UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"

PROCESOS ESTOCÁSTICOS Y OPCIONES FINANCIERAS

TESINA

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

ACTUARIO

PRESENTA

RENÉ CHABLÉ GARCÍA

Asesor: LUIS ALEJANDRO TAVERA PÉREZ

DICIEMBRE 2003

A

A mis padres
por su apoyo y paciencia durante todos estos años

A mis hermanos

Gracias Alejandro

Procesos estocásticos y opciones financieras

D

Índice general

1. Introducción **4**

2. Integral de Ito **5**
2.1. Función escalonada 6
2.2. Integral de Ito para funciones escalonadas 10
2.3. Propiedades de la integral de Ito 12
2.4. La integral de Ito como límite 14
2.5. Variación cuadrática 16
2.6. La integral de Ito para procesos no anticipantes 19

3. Regla diferencial de Ito **20**
3.1. Diferencial estocástica 20
3.2. Regla diferencial de Ito (escalar) 21
3.3. Regla diferencial de Ito (vectorial) 22
3.4. Fórmula de integración por partes para integrales estocásticas . . 23
3.5. Regla diferencial de Ito (caso general) 24

4. Ecuaciones diferenciales de Ito **25**
4.1. Solución de ecuaciones diferenciales de Ito 25
4.2. Existencia y unicidad 26
4.3. Ecuaciones diferenciales estocásticas lineales 31

5. Teoría de Black-Scholes **34**
5.1. Solución explícita de la ecuación de Black-Scholes 38
5.2. Cambio de variable 43
5.3. Ecuación de difusión 45
5.4. Transformación de Fourier 46
5.5. Una solución de la ecuación de difusión 47
5.6. Cambio inverso de variable 49

6. Conclusiones **51**

Objetivo

Aplicar la teoría de procesos estocásticos a la valuación de opciones financieras

Índice general

1. Introducción **4**

2. Integral de Ito **5**
2.1. Función escalonada 6
2.2. Integral de Ito para funciones escalonadas 10
2.3. Propiedades de la integral de Ito 12
2.4. La integral de Ito como límite 14
2.5. Variación cuadrática 16
2.6. La integral de Ito para procesos no anticipantes 19

3. Regla diferencial de Ito **20**
3.1. Diferencial estocástica 20
3.2. Regla diferencial de Ito (escalar) 21
3.3. Regla diferencial de Ito (vectorial) 22
3.4. Fórmula de integración por partes para integrales estocásticas . . . 23
3.5. Regla diferencial de Ito (caso general) 24

4. Ecuaciones diferenciales de Ito **25**
4.1. Solución de ecuaciones diferenciales de Ito 25
4.2. Existencia y unicidad 26
4.3. Ecuaciones diferenciales estocásticas lineales 31

5. Teoría de Black-Scholes **34**
5.1. Solución explícita de la ecuación de Black-Scholes 38
5.2. Cambio de variable 43
5.3. Ecuación de difusión 45
5.4. Transformación de Fourier 46
5.5. Una solución de la ecuación de difusión 47
5.6. Cambio inverso de variable 49

6. Conclusiones **51**

I Fórmula explícita para una opción put europea 52

II Opciones barrera 54

III Desigualdad de Doob 59

IV Lema de Bellman-Gronwall 61

Capítulo 1

Introducción

En esta tesina hacemos una exposición, razonablemente autocontenida de la teoría de procesos estocásticos y como ella nos puede ayudar en la evaluacion de opciones financieras , especificamente aplicadas a las opciones europeas.
El trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capitulo 2 presentamos la definición de la integral de Ito, sus propiedades, despues en el capítulo 3 se estudia la regla de Ito, esta regla nos permitira encontrar la diferencial estocástica de procesos estocásticos, en el capítulo 4 abordaremos las ecuaciones diferenciales de Ito, su solución, condiciones de existencia y unicidad y por último las ecuaciones diferenciales estocásticas lineales, en el capitulo 5 estudiarmos el modelo de Black-Scholes para una opción europea, haremos un recuento de las aportaciones de los modelos anteriores al modelo de Black-Scholes, una deducción de la ecuación, así como introducir una serie de conceptos usados en la teoría moderna de las matemáticas financieras. Por último haremos una serie de conclusiones y observaciones.

Capítulo 2

Integral de Ito

En este capítulo procederemos a la construcción de la integral de Ito. Para tal propósito consideremos un proceso de Wiener W, y otro proceso estocástico f. Para garantizar la existencia de tal integral, tenemos que imponer ciertas condiciones de integrabilidad sobre f y el espacio L_2.
Lo que haremos es definir la integral de Ito $\int_a^b f(t)dW(t)$ para un proceso $f \in L_2[a,b]$ lo cual haremos en dos partes. Empezamos con el proceso $f \in L_2[a,b]$ escalonado, luego definimos la integral de Ito como

$$\int_a^b f(t)dW(t) = \sum_{i=1}^{n-1} f(t_i)(W(t_{i+1}) - W(t_i))$$

Para un proceso general $f \in L_2[a,b]$ que no es escalonado, procederemos de la siguiente manera

(a) Aproximamos f con una sucesión de procesos escalonados f_n tal que

$$\int_a^b E(f_n(t) - f(t))^2 dt \to 0$$

(b) para cada n la integral $\int_a^b f_n(t)dW(t)$ está bien definida como variable estocástica Z_n, y es posible probar que existe una variable estocástica Z tal que

$$Z_n \to Z \quad \text{en} \quad L_2 \quad \text{si} \quad n \to \infty$$

(c) Luego definimos la integral estocástica como

$$\int_a^b f_n(t)dW(t) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dW(t)$$

2.1. Función escalonada

Sea Ω un conjunto arbitrario no vacio.

Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible, es decir $\mathcal{F}$ es una familia de subconjuntos de Ω tal que:

(a) $\Omega \in \mathcal{F}$

(b) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(c) $A_1, A_2, \ldots, \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$

Decimos que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de Ω.

Sea $\mathcal{U}$ una familia arbitraria de subconjuntos de Ω y sea $\{\mathcal{F}_i, i \in I\}$ la colección de σ-álgebras de Ω que contiene a $\mathcal{U}$.

Entonces

$\sigma\{\mathcal{F}\} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{F}_i$, es la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{U}$ y la llamaremos la σ-álgebra generada por $\mathcal{U}$.
Sea Ω un espacio métrico.
Si $\mathcal{U}$ es la familia de todos los subconjuntos abiertos de Ω, entonces a $\sigma\{\mathcal{U}\}$ la llamaremos la σ-álgebra de $\mathcal{B}$orel de Ω

Si $\Omega = R^n$ entonces $\sigma\{\mathcal{U}\} = \mathcal{B}(R^n)$

Definición 2.1. Una medida de probabilidad P en una $\sigma - \acute{a}lgebra$ de subconjuntos de Ω, es una función que tiene dominio en $\mathcal{F}$ y rango en el intervalo [0,1]. Esto es:

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1], \qquad \mathcal{F} \text{ una } \sigma - \acute{a}lgebra$$

y que satisface además los siguientes axiomas

(a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(b) $\mathbb{P}(A) \geq 0 \qquad \forall A \in \Omega$

(c) Si $A_1, A_2, \cdots, A_n \cdots$ es una sucesión infinita numerable de conjuntos disjuntos por pares de $\mathcal{F}$. Entonces se cumple que :

$$\mathbf{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n)$$

A la terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ se le conoce como **espacio de probabilidad.** Donde Ω es un **espacio muestral**, $\mathcal{F}$ es una **sigma-álgebra** de subconjuntos de Ω llamados eventos y P es una **medida de probabilidad.**

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad y $(\Omega', \mathcal{F}')$ un **espacio medible** arbitrario.
Entonces decimos que
$X : \Omega \to \Omega'$ es una **variable aleatoria** si:
$X^{-1}(A) \in \mathcal{F} \quad \forall A \in \mathcal{F}'$
Si $(\Omega', \mathcal{F}') = (\mathbf{R}^n, \mathcal{B}^n)$ decimos que X es **Borel medible**
Como consecuencia
$\sigma\{X\} = \{X^{-1}(A) | A \in \mathcal{F}' \subset \mathcal{F}\}$ es una **sub-σ-álgebra** de $\mathcal{F}$.
Siendo la mínima σ-álgebra de Ω con respecto a la cual X es medible
Llamaremos a $\sigma\{X\}$ la **σ-álgebra generada por X**

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y (S, δ) un espacio medible y T un conjunto de parámetros o índices.
Una colección de $X(\cdot) = \{X_t, t \in T\}$ de variables aleatorias X_t sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con valores en S, se dice que es un proceso estocástico
Si $X(\cdot) = \{X(t), t \geq 0\}$ es un proceso estocástico con valores en Ω', definimos la σ-álgebra por $\{X(s), 0 \leq s \leq t\}$, como la **mínima σ-álgebra** con respecto a la cual $X(t)$ es medible para cada $s \in [0, t]$.
La cual denotaremos por:

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X(s), 0 \leq s \leq t\}$$

Sea $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ una familia de σ-álgebras de Ω , y $X(\cdot) = \{X(t), t \geq 0\}$ un proceso estocástico definido sobre Ω.

Entonces

(a) $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ es una **filtración** de $(\Omega, \mathcal{F})$ si $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ es una familia creciente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$, es decir:

$$\mathcal{F}_t \in \mathcal{F} \qquad \forall \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{F}_s \in \mathcal{F}_t \qquad \forall \quad 0 \leq s \leq t$$

(b) $X(\cdot)$ está **adaptado** a la filtración $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ si $X(t)$ es $\mathcal{F}_t$-medible $\forall \quad t \geq 0$

Llamaremos la **filtración natural** del proceso estocástico $X(\cdot)$ a $\{\mathcal{F}_t^X, t \geq 0\}$

Un proceso estocástico {W(t), t≥} es llamado **proceso de Wiener** si:

(a) W(0)=0

(b) W(·) tiene incrementos independientes

(c) $W(\cdot)$ tiene incrementos estacionarios tal que
$W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2(t-s))$ con $t \geq s$ y $\sigma^2 > 0$

Consideremos un proceso de Wiener W(·)={W(t), t≥ 0} **estándar** $(\sigma^2 = 1)$

Sea $\mathcal{F}^W = \{\mathcal{F}_t^W, t \geq 0\}$ la filtración natural de W(·), es decir:

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma\{W(s), 0 \leq s \leq t\}$$

Sea un intervalo $[a, b]$ con $a < b < \infty$, que siempre estará dotado de la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}[a, b]$. Cosideremos el espacio $L_2 \equiv L_2(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P})$ y el espacio $L_2 \equiv L_2([a, b] \times \Omega,\ \mathcal{B}[a, b] \times \mathcal{F})$ con el siguiente **producto interno**.

$$< f, g >:= E(\int_a^b f(t)g(t)dt) = \int_a^b E[f(t)g(t)]dt. \tag{2.1}$$

entonces, la norma en $L_2([a, b] \times \Omega)$ es

$$||f_2|| = \sqrt{< f, f >} = \sqrt{\int_a^b E[f^2(t)]dt}. \tag{2.2}$$

Sea $\mathcal{F}^W = \{\mathcal{F}_t^W, t \geq 0\}$ la filtración natural de $W(\cdot)$, es decir

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma\{W(s), 0 \leq s \leq t\}$$

Definición 2.2 Sea $0 \leq a \leq b$, con $N[a,b]$ la familia de procesos estocásticos $f(\cdot) = f(t), t \geq 0$ tales que

(a) $f(t,w) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}$ es medible

(b) $f(\cdot)$ está adaptado a $\mathcal{F}^W$

(c) $f \in L_2([a,b] \times \Omega)$

Decimos que $f \in N[a,b]$ es un **proceso escalonado** si existe una partición $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ de [a,b] tal que

$$f(t) = f(t_i) \quad \forall t \in [t_i, t_{i+i}), \quad \mathit{con} \quad i = 0, 1, \cdots, n-1$$

en otras palabras

$$f(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) I_{[t_i, t_{i+1})}(t),$$

por convención, $[t_{n-1}, t_n) = [t_{n-1}, b]$

Denotemos por $\mathcal{E}[a,b]$ la subfamilia de procesos estocásticos escalonados $f \in N[a,b]$.

$$\mathcal{F}_t^W = \sigma\{W(s), 0 \leq s \leq t\}$$

2.2. Integral de Ito para funciones escalonadas

Sea $\{W(t), t \geq 0\}$ el proceso de Wiener con parámetro σ^2.
Sean $a, b \in \mathbf{R}$ finitos y sea f una funcion continuamente difenciable en $[a, b]$ y $f \in \mathcal{E}[a, b]$ escalonada.
Como el proceso de Wiener no es diferenciable, la integral $\int_a^b f(t)dW(t)$ no está bien definida, en el sentido usual. Pero podemos darle sentido a esta integral de la siguiente manera.

