud

Castano

Recamier A. José

[Signature]

Consejo Departamental de Física

[Signature]

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN-MENACHE
Coordinadora de Licenciatura

DEPARTAMENTO DE FÍSICA

A mis padres

A mis hermanos

Enrique

Índice general

| | |
|---|------------|
| Introducción | III |
| 1. Enfriamiento Doppler | 1 |
| 1.1. Descripción Cualitativa | 2 |
| 1.2. Descripción Cuantitativa | 4 |
| 2. Enfriamiento Sísifo | 11 |
| 2.1. Gradiente de Polarización | 12 |
| 2.2. Descripción Cualitativa del Mecanismo de Enfriamiento | 13 |
| 2.3. Descripción Cuantitativa del Mecanismo de Enfriamiento | 16 |
| 3. Trampas Ópticas | 25 |
| 3.1. Trampa Magneto-Óptica (MOT) | 25 |
| 3.2. Trampa FORT (Far Off Resonance Trap) | 27 |
| 4. Modelo de Malla Óptica | 31 |
| 4.1. El Hamiltoniano | 32 |
| 4.2. Construcción de la Función de Onda | 33 |
| 4.3. Matriz de Transferencia | 38 |
| 5. Resultados y Conclusiones | 43 |
| A. El Oscilador Cuántico en Coordenadas Polares | 49 |
| B. Programa Computacional | 53 |

Introducción

En los últimos años se ha dado un gran avance en el control y manipulación de la materia a nivel atómico usando luz. Por ejemplo, se ha usado para enfriar a los átomos (disminuir su energía cinética) al transferirle sus momentos al campo electromagnético, fenómenos conocidos como enfriamiento Doppler y Sísifo [1,2,3]. Gracias a lo anterior se ha podido realizar espectroscopía de alta resolución a nubes de átomos superenfriados y se ha podido confirmar el resultado teórico conocido como condensación de Bose-Einstein [4,5] que afirma que un número macroscópico de partículas se acumulará en un solo estado cuántico si la temperatura es suficientemente baja y la densidad suficientemente alta.

Además del enfriamiento, el confinamiento de átomos con láseres ha sido otro avance muy importante. Esto ha originado la creación de estructuras formadas por átomos que siguen un arreglo periódico en el espacio con periodo del orden de la longitud de onda del láser. Por su similitud a las redes cristalinas, se les ha denominado redes ópticas. Una aplicación de las redes ópticas, aún en su fase experimental, es el depósito de átomos sobre materiales semiconductores para la creación de circuitos integrados [4,5,6].

En el primer capítulo de este trabajo mostraremos un análisis detallado del enfriamiento Doppler, fenómeno que aparece cuando un láser induce un momento dipolar a los átomos de tal forma que estos pueden interactuar con él al transferir momento al campo con la subsecuente disminución de energía cinética que macroscópicamente se traduce en enfriamiento de la nube atómica [1,7].

Cuando los experimentos de enfriamiento atómico se realizaron, se observó que la temperatura era menor a la que predecía el enfriamiento Doppler, esto originó la creación de una teoría mas fina en la cual se elimina la sobresimplificación de que el átomo sólo consta de dos niveles de energía y se introducen niveles de estructura fina que logran explicar el enfriamiento extra. A este fenómeno se le llama efecto Sísifo y se estudia detalladamente en el capítulo dos [2,8].

Los dos primeros capítulos nos hablan sobre el enfriamiento atómico, pero para que la nube atómica pueda ser manipulada, antes debe ser confinada, problema que expondremos en el capítulo tres con soluciones experimentales que actualmente se implementan en los laboratorios alrededor del mundo. En partic-

ular nos concentraremos en las trampas FORT (Far Off Resonance Trap, trampa muy fuera de resonancia) que confinan a los átomos en redes ópticas [9,10].

Los láseres gaussianos originan un potencial sinusoidal a lo largo de la dirección de propagación y gaussiano en el plano perpendicular a ésta. En el capítulo cuatro se propone un modelo tridimensional que sustituye a la variación sinusoidal por una función almena y hace una aproximación a primer orden en la dependencia radial para obtener un potencial de oscilador armónico en vez del gaussiano que se tenía. El modelo se resuelve de forma análoga al modelo unidimensional de bandas: se encuentran las funciones de onda solución para cada periodo y se acoplan entre sí para que satisfagan condiciones de periodicidad, al hacer esto se llega a una matriz que acopla los coeficientes del periodo pasado con los del siguiente y cuyos eigenvalores (con norma igual a uno) discriminan entre los modos que pueden y no pueden ser transmitidos. Estos eigenvalores se encuentran restringidos dentro de ciertos intervalos de energía a los cuales se les llama bandas de transmisión [8,11,5].

En el último capítulo se muestran los resultados obtenidos. Las regiones de energía mas exteriores que permiten el confinamiento de los átomos (bandas de energía) se encuentran para varios tamaños del potencial por medio de cálculos numéricos. Además se estudia la estructura de las bandas y su distribución en el espectro de energías.

Capítulo 1

Enfriamiento Doppler

Para poder manipular átomos, éstos deben estar atrapados; para poder atraparlos hay que enfriarlos, es decir, disminuir su energía cinética hasta temperaturas que permitan su manipulación. Los mecanismos empleados para enfriar dependen básicamente de la distribución de carga eléctrica del átomo, pudiendo ser éste un ion o un átomo neutro.

El efecto Doppler es una de las técnicas empleadas para enfriar átomos neutros. Consiste en inducir un dipolo eléctrico que interactúa con el campo eléctrico producido por un láser, de tal forma que el átomo siente una fuerza contraria a su velocidad (presión de radiación). La descripción del enfriamiento Doppler que aquí se presenta sigue al artículo de revisión de Balykin, Minogin y Letokhov [1] y al Capítulo cinco del libro de Scully y Zubairy [7].

Supongamos que podemos modelar a los átomos que queremos enfriar como átomos de dos niveles de energía con una separación igual a $h\omega_0$. Si el átomo se encuentra inmerso en un láser con frecuencia igual a ω_0 , los fotones excitarán al átomo y le transferirán momento en la dirección de propagación del láser; después de un tiempo del orden de la vida media del estado excitado, el átomo decaerá a su estado base emitiendo un fotón con la misma frecuencia pero dirección arbitraria.

Ahora supongamos que el átomo se mueve con velocidad v contraria al sentido de propagación del láser y que éste se encuentra sintonizado hacia el rojo respecto de la frecuencia de transición ω_0 con una frecuencia ω . Como el átomo viaja con velocidad v , los fotones que recibe en su sistema de referencia son fotones con frecuencia $\omega + \delta$. Si ésta frecuencia es igual a ω_0 entonces el átomo será excitado y su velocidad disminuirá debido a la conservación del momento. Nuevamente, después de cierto tiempo, el átomo decaerá a su estado base y emitirá un fotón que, en el sistema del laboratorio, aparecerá corrido al azul respecto del fotón que el átomo absorbió del láser. Si el proceso anterior lo repetimos varias veces, el efecto total será el frenado del átomo, llevándose los

fotones dispersados el exceso de energía.

El modelo cuántico de sistemas de dos niveles constituye una buena aproximación a los átomos del grupo alcalino los cuales sólo tienen un electrón en su capa mas externa (la configuración electrónica del estado base es de la forma *(noble)ns¹*). Ésta peculiaridad causa que, dentro de un rango relativamente amplio de energías, el átomo alcalino pueda ser considerado como un átomo hidrogenoide y éste, a su vez, restringirse a un sistema cuántico con dos niveles de energía accesibles.

Uno puede pensar erroneamente que, mediante el efecto Doppler, se podrían alcanzar temperaturas arbitrariamente bajas, sin embargo, al reflexionar un poco nos damos cuenta que una vez que el valor promedio de la posición del centro de masa del átomo permanece constante, el átomo sigue absorbiendo y reemitiendo fotones en direcciones arbitrarias, lo que ocasiona que su velocidad sea distinta de cero. A la temperatura asociada a éste movimiento se le conoce como temperatura de retroceso

$$T_r = \frac{\hbar^2 k^2}{2Mk_B}, \quad k = \frac{\omega_0}{c}, \quad (1.1)$$

y es la temperatura mínima que se puede lograr usando el efecto Doppler. Para átomos cuyas transiciones estén en el rango visible los valores típicos de T_r se encuentran alrededor de los milikelvin.

1.1. Descripción Cualitativa

La dinámica del centro de masa de un átomo dentro de un láser con longitud de onda mucho mayor que el tamaño atómico característico, está determinada por la interacción de dipolo eléctrico . Bajo ésta interacción, el átomo adquiere un momento dipolar inducido $\langle \vec{D} \rangle$.

El valor medio del momento dipolar debido a una población de átomos independientes interactuantes con el láser, está dado por

$$\langle \vec{D} \rangle = Tr(\rho \vec{D}), \quad (1.2)$$

con ρ la matriz de densidad [12]. La interacción del momento dipolar $\langle \vec{D} \rangle$ con el campo $\vec{E}(\vec{r}, t)$ produce una fuerza debida a la radiación dipolar en el átomo.

Como sabemos, el concepto de fuerza sobre una partícula es un concepto clásico y es aplicado a un cuerpo que puede considerarse sin estructura moviéndose de forma clásica, es decir, que se puede determinar su posición y momento sin incertidumbre. En el caso de un átomo interactuando con un láser, el concepto de la fuerza debida a la radiación dipolar puede ser usado

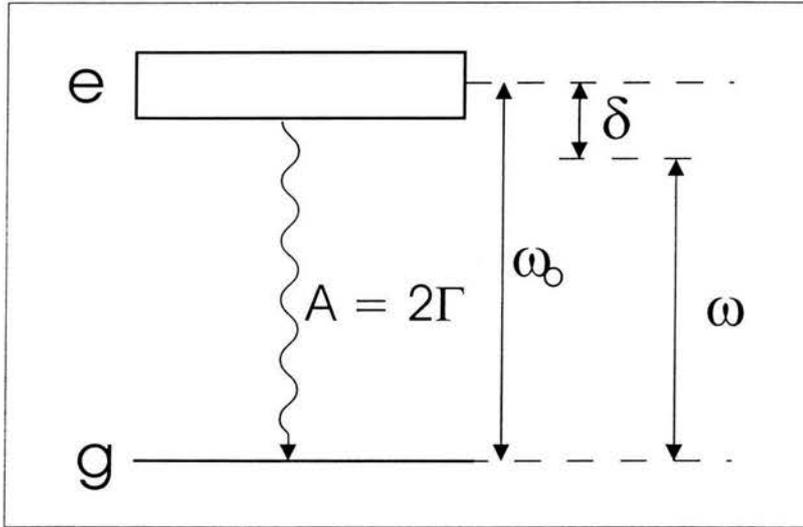


Figura 1.1: Átomo de dos niveles interactuando con un láser monocromático. El estado base se encuentra representado por g y el estado excitado por e con vida media $\frac{1}{2\Gamma}$. La diferencia de energía en unidades de \hbar entre los dos estados es ω_0 y la frecuencia del láser es ω .

cuando las fluctuaciones cuánticas del momento dipolar atómico son pequeñas comparadas con su valor medio y las fluctuaciones del momento de la partícula son pequeñas cuando ésta interactúa con los fotones. Bajo estas condiciones podemos hacer un tratamiento semiclásico del problema.

Físicamente, fluctuaciones temporales pequeñas en el momento dipolar se dan cuando el tiempo de interacción dipolar t (tiempo que dura prendido el láser) entre el átomo y el láser es mucho mayor que el tiempo de decaimiento τ del estado atómico interno,

$$\tau \ll t; \quad (1.3)$$

cuando se satisface ésta condición, los estados atómicos internos llegan rápidamente a valores de equilibrio con fluctuaciones pequeñas.

En un átomo de dos niveles (ver Fig. (1.1)) el tiempo de relajamiento interno es igual a la vida media del estado excitado $\tau_{int} = \frac{1}{W}$, donde $W = A = 2\Gamma$ es la probabilidad de decaimiento espontáneo conocido como coeficiente de Einstein. En este caso, el concepto de fuerza debida a la radiación dipolar se vuelve válido cuando el átomo interactúa con el láser por un periodo de tiempo mucho mayor que el de la vida media del estado excitado.

El valor esperado del momento dipolar $\langle \vec{D} \rangle$ está determinado por ρ por medio de

$$\langle \vec{D} \rangle = \rho_{\alpha\beta} \vec{D}_{\beta\alpha}, \quad (1.4)$$

donde hemos usado la convención de Einstein y $\vec{D}_{\beta\alpha}$ son los elementos de matriz del operador de momento dipolar definidos con respecto a las eigenfunciones atómicas dependientes del tiempo en el esquema de interacción

$$\vec{D}_{\alpha\beta} = \vec{d}_{\alpha\beta} e^{i(E_\alpha - E_\beta)t/\hbar}, \quad (1.5)$$

con $\vec{d}_{\alpha\beta} = \langle \alpha | \vec{d} | \beta \rangle$.

Si suponemos que la variación del momento dipolar atómico debida a la interacción con los fotones del láser es pequeña y que las fluctuaciones del momento dipolar también lo son, la energía de interacción dipolo-láser viene dada por

$$U = \langle H \rangle = - \langle \vec{D} \cdot \vec{E} \rangle = - \langle \vec{D} \rangle \cdot \vec{E}. \quad (1.6)$$

Ésta ecuación semiclásica coincide con la expresión clásica para la energía de un dipolo permanente con un campo \vec{E} y la podemos usar para encontrar la fuerza \vec{F} debida al láser (Teorema de Ehrenfest [2]),

$$(F)_i = -(\nabla U)_i = \langle D_i \rangle \nabla E_i. \quad (1.7)$$

Como vemos el momento dipolar es una cantidad constante que no debe ser diferenciada con respecto a las coordenadas.

La ecuación (1.7) expresa la fuerza debida a la radiación dipolar en el átomo que se mueve dentro del láser. Desde un punto de vista mecánico-cuántico, la fuerza de radiación surge como resultado del intercambio de momento entre el átomo y el campo tomando en cuenta el decaimiento espontáneo. El cambio en el momento atómico proviene del proceso de emisión y absorción de fotones: absorción inducida, emisión estimulada y espontánea. La dependencia espacial y cinética de la fuerza está gobernada por la estructura de los niveles de energía que participan en la interacción dipolar y la estructura espacio-temporal del campo eléctrico (láser).

1.2. Descripción Cuantitativa

El campo debido a un láser puede ser descrito como

$$\vec{E} = \vec{e} E_0(\vec{r}) \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (1.8)$$

con \vec{e} el vector de polarización, $E_0(\vec{r})$ la amplitud y \vec{k} el vector de onda. Hay que notar que este campo electromagnético cumple las ecuaciones de Maxwell sólo

a primer orden y es una aproximación a la solución exacta de haces Laguerre-Gaussianos.

Debido a este campo el átomo adquiere un momento dipolar inducido

$$\langle \vec{D} \rangle = Tr(\rho(\vec{r})\vec{D}) = \rho_{12}(\vec{r})\vec{d}_{21}e^{i\omega_o t} + \rho_{21}(\vec{r})\vec{d}_{12}e^{-i\omega_o t}, \quad (1.9)$$

donde $\omega_o = \frac{(E_2 - E_1)}{\hbar}$ es la frecuencia de la transición atómica, r indica la posición del centro de masa del átomo y $d_{ii} = 0$ por paridad. La magnitud del dipolo inducido está determinada por los elementos de la matriz de densidad que describen los estados cuánticos internos de un ensamble de átomos de dos niveles. Hay que precisar que la polarización se debe a la probabilidad de transición de los electrones entre los estados estacionarios del átomo, y que los estados estacionarios (las eigenfunciones) dependen de la posición relativa que exista entre los electrones y el centro de masa del átomo. Es por esto, que hemos indicado explícitamente la dependencia paramétrica en \vec{r} de los elementos de la matriz de densidad.

Como sabemos, la evolución de la matriz de densidad está gobernada por la ecuación

$$i\hbar \frac{d}{dt}\rho = [H, \rho]. \quad (1.10)$$

con $H = -\vec{D} \cdot \vec{E}$. Notemos que la derivada respecto al tiempo es una derivada total y no parcial ya que estamos calculando la variación de ρ en el sistema de referencia del laboratorio y debemos considerar el cambio del centro de masa \vec{r} por medio de una derivada convectiva. Como $\rho = \rho(\vec{r}, t)$, tenemos

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \rho = [H, \rho], \quad (1.11)$$

U viene dada por la energía de interacción del dipolo con el campo (1.6).

Por ejemplo, de la ecuación (1.11) obtenemos para ρ_{11}

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \rho_{11} = \\ i\Omega(\vec{r}) [\rho_{21} (e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\omega + \omega_o)t)} + e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\omega - \omega_o)t)}) - \\ \rho_{12} (e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\omega - \omega_o)t)} + e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\omega + \omega_o)t)})]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

donde $\Omega(\vec{r}) = \frac{dE_o(\vec{r})}{2\hbar}$ es la frecuencia de Rabi [12] y d es la magnitud del momento dipolar.

Ahora, la variación temporal de los términos $e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\omega + \omega_o)t)}$ es más rápida que la de los términos $e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - (\omega - \omega_o)t)}$ ya que, por hipótesis, el láser está casi

en resonancia con el átomo ($\omega - \omega_o \ll \omega + \omega_o$). Si suponemos que la influencia de los términos oscilatorios con frecuencias altas $e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - (\omega + \omega_o)t)}$ se promedian a cero, entonces la dinámica de ρ estará regida sólo por los términos que oscilan lentamente. De esta forma obtenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right)\rho_{11} = i\Omega(\vec{r}) \left[\rho_{21}e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \delta t)} - \rho_{12}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \delta t)} \right], \quad (1.13)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right)\rho_{21} = i\Omega(\vec{r})(\rho_{11} - \rho_{22})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \delta t)}, \quad (1.14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right)\rho_{22} = i\Omega(\vec{r}) \left[\rho_{12}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \delta t)} - \rho_{21}e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \delta t)} \right], \quad (1.15)$$

con $\delta = \omega - \omega_o$ y $\frac{d\rho_{12}}{dt} = \frac{d\rho_{21}^*}{dt}$ con el asterisco indicando conjugación compleja. A la aproximación anterior se le llama aproximación de onda rotante.

