

01176



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**MODELADO Y SIMULACION MATEMATICO COMPUTACIONAL  
DE TRAYECTORIAS DE GRUAS DE PORTICO PARA  
CONTENEDORES.**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:**

**MAESTRO EN INGENIERIA**

**(MECANICA APLICADA)**

**P R E S E N T A:**

**JOSE ANTONIO GONZALEZ ESPINOSA**

**DIRECTOR DE TESIS: DR. LUIS REYES AVILA**



**MEXICO, D. F.**

**MARZO 2004**

M. 327175



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

110

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

**DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**Facultad de Ingeniería**

**MODELADO Y SIMULACIÓN MATEMÁTICO COMPUTACIONAL  
DE TRAYECTORIAS DE GRÚAS DE PÓRTICO PARA  
CONTENEDORES.**

**JOSÉ ANTONIO GONZÁLEZ ESPINOSA**

**TESIS**

PRESENTADA A LA DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO DE LA

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

DE LA

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

COMO UN REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN INGENIERÍA**

**(MECÁNICA APLICADA)**

Director de Tesis: Dr. Luis Reyes Ávila

CD. UNIVERSITARIA, MARZO DE 2003

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la  
UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el  
contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: González Espinosa  
José Antonio

FECHA: 8-Enero-2004

FIRMA: 



**LAS GRÚAS DE PÓRTICO SOBRE RIELES QUE SE OBSERVAN EN LA IMAGEN SON USADAS COMÚNMENTE PARA EL TRANSPORTE INTERMODAL Y SU FUNCIONAMIENTO ES EL SIGUIENTE; EN UNA PRIMERA ETAPA RECIBEN LA CARGA DE CAMIONES Y LA CAMBIAN AL TREN PARA SU POSTERIOR TRASLADO Y EN UNA SEGUNDA ETAPA LA CARGA QUE LLEGA EN TREN ES TRASLADADA A LOS CAMIONES PARA SU POSTERIOR TRASLADO.**



**LAS GRÚAS DE PÓRTICO QUE SE OBSERVAN EN LA IMAGEN, ACTUALMENTE ESTAN EN FUNCIONAMIENTO EN MANZANILLO Y SON SIMILARES A LAS GRÚAS UTILIZADAS EN LA TERMINAL PARA CONTENEDORES DE PETIKEMAS SURABAYA EN INDIA, EN DONDE DICHAS GRÚAS SON CONTROLADAS A TRAVÉS DE COMPUTADORAS QUE MONITOREAN EL ARRÍBO Y PARTIDA DE CARGA, ESTO CON LA FINALIDAD DE MANTENER UN CONTROL ÓPTIMO DEL MANEJO DE LA CARGA.**

## **Agradecimientos**

A mis padres Justo y Josefa, ya que gracias a su paciencia comprensión y ayuda he visto coronadas mis metas con el más grande de los éxitos.

A mi esposa Mayra y a mi hijo Axel que son la luz que me guía y fortalece.

A mis hermanos Jorge, Emmanuel y Marisol que me han alentado y comprendido en todo lo que me he propuesto.

A todos mis compañeros y maestros que de muchas y diversas formas han contribuido al desarrollo de mi persona como ser humano y como profesional de la Ingeniería.

Al CONACYT por soportar y brindar los medios para la consecución de un sueño.

Al Dr. Luis Reyes Ávila que desde un principio me abrió la puerta que conduce al conocimiento recto y claro de la Ingeniería.

Y especialmente a la Universidad Nacional Autónoma de México, hogar de mi raza y forjadora de mi espíritu.

José Antonio González Espinosa

Marzo 2003

## Introducción

El presente trabajo está dividido en cuatro unidades, la primera aborda de manera general el tema que es propio del presente trabajo, es decir, se avoca a los conceptos y definiciones indispensables para el entendimiento de los capítulos posteriores, contiene la definición de transporte, la definición general de grúa, la definición de grúa de pórtico y algunos otros conceptos necesarios para la mejor comprensión de la actual tesis, igualmente, en el mismo capítulo se citan, para los puertos mexicanos más importantes, el equipo, la maquinaria y sobre todo el número de grúas de pórtico con las que éstos cuentan.

En el segundo capítulo se aborda el marco teórico general que se utiliza en la justificación del desarrollo del modelo matemático del movimiento de las grúas de pórtico, contiene la definición de velocidad y aceleración para un cuerpo rígido, así como la definición de movimiento de traslación y de rotación.

Puede decirse que el capítulo tres es la materialización de la abstracción matemática del análisis del fenómeno, es decir, materializa el objeto de estudio del presente trabajo, dígase, el modelo matemático de la trayectoria de las grúas de pórtico.

En la cuarta unidad se recurre al programa de software Mathematica® Versión 4 para; la verificación, la prueba y sobre todo la comprobación del funcionamiento del modelo matemático, así mismo, se contiene la explicación detallada de cada línea de programación, esto con el objeto de facilitar el entendimiento del funcionamiento del programa, aunque claro, que hay que correrlo para verlo funcionar.

Finalmente se incluyen las conclusiones, la bibliografía y un disco de 3 ½ que contiene al programa.



## Objetivos

El primer objetivo del presente trabajo es; establecer una metodología que permita el desarrollo de un modelo matemático que resuelva el problema espacio tiempo que implica la trayectoria de una grúa de pórtico para contenedores.

El segundo objetivo es; desarrollar el modelo matemático utilizando un perfil de velocidad específico que represente y simule la trayectoria de movimiento de una grúa de pórtico, mediante la solución al problema espacio tiempo que esto implica y simular la trayectoria de la grúa con el modelo matemático desarrollado, con el objeto de visualizar el funcionamiento del citado modelo, para lo cual se recurrirá al programa de software *Mathematica Versión 4*, el cual permitirá programar el modelo para su posterior visualización en la computadora.

Así mismo, un objetivo final es; que la presente tesis, sirva como base para impulsar trabajos de investigación y desarrollo que busquen automatizar el movimiento de las grúas de pórtico para contenedores.

# Índice

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Introducción</b>	<b>IV</b>
<b>Objetivos</b>	<b>V</b>
<b>CAPÍTULO I</b>	
<b>1.1 Introducción</b>	<b>1</b>
<b>1.2 Transporte</b>	<b>2</b>
<b>1.2.1 Definición de transporte</b>	<b>2</b>
<b>1.2.2 Tipos de transporte</b>	<b>2</b>
<b>1.2.3 Transporte intermodal</b>	<b>3</b>
<b>1.3 Definición y tipos de grúas</b>	<b>3</b>
<b>1.3.1 Grúas de pórtico</b>	<b>4</b>
<b>1.3.2 Campos de aplicación de las grúas de pórtico</b>	<b>5</b>
<b>1.3.3 Elementos generales de las grúas de pórtico</b>	<b>5</b>
<b>1.4 Parámetros de movimiento</b>	<b>6</b>
<b>1.4.1 Velocidades de elevación</b>	<b>7</b>
<b>1.5 Usos de las grúas de pórtico en algunos puertos     mexicanos</b>	<b>9</b>
<b>CAPÍTULO II</b>	
<b>2.1 Introducción</b>	<b>17</b>
<b>2.2 Cinemática del sistema invariable</b>	<b>18</b>
<b>2.2.1 Movimiento de traslación</b>	<b>18</b>
<b>2.2.1.1 Velocidad</b>	<b>19</b>
<b>2.2.1.2 Rotación</b>	<b>22</b>

<b>CAPÍTULO III</b>	
<b>3.1 Introducción</b>	<b>24</b>
<b>3.2 Condiciones iniciales y de frontera</b>	<b>25</b>
<b>3.2.1 Metodología de solución</b>	<b>25</b>
<b>3.3 Primer etapa de movimiento</b>	<b>29</b>
<b>3.3.1 Movimiento en x</b>	<b>29</b>
<b>3.3.2 Movimiento en y</b>	<b>44</b>
<b>3.3.3 Movimiento en z</b>	<b>62</b>
<b>3.4 Segunda etapa de movimiento</b>	<b>78</b>
<b>3.4.1 Movimiento en z</b>	<b>78</b>
<b>3.4.2 Movimiento en y</b>	<b>99</b>
<b>3.4.3 Movimiento en x</b>	<b>114</b>
<b>3.5 Etapa final de movimiento z (descenso)</b>	<b>127</b>
<b>CAPÍTULO IV</b>	
<b>4.1 Introducción</b>	<b>129</b>
<b>4.2 Desarrollo del programa de software</b>	<b>129</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>158</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>159</b>

# Capítulo I

## 1.1 Introducción

El presente capítulo versará, en una descripción de los elementos que son propios de las grúas, aunque de forma muy general, es decir, se introducirá el ámbito donde se utilizan las grúas y sobre todo se incluirán las definiciones que se manejan en el presente trabajo.

Iníciase el presente trabajo contestando la siguiente pregunta ¿Qué es y para que sirve una grúa?, se dice que es un auxiliar para el transporte intermodal de mercancías, bueno esa definición indica en cierta forma para que sirve, pero ¿cuál es su ubicación? Es decir a que parte de la realidad o fenómeno pertenece, cabe sospechar que esta incluida en la realidad de los transportes, por lo tanto, defínase brevemente transporte –recuérdese que el objeto de estudio del presente trabajo son, en particular, las grúas de pórtico para inmediatamente después entrar de lleno al tema del presente trabajo.

## 1.2 Transporte

Si bien es cierto, que en algún grado conocemos o tenemos idea del significado de algunos vocablos, también es cierto, que generalmente las definiciones que son coloquiales o de uso común son insuficientes, sobre todo cuando se pretende trabajar con la idea técnica que engendra dicho vocablo,

tal es el caso del transporte por lo que primero se dará una definición técnica lo más universal posible, para después entrar de lleno al desarrollo del presente trabajo.

### **1.2.1 Definición de Transporte**

*Transporte*, medio de traslado de personas o bienes desde un lugar hasta otro. El transporte comercial moderno está al servicio del interés público e incluye todos los medios e infraestructuras implicados en el movimiento de las personas o bienes, así como los servicios de recepción, entrega y manipulación de tales bienes. El transporte comercial de personas se clasifica como servicio de pasajeros y el de bienes como servicio de mercancías

### **1.2.2 Tipos de Transporte**

En general, se utilizan cinco modos de transporte: acuático, por carretera, ferroviario, aéreo y por tubería.

*Acuático*: Comprende todo tipo de vehículos (barcos, barcazas, veleros, buques, balsas, etc.,) que se muevan en cualquier cuerpo importante de agua, como mares, océanos, ríos, lagos, canales, etc.

*Por Carretera*: Comprende todo tipo de vehículos (automotores principalmente y aquellos movidos por fuerza animal) que se desplazan por carretera.

*Ferrovionario:* Comprende a los vehículos que utilizan vías para su desplazamiento (ferrocarril, tranvía, metro, etc.,)

*Aéreo:* Comprende todos aquellos que se desplazan a través del aire (avión, zeppelin, helicópteros, etc.,)

*Por tubería:* Normalmente envuelve a los que transportan grandes volúmenes de fluidos (petróleo, agua, gas, etc.,) a través de tubos.

### **1.2.3 Transporte Intermodal**

Ya se mencionó, que las grúas son auxiliares del sistema de Transporte Intermodal, definamos entonces transporte intermodal.

*Transporte Intermodal.* Al movimiento de personas o mercancías en una misma unidad cerrada, o contenedor, sobre dos o más modos diferentes de transporte se le conoce como transporte intermodal.

### **1.3 Definición y tipos de grúas**

Según la Enciclopedia Encarta™: una **Grúa**, es una máquina para desplazar objetos pesados vertical y horizontalmente. La capacidad de una grúa puede ir desde algunos centenares de kilogramos hasta varios cientos de toneladas; la fuerza motriz puede ser manual o proceder de motores eléctricos, de combustión interna o de vapor. En cuanto a su forma, se clasifican como

grúas de pescante, grúas de brazo móvil y grúas puente. Las grúas de pescante llevan un brazo o pescante horizontal situado sobre una torre vertical. El movimiento horizontal de la carga se consigue girando el pescante o toda la grúa y desplazando el torno de izado, situado en un carro móvil que corre a lo largo del brazo. La grúa de brazo móvil tiene un diseño de cantilever y está formada por un brazo articulado por la base con la parte inferior de un mástil vertical y sujeto en el extremo mediante un cable que va a un torno situado en la parte superior del mástil. Para evitar que el mástil se caiga hacia el lado del brazo se emplean contrapesos o tirantes. El movimiento horizontal se obtiene girando la grúa y levantando o bajando el brazo. Las grúas puente están formadas por un pescante horizontal cuyos extremos se desplazan sobre raíles o rieles perpendiculares al pescante. El torno de izado se desliza en sentido longitudinal por el pescante mediante un carro. Las grúas puente normales se desplazan sobre raíles elevados, mientras que las llamadas grúas de pórtico están montadas sobre pilares que se mueven por raíles situados al nivel del suelo

### **1.3.1 Grúas de pórtico**

De modo general se puede decir que una grúa de pórtico, es un aparato de elevación que se desplaza sobre el suelo, generalmente sobre rieles, pero también existen aquellas que utilizan neumáticos para su desplazamiento, éste tipo de grúas presentan una forma de pórtico de una luz moderada y su movimiento es, en general, la composición en una primera etapa de un movimiento de traslación y en una segunda etapa es un movimiento de elevación, se trata por lo tanto, de una especie de grúa de puente provista con apoyos móviles.

### **1.3.2 Campos de aplicación de las grúas de pórtico**

Las grúas de pórtico se encuentran sobre todo en los parques industriales, puertos marítimos comerciales y en los patios de las fábricas. Dado que circulan sobre rieles situados en el suelo, o sobre el suelo mismo con la ayuda de neumáticos, y en comparación a las grúas de puente, los gastos de primera instalación de las primeras son menores, ya que para los puentes grúas que circulan sobre un camino de rodadura elevado se necesita construir una estructura que además tiene el inconveniente de ser fija, haciendo que se esté ante una grúa limitada y cara, lo anterior sobre todo, se deja notar en el caso de un camino de rodadura de gran longitud. Así a las grúas de pórtico se les prefiere para todos los desplazamientos largos de mercancía que no entorpezcan o estorben la circulación de mercancías o materias primas por el suelo.

### **1.3.3 Elementos generales de las grúas de pórtico**

*Carro.* El carro es la parte de la grúa donde van montados todos los mecanismos de elevación (motor, engranes, caja de velocidad, etc.,) para manejar la carga y se desplaza a través del puente.

*Puente.* Se le llama así a la viga superior que sirve como sostén tanto al carro como a la carga y es sobre éste donde se realiza el movimiento del carro.



*Estructura de apoyo.* Se le denomina apoyos a las columnas que soportan al puente, el carro y la carga, y estas a su vez son soportadas por el sistema de rodamiento.

*Mecanismo de traslación.* Es el conjunto de maquinaria que permite el movimiento de la totalidad de la grúa, es decir, es la maquinaria que mueve en conjunto, tanto la carga como la estructura total de la grúa.

*Mecanismo de sujeción.* Son los aparatos mediante los cuales se sujeta y asegura la carga para su posterior traslación y en general se puede decir que son: ganchos, cucharas, marcos en forma de bastidor, etc.

*Sistema de rodamiento.* En éste se incluyen tanto los engranes que controlan la dirección como los elementos sobre los cuales se realiza la traslación y que en general son llantas o ruedas de acero según el desplazamiento sea sobre asfalto o sobre rieles respectivamente.

*Sistema de frenado.* Es el conjunto de aparatos que detienen el movimiento de la grúa y puede ser, en general, de disco o de tambor.

*Sistema de elevación.* Es el conjunto de aparatos, mecanismos y máquinas que permiten el levantamiento de los objetos a transportar.

## **1.4 Parámetros de movimiento**

Las grúa de pórtico tienen en general tres velocidades; una velocidad de traslación en conjunto, que es la que se encarga de mover a toda la grúa, es decir, a todos los sistemas que la componen junto con la carga en su caso, tiene además una velocidad para la traslación del sistema de elevación, es decir, una velocidad para el carro y por último una velocidad de elevación de carga, y como ya se ha mencionado son todas diferentes entre sí, además, las velocidades de traslación en conjunto y de traslación del mecanismo de elevación dependen totalmente de las condiciones y dimensiones propias de cada grúa, sin embargo para las velocidades de elevación sí se tienen algunos valores recomendables y que son los tratados en el siguiente punto.

### **1.4.1 Velocidades de elevación**

Frecuentemente, los mecanismos de elevación de los puentes de grúas de pórtico incorporan dos velocidades de elevación con el objeto de obtener el máximo rendimiento en las operaciones de ascenso y descenso de la carga. Ambas velocidades son función de la capacidad de carga, de la distancia vertical máxima que puede recorrer la carga y del tipo de elevación, es decir, si es ascendente o descendente, en la tabla 1.1 se tienen algunos valores.

Capacidad de Carga (Ton)	Distancia vertical máxima (m)	Elevación principal (m/min)	Elevación de precisión (m/min)
0.5	3	15	4
1	5.5	5	1.25
	11	8	2
2	3.5	5	0.5
	7	10	1
5	3.5	4	0.4
	7	8	0.8
	8	12	1.2
8	3.5	5	0.5
	12	12	1.2
10	3.5	4	0.4
16	6	4	0.6
20	6	5	0.5
25	6	6	0.6

Tabla 1.1 Velocidades de elevación.

Evidentemente para lograr cada una de las velocidades marcadas en la tabla 1.1, se requiere que los motores que compongan los sistemas de elevación de la grúa tengan la potencia suficiente para lograr dichas velocidades, sin embargo, en el presente trabajo nos enfocaremos exclusivamente al análisis del movimiento, aunque cabe mencionar que son los fabricantes de grúas los que especifican ese tipo de datos en las fichas técnicas de sus productos.

## **1.5 Usos de las grúas de pórtico en puertos mexicanos**

No es de extrañar que el efecto globalizador de la economía mundial este motivando, y por que no decirlo, este forzando a la mayoría de los países a mejorar, tantos sus sistemas de producción de bienes y servicios, como también los sistemas, que en forma directa o indirecta están involucrados en la administración o incluso en el simple manejo de dichos bienes y servicios, así uno de los sectores en los que se pueden percibir los efectos de esta última observación lo podemos encontrar en el manejo de carga en los puertos, y es que cada día se evidencia más, que el mercado global demanda sistemas logísticos estratégicos altamente especializados, cuyo objetivo primordial es cumplir con los estándares de calidad internacionales, lo que obvia, qué en el transporte mercantil marítimo, en los puertos locales y sobre todo en los centros de distribución internacionales, dichos sistemas juegan un papel determinante en la competitividad de las empresas e incluso en la competitividad de un país, así los sistemas tradicionales de transporte han evolucionado a tal grado, que estos han convertido a los puertos del mundo en puntos estratégicos de entrada y salida de mercancías, propiciando el comercio exterior obligando la sistematización de las conexiones terrestres, ya que estos sistemas incluso avalan o denostan la competencia de los países en el plano comercial.

Es claro que al ser México un país integrado al comercio global, éste tiene la necesidad lógica e imperativa, de adecuarse a los tiempos tecnológicos que impactan a los demás países, para así por lo menos brindar un servicio que corresponda con las necesidades de sus clientes y siendo México un país con una vocación portuaria innegable, es a todas luces evidente que en un futuro,

no muy lejano por cierto, el intercambio de mercancías realizado a través de los puertos mexicanos, demandará un grado de tecnificación tan alto, que será prácticamente imposible desarrollarlo sin la asistencia de sistemas automáticos que controlen eficientemente la carga que entra y sale del país o que simplemente circula por éste, lo cual de entrada por lo menos tiene dos virtudes, la primera un control más preciso y óptimo de la carga y un segundo muy deseable es, que evitará en gran medida los factores humanos llamados, errores y corrupción, y toda vez que el monitoreo de la carga podrá y deberá ser realizado en estaciones remotas y no realizado exclusivamente por una o varias personas en forma presencial, lo anterior no significa que sean hechos nuevos o innovadores, pues en algunas terminales portuarias internacionales, como por ejemplo, en la de Petikemas Surabaya en India, este monitoreo y control automático ya se realiza, e incluso el uso de grúas de pórtico para contenedores automatizadas permiten un control óptimo de la carga.

Así en México las grúas de pórtico son principalmente utilizadas para mover la carga de los patios de los puertos a los carros de ferrocarril, o a los camiones que habrán de transportar a su destino final a dicha carga, también se utilizan para el traslado y apilado de la carga en los patios y hangares de almacenaje.

Datos de equipamiento de algunos puertos mexicanos (la información está tal cual se obtuvo de internet)

# Puerto de Ensenada (Baja California)

## Capacidades y características del equipo portuario

Mayor			
Núm	Nombre	Capacidad	Localización
2	Grúas pórtico de muelle	40 Tons.	Terminal de usos múltiples
2	Grúas pórtico de patios	40 Tons.	Terminal de usos múltiples
2	Cargadores frontales	20 Tons	Terminal de usos múltiples
3	Grúas	20 Tons.	Zona de carga comercial
8	Tractocamiones	-	Terminal de usos múltiples
6	Plataformas	-	Terminal de usos múltiples
3	Tractor de arrastre	-	Terminal de usos múltiples
2	Montacargas	40 Tons	Terminal de usos múltiples
Menor			
Núm.	Nombre	Capacidad	Localización
4	Grúas	+ 15 Tons.	Zona de carga comercial
4	Montacargas	+ 15,000 lb.	Terminal de usos múltiples
8	Montacargas	de 5,001 a 15,000 lb	Terminal de usos múltiples
5	Montacargas	hasta 5,000 lb	Terminal de usos múltiples
4	Almejas	4 yardas <sup>3</sup>	Terminal de usos múltiples
4	Tolvas	70 mts <sup>3</sup>	Entre muros
2	Cargador frontal		Terminal de usos múltiples
1	Báscula	-	-
2	Barredora	-	-
1	Remolcadores	hasta 2,000 h.p.	-

## Áreas de Almacenamiento

Área	Longitud (mts.)	Muelle	Mts. Lineales	Calado
<u>Bodegas:</u>	11,306 m2	Pesca	660	7 mts
<u>Cobertizo:</u>	5,000 m2	Granel Mineral	220	8 mts
<u>Patios:</u>	31,000 m2	Cabotaje	650	8 mts
-	-	Pasajeros	360	10 mts
-	-	Carga General	185	10 mts
-	-	Altura	300	12 mts
			<b>Total</b>	<b>2375</b>

## Puerto de Manzanillo (Colima)

### EQUIPAMIENTO PORTUARIO TOTAL (1995 & 2000)

EQUIPO	AÑO	
	1995	2002
<u>GRUA DE PORTICO DE MUELLE</u>	<u>2</u>	<u>4</u>
<u>GRUA DE PORTICO DE PATIO</u>	<u>5</u>	<u>12</u>
DESCARGADOR MECANICO (CAP 1000 TONS * HORA)	-	-
TRACTOCAMIONES	22	54
PLATAFORMAS	22	36
CHASIS	6	31
GRUA PH	-	-
GRUA DE MAS DE 15 TONS	1	2
GRUA DE MENOS DE 15 TONS	7	3
AUTOGRUA	-	-
MONTACARGAS DE MAS DE 15,000 LBS	14	26
MONTACARGAS DE 5,000 LBS	9	40
MONTACARGAS DE HASTA 5,000 LBS	-	37
CARGADOR FRONTAL	12	4
GRUA GOTTWALD	-	3
TRACTOR DE ARRASTRE	3	-
TRACKMOVIL	2	3
PLANAS DE 1.0 TON	12	-
PAYLOADERS	-	12
SUCCIONADORA (DOCKSIDER)	2	2
ALMEJAS	22	43
BANDA TRANSPORTADORA MOVIL	3	9
TOLVA GRANELERA	16	27
CHUTE RAMPA	6	-
ELEVADOR DE CANGILONES	-	1
RETROEXCAVADORA	-	1
REMOLCADORES	-	4
REACH STACKER PARA CONTENEDORES LLENOS	-	10
MTY HANDLER PARA CONTENEDORES VACIOS	-	2

SPREADERS PARA CONTENEDORES 20'	-	6
SPREADERS PARA CONTENEDORES 40'	-	6
TORRES MOVILES DE ALUMBRADO	-	2
POWER PAC PARA CONTENEDORES REFRIGERADOS	-	2
MOTOBOMBAS CAP 18,000 LTS/hr.	-	2
BASCULA ELECTRONICA	-	2
SHIPLOADER	-	1
TOP LOADER	-	2
RAMPAS DE ACERO ACCESO CONTENEDORES	-	8

## Puerto de Mazatlán (Sinaloa)

MAYOR		MENOR	
Nº. NOMBRE	CAPACIDAD LOCALIZACION	Nº. NOMBRE	CAPACIDAD LOCALIZACION
1 Montacarga p/ cont.	92,500 lbs. Patio de contenedores	11 Montacargas	8,000 lbs Area de maniobras
1 Montacarga p/ cont.	80,000 lbs. Patio de contenedores	12 Tractores de arrastre	5,000 lbs Area de maniobras
1 Montacarga p/ cont.	60,000 lbs. Patio de contenedores	2 Trascavos de ½ y de 3	Area de maniobras
1 Montacarga p/ cont.	35.000 lbs. Patio de contenedores	10 Plataforma (Arañas) transporte turístico	Area de maniobras
3 Montacarga p/ cont.	30,000 lbs. Patio de contenedores		
7 Tractocamiones	25,000 lbs. Patio de contenedores		
7 Plataformas	40 ton. Patio de contenedores		



## Salina Cruz (Oaxaca)

Equipo Menor			
Número	Nombre	Capacidad	Localización
13	Tractocamión	40 tons.	Patio de contenedores
25	Montacargas	8000 y 5000 lbs.	Patio de maniobras
16	Plataformas	40 tons.	Patio de contenedores
1	Tractor Ferroviario	450 tons.	Patio de maniobras
3	Cargadores frontales	2400 lbs.	Terminal de usos múltiples
2	Grúa Hidráulica	18 y 20 tons.	Patio de maniobras
1	Camión de volteo	6 m3 .	Patio de maniobras
2	Camiones Cisterna	15000 lts.	Patio de maniobras
2	Retroexcavadoras	1 yd3	Patio de maniobras
2	Almejas AutoM	7 yd3	Patio de maniobras

Equipo Mayor			
Número	Nombre	Capacidad	Localización
3	Grúas de patio	40 tons.	Terminal de contenedores
<b>1</b>	<b>Grúas de portico</b>	<b>30 tons.</b>	<b>Muelle de contenedores</b>

## Puerto de Tampico (Tamaulipas)

Equipo de traslación	Capacidad	Nº de unidades
Tractor ferroviario	1,300 tons.	6
Tractor de arrastre	20-25 tons.	24
Tractocamiones	15-30 tons.	47
Plataformas	20-30 tons.	67
Autotanque	10,000 m3	2
Equipo Marítimo	Capacidad	Nº de unidades
Remolcadores	4,352 hp	2
	4,200 hp	2
	3,200 hp	1
Lancha para pilotos	8 Plazas.	3
Equipo de Elevación	Capacidad	Nº de unidades
Cargador frontal	1.3-3.0 m3	15
Autogrúas	100-150 tons.	3

	50-100 tons.	6
	25-40 tons.	2
Grúas de vía	25-35 tons.	2
	4,000-10,000 lbs.	58
Montacargas	10,000-20,000 lbs.	7
	20,000-40,000 lbs.	12
<b>Montacarga porta-contenedor</b>	<b>35-60 tons.</b>	<b>4</b>
Pala mecánica	1.3 tons.	7
Banda transportadora	300 tons./hora	4
Bascula	75 tons.	1
Almejas	1-3 tons.	44

## Puerto de Topolobampo (Veracruz)

### Mayor

Localización: Almacén de patio de contenedores

#### ► (1) Montacargas portacontenedores de 80,000 libras

- (1) Montacarga de 18,000 libras
- (1) Montacargas de 22,000 libras.

### Menor:

Localización: Almacén de patio de contenedores

- (5) Montacargas de 8,000 libras
- (2) Plataformas de 40 toneladas
- (2) Tractocamiones de 25,000 libras
- (2) Tractores de arrastre de 5,000 libras
- (4) Tolvas graneleras de 24 toneladas
- (4) Tolvas graneleras de 12 toneladas
- (5) Trascavos de 1.5 yardas cúbicas

Los datos anteriores se tomaron tal cual y evidentemente reflejan sólo una parte del sistema de puertos así como el equipamiento de los mismos y que son los más destacados con los que actualmente cuenta México, y lo que más sobresale, es el hecho de que se aprecia un verdadero y amplio campo de crecimiento en este sector ya que existen otras entradas que en un momento determinado podrían resultar en puertos igualmente convenientes o aún más rentables por su propia ubicación territorial, cabe mencionar que el estudio en sí de la infraestructura de los puertos o de los puertos mismos, por no ser tema de estudio del presente trabajo, no tiene un análisis más que superficial, sin embargo al final, en la bibliografía se incluyen las direcciones electrónicas donde se puede conseguir información adicional sobre cada uno de los puertos citados en el presente trabajo.

## Capítulo II

### 2.1 Introducción

Desde tiempos más o menos antiguos, se ha considerado a la mecánica como la más perfecta de las ciencias -ciencia que es sin lugar a dudas la combinación de dos ciencias aún más nobles, la física y las matemáticas- los electricistas y los químicos, han tomado sus aciertos como modelos para desarrollar a través de analogías, la teoría de los fenómenos que son propios de sus respectivas disciplinas, es decir, la mecánica ha servido de base para el desarrollo y avance de las disciplinas citadas y aún de muchas otras más, pero además de lo anterior ¿dónde radica la utilidad o, valga la expresión, la belleza de tan admirable ciencia? pues ni más ni menos que en la capacidad de modelar, predecir y controlar los fenómenos físicos, los cuales, siempre e invariablemente tienen implícitamente en su naturaleza una concepción matemática.

Así pues, la belleza y utilidad de la mecánica radica en la sutil abstracción matemática de los fenómenos físicos, y de los cuales el ser humano goza de la capacidad de hacerlos tangibles y entendibles a través del puro, simple y llano razonamiento.

Iníciase pues la justificación teórica que da fundamento al movimiento de las grúas.

## 2.2 Cinemática del sistema invariable

Se sabe de la definición de cuerpo rígido, que al estar éste constituido por puntos materiales, y que las distancias entre estos puntos al permanecer invariables entre sí, y por lo tanto al moverse el cuerpo como cuerpo rígido, denominado también sistema invariable, la posición de cualquier punto arbitrario dentro del cuerpo puede ser determinada por la posición de otros tres puntos no alineados cualesquiera del sistema, por ejemplo A, B, C, y si intentáramos determinar la ubicación de otro punto cualquiera del mismo sistema, digamos D, la posición de éste estaría determinado por la intersección de tres esferas de radios, AD, BD, y CD, o bien por el tetraedro correspondiente e invariable DABC.

Llamaremos movimiento elemental de un sistema invariable al movimiento en un tiempo  $dt$ , por el cual sustituimos los elementos infinitesimales de trayectorias de cada punto por sus cuerdas. Para hacer lo anterior dividamos el movimiento en los dos más simples y elementales de cualquier sistema invariable; un movimiento de traslación y un movimiento de rotación.

### 2.2.1 Movimiento de traslación

Considérese un sólido, y en éste dos puntos cualesquiera, A, B y el segmento rectilíneo AB formado por los dos puntos anteriores. Al moverse el sólido a la nueva posición A' y B', si éste nuevo segmento, al formar el

segmento A'B' conserva una longitud constante y además es paralelo e igual a AB, entonces se estará ante un movimiento de traslación.

### 2.2.1.1 Velocidad

*Velocidad.* Sea AB la posición del segmento en el instante t, supongamos que en  $t + \Delta t$  y debido al movimiento de traslación, los puntos A y B ahora están en  $A_1$  y  $B_1$ , siendo  $AA_1$  y  $BB_1$  equipolentes, y sea:

$$\overrightarrow{AV}_m = \frac{AA_1}{\Delta t} \text{ y } \overrightarrow{BV}_m = \frac{BB_1}{\Delta t} \quad (2.1)$$

tal que

$$\frac{AA_1}{\Delta t} = \frac{BB_1}{\Delta t} \quad (2.2)$$

entonces, las velocidades de los segmentos son iguales, lo que es claro deducir si se considera que, al ser A,  $A_1$ , B, y  $B_1$  puntos de un sistema invariable, éstos permanecerán indiscutiblemente paralelos y con un desplazamiento idéntico en magnitud, es decir:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AA_1}{\Delta t} = \vec{V}_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{BB_1}{\Delta t} = \vec{V}_B \quad (2.3)$$

luego entonces las velocidades instantáneas de A y B son iguales en magnitud, dirección y sentido, y como A y B son puntos cualesquiera del cuerpo, se deduce entonces que en cada instante, todos los puntos del sólido tienen el mismo vector velocidad, el cual además es tangente a la trayectoria descrita por el punto, o sea, para cualquier punto se tiene el mismo vector velocidad de traslación en el instante t.

Aunque para el presente trabajo no se considera a la aceleración como parte necesaria para el desarrollo del mismo, la presentaremos sólo como un aliciente al rigor técnico que debe observar cualquier trabajo.

*Aceleración.* Sean todos los puntos de un sistema invariable dotados de la misma velocidad en un tiempo t, entonces al ser la velocidad equipolente para cualquier punto en cualquier instante, se puede decir que, la aceleración de todos los puntos del cuerpo es necesariamente la misma como consecuencia lógica de una velocidad idéntica para cada punto como se ha demostrado en las ecuaciones (2.1) y (2.2).

En efecto, sea un sistema cartesiano tridimensional y sean  $x_a, y_a, z_a; x_b, y_b, z_b$ , las coordenadas de los puntos A y B de un cuerpo cualquiera.

