



00365 II

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

10

FACULTAD DE CIENCIAS
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMATICAS

**"CICLOS FOLIADOS Y
MEDIDAS INVARIANTES"**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADEMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
P R E S E N T A:
LUIS JOSE YUDICO ANAYA

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSE ANTONIO SEADE KURI

MEXICO, D.F.

NOVIEMBRE 2003.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACIÓN DISCONTINUA

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Autorizo a la Dirección General de Estadística de UNAM a difundir en formato electrónico el contenido de mi trabajo científico.

NOMBRE: Luis José Yudica Anaya

FECHA: 171 Nov. 1 2003

FIRMA: [Signature]

Índice General

Lista de Notación	v
Introducción	ix
1 Preliminares	1
1.1 Variedades Foliadas	1
1.2 Holonomía	10
2 Corrientes	19
2.1 Corrientes sobre Variedades	20
2.2 Corrientes Foliadas	37
3 Ciclos Foliados y Medidas Invariantes por Holonomía	49
3.1 Teorema de Sullivan	50
A Integración Fibrada	61
A.1 El Haz Vertical	61
A.2 El Sub-Haz Horizontal	63
A.3 Formas Diferenciables	64
A.4 Orientación en Haces Fibrados	65
A.5 Orientación Producto Local	66
A.6 La Integral Fibrada	66

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

A.7 Formas Diferenciables	68
A.8 Productos	69
A.9 Propiedades de la Integral fibrada f_P	70
Bibliografía	73

Lista de Notación

El orden de la lista corresponde al orden en el que aparecen en el trabajo.

- D_μ Espacio de μ -forma diferenciables sobre M .
- \mathbb{R} Numeros Reales.
- \mathfrak{F} Foliación.
- \mathbb{R}^n Espacio Eclideano de dimensión n .
- \mathbb{H}^n Semi-espacio inferior de \mathbb{R}^n .
- \mathbb{K}^n \mathbb{R}^n o \mathbb{H}^n .
- $\mathfrak{F} \pitchfork N$ Foliación transversa a N .
- C^r Clase de diferenciabilidad de orden r .
- $T_x(N)$ Espacio tangente a la variedad N en el punto $x \in N$.
- \emptyset Conjunto vacío.
- ∂B Frontera del conjunto B .
- (U, φ) Carta foliada.
- B_r y B_n Vecindades rectangulares en \mathbb{K}^q y \mathbb{K}^{n-q} respectivamente.
- $\partial_r U$ Frontera tangencial de la vecindad coordenada U .
- ∂_n Frontera transversa de la vecindad coordenada.
- $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ Atlas de cartas foliadas sobre una variedad.
- (M, \mathfrak{F}) Variedad foliada compacta de dimensión n de grado de diferenciabilidad $C^{1,0+}$.
- P_y Placa de carta foliada, donde $y \in B_n$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

S_x	Transversal de una carta foliada, donde $x \in B_r$, en esta carta foliada. A veces denotaremos por S_α a una transversal genérica de la carta foliada con índice α .
$\partial_r(M)$	Frontera tangencial de la variedad M .
$\partial_n(M)$	Frontera transversa de la variedad M .
$\mathfrak{A} = \{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$	Atlas de cartas coherentemente foliadas de clase de diferenciabilidad C^r sobre una variedad foliada.
\bar{U}	Cerradura topológica del conjunto U .
$\Gamma = \{\gamma_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in \mathfrak{A}}$	Cociclo de holonomía del atlas foliado regular \mathfrak{A} .
$C^{r,k}$	Clase de diferenciabilidad de atlas foliado con $r > k \geq 0$, donde las componentes de las cartas de este atlas son de clase de diferenciabilidad C^k , pero en la dirección tangencial son de clase de diferenciabilidad C^r .
$T(M)$	Haz tangente a la variedad M .
$T(\mathfrak{F})$	Haz tangente a la foliación \mathfrak{F} .
$GL(\mathbb{R}, k)$	Grupo general lineal de matrices cuadradas de tamaño $k \times k$ con coeficientes reales.
$C^{r,0+}$	Clase de diferenciabilidad de una variedad foliada (M, \mathfrak{F}) donde cada hoja es una sub-variedad inmersa de clase C^1 y la inclusión natural del haz tangente a la foliación $T(\mathfrak{F})$ en el haz tangente de la variedad $T(M)$ se encaja como un sub-haz continuo de k -planos en $T(M)$.
D_p	Conjunto de p -formas diferenciables sobre una variedad con topología τ .
D_p^k	Conjunto de p -formas diferenciables sobre una variedad con topología τ_k .
$\ \cdot \ _k$	Norma que está definida sobre las p -formas diferenciables sobre una variedad relativa a una cubierta.

τ_k	Topología del espacio de p -formas diferenciables sobre una variedad determinada por la norma \mathcal{E}^k .
τ	Topología generada por la unión de las topologías τ_k , con $k \geq 0$.
$d : D_p \rightarrow D_{p+1}$	Diferencial exterior.
sup	supremo de un conjunto.
$\frac{\partial}{\partial x_i}$	Vector canónico del espacio tangente a un punto en una variedad con respecto a un sistema coordinado en la componente x_i .
$C^\infty(M)$	Espacio de funciones diferenciables sobre una variedad diferenciable M .
D'_p	El espacio vectorial topológico de corrientes de grado p o también llamadas p -corrientes sobre una variedad. Este es el dual fuerte de D_p y consiste de las funcionales lineales continuas sobre D_p .
v_x	Denota un p -vector.
φ_{v_x}	Corriente de Dirac. Cuando v_x es un p -vector tangente a una hoja de una foliación la llamaremos corrientes foliadas de Dirac.
α	Campo continuo de p -vectores a la variedad.
μ, ν y ν_c	Medidas de Borel Regulares.
φ_μ	Corriente determinada por la medida μ sobre una variedad.
$\varphi_{\alpha, \nu}$	Corriente asociada a un campo continuo α de p -vectores y una medida ν invariante por holonomía.
$V_{0,c}$	Base de vecindades del cero en el espacio de p -corrientes D'_p .
τ'	Topología del espacio de p -corrientes D'_p .
L'	Transformación adjunta de la aplicación lineal L .
∂	Operador adjunto de la diferencial exterior d . Este es además el operador frontera para la Homología de De Rham.
Z_p	Sub-espacio lineal de p -corrientes cerradas o p -ciclos en D'_p .
B_p	Subespacio lineal de p -corrientes exactas o p -fronteras en D'_p .

$H^{DR}(M)$	p -ésimo grupo de Homología de De Rham de la variedad M .
$H^p(M, \mathbb{R})$	p -ésimo grupo de cohomología de De Rham de la variedad M .
$H_p(M, \mathbb{R})$	p -ésimo grupo de Homología Singular de la variedad M .
$(H^p(M, \mathbb{R}))'$	Espacio dual del p -ésimo grupo de cohomología de De Rham de M , que es por definición $\text{Hom}(H^p(M; \mathbb{R}); \mathbb{R})$. Por el Teorema de De Rham este espacio dual se identifica canónicamente con el p -ésimo grupo de homología singular, $H_p(M, \mathbb{R})$.
$C_p(M; \mathbb{R})$	Espacio vectorial de p -cadenas singulares sobre la variedad M .
∂_*	Operador frontera de la homología singular.
$\bigwedge^p(T_x M)$	Espacio vectorial de p -vectores tangentes a la variedad M .
$C_{\mathfrak{F}}$	Cono convexo con base compacta generado por la cerradura topológica de las corrientes foliadas de Dirac, sus elementos son las corrientes foliadas de la variedad.
$\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{U}}$	Partición de la unidad subordinada a una cubierta \mathfrak{U} .
$Z_{\mathfrak{F}_p} = Z_p \cap C_{\mathfrak{F}}$	Ciclos foliados.
$B_{\mathfrak{F}_p} = B_p \cap C_{\mathfrak{F}}$	Fronteras foliadas.
$C_{\mathfrak{F}}$	Base compacta de $C_{\mathfrak{F}}$ determinada por una forma transversa a la foliación, ver nota 2.2.5. La noción de forma transversa a la foliación, se encuentra desarrollada en el Lema 2.2.1 y es la definición 2.2.2.
$C_{\mathfrak{F}}^*$	El cono dual de $C_{\mathfrak{F}}$ en $H^p(M; \mathbb{R})$.
∂x_α	p -vector asociado canónicamente a la carta coordenada $(U_\alpha, x_\alpha, y_\alpha)$.
$D_p^c(V) \subset D_p$	El subespacio de formas diferenciables con soporte compacto en V .
$D_p^c(V)'$	El espacio dual de funcionales lineales continuas sobre $D_p^c(V)$.

Introducción

Del estudio de flujos sobre variedades al igual que del estudio de representaciones de difeomorfismos de una variedad diferenciable, se llega de una manera natural a la noción de *foliación o variedad foliada*. Dentro de la teoría de variedades foliadas existe lo que comúnmente se llama el *pseudo-grupo de holonomía de la foliación*, que es un objeto intrínseco a la foliación y que permite estudiar de una manera cualitativa la dinámica de las *hojas de una foliación*. Éste es uno de los conceptos más importantes dentro de la teoría de variedades foliadas ya que nos permite pasar de la teoría de variedades a diversas áreas de la matemática, como son el álgebra, el análisis, los sistemas dinámicos y la geometría.

En la teoría de grupos de difeomorfismos a un parámetro, donde se considera una acción diferenciable del grupo de los números reales (\mathbb{R}) sobre una variedad diferenciable, existe el problema de determinar si existe una medida definida sobre la variedad, tal que sea invariante bajo la acción diferenciable de \mathbb{R} . En general, cuando se asocia de alguna manera un conjunto de funciones que satisfagan ciertas condiciones sobre un objeto geométrico con ciertas propiedades, una de las preguntas más comunes es la de conocer el comportamiento o dinámica de dichas funciones sobre el objeto geométrico. Una de las teorías que surgieron de esta manera es, por ejemplo, la *teoría ergódica*, que

trata de encontrar medidas en el objeto que sean invariantes bajo el conjunto de funciones. Ya que en el estudio de grupos de transformaciones, los pseudo-grupos aparecen de manera natural al considerar difeomorfismos locales entre dos variedades, es natural preguntarse si existirán medidas definidas en una variedad foliada que sean invariantes bajo el pseudo-grupo de holonomía de una foliación.

Por otro lado, al trabajar con variedades; uno se encuentra que existen teorías de *Homología* y *Cohomología* sobre ellas, siendo algunas de las más estudiadas las teorías de *Homología Singular* y la *Cohomología de De Rham* para el caso de una variedad diferenciable. Existe un conocido teorema llamado el *teorema de De Rham* que afirma que el *dual algebraico* de la *homología singular* es isomorfo a la *cohomología de De Rham*. A los *grupos de cohomología de De Rham* se les puede dar una estructura de espacios vectoriales topológicos localmente convexos y de Hausdorff, y uno puede de esta manera considerar el *dual topológico* de estos grupos, lo que da lugar a una *teoría de Homología de De Rham* y a sus elementos se les conoce como *corrientes*.

En el año de 1972 J. F. Plante escribe su artículo "*Foliations with Measure preserving Holonomy*"; [Pla75], define la noción de medidas invariantes por holonomía, y da condiciones sobre su existencia. Más tarde, en 1975 D. Sullivan y D. Ruelle, en su artículo "*Currents, Flows, and Diffeomorphisms*", [RS75] introducen el concepto de *corriente geométrica* sobre una variedad diferenciable. Dennis Sullivan tiene un teorema, el cual indica si es posible encontrar medidas en una variedad foliada que sean invariantes bajo el pseudogrupo de holonomía de la foliación en terminos de corrientes. Éste resultado se encuentra íntimamente relacionado con la existencia de ciertos tipos de elementos en los grupos de homología y cohomología de De Rham de la variedad.

Los ejemplos más comunes para tener una foliación están dados por submersiones que localmente son proyecciones. Como se verá más adelante la estructura local de una foliación se expresa en términos de submersiones. Los espacios fibrados dan lugar de manera natural a foliaciones y en este caso el teorema de Sullivan tiene una interpretación bastante sencilla:

Las medidas invariantes por holonomía en una variedad foliada que es una fibración, están en correspondencia biyectiva con las medidas sobre el espacio base invariantes por el pseudogrupo de holonomía.

Esta interpretación se basa en un tema ya conocido de la teoría de haces fibrados llamada *Integración Fibrada (Apéndice A)*.

En general la estructura de una variedad foliada es más complicada que en el caso de tener un fibrado. El espacio transversal en el caso de una fibración se puede considerar como el espacio base, cosa que en una foliación en general éste espacio transversal es bastante más complicado. El objetivo de este trabajo es dar una de las demostraciones de este resultado de Sullivan. Dado se mostrará como se resuelve el problema de que una foliación en general no es un fibrado localmente trivial.

Aunque tiempo después se mostró que estas medidas casi nunca existen, el resultado y la forma en la que se demuestra sigue siendo de gran belleza, ya que muestran claramente como el mundo de la matemática es uno solo. El presente trabajo está basado principalmente en [CC00]. Las teorías desarrolladas por L. Schwartz en [Sch50] y por G. De Rham [Rha84] son de gran ayuda para el entendimiento de la teoría general aquí desarrollada, sin embargo por lo extenso de sus trabajos no se incluyeron estas teorías, si no que simplemente nos referiremos a ellas para detalles técnicos.

La teoría de variedades con estructura foliada ha sido de gran interés y de-

sarrollada ampliamente en las últimas décadas. Uno de los principales puntos de partida de este trabajo, asume un poco del conocimiento de esta teoría, sin embargo en el capítulo 1, desarrollaremos el lenguaje básico de la teoría de variedades foliadas y explicaremos de una manera intuitiva lo que entenderemos por la holonomía de una foliación, nuestra referencia básica es [CC00].

El capítulo 2 consta de dos secciones. En la primera sección se desarrollará parte de la teoría general de corrientes en variedades y variedades foliadas. Para esto dotaremos al espacio de p -formas diferenciables sobre una variedad M de dimensión n para $0 \leq p \leq n$, de una topología que le dará una estructura de espacio vectorial topológico localmente convexo y Hausdorff. Estas corrientes se definen como funcionales lineales continuas sobre los espacios de formas diferenciables; es decir son elementos del Dual Topológico del espacio de formas. Utilizando la teoría de *análisis funcional* podremos posteriormente, definir la homología de De Rham. Haciendo énfasis principalmente en las *Corrientes de Dirac y las Corrientes de Integración*, definiremos lo que entenderemos por una *Medida Invariante por Holonomía* en una variedad foliada. Dotaremos al espacio de corrientes de una topología el cual lo identificará como el Dual Fuerte del espacio de formas diferenciables. Posteriormente veremos como los teoremas de *representación de Riesz, el teorema de Stokes y el teorema de De Rham* nos dan información de la homología de De Rham. En la segunda sección se definirán las *corrientes foliadas de Dirac* que son los elementos básicos para nuestra teoría de corrientes foliadas, pues éstas se definen por medio de la cerradura de las combinaciones lineales finitas con coeficientes positivos de las corrientes foliadas de Dirac. Introduciremos después la noción de una *forma transversa a la foliación*, que es una funcional lineal continua sobre el espacio de corrientes foliadas. Haciendo uso de la teoría de homología de De Rham, introduciremos lo que se entenderá por un

ciclo foliado y una frontera foliada. Finalmente, por medio del *teorema de Hahn-Banach*, se mostrarán algunas de las consecuencias de la existencia de una forma transversa a la foliación con respecto a los ciclos foliados y fronteras foliadas.