Definamos la integral como sigue:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_b^b f(t)(\frac{W(t+\epsilon) - W(t)}{\epsilon})d(t)$$

siempre y cuando el límite exista.

Una forma de verificarlo es haciendo lo siguiente

$$\int_a^b f(t)(\frac{W(t+\epsilon) - W(t)}{\epsilon})d(t) = \int_a^b f(t)\frac{d}{dt}(\frac{1}{\epsilon}(\int_t^{t+\epsilon} W(s)ds)dt)$$

Integrando por partes

$$\int_a^b f(t)(\frac{W(t+\epsilon) - W(t)}{\epsilon})dt = [f(t)\frac{1}{\epsilon}\int_t^{t+\epsilon} W(s)ds]_a^b - \int_a^b f'(t)(\frac{1}{\epsilon}\int_t^{t+\epsilon} W(s)ds)dt.$$

El lado derecho de la anterior ecuación converge a

$$f(t)W(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)W(t)dt,$$

esto es cierto dado que el proceso de Wiener tiene trayectorias continuas.
Por lo tanto definimos $\int_a^b f(t)dW(t)$
Como el límite de

$$[f(t)\frac{1}{\epsilon}\int_t^{t+\epsilon} W(s)ds]_a^b - \int_a^b f'(t)(\frac{1}{\epsilon}\int_t^{t+\epsilon} W(s)ds)dt \quad \text{cuando} \quad \epsilon \to 0$$

Es decir

$$\int_a^b f(t)dW(t) = f(b)W(b) - f(a)W(a) - \int_a^b f'(t)W(t)$$

En conclusión podemos definir la integral de Ito como.

Definición 2.1. Si $f \in \mathcal{E}[a,b]$ es escalonada, definimos **la integral de Ito** de f como

$$I(f) = \int_a^b f(t)dW(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)[W(t_{i+1}) - W(t_i)] \qquad (2.3)$$

2.3. Propiedades de la integral de Ito

Propiedades de la integral de Ito

(a) $\int_a^b(\alpha f(t)+\beta g(t))dW(t) = \alpha\int_a^b f(t)dW(t)+\beta\int_a^b g(t)dW(t) \quad \forall f,g \in \mathcal{E}[a,b];$
$\alpha,\beta \in \mathbb{R}$

(b) $E(\int_a^b f dW) = 0 \qquad \forall f \in \mathcal{E}[a,b]$

(c) $Var(\int_a^b f dW) = E(\int_a^b f dW)^2 = \int_a^b E[f^2(t)]dt = E(\int_a^b f^2(t)dt).$
$\forall f \in \mathcal{E}[a,b]$

Demostración

(a) De la definición tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\int_a^b(\alpha f(t) + \beta g(t))dW(t) &=\\
&\sum_{i=0}^{n-1}(\alpha f(t_i) + \beta g(t_i))[W(t_{i+1}) - W(t_i)] &=\\
&\sum_{i=0}^{n-1} \alpha f(t_i)[W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \sum_{i=0}^{n-1} \beta g(t_i)[W(t_{i+1}) - W(t_i)] &=\\
&\alpha\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)[W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \beta\sum_{i=0}^{n-1} g(t_i)[W(t_{i+1}) - W(t_i)] &=\\
&\alpha\int_a^b f(t)dW(t) + \beta\int_a^b f(t_i)dW(t)
\end{aligned}
$$

(b) De la definición tenemos que

$$
\begin{aligned}
E(\int_a^b f dW) &= \sum_{i=0}^{n-1} E[f(t_i)\Delta W_i]\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} E\{E[f(t_i)\Delta W_i|\mathcal{F}_{t_i}^{W}]\}\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} E\{f(t_i)E[\Delta W_i|\mathcal{F}_{t_i}^{W}]\}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

(c) De la definición tenemos que

$$
\begin{aligned}
E(\int_a^b f dW)^2 &= E(\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)\Delta W_i)^2 \\
&= E(\sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)^2(\Delta W_i)^2 + 2E(\sum_{i<j} f(t_i)(f_j)\Delta W_i \Delta W_j) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} E[f(t_i)^2(\Delta W_i)^2] + 2E[f(t_i)f(t_j)\Delta W_i \Delta W_j] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} E\{E[f(t_i)^2(\Delta W_i)^2|\mathcal{F}_{t_i}^W]\} + E\{E[f(t_i)f(t_j)\Delta W_i \Delta W_j|\mathcal{F}_j^W]\} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} E\{f(t_i)^2 E[(\Delta W_i)^2|\mathcal{F}_{t_i}^W]\} + E\{f(t_i)f(t_j)E[\Delta W_i \Delta W_j|\mathcal{F}_j^W]\} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} E[f(t_i)^2](t_{i+1} - t_i) + E\{f(t_i)f(t_j)\Delta W_i E[\Delta W_j|\mathcal{F}_j^W]\} \\
&= \int_a^b E[f(t)^2]dt + 0 \\
&= \int_a^b E[f(t)^2]dt
\end{aligned}
$$

2.4. La integral de Ito como límite

$\mathcal{E}[a,b]$ es denso en $N[a,b]$ en la norma de $L_2([a,b] \times \Omega)$; es decir para cada f$(\cdot) \in N[a,b]$ existe una sucesión $\{f_n\}$ en $\mathcal{E}[a,b]$ tal que:

$$\mathbb{E}(\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2) \to 0 \quad n \to \infty$$

La integral de Ito para $f \in N[a,b]$.

Si $f \in N[a,b]$ y por la densidad de $\mathcal{E}[a,b]$ en $N[a,b]$ existe una sucesión $\{f_n\}$ en $\mathcal{E}[a,b]$ tal que

$$E(\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2) \to 0 \quad n \to \infty$$

Entonces la sucesión de integrales $I(f_n) = \int_a^b f_n dW$ es una sucesión de Cauchy en $L_2 = L_2(\Omega,,P)$ porque

$$\begin{aligned} E|I(f_n) - I(f_m)|^2 &= E|\int_a^b (f_n - f_m) dW|^2 \\ &= E[\int_a^b (f_n - f_m)^2 dt] \qquad \to 0 \quad n,m \to \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto, existe una variable $I(f) \in L_2$ talque $I(f_n) \to I(f)$ en L_2.

$$I(f) = \int_a^b f(t) dW(t) = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n dW$$

a este límite le llamaremos **la integral de Ito** de f

Propiedades

(a) $E(I(f)) = 0$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

(b) $Var(I(f)) = \int_a^b E[f^2(t)] dt$

(c) $Cov(\int_a^b f dW, \int_a^b g dW) = \int_a^b E[f(t)g(t)]dt \quad \forall \quad f, g \in N[a, b]$

Demostración

Como

$$\int_a^b f(t)dW(t) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dW$$

y del siguiente resultado.

Sean $X, X_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$ variables aleatorias en L_2 tales que

$$X_n \to X \quad \text{en} \quad L_2$$

entonces

(a) $E(X_n) \to E(X)$

(b) $E(X_n^2) \to E(X^2)$

En el resultado anterior tomando $X_n = \int_a^b f_n dW$ y $X = \int_a^b f dW(t)$ se comprueban las propiedades de la integral de Ito.

2.5. Variación cuadrática

Variación cuadrátrica de W(·)

Las trayectorias del proceso de Wiener no tienen variación acotada sobre cualquier intervalo finito [0,T], esto es:

$$Sup_{\tau}\sum_{i=1}^{n}|B_{t_i}(w)-B_{t_{i-1}}(w)|=\infty$$

donde el supremo se toma sobre todas las posibles particiones τ: $0=t_0<\ldots<t_n=T$ de [0,T]

Demostración

Asumamos que T=1, ahora supongamos que

$$Sup_{\tau}\sum_{i=1}^{n}|B_{t_i}(w)-B_{t_{i-1}}(w)|<\infty$$

para un w dado.

Se τ_n una sucesión de particiones τ tal que el módulo $||\tau_n||\rightarrow 0$. Entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i B(w))^2 &\leq max_{i=1,2\ldots,n}|\Delta_i B(w)|\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i B(w)|\\ &\leq max_{i=1,2,\ldots,n}|\Delta_i B(w)|sup_{\tau}\sum_{i=1}^{n}|B_{t_i}(w)-B_{t_{i-1}}(w)|\end{aligned}$$

Dado que que W tiene trayectorias continuas con probabilida 1, podemos asumir que $W_t(w)$ es una función continua de t. Es tambien uniformemente continua sobre [0,1] que en combinación con $||\tau_n||\rightarrow 0$ implica que:

$$max_{i=1,2\ldots,n}|\Delta_i B(w)|\rightarrow 0$$

de aqui que

$$max_{i=1,2,\ldots,n}|\Delta_i B(w)|Sup_{\tau}\sum_{i=1}^{n}|B_{t_i}(w)-B_{t_{i-1}}(w)|$$

converge a 0, esto implica que:

$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i B(w))^2\rightarrow 0$$

Como sabemos que:

$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i B(w))^2 \to 1$$

en probabilidad, de aqui que

$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i B(w))^2 \to 1$$

casi seguramente para una subsucesión adecuada $\{n_k\}$, esto es

$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta_i B(w))^2 \to 0$$

es solamente posible sobre un conjunto nulo, por lo tanto

$$P(w : \sum_{i=1}^{n}(\Delta_i B(w))^2 = \infty) = 1$$

Este hecho y la no diferenciabilida del proceso de Wiener nos dan la pauta para introducir la **variación cuadrática** del proceso de Wiener.
Sea τ_n una partición: $a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b$ de [a,b] con módulo

$$|\tau_n| = max_i|t_{i+1} - t_i|$$

Sea

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}(\Delta_i W)^2 = \sum_{i=0}^{n-1}[W(t_{i+1}) - W(t_i)]^2$$

(a) Si $||\tau_n|| \to 0$, entonces $S_n \to b - a$ en L_2, cuando $n \to \infty$

(b) Si $\sum_n \tau_n < \infty$, entonces la convergencia en (a) se cumple casi seguramente.

Demostración

Como $\Delta_i = W(t_{i+1}) - W(t_i) \sim N(0, t_{i+1} - t_i) = N(0, \Delta t_i)$, entonces:

$$E(\Delta W_i)^2 = \Delta t_i$$

y

$$E(\Delta W_i)^4 = 3(\Delta t_i)^2$$

Entonces

$$E(S_n) = \sum_{i=0}^{n-1}\Delta t_i = b - a$$

y

$$Var(S_n) = E(S_n - (b-a))^2;$$

entonces

$$S_n \to b-a \quad \text{en} \quad L_2, \quad n \to \infty$$

es equivalente a

$$Var(S_n) \to 0 \quad n \to \infty$$

Ahora como $W(\cdot)$ tiene incrementos independientes,

$$Var(S_n) = \sum_{i=0}^{n-1} Var[(\Delta_i W)^2]$$

Pero como

$$\begin{aligned} Var[(\Delta W_i)^2] &= E(\Delta W_i)^4 - [E(\Delta W_i)^2]^2 \\ &= 3(\Delta t_i)^2 - (\Delta t_i)^2 \\ &= 2(\Delta t_i)^2 \leq 2|\tau_n|\Delta t_i \end{aligned}$$

Entonces

$$Var(S_n) \leq 2|\tau_n| \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i = 2|\tau_n|(b-a) \to 0,$$

con lo cual se demuestra (a).