En la ecuación anterior hemos supuesto que el átomo sólo interactúa con el láser y que átomo-láser forman un sistema cerrado por lo que, una vez excitado el átomo, éste no puede decaer espontáneamente. Sin embargo, sabemos que el sistema no es cerrado y que el decaimiento espontáneo es producido por la interacción del átomo con los modos del vacío. Un tratamiento completo de este fenómeno nos llevaría demasiado lejos así que introducimos el decaimiento espontáneo sólo de forma fenomenológica al añadir a las ecuaciones términos de decaimiento exponencial multiplicados por la razón de decaimiento conocida como coeficiente de Einstein $A = 2\Gamma$. La razón de decaimiento del estado excitado al estado base puede ser incorporada por una matriz Γ definida por $\langle n|\Gamma|m \rangle = \Gamma_n \delta_{nm}$. La razón de decaimiento del estado base es cero ya que suponemos que es estable. Al considerar solamente el decaimiento en la evolución de la matriz de densidad obtenemos

$$\frac{d}{dt}\rho = -\{\Gamma, \rho\}, \quad (1.16)$$

con $\{\Gamma, \rho\} = \Gamma\rho + \rho\Gamma$. Podemos ver que en esta ecuación hay una pérdida neta de población ya que $\rho_{11} + \rho_{22} \neq 1$. Para evitarlo aumentaremos la población de ρ_{11} en la misma cantidad en la que disminuye la población de ρ_{22} porque los átomos inicialmente excitados sólo pueden decaer al estado base. Introduciendo los decaimientos y la interacción del dipolo eléctrico con el campo en la evolución de ρ obtenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right)\rho_{11} = i\Omega(\vec{r}) \left[\rho_{21}e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \delta t)} - \rho_{12}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \delta t)} \right] + 2\Gamma\rho_{22}. \quad (1.17)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right)\rho_{21} = i\Omega(\vec{r})(\rho_{11} - \rho_{22})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \delta t)} - \Gamma\rho_{21}, \quad (1.18)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right)\rho_{22} = i\Omega(\vec{r}) \left[\rho_{12}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \delta t)} - \rho_{21}e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \delta t)} \right] - 2\Gamma\rho_{22}. \quad (1.19)$$

Si hacemos el cambio de variable

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \rho_{12} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \delta t)}, \\ \sigma_{21} &= \rho_{21} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \delta t)},\end{aligned}\quad (1.20)$$

obtenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right) \rho_{11} = i\Omega(\vec{r}) [\sigma_{21} - \sigma_{12}] + 2\Gamma \rho_{22}, \quad (1.21)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right) \sigma_{21} = i\Omega(\vec{r})(\rho_{11} - \rho_{22}) - [\Gamma + i(\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})] \sigma_{21}, \quad (1.22)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right) \rho_{22} = i\Omega(\vec{r}) [\sigma_{12} - \sigma_{21}] - 2\Gamma \rho_{22}. \quad (1.23)$$

No necesitamos resolver estas ecuaciones para todo tiempo ya que sólo nos interesa el valor asintótico de ρ cuando sus componentes alcanzan el equilibrio ($\frac{d\rho}{dt} = 0$). Igualando las ecuaciones a cero y tomando en cuenta la condición de normalización $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$ encontramos los valores de equilibrio para los elementos no diagonales

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}^* = \frac{\Omega(\vec{r})(\delta - \vec{k} \cdot \vec{v} - i\Gamma)}{\Gamma^2 + 2\Omega^2(\vec{r}) + (\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})^2}. \quad (1.24)$$

Aplicemos ahora la ecuación (1.7) a (1.8) y (1.9) para obtener la fuerza debida a la radiación sobre un átomo de dos niveles

$$\vec{F} = \vec{F}_{pr} + \vec{F}_{gr}, \quad (1.25)$$

$$\vec{F}_{pr} = i\vec{k}(\sigma_{12} - \sigma_{21}) \left(\frac{dE_o}{2}\right), \quad (1.26)$$

$$\vec{F}_{gr} = \frac{d\nabla E_o}{2}(\sigma_{12} + \sigma_{21}). \quad (1.27)$$

La fuerza, como se justificará mas adelante, puede ser considerada como la suma de la fuerza debida a la presión de la radiación electromagnética \vec{F}_{pr} y una fuerza que contiene el gradiente de la amplitud del campo \vec{F}_{gr} . Las expresiones explícitas se obtienen al sustituir (1.24) en (1.26) y en (1.27),

$$\vec{F}_{pr} = h\vec{k}\Gamma \frac{G(\vec{r})}{1 + G(\vec{r}) + \frac{(\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})^2}{\Gamma^2}}, \quad (1.28)$$

$$\vec{F}_{gr} = \frac{1}{2}h(\delta - \vec{k} \cdot \vec{v}) \frac{\nabla G(\vec{r})}{1 + G(\vec{r}) + \frac{(\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})^2}{\Gamma^2}}, \quad (1.29)$$

con $G(\vec{r})$ el parámetro de saturación

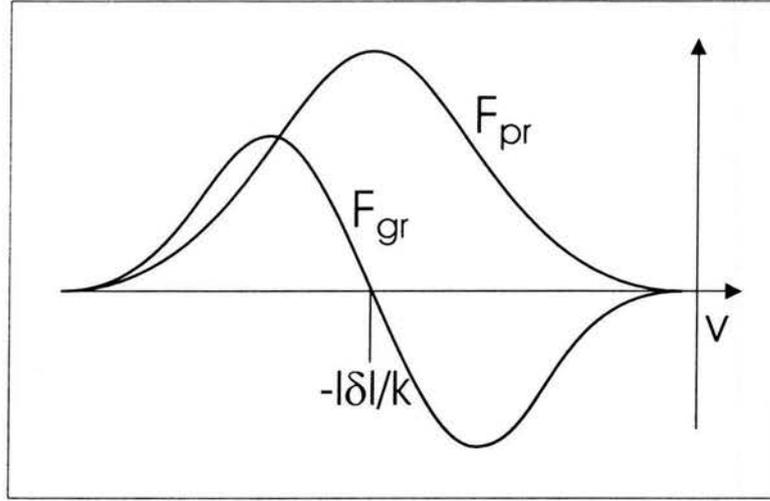


Figura 1.2: Gráfica cualitativa de la dependencia en la velocidad de la fuerza gradiente F_{gr} (en la dirección de $\nabla E_o(\vec{r})$) y de la fuerza debida a la presión de radiación F_{pr} (en la dirección de \vec{k}).

$$G(\vec{r}) = \frac{2\Omega^2(\vec{r})}{\Gamma^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dE_o(\vec{r})}{\hbar\Gamma} \right)^2 = \frac{I(\vec{r})}{I_s}. \quad (1.30)$$

$I(\vec{r}) = (\frac{c}{8\pi})E_o^2$ es la intensidad del láser en el punto \vec{r} e $I_s = (\frac{c}{4\pi})(\frac{\hbar\Gamma}{d})^2$ es la intensidad de saturación que indica la cantidad de fotones emitidos espontáneamente por átomo por unidad de tiempo. La figura (1.2) muestra la dependencia de ambas fuerzas en la velocidad atómica \vec{v} en un láser gaussiano.

La interpretación de los dos términos que aparecen en la fuerza en términos de procesos de absorción-emisión es la siguiente:

El primer término en la fuerza se debe a la presión de radiación que puede atribuirse a la absorción de un fotón del láser y su subsecuente emisión a uno de los modos del vacío. Como explicábamos en párrafos anteriores, la dirección de la emisión espontánea es arbitraria. Debido a esto, el valor del momento transferido al átomo, promediado sobre muchas emisiones, es igual al momento del fotón absorbido. Por lo tanto, la fuerza de radiación resulta de la transferencia del momento fotónico al átomo a través de un ciclo absorción-emisión, una inducida, la otra espontánea. El carácter disipativo del efecto Doppler proviene de este término.

Para la interpretación del segundo sumando en la fuerza notemos que el campo producido por el láser es inhomogéneo y puede ser considerado como la

superposición de muchas ondas planas propagándose en la dirección cercana a la del haz. En este campo el momento atómico puede cambiar por medio de otro proceso elemental: La absorción inducida de un fotón perteneciente a una onda plana y su subsecuente emisión inducida por otra onda plana. Ambos fotones tienen la misma energía y difieren sólo en el sentido de propagación. Éste proceso se traduce en la fuerza gradiente la cual está dirigida a lo largo del gradiente de intensidad del láser y jala al átomo o lo empuja del centro dependiendo del signo del corrimiento Doppler $\delta - \vec{k} \cdot \vec{v}$, ver Fig. (1.2). Para velocidades atómicas pequeñas, $|v| \ll \frac{|\delta|}{k}$, podemos derivar la fuerza de un potencial siendo este

$$U_{gr} = \frac{1}{2} \hbar \delta \log \left(1 + \frac{G(\vec{r})}{1 + \frac{\delta^2}{\Gamma^2}} \right). \quad (1.31)$$

En los párrafos anteriores hemos considerado sólo la interacción de un átomo dentro del campo de un láser, con una frecuencia corrida al rojo respecto de la frecuencia de transición atómica ω_0 . Ahora supongamos que agregamos al sistema otro láser que se propaga en sentido contrario respecto del primero y que también tiene el mismo corrimiento al rojo respecto de la transición atómica; entonces, dependiendo de la velocidad del átomo, éste verá a los fotones de un láser corridos al azul y los del otro aún más corridos al rojo. La fuerza de radiación será igual a la suma de las fuerzas provocadas por cada haz.

$$\vec{F}(\vec{v}) = \vec{F}_{pr}(\vec{k}) + \vec{F}_{pr}(-\vec{k}). \quad (1.32)$$

Suponiendo que el cambio en el momento atómico debido al retroceso es despreciable $\vec{k} \cdot \vec{v} \ll \Gamma$ obtenemos

$$\vec{F}(\vec{v}) = \frac{4\hbar k^2 G \delta}{\Gamma} \left(\frac{1}{1 + G + \frac{\delta^2}{\Gamma^2}} \right)^2 \vec{v}. \quad (1.33)$$

La fuerza es proporcional a la velocidad atómica a través del coeficiente de fricción $\alpha = \frac{4\hbar k^2 G \delta}{\Gamma} \left(\frac{1}{1 + G + \frac{\delta^2}{\Gamma^2}} \right)^2$ y depende del signo del desentonamiento δ . La Fig. (1.3) muestra la fuerza de radiación en una dimensión para una onda estacionaria.

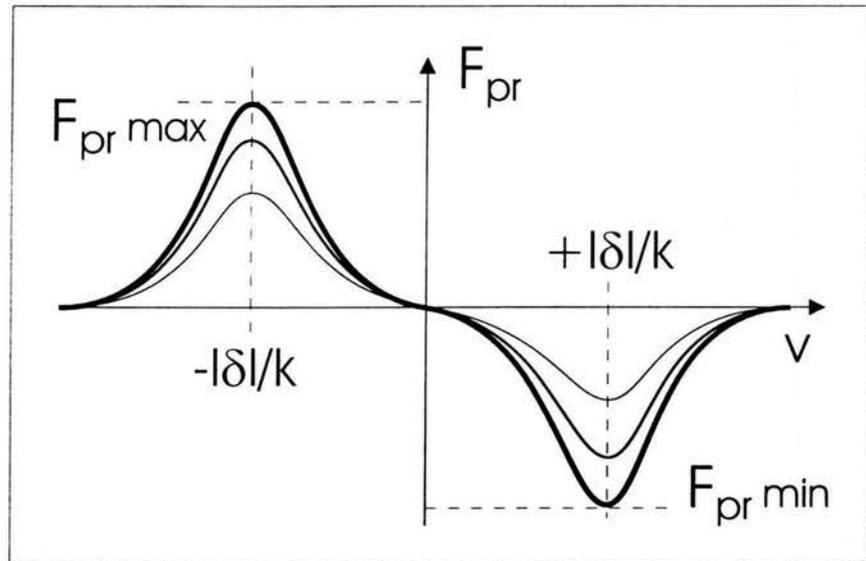


Figura 1.3: Gráfica cualitativa de la dependencia de la fuerza en la velocidad debida a la presión de radiación para distintas intensidades del láser. Hay que notar que la posición del máximo (mínimo) de la fuerza no depende de la velocidad.

Capítulo 2

Enfriamiento Sísifo

Los primeros experimentos que se llevaron a cabo para enfriar átomos alcalinos con la técnica Doppler, arrojaron resultados experimentales que coincidían con los teóricos dentro del error experimental. Pero, a medida que las técnicas fueron mejorando, se llegó a la conclusión de que el enfriamiento alcanzado por tal método era mucho mejor alcanzando temperaturas más bajas que las predichas. Esto ocasionó la inclusión de efectos y fenómenos no considerados en modelos anteriores. Los nuevos refinamientos que permitieron resolver el problema del sobreenfriamiento se basan en considerar la estructura fina del átomo y cómo los fotones del láser confinante interactúan con ésta. El enfriamiento extra que se obtiene al considerar los nuevos efectos se debe, como en el Doppler, a que el láser actúa como medio viscoso que disipa la energía cinética del átomo. La diferencia se basa en que estos nuevos efectos sólo entran en acción una vez alcanzada una velocidad en la cual el efecto Doppler es casi inoperante. La descripción del enfriamiento Sísifo que aquí se presenta sigue a los artículos de Cohen, Dalibard y Phillips [2] y [8] y al artículo de revisión de Jessen y Deutsch [4].

Los modelos anteriores consideraban a los átomos alcalinos como átomos de dos niveles. Estos modelos tomaban obviamente como tiempo característico del sistema la vida media del estado excitado

$$\tau_R = \frac{1}{\Gamma}. \quad (2.1)$$

Pero los átomos alcalinos tienen varios subniveles Zeeman $g_m, g_{m'}, \dots$ en su estado base g y, al tomarlos en cuenta, aparece un nuevo tiempo característico, a saber, el tiempo en que el átomo es bombeado de un subnivel g_m a otro $g_{m'}$ (un ciclo fluorescente)

$$\tau_p = \frac{1}{\Gamma'}. \quad (2.2)$$

Como veremos más adelante, una condición que nos interesa (y que se puede

realizar al disminuir la intensidad del láser) es $\tau_p \gg \tau_R$. Esto provoca dos cosas, que la población atómica pase la mayoría del tiempo en su estado base y que al desplazarse los átomos a través del láser “se den cuenta” de que sus niveles g_m han sido modificados por causa de éste.

La modificación de los niveles atómicos se logra al crear un gradiente de polarización a lo largo de la dirección de propagación del láser. Este gradiente será el responsable de que el átomo se enfríe, ya que no podrá seguir adiabáticamente los cambios del campo y disipará su energía.

2.1. Gradiente de Polarización

Consideremos dos ondas planas con la misma frecuencia ω_L que se propagan a lo largo de direcciones opuestas sobre el eje z . Sean E y E' las amplitudes de las dos ondas y \vec{e} y \vec{e}' sus polarizaciones. El campo eléctrico total \vec{E} puede escribirse como

$$\vec{E}(z, t) = \vec{\mathcal{E}}^+(z)e^{-it\omega_L} + c.c. , \quad (2.3)$$

con $c.c.$ el complejo conjugado y $\vec{\mathcal{E}}^+(z)$ dado por

$$\vec{\mathcal{E}}^+(z) = E\vec{e}e^{ikz} + E'\vec{e}'e^{-ikz} . \quad (2.4)$$

El superíndice $+/-$ en $\vec{\mathcal{E}}^{+/-}(z)$ indica emisión/absorción. Ahora supongamos que las amplitudes son iguales $E' = E$ y que las dos ondas tienen polarizaciones lineales ortogonales,

$$\begin{aligned} \vec{e} &= \vec{e}_x , \\ \vec{e}' &= \vec{e}_y . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Sustituyendo (2.5) en (2.4) obtenemos

$$\vec{\mathcal{E}}^+(z) = E\sqrt{2} \left[\left(\frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}} \right) \cos kz - i \left(\frac{\vec{e}_x - \vec{e}_y}{\sqrt{2}} \right) \sin kz \right] . \quad (2.6)$$

Por lo tanto el campo eléctrico total puede verse como la superposición de dos campos con amplitudes $E\sqrt{2} \cos kz$ y $E\sqrt{2} \sin kz$ y polarizaciones a lo largo de dos ejes ortogonales $\frac{\vec{e}_x \pm \vec{e}_y}{\sqrt{2}}$ paralelos a las bisectrices del plano generado por \vec{e}_x y \vec{e}_y . De la ecuación (2.6) vemos claramente que la polarización es lineal a lo largo de $\vec{e}_1 = \frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}}$ en $z = 0$, circular ($\vec{e}_- = \frac{\vec{e}_x + i\vec{e}_y}{\sqrt{2}}$) en $z = \frac{\lambda}{8}$ (con $\lambda = \frac{2\pi}{k}$), lineal a lo largo de $\vec{e}_2 = \frac{\vec{e}_x - \vec{e}_y}{\sqrt{2}}$ en $z = \frac{\lambda}{4}$, circular ($\vec{e}_+ = \frac{\vec{e}_x - i\vec{e}_y}{\sqrt{2}}$) en $z = \frac{3\lambda}{8}$ y así sucesivamente. Ver Fig. (2.1).

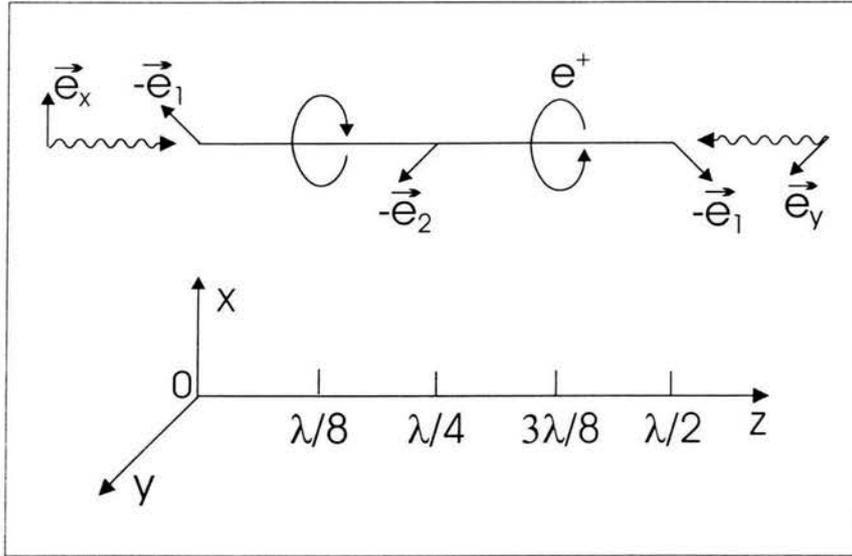


Figura 2.1: Dos ondas que se contrapropagan tienen polarizaciones ortogonales. La polarización resultante está modulada espacialmente.

2.2. Descripción Cualitativa del Mecanismo de Enfriamiento

Antes de calcular los cambios en los niveles base de energía vamos a discutir cualitativamente el fenómeno. El ejemplo mas sencillo de estudiar sucede cuando el estado base tiene momento angular total ($J = L + S$) $J_g = \frac{1}{2}$ y el excitado $J_e = \frac{3}{2}$. Los coeficientes Clebsch-Gordan de las posibles transiciones se muestran en la Fig. (2.2). Al elevar al cuadrado estos coeficientes obtenemos las probabilidades relativas de transición de un estado excitado e a uno base g .

Supongamos que tenemos un átomo en reposo dentro del gradiente de polarización creado por el láser. Esto provoca una dependencia en los niveles de energía como se muestra en la Fig. (2.3).

Como primer caso coloquemos al átomo en $z = \frac{\lambda}{8}$ de tal forma que la polarización es \vec{e}_- . Si inicialmente el átomo se encuentra en $g_{-\frac{1}{2}}$ el único ciclo posible es $g_{-\frac{1}{2}} \rightarrow e_{-\frac{3}{2}} \rightarrow g_{-\frac{1}{2}}$ durante un tiempo τ_p . En cambio si se encuentra en $g_{+\frac{1}{2}}$ tenemos $g_{+\frac{1}{2}} \rightarrow e_{-\frac{1}{2}} \rightarrow g_{+\frac{1}{2}}$ con probabilidad relativa $\frac{1}{3}$ y $g_{+\frac{1}{2}} \rightarrow e_{-\frac{1}{2}} \rightarrow g_{-\frac{1}{2}}$ con probabilidad relativa $\frac{2}{3}$. Por lo tanto, al llegar al estado estacionario, nos encontraremos con que el átomo se encuentra en $g_{-\frac{1}{2}}$. De la misma forma, si iniciamos con una población atómica situada en $z = \frac{\lambda}{8}$ con la mitad de ella en $g_{-\frac{1}{2}}$ y la otra mitad en $g_{+\frac{1}{2}}$ sabemos que, al pasar un periodo de tiempo del or-

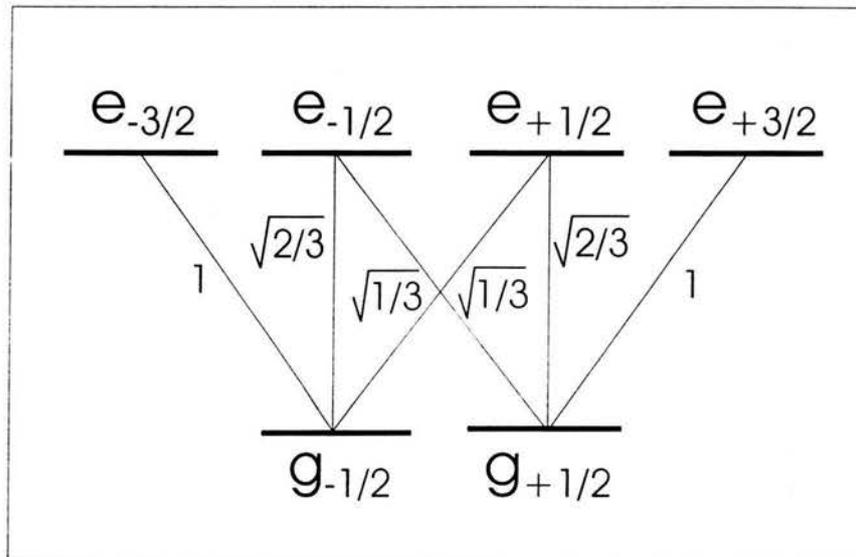


Figura 2.2: Esquema de los niveles atómicos y coeficientes Clebsch-Gordan para una transición $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 3/2$.