Siendo los segmentos AB y A'B' iguales y paralelos, por definición se tiene:

$$x_b - x_a = k_1; y_b - y_a = k_2; z_b - z_a = k_3 \quad (2.4)$$

donde la diferencia entre un punto y otro es definitivamente una constante, como se aprecia en la ecuación (2.4) y si derivamos obtendremos la velocidad como se ve en la ecuación (2.5)

es decir

$$\frac{dx_b}{dt} = \frac{dx_a}{dt}; \frac{dy_b}{dt} = \frac{dy_a}{dt}; \frac{dz_b}{dt} = \frac{dz_a}{dt} \quad (2.5)$$

e igualmente

$$\frac{d^2x_b}{dt^2} = \frac{d^2x_a}{dt^2}; \frac{d^2y_b}{dt^2} = \frac{d^2y_a}{dt^2}; \frac{d^2z_b}{dt^2} = \frac{d^2z_a}{dt^2} \quad (2.6)$$

los razonamientos matemáticos anteriores comprueban, que precisamente la velocidad es igual para cualquier punto del cuerpo, lo mismo pasa para la aceleración, consecuencia lógica y así se demuestra en la última expresión, es decir, la aceleración en una traslación, en cualquier sistema invariable de puntos, es idéntica para todos y cada uno de los puntos que componen al sistema.



### 2.2.1.2 Rotación

*Rotación.* Se dice que un sólido tiene movimiento de rotación cuando todos los puntos situados en un eje de rotación  $XX'$ , carecen de movimiento relativo entre ellos y además se conservan invariablemente colocados en la misma posición en el sistema de referencia, mientras que los demás puntos describen circunferencias que son perpendiculares al eje de rotación  $XX'$  y cuyos centros son precisamente los puntos ubicados sobre el eje de rotación ya mencionado.

En efecto, sea un instante  $\Delta t$  durante el cual todos los puntos situados fuera del eje de rotación del sólido giran un mismo ángulo  $\Delta\theta$ , toda vez que el sistema es invariable, así la velocidad angular media en este movimiento es:

$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$  y la velocidad angular instantánea tiene por valor

$$\omega = \lim_{\omega_m} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} \quad (2.7)$$

es decir, que el movimiento de rotación queda definido por la siguiente función:

$$\theta = f(t) \quad (2.8)$$

ecuación que liga el ángulo de giro con el tiempo, así derivando se tiene que:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = f'(t) \quad (2.9)$$

igualmente

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = f''(t) \quad (2.10)$$

que es la aceleración angular.

Debido a que el movimiento de la grúa es únicamente de traslación y es el movimiento de un sistema invariable de puntos o movimiento de cuerpo rígido, entonces para determinar el movimiento general de la grúa, solamente es necesario determinar el movimiento de un punto específico para que a partir de este se establezcan las relaciones de movimiento de la totalidad de los puntos de la grúa ya que la velocidad para todos éstos es la misma.

## Capítulo III

### 3.1 Introducción

Para simplificar el análisis del movimiento de la grúa, dividiremos éste en dos etapas, la primer etapa será el inicio del movimiento con la grúa sin carga, es decir, la grúa se dirigirá al contenedor, en la segunda etapa, la grúa desplazará el contenedor a su nueva ubicación.

Cabe precisar, que en el presente trabajo cuando se hable de perfil de velocidad, a lo que se hará referencia será a una magnitud escalar, es decir, a una *rapidez*, posteriormente se asignará la trayectoria que definirá completamente el modelo, es decir, se definirá el vector velocidad, además como la grúa se desplaza paralelamente a los ejes coordenados del plano cartesiano tridimensional, la determinación de la trayectoria será realmente sencilla, se puede mencionar además que lo anterior nos indica claramente, que una vez desarrollada la ecuación escalar de rapidez, la determinación del vector trayectoria queda como una opción arbitraria, es decir, se puede formular cualquier trayectoria, como por ejemplo; una circular, una parabólica, una elíptica, etc., aunque obviamente escoger cualquier opción implica un comportamiento estructural diferente en la grúa y cuyo análisis se escapa del objetivo del presente trabajo y más aún del comportamiento usual que tienen las grúas de pórtico, debido a que normalmente, su movimiento es rectilíneo y paralelo a los ejes coordenados.

Precisado lo anterior, cabe señalar, que para simplificar aun más el análisis dividiremos el modelo matemático de acuerdo a cada eje, es decir, hallaremos el movimiento para cada eje de manera independiente.

### 3.2 Condiciones iniciales y de frontera

Corresponde ahora marcar las condiciones en las cuales la grúa iniciará su trabajo, esto es debemos marcar claramente y de forma general el estado inicial que tiene la grúa, recuérdese que se ha dividido el movimiento en partes independientes para cada eje coordenado, así mismo se necesitan marcar los parámetros que igualmente se deben cumplir y que de forma general se expresan como:

Condiciones iniciales	Condiciones de frontera
$\dot{r}_i(S_i) = \beta_i$	$r_i(S_i, x, y, z) = a_i$
donde $\dot{r}_i(S_i)$ es la parte escalar del movimiento y por supuesto $\beta_i$ es elemento de $\mathfrak{R}$ y representa a la rapidez	donde $r_i(S_i, x, y, z)$ es el vector de desplazamiento en el tiempo $S_i$ y $a_i$ el punto espacial de ubicación en dicho instante

#### 3.2.1 Metodología de solución

Iníciase con las siguientes definiciones:

Sea  $J = [0, T)$ ,  $0 < T < +\infty$ , el intervalo de tiempo sobre el cual ocurre el análisis y sea  $\mathfrak{R}^3$  el espacio vectorial sobre el campo de los reales con la estructura algebraica de adición y multiplicación por un escalar usuales, entonces se tiene que:

a) Sea  $\dot{r}(t) : J \rightarrow \mathfrak{R}, \alpha_i \in \mathfrak{R}, t \in J$  definida como

$$\dot{r}(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t \quad (3.1)$$

donde  $\dot{r}(t)$  es la rapidez del cuerpo rígido en el intervalo de tiempo  $[i, j)$

b) Sea  $\underline{r}(t, x, y, z) : J \rightarrow \mathfrak{R}^3$  donde  $(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3$  y  $t \in J$  y que es la función desplazamiento que se obtiene al aplicar la multiplicación usual entre un vector de  $\mathfrak{R}^3$  y la integral del escalar  $\dot{r}(t)$ , es decir,

$$\underline{r}(t, x, y, z) = \left\{ \int \dot{r}(t) dt \right\} \underline{r}_u \quad (3.2)$$

donde  $\underline{r}_u$  es el vector unitario del vector que define la dirección de movimiento sobre una trayectoria específica.

c) Sea  $\underline{v}(t, x, y, z) : J \rightarrow \mathfrak{R}^3$  con  $(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3$  y  $t \in J$  y es la función que se obtiene de derivar a  $\underline{r}(t, x, y, z)$  y que no es otra cosa que la velocidad, es decir

$$\underline{v}(t, x, y, z) = \frac{d}{dt} \underline{r}_1(t, x, y, z) + \frac{d}{dt} \underline{r}_2(t, x, y, z) + \frac{d}{dt} \underline{r}_3(t, x, y, z) \quad (3.3)$$

d) Sea  $\underline{a}(t, x, y, z) : J \rightarrow \mathfrak{R}^3$  con  $(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3$  y  $t \in J$  y es la función que se obtiene de derivar a la función  $\underline{v}$  y que no es otra cosa que la aceleración, es decir

$$\underline{a}(t, x, y, z) = \frac{d}{dt} \underline{v}_1(t, x, y, z) + \frac{d}{dt} \underline{v}_2(t, x, y, z) + \frac{d}{dt} \underline{v}_3(t, x, y, z) \quad (3.4)$$

Una vez definidas las funciones vectoriales generales de desplazamiento, velocidad y aceleración, es posible iniciar el análisis que corresponde al presente trabajo, aunque, cabe aclarar que no se requiere más que de los

incisos a y b de las definiciones anteriores, ya que el análisis de la velocidad y la aceleración se proponen como trabajos para futuras investigaciones.

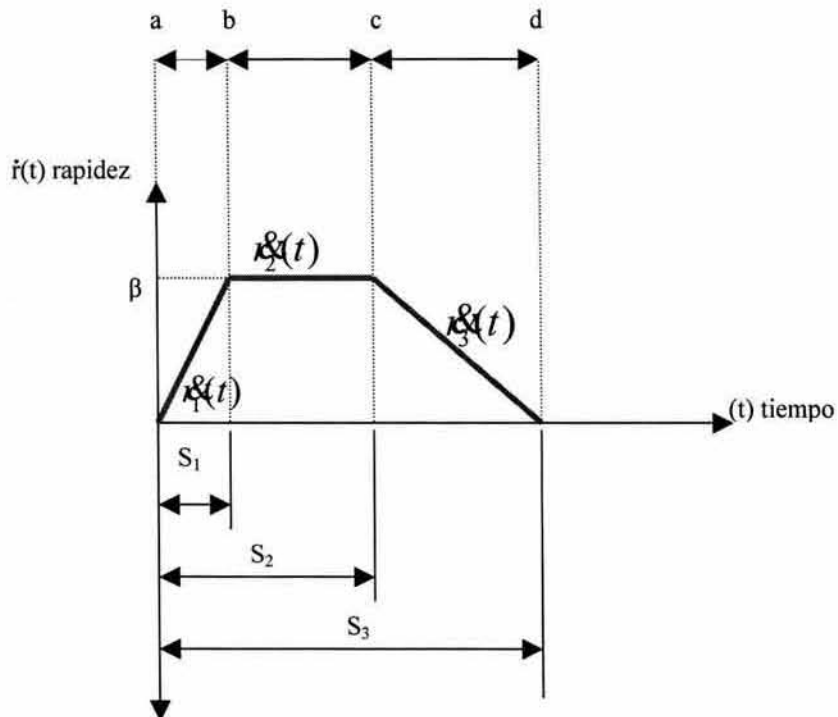
Así mismo, el análisis se realizará en dos etapas, la primera será la etapa en la cual la grúa esta ejecutando su movimiento sin carga, es decir, cuando se dirige al contenedor, y la segunda etapa será cuando la grúa dirija la carga a su nueva ubicación.

Describase ahora el procedimiento matemático que se necesita para obtener la función vectorial de desplazamiento y que consiste, en general, en los siguientes dos pasos.

### Procedimiento

#### *Paso 1*

En primer lugar se recurre a un perfil de velocidad específico (rapidez de movimiento)



y se determinan las funciones escalares que integran dicho perfil, en el caso del perfil anterior, que es del tipo del que se utilizará en el presente trabajo, se observa que éste está compuesto por tres funciones sobre intervalos de tiempo bien definidos, es decir, mientras que la función uno es una función lineal ascendente válida de 0 a  $S_1$  la función dos es una función constante que es válida de  $S_1$  a  $S_2$  y finalmente la última función es una función descendente que solamente es válida de  $S_2$  a  $S_3$ , ahora bien obsérvese que al adicionar otro perfil de velocidad, el tiempo en el que este tendría validez, obviamente tiene que empezar en el último instante de movimiento y que en el ejemplo anterior es en  $S_3$ , es decir, el intervalo de validez para un segundo perfil de velocidad en su primer función sería de  $S_3$  a  $S_4$ .

### *Paso 2*

Ahora lo que corresponde; es integrar la rapidez en el intervalo del que se trate, para posteriormente determinar el desplazamiento para obtener la función total del perfil de velocidad

$$\underline{r}(t,x,y,z) = \left\{ \int_{S_i}^{S_j} \dot{\underline{r}}_1(t) dt \right\} \underline{r}_{u_i}$$

(3.5)

donde  $u_i$  son los vectores unitarios que se forman en el intervalo que corresponde a cada función.

En este momento podemos iniciar ya el análisis y la construcción del modelo de trayectoria para la grúa, por lo que iniciaremos con el movimiento de inicio, es decir, sin carga y sobre el eje x.

### 3.3 Primer etapa de Movimiento

Iníciase ahora el análisis del movimiento inicial de la grúa, es decir, se analizará lo que ocurre cuando la grúa parte de un estado inicial de reposo hasta el momento en que llega a la posición espacial donde se ubica el contenedor que ha de transportar.

#### 3.3.1 Movimiento en la dirección $x$

Para determinar la ecuación vectorial y como ya se mencionó, se recurrirá al siguiente perfil de velocidad, que en conjunto con las condiciones correspondientes al sistema se forma tal que

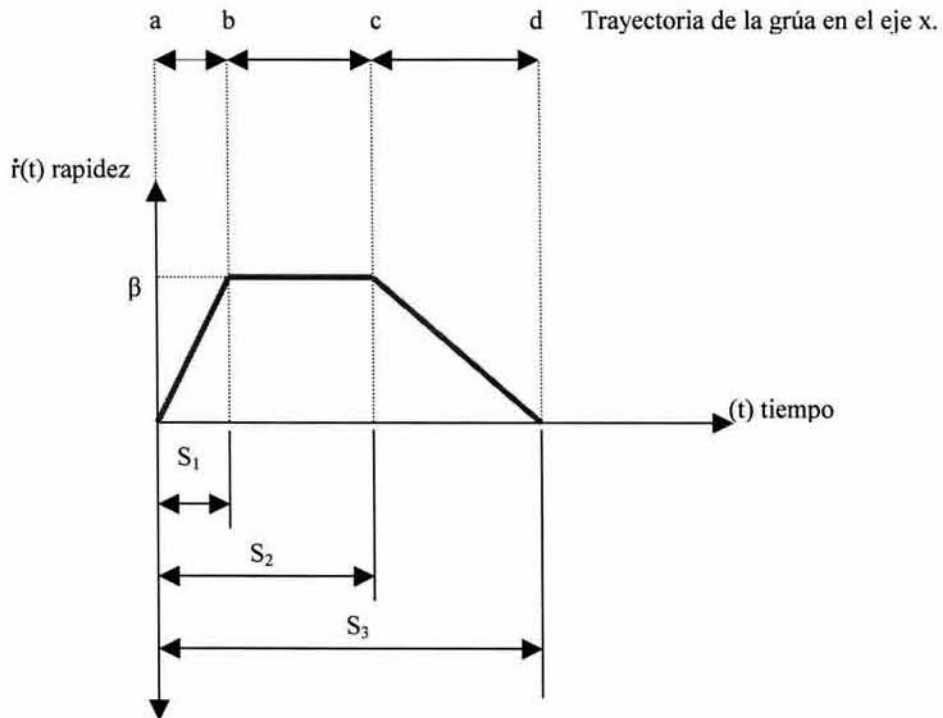




Figura 3.1 Gráfica del perfil de velocidad 1

Condiciones iniciales

$$\dot{r}_0(S_0) = 0$$

$$\dot{r}_1(S_1) = \beta$$

$$\dot{r}_2(S_2) = \beta$$

$$\dot{r}_3(S_3) = 0$$

Condiciones de frontera

$$\underline{r}_a(S_0, x, y, z) = (x_a, y_a, z_a)$$

$$\underline{r}_b(S_1, x, y, z) = (x_b, y_b, z_b)$$

$$\underline{r}_c(S_2, x, y, z) = (x_c, y_c, z_c)$$

$$\underline{r}_d(S_3, x, y, z) = (x_d, y_d, z_d)$$

para simplificar la notación de aquí en adelante haremos

$$\underline{r}_a(S_i, x, y, z) = \underline{r}_a(S_i)$$

para todos los casos

El problema consiste en hallar las ecuaciones que relacionen el tiempo y el espacio.

Solución.

Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{ab}$ ,  $0 \leq t < S_1$

Observando el perfil de velocidad, observamos, que el comportamiento es lineal y con velocidad inicial 0 y final  $\beta$  para  $t = 0$  y  $t = S_1$  respectivamente y de la ecuación general de una recta  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  se deduce que se puede formar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_0(0) &= \alpha_0 + \alpha_1 0 = 0 \\ \dot{r}_1(S_1) &= \alpha_0 + \alpha_1 S_1 = \beta \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

del cual las soluciones son:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_1 = \frac{\beta}{S_1} \end{array} \right) \quad (3.7)$$

por lo tanto la ecuación que define la rapidez para el intervalo de tiempo  $[0, S_1)$  es

$$\dot{r}_1(t) = \frac{\beta}{S_1} t \quad (3.8)$$

obténgase ahora la ecuación que define el desplazamiento

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{r}_1(\tau) d\tau &= \frac{\beta}{S_1} \int_0^t \tau d\tau \\ &= \frac{\beta}{2S_1} \tau^2 \Big|_0^t + r_0 \\ &= \frac{\beta}{2S_1} [t^2] + r_0 \\ r_1(\tau) &= \left\{ \frac{\beta}{2S_1} [t^2] + r_0 \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

ya se vio que la ecuación 3.8 es, por lo menos, una variación con respecto al tiempo (rapidez) sin embargo, lo que interesa es la función que representa al desplazamiento, o sea la 3.9, para que con ésta se obtenga la ecuación vectorial en los términos del paso 2 del procedimiento, aunque en éste momento sólo se hará el análisis para el primer intervalo de movimiento para posteriormente sumar los dos intervalos restantes.

$$\underline{r}_{ab}(t) = r_1(\tau) \underline{r}_{u_1} \quad (3.10)$$

$$\underline{r}_{ab}(t) = \left\{ \frac{\beta}{2S_1} [t^2] + r_0 \right\} \underline{r}_{u_1} \quad (3.11)$$

obsérvese que en 3.11 se está sustituyendo el valor correspondiente toda vez que 3.10 es la ecuación general se sabe además que  $\underline{r}_{u_1} = \frac{1}{\|\underline{r}_1\|} \underline{r}_1$ , es el vector unitario que define la dirección del movimiento en el eje x, el cual se determina a partir del punto **a** al **b**, es decir,  $\underline{r}_1 = (x_b, y_b, z_b) - (x_a, y_a, z_a)$  o  $\underline{r}_1 = (x_b - x_a, y_b - y_a, z_b - z_a)$ , con lo que finalmente se tiene:

$$\underline{r}_{ab}(t) = \frac{1}{2} \frac{\beta}{S_1} (t^2) \underline{r}_{u_1} + \underline{r}_0 \quad (3.12)$$

falta ahora utilizar condiciones de frontera en 3.12 es decir, sustituir

$$\begin{aligned} \underline{r}_a(0) &= (x_a, y_a, z_a) \\ \underline{r}_b(S_1) &= (x_b, y_b, z_b) \end{aligned}$$

sustituyendo primero  $t = 0$  en 3.12 se obtiene

$$\underline{r}_{ab}(0) = \frac{1}{2} \frac{\beta}{S_1} (0^2) \underline{r}_{u_1} + \underline{r}_0 = (x_a, y_a, z_a) \quad (3.13)$$

por lo tanto

$$\underline{r}_0 = (x_a, y_a, z_a) \quad (3.14)$$

sustituyendo 3.14 y la condicione  $t = S_1$  en 3.12 se tiene

$$\underline{r}_{ab}(S_1) = \frac{1}{2} \frac{\beta}{S_1} (S_1^2) \underline{r}_{u_1} + (x_a, y_a, z_a) = (x_b, y_b, z_b) \quad (3.15)$$

simplificando paso a paso se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \beta S_1 \underline{r}_{u_1} + (x_a, y_a, z_a) &= (x_b, y_b, z_b) \\ \frac{1}{2} \beta S_1 \underline{r}_{u_1} &= (x_b, y_b, z_b) - (x_a, y_a, z_a) \\ \frac{1}{2} \beta S_1 \underline{r}_{u_1} &= \underline{r}_1 \end{aligned} \quad (3.16)$$

ahora bien, se sabe que  $\underline{r}_{u_1} = \frac{1}{\|\underline{r}_1\|} \underline{r}_1$  y sustituyendo éste valor en 3.16 se

tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_1 \beta \frac{1}{\|\underline{r}_1\|} \underline{r}_1 &= \underline{r}_1 \\ \frac{1}{2} S_1 \beta \frac{1}{\|\underline{r}_1\|} \underline{r}_1 - \underline{r}_1 &= 0 \\ \left( \frac{1}{2} S_1 \beta \frac{1}{\|\underline{r}_1\|} - 1 \right) \underline{r}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

como  $\underline{r}_1 \neq 0$ , entonces de 3.17 se desprende que

$$\frac{1}{2} S_1 \beta \frac{1}{\|\underline{r}_1\|} - 1 = 0 \quad (3.18)$$

y simplificando paso a paso se llega a 3.19, es decir,

$$S_1 \beta \frac{1}{\|r_1\|} - 2 = 0$$

$$\beta = 2 \frac{\|r_1\|}{S_1} \quad (3.19)$$

por lo que la expresión vectorial buscada para el intervalo  $\overline{ab}$  es

$$r_{ab}(t) = \frac{t^2}{S_1^2} r_1 + (x_a, y_a, z_a) \quad (3.20)$$

Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{bc}$ ,  $S_1 \leq t < S_2$

Toda vez que el comportamiento en el intervalo señalado es constante, según se observa en el perfil de velocidad 1, se tiene que  $\dot{r}_2(t) = \beta$ , y como

$$\beta = \frac{2\|r_1\|}{S_1} \text{ entonces}$$

$$\dot{r}_2(t) = \frac{2\|r_1\|}{S_1} \quad (3.21)$$

para la obtención de  $r_2(t)$  se integra 3.21 tal que

$$\int_{S_1} \dot{r}_2(\tau) dt = \int_{S_1} \frac{2\|r_1\|}{S_1} d\tau = \frac{2\|r_1\|}{S_1} (t - S_1) + r_{S_1}$$

$$r_2(\tau) = \frac{2\|r_1\|}{S_1} (t - S_1) + r_{S_1} \quad (3.22)$$

obtégase ahora la ecuación vectorial correspondiente multiplicando 3.22 por el vector unitario que corresponde al segmento bc, es decir, fórmese 3.23 con los valores correspondientes tal que

$$\underline{r}_{bc}(t) = r_2(\tau) \underline{r}_{u_2} \quad (3.23)$$

sustituyendo y simplificando se obtiene

$$\begin{aligned} \underline{r}_{bc}(t) &= \left[ \frac{2\|\underline{r}_1\|}{S_1}(t - S_1) + r_{s_1} \right] \underline{r}_{u_2} \\ \underline{r}_{bc}(t) &= \frac{2\|\underline{r}_1\|}{S_1}(t - S_1) \underline{r}_{u_2} + \underline{r}_{s_1} \end{aligned} \quad (3.24)$$

se sabe que  $\underline{r}_{u_2} = \frac{1}{\|\underline{r}_2\|} \underline{r}_2$  y  $\underline{r}_2 = (x_c - x_b, y_c - y_b, z_c - z_b)$  por lo que sustituir

las igualdades anteriores en 3.24 resulta en

$$\begin{aligned} \underline{r}_{bc}(t) &= \frac{2\|\underline{r}_1\|}{S_1}(t - S_1) \frac{1}{\|\underline{r}_2\|} \underline{r}_2 + \underline{r}_{s_1} \\ \underline{r}_{bc}(t) &= \frac{2r_2\|\underline{r}_1\|}{S_1\|\underline{r}_2\|}(t - S_1) + \underline{r}_{s_1} \end{aligned} \quad (3.25)$$

de las condiciones de frontera se tiene

$$\underline{r}_{bc}(S_1) = \frac{2\underline{r}_2 \|\underline{r}_1\|}{S_1 \|\underline{r}_2\|} (S_1 - S_1) + \underline{r}_{s_1} = (x_b, y_b, z_b) \quad (3.26)$$

simplificando 3.26 se obtiene

$$\underline{r}_{s_1} = (x_b, y_b, z_b) \quad (3.27)$$

sustituyendo 3.27 en 3.25 se llega a

$$\underline{r}_{bc}(t) = \frac{2\underline{r}_2 \|\underline{r}_1\|}{S_1 \|\underline{r}_2\|} (t - S_1) + (x_b, y_b, z_b) \quad (3.28)$$

al momento hemos determinado completamente la ecuación que define el movimiento en el intervalo bc, sin embargo al momento de la simulación se cae en la cuenta de que  $S_2$  es una incógnita por lo que es conveniente desarrollarla en función de los valores que se conocen, de tal forma que sustituyendo  $t = S_2$  en 3.28 se tiene que

$$\underline{r}_{bc}(S_1) = \frac{2\underline{r}_2 \|\underline{r}_1\|}{S_1 \|\underline{r}_2\|} (S_2 - S_1) + (x_b, y_b, z_b) = (x_c, y_c, z_c) \quad (3.29)$$

simplificando 3.29 paso a paso se llega a 3.31, tal que

$$\begin{aligned}
\frac{2\underline{r}_2\|\underline{r}_1\|}{S_1\|\underline{r}_2\|}(S_2 - S_1) &= (x_c, y_c, z_c) - (x_b, y_b, z_b) \\
\frac{2\underline{r}_2\|\underline{r}_1\|}{S_1\|\underline{r}_2\|}(S_2 - S_1) &= \underline{r}_2 \\
\frac{2\underline{r}_2\|\underline{r}_1\|}{S_1\|\underline{r}_2\|}(S_2 - S_1) - \underline{r}_2 &= 0 \\
\left[ \frac{2\|\underline{r}_1\|}{S_1\|\underline{r}_2\|}(S_2 - S_1) - 1 \right] \underline{r}_2 &= 0
\end{aligned} \tag{3.30}$$

como  $\underline{r}_2 \neq 0$  entonces de 3.30 y simplificando paso a paso se desprende que

$$\begin{aligned}
\frac{2\|\underline{r}_1\|}{S_1\|\underline{r}_2\|}(S_2 - S_1) - 1 &= 0 \\
\frac{2\|\underline{r}_1\|}{S_1\|\underline{r}_2\|}(S_2 - S_1) &= 1 \\
S_2 - S_1 &= \frac{S_1\|\underline{r}_2\|}{2\|\underline{r}_1\|} \\
S_2 &= \frac{S_1\|\underline{r}_2\|}{2\|\underline{r}_1\|} + S_1 \\
S_2 &= \left[ \frac{S_1\|\underline{r}_2\|}{2\|\underline{r}_1\|} + \frac{S_1 2\|\underline{r}_1\|}{2\|\underline{r}_1\|} \right] \\
S_2 &= \frac{S_1(2\|\underline{r}_1\| + \|\underline{r}_2\|)}{2\|\underline{r}_1\|}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

nótese que en 3.31 se tiene al tiempo  $S_2$  en función de  $S_1$ .



Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{cd}$ ,  $S_2 \leq t < S_3$

Al igual que el primer segmento del perfil de velocidad, éste último segmento tiene un comportamiento lineal, sólo que a diferencia del primero, éste último tiene pendiente de signo negativo, es decir, el primer caso es ascendente, mientras que éste caso es descendente, no obstante dicha diferencia, el análisis es el mismo, por tanto de  $\dot{r}_i(S_1) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ , y utilizando condiciones iniciales se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_2(S_2) &= \beta = \frac{2\|r_1\|}{S_1} \\ \dot{r}_3(S_3) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

sustituyendo 3.22 respectivamente en  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 S_2 &= \frac{2\|r_1\|}{S_1} \\ \alpha_0 + \alpha_1 S_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

y cuyas soluciones son

$$\alpha_0 = -\alpha_1 S_3 \quad (3.34)$$

$$\alpha_1 = \frac{2\|r_1\|}{S_1(S_2 - S_3)} \quad (3.35)$$

sustituyendo 3.34 y 3.35 en  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  resulta en

$$\dot{r}_3(\tau) = \frac{2\|\underline{r}_1\|}{S_1(S_2 - S_3)}[t - S_3] \quad (3.37)$$

para determinar  $r_3(t)$  se integra 3.37 paso a paso en la siguiente forma, recuérdese que  $r_3(t)$  es la parte escalar del movimiento,

$$\begin{aligned} \int_{S_2}^t \dot{r}_3(\tau) d\tau &= \frac{2\|\underline{r}_1\|}{S_1(S_2 - S_3)} \int_{S_2}^t (\tau - S_3) d\tau \\ \int_{S_2}^t \dot{r}_3(\tau) d\tau &= \frac{2\|\underline{r}_1\|}{S_1(S_2 - S_3)} \left[ \frac{1}{2}\tau^2 - S_3\tau \right]_{S_2}^t d\tau + r_{S_2} \\ r_3(\tau) &= \frac{\|\underline{r}_1\|}{S_1(S_2 - S_3)} (t - S_2)[(t + S_2) - 2S_3] + r_{S_2} \end{aligned} \quad (3.38)$$

3.38 es la parte escalar total del intervalo de análisis, por lo que corresponde hacer  $\underline{r}_{cd}(t) = r_3(\tau)\underline{r}_{u_3}$

$$\underline{r}_{cd}(t) = \left\{ \frac{\|\underline{r}_1\|}{S_1(S_2 - S_3)} (t - S_2)[(t + S_2) - 2S_3] + r_{S_2} \right\} \underline{r}_{u_3} \quad (3.39)$$

como  $\underline{r}_{u_3} = \frac{1}{\|\underline{r}_3\|} \underline{r}_3$  y  $\underline{r}_3 = (x_d - x_c, y_d - y_c, z_d - z_c)$

entonces 3.39 se explicita a

$$\underline{r}_{cd}(t) = \frac{\|\underline{r}_1\|}{S_1(S_2 - S_3)} (t - S_2)[(t + S_2) - 2S_3] \underline{r}_{u_3} + \underline{r}_{S_2}$$

y posteriormente a

$$\underline{r}_{cd}(t) = \frac{\underline{r}_3 \|\underline{r}_1\|}{\|\underline{r}_3\| S_1 (S_2 - S_3)} (t - S_2) [(t + S_2) - 2S_3] + \underline{r}_{S_2} \quad (3.40)$$

como siguiente paso determínese el valor de  $\underline{r}_{S_2}$ , para lo que se recurre a las condiciones de frontera del intervalo de análisis

$$\underline{r}_{cd}(S_2) = \frac{\underline{r}_3 \|\underline{r}_1\|}{\|\underline{r}_3\| S_1 (S_2 - S_3)} (S_2 - S_2) [(S_2 + S_2) - 2S_3] + \underline{r}_{S_2} = (x_c, y_c, z_c) \quad (3.41)$$

simplificando y sustituyendo en 3.41 se determina que

$$\underline{r}_{S_2} = (x_c, y_c, z_c) \quad (3.42)$$

sustituir 3.42 en 3.40 resulta en

$$\underline{r}_{cd}(t) = \frac{\underline{r}_3 \|\underline{r}_1\|}{\|\underline{r}_3\| S_1 (S_2 - S_3)} (t - S_2) [(t + S_2) - 2S_3] + (x_c, y_c, z_c) \quad (3.43)$$

que es la ecuación general del intervalo de análisis, ahora puede ser determinado el valor de  $S_3$  en la siguiente forma:

se sabe que  $\underline{r}_{cd}(S_3) = (x_d, y_d, z_d)$ , sustituyendo el valor anterior en 3.43 se tiene que

$$\underline{r}_{cd}(S_3) = \frac{\underline{r}_3 \|\underline{r}_1\|}{\|\underline{r}_3\| S_1 (S_2 - S_3)} (S_3 - S_2) [(S_3 + S_2) - 2S_3] + (x_c, y_c, z_c) = (x_d, y_d, z_d) \quad (3.44)$$

sustitúyase y simplifíquese paso a paso 3.44 como se muestra

$$\begin{aligned} \frac{\underline{r}_3 \|\underline{r}_1\|}{\|\underline{r}_3\| S_1 (S_2 - S_3)} (S_3 - S_2) [(S_3 + S_2) - 2S_3] &= (x_d, y_d, z_d) - (x_c, y_c, z_c) \\ \frac{\underline{r}_3 \|\underline{r}_1\|}{\|\underline{r}_3\| S_1 (S_2 - S_3)} (S_3 - S_2) [S_2 - S_3] &= \underline{r}_3 \\ \frac{\underline{r}_3 \|\underline{r}_1\|}{\|\underline{r}_3\| S_1} (S_3 - S_2) &= \underline{r}_3 \\ \frac{\underline{r}_3 \|\underline{r}_1\|}{\|\underline{r}_3\| S_1} (S_3 - S_2) - \underline{r}_3 &= 0 \\ \left[ \frac{\|\underline{r}_1\|}{\|\underline{r}_3\| S_1} (S_3 - S_2) - 1 \right] \underline{r}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

de 3.45 y como  $\underline{r}_3 \neq 0$  se tiene que

$$\left[ \frac{\|\underline{r}_1\|}{\|\underline{r}_3\| S_1} (S_3 - S_2) - 1 \right] = 0 \quad (3.46)$$

simplificando 3.46 paso a paso resulta en

$$\begin{aligned} (S_3 - S_2) &= \frac{\|\underline{r}_3\|}{\|\underline{r}_1\|} S_1 \\ S_3 &= \frac{\|\underline{r}_3\|}{\|\underline{r}_1\|} S_1 + S_2 \\ S_3 &= \frac{\|\underline{r}_3\|}{\|\underline{r}_1\|} S_1 + S_2 \frac{\|\underline{r}_1\|}{\|\underline{r}_1\|} \\ S_3 &= \frac{S_1 \|\underline{r}_3\| + S_2 \|\underline{r}_1\|}{\|\underline{r}_1\|} \end{aligned} \quad (3.47)$$

como  $S_2 = \frac{S_1(2\|\underline{r}_1\| + \|\underline{r}_2\|)}{2\|\underline{r}_1\|}$  entonces 3.47 se transforma en

$$\begin{aligned}
 S_3 &= \frac{\|\underline{r}_3\|}{\|\underline{r}_1\|} S_1 + \frac{S_1(2\|\underline{r}_1\| + \|\underline{r}_2\|)}{2\|\underline{r}_1\|} \\
 S_3 &= \frac{2S_1\|\underline{r}_3\| + S_1(2\|\underline{r}_1\| + \|\underline{r}_2\|)}{2\|\underline{r}_1\|} \\
 S_3 &= \frac{S_1[2\|\underline{r}_1\| + \|\underline{r}_2\| + 2\|\underline{r}_3\|]}{2\|\underline{r}_1\|} \tag{3.48}
 \end{aligned}$$

ahora se pueden resumir todos los resultados de la siguiente forma

Modelo total de trayectoria en x	Intervalos de tiempo
$\left\{ \begin{array}{l} \frac{t^2}{S_1^2} \underline{r}_1 + (x_a, y_a, z_a) \\ \frac{2\underline{r}_2\ \underline{r}_1\ }{S_1\ \underline{r}_2\ } (t - S_1) + (x_b, y_b, z_b) \\ \frac{\underline{r}_3\ \underline{r}_1\ }{\ \underline{r}_3\ S_1(S_2 - S_3)} (t - S_2)[(t + S_2) - 2S_3] + \\ \quad + (x_c, y_c, z_c) \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} S_0 \leq t < S_1 \\ S_1 \leq t < S_2 \\ S_2 \leq t \leq S_3 \end{array} \right.$

Tabla 1. Resumen de resultados de movimiento en x.

