UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

# FUNCIONES UNIVERSALES

# T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

**M A T E M A T I C O**

P R E S E N T A :

**ERIC ALFREDO RINCON GARCIA**



DIRECTORA DE TESIS: DRA. MARIA ISABEL PUGA ESPINOSA



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2003



A

# PAGINACIÓN

# DISCONTINUA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Rincón García Eric Alfredo
FECHA: 18/Nov/2003
FIRMA:

**DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA**
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a Usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Funciones universales"

realizado por Rincón Garcia Eric Alfredo con número de cuenta 09561621-8

quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

| | | |
|---|---|---|
| Director de Tesis Propietario | Dra. María Isabel Puga Espinosa | |
| Propietario | M. en C. Angel Manuel Carrillo Hoyo | |
| Propietario | Dr. Raúl Escobedo Conde | |
| Suplente | M. en C. Felix Capulin Pérez | |
| Suplente | Mat. Miriam Torres Flores | Miriam Torres |

**Consejo Departamental de** Matemáticas

M. en C. José Antonio Góme

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

B

Para Zyanya.

C

Quiero agradecer profundamente a la Dra. María Isabel Puga Espinosa, no solo por sus enseñanzas y consejos, sino también por su gran apoyo y su enorme paciencia.
Al M. en C. Ángel Manuel Carrillo Hoyo, por permitirme acompañarlo durante estos años.
A mis sinodales.
A mis papas, a Lorena y a Luis, por su cariño y confianza.
A Efrén y a Esperanza, por su incomparable presencia.
A Aurora, por su apoyo y cariño.
A Isabel, por su alegre y continua compañía.
A Zyanya, por iluminarme los días.
A Sara, por todo su amor.

# Índice General



E

# Introducción

Este trabajo tiene como objetivo realizar un estudio sobre las funciones universales y semi-universales. Para ello, se han compilado y analizado, de manera sencilla y progresiva, una gran variedad de resultados referentes a estas funciones en distintas ramas de la toplogía en las que han sido estudiadas y aplicadas.

Como consecuencia, tratamos de explicar y/o demostrar la mayoría de los conceptos y resultados que manejamos. Sin embargo, resulta necesario que el lector maneje con facilidad conocimientos básicos de topología.

De esta forma, es necesario enunciar algunas definiciones antes de iniciar con el material que nos interesa.

**Definición 0.1** *Un espacio topológico $X$ es llamado* ***conexo*** *si no es la unión de dos conjuntos abiertos, ajenos, no vacíos.*

**Definición 0.2** *Sea $X$ un espacio topológico. Una familia $\boldsymbol{A}$ de conjuntos abiertos es una* ***cubierta*** *(abierta) del espacio $X$ si cada punto de $X$ pertenece a algún miembro de $\boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{B}$ es una* ***subcubierta*** *de $\boldsymbol{A}$ si $\boldsymbol{B}$ es una cubierta de $X$ y $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$. El espacio $X$ es llamado* ***compacto*** *si toda cubierta de $X$ contiene una subcubierta finita.*

**Definición 0.3** *Sea $X$ un espacio topológico, decimos que $X$ es un* ***continuo*** *si es compacto, conexo y métrico. Un subconjunto $K \subset X$ de un espacio métrico $X$ es llamado* ***subcontinuo*** *de $X$ si $K$ es compacto y conexo con la topología heredada de $X$.*

Es necesario observar que siempre que hablemos de subcontinuos en un espacio topológico cualquiera se supondrá que el espacio total es métrico.

Y por supuesto las definiciones de las funciones que estudiaremos a lo largo de las siguientes páginas.

**Definición 0.4** *Una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos $X$ y $Y$ es llamada* ***universal*** *si para toda función continua $g : X \to Y$ existe un punto $x \in X$ tal que $f(x) = g(x)$.*

**Definición 0.5** *Una función $f : X \to Y$ entre espacios topológicos $X$ y $Y$ es llamada* ***semi-universal*** *si para todo subcontinuo $K$ de $X$ tal que $f(K) = f(X)$ y para cada función continua $g : K \to X$ hay un punto $x \in K$ tal que $f(x) = f(g(x))$.*

Antes de terminar con esta introducción quiero aclarar que para facilitar la redacción y la lectura de este trabajo, se consideró que todas las funciones con las cuales trabajamos son continuas, aunque en algunos casos esto fue remarcado .

# Capítulo 1

# PROPIEDADES BÁSICAS DE LAS FUNCIONES UNIVERSALES Y SEMI-UNIVERSALES

Nuestro primer objetivo será el de familiarizarnos con los conceptos de universalidad y semi-universalidad. Para lo cual, empezaremos analizando y comparando algunas propiedades sencillas que satisfacen las funciones universales y las semi-universales.

Observe que la condición de semi-universalidad de $f$ puede satisfacerse en un caso vacío. Así, tenemos el primer Lema.

**Lema 1.1 (3, pag. 2)** *Sea $f : X \to Y$ una función entre espacios topológicos $X$ y $Y$.*

*Si el espacio $X$ no contiene ningún subcontinuo $K$ tal que $f(K) = f(X)$, entonces $f$ es semi-universal.*

Note que las hipótesis del Lema 1.1 implican que el espacio total X no es un continuo.

Otro resultado sencillo se obtiene cuando X es un espacio Hausdorff, es decir, cuando dados dos puntos cualesquiera $p, q \in X$ podemos encontrar vecindades $V_p$ y $V_q$ abiertas y ajenas de $p$ y $q$ respectivamente.

**Corolario 1.2 (3, Corolario 2, pag 2)** *Toda función suprayectiva*

*$f : X \longrightarrow Y$ definida de un espacio Hausdorff $X$ a un espacio no degenerado $Y$ es semi-universal*

**Demostración.** Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función suprayectiva.

Como X es un espacio Hausdorff, entonces cualesquiera dos puntos $p, q \in X$ tienen vecindades $V_p$ y $V_q$ ajenas y abiertas.

Entonces, para un subconjunto compacto no trivial $K \subset X$ y un punto $p \in K$, definimos $V_x$ y $V_{p,x}$ como vecindades abiertas y ajenas de $x$ y $p$ respectivamente para toda $x \in K - \{p\}$.

De esta forma, $K \subset (\bigcup_{x \in K - \{p\}} V_x) \cup V_p$ con $V_p$ alguna vecindad abierta de $p$.

Pero como $K$ es compacto tenemos que $K \subset (\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}) \cup V_p$.

Sea $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{p,x_i}$.

Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

$(i)$ $V$ y $\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$ son abiertos de X,

$(ii)$ $V \bigcap (\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}) = \emptyset$ y,

$(iii)$ $K \subset (\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}) \cup V$.

Lo cual implica que $K$ no es conexo.

Entonces, los únicos subcontinuos contenidos en $X$ son los formados por un solo punto ( $K = \{p\}$, $p \in X$ ).

Pero como Y es un espacio no degenerado y $f$ es suprayectiva, entonces X no contiene ningún subcontinuo K tal que $f(K) = f(X)$.

Usando el Lema 1.1 se obtiene el resultado. ■

Continuando con la ayuda del Lema 1.1 y variando las propiedades de conexidad y compacidad del codominio de la función podemos obtener los siguientes corolarios.

**Corolario 1.3 (3, Corolario 3, pag. 2)** *Toda función suprayectiva $f : X \longrightarrow Y$ con $Y$ un espacio no compacto es semi-universal.*

**Demostración.** Sean $f : X \rightarrow Y$ una función suprayectiva, y $K \subseteq X$ tales que $f(K) = f(X)$.

Como Y no es compacto, entonces K tampoco puede ser compacto, con lo cual K no es subcontinuo de X, por lo tanto podemos usar de nuevo el Lema 1.1 y obtener el resultado. ■

**Corolario 1.4 (3, Corolario 4, pag. 2)** *Toda función suprayectiva $f : X \to Y$ con $Y$ un espacio disconexo es semi-universal*

**Demostración.** Sean $f : X \to Y$ una función suprayectiva, y K $\subseteq X$ tal que $f(K) = f(X)$.

Como Y es disconexo, entonces K también es disconexo, con lo cual K no puede ser subcontinuo de X y por lo tanto $f$ es semi-universal. ■

Ahora, veamos algunas propiedades de las funciones universales para compararlas con las propiedades de las funciones semi-universales.

**Teorema 1.5 (3, pag. 2)** *Toda función universal es suprayectiva.*

**Demostración.** Sean $f : X \to Y$ una función universal y $y \in Y$ un punto arbitrario en Y.

Definamos $g : X \to Y$ como la función constante $g(x) = y$ para toda $x \in X$.

Como $f$ es universal, existe $x \in X$ tal que $f(x) = g(x) = y$. Con lo cual hemos demostrado que $f$ es suprayectiva. ■

Este Teorema no es cierto para funciones semi-universales. De hecho, es fácil verificar lo siguiente.

**Lema 1.6 (3, pag. 2)** *Toda función constante es semi-universal.*

**Demostración.** Sea $f : X \to Y$ la función constante dada por $f(x) = y$ para alguna $y \in Y$ y para toda $x \in X$.

Sea $K \subset X$ un subcontinuo de X y $g : K \to X$ una función arbitraria.

Entonces para toda $k \in K \subset X$ tenemos $f(g(k)) = y = f(k)$ con lo cual queda probado que $f$ es semi-universal. ■

Aquí haremos un pequeño paréntesis para hacer unos ejercicios que nos serán muy útiles, pero debemos empezar con la siguiente definición.

**Definición 1.7** *Sea $f : X \to X$ una función. Decimos que $p \in X$ es un **punto fijo** de $f$ si $f(p) = p$. Un espacio topológico $X$ tiene la **propiedad del punto fijo** si toda función continua de $X$ en $X$ tiene al menos un punto fijo.*

Un ejemplo sencillo y muy común de un espacio topológico que tiene la propiedad del punto fijo es el siguiente.

**Ejemplo 1.8** *El intervalo [0,1] tiene la propiedad del punto fijo.*

**Demostración.** Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua.
Consideremos los siguientes conjuntos:
$A = \{x \in [0,1] : f(x) \leq x\}$
$B = \{x \in [0,1] : f(x) \geq x\}$.
Por la forma en que están definidos, tenemos que $A$ y $B$ satisfacen las siguientes condiciones:
$(i)$ $A \neq \phi$ , $B \neq \phi$.
$(ii) A \cup B = [0,1]$.
$(iii) A = \{x \in [0,1] : f(x) \leq x\} = \{x \in [0,1] : f(x) - x \leq 0\} =$
$(f(x) - x)^{-1}((-\infty,0])$.
$B = \{x \in [0,1] : f(x) \geq x\} = \{x \in [0,1] : 0 \leq f(x) - x\} =$
$(f(x) - x)^{-1}([0,\infty))$
y como $f(x) - x$ es una función continua, tenemos que $A$ y $B$ son conjuntos cerrados.
Por lo tanto, debido a la conexidad del intervalo [0,1], $A \cap B \neq \phi$.
Entonces existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) \leq x \leq f(x)$, es decir, $f(x) = x$ como se quería. ■

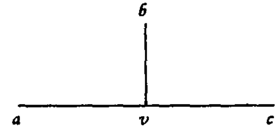
**Observación 1.9** *Un arco es un espacio homeomorfo al intervalo [0,1]. Entonces todo arco tiene la propiedad del punto fijo.*

Otro ejemplo de un espacio topológico con la propiedad del punto fijo es el triodo simple.

**Definición 1.10** *Un* ***triodo simple*** *es un espacio homeomorfo al simbolo $T$. Para cualesquiera dos puntos $p, q \in T$ llamaremos $pq$ al segmento de recta que los une con puntos terminales $p$ y $q$.*

**Ejemplo 1.11** *Todo triodo simple tiene la propiedad del punto fijo.*

**Demostración.** Sea $f : T \to T$ una función continua y llamemos $a, b, c$ a los puntos terminales del triodo y $v$ al vértice.




Si $f(v) = v$ hemos acabado.
En caso contrario, hagamos las siguientes consideraciones.
Como $f(v) \neq v$ podemos suponer que $f(v) \in av - \{v\}$.
Gracias a la continuidad de $f$ tenemos que
$\{x \in av - \{v\} : f(x) \in av\} \neq \phi$.
Consideremos las siguientes funciones:

$$g : av \to T \text{ dada por } g(x) = f(x).$$
$$\text{y } h : T \to av \text{ dada por}$$
$$h(x) = x \text{ si } x \in av$$
$$h(x) = v \text{ si } x \notin av$$

de esta forma, ambas funciones son continuas y por lo tanto $h \circ g : av \to av$ también lo es.

Como los arcos tienen la propiedad del punto fijo, existe $x \in av$ tal que $h(g(x)) = x$.

Veamos que si lo anterior se cumple entonces
$x \in \{x \in av - \{v\} : f(x) \in av\}$.

Para probarlo analicemos los siguietes dos casos

(a) Si $x = v$ entonces
$g(v) = f(v) \neq v$ y por lo tanto $h(g(v)) = h(f(v)) = f(v) \neq v$.

(b) Si $x \notin \{x \in av - \{v\} : f(x) \in av\}$ entonces
$g(x) \notin av$ y por lo tanto $h(g(x)) = v \neq x$.

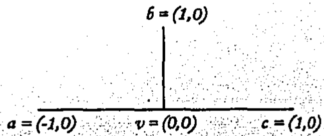
En ambos casos hay una contradicción con lo obtenido, de aquí,
$x = h(g(x)) = h(f(x)) = f(x)$. Como se quería demostrar. ■

Utilizando el Ejemplo anterior podemos mostrar que una función semi-universal y suprayectiva no necesariamente es universal, para esto veamos el siguiente ejemplo.

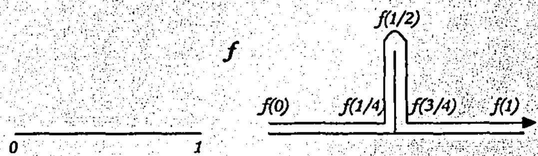
**Ejemplo 1.12 (3, Ejemplo 7, pag. 2)** *Hay una función suprayectiva del intervalo* $[0, 1]$ *a un triodo simple la cual es semi-universal pero no es universal.*

**Demostración.** La función $f$ que se necesita la definimos de la siguiente manera.

En coordenadas rectangulares $(x, y)$ en el plano sea
$v = (0{,}0)$, $a = (\text{-}1{,}0)$, $b = (0{,}1)$ y $c = (1{,}0)$,
y definamos el triodo simple como
$\mathrm{T} = va \cup \mathrm{vb} \cup \mathrm{vc}$.




Sea $\mathrm{A} = [0{,}1]$ el intervalo unitario cerrado. Entonces la función $f : A \to T$ se define de la siguiente forma:
$f(0) = a$, $f(\frac{1}{4}) = v$, $f(\frac{1}{2}) = b$, $f(\frac{3}{4}) = v$, $f(1) = c$,
con las funciones parciales $f|_{[\frac{m}{4},\frac{m+1}{4}]}$ lineales para cada $\mathrm{m} \in \{0{,}1{,}2{,}3\}$.




El único subcontinuo K de A tal que $f(K) = f(A)$ es A mismo.
Sea $g : A \to A$ una función.
Como A tiene la propiedad del punto fijo, existe un punto $x \in A$ tal que $g(x) = x$, entonces $f(g(x)) = f(x)$, con lo cual queda demostrado que $f$ es semi-universal.
Por otro lado, llamemos $n$ al punto medio del segmento $vc$ y $n'$ al punto medio del segmento $av$.
Sea $h : A \to T$ definida como sigue
$h(0) = c$, $h(\frac{1}{4}) = n$, $h(\frac{1}{2}) = v$, $h(\frac{3}{4}) = n'$, $h(1) = a$,
con las funciones parciales $h|_{[\frac{m}{4},\frac{m+1}{4}]}$ lineales para cada $\mathrm{m} \in \{0, 1, 2, 3\}$.
Claramente $f(x) \neq h(x)$ para toda $x \in [0{,}1]$. Por lo tanto $f$ no es universal.

■

Este ejemplo justifica las siguientes afirmaciones.

Una función semi-universal no necesariamente es suprayectiva.

Una función semi-universal no necesariamente es universal.

Y el siguiente Ejemplo muestra que una función universal no necesariamente es semi-universal.

**Definición 1.13** *Un* ***árbol****, o* ***gráfica acíclica****, es una gráfica que no contiene curvas cerradas.*

**Ejemplo 1.14 ((Illanes) 3, Ejemplo 11, pag. 3)** *Existen dos árboles $X$ y $Y$ y una función universal $f : X \longrightarrow Y$ la cual no es semi-universal.*

**Demostración.** Sea Y = T un triodo simple como el definido en el ejemplo 1.12.

Sea $s$ la reflección del plano $\mathbb{R}^2$con respecto a la línea $x$ = -1, es decir, $s(x, y) = (-x - 2, y)$.

Para cada punto $p \in \mathbb{R}^2$ sea $p' = s(p)$, y de manera similar sea $T' = s(T)$.

Note que $T \cap T' = \{a\}$.

Sea $X = T \cup T'$.


Sea $f : X \longrightarrow Y = T$ una función definida como la identidad en T y como $s$ en T'.

Para ver que $f$ es universal observe que la restricción de cualquier función $g : X \longrightarrow T \subset X$ al conjunto T, $g\ |_T$: $T \longrightarrow T$, deja fijo a un punto $t \in$ T, debido a que T tiene la propiedad del punto fijo, en general podemos decir que hay un punto fijo $p_0 \in$ X bajo $g$.