En el capítulo 3 se demostrará el *resultado principal de Denis Sullivan*, que afirma que *Todo ciclo foliado da lugar a una medida invariante por holonomía.* Primeramente se mostrará que todo ciclo definido por una medida invariante por holonomía, define un ciclo foliado. Después procederemos a demostrar haciendo uso del teorema de representación de Riesz, que todo ciclo foliado esta asociado con una corriente de integración. Finalmente considerando la medida asociada a un ciclo foliado, desarrollaremos una forma de definir nuevas medidas a partir de una medida original, que estará definida una sobre las placas y la otra sobre las transversales locales de la foliación, y se mostrará que esta última es una medida que es invariante por holonomía.

Capítulo 1

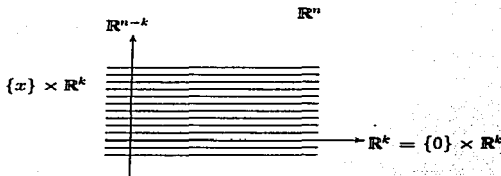
Preliminares

En este capítulo desarrollaremos el lenguaje básico de la teoría de Variedades Foliadas y explicaremos de una manera intuitiva lo que entenderemos por la holonomía de una foliación, nuestra referencia básica es [CC00].

1.1 Variedades Foliadas

Una foliación \mathcal{F} en una variedad diferenciable M de dimensión n formalmente se puede definir como una relación de equivalencia sobre M , donde las clases de equivalencia serán subvariedades inmersas y conexas, todas de la misma dimensión, digamos k . La foliación más sencilla y que además nos permite entender mejor la idea de lo que es una foliación está dada por la descomposición del espacio \mathbb{R}^n de la siguiente forma $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 1. Foliación de \mathbb{R}^n

Así, una foliación \mathfrak{F} localmente requiere que la descomposición en sus clases de equivalencia sea modelada sobre la descomposición anterior de \mathbb{R}^n en las clases $x + \mathbb{R}^k$, que son subespacios homeomorfos a \mathbb{R}^k y que están encajados de manera estandar en \mathbb{R}^n . A las clases de equivalencia de la foliación \mathfrak{F} se les llama las **hojas de la foliación**. Observemos que sobre la descomposición de \mathbb{R}^n , los subconjuntos de la forma $y + \mathbb{R}^{n-k}$ son transversos (en el sentido de topología diferencial) a los subconjuntos $x + \mathbb{R}^k$. Expresemos este hecho en una foliación general, para esto supongamos que $N \subset M$ es una subvariedad de clase C^∞ , diremos que la foliación \mathfrak{F} es **transversa a N** (que denotaremos por $\mathfrak{F} \pitchfork N$), si para cada hoja L de \mathfrak{F} y cada punto $x \in L \cap N \neq \emptyset$ se tiene que los espacios tangentes $T_x(L)$ y $T_x(N)$ de L y N respectivamente, juntos generan al espacio tangente $T_x(M)$. Análogamente, diremos que la foliación \mathfrak{F} es **tangente a N** , si para cada hoja L de \mathfrak{F} se tiene que $L \cap N = \emptyset$ ó $L \subset N$. Extendamos y precisemos un poco más lo anterior:

Denotemos por $\mathbb{K}^p = \mathbb{R}^p$ o \mathbb{H}^p donde $\mathbb{H}^p = \{(x^1, x^2, \dots, x^p) | x^1 \leq 0\}$. Una **vecindad rectangular en \mathbb{K}^n** es un subconjunto de la forma $B = J_1 \times \dots \times J_n$ donde cada J_i es un intervalo abierto relativo del i -ésimo eje coordenado. Si J_i es de la forma $(a, 0]$ diremos que el conjunto B tiene frontera que denotaremos por $\partial B = \{(0, x^2, \dots, x^n) \in B\}$. En este trabajo consideraremos el caso en el que las cartas coordenadas toman valores en $\mathbb{K}^{n-q} \times \mathbb{K}^q$, permitiendo de esta

manera la posibilidad de variedades con frontera y esquinas, sin embargo estas últimas no se considerarán. Sea M una variedad de dimensión n . Una **carta foliada sobre M de codimensión q** es una pareja (U, φ) , donde $U \subset M$ es un conjunto abierto y $\varphi : U \rightarrow B_r \times B_h$ es un difeomorfismo, con B_h una vecindad rectangular de \mathbb{K}^q y B_r una vecindad rectangular en \mathbb{K}^{n-q} . A los conjuntos de la forma $P_y = \varphi^{-1}(B_r \times \{y\})$ con $y \in B_h$ los llamaremos **placas** de la carta foliada, y para cada $x \in B_r$ al conjunto $S_x = \varphi^{-1}(\{x\} \times B_h)$ lo llamaremos una **transversal** de la carta foliada. Estas cartas foliadas serán los modelos locales de todas las foliaciones.

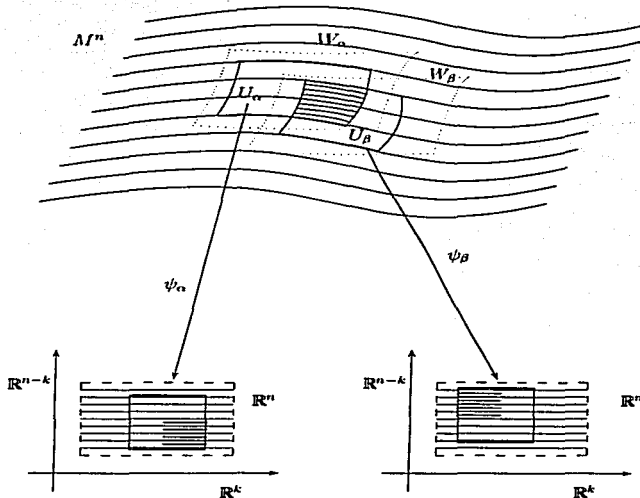


Figura 2. Cartas foliadas de una Variedad.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Por otro lado, al conjunto $\partial_r U = \phi^{-1}(B_r \times (\partial B_n))$ lo llamaremos **frontera tangencial de U** y al conjunto $\partial_n U = \phi^{-1}((\partial B_r) \times B_n)$ lo llamaremos la **frontera transversa de U** . Observemos que si B_r y B_n tiene frontera vacía, las cartas foliadas modelan n -variedades foliadas de codimensión q sin frontera. Si $\partial B_n \neq \emptyset = \partial B_r$, entonces $\partial U = \partial_r U$ es una unión de placas y se obtiene una foliación por placas que es tangente a la frontera. Por el otro lado si $\partial B_n = \emptyset \neq \partial B_r$, entonces $\partial U = \partial_n U$ es una unión de transversales y la foliación es transversa a la frontera. Por último, si $\partial B_n \neq \emptyset \neq \partial B_r$, entonces obtenemos un modelo de una variedad foliada con esquinas que separan la frontera tangencial con la frontera transversa.

Consideremos ahora una variedad M de dimensión n y una foliación $\mathfrak{F} = \{L_\lambda\}_{\lambda \in I}$ que es una descomposición de M en subvariedades immeridas y conexas de dimensión $k = n - q$. Supongamos que M admite un atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{U}}$ de cartas foliadas de codimensión q , tal que para cada $\alpha \in \mathcal{U}$ y cada $\lambda \in I$, $L_\lambda \cap U_\alpha$ es una unión de placas. Entonces diremos que \mathfrak{F} es una **foliación de M de codimensión q ó de dimensión k** , al atlas $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{U}}$ lo llamaremos **atlas foliado de \mathfrak{F}** y a veces nos referiremos a éste como el atlas foliado asociado a la foliación \mathfrak{F} . A cada L_λ la llamaremos **hoja de la foliación \mathfrak{F}** y al par (M, \mathfrak{F}) lo llamaremos **Variedad Foliada**. Si además el atlas foliado es de clase de diferenciabilidad C^r ($0 \leq r \leq \infty$ ó $r = \omega$), entonces diremos que la foliación \mathfrak{F} y la variedad foliada (M, \mathfrak{F}) son de clase C^r .

Nota 1.1.1. Implícitamente en la definición está el hecho de que las placas en distintas cartas foliadas se intersectan en subconjuntos abiertos de cada conjunto de placas, sin embargo no existe ningún requerimiento de compatibilidad para las transversales en distintas cartas foliadas.

Recordemos que una descomposición de un conjunto X en una familia de subconjuntos ajenos $\{X_i\}_{i \in I}$, significa que el conjunto se puede expresar como



una unión de estos subconjuntos X_i ; es decir, una descomposición del conjunto es una relación de equivalencia sobre el conjunto X y las clases de equivalencia son la familia de subconjuntos ajenos $\{X_i\}_{i \in I}$ que determinan la descomposición. Para el caso de una foliación \mathfrak{F} , podemos describir esta relación de equivalencia de la siguiente manera:

Sea $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{U}}$ un atlas foliado. Si x y y son puntos de M diremos que $x \sim y$ si y sólo si existe una sucesión finita de placas $\{P_{\alpha_i} \subset U_{\alpha_i}\}_{i=1}^p$ tal que $x \in P_{\alpha_0}$, $y \in P_{\alpha_p}$ y $P_{\alpha_{i-1}} \cap P_{\alpha_i} \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq p$.

Esto claramente define una relación de equivalencia sobre M cuyas clases de equivalencia son precisamente las hojas de la foliación, además esta relación de equivalencia sólo depende de la foliación y no del atlas foliado que se seleccione para definir la relación de equivalencia. Notemos que si la foliación es de clase C^r , cada hoja es entonces una subvariedad inmersa de clase C^r .

Ya que el modelo local de nuestra foliación tiene por rango subconjuntos rectangulares de \mathbb{K}^k y \mathbb{K}^{q-n-k} , nuestras variedades podrían en principio tener frontera, así que si tenemos una variedad foliada (M, \mathfrak{F}) y un atlas foliado $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{U}}$ asociado a \mathfrak{F} , entonces la **frontera tangencial de M** la definiremos por:

$$\partial_r(M) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{U}} \partial_r U_\alpha$$

y la **frontera transversa** la definiremos como:

$$\partial_n(M) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{U}} \partial_n U_\alpha$$

Es claro de las definiciones que:

1. La frontera tangencial de M es una unión de hojas de \mathfrak{F} .
2. \mathfrak{F} satisface que $\mathfrak{F} \pitchfork \partial_n(M)$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En el desarrollo de este trabajo, consideraremos siempre que si nuestra variedad M tiene frontera entonces $\partial(M) = \partial_r(M)$.

Otra manera alternativa en la cual podemos definir una foliación es dando solamente el atlas foliado sin ninguna referencia a la descomposición de M .

Definición 1.1.2. Un atlas foliado de codimensión q y de clase C^r ($0 \leq r \leq \infty$ ó $r = \omega$) sobre una variedad M , es un C^r -atlas $\mathfrak{U} = \{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{U}}$ de cartas foliadas de codimensión q las cuales son *coherentemente foliadas* en el siguiente sentido:

Siempre que P y Q sean placas en distintas cartas coordenadas de \mathfrak{U} , $P \cap Q$ será un subconjunto abierto de P y de Q .

Nota 1.1.3. Sea $\mathfrak{U} = \{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{U}}$ un C^r -atlas foliado de codimensión q sobre una variedad M de dimensión n . Para cada $z \in U_\alpha \cap U_\beta$ tenemos las expresiones locales:

$$\phi_\alpha(z) = (x_\alpha, y_\alpha) \in B_r^\alpha \times B_n^\alpha \quad (1.1)$$

$$\phi_\beta(z) = (x_\beta, y_\beta) \in B_r^\beta \times B_n^\beta \quad (1.2)$$

Denotemos a la carta foliada (U_α, ϕ_α) por $(U_\alpha, x_\alpha, y_\alpha)$ donde $x_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^k)$ y $y_\alpha = (y_\alpha^1, \dots, y_\alpha^q)$. Entonces sobre $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ tenemos la fórmula de cambio de coordenadas dada por:

$$g_{\alpha\beta}(x_\beta, y_\beta) = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(x_\beta, y_\beta) = (x_\alpha(x_\beta, y_\beta), y_\alpha(x_\beta, y_\beta)).$$

La condición de que $(U_\alpha, x_\alpha, y_\alpha)$ y $(U_\beta, x_\beta, y_\beta)$ sean coherentemente foliadas significa que si $P \subset U_\alpha$ es una placa, las componentes conexas de $P \cap U_\beta$ se encuentran en placas de U_β (posiblemente distintas). Equivalentemente; como las placas de U_α y de U_β son los conjuntos de nivel de las coordenadas transversas y_α y y_β respectivamente, todo punto $z \in U_\alpha \cap U_\beta$ tiene una vecindad en la cual la expresión del cambio de coordenadas en la componente transversa

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

es independiente de las x_β coordenadas, es decir:

$$y_\alpha = y_\alpha(x_\beta, y_\beta) = y_\alpha(y_\beta).$$

La discusión anterior nos permite replantear nuestra definición de cartas coherentemente foliadas:

Definición 1.1.4. Dos atlas foliados \mathfrak{U} y \mathfrak{V} sobre M de la misma codimensión y clase de diferenciabilidad C^r son **coherentemente foliados** si $\mathfrak{U} \cup \mathfrak{V}$ es un C^r -atlas foliado.

La definición anterior determina una relación de equivalencia sobre el conjunto de atlas foliados, además se tiene que si \mathfrak{U} y \mathfrak{V} son atlas foliados sobre la variedad M y \mathfrak{U} está asociado a una foliación \mathfrak{F} , entonces \mathfrak{U} y \mathfrak{V} serán coherentemente foliados si y sólo si \mathfrak{V} está asociado a \mathfrak{F} , ([CC00], pag 25).

Observación 1.1.5. Sean (U, ϕ) y (W, ψ) cartas foliadas tales que $\bar{U} \subset W$ y $\phi = \psi|_U$, donde \bar{U} denota la cerradura de U . Si $\phi(U) = B_r \times B_m$ se tiene entonces que $\bar{\phi} = \psi|_{\bar{U}}$ aplica \bar{U} difeomorfamente sobre $\bar{B}_r \times \bar{B}_m$. De tal manera que tenemos también asociada la noción de placas y transversales cerradas de \bar{U} .

Definición 1.1.6. Un atlas foliado $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{U}}$ de clase C^r diremos que es un **atlas foliado regular** si se satisface lo siguiente:

1. Para cada $\alpha \in \mathfrak{U}$, \bar{U}_α es un subconjunto compacto de una carta foliada (W_α, ψ_α) y $\phi_\alpha = \psi_\alpha|_{U_\alpha}$.
2. La cubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{U}}$ es localmente finita.
3. Si (U_α, ϕ_α) y (U_β, ϕ_β) son elementos de \mathfrak{U} , entonces el interior de cada placa cerrada $P \subset \bar{U}_\alpha$ intersecta a lo más una placa de \bar{U}_β .

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Por la condición a) las coordenadas x_α y y_α se extienden a coordenadas \bar{x}_α y \bar{y}_α sobre \bar{U}_α , que denotaremos por $\bar{\phi}_\alpha = (\bar{x}_\alpha, \bar{y}_\alpha)$. La condición c) es equivalente a pedir que si $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces los cambios de coordenadas transversos

$$\bar{y}_\alpha = \bar{y}_\alpha(x_\beta, \bar{y}_\beta)$$

sean independientes de x_β ; esto es:

$$g_{\alpha\beta} = \bar{\phi}_\alpha \circ \bar{\phi}_\beta^{-1} : \bar{\phi}_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \bar{\phi}_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

tendrá una expresión de la forma:

$$g_{\alpha\beta}(\bar{x}_\beta, \bar{y}_\beta) = (\bar{x}_\alpha(\bar{x}_\beta, \bar{y}_\beta), \bar{y}_\alpha(\bar{y}_\beta)).$$

Es claro que la afirmación anterior se sigue cumpliendo al quitar las barras en las fórmulas anteriores. Observemos además que la aplicación en las coordenadas transversas y_α puede verse como una submersión $y_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^q$ y las expresiones $y_\alpha = y_\alpha(y_\beta)$ se ven como difeomorfismos

$$\gamma_{\alpha\beta} : y_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow y_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta).$$

Estos difeomorfismos satisfacen las condiciones de cociclo, a saber:

$$\gamma_{\alpha\delta} = \gamma_{\alpha\beta} \circ \gamma_{\beta\delta}. \quad (1.3)$$

$$\gamma_{\alpha\alpha} = Id_{y_\alpha(U_\alpha)}. \quad (1.4)$$

$$\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\beta\alpha}^{-1}. \quad (1.5)$$

Definición 1.1.7. El conjunto $\Gamma = \{\gamma_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in U}$ es llamado el *cociclo de holonomía* del atlas foliado regular \mathcal{U} .