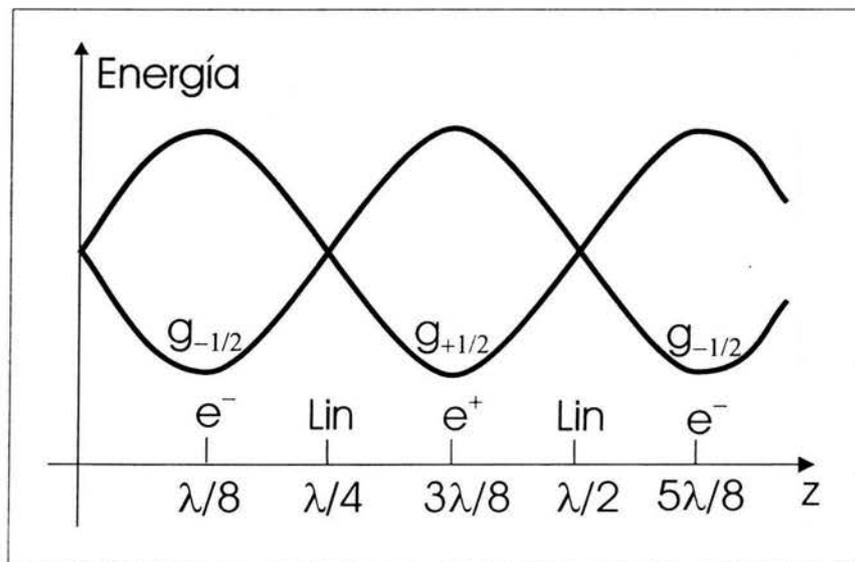


Figura 2.3: Dependencia espacial de los niveles de energía base. Como se mostrará mas adelante la variación se debe al gradiente de polarización producido por el láser.

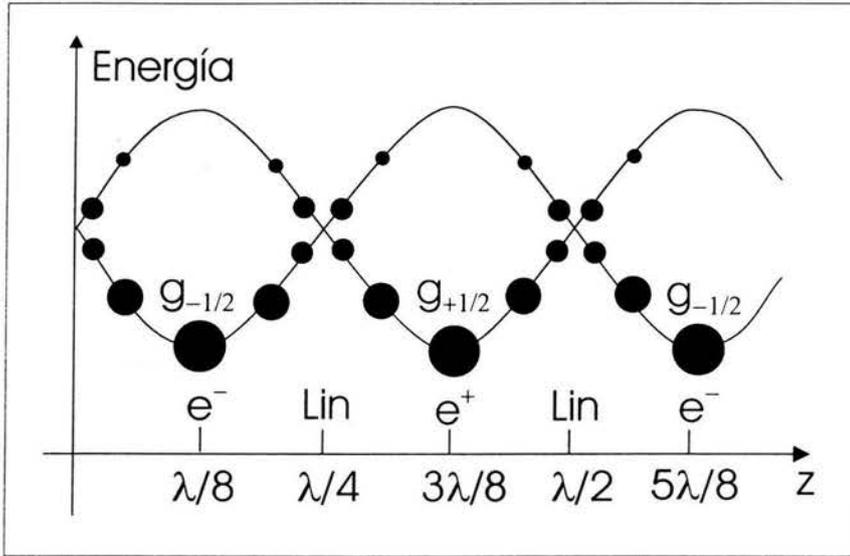


Figura 2.4: Las poblaciones atómicas estacionarias en los distintos subniveles base se encuentran representadas por los círculos negros.

den de τ_p , nos encontraremos con que casi toda la población se encuentra en $g_{-1/2}$.

Si el átomo ahora se sitúa en $z = \frac{3\lambda}{8}$, donde la polarización es \vec{e}_+ , las conclusiones anteriores se invierten. Si el átomo está en $g_{+1/2}$, la única transición permitida es $g_{+1/2} \rightarrow e_{+3/2} \rightarrow g_{+1/2}$, en cambio, en $g_{-1/2}$ tenemos $g_{-1/2} \rightarrow e_{+1/2} \rightarrow g_{-1/2}$ con probabilidad $\frac{1}{3}$ y $g_{-1/2} \rightarrow e_{+3/2} \rightarrow g_{+1/2}$ con probabilidad $\frac{2}{3}$. Por lo tanto el estado estacionario de una población atómica situada en $z = \frac{3\lambda}{8}$ es 1 en $g_{+1/2}$ y 0 en $g_{-1/2}$.

Finalmente si $z = 0, \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}, \dots$ la polarización es lineal y ésta se puede descomponer en una componente \vec{e}_+ y otra \vec{e}_- , ambas con la misma intensidad, por lo que nos encontramos con que la población atómica tenderá a ocupar $g_{-1/2}$ y $g_{+1/2}$ con la misma probabilidad.

Todas las conclusiones anteriores se muestran en la Fig. (2.4). Se puede apreciar la dependencia en z de los niveles base así como la dependencia en z de las probabilidades de ocupación en un nivel u otro representadas por el tamaño relativo de los círculos negros.

La discusión anterior nos permite entender el mecanismo de enfriamiento que se lleva a cabo cuando los átomos se mueven dentro del láser. El punto clave es que el bombeo óptico entre dos niveles g requiere de un tiempo finito τ_p . Supongamos que un átomo comienza su recorrido desde la cima de un valle de

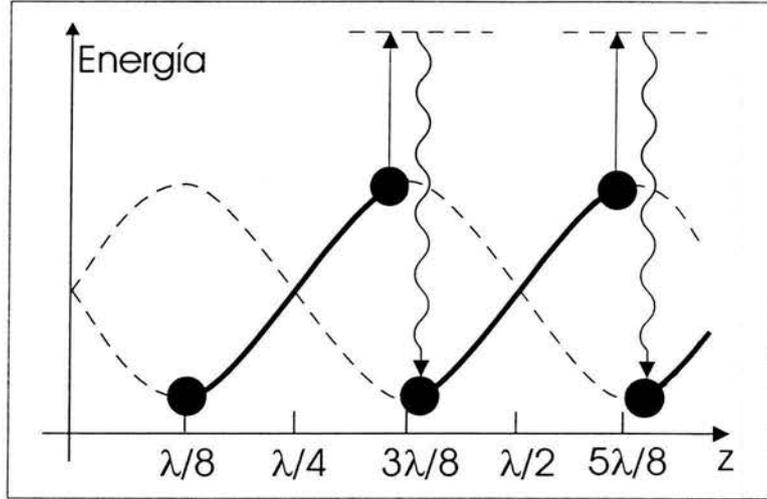


Figura 2.5: Efecto Sísifo. Debido al tiempo de retraso τ_p por el bombeo óptico, el átomo pasa la mayor parte de su tiempo subiendo la colina de potencial. La velocidad del átomo aquí presentada es tal que $v\tau_p \sim \frac{\lambda}{4}$; en este caso el átomo viaja una distancia del orden de λ en un intervalo de tiempo τ_p . El enfriamiento es máximo.

potencial, digamos en $z = \frac{\lambda}{8}$ (ver Fig. (2.5)), y que se mueve a la derecha. Si la velocidad v es tal que el átomo viaja una distancia del orden de $\frac{\lambda}{4}$ durante un tiempo τ_p , el átomo permanecerá en promedio en el mismo subnivel, subirá la colina de potencial y llegará a la cima antes de ser ópticamente bombeado al otro subnivel, i. e., a la cima del siguiente valle de potencial en $z = \frac{3\lambda}{8}$. De aquí en adelante se repite el mismo fenómeno. Por lo tanto, al átomo le parece que, debido al tiempo τ_p , siempre está subiendo colinas de potencial, transformando parte de su energía cinética en energía potencial.

El efecto debe su nombre a la siguiente leyenda. Sísifo, rey de Corinto, sorprendió a Zeus en el robo que éste hizo de la ninfa Egina y contó a su padre lo sucedido. El dios, colérico, envió al rey a la parte más profunda del Hades (el infierno griego) llamada Tártaro. Sísifo al saber que iba a ser castigado, pidió a su esposa que no enterrara su cadáver, mostrando una vez más que aún en el dominio de la muerte era astuto. Al llegar al Hades, Sísifo visitó a Perséfone, reina del infierno, y le dijo que al no estar sepultado no tenía porque estar allí y que lo debía dejar regresar a reclamar sus funerales. Conviniere en que él regresaría a los tres días pero, una vez en la Tierra, se hizo el desobligado y no regresó hasta que lo hizo volver Hermes, el mensajero divino. De vuelta, su atrevimiento fue castigado de manera ejemplar. Los jueces infernales resolvieron asignarle un trabajo eterno e inútil: debía rodar una roca pendiente arriba hasta llegar a

2.2. DESCRIPCIÓN CUALITATIVA DEL MECANISMO DE ENFRIAMIENTO 17

la cima de una montaña, una vez allí, la roca caía y el trabajo volvía a comenzar.

En los párrafos anteriores pudimos ver como es que la energía cinética se transforma en potencial: El átomo sube una colina de potencial; gracias al bombeo óptico la energía almacenada de esta forma se disipa introduciendo irreversibilidad en el proceso y produciendo el enfriamiento. En la Fig. (2.5) observamos que cuando el átomo llega a la cima hay una gran probabilidad de que éste absorba un fotón $\hbar\omega_L$ y emita uno fluorescente cuya energía es mayor que la absorbida en una cantidad igual al desdoblamiento de los niveles base. Por lo tanto, el fotón emitido se lleva el exceso de energía.

De la discusión anterior, podemos derivar un orden de magnitud del coeficiente de fricción α que aparece en la expresión de la fuerza de fricción,

$$F = -\alpha v . \quad (2.7)$$

Como sabemos, el máximo valor de la fuerza de fricción aparece cuando el átomo tiene una velocidad del orden de $v\tau_p \sim \frac{\lambda}{4}$, i.e., cuando

$$kv \sim \Gamma' . \quad (2.8)$$

Para este valor de v , la energía disipada durante un tiempo τ_p es del orden de $-\hbar\Delta'$, con Δ' igual a la diferencia de energías entre los niveles base. Por lo tanto, la energía disipada por unidad de tiempo es

$$\frac{dW}{dt} \sim \frac{-\hbar\Delta'}{\tau_p} = -\hbar\Delta'\Gamma' . \quad (2.9)$$

Por otro lado, también sabemos que

$$\frac{dW}{dt} \sim Fv , \quad (2.10)$$

entonces, en este caso en particular, tenemos

$$\frac{dW}{dt} \sim \alpha v^2 . \quad (2.11)$$

Igualando las expresiones (2.9) y (2.11) y usando la expresión (2.8), llegamos a

$$\alpha \sim -\hbar k^2 \frac{\Delta'}{\Gamma'} . \quad (2.12)$$

Como hemos dicho, el modelo funciona para intensidades bajas del láser. En éste límite tenemos que Δ' y Γ' son proporcionales a su intensidad. Se sigue de la expresión (2.12) que el coeficiente de fricción para este mecanismo de enfriamiento es independiente de la potencia.

2.3. Descripción Cuantitativa del Mecanismo de Enfriamiento

El potencial que describe la interacción átomo-láser es

$$V = -\vec{D} \cdot \vec{E}. \quad (2.13)$$

El operador momento dipolar se puede descomponer en las transiciones que aumentan la energía del átomo y en aquellas que la disminuyen

$$\vec{D} = \sum |i\rangle\langle j| \vec{D}_{ij} = \sum_{i>j} \vec{D}_{ij} |i\rangle\langle j| + \sum_{i>j} \vec{D}_{ji} |j\rangle\langle i| = \vec{D}^+ + \vec{D}^-, \quad (2.14)$$

donde $\vec{D}_{ji} = \langle i|\vec{D}|j\rangle$. En la ecuación anterior suponemos que $|i\rangle$ es un estado mas energético que $|j\rangle$ si $i > j$. Para simplificar los cálculos trasladaremos el origen de coordenadas en la dirección z una cantidad $\lambda/8$ además, expresaremos el campo eléctrico en la base \vec{e}_+, \vec{e}_- , obteniendo

$$\vec{\mathcal{E}}^+(z) = \sqrt{2}E(\vec{e}_- \sin kz + i\vec{e}_+ \cos kz), \quad (2.15)$$

$$\vec{\mathcal{E}}^-(z) = \sqrt{2}E(-\vec{e}_+ \sin kz + i\vec{e}_- \cos kz). \quad (2.16)$$

Usando la aproximación de onda rotante el potencial es

$$V = -[\vec{D}^+ \cdot \vec{\mathcal{E}}^+(\mathbf{r})e^{(-i\omega_L t)} + \vec{D}^- \cdot \vec{\mathcal{E}}^-(\mathbf{r})e^{(-i\omega_L t)}]. \quad (2.17)$$

Para ejemplificar el cálculo de V encontraremos el coeficiente $\langle e_{-\frac{3}{2}}|V|g_{-\frac{1}{2}}\rangle$ del desarrollo de V en la base $|e\rangle, |g\rangle$. Tenemos que

$$\langle e_{-\frac{3}{2}}|V|g_{-\frac{1}{2}}\rangle = \langle e_{-\frac{3}{2}}|\vec{D}^+|g_{-\frac{1}{2}}\rangle \vec{\mathcal{E}}^+ e^{-i\omega_L t}, \quad (2.18)$$

ya que la transición que sufre el átomo aumenta su energía. Ahora en la base del momento angular orbital y del espín $|l, m_l\rangle |s, m_s\rangle$ las expresiones para $|e_{-\frac{3}{2}}\rangle$ y para $|g_{-\frac{1}{2}}\rangle$ son

$$|e_{-\frac{3}{2}}\rangle = |1, -1\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad (2.19)$$

$$|g_{-\frac{1}{2}}\rangle = |0, 0\rangle \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \quad (2.20)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \langle e_{-\frac{3}{2}}|\vec{D}^+|g_{-\frac{1}{2}}\rangle &= \\ \langle 1, -1| \langle 1/2, -1/2| \vec{D} |1/2, -1/2\rangle |0, 0\rangle &= d \langle 1, -1|d|0, 0\rangle. \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.3. DESCRIPCIÓN CUANTITATIVA DEL MECANISMO DE ENFRIAMIENTO 19

con d la magnitud del momento dipolar

$$d = q \int_0^\infty R_{n,1} R_{n-1,0} r^3 dr \quad (2.22)$$

Para calcular el valor de expectación del operador de momento dipolar unitario $\langle 1, -1 | \hat{d} | 0, 0 \rangle$ notemos que

$$\begin{aligned} \hat{d}_x &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_1^{-1}(\theta, \varphi) - Y_1^1(\theta, \varphi)), \\ \hat{d}_y &= \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_1^{-1}(\theta, \varphi) + Y_1^1(\theta, \varphi)), \\ \hat{d}_z &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_1^0(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (2.23)$$

como $|0, 0\rangle = Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$, podemos calcular $\langle 1, -1 | \hat{d} | 0, 0 \rangle$ usando la ortogonalidad de los armónicos esféricos, obteniendo

$$\langle 1, -1 | \hat{d} | 0, 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, i, 0) = \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{e}_- \quad (2.24)$$

Por lo tanto el coeficiente $\langle e_{-\frac{3}{2}} | V | g_{-\frac{1}{2}} \rangle$ es igual a

$$\langle e_{-\frac{3}{2}} | V | g_{-\frac{1}{2}} \rangle = d \left(\frac{\vec{e}_-}{\sqrt{3}} \cdot \vec{E}^+ e^{-i\omega_L t} \right) = d e^{-i\omega_L t} \sqrt{\frac{2}{3}} E \cos kz \quad (2.25)$$

Llevando a cabo cálculos análogos a los anteriores obtenemos la expresión para el potencial

$$\begin{aligned} V &= -\frac{4\hbar\Omega}{\sqrt{2}} \sin kz \left[\frac{1}{\sqrt{3}} |e_{+\frac{3}{2}}\rangle \langle g_{+\frac{1}{2}}| + |e_{+\frac{1}{2}}\rangle \langle g_{-\frac{1}{2}}| \right] e^{-i\omega_L t} \\ &\quad - \frac{4\hbar\Omega}{\sqrt{2}} \cos kz \left[\frac{1}{\sqrt{3}} |e_{-\frac{3}{2}}\rangle \langle g_{-\frac{1}{2}}| + |e_{-\frac{1}{2}}\rangle \langle g_{+\frac{1}{2}}| \right] e^{-i\omega_L t} + c.h., \end{aligned} \quad (2.26)$$

con $c.h.$ el conjugado hermitiano y Ω la frecuencia de Rabi

$$\Omega = \frac{dE}{2\hbar} \quad (2.27)$$

Con la expresión del potencial podemos calcular la fuerza promedio que actúa sobre el átomo

$$\begin{aligned}
f &= \left\langle -\frac{dV}{dz} \right\rangle = \text{Tr} \left(-\rho \frac{dV}{dz} \right) \\
&= -\frac{\hbar k \Omega}{\sqrt{2}} \cos kz \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \tilde{\rho}(g_{+\frac{1}{2}}, e_{+\frac{3}{2}}) + \tilde{\rho}(g_{-\frac{1}{2}}, e_{+\frac{1}{2}}) + c.c. \right] \\
&\quad + \frac{\hbar k \Omega}{\sqrt{2}} \sin kz \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \tilde{\rho}(g_{-\frac{1}{2}}, e_{-\frac{3}{2}}) + \tilde{\rho}(g_{+\frac{1}{2}}, e_{-\frac{1}{2}}) + c.c. \right],
\end{aligned} \tag{2.28}$$

con ρ la matriz de densidad y

$$\tilde{\rho}(g_i, e_j) = \langle g_i | \rho | e_j \rangle e^{-i\omega_L t}. \tag{2.29}$$

Ahora necesitamos calcular el valor estacionario de las coherencias ópticas usando ecuaciones de Bloch [12,13] en el esquema de Schrödinger

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -i\omega_L \tilde{\rho} - \frac{i}{\hbar} [\tilde{\rho}, H] = -i\omega_L \tilde{\rho} - \frac{i}{\hbar} ([\tilde{\rho}, H_0] + [\tilde{\rho}, V]), \tag{2.30}$$

donde H_0 describe la interacción del electrón con el núcleo y V con el campo. Notemos que a diferencia de (1.10) aquí sólo tomamos en cuenta la variación temporal de ρ y hemos despreciado la variación del centro de masa al no considerar una derivada convectiva ya que la velocidad a la que se mueve el átomo es menor a la considerada en el enfriamiento Doppler. Como ejemplo calculemos la ecuación para $\tilde{\rho}(g_{+\frac{1}{2}}, e_{+\frac{3}{2}})$. Como $\tilde{\rho}$ está expresado en la base donde H_0 es diagonal tenemos que el segundo término a la derecha de (2.30) es

$$[\tilde{\rho}, H_0]_{(g_{+\frac{1}{2}}, e_{+\frac{3}{2}})} = (E_{e_{+\frac{3}{2}}} - E_{g_{+\frac{1}{2}}}) \tilde{\rho}(g_{+\frac{1}{2}}, e_{+\frac{3}{2}}) = -\hbar\omega_A \tilde{\rho}(g_{+\frac{1}{2}}, e_{+\frac{3}{2}}). \tag{2.31}$$

El último término en (2.30) se calcula con el potencial dado en (2.26). Sumando éste término, los dos anteriores y tomando en cuenta la vida media del estado excitado llegamos a

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\rho}}(g_{+\frac{1}{2}}, e_{+\frac{3}{2}}) &= -\left(i\delta + \frac{\Gamma}{2}\right) \tilde{\rho}(g_{+\frac{1}{2}}, e_{+\frac{3}{2}}) + i\frac{4\Omega}{\sqrt{6}} \cos kz \langle e_{-\frac{1}{2}} | \rho | e_{+\frac{3}{2}} \rangle \\
&\quad - i\frac{4\Omega}{\sqrt{2}} \sin kz [\langle g_{+\frac{1}{2}} | \rho | g_{+\frac{1}{2}} \rangle - \langle e_{+\frac{3}{2}} | \rho | e_{+\frac{3}{2}} \rangle],
\end{aligned} \tag{2.32}$$

donde $\delta = \omega_L - \omega$ es la desentonación entre la frecuencia del láser y la frecuencia atómica.

La ecuación es válida para cualquier potencia pero, como suponemos bajas velocidades atómicas y bajas intensidades, podemos simplificarla de la siguiente

2.3. DESCRIPCIÓN CUANTITATIVA DEL MECANISMO DE ENFRIAMIENTO 21

forma:

(i) La hipótesis sobre la baja intensidad del láser ($\Omega \ll \Gamma$) implica que las poblaciones y las coherencias de y entre los estados excitados son despreciables a comparación de los del estado base. Por lo tanto podemos despreciar los términos $\langle e_i | \rho | e_j \rangle$ y calcular $\bar{\rho}$ a primer orden en Ω .