Entonces $p_0 = g(p_0) \in T$, y por la forma en que fue definida $f$ tenemos que $f(p_0) = p_0$, de aquí $f(p_0) = g(p_0)$, como se quería.

Para demostrar que $f$ no es semi-universal observe que para el arco

K = $b'v'$ ∪ va' ∪ av ∪ vc

tenemos que $f(K) = f(X) = T$.

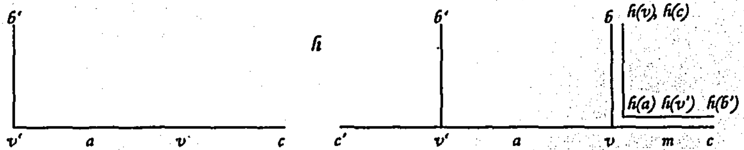
Sea $m$ el punto medio del segmento $vc$.

Consideremos la función

$h : K \longrightarrow X$ tal que

$h(b') = c$, $h(v') = m$, $h(a) = v$, $h(v) = b$, $h(c)$=$b$, y $h$ es lineal en cada segmento que una a los puntos extremos.

De aquí se sigue que $h|_{vc}: vc \to \{b\}$ es una función constante.




Entonces se puede verificar que para todo punto $p \in$ K tenemos $f(p) \neq f(h(p))$.

Entonces $f$ no es semi-universal, como se quería demostrar. ■

Otros resultado sencillo y útil se obtiene cuando una fución universal es compuesta con un homeomorfismo.

**Lema 1.15 (7, 12.53, pag. 264)** *Sean $f : X \to Y$ y $h : Y \to Z$ una función y un homeomorfismo respectivamente, entonces $h \circ f$ es una función universal si y sólo si $f$ es universal.*

**Demostración.** Supongamos que $h \circ f : X \to Z$ es una función universal, y sea $g : X \to Y$ una función.

Entonces existe un punto $p \in X$ tal que $h(g(p)) = h(f(p))$ pero como $h$ es inyectiva, entoces $g(p) = f(p)$ con lo cual tenemos que $f$ es universal.

Ahora supongamos que $f : X \to Y$ es universal y sea $g : X \to Z$ una función.

Consideremos la función $h^{-1} \circ g : X \to Y$. Como $f$ es universal, existe un punto $p \in X$ tal que $f(p) = (h^{-1} \circ g)(p)$, es decir, $h(f(p)) = g(p)$, con lo cual tenemos el resultado. ■

Este Lema es aplicable también a funciones semi-universales.

**Lema 1.16** *Sean $f : X \to Y$ y $h : Y \to Z$ una función y un homeomorfismo respectivamente, entonces $h \circ f$ es una función semi-universal si y sólo si $f$ es semi-universal.*

**Demostración.** Sea $h \circ f : X \to Z$ una función semi-universal.

Sean $K \subset X$ un suncontinuo de $X$ tal que $f(X) = f(K)$ y $g : K \to X$ una función.

Entonces tenemos que
$h(f(X)) = h(f(K))$

y por lo tanto, como $h \circ f$ es semi-universal, existe un punto $x \in K$ tal que
$h(f(x)) = h(f(g(x)))$
lo cual implica, debido a la inyectividad de $h$, que
$f(x) = f(g(x))$, es decir, $f$ es semi-universal.

Ahora supongamos que $f$ es semi-universal.

Sean $K \subset X$ un subcontinuo de $X$ tal que $h(f(X)) = h(f(K))$ y
$g : K \to X$ una función.

Como $h$ es un homeomorfismo, tenemos que
$h(f(X)) = h(f(K))$ implica que $f(X) = f(K)$,
pero $f$ es semi-universal, entonces existe un punto $x \in K$ tal que
$f(x) = f(g(x))$, es decir, $h(f(x)) = h(f(g(x)))$. Con lo cual obtenemos el resultado deseado. ■

# Capítulo 2

# PROPIEDAD DEL PUNTO FIJO.

Algunas preguntas referentes a las funciones universales y semi-universales están relacionadas con la propiedad del punto fijo, así que veamos estos resultados.

**Lema 2.1 (3, pag. 4)** *Si una función $f : X \to Y$ es universal, entonces $Y$ tiene la propiedad del punto fijo.*

**Demostración.** Sea $g : Y \to Y$ una función. Consideremos la función $g \circ f : X \to Y$.

Como $f$ es universal, existe un punto $x \in$ X tal que
$f(x) = g(f(x))$, pero $y = f(x) \in Y$
por lo tanto $y = g(y)$. Con lo cual tenemos el resultado. ■

Para funciones semi-universales la implicación de arriba no es cierta, incluso si X y Y son continuos y $f$ es suprayectiva.

Antes de ver un ejemplo que ilustre esto, recordemos que una función $f : X \to Y$ es llamada irreducible si es suprayectiva y ningún subconjunto propio y cerrado de X tiene como imagen bajo $f$ a todo Y. También el siguiente Teorema nos resultará útil.

**Teorema 2.2 (3, Teorema 13, pag. 4)** *Si un continuo $X$ tiene la propiedad del punto fijo y una función $f : X \to Y$ es irreducible, entonces $f$ es semi-universal.*

**Demostración.** Como $f$ es irreducible, el único subcontinuo K de X que satisface $f(K) = f(X)$ es el propio X.

Como X tiene la propiedad del punto fijo, para cada $g : K = X \to X$ hay un punto $x \in$ X tal que $x = g(x)$, con lo cual $f(x) = f(g(x))$, como se necesitaba. ■

Ahora, veamos un ejemplo que valide la afirmación de que el Lema 2.1 no es aplicable a funciones semi-universales. Para ello, utilizaremos el círculo unitario $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ en el plano complejo.

**Ejemplo 2.3 (3, pag. 4)** *Sea $f : [0, 2\pi] \to S^1$ dada por $f(x) = e^{ix}$. Entonces $f$ es irreducible, y de acuerdo con el Teorema 2.2, $f$ es semi-universal. Sin embargo $S^1$ no tiene la propiedad del punto fijo.*

El siguiente ejemplo ilustra la necesidad de pedir la irreducibilidad de $f$ en el Teorema 2.2.

**Ejemplo 2.4 (3, Ejemplo 15, pag. 4)** *La función $f : [0, 3\pi] \to S^1$ definida por $f(x) = e^{ix}$ no es semi-universal.*

**Demostración.** Para $X = [0, 3\pi]$ y $K = [0, 2\pi]$ tenemos que $f(X) = f(K)$.

Definamos $g :$ K $\to$X como $g(x) = x+\pi$.

Entonces tenemos

$f(g(x)) = f(x + \pi) = e^{i(x+\pi)} = -e^{ix} = -f(x) \neq f(x)$ para toda $x \in$ K. ■

Asumir que X tiene la propiedad del punto fijo también es indespensable en el Teorema 2.2. Por ejemplo sea $S^1$ el círculo unitario. La función identidad $f : S^1 \to S^1$ es irreducible, su dominio $S^1$ no tiene la propiedad del punto fijo, y $f$ no es semi-universal ya que para la función $g : S^1 \to S^1$ definida como $g(z) = -z$ para $z \in S^1$ no hay ningún punto $z$ en $S^1$ tal que $f(z) = f(g(z))$, es decir, $z$ = -$z$.

Como un resultado relacionado con del Teorema 2.2 tenemos lo siguiente.

**Proposición 2.5 (3, Proposición 17, pag. 5)** *Si un espacio topológico X tiene la propiedad del punto fijo y una función $f : X \to Y$ es inyectiva, entonces $f$ es semi-universal.*

**Demostración.** Si el espacio X no contiene ningún subcontinuo K de X tal que $f(K) = f(X)$, entonces $f$ es semi-universal.

Por otro lado como $f$ es inyectiva, tenemos que el único subcontinuo K para el cual $f(K) = f(X)$ debe de ser el propio X, de aquí se sigue que X es un continuo, y que $f$ siendo inyectiva, es irreducible. Entonces podemos aplicar el Teorema 2.2, y obtener el resultado. ∎

Y por último tenemos la siguiente Proposición que relaciona los tres conceptos principales de este capítulo aunque restringidos a la función identidad.

**Proposición 2.6 (3, Proposición 18, pag. 5)** *Considere las siguientes propiedades en un espacio topológico* $X$ *:*
*(2.6.1) La identidad* $i : X \to X$ *es universal;*
*(2.6.2) La identidad* $i : X \to X$ *es semi-universal;*
*(2.6.3)* $X$ *tiene la propiedad del punto fijo.*
*Entonces las condiciones (2.6.1) y (2.6.3) son equivalentes, y cada una de ellas implica (2.6.2). Si* $X$ *es un continuo, entonces también (2.6.2) implica (2.6.3), y las tres condiciones son equivalentes.*

**Demostración.** Primero demostraremos la equivalencia entre (2.6.1) y (2.6.3).

Supongamos que $i$ es universal y sea $g : X \to X$ una función.

Como $i$ es universal, existe un punto $x \in$ X tal que $i(x) = g(x)$, es decir $x = g(x)$.

Con lo cual probamos que X tiene la propiedad del punto fijo.

Ahora supongamos que X tiene la propiedad del punto fijo y sea $g : X \to X$ una función dada.

Como X tiene la propiedad del punto fijo, existe un punto $x \in$ X tal que $g(x) = x$, es decir, $g(x) = i(x)$.

Con lo cual probamos que $i$ es universal.

Para demostrar que (2.6.3) implica (2.6.2) basta con utilizar el hecho de que $i$ es inyectiva y la Proposición 2.5.

Por último, demostremos que (2.6.2) implica (2.6.3) en el caso de que $X$ sea un continuo.

Si X es continuo, entonces el único subcontinuo K de X que satisface la igualdad $i(K) = i(X)$ es X mismo.

De (2.6.2) se sigue que para toda función $g : X \to X$ hay un punto $x \in$ X tal que $i(x) = i(g(x))$.

Con lo cual queda demostrado que se satisface (2.6.3). ∎

# Capítulo 3

# CONVERGENCIA UNIFORME DE FUNCIONES.

Otros resultados aplicables tanto a funciones universales como a funciones semi-universales se obtienen de la convergencia uniforme de funciones, pero para esto necesitaremos de la siguiente definición.

**Definición 3.1** *Sean $\{f_n : X \longrightarrow (Y,d)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de un espacio topológico $X$ en un espacio métrico $(Y,d)$, y $f : X \longrightarrow (Y,d)$ una función dada. Decimos que la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a la función $f$ si para toda $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $d(f(x), f_n(x)) < \epsilon$ para toda $x \in X$.*

Ahora veamos los siguientes resultados.

**Proposición 3.2** *Sea $\{f_n : X \longrightarrow Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones universales, de un espacio compacto $X$ en un espacio métrico $(Y,d)$. Si $\{f_n : X \longrightarrow Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a la función $f : X \longrightarrow Y$, entonces $f$ es universal.*

**Demostración.** Sea $g : X \longrightarrow Y$ una función.

Como $f_n$ es universal para toda $n \in \mathbb{N}$, hay una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos $x_n \in X$ tales que $f_n(x_n) = g(x_n)$.

La compacidad de X implica la existencia de una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge a un punto $x \in X$ .

Entonces, dada $\epsilon > 0$ podemos encontrar un número $M \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq M$ las siguientes desigualdades son válidas:

1) $d(f(x), f(x_{n_k})) < \frac{\epsilon}{3}$, gracias a que $f$ es continua y a que $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge a $x$.

2) $d(f(x_{n_k}), f_{n_k}(x_{n_k})) < \frac{\epsilon}{3}$, debido a que $f_{n_k}$ converge uniformemente a $f$.

3) $d(g(x_{n_k}), g(x)) < \frac{\epsilon}{3}$, por la convergencia de $x_{n_k}$ a $x$ y la continuidad de la $g$.

Entonces

$d(f(x), g(x))) < d(f(x), f(x_{n_k})) + d(f(x_{n_k}), f_{n_k}(x_{n_k}))$
$+d(g(x_{n_k})), g(x)) < \epsilon.$

Con lo cual tenemos que $f(x) = g(x)$, como se quería. ■

Este resultado sigue siendo válido si en lugar de funciones universales consideramos funciones semi-unniversales.

**Teorema 3.3** *Sea $\{f_n : X \to Y\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones semi-universales, del espacio $X$ en un espacio métrico $(Y, d)$, la cual converge uniformemente a la función $f : X \to Y$ , entonces $f$ es semi-universal.*

**Demostración.** Sea K un subcontinuo de X que satisface$f(K) = f(X)$, y sea $g : K \to X$ una función.

Como $f_n$ es semi-universal para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces existe una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de puntos $x_n \in$ K tales que $f_n(x_n) = f_n(g(x_n))$. Entonces la compacidad de K implica que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ que converge a un punto $x \in$ K.

Entonces, dada $\epsilon > 0$ podemos encontrar un número $M \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq M$ las siguientes desigualdades son válidas:

1) $d(f(x), f(x_{n_k})) < \frac{\epsilon}{4}$, gracias a que $f$ es continua y a que $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ converge a $x$.

2) $d(f(x_{n_k}), f_{n_k}(x_{n_k})) < \frac{\epsilon}{4}$, debido a que $f_{n_k}$ converge uniformemente a $f$.

3) $d(f_{n_k}(g(x_{n_k})), f(g(x_{n_k}))) < \frac{\epsilon}{4}$, por la convergencia uniforme de $f_{n_k}$.

4) $d(f(g(x_{n_k}), f(g(x))) < \frac{\epsilon}{4}$, por la continuidad de $f$ y $g$.

Entonces

$d(f(x), f(g(x))) <$
$d(f(x), f(x_{n_k})) + d(f(x_{n_k}), f_{n_k}(x_{n_k}))$
$+d(f_{n_k}(g(x_{n_k})), f(g(x_{n_k}))) + d(f(g(x_{n_k})), f(g(x))) < \epsilon.$

Con lo cual hemos demostrado que $f(x) = f(g(x))$, como se quería. ■

# Capítulo 4

# N-CELDAS.

En esta sección daremos una caracterización de las funciones universales cuyo codominio es una $n$-celda, para lo cual necesitaremos recordar las siguientes definiciones.

Denotemos por $\mathbb{R}^n$ el $n$-espacio Euclideano.

Para cada punto $x = (x_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, definimos

$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Una **n-celda** es un espacio homeomorfo a la bola cerrada $n$-dimensional $B^n$ en $\mathbb{R}^n$, donde

$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$, $n = 1,2,3,\ldots$.

Claramente, una n-celda es un continuo ya que $B^n$ también lo es.

Y por último, llamaremos **n-esfera** a todo espacio homeomorfo a $S^n$ en $\mathbb{R}^{n+1}$, donde

$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ , $n = 1,2,3,\ldots$

Nuevamente, toda $n$-esfera es un continuo.

**Proposición 4.1 (7, Proposición 12.24, pag. 251)** *Sea $Z$ un espacio topológico, y sea $f : Z \to B^n$ una función. Entonces, $f$ es universal si y sólo si*

$f|_{f^{-1}(S^{n-1})}: f^{-1}(S^{n-1}) \to S^{n-1}$

*no puede ser extendida a una función continua de $Z$ a $S^{n-1}$.*

**Demostración.** Si $f|_{f^{-1}(S^{n-1})}: f^{-1}(S^{n-1}) \to S^{n-1}$ puede ser extendida a una función continua F : Z $\to S^{n-1}$, tenemos que

$f(z) \neq$ -F$(z)$.

Ya que si $z \in f^{-1}(S^{n-1})$ entonces
$f(z) = F(z)$,
y si $z \in Z - f^{-1}(S^{n-1})$ entonces
$f(z) \in B^n - S^{n-1}$ mientras que $F(z) \in S^{n-1}$.

Como -F es una función continua de Z en $B^n$, concluimos que $f$ no es universal.

Ahora supongamos que $f$ no es universal.

Entonces, existe una función continua $g$ : Z $\to B^n$ tal que $f$(z) $\neq g(z)$.

Entonces, para cada $z \in Z$, existe un único segmento dirigido de recta que empieza en $g(z)$, que pasa a través de $f(z)$, y termina en un (único) punto $\rho$(z) en $S^{n-1}$.

De aquí, es fácil ver, que la función $\rho : Z \to S^{n-1}$ definida de esta forma es una extensión de $f|_{f^{-1}(S^{n-1})}$ .

Como $f$ y $g$ son funciones continuas, tenemos que $\rho$ también lo es. Con lo cual completamos la prueba. ■

Ahora veamos una formulación equivalente a la Proposición 4.1 pero expresada en términos de $n-$ *celdas*.

**Corolario 4.2 (7, Corolario 12.25, pag. 252)** *El resultado de la Proposición 4.1 sigue siendo válido si remplazamos $B^n$ por una n-celda K y si $S^{n-1}$ es remplazado por la frontera M de K ( i.e., M es la imagen de $S^{n-1}$ bajo cualquier homeomorfismo de $B^n$ en K).*

**Demostración.** Sean Z un espacio topológico, K una $n-$celda y M la frontera de K.

Sean $f : Z \to K$ una función y $h : K \to B^n$ un homeomorfismo.

Supongamos que $f$ es universal.

Por el Lema 1.15 $h \circ f$ también es universal y por la Proposición 4.1,
$h \circ f\ |_{(h \circ f)^{-1}(S^{n-1})}$: $(h \circ f)^{-1}(S^{n-1}) \to S^{n-1}$
no puede ser extendida de manera continua a todo Z, por lo tanto
$f\ |_{f^{-1}(M)}$: $f^{-1}(M) \to M$
tampoco puede ser extendida de manera continua a todo Z, como se quería.