Nota 1.1.8. Este cociclo de holonomía es central en la teoría de variedades foliadas y lo estudiaremos un poco más en la siguiente sección.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

La importancia de definir un atlas foliado regular se muestra en los siguientes resultados:

Lema 1.1.9. *Todo atlas foliado regular de codimensión q está asociado a una única foliación \mathfrak{F} de codimensión q . ((CC00))*

Lema 1.1.10. *Todo atlas foliado tiene un refinamiento coherentemente foliado que es regular. ((CC00))*

Teorema 1.1.11. *La correspondencia entre foliaciones sobre una variedad M y sus atlas foliados asociados induce una correspondencia biyectiva entre el conjunto de foliaciones sobre M y el conjunto de clases coherentes de atlas foliados. ((CC00))*

Como consecuencia tenemos que una foliación de codimensión q y clase C^r sobre M es una clase coherente de atlas foliado de codimensión q y clase C^r sobre M . Se puede aplicar el lema de Zorn a lo anterior, con lo cual tenemos que una foliación \mathfrak{F} de codimensión q y clase C^r sobre M es un atlas foliado de clase C^r y de codimensión q sobre M , que es maximal con respecto a estas propiedades.

Extendamos ahora un poco más nuestra definición de foliación variando los grados de diferenciabilidad que se puedan tener tanto en la parte transversa como en la parte tangencial:

Definición 1.1.12. Una foliación \mathfrak{F} es de clase $C^{r,k}$ con $r > k \geq 0$, si las correspondientes clases coherentes de atlas foliados contienen un atlas foliado regular $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que el cambio de coordenadas $g_{\alpha\beta}(x_\alpha(x_\beta, y_\beta), y_\alpha(y_\beta))$ es de clase C^k , pero las x_α coordenadas son de clase C^r en las coordenadas x_β y sus parciales mixtas con respecto a las x_β coordenadas de ordenes menores ó iguales a r .

Para foliaciones de clase $C^{r,0}$, el cociclo de holonomía está formado por transformaciones que son solamente continuas, pero cada hoja de la foliación posee una estructura diferenciable de clase C^r , con lo cual los espacios tangentes a las hojas están bien definidos y forman un haz vectorial continuo $T(\mathfrak{F})$ sobre M llamado el *haz tangente a la foliación* \mathfrak{F} . De hecho, este haz está determinado por los cociclos de estructura continuos $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(\mathbb{R}, k)$ dados por:

$$g_{\alpha\beta}(x_\beta, y_\beta) = \left[\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}(x_\beta, y_\beta) \right],$$

para $i, j = 1, \dots, k$.

En el caso de una $C^{r,0}$ variedad foliada el atlas de nuestra definición anterior, solamente establece a la variedad M de clase C^0 , por lo cual no está definido su haz tangente $T(M)$. Aún en el caso en que la variedad M tenga algún tipo de estructura diferenciable, tampoco se tiene una manera natural de identificar a $T(\mathfrak{F})$ con un sub-haz de k -planos de $T(M)$, por lo cual refinaremos nuestra definición para este caso:

Definición 1.1.13. Sea \mathfrak{F} una foliación de clase $C^{r,0}$ sobre una variedad M . Si M tiene una estructura diferenciable con respecto a la cual cada hoja es una sub-variedad inmersa de clase C^1 y la inclusión natural $T(\mathfrak{F}) \hookrightarrow T(M)$ encaja a $T(\mathfrak{F})$ como un sub-haz continuo de k -planos en $T(M)$, entonces diremos que la *variedad foliada* (M, \mathfrak{F}) es de clase $C^{r,0+}$. De esta manera, diremos que una foliación será *integrable* respecto a un campo continuo de planos si y sólo si es de clase al menos $C^{r,0+}$.

1.2 Holonomía

Sea (M, \mathfrak{F}) una variedad foliada. A *grosso* modo el concepto de holonomía fue desarrollado para entender de un modo cualitativo la complejidad estruc-

tural que existe en relación a las hojas de las foliaciones.

Consideremos una variedad foliada (M, \mathfrak{F}) de codimensión q y clase C^r y un atlas foliado regular $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{U}}$ para \mathfrak{F} . Sea $\Gamma = \{\gamma_{\alpha\beta}\}_{\alpha, \beta \in \mathcal{U}}$ el cociclo de holonomía y escojamos en cada carta foliada U_α una transversal S_α . La submersión $y_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^q$ aplica la transversal S_α difeomorficamente sobre $y_\alpha(U_\alpha)$; por lo cual identificaremos estos dos espacios, y pensaremos a la submersión y_α como un sistema de coordenadas sobre S_α . Si $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$ son tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, como se explicó en la sección anterior, podemos pensar a los elementos $\gamma_{\alpha\beta}$ del cociclo de holonomía Γ como difeomorfismo de un conjunto abierto $D(\gamma_{\alpha\beta}) \subset S_\beta$ (el dominio de $\gamma_{\alpha\beta}$) sobre un subconjunto abierto $R(\gamma_{\alpha\beta}) \subset S_\alpha$ (el rango de $\gamma_{\alpha\beta}$). En las respectivas coordenadas tenemos que el dominio y rango estan dados por:

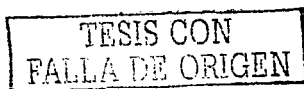
$$D(\gamma_{\alpha\beta}) = y_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \quad y \quad R(\gamma_{\alpha\beta}) = y_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta).$$

Bajo nuestras identificaciones, queda claro que $w \in D(\gamma_{\alpha\beta}) \subset S_\beta$ si y sólo si la placa $P_w \subset U_\beta$ a través de w intersecciona a una única placa $P_z \subset U_\alpha$, donde $P_z \cap S_\alpha = z$. Denotemos el valor de $\gamma_{\alpha\beta}$ en w por $\gamma_{\alpha\beta}(w) = z$.

Si s es una curva en $P_w \cup P_z$ de w a z en la hoja L de \mathfrak{F} tal que $P_w \cup P_z \subset L$, definimos la holonomía de esta curva como:

$$h_s = \gamma_{\alpha\beta} : D(\gamma_{\alpha\beta}) \rightarrow R(\gamma_{\alpha\beta}).$$

Intuitivamente para cada $u \in D(\gamma_{\alpha\beta})$, por la estructura del producto local de la foliación, podemos pensar que esta estructura producto nos permite "levantar" la curva s a una curva s_u que se encuentra en $P_u \cup P_v$ y que empieza en el punto $u \in S_\beta$ y termina en el punto $v = h_s(u) \in S_\alpha$, donde P_u es la U_β -placa a través de u y P_v es la U_α -placa que pasa por v y que está sujeta a la condición $P_u \cap P_v \neq \emptyset$.



Notemos que h_s no depende en principio de la curva s , pues para toda curva σ en $P_u \cup P_z$ de w a z se tiene que $h_\sigma = \gamma_{\alpha\beta}$.

Podemos ahora considerar la situación en la que tenemos una cadena de placas $\mathfrak{P} = \{P_w, P_z\}$ como una versión "similar" de estas curvas y denotar a la holonomía por $h_{\mathfrak{P}}$. De hecho el asignamiento

$$P \rightarrow P \cap S_\delta$$

define de manera natural una correspondencia biyectiva entre el conjunto de placas en U_δ y la q -variedad S_δ , para toda $\delta \in \mathfrak{U}$. De esta forma, podemos pensar a las placas P_w y P_z como "puntos", $w \in S_\beta$ y $z \in S_\alpha$, respectivamente; y de manera análoga la cadena $\mathfrak{P} = \{P_w, P_z\}$ podemos pensarla como una "curva" en la hoja, con punto inicial P_w y punto final P_z . Notemos que esta "curva" será conexa ya que $P_w \cap P_z \neq \emptyset$.

Resumiendo, con la notación anterior tenemos definida la holonomía de \mathfrak{P} como:

$$h_{\mathfrak{P}}(P_u) = P_v$$

En este caso la cadena de placas $\{P_u, P_v\}$ sería entonces el "levantamiento" de la cadena \mathfrak{P} a una curva que une P_u a P_v sobre la hoja a través de P_w .

Para el caso en que tuviésemos cadenas de placas $\mathfrak{P} = \{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ sujeta a la condición $P_{i-1} \cap P_i \neq \emptyset$ para $1 \leq i \leq m$, con $P_i \subset U_{\alpha_i}$ ($0 \leq i \leq m$) entonces la composición:

$$h_{\mathfrak{P}} = \gamma_{\alpha_m \alpha_{m-1}} \circ \gamma_{\alpha_{m-1} \alpha_{m-2}} \circ \dots \circ \gamma_{\alpha_1 \alpha_0}$$

está bien definida y es claro que es un difeomorfismo de una cierta vecindad abierta en S_{α_0} sobre una vecindad abierta de S_{α_m} . Del hecho de que el atlas foliado regular \mathfrak{U} sea localmente finito junto con el hecho de que M es segundo numerable, se tiene que \mathfrak{U} es a lo más numerable, por lo que si consideramos

a la unión ajena $S = \coprod_{\alpha \in \mathfrak{U}} S_\alpha$, resulta ser una variedad de dimensión q que se encaja como subvariedad $S \hookrightarrow M$ y que resulta ser transversa a la foliación \mathfrak{F} . Si tenemos un espacio con las propiedades de S anteriores, lo llamaremos **Espacio Transverso a la foliación**.

Definición 1.2.1. Sea $h : D(h) \rightarrow R(h)$ un difeomorfismo de clase C^r entre subconjuntos abiertos de S , donde $D(h)$ denota el dominio de definición de h y $R(h)$ denota el rango. Si para cada $w \in D(h)$, existe una vecindad W de w en $D(h)$ y una cadena de placas \mathfrak{B} tal que $h|_W = h_{\mathfrak{B}}|_W$, entonces a h la llamaremos **transformación de holonomía** definida por el atlas foliado regular \mathfrak{U} . Denotaremos al conjunto de todas las transformaciones de holonomía del atlas foliado regular \mathfrak{U} por $\Gamma_{\mathfrak{U}}$.

Localmente los elementos de $\Gamma_{\mathfrak{U}}$ pueden ser pensados como transformaciones entre variedades de dimensión q transversas a la foliación \mathfrak{F} definidas a través de desplazarse por las hojas de \mathfrak{F} .

Definición 1.2.2. Sea N una variedad de dimensión q . Un C^r -**pseudogrupo** Γ sobre N es una colección de difeomorfismos de clase C^r , $h : D(h) \rightarrow R(h)$ entre subconjuntos abiertos de N que satisfacen las siguientes condiciones:

1. Si $g, h \in \Gamma$ y $R(h) \subset D(g)$ entonces $g \circ h \in \Gamma$.
2. Si $h \in \Gamma$ entonces $h^{-1} \in \Gamma$.
3. $Id_N \in \Gamma$.
4. Si $h \in \Gamma$ y $W \subset D(h)$ es un subconjunto abierto, entonces $h|_W \in \Gamma$.
5. Si $h : D(h) \rightarrow R(h)$ es un difeomorfismo de clase C^r entre subconjuntos abiertos de N y si para cada $w \in D(h)$ existe una vecindad W de w en $D(h)$ tal que $h|_W \in \Gamma$, entonces $h \in \Gamma$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Observemos que por las primeras tres propiedades de la definición anterior, el pseudogrupo Γ es casi un grupo de transformaciones de clase C^r sobre N . El problema es que las transformaciones no se encuentran definidas globalmente sobre N , de tal manera que la composición no esta siempre definida. Por las propiedades 3 y 4 se tiene que para todo subconjunto abierto $W \subset N$ la transformación Id_W esta en Γ y por las propiedades 4 y 5, un difeomorfismo de clase C^r de N pertenecerá a Γ si y sólo si pertenece a Γ localmente.

En resumen, si \mathfrak{A} es un atlas foliado regular de clase C^r y $\Gamma = \{\gamma_{\alpha\beta}\}_{\alpha\beta \in U}$ es su cociclo de holonomía, entonces el conjunto $\Gamma_{\mathfrak{A}}$ de transformaciones de holonomía es el C^r -pseudogrupo sobre S generado por Γ . A este C^r -pseudogrupo lo llamaremos el *pseudogrupo de holonomía de \mathfrak{A}* .

Nota 1.2.3. Hay muchas maneras de definir una foliación según las propiedades geométricas por las cuales estén definidas y las estructuras geométricas que estas tengan (Variedades Riemannianas, Grupos de Lie, asociados al espacio fase de una ecuación diferencial, etc...). He preferido dar la definición mas sencilla que conozco, pero que creo refleja en profundidad las propiedades y dificultades de estos objetos. Análogamente, existen varios tipos de holonomía sobre una variedad foliada, he referido específicamente a ésta, pues de igual manera explica la idea geométrica de como son los elementos de la holonomía. Para más detalles respecto a la teoría general de variedades foliadas y holonomía pueden consultarse los siguientes libros:

[MS88], [CN85], [God91], [HH83] y [Jr.77].

Al tener una variedad diferenciable M con una foliación \mathfrak{F} de codimensión q y de dimensión p con un atlas de su estructura foliada $\{U_i, \phi_i\}_{i \in I}$ tal que $\phi(U_i) = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, se satisface que si $x \in U_i \cap U_j$ entonces las funciones de transición para la estructura foliada estan dadas en la siguiente forma

$\phi_j \circ \phi_i^{-1} = (f(x, y), g(y))$. Si consideramos las funciones $k_i : Pr\gamma_2 \circ \phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^q$ donde $Pr\gamma_2$ es la proyección en la segunda coordenada, son claramente submersiones y de esta manera se tiene que para $x \in U_i \cap U_j$ existe una función $g_{ij} \in Diff^r(\mathbb{R}^q)$ tal que $k_j = g_{ij}k_i$ en una vecindad del punto $x \in M$. Por otro lado al tener submersiones $k_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^q$ tales que en una vecindad de cada punto de $U_i \cap U_j$ se tenga que $k_j = g \circ k_i$ con $g \in Diff^r(\mathbb{R}^q)$, se puede determinar una foliación \mathfrak{F} de clase C^r y de codimensión q de M donde las aplicaciones distinguidas de la foliación son exactamente las k_i .

Ejemplo 1.2.4. Foliationes Definidas por Submersiones

Sea $f : M^m \rightarrow N^n$ una submersión diferenciable. Es conocido que por la estructura local de las submersiones, dado un punto $p \in M$ y $q = f(p) \in N$ existen cartas locales (U, ϕ) sobre M y (V, ψ) sobre N tal que $p \in U$, $q \in V$, $\phi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n} \times \mathbb{R}^n$ con $U_2 \subset V_2 \subset \psi(V)$ y $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : U_1 \times U_2 \rightarrow U_2$ coincide con la proyección $(x, y) \rightarrow y$. Es claro que las cartas locales (U, ϕ) definen una estructura de variedad foliada para M de codimensión n , donde las hojas de la foliación son las componentes conexas de los conjuntos de nivel $f^{-1}(c)$, para $c \in N$.