Ahora si $\sum_n |\tau_n| < \infty$, entonces por $Var(S_n) \to 0$

$$\sum_n Var(S_n) \leq 2(b-a) \sum_n |\tau_n| < \infty$$

2.6. La integral de Ito para procesos no anticipantes

Definición 2.2. Sea $W(\cdot) = \{W(t), t \geq 0\}$ un proceso de Wiener sobre $(\Omega, , P)$ y sea $\gamma(\cdot) = \{\gamma_t, t \geq 0\}$ una familia de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$

Entonces decimos que $\gamma(\cdot)$ es **no anticipante con respectto a** $W(\cdot)$ si:

(a) $\gamma(\cdot)$ es creciente

(b) $W(\cdot)$ está adaptado a $\gamma(\cdot)$

(c) $\forall \quad h > 0$, $W(t+h) - W(t)$ es independiente de γ_t $\forall t \geq 0$

Sean $W_1, \ldots, W_d$ procesos de Wiener independientes, es decir, las σ-álgebras $\sigma\{W_i(t), t \geq 0\}$ con $W(t) := (W_1(t), \ldots, W_d(t)) \in R^d$ se llama proceso de Wiener d-dimensional. Sea $\gamma_t = {}^{W}_{t} := \sigma\{W(s), 0 \leq s \leq t\}$ la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{F}_t^{W_i}$ para i=1,..., d.

Entonces

$\{\gamma_t, t \geq 0\}$ es no anticipante con respecto a cada $W_i(\cdot)$ para i=1,..., d. y tambien no anticipante con respecto a $W(\cdot) = (W_1(\cdot), \ldots, W_d(\cdot))'$.
Sea $W(\cdot) = (W_1(\cdot), \ldots, W_d(\cdot))'$ un proceso de Wiener d-dimensional y $\gamma(\cdot) = \{\gamma_t, t \geq 0\}$ una familia no anticipante con respecto a $W(\cdot)$.
Sea $N[a,b]^{m\times d}_{na}$ la familia de procesos estocásticos matriciales $F(\cdot) = [f_{ij}(\cdot)] : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}^{m\times d}$ tal que:

(a) $f_{ij}(t,w) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$

(b) $F(\cdot)$ está adaptado a $\gamma(\cdot)$

(c) $F(\cdot) \in L_2([a,b] \times \Omega)$ es decir $E[\int |F(t)|^2 dt] < \infty$ en donde $\|F(t)\|$ es la norma de $F(t) = (f_{ij}(t))$

Entonces definimos **la integral de Ito**

$$\int_a^b F(t)dW(t) \equiv \int_a^b FdW \in \mathbb{R}^m$$

como el vector aleatorio cuya i-esima componente con $i = 1, \ldots, m$ es

$$(\int_a^b FdW)_i := \sum_{j=1}^{d} \int f_{ij} dw_j$$

Capítulo 3

Regla diferencial de Ito

En este capítulo, estudiaremos la ecuación integral estocástica

$$X(b) - X(a) = \int_a^b \mathcal{U}(t)dt + \int_a^b \mathcal{V}(t)dW(t)$$

donde W es un proceso de Wiener y la primera integral del lado derecho es una integral de Riemman y la segunda es una integral de Ito, daremos las condiciones técnicas para la existencia de la diferencial estocástica del proceso X, la cual definiremos como

$$dX(t) = \mathcal{U}(t)dt + \mathcal{V}(t)dW(t)$$

lo haremos para el caso escalar y vectorial.

3.1. Diferencial estocástica

Sea $\gamma(\cdot) = \{\gamma_t,\ t \geq 0\}$ una filtración no anticipante con respecto a $W(\cdot)$ y Sean $\mathcal{U}(t,w)$, $\mathcal{V}(t,w) : [0,\infty) \times \Omega \to \mathbf{R}$ dos procesos estocásticos medibles, adaptados a $\gamma(\cdot)$ y

$$\int_0^t |\mathcal{U}(s)|ds < \infty \quad \text{y} \quad \int_0^t \mathcal{V}^2(s)ds < \infty \quad \forall t \geq 0 \tag{3.1}$$

Definición 2.1. Si $X(\cdot) = \{X(t),\ 0 \leq t \leq T\}$ es un proceso estocástico tal que:

$$X(b) - X(a) = \int_a^b \mathcal{U}(t)dt + \int_a^b \mathcal{V}(t)dW(t) \quad \forall \quad 0 \leq a \leq b \leq T \tag{3.2}$$

entonces diremos que $X(\cdot)$ tiene una **diferencial estocástica** en [0,T] y escribiremos

$$dX(t) = \mathcal{U}(t)dt + \mathcal{V}(t)dW(t) \tag{3.3}$$

Consideremos la siguiente regla

$dt \cdot dt = 0$
$dt \cdot dW = 0$
$dW \cdot dt = 0$
$dW \cdot dW = dt$

Entonces retomando (3.3), tenemos que

$(dX(t))^2 = (\mathcal{U}(t)dt + \mathcal{V}(t)dW(t))^2$
$(dX(t))^2 = \mathcal{U}^2(t)(d(t))^2 + \mathcal{V}^2(t)(dW(t))^2 + 2(\mathcal{U}(t)d(t)\mathcal{V}(t)dW(t))$
$(dX(t))^2 = 0 + \mathcal{V}^2(t)dt + 0$
$(dX(t))^2 = \mathcal{V}^2(t)dt$

Ejemplo

Sabemos que

$$\int_a^b W dW = \frac{1}{2}[W^2(b) - W^2(a)] - \frac{1}{2}(b-a)$$

reordenando tenemos que

$$\begin{aligned} W^2(b) - W^2(a) &= (b-a) + \textstyle\int_a^b 2W(t)dW(t) \\ &= \textstyle\int_a^b dt + \int_a^b 2W(t)dW(t) \\ &= dt + 2W(t)dW(t) \end{aligned}$$

esto implica que

$$dW^2(t) = dt + 2W(t)dW(t)$$

3.2. Regla diferencial de Ito (escalar)

Supongamos que $X(\cdot)$ tiene la forma diferencial estocástica (3.3) y sea $g(t,x) \in \mathbf{C}^{1,2}([0,\infty) \times \mathbf{R})$
Entonces el proceso estocástico $Y(t) := g(t, X(t))$ tiene la diferencial estocástica,

$$dY(t) := g_t(t, X(t))dt + g_x(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}g_{xx}(t, X(t))(dX(t))^2 \qquad (3.4)$$

Sustituyendo (3.3) y el valor de $(dX(t))^2$ de la regla en (3.4) obtenemos

$$dY(t) = (g_x(t, X(t)) + g_x(t, X(t))(\mathcal{U}(t)dt + \mathcal{V}(t)dW(t)) + \frac{1}{2}g_{xx}(t, X(t))\mathcal{V}^2(t)dt$$

$$dY(t) = (g_t(t,X(t))+g_x(t,X(t))U(t)+\frac{1}{2}g_{xx}(t,X(t))V^2(t))dt+g_x(t,X(t))\mathcal{V}(t)dW(t)$$

$$dY(t) \equiv (Lg)(t,X(t))dt + g_x(t,X(t))(t)dW(t) \qquad (3.5)$$

donde

$$Lg = (g_x(t,X(t)) + g_x(t,X(t))\mathcal{U}(t) + \frac{1}{2}g_{xx}(t,X(t))\mathcal{V}^2(t)dt$$

Ejemplo

Sea $Y(t) = g(t,x(t))$ con $g(t,x) = f(t)x$ y $x(\cdot) \equiv W(t)$

Entonces

$g_t(t,x) = f'(t)x, \quad g_x(t,x) = f(t) \quad y \quad g_{xx}(t,x) = 0$

sustituyendo estos valores en (3.5), tenemos que

$$d[f(t)W(t)] = f'(t)W(t)dt + f(t)dW(t)$$

3.3. Regla diferencial de Ito (vectorial)

Sean $\mathcal{U}(\cdot) = (\mathcal{U}_1(\cdot),\ldots,\mathcal{U}_m(\cdot))' \in \mathbf{R}$ y $\mathcal{V}(\cdot) = \mathcal{V}_{ij}(\cdot) \in \mathbf{R}^{m\times d}$ procesos estocásticos cuyas componentes $\mathcal{U}_i(\cdot)$ y $\mathcal{V}_{ij}(\cdot)$ satisfacen (3.1)
Sea $W(\cdot) = (W_1(\cdot),\ldots,W_d)' \in \mathbb{R}^d$ un proceso de Wiener.
La diferencial estocástica $dX(t) = \mathcal{U}(t)dt + \mathcal{V}(t)dW(t)$ para este caso sera necesario que las compnentes de $X(\cdot)$ satisfagan lo siguiente

$$dX_i(t) = \mathcal{U}_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d}\mathcal{V}_{ij}(t)dW_j(t) \quad \forall i = 1,\ldots,m \qquad (3.6)$$

Sea como en el caso escalar una función $g(t,x) : [0,\infty) \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ una función en $\mathbf{C}^{1,2}$
Sea el vector fila $g_x = (g_{x_1},\ldots,g_{x_m})$ y la siguiente matriz $g_{xx} = (g_{x_iX_j}) \in \mathbf{R}^{m\times m}$
Sea $\sigma := \mathcal{V}\mathcal{V}' \in \mathbf{R}^{m\times m}$, de aqui que las componentes de σ son

$$\sigma_{ij} = (\mathcal{V}\mathcal{V}') = \sum_{k=1}^{d}\mathcal{V}_{ik}\mathcal{V}_{jk} \qquad (3.7)$$

ademas

$Tr(\sigma g_{xx}) = Tr(g_{xx}\sigma) := \sum_{i=1}^{m}(\sigma g_{xx})_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}g_{x_ix_j}$

Si utilizamos (3.7), tendremos que

$$Tr(g_{xx}\sigma) = \sum_{k=1}^{d}\sum_{i,j=1}^{m} g_{x_ix_j} \mathcal{V}_{ik}\mathcal{V}_{jk} \tag{3.8}$$

El resultado análogo a (3.5) es

$$\begin{aligned}(Lg)(t,X(t)) &:= g_t(t,X(t)) + g_x(t,X(t))U(t) + \tfrac{1}{2}Tr(\sigma(t)g_{xx}(t,X(t)))\\ &= g_t + \textstyle\sum_{i=1}^{m} g_{x_i}\mathcal{U}_i + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} g_{x_ix_j}\mathcal{V}_{ik}\mathcal{V}_{jk}\end{aligned} \tag{3.9}$$

3.4. Fórmula de integración por partes para integrales estocásticas

Supongamos que $X(\cdot) \in \mathbf{R}^2$ tiene la diferencial estocástica

$$dX(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_1(t) \\ \mathcal{U}_2(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1(t) \\ \mathcal{V}_2(t) \end{pmatrix} dW(t), \tag{3.10}$$

es decir que

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= \mathcal{U}_1(t)dt + \mathcal{V}_1(t)dW(t) \\ dX_2(t) &= \mathcal{U}_2(t)dt + \mathcal{V}_2(t)dW(t), \end{aligned}$$

entonces

$$d(X_1(t)X_2(t)) = X_1(t)dX_2(t) + X_2(t)dX_1(t) + \mathcal{V}_1(t)\mathcal{V}_2(t)dt,$$

este resultado lo podemos deducir de la siguiente manera
Sea $Y(t) := X_1(t)X_2(t) = g(t,X(t))$ con $g(t,x) = x_1x_2 \quad \forall x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$, luego

$$g_t = 0, \quad g_x = (x_2, x_1), \quad g_{xx} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma := \mathcal{V}(\cdot)\mathcal{V}'(\cdot) = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 \\ \mathcal{V}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1 & \mathcal{V}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1^2 & \mathcal{V}_1\mathcal{V}_2 \\ \mathcal{V}_1\mathcal{V}_2 & \mathcal{V}_2^2 \end{pmatrix}$$

Ahora utilizando (3.9), obtenemos el resultado deseado

3.5. Regla diferencial de Ito (caso general)

Sea $X(\cdot) \in \mathbf{R}^m$ y que tiene la diferencial estocástica

$$dX(t) = \mathcal{U}(t)dt + \mathcal{V}(t)dW(t)$$

con $U(\cdot) \in \mathbf{R}^m$, $\mathcal{V}(\cdot) \in \mathbf{R}^{m\times d}$, $W(\cdot) \in \mathbf{R}^d$ y $g : [0,\infty) \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^d$ en $\mathbf{C}^{1,2}$

Entonces

$$Y(t) = g(t, X(t)) = (g_1(t, X(t)), \dots, g_k(t, X(t)))' \in \mathbf{R}^p$$

cuyas componentes tiene la diferencial estocástica.