(ii) Como la velocidad atómica es baja ($kv \ll \Gamma$) las coherencias ópticas pueden alcanzar sus estados estacionarios aunque exista una variación a lo largo de la dirección de propagación $\sin kz$ ya que el campo puede ser considerado constante dentro de la distancia $\frac{v}{\Gamma}$. Esto significa que las coherencias ópticas siguen adiabáticamente a las poblaciones del estado base.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores e igualando a cero la ecuación (2.32) (ya que buscamos el estado estacionario) podemos escribir

$$\bar{\rho}(g_{+\frac{1}{2}}, e_{+\frac{3}{2}}) = \frac{\frac{\Omega}{\sqrt{2}}}{\delta - i\frac{\Gamma}{2}} \Pi_{+\frac{1}{2}} \sin kz, \quad (2.33)$$

con

$$\Pi_{\pm\frac{1}{2}} = \langle g_{\pm\frac{1}{2}} | \rho | g_{\pm\frac{1}{2}} \rangle. \quad (2.34)$$

Notemos que las coherencias entre los dos estados base $\langle g_{\pm\frac{1}{2}} | \rho | g_{\mp\frac{1}{2}} \rangle$ no contribuyen al cálculo y además tienen un valor estacionario igual a cero para esta configuración del láser ya que éste no acopla a las poblaciones del estado base.

Ahora calculemos las ecuaciones de Bloch para las poblaciones excitadas, por ejemplo, para $\langle e_{+\frac{3}{2}} | \rho | e_{+\frac{3}{2}} \rangle$

$$\begin{aligned} \langle e_{+\frac{3}{2}} | \dot{\rho} | e_{+\frac{3}{2}} \rangle &= -\Gamma \langle e_{+\frac{3}{2}} | \rho | e_{+\frac{3}{2}} \rangle \\ &\quad - i \frac{4\Omega}{\sqrt{2}} \sin kz [\bar{\rho}(e_{+\frac{3}{2}}, g_{+\frac{1}{2}}) - \bar{\rho}(g_{+\frac{1}{2}}, e_{+\frac{3}{2}})]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

El primer término a la derecha de la ecuación viene de considerar el decaimiento de la población excitada; el segundo es el resultado de calcular el conmutador entre ρ y V . Reemplazando las coherencias ópticas por sus expresiones en términos de las poblaciones e igualando a cero obtenemos

$$\langle e_{+\frac{3}{2}} | \rho | e_{+\frac{3}{2}} \rangle = s_0 \Pi_{+\frac{1}{2}} \sin^2 kz, \quad (2.36)$$

donde s_0 es el parámetro de saturación dependiente del desentonamiento

$$s_0 = \frac{8\Omega^2}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \quad (2.37)$$

Finalmente, calculemos las ecuaciones de Bloch para las poblaciones del estado base. Por ejemplo

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_{+\frac{1}{2}} = & \Gamma \left[\langle e_{+\frac{3}{2}} | \rho | e_{+\frac{3}{2}} \rangle + \frac{2}{3} \langle e_{+\frac{1}{2}} | \rho | e_{+\frac{1}{2}} \rangle + \frac{1}{3} \langle e_{-\frac{1}{2}} | \rho | e_{-\frac{1}{2}} \rangle \right] \\ & - \left[\frac{i4\Omega}{\sqrt{2}} \tilde{\rho}(g_{+\frac{1}{2}}, e_{+\frac{3}{2}}) \sin kz + \frac{i4\Omega}{\sqrt{6}} \tilde{\rho}(g_{+\frac{1}{2}}, e_{-\frac{1}{2}}) \cos kz + c.c. \right]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Los primeros tres términos corresponden a la población excitada que decae y que puede aumentar la población base por medio de una transición permitida, los factores que los multiplican son los coeficientes de Clebsch-Gordan al cuadrado. Los términos restantes se obtienen al calcular el conmutador entre ρ y V .

Si insertamos las expresiones de las coherencias ópticas y de las poblaciones excitadas en términos de $\Pi_{\pm\frac{1}{2}}$ obtenemos

$$\dot{\Pi}_i = -\frac{1}{\tau_p} [\Pi_i - \Pi_i^{st}(z)], \quad (2.39)$$

donde el tiempo de bombeo τ_p y las poblaciones estacionarias $\Pi_i^{st}(z)$ están dadas por

$$\frac{1}{\tau_p} = \Gamma' = \frac{2\Gamma s_0}{9}, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{+\frac{1}{2}}^{st}(z) &= \sin^2 kz, \\ \Pi_{-\frac{1}{2}}^{st}(z) &= \cos^2 kz. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Como podemos ver en la ecuación (2.39) las poblaciones base alcanzan su estado estacionario en un tiempo $\frac{1}{\tau_p}$ para una posición z dada. El tiempo, como se menciona al principio de la sección, es inversamente proporcional a la intensidad del láser. Además las poblaciones tienen una fuerte modulación espacial. Ver Fig. (2.4).

Para calcular la fuerza (2.28), primero reemplazamos las coherencias ópticas por sus expresiones en términos de las poblaciones base

$$f = -\frac{2}{3} \hbar k \delta s_0 (\Pi_{+\frac{1}{2}} - \Pi_{-\frac{1}{2}}) \sin 2kz. \quad (2.42)$$

Ahora, si definimos

$$f_{\pm\frac{1}{2}} = -\frac{d}{dz} \Delta E_{\pm\frac{1}{2}} = \mp \frac{2}{3} \hbar k \delta s_0 \sin 2kz. \quad (2.43)$$

con $\Delta E_{\pm\frac{1}{2}}$ igual a

2.3. DESCRIPCIÓN CUANTITATIVA DEL MECANISMO DE ENFRIAMIENTO 23

$$\Delta E_{+\frac{1}{2}} = E_0 - \frac{\hbar\delta s_0}{3} \cos 2kz = \hbar\delta s_0(\sin^2 kz + \frac{1}{3} \cos^2 kz) \quad (2.44)$$

y

$$\Delta E_{-\frac{1}{2}} = E_0 + \frac{\hbar\delta s_0}{3} \cos 2kz = \hbar\delta s_0(\cos^2 kz + \frac{1}{3} \sin^2 kz), \quad (2.45)$$

con

$$E_0 = \frac{2}{3} \hbar\delta s_0. \quad (2.46)$$

Podemos ver, como se muestra en la Fig. (2.3) y en las ecuaciones (2.44) y (2.45), que ambos subniveles base oscilan con periodo $\frac{\lambda}{2}$. Reescribimos la fuerza f (2.42) como

$$f = f_{+\frac{1}{2}} \Pi_{+\frac{1}{2}} + f_{-\frac{1}{2}} \Pi_{-\frac{1}{2}}. \quad (2.47)$$

Por lo tanto la fuerza f es el promedio de las dos fuerzas para cada estado pesadas por la población en los subniveles respectivos. Ahora calculemos las poblaciones $\Pi_{\pm\frac{1}{2}}$ para poder obtener la fuerza a partir de (2.47). Primero supongamos que el átomo está en reposo, esto implica que las poblaciones son iguales a sus valores estacionarios (2.3). Sustituyéndolos en (2.47) obtenemos

$$f(z, v = 0) = \frac{2}{3} \hbar k \delta s_0 \sin 2kz \cos 2kz = -\frac{dU}{dz}, \quad (2.48)$$

donde el potencial está dado por

$$U(z) = -\frac{1}{6} \hbar\delta s_0 \sin^2 2kz. \quad (2.49)$$

Como vemos, en el caso en que el átomo está en reposo, la fuerza se puede derivar de un potencial. Esto corresponde a la parte conservativa del sistema que, una vez que enfría al átomo, lo atrapa en los mínimos del potencial.

Como siguiente aproximación, consideremos un átomo muy lento para el cual el corrimiento Doppler kv sea menor que $\frac{1}{\tau_p}$. Hay que notar que este requerimiento es mas restrictivo que la condición $kv \ll \Gamma$ (estados excitados poco poblados) requerida para llegar a las ecuaciones (2.33) y (2.36). Para tales átomos, el efecto del movimiento sobre las poblaciones $\Pi_{\pm\frac{1}{2}}$ puede ser tratado de forma perturbativa por un desarrollo en términos del parámetro $kv\tau_p$

$$\Pi_i(z, v) = \Pi_i^{st}(z) - v\tau_p \frac{d\Pi_i^{st}}{dz} + \dots \quad (2.50)$$

Sustituyendo estas expresiones en la fuerza (2.47), obtenemos

$$\begin{aligned}
f(z, v) &= f(z, v = 0) - v\tau_p \sum_{i=\pm\frac{1}{2}} f_i \frac{d\Pi_i^{st}}{dz} \\
&= f(z, v = 0) + \frac{4}{3} \hbar k^2 \delta s_0 v \tau_p \sin^2(2kz) . \quad (2.51)
\end{aligned}$$

Ahora promediamos este resultado en una longitud de onda. El promedio de $f(z, v = 0)$ es igual a cero y $\langle \sin^2(2kz) \rangle = \frac{1}{2}$, por lo que

$$\bar{f}(v) = -\alpha v , \quad (2.52)$$

con α el coeficiente de fricción

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{2}{3} \hbar k^2 \delta s_0 \tau_p \\
\delta &< 0 , \quad (2.53)
\end{aligned}$$

o, usando la ecuación (2.40)

$$\alpha = -3\hbar k^2 \frac{\delta}{\Gamma} . \quad (2.54)$$

Por lo tanto, obtenemos un coeficiente de fricción independiente de la potencia del láser. (Ver ecuación (2.12)).

Por último calculemos la fuerza de forma exacta para todo el rango $kv \ll \Gamma$ sin la restricción en los valores relativos de kv y $\frac{1}{\tau_p}$. La ecuación (2.39) es aún válida, pero una expansión perturbativa no; sin embargo, la ecuación puede ser resuelta de forma exacta

$$\Pi_{\pm\frac{1}{2}}(z, v) = \frac{1}{2} \left(1 \mp \frac{\cos 2kz + 2kv\tau_p \sin 2kz}{1 + 4v^2\tau_p^2} \right) . \quad (2.55)$$

Sustituyendo este resultado en la expresión para la fuerza (2.47) y promediando en una longitud de onda, obtenemos

$$\bar{f}(v) = \frac{-\alpha v}{1 + \left(\frac{v}{v_c}\right)^2} , \quad (2.56)$$

con la velocidad crítica v_c

$$kv_c = \frac{1}{2\tau_p} . \quad (2.57)$$

Como se mencionó en la sección anterior, la fuerza es máxima en esta configuración cuando $v = v_c$, es decir, cuando la distancia que recorre el átomo en un tiempo τ_p es del orden de una longitud de onda (ver Fig. (2.6)). Hay que recalcar que estos resultados no son válidos para cualquier velocidad atómica, sino sólo para velocidades $kv \ll \Gamma$. Fuera de este rango, el efecto disipativo dominante es el Doppler.

2.3. DESCRIPCIÓN CUANTITATIVA DEL MECANISMO DE ENFRIAMIENTO 25

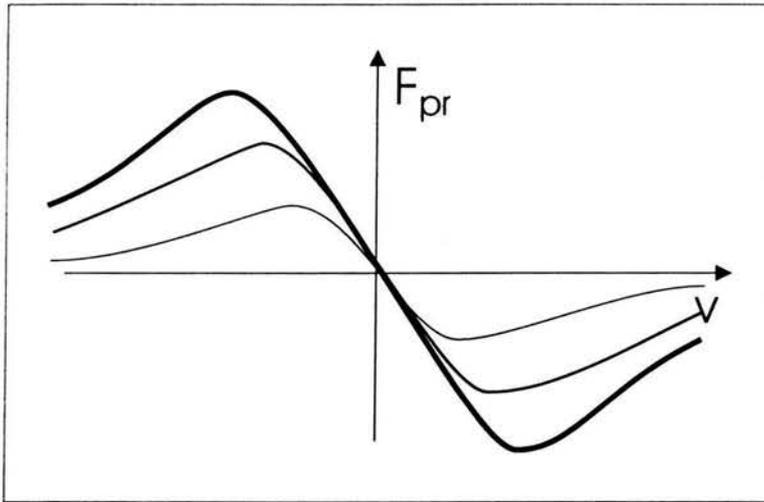


Figura 2.6: Gráfica cualitativa de la variación de la fuerza con la velocidad debida al gradiente de polarización para distintas intensidades del láser. Nótese que el rango de atrapamiento se reduce a medida que la intensidad disminuye.

Capítulo 3

Trampas Ópticas

Hasta ahora sólo hemos considerado técnicas de enfriamiento y no debemos confundir éstas con las técnicas de atrapamiento.

Cuando un gas ha sido enfriado, sabemos que los átomos siguen interactuando con el campo generado por el láser, provocando que la temperatura mínima sea distinta de cero. Este movimiento térmico es resultado del retroceso que sufren los átomos al emitir los fotones absorbidos del campo. Por conservación del momento entre el fotón y el átomo tenemos

$$v_{ret} = \frac{\hbar k}{M}, \quad (3.1)$$

con k el vector de onda y M la masa atómica. Esta velocidad tiene asociada una energía igual a

$$E_{ret} = \frac{1}{2} M v_{ret}^2 = \frac{\hbar^2 |k|^2}{2M}. \quad (3.2)$$

Este resultado impide que el gas sea enfriado completamente y causa la difusión atómica, es decir, los átomos siguen trayectorias erráticas debido a la emisión espontánea de fotones que provoca el abandono de la región de enfriamiento.

La difusión ejemplifica que las técnicas de enfriamiento son sólo eso, técnicas de enfriamiento y que, si queremos tener a los átomos localizados en cierta región del espacio, debemos recurrir a técnicas de confinamiento.

3.1. Trampa Magneto-Óptica (MOT)

La fuerza dependiente de la posición es necesaria para conseguir el atrapamiento de los átomos, sin embargo una serie de teoremas restringe la distribución de campos magnéticos y eléctricos que pueden ser utilizados para confinar. Por ejemplo, sabemos que el potencial eléctrico cumple con la ecuación

de Laplace $\nabla^2\phi = 0$, que es equivalente a pedir que el potencial sea una función armónica en la región del espacio libre de cargas. Estas funciones tienen la propiedad de que su valor en cualquier punto del espacio donde esté definida es igual al valor del promedio de los valores que toma sobre una esfera que tiene al punto como centro por lo que éste no puede ser un máximo ni un mínimo. En pocas palabras: ningún potencial generado por cargas estáticas puede confinar a una partícula cargada.

Una solución al problema anterior, es explotar el hecho de que los átomos que serán atrapados no son partículas puntuales sino cuerpos con estructura interna que pueden ser polarizados. La polarizabilidad atómica efectiva P puede ser dependiente de la posición a través de la presencia de un campo magnético B externo que resulta en la divergencia negativa de la fuerza de radiación espontánea.

La Trampa Magneto-Óptica, MOT por sus siglas en inglés, se basa en esta idea y se realiza introduciendo un campo magnético que varía espacialmente por lo que los niveles atómicos de energía también. Esto provoca que la fuerza de radiación se vuelva dependiente de la posición.

Como ejemplo aquí presentaremos la versión simplificada de un modelo unidimensional que aprovecha la transición $J = 0 \rightarrow J = 1$. La Fig. (3.1) muestra una configuración similar a la del efecto Doppler. Dos láseres que se contrapropagan, circularmente polarizados están desintonados por una cantidad Δ hacia el rojo respecto a la transición atómica. Además existe un gradiente de campo magnético que desdobra el estado $J = 1$ en tres subniveles magnéticos. Si un átomo está localizado a la izquierda del centro, definido por el cero del campo magnético, su transición $J = 0 \rightarrow J = 1, m = 1$ está más cercana a la frecuencia del láser que las otras transiciones a los otros m -niveles. Sin embargo las transiciones $\Delta m = +1$ son producidas por luz \vec{e}_+ , por lo tanto los átomos a la izquierda se encuentran más en resonancia con el haz que viene de la izquierda. Esto provoca una fuerza dependiente de la posición. Es obvio que el mecanismo Doppler es aún válido proveyendo la fuerza dependiente de la velocidad.

Escribiendo el corrimiento Zeeman como βx , con x la coordenada con respecto al centro, la fuerza total es [10]:

$$F_{MOT} = \frac{\hbar k \Gamma}{2} \left(\frac{G}{1 + G + ((\delta - 2\xi)/\Gamma)^2} - \frac{G}{1 + G + ((\delta + 2\xi)/\Gamma)^2} \right), \quad (3.3)$$

donde

$$\xi = kv + \beta x. \quad (3.4)$$

Para desentonamientos pequeños podemos hacer una expansión similar a la de la ecuación (1.34). En el límite de pequeños campos y bajas velocidades, el sistema se comporta como un oscilador armónico amortiguado sujeto a la fuerza

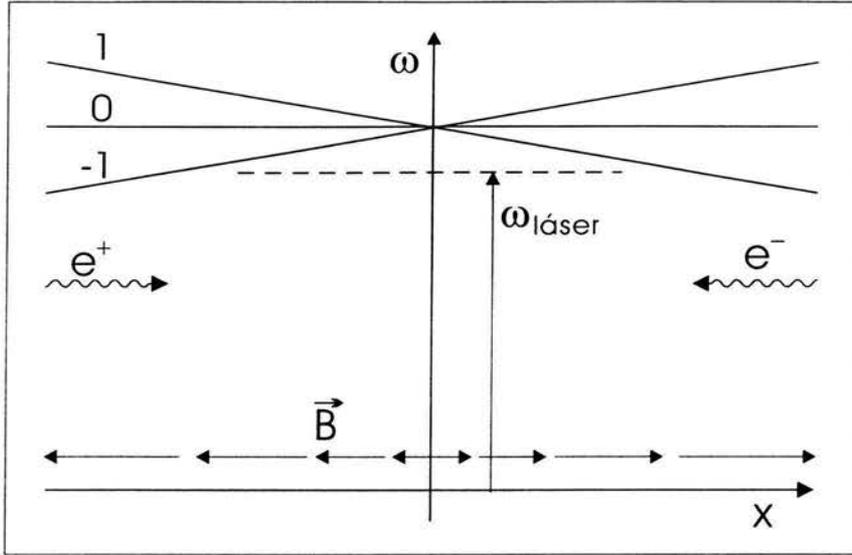


Figura 3.1: Modelo unidimensional de la MOT.

$$F(v, x) = \frac{4\hbar k G(\delta/\Gamma)(kv + \beta x)}{(1 + (\delta/\Gamma)^2)^2} \quad (3.5)$$

y

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_{trampa}^2 x = 0 \quad (3.6)$$

con γ el coeficiente de fricción y ω la frecuencia de la trampa

$$\gamma = \frac{4\hbar k^2 G(\delta/\Gamma)}{M(1 + (\delta/\Gamma)^2)^2}, \quad (3.7)$$

$$\omega_{trampa}^2 = \frac{4\hbar k^2 \beta G(2\Delta/\Gamma)}{M(1 + (\delta/\Gamma)^2)^2}. \quad (3.8)$$

El movimiento del átomo en la región armónica de la trampa se encuentra sobreamortiguado ya que $\frac{\gamma^2}{4\omega_{trampa}^2} > 1$. Esta misma razón en términos de la energía de retroceso y del corrimiento Zeeman en una longitud de onda es

$$\frac{\gamma^2}{4\omega_{trampa}^2} = \frac{\pi E_{ret}}{4\lambda\hbar\beta}. \quad (3.9)$$

Una trampa con un gradiente del campo magnético que produce un corrimiento Zeeman de $\beta = 14$ MHz/cm tiene una frecuencia de atrapamiento de unos cuantos kilohertz. Un campo magnético cuadrupolar, como el producido por un par de bobinas en una configuración anti-Helmholtz (la corriente en una bobina

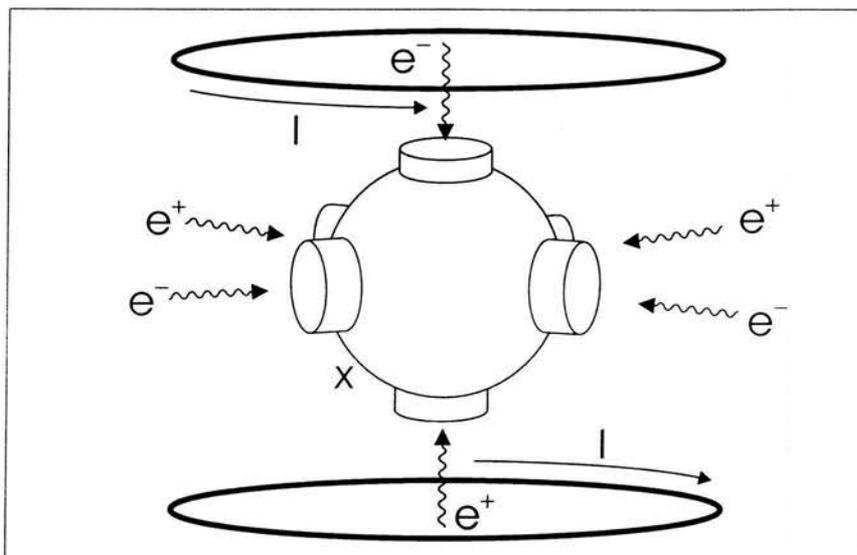


Figura 3.2: Configuración esquemática de las bobinas y los láseres en una trampa MOT

contraria a la corriente en la otra) provee un gradiente adecuado en las tres dimensiones. La forma exacta del campo no es crítica y la separación entre las dos bobinas no tiene que ser igual al radio. Los gradientes típicos son de 10 G/cm. Una configuración posible para la MOT se muestra en la Fig. (3.2).