Ahora supongamos que $f\ |_{f^{-1}(M)}$: $f^{-1}(M) \to M$ no puede ser extendida de manera continua a todo Z.

Esto implica que
$h \circ f\ |_{(h \circ f)^{-1}(S^{n-1})}$
tampoco puede ser extendida de manera continua a todo Z.

Entonces, por la Proposición 4.1, $h \circ f$ es universal, y por el Lema 1.15, $f$ es universal. Con esto concluye la prueba. ∎

En este punto uno podría preguntarse si la Proposición 4.1 sigue siendo válida si trabajamos con funciones semi-universales en lugar de funciones universales, pero, como se muestra en el siguiente Ejemplo, al ménos una de las implicaciones no puede ser aplicada. Sin embargo, la validez, o no, de la otra implicación quedará sin respuesta.

**Ejemplo 4.3** *Existe una función $f$ definida del intervalo [-1,1] en $B^2$, tal que $f$ es semi-universal y $f|_{f^{-1}(S^1)}$: $f^{-1}(S^1) \to S^1$ puede ser extendida a una función continua del intervalo [-1,1] en $S^1$.*

**Demostración.** Sea $f : X = [-1,1] \to B^2$ una función definida como $f(x) = (x, 0)$.

De esta forma, el único subcontinuo de X cuya imagen bajo $f$ es X, es X mismo.

Sea $g : X \longrightarrow X$ una función.

Como X tiene la propiedad del punto fijo, existe un punto $p \in X$ tal que $g(p) = p$.

Aplicando $f$ tenemos que $f(g(p)) = f(p)$.

Con lo cual hemos demostrado que $f$ es semi-universal.

Ahora consideremos $f^{-1}(S^1) = \{-1, 1\}$, y a la función
$h : X = [-1,1] \to S^1$ definida como
$h(x) = e^{\frac{\pi}{2}i(1-x)}$.

Claramente $h$ es una extensión continua de $f|_{f^{-1}(S^{n-1})}$. Con lo cual se concluye la prueba. ∎

# Capítulo 5

# ARCOS, LINEALMENTE ORDENADOS,TIPO-ARCO y MARGEN

Valiéndonos de resultados obtenidos en el Capítulo 4 podemos ver lo que ocurre cuando algunos de los espacios, en los que están definidas nuestra funciones, son arcos.

**Definición 5.1** *Sea $X$ un espacio topológico. Diremos que $X$ es un **arco** en caso de que sea homeomorfo al intervalo cerrado [0,1].*

Veamos el siguiente resultado que es un caso especial de la Proposición 4.1.

**Corolario 5.2 (7, Corolario 12.26, pag. 252)** *Toda función supravectiva de un espacio topológico conexo a un arco es universal.*

**Demostración.** Si $f : Z \to A$ es una función suprayectiva de un espacio conexo Z a un arco A, y $p$ y $q$ son los puntos finales del arco A, entonces, por la conexidad de Z y la suprayectividad de $f$,
$f|_{f^{-1}(\{p,q\})}: f^{-1}(\{p,q\}) \to \{p,q\}$
no puede ser extendida a una función continua de Z a $\{p,q\}$.

De aquí, utilizando la Proposición 4.1, $f$ es universal. ■

De lo anterior, el siguiente resultado es obvio.

**Corolario 5.3** *Toda función suprayectiva de un espacio topológico conexo al intervalo unitario cerrado es universal.*

Este resultado funciona también para funciones semi-universales. Aunque la conexidad no es necesaria para este caso.

**Teorema 5.4 (3, Teorema 21, pag. 5)** *Toda función $f: X \to [0,1]$ de un espacio $X$ al intervalo $[0,1]$ es semi-universal.*

**Demostración.** Sea K un subcontinuo de X tal que $f(K) = f(X)$, y una función $g: K \to X$ dada.

Como $f$(K) es un intervalo cerrado, digamos $[a,b]$, hay puntos $x_0$ y $x_1$ en K tales que
$a = f(x_0) \leq f(g(x_0))$ y $b = f(x_1) \geq f(g(x_1))$

Entonces los conjuntos
$A = \{x \in \mathrm{K} : f(x) \leq f(g(x))\}$ y $B = \{x \in \mathrm{K} : f(x) \geq f(g(x))\}$
son no vacíos.

Por otro lado, el conjunto $A$ puede ser visto de la siguiente manera
$A = \{x \in K : f(x) - f(g(x)) \leq 0\}$.

Utilizando la continuidad de la $f$ y la $g$ tenemos que
$f - (f \circ g) : X \to \mathbb{R}$ es una función continua.

Como $(-\infty, 0]$ es cerrado en $\mathbb{R}$, y como
$A = (f - (f \circ g))^{-1}((-\infty, 0])$,
entonces $A$ es cerrado.

Del mismo modo podemos ver que B también es cerrado y además
A ∪ B = K.

Entonces por la conexidad de K hay un punto $x \in A \cap B \subset K$, es decir, $f(x) = f(g(x))$.

Por lo tanto $f$ es semi-universal. ■

A partir de este resultado y recordando que todo arco es homeomerfo al intervalo $[0,1]$ podemos obtener, de manera sencilla, el siguiente resultado.

**Corolario 5.5** *Toda función $f: X \to Y$ de un espacio $X$ a un arco $Y$ es semi-universal.*

Este resultado puede ser generalizado, pero es necesario conocer algunas definiciones y el siguiente resultado.

**Definición 5.6** *Una relacion binaria $\geq$ dirige a un conjunto D no vacío si:*

*(a) Si $m, n$ y $p$ son elementos de D tales que $m \geq n$ y $n \geq p$, entonces $m \geq p$.*

*(b) Si $m \in D$, entonces $m \geq m$.*

*(c) Si $m$ y $n$ son elementos de $D$, entonces existe un elemento $p \in D$ tal que $p \geq m$ y $p \geq n$.*

*En tal caso, el par $(D, \geq)$ es llamado un* **conjunto dirigido** *en donde $\geq$ dirige a $D$.*

**Ejemplo 5.7** *Sean $X$ un espacio topológico distinto del vacío y $x \in X$.*

*Sea $D = N(x)$ donde $N(x)$ es el conjunto de vecindades de $x$, con la siguiente relación:*

*$U \geq V$ si $U \subset V$ con $U, V \in D$.*

*Veamos que $\geq$ cumple con (a), (b) y (c) de la definición anterior.*

*(a) Si $U, V$ y $W$ son elementos de $D$ tales que $U \geq V$ entonces $U \subset V$ y si $V \geq W$ entonces $V \subset W$ por lo tanto $U \subset W$ es decir $U \geq W$.*

*(b) Si $U \in D$, entonces $U \subset U$, es decir, $U \geq U$.*

*(c) Si $U$ y $V$ son elementos de $D$ entonces $U \cap V$ también es elemento de $D$ y además $(U \cap V) \geq U$ y $(U \cap V) \geq V$.*

*Por lo tanto, $(D, \geq)$ es un conjunto dirigido.*

**Definición 5.8** *Una* **red** *en un espacio topológico $X$ es un par $(S, \geq)$ tal que $S$ es una función $S : D \to X$ y $\geq$ dirige a $D$, y la denotamos como $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ en donde $x_\alpha$ es un punto de $X$.*

**Definición 5.9** *Sean $X$ un espacio topológico y $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ una red en $X$.*

*Decimos que $(x_\alpha)_{\alpha \in D}$ converge a un punto $x \in X$ si para toda vecindad $U$ de $x$ tenemos que existe un índice $\beta \in D$ tal que para todo $\alpha \in D$, $\alpha \geq \beta$ entonces $x_\alpha \in U$.*

**Proposición 5.10** *Sea $f : X \to Y$ una función continua. Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red en $X$ convergente a algún punto $x \in X$, entonces la red $(f(x_\alpha))_{\alpha \in A}$ converge en $Y$ al punto $f(x)$.*

**Demostración.** Sean $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una red en $X$ convergente a algún punto $x \in X$ y $U \in N(f(x))$.

Como $f$ es continua, tenemos que $f^{-1}(U)$ es abierto en $X$ y además $x \in f^{-1}(U)$.

De esta forma, existe $\beta \in A$ tal que si $\gamma \geq \beta$ entonces $x_\gamma \in f^{-1}(U)$.

Por lo tanto, $f(x_\gamma) \in U$ para todo $\gamma \geq \beta$.

Con lo cual tenemos que la red $(f(x_\alpha))_{\alpha \in A}$ converge a $f(x)$, como se quería demostrar. ■

Ahora, para enunciar y demostrar la generalizacion del Teorema 5.4, veamos la siguiente definición.

**Definición 5.11** *Decimos que un conjunto $X$ está* ***linealmente ordenado*** *si existe una relación transitiva $\leq$ en $X$, tal que para cualesquiera dos elementos $a, b \in X$ se tiene $a \leq b$ ó $b \leq a$ y si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$.*

*Es fácil de ver que en un conjunto linealmente ordenado $X$, la familia de los conjuntos*

*$(a, b) = \{c \in X : a \leq c \leq b$ con $a, b \in X$ y $c \notin \{a, b\}\}$*

*es base para una topología, la cual es llamada* ***la topología de intervalos*** *en $X$.*

**Teorema 5.12 (3, pag. 6)** *Sea $Y$ un espacio conexo linealmente ordenado con la topología de intervalos, y que tiene elementos mínimo y máximo. Entonces toda función $f : X \to Y$ de un espacio topológico $X$ en $Y$ es semi-universal.*

**Demostración.** Sea K un subcontinuo de X tal que $f(K) = f(X)$, y una función $g : K \to X$ dada.

Como $f$(K) es conexo y compacto, entonces $f(K)$ es un intervalo cerrado cerrado, digamos $[a, b]$,
y hay puntos $x_0$, $x_1$ en K tales que
$a = f(x_0) \leq f(g(x_0))$ y $b = f(x_1) \geq f(g(x_1))$

Entonces los conjuntos
$A = \{x \in \mathrm{K} : f(x) \leq f(g(x))\}$ y $B = \{x \in \mathrm{K} : f(x) \geq f(g(x))\}$
son no vacíos.

Por otro lado, si suponemos que $X - A$ no es abierto, tendríamos que existe un punto
$x \in X - A$ tal que toda vecindad $U$ de $x$ intersecta al conjunto $A$.

De esta forma se tendría una red convergente a $x$,
$(x_U)_{U \in N(x)}$ con $x_U \in A \cap U$ y $N(x)$ con la dirección definida en el Ejemplo 5.7.

Como $f$ y $f \circ g$ son funciones continuas tenemos que:
$(f(x_U))_{U \in N(x)}$ y $(f(g(x_U)))_{U \in N(x)}$
son redes que convergen a $f(x)$ y a $f(g(x))$ respectivamente.

Pero $f(x) > f(g(x))$
y como el espacio $Y$ es conexo, existe un punto $z \in Y$ tal que
$f(x) > z > f(g(x))$.

Entonces los conjuntos
$D = \{y \in Y : y < z\}$ y $E = \{y \in Y : y > z\}$
son abiertos tales que
$f(g(x)) \in D$ y $f(x)) \in E$.

De ésta forma, existe $U \in N(x)$ tal que si $V \geq U$ entonces
$f(x_V) \in E$ y $f(g(x_V)) \in D$,
implicando que
$f(g(x_U)) < z < f(x_U)$.

Por lo tanto $x_U \notin A$ lo cual contradice la forma en que fue construida la red inicial.

De esta forma probamos que el conjunto $X - A$ es abierto, es decir, $A$ es cerrado.

Del mismo modo podemos ver que B también es cerrado y además
$A \cup B = K$.

Entonces por la conexidad de K hay un punto $x \in A \cap B \subset K$, es decir,
$f(x) = \ f(g(x))$.

Lo cual demuestra que $f$ es semi-universal. ■

Si además pedimos que el espacio X sea conexo y que la función $f$ sea suprayectiva, entonces el Teorema 5.12 puede aplicarse a funciones universales de la siguiente manera.

**Proposición 5.13 (5, Proposición 9, pag. 434)** *Sea Y un espacio conexo, linealmente ordenado con la topología de intervalos, y que tiene elementos mínimo y máximo. Entonces toda función suprayectiva $f : X \to Y$ de un espacio topológico conexo $X$ en $Y$ es universal.*

**Demostración.** Sean $f : X \to Y$ una función suprayectiva de un espacio conexo X en Y y $g : X \to Y$ una función dada.

Como $f$ es suprayectiva, existen puntos $x_1, x_2 \in X$ tales que
$f(x_1) \leq y \leq f(x_2)$ para toda $y \in Y$.

Entonces los conjuntos
A $= \{ x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ y B $= \{ x \in X : f(x) \geq g(x)\}$
son conjuntos no vacíos.

Además, A y B son conjuntos cerrados.

Para demostrar esta última afirmación veremos que $X - A$ es abierto.

Sean $m$ y $M$ los elementos mínimo y máximo de $Y$ respectivamente.

Sea $x \in X - A$, entonces $g(x) < f(x)$.

Como $Y$ es conexo tenemos que
$(g(x), f(x)) \neq \phi$, sea $a \in (g(x), f(x))$.
Entonces $x \in g^{-1}(m, a) \cap f^{-1}(a, M) = W$.
$W$ es una vecindad abierta de $x$, y si $y \in W$ entonces
$g(y) \in (m, a)$ y $f(y) \in (a, M)$
con lo cual tenemos que $g(y) < f(y)$, es decir,
$W \subset X - A$
con lo cual se demuestra que $X - A$ es abierto.
De esta forma, tenemos que A es cerrado, y de manera similar se puede demostrar lo mismo para B.
Además, A $\cup$ B = X.
Entonces por la conexidad de X hay un punto
$x \in A \cap B$, tal que $f(x) = g(x)$,
con lo cual se concluye que $f$ es universal. ■

Ahora encaminemos los resultados hacia los espacios tipo-arco.

**Definición 5.14** *Sean $X$ y $Y$ espacios métricos y sea $f : X \rightarrow Y$. Diremos que $f$ es una **$\epsilon$-función** si $f$ es continua y si el diámetro de $f^{-1}(f(x)) < \epsilon$ para toda $x \in X$.*

Veamos este Lema que será útil y amplía nuestros resultados sobre funciones universales.

**Lema 5.15 (7, Lema 12.27, pag. 252)** *Sean $(X_1, d_1)$ y $(X_2, d_2)$ espacios no vacíos, compactos y métricos, y sea $f : X_1 \rightarrow X_2$ una función continua. Si para toda $\epsilon \succ 0$, existe un espacio $Z_\epsilon$ y una $\epsilon$-función $f_\epsilon : X_2 \rightarrow Z_\epsilon$ tal que $f_\epsilon \circ f : X_1 \rightarrow Z_\epsilon$ es una función universal, entonces $f$ es universal.*

**Demostración.** Sea $g : X_1 \rightarrow X_2$ continua.
Entonces, para cada $\epsilon > 0$, como $f_\epsilon \circ f : X_1 \rightarrow Z_\epsilon$ es universal, existe $p_\epsilon \in X_1$ tal que $f_\epsilon(f(p_\epsilon)) = f_\epsilon(g(p_\epsilon))$.
Ahora, como $f_\epsilon$ es una $\epsilon$-función, entonces
$diam(f_\epsilon^{-1}(f_\epsilon(f(p_\epsilon))) < \epsilon$ y
como $f(p_\epsilon), g(p_\epsilon) \in f_\epsilon^{-1}(f_\epsilon(f(p_\epsilon)))$ tenemos
(1) $d_2(f(p_\epsilon), g(p_\epsilon)) < \epsilon$ para cada $\epsilon$.
Sea $\epsilon(i) = \frac{1}{i}$ para cada $i = 1,2,...$
Como $\{p_{\epsilon(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión en el espacio métrico y compacto $X_1$, existe una subsucesión de $\{p_{\epsilon(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ convergente a algún punto $p \in X_1$.

Entonces, como $\epsilon(i) \to 0$ cuando $i \to \infty$ y tanto $f$ como $g$ son continuas, de (1) obtenemos que $f(p) = g(p)$, como se necesitaba. ■

Basándonos en este Lema podemos obtener algunos resultados en espacios tipo-arco, pero antes tendremos que definirlos.

**Definición 5.16** *Sea $X$ un espacio métrico y compacto. Decimos que $X$ es* ***tipo-arco*** *si para toda $\epsilon \succ 0$ existe una $\epsilon$-función $f_\epsilon$ suprayectiva de $X$ en [0,1].*

Otra forma equivalente de definir a un espacio tipo-arco es la siguiente.

**Definición 5.17** *Sea $X$ un espacio métrico y compacto. Decimos que $X$ es* ***tipo-arco*** *si $X$ es el límite inverso de arcos con funciones suprayectivas.*

Donde por límite inverso entendemos lo siguiente.

**Definición 5.18** *Una* ***sucesión inversa*** *es una doble sucesión $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ de espacios $X_i$ y de funciones continuas $f_i : X_{i+1} \to X_i$. Si $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión inversa, entonces el límite inverso de $\{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$, denotado por $\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty}$ es el subespacio del espacio producto $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ definido por*

$$\varprojlim \{X_i, f_i\}_{i=1}^{\infty} = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i : f_i(x_{i+1}) = x_i \text{ para toda } i\}.$$

Ahora sí podemos ver el siguiente Teorema.

**Teorema 5.19 (7, Teorema 12.29, pag. 253)** *Toda función suprayectiva de un espacio conexo en un continuo tipo-arco es universal.*

**Demostración.** Sea $f : X \to Y$ una función suprayectiva de un conexo X a un continuo tipo-arco Y.

Entonces para toda $\epsilon \succ 0$, hay una $\epsilon$-función $f_\epsilon$ suprayectiva de Y al [0,1].