$dY(t) = (g_t(t, X(t)) + \sum_{i=1}^m g_{x_i}(t, X(t))\mathcal{U}_i(t)+$
$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^d \sum_{i,j=1}^m g_{x_i x_j}(t, X(t))V_{ik}(t)\mathcal{V}_{jk}(t))dt+\sum_{i=1}^d \sum_{i=1}^m g_{x_i}(t, X(t))\mathcal{V}_{ik}(t)dW_k(t)$

si sustituimos g por g_l
entonces

$$dY_l(t) = (Lg_l)(t, X(t))dt + \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_l(t, X(t))}{\partial x_i}\mathcal{V}_{ik}(t)dW_k(t) \qquad (3.11)$$

donde

$$(Lg_l) := \frac{\partial g_l}{\partial t} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial g_l}{\partial x_i}U_i(t) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^d \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 g_l}{\partial x_i \partial x_j}\mathcal{V}_{ik}(t)\mathcal{V}_{jk}(t)$$

para $l = 1, \dots, p$

Capítulo 4

Ecuaciones diferenciales de Ito

En este capítulo estudiaremos la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX(t) = f(t, x(t))dt + G(t, X(t))dW(t)$$

su existencia y unicidad, daremos las condicionees técnicas para asegurar la solución de ella. También estudiaremos cuando la ecuación diferencial estocástica es lineal y diremos tambien cuando es homogénea, autonoma y lineal en sentido restringido.

4.1. Solución de ecuaciones diferenciales de Ito

Sea la ecuación diferencial estocástica de Ito

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + G(t, X(t))dW(t) \quad \forall t_0 \leq t \leq T, \quad \text{con} \quad X(t_0) = C \quad (4.1)$$

en donde:

$W(\cdot) \in R^d$, $X(\cdot) \in R^m$, $f(t, x) \in R^m$, $G(t, x) \in \mathbb{R}^{m \times d}$ y $C \in \mathbb{R}^m$ es una variable aleatoria independiente de $W(t) - W(t_0) \quad \forall \quad t \geq t_0$
Sea $\gamma(\cdot) = \{\gamma_t, t \geq 0\}$ la filtración no anticipante con respecto a $W(\cdot)$ definida como sigue

$$\gamma_t := \sigma\{C, W(s), s \leq t\}$$

Definición 4.1. Decimos que un proceso estocástico $X(\cdot)$ es **solución** de (4.1) si se cumple que:

(a) $X(\cdot)$ está adaptado a γ

(b) $f(t,x)$ y $G(t,x)$ son funciones medibles tal que

$$\int_{t_0}^{T} |f(t,x(t,w))| < \infty \quad y \quad \int_{t_0}^{T} |G(t,X(t,w))|^2 < \infty$$

con

$$|G|^2 = Tr(GG')$$

(c) X(t) satisface

$$X(t) = C + \int_{t_0}^{t} F(s,X(s))ds + \int_{t_0}^{t} G(s,X(s))dW(s) \quad \forall \quad t \in [t,T] \tag{4.2}$$

Si (4.1) satisface las condiciones de Lipschitz y crecimiento lineal, entonces tiene una única solución continua casi seguramente, es decir si $f(t,x), G(t,x)$ satisfacen para alguna constante $K \geq 0$

$$|f(t,x) - F(t,y)| + |G(t,x) - G(t,y)| \leq K|x-y| \quad \forall \quad t \in [t_0,T] \quad x,y \in \mathbf{R}^m \tag{4.3}$$

$$|f(t,x)| + |G(t,x)| \leq K(1+|x|) \quad \forall \quad t \in [t_0,T], \quad x \in \mathbf{R}^m \tag{4.4}$$

Si $X(\cdot)$ y $Y(\cdot)$ son dos procesos estocásticos continuos que satisfacen (4.1), entonces

$$P(Sup_{t_0 \leq t \leq T}|X(t) - Y(t)| > 0) = 0 \tag{4.5}$$

4.2. Existencia y unicidad

Existencia

Definamos una sucesión de procesos estocásticos

$$X^{(n)}(t) := C + \int_{t_0}^{t} f(s,X^{(n-1)}(s))ds + \int_{t_0}^{t} G(s,X^{(n-1)}(s))dW(s) \quad \forall \quad t \in [t_0,T] \tag{4.6}$$

Ahora por inducción, para cada $n = 0, 1, \ldots$ $X^n(\cdot)$ está adaptado a $\{\gamma_t\}$ y es continuo

Por demostrar que existe un proceso estocástico$X(\cdot)$ tal que:

$$\lim_{n \to \infty} X^n(t) = X(t) \tag{4.7}$$

casi seguramente uniformemente en $t \in [t_0,T]$ y que $X(\cdot)$ satisface la ecuación diferencial estocástica (4.1) y (4.2)

Para demostrar (4.5), tenemos que verificar que:

$$Sup_{t_0\leq t\leq T}E|X^{n+1}(t)-X^n(t)|^2\leq \frac{L_1(L_0(t-t_0))^n}{n!} \quad \forall \quad n\geq 0, \tag{4.8}$$

donde

$L_0 = L_0(K, T-t_0)$ y $L_1 = L_1(L_0, T-T_0, \mathbf{E}(C^2))$ son constantes, que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(D_n\geq \frac{1}{n^2})<\infty \tag{4.9}$$

donde $D_n := Sup_{t_0\leq t\leq T}|X^{n+1}(t)-X^n(t)|$

Demostración de (4.8)
Caso n=0

Como $X^0(\cdot)\equiv C$,

$$X^{(1)}(t)-X^{(0)}(t)=\int_{t_0}^{t}f(s,C)ds+\int_{t_0}^{t}G(s,C)dW(s)$$

Entonces

$$\mathbf{E}(X^{(1)}(t)-X^{(0)}(t))^2\leq 2(t-t_0)\int_{t_0}^{t}\mathbf{E}(f^2)ds+s\int_{t_0}^{t}\mathbf{E}(G^2)ds$$

Ahora por la condición de Lipschitz

$$\mathbf{E}[f^2(s,C)]\leq 2K^2(1+\mathbf{E}[(C^2)])$$

y de igual manera para $\mathbf{E}[G^2(s,C)]$

De aqui que:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X^{(1)}(t)-X^{(0)}(t))^2 &\leq 2(t-t_0)[2K^2(1+\mathbf{E}(C^2))](t-t_0+1)\\ &\leq 2(T-t_0)[2K^2(1+\mathbf{E}(C^2))](T-t_0+1)\end{aligned}$$

Esto implica (4.8)

Caso $n\geq 1$, de manera similar al caso anterior tenemos que

$$\mathbf{E}(X^{(n+1)}(t)-X^{(n)}(t))^2\leq L_0\int_{t_0}^{t}\mathbf{E}(X(n)(s)-X(n-1)(s))^2ds,$$

con $L_0 := 2(T-t_0+1)K$,

De manera recursiva, obtenemos que:

$$\mathbf{E}(X^{(n+1)}(t) - X^{(n)}(t))^2 \leq L_0^n \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-a)^{n-1} \mathbf{E}(X^1(s) - X^{(0)}(s))^2 ds$$

y como

$$\mathbf{E}(X^{(1)}(\cdot) - X^0(\cdot)) \leq L_1,$$

entonces se cumple (4.8).
Utilizando la desigualda de Chebyshev, obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(D_n \geq \frac{1}{n^2}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^4 \mathbf{E}(D_n^2)$$

Entonces para demostra (4.9) basta demostrar que para alguna constante M, tenemos que

$$\mathbf{E}(D_n^2) \leq M(L_0(T-t_0)^{n-1}(n-1)!) \quad n \geq 1 \tag{4.10}$$

tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(D_n \geq \frac{1}{n^2}) \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 (L_0(T-t_0))^{n-1}}{(n-1)!} < \infty$$

Para demostrar (4.9) observemos que

$$D_n := Sup_{t_0 \leq t \leq T} |X^{(n+1)}(t) - X^{(n)}(t)| \leq \mathbf{I}_n + \mathbf{II}_n$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_n &:= \int_{t_0}^{T} |f(s, X^{(n)}(s)) - f(s, X^{(n-1)}(s)| ds \\ \mathbf{II}_n &:= Sup_{t_0 \leq t \leq T} | \int_{t_0}^{T} [G(s, X^{(n)}(s)) - G(s, X^{(n-1)}(s)] dW(s)| \end{aligned}$$

entonces

$$\mathbf{E}(D_n^2) \leq 2\mathbf{E}(\mathbf{I}_n^2) + 2\mathbf{E}(\mathbf{II}_n^2)$$

de modo que para demostrar (4.8) basta ver que existen constantes M_1, M_2 tal que

$$\mathbf{E}(\mathbf{I}_n^2) \leq M_1(L_0(T-t_0))^{n-1}(n-1)! \tag{4.11}$$

y

$$\mathbf{E}(\mathbf{II}_n^2) \leq M_2(L_0(T-t_0))^{n-1}(n-1)! \tag{4.12}$$

Demostración de (4.11), por la condición de Lipschitz, tenemos que

$$\mathbf{I}_n \leq K \int_{t_0}^{T} |X^{(n)}(s) - X^{(n-1)}(s)|^2 ds$$

de aqui que

$$\mathbf{I}_n^2 \leq K^2(T-t_0)\int_{t0}^{T}\mathbf{E}|X^{(n)}(s)-X^{(n-1)}(s)|^2 ds \leq \frac{K^2(T-t_0)^2 L_1(L_0(T-t_0))^{n-1}}{(n-1)!}$$

y si ponemos $M_1 := K^2(T-t_0)^2 L_1$, obtenemos (4.9)

Demostración de (4.12), por la desigualda de Dood[1] para martingalas tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathbf{I}_n^2) &\leq 4\mathbf{E}[\textstyle\int_{t_0}^{T}(G(s,X^n(s)) - G(s,X^{(n-1)}(s))dW(s)]^2 \\
&= 4\textstyle\int_{t_0}^{T}\mathbf{E}(X^{(n)}(s) - X^{(n-1)}(s))^2 ds \\
&\leq \frac{M_2(L_0(T-t_0))^{n-1}}{(n-1)!}
\end{aligned}$$

si ponemos $M_2 := 4K^2(T-t_0)L_1$, obtenemos (4.12)

Ahora como

$$\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} Sup\{D_n \geq \frac{1}{n^2}\}) = 1$$

o de manera equivalente

$$\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} Inf\{D_n < \frac{1}{n^2}\} = 1$$

Esto es, para casi todo $w \in \Omega$, existe $N(w)$ tal que

$$\mathbf{D}_n :=_{t_0\leq t\leq T} |X^{n+1}(t) - X^n(t)| < \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq N(w)$$

Por lo tanto la sucesión $\{X^{(n)}(t)\}$ es de Cauchy con probabilidad 1 porque

$$X^{(n)}(t) = X^{(0)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1}[X^{i+1}(t) - X^i(t)]$$

Por lo tanto, existe un proceso estocástico $X(\cdot)$ tal que

$$X^{(n)}(t) \to X(t)$$

con probabilidad 1 uniformemente sobre $[t_0,T]$ De lo anterior podemos decir que $X(\cdot)$ está adaptado a γ y que X(t) es continuo en todo $t \in [t_0,T]$.