3.2. Trampa FORT (Far Off Resonance Trap)

Las trampas FORT son trampas ópticas que utilizan la capacidad del campo eléctrico para polarizar a los átomos neutros del gas y así poder interactuar con ellos. Primero los átomos son enfriados por efecto Doppler dentro de una trampa MOT, al llegar al límite de efectividad del efecto Doppler, los átomos son liberados de la trampa MOT y caen por gravedad a una trampa FORT que puede ya confinarlos por el efecto antes mencionado.

Para tener una idea de la capacidad de atrapamiento consideremos lo siguiente: Los pozos de potencial producidos por la interacción de un momento dipolar atómico con un campo estacionario $E = E_0 \cos kz$ tienen una profundidad [1] $U = \alpha E_0^2$, con α la polarizabilidad atómica fuera de resonancia. Así que el atrapamiento sólo actúa en átomos que cumplan con la condición

$$Tk_B < \alpha E_0^2. \quad (3.10)$$

con T la temperatura y k_B la constante de Boltzmann.

Por ejemplo, para dos láseres que se contrapropagan con una intensidad $I = (\frac{c}{8\pi})E_0^2 \sim 1kW/cm^2$ y una polarización atómica típica $\alpha \sim 3 \times 10^{-23} cm^3$, la condición anterior se satisface para átomos con una temperatura T en la escala de los milikelvin [11]. Debido al tamaño del potencial que, comparado con las energías que los átomos pueden tener a temperatura ambiente es ínfimo, el gas debe ser previamente enfriado y luego atrapado.

En los capítulos anteriores obtuvimos que la fuerza que siente el átomo dentro del campo generado por el láser tiene dos componentes, una conservativa y otra disipativa. Esto podría llevarnos a pensar que un mismo campo puede primero enfriar (procesos disipativos Doppler y Sísifo) y luego atrapar al átomo (proceso conservativo). Sin embargo, la difusión debida a las emisiones espontáneas evita el confinamiento. Este problema se supera usando trampas cuyos láseres están sintonizados a una frecuencia muy alejada de la frecuencia característica del átomo; se les conoce como trampas FORT (Far Off Resonance Trap).

Como se mostró en el Capítulo 2 en las ecuaciones (2.42) y (2.43), el campo eléctrico modula espacialmente los niveles base de energía del átomo de la siguiente forma

$$\Delta E_{\pm\frac{1}{2}} = E_0 \pm \frac{\hbar\delta s_0}{3} \cos 2kz, \quad (3.11)$$

con

$$E_0 = \frac{2}{3}\hbar\delta s_0 \quad (3.12)$$

y s_0 el parámetro de saturación

$$s_0 = \frac{8\Omega^2(\rho)}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}. \quad (3.13)$$

En el límite cuando las velocidades atómicas cumplen con la desigualdad $kv \ll \Gamma$ la modulación provoca una fuerza conservativa capaz de confinar que, como se mostró en el Capítulo 2 ecuación (2.47), es igual a

$$f(z, v = 0) = \frac{2}{3}\hbar k\delta s_0 \sin 2kz \cos 2kz = -\frac{dU}{dz}, \quad (3.14)$$

donde el potencial está dado por

$$U(\rho, z) = -\frac{1}{6}\hbar\delta s_0 \sin^2 kz. \quad (3.15)$$

Recordando que $|\delta| \gg \Gamma, \Omega$ y usando (3.13) y (3.15), el mínimo del pozo de potencial es proporcional a

$$U \sim \frac{\hbar\Omega^2(\rho)}{\delta}. \quad (3.16)$$

La razón por la que las trampas FORT están muy desentonadas respecto de la frecuencia de la transición atómica resulta ahora evidente [9]: la profundidad del pozo $\frac{\hbar\Omega^2(\rho)}{\delta}$ se mantiene constante si aumentamos la intensidad y el desentonamiento de tal manera que la razón $\frac{\Omega^2(\rho)}{\delta}$ no cambie; la utilidad de este comportamiento radica en que la razón de difusión viene dada por

$$\gamma_{dif} = \frac{\Gamma\Omega^2(\rho)}{\delta^2}, \quad (3.17)$$

que se origina por las fluctuaciones de la fuerza dipolar que oscila entre los niveles $f_{\frac{1}{2}}$ y $f_{-\frac{1}{2}}$ (2.43) [8]. Entonces, si $\frac{\Omega^2(\rho)}{\delta}$ se mantiene constante, $\frac{\Omega^2(\rho)}{\delta^2}$ disminuirá y la vida media de los átomos en la trampa aumentará considerablemente.

La primera trampa FORT se usó para confinar átomos de sodio en un potencial de $10mK$ y la vida media alcanzada fue de unos cuantos milisegundos [9]. Actualmente, el aumento en la intensidad de los láseres y las mejoras en la trampa se han traducido en tiempos de atrapamiento que superan varios segundos.

Capítulo 4

Modelo de Malla Óptica

El patrón de interferencia de dos láseres que se contrapropagan puede crear un potencial periódico estable para átomos neutros. Los átomos, después de haber sido enfriados por una trampa MOT, son atrapados en los mínimos de este potencial creando un arreglo parecido al de una caja lineal de huevos muy extendida a lo largo de la dirección de propagación de los láseres. En la literatura, a esta caja que confina a los átomos, se le denomina Malla Óptica. Gracias a ésta técnica de atrapamiento ha sido posible realizar espectroscopia de alta resolución disminuyendo el ancho de las líneas espectrales al mínimo gracias a las bajas temperaturas alcanzadas dentro de la malla [4,5,6]. Otra aplicación potencial de las mallas (aún en fase experimental) es la litografía de alta resolución que consiste en el depósito controlado de los átomos por medio de la trampa sobre sustratos para formar patrones miniatura.

En este capítulo construiremos un modelo tridimensional de malla óptica producida por un campo electromagnético. El modelo será una aproximación del potencial $V(\rho, z) = -V_0 e^{-\frac{2\rho^2}{w_0^2}} \cos^2(kz)$ [11] que produce el confinamiento en la dirección de propagación del haz y en la dirección radial por medio del coseno cuadrado y de la exponencial respectivamente. La aproximación se obtendrá al expandir la exponencial a primer orden y sustituir el coseno cuadrado por una función tipo almendra con el mismo periodo.

Debido a la periodicidad del potencial, se encontrarán soluciones para un solo periodo y la solución general vendrá dada al ajustar las condiciones a la frontera que la función de onda y su derivada deben cumplir en los puntos donde el potencial es discontinuo. Este ajuste discriminará entre las posibles energías por medio de una matriz que relaciona a los coeficientes de la función de onda de un lado del potencial con los coeficientes del otro lado de tal forma que la norma se conserve.

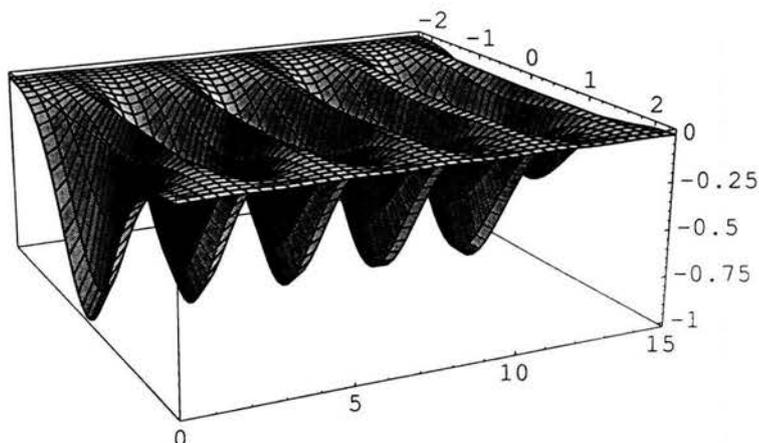


Figura 4.1: Gráfica del potencial $V(\rho, z) = -V_0 e^{-\frac{2\rho^2}{w_0^2}} \cos^2(kz)$ responsable del confinamiento atómico.

4.1. El Hamiltoniano

Como mencionamos en el capítulo anterior ecuación (3.15), el potencial responsable de atrapar a los átomos producido por un láser gaussiano viene dado por la expresión

$$V(\rho, z) = -V_0 e^{-\frac{2\rho^2}{w_0^2}} \cos^2(kz), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (4.1)$$

La parte exponencial del potencial es la responsable de mantener a las partículas atrapadas en la dirección radial del haz, mientras que la parte cosenoidal provoca el confinamiento en la dirección de propagación del láser. El potencial a lo largo del eje z es periódico, con mínimos locales distanciados por $\frac{\lambda}{2}$. Es en estos lugares donde las partículas se ven confinadas, ver Fig. (4.1).

Como sabemos, el efecto túnel, un fenómeno puramente cuántico, permite que las partículas confinadas tengan una probabilidad no nula de atravesar la barrera de potencial que las confina para llegar a una región donde su energía sea menor o igual a su energía anterior. Este fenómeno, combinado con la periodicidad del potencial, provoca que sólo ciertas regiones del espectro energético de la partícula sean permitidas.

Para poder tratar el problema analíticamente haremos una expansión a primer orden de la exponencial en (4.1) además, sustuiremos a la función coseno por otra función periódica con la almena como motivo, ver Fig. (4.2). Nuestro nuevo potencial es

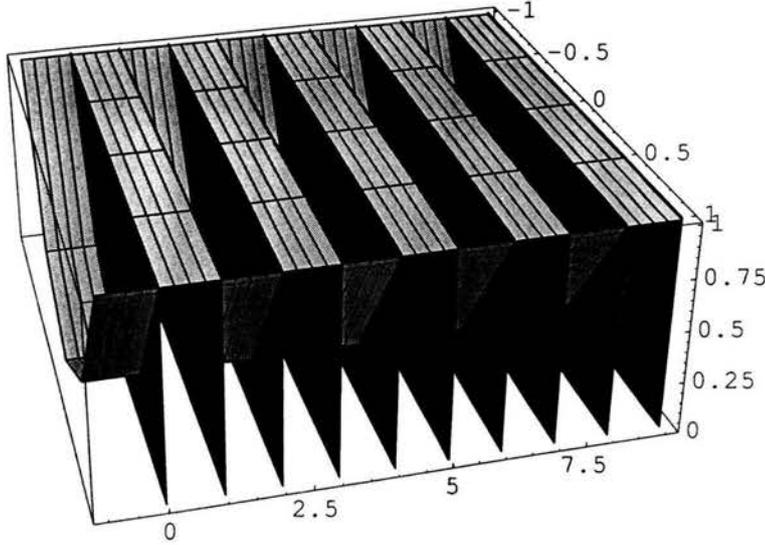


Figura 4.2: Gáfica del potencial aproximado

$$V(\rho, z) = \begin{cases} \frac{2V_0}{\omega_0^2} \rho^2, & \frac{\lambda}{8}(4i-1) \leq z < \frac{\lambda}{8}(4i+1) \\ V_0, & \frac{\lambda}{8}(4i+1) \leq z < \frac{3\lambda}{8}(4i+3) \end{cases}, \quad (4.2)$$

con $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Hay que notar que, para simplificar el tratamiento, el mínimo de energía ha sido desplazado una cantidad V_0 respecto al potencial (4.1) que, como sabemos, no afecta a la dinámica del sistema.

Existe otra aproximación similar a la nuestra que consiste en dejar la variación cosenoidal intacta y aproximar la variación gaussiana en ρ por un pozo de potencial. Hemos rechazado esta aproximación ya que la solución al potencial cosenoidal viene dada por funciones de mathie que presentan gran dificultad en su evaluación numérica.

El potencial anterior da lugar a un hamiltoniano que consta de dos partes; la primera es

$$H_1 = \frac{1}{2m} P_z^2 + \frac{1}{2m} P_{\rho\varphi}^2 + \frac{m\omega^2}{2} \rho^2, \quad (4.3)$$

con $\frac{m\omega^2}{2} = \frac{2V_0}{\omega_0^2}$. El segundo y tercer término a la derecha de la igualdad provocan el confinamiento radial de las partículas por medio de un potencial de oscilador armónico, el primer término corresponde al hamiltoniano de una partícula libre

en el eje z .

La segunda parte del hamiltoniano describe la barrera de potencial que separa a dos valles contiguos, sin embargo, ahora la partícula es libre de desplazarse en la dirección radial,

$$H_2 = \frac{1}{2m} P_{\rho\varphi}^2 + \frac{1}{2m} P_z^2 + V_0. \quad (4.4)$$

Como suponemos que los átomos están confinados, su energía E siempre será menor a V_0 , pudiendo escapar de la región de confinamiento sólo a través del efecto túnel.

4.2. Construcción de la Función de Onda

En la ecuación (4.3) vemos que el hamiltoniano H_1 describe dos movimientos independientes cuya solución conocemos: la partícula libre unidimensional y el oscilador armónico bidimensional. Ahora, como el hamiltoniano es separable, podemos escribir la función de onda como un producto de las eigenfunciones que son soluciones a cada una de las partes separables [12]. Además, debido a la linealidad de la ecuación de Schrödinger, sabemos que podemos formar una nueva solución al hacer una combinación lineal con las eigenfunciones de (4.3). Por lo tanto la solución general es

$$\Psi_1(\rho, \varphi, z) = \sum_{\mu, j=|\mu|, |\mu|+2, \dots} \alpha_{j,\mu} P_{\frac{1}{2}(j-|\mu|)}^{\mu}(\rho) \Phi_{\mu}(\varphi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g_{j,\mu}(k) e^{ikz} dk, \quad (4.5)$$

con $\alpha_{j,\mu}$ coeficientes constantes de la combinación lineal sujetas a la restricción $\sum |\alpha_{j,\mu}|^2 = 1$. Las dos primeras funciones corresponden a la solución del oscilador armónico bidimensional con $\Phi_{\mu}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\mu\varphi}$ y $P(\rho)$ una función de los polinomios de Laguerre (ver apéndice)

$$P_n^{\mu}(\rho) = \left(2\alpha \frac{n!}{(n+|\mu|)!} \right)^{\frac{1}{2}} (\sqrt{\alpha\rho})^{|\mu|} e^{-\frac{\alpha\rho^2}{2}} L_n^{|\mu|}(\alpha\rho^2), \quad (4.6)$$

la tercera función corresponde a una superposición de ondas planas que forman el paquete de onda libre de desplazarse sobre la dirección de propagación del láser. Como vemos se necesitan tres números cuánticos para especificar alguna eigenfunción; en las eigenfunciones del oscilador armónico j esta asociado al movimiento radial, m al movimiento alrededor del eje z y en las eigenfunciones de onda plana, k está asociada al movimiento a lo largo de z . Vale la pena recordar que, como se ve en la sumatoria, dado el índice μ los valores que el índice j puede tomar son $j = |\mu|, |\mu| + 2, |\mu| + 4, \dots$

Podemos usar el mismo razonamiento para encontrar las eigenfunciones del hamiltoniano H_2 (4.4). Por lo tanto, la función de onda en la dirección de propagación del haz (eje z) estará formada por una exponencial decreciente (función de z) que describe la probabilidad evanescente de que la partícula penetre una distancia z la barrera de potencial V_0 . En las dos direcciones restantes, la partícula se encuentra libre y su función de onda viene dada en términos de una superposición de ondas cilíndricas. Por las consideraciones anteriores llegamos a la siguiente solución para el hamiltoniano H_2

$$\Psi_2(\rho, \varphi, z) = \sum_{\omega} \beta_{\omega} \Phi_{\omega}(\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} g_{\omega}(k, \gamma) J_{\omega}(\gamma\rho) e^{-kz} \gamma^{\frac{1}{2}} d\gamma dk, \quad (4.7)$$

con β_{ω} constantes de la combinación lineal sujetas a la restricción $\sum |\beta_{\omega}|^2 = 1$. Análogamente a la ecuación anterior, los números cuánticos ω , γ y k están asociados al movimiento radial, al movimiento alrededor del eje z y al movimiento a lo largo del eje z . Hay que señalar que en general suponemos que k es un número complejo que nos permite cambiar el comportamiento exponencial decreciente dentro de la barrera ($E < V_0$) por un comportamiento oscilatorio fuera de ésta ($E > V_0$).

Para encontrar la solución de H hay que resolver la ecuación estacionaria de Schrödinger $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$, es decir, encontrar las eigenfunciones y los eigenvalores. Lo anterior nos indica que sólo debemos seleccionar los estados $|\Psi_1\rangle$ y $|\Psi_2\rangle$ tales que $H_1|\Psi_1\rangle = E|\Psi_1\rangle$ y $H_2|\Psi_2\rangle = E|\Psi_2\rangle$.

Para que los estados de H_1 satisfagan la condición anterior hay que solicitar que la energía de cada estado $\Psi_{1,j,\mu}$ perteneciente a la combinación lineal (4.5) sea igual a

$$E = E_{j,\mu} = E_{osc}(j, \mu) + E_z(j, k). \quad (4.8)$$

La energía del oscilador esta completamente definida para cada j , sin embargo la energía asociada al movimiento en z no lo está ya que la función de onda es una superposición de ondas planas. Como la energía del oscilador viene dada por $E_{osc} = \frac{\hbar^2}{2m}(2\alpha(j+1))$ y al sumarla con $E_z = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ debemos obtener E , los valores que k puede tomar para alguna j y para alguna E están restringidos a

$$k_j = \pm \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E - 2\alpha(j+1)}, \quad (4.9)$$

esto nos dice que $g(k)$ está formada por dos funciones delta centradas en k_j y $-k_j$ respectivamente. Introduciendo las funciones delta con coeficientes a y b en (4.5) encontramos la función de onda de H_1 con energía E

$$\Psi_1(\rho, \varphi, z) = \sum_{\mu, j=|\mu|, |\mu|+2, \dots} P_{\frac{1}{2}(j-|\mu|)}^{\mu}(\rho) \Phi_{\mu}(\varphi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (a_{j,\mu} e^{ik_j z} + b_{j,\mu} e^{-ik_j z}). \quad (4.10)$$

La función de onda en z está formada por dos ondas planas, una que se mueve a la izquierda y otra a la derecha con el mismo número de onda k_j .