Ejemplo 1.2.5. Fibraciones

Recordemos que un espacio fibrado (E, Π, B, F) consiste de variedades diferenciables E , B y F y una submersión $\Pi : E \rightarrow B$ tal que para todo punto $b \in B$ existe una vecindad abierta $U_b \subset B$ del punto b y un difeomorfismo $\phi_b : \Pi^{-1}(U_b) \rightarrow U_b \times F$ llamados trivializaciones locales del haz, de tal forma que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 \Pi^{-1}(U_b) & \xrightarrow{\phi_b} & U_b \times F \\
 \searrow \Pi & & \swarrow Pr\gamma_1 \\
 & U_b &
 \end{array}$$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

En este diagrama la función Pr_{y_1} es la proyección sobre el primer factor y las fibras de la fibración son las subvariedades $\Pi^{-1}(b)$ y donde $b \in B$. Las fibras de un espacio fibrado (E, Π, B, F) definen una foliación en el espacio total E cuyas hojas son difeomorfas a las componentes conexas de la fibra F .

Nota 1.2.6. Es importante hacer notar que a las cartas de una estructura foliada sobre una variedad se les puede asociar a cada una, una submersión y estas determinan las aplicaciones distinguidas de la variedad foliada y por el teorema de estructura local de submersiones estas localmente tienen la forma de un fibrado localmente trivial, de ahí la importancia de estos ejemplos.

Ejemplo 1.2.7. Campos Vectoriales sin Singularidades

Consideremos un campo vectorial X sobre una variedad M . Una curva integral del campo X a través de un punto $p \in M$ es una curva $\gamma : (a, b) \rightarrow M$, con $\gamma(0) = p$ tal que $X(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ para $t \in (a, b)$, es decir; las curvas integrales son soluciones locales de la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = X(t)$. Por el teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciables ordinarias se tiene que para cada $p \in M$ existe una única curva que pasa a través del punto p y estas a la vez definen un flujo local en cualquier punto $p \in M$, es decir; existe una vecindad U_b del punto p y un intervalo (α, β) tal que para cualquier otro punto $q \in U_b$, la curva integral a través de q , $\gamma_q(t)$ esta definida para toda $t \in (\alpha, \beta)$ y la aplicación (conocida como el flujo local) $\phi : (\alpha, \beta) \times U_b \rightarrow M$ dada por $\phi(t, q) = \gamma_q(t)$ es de clase C^r si el campo X es de clase C^r . Si X es un campo vectorial sin puntos singulares, sea $\iota : D^{m-1} \rightarrow M$ con $\iota(0) = p$ un encaje de un $m-1$ disco centrado en cero en \mathbb{R}^m transverso al campo X en todos lados. Ya que $X(p) \neq 0$, la aplicación $\Phi : D^{m-1} \times (\alpha, \beta) \rightarrow M$ dado por $\Phi(x, t) = \phi(t, \iota(x))$ tiene

rango máximo en el punto $(0, 0) \in D^{m-1} \times (\alpha, \beta)$. De esta manera, por el teorema de la función inversa existe una vecindad $V \subset M$ del punto $p \in M$ tal que $\Phi^{-1}|_V$ es un difeomorfismo sobre una vecindad producto $D^{m-1} \times (\alpha', \beta') \subset D^{m-1} \times (\alpha, \beta)$ del $(0, 0)$. Esta aplicación la podemos tomar entonces como una carta local para una foliación de dimensión uno sobre M cuyas hojas son las curvas integrales del campo X .

Ejemplo 1.2.8. Foliación Imagen Inversa por una Fibración

Sea $\Pi : E \rightarrow M$ una fibración localmente trivial de clase C^r y fibra F sobre una variedad diferenciable y sea \mathfrak{F} una foliación de M de clase C^r y de codimensión q . Si $\{U_i, \Phi_i\}_{i \in I}$ es un atlas trivial máximo del fibrado, las foliaciones $F_i = (\Phi_i^{-1})_*(\mathfrak{F}|_{U_i} \times F)$ de los abiertos $\Pi^{-1}(U_i)$ dan lugar a una foliación $\Pi^*\mathfrak{F}$ de clase C^r y codimensión q del espacio total del fibrado E y la foliación así obtenida se llama la Foliación Imagen Inversa de \mathfrak{F} por la fibración Π . Las hojas de esta foliación $\Pi^*\mathfrak{F}$ son las componentes conexas de las imágenes inversas de las hojas de \mathfrak{F} por Π y son para la proyección del fibrado Π un fibrado localmente trivial teniendo por fibras las uniones de las componentes conexas de \mathfrak{F} . En particular tenemos lo siguiente:

1. Si Π es un cubriente de M , las hojas de $\Pi^*\mathfrak{F}$ son un cubriente de las hojas de \mathfrak{F} .
2. Si \mathfrak{F} es la foliación trivial por puntos de M , las hojas de $\Pi^*\mathfrak{F}$ son las componentes conexas de las fibras de Π .

Este último ejemplo se puede generalizar al caso donde $\Pi : E \rightarrow M$ es una submersión. Si $k_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^q$ son las aplicaciones distinguidas para la foliación \mathfrak{F} de M las submersiones $k_i \circ \Pi : \Pi^{-1}(U_i) \rightarrow \mathbb{R}^q$ son las aplicaciones

distinguidas para una foliación $\Pi^*\mathfrak{F}$ de clase C^r y de codimensión q de E . Análogamente la foliación $\Pi^*\mathfrak{F}$ es la imagen inversa de \mathfrak{F} por la submersión Π y en este caso sus hojas son las componentes conexas de las imágenes inversas de las hojas de \mathfrak{F} por Π . En particular las fibras de Π cuando \mathfrak{F} es la foliación trivial de M por sus puntos. C. Ehresmann tiene el siguiente resultado el cual unifica ambas ideas:

Teorema 1.2.9. *Sean M y E dos variedades diferenciables conexas sin frontera. Una submersión $\Pi : E \rightarrow M$ propia de clase C^r para $r \leq 2$ es una fibración localmente trivial.*

[God91], pag. 16.

Capítulo 2

Corrientes

En la primera sección de este capítulo se desarrollará parte de la teoría general de corrientes en variedades y variedades foliadas. Para esto dotaremos al espacio de p -formas diferenciables sobre una variedad M de dimensión n para $0 \leq p \leq n$, de una topología que le dará una estructura de espacio vectorial topológico localmente convexo y Hausdorff. Estas corrientes se definen como funcionales lineales continuas sobre los espacios de formas diferenciables; es decir son elementos del Dual Topológico del espacio de formas. Utilizando la teoría de Análisis Funcional podremos posteriormente, definir una teoría de homología, la Homología de De Rham.

Haciendo énfasis principalmente en las Corrientes de Dirac y las Corrientes de Integración, definiremos lo que entenderemos por una Medida Invariante por Holonomía en una variedad foliada y daremos una idea general, ilustrada por algunos ejemplos del problema que se trata de resolver y del porqué del desarrollo de esta teoría.

Dotaremos después al espacio de corrientes de una topología el cual lo identificará como el Dual Fuerte del espacio de formas diferenciables. Posteriormente veremos como los teoremas de Representación de Riesz, el teorema de Stokes y

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

el teorema de De Rham nos dan información de la Homología de De Rham. En la segunda sección se definirán las corrientes foliadas de Dirac que son los elementos básicos para nuestra teoría de corrientes foliadas, pues estas se definen por medio de la cerradura de las combinaciones lineales finitas con coeficientes positivos de las corrientes foliadas de Dirac. Introduciremos después la noción de una forma transversa a la foliación, que es una funcional lineal continua sobre el espacio de corrientes foliadas. Haciendo uso de la teoría de Homología de De Rham, diremos lo que se entenderá por un ciclo foliado y una frontera foliada. Finalmente, por medio del teorema de Hahn-Banach, se mostrarán algunas de las consecuencias de la existencia de una forma transversa a la foliación con respecto a los ciclos foliados y fronteras foliadas. Las referencias principales para este capítulo son:
 Apéndice A, [PRHG74], [Hir76], [Sch86], [Hor66], [Köt69] y [RR73].

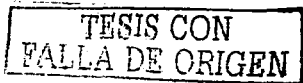
2.1 Corrientes sobre Variedades

Consideremos una variedad diferenciable M compacta de dimensión n , y un atlas coordinado finito fijo $\Psi = \{(V_i, z_i)\}_{i=1}^m$ de M a lo largo de este capítulo. Para cada entero $k \geq 0$ fijo, denotemos por $\|\cdot\|_k$ a la C^k -norma que está definida sobre las p -formas diferenciables sobre M relativa a la cubierta Ψ , de la siguiente manera:

Si denotamos por D_p al conjunto de p -formas diferenciables sobre M , tenemos que una p -forma $\psi \in D_p$ la podemos escribir en coordenadas locales del atlas Ψ , para cada vecindad coordinada V_i , como $\psi = \sum P_{I_i}(x) dx_{I_i}$, donde I_i es un multi-índice de longitud p sobre V_i . De esta manera definimos:

$$\|\psi\|_k = \sup \left\{ \sum_{\alpha} \left| \frac{\partial P_{I_i}}{\partial x^{\alpha}} \right| \right\}$$

donde el supremo se toma sobre todas las derivadas parciales cruzadas para



$0 \leq \alpha \leq k$ y sobre todas las representaciones de las vecindades coordinadas V_i con $1 \leq i \leq N$.

Con esta norma que depende del atlas, podemos definir una topología τ_k en D_p que resulta satisfacer el axioma de separación de Hausdorff y ser además localmente convexa, relativa a la cual es fácil ver que las operaciones lineales resultan ser continuas, dando de esta manera una estructura de espacio vectorial topológico normado a D_p para cada $k \geq 0$; en particular resulta ser un espacio métrico. Es claro por las propiedades del supremo que $\tau_k \subset \tau_{k+1}$ para toda $k \geq 0$; es decir, si consideramos la función identidad $(D_p, \tau_{k+1}) \xrightarrow{Id_{D_p}} (D_p, \tau_k)$ esta resulta ser continua para toda $k \geq 0$.

Por lo cual podemos definir la topología τ que está generada por $\bigcup_{k=0}^{\infty} \tau_k$. Así al considerar el espacio D_p con la topología τ , éste resulta ser un espacio vectorial topológico localmente convexo.

De aquí en adelante denotemos por $D_p^k = (D_p, \tau_k)$ y por $D_p = (D_p, \tau)$.

Ya que D_p está definido en términos de los D_p^k , que son espacios vectoriales normados, tenemos el siguiente resultado:

Lema 2.1.1. Una sucesión $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a ψ en D_p si y sólo si converge a ψ en D_p^k para toda $k \geq 0$.

Demostración. Como $\tau_k \subset \tau$ para toda $k \geq 0$ tenemos que convergencia en D_p implica convergencia en D_p^k para toda k .

Recíprocamente, toda vecindad abierta W de ψ en D_p contiene una vecindad de la forma $W_0 \cap \dots \cap W_q$ para algún entero $q \geq 0$, donde W_k es una vecindad abierta de ψ en D_p^k para $0 \leq k \leq q$. Notemos que convergencia en D_p^k implica que todas salvo un número finito de los términos ψ_m están en $W_0 \cap \dots \cap W_q$ y por tanto en W , ya que $W \in \tau$ era una vecindad arbitraria de ψ tenemos que los ψ_m convergen a ψ en D_p . \square

Recordemos ahora que si $f : X \rightarrow Y$ es una función entre dos espacios

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

métricos entonces f es **secuencialmente continua** en un punto $p \in X$ si se satisface que para toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a p se tiene que la sucesión de las imágenes $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f(p)$. Este es un criterio de equivalencia entre continuidad y secuencialmente continua entre espacios métricos y en particular, se cumple para los espacios lineales normados D_p^* . Para espacios vectoriales topológicos en general, se tienen sucesiones generalizadas o redes, y se puede definir análogamente que significa que una función sea secuencialmente continua. Aunque en nuestro espacio D_p no sea un espacio normado, tenemos sin embargo en este caso el siguiente resultado:

Lema 2.1.2. *Una función $\varphi : D_p \rightarrow D_r$ ó $\varphi : D_p \rightarrow \mathbb{R}$ es continua si y sólo si es secuencialmente continua.*

Demostración. Es claro que continuidad implica secuencialmente continua con un argumento típico de vecindades, resultando así la parte interesante de la demostración la otra implicación.

Supongamos que $\varphi : D_p \rightarrow D_r$ es secuencialmente continua y además que φ no es continua en alguna $\psi \in D_p$, entonces existe una vecindad V de $\varphi(\psi)$ en D_r tal que $\varphi(W) \not\subseteq V$ para todas las vecindades W de ψ en D_p . En particular sea $W_k \in \tau_k \subset \tau$ la bola centrada en ψ de radio $\frac{1}{k}$ y escojamos $\psi_k \in W_k$ tal que $\varphi(\psi_k) \notin V$ para toda $k \geq 0$.

Ya que $\|\psi_k - \psi\|_0 \leq \|\psi_k - \psi\|_1 \leq \dots \leq \|\psi_k - \psi\|_k \leq \frac{1}{k}$ para toda $k \geq 1$. Por 2.1.1 tenemos que $\lim_{m \rightarrow \infty} \psi_m = \psi$ en D_p , lo cual implica una contradicción al hecho de φ era secuencialmente continua.

Para el caso $\varphi : D_p \rightarrow \mathbb{R}$ la demostración es completamente similar. \square

Como la topología τ esta dada en términos de topologías normadas, existen ideas y resultados de análisis funcional que podemos considerar para el espacio D_p .

Diremos que un subconjunto $S \subset D_p$ es **acotado** si es acotado relativo a la

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

\mathcal{C}^k -norma para toda $k \geq 0$.

Análogamente, diremos que una aplicación lineal $\varphi : D_p \rightarrow D_r$ ó sobre \mathbb{R} es una **aplicación lineal acotada** si es acotada relativa a la \mathcal{C}_k -norma en ambos espacios para toda $k \geq 0$.

Lema 2.1.3. *Una aplicación lineal acotada $\varphi : D_p \rightarrow D_r$ ó sobre \mathbb{R} es continua y una aplicación lineal continua $\varphi : D_p \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada.*

Demostración. Supongamos primeramente que $\varphi : D_p \rightarrow D_r$ es acotada; es decir, que $\varphi : (D_p, \|\cdot\|_k) \rightarrow (D_r, \|\cdot\|_k)$ es un operador acotado para toda $k \geq 0$. Sabemos que en el caso de espacios vectoriales topológicos normados se cumple que una función lineal es acotada si y sólo si es continua, (ver prop 2 [Hor66], pag.36). De esta manera para cualquier $k \geq 0$ tenemos que φ es una función acotada y lineal, por lo cual es entonces continua para toda k . Como observamos anteriormente se tiene en este caso que φ resulta ser secuencialmente continua para toda k . Así por 2.1.2 $\varphi : D_p \rightarrow D_r$ es continua. Supongamos ahora que $\varphi : D_p \rightarrow \mathbb{R}$ es un operador lineal no acotado. Entonces existe una sucesión acotada $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ en D_p tal que $\varphi(\psi_n) \geq n$ para $1 \leq n < \infty$. De esta manera tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_n}{n} = 0$ en la topología τ mientras que $\varphi(\frac{\psi_n}{n}) \geq 1$ para toda $n \geq 1$ mostrando que $\varphi : D_p \rightarrow D_r$ es un operador que es no continuo. \square

Nota 2.1.4. Por 2.1.2 se tiene en general que en esta topología los operadores lineales continuos son secuencialmente continuos. Esto no implica sin embargo que sean secuencialmente continuos en la norma \mathcal{C}^k para toda $k \geq 0$, ya que esto implicaría que las topologías τ_k son las mismas para toda k . En general sucede que si se tiene una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales topológicos convexos o localmente convexos la continuidad de la función lineal implica que esta es acotada, es decir aplica conjuntos acotados en conjuntos acotados. Un espacio localmente convexo en el cual toda aplicación acotada es

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

continua se le conoce como *espacio de Mackey o bornológico*, ([RR73] pag.81).