De esta forma $f_\epsilon \circ f$ es universal. Por el Lema anterior, $f$ es universal. ■

Un resultado similar es válido para funciones semi-universales, nuevamente sin la hipótesis de conexidad del espacio dominio.

**Teorema 5.20** *Toda función $f : X \to Y$ de un espacio $X$ en un continuo tipo-arco $Y$ es semi-universal.*

**Demostración.** Veamos a Y como el límite inverso de una sucesión inversa de intervalos cerrados $I_n = [0,1]$ con funciones suprayectivas $f_n^{n+1} : I_{n+1} \to I_n$, y denotemos como $\Pi_n : Y \to I_n$ las proyecciones para toda n $\in \mathbb{N}$.

Sea K un subcontinuo de X tal que
$f(K) = f(X)$,
y sea una función $g : K \to X$ dada.

Para cada n $\in \mathbb{N}$ definimos
$F_n = \{x \in K : \Pi_n(f(x)) = \Pi_n(f(g(x))\}$.

Observemos que si damos una sucesión convergente $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subset F_n$, tal que $x_j \to x$, como $x_j \in K$ para toda $j \in \mathbb{N}$, entonces $x \in K$.

Además, como $f$, $g$ y $\Pi_n$ son continuas, tenemos que
$(\Pi_n(f(x_j)))_{j=1}^{\infty}$ converge al punto $\Pi_n(f(x))$ y
$(\Pi_n(f(g(x_j))))_{j=1}^{\infty}$ converge al punto $\Pi_n(f(g(x)))$.

Pero como
$\Pi_n(f(x_j)) = \Pi_n(f(g(x_j)))$ para toda $j \in \mathbb{N}$, entonces
$\Pi_n(f(x)) = \Pi_n(f(g(x)))$,
con lo cual tenemos que $x \in F_n$, es decir, $F_n$ es cerrado en K.

Como la composición
$\Pi_n \circ f : X \to I_n$
es semi-universal, de acuerdo con el Teorema 5.4, entonces el conjunto $F_n$ es no vacío.

Además, como
$\Pi_n = f_n^{n+1} \circ \Pi_{n+1}$,
tenemos que $F_{n+1} \subset F_n$ para toda n $\in \mathbb{N}$.

Por la propiedad de la intersección finita, hay un punto
$x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Entonces para toda n $\in \mathbb{N}$ tenemos
$\Pi_n(f(x_0)) = \Pi_n(f(g(x_0)))$, es decir, $f(x_0) = f(g(x_0))$. Con lo cual queda probado el Teorema. ■

Y para terminar con los objetivos de este Capítulo veamos los siguientes resultados.

Dado un espacio Y, sea $\Pi_i : Y \times Y \to$Y la proyección en la $i$-ésima coordenada, con $i \in \{1,2\}$.

Decimos que el semimargen suprayectivo de un continuo Y es cero, $\Gamma_0^*(\mathrm{Y}) = 0$, si todo subcontinuo Z del producto $Y \times Y$, tal que $\Pi_1(\mathrm{Z}) = \mathrm{Y}$, intersecta la diagonal $\{(y,y) : y \in Y\} \subset Y \times Y$.

**Teorema 5.21 (3, Teorema 25, pag. 7)** *Las siguientes condiciones son equivalentes para un continuo $Y$ :*

*(5.21.1) Toda función $f : X \to Y$ suprayectiva de un continuo $X$ en $Y$ es universal.*

*(5.21.2) Toda función $f : X \to Y$ suprayectiva de un continuo $X$ en $Y$ es semi-universal.*

*(5.21.3) $\Gamma_0^*(Y) = 0$.*

**Demostración.** (5.21.1) $\Rightarrow$ (5.21.2)

Sea $f : X \to Y$ suprayectiva y universal y sean K subcontinuo de X tal que $f(K) = Y$ y $g : K \to X$ una función dada.

De esta forma
$f|_K : K \to Y$ y $f \circ g : K \to Y$.

Pero $f|_K$ es suprayectiva y por lo tanto, por hipótesis, es universal.

Entonces existe $k \in K$ tal que $f(k) = f(g(k))$ como se quería.

(5.21.2) $\Rightarrow$ (5.21.1)

Sea $f : X \to Y$ suprayectiva y semi-universal. Sea $g : X \to Y$ dada.

Por hipótesis la proyección $\Pi_1 : Y \times Y \to Y$ es semi-universal.

Sea $K = \{(f(x), g(x)) : x \in X\}$.

K es subcontinuo de $Y \times Y$ y $\Pi_1(K) = Y$.

Sea $h : K \to Y \times Y$ dada por $h(x, y) = (y, x)$.

Entonces hay un punto $(f(x), g(x))$ en K tal que
$\Pi_1(f(x), g(x)) = (\Pi_1 \circ h)(f(x), g(x))$.

Entonces $f(x) = g(x)$. Como se necesitaba.

(5.21.1) $\Rightarrow$ (5.21.3)

Sea Z un subcontinuo del producto $Y \times Y$ tal que $\Pi_1(Z) = Y$.

Entonces $\Pi_1|_Z : Z \to Y$ es universal por hipótesis.

Entonces coincide en algún punto $z_0$ de Z con $\Pi_2|_Z$, es decir,
$\Pi_1(z_0) = \Pi_2(z_0)$.

Y por lo tanto Z intersecta la diagonal de $Y \times Y$.

(5.21.3) $\Rightarrow$ (5.21.1)

Sea $f : X \to Y$ una función suprayectiva de un continuo X en Y, y sea $g : X \to Y$ dada.

Definimos $Z = \{(f(x), g(x)) : x \in X\}$.

Entonces Z es un subcontinuo de $Y \times Y$ que satisface $\Pi_1(Z) = Y$.

Por hipótesis, Z intersecta la diagonal de $Y \times Y$.

Por lo tanto hay un punto $x_0 \in$ X tal que $f(x_0) = g(x_0)$. Entonces $f$ es universal. ■

**Observación 5.22** *Si la función $f : X \to Y$ en el Teorema 5.20 es suprayectiva, entonces el resultado es, de hecho, un corolario del Teorema 5.21.*

Para demostrar esta observación recurriremos a la definición de los cuatro márgenes de continuos y a sus propiedades.

Sea (X,$d$) un continuo.

Para cualesquiera dos funciones $f_1, f_2$ de un continuo Z en X, definimos $\inf(f_1, f_2) = \inf\{d(f_1(z), f_2(z)) : z \in Z)\}$.

Entonces, el margen-suprayectivo de X, denotado por $\Gamma^*(X)$, está definido como sigue:

$\Gamma^*(X) = \sup\{\ \inf(f_1, f_2) : f_1$ y $f_2$ son funciones suprayectivas de algún continuo Z en X$\}$

el semi-margen suprayectivo de X denotado por $\Gamma_0^*(X)$, está definido de la misma manera, pero sólo se requiere de la suprayectividad de una de las funciones.

Por otro lado, el margen de X y el semi-margen de X, denotados por $\Gamma(X)$ y $\Gamma_0(X)$ respectivamente, están definidos de la siguiente forma:

$\Gamma(X) = \sup\ \{\Gamma^*(Y) : Y$ es un subcontinuo de X$\}$.

$\Gamma_0(X) = \sup\ \{\Gamma_0^*(X) : Y$ es un subcontinuo de X$\}$.

Basándonos en estas definiciones, resulta claro que

$0 \leq \Gamma^*(X) \leq \Gamma(X) \leq \Gamma_0(X)$.

Si aplicamos todo esto a un continuo tipo-arco X, tendremos que, como todo subcontinuo no degenerado de un continuo tipo-arco es tipo-arco y por el Teorema 5.19,

$\Gamma_0(X) = 0$,

y por lo tanto $\Gamma(X), \Gamma_0^*(X), \Gamma(X)$ y $\Gamma^*(X)$ son todos iguales a cero.

Ahora aplicando (5.21.3) y utilizando la equivalencia de (5.21.3) y (5.21.2) se completa el argumento.

# Capítulo 6

# HEREDABILIDAD.

Varias preguntas sobre funciones universales y semi-universales buscan la manera de determinar la universalidad o semi-universalidad de una función basándonos en las propiedades de sus restricciones. En este sentido tenemos los siguientes resultados.

**Teorema 6.1 (3, pag. 10)** *Sea $X_0 \subset X$ y $f : X \to Y$ una función. Si la restricción $f|_{X_0} : X_0 \to Y$ es universal, entonces $f : X \to Y$ es también universal.*

**Demostración.** Sean $f, g : X \to Y$ dos funciones de tal forma que $f\ |_{X_o} : X_0 \to Y$ es universal.

Entonces existe un punto $x_0 \in X_0$ tal que $f\ |_{X_o}\ (x_0) = g\ |_{X_o}\ (x_0)$, por lo tanto $f(x_0) = g(x_o)$ para un punto $x_0 \in X$.

Con lo cual tenemos que $f$ es universal. ■

Para demostrar que algo similar al enunciado anterior no es válido para funciones semi-universales, consideremos el siguiente ejemplo. Sea $X = S^1$ el círculo unitario, y sea $X_0$ un subconjunto propio no degenerado, $X_0 \subset X$; es decir, $X_0$ es un arco. Sea $f : X \to X$ la identidad. Entonces $f|_{X_0}$ es semi-universal, aunque $f$ no lo es, de acuerdo con la Proposición 2.6.

**Observación 6.2** *La implicación inversa en el Teorema 6.1 no es cierta ni para funciones universales ni para semi-universales. Por ejemplo, sea $X = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ el círculo unitario, y sea $X_0 = S^1 \subset X$ su frontera en el plano complejo $\mathbb{C}$.*

*Si $f : X \to X$ es la identidad entonces $f$ es universal y semi-universal, mientras que $f|_{X_0}$ no es ni universal ni semi-universal, de acuerdo con la Proposición 2.6.*

La observación anterior justifica el siguiente resultado.

**Observación 6.3** *Los conceptos de funciones universales y semi-universales no son hereditarios, en el sentido de que si* $X_0 \subset X$ *y* $f : X \to Y$ *es una función, entonces la universalidad ( semi-universalidad ) de* $f$ *no implica la universalidad ( semi-universalidad ) de la restricción* $f|_{X_0} \to Y$.

Sin embargo en el sentido inverso se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 6.4 (5, Proposición 6, pag. 433)** *Sea* $f : X \to Y$ *una función suprayectiva entre espacios topológicos, tal que, para alguna* $v \in Y$ *se satisfacen las siguientes condiciones :*

*(6.4.1)* $X = f^{-1}(v) \cup \cup \{X_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$,

*(6.4.2)* $f^{-1}(v)$ *es un subconjunto conexo de* $X$,

*(6.4.3)* $f(X_\sigma) \cap f(X_\tau) = \{v\}$ *para todo* $\sigma, \tau \in \Sigma$, *con* $\sigma \neq \tau$,

*(6.4.4) los conjuntos* $f(X\sigma)$ *y* $\cup\{f(X_\tau) : \tau \in \Sigma \setminus \{\sigma\}\}$ *son subconjuntos cerrados de* $Y$ *para toda* $\sigma \in \Sigma$.

*Si la restricción* $f|_{X_\sigma} : X_\sigma \to f(X_\sigma)$ *es universal para toda* $\sigma \in \Sigma$, *entonces* $f$ *es universal.*

**Demostración.** Sean $f : X \to Y$ una función que satisfaga las hipótesis de arriba y $g : X \to Y$ una función dada.

Si $g(x) = v$ para alguna $x \in f^{-1}(v)$ ya acabamos.

En caso contrario, hagamos el siguiente análisis.

Para empezar, veamos que $g(f^{-1}(v))$ es un conjunto conexo gracias a (6.4.2) y a la continuidad de $g$.

Ahora, supongamos que $g(x) \neq v$ para toda $x \in f^{-1}(v)$.

Entonces existe $\sigma \in \Sigma$ tal que
$g(f^{-1}(v)) \cap f(X_\sigma) \neq \phi$, y además
$(\bigcup_{\tau\neq\sigma} f(X_\sigma)) \cap g(f^{-1}(v)) = \phi$.

De lo contrario, los conjuntos
$g(f^{-1}(v)) \cap f(X_\sigma)$ y $(\bigcup_{\tau\neq\sigma} f(X_\sigma)) \cap g(f^{-1}(v))$
serían ajenos, no vacíos y cerrados relativos, que formarían una disconexión de $g(f^{-1}(v))$, el cual, como ya habíamos visto, es conexo.

Por lo tanto $g(f^{-1}(v)) \subset f(X_\sigma)$.

Ahora consideremos la retracción
$r_\sigma : Y \to f(X_\sigma)$ dada por
$r_\sigma(y) = v$, si $y \in Y - f(X_\sigma)$.

Como la restriccion $f\,|_{X_\sigma}$es universal, entonces las funciones
$r_\sigma \circ g\,|_{X_\sigma}: X_\sigma \to f(X_\sigma)$ y $f\,|_{X_\sigma}: X_\sigma \to f(X_\sigma)$
tienen un punto de coincidencia, es decir, existe un punto $x \in X_\sigma$ tal que
$r_\sigma(g(x)) = f(x)$.

Pero dado un punto $x \in f^{-1}(v)$ tenemos que
$g(x) \in f(X_\sigma)$ y además $g(x) \neq v$,
entonces
$f(x) = v \neq g(x) = r_\sigma(g(x))$.

De esta forma, si $r_\sigma(g(x)) = f(x)$ entonces $x \notin f^{-1}(v)$.

Con esto tenemos que
$r_\sigma(g(x)) = f(x) \neq v$
lo cual implica, por la forma en que se definió esta retracción, que
$g(x) \in f(X_\sigma)$.

Y por lo tanto, $r_\sigma(g(x)) = g(x)$, es decir,
$f(x) = r_\sigma(g(x)) = g(x)$. Como se quería. ■

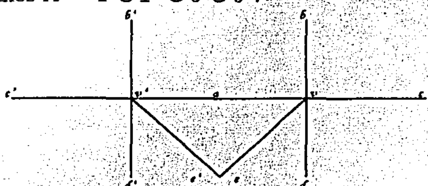
Con el siguiente Ejemplo se muestra que algo similar a la Proposición anterior no es aplicable a funciones semi-universales.

**Ejemplo 6.5 (3, Ejemplo 35, pag. 11)** *Hay gráficas lineales $X$ y $Y$ y una función $f : X \to Y$ tal que las condiciones (6.4.1) - (6.4.4) se satisfacen, las restricciones $f\,|_{X_\sigma}: X_\sigma \to f(X_\sigma)$ son semi-universales para toda $\sigma \in \Sigma$, y $f$ no es semi-universal.*

**Demostración.** Sean los puntos $a, b, c$, el triodo T y la simetría
$s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ los mismos que en el Ejemplo 1.14.

Sean $d$ = (0, -1), $e$ = (-1, -1), $J = vd \cup ve$, y $J' = s(J)$.

Definimos $X = T \cup T' \cup J \cup J'$.



Sea $f : X \to Y = T$ una función tal que
$f|_{(T \cup T')} : T \cup T' \to Y$ es la misma función del Ejemplo 1.14, y
$f|_{(J \cup J')} : J \cup J' \to \{v\}$ es constante.

Sean
$X_1 = vv'$; $X_2 = vb \cup v'b'$; $X_3 = vc \cup v'c'$.

Si $\Sigma = \{1, 2, 3\}$, entonces (6.4.1) se satisface por construcción.

$f^{-1}(v) = J \cup J'$, de aquí se sigue (6.4.2).

$f(X_1) = va$, $f(X_2) = vb$, y $f(X_3) = vc$, entonces (6.4.3) y (6.4.4) se satisfacen.

La restricción $f|_{X_\sigma}$ es una función suprayectiva en un arco y por la Proposición 6.4 es semi-universal.

Finalmente se puede demostrar, de la misma forma en que se hizo en el Ejemplo 1.14, que $f$ no es semi-universal. ■

# Capítulo 7

# PROPIEDAD DE LA COMPOSICIÓN Y PROPIEDAD FACTOR DE LA COMPOSICIÓN

Otras preguntas que pueden surgir con respecto a estas funciones están relacionadas con la propiedad de la composición y la propiedad factor de la composición.

Primero veamos que ocurre con la la propiedad de la composición.

**Definición 7.1** *Una clase $\mathfrak{M}$ de funciones tiene la* ***propiedad de la composición*** *si para cualesquiera dos funciones $f_1 : X \longrightarrow Y$ y $f_2 : Y \longrightarrow Z$ que están en $\mathfrak{M}$ tenemos que $f_2 \circ f_1$ también está en $\mathfrak{M}$.*

En este sentido podemos comprobar que tanto la clase $\mathfrak{M}$ de funciones universales como la de funciones semi-universales no tienen la propiedad de la composición. Veamos los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 7.2** *Hay dos funciones universales cuya composición no es universal.*

**Demostración.** Sea $\mathbb{C}$ el plano complejo y consideremos la banda de Möbius M obtenida del subespacio
$P = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1\}$

y de identificar los puntos $z_1, z_2 \in P$ tales que
$|z_1| = |z_2| = \frac{1}{2}$ y $z_1^2 = z_2^2$.

Entonces podemos definir las siguientes funciones.

Sean $f : M \longrightarrow B^1$ dada por
$f(z) = (2 - \frac{1}{|z|})z$, y
$g : B^1 \longrightarrow B^1$ dada por
$g(z) = z^2$.