Hay que hacer la misma restricción sobre las funciones base $\Psi_{2\omega}$ de (4.7). Esto nos lleva a la siguiente ecuación:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} g_{\omega}(k, \gamma) J_{\omega}(\gamma\rho) (\gamma^2 - k^2) e^{-kz} \gamma^{\frac{1}{2}} d\gamma dk = (E - V_0) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} g_{\omega}(k, \gamma) J_{\omega}(\gamma\rho) e^{-kz} \gamma^{\frac{1}{2}} d\gamma dk. \quad (4.11)$$

Para satisfacer la ecuación anterior γ y k deben estar relacionadas por

$$\gamma^2 - k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0). \quad (4.12)$$

De esta forma la integral que antes se realizaba en el semiplano $k\gamma$ ($\gamma > 0$) ahora se realiza en las dos ramas de la hipérbola (4.12) pertenecientes a éste. Implementando esta condición por medio de una función delta¹ obtenemos

$$\begin{aligned} \Psi_2(\rho, \varphi, z) = & \sum_{\omega} \beta_{\omega} \Phi_{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} g_{\omega}(k, \gamma) J_{\omega}(\gamma\rho) e^{-kz} \gamma^{\frac{1}{2}} \delta(\gamma^2 - k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)) d\gamma dk = \\ & \sum_{\omega} \beta_{\omega} \Phi_{\omega} \left(\int_0^{\infty} \frac{(g_{\omega}(\Delta, \gamma) e^{-\Delta z} + g_{\omega}(-\Delta, \gamma) e^{\Delta z}) J_{\omega}(\gamma\rho) \gamma^{\frac{1}{2}}}{\frac{\hbar^2}{m} \Delta} d\gamma \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

con Δ igual a

$$\Delta = \sqrt{\gamma^2 + \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}. \quad (4.14)$$

Por lo tanto, la función de onda solución para la n -ésima barrera es

$$\Psi_n(\rho, \varphi, z) = \begin{cases} \sum_{\mu, j=|\mu|} P_{\frac{j-|\mu|}{2}}^{\mu}(\rho) \Phi_{\mu}(\varphi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (a_{jn}^{\mu} e^{ik_j z} + b_{jn}^{\mu} e^{-ik_j z}), & l(4n-4) \leq z < l(4n-3) \\ \sum_{\omega} \beta_{\omega} \Phi_{\omega} \left(\int_0^{\infty} \frac{(g_{\omega}^{\omega}(\Delta, \gamma) e^{-\Delta z} + g_{\omega}^{\omega}(-\Delta, \gamma) e^{\Delta z}) J_{\omega}(\gamma\rho) \gamma^{\frac{1}{2}}}{\frac{\hbar^2}{m} \Delta} d\gamma \right), & l(4n-3) \leq z < l(4n-1) \\ \sum_{\eta, i=|\eta|} P_{\frac{i-|\eta|}{2}}^{\eta}(\rho) \Phi_{\eta}(\varphi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (c_{in}^{\eta} e^{ik_i z} + d_{in}^{\eta} e^{-ik_i z}), & l(4n-1) \leq z < l4n \end{cases} \quad (4.15)$$

¹Para llegar a la ecuación (4.13) hay que usar que $\delta(g(x)) = \sum_a \frac{\delta(x-a)}{|g'(a)|}$ con $g(a) = 0$ y $g'(a) \neq 0$

con $l = \frac{\lambda}{8}$.

En cada barrera de potencial tenemos dos discontinuidades, una en $l(4n-3)$ y otra en $l(4n-1)$, sin embargo estas discontinuidades no puede aparecer en la función de onda ya que, como sabemos, la función y su derivada deben ser continuas. Por ejemplo, en la primera discontinuidad ($z = l(4n-3)$) se deben cumplir las siguientes ecuaciones,

$$\lim_{z \rightarrow l(4n-3)} \Psi_n = \lim_{z \rightarrow l(4n-3)} \Psi_n, \quad (4.16)$$

$$\lim_{z \rightarrow l(4n-3)} \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} = \lim_{z \rightarrow l(4n-3)} \frac{\partial \Psi_n}{\partial z}. \quad (4.17)$$

La dirección de las flechas en los límites indica si se toman por la derecha o por la izquierda.

Las condiciones anteriores restringen los valores que las constantes a , b , c y d pueden tener en (4.15). También las mismas condiciones restringen la forma de la función g .

Al aplicar (4.16) y (4.17) a (4.15) obtenemos dos series de potencias en $e^{i\varphi}$ (provenientes de $\Phi_\mu(\varphi)$) igualadas a cero. Estas ecuaciones deben ser válidas para toda φ por lo que cada uno de los coeficientes en la serie de potencias debe ser igual a cero

$$\int_0^\infty \frac{(g_{+n}^\mu e^{-\Delta w} + g_{-n}^\mu e^{\Delta w}) J_\mu(\gamma \rho) \gamma^{\frac{1}{2}}}{\frac{\hbar^2}{m} \Delta} d\gamma - \sum_{j=|\mu|} P_{\frac{1}{2}(j-|\mu|)}^\mu(\rho) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (a_{jn}^\mu e^{ik_j w} + b_{jn}^\mu e^{-ik_j w}) = 0, \quad (4.18)$$

$$\int_0^\infty \frac{(-g_{+n}^\mu e^{-\Delta w} + g_{-n}^\mu e^{\Delta w}) J_\mu(\gamma \rho) \gamma^{\frac{1}{2}}}{\frac{\hbar^2}{m}} d\gamma - \sum_{j=|\mu|} P_{\frac{1}{2}(j-|\mu|)}^\mu(\rho) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ik_j (a_{jn}^\mu e^{ik_j w} - b_{jn}^\mu e^{-ik_j w}) = 0 \quad (4.19)$$

Para simplificar la notación hemos abreviado $g_n^\mu(\pm\Delta, \gamma)$ por $g_{\pm n}^\mu$ y hemos sustituido $l(4n-3)$ por w .

Para despejar estas ecuaciones y tener a g_\pm en términos de a y b podemos aprovechar la ortogonalidad de la función J ,

$$\int_0^\infty J_i(\gamma \rho) J_i(\gamma' \rho) \rho d\rho = \frac{1}{\gamma} \delta(\gamma - \gamma'). \quad (4.20)$$

por lo que si multiplicamos las igualdades (4.18) y (4.19) por $J_\mu(\gamma'\rho)\rho$ e integramos sobre ρ obtenemos

$$\begin{aligned} g_{n+}^\mu &= \frac{\hbar^2}{2m} e^{w\Delta} \sum_j \tilde{P}_{\frac{j-|\mu|}{2}}^\mu (a_{nj}^\mu e^{ik_j w} (\Delta - ik_j) + b_{nj}^\mu e^{-ik_j w} (\Delta + ik_j)) , \\ g_{n-}^\mu &= \frac{\hbar^2}{2m} e^{-w\Delta} \sum_j \tilde{P}_{\frac{j-|\mu|}{2}}^\mu (a_{nj}^\mu e^{ik_j w} (\Delta + ik_j) + b_{nj}^\mu e^{-ik_j w} (\Delta - ik_j)) , \end{aligned} \quad (4.21)$$

con

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{\frac{j-|\mu|}{2}}^\mu(\gamma) &= \\ \gamma^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty P_{\frac{j-|\mu|}{2}}^\mu(\rho) J_\mu(\gamma\rho) \rho d\rho &= (-1)^{\frac{1}{2}(j-|\mu|)} \frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{\alpha} P_{\frac{j-|\mu|}{2}}^\mu\left(\frac{\gamma}{\sqrt{\alpha}}\right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

De forma análoga obtenemos otras dos ecuaciones al aplicar las condiciones de continuidad en la función y en su derivada en $z = l(4n - 1)$, pero ahora, en vez de despejar a g_\pm en términos de c y d , despejaremos c y d en términos de g_\pm usando la ortogonalidad de P

$$\int_0^\infty P_{\frac{j-|\mu|}{2}}^\mu P_{\frac{i-|\mu|}{2}}^\mu \rho d\rho = \delta_{ij} , \quad (4.23)$$

obteniendo

$$\begin{aligned} c_{in}^\mu &= \frac{m}{\hbar^2} \frac{e^{-ik_i v}}{2} \left(\int_0^\infty g_{+n}^\mu \tilde{P}_{\frac{i-|\mu|}{2}}^\mu e^{-v\Delta} \left(\frac{1}{\Delta} + i \frac{1}{k_i} \right) d\gamma \right) + \\ &\quad \frac{m}{\hbar^2} \frac{e^{-ik_i v}}{2} \left(\int_0^\infty g_{-n}^\mu \tilde{P}_{\frac{i-|\mu|}{2}}^\mu e^{v\Delta} \left(\frac{1}{\Delta} - i \frac{1}{k_i} \right) d\gamma \right) , \\ d_{in}^\mu &= \frac{m}{\hbar^2} \frac{e^{ik_i v}}{2} \left(\int_0^\infty g_{+n}^\mu \tilde{P}_{\frac{i-|\mu|}{2}}^\mu e^{-v\Delta} \left(\frac{1}{\Delta} - i \frac{1}{k_i} \right) d\gamma \right) + \\ &\quad \frac{m}{\hbar^2} \frac{e^{ik_i v}}{2} \left(\int_0^\infty g_{-n}^\mu \tilde{P}_{\frac{i-|\mu|}{2}}^\mu e^{v\Delta} \left(\frac{1}{\Delta} + i \frac{1}{k_i} \right) d\gamma \right) , \end{aligned} \quad (4.24)$$

con $v = l(4n - 1)$. Al sustituir (4.20) en (4.23) obtenemos a c y d en función de a y b ,

$$\begin{aligned} c_{in}^\mu &= \sum_j a_{jn}^\mu e^{i(k_j w - k_i v)} \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{k_j}{k_i} \right) I_{ij}^{\prime\mu} - i \left(\frac{1}{k_i} I_{ij}^{\prime\prime\mu} - k_j I_{ij}^{\prime\prime\prime\mu} \right) \right) + \\ &\quad b_{jn}^\mu e^{-i(k_j w + k_i v)} \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{k_j}{k_i} \right) I_{ij}^{\prime\mu} - i \left(\frac{1}{k_i} I_{ij}^{\prime\prime\mu} + k_j I_{ij}^{\prime\prime\prime\mu} \right) \right) . \end{aligned}$$

$$d_{in}^{\mu} = \sum_j a_{jn}^{\mu} e^{i(k_j w + k_i v)} \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{k_j}{k_i}\right) I'_{ij}{}^{\mu} + i \left(\frac{1}{k_i} I''_{ij}{}^{\mu} + k_j I'''_{ij}{}^{\mu} \right) \right) + \\ b_{jn}^{\mu} e^{i(-k_j w + k_i v)} \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{k_j}{k_i}\right) I'_{ij}{}^{\mu} + i \left(\frac{1}{k_i} I''_{ij}{}^{\mu} - k_j I'''_{ij}{}^{\mu} \right) \right), \quad (4.25)$$

con

$$I'_{ij}{}^{\mu} = \int_0^{\infty} \tilde{P}_{\frac{1}{2}(j-|\mu|)}^{\mu} \tilde{P}_{\frac{1}{2}(i-|\mu|)}^{\mu} \cosh(\Delta 2l) d\gamma \\ I''_{ij}{}^{\mu} = \int_0^{\infty} \tilde{P}_{\frac{1}{2}(j-|\mu|)}^{\mu} \tilde{P}_{\frac{1}{2}(i-|\mu|)}^{\mu} \Delta \sinh(\Delta 2l) d\gamma \\ I'''_{ij}{}^{\mu} = \int_0^{\infty} \tilde{P}_{\frac{1}{2}(j-|\mu|)}^{\mu} \tilde{P}_{\frac{1}{2}(i-|\mu|)}^{\mu} \frac{\sinh(\Delta 2l)}{\Delta} d\gamma \quad (4.26)$$

4.3. Matriz de Transferencia

La función de onda (4.15) obtenida en la sección anterior es solución sólo de una de las barreras, la cual corresponde solamente a un sitio en la malla óptica. Sin embargo, las mallas producidas por los láseres en los laboratorios están formadas por cientos de sitios en los cuales los átomos pueden quedar atrapados. Por lo tanto, si queremos obtener una solución completa al problema lo mas sencillo es proponer la misma forma de la función de onda para cada sitio y acoplarlas por medio de las constantes de la combinación lineal para que en la unión de dos barreras se cumplan las condiciones de continuidad tanto de la función como de su derivada. Es decir

$$\lim_{z \rightarrow 4ln} \Psi_n = \lim_{z \rightarrow 4ln} \Psi_{n+1}, \quad (4.27)$$

$$\lim_{z \rightarrow 4ln} \frac{\partial \Psi_n}{\partial z} = \lim_{z \rightarrow 4ln} \frac{\partial \Psi_{n+1}}{\partial z}. \quad (4.28)$$

Esto nos lleva a concluir casi inmediatamente que

$$a_{in+1}^{\mu} = c_{in}^{\mu}, \\ b_{in+1}^{\mu} = d_{in}^{\mu}. \quad (4.29)$$

y podemos reescribir (4.25) como

$$\begin{pmatrix} a_{in+1}^{\mu} \\ b_{in+1}^{\mu} \end{pmatrix} = \sum_j \begin{pmatrix} e^{i(k_j w - k_i v)} \mathbf{w}_{ij}^{\mu} & e^{-i(k_j w + k_i v)} \mathbf{x}_{ij}^{\mu} \\ e^{i(k_j w + k_i v)} \mathbf{y}_{ij}^{\mu} & e^{-i(k_j w - k_i v)} \mathbf{z}_{ij}^{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{jn}^{\mu} \\ b_{jn}^{\mu} \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

donde \mathbf{w} , \mathbf{x} , \mathbf{y} y \mathbf{z} son sólo constantes que dependen de I y de k como lo podemos ver de las ecuaciones (4.25) y (4.28).

Cada una de las matrices en la suma se puede reescribir como el producto de tres matrices

$$\begin{pmatrix} e^{i(k_j w - k_i v)} \mathbf{w}_{ij} & e^{-i(k_j w + k_i v)} \mathbf{x}_{ij} \\ e^{i(k_j w + k_i v)} \mathbf{y}_{ij} & e^{-i(k_j w - k_i v)} \mathbf{z}_{ij} \end{pmatrix} = Iz(i)M(i, j)De(j), \quad (4.31)$$

siendo

$$Iz(i) = \begin{pmatrix} e^{-ik_i v} & 0 \\ 0 & e^{ik_i v} \end{pmatrix}, \quad M(i, j) = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{ij} & \mathbf{x}_{ij} \\ \mathbf{y}_{ij} & \mathbf{z}_{ij} \end{pmatrix}, \\ De(j) = \begin{pmatrix} e^{ik_j w} & 0 \\ 0 & e^{-ik_j w} \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

donde hemos obviado la dependencia en μ en la última ecuación. Ahora, si

$$A_{i(n+1)} = \begin{pmatrix} a_{i(n+1)} \\ b_{i(n+1)} \end{pmatrix}, \quad A_{jn} = \begin{pmatrix} a_{jn} \\ b_{jn} \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

podemos escribir (4.30) como

$$A_{i(n+1)} = \sum_j Iz(i)M(i, j)De(j)A_{jn}. \quad (4.34)$$

Al desarrollar la suma sobre j obtenemos

$$\begin{pmatrix} A_{|\mu|(n+1)} \\ A_{|\mu|+2(n+1)} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Iz_{|\mu|} & 0 & \dots \\ 0 & Iz_{|\mu|+2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{|\mu||\mu|} & M_{|\mu||\mu|+2} & \dots \\ M_{|\mu|+2|\mu|} & M_{|\mu|+2|\mu|+2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} De_{|\mu|} & 0 & \dots \\ 0 & De_{|\mu|+2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{|\mu|n} \\ A_{|\mu|+2n} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

y de una forma mas compacta

$$A_{n+1} = \mathbb{I}(n)\mathbb{M}\mathbb{D}(n)A_n. \quad (4.36)$$

\mathbb{M} es una matriz independiente de la barrera en donde nos encontremos, en cambio las componentes de \mathbb{I} y \mathbb{D} si dependen de la posición. Esto dificulta la

iteración de la matriz $\mathbb{I}\mathbb{M}\mathbb{D}$ para obtener los coeficientes A_{n+1} en términos de A_1 ya que la matriz no es única y en principio tendríamos que multiplicar entre si $n-1$ matrices distintas para obtener el resultado deseado. Sin embargo, notemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(n)\mathbb{I}(n-1) = & \\ & \begin{pmatrix} e^{ik_{|\mu|}w(n)} & 0 & \dots \\ 0 & e^{-ik_{|\mu|}w(n)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-ik_{|\mu|}v(n-1)} & 0 & \dots \\ 0 & e^{ik_{|\mu|}v(n-1)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} e^{ik_{|\mu|}(w(n)-v(n-1))} & 0 & \dots \\ 0 & e^{-ik_{|\mu|}(w(n)-v(n-1))} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (4.37) \end{aligned}$$

recordemos que $w(n) = l(4(n+1) - 3)$ y que $v(n-1) = l(4n - 1)$, entonces la resta es $w(n) - v(n-1) = 2l$. El resultado es independiente de n . Llamemos a la matriz $\mathbb{D}(n)\mathbb{I}(n-1)$ matriz \mathbb{R} que es independiente de la posición de la barrera.

Finalmente, iterando desde la primera hasta la n -ésima barrera y reacomodando términos obtenemos

$$\mathbb{D}(n+1)A_{n+1} = (\mathbb{R}\mathbb{M})^n \mathbb{D}(1)A_1. \quad (4.38)$$

A la matriz $\mathbb{R}\mathbb{M}$ se le llama matriz de transferencia ya que al ser iterada n veces nos da los coeficientes de la función de onda correspondiente a la barrera $n+1$ en términos de los coeficientes de la primer barrera. Su valor sólo depende de la energía, del ancho y del alto de la barrera de potencial.

Como podemos ver, todas las variables físicas de importancia en el problema se encuentran contenidas en la matriz de transferencia. Para comprender su importancia, cambiemos a la base de eigenvectores de tal forma que obtengamos una matriz diagonal y fijemos todos los parametros excepto la energía. Ahora supongamos que el estado inicial del sistema consiste de una combinación lineal normalizada de tres eigenvectores con eigenvalores $|\lambda_2| > 1$, $|\lambda_1| = 1$ y $|\lambda_3| < 1$ respectivamente

$$|\Psi(E)_1 \rangle = c(1)|\phi(E)_1 \rangle + c(2)|\phi(E)_2 \rangle + c(3)|\phi(E)_3 \rangle, \quad (4.39)$$

siendo $c(i)$ coeficientes tales que normalizan la combinación lineal. Después de pasar por una barrera (equivalente a la multiplicación por la matriz de transferencia), el vector de estado del sistema será

$$|\Psi(E)_2 \rangle = c(1)\lambda(E)_1|\phi(E)_1 \rangle + c(2)\lambda(E)_2|\phi(E)_2 \rangle + c(3)\lambda(E)_3|\phi(E)_3 \rangle. \quad (4.40)$$

Como podemos observar, el vector de estado ya no se encuentra normalizado, teniendo el mayor peso $|\phi(E)_2\rangle$ y $|\phi(E)_3\rangle$ el menor. Si ahora pasamos por otras $n - 1$ barreras, el vector de estado será

$$|\Psi(E)_n\rangle = c(1)\lambda(E)_1^n |\phi(E)_1\rangle + c(2)\lambda(E)_2^n |\phi(E)_2\rangle + c(3)\lambda(E)_3^n |\phi(E)_3\rangle \quad (4.41)$$

Observemos que el resultado de atravesar barreras sucesivamente es un cambio de fase y un cambio en los pesos relativos de las funciones componentes. Para n suficientemente grande tenemos

$$|\Psi(E)_n\rangle \sim c(2)\lambda(E)_2^n |\phi(E)_2\rangle \quad (4.42)$$

Podemos ver que el estado $|\phi(E)_2\rangle$ es en general un estado no normalizable. Recordemos que para medir cantidades físicas a partir de funciones de onda, necesitamos que éstas sean normalizables, por lo que los eigenestados cuyos eigenvalores tengan norma mayor a uno no se presentarán en la naturaleza.

Por la discusión anterior sólo debemos considerar el eigenvector formado por

$$|\Psi(E)_1\rangle = c(1)|\phi(E)_1\rangle + c(3)|\phi(E)_3\rangle \quad (4.43)$$

que al pasar por n barreras, para n suficientemente grande, resulta

$$|\Psi(E)_n\rangle \sim c(1)\lambda(E)_1^n |\phi(E)_1\rangle \quad (4.44)$$

La influencia del eigenvector con norma menor a uno ha desaparecido y el resultado de atravesar n barreras es un cambio de fase. Gracias a este sencillo ejemplo podemos ver que los estados que van a ser atrapados en el potencial serán aquellos que correspondan a un eigenvalor con norma unitaria en la matriz de transferencia.

En los párrafos anteriores supusimos que para cierta energía podíamos encontrar eigenvalores de la matriz de transferencia con normas mayores, iguales o menores a la unidad; esto es cierto para el problema unidimensional y las bandas surgen al buscar los rangos de energía para los cuales algunos de los eigenvalores de la matriz de transferencia tienen norma igual a la unidad. Como veremos en los resultados de la siguiente sección, todo lo anterior también será válido para un modelo tridimensional.

Capítulo 5

Resultados y Conclusiones

En el capítulo anterior se desarrolló el modelo de forma analítica hasta llegar a una expresión explícita para los coeficientes de la matriz de transferencia. El número de estos coeficientes es infinito (ya que el número de funciones base también lo es), esto dificulta, si no es que imposibilita, el cálculo de los eigenvalores por lo que se optó por suponer que cierto número de funciones base bastaban para representar ciertas regiones de las bandas permitidas.

La diagonalización, el cálculo de los eigenvalores y el cálculo de los eigenvectores para una base y un conjunto de parámetros dados, se realizó por medio de un programa escrito en código Fortran. En todos los cálculos siguientes la energía será un múltiplo de $\hbar\omega$ con ω la frecuencia característica asociada al potencial cuadrático de nuestro modelo.