Unicidad

[1] ver anexo 3

Sean $X(\cdot)$ y $Y(\cdot)$ dos soluciones de (4.2), es decir

$$X(t)-Y(t)=\int_{t_0}^{t}[f(s,X(s))-f(s,Y(s))]ds+\int_{t_0}^{t}[G(s,x(s))-G(s,Y(s))]dW(s) \tag{4.13}$$

$\forall \quad t\in[t_0,T]$

Por demostrar que

$$\mathbb{E}|X(t)-Y(t)|^2=0 \quad \forall \quad t\in[t_0,T] \tag{4.14}$$

lo cual implica (4.5)

Tomemos cuadrados en ambos lados de la desigualdad en (4.13) y usando $(a+b)^2\le 2(a^2+b^2)$, despues tomemos esperanza, y utilizando la desigualdad de Schwartz $(\int_{t_0}^t fg)^2\le(\int_{t_0}^t f^2)(\int_{t_0}^t g^2)$ y si ponemos $g(\cdot)\equiv 1$, y la isometria de Ito, obtenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X(t)-Y(t))^2 &\le 2(t-t_0)\int_{t_0}^t\mathbb{E}[f(s,X(s))-f(s,Y(s))]^2ds\\ &+ 2\int_{t_0}^t\mathbb{E}[G(s,X(s))-G(s,Y(s))]^2ds\end{aligned} \tag{4.15}$$

Ahora por la condición de Lipschitz tenemos que

$$\mathbb{E}[f(s,X(s))-f(s,Y(s))]^2\le K^2\mathbb{E}[X(s)-Y(s)]^2 \tag{4.16}$$

de manera similar para G.
Por lo tanto definiendo $g(t):=\mathbb{E}(X(t)-Y(t))^2$ de (3.15) tenemos que

$$g(t)\le L\int_{t_0}^t g(s)ds \qquad \text{con} \quad L:=(2(t_0-t)+2)K \tag{4.17}$$

y utilizando la desigualda de Bellman-Gronwall[2], entonces de (4.17) se obtiene (4.14)
Ahora para obtener (4.5), tenemos que (4.14) implica que

$$\mathbb{E}(|X(t)-Y(t)|=0)=1 \qquad \forall \quad t\in[t_0,T]$$

Entonces si $\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales, tenemos que

$$\mathbb{P}(|X(t)-Y(t)|=0 \qquad \forall \quad t\in\mathbb{Q}\cap[t_0,T])=1$$

Ahora por la continuidad de t, se tiene que

$$\mathbb{P}(|X(t)-Y(t)|=0 \qquad \forall \quad t\in[t_0,t])=1$$

[2] ver Anexo 4

4.3. Ecuaciones diferenciales estocásticas lineales

Definición 4.2. Decimos que la ecuación diferencial estocástica (4.1) es **lineal** si es de la forma:

$$dX(t) = (A(t)X(t)X(t) + a(t)dt)dt + \sum_{i=1}^{d}[B_i(t)X(t) + b_i(t)]dW_i(t), \qquad (4.18)$$

donde $A(\cdot), B_i(\cdot) \in \mathbf{R}^{m\times m}$ y $a(\cdot), b_i(\cdot) \in \mathbf{R}^m$

Además, la ecuación diferencial estocástica lineal (4.18) es:

- **homogénea** si $A(\cdot) = b_1(\cdot) = \ldots = b_d(\cdot) \equiv 0$, es decir

$$dX(t) = A(t)X(t)dt + \sum_{i=1}^{d} B_iX(t)dW_i(t);$$

- **autónoma** si es homogénea y $A(\cdot) \equiv A$ y $B_i(\cdot) \equiv B_i$, donde i=1,..., d son matrices constantes, es decir

$$dX(t) = AX(t)dt + \sum_{i=1}^{d} B_iX(t)dW_i(t);$$

- lineal en el **sentido restringido** si $B_i(\cdot) \equiv \forall i = 1, \ldots, d$, es decir

$$dX(t) = (A(T)X(t) + a(t)dt + B(t)dW(t), \quad X(t_0) = C, \qquad (4.19)$$

con $B(t) = (b_{ij})(t) \in \mathbb{R}^{m\times d}$

Solución de (4.18)

Consideremos la ecuación determinista

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + a(t) \quad \forall t \in [t_0, T], \quad con \quad x(t_0) = c, \qquad (4.20)$$

y la correspondiente ecuación homogénea ẋ(t)=A(t)x(t).

La solución $\Phi(t) \equiv \Phi(t, t_0)$ de la ecuación matricial

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t) \quad \Phi(t_0) = \mathbb{I} \qquad (4.21)$$

se llama la **matriz fundamental** de (4.19) y además la solución de (4.19) es

$$x(t) = \Phi(t)[c + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)a(s)ds]$$

En particular si $A(\cdot) \equiv A$ es independiente de t, entonces

$$\Phi = e^{A(t-t_0)} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n(t-t_0)^n}{n!}$$

y la solución de (4.13) resulta ser

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}c + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}a(s)ds$$

Sea $Y(\cdot)$ el proceso estocástico definido como

$$Y(t) := C + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)a(s)ds + \int_{t_0}^{t} |\Phi^{-1}(s)B(s)dW(s), \quad \text{con} \quad t \geq t_0$$

Entonces la solución de la ecuación lineal restringida (4.18) es

$$X(t) = \Phi(t)Y(t) = \Phi(t)[C + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)(a(s)ds + B(s)dW(s))] \tag{4.22}$$

De manera particular, si $A(\cdot) \equiv A$ es una matriz constante, entonces

$$X(t) = e^{A(t-t_0)}C + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-t_0)}C + \int e^{t}_{t_0}A(t-s)[a(s)ds + B(s)dW(s)] \tag{4.23}$$

Demostración

El proceso $Y(\cdot)$ tiene la diferencial estocástica

$$dY(t) = \Phi^{-1}[a(t)dt + B(t)dW(t)] \tag{4.24}$$

Ahora, aplicando la regla de Ito (3.11) al proceso estocástico

$$X(t) = \Phi(t)Y(t),$$

entonces por (4.21) y (4.24)

$$\begin{aligned} dX(t) &= \dot{\Phi}(t)Y(t)dt + A(t)dY(t) \\ &= A(t)\Phi(t)Y(t)dt + a(t)dt + B(t)dW(t) \\ &= (A(t)X(t) + A(t))dt + B(t)dW(t). \end{aligned}$$

Ejemplo

Ecuación de Langevin

La ecuación de la Langiven es la siguiente

$$mV'(t) + fV(t) = W'(t), \quad V(0) = v_0 \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

que escrita como ecuación diferencial estocástica de Ito resulta, con $\alpha := -\frac{f}{m}$

$$dV(t) = \alpha V(t) + \frac{1}{m} dW(t)$$

Esta es una ecuación diferencial estocástica, escalar, lineal en el sentido restringido con

$$A(\cdot) \equiv \alpha, \quad a(\cdot) \equiv 0 \quad y \quad B(\cdot) \equiv \frac{1}{m}$$

Como $t_0 = 0$, entonces

$$V(t) = v_0 e^{\alpha t} + \frac{1}{m} \int_0^t e^{\alpha(t-s)} dW(s) \qquad \forall t \geq 0,$$

y

$$V(t) = X'(t)$$

es la velocidad de una particula con posición $X(t)$.

Capítulo 5

Teoría de Black-Scholes

En este capítulo estudiaremos el modelo Black-Scholes para una opción call europea, empezaremos haciendo una revisión de las aportaciones de los modelos previos al modelo de Black-Scholes, hasta llegar a éste, tambien daremos los supuestos del modelo. Calcularemos una solución explícita de la ecuación . Daremos también la definición de varios conceptos usados en la teoria moderna de la matemática financiera, en particular de la teoria de Black-Scholes.
Hasta antes del modelo de Black-Scholes solamente dos suposiciones acerca del proceso de precios se habian presentado

- **Bachelier (1900)**

Sugiere el movimiento brawniano aritmético

Las principales objeciones al modelo de Bachelier son

(a) La suposición de movimiento brawniano aritmético en la descripción del movimiento de precios esperados implica una probabilidad positiva de precios negativos y precios de opciones más grandes que sus respectivos precios del valor para t grande

(b) La suposición que el precio medio esperado es cero, sugiere tasa de interes cero y neutralidad al riesgo

(c) La suposición implicita que la varianza es finita

Dado que la suposición de normalidad parece llevarnos a implicaciones inaceptables, la mayoria de los modelos han usado una hipótesis alternativa, que el logaritmo de los precios sigue un movimiento browniano. Esta hipótesis implica cuatro suposiciones.

(a) La distribución del cociente de precios es independiente del nivel de precios

(b) El cociente de precios son independientes

(c) La probabilidad de que el precio sea cero es cero, por lo tanto logaritmos pueden ser empleados

(d) La varianza de los precios relativos es finita, por lo tanto resulta ser otro miembro de la distribución Pareto

- **El modelo de Sprenkle (1964)**

Sprenkle parcialmente remueve las primeras dos objeciones de la formulación de Bachelier
Sprenkle asume que el precio de los valores están distribuidos de manera log-normal, entonces resulta la posibilidad de precios no positivos y remueve precios infinitos para las opciones. El toma en cuenta la deriva en la caminata aleatoria, se permite tasa de interes positivas y la aversión al riesgo.
Sprenkle supuso que en general no es verdad que el inversionista está dispuesto a pagar un precio por la garantia exactamente igual al valor esperado del mismo valor, de hecho estaría dispuesto a pagar exactamente este precio solo si él fuera neutral al riesgo. Ademas dice que es contradictorio asumir que la caminata aleatoria de los precios del valor tiene un sesgo o tendencia positiva, mientras que el inversionista paga el valor esperado para la opción.
El valor del dinero en el tiempo no lo contempla

- **El modelo de Boness (1964)**

Boness si contempla el valor del dinero en el tiempo, lo cual corrige el modelo de Sprenkle, sin embargo sus suposiciones son tales que diferentes niveles de riesgo para las acciones y la opción son ignorados.