Adicionalmente se tiene;

Tiempos en función de las normas vectoriales.

$$S_0 = 0$$

$$S_1 = S_1$$

$$S_2 = \frac{S_1(2\|\underline{r}_1\| + \|\underline{r}_2\|)}{2\|\underline{r}_1\|}$$

$$S_3 = \frac{S_1[2\|\underline{r}_1\| + \|\underline{r}_2\| + 2\|\underline{r}_3\|]}{2\|\underline{r}_1\|}$$

con

$$\underline{r}_{ad}(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{S_1^2} \underline{r}_1 + (x_a, y_a, z_a) \\ \frac{2\underline{r}_2\|\underline{r}_1\|}{S_1\|\underline{r}_2\|} (t - S_1) + (x_b, y_b, z_b) \\ \frac{\underline{r}_3\|\underline{r}_1\|}{\|\underline{r}_3\|S_1(S_2 - S_3)} (t - S_2)[(t + S_2) - 2S_3] + \\ \quad + (x_c, y_c, z_c) \end{cases}$$

### 3.3.2 Movimiento en la dirección y

Al igual que el movimiento en “x”, para “y” se recurrirá a un perfil de velocidad determinado, así como a las condiciones propias del momento de análisis, obsérvese además que la función que usaremos, es una función adelantada, es decir, el movimiento en “y” no inicia en el tiempo  $t=0$ , sino que es la continuación del último instante de movimiento en x, es decir, inicia en  $S_3$ .

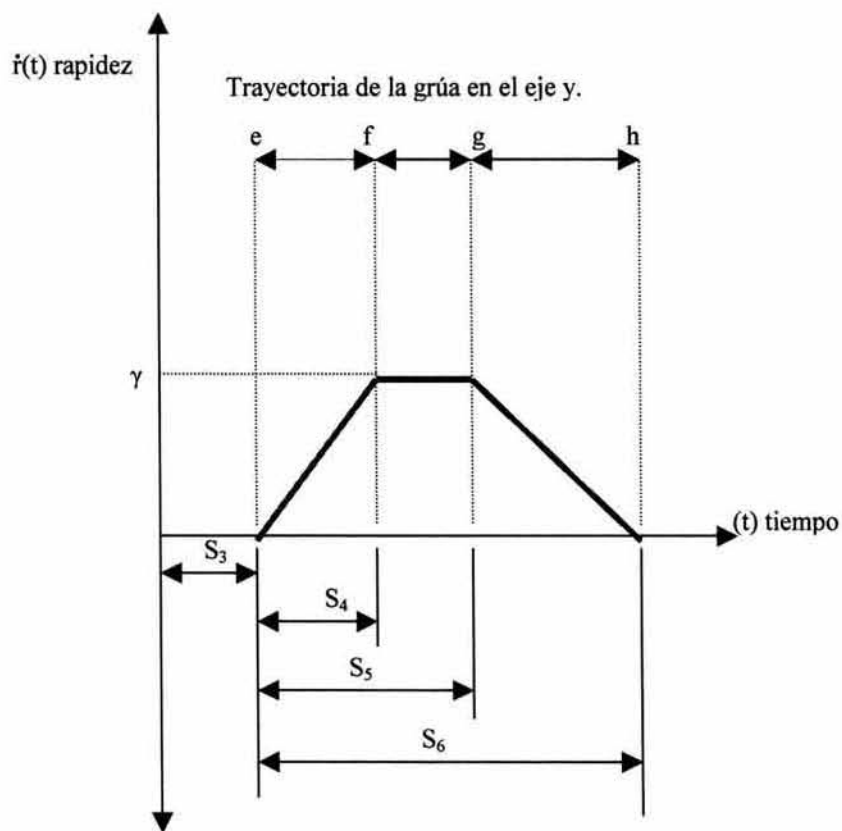


Figura 3.2 Gráfica del perfil de velocidad 2

Condiciones iniciales

$$\dot{r}_3(S_3) = 0$$

$$\dot{r}_4(S_4) = \gamma$$

$$\dot{r}_5(S_5) = \gamma$$

$$\dot{r}_6(S_6) = 0$$

Condiciones de frontera

$$\underline{r}_e(S_3, x, y, z) = (x_e, y_e, z_e)$$

$$\underline{r}_f(S_4, x, y, z) = (x_f, y_f, z_f)$$

$$\underline{r}_g(S_5, x, y, z) = (x_g, y_g, z_g)$$

$$\underline{r}_h(S_6, x, y, z) = (x_h, y_h, z_h)$$

para simplificar la notación de aquí en adelante haremos

$$\underline{r}_a(S_i, x, y, z) = \underline{r}_a(S_i)$$

para todos los casos

El problema consiste en hallar las ecuaciones que relacionen el tiempo y el espacio.

Solución.

Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{ef}$ ,  $S_3 \leq t < S_4$

Observando el perfil de velocidad, se nota, que el comportamiento es lineal y con velocidad inicial 0 y final  $\beta$  para  $t = S_3$  y  $t = S_4$  respectivamente y de la ecuación general de una recta  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  se deduce que se puede formar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_3(S_3) = \alpha_0 + \alpha_1 S_3 = 0 \\ \dot{r}_4(S_4) = \alpha_0 + \alpha_1 S_4 = \gamma \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

y de la ecuación general de una recta ( $y = mx + b$ ) se desprende el siguiente sistema de ecuaciones:



$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 S_3 &= 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 S_4 &= \gamma \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

del cual las soluciones son:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= -\alpha_1 S_3 \\ \alpha_1 &= \frac{\gamma}{S_4 - S_3} \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

sustituyendo 3.51 en  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  se tiene

$$\dot{r}_4(\tau) = \frac{\gamma}{S_4 - S_3} (\tau - S_3) \quad (3.52)$$

que es la ecuación que define la rapidez para el segmento  $\overline{ef}$

obtégase ahora la ecuación que define el desplazamiento, y como se ha visto con anterioridad se debe integrar 3.52, tal que

$$\int_{S_3}^t \dot{r}_4(\tau) d\tau = \frac{\gamma}{S_4 - S_3} \left[ \int_{S_3}^t \tau d\tau - \int_{S_3}^t S_3 d\tau \right] \quad (3.53)$$

integrando 3.53 paso a paso se tiene

$$\begin{aligned}
&= \frac{\gamma}{S_4 - S_3} \left[ \frac{1}{2} \tau^2 \Big|_{S_3}^t - S_3 \tau \Big|_{S_3}^t + r_{S_3} \right] \\
&= \frac{\gamma}{S_4 - S_3} \left[ \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} S_3^2 - (S_3 t - S_3^2) \right] + r_{S_3} \\
r_4(\tau) &= \left\{ \frac{\gamma}{S_4 - S_3} \right\} \frac{t^2}{2} - \frac{S_3}{2} - S_3 t + S_3^2 + r_{S_3} \\
r_4(\tau) &= \left\{ \frac{\gamma}{S_4 - S_3} \right\} \frac{(t - S_3)^2}{2} + r_{S_3} \tag{3.54}
\end{aligned}$$

la expresión vectorial se obtiene a partir de 3.54 y haciendo

$$\underline{r}_{ef}(t) = r_4(\tau) \underline{r}_{u_4} \tag{3.55}$$

al sustituir 3.54 en 3.55 se obtiene

$$\underline{r}_{ef}(t) = \left\{ \left[ \frac{\gamma}{S_4 - S_3} \right] \frac{(t - S_3)^2}{2} + r_{S_3} \right\} \underline{r}_{u_4} \tag{3.56}$$

donde  $\underline{r}_{u_4} = \frac{1}{\|\underline{r}_4\|} \underline{r}_4$ , es el vector unitario que define la dirección del movimiento en el eje “y”, o mejor dicho, es paralelo a dicho eje, recúrrase ahora al vector formado por las coordenadas espaciales que van de **e** a **f**, es decir,  $\underline{r}_4 = (x_f, y_f, z_f) - (x_e, y_e, z_e)$  o  $\underline{r}_4 = (x_f - x_e, y_f - y_e, z_f - z_e)$ , finalmente 3.56 resulta en

$$\underline{r}_{ef}(t) = \left[ \frac{\gamma}{S_4 - S_3} \right] \frac{(t - S_3)^2}{2} \underline{r}_{u_4} + \underline{r}_{S_3} \quad (3.57)$$

y de las condiciones iniciales del segmento de análisis, que son

$$\left. \begin{array}{l} \underline{r}_e(S_3) = (x_e, y_e, z_e) \\ \underline{r}_f(S_4) = (x_f, y_f, z_f) \end{array} \right\} \quad (3.58)$$

y utilizando la primer condición en 3.57 resulta en

$$\underline{r}_{ef}(S_3) = \left[ \frac{\gamma}{S_4 - S_3} \right] \frac{(S_3 - S_3)^2}{2} \underline{r}_{u_4} + \underline{r}_{S_3} = (x_e, y_e, z_e) \quad (3.59)$$

simplificando 3.59 se obtiene que

$$\underline{r}_{S_3} = (x_e, y_e, z_e) \quad (3.60)$$

sustituir 3.60 en 3.57 resulta en

$$\underline{r}_{ef}(t) = \left[ \frac{\gamma}{S_4 - S_3} \right] \frac{(t - S_3)^2}{2} \underline{r}_{u_4} + (x_e, y_e, z_e) \quad (3.61)$$

donde 3.61 es la solución completa para el intervalo de análisis, sin embargo, nótese que ahora se puede hallar el valor de la rapidez en función de la norma del vector que define el intervalo de movimiento y los tiempos de inicio y fin de dicho intervalo y paso a paso se obtiene

$$\underline{r}_{ef}(S_4) = \left[ \frac{\gamma}{S_4 - S_3} \right] \frac{(S_4 - S_3)^2}{2} \underline{r}_{u_4} + (x_e, y_e, z_e) = (x_f, y_f, z_f) \quad (3.62)$$

simplificar 3.62 resulta en

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(S_4 - S_3)}{2} \underline{r}_{u_4} + \underline{r}_{S_3} + (x_e, y_e, z_e) &= (x_f, y_f, z_f) \\ \frac{\gamma(S_4 - S_3)}{2} \underline{r}_{u_4} &= (x_f, y_f, z_f) - (x_e, y_e, z_e) \\ \frac{\gamma(S_4 - S_3)}{2} \underline{r}_{u_4} &= \underline{r}_4 \end{aligned} \quad (3.63)$$

ahora bien, se sabe que  $\underline{r}_{u_4} = \frac{1}{\|\underline{r}_4\|} \underline{r}_4$  por lo tanto sustituir lo anterior en 3.63

resulta en

$$\begin{aligned} \frac{\gamma(S_4 - S_3)}{2} \frac{1}{\|\underline{r}_4\|} \underline{r}_4 - \underline{r}_4 &= 0 \\ \underline{r}_4 \left( \frac{\gamma(S_4 - S_3)}{2} \frac{1}{\|\underline{r}_4\|} - 1 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

de 3.64 y como  $\underline{r}_4 \neq 0$ , se obtiene que

$$\begin{aligned} \left( \frac{\gamma(S_4 - S_3)}{2} \frac{1}{\|\underline{r}_4\|} - 1 \right) &= 0 \\ \gamma(S_4 - S_3) \frac{1}{\|\underline{r}_4\|} - 2 &= 0 \\ \gamma &= 2 \frac{\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)} \end{aligned} \quad (3.65)$$

por lo que la expresión vectorial buscada para el intervalo  $\overline{ef}$  es

$$\underline{r}_{ef}(t) = \frac{(t - S_3)^2}{(S_4 - S_3)^2} \underline{r}_4 + (x_e, y_e, z_e) \quad (3.66)$$

Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{fg}$ ,  $S_4 \leq t < S_5$

Toda vez que el comportamiento es constante, según se aprecia en el perfil de velocidad 2, se tiene que  $\dot{r}_5(t) = \gamma$  y como  $\gamma = 2 \frac{\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)}$  entonces

$$\dot{r}_5(\tau) = \frac{2\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)} \quad (3.67)$$

como en los casos anteriores, se tiene que integrar 3.67, y haciéndolo paso a paso se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{S_4} \dot{r}_5(\tau) d\tau &= \int_{S_4} \frac{2\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)} d\tau = \frac{2\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)} (t - S_4) + r_{S_4} \\ r_5(\tau) &= \frac{2\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)} (t - S_4) + r_{S_4} \end{aligned} \quad (3.68)$$

dado que la ecuación general que define al movimiento en el intervalo dado es

$$\underline{r}_{fg}(t) = r_5(\tau) \underline{r}_{u_5} \quad (3.69)$$

y sustituir 3.68 en 3.69 da como resultado

$$\begin{aligned} \underline{r}_{fg}(t) &= \left[ \frac{2\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)}(t - S_4) + r_{S_4} \right] \underline{r}_{u_5} \\ \underline{r}_{fg}(t) &= \frac{2\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)}(t - S_4) \underline{r}_{u_5} + \underline{r}_{S_4} \end{aligned} \quad (3.70)$$

donde  $\underline{r}_{u_5} = \frac{1}{\|\underline{r}_5\|} \underline{r}_5$  y  $\underline{r}_5 = (x_g - x_f, y_g - y_f, z_g - z_f)$  sustitúyanse las igualdades anteriores en la expresión vectorial 3.70, es decir

$$\underline{r}_{fg}(t) = \frac{2\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)}(t - S_4) \frac{1}{\|\underline{r}_5\|} \underline{r}_5 + \underline{r}_{S_4} \quad (3.71)$$

a su vez simplificar 3.71 da como resultado

$$\underline{r}_{fg}(t) = \frac{2\|\underline{r}_4\|(t - S_4)}{\|\underline{r}_5\|(S_4 - S_3)} \underline{r}_5 + \underline{r}_{S_4} \quad (3.72)$$

que es la ecuación general de movimiento del intervalo de análisis, aplicando la condición de frontera respectiva se obtiene

$$\underline{r}_{fg}(S_4) = \frac{2\|\underline{r}_4\|(S_4 - S_4)}{\|\underline{r}_5\|(S_4 - S_3)} \underline{r}_5 + \underline{r}_{S_4} = (x_f, y_f, z_f) \quad (3.73)$$

simplificar 3.73 da como resultado que

$$\underline{r}_{S_4} = (x_f, y_f, z_f) \quad (3.74)$$

sustituir 3.74 en 3.72 resulta en

$$\underline{r}_{fg}(t) = \frac{2\|\underline{r}_4\|(t - S_4)}{\|\underline{r}_5\|(S_4 - S_3)} \underline{r}_5 + (x_f, y_f, z_f) \quad (3.75)$$

obsérvese que ahora es posible determinar el valor de  $S_5$  en función de los valores temporales anteriores y las normas ya conocidas, sustituyendo la condición que corresponde a  $S_5$  en 3.75 y simplificando paso a paso da como resultado

$$\begin{aligned} \frac{2\|\underline{r}_4\|(S_5 - S_4)}{\|\underline{r}_5\|(S_4 - S_3)} \underline{r}_5 &= (x_g, y_g, z_g) - (x_f, y_f, z_f); \\ \frac{2\|\underline{r}_4\|(S_5 - S_4)}{\|\underline{r}_5\|(S_4 - S_3)} \underline{r}_5 &= \underline{r}_5 \\ \frac{2\|\underline{r}_4\|(S_5 - S_4)}{\|\underline{r}_5\|(S_4 - S_3)} \underline{r}_5 - \underline{r}_5 &= 0; \\ \left[ \frac{2\|\underline{r}_4\|(S_5 - S_4)}{\|\underline{r}_5\|(S_4 - S_3)} - 1 \right] \underline{r}_5 &= 0 \end{aligned} \quad (3.76)$$

de 3.76 y como  $\underline{r}_5 \neq 0$  y simplificando paso a paso se obtiene que

$$\frac{2\|r_4\|(S_5 - S_4)}{\|r_5\|(S_4 - S_3)} - 1 = 0$$

$$\frac{2\|r_4\|(S_5 - S_4)}{\|r_5\|(S_4 - S_3)} = 1$$

$$(S_5 - S_4) = \frac{\|r_5\|(S_4 - S_3)}{2\|r_4\|}$$

$$S_5 = \frac{\|r_5\|(S_4 - S_3)}{2\|r_4\|} + S_4$$

$$S_5 = \left[ \frac{\|r_5\|(S_4 - S_3)}{2\|r_4\|} + \frac{2\|r_4\|S_4}{2\|r_4\|} \right]$$

$$S_5 = \frac{\|r_5\|(S_4 - S_3) + 2\|r_4\|S_4}{2\|r_4\|}$$

$$S_5 = \frac{2\|r_4\|S_4 + \|r_5\|S_4 - \|r_5\|S_3}{2\|r_4\|}$$

$$S_5 = \frac{S_4(\|r_5\| + 2\|r_4\|) - S_3\|r_5\|}{2\|r_4\|} \quad (3.77)$$

nótese que ahora tenemos el intervalo de tiempo  $S_5$  en función de  $S_4$ , hecho muy conveniente, ya que así evitamos incógnitas adicionales para el modelo matemático.



Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{gh}$ ,  $S_5 \leq t < S_6$

Al igual que el primer segmento del perfil de velocidad, éste último segmento tiene un comportamiento lineal, sólo que a diferencia del primero, éste último tiene pendiente de signo negativo, es decir, el primer caso es ascendente, mientras que éste caso es descendente, no obstante dicha diferencia, el análisis es el mismo, por tanto de  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ , y utilizando condiciones iniciales se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_6(S_5) &= \gamma = \frac{2\|r_4\|}{(S_4 - S_3)} \\ \dot{r}_6(S_6) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.78)$$

sustituyendo 3.78 respectivamente en  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 S_5 &= \frac{2\|r_4\|}{(S_4 - S_3)} \\ \alpha_0 + \alpha_1 S_6 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.79)$$

y cuyas soluciones son

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{2\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)(S_5 - S_6)} S_6 \\ \alpha_1 &= \frac{2\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)(S_5 - S_6)} \end{aligned} \right\} \quad (3.80)$$

sustituir 3.80 en  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  resulta en

$$\dot{r}_6(\tau) = \frac{2\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)(S_5 - S_6)} \tau - \frac{2\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)(S_5 - S_6)} S_6 \quad (3.81)$$

para determinar  $r_6(t)$  se integra 3.81 paso a paso en la siguiente forma, recuérdese que  $r_6(t)$  es la parte escalar del movimiento,

$$\begin{aligned} \dot{r}_6(\tau) &= \frac{2\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)(S_5 - S_6)} (\tau - S_6) \\ \int_{S_5} \dot{r}_6(\tau) d\tau &= \frac{2\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)(S_5 - S_6)} \int_{S_5} (\tau - S_6) d\tau \\ \int_{S_5} \dot{r}_6(\tau) d\tau &= \frac{2\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)(S_5 - S_6)} \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{S_5^2}{2} + S_6 S_5 - S_6 t \right] + r_{S_5} \\ \int_{S_5} \dot{r}_6(\tau) d\tau &= \frac{\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)(S_5 - S_6)} \left[ t^2 - S_5^2 + 2S_6 S_5 - 2S_6 t \right] + r_{S_5} \\ r_6(\tau) &= \frac{\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)(S_5 - S_6)} (t - S_5) [t + S_5 - 2S_6] + r_{S_5} \quad (3.82) \end{aligned}$$

3.82 es la parte escalar total del intervalo de análisis, por lo que corresponde hacer  $\underline{r}_{gh}(t) = r_6(\tau)\underline{r}_{u_6}$

$$\underline{r}_{gh}(t) = \left\{ \frac{\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)(S_5 - S_6)}(t - S_5)[t + S_5 - 2S_6] + r_{S_5} \right\} \underline{r}_{u_6} \quad (3.83)$$

donde  $\underline{r}_{u_6} = \frac{1}{\|\underline{r}_6\|} \underline{r}_6$  y  $\underline{r}_6 = (x_h - x_g, y_h - y_g, z_h - z_g)$  sustituyendo lo anterior en

3.83 resulta en

$$\underline{r}_{gh}(t) = \left\{ \frac{\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)(S_5 - S_6)}(t - S_5)[t + S_5 - 2S_6] \frac{1}{\|\underline{r}_6\|} \underline{r}_6 + r_{S_5} \right\}$$

simplificando la ecuación anterior se obtiene

$$\underline{r}_{gh}(t) = \frac{\|\underline{r}_4\|(t - S_5)}{\|\underline{r}_6\|(S_4 - S_3)(S_5 - S_6)} [t + S_5 - 2S_6] \underline{r}_6 + r_{S_5} \quad (3.84)$$

como siguiente paso determínese el valor de  $\underline{r}_{S_5}$ , para lo que se recurre a las condiciones de frontera del intervalo de análisis

$$\underline{r}_{gh}(S_5) = \frac{\|\underline{r}_4\|(S_5 - S_5)}{\|\underline{r}_6\|(S_4 - S_3)(S_5 - S_6)} [t + S_5 - 2S_6] \underline{r}_6 + \underline{r}_{S_5} = (x_g, y_g, z_g) \quad (3.85)$$

simplificando y sustituyendo en 3.85 se determina que

$$\underline{r}_{S_5} = (x_g, y_g, z_g) \quad (3.86)$$

sustituir 3.86 en 3.84 resulta en

$$\underline{r}_{gh}(t) = \frac{\|\underline{r}_4\|(t - S_5)[t + S_5 - 2S_6]}{\|\underline{r}_6\|(S_4 - S_3)(S_5 - S_6)} \underline{r}_6 + (x_g, y_g, z_g) \quad (3.87)$$

que es la ecuación general del intervalo de análisis, ahora puede ser determinado el valor de  $S_6$  en la siguiente forma:

se sabe que  $\underline{r}_{gh}(S_6) = (x_h, y_h, z_h)$ , sustituyendo el valor anterior en 3.87 se tiene que

$$\underline{r}_{gh}(S_6) = \frac{\|\underline{r}_4\|(S_6 - S_5)[S_6 + S_5 - 2S_6]}{\|\underline{r}_6\|(S_4 - S_3)(S_5 - S_6)} \underline{r}_6 + (x_g, y_g, z_g) = (x_h, y_h, z_h) \quad (3.88)$$

sustitúyase y simplifíquese paso a paso 3.88 como se muestra

$$\begin{aligned} \frac{\|\underline{r}_4\|(S_4 - S_5)[S_5 - S_6]}{\|\underline{r}_6\|(S_4 - S_3)(S_5 - S_6)} \underline{r}_6 &= (x_h, y_h, z_h) - (x_g, y_g, z_g) \\ \frac{\|\underline{r}_4\|(S_6 - S_5)}{\|\underline{r}_6\|(S_4 - S_3)} \underline{r}_6 &= \underline{r}_6 \\ \frac{\|\underline{r}_4\|(S_6 - S_5)}{\|\underline{r}_6\|(S_4 - S_3)} \underline{r}_6 - \underline{r}_6 &= 0 \quad (3.89) \end{aligned}$$

de 3.89 y como  $\underline{r}_6 \neq 0$  se concluye que

$$\begin{aligned} \underline{r}_6 \left( \frac{\|\underline{r}_4\|(S_6 - S_5)}{\|\underline{r}_6\|(S_4 - S_3)} - 1 \right) &= 0 \\ \frac{\|\underline{r}_4\|(S_6 - S_5)}{\|\underline{r}_6\|(S_4 - S_3)} - 1 &= 0 \quad (3.90) \end{aligned}$$

entonces de 3.90 se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{\|r_4\|(S_6 - S_5)}{\|r_6\|(S_4 - S_3)} &= 1 \\
 \|r_4\|(S_6 - S_5) &= \|r_6\|(S_4 - S_3) \\
 S_6 - S_5 &= \frac{\|r_6\|(S_4 - S_3)}{\|r_4\|} \\
 S_6 &= \frac{\|r_6\|(S_4 - S_3)}{\|r_4\|} + S_5
 \end{aligned} \tag{3.91}$$

pero se sabe que  $S_5 = \frac{S_4\|r_5\| + 2S_4\|r_4\| - S_3\|r_5\|}{2\|r_4\|}$  y por lo tanto sustituyendo y

simplificando paso a paso 3.91 da como resultado

$$\begin{aligned}
S_6 &= \frac{\|\underline{r}_6\|(S_4 - S_3)}{\|\underline{r}_4\|} + \frac{S_4\|\underline{r}_5\| + 2S_4\|\underline{r}_4\| - S_3\|\underline{r}_5\|}{2\|\underline{r}_4\|} \\
S_6 &= \frac{2\|\underline{r}_6\|(S_4 - S_3) + S_4\|\underline{r}_5\| + 2S_4\|\underline{r}_4\| - S_3\|\underline{r}_5\|}{2\|\underline{r}_4\|} \\
S_6 &= \frac{2S_4\|\underline{r}_6\| - 2S_3\|\underline{r}_6\| + S_4\|\underline{r}_5\| + 2S_4\|\underline{r}_4\| - S_3\|\underline{r}_5\|}{2\|\underline{r}_4\|} \\
S_6 &= \frac{S_4(2\|\underline{r}_4\| + \|\underline{r}_5\| + 2\|\underline{r}_6\|) - S_3(\|\underline{r}_5\| + 2\|\underline{r}_6\|)}{2\|\underline{r}_4\|} \quad (3.92)
\end{aligned}$$

se pueden resumir los resultados en la siguiente forma

Modelo total de trayectoria en y	Intervalos de tiempo
$\left. \begin{aligned} &\frac{(t - S_3)^2}{(S_4 - S_3)^2} \underline{r}_4 + (x_e, y_e, z_e) \\ &\frac{2\ \underline{r}_4\ (t - S_4)}{\ \underline{r}_5\ (S_4 - S_3)} \underline{r}_5 + (x_f, y_f, z_f) \\ &\frac{\ \underline{r}_4\ (t - S_5)[t + S_5 - 2S_6]}{\ \underline{r}_6\ (S_4 - S_3)(S_5 - S_6)} \underline{r}_6 \\ &\quad + (x_g, y_g, z_g) \end{aligned} \right\} \underline{r}_{eh}(t)$	$ \begin{aligned} &S_3 \leq t < S_4 \\ &S_4 \leq t < S_5 \\ &S_5 \leq t \leq S_6 \end{aligned} $

Tabla 2. Resumen de resultados de movimiento en y

además;

Tiempos en función de las normas vectoriales.

$$S_3 = \frac{S_1 [2\|r_1\| + \|r_2\| + 2\|r_3\|]}{2\|r_1\|}$$

$$S_4 = S_3 + C_1^*$$

$$S_5 = \frac{S_4 (\|r_5\| + 2\|r_4\|) - S_3 \|r_5\|}{2\|r_4\|}$$

$$S_6 = \frac{S_4 (2\|r_4\| + \|r_5\| + 2\|r_6\|) - S_3 (\|r_5\| + 2\|r_6\|)}{2\|r_4\|}$$

\*Donde  $C_1$  es una constante que equivale a un intervalo finito de tiempo.



### 3.3.3 Movimiento en la dirección z

En esta parte del análisis, finalmente la grúa se habrá de colocar en la parte superior del contenedor, es decir, llegará al punto donde tomará la carga y se preparará para desplazarla a su nuevo destino.

Al igual que en el análisis anterior, para el desarrollo del modelo de movimiento en z se utilizará un perfil específico de velocidad, e igualmente se recurrirá a las condiciones propias del instante de análisis.

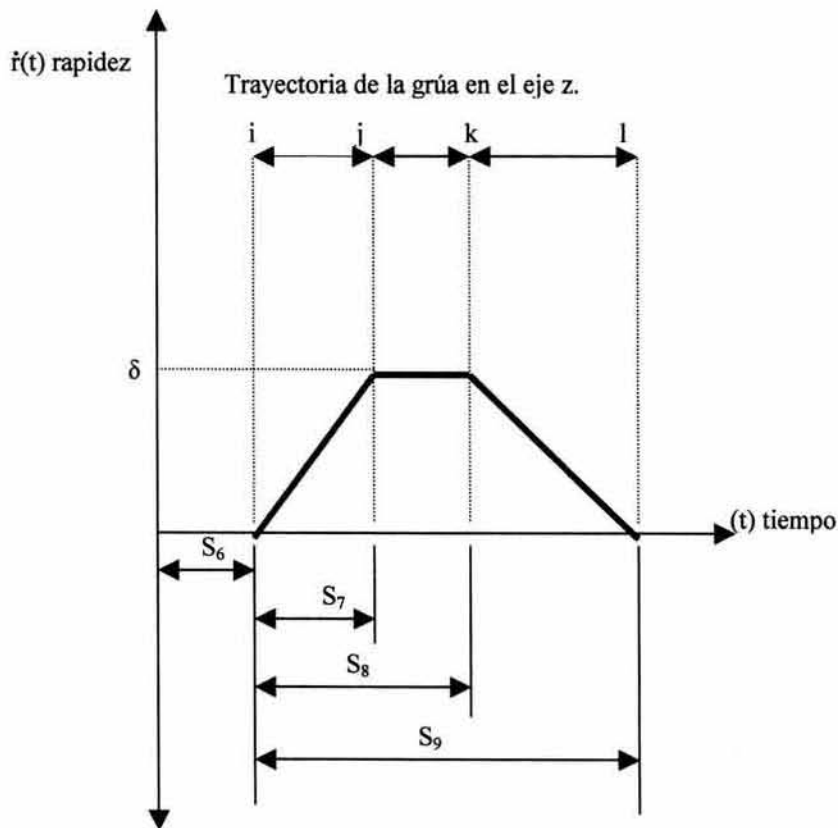


Figura 3.3 Gráfica del perfil de velocidad 3

Condiciones iniciales

$$\dot{r}_6(S_6) = 0$$

$$\dot{r}_7(S_7) = \delta$$

$$\dot{r}_8(S_8) = \delta$$

$$\dot{r}_9(S_9) = 0$$

Condiciones de frontera

$$\underline{r}_i(S_6, x, y, z) = (x_i, y_i, z_i)$$

$$\underline{r}_j(S_7, x, y, z) = (x_j, y_j, z_j)$$

$$\underline{r}_k(S_8, x, y, z) = (x_k, y_k, z_k)$$

$$\underline{r}_l(S_9, x, y, z) = (x_l, y_l, z_l)$$

para simplificar la notación de aquí en adelante haremos de forma genérica

$$\underline{r}_a(S_i, x, y, z) = \underline{r}_a(S_i)$$

para todos los casos

El problema consiste en hallar las ecuaciones que relacionen el tiempo y el espacio.

Solución.

Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{ij}$ ,  $S_6 \leq t < S_7$

Observando el perfil de velocidad, observamos, que el comportamiento es lineal y con velocidad inicial 0 y final  $\delta$  para  $t = S_6$  y  $t = S_7$  respectivamente y de la ecuación general de una recta  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  se deduce que se puede formar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} \dot{r}_6(S_6) = 0 \\ \dot{r}_7(S_7) = \delta \end{array} \right\} \quad (3.93)$$

y de la ecuación general de una recta ( $y = mx + b$ ) se desprende el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 S_6 &= 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 S_7 &= \delta \end{aligned} \right\} \quad (3.94)$$

del cual las soluciones son:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= -\alpha_1 S_6 \\ \alpha_1 &= \frac{\delta}{S_7 - S_6} \end{aligned} \right\} \quad (3.95)$$

sustituyendo 3.51 en  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  se tiene

$$\dot{r}_7(\tau) = \frac{\delta}{S_7 - S_6} (t - S_6) \quad (3.96)$$

que es la ecuación que define la rapidez para el segmento  $\bar{ij}$

obténgase ahora la ecuación que define el desplazamiento, y como se ha visto con anterioridad esto se logra integrando 3.96, es decir,

$$\int_{S_6}^t \dot{r}_7(\tau) d\tau = \frac{\delta}{S_7 - S_6} \left[ \int_{S_6}^t \tau d\tau - \int_{S_6}^t S_6 d\tau \right] \quad (3.97)$$

integrando 3.97 paso a paso se tiene

$$\begin{aligned}
&= \frac{\delta}{S_7 - S_6} \left[ \frac{1}{2} \tau^2 \Big|_{S_6} - S_6 \tau \Big|_{S_6} + r_{S_6} \right] \\
&= \frac{\delta}{S_7 - S_6} \left[ \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} S_6^2 - (S_6 t - S_6^2) \right] + r_{S_6} \\
r_{\gamma}(\tau) &= \left\{ \frac{\delta}{S_7 - S_6} \right\} \frac{t^2}{2} - \frac{S_6}{2} - S_6 t + S_6^2 + r_{S_6} \\
r_{\gamma}(\tau) &= \left\{ \frac{\delta}{S_7 - S_6} \right\} \frac{(t - S_6)^2}{2} + r_{S_6} \tag{3.98}
\end{aligned}$$

la expresión vectorial se obtiene a partir de 3.98, haciendo

$$\underline{r}_{ij}(t) = r_{\gamma}(\tau) \underline{r}_{u_{\gamma}} \tag{3.99}$$

al sustituir 3.98 en 3.99 se obtiene

$$\underline{r}_{ij}(t) = \left\{ \left[ \frac{\delta}{S_7 - S_6} \right] \frac{(t - S_6)^2}{2} + r_{S_6} \right\} \underline{r}_{u_{\gamma}} \tag{3.100}$$

donde  $\underline{r}_{u_{\gamma}} = \frac{1}{\|\underline{r}_{\gamma}\|} \underline{r}_{\gamma}$ , es el vector unitario que define la dirección del movimiento en el eje  $y$ , o mejor dicho, es paralelo a dicho eje, recúrrase ahora al vector formado por las coordenadas espaciales que van de  $\mathbf{i}$  a  $\mathbf{j}$ , es decir,  $\underline{r}_{\gamma} = (x_j, y_j, z_j) - (x_i, y_i, z_i)$  o  $\underline{r}_{\gamma} = (x_j - x_i, y_j - y_i, z_j - z_i)$ , para finalmente obtener

$$\underline{r}_{ij}(t) = \left[ \frac{\delta}{S_7 - S_6} \right] \frac{(t - S_6)^2}{2} \underline{r}_{u_7} + \underline{r}_{S_6} \quad (3.101)$$

de las condiciones iniciales del segmento de análisis, que son

$$\left. \begin{aligned} \underline{r}_{ij}(S_6) &= (x_i, y_i, z_i) \\ \underline{r}_{ij}(S_7) &= (x_j, y_j, z_j) \end{aligned} \right\} \quad (3.102)$$

y utilizando la primer condición en 3.101 resulta en

$$\underline{r}_{ij}(S_6) = \left[ \frac{\delta}{S_7 - S_6} \right] \frac{(S_6 - S_6)^2}{2} \underline{r}_{u_7} + \underline{r}_{S_6} = (x_i, y_i, z_i) \quad (3.103)$$

simplificando se obtiene que

$$\underline{r}_{S_6} = (x_i, y_i, z_i) \quad (3.104)$$

sustituir 3.104 en 3.101 resulta en

$$\underline{r}_{ij}(t) = \left[ \frac{\delta}{S_7 - S_6} \right] \frac{(t - S_6)^2}{2} \underline{r}_{u_7} + (x_i, y_i, z_i) \quad (3.105)$$

donde 3.105 es la solución completa para el intervalo de análisis, sin embargo, nótese que ahora se puede hallar el valor de la rapidez en función de la norma del vector que define el intervalo de movimiento y los tiempos de inicio y fin de dicho intervalo y paso a paso se obtiene

$$\underline{r}_{ij}(S_7) = \left[ \frac{\delta}{S_7 - S_6} \right] \frac{(S_7 - S_6)^2}{2} \underline{r}_{u_7} + (x_i, y_i, z_i) = (x_j, y_j, z_j) \quad (3.106)$$

simplificar 3.106 resulta en

$$\begin{aligned} \frac{\delta(S_7 - S_6)}{2} \underline{r}_{u_7} + \underline{r}_{S_6} + (x_i, y_i, z_i) &= (x_j, y_j, z_j) \\ \frac{\delta(S_7 - S_6)}{2} \underline{r}_{u_7} &= (x_j, y_j, z_j) - (x_i, y_i, z_i) \\ \frac{\delta(S_7 - S_6)}{2} \underline{r}_{u_7} &= \underline{r}_7 \end{aligned} \quad (3.107)$$

ahora bien, se sabe que  $\underline{r}_{u_7} = \frac{1}{\|\underline{r}_7\|} \underline{r}_7$  por lo tanto 3.107

$$\begin{aligned} \frac{\delta(S_7 - S_6)}{2} \underline{r}_{u_7} &= \underline{r}_7 \\ \frac{\delta(S_7 - S_6)}{2} \frac{1}{\|\underline{r}_7\|} \underline{r}_7 - \underline{r}_7 &= 0 \\ \underline{r}_7 \left( \frac{\delta(S_7 - S_6)}{2} \frac{1}{\|\underline{r}_7\|} - 1 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.108)$$

de 3.108 y como  $\underline{r}_7 \neq 0$ , entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \left( \frac{\delta(S_7 - S_6)}{2} \frac{1}{\|\underline{r}_7\|} - 1 \right) &= 0 \\ \delta(S_7 - S_6) \frac{1}{\|\underline{r}_7\|} - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\delta = 2 \frac{\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)} \quad (3.109)$$

sustituir 3.109 en 3.105 arroja que la ecuación vectorial buscada para el intervalo  $\overline{ij}$  es

$$\underline{r}_{ij}(t) = \frac{(t - S_6)^2}{(S_7 - S_6)^2} \underline{r}_7 + (x_i, y_i, z_i) \quad (3.110)$$

Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{jk}$ ,  $S_7 \leq t < S_8$

Toda vez que el comportamiento es constante, según se aprecia en el perfil de velocidad 3, se tiene que  $\dot{r}_8(t) = \delta$  y como  $\delta = \frac{2\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)}$  entonces

$$\dot{r}_8(\tau) = \frac{2\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)} \quad (3.111)$$

como en los casos anteriores y por las mismas razones, se tiene que integrar 3.111, y haciéndolo paso a paso se obtiene

$$\int_{S_7}^t \dot{r}_8(\tau) d\tau = \int_{S_7}^t \frac{2\|\underline{r}_7\|}{S_7 - S_6} d\tau = \frac{2\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)} (t - S_7) + r_{S_7}$$

$$r_8(\tau) = \frac{2\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)} (t - S_7) + r_{S_7} \quad (3.112)$$

se sabe que la ecuación general que define al movimiento en el intervalo dado es

$$\underline{r}_{jk}(t) = r_8(\tau) \underline{r}_{u_8} \quad (3.113)$$

sustituyendo 3.112 en 3.113 y posteriormente reagrupando se tiene que

$$\begin{aligned} \underline{r}_{jk}(t) &= \left[ \frac{2\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)}(t - S_7) + r_{S_7} \right] \underline{r}_{u_8} \\ \underline{r}_{jk}(t) &= \frac{2\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)}(t - S_7) \underline{r}_{u_8} + \underline{r}_{S_7} \end{aligned} \quad (3.114)$$

donde  $\underline{r}_{u_8} = \frac{1}{\|\underline{r}_8\|} \underline{r}_8$  y  $\underline{r}_8 = (x_k - x_j, y_k - y_j, z_k - z_j)$

sustitúyanse las igualdades anteriores en la expresión vectorial 3.114 tal que

$$\begin{aligned} \underline{r}_{jk}(t) &= \frac{2\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)}(t - S_7) \frac{1}{\|\underline{r}_8\|} \underline{r}_8 + \underline{r}_{S_7} \\ \underline{r}_{jk}(t) &= \frac{2\|\underline{r}_7\|(t - S_7)}{\|\underline{r}_8\|(S_7 - S_6)} \underline{r}_8 + \underline{r}_{S_7} \end{aligned} \quad (3.115)$$

usando condiciones de frontera en 3.115 se llega a

$$\underline{r}_{jk}(S_7) = \frac{2\|\underline{r}_7\|(S_7 - S_7)}{\|\underline{r}_8\|(S_7 - S_6)} \underline{r}_8 + \underline{r}_{S_7} = (x_j, y_j, z_j)$$



de donde se desprende que

$$\underline{r}_{S_7} = (x_j, y_j, z_j) \quad (3.116)$$

y 3.116 en 3.115 da como resultado

$$\underline{r}_{jk}(t) = \frac{2\|\underline{r}_7\|(t - S_7)}{\|\underline{r}_8\|(S_7 - S_6)} \underline{r}_8 + (x_j, y_j, z_j) \quad (3.117)$$

que es la ecuación general del intervalo de análisis, obsérvese que ahora es posible determinar el valor de  $S_8$  en función de los valores temporales anteriores y las normas ya conocidas, sustituyendo la condición que corresponde a  $S_8$  en 3.117 y simplificando paso a paso se obtiene

$$\underline{r}_{jk}(S_8) = \frac{2\|\underline{r}_7\|(S_8 - S_7)}{\|\underline{r}_8\|(S_7 - S_6)} \underline{r}_8 + (x_j, y_j, z_j) = (x_k, y_k, z_k) \quad (3.118)$$

simplificando paso a paso resulta en

$$\begin{aligned} \frac{2\|\underline{r}_7\|(S_8 - S_7)}{\|\underline{r}_8\|(S_7 - S_6)} \underline{r}_8 &= (x_k, y_k, z_k) - (x_j, y_j, z_j) \\ \frac{2\|\underline{r}_7\|(S_8 - S_7)}{\|\underline{r}_8\|(S_7 - S_6)} \underline{r}_8 &= \underline{r}_8 \end{aligned}$$

$$\frac{2\|\underline{r}_7\|(S_8 - S_7)}{\|\underline{r}_8\|(S_7 - S_6)} \underline{r}_8 - \underline{r}_8 = 0$$

$$\left[ \frac{2\|\underline{r}_7\|(S_8 - S_7)}{\|\underline{r}_8\|(S_7 - S_6)} - 1 \right] \underline{r}_8 = 0 \quad (3.119)$$

como  $\underline{r}_8 \neq 0$  se tiene que

$$\frac{2\|\underline{r}_7\|(S_8 - S_7)}{\|\underline{r}_8\|(S_7 - S_6)} - 1 = 0$$

$$\frac{2\|\underline{r}_7\|(S_8 - S_7)}{\|\underline{r}_8\|(S_7 - S_6)} = 1$$

$$(S_8 - S_7) = \frac{\|\underline{r}_8\|(S_7 - S_6)}{2\|\underline{r}_7\|}$$

$$S_8 = \frac{\|\underline{r}_8\|(S_7 - S_6)}{2\|\underline{r}_7\|} + S_7$$

$$S_8 = \left[ \frac{\|\underline{r}_8\|(S_7 - S_6)}{2\|\underline{r}_7\|} + \frac{2\|\underline{r}_7\|S_7}{2\|\underline{r}_7\|} \right]$$

$$S_8 = \frac{\|\underline{r}_8\|(S_7 - S_6) + 2\|\underline{r}_7\|S_7}{2\|\underline{r}_7\|}$$

$$S_8 = \frac{2\|\underline{r}_7\|S_7 + \|\underline{r}_8\|S_7 - \|\underline{r}_8\|S_6}{2\|\underline{r}_7\|}$$

$$S_8 = \frac{S_7(\|\underline{r}_8\| + 2\|\underline{r}_7\|) - S_6\|\underline{r}_8\|}{2\|\underline{r}_7\|} \quad (3.120)$$

nótese que ahora tenemos el intervalo de tiempo  $S_8$  en función de  $S_7$ , hecho muy conveniente, ya que así evitamos incógnitas adicionales para el modelo matemático.

Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{kl}$ ,  $S_8 \leq t < S_9$

Al igual que el primer segmento del perfil de velocidad, éste último segmento tiene un comportamiento lineal, sólo que a diferencia del primero, éste último tiene pendiente de signo negativo, es decir, el primer caso es ascendente, mientras que éste caso es descendente, no obstante dicha diferencia, el análisis es el mismo, por tanto de  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ , y utilizando condiciones iniciales se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_9(S_8) &= \delta = \frac{2\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)} \\ \dot{r}_9(S_9) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.121)$$

sustituyendo 3.121 respectivamente en  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 S_8 &= \frac{2\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)} \\ \alpha_0 + \alpha_1 S_9 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.122)$$

y cuyas soluciones son

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{2\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)(S_8 - S_9)} S_9 \\ \alpha_1 &= \frac{2\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)(S_8 - S_9)} \end{aligned} \right\} \quad (3.123)$$

sustituir 3.123 en  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  resulta en

$$\dot{r}_9(\tau) = \frac{2\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)(S_8 - S_9)}t - \frac{2\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)(S_8 - S_9)}S_9 \quad (3.124)$$

para determinar  $r_9(t)$  se integra 3.124 paso a paso en la siguiente forma, recuérdese que  $r_9(t)$  es la parte escalar del movimiento

$$\begin{aligned} \dot{r}_9(\tau) &= \frac{2\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)(S_8 - S_9)}(t - S_9) \\ \int_{S_8} \dot{r}_9(\tau) d\tau &= \frac{2\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)(S_8 - S_9)} \int_{S_8} (\tau - S_9) d\tau \\ \int_{S_8} \dot{r}_9(\tau) d\tau &= \frac{2\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)(S_8 - S_9)} \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{S_8^2}{2} + S_9 S_8 - S_9 t \right] + r_{S_8} \\ \int_{S_8} \dot{r}_9(\tau) d\tau &= \frac{\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)(S_8 - S_9)} \left[ t^2 - S_8^2 + 2S_9 S_8 - 2S_9 t \right] + r_{S_8} \\ r_9(\tau) &= \frac{\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)(S_8 - S_9)} (t - S_8) [t + S_8 - 2S_9] + r_{S_8} \quad (3.125) \end{aligned}$$

3.125 es la parte escalar total del intervalo de análisis, por lo que corresponde hacer  $\underline{r}_{kl}(t) = r_9(\tau)\underline{r}_{u_9}$

$$\underline{r}_{kl}(t) = \left\{ \frac{\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)(S_8 - S_9)} (t - S_8) [t + S_8 - 2S_9] + r_{S_8} \right\} \underline{r}_{u_9} \quad (3.126)$$

donde  $\underline{r}_{u_9} = \frac{1}{\|\underline{r}_9\|} \underline{r}_9$  y  $\underline{r}_9 = (x_l - x_k, y_l - y_k, z_l - z_k)$  y esto último en 3.126

resulta en

$$\underline{r}_{kl}(t) = \left\{ \frac{\|\underline{r}_7\|}{(S_7 - S_6)(S_8 - S_9)} (t - S_8) [t + S_8 - 2S_9] \frac{1}{\|\underline{r}_9\|} \underline{r}_9 + \underline{r}_{S_8} \right\}$$

simplificar resulta a

$$\underline{r}_{kl}(t) = \frac{\|\underline{r}_7\|(t - S_8)}{\|\underline{r}_9\|(S_7 - S_6)(S_8 - S_9)} [t + S_8 - 2S_9] \underline{r}_9 + \underline{r}_{S_8} \quad (3.127)$$

como siguiente paso determínese el valor de  $\underline{r}_{S_8}$ , para lo que se recurre a las condiciones de frontera del intervalo de análisis

$$\underline{r}_{kl}(S_8) = \frac{\|\underline{r}_7\|(S_8 - S_8)}{\|\underline{r}_9\|(S_7 - S_6)(S_8 - S_9)} [S_8 + S_8 - 2S_9] \underline{r}_9 + \underline{r}_{S_8} = (x_k, y_k, z_k) \quad (3.128)$$

de donde se desprende que

$$\underline{r}_{S_8} = (x_k, y_k, z_k) \quad (3.129)$$

por lo tanto 3.129 en 3.127 resulta en

$$\underline{r}_{kl}(t) = \frac{\|\underline{r}_7\|(t - S_8)[t + S_8 - 2S_9]}{\|\underline{r}_9\|(S_7 - S_6)(S_8 - S_9)} \underline{r}_9 + (x_k, y_k, z_k) \quad (3.130)$$

que es la ecuación general del intervalo de análisis, ahora puede ser determinado el valor de  $S_9$  en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \underline{r}_{kl}(S_9) &= \frac{\|\underline{r}_7\|(S_9 - S_8)[S_9 + S_8 - 2S_9]}{\|\underline{r}_9\|(S_7 - S_6)(S_8 - S_9)} \underline{r}_9 + (x_k, y_k, z_k) = (x_l, y_l, z_l) \\ \frac{\|\underline{r}_7\|(S_9 - S_8)[S_8 - S_9]}{\|\underline{r}_9\|(S_7 - S_6)(S_8 - S_9)} \underline{r}_9 &= (x_k, y_k, z_k) - (x_l, y_l, z_l) \\ \frac{\|\underline{r}_7\|(S_9 - S_8)}{\|\underline{r}_9\|(S_7 - S_6)} \underline{r}_9 &= \underline{r}_9 \\ \frac{\|\underline{r}_7\|(S_9 - S_8)}{\|\underline{r}_9\|(S_7 - S_6)} \underline{r}_9 - \underline{r}_9 &= 0 \end{aligned} \quad (3.131)$$

como  $\underline{r}_9 \neq 0$ , entonces de 3.131 se desprende

$$\begin{aligned} \underline{r}_9 \left( \frac{\|\underline{r}_7\|(S_9 - S_8)}{\|\underline{r}_9\|(S_7 - S_6)} - 1 \right) &= 0 \\ \frac{\|\underline{r}_7\|(S_9 - S_8)}{\|\underline{r}_9\|(S_7 - S_6)} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

y simplificando paso a paso se llega a

$$\begin{aligned}
\frac{\|\underline{r}_7\|(S_9 - S_8)}{\|\underline{r}_9\|(S_7 - S_6)} &= 1 \\
\|\underline{r}_7\|(S_9 - S_8) &= \|\underline{r}_9\|(S_7 - S_6) \\
S_9 - S_8 &= \frac{\|\underline{r}_9\|(S_7 - S_6)}{\|\underline{r}_7\|} \\
S_9 &= \frac{\|\underline{r}_9\|(S_7 - S_6)}{\|\underline{r}_7\|} + S_8 \quad (3.132)
\end{aligned}$$

pero  $S_8 = \frac{S_7\|\underline{r}_8\| + 2S_7\|\underline{r}_7\| - S_6\|\underline{r}_8\|}{2\|\underline{r}_7\|}$  y por lo tanto 3.132 se transforma en

$$S_9 = \frac{\|\underline{r}_9\|(S_7 - S_6)}{\|\underline{r}_7\|} + \frac{S_7\|\underline{r}_8\| + 2S_7\|\underline{r}_7\| - S_6\|\underline{r}_8\|}{2\|\underline{r}_7\|} \quad (3.133)$$

simplificando 3.133 lleva a

$$\begin{aligned}
S_9 &= \frac{2\|\underline{r}_9\|(S_7 - S_6) + S_7\|\underline{r}_8\| + 2S_7\|\underline{r}_7\| - S_6\|\underline{r}_8\|}{2\|\underline{r}_7\|} \\
S_9 &= \frac{2S_7\|\underline{r}_9\| - 2S_6\|\underline{r}_9\| + S_7\|\underline{r}_8\| + 2S_7\|\underline{r}_7\| - S_6\|\underline{r}_8\|}{2\|\underline{r}_7\|} \\
S_9 &= \frac{S_7(2\|\underline{r}_7\| + \|\underline{r}_8\| + 2\|\underline{r}_9\|) - S_6(\|\underline{r}_8\| + 2\|\underline{r}_9\|)}{2\|\underline{r}_7\|} \quad (3.134)
\end{aligned}$$

ahora se pueden resumir los resultados en la siguiente forma

Modelo total de trayectoria en z	Intervalos de tiempo
$\underline{r}_{ii}(t) = \begin{cases} \frac{(t - S_6)^2}{(S_7 - S_6)^2} \underline{r}_7 + (x_i, y_i, z_i) \\ \frac{2\ \underline{r}_7\ (t - S_7)}{\ \underline{r}_8\ (S_7 - S_6)} \underline{r}_8 + (x_j, y_j, z_j) \\ \frac{\ \underline{r}_7\ (t - S_8)[t + S_8 - 2S_9]}{\ \underline{r}_9\ (S_7 - S_6)(S_8 - S_9)} \underline{r}_9 \\ \quad + (x_k, y_k, z_k) \end{cases}$	$\begin{aligned} S_6 \leq t < S_7 \\ S_7 \leq t < S_8 \\ S_8 \leq t \leq S_9 \end{aligned}$

Tabla iv.i. Resumen de resultados de movimiento en z.

Tiempos en función de las normas vectoriales.

$$S_6 = \frac{S_4(2\|\underline{r}_4\| + \|\underline{r}_5\| + 2\|\underline{r}_6\|) - S_3(\|\underline{r}_5\| + 2\|\underline{r}_6\|)}{2\|\underline{r}_4\|}$$

$$S_7 = C_2^* + S_6$$

$$S_8 = \frac{S_7\|\underline{r}_8\| + 2S_7\|\underline{r}_7\| - S_6\|\underline{r}_8\|}{2\|\underline{r}_7\|}$$

$$S_9 = \frac{S_7(2\|\underline{r}_9\| + \|\underline{r}_8\| + 2\|\underline{r}_7\|) - S_6(2\|\underline{r}_9\| + \|\underline{r}_8\|)}{2\|\underline{r}_7\|}$$

$C_2^*$  es un valor constante que cuantifica el valor del intervalo de tiempo  $S_7$



### 3.4 Segunda etapa de Movimiento

Comenzaremos ahora el análisis del movimiento final de la grúa, es decir, analizaremos lo que ocurre cuando la grúa parte de la posición en la cual está ubicado el contenedor para posteriormente trasladarlo a su posición final.

#### 3.4.1 Movimiento en dirección x

Para determinar la ecuación vectorial se recurrirá al siguiente perfil de velocidad, en conjunto con las condiciones correspondientes al sistema:

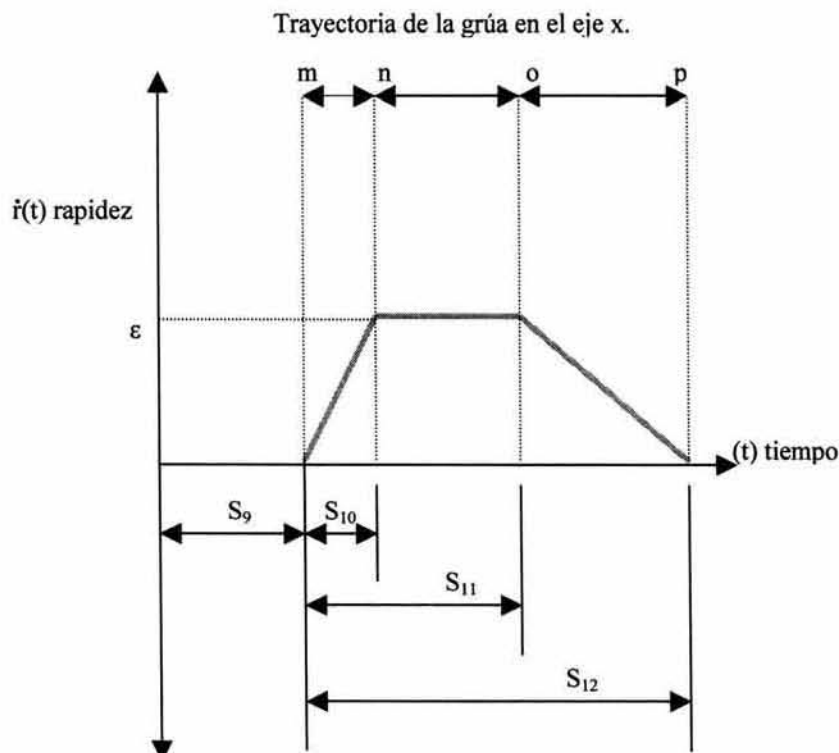


Figura 3.4 Gráfica del perfil de velocidad 4

Condiciones iniciales

$$\dot{r}_9(S_9) = 0$$

$$\dot{r}_{10}(S_{10}) = \varepsilon$$

$$\dot{r}_{11}(S_{11}) = \varepsilon$$

$$\dot{r}_{12}(S_{12}) = 0$$

Condiciones de frontera

$$\underline{r}_m(S_9, x, y, z) = (x_m, y_m, z_m)$$

$$\underline{r}_n(S_{10}, x, y, z) = (x_n, y_n, z_n)$$

$$\underline{r}_o(S_{11}, x, y, z) = (x_o, y_o, z_o)$$

$$\underline{r}_p(S_{12}, x, y, z) = (x_p, y_p, z_p)$$

para simplificar la notación de aquí en adelante haremos

$$\underline{r}_a(S_i, x, y, z) = \underline{r}_a(S_i)$$

para todos los casos

El problema consiste en hallar las ecuaciones que relacionen el tiempo y el espacio.

Solución.

Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{mn}$ ,  $S_9 \leq t < S_{10}$

Observando el perfil de velocidad, observamos, que el comportamiento es lineal y con velocidad inicial 0 y final  $\varepsilon$  para  $t = S_9$  y  $t = S_{10}$  respectivamente y de la ecuación general de una recta  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  se deduce que se puede formar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} \dot{r}_9(S_9) = 0 \\ \dot{r}_{10}(S_{10}) = \varepsilon \end{array} \right\} \quad (3.135)$$

y de la ecuación general de una recta ( $y = mx + b$ ) se desprende el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_0 + \alpha_1 S_9 = 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 S_{10} = \varepsilon \end{array} \right\} \quad (3.136)$$

del cual las soluciones son:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= -\alpha_1 S_9 \\ \alpha_1 &= \frac{\varepsilon}{S_{10} - S_9} \end{aligned} \right\} \quad (3.137)$$

sustituyendo 3.137 en  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  se tiene

$$\dot{r}_{10}(\tau) = \frac{\varepsilon}{S_{10} - S_9} (t - S_9) \quad (3.138)$$

que es la ecuación que define la rapidez para el segmento  $\overline{mn}$  es:

obténgase ahora la ecuación que define el desplazamiento, y como se ha visto con anterioridad se debe integrar 3.138, tal que

$$\int_{S_9}^t \dot{r}_{10}(\tau) d\tau = \frac{\varepsilon}{S_{10} - S_9} \left[ \int_{S_9}^t \tau d\tau - \int_{S_9}^t S_9 d\tau \right] \quad (3.139)$$

integrando 3.139 paso a paso se tiene

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon}{S_{10} - S_9} \left[ \frac{1}{2} \tau^2 \Big|_{S_9} - S_9 \tau \Big|_{S_9} + r_{S_9} \right] \\
&= \frac{\varepsilon}{S_{10} - S_9} \left[ \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} S_9^2 - (S_9 t - S_9^2) \right] + r_{S_9} \\
r_{10}(\tau) &= \left\{ \frac{\varepsilon}{S_{10} - S_9} \right\} \frac{t^2}{2} - \frac{S_9}{2} - S_9 t + S_9^2 + r_{S_9} \\
r_{10}(\tau) &= \left\{ \frac{\varepsilon}{S_{10} - S_9} \right\} \frac{(t - S_9)^2}{2} + r_{S_9} \tag{3.140}
\end{aligned}$$

la expresión vectorial se obtiene a partir de 3.140 haciendo

$$\underline{r}_{mn}(t) = r_{10}(\tau) \underline{r}_{u_{10}} \tag{3.141}$$

al sustituir 3.140 en 3.141 se obtiene

$$\underline{r}_{mn}(t) = \left\{ \left[ \frac{\gamma}{S_{10} - S_9} \right] \frac{(t - S_9)^2}{2} + r_{S_9} \right\} \underline{r}_{u_{10}} \tag{3.142}$$

donde  $\underline{r}_{u_{10}} = \frac{1}{\|\underline{r}_{10}\|} \underline{r}_{10}$ , es el vector unitario que define la dirección del

movimiento en el eje x, el cual se determina a partir del punto **m** al **n**, es decir,

$$\underline{r}_{10} = (x_n, y_n, z_n) - (x_m, y_m, z_m) \text{ o } \underline{r}_{10} = (x_n - x_m, y_n - y_m, z_n - z_m), \quad \text{finalmente}$$

3.142 resulta en

$$\underline{r}_{mn}(t) = \left[ \frac{\varepsilon}{S_{10} - S_9} \right] \frac{(t - S_9)^2}{2} \underline{r}_{u_{10}} + r_{S_9} \tag{3.143}$$

de las condiciones iniciales del segmento de análisis, que son

$$\left. \begin{aligned} \underline{r}_{mn}(S_9) &= (x_e, y_e, z_e) \\ \underline{r}_{mn}(S_{10}) &= (x_f, y_f, z_f) \end{aligned} \right\} \quad (3.144)$$

y utilizando la primer condición en 3.143 resulta en

$$\underline{r}_{mn}(S_9) = \left[ \frac{\varepsilon}{S_{10} - S_9} \right] \frac{(S_9 - S_9)^2}{2} \underline{r}_{u_{10}} + \underline{r}_{S_9} = (x_m, y_m, z_m) \quad (3.145)$$

de donde se desprende que

$$\underline{r}_{S_9} = (x_m, y_m, z_m) \quad (3.146)$$

sustituir 3.146 en 3.143 resulta en

$$\underline{r}_{mn}(t) = \left[ \frac{\varepsilon}{S_{10} - S_9} \right] \frac{(t - S_9)^2}{2} \underline{r}_{u_{10}} + (x_m, y_m, z_m) \quad (3.147)$$

donde 3.147 es la solución completa para el intervalo de análisis, sin embargo, nótese que ahora se puede hallar el valor de la rapidez en función de la norma del vector que define el intervalo de movimiento y los tiempos de inicio y fin de dicho intervalo y paso a paso se obtiene

$$\underline{r}_{ef}(S_{10}) = \left[ \frac{\varepsilon}{S_{10} - S_9} \right] \frac{(S_{10} - S_9)^2}{2} \underline{r}_{u_{10}} + (x_m, y_m, z_m) = (x_n, y_n, z_n) \quad (3.148)$$

cuya simplificación conduce a

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(S_{10} - S_9)}{2} \underline{r}_{u_{10}} + \underline{r}_{S_9} + (x_m, y_m, z_m) &= (x_n, y_n, z_n) \\ \frac{\varepsilon(S_{10} - S_9)}{2} \underline{r}_{u_{10}} &= (x_n, y_n, z_n) - (x_m, y_m, z_m) \\ \frac{\varepsilon(S_{10} - S_9)}{2} \underline{r}_{u_{10}} &= \underline{r}_{10} \end{aligned} \quad (3.149)$$

ahora bien se sabe que  $\underline{r}_{u_{10}} = \frac{1}{\|\underline{r}_{10}\|} \underline{r}_{10}$  por lo tanto 3.149 se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon(S_{10} - S_9)}{2} \frac{1}{\|\underline{r}_{10}\|} \underline{r}_{10} - \underline{r}_{10} &= 0 \\ \underline{r}_{10} \left( \frac{\varepsilon(S_{10} - S_9)}{2} \frac{1}{\|\underline{r}_{10}\|} - 1 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.150)$$

como  $\underline{r}_{10} \neq 0$ , entonces 3.150 se simplifica a

$$\begin{aligned} \left( \frac{\varepsilon(S_{10} - S_9)}{2} \frac{1}{\|\underline{r}_{10}\|} - 1 \right) &= 0 \\ \varepsilon(S_{10} - S_9) \frac{1}{\|\underline{r}_{10}\|} - 2 &= 0 \\ \varepsilon &= 2 \frac{\|\underline{r}_{10}\|}{(S_{10} - S_9)} \end{aligned} \quad (3.151)$$

por lo que la expresión vectorial buscada para el intervalo  $\overline{mn}$  es

$$\underline{r}_{mn}(t) = \frac{(t - S_9)^2}{(S_{10} - S_9)^2} \underline{r}_{10} + (x_e, y_e, z_e) \quad (3.152)$$

Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{no}$ ,  $S_{10} \leq t < S_{11}$

Toda vez que el comportamiento es constante, según se aprecia en el perfil de velocidad 4, se tiene que  $\dot{r}_{11}(t) = \varepsilon$  y como  $\varepsilon = 2 \frac{\|\underline{r}_{10}\|}{(S_{10} - S_9)}$  entonces

$$\dot{r}_{11}(\tau) = \frac{2\|\underline{r}_{10}\|}{(S_{11} - S_9)} \quad (3.153)$$

y como en los casos anteriores, se tiene que integrar 3.153, y haciéndolo paso a paso se obtiene

$$\int \dot{r}_{11}(t) dt = \int_{S_{10}} \frac{2\|\underline{r}_{10}\|}{(S_{10} - S_9)} d\tau = \frac{2\|\underline{r}_{10}\|}{(S_{10} - S_9)} (t - S_{10}) + r_{S_{10}}$$

$$r_{11}(t) = \frac{2\|\underline{r}_{10}\|}{(S_{10} - S_9)} (t - S_{10}) + r_{S_{10}} \quad (3.154)$$

la ecuación general que define al movimiento en el intervalo dado es

$$\underline{r}_{no}(t) = r_{11}(\tau) \underline{r}_{u_{11}} \quad (3.155)$$

sustituir 3.154 en 3.155 da como resultado

$$\begin{aligned} \underline{r}_{no}(t) &= \left[ \frac{2\|\underline{r}_{10}\|}{(S_{10} - S_9)}(t - S_{10}) + r_{S_{10}} \right] \underline{r}_{u_{11}} \\ \underline{r}_{no}(t) &= \frac{2\|\underline{r}_{10}\|}{(S_{10} - S_9)}(t - S_{10})\underline{r}_{u_{11}} + \underline{r}_{S_{10}} \end{aligned} \quad (3.156)$$

donde  $\underline{r}_{u_{11}} = \frac{1}{\|\underline{r}_{11}\|} \underline{r}_{11}$  y  $\underline{r}_{11} = (x_o - x_n, y_o - y_n, z_o - z_n)$

sustitúyanse las igualdades anteriores en la expresión vectorial 3.156, es decir

$$\underline{r}_{no}(t) = \frac{2\|\underline{r}_{10}\|}{(S_{10} - S_9)}(t - S_{10}) \frac{1}{\|\underline{r}_{11}\|} \underline{r}_{11} + \underline{r}_{S_{10}} \quad (3.157)$$

a su vez simplificar 3.157 da como resultado

$$\underline{r}_{no}(t) = \frac{2\|\underline{r}_{10}\|(t - S_{10})}{\|\underline{r}_{11}\|(S_{10} - S_9)} \underline{r}_{11} + \underline{r}_{S_{10}} \quad (3.158)$$

que es la ecuación general de movimiento del intervalo de análisis, aplicando la condición de frontera respectiva se obtiene

$$\underline{r}_{no}(S_{10}) = \frac{2\|\underline{r}_{10}\|(S_{10} - S_{10})}{\|\underline{r}_{11}\|(S_{10} - S_9)} \underline{r}_{11} + \underline{r}_{S_{10}} = (x_f, y_f, z_f) \quad (3.159)$$

que da como resultado



$$\underline{r}_{S_{10}} = (x_f, y_f, z_f) \quad (3.160)$$

sustituir 3.160 en 3.158 resulta en

$$\underline{r}_{no}(t) = \frac{2\|\underline{r}_{10}\|(t - S_{10})}{\|\underline{r}_{11}\|(S_{10} - S_9)} \underline{r}_{11} + (x_f, y_f, z_f) \quad (3.161)$$

obsérvese que ahora es posible determinar el valor de  $S_{11}$  en función de los valores temporales anteriores y las normas ya conocidas, sustituyendo la condición que corresponde a  $S_{11}$  en 3.161 y simplificando paso a paso da como resultado

$$\underline{r}_{no}(S_{11}) = \frac{2\|\underline{r}_{10}\|(S_{11} - S_{10})}{\|\underline{r}_{11}\|(S_{10} - S_9)} \underline{r}_{11} + (x_n, y_n, z_n) = (x_o, y_o, z_o) \quad (3.162)$$

$$\begin{aligned} \frac{2\|\underline{r}_{10}\|(S_{11} - S_{10})}{\|\underline{r}_{11}\|(S_{10} - S_9)} \underline{r}_{11} &= (x_o, y_o, z_o) - (x_n, y_n, z_n) \\ \frac{2\|\underline{r}_{10}\|(S_{11} - S_{10})}{\|\underline{r}_{11}\|(S_{10} - S_9)} \underline{r}_{11} &= \underline{r}_{11} \\ \frac{2\|\underline{r}_{10}\|(S_{11} - S_{10})}{\|\underline{r}_{11}\|(S_{10} - S_9)} \underline{r}_{11} - \underline{r}_{11} &= 0 \\ \left[ \frac{2\|\underline{r}_{10}\|(S_{11} - S_{10})}{\|\underline{r}_{11}\|(S_{10} - S_9)} - 1 \right] \underline{r}_{11} &= 0 \end{aligned} \quad (3.163)$$

de 3.163 y como  $\underline{r}_{11} \neq 0$  entonces

$$\begin{aligned}
\frac{2\|r_{10}\|(S_{11} - S_{10})}{\|r_{11}\|(S_{10} - S_9)} - 1 &= 0 \\
\frac{2\|r_{10}\|(S_{11} - S_{10})}{\|r_{11}\|(S_{10} - S_9)} &= 1 \\
(S_{11} - S_{10}) &= \frac{\|r_{11}\|(S_{10} - S_9)}{2\|r_{10}\|} \\
S_{11} &= \frac{\|r_{11}\|(S_{10} - S_9)}{2\|r_{10}\|} + S_{10} \\
S_{11} &= \left[ \frac{\|r_{11}\|(S_{10} - S_9)}{2\|r_{10}\|} + \frac{2\|r_{10}\|S_{10}}{2\|r_{10}\|} \right] \\
S_{11} &= \frac{\|r_{11}\|(S_{10} - S_9) + 2\|r_{10}\|S_{10}}{2\|r_{10}\|} \\
S_{11} &= \frac{2\|r_{10}\|S_{10} + \|r_{11}\|S_{10} - \|r_{11}\|S_9}{2\|r_{10}\|} \\
S_{11} &= \frac{S_{10}(\|r_{11}\| + 2\|r_{10}\|) - S_9\|r_{11}\|}{2\|r_{10}\|} \tag{3.164}
\end{aligned}$$

nótese que ahora tenemos el intervalo de tiempo  $S_{11}$  en función de  $S_{10}$ , hecho muy conveniente, ya que así evitamos incógnitas adicionales para el modelo.