Recordemos que la diferencial exterior $d : D_p \rightarrow D_{p+1}$ está dada en coordenadas locales de la siguiente manera:

Si ω es una p -forma diferenciable sobre M , en coordenadas locales la podemos escribir como $\omega = \sum_{I_i} P_{I_i}(x) dx_{I_i}$, donde I_i es un multi-índice de longitud p ; es decir, I_i son todas las combinaciones $i_1 \dots i_p$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$, y $dx_{I_i} = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$.

Así tenemos que la diferencial exterior de ω está dada en coordenadas locales por:

$$d\omega = \sum_{I_i} \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_{I_i}(x)}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{I_i}.$$

Como consecuencia del lema anterior tenemos el siguiente:

Corolario 2.1.5. *La diferencial exterior $d : D_p \rightarrow D_{p+1}$ es una aplicación lineal continua.*

Demostración. Por demostrar que para toda $k \geq p$ la aplicación lineal diferencial exterior $d : (D_p, \|\cdot\|_k) \rightarrow (D_{p+1}, \|\cdot\|_k)$ es acotada. Con la notación anterior para $0 \leq \beta \leq k$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \|d\omega\|_q &= \sup \left\{ \sum_{\beta} \left| \frac{\partial}{\partial^\beta} \left(\sum_{I_i} \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_{I_i}}{\partial x_i} \right) \right| \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{\beta} \left| \sum_{I_i} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial^\beta} \left(\frac{\partial P_{I_i}}{\partial x_i} \right) \right| \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \sum_{\beta} \sum_{I_i} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial^\beta} \left(\frac{\partial P_{I_i}}{\partial x_i} \right) \right| \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{I_i} \sum_{i=1}^n \sum_{\beta} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial P_{I_i}}{\partial^\beta} \right) \right| \right\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Recordemos ahora que $\frac{\partial}{\partial x_i}$ es notación para el vector tangente a M en un punto p en las coordenadas x_i para $i = 1, \dots, n$. Como bien sabemos, los

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

vectores tangentes a la variedad los podemos ver como derivaciones sobre el espacio $C^\infty(M)$ de funciones diferenciables sobre M . Al espacio $C^\infty(M)$ le podemos dar la norma del supremo, dotando de ésta manera, una estructura de espacio vectorial normado sobre \mathbf{R} . Tiene entonces sentido en este caso hablar de la norma del operador lineal, que es por definición el escalar más pequeño $\lambda_i \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \right\|$ tal que se satisface que $\left| \frac{\partial}{\partial x_i}(f) \right|_{sup} \leq \lambda_i |f|_{sup}$ para toda $f \in C^\infty(M)$ y para toda $i = 1, \dots, n$. Con esta norma tenemos que los operadores $\frac{\partial}{\partial x_i}$ resultan ser operadores lineales acotados, ya que la variedad es compacta. Podemos ahora afirmar que existe un escalar $\Lambda > 0$ tal que $\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \right\| \leq \Lambda$ para $i = 1, \dots, n$. De esta manera tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} \|d\omega\|_q &\leq \sup \left\{ \sum_{i_1}^n \sum_{i_2}^n \sum_{\beta} \left| \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial P_{i_2}}{\partial x^\beta} \right) \right| \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \sum_{\beta} \left| \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial P_{i_2}}{\partial x^\beta} \right) \right| \right\} \\ &\leq n\Lambda \sup \left\{ \sum_{i_1} \sum_{\beta} \left| \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial P_{i_1}}{\partial x^\beta} \right) \right| \right\} \\ &= n\Lambda \|\omega\|_q. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Por lo tanto, tenemos que el operador diferencial exterior d es acotado y por tanto continuo. \square

Sabemos por el lema anterior que una funcional lineal continua es acotada; por tanto, si consideramos el conjunto de todas las funcionales lineales continuas sobre algún espacio vectorial topológico (se le puede dar a este conjunto la norma del supremo). este espacio dual es conocido como el **Dual Fuerte** del espacio vectorial. En particular; si esto se lo aplicamos al conjunto D_p tenemos que el **dual fuerte** del espacio D_p , que denotaremos por D'_p , es el espacio lineal de todas las funcionales lineales continuas sobre D_p . A los elementos de D'_p les llamaremos **p-corrientes** sobre M ó **corrientes**

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

de grado p sobre M .

Ejemplo 2.1.6. Corrientes de Dirac

Sea $x \in M$, $\omega \in D_p$ y $v_x : \underbrace{T_x^*M \times T_x^*M \times \cdots \times T_x^*M}_{p\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R}$ una función multilineal alternante que llamaremos **p -vector**.

Definamos $\varphi_{v_x} : D_p \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\varphi_{v_x}(\omega) = \omega_x(v_x)$$

Es claro que φ_{v_x} es una funcional lineal acotada, de donde $\varphi_{v_x} \in D'_p$. A una corriente de esta forma la llamaremos **corrientes de Dirac**.

Ejemplo 2.1.7. Corrientes Singulares

Sea $c = \sum_{i=1}^m c_i \sigma_i$, donde cada $c_i \in \mathbb{R}$ y $\sigma_i : \Delta^p \subset \mathbb{R}^p \rightarrow M$ es un p -simplejo singular diferenciable para $1 \leq i \leq m$.

Definamos sobre cada p -forma $\omega \in D_p$ la función $\varphi_c : D_p \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\varphi_c(\omega) = \int_c \omega = \sum_{i=1}^m c_i \int_{\Delta^p} \sigma_i^* \omega$$

Esta resulta ser claramente una funcional lineal acotada y por lo tanto una corriente sobre D_p , que llamaremos **corrientes singulares**.

Ejemplo 2.1.8. Corrientes Difusas

Asumamos en primer lugar que la variedad M es orientada, sea $\eta \in D_{n-p}$ y $\omega \in D_p$.

Definamos $\varphi_\eta : D_p \rightarrow \mathbb{R}$ como:

$$\varphi_\eta(\omega) = \int_M \omega \wedge \eta$$

Análogamente, esta funcional lineal resulta ser acotada y por ende una corriente sobre D_p .



Ejemplo 2.1.9. Sea N una variedad diferenciable compacta y sin frontera de dimensión p y M una variedad de dimensión $m > p$. Si $f : N \rightarrow M$ es una función diferenciable. Para toda $\omega \in D_p$ definamos $\varphi_f : D_p \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\varphi_f(\omega) = \int_N f^*(\omega)$$

Esta define una funcional lineal acotada y por tanto una corriente sobre D_p .

En el caso de que f sea un encaje, esta corriente se denota por φ_N ó por \int_N . En particular, si N es una subvariedad de M , la función f puede ser la inclusión.

Ejemplo 2.1.10. Corrientes de Integración

Para una variedad diferenciable M denotemos por ν a una medida de Borel definida sobre M tal que $\nu(M) < \infty$ y supongamos que existe un campo continuo de p -vectores definido sobre todo M , que denotaremos por α .

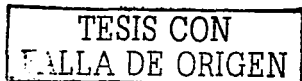
Para cada $\omega \in D_p$ definimos $\varphi_{\alpha, \nu} : D_p \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$\varphi_{\alpha, \nu}(\omega) = \int_M \omega(\alpha) d\nu$$

Es claro que ésta es una funcional lineal acotada y por lo tanto una corriente sobre D_p . Las corrientes de Dirac 2.1.6 son ejemplos de corrientes de integración donde α es cualquier extensión continua de v_x y ν es la medida de probabilidad concentrada sobre el punto $x \in M$; dicho de otro modo, ν es una medida atómica con átomo en x .

Nota 2.1.11. Un hecho importante que hay que considerar para este caso de corrientes de integración es que pueden ser evaluadas de igual manera sobre p -formas ω que sean solamente continuas, ya que la expresión $\int_M \omega(\alpha) d\nu$ tiene perfectamente sentido para tales p -formas.

En general cuando tenemos un objeto geométrico, por ejemplo una variedad diferenciable, una de las preguntas más comunes es saber de la existencia



de medidas invariantes bajo un flujo en la variedad. La pregunta análoga para el caso de un grupo topológico o un grupo de Lie es el de saber si existen medidas invariantes por la acción izquierda o derecha determinada por el producto del grupo en sí mismo. Para el caso de variedades foliadas recordemos que tenemos asociado de manera natural un pseudogrupo de difeomorfismos locales llamado el grupoide de holonomía; la pregunta en este caso es saber si tiene sentido la noción de una medida invariante por el pseudogrupo de holonomía, y por lo cual es también válido preguntarnos acerca de la existencia de tales medidas.

Notemos que, análogo a las corrientes de integración 2.1.10, para el caso de variedades foliadas tiene sentido hablar de la corriente de integración φ_μ definida por una medida μ que sea invariante por holonomía para una variedad foliada compacta (M, \mathfrak{F}) , con $\dim(\mathfrak{F}) = p$ y donde además el subhaz $T(\mathfrak{F})$ es orientable.

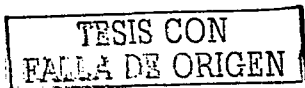
Precisemos un poco más la noción de medida invariante por holonomía, para esto:

Supongamos que $\partial(M) = \partial_r M$; es decir, que la frontera de la variedad se encuentra constituida de hojas de la foliación y fijemos además un atlas foliado regular $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ que respete la orientación de las hojas.

Sea $\Gamma_{\mathfrak{U}}$ el pseudogrupo de holonomía asociado, que actúa sobre el espacio transversal S de la foliación. Entonces la medida μ que deseamos sea invariante por holonomía debe estar definida sobre los subconjuntos de Borel del espacio S y además satisfacer que $\mu(S) < \infty$. Una medida μ será una *medida invariante por holonomía* siempre que se tenga lo siguiente: Si $\gamma \in \Gamma$ y $B \subset \text{dom}(\gamma)$ es un conjunto de Borel de S , entonces se tiene que $\mu(\gamma(B)) = \mu(B)$.

Veamos ahora como es posible integrar de manera natural p -formas sobre variedades foliadas:

Sea $\Lambda = \{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una partición de la unidad subordinada a \mathfrak{U} y sea $\omega \in D^p$.



En una carta foliada $U_\alpha \in \mathcal{A}$ denotemos por S_α al espacio tranverso asociado a esta carta local, de esta manera podemos integrar ω sobre cada \mathfrak{F} -placa $P \in S_\alpha$ obteniendo una función de valor real continua sobre S_α . Esta nueva función se puede nuevamente integrar con respecto a la medida $\mu|_{S_\alpha}$, dando lugar a una integral iterada de la forma $\int_{S_\alpha} (\int_P \omega) d\mu(P)$, siendo posible así definir una corriente de integración φ_μ sobre ω en M por:

$$\varphi_\mu(\omega) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_{S_\alpha} \left(\int_P \lambda_\alpha \omega \right) d\mu(P)$$

Usando la invarianza por holonomía de μ , puede verse, análogo al caso de variedades diferenciables, que la corriente φ_μ es independiente de la elección de la partición de la unidad Λ , pero depende del atlas.

Nota 2.1.12. Haciendo uso del *Teorema de Stokes*, que afirma que si se tiene una región D con frontera $\partial(D)$ en una variedad orientable M de dimensión p y se tiene una $(p-1)$ -forma diferenciable ω con soporte compacto, entonces:

$$\int_D d\omega = \int_{\partial(D)} \omega.$$

Notemos que, para la medida invariante por holonomía definida anteriormente, sabemos que cada una de las funciones λ_α tiene soporte compacto, con lo cual la $(p-1)$ -forma diferenciable $\lambda_\alpha \omega$ también tiene soporte compacto sobre cada $P \subset S_\alpha$. Además, de la definición de foliación se tiene que $\partial(P) = \emptyset$, así para cada espacio tranverso S_α :

$$\int_{S_\alpha} \left(\int_P d(\lambda_\alpha \omega) \right) d\mu(P) = \int_{S_\alpha} \left(\int_{\partial(P)} (\lambda_\alpha \omega) \right) d\mu(P) = \int_{S_\alpha} (0) d\mu(P) = 0$$

Con lo cual podemos concluir que $\varphi_\mu(d\omega) = 0$ para toda $(p-1)$ -forma diferenciable sobre M .

Esto último es un ejemplo de lo que entenderemos más adelante por un *ciclo foliado*.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Nota 2.1.13. Recordemos ahora el **Teorema de Representación de Riesz** que dice que, para cada funcional lineal positiva L sobre $C^0(X)$, que es el espacio de funciones real valuadas definidas sobre X , con X espacio localmente compacto y de Hausdorff, existe una medida de Borel μ sobre X tal que si $f \in C^0(X)$, entonces se tiene que:

$$L(f) = \int f d\mu. \quad (2.3)$$

El ejemplo 2.1.10 y esta última construcción de corrientes de integración se extiende a funcionales lineales acotadas sobre el espacio de funciones continuas sobre M que son las 0- formas. De esta manera, por el **Teorema de Representación de Riesz**, tales corrientes deben ser corrientes de integración y se les conoce como corrientes de grado cero. Puede consultarse [PRHG74] para el enunciado y demostración del teorema de representación de Riesz.

Nota 2.1.14. Podemos de igual manera decir que una foliación \mathfrak{F} de dimensión q de una variedad M tiene una medida invariante por holonomía o transversa si ésta se puede definir por un cociclo regular a valores en el grupoide de germenos de un pseudogrupo de difeomorfismos locales de una variedad B de dimensión q , que dejan invariante una medida de Borel sobre B y que suponemos que es positiva y finita sobre subconjuntos compactos. De esta manera, pensar en medidas invariantes por holonomía en M es lo mismo que pensar en medidas de Borel positivas y finitas sobre compacto definidas sobre el espacio B y que son invariantes por el pseudogrupo de holonomía. Para nuestra definición de medida invariante por holonomía, la variedad B es el espacio transverso S .

Ejemplo 2.1.15. Cuando uno tiene una foliación diferenciable de codimensión q con una forma de volumen transversa, es decir; el espacio transverso es localmente \mathbb{R}^q y el grupo de holonomía esta formado por difeomorfismos locales de \mathbb{R}^q que dejan invariante una forma de volumen sobre \mathbb{R}^q .

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Ejemplo 2.1.16. Una hoja cerrada de una foliación de codimensión cualquiera determina una medida transversa discreta. Simplemente contando el número de veces que la hoja pasa a través de los subconjuntos abiertos del espacio transverso.

Ejemplo 2.1.17. Si una foliación \mathfrak{F} de la variedad M es una fibración de M sobre una variedad B , las medidas invariantes por holonomía de M se corresponden de manera biactiva con las medidas de Borel sobre B finitas sobre subconjuntos compactos. Notemos que en este caso el espacio transverso se identifica con el espacio base B del fibrado.

Ejemplo 2.1.18. Sea \mathfrak{F} una foliación de una variedad M y sea $f: N \rightarrow M$ una aplicación de una variedad N en M cuya imagen es transversa a la foliación \mathfrak{F} . Entonces las medidas de Borel sobre N determinan de manera única medidas transversas sobre M , dado que en este caso podemos pensar a N como el espacio transverso S .

Como vimos anteriormente toda medida invariante por holonomía para una foliación \mathfrak{F} de dimensión p determina una corriente de dimensión p dada por:

$$\varphi_\mu(\omega) = \sum_{\alpha \in A} \int_{S_\alpha} \left(\int_P \lambda_\alpha \omega \right) d\mu(P)$$

Si tenemos una foliación \mathfrak{F} de dimensión p de una variedad diferenciable M y M es una fibración sobre un espacio B , donde las hojas de la foliación \mathfrak{F} son las componentes conexas de las fibras. Si C es una corriente asociada a una medida invariante por holonomía entonces para toda forma diferencial $\omega \in D^p(M)$ se tiene que:

$$\langle C, \omega \rangle = \int_B F d\mu$$

Donde F es la integral fibrada $F = \int_B \omega$ definida en el apéndice A.