Aplicando el Teorema 4.1 y utilizando, sin probar, que $S^1$ no es un retracto de la banda de Möbius, tenemos que $f$ y $g$ son universales. Sin embargo su composición $g \circ f : M \longrightarrow B^1$ no es universal.

Para demostrar esto, basta con aplicar nuevamente el Teorema 4.1.

Observemos que
$(g \circ f)^{-1}(S^1) = S^1$.

Ahora, para cada $z \in M$ consideremos el punto
$z^* \in S^1 \subset M$ tal que $\arg(z) = \arg(z^*)$.

Y definamos una función $h : M \longrightarrow S^1$ de la siguiente manera,
$h(z) = (z^*)^2$.

De esta forma,
$h(z) = (g \circ f)(z)$ para toda $z \in S^1 \subset M$.

Con lo cual hemos encontrado una extensión continua de $(g \circ f)\,|_{S^1}$ y por lo tanto
$(g \circ f) : M \longrightarrow B^1$ no es universal. ∎

En el caso de la clase de funciones semi-universales veremos el siguiente ejemplo.

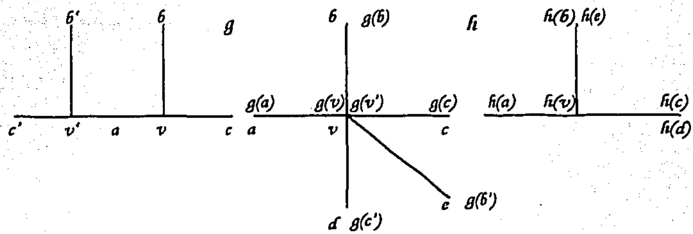
**Ejemplo 7.3 (3, Ejemplo 27,pag. 8)** *Hay dos funciones semi-universales entre árboles cuya composición no es semi-universal.*

**Demostración.** Veremos que la función $f : X \rightarrow Y$ del Ejemplo 1.14 puede ser factorizada como la composición de dos funciones semi-universales $g : X \rightarrow Z$ y $h : Z \rightarrow Y$ donde Z es un árbol.

Sean X, Y y $f : X \rightarrow Y$ como en el Ejemplo 1.14.

Sean $d = (1, -1), e = (0, -1)$, y $Z = T \cup vd \cup ve$.

Entonces Z es un 5-odo con vértice $v$ y puntos terminales $a$, $b$, $c$, $d$, $e$.




Definimos $g : X \to Z$ con las siguientes condiciones.

La función restringida $g\,|_{\mathrm{T}}$ es la identidad, y

$g\,|_{v'a}$: $v'a \to va$,

$g\,|_{v'b}$: $v'b' \to ve$ y

$g\,|_{v'c'}$: $v'c' \to vd$

son funciones lineales con

$g(v') = v$, $g(b') = e$, y $g(c') = d$.

Entonces $g$ está bien definida.

Como las preimágenes de puntos terminales de Z son singuletes $a$, $b$, $c$, $b$, $c'$, se sigue de la definición de $f_1$ que el único subcontinuo K de Z que satisface

$g(K) = g(X) = Z$ es X mismo.

Entonces, como X tiene la propiedad del punto fijo, tenemos que $g$ es semi-universal.

Sea $h : Z \to Y = T$ definida como la identidad en $\mathrm{T} \subset \mathrm{Z}$ y como una función lineal en los segmentos $vd$ y $ve$ con

$h(d) = c$ y $h(e) = b$.

Como

$h^{-1}(a) = \{a\}$, $h^{-1}(b) = \{b,e\}$, $h^{-1}(c) = \{c,d\}$,

vemos que un subcontinuo K de Z tal que

$h(K) = h(Z) = Y$

debe contener al punto $a$, y al menos uno de los puntos terminales $b$ y $e$, y uno de los puntos $c$ y $d$ de Z.

Por esto tenemos cuatro tipos de subcontinuos K, tales que

$h(\mathrm{K}) = h(\mathrm{Z})$,

que deben contener triodos con puntos finales

$\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{\mathrm{a,c,e}\}$, $\{a,d,e\}$

respectivamente.

Note que cualquiera de estos continuos puede ser un triodo, o un 4-odo o un 5-odo, cuyos tres puntos terminales son los indicados anteriormente, y los otros puntos terminales ( en caso de que los tengan) están situados en las ramas restantes del 5-odo Z. Los cuatro tipos de continuos K que acabamos de mencionar no son disjuntos.

En cualquier caso, si K es uno de los subcontinuos mencionados, existe un homeomorfismo
$h_o : T \to h_o(T) \subset \mathrm{K}$
tal que $h_o(\mathrm{T})$ es el triodo en K que contiene exactamente uno de los cuatro conjuntos de (tres) puntos terminales de Z mencionados.

De aquí se sigue que la composición
$(h\mid_{h_o(\mathrm{T})}) \circ h_o : T \to T$ es la identidad en T.

Aún más, para cada función $g_o : \mathrm{K} \to \mathrm{Z}$ la composición
$(h\mid_{(g_o(h_o(\mathrm{T}))}) \circ (g_o\mid_{(h_o(\mathrm{T}))}) \circ h_o : T \to T$
es una función del triodo en sí mismo.

Como T tiene la propiedad del punto fijo, hay un punto $x_0 \in \mathrm{T}$ tal que $h(g_o(h_o(x_0))) = h(h_o(x_0))$.

Entonces $h_o(x_0)$ es el punto de coincidencia en K de las funciones $h \circ g_o$ y $h$, por lo tanto $h$ es semi-universal.

Es fácil ver que $f = g \circ h$.

Pero $f$ no es semi-universal, como se probó en el Ejemplo 1.14, con lo cual se termina la demostración ■

Como consecuencia de los Ejemplos 7.2 y 7.3 tenemos las siguientes observaciones.

**Observación 7.4** *La clase de funciones universales no tiene la propiedad de la composición.*

**Observación 7.5** *La clase de funciones semi-universales (incluso consideradas entre árboles) no tiene la propiedad de la composición.*

Ahora veamos que ocurre si consideramos la propiedad factor de la composición en funciones universales y semi-universales. Para esto veamos la definición.

**Definición 7.6** *Una clase $\mathfrak{M}$ de funciones tiene la **propiedad factor de la composición** si para cualesquiera dos funciones $f_1 : X \to Y$ y $f_2 : Y \to Z$ su composición $f_2 \circ f_1$ pertenece a $\mathfrak{M}$, entonces $f_2$ está en $\mathfrak{M}$.*

Para funciones semi-universales tenemos que si $f_1 : [0,2\pi] \to S^1$ es definida por $f_1(x) = e^{ix}$ y $f_2 : S^1 \to S^1$ es la identidad, entonces $f_2 \circ f_1 = f_1 : [0,2\pi] \to S^1$ es semi-universal por el Teorema 2.2, pero $f_2$ no es semi-universal por la Proposición 2.6. Con lo cual tenemos la siguiente afirmación.

**Afirmación 7.7** *La clase de las funciones semi-universales ( incluso consideradas entre continuos localmente conexos ) no tiene la propiedad factor de la composición.*

Pero para funciones universales el resultado es diferente.

**Proposición 7.8** *La clase $\mathfrak{M}$ de funciones universales tiene la propiedad factor de la composición.*

**Demostración.** Sean $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones tales que $g \circ f : X \to Z$ es universal y sea $h : Y \to Z$ una función dada.

Entonces, existe un punto $x \in X$ tal que
$g(f(x)) = h(f(x))$,
es decir, existe un punto $f(x) = y \in Y$ tal que $g(y) = h(y)$, con lo cual tenemos que $g$ es universal. ■

# Capítulo 8

# HIPERESPACIOS.

Nuevos e interesantes resultados surgen cuando, dada una función $f : X \to Y$, consideramos las funciones inducidas por $f$ en los hiperespacios de X y Y. Pero antes de llegar a este punto, necesitaremos varias definiciones y resultados preliminares. Así que empezaremos con un subcapítulo dedicado únicamente a la obtención de estos resultados.

## 8.1. PRELIMINARES.

El propósito de esta sección es llegar a la demostración de los Teoremas 8.16 y 8.19 que serán utilizados en la siguiente sección. además de que podremos familiarizarnos con el concepto de espacios de Peano, el cual utilizaremos durante el resto de la tesis. El último teorema de esta sección (Teorema 8.20) no será demostrado debido a que para lograrlo sería necesario extendernos demasiado.

**Definición 8.1** *Un espacio topológico $(S,T)$ es llamado* ***localmente conexo en*** *$p$ $(p \in S)$ si toda vecindad de $p$ contiene un abierto conexo.*

**Definición 8.2** *Un espacio métrico $X$ es llamado un* ***espacio de Peano*** *si para cada punto $p \in X$ y toda vecindad $N$ de $p$, existe un subconjunto abierto y conexo $U$ de $X$ tal que $p \in U \subset N$.*

**Definición 8.3** *Sean $(S,T)$ un espacio topológico y $p \in S$. Decimos que $(S,T)$ es* ***conexo en pequeño en*** *$p$, si toda vecindad de $p$ contiene una vecindad conexa de $p$ ( esta vecindad no tiene porque ser abierta en $S$).*

**Definición 8.4** *Sea $X$ un espacio topológico. Una* ***componente*** *de $X$ es un subconjunto conexo y maximal de $X$.*

**Definición 8.5** *Un espacio topológico $(S,T)$ es llamado* ***arco-conexo*** *si cualesquiera dos puntos $p, q \in S$ pueden ser unidos por un arco.*

La siguiente Proposición es conocida y su demostración puede verse en [7, 8.1, pag. 120].

**Proposición 8.6** *Un espacio métrico es de Peano si y solo si se satisface cualquiera de las siguientes propiedades:*

*(i) $X$ es localmente conexo en todo punto.*

*(ii) todas las componentes de los subconjuntos abiertos de $X$ son abiertas en $X$*

*(iii) $X$ es conexo en pequeño en todo punto.*

**Definición 8.7** *Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Se dice que un subconjunto $Y$ no vacío de $X$ tiene la* ***propiedad S*** *si para toda $\epsilon > 0$, existe una cantidad finita de subconjuntos conexos $A_1, A_2, ..., A_n$ de $Y$ tales que $Y = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, y diametro $(A_i) < \epsilon$ para toda $i = 1, ..., n$.*

**Teorema 8.8 (7, 8.3, pag. 120)** *Si un espacio métrico $(X,d)$ tiene la propiedad S, entonces $(X,d)$ es un espacio de Peano.*

**Demostración.** Por (*iii*) de la Proposición 8.6, es suficiente probar que X es conexo en pequeño en todo punto.

Sea $p \in X$ y sea $\epsilon > 0$.

Entonces, como X tiene la propiedad S, existen una cantidad finita de conjuntos conexos $A_1, ..., A_n$ tales que

$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, diámetro $(A_i) < \frac{\epsilon}{2}$ para toda $i = 1, ..., n$.

Sea $G = \cup\{A_i : p \in cl(A_i)\}$.

Veamos que G es conexo.

Supongamos que las siguientes condiciones se satisfacen:

*i*) $G \subset N \cup M$.

*ii*) $N, M$ son abiertos.

*iii*) $N \cap M = \phi$.

*iv*) $p \in N$.

Pero estas condiciones, aunadas a la forma en que fue construido G, implican que $p \notin M$, con lo cual tenemos que
$G \cap M = \phi$, y por lo tanto $G$ es conexo.

Además, por construcción, tenemos que
diámetro $(G) < \epsilon$.

Por otro lado, si suponemos que
$p \in cl(X - G)$,
existiría una sucesión
$(z_n)_{n=1}^{\infty} \subset X - G$ tal que $z_n \to p$
y como $X - G = \{A_i : A_i \notin G\}$ es un conjunto finito,
entonces existiría un conjunto $A_i$ y una subsucesión $(z_{n_k})$ de la sucesión original tal que $(z_{n_k}) \subset A_i$, con lo cual tenemos que $p \in cl(A_i)$, es decir $A_i \in G$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto
$p \notin cl(X - G)$, es decir,
$G$ es una vecindad de $p$.

Con lo cual hemos probado que X es conexo en pequeño en $p$ (ver Definición 8.3). Lo cual completa la prueba. ■

**Teorema 8.9 (7, 8.4, pag. 120)** *Un espacio métrico compacto no vacío $(X, d)$ es un espacio de Peano si y sólo si $(X, d)$ tiene la propiedad S. En particular, un continuo $(X, d)$ es un continuo de Peano si y sólo si para cada $\epsilon > 0$, $X$ es la unión de una cantidad finita de subcontinuos cada uno de los cuales tiene diámetro $< \epsilon$.*

**Demostración.** Con respecto a la primera parte, tenemos que la primera mitad es resultado del Teorema 8.8 y la otra mitad es simplemente usar la Definición 8.2 y la compacidad para cubrir a X con una cantidad finita de subconjuntos abiertos y conexos de diámetro $< \epsilon$ para cualquier $\epsilon > 0$ dada.

La segunda parte es inmediata si usamos la primer parte y el hecho de que la cerradura de un conexo es conexo. Con lo cual la prueba queda completa. ■

**Teorema 8.10 (7, 8.5, pag. 121)** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico, y sea $Y \subset X$ tal que $Y$ tiene la propiedad S. Entonces, para todo $Z$ tal que $Y \subset Z \subset cl(Y)$, $Z$ tiene la propiedad $S$ y, por lo tanto, $Z$ es un espacio de Peano.*

**Demostración.** Sean $\epsilon > 0$ y $A_1, ..., A_n$ como en la Definición 8.7 .

Sea $B_i$ la cerradura de $A_i$ en Z para cada $i$.

La primera parte del Teorema se sigue fácilmente del hecho de que cada $B_i$ es conexo.

La segunda parte es inmediata de la primera parte y del Teorema 8.8. ∎

**Definición 8.11** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico y sea $\epsilon \succ 0$.*

*Una* **S($\epsilon$) – cadena** *es una colección no vacía, finita e indexada $\mathcal{L} = \{L_1, ..., L_n\}$ de subconjuntos de $X$ que satisfacen las siguientes tres condiciones:*

*(1) $L_i \cap L_{i+1} \neq \emptyset$ para toda $i = 1, ..., n-1$;*

*(2) $L_i$ es conexo para toda $i = 1, ..., n$;*

*(3) diámetro $(L_i) < \epsilon \cdot 2^{-i}$ para toda $i = 1, ..., n$.*

*Si $\mathcal{L} = \{L_1, ..., L_n\}$ es una $S(\epsilon)$–cadena, entonces todo $L_i \in \mathcal{L}$ es llamado un* ***eslabón*** *de $\mathcal{L}$; si $x \in L_1$ y $y \in L_n$, decimos que $\mathcal{L}$ es una $S(\epsilon)$ – cadena de $x$ a $y$. Si $A \subset X$, entonces definimos $S(A, \epsilon)$ como sigue:*

$S(A, \epsilon) = \{y \in X$ : *existe una $S(\epsilon)$ – cadena de algún punto de $A$ a $y\}$.*

**Proposición 8.12 (7, 8.7, pag. 122)** *Si un espacio métrico $(X, d)$ tiene la propiedad S, entonces, para cualquier subconjunto no vacío $A$ de $X$ y para toda $\epsilon > 0$, $S(A, \epsilon)$ tiene la propiedad S.*

**Demostración.** Fijemos $\delta > 0$.

Demostraremos que

$S(A, \epsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$, para alguna $n \prec \infty$,

donde cada $B_i$ es conexo y de diámetro $B_i < \delta$ según la definición 8.7.

Para hacerlo, primero escojamos un entero positivo $k$ tal que

(1) $\sum_{i=k}^{\infty} \epsilon \cdot 2^{-i} < \frac{\delta}{4}$.

Ahora, sea

$K = \{y \in S(A, \epsilon)$ : existe una $S(\epsilon)$ – *cadena* con a lo más $k$ eslabones de algún punto de $A$ a $y\}$.

Como $(X, d)$ tiene la propiedad S,

existe una cubierta finita de X con conjuntos conexos cada uno de los cuales tiene

diámetro $< \epsilon \cdot 2^{-k-1}$ por la Definición 8.7.

Sean $E_1, ..., E_n$ los miembros de esta cubierta que intersectan a $K$ ( si ninguno de ellos intersecta a $K$, entonces $K = \emptyset$, lo cual es una contradicción).

Notemos que las siguientes afirmaciones son ciertas:

(2) $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$;
(3) $E_i \cap K \neq \emptyset$ para toda $i$;
(4) $E_i$ es conexo para toda $i$;
(5) diámetro $(E_i) < \epsilon \cdot 2^{-k-1}$ para toda $i$.
Ahora, probemos
(6) $E_i \subset S(A, \epsilon)$ para toda $i = i, ..., n$.
Para hacerlo, fijemos alguna $i = 1, ..., n$.
Por (3), existe una $S(\epsilon) - \textit{cadena}$ $\{L_1, ..., L_t\}$ con $t \leq k$ de un punto de $A$ a un punto de $E_i \cap K$.
Entonces de (4), (5) y de la Definición 8.14 tenemos que
$\{L_1, ..., L_t, L_{t+1} = E_i\}$ es una $S(\epsilon) - \textit{cadena}$ de un punto de $A$ a un punto de $E_i$.
Con lo cual tenemos que $E_i \subset S(A, \epsilon)$.
Para cada $i$, $1 \leq i \leq n$, sea $\mathfrak{P}_i$ la colección de conjuntos $M$ que satisfacen las siguientes condiciones:
(7) $M \subset S(A, \epsilon)$;
(8) $M \cap E_i \neq \emptyset$;
(9) $M$ es conexo;
(10) diámetro $(M) < \frac{\delta}{4}$.
Ahora, sea
$B_i = \cup \mathfrak{P}_i$ para cada $i = 1, ..., n$.
Observe que cualquier $E_i$ satisface las condiciones (7)-(10).
De aquí tenemos
(11) $E_i \subset B_i$ para cada $i = 1, ..., n$.
Ahora veamos que $B_1, ..., B_n$ tienen las propiedades mencionadas al inicio de la prueba.
Por (4), (8) y (9), cada $B_i$ es conexo.
De (1), (5), (8) y (10) tenemos que cada $B_i$ tiene diámetro $< \delta$.
Por (7), $B_i \subset S(A, \epsilon)$ para cada $i = 1, ..., n$.
Sólo falta por probar que
$S(A, \epsilon) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i ...(\#)$
Para probar (#), sea $y \in S(A, \epsilon)$.
Notemos que por (2) y (11), $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.
Entonces, para probar (#), supongamos que $y \notin K$.