Al igual que el primer segmento del perfil de velocidad, éste último segmento tiene un comportamiento lineal, sólo que a diferencia del primero, éste último tiene pendiente de signo negativo, es decir, el primer caso es ascendente, mientras que éste caso es descendente, no obstante dicha diferencia, el análisis es el mismo, por tanto de  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ , y utilizando condiciones iniciales se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_{12}(S_{11}) &= \varepsilon = \frac{2\|r_{10}\|}{(S_{10} - S_9)} \\ \dot{r}_{12}(S_{12}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.165)$$

sustituyendo 3.165 respectivamente en  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 S_{11} &= \frac{2\|r_{10}\|}{(S_{10} - S_9)} \\ \alpha_0 + \alpha_1 S_{12} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.163)$$

cuyas soluciones son

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{2\|r_{10}\|}{(S_{10} - S_9)(S_{11} - S_{12})} S_{12} \\ \alpha_1 &= \frac{2\|r_{10}\|}{(S_{10} - S_9)(S_{11} - S_{12})} \end{aligned} \right\} \quad (3.164)$$

sustituir 3.164 en  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  resulta en

$$\dot{r}_{12}(\tau) = \frac{2\|\underline{r}_{10}\|}{(S_{10} - S_9)(S_{11} - S_{12})} t - \frac{2\|\underline{r}_{10}\|}{(S_{10} - S_9)(S_{11} - S_{12})} S_{12} \quad (3.165)$$

para determinar  $r_{12}(t)$  se integra 3.165 paso a paso en la siguiente forma, recuérdese que  $r_{12}(t)$  es la parte escalar del movimiento

$$\begin{aligned} \dot{r}_{12}(\tau) &= \frac{2\|\underline{r}_{10}\|}{(S_{10} - S_9)(S_{11} - S_{12})} (t - S_{12}) \\ \int_{S_{11}} \dot{r}_{12}(\tau) d\tau &= \frac{2\|\underline{r}_{10}\|}{(S_{10} - S_9)(S_{11} - S_{12})} \int_{S_{11}} (\tau - S_{12}) d\tau \\ \int_{S_{11}} \dot{r}_{12}(\tau) d\tau &= \frac{2\|\underline{r}_4\|}{(S_4 - S_3)(S_5 - S_6)} \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{S_5^2}{2} + S_6 S_5 - S_6 t \right] + r_{S_5} \\ \int_{S_{11}} \dot{r}_{12}(\tau) d\tau &= \frac{\|\underline{r}_{10}\|}{(S_{10} - S_9)(S_{11} - S_{12})} \left[ t^2 - S_{11}^2 + 2S_{12}S_{11} - 2S_{12}t \right] + r_{S_{11}} \\ r_{12}(\tau) &= \frac{\|\underline{r}_{10}\|}{(S_{10} - S_9)(S_{11} - S_{12})} (t - S_{11}) [t + S_{11} - 2S_{12}] + r_{S_{11}} \quad (3.166) \end{aligned}$$

3.166 es la parte escalar total del intervalo de análisis, por lo que corresponde hacer  $\underline{r}_{op}(t) = r_{12}(\tau) \underline{r}_{u_{12}}$

$$\underline{r}_{op}(t) = \left\{ \frac{\|\underline{r}_{10}\|}{(S_{10} - S_9)(S_{11} - S_{12})} (t - S_{11}) [t + S_{11} - 2S_{12}] + r_{S_{11}} \right\} \underline{r}_{u_{12}} \quad (3.167)$$

donde  $\underline{r}_{u_{12}} = \frac{1}{\|\underline{r}_{12}\|} \underline{r}_{12}$  y  $\underline{r}_{12} = (x_p - x_o, y_p - y_o, z_p - z_o)$  y esto en 3.167

resulta en

$$\underline{r}_{op}(t) = \left\{ \frac{\|\underline{r}_{10}\|}{(S_{10} - S_9)(S_{11} - S_{12})} (t - S_{11}) [t + S_{11} - 2S_{12}] \frac{1}{\|\underline{r}_{12}\|} \underline{r}_{12} + \underline{r}_{S_{11}} \right\} \quad (3.168)$$

simplificar resulta en

$$\underline{r}_{op}(t) = \frac{\|\underline{r}_{10}\|(t - S_{11})}{\|\underline{r}_{12}\|(S_{10} - S_9)(S_{11} - S_{12})} [t + S_{11} - 2S_{12}] \underline{r}_{12} + \underline{r}_{S_{11}} \quad (3.169)$$

como siguiente paso, determínese el valor de  $\underline{r}_{S_{11}}$ , para lo que se recurre a las condiciones de frontera del intervalo de análisis

$$\underline{r}_{op}(S_{11}) = \frac{\|\underline{r}_{10}\|(S_{11} - S_{11})}{\|\underline{r}_{12}\|(S_{10} - S_9)(S_{11} - S_{12})} [t + S_{11} - 2S_{12}] \underline{r}_{12} + \underline{r}_{S_{11}} = (x_o, y_o, z_o) \quad (3.170)$$

de donde se desprende que

$$\underline{r}_{S_{11}} = (x_o, y_o, z_o) \quad (3.171)$$

por lo tanto 3.171 en 3.169 resulta en

$$\underline{r}_{op}(t) = \frac{\|\underline{r}_{10}\|(t - S_{11})[t + S_{11} - 2S_{12}]}{\|\underline{r}_{12}\|(S_{10} - S_9)(S_{11} - S_{12})} \underline{r}_{12} + (x_o, y_o, z_o) \quad (3.172)$$

que es la ecuación general del intervalo de análisis, ahora puede ser determinado el valor de  $S_{12}$  en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \underline{r}_{op}(S_{12}) &= \frac{\|\underline{r}_{10}\|(S_{12} - S_{11})[S_{12} + S_{11} - 2S_{12}]}{\|\underline{r}_{12}\|(S_{10} - S_9)(S_{11} - S_{12})} \underline{r}_{12} + (x_o, y_o, z_o) = (x_p, y_p, z_p) \\ \frac{\|\underline{r}_{10}\|(S_{10} - S_{11})[S_{11} - S_{12}]}{\|\underline{r}_{12}\|(S_{10} - S_9)(S_{11} - S_{12})} \underline{r}_{12} &= (x_p, y_p, z_p) - (x_o, y_o, z_o) \\ \frac{\|\underline{r}_{10}\|(S_{12} - S_{11})}{\|\underline{r}_{12}\|(S_{10} - S_9)} \underline{r}_{12} &= \underline{r}_{12} \\ \frac{\|\underline{r}_{10}\|(S_{12} - S_{11})}{\|\underline{r}_{12}\|(S_{10} - S_9)} \underline{r}_{12} - \underline{r}_{12} &= 0 \\ \underline{r}_{12} \left( \frac{\|\underline{r}_{10}\|(S_{12} - S_{11})}{\|\underline{r}_{12}\|(S_{10} - S_9)} - 1 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.173)$$

como  $\underline{r}_{12} \neq 0$  de 3.173 se desprende que

$$\frac{\|\underline{r}_{10}\|(S_{12} - S_{11})}{\|\underline{r}_{12}\|(S_{10} - S_9)} - 1 = 0$$

y simplificando paso a paso se llega a

$$\begin{aligned}
\frac{\|\underline{r}_{10}\|(S_{12} - S_{11})}{\|\underline{r}_{12}\|(S_{10} - S_9)} &= 1 \\
\|\underline{r}_{10}\|(S_{12} - S_{11}) &= \|\underline{r}_{12}\|(S_{10} - S_9) \\
S_{12} - S_{11} &= \frac{\|\underline{r}_{12}\|(S_{10} - S_9)}{\|\underline{r}_{10}\|} \\
S_{12} &= \frac{\|\underline{r}_{12}\|(S_{10} - S_9)}{\|\underline{r}_{10}\|} + S_{11}
\end{aligned} \tag{3.174}$$

pero  $S_{11} = \frac{S_{10}\|\underline{r}_{11}\| + 2S_{10}\|\underline{r}_{10}\| - S_9\|\underline{r}_{11}\|}{2\|\underline{r}_{10}\|}$  y por lo tanto 3.174 se convierte en

$$\begin{aligned}
S_{12} &= \frac{\|\underline{r}_{12}\|(S_{10} - S_9)}{\|\underline{r}_{10}\|} + \frac{S_{10}\|\underline{r}_{11}\| + 2S_{10}\|\underline{r}_{10}\| - S_9\|\underline{r}_{11}\|}{2\|\underline{r}_{10}\|} \\
S_{12} &= \frac{2\|\underline{r}_{12}\|(S_{10} - S_9) + S_{10}\|\underline{r}_{11}\| + 2S_{10}\|\underline{r}_{10}\| - S_9\|\underline{r}_{11}\|}{2\|\underline{r}_{10}\|} \\
S_{12} &= \frac{2S_{10}\|\underline{r}_{12}\| - 2S_9\|\underline{r}_{12}\| + S_{10}\|\underline{r}_{11}\| + 2S_{10}\|\underline{r}_{10}\| - S_9\|\underline{r}_{11}\|}{2\|\underline{r}_{10}\|} \\
S_{12} &= \frac{S_{10}(2\|\underline{r}_{10}\| + \|\underline{r}_{11}\| + 2\|\underline{r}_{12}\|) - S_9(\|\underline{r}_{11}\| + 2\|\underline{r}_{12}\|)}{2\|\underline{r}_{10}\|}
\end{aligned} \tag{3.175}$$

ahora se pueden resumir los resultados en la siguiente forma

Modelo total de trayectoria en x	Intervalos de tiempo
$\underline{r}_{mp}(t) = \begin{cases} \frac{(t-S_9)^2}{(S_{10}-S_9)^2} \underline{r}_{10} + (x_m, y_m, z_m) \\ \frac{2\ \underline{r}_{10}\ (t-S_{10})}{\ \underline{r}_{11}\ (S_{10}-S_9)} \underline{r}_5 + (x_n, y_n, z_n) \\ \frac{\ \underline{r}_{10}\ (t-S_{11})[t+S_{11}-2S_{12}]}{\ \underline{r}_{12}\ (S_{10}-S_9)(S_{11}-S_{12})} \underline{r}_{12} \\ \quad + (x_o, y_o, z_o) \end{cases}$	$\begin{aligned} S_9 \leq t < S_{10} \\ S_{10} \leq t < S_{11} \\ S_{11} \leq t \leq S_{12} \end{aligned}$

Tabla 4 Resumen de resultados de movimiento en z

y además;

Tiempos en función de las normas vectoriales.

$$S_9 = \frac{S_7(2\|\underline{r}_7\| + \|\underline{r}_8\| + 2\|\underline{r}_9\|) - S_6(\|\underline{r}_8\| + 2\|\underline{r}_9\|)}{2\|\underline{r}_7\|}$$

$$S_{10} = S_9 + C_2^*$$

$$S_{11} = \frac{S_{10}(\|\underline{r}_{11}\| + 2\|\underline{r}_{10}\|) - S_9\|\underline{r}_{11}\|}{2\|\underline{r}_{10}\|}$$

$$S_{12} = \frac{S_{10}(2\|\underline{r}_{10}\| + \|\underline{r}_{11}\| + 2\|\underline{r}_{12}\|) - S_9(\|\underline{r}_{11}\| + 2\|\underline{r}_{12}\|)}{2\|\underline{r}_{10}\|}$$

\*Donde  $C_2$  es una constante que equivale a un intervalo finito de tiempo.



### 3.4.2 Movimiento en dirección y

Al igual que el movimiento en x, para y se recurrirá a un perfil de velocidad determinado, así como a las condiciones propias del momento de análisis.

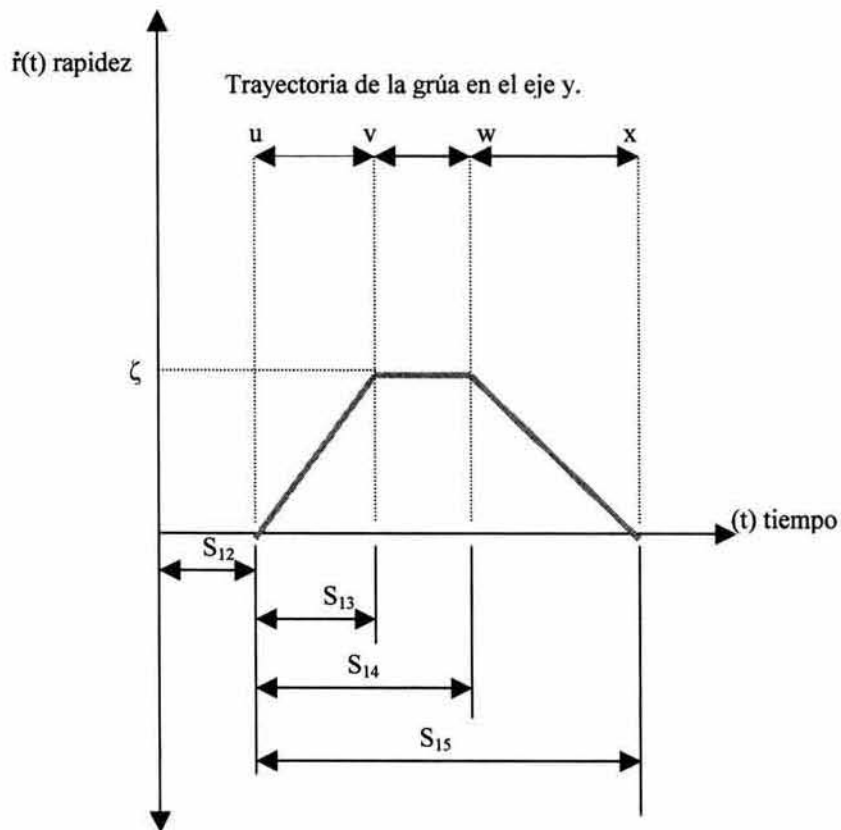


Figura 3.5 Gráfica del perfil de velocidad 5

Condiciones iniciales

$$\dot{r}_{12}(S_{12})= 0$$

$$\dot{r}_{13}(S_{13})= \zeta$$

$$\dot{r}_{14}(S_{14})= \zeta$$

$$\dot{r}_{15}(S_{15})= 0$$

Condiciones de frontera

$$\underline{r}_u(S_{12},x,y,z)=(x_u,y_u,z_u)$$

$$\underline{r}_v(S_{13},x,y,z)=(x_v,y_v,z_v)$$

$$\underline{r}_w(S_{14},x,y,z)=(x_w,y_w,z_w)$$

$$\underline{r}_x(S_{15},x,y,z)=(x_x,y_x,z_x)$$

para simplificar la notación de aquí en adelante haremos

$$\underline{r}_a(S_i,x,y,z)=\underline{r}_a(S_i)$$

para todos los casos

El problema consiste en hallar las ecuaciones que relacionen el tiempo y el espacio.

Solución.

Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{uv}$ ,  $S_{12} \leq t < S_{13}$

Observando el perfil de velocidad, observamos, que el comportamiento es lineal y con velocidad inicial 0 y final  $\zeta$  para  $t = S_{12}$  y  $t = S_{13}$  respectivamente y de la ecuación general de una recta  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  se deduce que se puede formar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} \dot{r}_{12}(S_{12}) = 0 \\ \dot{r}_{13}(S_{13}) = \zeta \end{array} \right\} \quad (3.176)$$

y de la ecuación general de una recta ( $y = mx + b$ ) se desprende el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 S_{12} &= 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 S_{12} &= \zeta \end{aligned} \right\} \quad (3.177)$$

del cual las soluciones son:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= -\alpha_1 S_{12} \\ \alpha_1 &= \frac{\zeta}{S_{13} - S_{12}} \end{aligned} \right\} \quad (3.178)$$

3.178 en  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  da como resultado

$$\dot{r}_{13}(\tau) = \frac{\zeta}{S_{13} - S_{12}} (t - S_{12}) \quad (3.179)$$

que es la ecuación que define la rapidez para el segmento  $\overline{uv}$  es, obténgase ahora la ecuación que define el desplazamiento, y como se ha visto con anterioridad se debe integrar 3.179, tal que

$$\int_{S_{12}}^t \dot{r}_{13}(\tau) d\tau = \frac{\zeta}{S_{13} - S_{12}} \left[ \int_{S_{12}}^t \tau d\tau - \int_{S_{12}}^t S_{12} d\tau \right] \quad (3.180)$$

integrando 3.139 paso a paso se tiene

$$\begin{aligned}
&= \frac{\zeta}{S_{13} - S_{12}} \left[ \frac{1}{2} \tau^2 \Big|_{S_{12}} - S_{12} \tau \Big|_{S_{12}} + r_{S_{12}} \right] \\
&= \frac{\zeta}{S_{13} - S_{12}} \left[ \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} S_{12}^2 - (S_{12} t - S_{12}^2) \right] + r_{S_{12}} \\
r_{13}(\tau) &= \left\{ \frac{\zeta}{S_{13} - S_{12}} \right\} \frac{t^2}{2} - \frac{S_{12}}{2} - S_{12} t + S_{12}^2 + r_{S_{12}} \\
r_{13}(\tau) &= \left\{ \frac{\zeta}{S_{13} - S_{12}} \right\} \frac{(t - S_{12})^2}{2} + r_{S_{12}} \tag{3.181}
\end{aligned}$$

la expresión vectorial se obtiene a partir de 3.181 haciendo

$$\underline{r}_{uv}(t) = r_{13}(\tau) \underline{r}_{u_{13}} \tag{3.182}$$

al sustituir 3.181 en 3.182 se obtiene

$$\underline{r}_{uv}(t) = \left\{ \left[ \frac{\zeta}{S_{13} - S_{12}} \right] \frac{(t - S_{12})^2}{2} + r_{S_{12}} \right\} \underline{r}_{u_{13}} \tag{3.183}$$

donde

$\underline{r}_{u_{13}} = \frac{1}{\|\underline{r}_{13}\|} \underline{r}_{13}$ , es el vector unitario que define la dirección del movimiento

en el eje y, o mejor dicho, es paralelo a dicho eje, recurramos ahora al vector formado por las coordenadas espaciales que van de  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ , es decir,

$\underline{r}_{13} = (x_v, y_v, z_v) - (x_u, y_u, z_u)$  o  $\underline{r}_{13} = (x_v - x_u, y_v - y_u, z_v - z_u)$ , y finalmente de (3.183) se tiene que

$$\underline{r}_{uv}(t) = \left[ \frac{\zeta}{S_{13} - S_{12}} \right] \frac{(t - S_{12})^2}{2} \underline{r}_{u_{13}} + \underline{r}_{S_{12}} \quad (3.184)$$

de las condiciones iniciales del segmento de análisis, que son

$$\left. \begin{aligned} \underline{r}_{uv}(S_{12}) &= (x_u, y_u, z_u) \\ \underline{r}_{uv}(S_{13}) &= (x_v, y_v, z_v) \end{aligned} \right\} \quad (3.185)$$

y utilizando la primer condición en 3.184 resulta en

$$\underline{r}_{uv}(S_{12}) = \left[ \frac{\zeta}{S_{13} - S_{12}} \right] \frac{(S_{12} - S_{12})^2}{2} \underline{r}_{u_{13}} + \underline{r}_{S_{12}} = (x_u, y_u, z_u) \quad (3.186)$$

de donde se desprende que

$$\underline{r}_{S_{12}} = (x_u, y_u, z_u) \quad (3.187)$$

sustituir 3.187 en 3.186 resulta en

$$\underline{r}_{uv}(S_{13}) = \left[ \frac{\zeta}{S_{13} - S_{12}} \right] \frac{(S_{13} - S_{12})^2}{2} \underline{r}_{u_{13}} + (x_u, y_u, z_u) = (x_v, y_v, z_v) \quad (3.188)$$

donde 3.188 es la solución completa para el intervalo de análisis, sin embargo, nótese que ahora se puede hallar el valor de la rapidez en función de la norma del vector que define el intervalo de movimiento y los tiempos de inicio y fin de dicho intervalo y paso a paso se obtiene

$$\begin{aligned}
 \frac{\zeta(S_{13} - S_{12})}{2} \underline{r}_{u_{13}} + \underline{r}_{S_{12}} + (x_u, y_u, z_u) &= (x_v, y_v, z_v) \\
 \frac{\zeta(S_{13} - S_{12})}{2} \underline{r}_{u_{13}} &= (x_v, y_v, z_v) - (x_u, y_u, z_u) \\
 \frac{\zeta(S_{13} - S_{12})}{2} \underline{r}_{u_{13}} &= \underline{r}_{13}
 \end{aligned} \tag{3.189}$$

ahora bien sabemos que  $\underline{r}_{u_{13}} = \frac{1}{\|\underline{r}_{13}\|} \underline{r}_{13}$  por lo tanto 3.189 da como resultado

$$\begin{aligned}
 \frac{\zeta(S_{13} - S_{12})}{2} \underline{r}_{u_{13}} &= \underline{r}_{13} \\
 \frac{\zeta(S_{13} - S_{12})}{2} \frac{1}{\|\underline{r}_{13}\|} \underline{r}_{13} - \underline{r}_{13} &= 0 \\
 \underline{r}_{13} \left( \frac{\zeta(S_{13} - S_{12})}{2} \frac{1}{\|\underline{r}_{13}\|} - 1 \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{3.190}$$

de 3.190 y como  $\underline{r}_{13} \neq 0$ , entonces

$$\left( \frac{\zeta(S_{13} - S_{12})}{2} \frac{1}{\|\underline{r}_{13}\|} - 1 \right) = 0$$

$$\zeta(S_{13} - S_{12}) \frac{1}{\|\underline{r}_{13}\|} - 2 = 0$$

$$\zeta = 2 \frac{\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})} \quad (3.191)$$

por lo que la expresión vectorial buscada para el intervalo  $\overline{uv}$  es

$$\underline{r}_{uv}(t) = \frac{(t - S_{12})^2}{(S_{13} - S_{12})^2} \underline{r}_{13} + (x_u, y_u, z_u) \quad (3.192)$$

Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{vw}$ ,  $S_{13} \leq t < S_{14}$

Toda vez que el comportamiento es constante, según se aprecia en el perfil de velocidad 5, se tiene que  $\dot{r}_{14}(t) = \zeta$  y como  $\zeta = 2 \frac{\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})}$  entonces

$$\dot{r}_{14}(\tau) = \frac{2\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})} \quad (3.193)$$

y como en los casos anteriores, se tiene que integrar 3.193, y haciéndolo paso a paso se obtiene

$$\int_{S_{13}} \dot{r}_{14}(\tau) d\tau = \int_{S_{13}} \frac{2\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})} d\tau = \frac{2\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})} (t - S_{13}) + r_{S_{13}}$$

$$r_{14}(\tau) = \frac{2\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})} (t - S_{13}) + r_{S_{13}} \quad (3.194)$$

la ecuación general que define al movimiento en el intervalo dado es

$$\underline{r}_{vw}(t) = r_{14}(\tau) \underline{r}_{u_{14}} \quad (3.195)$$

sustituir 3.194 en 3.195 da como resultado

$$\underline{r}_{vw}(t) = \left[ \frac{2\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})} (t - S_{13}) + r_{S_{13}} \right] \underline{r}_{u_{14}}$$

$$\underline{r}_{vw}(t) = \frac{2\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})} (t - S_{13}) \underline{r}_{u_{14}} + \underline{r}_{S_{13}} \quad (3.196)$$

donde  $\underline{r}_{u_{14}} = \frac{1}{\|\underline{r}_{14}\|} \underline{r}_{14}$  y  $\underline{r}_{14} = (x_w - x_v, y_w - y_v, z_w - z_v)$

sustitúyanse las igualdades anteriores en la expresión vectorial 3.196, es decir

$$\underline{r}_{vw}(t) = \frac{2\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})} (t - S_{13}) \frac{1}{\|\underline{r}_{14}\|} \underline{r}_{14} + \underline{r}_{S_{13}}$$

$$\underline{r}_{vw}(t) = \frac{2\|\underline{r}_{13}\| (t - S_{13})}{\|\underline{r}_{14}\| (S_{13} - S_{12})} \underline{r}_{14} + \underline{r}_{S_{13}} \quad (3.197)$$



donde 3.197 es la ecuación que define por completo el movimiento en el intervalo de análisis aplíquense ahora condiciones de frontera

$$\underline{r}_{vw}(S_{13}) = \frac{2\|\underline{r}_{13}\|(S_{13} - S_{13})}{\|\underline{r}_{14}\|(S_{13} - S_{12})} \underline{r}_{14} + \underline{r}_{S_{13}} = (x_v, y_v, z_v) \quad (3.198)$$

y simplificando se encuentra que

$$\underline{r}_{S_{13}} = (x_v, y_v, z_v) \quad (3.199)$$

aplicar 3.199 a 3.197 resulta en

$$\underline{r}_{vw}(t) = \frac{2\|\underline{r}_{13}\|(t - S_{13})}{\|\underline{r}_{14}\|(S_{13} - S_{12})} \underline{r}_{14} + (x_v, y_v, z_v) \quad (3.200)$$

obsérvese que ahora es posible determinar el valor de  $S_{14}$  en función de los valores temporales anteriores y las normas ya conocidas, sustituyendo la condición que corresponde a  $S_{14}$  en 3.200 sustituyendo y simplificando paso a paso se tiene

$$\underline{r}_{vw}(S_{14}) = \frac{2\|\underline{r}_{13}\|(S_{14} - S_{13})}{\|\underline{r}_{14}\|(S_{13} - S_{12})} \underline{r}_{14} + (x_v, y_v, z_v) = (x_w, y_w, z_w) \quad (3.201)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\|\underline{r}_{13}\|(S_{14} - S_{13})}{\|\underline{r}_{14}\|(S_{13} - S_{12})} \underline{r}_{14} = (x_w, y_w, z_w) - (x_v, y_v, z_v) \\
& \frac{2\|\underline{r}_{13}\|(S_{14} - S_{13})}{\|\underline{r}_{14}\|(S_{13} - S_{12})} \underline{r}_{14} = \underline{r}_{14} \\
& \frac{2\|\underline{r}_{13}\|(S_{14} - S_{13})}{\|\underline{r}_{14}\|(S_{13} - S_{12})} \underline{r}_{14} - \underline{r}_{14} = 0 \\
& \left[ \frac{2\|\underline{r}_{13}\|(S_{14} - S_{13})}{\|\underline{r}_{14}\|(S_{13} - S_{12})} - 1 \right] \underline{r}_{14} = 0
\end{aligned} \tag{3.202}$$

de 3.202 y como  $\underline{r}_{14} \neq 0$  entonces

$$\begin{aligned}
& \frac{2\|\underline{r}_{13}\|(S_{14} - S_{13})}{\|\underline{r}_{14}\|(S_{13} - S_{12})} - 1 = 0 \\
& \frac{2\|\underline{r}_{13}\|(S_{14} - S_{13})}{\|\underline{r}_{14}\|(S_{13} - S_{12})} = 1 \\
& (S_{14} - S_{13}) = \frac{\|\underline{r}_{14}\|(S_{13} - S_{12})}{2\|\underline{r}_{13}\|} \\
& S_{14} = \frac{\|\underline{r}_{14}\|(S_{13} - S_{12})}{2\|\underline{r}_{13}\|} + S_{13} \\
& S_{14} = \left[ \frac{\|\underline{r}_{14}\|(S_{13} - S_{12})}{2\|\underline{r}_{13}\|} + \frac{2\|\underline{r}_{13}\|S_{13}}{2\|\underline{r}_{13}\|} \right] \\
& S_{14} = \frac{\|\underline{r}_{14}\|(S_{13} - S_{12}) + 2\|\underline{r}_{13}\|S_{13}}{2\|\underline{r}_{13}\|} \\
& S_{14} = \frac{2\|\underline{r}_{13}\|S_{13} + \|\underline{r}_{14}\|S_{13} - \|\underline{r}_{14}\|S_{12}}{2\|\underline{r}_{13}\|} \\
& S_{14} = \frac{S_{13}(\|\underline{r}_{15}\| + 2\|\underline{r}_{13}\|) - S_{12}\|\underline{r}_{14}\|}{2\|\underline{r}_{13}\|}
\end{aligned} \tag{3.203}$$

nótese que ahora tenemos el intervalo de tiempo  $S_{14}$  en función de  $S_{13}$ , hecho muy conveniente, ya que así evitamos incógnitas adicionales para el modelo matemático.

Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{wx}$ ,  $S_{14} \leq t < S_{15}$

Al igual que el primer segmento del perfil de velocidad, éste último segmento tiene un comportamiento lineal, sólo que a diferencia del primero, éste último tiene pendiente de signo negativo, es decir, el primer caso es ascendente, mientras que éste caso es descendente, no obstante dicha diferencia, el análisis es el mismo, por tanto de  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ , y utilizando condiciones iniciales se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_{15}(S_{14}) &= \zeta = \frac{2\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})} \\ \dot{r}_{15}(S_{15}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.204)$$

sustituyendo 3.204 respectivamente en  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 S_{14} &= \frac{2\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})} \\ \alpha_0 + \alpha_1 S_{15} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.205)$$

y cuyas soluciones son

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{2\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})(S_{14} - S_{15})} S_{15} \\ \alpha_1 &= \frac{2\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})(S_{14} - S_{15})} \end{aligned} \right\} \quad (3.206)$$

sustituir 3.206 en  $\dot{r}_{.i}(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  resulta en

$$\dot{r}_{15}(\tau) = \frac{2\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})(S_{14} - S_{15})}t - \frac{2\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})(S_{14} - S_{15})}S_{15} \quad (3.207)$$

para determinar  $r_{15}(t)$  se integra 3.207 paso a paso en la siguiente forma, recuérdese que  $r_{15}(t)$  es la parte escalar del movimiento

$$\begin{aligned} \dot{r}_{15}(\tau) &= \frac{2\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})(S_{14} - S_{15})}(t - S_{15}) \\ \int_{S_{14}} \dot{r}_{15}(\tau) d\tau &= \frac{2\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})(S_{14} - S_{15})} \int_{S_{14}} (\tau - S_{15}) d\tau \\ \int_{S_{14}} \dot{r}_{15}(\tau) d\tau &= \frac{2\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})(S_{14} - S_{15})} \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{S_{14}^2}{2} + S_{14}S_{14} - S_{15}t \right] + r_{S_{14}} \\ \int_{S_{14}} \dot{r}_{15}(\tau) d\tau &= \frac{2\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})(S_{14} - S_{15})} \left[ t^2 - S_{14}^2 + 2S_{15}S_{14} - 2S_{15}t \right] + r_{S_{14}} \\ r_{15}(\tau) &= \frac{\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})(S_{14} - S_{15})} (t - S_{14}) [t + S_{14} - 2S_{15}] + r_{S_{14}} \quad (3.208) \end{aligned}$$

donde 3.208 es la parte escalar total del intervalo de análisis, por lo que corresponde hacer  $\underline{r}_{wx}(t) = r_{15}(\tau)\underline{r}_{u_{15}}$ , es decir,

$$\underline{r}_{wx}(t) = \left\{ \frac{\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})(S_{14} - S_{15})} (t - S_{14}) [t + S_{14} - 2S_{15}] + r_{S_{14}} \right\} \underline{r}_{u_{15}} \quad (3.209)$$

donde  $\underline{r}_{u_{15}} = \frac{1}{\|\underline{r}_{15}\|} \underline{r}_{15}$  y  $\underline{r}_{15} = (x_x - x_w, y_x - y_w, z_x - z_w)$  y esto en 3.209 resulta

en

$$\underline{r}_{wx}(t) = \left\{ \frac{\|\underline{r}_{13}\|}{(S_{13} - S_{12})(S_{14} - S_{15})} (t - S_{14}) [t + S_{14} - 2S_{15}] \frac{1}{\|\underline{r}_{15}\|} \underline{r}_{15} + \underline{r}_{S_{14}} \right\} \quad (3.210)$$

de la simplificación y reordenación de 3.210 se obtiene

$$\underline{r}_{wx}(t) = \frac{\|\underline{r}_{13}\|(t - S_{14})}{\|\underline{r}_{15}\|(S_{13} - S_{12})(S_{14} - S_{15})} [t + S_{14} - 2S_{15}] \underline{r}_{15} + \underline{r}_{S_{14}} \quad (3.211)$$

como siguiente paso, determínese el valor de  $\underline{r}_{S_{14}}$ , para lo que se recurre a las condiciones de frontera del intervalo de análisis

$$\underline{r}_{wx}(S_{14}) = \frac{\|\underline{r}_{13}\|(S_{14} - S_{14})}{\|\underline{r}_{15}\|(S_{13} - S_{12})(S_{14} - S_{15})} [t + S_{14} - 2S_{15}] \underline{r}_{15} + \underline{r}_{S_{14}} = (x_w, y_w, z_w) \quad (3.212)$$

de donde se desprende que

$$\underline{r}_{S_{14}} = (x_w, y_w, z_w) \quad (3.213)$$

y 3.213 en 3.211 arroja

$$\underline{r}_{wx}(t) = \frac{\|\underline{r}_{13}\|(t - S_{14})[t + S_{14} - 2S_{15}]}{\|\underline{r}_{15}\|(S_{13} - S_{12})(S_{14} - S_{15})} \underline{r}_{15} + (x_w, y_w, z_w) \quad (3.214)$$

que es la ecuación general del intervalo de análisis, ahora puede ser determinado el valor de  $S_{15}$  en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \underline{r}_{wx}(S_{15}) &= \frac{\|\underline{r}_{13}\|(S_{15} - S_{14})[S_{15} + S_{14} - 2S_{15}]}{\|\underline{r}_{15}\|(S_{13} - S_{12})(S_{14} - S_{15})} \underline{r}_{15} + (x_w, y_w, z_w) = (x_x, y_x, z_x) \\ \frac{\|\underline{r}_{13}\|(S_{13} - S_{14})[S_{14} - S_{15}]}{\|\underline{r}_{15}\|(S_{13} - S_{12})(S_{14} - S_{15})} \underline{r}_{15} &= (x_x, y_x, z_x) - (x_w, y_w, z_w) \\ \frac{\|\underline{r}_{13}\|(S_{15} - S_{14})}{\|\underline{r}_{15}\|(S_{13} - S_{12})} \underline{r}_{15} &= \underline{r}_{15} \\ \frac{\|\underline{r}_{13}\|(S_{15} - S_{14})}{\|\underline{r}_{15}\|(S_{13} - S_{12})} \underline{r}_{15} - \underline{r}_{15} &= 0 \end{aligned} \quad (3.215)$$

como  $\underline{r}_{15} \neq 0$  entonces de 3.215 se desprende que

$$\begin{aligned} \underline{r}_{15} \left( \frac{\|\underline{r}_{13}\|(S_{15} - S_{14})}{\|\underline{r}_{15}\|(S_{13} - S_{12})} - 1 \right) &= 0 \\ \frac{\|\underline{r}_{13}\|(S_{15} - S_{14})}{\|\underline{r}_{15}\|(S_{13} - S_{12})} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

y simplificando paso a paso se llega a

$$\begin{aligned}
\frac{\|r_{13}\|(S_{15} - S_{14})}{\|r_{15}\|(S_{13} - S_{12})} &= 1 \\
\|r_{13}\|(S_{15} - S_{14}) &= \|r_{15}\|(S_{13} - S_{12}) \\
S_{15} - S_{14} &= \frac{\|r_{15}\|(S_{13} - S_{12})}{\|r_{13}\|} \\
S_{15} &= \frac{\|r_{15}\|(S_{13} - S_{12})}{\|r_{13}\|} + S_{14}
\end{aligned} \tag{3.216}$$

pero  $S_{14} = \frac{S_{13}\|r_{14}\| + 2S_{13}\|r_{13}\| - S_{12}\|r_{14}\|}{2\|r_{13}\|}$  y por lo tanto

$$\begin{aligned}
S_{15} &= \frac{\|r_{15}\|(S_{13} - S_{12})}{\|r_{13}\|} + \frac{S_{13}\|r_{14}\| + 2S_{13}\|r_{13}\| - S_{12}\|r_{14}\|}{2\|r_{13}\|} \\
S_{15} &= \frac{2\|r_{15}\|(S_{13} - S_{12}) + S_{13}\|r_{14}\| + 2S_{13}\|r_{13}\| - S_{12}\|r_{14}\|}{2\|r_{13}\|} \\
S_{15} &= \frac{2S_{13}\|r_{13}\| - 2S_{12}\|r_{15}\| + S_{13}\|r_{14}\| + 2S_{13}\|r_{13}\| - S_{12}\|r_{14}\|}{2\|r_{13}\|} \\
S_{15} &= \frac{S_{13}(2\|r_{13}\| + \|r_{14}\| + 2\|r_{15}\|) - S_{12}(\|r_{14}\| + 2\|r_{15}\|)}{2\|r_{13}\|}
\end{aligned} \tag{3.217}$$

ahora se pueden resumir los resultados en la siguiente forma

Modelo total de trayectoria en $e_5$	Intervalos de tiempo
$\underline{r}_{ux}(t) = \begin{cases} \frac{(t - S_{12})^2}{(S_{13} - S_{12})^2} \underline{r}_{13} + (x_u, y_u, z_u) \\ \frac{2\ \underline{r}_{13}\ (t - S_{13})}{\ \underline{r}_{14}\ (S_{13} - S_{12})} \underline{r}_{14} + (x_v, y_v, z_v) \\ \frac{\ \underline{r}_{13}\ (t - S_{14})[t + S_{14} - 2S_{15}]}{\ \underline{r}_{15}\ (S_{13} - S_{12})(S_{14} - S_{15})} \underline{r}_{15} \\ \quad + (x_w, y_w, z_w) \end{cases}$	$S_{12} \leq t < S_{13}$ $S_{13} \leq t < S_{14}$ $S_{14} \leq t \leq S_{15}$

Tabla 5. Resumen de resultados de movimiento en y

Tiempos en función de las normas vectoriales.

$$S_{12} = \frac{S_{10}(2\|\underline{r}_{10}\| + \|\underline{r}_{11}\| + 2\|\underline{r}_{12}\|) - S_9(\|\underline{r}_{11}\| + 2\|\underline{r}_{12}\|)}{2\|\underline{r}_{10}\|}$$

$$S_{13} = S_{12} + C_3^*$$

$$S_{14} = \frac{S_{13}\|\underline{r}_{14}\| + 2S_{13}\|\underline{r}_{13}\| - S_{12}\|\underline{r}_{14}\|}{2\|\underline{r}_{13}\|}$$

$$S_{15} = \frac{2S_{13}\|\underline{r}_{13}\| - 2S_{12}\|\underline{r}_{15}\| + S_{13}\|\underline{r}_{14}\| + 2S_{13}\|\underline{r}_{13}\| - S_{12}\|\underline{r}_{14}\|}{2\|\underline{r}_{13}\|}$$

\*Donde  $C_3$  es una constante que equivale a un intervalo finito de tiempo.



### 3.4.3 Movimiento en dirección x

En esta parte la grúa se habrá colocado en la posición final donde colocará al contenedor, es decir, llegará al punto final donde depositara la carga.

Al igual que en el análisis anterior, para el desarrollo del modelo de movimiento, en z se utilizará un perfil específico de velocidad, e igualmente se recurrirá a las condiciones propias del instante de análisis.

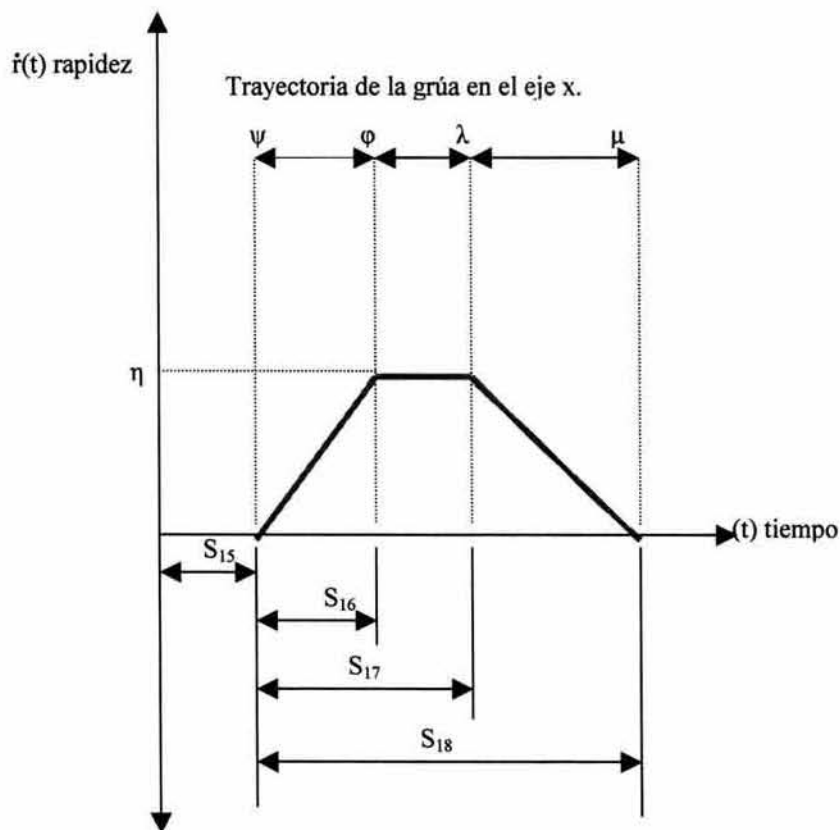


Figura 3.6 Gráfica del perfil de velocidad 6

Condiciones iniciales

$$\dot{r}_{15}(S_{15})= 0$$

$$\dot{r}_{16}(S_{16})= \eta$$

$$\dot{r}_{17}(S_{17})= \eta$$

$$\dot{r}_{18}(S_{18})= 0$$

Condiciones de frontera

$$\underline{r}_{\psi}(S_{15},x,y,z)=(x_{\psi},y_{\psi},z_{\psi})$$

$$\underline{r}_{\varphi}(S_{16},x,y,z)=(x_{\varphi},y_{\varphi},z_{\varphi})$$

$$\underline{r}_{\lambda}(S_{17},x,y,z)=(x_{\lambda},y_{\lambda},z_{\lambda})$$

$$\underline{r}_{\mu}(S_{18},x,y,z)=(x_{\mu},y_{\mu},z_{\mu})$$

para simplificar la notación de aquí en adelante haremos

$$\underline{r}_a(S_i,x,y,z)=\underline{r}_a(S_i)$$

para todos los casos

El problema consiste en hallar las ecuaciones que relacionen el tiempo y el espacio.

Solución.

Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{\psi\varphi}$ ,  $S_{15} \leq t < S_{16}$

Observando el perfil de velocidad, observamos, que el comportamiento es lineal y con velocidad inicial 0 y final  $\eta$  para  $t = S_{15}$  y  $t = S_{16}$  respectivamente y de la ecuación general de una recta  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  se deduce que se puede formar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} \dot{r}_{15}(S_{15}) = 0 \\ \dot{r}_{16}(S_{16}) = \eta \end{array} \right\} (3.218)$$

y de la ecuación general de una recta ( $y = mx + b$ ) se desprende el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 S_{15} &= 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 S_{16} &= \eta \end{aligned} \right\} \quad (3.219)$$

del cual las soluciones son:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= -\alpha_1 S_{15} \\ \alpha_1 &= \frac{\delta}{S_{16} - S_{15}} \end{aligned} \right\} \quad (3.220)$$

sustituyendo 3.220 en  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  se tiene

$$\dot{r}_{16}(\tau) = \frac{\eta}{S_{16} - S_{15}} (\tau - S_{15}) \quad (3.221)$$

que es la ecuación que define la rapidez para el segmento  $\overline{\psi\varphi}$  es

obtégase ahora la ecuación que define el desplazamiento, y como se ha visto con anterioridad se debe integrar 3.221, tal que

$$\int_{S_{15}}^t \dot{r}_{16}(\tau) d\tau = \frac{\eta}{S_{16} - S_{15}} \left[ \int_{S_{15}}^t \tau d\tau - \int_{S_{15}}^t S_{15} d\tau \right] \quad (3.222)$$

integrando 3.222 paso a paso se tiene

$$\begin{aligned}
&= \frac{\eta}{S_{16} - S_{15}} \left[ \frac{1}{2} \tau^2 \Big|_{S_{15}} - S_{15} \tau \Big|_{S_{15}} + r_{S_{15}} \right] \\
&= \frac{\eta}{S_{16} - S_{15}} \left[ \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} S_{15}^2 - (S_{15} t - S_{15}^2) \right] + r_{S_{15}} \\
r_{16}(\tau) &= \left\{ \frac{\eta}{S_{16} - S_{15}} \right\} \frac{t^2}{2} - \frac{S_{15}}{2} - S_{15} t + S_{15}^2 + r_{S_{15}} \\
r_{16}(\tau) &= \left\{ \frac{\eta}{S_{16} - S_{15}} \right\} \frac{(t - S_{15})^2}{2} + r_{S_{15}} \tag{3.223}
\end{aligned}$$

la expresión vectorial se obtiene a partir de 3.223 haciendo

$$\underline{r}_{\psi\phi}(t) = r_{16}(\tau) \underline{r}_{u_{16}} \tag{3.224}$$

al sustituir 3.223 en 3.224 se obtiene

$$\underline{r}_{\psi\phi}(t) = \left\{ \left[ \frac{\eta}{S_{16} - S_{15}} \right] \frac{(t - S_{15})^2}{2} + r_{S_{15}} \right\} \underline{r}_{u_{16}} \tag{3.225}$$

donde

$\underline{r}_{u_{16}} = \frac{1}{\|\underline{r}_{16}\|} \underline{r}_{16}$ , es el vector unitario que define la dirección del movimiento

en el eje  $y$ , o mejor dicho, es paralelo a dicho eje, recúrrase ahora al vector formado por las coordenadas espaciales que van de  $\psi$  a  $\phi$ , es decir,

$$\underline{r}_{16} = (x_{\phi}, y_{\phi}, z_{\phi}) - (x_{\psi}, y_{\psi}, z_{\psi}) \text{ o } \underline{r}_{16} = (x_{\phi} - x_{\psi}, y_{\phi} - y_{\psi}, z_{\phi} - z_{\psi}), \quad \text{finalmente}$$

3.225 resulta en

$$\underline{r}_{\psi\phi}(t) = \left[ \frac{\eta}{S_{16} - S_{15}} \right] \frac{(t - S_{15})^2}{2} \underline{r}_{u_{16}} + \underline{r}_{S_{15}} \quad (3.226)$$

de las condiciones iniciales del segmento de análisis, que son

$$\left. \begin{aligned} \underline{r}_{\psi\phi}(S_{15}) &= (x_{\psi}, y_{\psi}, z_{\psi}) \\ \underline{r}_{\psi\phi}(S_{16}) &= (x_{\phi}, y_{\phi}, z_{\phi}) \end{aligned} \right\} \quad (3.227)$$

y utilizando la primer condición en 3.227 resulta en

$$\underline{r}_{\psi\phi}(S_{15}) = \left[ \frac{\eta}{S_{16} - S_{15}} \right] \frac{(S_{15} - S_{15})^2}{2} \underline{r}_{u_{16}} + \underline{r}_{S_{15}} = (x_{\psi}, y_{\psi}, z_{\psi}) \quad (3.228)$$

simplificando se obtiene que

$$\underline{r}_{S_{15}} = (x_{\psi}, y_{\psi}, z_{\psi}) \quad (3.229)$$

sustituir 3.229 en 3.226 resulta en

$$\underline{r}_{\psi\phi}(t) = \left[ \frac{\eta}{S_{16} - S_{15}} \right] \frac{(t - S_{15})^2}{2} \underline{r}_{u_{16}} + (x_{\psi}, y_{\psi}, z_{\psi}) \quad (3.230)$$

donde 3.230 es la solución completa para el intervalo de análisis, sin embargo, nótese que ahora se puede hallar el valor de la rapidez en función de la norma del vector que define el intervalo de movimiento y los tiempos de inicio y fin de dicho intervalo y paso a paso se obtiene

$$\underline{r}_{\psi\varphi}(S_{16}) = \left[ \frac{\eta}{S_{16} - S_{15}} \right] \frac{(S_{16} - S_{15})^2}{2} \underline{r}_{u_{16}} + (x_{\psi}, y_{\psi}, z_{\psi}) = (x_{\varphi}, y_{\varphi}, z_{\varphi}) \quad (3.231)$$

y la simplificación de 3.231 da como resultado

$$\begin{aligned} \frac{\eta(S_{16} - S_{15})}{2} \underline{r}_{u_{16}} + \underline{r}_{S_{15}} + (x_{\psi}, y_{\psi}, z_{\psi}) &= (x_{\varphi}, y_{\varphi}, z_{\varphi}) \\ \frac{\eta(S_{16} - S_{15})}{2} \underline{r}_{u_{16}} &= (x_{\psi}, y_{\psi}, z_{\psi}) - (x_{\varphi}, y_{\varphi}, z_{\varphi}) \\ \frac{\eta(S_{16} - S_{15})}{2} \underline{r}_{u_{16}} &= \underline{r}_{16} \end{aligned} \quad (3.232)$$

ahora bien,  $\underline{r}_{u_{16}} = \frac{1}{\|\underline{r}_{16}\|} \underline{r}_{16}$  en 3.232 resulta en

$$\begin{aligned} \frac{\eta(S_{16} - S_{15})}{2} \underline{r}_{u_{16}} &= \underline{r}_{16} \\ \frac{\eta(S_{16} - S_{15})}{2} \frac{1}{\|\underline{r}_{16}\|} \underline{r}_{16} - \underline{r}_{16} &= 0 \\ \underline{r}_{16} \left( \frac{\eta(S_{16} - S_{15})}{2} \frac{1}{\|\underline{r}_{16}\|} - 1 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.233)$$

como  $\underline{r}_{16} \neq 0$ , entonces

$$\left( \frac{\eta(S_{16} - S_{15})}{2} \frac{1}{\|\underline{r}_{16}\|} - 1 \right) = 0$$

$$\eta(S_{16} - S_{15}) \frac{1}{\|\underline{r}_{16}\|} - 2 = 0$$

$$\eta = 2 \frac{\|\underline{r}_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})} \quad (3.234)$$

por lo que la expresión vectorial buscada para el intervalo  $\overline{\psi\varphi}$  es

$$\underline{r}_{\psi\varphi}(t) = \frac{(t - S_{15})^2}{(S_{16} - S_{15})^2} \underline{r}_{16} + (x_\psi, y_\psi, z_\psi) \quad (3.235)$$

Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{\varphi\lambda}$ ,  $S_{16} \leq t < S_{17}$

Toda vez que el comportamiento es constante, según se aprecia en el perfil de velocidad 6, se tiene que  $\dot{r}_{17}(t) = \eta$  y  $\eta = \frac{2\|\underline{r}_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})}$  y por lo tanto

$$\dot{r}_{17}(t) = \frac{2\|\underline{r}_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})} \quad (3.236)$$

como en los casos anteriores, se tiene que integrar 3.236, y haciéndolo paso a paso se obtiene

$$\int_{S_{16}} \dot{r}_{17}(\tau) d\tau = \int_{S_{16}} \frac{2\|\underline{r}_{16}\|}{S_{16} - S_{15}} d\tau = \frac{2\|\underline{r}_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})}(t - S_{16}) + r_{S_{16}}$$

$$r_{17}(\tau) = \frac{2\|\underline{r}_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})}(t - S_{16}) + r_{S_{16}} \quad (3.237)$$

dado que la ecuación general que define al movimiento en el intervalo dado es

$$\underline{r}_{\phi\lambda}(t) = r_{17}(\tau)\underline{r}_{u_{17}} \quad (3.238)$$

y sustituir 3.237 en 3.238 da como resultado

$$\underline{r}_{\phi\lambda}(t) = \left[ \frac{2\|\underline{r}_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})}(t - S_{16}) + r_{S_{16}} \right] \underline{r}_{u_{17}}$$

$$\underline{r}_{\phi\lambda}(t) = \frac{2\|\underline{r}_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})}(t - S_{16})\underline{r}_{u_{17}} + \underline{r}_{S_{16}} \quad (3.239)$$

donde  $\underline{r}_{u_{17}} = \frac{1}{\|\underline{r}_{17}\|}\underline{r}_{17}$  y  $\underline{r}_{17} = (x_{\phi} - x_{\lambda}, y_{\phi} - y_{\lambda}, z_{\phi} - z_{\lambda})$ , sustitúyanse las igualdades anteriores en la expresión vectorial 3.239, es decir

$$\underline{r}_{\phi\lambda}(t) = \frac{2\|\underline{r}_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})}(t - S_{16}) \frac{1}{\|\underline{r}_{17}\|}\underline{r}_{17} + \underline{r}_{S_{16}} \quad (3.240)$$

a su vez simplificar 3.240 da como resultado



$$\underline{r}_{\varphi\lambda}(t) = \frac{2\|\underline{r}_{16}\|(t - S_{16})}{\|\underline{r}_{17}\|(S_{16} - S_{15})} \underline{r}_{17} + \underline{r}_{S_{16}} \quad (3.241)$$

que es la ecuación general de movimiento del intervalo de análisis, aplicando la condición de frontera respectiva se obtiene

$$\underline{r}_{\varphi\lambda}(S_{16}) = \frac{2\|\underline{r}_{16}\|(S_{16} - S_{16})}{\|\underline{r}_{17}\|(S_{16} - S_{15})} \underline{r}_{17} + \underline{r}_{S_{16}} = (x_{\varphi}, y_{\varphi}, z_{\varphi}) \quad (3.242)$$

simplificar 3.73 da como resultado que

$$\underline{r}_{S_{16}} = (x_{\varphi}, y_{\varphi}, z_{\varphi}) \quad (3.243)$$

sustituir 3.243 en 3.242 resulta en

$$\underline{r}_{\varphi\lambda}(t) = \frac{2\|\underline{r}_{16}\|(t - S_{16})}{\|\underline{r}_{17}\|(S_{16} - S_{15})} \underline{r}_{17} + (x_{\varphi}, y_{\varphi}, z_{\varphi}) \quad (3.244)$$

obsérvese que ahora es posible determinar el valor de  $S_{17}$  en función de los valores temporales anteriores y las normas ya conocidas, sustituyendo la condición que corresponde a  $S_{17}$  en 3.244 y simplificando paso a paso da como resultado

$$\underline{r}_{\varphi\lambda}(S_{17}) = \frac{2\|\underline{r}_{16}\|(S_{17} - S_{16})}{\|\underline{r}_{17}\|(S_{16} - S_{15})} \underline{r}_{17} + (x_{\varphi}, y_{\varphi}, z_{\varphi}) = (x_{\lambda}, y_{\lambda}, z_{\lambda})$$

$$\begin{aligned} \frac{2\|\underline{r}_{16}\|(S_{17} - S_{16})}{\|\underline{r}_{17}\|(S_{16} - S_{15})} \underline{r}_{17} &= (x_{\lambda}, y_{\lambda}, z_{\lambda}) - (x_{\varphi}, y_{\varphi}, z_{\varphi}) \\ \frac{2\|\underline{r}_{16}\|(S_{17} - S_{16})}{\|\underline{r}_{17}\|(S_{16} - S_{15})} \underline{r}_{17} &= \underline{r}_{17} \\ \frac{2\|\underline{r}_{16}\|(S_{17} - S_{16})}{\|\underline{r}_{17}\|(S_{16} - S_{15})} \underline{r}_{17} - \underline{r}_{17} &= 0 \\ \left[ \frac{2\|\underline{r}_{16}\|(S_{17} - S_{16})}{\|\underline{r}_{17}\|(S_{16} - S_{15})} - 1 \right] \underline{r}_{17} &= 0 \end{aligned} \tag{3.245}$$

de 3.245 y como  $\underline{r}_{17} \neq 0$  y simplificando paso a paso se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{2\|\underline{r}_{16}\|(S_{17} - S_{16})}{\|\underline{r}_{17}\|(S_{16} - S_{15})} - 1 &= 0 \\ \frac{2\|\underline{r}_{16}\|(S_{17} - S_{16})}{\|\underline{r}_{17}\|(S_{16} - S_{15})} &= 1 \\ (S_{17} - S_{16}) &= \frac{\|\underline{r}_{17}\|(S_{16} - S_{15})}{2\|\underline{r}_{16}\|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{17} &= \frac{\|r_{17}\|(S_{16} - S_{15})}{2\|r_{16}\|} + S_{16} \\
S_{17} &= \left[ \frac{\|r_{17}\|(S_{16} - S_{15})}{2\|r_{16}\|} + \frac{2\|r_{16}\|S_{16}}{2\|r_{16}\|} \right] \\
S_{17} &= \frac{\|r_{17}\|(S_{16} - S_{15}) + 2\|r_{16}\|S_{16}}{2\|r_{16}\|} \\
S_{17} &= \frac{2\|r_{16}\|S_{16} + \|r_{17}\|S_{16} - \|r_{17}\|S_{15}}{2\|r_{16}\|} \\
S_{17} &= \frac{S_{16}(\|r_{17}\| + 2\|r_{16}\|) - S_{15}\|r_{17}\|}{2\|r_{16}\|} \tag{3.246}
\end{aligned}$$

nótese que ahora tenemos el intervalo de tiempo  $S_{17}$  en función de  $S_{16}$ , hecho muy conveniente, ya que así evitamos incógnitas adicionales para el modelo matemático.

Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{\lambda\mu}$ ,  $S_{17} \leq t < S_{18}$

Al igual que el primer segmento del perfil de velocidad, éste último segmento tiene un comportamiento lineal, sólo que a diferencia del primero, éste último tiene pendiente de signo negativo, es decir, en el primer caso la velocidad es ascendente, mientras que éste caso es descendente, no obstante dicha diferencia, el análisis es el mismo, por tanto de  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ , y utilizando condiciones iniciales se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_{17}(S_{17}) &= \eta = \frac{2\|r_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})} \\ \dot{r}_{18}(S_{18}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.247)$$

sustituyendo 3.247 respectivamente en  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 S_{17} &= \frac{2\|r_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})} \\ \alpha_0 + \alpha_1 S_{18} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.248)$$

y cuyas soluciones son

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{2\|r_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})(S_{17} - S_{18})} S_{18} \\ \alpha_1 &= \frac{2\|r_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})(S_{17} - S_{18})} \end{aligned} \right\} \quad (3.249)$$

y 3.249 en  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  da como resultado

$$\dot{r}_{18}(\tau) = \frac{2\|\underline{r}_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})(S_{17} - S_{18})} \tau - \frac{2\|\underline{r}_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})(S_{17} - S_{18})} S_{18} \quad (3.252)$$

para determinar  $r_{18}(t)$  se integra 3.252 paso a paso en la siguiente forma, recuérdese que  $r_{18}(t)$  es la parte escalar del movimiento

$$\begin{aligned} \dot{r}_{18}(\tau) &= \frac{2\|\underline{r}_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})(S_{17} - S_{18})} (\tau - S_{18}) \\ \int_{S_{17}} \dot{r}_{18}(\tau) d\tau &= \frac{2\|\underline{r}_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})(S_{17} - S_{18})} \int_{S_{17}} (\tau - S_{18}) d\tau \\ \int_{S_{17}} \dot{r}_{18}(\tau) d\tau &= \frac{2\|\underline{r}_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})(S_{17} - S_{18})} \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{S_{17}^2}{2} + S_{18}S_{17} - S_{18}t \right] + r_{S_{17}} \\ \int_{S_{17}} \dot{r}_{18}(\tau) d\tau &= \frac{\|\underline{r}_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})(S_{17} - S_{18})} \left[ t^2 - S_{17}^2 + 2S_{18}S_{17} - 2S_{18}t \right] + r_{S_{17}} \\ r_{18}(\tau) &= \frac{\|\underline{r}_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})(S_{17} - S_{18})} (\tau - S_{17}) [t + S_{17} - 2S_{18}] + r_{S_{17}} \quad (3.253) \end{aligned}$$

donde 3.253 es la parte escalar total del intervalo de análisis, por lo que corresponde hacer  $\underline{r}_{\lambda\mu}(t) = r_{18}(\tau) \underline{r}_{u_{18}}$ , es decir,

$$\underline{r}_{\lambda\mu}(t) = \left\{ \frac{\|\underline{r}_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})(S_{17} - S_{18})} (\tau - S_{17}) [t + S_{17} - 2S_{18}] + r_{S_{17}} \right\} \underline{r}_{u_{18}} \quad (3.254)$$

donde  $\underline{r}_{u_{18}} = \frac{1}{\|\underline{r}_{18}\|} \underline{r}_{18}$  y  $\underline{r}_{18} = (x_\mu - x_\lambda, y_\mu - y_\lambda, z_\mu - z_\lambda)$  y esto en 3.254 resulta en

$$\underline{r}_{\lambda\mu}(t) = \left\{ \frac{\|\underline{r}_{16}\|}{(S_{16} - S_{15})(S_{17} - S_{18})} (t - S_{17}) [t + S_{17} - 2S_{18}] \frac{1}{\|\underline{r}_{18}\|} \underline{r}_{18} + \underline{r}_{S_{17}} \right\} \quad (3.255)$$

de la simplificación y reordenación de 3.255 se obtiene

$$\underline{r}_{\lambda\mu}(t) = \frac{\|\underline{r}_{16}\|(t - S_{17})}{\|\underline{r}_{18}\|(S_{16} - S_{15})(S_{17} - S_{18})} [t + S_{17} - 2S_{18}] \underline{r}_{18} + \underline{r}_{S_{17}} \quad (3.256)$$

como siguiente paso, determínese el valor de  $\underline{r}_{S_{17}}$ , para lo que se recurre a las condiciones de frontera del intervalo de análisis

$$\underline{r}_{\lambda\mu}(S_{17}) = \frac{\|\underline{r}_{16}\|(S_{17} - S_{17})}{\|\underline{r}_{18}\|(S_{16} - S_{15})(S_{17} - S_{18})} [t + S_{17} - 2S_{18}] \underline{r}_{18} + \underline{r}_{S_{17}} = (x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda) \quad (3.257)$$

de lo anterior se desprende que

$$\underline{r}_{S_{17}} = (x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda) \quad (3.258)$$

y 3.258 en 3.256 resulta en

$$\underline{r}_{\lambda\mu}(t) = \frac{\|\underline{r}_{16}\|(t - S_{17})[t + S_{17} - 2S_{18}]}{\|\underline{r}_{18}\|(S_{16} - S_{15})(S_{17} - S_{18})} \underline{r}_{18} + (x_{\lambda}, y_{\lambda}, z_{\lambda}) \quad (3.259)$$

que es la ecuación general del intervalo de análisis, ahora puede ser determinado el valor de  $S_{18}$  en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \underline{r}_{\lambda\mu}(S_{18}) &= \frac{\|\underline{r}_{16}\|(S_{18} - S_{17})[S_{18} + S_{17} - 2S_{18}]}{\|\underline{r}_{18}\|(S_{16} - S_{15})(S_{17} - S_{18})} \underline{r}_{18} + (x_{\lambda}, y_{\lambda}, z_{\lambda}) = (x_{\mu}, y_{\mu}, z_{\mu}) \\ \frac{\|\underline{r}_{16}\|(S_{18} - S_{17})[S_{17} - S_{18}]}{\|\underline{r}_{18}\|(S_{16} - S_{15})(S_{17} - S_{18})} \underline{r}_{18} &= (x_{\mu}, y_{\mu}, z_{\mu}) - (x_{\lambda}, y_{\lambda}, z_{\lambda}) \\ \frac{\|\underline{r}_{16}\|(S_{18} - S_{17})}{\|\underline{r}_{18}\|(S_{16} - S_{15})} \underline{r}_{18} &= \underline{r}_{18} \\ \frac{\|\underline{r}_{16}\|(S_{18} - S_{17})}{\|\underline{r}_{18}\|(S_{16} - S_{15})} \underline{r}_{18} - \underline{r}_{18} &= 0 \end{aligned} \quad (3.260)$$

como  $\underline{r}_{18} \neq 0$  entonces de 3.260 se desprende que

$$\begin{aligned} \underline{r}_{18} \left( \frac{\|\underline{r}_{16}\|(S_{18} - S_{17})}{\|\underline{r}_{18}\|(S_{16} - S_{15})} - 1 \right) &= 0 \\ \frac{\|\underline{r}_{16}\|(S_{18} - S_{17})}{\|\underline{r}_{18}\|(S_{16} - S_{15})} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

y simplificando paso a paso se llega a

$$\begin{aligned}
\frac{\|r_{16}\|(S_{18} - S_{17})}{\|r_{18}\|(S_{16} - S_{15})} &= 1 \\
\|r_{16}\|(S_{18} - S_{17}) &= \|r_{18}\|(S_{16} - S_{15}) \\
S_{18} - S_{17} &= \frac{\|r_{18}\|(S_{16} - S_{15})}{\|r_{16}\|} \\
S_{18} &= \frac{\|r_{18}\|(S_{16} - S_{15})}{\|r_{16}\|} + S_{17}
\end{aligned} \tag{3.261}$$

pero  $S_{17} = \frac{S_{16}\|r_{17}\| + 2S_{16}\|r_{16}\| - S_{15}\|r_{17}\|}{2\|r_{16}\|}$  y por lo tanto

$$\begin{aligned}
S_{18} &= \frac{\|r_{18}\|(S_{16} - S_{15})}{\|r_{16}\|} + \frac{S_{16}\|r_{17}\| + 2S_{16}\|r_{16}\| - S_{15}\|r_{17}\|}{2\|r_{16}\|} \\
S_{18} &= \frac{2\|r_{18}\|(S_{16} - S_{15}) + S_{16}\|r_{17}\| + 2S_{16}\|r_{16}\| - S_{15}\|r_{17}\|}{2\|r_{16}\|} \\
S_{18} &= \frac{2S_{16}\|r_{18}\| - 2S_{15}\|r_{18}\| + S_{16}\|r_{17}\| + 2S_{16}\|r_{16}\| - S_{15}\|r_{17}\|}{2\|r_{16}\|} \\
S_{18} &= \frac{S_{16}(2\|r_{16}\| + \|r_{17}\| + 2\|r_{18}\|) - S_{15}(\|r_{17}\| + 2\|r_{18}\|)}{2\|r_{16}\|}
\end{aligned} \tag{3.262}$$

ahora se pueden resumir los resultados en la siguiente forma



Modelo total de trayectoria en z	Intervalos de tiempo
$\underline{r}_{\psi\mu}(t) = \begin{cases} \frac{(t - S_{15})^2}{(S_{16} - S_{15})^2} \underline{r}_{16} + (x_\psi, y_\psi, z_\psi) \\ \frac{2\ \underline{r}_{16}\ (t - S_{16})}{\ \underline{r}_{17}\ (S_{16} - S_{15})} \underline{r}_{17} + (x_\phi, y_\phi, z_\phi) \\ \frac{\ \underline{r}_{16}\ (t - S_{17})[t + S_{17} - 2S_{18}]}{\ \underline{r}_{18}\ (S_{16} - S_{15})(S_{17} - S_{18})} \underline{r}_{18} \\ \quad + (x_\lambda, y_\lambda, z_\lambda) \end{cases}$	$\begin{aligned} & S_{15} \leq t < S_{16} \\ & S_{16} \leq t < S_{17} \\ & S_{17} \leq t \leq S_{18} \end{aligned}$

Tabla 6. Resumen de resultados de movimiento en x.