Nota 2.1.19. Podemos decir que la función F es a grandes rasgos la función obtenida al integrar la forma ω sobre las fibras.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Observación 2.1.20. Toda foliación sabemos se puede definir localmente por submersiones, pero estas en general no resultan ser fibrados.

Si éste fuese el caso, entonces las corrientes determinadas por medidas invariantes por holonomía (que son ciclos foliados como se explicará más adelante), se corresponde de manera biyectiva con medidas en el espacio base invariantes por los difeomorfismos locales del espacio base.

Como este no es el caso, ya que en general el espacio transversal es complicado de describir y resulta difícil de estudiarlo, no se tiene una idea sencilla de esta correspondencia entre lo que son ciclos foliados y medidas invariantes por holonomía.

La teoría desarrollada en este trabajo muestra una forma de resolver éste problema, y así el teorema principal (Teorema de Sullivan) del trabajo podemos decir que describe cómo se resuelve esta situación en general.

Una vez conociendo que el espacio de p -corrientes es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , es natural ver si además resulta ser un espacio vectorial topológico. Para este fin sea $\epsilon > 0$ y $B \subset D_p$ un subconjunto acotado y definamos $V_{B,\epsilon} \subset D'_p$ como el conjunto de las p -corrientes φ tales que $\varphi(B) \subseteq [-\epsilon, \epsilon]$. Diremos que un subconjunto $S_0 \subset D'_p$ es una **vecindad del cero** si existe un $V_{B,\epsilon} \subset S_0$ para algún B y para alguna ϵ . De esta manera, si $c \in D'_p$ entonces las **vecindades** de c serán los conjuntos de la forma $S_c = c + S_0$ donde S_0 es una vecindad del cero, por último diremos que un subconjunto $W \subset D'_p$ es **abierto** si para cada $c \in W$ existe una vecindad $S_c \subset W$.

Esta definición de conjunto abierto define una topología τ' sobre D'_p la cual es Hausdorff y localmente convexa; además la evaluación de p -corrientes sobre p -formas define una aplicación bilineal y continua $e_v : D'_p \times D_p \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $e_v(\varphi, \omega) = \varphi(\omega)$. Esta aplicación evaluación e_v identifica a D_p con el espacio doble dual D''_p de funcionales lineales continuas sobre D'_p ; es decir, son espacios

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

reflexivos y de esta manera tenemos que D_p y D'_p son duales fuertes uno del otro. Para la demostración de que estos espacios resultan ser reflexivos puede consultarse [Sch50], Cap. III, pag 75.

En términos de la función e_v podemos definir un subconjunto $V \subset D'_p$ como **acotado** si para cada subconjunto acotado $B \subset D_p$ el conjunto $e_v(\varphi, b) = \varphi(b)$ tal que $\varphi \in V, b \in B$ es un subconjunto acotado de \mathbb{R} .

Definición 2.1.21. Un espacio vectorial topológico localmente convexo y reflexivo es llamado un **Espacio de Montel** si todo subconjunto cerrado y acotado es relativamente compacto.

Teorema 2.1.22. *Los espacios vectoriales D_p y D'_p son Montel.*

Demostración. [Sch50], Cap. III, pag. 74. □

Recordemos que cuando tenemos una transformación lineal entre dos espacios vectoriales, tenemos asociada la transformación adjunta. Así, para una transformación lineal acotada $L : D_p \rightarrow D_r$ tenemos su adjunta $L^* : D'_r \rightarrow D'_p$, tal que $L^*(\varphi) = \varphi \circ L$. Esta es una transformación lineal continua, ya que claramente es lineal y además composición de transformaciones lineales acotadas es acotada. Este resultado se lo podemos aplicar a la diferencial exterior $d : D_p \rightarrow D_{p+1}$ obteniendo así un operador $\partial = d^*$, $\partial : D'_{p+1} \rightarrow D'_p$ tal que si $\varphi \in D'_{p+1}$ y $\omega \in D_p$ entonces $\partial(\varphi)(\omega) = \varphi(d(\omega))$; es decir, $\partial(\varphi) = \varphi \circ d$. Notemos que $\partial \circ \partial(\varphi)(\omega) = \varphi(d \circ d(\omega)) = \varphi(0) = 0$ ya que $d \circ d = 0$, de esta manera tenemos entonces que $\partial \circ \partial = 0$.

Recordemos que en 2.1.12 vimos que para la corriente de integración φ_μ se tiene que $\varphi_\mu(d\omega) = 0$, en términos del operador ∂ tenemos que para toda $\omega \in D_{p-1}$

$$\partial(\varphi_\mu)(\omega) = \varphi_\mu(d\omega) = 0$$

es decir $\partial(\varphi_\mu) = 0$.

Las propiedades vistas del operador ∂ , nos sugieren que podemos definir la

Homología de De Rham de la siguiente manera:

Consideremos la siguiente sucesión exacta larga:

$$\dots \xrightarrow{\partial} D'_{p+1} \xrightarrow{\partial} D'_p \xrightarrow{\partial} D'_{p-1} \xrightarrow{\partial} \dots$$

Denotemos por:

$$Z_p = \text{Ker}(D'_p \xrightarrow{\partial} D'_{p-1}),$$

el subespacio de p -corrientes cerradas ó p -ciclos en D'_p .

$$B_p = \text{Im}(D'_{p+1} \xrightarrow{\partial} D'_p)$$

El subespacio de p -corrientes exactas ó p -fronteras en D'_p .

Definimos finalmente el p -ésimo grupo de homología de De Rham de M , H_p^{DR} por:

$$H_p^{DR}(M) = \frac{Z_p}{B_p}.$$

Tenemos entonces por 2.1.12 que una medida invariante por holonomía μ en una variedad foliada define en este sentido un p -ciclo φ_μ .

Si denotamos por $H^p(M, \mathbb{R})$ al p -ésimo grupo de cohomología de De Rham de la variedad M , tenemos una aplicación $H_p^{DR}(M) \times H^p(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$([\varphi], [\omega]) \rightarrow \varphi(\omega)$$

donde $[\]$ significa la clase correspondiente en homología y cohomología. Está aplicación resulta estar bien definida, ya que si φ_1 y φ_2 son tales que son homólogos bajo nuestra definición; es decir, $\varphi_1 - \varphi_2 \in \text{im } \partial$, entonces existe una $\theta \in D'_{p+1}$ tal que $\varphi_1 - \varphi_2 = \partial(\theta)$. Así, para cada p -forma diferenciable ω tenemos que:

$$(\varphi_1 - \varphi_2)[\omega] = \partial(\theta)(\omega) = \theta(d\omega) = \theta(0) = 0 \text{ ya que } \omega \in \text{ker } d, \text{ por lo tanto } \varphi_1 = \varphi_2.$$

Análogamente, si ω_1 y ω_2 son cohomólogos, entonces existe una $(p-1)$ -forma

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

diferenciable ω tal que $d\omega = \omega_1 - \omega_2$. Así para toda $\varphi \in D'_p$ tenemos que:
 $\varphi[\omega_1 - \omega_2] = \varphi[d\omega] = \partial\varphi(\omega) = 0(\omega) = 0$ ya que $\varphi \in \ker\partial$, por tanto
 $\varphi(\omega_1) = \varphi(\omega_2)$.

Todo lo anterior determina un homomorfismo $j_* : H_p^{DR}(M) \rightarrow (H^p(M, \mathbb{R}))'$ donde $(H^p(M, \mathbb{R}))'$ es el espacio dual del p -ésimo grupo de cohomología de De Rham de M y que es por definición $\text{Hom}(H^p(M; \mathbb{R}); \mathbb{R})$. Por el **Teorema de De Rham** este espacio dual se identifica canónicamente con el p -ésimo grupo de homología singular $H_p(M, \mathbb{R})$.

Recordemos ahora que en 2.1.7 vimos que una p -cadena singular diferenciable c en M es una p -corriente, de manera que si denotamos por ∂_S al operador frontera singular, tendremos una versión del **Teorema de Stokes** que afirmará que para una p -cadena singular c y una $p-1$ -forma ω se tiene que:

$$\int_{\partial_S(c)} \omega = \int_c d\omega.$$

Si denotamos por $C_p(M; \mathbb{R})$ al espacio vectorial de p -cadenas singulares, el teorema de Stokes significa en estos términos que bajo la inclusión natural $\iota : C_p(M, \mathbb{R}) \rightarrow D'_p$ dada por $\iota(c) = \varphi_c$, el operador lineal ∂ se restringe a un operador frontera singular ∂_S sobre las corrientes singulares, ya que si φ_c es una corriente singular y ω es una forma diferenciable tenemos que $\partial(\varphi_c)(\omega) = \varphi_c(d\omega) = \int_c d\omega = \int_{\partial_S(c)} \omega = \varphi_{\partial_S(c)}(\omega) = \partial_S(\varphi_c)(\omega)$.

Hay un resultado estandar que afirma que la homología singular de una variedad puede ser construida via cadenas singulares diferenciables [Hu.49]. Este resultado implica que la inclusión $\iota : C_p(M, \mathbb{R}) \rightarrow D'_p$ dada por $\iota(c) = \varphi_c$; donde a cada cadena singular c se le asocia la corriente singular que ésta define, resulta ser una aplicación lineal y da lugar a una aplicación inducida canónicamente en homología $\iota_* : H_p(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_p^{DR}(M)$ que resulta estar bien definida. Para esto denotemos por ∂_* al operador frontera en homología

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

singular. Tenemos el complejo de cadenas singular dado por:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_*} C_{p+1}(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial_*} C_p(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial_*} C_{p-1}(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial_*} \cdots$$

Consideremos ahora el siguiente diagrama de complejos de cadenas

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_*} & C_{p+1}(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\partial_*} & C_p(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\partial_*} & C_{p-1}(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\partial_*} & \cdots \\ & & \downarrow \iota & & \downarrow \iota & & \downarrow \iota & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial} & D'_{p+1} & \xrightarrow{\partial} & D'_p & \xrightarrow{\partial} & D'_{p-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots \end{array} \quad (2.4)$$

Con la notación anterior tenemos que la ecuación

$$\partial(\varphi_c)(\omega) = \partial_* (\varphi_c)(\omega) = \varphi_{\partial_* c}(\omega)$$

la podemos reescribir como

$$\partial \circ \iota(c)(\omega) = \iota \circ \partial_*(c)(\omega)$$

y está última nos dice que cada uno de los cuadrados del diagrama 2.4 conmutan. Notemos que la aplicación inducida entre los grupos de homología singular y de De Rham $\iota_* : H_p(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_p^{DR}(M)$ que esta dada por $\iota_*[c] = [\iota(c)] = [\varphi_c]$ resulta ser una función lineal. Por otro lado, si $b \in \text{Im } \partial_*$ es una p -cadena singular tenemos que $\iota_*[b] = [\iota \circ \partial_*(c)] = [\partial \circ \iota(c)] = [\partial(\varphi_c)] \in \text{Im } \partial$, por lo que ι_* resulta estar bien definida.

De esta manera podemos entonces reinterpretar el **Teorema de De Rham** en este caso diciendo simplemente que los homomorfismos j_* y ι_* son mutuamente inversos. En particular la homología singular y la homología de De Rham son canónicamente isomorfas.

Observación 2.1.23. Ya que la diferencial exterior d es acotada tenemos que el operador ∂ resulta ser continuo y por definición el espacio de ciclos Z_p es la

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

imagen inversa del cero bajo ∂ ; es decir $Z_p = \partial^{-1}(0)$. Tenemos entonces que Z_p es un subespacio cerrado de D'_p . Por nuestra reinterpretación del *teorema de De Rham* tenemos que un elemento $[\varphi] \in H_p^{DR}(M)$ es trivial si y sólo si $\varphi(\omega) = 0$ para toda forma cerrada $\omega \in D_p$, con lo cual tenemos que el espacio de fronteras B_p lo podemos escribir como $B_p = \bigcap_{\omega \in D_p} \omega^{-1}(0)$. Ya que la intersección de conjuntos cerrados es cerrado, tenemos que el espacio B_p es un subespacio cerrado de D'_p .

Nota 2.1.24. Si estamos trabajando en una variedad M no compacta, orientable y conexa tal que $\partial(M) = \emptyset$, podemos definir a los espacios D_p y D'_p usando formas diferenciables con soporte compacto, extendiendo todo lo anterior para este tipo de variedades.

2.2 Corrientes Foliadas

Sea (M, \mathfrak{F}) una variedad foliada compacta de dimensión n de clase de diferenciabilidad al menos $C^{1,0+}$ y la dimensión de la foliación \mathfrak{F} es p , asumamos además que el subhaz tangente $T(\mathfrak{F})$ es orientable y que $\partial M = \partial_r M$.

Escojamos un atlas foliado regular finito $\mathfrak{U} = \{(U_\alpha, x_\alpha, y_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{U}}$ de tal manera que para cada $\alpha \in \mathfrak{U}$ la p -ada $(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^p)$ determinan la orientación correcta de $\mathfrak{F}|_{U_\alpha}$. Si $x \in M$ es cualquier punto de M , denotemos por L la hoja de la foliación \mathfrak{F} que pasa a través del punto x .

Denotemos por $\Lambda^p(T_x L)$ al espacio vectorial de p -vectores sobre L que definimos en (2.1.6). Podemos tomar a sus elementos $v_x = v_{1,x} \wedge \dots \wedge v_{p,x}$ de tal manera que $(v_{1,x}, \dots, v_{p,x})$ es una base orientada de $T_x L$ con la orientación correcta. Como la dimensión de la hoja L es p tenemos que la dimensión sobre \mathbb{R} del espacio vectorial $\Lambda^p(T_x L)$ es uno; y si análogamente denotamos por $\Lambda^p(T_x M)$ al espacio vectorial de p -vectores sobre M , resulta que los p -vectores

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

$v_x \in \wedge^p(T_x L)$ forman un sub-espacio de dimensión uno en $\wedge^p(T_x M)$ para toda $x \in M$, ya que están representados por una sola combinación de los elementos de la base de $\wedge^p(T_x M)$. Si tenemos uno de estos p -vectores v_x y consideramos la corriente de Dirac φ_{v_x} , vistas en 2.1.6 y que denotaremos de aquí en adelante por v_x , para el caso de variedades foliadas a estas corrientes las llamaremos **Corrientes Foliadas de Dirac**.

Nuestra siguiente intención es aplicar teoría de análisis funcional al espacio D'_p y mostrar que las corrientes foliadas de Dirac generan un cono convexo con base compacta que denotaremos por C'_p y daremos algunas consecuencias de este hecho.

Lema 2.2.1. *Existe un subespacio vectorial cerrado $H \subset D'_p$ de codimensión uno tal que todas las corrientes foliadas de Dirac están sobre el mismo lado de H .*

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{U}}$ un atlas foliado regular. Para cada α en el conjunto de índices \mathcal{U} consideremos una p -forma $\tilde{\omega}_\alpha = dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^p$. Como la foliación es solamente de clase $C^{1,0+}$ esta forma puede ser a lo más de clase C^0 , pero puede ser aproximada uniformemente por una p -forma diferenciable ω_α , este resultado se puede consultar en [Hir76].

Podemos asumir sin pérdida de generalidad que las corrientes foliadas de Dirac son positivas sobre cualquier extensión ω_α para todo $x \in U_\alpha$, ya que podemos pensar a $\tilde{\omega}_\alpha$ como un múltiplo escalar del determinante de la base. Tomemos una partición de la unidad $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{U}}$ subordinada a la cubierta \mathcal{U} y definamos $\omega = \sum_{\alpha \in \mathcal{U}} \lambda_\alpha \omega_\alpha$. De esta manera cada corriente foliada de Dirac será positiva sobre esta forma y considerando que $\omega \in D_p$, entonces pensando a ω como una funcional lineal continua sobre D'_p , si definimos $H = \omega^{-1}(0)$ tenemos que es un subespacio cerrado de codimensión uno y las corrientes foliadas de Dirac se encuentran sobre el mismo lado de H . \square

Definición 2.2.2. Diremos de aquí en adelante que la p -forma ω de la demostración anterior es transversa a la foliación \mathfrak{F} . Ésta no es única y cada una de estas da lugar a un subespacio cerrado $H \subset D'_p$ con las propiedades descritas en el lema.