Como $y \in S(A, \epsilon)$, existe una $S(\epsilon)-$*cadena* $\mathcal{L} = \{L_1, ..., L_m\}$ de un punto de $A$ a $y$.

Como $y \notin K, m > k$. Sea

$H = \bigcup_{i=k}^{m} L_i$.

Claramente, por la definición de K, $L_k \subset K$.

Entonces, por (2), $L_k \cap E_i \neq \emptyset$ para alguna $i$.

Demostremos que $H$ satisface (7)-(10) con lo cual tendremos que $H \subset B_i$.

Por la definición de $S(A, \epsilon)$ en 8.11, tenemos que

$\bigcup_{L_i \in \mathcal{L}} L_i \subset S(A, \epsilon)$.

Entonces, claramente $H$ satisface (7).

Como $L_k \cap E_i \neq \emptyset$, $H$ satisface (8).

Por (1) y (2) de la definición 8.11, $H$ satisface (9).

Por la Definición 8.11,

diámetro $(H) \leq \sum_{i=k}^{m}$diametro $(L_i)$

y, como, por (3) de la definición 8.11,

diámetro $(H) \leq \sum_{i=k}^{m} \epsilon \cdot 2^{-i}$.

Entonces, por (1), $H$ satisface (10).

Ahora, habiendo probado que $H$ satisface (7)-(10), tenemos que $H \subset B_i$.

Con lo cual, recordando que $y \in L_m$, tenemos que $y \in B_i$.

Con lo cual hemos probado (#). Así, concluimos la prueba de la Proposición 8.12. ■

**Lema 8.13 (7, 8.8, pag. 123)** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico, sea $A$ un subconjunto no vacío de $X$, y sea $\epsilon > 0$. Entonces, las siguientes afirmaciones son ciertas:*

*(1) diámetro $[S(A, \epsilon)] \leq$ diámetro $(A) + 2\epsilon$;*

*(2) Si $A$ es conexo, entonces $S(A, \epsilon)$ es conexo;*

*(3) Si $(X, d)$ tiene la propiedad S, entonces $S(A, \epsilon)$ es un subconjunto abierto de $X$.*

**Demostración.** El inciso (1) se obtiene al usar el hecho de que, por (1) y (3) de la Definición 8.11, toda $S(\epsilon)-$ *cadena* tiene diámetro $< \epsilon$.

El inciso (2) se sigue de que, por (1) y (2) de la Definición 8.11, toda $S(\epsilon)-$ *cadena* es conexa.

Para probar el inciso (3), sea $y \in S(A, \epsilon)$.

Entonces por la Definición 8.11, existe una $S(\epsilon) - cadena$ $\{L_1, ...L_n\}$ de algún punto de $A$ a $y$.

Por el Teorema 8.8, existe un subconjunto abierto y conexo $U$ de X tal que
$y \in U$ y diámetro $(U) < \epsilon \cdot 2^{-n-1}$.

Claramente,
$\{L_1, ..., L_{n+1} = U\}$
es una $S(\epsilon) - cadena$ de un punto de $A$ a algún punto de $U$.

Así, $U \subset S(A, \epsilon)$. Con lo cual hemos probado (3). ■

**Teorema 8.14 (7, 8.9, pag. 124)** *Si un espacio métrico $(X, d)$ tiene la propiedad S, entonces, para toda $\epsilon > 0$, $X$ es la unión de una cantidad finita de conjuntos conexos cada uno de los cuáles tiene la propiedad S y diámetro $< \epsilon$. Además, estos conjuntos pueden ser escogidos abiertos o cerrados en X.*

**Demostración.** Por la Definición 8.7,
$X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, para algún $n < \infty$,
donde cada $A_i$ es conexo y de diámetro $< \frac{\epsilon}{3}$.

Por la Proposición 8.12 y el Lema 8.13, los conjuntos
$S(A_i, \frac{\epsilon}{3})$, $i = 1, ..., n$
son abiertos en X y satisfacen las propiedades deseadas.

Entonces, por la Definición 8.10, los conjuntos cerrados
$cl(S(A, \frac{\epsilon}{3}))$, $i = 1, ..., n$
también satisfacen las propiedades deseadas. Esto completa la prueba del Teorema 8.14. ■

**Definición 8.15** *Sea X un continuo, y sean A y B subconjuntos compactos no vacíos de X. Decimos que un subcontinuo C de X es* ***irreducible de A a B*** *y lo denotamos como $C = irr(A, B)$ si $C \cap A \neq \emptyset$, $C \cap B \neq \emptyset$, y ningún subcontinuo propio de C intersecta al mismo tiempo a A y B. Si A o B es un singulete, omitimos la notación de conjunto; entonces, por ejemplo, si $A = \{p\}$ y C es como arriba, decimos que C es irreducible de A a B y lo denotamos como*

$C = irr\ (p, B)$.

**Teorema 8.16 (7, 13.19, pag. 286)** *Sea Y un continuo de Peano, y sea B un subcontinuo de Y. Entonces, existe una sucesión $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos* *de Peano de $Y$ tales que $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i = B$ y, para cada $i$, el interior $B_i^\circ$ de $B_i$ en $Y$ contiene a $B$.*

**Demostración.** Fijemos un entero positivo $i$. Definimos $B_i$ como sigue.

Por la primera parte del Teorema 8.9, $Y$ tiene la propiedad S.

Entonces, por el Teorema 8.14, existen una cantidad finita de subconjuntos abiertos y conexos
$U_1, ..., U_n$ de $Y$ tales que para cada $k = 1, ..., n$
$U_k$ tiene la propiedad $S$,
diámetro $(U_k) \prec \frac{1}{i}$ y además
$U_k \cap B \neq \emptyset$, $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$.

Sea $B_i = \bigcup\limits_{k=1}^{n} cl(U_i)$.

Habiendo definido de esta forma a $B_i$ para toda $i$, tenemos que la sucesión $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ tiene las propiedades deseadas ( el hecho de que $B_i$ es un continuo de Peano se obtiene al aplicarle el Teorema 8.10 a cada $cl(U_k)$ y con esto llegar a que son continuos de Peano). Con lo cual concluye la prueba. ■

**Lema 8.17 (7, Lema 8.15, pag. 127)** *Sean $S_1$ y $S_2$ espacios topológicos, y sea $f$ una función continua y suprayectiva de $S_1$ a $S_2$ . Si $C$ es una componente de $S_2$, entonces $f^{-1}(C)$ es la unión de algunas componentes de $S_1$.*

**Demostración.** Resulta fácil de verificar que $f^{-1}(C) = \cup\{K : K$ es una componente de $S_1$ y $K \cap f^{-1}(C) \neq \phi\}$. Lo cual prueba el Lema. ■

La imagen de un continuo, bajo una función continua, puede no ser un continuo. Sin embargo tenemos el siguiente resultado.

**Proposición 8.18 (7, Proposición 8.16, pag. 127)** *Si $f$ es una función continua suprayectiva y cerrada de un espacio de Peano $X$ a un espacio métrico $Y$, entonces $Y$ es un espacio de Peano.*

**Demostración.** Demostraremos que $Y$ satisface $ii)$ de la Proposición 8.6.

Sea $C$ una componente de un abierto $U$ de $Y$.

Entonces, por el Lema 8.17, $C$ es la unión de algunas componentes de $f^{-1}(U)$.

Entonces, como $f^{-1}(U)$ es abierto en $X$ y $X$ satisface $ii)$ de la Proposición 8.6 , tenemos que $f^{-1}(C)$ es abierto en $X$.

De aquí, $X - f^{-1}(C)$ es cerrado en $X$.

Entonces, como $f$ es una función cerrada y además $f^{-1}[X - f^{-1}(C)] = Y - C$, $Y - C$ es cerrado en $Y$.

Entonces, $C$ es abierto en $Y$.

Con lo cual hemos probado que $Y$ satisface *ii*) de la Proposición 8.6, y por lo tanto $Y$ es un espacio de Peano. ■

El siguiente resultado puede ser mejorado, ya que la implicación inversa también es válida. Pero únicamente demostraremos la parte que nos será útil.

**Teorema 8.19** *Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva de un continuo de Peano $X$ a un continuo $Y$ , entonces $Y$ también es de Peano.*

**Demostración.** Como $X$ y $Y$ son compactos y métricos tenemos que la función $f$ es cerrada y por la Proposición 8.18 concluimos el resultado. ■

Y por último veamos el siguiente resultado cuya demostración puede verse en [7, 8.23, pag. 130].

**Teorema 8.20** *Todo continuo (no degenerado) de Peano es arco-conexo.*

## 8.2. EXTENSORES Y RETRACTOS ABSOLUTOS.

Ahora nos encaminaremos hacia resultados que nos mostrarán algunas de las relaciones que existen entre las funciones universales (semi-universales) y los extensores y retractos absolutos. Nuevamente requeriremos de varias definiciones.

**Definición 8.21** *Dado $X$ un espacio topológico, sean:*

*(1) $2^X = \{A : A$ es un subconjunto cerrado y no vacío de $X\}$;*

*(2) $C(X) = \{A \in 2^X : A$ es conexo$\}$.*

*Ahora, sea $X$ un espacio métrico y compacto con métrica $d$. Entonces, para cualesquiera $A, B \in 2^X$, definimos*

$H_d(A,B) = max\{sup\{d(a,B) : a \in A\}, sup\{d(b,A) : b \in B\}\}$.

*Definida de esta forma, tenemos que $H_d$ es una métrica.*

*Los espacios $2^X$ y $C(X)$ con la topología obtenida de $H_d$ son llamados* ***hiperespacios de X*** *y $H_d$ es llamada la* ***métrica de Hausdorff*** *inducida por d.*

**Definición 8.22** *Sean $X$ y $Y$ espacios métricos y compactos, y sea $f : X \to Y$ una función.*

*Definimos $2^f : 2^X \to 2^Y$ como*
*$2^f(A) = f(A)$, para toda $A \in 2^X$, y*
*$C(f) = 2^f|_{C(X)}: C(X) \to C(Y)$.*

*$2^f$ y $C(f)$ son llamadas las* ***funciones inducidas*** *por $f$ en los hiperespacios de $X$ y $Y$.*

**Definición 8.23** *Sea $X$ un espacio topológico. Una función continua $r : X \to X$ es llamada una* ***retracción*** *si $r \circ r = r$, es decir, $r$ es la identidad en su imagen. Un subconjunto $A$ de $X$ para el cual existe una retracción de $X$ en $A$ es llamado un retracto de $X$.*

**Definición 8.24** *Un* ***retracto absoluto*** *es un espacio métrico $M$ tal que siempre que es visto como un subconjunto cerrado $M'$ de un espacio métrico $Y$, $M'$ es un retracto de $Y$.*

**Definición 8.25** *Un* ***extensor absoluto*** *es un espacio métrico $M$ tal que cualquier función continua definida de un subconjunto cerrado de un espacio métrico $Z$ a $M$ puede ser extendida a una función continua de $Z$ a $M$.*

Un resultado que puede ser probado pero que no revisaremos en este trabajo es el hecho de que ser un retracto absoluto es equivalente a ser un extensor absoluto (ver [7, pag. 302]).

El siguiente Teorema no será demostrado ya que necesitaríamos extendernos demasiado para lograrlo, pero lo enunciaremos y utilizaremos en el próximo Lema.

**Teorema 8.26 (7, Teorema 5.2, pag. 72)** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico compacto, y sean $A, B$ subconjutos cerrados de $X$. Si ningún sunconjunto conexo de $X$ intersecta a ambos $A, B$ ( o de manera equivalente, ninguna componente de $X$ lo hace), entonces $X = X_1 \cup X_2$ donde $X_1$ y $X_2$ son subconjuntos cerrados ajenos de $X$ tales que $A \subset X_1$ y $B \subset X_2$.*

En el capítulo 6 se demostró que el hecho de que una función $f : X \to Y$ sea universal, no garantiza que sus restricciones $f\mid_{X_0}: X_0 \subset X \to Y$ también lo sean. Sin embargo, si el codominio es un extensor absoluto se tiene el siguiente resultado.

**Lema 8.27 (7, 13.50, pag. 302)** *Sea $Q$ un espacio métrico compacto, sea $M$ un retracto absoluto, y sea $f : Q \to M$ una función universal. Entonces, hay una componente $K$ de $Q$ tal que*
$f\mid_K: K \to M$
*es una función universal.*

**Demostración.** Sea $\{K_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ el conjunto formado por todas las componentes $K_\lambda$ de Q.

Para cada $\lambda \in \Lambda$, sea
$f_\lambda = f\mid_{K_\lambda}: K_\lambda \to M$.

Supongamos que $f_\lambda : K_\lambda \to M$ no es universal para ninguna $\lambda \in \Lambda$.

Entonces, para cada $\lambda \in \Lambda$, existe una función continua
$g_\lambda : K_\lambda \to M$ tal que
$f_\lambda(x) \neq g_\lambda(x)$ para toda $x \in K_\lambda$.

Como M es un extensor absoluto, cada función $g_\lambda$ puede extenderse a una función continua
$g_\lambda^* : Q \to M$.

Para cada $\lambda \in \Lambda$, $f(x) \neq g_\lambda^*(x)$ para toda $x \in K_\lambda$, y por lo tanto, para toda $x$ en algún subconjunto abierto $W_\lambda$ de $Q$ tal que $W_\lambda \supset K_\lambda$. Entonces, para cada $\lambda \in \Lambda$, tenemos que $K_\lambda$ y $Q - W_\lambda$ son subconjuntos cerrados de $Q$, tales que ninguna componente de $Q$ intersecta a ambos al mismo tiempo.

Entonces por el Teorema 8.26 tenemos que
$Q = U_\lambda \cup U'_\lambda$ donde $U_\lambda$ y $U'_\lambda$ son conjuntos cerrados y ajenos de $Q$, tales que $K_\lambda \subset U_\lambda$ y
$(Q - W_\lambda) \subset U'_\lambda$.

De esta forma tenemos que:
(1) $K_\lambda \subset U_\lambda \subset W_\lambda$ y por lo tanto
$f(x) \neq g_\lambda^*(x)$ para toda $x \in U_\lambda$.

Como $Q$ es compacto, existen una cantidad finita de conjuntos $U_\lambda$, denotados como
$U_{\lambda(1)}, U_{\lambda(2)}, ..., U_{\lambda(n)}$, tales que
$Q = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\lambda(i)}$.

Sea
$V_1 = U_{\lambda(1)}$ y $V_j = U_{\lambda(j)} - \bigcup_{i=1}^{j-1} U_{\lambda(i)}$ para cada $j = 2, ..., n$.

Ahora, notemos que $V_1, ..., V_n$ son ajenos, abiertos de $Q$ y que $Q = \bigcup_{j=1}^{n} V_j$.

De esta forma, obtenemos una función bien definida y continua
$g : Q \to M$ definida como
$g(x) = g^*_{\lambda(j)}(x)$ si $x \in V_j$.

Pero, por (1), $f(x) \neq g(x)$ para toda $x \in Q$.

Con lo cual tenemos que, $f : Q \to M$ no es universal. Contradictorio a una de las hipótesis del Lema.

Por lo tanto, $f_\lambda : K_\lambda \to M$ debe de ser universal para alguna $\lambda \in \Lambda$. Como se quería probar. ■

Un resultado similar se obtiene cuando el codominio de la función es restringido a un retracto absoluto.

**Lema 8.28 (7, 13.51, pag. 303)** *Sean $X$ y $Y$ espacios métricos compactos, sea $f : X \to Y$ una función universal, y sea $M \subset Y$ un retracto absoluto. Entonces, existe una componente $K$ de $f^{-1}(M)$ tal que*
*$f|_K : K \to M$*
*es una función universal y, por lo tanto, $f(K) = M$.*

**Demostración.** Sea $Q = f^{-1}(M)$ y sea $f_Q = f|_Q : Q \to M$.

Veamos que $f_Q : Q \to M$ es universal.

Sea $g : Q \to M$ una función continua.

Como $M$ es un extensor absoluto, $g$ puede ser extendido a una función continua $g^* : X \to M$.

Entonces como $f : X \to Y$ es universal,
$f(p) = g^*(p)$ para algún punto $p \in X$.

Como $g^*(p) \in M$ y $f(p) = g^*(p)$, tenemos que $f(p) \in M$ y, por lo tanto, $p \in Q$.

Entonces,
$f(p) = f_Q(p)$ y $g^*(p) = g(p)$.

Y como $f(p) = g^*(p)$, entonces $f_Q(p) = g(p)$.

Por lo tanto, hemos demostrado que $f_Q : Q \to M$ es universal.

Entonces de acuerdo con el Lema 8.27, existe una componente $K$ de $Q$ tal que $f_Q|_K : K \to M$ es universal.