Sus suposiciones son la siguientes

(a) El mercado es competitivo en el sentido que el precio de equilibrio de todas las acciones de la misma clase de riesgo implican el mismo rendimiento esperado sobre la inversión

(b) La distribución de probabilidad de los cambios de porcentaje esperado en el precio de cualquier acción es lognormal

(c) La varianza del rendimiento es directamente proporcional al tiempo

(d) Los inversionistas son indiferentes al riesgo

- **El modelo Samuelson (1965)**

Samuelson asume que los precios de las acciones siguen un movimiento geométrico browniano con deriva positiva, esto es permite tasa de interes positivas y primas de riesgo con la suposición adicional que la distibución del precio terminal del valor es lognormal. Samuelson examina la siguiente situación el valor de una opción si el rendimiento sobre la opción es mayor que el rendimiento de la acción, $k > p$[1], el sugiere dos situaciones

(a) Si la acción paga un dividendo a tasa δ, se debería esperar al menos que $p + \delta = k$ y

(b) Si el mercado percibe que la opción es más riesgosa que la acción, entonces el inversionista requiere que $k > p$

- **El modelo de BlacK-Scholes**

Black-Scholes demostraron que es posible crear una cobertura sin riesgos, formando un portafolio que contenga una acción y una opción call europea. La fuente de los cambios en el valor del portafolio deberian ser los precios, donde los activos son fijos a un tiempo dado y el precio del call es una función del precio de la acción y el tiempo de ejercicio, entonces los cambios en el precio del call pueden ser expresados como una función de los cambios en el precio del valor y cambios en el tiempo de ejercicio de la opción. Black-Scholes observaron que en cualquier tiempo, el portafolio se puede hacer en una cobertura sin riesgo eligiendo una apropiada combinación de valores y call. La siguientes suposiciones fueron empleadas para derivar el modelo de Black-Scholes

(a) No hay penalizaciones por ventas en corto

(b) Los costos de transación e impuestos son cero

(c) El mercado opera continuamente

(d) La tasa de interes libre de riesgo es constante

(e) El precio de la acción es continuo

(f) El valor no paga dividendos

(g) La opción solo puede ser ejercida en la fecha terminal del contrato

Ellos derivaron la solución para el problema del precio de la opción como una función de solamente cinco variables

(a) El precio de la acción

[1] k y p son el rendimiento de la opción y el valor respectivamente

(b) La varianza del precio de la acción

(c) El precio de ejercicio de la opción

(d) El tiempo de ejercicio de la opción

(e) La tasa de interes libre de riesgo

5.1. Solución explícita de la ecuación de Black-Scholes

Definición 5.1. Un **portafolio** es un proceso estocástico

$$\{h_t = (x_t, y_t); t = 1, \ldots, T\}$$

tal que h_t es una función de $S_0, S_1, \ldots, S_{t-1}$. El **proceso valor** correspondiente al portafolio h está definido por

$$V_t^h = x_t B_t + y_t S_t$$

donde:

B_t = activo sin riesgo
S_t = activo con riesgo

Definición 5.2. Un portafolio es **autofinanciable** si

$$dV_t^h = x_t dS_t + y_t dB_t$$

Definición 5.3. Un **proceso de consumo** $\{c(t); t \geq 0\}$ es algún proceso adaptado a $\mathcal{F}_t^S$

Definición 5.4. Un **portafolio-consumo** (h,c) es llamado autofinanciable si el proceso de valor V^h satisface la condición

$$dV^h(t) = \sum_{i=1}^{N} h_i(t) dS_i(t) - c(t)dt$$

es decir

$$dV^h(t) = h(t)dS(t) - c(t)dt$$

Definición 5.5. Para un portafolio h el correspondiente **portafolio relativo** u es dado por

$$u_i(t) = \frac{h_i S_i(t)}{V^h(t)}, \quad i = 1, ..., N$$

donde

$$\sum_{i}^{N} u_i(t) = 1$$

La condición de autofinanciamiento puede ahora ser dada en terminos del portafolio relativo.

Lema 5.6. Un portafolio-consumo (h, c) es autofinanciable si y solo si

$$dV^h(t) = V^h(t)\sum_i^N u_i(t)\frac{dS_i(t)}{S_i(t)} - c(t)dt \tag{5.1}$$

Una **posibilidad de arbitraje** es un portafolio autofinanciable h con las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} V_0^h &= 0, \\ P(V_T^h \geq 0) &= 1, \\ P(V_T^h > 0) &> 0. \end{aligned}$$

Un **reclamo contingente** es una variable estocástica X de la forma

$$X = \Phi(S_T),$$

donde la **función contrato** Φ es alguna función de valor real.

Supongamos que el activo con riesgo tiene volatilidad σ_t y un reclamo X al tiempo T, entonce decimos que una estrategia **replicante** para X es un portafolio autofinanciable h tal que

$$V_T^h = x_T S_{B_T} + y_t S_{S_T} = X$$

y

$$\int_0^T \sigma_t^2 y_t^2 dt < \infty$$

El proceso de precio B_t es un activo **libre de riesgo** si tiene la siguiente dinámica

$$dB_t(t) = r(t)B_t(t)d(t),$$

donde r es algún proceso adaptado

Asumamos que el precio de S_t es dado por

$$dS_t = S_t\alpha(t, S_t(t))dt + S_t\sigma(t, S_t)dW(t),$$

donde W es el movimiento Browniano y α, σ son funciones determinísticas dadas

El caso más importante de nuestro modelo ocurre cuando r, α y σ son constantes, este es el modelo de **Black-Scholes** El modelo de Black-Scholes consiste de dos activos con dinámicas dadas por

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t(t)dt, \\ dS_t &= \alpha S_t dt + \sigma S_t(t)dW(t), \end{aligned}$$

donde r,α y σ son constantes.

Definición 5.7. Una **opción call europea** es un contrato que da el derecho pero no la obligación de comprar un activo de un tipo especificado a un precio especificado K (precio de ejercicio) a un tiempo futuro especificado T (tiempo de ejercicio)

Si $S(t,w)$ denota el precio de mercado del activo al tiempo t, entonces existen dos posibilidades al tiempo T de ejercicio

(a) Si $S(T,w) > K$ luego el dueño de la opción comprará el activo al precio K e inmediatamente venderlo en el mercado al precio $S(T.w)$, y obteniendo la diferencia $S(T,w) - K$

(b) Si $S(T,w) \leq K$, entonces el dueño no ejercerá la opción y la diferencia es cero

Entonces podemos expresar la función de pago $F(w)$ al tiempo T de una opción call europea por

$$F(w) = (S(T,w) - K)^+ = \begin{cases} S(T,w) - K & \text{if} \quad S(T,w) > K \\ 0 & \text{if} \quad S(T,w) \leq K \end{cases}$$

Definición 5.8. Considere un mercado con un proceso de precios $S(t,w)$. Un **reclamo contingente** con fecha de ejercicio T, tambien llamado **T-reclamo** es alguna variable estocástica $X \in \mathcal{F}_T^{S(t,w)}$.
Un reclamo contingente X es llamado un **reclamo simple** si es de la forma

$$X = \Phi(S(T,w))$$

la función Φ es llamada la **función contrato**
El call europeo es un reclamo contingente simple, por lo cual la función contrato es dada por

$$\Phi(S(T,w)) = max[S(T,w) - K, 0] \tag{5.2}$$

Nuestro principal problema es el determinar un precio justo en algún sentido para el reclamo, usaremos la notación siguiente

$$\Pi(t;X)$$

para el proceso de precio de el reclamo X.
En el caso de un reclamo simple, escribiremos

$$\Pi(t;\Phi)$$

De aqui que, el precio razonable $\Pi(T)$ para la opción al tiempo T es dado por

$$\Pi(T) = max[S(T,w) - K, 0]$$

De manera semejante vemos que para un reclamo contingente general X, tenemos la siguiente relación

$$\Pi(T; X) \doteq X,$$

y en el caso de un reclamo simple tenemos

$$\Pi(T; X) = \Phi(S(T,w)) \qquad t < T$$

Supongamos que el proceso de precio $\Pi(t)$, es tal que no hay posibilidades de arbitraje en el mercado consistente de

$$[B(t), S(t), \Pi(t)]$$

Una pregunta sería como identificar una posibilidad de arbitraje, con el siguiente resultado podemos responder a la pregunta.
Supongamos que existe un portafolio autofinanciable h, tal que el proceso valor V^h tiene la siguiente dinámica

$$dV^h(t) = k(t)V^h(t)dt$$

donde k es un proceso adaptado. Entonces se deberá tener que $k(t) = r(t)$ para todo t o deberá de existir una posibilidad de arbitraje
La idea detrás del resultado anterior es que si un portafolio tiene un proceso valor cuya dinámica no contiene deriva del proceso de Wiener, entonces la tasa de rendimiento del portafolio deberá ser igual a la tasa de interes.

Asumamos que:

(a) El instumento derivado en cuestión pude ser comprado y vendido en el mercado

(b) El mercado es libre de arbitraje

(c) El proceso de precio para el derivado es de la forma

$$\Pi(t, X) = F(t, S(t))$$

donde F es una función suave

Asumamos que el mercado consiste de dos activos con dinámica dada por

$$dB(t) = rB(t)dt \tag{5.3}$$

$$dS(t) = S(t)\alpha(t, S(t))dt + S(t)\sigma(t, S(t))dW(t) \tag{5.4}$$

donde r es constante.
Consideremos un reclamo contingente simple de la forma

$$X = \Phi(S(t))$$

tambien supongamos que este reclamo puede ser comercializado en el mercado que su proceso de precio $\Pi(t) = \Pi(t, \Phi)$, tiene la forma

$$\Pi(t) = F(t, S(t)) \tag{5.5}$$

para alguna función suave
Nuestro problema es encontrar cual F podría ser para el mercado $[S(t), B(t), \Pi(t)]$ libre de posibilidades de arbitraje.
Empezemos calculando la dinámica de precio del derivado, y aplicando la regla de Ito a (5.5)y (5.4) obtenemos

$$d\Pi(t) = \alpha_\pi(t)dt + \sigma_\pi(t)\Pi(t)dW(t) \tag{5.6}$$

donde los procesos están definidos por

$$\alpha_\pi = \frac{F_t + \alpha S F_s + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss}}{F} \tag{5.7}$$

y

$$\sigma_\pi(t) = \frac{F_s}{F} \tag{5.8}$$

donde los subíndices indican las derivadas parciales de F respecto a S.
Ahora formemos un portafolio con dos activos: acción y el activo subyacente Denotemos el portafolio por

$$(u_s, u_\pi)$$

y usando la ecuación(5.1) obtenemos la suguiente dinámica para el valor V del portafolio.

$$dV = V\{u_s(\alpha dt + \sigma dW) + u_\pi(\sigma_\pi dt + \sigma_\pi dW)\}$$

reordenando tenemos que

$$dV = V(u_s\alpha + u_\pi\pi)dt + V(u_s\sigma + u_\pi\sigma_\pi)dW$$

Tambien tenemos que

$$u_s + u_\pi = 1 \tag{5.9}$$

$$u_s\sigma + u_\pi\sigma_\pi = 0 \tag{5.10}$$

resultando que

$$dV = V(u_s\alpha + u_\pi\alpha_\pi)dt$$

Esto es, hemos obtenido un portafolio sin riesgo, y del requerimiento del mercado libre de riesgo y usando (5.2), tenemos que:

$$u_s\alpha + u_\pi\sigma_\pi = r$$

Vemos que (5.9) y (5.10) tienen la solución siguiente

$$u_s = \frac{\sigma_\pi}{\sigma_\pi - \sigma}$$

$$u_\pi = \frac{-\sigma}{\sigma_\pi - \sigma}$$

y usando (5.8), tenemos que

$$u_s(t) = \frac{S(t)F_s(t, S(t))}{S(t)F_s(t, S(t)) - F(t, S(t))} \tag{5.11}$$

$$u_s(t) = \frac{-F_s(t, S(t))}{S(t)F_s(t, S(t)) - F(t, S(t))} \tag{5.12}$$

Ahora sustituyendo (5.7), (5.11), en (5.12) obtenemos

$$F_t(t, S(t)) + rS(t)F_s(t, S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, S(t))S^2(t)F_{ss}(t, S(t)) - rF(t, S(t)) = 0 \tag{5.13}$$

Por lo tanto hemos obtenido la relación

$$\Pi(t) = \Phi(S(T))$$

5.2. Cambio de variable

Condiciones finales

$F = C(S, t)$, para una opción call europea

$$\left\{\begin{array}{lll} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC & = & 0 \\ C(S,T) & = & (S-K)^+ \\ C(0,t) & = & 0 \\ C(S,t) & & S \quad S \to \infty \end{array}\right. \tag{5.14}$$

Cambio de variable

$$\begin{cases} S & = & Ke^{x} \\ t & = & T - \dfrac{\tau}{(\frac{1}{2}\sigma^2)} \\ C(S,t) & = & Kv(x,t) \\ x & = & ln(\frac{S}{K}) \\ \tau & = & \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \\ v(x,\tau) & = & \frac{1}{K}C(S,t) \end{cases}$$

$$C(S,t) = Kv(ln(\frac{S}{K}, \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)))$$

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} & = & -K\frac{\partial v}{\partial t}(\frac{1}{2}\sigma^2) \\ \frac{\partial C}{\partial S} & = & K\frac{\partial v}{\partial x}(\frac{1}{S}) \\ \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} & = & \frac{K\partial^2 v}{S^2\partial x^2} - \frac{K\partial v}{S^2\partial x} \end{cases}$$