Recordemos que dado un subconjunto en un espacio vectorial topológico podemos considerar su cerradura topológica. En particular para el espacio D'_p denotemos por $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ a la cerradura topológica del conjunto de todas las combinaciones lineales finitas con coeficientes positivos de corrientes foliadas de Dirac en D'_p . A los elementos de $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ las llamaremos *corrientes foliadas*. Los elementos del conjunto $Z_{\mathfrak{F}} = Z_p \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ les llamaremos *ciclos foliados* y análogamente, si denotamos por $B_{\mathfrak{F},p} = B_p \cap \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$, a sus elementos los llamaremos *fronteras foliadas*.

Nota 2.2.3. $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}}$ es un cono convexo cerrado en D'_p . Que es cerrado es por definición y que es convexo se sigue del hecho que cualesquiera dos elementos x, y son aproximados por sucesiones de corrientes de Dirac, sobre éstas es claro que el conjunto es convexo y de esta manera al tomar cualesquiera dos elementos el segmento de línea $tx + (1-t)y$ con $0 \leq t \leq 1$ está contenido en el cono por la continuidad del producto por escalares y por ser un conjunto cerrado.

Lema 2.2.4. Sea $\omega \in D_p$ una forma transversa a \mathfrak{F} y sea $H = \omega^{-1}(0)$ como antes. Entonces $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} \cap H = 0$ y $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} \cap \omega^{-1}(1)$ es un conjunto compacto.

Demostración. Fijemos una métrica riemanniana $\| \cdot \|$ sobre $\Lambda^p(T(M))$ y definamos $A \subset \Lambda^p(T(M))$ como el conjunto de corrientes foliadas de Dirac v_x tales que $\|v_x\| = 1$. Entonces A es un conjunto compacto como subconjunto de la variedad $\Lambda^p(T(M))$ (ya que en espacios métricos se tiene compacto si y sólo si es cerrado y acotado).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Si $\eta \in D_p$, entonces $\eta : \Lambda^p(T(M)) \rightarrow \mathbb{R}$ es una funcional continua, con lo cual $\eta(A) \subset \mathbb{R}$ es un conjunto compacto; así que podemos encontrar un número real que depende de η ; $\mu_\eta \geq 0$ tal que $|\eta(a)| \leq \mu_\eta$ para toda $a \in A$.

Similarmenete, existe un número real $\lambda > 0$ tal que $\omega(a) > \lambda$ para toda $a \in A$. La existencia de tal λ con estas propiedades se debe a que si $a \in A$, entonces por ser corriente foliada de Dirac tenemos que $\omega(A) > 0$, y como A es compacto ω alcanza su máximo y su mínimo sobre A . El mínimo resulta ser distinto de cero, ya que si existiera un elemento $b \in A$ tal que $\omega(b) = 0$ entonces por definición de ω tendríamos que $b \notin A$, lo cual es claramente una contradicción. Supongamos que existe una $\theta \in \mathcal{C}_\mathbb{R} \cap H$, tal que $\omega(\theta) = 0$. Tenemos que podemos escribir $\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n$, donde $\theta_n = \sum_{i=1}^{r_n} c_{i,n} a_{i,n}$, y para la cual cada $c_{i,n} > 0$ y cada $a_{i,n} \in A$. Tenemos entonces que:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(\theta_n) \geq \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{r_n} c_{i,n} \geq 0$$

de donde podemos concluir que $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{r_n} c_{i,n}$.

Si $\eta \in D_p$, tenemos que:

$$|\eta(\theta)| \leq \mu_\eta \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{r_n} c_{i,n} = 0$$

y como η era arbitraria tenemos que $\theta = 0$. Con esto hemos demostrado la primera parte del lema.

Demostremos ahora que el conjunto $\hat{\mathcal{C}}_\mathbb{R} = \mathcal{C}_\mathbb{R} \cap \omega^{-1}(1)$ es compacto.

Ya que $\mathcal{C}_\mathbb{R}$ y $\omega^{-1}(1)$ son conjuntos cerrados en el espacio D'_p , tenemos que $\hat{\mathcal{C}}_\mathbb{R}$ es cerrado. Recordemos que el espacio D'_p es de Montel por lo que entonces sólo necesitamos ver que $\hat{\mathcal{C}}_\mathbb{R}$ es acotado; es decir, que para cada $\eta \in D_p$ se tiene que $\eta(\hat{\mathcal{C}}_\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado, ver [Sch50], Cap. III, pag. 71.

Denotemos por \mathcal{K} al subconjunto denso de todos los elementos $\kappa \in \hat{\mathcal{C}}_\mathbb{R}$ definido por las siguientes condiciones:

$$\omega(\kappa) = 1, \quad \kappa = \sum_{i=1}^r c_i a_i$$

donde cada $c_i > 0$ y cada $a_i \in A$.

Tenemos que para toda $\kappa \in K$,

$$1 = \omega(\kappa) = \sum_{i=1}^r c_i \omega(a_i) > \sum_{i=1}^r c_i \lambda.$$

De tal forma que $\sum_{i=1}^r c_i < \frac{1}{\lambda}$; por lo cual tenemos que:

$$|\eta(\kappa)| = \left| \sum_{i=1}^r c_i \eta(a_i) \right| \leq \sum_{i=1}^r c_i |\eta(a_i)| \leq \sum_{i=1}^n c_i \mu_\eta < \frac{\mu_\eta}{\lambda}$$

Ya que K es denso en $\mathcal{E}_\mathfrak{F}$ concluimos que $\eta(\mathcal{E}_\mathfrak{F}) \subset [-\mu_\eta/\lambda, \mu_\eta/\lambda]$ y por lo tanto $\mathcal{E}_\mathfrak{F}$ es compacto. \square

Nota 2.2.5. Si tenemos una forma $\omega \in D_p$ que es transversa a la foliación \mathfrak{F} , diremos que el subconjunto compacto $\mathcal{E}_\mathfrak{F}$ es una **base del cono** $\mathcal{E}_\mathfrak{F}$.

Uno de los teoremas más importantes en análisis funcional es el teorema de **Hahn-Banach** que dice lo siguiente:

Supongamos que tenemos una función de valor real p definida sobre un espacio vectorial topológico real \mathfrak{X} que satisface lo siguiente:

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para toda $x, y \in \mathfrak{X}$.
2. $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ para todo $\alpha \geq 0$ y $x \in \mathfrak{X}$.

Sea f un funcional lineal de valor real definida sobre un subespacio $\mathcal{D} \subset \mathfrak{X}$ que cumple con $f(x) \leq p(x)$ para toda $x \in \mathcal{D}$. Entonces existe un funcional lineal real F definida sobre \mathfrak{X} para la cual se tiene que:

1. $F(x) = f(x)$ para toda $x \in \mathcal{D}$.
2. $F(x) \leq p(x)$ para toda $x \in \mathfrak{X}$.

Este resultado y su análogo geométrico puede consultarse en [DS].

Una consecuencia de este teorema es el siguiente:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Teorema 2.2.6. *Sea W un espacio vectorial topológico localmente convexo sobre \mathbb{R} , X un subconjunto convexo compacto no vacío y V otro subconjunto convexo y cerrado no vacío. Si $X \cap V = \emptyset$ entonces existe una funcional continua $\Theta : W \rightarrow \mathbb{R}$ y un número real α tal que $\Theta(V) < \alpha < \Theta(X)$.*

De este resultado y del lema anterior tenemos los siguientes resultados:

Lema 2.2.7. *Existe una p -forma exacta transversa a la foliación \mathfrak{F} si y sólo si el cero es el único ciclo foliado para \mathfrak{F} .*

Demostración. Supongamos que tenemos una forma exacta $\omega = d\eta$ transversa a \mathfrak{F} donde $\eta \in D_{p-1}$. Si $c \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} - 0$ es una corriente foliada, tenemos por definición de ω que $\omega(c) > 0$. Ahora, si tenemos un ciclo foliado $z \in Z_{\mathfrak{F}}$, observamos que:

$$\omega(z) = d\eta(z) = \eta(\partial z) = \eta(0) = 0$$

con lo cual tenemos que $z = 0$.

Recíprocamente, asumamos que $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} \cap Z_p = 0$; como $\hat{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{F}}$ es un subconjunto convexo compacto no vacío de un espacio vectorial localmente convexo D'_p y $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} \cap Z_p = \emptyset$ ya que $\hat{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{F}} = \omega^{-1}(1)$ y $Z_p = \omega^{-1}(0)$, por el teorema 2.2.6 existe una funcional lineal continua ω sobre D'_p tal que:

$$\omega(Z_p) = 0 \quad \omega(\hat{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{F}}) > 0.$$

Ya que D_p es el dual topológico de D'_p , del hecho que $\omega > 0$ sobre $\hat{\mathfrak{C}}_{\mathfrak{F}}$ tenemos que ω es positiva sobre todo $\mathfrak{C}_{\mathfrak{F}} - \{0\}$, de donde concluimos que es positiva sobre todas las corrientes foliadas de Dirac; es decir, ω es transversa a la foliación \mathfrak{F} . Como además, $d\omega(c) = \omega(\partial c) = 0$ para toda corriente $c \in D'_{p+1}$ tenemos que ω es una forma cerrada. De hecho, es exacta ya que $[\omega] \in H^p_{DR}(\mathcal{M}; \mathbb{R})$ se anula sobre todo $[z] \in H_p(\mathcal{M}; \mathbb{R})$ por construcción; es decir, $[\omega]$ es la funcional cero sobre $H_p(\mathcal{M}; \mathbb{R})$ y por lo tanto $[\omega] = 0$. \square

Nota 2.2.8. En la demostración anterior esta implícito el hecho de que existe un isomorfismo entre la homología de De Rham y la homología singular.

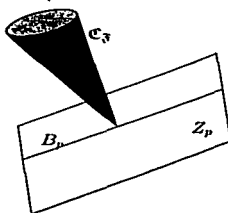


Figura 3. Una p -forma exacta transversa a la foliación de \mathfrak{F}

En resumen tenemos que existe una p -forma exacta transversa a la foliación \mathfrak{F} precisamente cuando el cono de corrientes foliadas $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$ intersecta a los ciclos Z_p exactamente en el cero.

Lema 2.2.9. Existe una p -forma cerrada transversa a \mathfrak{F} si y solamente si el cero es la única frontera foliada.

Demostración. Supongamos primeramente que tenemos una p -forma cerrada ω transversa a \mathfrak{F} , sea $z = \partial c \in \mathcal{C}_{\mathfrak{F}} \cap B_p$ una frontera. Entonces tenemos que:

$$\omega(z) = \omega(\partial c) = (d\omega)(c) = 0$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Como ω es transversa a la foliación, lo anterior implica que $z = 0$.

Supongamos ahora que $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}} \cap B_p = \emptyset$. Sabemos que $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$ y B_p tienen intersección vacía; por lo tanto, el teorema 2.2.6 implica que existe una p -forma ω tal que $\omega(\mathcal{C}_{\mathfrak{F}}) > 0$ y $\omega(B_p) = 0$. Del hecho de que ω sea estrictamente positiva sobre la base del cono $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$, se tiene que ésta forma es transversa a la foliación \mathfrak{F} , si además $c \in D'_{p+1}$, tenemos que:

$$d\omega(c) = \omega(\partial c) = 0$$

y como c era arbitraria $d\omega = 0$; es decir, ω es cerrada. □

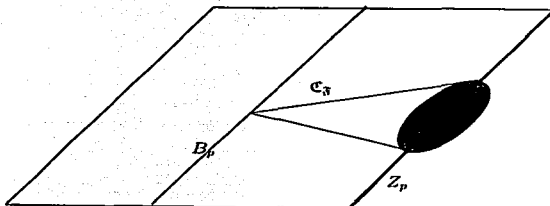


Figura 4. Una p -forma cerrada transversa a la foliación \mathfrak{F} que no es exacta.

Tenemos de esta manera que existe una p -forma cerrada transversa a la foliación exactamente cuando el cono de corrientes foliadas interseca a B_p solamente en el punto cero. Además, en este caso \mathfrak{F} admite tanto ciclos foliados no triviales como p -formas transversas cerradas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

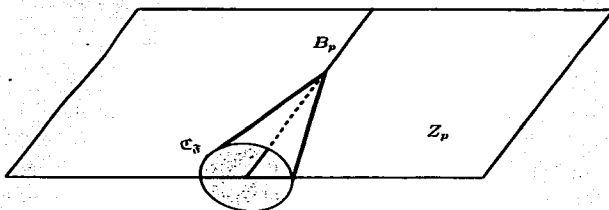


Figura 5. Una p -forma que no es cerrada y que es transversa a la foliación \mathfrak{F} .

Lema 2.2.10. *Si existen p -formas cerradas transversas a \mathfrak{F} y ciclos foliados no triviales entonces:*

1. *La aplicación natural $Z_{\mathfrak{F},p} \rightarrow H_p(M; \mathbb{R})$ aplica a todos estos ciclos no triviales a clases de homología no triviales.*
2. *La imagen de esta aplicación es un cono convexo $C_{\mathfrak{F}} \subset H_p(M; \mathbb{R})$ que tiene una base compacta.*
3. *El cono dual $C_{\mathfrak{F}}^* \subset H_{D,R}^p(M; \mathbb{R})$, definido por:*

$$C_{\mathfrak{F}}^* = \{ \gamma \in H_{D,R}^p(M; \mathbb{R}) \text{ tales que } z(\gamma) \geq 0 \text{ para toda } z \in C_{\mathfrak{F}} \},$$

es también un cono convexo.

4. *$C_{\mathfrak{F}}^*$ tiene interior no vacío, que consta exactamente de aquellas clases de cohomología que pueden representarse por una p -forma cerrada transversa a \mathfrak{F} .*

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Demostración. Esta aplicación está dada por la siguiente composición

$$Z_{\mathfrak{F}_p} = Z_p \cap \mathcal{C}_{\mathfrak{F}} \rightarrow Z_p \rightarrow \frac{Z_p}{B_p} = H_p(M; \mathbb{R}).$$

Esta aplicación es una proyección lineal acotada, de tal manera la imagen es un cono convexo $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$. La base del cono $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$ está definido por una p -forma cerrada ω transversa a la foliación \mathfrak{F} (2.2.4), por lo que el conjunto compacto $\hat{\mathcal{C}}_{\mathfrak{F}} \cap Z_p$ es aplicado sobre la base $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}} = [\omega]^{-1}(1) \cap \mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$, y esta base resulta compacta ya que la imagen continúa de un conjunto compacto es compacto. Las hipótesis además fuerzan el hecho de que $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}} \cap B_p = 0$; por lo cual la clase de homología $[z]$ no es cero para todo ciclo foliado z no trivial, lo que prueba 1, 2 y 3.

Escojamos ahora p -formas cerradas η_1, \dots, η_r cuyas clases de cohomología sean una base del grupo $HP(M; \mathbb{R})$. Si tenemos que ω es una forma cerrada transversa a la foliación, entonces la forma:

$$\omega + \sum_{i=1}^r a_i \eta_i$$

es transversa a la foliación para valores suficientemente pequeños de las a_i , con $1 \leq i \leq r$. Tenemos así que las clases de cohomología de estas formas se encuentran en una vecindad abierta de $[\omega] \in HP(M; \mathbb{R})$ en $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}}^*$, lo cual prueba que estas clases están representadas por formas cerradas transversas a \mathfrak{F} que se encuentran en el interior del cono dual $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}}^*$, en particular este cono tiene interior no vacío, lo cual prueba la primera parte de 4.