Y como $K \subset Q$, entonces $f\mid_K: K \to M$ es universal. Entonces $f(K) = M$. Lo cual completa la prueba. ■

Antes de continuar, veamos que los enunciados de los Lemas 8.27 y 8.28 no son válidos para funciones semi-universales.

**Ejemplo 8.29** *Existe una función semi-universal, $f : X \to Y$, de un espacio métrico y compacto $X$ a un retracto absoluto $Y$, tal que $f\mid_K: K \to Y$ no es semi-universal para ninguna componente de $X$.*

**Demostración.** Definamos los siguientes conjuntos
$B_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$;
$B_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = \frac{1}{2}\}$;
$B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$.
Sean $X = B_1 \cup B_2$ y $Y = B^2$ y sea $f : X \to Y$ la inclusión natural.

Entonces, no existe ningún subcontinuo K de X tal que $f(K) = f(X)$ y por lo tanto, por el Lema 1.1 tenemos que $f$ es semi-universal.

Sin embargo, las únicas dos componentes de X, $B_1$ y $B_2$, no tienen la propiedad del punto fijo, por lo tanto, por la Proposición 2.6, no son semi-universales. Como se deseaba. ■

El siguiente Lema será utilizado en la demostración del proximo Teorema.

**Lema 8.30 (7, 13.49, pag. 301)** *Si $Y$ es un continuo de Peano, entonces el conjunto $\mathfrak{T}(Y)$ de todos los árboles en $Y$ es denso en $C(Y)$.*

**Demostración.** Sea H la métrica de Hausdorff para $C(Y)$ como se dio en la Definición 8.21.

Sea $B \in C(Y)$, y sea $\epsilon > 0$.

Entonces, por el Teorema 8.16, existe un subcontinuo de Peano $P$ de $Y$ tal que $H(B, P) < \frac{\epsilon}{2}$.

Sea $F = \{p_1, ..., p_n\}$, $n \prec \infty$ y $p_i \neq pj$ para $i \neq j$,

un subconjuto $\frac{\epsilon}{2}$-denso de P( es decir, $F \subset P$ y cada punto de $P$ dista a lo mas $\frac{\epsilon}{2}$ de algún punto de $F$, lo cual es posible por ser $P$ un continuo métrico).

Si $n = 1$, sea $T = \{p_1\}$ y observemos que $H(B,T) < \frac{\epsilon}{2}$.

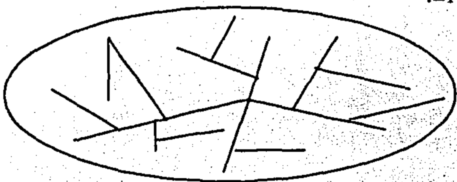
Si $n > 1$, construimos $T \in \mathfrak{T}(Y)$ como sigue.

Por el Teorema 8.20, existe un arco $A_1$ en $P$ de $p_1$ a $p_2$.

Si $F \not\subseteq A_1$, entonces, por el Teorema 8.20, existe un arco $A_2$ en $P$ irreducible de algún punto de $F - A_1$ a $A_1$ (en el sentido de la Definición 8.15).

Si $F \not\subseteq A_1 \cup A_2$, entonces, por el Teorema 8.20, existe un arco $A_3$ en $P$ irreducible de algún punto de $F - (A_1 \cup A_2)$ a $A_1 \cup A_2$.

Si $F \not\subseteq A_1 \cup A_2 \cup A_3$, entonces continuamos con este proceso hasta que, después de un número finito de pasos, $F \subset \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ $(k \leq n-1)$.



Entonces, sea

$T = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$.

Claramente, $T$ es un árbol según la Definición 1.13.

Como $F \subset T \subset P$ y $F$ es $\frac{\epsilon}{2}$-denso en $P$, $H(P,T) < \frac{\epsilon}{2}$.

Entonces, como $H(B,P) < \frac{\epsilon}{2}$, tenemos que $H(B,T) < \epsilon$. Con lo cual obtenemos el resultado deseado. ■

Ahora valiéndonos de estos resultados, veremos una condición bajo la cual las funciones universales son débilmente confluentes.

**Definición 8.31** *Una función $f : X \to Y$ entre espacios compactos de Hausdorff es llamada **débilmente confluente** cuando para cada subcontinuo $Q$ de $Y$ hay un subcontinuo $K$ de $X$ tal que $f(K) = Q$.*

**Teorema 8.32 (7, 13.52, pag. 303)** *Toda función universal de un espacio métrico y compacto a un continuo de Peano es débilmente confluente.*

**Demostración.** Sean X un espacio métrico y compacto, Y un continuo localmente conexo, y $f : X \to Y$ una función universal.

Sea $\mathfrak{T}(Y)$ el conjunto de todos los árboles en Y.

Utilicemos el hecho de que cada $T \in \mathfrak{T}(Y)$ es un retracto absoluto [6, pag. 339].

Por lo tanto, por el Lema 8.28, para cada $T \in \mathfrak{T}(Y)$ existe un subcontinuo $K_T$ de $X$ tal que $f(K_T) = T$.

En otras palabras,
$f(C)[C(X)] \supset \mathfrak{T}(Y)$.

Con esto, y recordando que $C(X)$ es compacto y $f(C)$ es continua, tenemos que $f(C)[C(X)] = C(Y)$.

Y por lo tanto, $f$ es débilmente confluente. Como se quería demostrar. ■

Nuevamente nos preguntamos si la misma conclusión del Teorema 8.32 es válida si $f$ es semi-universal ( en lugar de universal ). La respuesta es negativa, esta condición no implica que $f$ sea débilmente confluente si se asume que $f$ es semi-universal. Mencionemos la función que va del conjunto de Cantor en el intervalo unitario $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y} = [0,1]$, la cual es semi-universal por el Teorema 5.4, satisface las condiciones, y no es débilmente confluente. Note que la función $f$ considerada en el Ejemplo 1.12 satisface las hipótesis del Teorema 8.32, su espacio dominio es conexo, $\mathrm{X} = [0,1]$, y $f$ es semi-universal pero no es débilmente confluente.

## 8.3. FUNCIONES $2^f$ Y C($f$).

Hasta este punto, los hiperespacios sólo han sido utilizados como instrumentos para obtener los resultados buscados. Ahora, los convertiremos en el objetivo principal, al analizar condiciones necesarias o suficientes bajo las cuales las siguientes afirmaciones se cumplan, considerando a X y Y continuos:

(a) $f : X \to Y$ es universal.

(b) $2^f : 2^{\mathrm{X}} \to 2^{\mathrm{Y}}$ es universal.

(c)$C(f) : C(X) \to C(Y)$ es universal.

Llamemos $\mathrm{F}_1(\mathrm{X})$ el hiperespacio de singuletes y veamos los siguientes Teoremas y Definiciones que nos serán útiles en las siguientes demostraciones.

**Definición 8.33** *Definimos el conjunto* ***clásico de Cantor*** *como el subespacio $C$ del intervalo* $[0, 1]$,

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$$

*con $C_1 = [0,1] - (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ y, asumiendo que inductivamente hemos definido $C_i$, $C_{i+1}$ se define a partir de $C_i$ al dividir cada una de las componentes de $C_i$ en tres partes iguales y borrar los intervalos abiertos de enmedio de cada componente.*

De esta forma tenemos que $C$ es un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, con lo cual $C$ es compacto.

Un Teorema interesante relacionado con el conjunto de Cantor es el siguiente cuya demostración puede ser vista en [6, pag. 23].

A partir de este momento utilizaremos los conceptos de *trivial shape* y $CE - función$ ya que son necesarios para poder avanzar, sin embargo no profundizaremos en el manejo de ninguno de ellos por tratarse de material que va más allá de los objetivos de este trabajo.

**Teorema 8.34 (6, pag. 23)** *Todo espacio métrico compacto no vacío es la imagen continua del conjunto clásico de Cantor.*

**Definición 8.35** *Una función es* ***monótona*** *si la imagen inversa de todo punto es un conjunto conexo.*

**Definición 8.36** *Una* ***CE-función*** *es una función tal que la imagen inversa de todo punto tiene trivial shape. En donde trivial shape es definida en* [1].

Otro resultado que utilizaremos y cuya demostración puede ser vista en [1] es el siguiente.

**Teorema 8.37** *Toda $CE - función$ es monótona.*

Empecemos demostrando que $2^f$ y $C(f)$ son universales cuando $f$ es una función suprayectiva y monótona de un continuo a un continuo de Peano. Para hacerlo, necesitaremos un par de lemas, el primero de los cuales fue demostrado en [9].

**Lema 8.38 (9, Lema 2.1, pag. 750)** *Para cualesquiera dos continuos $X$ y $Y$ y una función $f : X \to Y$, los siguientes enunciados son equivalentes:*
*(8.38.1) $f$ es una función monótona de $X$ a $Y$;*
*(8.38.2) $2^f$ es una CE-función suprayectiva de $2^X$ a $2^Y$;*
*(8.38.3) $C(f)$ es una CE-función suprayectiva de $C(X)$ a $C(Y)$.*

**Lema 8.39 (9, Lema 2.2, pag. 751)** *Sea $f$ una función monótona y suprayectiva de un continuo $X$ a un continuo $Y$. Entonces hay continuos de Peano $X_i$ y $Y_i$, $i = 1,2,\ldots$, y una función $F : X_1 \to Y_1$ tal que $X_i \supset X_{i+1}$ y $Y_i \supset Y_{i+1}$ para toda $i$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i = X$, $\bigcap_{i=1}^{\infty} Y_i = Y$, $F|_{X_i}$ es una función monótona y suprayectiva de $X_i$ a $Y_i$, para toda $i$, y $F|_X = f$.*

**Demostración.** Para cada n = 1,2,..., sea $I_n = [0,1]$.

Sea $Q = \Pi_{n=1}^{\infty} I_n$ con la métrica del producto cartesiano $d$ dada por
$$d((u_n)_{n=1}^{\infty},(v_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |u_n - v_n|$$
para toda $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, $(v_n)_{n=1}^{\infty} \in Q$.

Consideremos que X y Y están en Q de tal manera que para toda $(z_n)_{n=1}^{\infty} \in X \cup Y$, $z_n = 0$ para toda n = 2,4,6,....[6, pag. 23].

Sean ahora $u = (u_n)_{n=1}^{\infty}$, $v = (v_n)_{n=1}^{\infty}$ en $X \cup Y$, y $j = 1,2,3,\ldots$, definimos $\langle u,v;j\rangle$ como sigue :

Si $u \neq v$, entonces $\langle u,v;j\rangle$ es el arco en Q de $u$ a $v$ definido como
$\langle u,v;j\rangle = \{(q_n)_{n=1}^{\infty} \in Q$ : para alguna $t \in [0,1]$,
$q_n = (1-t)u_n + tv_n$ para toda $n \neq 2j$ y $q_{2j} = t - t^2\}$
y, si $u = v$, entonces
$\langle u,v;j\rangle = \{u\}$.

Llamemos C al conjunto clásico de Cantor en el intervalo [0,1] de acuerdo con la Definición 8.33,

y sea $(a_j, b_j)$, $j = 1,2,\ldots$, una enumeración uno a uno de las componentes de $[0,1] - C$.

Sea $g$ una función suprayectiva de C a X, cuya existecia queda garantizada por el Teorema 8.34.

Entonces, para cada $i = 1,2,\ldots$, sea
$$X_i = X \cup \left( \bigcup_{j=i}^{\infty} \left\langle g(a_j), g(b_j); j \right\rangle \right),$$
y
$$Y_i = Y \cup \left( \bigcup_{j=i}^{\infty} \left\langle f(g(a_j)), f(g(b_j)); j \right\rangle \right).$$

Ahora definiremos $F : X_1 \to Y_1$.

Para cada $j = 1,2,\ldots$, definimos una función $F_j$ en $\left\langle g(a_j), g(b_j); j \right\rangle$ como sigue:

Si $f(g(a_j)) \neq f(g(b_j))$, entonces $F_j$ es un homeomorfismo suprayectivo del arco $\left\langle g(a_j), g(b_j); j \right\rangle$ al arco $\left\langle f(g(a_j)), f(g(b_j)); j \right\rangle$ tal que $F_j$ coincide con $f$ en los dos puntos $g(a_j)$ y $g(b_j)$.

Si $f(g(a_j)) = f(g(b_j))$, entonces $F_j$ es una función que mande el arco $\left\langle g(a_j), g(b_j); j \right\rangle$ al conjunto formado por el punto $\left\langle f(g(a_j)), f(g(b_j)); j \right\rangle$.

Ahora definimos $F : X_1 \rightarrow Y_1$ como

$$F(p) = \left\{ \begin{array}{c} f(p), \text{ si } p \in X \\ F_j(p), \text{ si } p \in \left\langle g(a_j), g(b_j); j \right\rangle \end{array} \right\}$$

Notemos que los arcos unidos a X para obtener $X_1$ sólo intersectan a X en sus puntos finales y son mutuamente ajenos excepto posiblemente en los puntos finales. Lo mismo ocurre con los arcos agregados a Y para obtener $Y_1$. Usando estas observaciones obtenemos que F es una función.

Ahora, probaremos que F es continua.

Sea $U$ un subconjunto abierto de $Y_1$, entonces

$$U = (U \cap Y) \bigcup_{i=1}^{\infty} (U \cap (\langle f(g(a_i)), f(g(b_i)); i \rangle - \{f(g(a_i)), f(g(b_i))\}),$$

es decir, puede verse como la unión ajena de conjuntos abiertos.

Como las funciones $f$ y $F_i$ son continuas para toda $i$ tenemos que:

$f^{-1}(U \cap Y)$ y

$F_i^{-1}(U \cap (\langle f(g(a_i)), f(g(b_i)); i \rangle - \{f(g(a_i)), f(g(b_i))\}))$

son abiertos para toda $i$.

Por lo tanto:

$$F^{-1}(U) = f^{-1}(U \cap Y) \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i^{-1}(U \cap (\langle f(g(a_i)), f(g(b_i)); i \rangle - \{f(g(a_i)), f(g(b_i))\}))$$

es un conjunto abierto de $X_1$.

Por lo tanto F es continua.

También tenemos que $g$ puede ser extendida a una función G suprayectiva del $[0,1]$ a $X_1$ tal que para toda $i \succ 1$, G manda , de manera suprayectiva, al $[0,1] - \bigcup_{j=1}^{i-1} (a_j, b_j)$ en X.

De aquí, por el Teorema 8.19, cada $X_i$ es un continuo de Peano.

Entonces, como $F(X_i) = Y_i$, cada $Y_i$ es un continuo de Peano.

La monotonía de $F|_{X_i}$ para cada $i$ se sigue de la monotonía de $f$ y de las observaciones hechas acerca de los arcos añadidos a Y (notemos que dos arcos diferentes en $X_i$ van a arcos diferentes en $Y_i$ bajo $F|_{X_i}$).

Las otras propiedades mencionadas en el Lema se satisfacen por construcción. ■

Y un resultados más que no será probado pero cuya demostración puede ser consultada en [1, pag. 136] es el siguiente.

**Teorema 8.40** *Sean $X$ y $Y$ espacios métricos, compactos, retractos absolutos. Si $f : X \to Y$ es una CE-función suprayectiva de $X$ en $Y$, entonces $f$ es universal.*

Y con esto podemos probar el siguiente Teorema.

**Teorema 8.41 (9, Teorema 2.3, pag. 752)** *Si $f$ es una función monótona y suprayectiva de un continuo $X$ a un continuo de Peano $Y$, entonces $2^f : 2^X \to 2^Y$ y $C(f)\ : C(X) \to C(Y)$ son universales.*

**Demostración.** Probaremos el Teorema para $C(f)$ la prueba para $2^f$ es similar.

Sea $g$ una función de C(X) en C(Y).

Sean $X_i$, $Y_i$ y F como en el Lema anterior.

Entonces, como $X_1$ es localmente conexo, su hiperespacio $C(X_1)$ resulta retracto absoluto, y por lo tanto, $g$ puede extenderse a una función $G : C(X_1) \to C(Y)$.

Fijemos $i$.

Por el Lema 8.39, $X_i$ y $Y_i$ son continuos de Peano y $F|_{X_i} = F_i$ es una función monótona y suprayectiva de $X_i$ en $Y_i$. Entonces, $C(X_i)$ y $C(Y_i)$ son retractos absolutos y, por el Lema 8.38, $C(F_i)$ es una CE-*función* suprayectiva de $C(X_i)$ a $C(Y_i)$. Entonces, por el Teorema 8.40, $C(F_i)$ es universal.

Por tanto, como $G|_{C(X_i)}$ manda $C(X_i)$ a $C(Y_i)$, existe $A_i \in C(X_i)$ tal que $C(F_i)(A_i) = G(A_i)$.

Observe que como $X_i \subset X_1$, $A_i \in C(X_1)$ y $C(F)(A_i) = G(A_i)$.

Hemos demostrado que tal $A_i$ existe para todo $i = 1,2,\ldots$.

Ahora, como $C(X_1)$ es compacto, la sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente $\{A_{i(k)}\}_{k=1}^{\infty}$.

Sea $A = \lim\limits_{k\to\infty} A_{i(k)}$.

Entonces, como $C(F)(A_{i(k)}) = G(A_{i(k)})$ para cada $k$, se sigue de la continuidad de C(F) y de G que $C(F)(A) = G(A)$.

Como $A_{i(k)} \in C(X_{i(k)})$ para cada $k$ y como $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} X_{i(k)} = X$ (por el Lema 8.39), tenemos que $A \in C(X)$.

De aquí, $G(A) = g(A)$ y, como $F|_X = f$ (por el Lema 8.39), $C(F)(A) = C(f)(a)$.