Tiempos en función de las normas vectoriales.

$$S_{15} = \frac{S_{13}(2\|\underline{r}_{13}\| + \|\underline{r}_{14}\| + 2\|\underline{r}_{15}\|) - S_{12}(\|\underline{r}_{14}\| + 2\|\underline{r}_{15}\|)}{2\|\underline{r}_{13}\|}$$

$$S_{16} = C^*_4 + S_{15}$$

$$S_{17} = \frac{S_{16}\|\underline{r}_{17}\| + 2S_{16}\|\underline{r}_{16}\| - S_{15}\|\underline{r}_{17}\|}{2\|\underline{r}_{16}\|}$$

$$S_{18} = \frac{S_{16}(2\|\underline{r}_{18}\| + \|\underline{r}_{17}\| + 2\|\underline{r}_{16}\|) - S_{15}(2\|\underline{r}_{18}\| + \|\underline{r}_{17}\|)}{2\|\underline{r}_{16}\|}$$

$C^*_4$  es un valor constante que cuantifica el valor del intervalo de tiempo  $S_{16}$

### 3.4.3 Etapa final de movimiento de descenso en z

En esta parte la grúa se habrá colocado sobre la posición final donde colocará al contenedor, es decir, llegará al punto donde depositara la carga.

Al igual que en el análisis anterior, para el desarrollo del modelo de deposito de carga, en z se utilizará un perfil específico de velocidad, e igualmente se recurrirá a las condiciones propias del instante de análisis

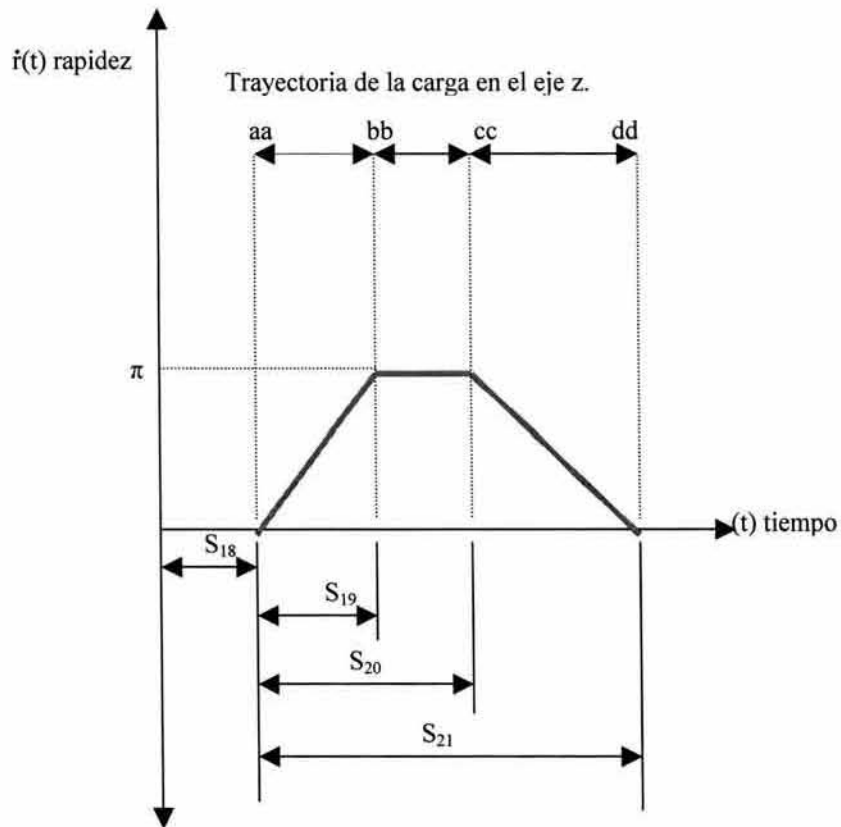


Figura 3.7 Gráfica del perfil de velocidad 7

Condiciones iniciales

$$\dot{r}_{18}(S_{18}) = 0$$

$$\dot{r}_{19}(S_{19}) = \pi$$

$$\dot{r}_{20}(S_{20}) = \pi$$

$$\dot{r}_{21}(S_{21}) = 0$$

Condiciones de frontera

$$\underline{r}_{aa}(S_{18}, x, y, z) = (x_{aa}, y_{aa}, z_{aa})$$

$$\underline{r}_{bb}(S_{19}, x, y, z) = (x_{bb}, y_{bb}, z_{bb})$$

$$\underline{r}_{cc}(S_{20}, x, y, z) = (x_{cc}, y_{cc}, z_{cc})$$

$$\underline{r}_{dd}(S_{21}, x, y, z) = (x_{dd}, y_{dd}, z_{dd})$$

para simplificar la notación de aquí en adelante haremos

$$\underline{r}_a(S_i, x, y, z) = \underline{r}_a(S_i)$$

para todos los casos

El problema consiste en hallar las ecuaciones que relacionen el tiempo y el espacio.

Solución.

Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{aabb}$ ,  $S_{18} \leq t < S_{19}$

Observando el perfil de velocidad, observamos, que el comportamiento es lineal y con velocidad inicial 0 y final  $\beta$  para  $t = S_3$  y  $t = S_4$  respectivamente y de la ecuación general de una recta  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  se deduce que se puede formar el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_{18}(S_{18}) &= 0 \\ \dot{r}_{19}(S_{19}) &= \pi \end{aligned} \right\} \quad (3.263)$$

y de la ecuación general de una recta ( $y = mx + b$ ) se desprende el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 S_{18} &= 0 \\ \alpha_0 + \alpha_1 S_{19} &= \pi \end{aligned} \right\} \quad (3.264)$$

del cual las soluciones son:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= -\alpha_1 S_{18} \\ \alpha_1 &= \frac{\pi}{S_{19} - S_{18}} \end{aligned} \right\} \quad (3.265)$$

sustituyendo 3.265 en  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  da como resultado

$$\dot{r}_{19}(\tau) = \frac{\pi}{S_{19} - S_{18}} (\tau - S_{18}) \quad (3.266)$$

que es la ecuación que define la rapidez para el segmento  $\overline{aabb}$  es

obtégase ahora la ecuación que define el desplazamiento, y como se ha visto con anterioridad se debe integrar 3.266, tal que

$$\int_{S_{18}}^t \dot{r}_{19}(\tau) d\tau = \frac{\pi}{S_{19} - S_{18}} \left[ \int_{S_{18}}^t \tau d\tau - \int_{S_{18}}^t S_{18} d\tau \right] \quad (3.267)$$

integrando 3.267 paso a paso se tiene

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{S_{19} - S_{18}} \left[ \frac{1}{2} \tau^2 \Big|_{S_{18}}^t - S_{18} \tau \Big|_{S_{18}}^t + r_{S_{18}} \right] \\
&= \frac{\pi}{S_{19} - S_{18}} \left[ \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{2} S_{18}^2 - (S_{18} t - S_{18}^2) \right] + r_{S_{18}} \\
r_{19}(t) &= \frac{\pi}{S_{19} - S_{18}} \frac{t^2}{2} - \frac{S_{18}}{2} - S_{18} t + S_{18}^2 + r_{S_{18}} \\
r_{19}(t) &= \left\{ \frac{\pi}{S_{19} - S_{18}} \right\} \frac{(t - S_{18})^2}{2} + r_{S_{18}} \tag{3.268}
\end{aligned}$$

la expresión vectorial se obtiene a partir de 3.268 y haciendo

$$\underline{r}_{aabb}(t) = r_{19}(\tau) \underline{r}_{u_{19}} \tag{3.269}$$

y 3.268 en 3.269 resulta en

$$\underline{r}_{aabb}(t) = \left\{ \left[ \frac{\pi}{S_{19} - S_{18}} \right] \frac{(t - S_{18})^2}{2} + r_{S_{18}} \right\} \underline{r}_{u_{19}} \tag{3.270}$$

donde  $\underline{r}_{u_{19}} = \frac{1}{\|\underline{r}_{19}\|} \underline{r}_{19}$ , es el vector unitario que define la dirección del

movimiento en el eje y, o mejor dicho, es paralelo a dicho eje, recurramos ahora al vector formado por las coordenadas espaciales que van de **aa** a **bb**, es

decir,  $\underline{r}_{19} = (x_{bb}, y_{bb}, z_{bb}) - (x_{aa}, y_{aa}, z_{aa})$  o  $\underline{r}_{19} = (x_{bb} - x_{aa}, y_{bb} - y_{aa}, z_{bb} - z_{aa})$ ,

finalmente 3.270 pasa a

$$\underline{r}_{aabb}(t) = \left[ \frac{\pi}{S_{19} - S_{18}} \right] \frac{(t - S_{18})^2}{2} \underline{r}_{u_{19}} + \underline{r}_{S_{18}} \quad (3.271)$$

y de las condiciones iniciales del segmento de análisis, que son

$$\left. \begin{aligned} \underline{r}_{aabb}(S_{18}) &= (x_{aa}, y_{aa}, z_{aa}) \\ \underline{r}_{aabb}(S_{19}) &= (x_{bb}, y_{bb}, z_{bb}) \end{aligned} \right\} \quad (3.272)$$

y utilizando la primer condición en 3.271 resulta en

$$\underline{r}_{aabb}(S_{18}) = \left[ \frac{\pi}{S_{19} - S_{18}} \right] \frac{(S_{18} - S_{18})^2}{2} \underline{r}_{u_{19}} + \underline{r}_{S_{18}} = (x_{aa}, y_{aa}, z_{aa}) \quad (3.273)$$

simplificar 3.273 da como resultado que

$$\underline{r}_{S_{18}} = (x_{aa}, y_{aa}, z_{aa}) \quad (3.274)$$

y 3.274 en 3.271 resulta en

$$\underline{r}_{aabb}(t) = \left[ \frac{\pi}{S_{19} - S_{18}} \right] \frac{(t - S_{18})^2}{2} \underline{r}_{u_{19}} + (x_{aa}, y_{aa}, z_{aa}) \quad (3.275)$$

donde 3.275 es la solución completa para el intervalo de análisis, sin embargo, nótese que ahora se puede hallar el valor de la rapidez en función de la norma

del vector que define el intervalo de movimiento y los tiempos de inicio y fin de dicho intervalo y paso a paso se obtiene

$$\underline{r}_{aabb}(S_{19}) = \left[ \frac{\pi}{S_{19} - S_{18}} \right] \frac{(S_{19} - S_{18})^2}{2} \underline{r}_{u_{19}} + (x_{aa}, y_{aa}, z_{aa}) = (x_{bb}, y_{bb}, z_{bb}) \quad (3.276)$$

simplificar 3.276 resulta en

$$\begin{aligned} \frac{\pi(S_{19} - S_{18})}{2} \underline{r}_{u_{19}} + \underline{r}_{S_{18}} + (x_{aa}, y_{aa}, z_{aa}) &= (x_{bb}, y_{bb}, z_{bb}) \\ \frac{\pi(S_{19} - S_{18})}{2} \underline{r}_{u_{19}} &= (x_{bb}, y_{bb}, z_{bb}) - (x_{aa}, y_{aa}, z_{aa}) \\ \frac{\pi(S_{19} - S_{18})}{2} \underline{r}_{u_{19}} &= \underline{r}_{19} \end{aligned} \quad (3.277)$$

ahora bien, se sabe que  $\underline{r}_{u_{19}} = \frac{1}{\|\underline{r}_{19}\|} \underline{r}_{19}$  por lo tanto en 3.277 lleva a

$$\begin{aligned} \frac{\pi(S_{19} - S_{18})}{2} \underline{r}_{u_{19}} &= \underline{r}_{19} \\ \frac{\pi(S_{19} - S_{18})}{2} \frac{1}{\|\underline{r}_{19}\|} \underline{r}_{19} - \underline{r}_{19} &= 0 \\ \underline{r}_{19} \left( \frac{\pi(S_{19} - S_{18})}{2} \frac{1}{\|\underline{r}_{19}\|} - 1 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.278)$$

de 3.278 y como  $\underline{r}_{19} \neq 0$ , entonces

$$\begin{aligned} \left( \frac{\pi(S_{19} - S_{18})}{2} \frac{1}{\|r_{19}\|} - 1 \right) &= 0 \\ \pi(S_{19} - S_{18}) \frac{1}{\|r_{19}\|} - 2 &= 0 \\ \pi &= 2 \frac{\|r_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})} \end{aligned} \quad (3.279)$$

por lo que la expresión vectorial buscada para el intervalo  $\overline{aabb}$  es

$$r_{aabb}(t) = \frac{(t - S_{18})^2}{(S_{19} - S_{18})^2} r_{19} + (x_{aa}, y_{aa}, z_{aa}) \quad (3.280)$$

Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{bbcc}$ ,  $S_{19} \leq t < S_{20}$

Toda vez que el comportamiento es constante, según se aprecia en el perfil de velocidad 6, se tiene que  $\dot{r}_{20}(t) = \pi$  y  $\pi = \frac{2\|r_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})}$  entonces

$$\dot{r}_{20}(\tau) = \frac{2\|r_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})} \quad (3.281)$$

como en los casos anteriores, se tiene que integrar 3.281, y haciéndolo paso a paso se obtiene



$$\int_{S_{19}} \dot{r}_{20}(\tau) d\tau = \int_{S_{19}} \frac{2\|\underline{r}_{19}\|}{S_{19} - S_{18}} d\tau = \frac{2\|\underline{r}_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})} (t - S_{19}) + r_{S_{19}}$$

$$r_{20}(\tau) d\tau = \frac{2\|\underline{r}_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})} (t - S_{19}) + r_{S_{19}} \quad (3.282)$$

dado que la ecuación general que define al movimiento en el intervalo dado es

$$\underline{r}_{bbcc}(t) = r_{20}(\tau) \underline{r}_{u_{20}} \quad (3.283)$$

3.282 en 3.283 resuelta en

$$\underline{r}_{bbcc}(t) = \left[ \frac{2\|\underline{r}_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})} (t - S_{19}) + r_{S_{19}} \right] \underline{r}_{u_{20}}$$

$$\underline{r}_{bbcc}(t) = \frac{2\|\underline{r}_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})} (t - S_{19}) \underline{r}_{u_{20}} + \underline{r}_{S_{19}} \quad (3.284)$$

donde  $\underline{r}_{u_{20}} = \frac{1}{\|\underline{r}_{20}\|} \underline{r}_{20}$  y  $\underline{r}_{20} = (x_{cc} - x_{bb}, y_{cc} - y_{bb}, z_{cc} - z_{bb})$  ahora sustitúyanse

las igualdades anteriores en la expresión vectorial 3.284, es decir

$$\underline{r}_{bbcc}(t) = \frac{2\|\underline{r}_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})} (t - S_{19}) \frac{1}{\|\underline{r}_{20}\|} \underline{r}_{20} + \underline{r}_{S_{19}}$$

$$\underline{r}_{bbcc}(t) = \frac{2\|\underline{r}_{19}\|(t - S_{19})}{\|\underline{r}_{20}\|(S_{19} - S_{18})} \underline{r}_{20} + \underline{r}_{S_{19}} \quad (3.285)$$

que es la ecuación general de movimiento del intervalo de análisis, aplicando la condición de frontera respectiva se obtiene

$$\underline{r}_{bbcc}(S_{19}) = \frac{2\|\underline{r}_{19}\|(S_{19} - S_{19})}{\|\underline{r}_{20}\|(S_{19} - S_{18})} \underline{r}_{20} + \underline{r}_{S_{19}} = (x_{bb}, y_{bb}, z_{bb}) \quad (3.286)$$

y simplificar 3.286 resulta en

$$\underline{r}_{S_{19}} = (x_{bb}, y_{bb}, z_{bb}) \quad (3.287)$$

y 3.287 en 3.285 arroja como resultado

$$\underline{r}_{bbcc}(t) = \frac{2\|\underline{r}_{19}\|(t - S_{19})}{\|\underline{r}_{20}\|(S_{19} - S_{18})} \underline{r}_{20} + (x_{bb}, y_{bb}, z_{bb}) \quad (3.288)$$

obsérvese que ahora es posible determinar el valor de  $S_{20}$  en función de los valores temporales anteriores y las normas ya conocidas, sustituyendo la condición que corresponde a  $S_{20}$  en 3.288 y simplificando paso a paso se obtiene

$$\begin{aligned} \underline{r}_{bbcc}(S_{20}) &= \frac{2\|\underline{r}_{19}\|(S_{20} - S_{19})}{\|\underline{r}_{20}\|(S_{19} - S_{18})} \underline{r}_{20} + (x_{bb}, y_{bb}, z_{bb}) = (x_{cc}, y_{cc}, z_{cc}) \\ \frac{2\|\underline{r}_{19}\|(S_{20} - S_{19})}{\|\underline{r}_{20}\|(S_{19} - S_{18})} \underline{r}_{20} &= (x_{cc}, y_{cc}, z_{cc}) - (x_{bb}, y_{bb}, z_{bb}) \\ \frac{2\|\underline{r}_{19}\|(S_{20} - S_{19})}{\|\underline{r}_{20}\|(S_{19} - S_{18})} \underline{r}_{20} &= \underline{r}_{20} \\ \frac{2\|\underline{r}_{19}\|(S_{20} - S_{19})}{\|\underline{r}_{20}\|(S_{19} - S_{18})} \underline{r}_{20} - \underline{r}_{20} &= 0 \\ \left[ \frac{2\|\underline{r}_{19}\|(S_{20} - S_{19})}{\|\underline{r}_{20}\|(S_{19} - S_{18})} - 1 \right] \underline{r}_{20} &= 0 \quad (3.289) \end{aligned}$$

de 3.289 y de  $r_{20} \neq 0$  y simplificando paso a paso se tiene que

$$\begin{aligned}
 \frac{2\|r_{19}\|(S_{20} - S_{19})}{\|r_{20}\|(S_{19} - S_{18})} - 1 &= 0 \\
 \frac{2\|r_{19}\|(S_{20} - S_{19})}{\|r_{20}\|(S_{19} - S_{18})} &= 1 \\
 (S_{20} - S_{19}) &= \frac{\|r_{20}\|(S_{19} - S_{18})}{2\|r_{19}\|} \\
 S_{20} &= \frac{\|r_{20}\|(S_{19} - S_{18})}{2\|r_{19}\|} + S_{19} \\
 S_{20} &= \left[ \frac{\|r_{20}\|(S_{19} - S_{18})}{2\|r_{19}\|} + \frac{2\|r_{19}\|S_{19}}{2\|r_{19}\|} \right] \\
 S_{20} &= \frac{\|r_{20}\|(S_{19} - S_{18}) + 2\|r_{19}\|S_{19}}{2\|r_{19}\|} \\
 S_{20} &= \frac{2\|r_{19}\|S_{19} + \|r_{20}\|S_{19} - \|r_{20}\|S_{18}}{2\|r_{19}\|} \\
 S_{20} &= \frac{S_{19}(\|r_{20}\| + 2\|r_{19}\|) - S_{18}\|r_{20}\|}{2\|r_{19}\|} \tag{3.290}
 \end{aligned}$$

nótese que ahora tenemos el intervalo de tiempo  $S_{20}$  en función de  $S_{19}$ , hecho muy conveniente, ya que así evitamos incógnitas adicionales para el modelo matemático.

Análisis en el segmento de trayectoria  $\overline{ccdd}$ ,  $S_{20} \leq t < S_{21}$

Al igual que el primer segmento del perfil de velocidad, éste último segmento tiene un comportamiento lineal, sólo que a diferencia del primero, éste último tiene pendiente de signo negativo, es decir, el primer caso es ascendente, mientras que éste caso es descendente, no obstante dicha diferencia, el análisis es el mismo, por tanto de  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$ , y utilizando condiciones iniciales se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_{20}(S_{20}) &= \pi = \frac{2\|r_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})} \\ \dot{r}_{21}(S_{21}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.291)$$

y partiendo de la ecuación general de una recta, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 S_{20} &= \frac{2\|r_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})} \\ \alpha_0 + \alpha_1 S_{21} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.292)$$

cuyas soluciones son

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{2\|r_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})(S_{20} - S_{21})} S_{21} \\ \alpha_1 &= \frac{2\|r_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})(S_{20} - S_{21})} \end{aligned} \right\} \quad (3.293)$$

entonces 3.293 en  $\dot{r}_i(S_i) = \alpha_0 + \alpha_1 t$  da como resultado

$$\dot{r}_{21}(\tau) = \frac{2\|\underline{r}_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})(S_{20} - S_{21})}t - \frac{2\|\underline{r}_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})(S_{20} - S_{21})}S_{21} \quad (3.294)$$

para determinar  $r_{21}(t)$  se integra 3.294 paso a paso en la siguiente forma, recuérdese que  $r_{21}(t)$  es la parte escalar del movimiento

$$\begin{aligned} \dot{r}_{21}(\tau) &= \frac{2\|\underline{r}_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})(S_{20} - S_{21})}(t - S_{21}) \\ \int_{S_{20}}^t \dot{r}_{21}(\tau)d\tau &= \frac{2\|\underline{r}_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})(S_{20} - S_{21})} \int_{S_{20}}^t (\tau - S_{21})d\tau \\ \int_{S_{20}}^t \dot{r}_{21}(\tau)d\tau &= \frac{2\|\underline{r}_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})(S_{20} - S_{21})} \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{S_{20}^2}{2} + S_{21}S_{20} - S_{21}t \right] + r_{S_{20}} \\ \int_{S_{20}}^t \dot{r}_{21}(\tau)d\tau &= \frac{\|\underline{r}_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})(S_{20} - S_{21})} \left[ t^2 - S_{20}^2 + 2S_{21}S_{20} - 2S_{21}t \right] + r_{S_{20}} \\ r_{21}(\tau) &= \frac{\|\underline{r}_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})(S_{20} - S_{21})} (t - S_{20}) [t + S_{20} - 2S_{21}] + r_{S_{20}} \quad (3.295) \end{aligned}$$

donde 3.295 es la parte escalar total del intervalo de análisis, por lo que corresponde hacer  $\underline{r}_{ccdd}(t) = r_{21}(\tau)\underline{r}_{u_{21}}$ , es decir,

$$\underline{r}_{ccdd}(t) = \left\{ \frac{\|\underline{r}_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})(S_{20} - S_{21})} (t - S_{20}) [t + S_{20} - 2S_{21}] + r_{S_{20}} \right\} \underline{r}_{u_{21}} \quad (3.296)$$

donde  $\underline{r}_{u_{21}} = \frac{1}{\|\underline{r}_{21}\|} \underline{r}_{21}$  y  $\underline{r}_{21} = (x_{dd} - x_{cc}, y_{dd} - y_{cc}, z_{dd} - z_{cc})$  y esto en (3.296)

resulta en

$$\underline{r}_{ccdd}(t) = \left\{ \frac{\|\underline{r}_{19}\|}{(S_{19} - S_{18})(S_{20} - S_{21})} (t - S_{20}) [t + S_{20} - 2S_{21}] \frac{1}{\|\underline{r}_{21}\|} \underline{r}_{21} + \underline{r}_{S_{20}} \right\} \quad (3.297)$$

y la simplificación de 3.297 resulta en

$$\underline{r}_{ccdd}(t) = \frac{\|\underline{r}_{19}\|(t - S_{20})}{\|\underline{r}_{21}\|(S_{19} - S_{18})(S_{20} - S_{21})} [t + S_{20} - 2S_{21}] \underline{r}_{21} + \underline{r}_{S_{20}} \quad (3.298)$$

como siguiente paso, determínese el valor de  $\underline{r}_{S_{20}}$ , para lo que se recurre a las condiciones de frontera del intervalo de análisis, es decir,  $\underline{r}_{S_{20}}$

$$\underline{r}_{ccdd}(t_{=S_{20}}) = \frac{\|\underline{r}_{19}\|(S_{20} - S_{20})}{\|\underline{r}_{21}\|(S_{19} - S_{18})(S_{20} - S_{21})} [t + S_{20} - 2S_{21}] \underline{r}_{21} + \underline{r}_{S_{20}} = (x_{cc}, y_{cc}, z_{cc}) \quad (3.299)$$

de lo anterior se desprende que

$$\underline{r}_{S_{20}} = (x_{cc}, y_{cc}, z_{cc}) \quad (3.300)$$

y 3.300 en 3.297 resulta en

$$\underline{r}_{ccdd}(t) = \frac{\|\underline{r}_{19}\|(t - S_{20})[t + S_{20} - 2S_{21}]}{\|\underline{r}_{21}\|(S_{19} - S_{18})(S_{20} - S_{21})} \underline{r}_{21} + (x_{cc}, y_{cc}, z_{cc}) \quad (3.301)$$

que es la ecuación general del intervalo de análisis, ahora puede ser determinado el valor de  $S_{21}$  en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \underline{r}_{ccdd}(S_{21}) &= \frac{\|\underline{r}_{19}\|(S_{21} - S_{20})[S_{21} + S_{20} - 2S_{21}]}{\|\underline{r}_{21}\|(S_{19} - S_{18})(S_{20} - S_{21})} \underline{r}_{21} + (x_{cc}, y_{cc}, z_{cc}) = (x_{dd}, y_{dd}, z_{dd}) \\ \frac{\|\underline{r}_{19}\|(S_{21} - S_{20})[S_{20} - S_{21}]}{\|\underline{r}_{21}\|(S_{19} - S_{18})(S_{20} - S_{21})} \underline{r}_{21} &= (x_{dd}, y_{dd}, z_{dd}) - (x_{cc}, y_{cc}, z_{cc}) \\ \frac{\|\underline{r}_{19}\|(S_{21} - S_{20})}{\|\underline{r}_{18}\|(S_{19} - S_{18})} \underline{r}_{21} &= \underline{r}_{21} \\ \frac{\|\underline{r}_{19}\|(S_{21} - S_{20})}{\|\underline{r}_{21}\|(S_{19} - S_{18})} \underline{r}_{21} - \underline{r}_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (3.302)$$

como  $\underline{r}_{21} \neq 0$  entonces de 3.302 se desprende que

$$\begin{aligned} \underline{r}_{21} \left( \frac{\|\underline{r}_{19}\|(S_{21} - S_{20})}{\|\underline{r}_{21}\|(S_{19} - S_{18})} - 1 \right) &= 0 \text{ como } \underline{r}_{21} \neq 0 \\ \frac{\|\underline{r}_{19}\|(S_{21} - S_{20})}{\|\underline{r}_{21}\|(S_{19} - S_{18})} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

y simplificando paso a paso se llega a

$$\begin{aligned}
\frac{\|r_{19}\|(S_{21} - S_{20})}{\|r_{21}\|(S_{19} - S_{18})} &= 1 \\
\|r_{19}\|(S_{21} - S_{20}) &= \|r_{21}\|(S_{19} - S_{18}) \\
S_{21} - S_{20} &= \frac{\|r_{21}\|(S_{19} - S_{18})}{\|r_{19}\|} \\
S_{21} &= \frac{\|r_{21}\|(S_{19} - S_{18})}{\|r_{19}\|} + S_{20}
\end{aligned} \tag{3.303}$$

pero  $S_{20} = \frac{S_{19}\|r_{20}\| + 2S_{19}\|r_{19}\| - S_{18}\|r_{20}\|}{2\|r_{19}\|}$  y por lo tanto

$$\begin{aligned}
S_{21} &= \frac{\|r_{21}\|(S_{19} - S_{18})}{\|r_{19}\|} + \frac{S_{19}\|r_{20}\| + 2S_{19}\|r_{19}\| - S_{18}\|r_{20}\|}{2\|r_{19}\|} \\
S_{21} &= \frac{2\|r_{21}\|(S_{19} - S_{18}) + S_{19}\|r_{20}\| + 2S_{19}\|r_{19}\| - S_{18}\|r_{20}\|}{2\|r_{19}\|} \\
S_{21} &= \frac{2S_{19}\|r_{21}\| - 2S_{18}\|r_{21}\| + S_{19}\|r_{20}\| + 2S_{19}\|r_{19}\| - S_{18}\|r_{20}\|}{2\|r_{19}\|} \\
S_{21} &= \frac{S_{19}(2\|r_{19}\| + \|r_{20}\| + 2\|r_{21}\|) - S_{18}(\|r_{20}\| + 2\|r_{21}\|)}{2\|r_{19}\|}
\end{aligned} \tag{3.304}$$

ahora podemos resumir los resultados en la siguiente forma



Modelo total de trayectoria en $e_7$	Intervalos de tiempo
$\underline{r}_{aadd}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{(t - S_{18})^2}{(S_{19} - S_{18})^2} \underline{r}_{19} + (x_{aa}, y_{aa}, z_{aa}) \\ \frac{2\ \underline{r}_{19}\ (t - S_{19})}{\ \underline{r}_{20}\ (S_{19} - S_{18})} \underline{r}_{20} + (x_{bb}, y_{bb}, z_{bb}) \\ \frac{\ \underline{r}_{19}\ (t - S_{20})[t + S_{20} - 2S_{21}]}{\ \underline{r}_{21}\ (S_{19} - S_{18})(S_{20} - S_{21})} \underline{r}_{21} \\ \quad + (x_{cc}, y_{cc}, z_{cc}) \end{array} \right.$	$S_{18} \leq t < S_{19}$ $S_{19} \leq t < S_{20}$ $S_{20} \leq t \leq S_{21}$

Tabla 7. Resumen de resultados de movimiento descenso de carga en z.