Por lo tanto (5.14) nos queda como

$$-\frac{K\sigma^2\partial v}{2\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(-\frac{K\partial v}{S^2\partial x} + \frac{K\partial^2 v}{S^{22}}) + rS(\frac{K\partial v}{S\partial x}) - rKv = 0$$

reordenando, tenemos que

$$\frac{K\sigma^2\partial v}{2\partial t} + \frac{K\sigma^2\partial^2 v}{2\partial x^2} + K(r - \frac{\sigma^2}{2})\frac{\partial v}{\partial x} - rKv = 0$$

También tenemos que

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\frac{2r}{\sigma^2} - 1)\frac{\partial v}{\partial x} - (\frac{2r}{\sigma^2})v$$

Introduscamos

$$m := \frac{2r}{\sigma^2}$$

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Condiciones finales

$$\begin{cases} C(S,T) & = & K(v(x,0)) & = & (Ke^{x} - K)^{+} \\ v(x,0) & = & (e^{x}-1)^{x} \end{cases}$$

Condiciones de frontera

$$\begin{cases} C(0,t) & = & Kv(-\infty,\tau) & = & 0 \\ v(x,\tau) & \rightarrow & 0 \quad si \quad x & \rightarrow & -\infty \\ C(S,t) & = & Kv(x,\tau) & \sim & Ke^{x} \\ v(x,\tau) & \sim & e^{x} \quad si \quad x & \rightarrow & +\infty \end{cases}$$

Cambios de variable siguientes

$$\begin{aligned} v(x,\tau) &= e^{(\alpha x+\beta\tau)}u(x,\tau) \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} &= e^{(\alpha x+\beta\tau)}(\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau}) \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= e^{(\alpha x+\tau)}(\alpha x + \frac{\partial u}{\partial x}) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= e^{(\alpha x+\beta\tau)}(\alpha^2 u + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}) \end{aligned}$$

Si omitimos la parte exponencial obtenemos

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha^2 U + (\text{m-1})\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}\text{-mu}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2\alpha + (m-1))\frac{\partial u}{\partial x} + (\alpha^2 + (m-1)\alpha - \beta - m)u = 0$$

$$2\alpha + (m-1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2}(m-1)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha^2 + (m-1)\alpha - m \\ &= \frac{1}{4}(m-1)^2 - \frac{1}{2}(m-1)^2 - m \\ &= \frac{1}{4}(m^2 - 2m + 1 - 2m^2 + 4m - 2 - 4m) \\ &= \frac{1}{4}(-m^2 + 2m - 1) \\ &= -\frac{1}{4}(m+1)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \beta = -\frac{1}{4}(m+1)^2$$

5.3. Ecuación de difusión

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$\begin{cases} v(x,0) & = & e^{\alpha x}u(x,0) & & = & (e^{x}-1)^{+} \\ u(x,0) & = & (e^{(1-\alpha)x}-e^{-\alpha x})^{+} & & & \\ e^{(\alpha x+\beta r)}u(x,\tau) & \to & 0 \quad \text{si} \quad x & & \to & -\infty \\ u(x,\tau) & = & o(e^{-\alpha x}) \quad \text{si} \quad x & & \to & -\infty \\ e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau) & & e^{x} \quad \text{si} \quad x & & \to & \infty \\ u(x,\tau) & = & O(e^{(1-\alpha)x)}) \quad \text{si} \quad x & & \to & \infty \end{cases}$$

Obtenemos el siguiente problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \tau} & = & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & & t \in [0,\infty) \quad x \in (-\infty,\infty) \\ u(x,0) & = & (e^{(1-\alpha)x}-e^{-\alpha x})^{+} & & \\ u(x,\tau) & = & o(e^{-\alpha x}) \quad \text{si} \quad x & \to & -\infty \\ u(x,\tau) & = & O(e^{(1-\alpha)}) \quad \text{si} \quad x & \to & \infty \end{cases}$$

Donde, obtenemos que

$$\begin{cases} \alpha & = & -\frac{1}{2}(m-1) \\ \beta & = & -\frac{1}{4}(m+1)^2 \\ m & = & \dfrac{2r}{u^2} \end{cases}$$

5.4. Transformación de Fourier

La transformada de fourier se define como sigue

$$\mathcal{F}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iyx}dx, \forall y \in \mathbb{R}$$

$$f(x) \in L^2(\mathrm{R}) \iff \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

$$f(x) \in L(\mathbb{R}) \iff \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

$$f(x) \in S(\mathbb{R}) \iff \forall n, k \in \mathbb{Z}^{+} |f^{(n)}(x)| < \mathbb{C}_{n.k}|x|^{-k}, x >> 1$$

$$(\mathcal{F}^{-1}\Phi(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\phi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y)e^{-ixy}dy (5.15)$$

y

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = 1$$

Esto es

$$(\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\phi)(x) = \phi(x) \tag{5.16}$$
$$(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f)(y) = f(y)$$

Tenemos que (5.16) es cierta para $L^2(\mathbf{R})$ o $S(\mathbf{R})$

Sea $f \in S(\mathbf{R})$ entonces

$$(\mathcal{F}f^{(n)}(y)) = (-iy)^n(\mathcal{F}f)(y)$$

5.5. Una solución de la ecuación de difusión

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,\tau) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,\tau) && \text{con} \quad \tau \geq 0 \quad \text{y} \quad x \in \mathbf{R} \\ u(x,0) &= (e^{(1-\alpha)x} - e^{-\alpha x})^+ && := u_0(x) \end{aligned}$$

Condiciones de frontera

Tenemos que

$$(\mathcal{F}u)(y,\tau)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} u(x,\tau e^{ixy})dx = (\mathcal{F}Fu)(y,\tau)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(y,\tau)}{\partial \tau} &= (-iy)^2 u(y,\tau), \quad \tau \geq 0 \\ u(y,0) &= (\mathcal{F}u_0)(y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(y,\tau) &= C(y)e^{(-y^2\tau)} \\ u(y,0) &= C(y) \qquad = (\mathcal{F}u_0)(y) \end{cases}$$

Esto es

$$u(y,\tau) = (\mathcal{F}u_0)(y)e^{(-y^2\tau)}$$

Utilizando la transformada de Fourier inversa

$$\begin{aligned} u(x,\tau) &= (\mathcal{F}^{-1}u)(x,\tau) \\ &= \mathcal{F}^{-1}[(\mathcal{F}u_0)(y)e^{(-y^2\tau)}](x,\tau) \end{aligned}$$

Tenemos el siguiente resultado

$$(\mathcal{F}f \cdot g)(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{\infty} (\mathcal{F}f)(z)(\mathcal{F}g)(y-z)dz$$

$$
\begin{aligned}
u(x,\tau) &= \mathcal{F}^{-1}[(\mathcal{F}u_0)(y)e^{(-y^2\tau)}](x,\tau)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}u_0)(z)(\mathcal{F}^{-1}e^{(-y^2\tau)})(x-z)dz\\
&= (\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}u_0)(z)\\
&= u_0(z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}(e^{-y^2\tau})(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2\tau}e^{-iyx}dy\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau(y^2+i\frac{yx}{\tau}+(\frac{x}{2\tau})^2-(\frac{x}{2\tau})^2)}dy\\
&= \frac{e^{\frac{-x^2}{4\tau}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-\tau(y-\frac{x}{2\tau})^2)}dy
\end{aligned}
$$

Haciendo el siguiente cambio de variable, tenemos que

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$
\begin{aligned}
y' &= \tau(y-\frac{x^2}{2\tau})^2\\
y &= (\frac{y'}{\tau})^{\frac{1}{2}}+\frac{x}{2\tau}\\
dy &= \frac{dy'}{2(\tau y')^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}(e^{(-y^2\tau)}) &= \frac{e^{(\frac{-x^2}{4\tau})}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\tau^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\infty}(y')^{\frac{1}{2}-1}e^{-y'}dy'\\
&= \frac{e^{(\frac{-x^2}{4\tau})}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\tau}}\Gamma(\frac{1}{2})\\
&= \frac{e^{(\frac{-x^2}{4\tau})}}{\sqrt{2\tau}}
\end{aligned}
$$

$$
u(x,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{-\infty}^{\infty}U_0(z)e(-\frac{(x-z)^2}{4\tau})dz
$$

$$
u_0(z)=(e^{(1-\alpha)x}-e^{-\alpha x})^+=\begin{cases} e^{(1-\alpha)x}-e^{-x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
I_\theta &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_{\infty}^{\infty} e^{\theta}e^{-\frac{(x-z)^2}{4\tau}}dz\\
&= \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{4\tau}(z^2-2(x+2\theta\tau)z+(x+z\tau\theta)^2-4\tau^2\theta^2-4\tau x\theta)}dz\\
&= \frac{e^{(\theta x+\theta^2\tau)}}{2\sqrt{\pi\tau}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{4\tau}(z-x-2\theta\tau)^2}dz
\end{aligned}
$$

Haciendo el cambio de variable, tenemos que:

$$
\begin{aligned}
z' &= \frac{z-x-2\theta\tau}{\sqrt{2\tau}}\\
dz &= \sqrt{2\tau}dz'
\end{aligned}
$$

$$I_\theta = \frac{e^{\theta x+\theta^2\tau}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{d}}^{\infty} e^{(-\frac{1}{2}z'^2)} dz'$$

donde

$$\bar{d} = -\frac{x+2\theta\tau}{\sqrt{2\pi}}$$

Ahora introduciendo

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{(-\frac{1}{2}\xi^2)} d\xi$$

donde N(d) es la distribución normal con parámetros a=0 y $\sigma = 1$

$$\begin{aligned} N(-\bar{d}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{d}}^{\infty} e^{(-\frac{1}{2}z'^2)} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\bar{d}} e^{(-\frac{1}{2}\xi^2)} d\xi \end{aligned}$$

Si $\xi = -z$

Entonces tenemos que

$$I_\theta = e^{\theta x+\theta^2\tau} N(\frac{x+2\theta\tau}{\sqrt{2\tau}})$$

$$\begin{aligned} U(x,\tau) &= I_{1-\alpha} - I_\alpha \\ &= e^{((1-\alpha)x+(1-\alpha)^2\tau)} N(d_1) - e^{(-\alpha x+\alpha^2\tau)} N(d_2) \end{aligned}$$

donde

$$d_1 = \frac{(x+2\tau(1-\alpha))}{\sqrt{2\pi}}$$

$$d_2 = \frac{(x-2\tau\alpha)}{\sqrt{2\pi}}$$

con

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2}(m-1) \\ m &= \frac{2r}{\sigma^2} \end{aligned}$$

5.6. Cambio inverso de variable

$$v(x,\tau) = e^{(\alpha x+\beta\tau)} u(x,\tau)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta &= -\frac{1}{4}(m+1)^2 \\ &= -\frac{1}{4}(m-1)^2 - m \\ &= -\frac{1}{4}(m-1)^2 - (m-1) - 1 \\ &= \alpha^2 + 2\alpha - 1 \\ &= -(1-\alpha)^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v(x,\tau) &= e^{x}N(d_1) - e^{((-(1-\alpha)^2+\alpha^2)\tau)}N(d_2) \\
&= e^{x}N(d_1) - e^{(-m\tau)}N(d_2)
\end{aligned}
$$

$$
C(x,t) = Kv(ln(\frac{S}{K}), \frac{1}{2}\sigma^2(T-t))
$$

Fórmula explícita para una opción call europea

$$
C(x,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)
$$

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\
d_2 &= \frac{ln(\frac{S}{K}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}
\end{aligned}
$$

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesina hemos estudiado como las finanzas modernas se pueden auxiliar de los procesos estocásticos, especificamente lo que se ha dado en llamar el cálculo de Ito. Esto se debe a que en las finanzas modernas se tiene un fuerte grado de incertidumbre, por lo cual debemos de recurrir a modelos que nos describan la dinámica de instrumentos financieros que no se pueden describir con modelos tradicionales, por eso el énfasis en los modelos estocásticos, que como quedo demostrado un proceso estocástico es una variable aleatoria indizada sobre un conjunto de parámetros, se ha visto que para varios instrumentos financieros puede ser descrita su dinámica, via ecuaciones diferenciable estocásticas, de manera particular se ha estudiado el movimiento browniano como modelo que más se ajusta para la descripción de la dinámica seguida por algunos instrumentos financieros.