Por lo tanto, $C(f)(A) = g(A)$ y así tenemos que $C(f)$ es universal. ■

Y como corolario tenemos el siguiente enunciado.

**Corolario 8.42 (9, Corolario 2.4, pag. 752)** *Si $f$ es una función monótona y supravectiva de un continuo $X$ a un continuo de Peano $Y$ y $g$ es cualquier función de $X$ a $Y$, hay un subcontinuo $A$ de $X$ tal que $f(A) = g(A)$.*

El Teorema 8.41 puede ser utilizado como argumento para mostrar que ni (b) ni (c) (o ambos) implican (a). De hecho, si $f$ es la función identidad en el círculo unitario, entonces las dos funciones inducidas son universales por el Teorema 8.41, mientras que $f$ no lo es por la Proposición 2.6. Un Ejemplo es construido en [9, Ejemplo 12] demostrando que (a) no implica ni (b) ni (c).

El trabajo que realizaremos a continuación y las definiciones que vamos a ver, van encaminados a demostrar algunos resultados que utilizaremos en las demostraciones de los Teoremas 8.51 y 8.53 que serán lo último que se hará en esta tesis. Primero nos encaminaremos en la búsqueda de alguna relación entre $f$, $2^f$ y $C(f)$ cuando al menos una de ellas es abierta.

**Definición 8.43** ***lim inf*** $\boldsymbol{A_i}$ = *{$x \in X$: para toda vecindad $U$ de $x$ ocurre que $U \cap A_i \neq \phi$ para toda $i$ excepto quizá para un número finito}.*

***lim sup*** $\boldsymbol{A_i}$ = *{$x \in X$: para toda vecindad $U$ de $x$ ocurre que $U \cap A_i \neq \phi$ para una infinidad de $i$}.*

**Teorema 8.44 (4 , Lema 4.1)** *Sea $f : X \to Y$ continua.*

*Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

*(8.44.1) $f$ es abierta;*

*(8.44.2) Para toda sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en $Y$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ entonces $\limsup f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$;*

*(8.44.3) Para toda sucesión $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ en $Y$ tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, $(f^{-1}(y_n))_{n=1}^{\infty}$ converge a $f^{-1}(y)$.*

**Demostración.** Es obvio que (8.44.3) implica (8.44.2).

Así que empezaremos demostrando que (8.44.1) implica (8.44.3).

Suponemos $f$ abierta y sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Y tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

Primero veremos que $\lim\sup f^{-1}(y_n) \subset f^{-1}(y)$.

Sea $x \in \lim\sup (f^{-1}(y_n))$.

Entonces existe una sucesión $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $x_i \to x$ y $x_i \in f^{-1}(y_{n_i})$.

Como $f$ es continua, entonces $f(x_i) \to f(x)$, es decir, $y_{n_i} \to f(x)$ y por lo tanto $f(x) = y$.

Entonces $x \in f^{-1}(y)$.

Falta probar que $f^{-1}(y) \subset \lim\inf f^{-1}(y_n)$.

Sea $x \in f^{-1}(y)$ y $U$ una vecindad abierta de $x \in$ X.

Como $f(U)$ es vecindad de $y$, hay un $n_0$ tal que $y_n \in f(U)$ y $f^{-1}(y_n) \cap U \neq \phi$ para toda $n \geq n_0$.

Entonces $x \in \lim\inf f^{-1}(y_n)$ y de aquí $f^{-1}(y) \subset \lim\inf f^{-1}(y_n)$.

Ahora veremos que (8.44.2) implica (8.44.1).

Sea $U \subset$ X abierto. Sea $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en Y tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, y además $y_n \in (f(U))^c$.

Basta probar que $y \in (f(U))^c$.

Supongamos que $y \in f(U)$.

Entonces existe un punto $x \in U \subset X$ tal que $f(x) = y$ pero por hipótesis $\lim\sup f^{-1}(y_n) = f^{-1}(y)$ entonces $x \in \lim\sup f^{-1}(y_n)$.

Por lo tanto existe una subsucesión $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de la sucesión original $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ y elementos de $(f^{-1}(y_{n_k})_{k=1}^{\infty})$ tales que convergen a $x$.

Entonces $f^{-1}(y_{n_k}) \cap U \neq \phi$ para una infinidad de elementos, con lo cual contradecimos el hecho de que $y_{n_k} \in (f(U))^c$.

Por lo tanto $y \in (f(U))^c$, es decir ,$(f(U))^c$ es cerrado o bien $f(U)$ es abierto.

■

**Definición 8.45** *Para toda colección de abiertos $U_1,\ldots,U_n$ en $X$ sea*
$$\langle U_1,\ldots,U_n\rangle = \left\{ A \in 2^X : A \subset \bigcup_{i=i}^{n} U_i \text{ y } A\cap U_i \neq \phi \text{ para toda } i = 1,\ldots,n\right\}.$$

**Teorema 8.46 (4, Teorema 4.3, pag 243)** *Sea $f : X \to Y$ continua. Consideremos los siguientes enunciados:*

*(8.46.1) $f$ es abierta.;*

*(8.46.2) $C(f)$ es abierta;*

*(8.46.3) $2^f$ es abierta.*

*Entonces (8.46.1) es equivalente a (8.46.3) y (8.46.2) implica (8.46.1).*

**Demostración.** Primero veremos que (8.46.1) implica (8.46.3).

Si $f$ es abierta sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $2^Y$ tal que $\lim_{n\to\infty} B_n = B$.

Como $2^f$ es continua, $\limsup (2^f)^{-1}(B_n)$ está contenido en $(2^f)^{-1}(B)$.

Sea A un elemento arbitrario de $(2^f)^{-1}(B)$ y sean $U_1,...,U_r$ abiertos de X tales que
$A \in \langle U_1, ..., U_r\rangle$.

Como A es compacto hay abiertos $V_1,...,V_r$ de X tales que
$cl(V_i) \subset U_i$ para toda $i = 1,...,r$ y $A \in \langle V_1, ..., V_r\rangle$.

Como $f$ es abierta, entonces
$\langle f(V_1),...,f(V_r)\rangle$ es una vecindad abierta de $f(A) = B$ en $2^Y$.

Entonces hay una n tal que
$B_n \in \langle f(V_1),...,f(V_r)\rangle$ para $n \geq n_0$.

Sea $A_n = f^{-1}(B_n) \cap (\bigcup_{i=1}^{r} cl(V_i)) \neq \phi$.

Entonces $A_n \in (2^f)^{-1}(B_n) \cap [\langle U_1, ..., U_r\rangle]$.

Con lo cual $A \in \liminf (2^f)^{-1}(B_n)$.

Entonces por el Teorema anterior $2^f$ es abierta.

Ahora veremos que (8.46.3) implica (8.46.1).

Sean $2^f$ abierta, $U$ un abierto de X y $x \in U$.

Como $\langle U\rangle$ es abierto y vecindad de $\{x\} \in 2^X$, $2^f(\langle U\rangle) = \langle f(U)\rangle$ es vecindad abierta de $\{f(x)\} \in 2^Y$.

Entonces $f(U)$ es vecindad de $f(x)$.

Como $x$ es arbitrario en $U$, $f(U)$ es abierto en Y.

La demostración de (8.46.2) implica (8.46.1) es idéntica. Con lo cual concluye la prueba. ■

Para demostrar el Teorema 8.51 que relaciona la monotonía de $f$ con el hecho de que $C(f)$ sea abierta, necesitaremos la siguiente definición y los dos resultados posteriores en los que la mencionaremos.

**Definición 8.47** *Sean $S_1$ y $S_2$ espacios topológicos. Una función $f : S_1 \to S_2$ es llamada* ***confluente*** *si para cualquier subcontinuo $B$ de $S_2$ y para cualquier componente $A$ de $f^{-1}(B)$, se tiene que $f(A) = B$.*

**Lema 8.48 (7, Lema 13.13, pag. 284)** *Sean $S_1$ y $S_2$ espacios topológicos, y sea $f$ una función abierta y supráyectiva de $S_1$ en $S_2$. Si $Z \subset S_2$, entonces $f|_{f^{-1}(Z)}: f^{-1}(Z) \to Z$
es una función abierta.*

**Demostración.** Sea $g = f\mid_{f^{-1}(Z)}$, y sea $W$ una abierto de $f^{-1}(Z)$.

Entonces, hay un abierto $U$ de $S_1$ tal que
$U \cap f^{-1}(Z) = W$.

Entonces, como $f$ es una función abierta, $g(W)$ es abierto en $Z$. Con lo cual se concluye la prueba. ■

**Teorema 8.49 (7, Teorema 13.14, pag. 284)** *Toda función abierta y suprayectiva entre espacios métricos compactos es confluente.*

**Demostración.** Sea $f : X \to Y$ una función continua y suprayectiva entre espacios métricos compactos $X$ y $Y$.

Supongamos que $f$ no es confluente.

Entonces, existe un subcontinuo $B$ de $Y$ y una componente $A$ de $f^{-1}(B)$ tal que
$f(A) \neq B$ ( por la Definición 8.47 ).

Entonces, como $f(A) \subset B$, existe un punto $p \in B$ tal que
$A \cap f^{-1}(p) = \phi$.

Entonces, como $A$ es una componente de $f^{-1}(B)$, tenemos por el Teorema 8.26 que:
$f^{-1}(B) = G \cup H$,
$G \neq \phi$ y $H \neq \phi$,
$G \cap H = \phi$,
y ambos son abiertos en $X$.

Con $A \subset G$ y $f^{-1}(p) \subset H$.

Notemos que:
$f(G)$ es cerrado en $B$ [ ya que $G$, al ser cerrado en $f^{-1}(B)$, es compacto],
$f(G)$ es abierto en $B$ [ por el Lema 8.48 y por ser $G$ es abierto en $f^{-1}(B)$],
$f(G) \neq \phi$ [ $G \neq \phi$] y
$f(G) \neq B$ [ $p \notin G$].

Estos hechos contradicen la conexidad de $B$. Con lo cual queda demostrado el resultado. ■

Por último necesitaremos definir qué entenderemos por un arco ordenado en los hiperespacios.

**Definición 8.50** *Un arco $\alpha$ en $2^X$ o en $C(X)$ es llamado un* ***arco ordenado*** *si para todo $a_1, a_2 \in \alpha$ tenemos que $a_1 \subset a_2$ o $a_2 \subset a_1$.*

**Teorema 8.51 (4, Teorema 1, pag. 3729)** *Sea $X$ un continuo localmente conexo, y una función $f : X \to Y$ tal que la función inducida $C(f) : C(X) \to C(Y)$ es abierta. Entonces $f$ es monótona.*

**Demostración.** Supongamos que $f$ no es monótona.

Sean $p$ y $q$ dos puntos en X tales que $f(p) = f(q)$ y además pertenecen a componentes distintas de $f^{-1}(f(p))$.

Por continuidad sabemos que existe un número positivo, $\epsilon > 0$, tal que para todo L $\subset$ Y ( L continuo) tal que
$f(p) \in$ L y $H(L, \{f(p)\}) < \epsilon$
las componentes de $f^{-1}$(L) que contienen a $p$ y $q$ son distintas.

Por conexidad local de Y existe un continuo V tal que
$f(p) \in$ int(V) y
$H(V, \{f(p)\}) < \epsilon$,
es decir, V $\subseteq$ $B_Y(f(p),\epsilon)$.

Sean $U_p$ y $U_q$ las componentes de $f^{-1}$(V) que contienen a $p$ y $q$.

Como en continuos localmente conexos las componentes de abiertos son abiertas concluimos que
$p \in \text{int}(U_p)$ y $q \in \text{int}(U_q)$.

Sea $\delta > 0$ tal que $B_X(p,\delta) \subset U_p$ y $B_X(q,\delta) \subset U_q$.

Sea B un arco ordenado en C(Y) de $\{f(p)\}$ a Y a través de V.

Definamos A como un subconjunto de B, compuesto por todos los elementos $l \in$ B tales que la componente de $f^{-1}$(L) que contiene a $p$ es distinta de la componente de $f^{-1}$(L) que contiene a $q$.

Observe que V $\in$ A y que si L, L' $\in$ B, L $\in$ A y L' $\subset$ L entonces L' $\in$ A. Entonces A es subconjunto conexo de B y contiene a $\{f(p)\}$ y a V.

Consideremos $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $B - A$, tal que $\lim_{n\to\infty} L_n = L$.

Llamemos $Q_n$ a la componente de $f^{-1}(L_n)$ que contiene a $p$ y $q$.

Como C(X) es compacto, existe una subsucesión $(Q_{n_k})_{n_k \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} Q_{n_k} = Q$ para algún Q $\in$ C(X).

Como C($f$) es abierta entonces por el Teorema 8.46 $f$ es abierta y por lo tanto, por el Teorema 8.49, $f(Q_{n_k}) = L_{n_k}$. Y como el límite de conexos es conexo, entonces $f^{-1}$(L) contiene a $p$ *y* $q$ en la misma componente.

Por lo tanto L $\in B - A$ con lo cual tenemos que $B - A$ es cerrado y por consecuencia A es abierto de B.

Sea S = sup A = inf (B$-$A).

Entonces S $\in$ $cl$(A)$-$A.

Sea P la componente de $f^{-1}(S)$ que contiene a ambos $p$ y $q$.

Como C($f$) es abierta entonces $f$ es abierta, entonces por el Teorema 8.49 $f(P) = S$.

Veamos que $C(f)(B_{C(X)}(P,\delta))$ no es abierto en C(Y).

Supongamos lo contrario. Entonces hay un continuo $K \in B_{C(X)}(P,\delta)$ con $f(K) \in A$.

Como $p,q \in P$ y $H(P,K) < \delta$ entonces $K \cap U_p \neq \phi \neq K \cap U_q$.

Entonces $U_p \cup K \cup U_p$ es un continuo que contiene a $p$ y a $q$ y además su imagen es

$f(U_p \cup K \cup U_q) = f(K)$ que está en A, contrario a la definición de A. Con lo cual se termina la prueba. ∎

Y como consecuencia tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 8.52 (2)** *Si $f : X \to Y$ es una función definida en un continuo localmente conexo X tal que la función inducida $C(f) : C(X) \to C(Y)$ es abierta, entonces*

*(8.52.1) $f$ es abierta y monótona;*

*(8.52.2) $2^f$ es abierta, monótona y universal;*

*(8.52.3) C(f) es monótona y universal.*

**Demostración.** Si X es localmente conexo y C($f$) es abierta, entonces $f$ es monótona por el Teorema 8.51.

La monotonía de $f$ es equivalente a que las dos funciones inducidas sean monótonas, por el Lema 8.38. Más aún, si C($f$) es abierta entonces $f$ y $2^f$ son abiertas.

Finalmente, la monotonía de $f$ implica que el espacio Y es localmente conexo, de esta forma, la universalidad de las dos funciones inducidas es consecuencia del Teorema 8.41. Con lo cual la prueba queda completa. ∎

Como resultado final veremos otra aplicación común de los Teoremas 8.51 y 8.41.

**Teorema 8.53 (2)** *Sean X y Y continuos, y sea $f : X \to Y$ la función composición $f = f_2 \circ f_1$ de funciones $f_1 : X \to Z$ y $f_2 : Z \to Y$ para un continuo Z localmente conexo tal que $f_1$ es monótona, y la función inducida $C(f_2) : C(Z) \to C(Y)$ es abierta. Entonces:*

*(8.53.1) $f$ es monótona;*

*(8.53.2) $2^f$ es monótona y universal;*

*8.53.3) C(f) es monótona y universal.*

**Demostración.** Como Z es localmente conexo y $C(f_2)$ es abierta, podemos utilizar el Teorema 8.51 y tenemos que $f_2$ es monótona, de aquí se sigue que $f$ es monótona por ser la composición de dos funciones monótonas. Que $f$ sea monótona es equivalente a que las dos funciones inducidas sean monótonas, por el Lema 8.38. Como Y es localmente conexo, el resto de la conclución es consecuencia del Teorema 8.41. ■

# Bibliografía

[1] Karol Borsuk. Shape Theory, Polish Scientific Publishers, Warsawa 1975.

[2] Janusz J. Charatonik y W.J. Charatonik. Questions on induced universal mappings, Questions Answers General Topology 16 (1988), 127-131.

[3] Janusz J. Charatonik y Raúl Escobedo, On semi-universal mappings, in: A. Illanes, W. Lewis and S. Macías (Eds.), Continuum Theory: Proceedings of the Special Session in Honor of Professor Sam B. Nadler, Jr's 60th birthday, in: Lecture Notes Pure Appl. Math., Vol. 230, Marcel Dekker, New York, 2002.

[4] W. J. Charatonik, Openness and monotoneity of induced mappings, Proc. Amer. Math. Soc. 127, No.12, (1999).

[5] W. Holsztynsky, Universal mappings and fixed point theorems, Bulletin de L'académie Polonaise Des Sciences, Vol. 15, No.7, (1967), 433-438.

[6] K. Kuratowski. Topology, Vol. II, Acad. Press, New York, N.Y., 1968.

[7] S.B. Nadler, Jr. Continuum Theory. An Introduction. M. Dekker 1992.

[8] S.B. Nadler, Jr. Hyperspaces of Sets, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, Inc., New York, N.Y., (1978).

[9] S.B. Nadler, Jr. Induced universal maps and some hyperspaces with the fixed point property, Proc. Amer. Math. Soc. 100, (1987), 749-754.

[10] S.B. Nadler, Jr. Universal mappings and weakly confluent mappings, Fund. Math. 100, (1980), 221-235.