Al calcular las primeras bandas se encontraron los eigenvalores de norma uno que se esperaban en una región en la parte mas externa del potencial. Cálculos consecutivos mostraron que existían mas bandas debajo de ésta pero que, al ser demasiado angostas, la resolución del programa (la precisión numérica) no era suficiente para poder discernir los eigenvalores de norma uno.

Una comparación entre el modelo unidimensional y el tridimensional mostró que el comienzo de las bandas tridimensionales estaba desfasado en aproximadamente una unidad de $\hbar\omega$ respecto del comienzo de las bandas del problema unidimensional. Ver Fig. (5.1)

El desfasamiento anterior se explica de la siguiente forma: Dentro de la región donde el potencial tiene la forma de un oscilador armónico bidimensional el valor mínimo de energía viene dado por $\hbar\omega$ así, en primera aproximación, todos los valores de la energía se verán desfasados en esta cantidad. El hecho de que el desfasamiento no coincida exactamente con el valor de $\hbar\omega$ indica que la energía asociada al movimiento en la dirección del láser no es independiente de la energía asociada al movimiento transversal a esta dirección, i.e. los movimientos se

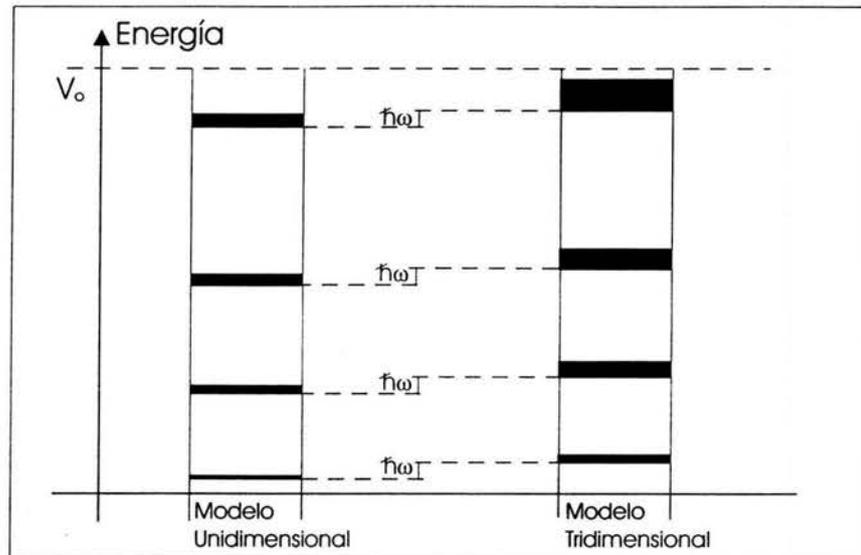


Figura 5.1: Comparación entre las bandas de energía en el modelo unidimensional y en el modelo tridimensional. La separación entre las bases de las bandas de los respectivos modelos es del orden de $\hbar\omega$

encuentran acoplados.

Dentro de cada banda se encontró una estructura fina. Ver Fig.(5.2). Cada banda consiste a su vez de bandas mas delgadas con un grosor y separación constante. Al conjunto de bandas que compartan una separación y ancho constante lo llamaremos banda de estructura primaria (bep) y a alguna banda que forme parte de alguna bep la llamaremos banda de estructura secundaria (bes). La Tabla (5.1) muestra las bandas obtenidas para distintos valores del potencial.

Obviamente, las bes son los rangos de energía en los cuales existen eigenvalores con norma idéntica a la unidad. Los eigenvectores de estos valores, nos muestran los coeficientes de la combinación lineal que debemos formar con nuestra base finita para que el modo asociado a esa energía pueda ser transmitido. Como veremos mas adelante el uso de una base finita en vez de una infinita es una buena aproximación para las bes que se encuentran en la parte inferior de cada bep

Típicamente dentro de una bes, la diagonalización de la matriz de transferencia arroja una pareja de eigenvalores, siendo uno complejo conjugado del otro y ambos con norma unitaria. Esta pareja de eigenvalores indica degeneración en el sistema ya que existen dos combinaciones lineales de la base (dos modos) que se transmiten con la misma energía. Esta degeneración era de esperarse ya que

| Altura V_0 | 1000.00 | 1500.00 | 2000.00 | 2500.00 | 3500.00 | 4000.00 | 5000.00 |
|--------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 ^o bes | 831.64 | 1262.58 | 1766.04 | 2339.77 | 3084.53 | 3809.47 | 4703.92 |
| | 832.36 | 1262.88 | 1766.37 | 2340.64 | 3084.59 | 3810.07 | 4704.10 |
| 2 ^o bes | 833.44 | 1264.38 | 1767.84 | 2341.51 | 3086.36 | 3811.24 | 4705.72 |
| | 834.13 | 1264.68 | 1768.17 | 2342.38 | 3086.42 | 3811.81 | 4705.90 |
| 3 ^o bes | 835.21 | 1266.21 | 1769.64 | 2343.25 | 3088.19 | 3812.98 | 4707.52 |
| | 835.90 | 1266.51 | 1769.97 | 2343.12 | 3088.28 | 3813.58 | 4707.73 |
| 4 ^o bes | 837.01 | 1266.63 | 1770.09 | 2345.02 | 3090.08 | 3814.09 | 4709.35 |
| | 837.67 | 1266.72 | 1770.18 | 2345.86 | 3090.17 | 3814.27 | 4709.68 |

Cuadro 5.1: En esta tabla se muestra en cada columna la posición de las primeras bes en las últimas beps para distintos tamaños del potencial. Para cada línea, el primer renglón muestra el comienzo de la banda y el segundo el término de ésta con un error de $\pm 0,03$. Todos los cálculos se realizaron con una separación entre barreras igual a $l_0 = 0,1645$ y una base de 40 eigenfunciones

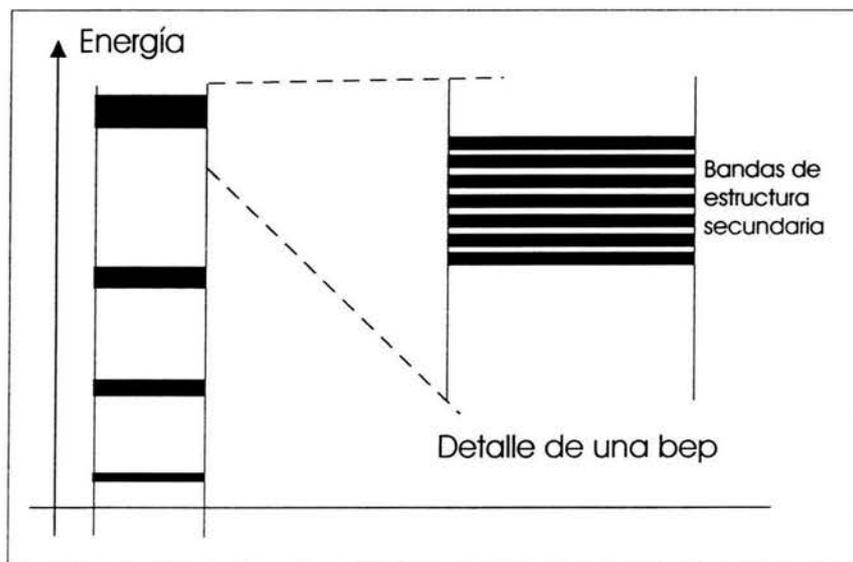


Figura 5.2: Amplificación de las bandas de energía permitidas. Como se puede ver, cada banda tiene a su vez una estructura fina. La separación entre las bandas y su anchura es constante.

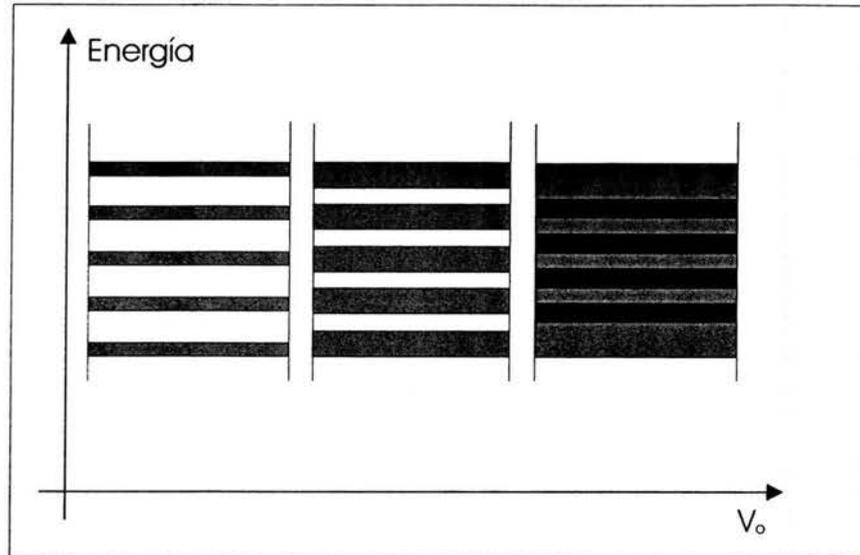


Figura 5.3: Traslape de las bes. Conforme aumentamos el tamaño de la barrera de potencial V_0 encontramos regiones donde el movimiento longitudinal y transversal respecto a la dirección del laser se acoplan fuertemente y provocan el ensanchamiento de las bes.

un modo se puede transmitir en dos sentidos: a la derecha o a la izquierda. La conclusión anterior se sustenta en que las entradas de un eigenvector son iguales a las entradas complejo-conjugadas del otro eigenvector.

Al fijar todos los parámetros excepto la altura de la barrera de potencial encontramos ciertos tamaños para los cuales los movimientos en la dirección del láser y en la dirección transversal se encuentran fuertemente acoplados. Esto se refleja en el ancho de las bes, traslapándose entre ellas en los casos más extremos. Como cada bes mantiene la misma anchura y separación entre ellas, llega un momento en que parece que la bes no tiene una estructura más fina y aparece como una sola banda. Ver Fig.(5.3)

La pareja de eigenvalores que se encuentra en cada bes sigue cierta trayectoria en el plano complejo al ir avanzando dentro de la banda. Si evaluamos a la pareja de eigenvalores en la parte inferior de alguna bes, encontramos que estos son iguales y se encuentran en el eje real positivo, conforme subimos por la banda, uno de los eigenvalores sigue la trayectoria de un semicírculo por encima de la recta real y el otro sigue la trayectoria complementaria coincidiendo, nuevamente, al llegar al final de la banda en la parte negativa de la recta real. Obviamente, el radio del círculo es uno. Ver Fig.(5.4)

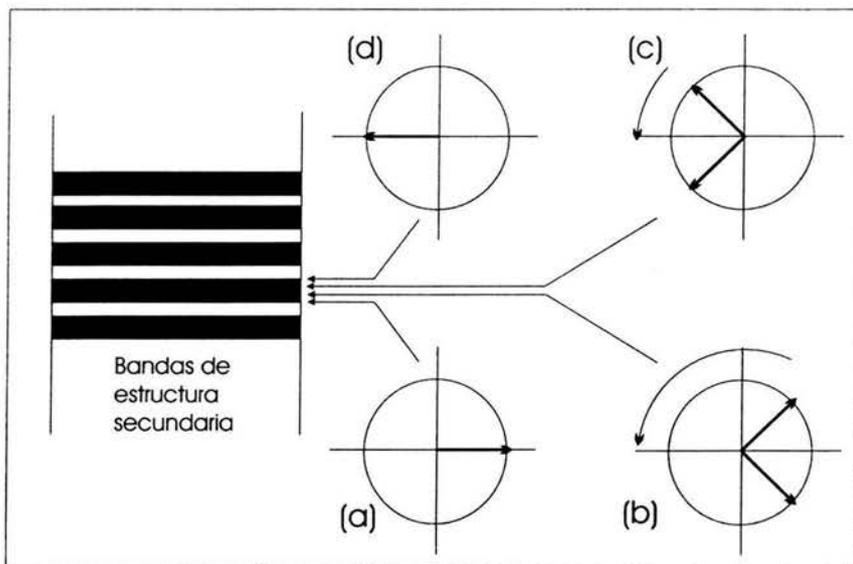


Figura 5.4: Los eigenvalores de la matriz de transferencia siguen una orbita bien definida a traves de las bes. a) En la base de la banda, ambos eigenvalores estan degenerados y se encuentran en la recta real; b) y c) al ir avanzando por la banda, los eigenvalores giran dibujando un círculo de radio unitario, uno de ellos traza el semicirculo superior y el otro el inferior; d) finalmente ambos eigenvalores se vuelven a encontrar en la semirecta real negativa.

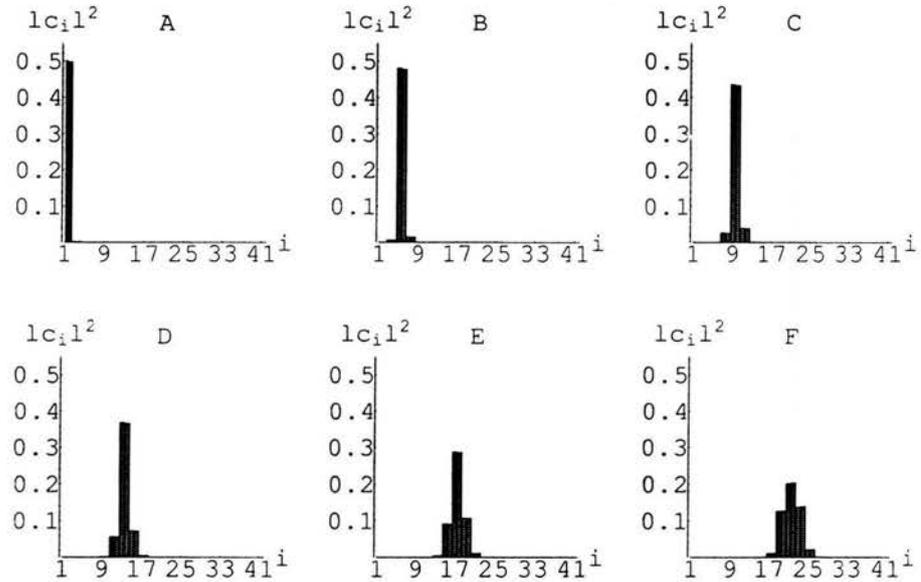


Figura 5.5: Diagramas que presentan la norma de los coeficientes de la combinación lineal de funciones de onda base que participan en un modo que se puede transmitir. Los diagramas muestran distintas bes todas pertenecientes a la última bep pero difiriendo en dos bes respecto a la bes anterior comenzando por la bes base (A). Los cálculos fueron realizados ocupando los siguientes parámetros: $V_0 = 1000$, $l_0 = 0,1645$ y una base de 40 eigenfunciones.

Como sabemos los modos que se transmiten están formados por combinaciones lineales particulares de funciones base. Al estudiar los coeficientes de estas combinaciones para las distintas bes encontramos que, para una bep, el número de funciones base que se necesitan para transferir un modo perteneciente a una bes aumenta conforme aumentamos en energía, e. g. la bes con energía mas baja (bes base) en alguna bep estará formada por la combinación lineal de solo dos funciones, la segunda bes de la misma bep estará formada por una combinación de tres funciones, la tercera bes estará formada por una combinación de cinco funciones y así sucesivamente. Las Figs. (5.5) y (5.6) aclararán el punto ya que muestran las normas de los coeficiente de las bes que aumentan consecutivamente en energía en una misma bep.

En este trabajo se ha mostrado como un modelo de malla tridimensional arroja una mayor riqueza en la estructura de bandas de energía pertenecientes a esta. Podemos decir lo anterior en general ya que, aunque sólo se analizaron las bandas mas externas por cuestiones de precisión numérica, existe fuerte eviden-

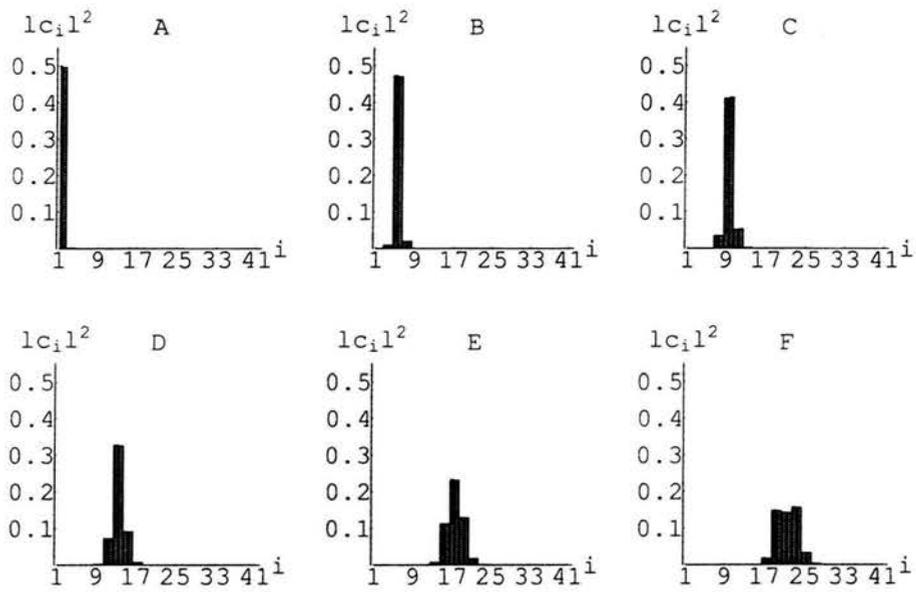


Figura 5.6: Estos diagramas muestran los mismos coeficientes que en los diagramas anteriores pero para los siguientes parámetros: $V_0 = 2500$, $l_0 = 0,1645$ y una base de 40 eigenfunciones.

cia de que el comportamiento de las bandas en general es el mismo a cualquier nivel del potencial variando sólo el ancho de las bandas, cuyo grosor aumenta entre cada bep siendo mas gruesas las bes pertenecientes a las bep's mas externas del potencial.

Gracias al modelo pudimos apreciar que, aunque siendo relativamente simple, la energía total del sistema no es simplemente la suma de la energía correspondiente al movimiento paralelo a la dirección del láser y la energía correspondiente al movimiento ortogonal a este. Si lo anterior hubiera sido cierto, entonces la energía de las bandas sería igual a la energía de la banda del modelo unidimensional mas $\hbar\omega$ veces la energía del oscilador dependiendo de su estado de excitación. Por lo tanto, la no aditividad de las energías traslacionales es señal clara de que los estados correspondientes a los movimientos ortogonales se encuentran fuertemente acoplados.

Apéndice A

El Oscilador Cuántico en Coordenadas Polares

Supongamos que tenemos una partícula en el plano confinada por un potencial cuadrático en la coordenada radial de la forma

$$V = \frac{m\omega^2}{2}\rho^2, \quad (\text{A.1})$$

con m la masa y ω la frecuencia de oscilación. Este potencial da lugar al siguiente hamiltoniano

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{m\omega^2}{2}\rho^2, \quad (\text{A.2})$$

ó

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\Psi + \frac{m\omega^2}{2}\rho^2\Psi = E\Psi, \quad (\text{A.3})$$

siendo Ψ la función de onda con energía E .

Para resolver la ecuación diferencial, supongamos que Ψ es el producto de dos funciones $P(\rho)$ y $\Phi(\phi)$, sustituyendo en A.3 obtenemos

$$\rho^2\left(-\frac{1}{\rho P}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial P}{\partial\rho}\right) + \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2\rho^2 - \frac{2m}{\hbar^2}E\right) = \frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}. \quad (\text{A.4})$$

Como vemos, en la última ecuación hemos separado las variables. La parte izquierda de la igualdad sólo depende de ρ y la derecha de φ . Si deriváramos nuevamente con respecto a ρ o a ϕ , alguno de los dos lados de la ecuación sería cero. Por lo tanto podemos igualar cada lado a una constante a la que llamaremos μ

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \mu^2\Phi = 0 \quad (\text{A.5})$$

54 APÉNDICE A. EL OSCILADOR CUÁNTICO EN COORDENADAS POLARES

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dP}{d\rho} \right) + \left(\frac{2m}{\hbar^2} E - \frac{\mu^2}{\rho^2} - \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^2 \rho^2 \right) P = 0 \quad (\text{A.6})$$

La primera de éstas ecuaciones tiene una solución trivial que normalizada es

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\mu\varphi}, \quad \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{A.7})$$

La restricción sobre los valores de μ proviene de que sólo de esta forma la función Φ tiene el mismo valor para $\varphi = 0$ y para $\varphi = 2\pi$ (o sus múltiplos), que corresponde a la misma dirección espacial.