En la medida en que podamos asimilar este tipo de técnicas, estaremos en la posibilidad de modelar una amplia gama de instrumentos financieros , los cuales seguramente reflejaran las operaciones financieras de una manera más realista. Ahora por otro lado podemos concluir que utilizando procesos estocásticos, tambien podremos modelar instrumentos financieros como podrian ser opciones reales, para posteriores estudios tambien podriamos analizar modelos más precisos utilizando los llamados procesos de Lévy, los cuales nos llevan a la teoría no-Gausiana de Black-Scholes-Merton, lo ideal también sería que se presindiera de las equaciones diferenciales estocásticas, ésto se puede hacer vía martingalas o como se menciono utilizando procesos de Lévy, para así evitar el engorroso cálculo con valores en la frontera, aunque lamentablemente esta técnica de evitar las ecuaciones diferenciales estocásticas no está muy desarrollada.

Parte I

Fórmula explícita para una opción put europea

Fórmula explícita para una opción put europea

Definición. Una **opción put europea** es un contrato que da el derecho pero no la oblgación de vender un activo de un tipo especificado a un precio especificado K (precio de ejercicio) a un tiempo futuro especificado T (tiempo de ejercicio)

Por la condición de paridad tenemos que

$$C - P = S - Ke^{-r(T-t)}$$

Condición inicial

$$\begin{aligned}
P(S,T) &= C(S,T) - S + K \\
&= (S-K)_+ - (S-K) \\
&= \begin{cases} (S-K)-(S-K) & S \geq K \\ 0-(S-K) & S < K \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & S \geq K \\ K-S & S < K \end{cases}
\end{aligned}$$

Condiciones de frontera

$$\begin{aligned}
P(0,t) &= C(0,t) - 0 + ke^{r(T-t)} \\
&= Ke^{-r(T-t)}
\end{aligned}$$

$$P(S,t) = C(S,T) - S + Ke^{-r(T-t)}$$

$$P(S,T) = S(N(d_1)-1) - Ke^{-r(T-t)}(N(d_2)-1)$$

Parte II

Opciones barrera

Opciones barrera

Definición. Las opciones barrera son aquellas que su pago depende de si el activo subyacente alcanza o no alguna barrera durante la vida de la opción.

Tipos de opciones barrera

Up-an-in . La opción expira sin valor a menos que la barrera $S = X_0$ sea alcanzada por abajo antes de expirar.

Down-and-in . La opción expira sin valor a menos que la barrera $S = X_0$ sea alcanzada por arriva antes de expirar.

Up-and-out . La opción expira sin valor si la barrera $S = X_0$ es alcanzada por abajo antes de expirar.

Down-and-out . La opción expira sin valor si la barrera $S = X_0$ es alcanzada por arriva antes de expirar.

Opción call europea Down-and-out

$$C_{DAO} = C_{DAO}(S, t)$$

donde

X_0 es la barrera y K es el precio de ejercicio con $X_0 < K$

$$\begin{cases} \frac{\partial C_{DAO}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C_{DAO}}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C_{DAO}}{\partial S} - rC_{DAO} & = \quad 0 \\ C_{DAO}(S,T) & = \quad (S-K)_+ \quad S > X_0 \\ C_{DAO}(X_0, t) & = \quad \quad t < T \\ C_{DAO}(S,t) & \sim \quad \quad S \to \infty \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S &= Ke^x \\ t &= T - \frac{\tau}{(\frac{1}{2}\sigma^2)} \\ C_{DAO} &= Ke^{x+\beta\tau}u(x,\tau) \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{2}(m-1) \\ \beta &= -\frac{1}{4}(m+1)^2 \\ m &= \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \tau} & = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \tau 0 \quad x > x_0 := ln(\frac{X_0}{K}) \\ u(x,0) & = (e^{(1-\alpha)x - e^{-\alpha x}})_+ := g(x) \quad x > x_0 \\ u(x_0,\tau) & = 0 \quad \tau > 0 \\ u(x,\tau) & \sim e^{(1-\alpha)x-\beta\tau} \quad x \to \infty \end{cases}$$

Método de las imágenes

Si $u(x,\tau)$ es una solución de la ecuación de difusion tambnien lo es $u(\pm x + c, \tau)$, donde c es una constante.
Sea $u_0(x,\tau)$ la solución del problema usual , sin barreras.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial \tau} & = \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \quad \tau > 0 \quad x \in \mathbf{R} \\ u_0(x,0) & = g(x) \quad x \in \mathbf{R} \\ u_0(x,0) & \to 0 \quad x \to -\infty \\ u(x_0,\tau) & \sim e^{(1-\alpha)x-\beta\tau} \quad x \to \infty \end{cases}$$

Ahora introduciendo

$$u_1(x,\tau) = u_0(x,\tau) - u_0(2x_0 - x, \tau)$$

con

$$x_0 = ln(\frac{X_0}{K}) \leq 0$$

Entonces tenemos que $u_1(x,\tau)$ satisface las condiciones del problema usual.

Cambio inverso de variable

$$\begin{cases} C_{DAO}(S,t) & = Ke^{\alpha x + \beta\tau} u_1(x,\tau) \\ x & = ln(\frac{S}{K}) \\ \tau & = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \end{cases}$$

con

$$
\begin{aligned}
\alpha &= -\frac{1}{2}(m-1) \\
\beta &= -\frac{1}{4}(m+1)^2 \\
m &= \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}
\end{aligned}
$$

$$C_{DAO}(S,t) = C_1(S,t) - C_2(S,t)$$

Hagamos

$$C_1(S,t) = C(S,t)$$

$$
\begin{aligned}
2x_0 - x &= 2ln(\frac{X_0}{K}) - ln(\frac{S}{K}) \\
&= ln(\frac{X_0}{K}^2 \frac{K}{S}) \\
&= ln(\frac{X_0^2}{KS})
\end{aligned}
$$

Si

$x \iff 2x_0 - x$ entonces $S \iff \frac{X_0^2}{S}$

Entonces obtenemos

$$
\begin{aligned}
C_{DAO}(S,t) &= C(S,t) - e^{2\alpha(x-x_0)} K e^{\alpha(2x_0-x)+\beta\tau} u_0(2x_0 - x, \tau) \\
&= C(S,t) - (\frac{Ke^x}{Ke^{x_0}})^{2\alpha} C(\frac{X_0^2}{S}, t) \\
&= C(S,t) - (\frac{S}{X_0})^{1-m} C(\frac{X_0}{S}, t)
\end{aligned}
$$

con $m = \frac{2r}{\sigma^2}$

Opción call europea Down-and-in

Sean las siguientes regiones

$$
\begin{aligned}
D_1 &= (0, X_0) \times (0, T) \\
D_2 &= (X_0, \infty) \times (0, T)
\end{aligned}
$$

Si $(S,t) \in D_1$ entonces $C_{DAI}(S,t) = C(S,t)$

Si $(S,t) \in D_2$ entonces

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C_{DAI}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \dfrac{\partial^2 C_{DAI}}{\partial S^2} + rS\dfrac{\partial C_{DAI}}{\partial S} - rC_{DAI} & = & 0 \\ C_{DAI}(X_0,t) & = & C(X_0,t) \\ C_{DAI}(S,T) & = & 0 \\ C_{DAI}(S,t) & \to & 0 \quad S \to \infty \end{cases}$$

Introduciendo una opción auxiliar $V(S,t)$ tal que

$$V(S,t) = C(S,t) - C_{DAI}(S,t)$$

si $(S,t) \in D_2$

Entonces $V(S,t)$ satisface la ecuación de Black-Scholes

Condición final

$$\begin{aligned} V(S,T) &= C(S,T) - C_{DAI}(S,T) \\ &= (S-K)_+ - 0 \\ &= (S-K)_+ \end{aligned}$$

Condiciones de frontera

$$\begin{aligned} V(X_0,t) &= C(X_0,t) - C_{DAI}(X_0,t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Condicion en el infinito

$$V(S,t) \sim S - 0 \sim S$$

Entonces tenemo que $V(S,t)$ es una opción Down-and-out
Entonces tenemos que si $X_0 < K$

$$V(S,t) = C(S,t) - (\frac{S}{X_0})^{1-m} C(\frac{X_0^2}{S}, t)$$

finalmente tenemos que

$$C_{DAI} = \begin{cases} C(S,t) & S < X_0 \\ (\frac{S}{X_0})^{1-m} C(\frac{X_0^2}{S}, t) & S \geq X_0 \end{cases}$$

Parte III

Desigualdad de Doob

Desigualdad de Doob

Sea $X(\cdot) = \{X(t), t \geq 0\}$ una martingala en L_2

(a) $\mathbb{P}(Sup_{0\leq t\leq T}|X(t)| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^p}\mathbf{E}|X(t)|^p \quad \forall \quad p \geq 1, T \geq 0, \epsilon > 0$

(b) $\mathbf{E}(_{0\leq t\leq T}|X(t)|^p) \leq (\frac{p}{p-1})^p\mathbf{E}|X(T)|^p \quad \forall \quad p > 1.$
(Desigualdad de Doob)

Parte IV

Lema de Bellman-Gronwall

Lema de Bellman-Gronwall

Sea $G(\cdot)$ y $h(\cdot)$ funciones integrables sobre $[t_0, T]$, con $G(\cdot)$ y tales que para alguna constante $L > 0$

$$g(t) \leq L \int_a^b g(s)ds + h(t) \quad \forall \quad t \in [t_o, T]$$

entonces

$$g(s) \leq h(t) + L \int_a^b e^{L(t-s)} h(s)ds \quad \forall \quad t \in [t_0, T]$$

Bibliografía

[1] A. N. *Shiryaev.* Essential of Stochastic finance. Facts, Model, Theory. World Scientific. Singapore, New Jersey, London, Honk Kong. 1999.

[2] Thomas *Mikosch.* Elementary Stochastic claculus. World Scientific. Singapore New Jersey, London, Hong Kong. 1998.

[3] Tomas Björk. Arbitrage theory in continuos time. Oxford university press. 1998.

[4] Marek *Musiela,* Marek Rutkowski. Martingale methods in financial modelling. Springer-Verlag. 1997

[5] Constantin *Tudor.* Procesos estocásticos. Sociedad matemática Mexicana. 1997

[6] B.*Oksendal.* Stochastic Differential Equations. Springer-Verlag. 1985.

[7] Arnold, *Ludwig.* Stochastic Differential Equations. John Wiley Sons. 1973.

[8] N. *Piskunov.* Cálculo Diferencial e Integral. Mir. 1978.

[9] Paul G. *Hoel,* Sidney C. Port, Charles J. Stone. Introduction to Stochastic Processes. Waveland Press, Inc. 1987.

[10] Martin *Baxter* Finacial Calculus. Cambridge University Press. 1999

[11] Clifford W. *Smith,* Jr., Charles W. Smithson. Financial Engineering. Harper Business. 1990

[12] Mathematics in Finance. 2001.

[13] Serguei *Grudsky.* Introduction to the Modern Financial Mathematics. I Black-Scholes Theory. Notas de curso. Maestria en Matematicas. CINVESTAV. 2002.

[14] J. *Rodriguez de Castro.* Introducción al analisis de productos financieros derivados. Limusa. 1997.

[15] Jaime *Díaz* Tinóco, Fausto Hernadez Trillo. Futuros y Opciones financieras una introducción. Limusa. 1996.

[16] Win *Schoutens*. An introduction to Financial Mathematics.

[17] Onésimo *Hernandez-Lerma*. Procesos estocásticos. Notas de curso. Maestria en matemáticas. CINVESTAV. 2002.