Tiempos en función de las normas vectoriales.

$$S_{18} = \frac{S_{15}(2\|\underline{r}_{16}\| + \|\underline{r}_{17}\| + 2\|\underline{r}_{18}\|) - S_{15}(\|\underline{r}_{17}\| + 2\|\underline{r}_{18}\|)}{2\|\underline{r}_{16}\|}$$

$$S_{19} = C^*_5 + S_{18}$$

$$S_{20} = \frac{S_{19}\|\underline{r}_{20}\| + 2S_{19}\|\underline{r}_{19}\| - S_{18}\|\underline{r}_{20}\|}{2\|\underline{r}_{19}\|}$$

$$S_{21} = \frac{S_{19}(2\|\underline{r}_{21}\| + \|\underline{r}_{20}\| + 2\|\underline{r}_{19}\|) - S_{18}(2\|\underline{r}_{21}\| + \|\underline{r}_{20}\|)}{2\|\underline{r}_{19}\|}$$

$C^*_5$  es un valor constante que cuantifica el valor del intervalo de tiempo  $S_{19}$

## Capítulo IV

### 4.1 Introducción

En este capítulo se comprobará, a través de un ejemplo, que el modelo desarrollado en el capítulo tres efectivamente funciona, así mismo se explicarán las partes que componen dicho programa de ejemplo, el cual fue desarrollado utilizando el programa de Software Mathematica® Versión Cuatro.

### 4.2 Desarrollo del Programa de Software

La primer parte en el programa es la definición de los parámetros que se van a utilizar en el ejemplo, es decir, el tiempo inicial, los tiempos de espera y por supuesto las coordenadas de movimiento, para posteriormente introducir las variables que gobiernan al modelo y que son el tiempo y la posición de la grúa y finalmente el modelo matemático que unifica a todos los perfiles de velocidad mediante un ciclo for y los subciclos if que corresponden a cada intervalo de movimiento

### 4.3 Cuerpo del programa de ejemplo

<pre>(* Tiempo generador para "x", "y" y "z" *) C1=100 C2=100 C3=100</pre>	En esta parte del programa se definen independientemente las duraciones de los tiempos iniciales de movimiento para cada perfil de velocidad de la grúa, aunque en este ejemplo los valores para
--	--

<p><b>C4=100</b>  <b>C5=100</b>  <b>C6=100</b>  <b>C7=100</b></p>	<p><math>C_i = 100</math>, dichos valores pueden ser cualquier número positivo.</p>
<p><b>(*Coordenadas para el movimiento en “x” Etapa 1*)</b>  <b>xa=0;</b>  <b>ya=0;</b>  <b>za=0;</b>  <b>xb=345;</b>  <b>yb=0;</b>  <b>zb=0;</b>  <b>xc=728;</b>  <b>yc=0;</b>  <b>zc=0;</b>  <b>xd=1225;</b>  <b>yd=0;</b>  <b>za=0;</b></p>	<p>Las literales con subíndice <i>a</i> indican el inició del movimiento, que en este caso es en el cero u origen del sistema de referencia, sin embargo el movimiento puede empezar en cualquier punto de dicho sistema, incluso en un valor negativo. Obsérvese también que se han incluido cuatro coordenadas, lo que es lógico puesto que se dividió el movimiento en <i>x</i> en tres partes, una para cada una de las funciones que componen el perfil de velocidad.</p>
<p><b>(*Coordenadas para el movimiento en “y” Etapa 1*)</b>  <b>xe=xd;</b>  <b>ye=0;</b>  <b>ze=0;</b>  <b>xf=xd;</b>  <b>yf=738;</b>  <b>zf=0;</b>  <b>xg=xe;</b></p>	<p>Obsérvese que al iniciarse el movimiento en <i>y</i> el valor de <i>x</i> se mantiene constante y es el valor que <i>x</i> tomó en el último desplazamiento, e igualmente a <i>x</i>, el movimiento en <i>y</i> esta compuesto por un perfil de velocidad que también está compuesto por tres funciones, una para cada segmento de recorrido, es decir, una función para ef, fg, y gh respectivamente.</p>

<p>yg=934; zg=0; xh=xg; yh=1329; zh=0;</p>	
<p>(*Coordenadas para el movimiento en “z” Etapa 1*)</p> <p>xi=xh; yi=yh; zi=0; xj=xi; yj=yi; zj=-50; xk=xj; yk=yj; zk=-100; xl=xk; yl=yk; zl=-200;</p>	<p>Nótese que en el movimiento sobre z, los valores de x y de y se conservan constantes, lo cual es lógico, ya que el movimiento es paralelo al eje z y además de que inicia en el último punto del desplazamiento en y.</p>
<p>(*Coordenadas para el movimiento en “z” Etapa 2, elevación*)</p> <p>xm=xl; ym=yl; zm=zl; xn=xm; yn=ym;</p>	<p>En esta parte, la grúa ya ha llegado a la posición del contenedor, es decir, ya esta sobre el contenedor, el elemento sujetador, por lo tanto ahora elevará al contenedor para posteriormente ubicarlo en la posición que corresponda sobre el eje y.</p>

<p> <math>z_n = z_k;</math>  <math>x_o = x_n;</math>  <math>y_o = y_n;</math>  <math>z_o = z_j;</math>  <math>x_p = x_o;</math>  <math>y_p = y_o;</math>  <math>z_p = z_i;</math> </p>	
<p> <b>(*Coordenadas para el movimiento en “y” Etapa 2*)</b>  <math>x_q = x_p;</math>  <math>y_q = y_p;</math>  <math>z_q = z_p;</math>  <math>x_r = x_q;</math>  <math>y_r = 900;</math>  <math>z_r = z_q;</math>  <math>x_s = x_r;</math>  <math>y_s = 700;</math>  <math>z_s = z_r;</math>  <math>x_t = x_s;</math>  <math>y_t = 500;</math>  <math>z_t = z_s;</math> </p>	<p>El sistema de desplazamiento en y (o sea el carro), se preparará en este momento para desplazar la carga a la posición en la cual se iniciará posteriormente el descenso de ésta.</p>
<p> <b>(*Coordenadas para el movimiento en “x” Etapa 2*)</b>  <math>x_u = x_t;</math>  <math>y_u = y_t;</math>  <math>z_u = z_t;</math> </p>	<p>Aquí, las coordenadas que se tienen son las de la posición final de la estructura de la grúa, el carro y la carga, es decir, ya se tiene la posición final para el descenso de la carga, es decir, ya solamente faltan las</p>

<p> <b>xv=900;</b>  <b>yv=yu;</b>  <b>zv=zu;</b>  <b>xw=700;</b>  <b>yw=yv;</b>  <b>zw=zv;</b>  <b>xx=300;</b>  <b>yx=yw;</b>  <b>zx=zw;</b> </p>	<p>coordenadas de descenso y que son las de la siguiente celda.</p>
<p> <b>(*Coordenadas finales en z, descenso de carga*)</b>  <b>xy=xx;</b>  <b>yy=yx;</b>  <b>zy=zx;</b>  <b>xz=xy;</b>  <b>yz=yy;</b>  <b>zz=-50;</b>  <b>xaa=xz;</b>  <b>yaa=yz;</b>  <b>zaa=-100;</b>  <b>xbb=xaa;</b>  <b>ybb=yaa;</b>  <b>zbb=-200;</b> </p>	<p>Finalmente se tienen las coordenadas de descenso de la carga, es decir, la posición última de la carga y que son obviamente las coordenadas que corresponden con el ras de suelo.</p>
<p> <b>(* Definición vectorial de intervalos de movimiento *)</b>  <b>r1={{(xb-xa),(yb-ya),(zb-za)}}</b> </p>	<p>Hasta esta parte ya se han determinado las posiciones intermedias para cada perfil de velocidad y que se reflejan en el</p>

$r2=\{(xc-xb),(yc-yb),(zc-zb)\}$ $r3=\{(xd-xc),(yd-yc),(zd-zc)\}$ $r4=\{(xf-xe),(yf-ye),(zf-ze)\}$ $r5=\{(xg-xf),(yg-yf),(zg-zf)\}$ $r6=\{(xh-xg),(yh-yg),(zh-zg)\}$ $r7=\{(xj-xi),(yj-yi),(zj-zi)\}$ $r8=\{(xk-xj),(yk-yj),(zk-zj)\}$ $r9=\{(xl-xk),(yl-yk),(zl-zk)\}$ $r10=\{(xn-xm),(yn-ym),(zn-zm)\}$ $r11=\{(xo-xn),(yo-yn),(zo-zn)\}$ $r12=\{(xp-xo),(yp-yo),(zp-zo)\}$ $r13=\{(xr-xq),(yr-yq),(zr-zq)\}$ $r14=\{(xs-xr),(ys-yr),(zs-zr)\}$ $r15=\{(xt-xs),(yt-ys),(zt-zs)\}$ $r16=\{(xv-xu),(yv-yu),(zv-zu)\}$ $r17=\{(xw-xv),(yw-yv),(zw-zv)\}$ $r18=\{(xx-xw),(yx-yw),(zx-zw)\}$ $r19=\{(xz-xy),(yz-yy),(zz-zy)\}$ $r20=\{(xaa-xz),(yaa-yz),(zaa-zz)\}$ $r21=\{(xbb-xaa),(ybb-yaa),(zbb-zaa)\}$	<p>movimiento de la grúa, es decir, ya esta decidida la trayectoria que ha de seguir en su desplazamiento, ahora se deben definir los vectores y esto se hace precisamente con los puntos definidos anteriormente. Como se vio en el modelo matemático, los vectores sirven para definir la dirección y el sentido de movimiento, por lo que su definición debe ser precisa y compuesta a partir de los puntos que corresponden a cada segmento de movimiento de cada perfil de velocidad y que son los puntos definidos en las celdas anteriores.</p>
<p>(* Determinación de las normas de los</p>	<p>Ahora es necesario calcular las normas</p>

**vectores de movimiento \*)**

$$\text{modr1}=\sqrt{((xb-xa)^2+(yb-ya)^2+(zb-za)^2)}$$

$$\text{modr2}=\sqrt{((xc-xb)^2+(yc-yb)^2+(zc-zb)^2)}$$

$$\text{modr3}=\sqrt{((xd-xc)^2+(yd-yc)^2+(zd-zc)^2)}$$

$$\text{modr4}=\sqrt{((xf-xe)^2+(yf-ye)^2+(zf-ze)^2)}$$

$$\text{modr5}=\sqrt{((xg-xf)^2+(yg-yf)^2+(zg-zf)^2)}$$

$$\text{modr6}=\sqrt{((xh-xg)^2+(yh-yg)^2+(zh-zg)^2)}$$

$$\text{modr7}=\sqrt{((xj-xi)^2+(yj-yi)^2+(zj-zi)^2)}$$

$$\text{modr8}=\sqrt{((xk-xj)^2+(yk-yj)^2+(zk-zj)^2)}$$

$$\text{modr9}=\sqrt{((xl-xk)^2+(yl-yk)^2+(zl-zk)^2)}$$

$$\text{modr10}=\sqrt{((xn-xm)^2+(yn-ym)^2+(zn-zm)^2)}$$

$$\text{modr11}=\sqrt{((xo-xn)^2+(yo-yn)^2+(zo-zn)^2)}$$

$$\text{modr12}=\sqrt{((xp-xo)^2+(yp-yo)^2+(zp-zo)^2)}$$

$$\text{modr13}=\sqrt{((xr-xq)^2+(yr-yq)^2+(zr-zq)^2)}$$

$$\text{modr14}=\sqrt{((xs-xr)^2+(ys-yr)^2+(zs-zr)^2)}$$

$$\text{modr15}=\sqrt{((xt-xs)^2+(yt-ys)^2+(zt-zs)^2)}$$

$$\text{modr16}=\sqrt{((xv-xu)^2+(yv-yu)^2+(zv-zu)^2)}$$

$$\text{modr17}=\sqrt{((xw-xv)^2+(yw-yv)^2+(zw-zv)^2)}$$

$$\text{modr18}=\sqrt{((xx-xw)^2+(yx-yw)^2+(zx-zw)^2)}$$

de cada uno de los vectores que componen el movimiento de cada perfil de velocidad de la grúa ya que así lo exige el modelo desarrollado en el capítulo tres por lo que se procederá a introducir las igualdades que sirven para tal efecto y que se observan en la celda izquierda.



<p>modr19=  <math>\sqrt{((xz-xy)^2 + (yz-yy)^2 + (zz-zy)^2)}</math>  modr20=  <math>\sqrt{((xaa-xz)^2 + (yaa-yz)^2 + (zaa-zz)^2)}</math>  modr21=  <math>\sqrt{((xbb-xaa)^2 + (ybb-yaa)^2 + (zbb-zaa)^2)}</math></p>	
<p><b>(* Cálculo de los valores que corresponden a los intervalos de tiempo para cada movimiento *)</b></p> <p>S1=C1  <math>S2 = \left( \frac{S1*((2*\text{modr1})+\text{modr2})}{2*\text{modr1}} \right)</math>  <math>S3 = \left( \frac{S1*((2*\text{modr1})+\text{modr2}+(2*\text{modr3}))}{2*\text{modr1}} \right)</math>  S4=(C2+S3)  <math>S5 = \left( \frac{S4*(\text{modr5}+(2*\text{modr4}))-(S3*\text{modr5})}{2*\text{modr4}} \right)</math>  <math>S6 = \left( \frac{1}{2*\text{modr4}} \right) * (((S4*((2*\text{modr6})+\text{modr5}+(2*\text{modr4}))) - S3*(2*(\text{modr6})+\text{modr5})))</math>  S7=(C3+S6)  <math>S8 = \left[ \frac{S7*(\text{modr8}+(2*\text{modr7}))-(S6*\text{modr8})}{2*\text{modr7}} \right]</math>  <math>S9 = \left[ \frac{1}{2*\text{modr7}} \right] * (((S7*((2*\text{modr9})+\text{modr8}+(2*\text{modr7}))) - S6*(2*(\text{modr9})+\text{modr8})))</math></p>	<p>Como se vio en el capítulo tres, una parte importante del modelo matemático desarrollado, lo es el factor tiempo, y como se vio en el citado capítulo, la duración de éste es independiente para cada eje y por ende para cada perfil de velocidad, es decir, existe un tiempo para el movimiento en x, otro para y y otro para z, sin embargo el fenómeno de análisis es un movimiento continuo, por lo que se estuvo en la necesidad de poner los tiempos de cada perfil de velocidad en función del perfil de velocidad anterior, y es eso precisamente lo que se tiene en la columna izquierda y además de que, como se puede observar en los tiempos iniciales de movimiento sobre cada eje, también se puede incluir un tiempo C<sub>i</sub>, que funciona como un tiempo de espera, aunque realmente no es necesario más que en el primer perfil de velocidad pero que puede servir como</p>

$S10=(C4+S9)$ $S11=\left[\frac{S10*(modr11+(2*modr10))-(S9*modr11)}{2*modr10}\right]$ $S12=\left[\frac{1}{2*modr10}\right]*(((S10*((2*modr12)+modr11+(2*modr10)))-S9*(2*(modr12)+modr11)))$ $S13=(C5+S12)$ $S14=\left[\frac{S13*(modr14+(2*modr13))-(S12*modr14)}{2*modr13}\right]$ $S15=\left[\frac{1}{2*modr13}\right]*(((S13*((2*modr15)+modr14+(2*modr13)))-S12*(2*(modr15)+modr14)))$ $S16=(C6+S15)$ $S17=\left[\frac{S16*(modr17+(2*modr16))-(S15*modr17)}{2*modr16}\right]$ $S18=\left[\frac{1}{2*modr16}\right]*(((S16*((2*modr18)+modr17+(2*modr16)))-S15*(2*(modr18)+modr17)))$ $S19=(C7+S18)$ $S20=\left[\frac{S19*(modr20+(2*modr19))-(S18*modr20)}{2*modr19}\right]$ $S21=\left[\frac{1}{2*modr19}\right]*(((S19*((2*modr21)+modr20+(2*modr19)))-S18*(2*(modr21)+modr20)))$	<p>retardo entre perfiles de velocidad.</p>
---	---

For[t=0,t<S21,t+=10,

$$\text{If}[(t \geq 0) \&\&(t < S1), \text{rad}[t] = \frac{t^2}{S1^2} * r1 + \{xa, ya, za\};$$

$$\text{If}[(t \geq S1) \&\&(t < S2), \text{rad}[t] = \left( \frac{2 * \text{mdr}1 * (t - S1)}{S1 * \text{mdr}2} \right) * r2 + \{xb, yb, zb\};$$

$$\text{If}[(t \geq S2) \&\&(t < S3), \text{rad}[t] = \left( \frac{\text{mdr}1 * (t - S2) * (t + S2 - 2 * S3)}{S1 * \text{mdr}3 * (S2 - S3)} \right) * r3 + \{xc, yc, zc\};$$

$$\text{If}[(t \geq S3) \&\&(t < S4), \text{rad}[t] = \left( \frac{(t - S3)^2}{(S4 - S3)^2} \right) * r4 + \{xe, ye, ze\};$$

$$\text{If}[(t \geq S4) \&\&(t < S5), \text{rad}[t] = \left( \frac{(2 * \text{mdr}4) * (t - S4)}{\text{mdr}5 * (S4 - S3)} \right) * r5 + \{xf, yf, zf\};$$

$$\text{If}[(t \geq S5) \&\&(t < S6), \text{rad}[t] = \left( \frac{\text{mdr}4 * (t - S5) * (t + S5 - 2 * S6)}{(\text{mdr}6 * (S4 - S3) * (S5 - S6))} \right) * r6 + \{xg, yg, zg\};$$

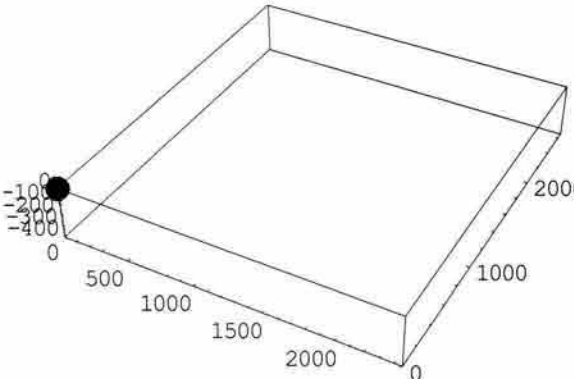
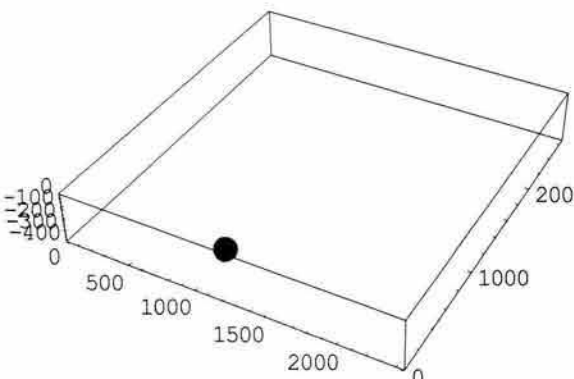
$$\text{If}[(t \geq S6) \&\&(t < S7), \text{rad}[t] = \left( \frac{(t - S6)^2}{(S7 - S6)^2} \right) * r7 + \{xi, yi, zi\};$$

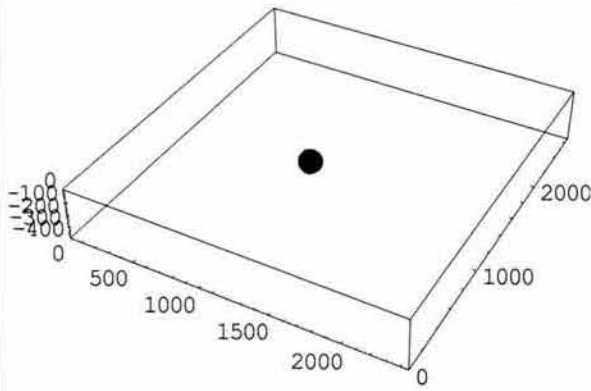
$$\text{If}[(t \geq S7) \&\&(t < S8), \text{rad}[t] = \left( \frac{(2 * \text{mdr}7) * (t - S7)}{\text{mdr}8 * (S7 - S6)} \right) * r8 + \{xj, yj, zj\};$$

Finalmente, en esta parte esta la simulación del movimiento, el ciclo for actúa como el cuerpo principal del programa ya que se espera que en un intervalo de tiempo de cero a S<sub>21</sub> se ejecuten todos los perfiles de velocidad y por ende se ejecute los movimientos de cada uno de los segmentos de movimiento que componen el movimiento total de la grúa, lo que se nota claramente en los ciclos if ya que se espera que cada segmento sea controlado por una ecuación específica *espacio tiempo* y que corresponda con la parte del perfil de velocidad aplicado al segmento de trayectoria correspondiente, luego entonces, lo único que se debe observar es, la inclusión de las ecuaciones que componen el modelo total de movimiento en sus respectivos intervalos de tiempo de aplicación, lo que quiere decir, que al cumplirse su intervalo de tiempo, éstas ecuaciones pierden su efectividad y son ignoradas por el programa y entonces se ejecuta la ecuación que corresponde al tiempo de funcionamiento del sistema, nótese

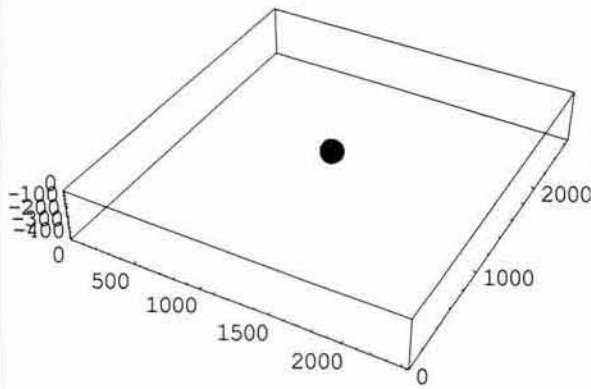
<pre> If [(t ≥ S8) &amp;&amp; (t &lt; S9), rad[t] = <math>\left( \frac{\text{modr}7 * (t - S8) * (t + S8 - (2 * S9))}{\text{modr}9 * (S7 - S6) * (S8 - S9)} \right) * r9</math> + {xk,yk,zk};  If [(t ≥ S9) &amp;&amp; (t &lt; S10), rad[t] = <math>\left( \frac{(t - S9)^2}{(S10 - S9)^2} \right) * r10</math> + {xm,ym,zm};  If [(t ≥ S10) &amp;&amp; (t &lt; S11), rad[t] = <math>\left( \frac{((2 * \text{modr}10) * (t - S10))}{(\text{modr}11 * (S10 - S9))} \right) * r11</math> + {xn,yn,zn};  If [(t ≥ S11) &amp;&amp; (t &lt; S12), rad[t] = <math>\left( \frac{(\text{modr}10 * (t - S11) * (t + S11 - (2 * S12)))}{(\text{modr}12 * (S10 - S9) * (S11 - S12))} \right) * r12</math> + {xo,yo,zo};  If [(t ≥ S12) &amp;&amp; (t &lt; S13), rad[t] = <math>\left( \frac{(t - S12)^2}{(S13 - S12)^2} \right) * r13</math> + {xq,yq,zq};  If [(t ≥ S13) &amp;&amp; (t &lt; S14), rad[t] = <math>\left( \frac{((2 * \text{modr}113) * (t - S13))}{(\text{modr}14 * (S13 - S12))} \right) * r14</math> + {xr,yr,zr};  If [(t ≥ S14) &amp;&amp; (t &lt; S15), rad[t] = <math>\left( \frac{(\text{modr}13 * (t - S14) * (t + S14 - (2 * S15)))}{(\text{modr}15 * (S13 - S12) * (S14 - S15))} \right) * r15</math> + {xs,ys,zs}; </pre>	<p>además, en el cuerpo del ciclo for, que se ha incluido un incremento de diez unidades, esto en realidad es para agilizar la visualización del movimiento ya que los resultados que arroja el programa son resultados que van de diez en diez, es decir, ejecuta una operación en vez de diez, lo que claramente representa un ahorro de tiempo, por lo menos en el modelado mediante la computadora</p>
--	--

<pre> If[(t ≥ S15) &amp;&amp; (t &lt; S16), rad[t] = <math>\left( \frac{(t-S15)^2}{(S16-S15)^2} \right) * r16</math> + { xu, yu, zu }];  If[(t ≥ S16) &amp;&amp; (t &lt; S17), rad[t] = <math>\left( \frac{((2 * \text{modr}16) * (t-S16))}{(\text{modr}17 * (S16-S15))} \right) * r17</math> + { xv, yv, zv }];  If[(t ≥ S17) &amp;&amp; (t &lt; S18), rad[t] = <math>\left( \frac{(\text{modr}16 * (t-S17) * (t+S17-2 * S18))}{(\text{modr}18 * (S16-S15) * (S17-S18))} \right) * r18</math> + { xw, yw, zw }];  If[(t ≥ S18) &amp;&amp; (t &lt; S19), rad[t] = <math>\left( \frac{(t-S18)^2}{(S19-S18)^2} \right) * r19</math> + { xy, yy, zy }];  If[(t ≥ S19) &amp;&amp; (t &lt; S20), rad[t] = <math>\left( \frac{((2 * \text{modr}19) * (t-S19))}{(\text{modr}20 * (S19-S18))} \right) * r20</math> + { xz, yz, zz }];  If[(t ≥ S20) &amp;&amp; (t &lt; S21), rad[t] = <math>\left( \frac{(\text{modr}19 * (t-S20) * (t+S19-2 * S21))}{(\text{modr}21 * (S19-S18) * (S20-S21))} \right) * r21</math> + { xaa, yaa, zaa }]; </pre>	
<pre> For[t=0, t&lt;S21, t+=10, punto=Point[rad[t]]; trayx=Graphics3D[{PointSize[0.05], punto}]; Show[trayx, PlotRange -&gt;{{-2*xa, 2*xd}, {-2*ye, 2*yh}}, {-2*za, 2*zl}], Axes -&gt;True]; </pre>	<p>En la parte anterior se han calculado los valores vectoriales que corresponden a cada instante de tiempo, sin embargo, falta visualizarlos, lo que se logra con las</p>

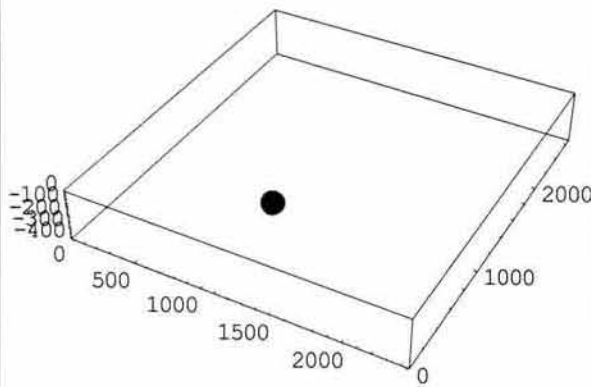
	<p>instrucciones ubicadas en la celda derecha y que en general es la ubicación de un punto en el valor vectorial que corresponde al tiempo de ejecución</p>
<p><b>Resultados de la corrida del programa de ejemplo</b></p>  <p>Inicio de movimiento en x</p>  <p>Final de movimiento en x e inicio de movimiento en y</p>	<p>Aunque es imposible ver en un documento la simulación, si es posible, por lo menos, incluir algunos puntos importantes de ésta, por lo que en cada una de las figuras se incluye una explicación en forma estrictamente general, ya que la única forma de entender el modelo es generar una corrida, y precisamente para tal fin se incluye el programa AutomGrua en un disco para computadora de 3 ½ anexo al presente trabajo y que se ha comprobado que corre en la versión cuatro de Mathematica</p>



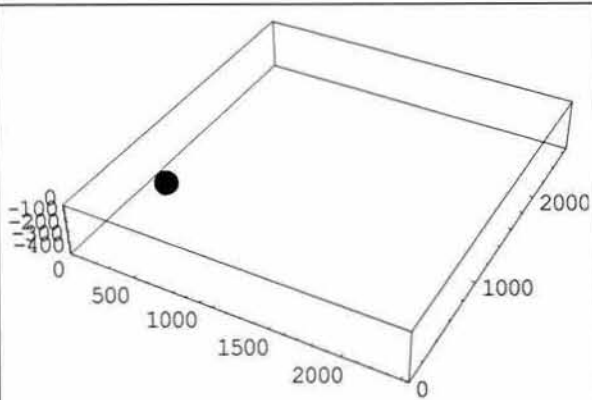
**Final de movimiento en y e inicio de movimiento en z**



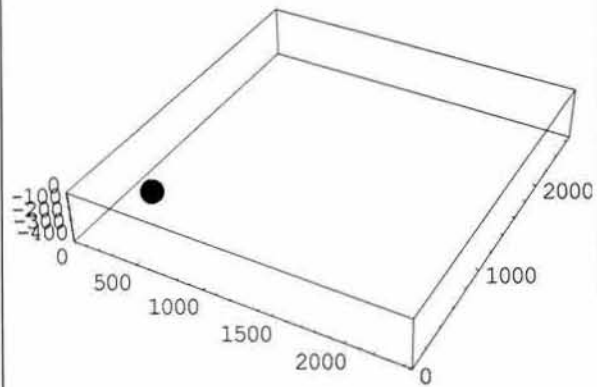
**Final de movimiento descendente en z e inicio de elevación en el mismo eje**



**Inicio de movimiento en y hacia la posición final**



**Final de movimiento en  $x$  e inicio de descenso del contenedor en  $z$**



**Punto final de la carga, es decir, posición última del contenedor.**



## Conclusiones

Se destaca principalmente el hecho de que se cumplieron los objetivos planteados para la presente tesis, es decir, la metodología propuesta funciona en los términos esperados, pues se comprueba que a través de ésta fue posible desarrollar el modelo matemático de la trayectoria de las grúas de pórtico para contenedores, así mismo, se demostró que el modelo matemático generado puede ser utilizado para desarrollar un programa de software que simule la trayectoria de la grúa en las condiciones de análisis que se propongan.

Adicionalmente puede concluirse que el modelo desarrollado, no sólo permite controlar las variables de movimiento de cualquier grúa de pórtico con movimiento cartesiano y con un perfil específico de velocidad, sino que incluso es posible utilizar el modelo en cita para modelar cualquier movimiento cartesiano que utilice el mismo perfil específico de velocidad (incluso podría emigrarse a un perfil de velocidad más complejo) toda vez que el modelo desarrollado es un modelo general, que en el presente trabajo fue aplicado a las grúas de pórtico para contenedores con un éxito evidente. Finalmente, cabe mencionar, que soluciones a problemas específicos, como el abordado en el presente trabajo, dan la posibilidad, en alguna forma, de sustituir técnicas y tecnologías externas para así utilizar las desarrolladas en el campo científico y tecnológico nacional .

## Bibliografía

1. APÓSTOL, Tom M., Calculus; volumen 1, 2ª ed., Ed. Reverté, México, 1999.
2. BLACHMAN, Nancy, WILLIAMS, Colin P., Mathematica; A practical approach, 2ª ed., Ed. Prentice Hall, U. S . A. 1999.
3. DALLY, James W., RILEY, William F., Experimental Stress Analysis, 3ª ed. Ed. McGraw-Hill, U. S. A. 1991.
4. GIL, Landivar Carlos Alberto, Fundamentos para el diseño y estandarización normativa de grúas viajeras, Tesis de Licenciatura, UNAM-FI, México D.F. 1993.
5. GLYNN, Jerry, GRAY, Theodore, The beginner's guide to mathematica® version 4, 1ª ed., Ed. Cambridge University Press, U. S. A. 2000.
6. GRANVILLE, William Anthony, Cálculo Diferencial e Integral, Reimpresión de 1969, Ed. UTEHA, México, 1969.
7. GRANVILLE, William Anthony, Trigonometría Plana y Esférica; con tablas trigonométricas, Reimpresión de 1963, Ed. UTEHA, México, 1963.
8. HALL, M. A., KNIGHT, B. A., Álgebra Superior, Reimpresión de 1969, Ed. UTEHA, México, 1969.
9. HELLMUT, Ernst, Aparatos de Elevación y Transporte, 1ª ed., Tomos I y II, Ed. Blume, España 1969.
10. LARRODÉ, Emilio, MIRAVETE, Antonio, Grúas, 1ª ed., Ed. Servicio de Publicaciones, Centro Politécnico Superior Universidad de Zaragoza, España 1996.

11. LARRODÉ, Emilio, MIRAVETE, Antonio, CASTEJÓN, Luis, CUARTERO, Jesús, Los transportes en la ingeniería industrial (Teoría), 1ª ed., Editado por Antonio Miravete, España 1999.
12. MORTON, E. Gurtin, An Introduction to Continuum Mechanics, 1ª ed., Ed. Academic Press, U.S.A. 1981.
13. NAYLOR, Arch W., SELL, George R., Linear Operator Theory in Engineering and Science, 2ª ed., Ed. Springer-Verlag, U. S. A. 1982
14. REYES, Ávila Luis, Une Representation Parametrique Systematique des Rotations Finies Partie 1; Le Cadre Theorique, Rapport de Recherche, INRIA, Rocquencourt, France 1990.
15. RUBIO, Sanjuán, Mecánica General, 2ª ed., Ed. Labor S. A., España 1950.
16. SNIDER, Arthur David, Partial Differential Equations; sources and solutions, 1ª ed., Ed. Prentice Hall, U. S. A. 1999.

### **Direcciones electronicas**

[http://www.sct.gob.mx/e-](http://www.sct.gob.mx/e-mar/puertos/apis.htm)

[mar/puertos/apis.htm](http://www.sct.gob.mx/e-mar/puertos/apis.htm)

<http://www.puertoaltamira.com.mx/>

<http://www.apidosbocas.com/>

<http://www.puertoensenada.com.mx/>

<http://www.apiguay.com.mx/>

<http://www.puerto-lazarocardenas.com.mx/>

<http://www.apimanzanillo.com.mx/>

<http://www.apimazatlan.com.mx/>

<http://www.puerto-progreso.com.mx/>

<http://www.puertomaderomexico.com/>

<http://www.apisal.com.mx/>

<http://www.puertodetampico.com.mx/>

<http://www.apitopo.com.mx/>

<http://www.tuxpanport.com.mx/>

<http://www.apivta.com/>

<http://apiver.com/>

<http://www.apicoatza.com/>

<http://www.bajaport.com/>

<http://www.tmm.com.mx/esp/>