Antes de resolver la ecuación (A.6), estudiemos su comportamiento asintótico para valores grandes de ρ , en esta región se convierte aproximadamente en

$$\frac{d^2 P}{d\rho^2} - \alpha^2 \rho^2 P = 0, \quad \alpha = \frac{m\omega}{\hbar}. \quad (\text{A.8})$$

La función $e^{\pm \frac{\alpha}{2} \rho^2}$ satisface la ecuación

$$\frac{d^2 e^{\pm \frac{\alpha}{2} \rho^2}}{d\rho^2} - (\alpha^2 \rho^2 \pm \alpha) e^{\pm \frac{\alpha}{2} \rho^2} = 0 \quad (\text{A.9})$$

que se reduce a (A.8) en la región que nos interesa. Obviamente sólo nos interesa la solución que decae ya que la otra no es normalizable y, por lo tanto, no es aceptable como función de onda.

Ahora hagamos la sustitución

$$P(\rho) = e^{-\frac{\alpha}{2} \rho^2} f(\rho) \quad (\text{A.10})$$

en la ecuación (A.6) para obtener

$$f'' + \left(\frac{1}{\rho} - 2\alpha\rho \right) f' + \left(E' - 2\alpha - \frac{\mu^2}{\rho^2} \right) f = 0, \quad E' = \frac{2m}{\hbar^2} E. \quad (\text{A.11})$$

Además, si hacemos el cambio de variable $\xi = \sqrt{\alpha}\rho$ y $f(\rho)$ por $F(\xi)$ encontramos

$$F'' + \left(\frac{1}{\xi} - 2\xi \right) F' + \left(\frac{E'}{\alpha} - 2 - \frac{\mu^2}{\xi^2} \right) F = 0. \quad (\text{A.12})$$

Para resolver esta ecuación recurrimos al método de Frobenius

$$F(\xi) = \xi^s \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \xi^{\nu} = a_0 \xi^s + a_1 \xi^{s+1} + \dots, \quad (\text{A.13})$$

donde s es un parámetro indeterminado y a_0 es distinta de cero. Al sustituir esta serie de potencias en (A.12) y agrupar los coeficientes de potencias iguales de ξ obtenemos

$$\begin{aligned}
& (s^2 - \mu^2)a_0\xi^{s-2} + ((s+1)^2 - \mu^2)a_1\xi^{s-1} \\
& + \left[((s+2)^2 - \mu^2)a_2 + \left(\frac{E'}{\alpha} - 2(s+1)\right)a_0 \right] \xi^s + \dots \\
& + \left[((s+\nu)^2 - \mu^2)a_\nu + \left(\frac{E'}{\alpha} - 2(s+\nu-1)\right)a_{\nu-2} \right] \xi^{s+\nu-2} \\
& + \dots = 0. \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

Como esto es una identidad en potencias de ξ , es decir, una ecuación que es cierta para cualquier valor que las potencias de ésta variable puedan tomar, cada coeficiente debe ser cero

$$(s^2 - \mu^2)a_0 = 0, \quad (\text{A.15})$$

$$((s+1)^2 - \mu^2)a_1 = 0, \quad (\text{A.16})$$

...

$$((s+\nu)^2 - \mu^2)a_\nu + \left(\frac{E'}{\alpha} - 2(s+\nu-1)\right)a_{\nu-2} = 0. \quad (\text{A.17})$$

Para que se cumpla la primera igualdad s debe ser $+\mu$ o $-\mu$ (a_0 no puede ser cero). Para obtener una solución que no sea singular en el origen, s debe ser positiva, por lo que escogemos el valor $s = +|\mu|$. Sustituyendolo en la segunda igualdad llegamos a la conclusión de que a_1 debe ser cero. Como la relación general (A.17) conecta coeficientes cuyos subíndices difieren en dos unidades, todos los coeficientes impares son cero. Sin embargo, como en el caso del oscilador armónico unidimensional, la serie infinita crece a medida que ξ crece sin límite. Para obtener una función de onda aceptable, necesitamos cortar la serie en algún término n par. Si sustituimos en la ecuación (A.17) a ν por $2n+2$ e igualamos el coeficiente de a_{2n} a cero obtenemos

$$E' = 2\alpha(|\mu| + 2n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (\text{A.18})$$

o si definimos $j = 2n + |\mu|$,

$$E = \hbar\omega(j + 1). \quad (\text{A.19})$$

Nuevamente, como en el caso unidimensional, vemos que la energía del estado base es distinta de cero y que la separación entre dos niveles de energía próximos es constante.

Si sustituimos a F por $\xi^{|\mu|}L(\xi^2)$ en (A.12) obtenemos

$$\xi^2 L''(\xi^2) + (|\mu| + 1 - \xi^2)L'(\xi^2) + \left(\frac{E'}{4\alpha} - \frac{1}{2} - \frac{|\mu|}{2}\right)L(\xi^2) = 0 \quad (\text{A.20})$$

y comparando con la ecuación que satisfacen los polinomios de Laguerre

$$xL_n^k''(x) + (k+1-x)L_n^k'(x) + nL_n^k(x) = 0, \quad (\text{A.21})$$

encontramos que la ecuación de onda del sistema para n y μ dadas es

$$\Psi_n^\mu(\rho, \varphi) = P_n^\mu(\rho)\Phi_\mu(\varphi) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}} e^{i\mu\varphi} (\sqrt{\alpha\rho})^{|\mu|} e^{-\frac{\alpha\rho^2}{2}} L_n^{|\mu|}(\alpha\rho^2). \quad (\text{A.22})$$

N es una constante de normalización, su valor se encuentra al resolver la integral

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \Psi_n^{\mu*} \Psi_n^\mu \rho d\rho d\varphi \quad (\text{A.23})$$

cuyo valor debe ser igual a uno, para que esto suceda N debe ser igual a

$$N = \left(2\alpha \frac{n!}{(n+|\mu|)!}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.24})$$

Por lo tanto, debido a la linealidad de la ecuación de Schrödinger, la solución mas general viene dada por

$$\begin{aligned} \Psi(\rho, \varphi) &= \sum_{j,\mu} a_j^\mu \Psi_j^\mu(\rho, \varphi) = \\ &= \sum_{j,\mu} \frac{a_j^\mu}{\sqrt{2\pi}} \left(2\alpha \frac{[\frac{1}{2}(j-|\mu|)!]}{[\frac{1}{2}(j+|\mu|)!]}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\mu\varphi} (\sqrt{\alpha\rho})^{|\mu|} e^{-\frac{\alpha\rho^2}{2}} L_{\frac{1}{2}(j-|\mu|)}^{|\mu|}(\alpha\rho^2), \quad (\text{A.25}) \end{aligned}$$

donde a_j^μ son constantes y $j = 2n + |\mu|$.

Apéndice B

Programa Computacional

A continuación se presenta el código en FORTRAN que se usó para calcular los eigenvalores y los eigenvectores de la matriz de transmisión en las últimas bandas de energía. Para algunas subrutinas es necesario tener instalado el IMLS Library ya que éstas no fueron definidas dentro del programa llamándolas de forma externa.

```
Module Constants
Implicit None
Save

Real*8, Parameter :: alpha = 1.DO, hw = 1.DO
Real*8 :: E, Vo, lo, lb

End Module Constants

!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
Module IntegrationIndexes
Implicit None
Save

Integer :: i, j, index

End Module IntegrationIndexes

!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
Module FactorialFunction
Implicit None

Contains
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
Real*8 Function LogFact(n)
```

```

Implicit None

!Función que calcula el logaritmo del factorial de n
!Faltan flags para argumentos reales

Integer, Intent(In) :: n
Integer :: k

If (n < 0) Then
Print*, 'LogFact:The argument is a negative number'
Stop
Else If (n == 0) Then
LogFact = 0.D0
Else
LogFact = 0.D0
Do k=1, n
LogFact = Log(DFloat(k))+LogFact
End Do
End If

End Function LogFact

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
Real*8 Function DIntBode(x1,x2,n,Func)
Implicit None

Integer, Intent(In) :: n
Real*8, Intent(In) :: x1,x2
Real*8, External :: Func
Integer :: i,m
Real*8 :: h

m = 4*n
h = (x2-x1)/m
DIntBode = 0.D0

Do i=1, Int(m/4)
DIntBode = DIntBode + 2*h*(7*Func(x1+h*(4*i-4))+32*Func(x1+h*(4*i-3))+
12*Func(x1+h*(4*i-2))+32*Func(x1+h*(4*i-1))+7*Func(x1+h*4*i))/45
End Do

End Function DIntBode
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
End Module FactorialFunction

!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
Module ALaguerrePolynomial
Use FactorialFunction
Implicit None

```

```

Contains
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
Function ALaguerreCoef(j)
Implicit None

!Cálculo de los coeficientes del polinomio de Laguerre asociado
!ALaguerreCoef(out) : arreglo que contiene los en+1 coeficientes

Integer, Intent(In) :: j
Integer :: l
Real*8, Dimension(j+1) :: ALaguerreCoef

Do l=0, j
ALaguerreCoef(l+1) = ((-1)**l)*(Exp(LogFact(j) - LogFact(j-1))
- 2*LogFact(l))
End Do

End Function ALaguerreCoef

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
Real*8 Function ALaguerrePol(coef, x)
Implicit None

!Función que calcula el valor del polinomio de Laguerre
!coef(in) : Arreglo que contiene los coeficientes del polinomio
!x(in) : punto en el cual se calcula el valor del polinomio

Integer :: k, n
Real*8, Intent(In) :: x
Real*8, Dimension(:), Intent(In):: coef

n = Size(coef)-1
ALaguerrePol = 0.D0

Do k=0, n
ALaguerrePol = ALaguerrePol + coef(k+1)*(x**k)
End Do

End Function ALaguerrePol
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
End Module ALaguerrePolynomial

!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
Module Miscellaneous
Use Constants
Use ALaguerrePolynomial
Implicit None

Contains
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

```

```

Complex*16 Function Kn2(j)
Implicit None

!Energía de la partícula en la dirección z para una E y una n dadas

Integer, Intent(In) :: j

Kn2 = Sqrt(Cmplx(2*alpha*(E/hw-(j+1))))

End Function Kn2

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
Real*8 Function Delta(x)
Implicit None

!Energía de la partícula en la dirección z para una E y una gama(x) dadas

Real*8, Intent(In) :: x

Delta = Sqrt(x**2 + 2*alpha*(Vo - E)/hw)

End Function Delta

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
Real*8 Function Integrando(x, i, j, index)
Implicit None

!Valor de cualquiera de los tres distintos integrandos que involucran
!la multiplicación de dos eigenfunciones del oscilador transformadas.
!x(in) : punto donde se evalúa el valor de la función

Integer, Intent(In) :: i, j, index
Real*8, Intent(In) :: x
Integer :: jj, ii
Real*8 :: Ker, delta0

jj = j/2
ii = i/2

delta0 = 2*lb*Sqrt(2*alpha*(Vo - E)/hw)

Ker = ((-1)**(jj+ii))*2*(x/alpha)*ALaguerrePol(ALaguerreCoef(jj),x**2)*
ALaguerrePol(ALaguerreCoef(ii),x**2)

If (index.EQ.1) Then
Integrando = Ker*(Exp(2*lb*Delta(x)-x**2-delta0) +
Exp(-2*lb*Delta(x)-x**2-delta0))/2
Else If (index.EQ.2) Then
Integrando = Ker*(Exp(2*lb*Delta(x)-x**2-delta0) -
Exp(-2*lb*Delta(x)-x**2-delta0))*Delta(x)/2

```

```

Else
  Integrando = Ker*(Exp(2*lb*Delta(x)-x**2-delta0) -
  Exp(-2*lb*Delta(x)-x**2-delta0))/(2*Delta(x))
EndIf

End Function Integrando
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
End Module Miscellaneous

!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
Module IntegralFunOsc
Use IntegrationIndexes
Use Miscellaneous
Implicit None

Contains
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
Real*8 Function DummyI(x)
Implicit None

!Función con valor idéntico al de Integrando pero con sólo un argumento

Real*8, Intent(In) :: x

DummyI = Integrando(x, i, j, index)

End Function DummyI
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
End Module IntegralFunOsc

!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
Module Matrices
Use IntegralFunOsc
Use IntegrationIndexes
Implicit None

Contains
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
Function MI(n)
Implicit None

Integer, Intent(In) :: n
Integer :: ej, ei, k
Real*8, Dimension(n,n,3) :: MI
Real*8 :: intgr1

Do ei = 0, 2*(n-1), 2
Do ej = 0, ei, 2
Do k=1, 3
i = ei

```

```

j = ej
index = k
intgr1 = DIntBode(0.DO, 20.DO, 750, DummyI)
MI(ei/2 + 1, ej/2 + 1, k) = intgr1
MI(ej/2 + 1, ei/2 + 1, k) = intgr1
End Do
End Do
End Do

End Function MI
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Function MC(n,MatInt)
Implicit None

Integer, Intent(In) :: n
Integer :: ej, ei
Real*8 :: I1, I2, I3
Real*8, Dimension(n,n,3), Intent(In) :: MatInt
Complex*16 :: Im, ki, kj
Complex*16, Dimension(2*n,2*n) :: MC

Im = (0,1)

Do ei = 0, 2*(n-1), 2
Do ej = 0, 2*(n-1), 2
ki = Kn2(ei)
kj = Kn2(ej)
I1 = MatInt(ei/2+1,ej/2+1,1)
I2 = MatInt(ei/2+1,ej/2+1,2)
I3 = MatInt(ei/2+1,ej/2+1,3)
MC(ei+1,ej+1) = ((1 + kj/ki)*I1 - Im*(I2/ki - kj*I3))/2
MC(ei+2,ej+1) = ((1 - kj/ki)*I1 + Im*(I2/ki + kj*I3))/2
MC(ei+1,ej+2) = ((1 - kj/ki)*I1 - Im*(I2/ki + kj*I3))/2
MC(ei+2,ej+2) = ((1 + kj/ki)*I1 + Im*(I2/ki - kj*I3))/2
End Do
End Do

End Function MC

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

Function MF(n)
Implicit None

Integer, Intent(In) :: n
Integer :: ii
Complex*16 :: Im
Complex*16, Dimension(2*n,2*n) :: MF

Im = (0,1)

```

```

MF = DCmplx(0)

Do ii=0, 2*(n-1), 2
MF(ii+1,ii+1) = Exp(Im*Kn2(ii)*2*lo)
MF(ii+2,ii+2) = Exp(-Im*Kn2(ii)*2*lo)
End Do

End Function MF
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
End Module Matrices

!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
Module Eigen
Use Matrices
Implicit None

Contains
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
Subroutine EigenValor(losc, lbarr, Eo, Voo, n, eigenvec, eigenmatrix)
Implicit None

Integer, Intent(In) :: n
Real*8, Intent(In) :: losc, lbarr, Eo, Voo
Complex*16, Dimension(2*n), Intent(Out) :: eigenvec
Complex*16, Dimension(2*n) :: vectval
Complex*16, Dimension(2*n,2*n), Intent(Out) :: eigenmatrix
Real*8 :: delta0

LO = losc
lb = lbarr
E = Eo
Vo = Voo

delta0 = Exp(2*lb*sqrt(2*alpha*(Vo-E)/hw))

Call DEVCCG(2*n,MatMul(MF(n),MC(n,MI(n))),2*n,vectval,eigenmatrix,2*n)

eigenvec = delta0*vectval

End Subroutine EigenValor
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
End Module Eigen

!CCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCCC
Program Programa
Use NumericalLibraries
Use Eigen
Implicit None

```

!El programa inicializa las variables n y m y evalúa los eigenvalores
!de la matriz de transferencia para distintos valores de la energía.

```

Integer, Parameter :: n = 32
Integer :: ii, jj, kk
Real*8 :: norma, Vn, En, losc, lbarr, normauno, normauno
Complex*16, Dimension(2*n) :: eigenvec
Complex*16, Dimension(2*n, 2*n) :: eigenmatrix

Open (Unit=3, File='Spectrum,Vn=2500,E=2368.0,n=32.txt', Status = 'Unknown',
Form = 'Formatted')

Vn = 2500.D0
En = 2368.0D0
lbarr = 0.1645D0
losc = lbarr

Do ii=1, 1

!En = En + 5.D-2
Print*, En
Write (Unit=3, Fmt=14) n, 'E = ', En
14 Format(I3, 3X, A5, F14.8)
Call EigenValor(losc, lbarr, En, Vn, n, eigenvec, eigenmatrix)

Do jj=1, 2*n
norma = Sqrt(Real(eigenvec(jj))**2 + Aimag(eigenvec(jj))**2)
!Write (Unit=3, Fmt = 15) norma, Real(eigenvec(jj)), Aimag(eigenvec(jj)) !15
Format(3F16.3)
If ((norma<=(1.1D0)).AND.(norma>=0.9D0)) Then
normauno = 0.D0
Do kk=1, 2*n
!normauno = Real(eigenmatrix(kk,jj))**2 + Aimag(eigenmatrix(kk,jj))**2 + normauno
normacomp = Sqrt(Real(eigenmatrix(kk,jj))**2 + Aimag(eigenmatrix(kk,jj))**2)
Write(Unit=3, Fmt=30) normacomp !, Real(eigenmatrix(kk,jj)), Aimag(eigenmatrix(kk,jj))
30 Format(3F8.5)
EndDo
!Print*, "norma", Sqrt(normauno)
!Pause
Stop
EndIf
End Do
End Do

EndFile 3
Stop
End Program Programa

```

Bibliografía

- [1] V.I. Balykin, V.G. Minogin y V.S. Letokhov, *Electromagnetic trapping of cold atoms*, Rep. Prog. Phys. Vol. 63, 2000, pp. 1429-1510.
- [2] C. Cohen-Tannoudji y W.D. Phillips, *New Mechanisms for laser cooling*, Phys. Today, Vol. 43, 1990.
- [3] T.W. Hänsch y A.L. Schawlow, *Cooling of gases by laser radiation*, Optics Communications, Vol. 13, No. 1, 1975, pp. 68-69.
- [4] P.S. Jessen y I.H. Deutsch, *Optical Lattices*, Advances in atomic, molecular and optical physics, Vol. 37, Academic Press, Cambridge, 1996.
- [5] D.R. Meacher, *Optical lattices-crystalline structures bound by light*, Contemporary Physics, Vol. 39, No. 5, 1998, pp. 329-350.
- [6] C. Monroe, *Shaping atoms in optical lattices*, Nature, Vol. 388, 1997, pp. 719-720.
- [7] M.O. Scully y M.S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997
- [8] J. Dalibard y C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients: Simple theoretical models*, J. Opt. Soc. Am., Vol. B6, No. 11, 1989, pp. 2023-2045.
- [9] J.D. Miller, R.A. Cline y D.J. Heinzen, *Far-off-resonance optical trapping of atoms*, Vol. 47, No. 6, 1992, pp. 4567-4570.
- [10] *Latin-American school of physics*, edited by S. Hacyan, R. Jáuregui y R. López-Peña, American Institute of Physics, New York, 1999.
- [11] R. Jáuregui, N. Poli, G. Roati y G. Modugno, *Anharmonic parametric excitation in optical lattices*, Physical Review A, Vol. 64, 033403, 2001.
- [12] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y F. Lalë, *Quantum Mechanics*, Wiley-Interscience, New York, 1977.
- [13] W. H. Louisell. *Quantum Statistical Properties of Radiation*. Wiley-Interscience, New York, reprint edition, 1990.

- [14] J.P. Gordon y A. Ashkin, *Motion of atoms in a radiation trap*, Physical Review A, Vol. 21, No. 5, 1980, pp. 1606-1617.
- [15] T.A. Savard, K.M. O'Hara y J.E. Thomas, *Laser-noise-induced heating in far off resonance optical traps*, Physical Review A, Vol. 56, No. 2, 1997, pp. 1095-1098.
- [16] G. Roati, W. Jastrzebski, A. Simoni, G. Modugno y M. Inguscio, *Optical trapping of cold fermionic potassium for collisional studies*, Physical Review A, Vol. 63, 052709, 2001.
- [17] T.M.R. Ellis, I.R. Phillips y T.M. Lahey, *FORTRAN 90 Programming*, Addison-Wesley, Harlow, England, 1994.
- [18] F.L. Friedman y E.B. Koffman, *FORTRAN*, Fondo Educativo Interamericano, México, 1984.
- [19] G. Grätzer, *Math into LATEX*, Birkhäuser, Boston, 2000.
- [20] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics*, Wiley, New York, 1970.
- [21] *Handbook of mathematical functions*, edited by M. Abramowitz and I. A. Stegun, Dover Publications, New York, 1965.