Demostraremos ahora que estas son las únicas clases en el interior del cono dual.

Para esto si $[\gamma] \in \mathcal{C}_{\mathfrak{F}}^*$ y γ se anula sobre algún ciclo foliado z no trivial, entonces por definición de forma transversa a la foliación, para alguna i tenemos que $\eta_i(z)$ es no cero. Por la que hay entonces valores arbitrariamente pequeños de $a_i \in \mathbb{R}$ tal que $(\gamma + a\eta_i)(z) < 0$; es decir, una clase $[\gamma]$ en el cono dual está en su interior si y sólo si γ toma valores estrictamente positivos sobre

todos los ciclos foliados no triviales. Esto es equivalente a que el subespacio $V = \gamma^{-1}(0) \cap Z_p \subset Z_p$ intersecciona a $Z_{\mathfrak{F}_p}$ solamente en el vértice 0. Este subespacio corresponde exactamente a el rayo a través de $[\gamma]$ en el cono dual, ya que el subespacio es generado por todos los multiples escalares de la funcional que lo define, así que sólo los multiples positivos satisfacen las condiciones. Aplicando el teorema 2.2.6 al subespacio cerrado $V \subset D'_p$ y a la base compacta del cono $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$, existe una p -forma ω estrictamente positiva sobre $\mathcal{C}_{\mathfrak{F}} - \{0\}$ tal que:

$$\omega^{-1}(0) \cap Z_p = \gamma^{-1}(0) \cap Z_p$$

Este subespacio contiene a B_p , así que ω es una forma cerrada transversa a la foliación \mathfrak{F} y $[\omega]$ esta sobre el sub-espacio afín de dimensión uno a través de $[\gamma]$. Con lo cual podemos concluir que γ es cohomóloga a una forma $b\omega$ para alguna $b > 0$. □

Capítulo 3

Ciclos Foliados y Medidas Invariantes por Holonomía

En este capítulo se demostrará el resultado principal de Denis Sullivan, que afirma que todo ciclo foliado da lugar a una medida invariante por holonomía. Primeramente se mostrará que todo ciclo definido por una medida invariante por holonomía, define un ciclo foliado. Después procederemos a demostrar haciendo uso del teorema de Representación de Riez que todo ciclo foliado está asociado con una corriente de integración. Finalmente; considerando la medida asociada a un ciclo foliado, desarrollaremos una forma de definir nuevas medidas a partir de nuestra medida original, que estarán definidas una sobre las placas y la otra sobre las transversales locales de la foliación, y se mostrará que esta última es una medida que es invariante por holonomía. Con lo cual podremos demostrar el teorema de Sullivan.

3.1 Teorema de Sullivan

En 2.1.12 vimos que si μ es una medida invariante por holonomía transversa a la foliación \mathfrak{F} que es finita sobre subconjuntos compactos del espacio transverso, entonces μ define un ciclo $\varphi_\mu \in Z_p$.

Proposición 3.1.1. *El ciclo φ_μ definido por una medida invariante por holonomía es un ciclo foliado.*

Demostración. Por 2.1.12 sólo necesitamos demostrar que nuestra corriente es límite de una sucesión de corrientes de Dirac. Consideremos un atlas foliado regular con cartas $(U_\alpha, x_\alpha, y_\alpha)$ y transversales S_α , fijas de aquí en adelante.

De la definición de una forma transversa a la foliación ω , sabemos que el hiperplano $\omega^{-1}(0)$ separa al cono de corrientes en uno de sus lados. Veamos primeramente que φ_μ se encuentra en el mismo lado que el cono.

Para que lo anterior sea cierto, tiene que suceder que $\omega(\varphi_\mu) > 0$. Pero $\omega(\varphi_\mu) = \varphi_\mu(\omega)$, con lo cual tenemos que demostrar:

$$\varphi_\mu(\omega) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_{S_\alpha} \left(\int_P \lambda_\alpha \omega \right) d\mu(P) > 0$$

Pero simplemente observemos que $\int_P \lambda_\alpha \omega \geq 0$ para cada placa $P \in S_\alpha$ salvo un conjunto de μ -medida cero. Por otro lado, la medida μ es finita sobre subconjuntos compactos, con lo cual existe al menos un subconjunto en el cual $\varphi_\mu(\omega) > 0$. Por lo tanto ésta se encuentra en el mismo lado del cono.

Ahora en cada carta coordenada $(U_\alpha, x_\alpha, y_\alpha)$ tenemos la representación de φ_μ de la siguiente manera:

$$\varphi_\mu(\omega_\alpha) = \int_{S_\alpha} \left(\int_P \lambda_\alpha \omega \right) d\mu(P)$$

Cada integral de la forma:

$$\int_P \lambda_\alpha \omega$$

con $P \in S_\alpha$, representa el valor de una función μ -medible; F_{μ_α} , es decir:

$$F_{\mu_\alpha}(P) = \int_P \lambda_\alpha \omega$$

Como función μ -medible, ésta es aproximada por una sucesión de funciones simples de valor positivo definidas sobre S_α , digamos $\{f_{\omega_\alpha}^i\}$, tal que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{S_\alpha} (F_{\mu_\alpha} d\mu(P) - f_{\omega_\alpha}^i \mu(S_\alpha)) = 0$$

salvo en un conjunto de μ -medida cero. Como las funciones $f_{\omega_\alpha}^i$ son positivas, consideremos para cada una de ellas un p -vector o corriente de Dirac $v_{\alpha i}$ del cono de corrientes foliadas de tal forma que:

$$\int_{S_\alpha} f_{\omega_\alpha}^i \mu(S_\alpha) = \omega(v_{\alpha i}).$$

Esto es posible ya que las funciones $f_{\omega_\alpha}^i$ son positivas, sólo toman un número finito de valores y las corrientes de Dirac son combinaciones lineales positivas de p -vectores.

Entonces sobre cada carta foliada U_α tenemos definida una corriente de Dirac $v_{\alpha i}$ tal que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\int_{S_\alpha} F_{\mu_\alpha} d\mu(P) - \omega(v_{\alpha i}) \right) = 0$$

Éstas corrientes $v_{\alpha i}$ aproximan tanto como se quiera el valor de ω sobre φ_μ en U_α .

Por último definamos la corriente de Dirac $V_i = \sum_\alpha v_{\alpha i}$ y observemos que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \omega(\varphi_\mu - V_i) = 0$$

es decir; φ_μ la puedo aproximar por corrientes foliadas de Dirac y por lo tanto es un ciclo foliado. \square

El resultado anterior nos dice que cuando tenemos corrientes de integración definidas por medidas invariantes por holonomía φ_μ , éstas resultan ser siempre

ciclos foliados.

Una pregunta natural es saber cuales ciclos foliados provienen de medidas invariantes por holonomía, y este es el resultado demostrado por Denis Sullivan, el cual será el tema principal de esta sección.

Teorema 3.1.2. *(D. Sullivan)*

Todo ciclo foliado es de la forma φ_μ para alguna medida invariante por holonomía. Es decir, todo ciclo foliado se puede aproximar por corrientes de integración con medidas invariantes por holonomía.

Para demostrar este teorema, veamos en primer lugar que las corrientes foliadas son corrientes de integración.

Consideremos una p -forma ω transversa a la foliación \mathfrak{F} y escojamos un campo continuo v de p -vectores no cero, tangente a \mathfrak{F} y tal que $\omega(v) \equiv 1$. Este campo continuo podemos suponer sin ningún problema que siempre existe, ya que si recordamos la construcción de ω vista en (3.0.19), ω está definida considerando una partición de la unidad subordinada a un atlas foliado regular finito y respecto a éste atlas, en cada vecindad coordinada $(U_\alpha, x_\alpha, y_\alpha)$, ω tiene una expresión de la forma:

$$\omega_\alpha = dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^p$$

Con lo cual podemos tomar para cada $\alpha \in \mathcal{U}$ el p -vector

$$\partial x_\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_\alpha^p}$$

Utilizando ahora la misma partición de la unidad de ω , $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{U}}$, podemos definir el campo v como:

$$v = \sum_{\alpha \in \mathcal{U}} \lambda_\alpha \partial x_\alpha$$

Ya que v es una combinación lineal con coeficientes positivos de p -vectores que está definida sobre \mathcal{M} , v es una corriente de Dirac y por ende una funcional

lineal continua sobre las p -formas; además se tiene que:

$$\omega(v) = \sum_{\alpha \in \mathbb{U}} \lambda_{\alpha} \omega_{\alpha}(v) = \sum_{\alpha \in \mathbb{U}} \lambda_{\alpha} \omega_{\alpha} \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{U}} \lambda_{\alpha} \partial x_{\alpha} \right) = \sum_{\alpha \in \mathbb{U}} \lambda_{\alpha} \omega_{\alpha} (\partial x_{\alpha}) = \sum_{\alpha \in \mathbb{U}} \lambda_{\alpha} = 1,$$

por lo cual nuestro campo v satisface las condiciones requeridas.

Ahora, dado un ciclo $c \in C_{\mathbb{R}}^1$, definimos una funcional lineal continua $J_c : C^{\infty}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$J_c(f) = c(f\omega)$$

Lema 3.1.3. *Existe una única medida ν_c no negativa, acotada sobre M , tal que:*

$$J_c(f) = c(f\omega) = \int_M f d\nu_c \quad \text{para toda } f \in C^{\infty}(M)$$

Demostración. Si tenemos que $c = a\nu_x$ es una corriente foliada de Dirac, entonces

$$J_c(f) = f(x)\omega(av_x) = af(x).$$

Así, la medida atómica ν concentrada en x con $\nu(x) = a$ es nuestra única medida ν_c . Si tenemos que c es una combinación lineal finita de corrientes foliadas de Dirac con coeficientes positivos, entonces nuestra medida ν_c resultará ser la suma de las correspondientes medidas atómicas.

Para el caso general en el que $c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$, donde cada c_n es una combinación lineal finita con coeficientes positivos de corrientes foliadas de Dirac, la correspondiente sucesión acotada (en el sentido débil) $\{\nu_{c_n}\}_{n=1}^{\infty}$ de medidas, tiene una subsucesión convergente a una medida ν_c con las propiedades requeridas.

Por el Teorema de representación de Riesz y del hecho que el subconjunto $C^{\infty}(M)$ es denso en el conjunto $C^0(M)$, tenemos que la funcional lineal J_c determina a la medida ν_c de manera única. \square

En la demostración anterior denotamos por $c = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ a una corriente arbitraria. Si denotamos por ν_n a ν_{c_n} para $n \geq 1$, entonces podemos re-escribir

el resultado anterior en la siguiente forma:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f d\nu_n = \int_M f d\nu_c$$

Como ν es un campo continuo de p -vectores tangente a \mathfrak{F} tal que $\omega(\nu) \equiv 1$, dada $\eta \in D_p$, la podemos descomponer de manera única como

$$\eta = \eta_0 + \eta(\nu)\omega$$

donde $\eta_0 | \Lambda^p(\mathcal{T}(\mathfrak{F})) \equiv 0$. Debemos enfatizar en esta parte que η_0 y $\eta(\nu)$ pueden ser solamente continuas, dada la clase de diferenciabilidad de la foliación \mathfrak{F} . Resulta ahora claro que:

$$c_n(\eta) = \int_M \eta(\nu) d\nu_n \quad \text{para toda } n \geq 1$$

con lo cual tenemos que:

$$c(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n(\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M \eta(\nu) d\nu_n = \int_M \eta(\nu) d\nu_c.$$

Si denotamos a esta corriente por $\int_M \nu d\nu_c$, acabamos de mostrar que las corrientes foliadas son corrientes de integración; es decir, si tenemos un campo continuo ν de p -vectores, no nulo sobre M y tangente a la foliación \mathfrak{F} ; tenemos que las corrientes foliadas c se corresponden de manera uno a uno con medidas no negativas acotadas ν_c sobre M , y esta correspondencia está dada por

$$c = \int_M \nu d\nu_c. \tag{3.1}$$

Tomemos $z \in Z_{\mathfrak{F}_p} \neq 0$ y fijamos una partición de la unidad $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in A}$ subordinada a un atlas foliado regular $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \pi_\alpha, \gamma_\alpha)\}_{\alpha \in U}$. Por 3.1 podemos encontrar una medida no trivial ν sobre M y un campo continuo ν de p -vectores tangentes a \mathfrak{F} tal que:

$$z = \int_M \nu d\nu \tag{3.2}$$

como corriente de integración. Fijemos una carta foliada abierta (W, x, y) no necesariamente en $\mathbb{1}$ y denotemos por $\nu = \nu|_W$. Si S es el espacio transversal $y(W)$, los puntos de S los podemos identificar con placas $P \subset W$. Usando la aplicación $y : W \rightarrow S$ podemos definir una medida no negativa de valor finito μ' sobre S determinada por el hecho de que si $X \subset S$ entonces

$$\mu'(X) = \nu(y^{-1}(X)).$$

Haciendo uso del teorema de Radon-Nikodym, de igual manera podemos encontrar una medida finita no negativa ν_p sobre cada \mathfrak{F} -placa $P \subset S$, salvo en conjuntos de medida cero respecto a la medida μ' , de tal manera que:

$$\int_W h d\nu = \int_S \left(\int_P h d\nu_p \right) d\mu'(P),$$

donde $h \in C^\infty(W)$ es ν -integrable. Además si $\{\nu'_p\}_{P \in S}$ es otra familia de medidas que satisfacen lo anterior, entonces $\nu_p = \nu'_p$ para $P \in S$ μ' -casi donde quiera.

Denotemos por $D_p^c(V) \subset D_p$ al subespacio de formas diferenciables con soporte compacto en V y por $D_p^c(V)$ al espacio dual de funcionales lineales continuas sobre $D_p^c(V)$. Para cada placa $P \in S$ definamos θ_p y σ_p por

$$\theta_p(\eta) = \int_P \eta \quad y \quad \sigma_p(\eta) = \int_P \eta(v) d\nu_p$$

para toda $\eta \in D_p^c(V)$ y v un campo continuo de p -vectores.

Para $\eta \in D_p^c(V)$ y z dado por 3.2 tenemos que

$$\int_S \sigma_p(\eta) d\mu' = z(\eta)$$

ya que

$$z(\eta) = \int_M \eta(v) d\nu = \int_S \left(\int_P \eta(v) d\nu_p \right) d\mu'(P) = \int_S \sigma_p(\eta) d\mu'.$$

Ahora, la corriente θ_p es cerrada ya que por el *Teorema de Stokes* para toda $\eta \in D_{p-1}^{\varepsilon}(V)$ se tiene que

$$\partial\theta_p(\eta) = \theta_p(d\eta) = \int_P d\eta = \int_{\partial P} \eta = \int_{\emptyset} \eta = 0$$

por lo que $\partial\theta_p \equiv 0$; es decir, θ_p es cerrada.

Tenemos también que la corriente σ_p es cerrada para casi toda placa P salvo conjuntos de medida cero bajo la medida μ' . Para ver esto definimos para cada $\tau \in D_{p-1}^{\varepsilon}(V)$ la función $g_\tau : S \rightarrow \mathbb{R}$ dada para toda $P \in S$ por:

$$g_\tau(P) = \partial\sigma_p(\tau) = \sigma_p(d\tau)$$

Mostraremos que la medida $g_\tau\mu'$ se anula, de donde concluiremos que:

$$g_\tau(P) = \partial\sigma_p(\tau) = \sigma_p(d\tau) = 0$$

para μ' -casi todo P . De hecho si $h \in C^\infty(S)$ e interpretamos a h como una función diferenciable sobre V que es constante a lo largo de cada placa P , pero no necesariamente con soporte compacto, entonces la forma $dh \wedge \tau$ tiene soporte compacto, $(dh \wedge \tau)|P \equiv 0$ y $\sigma_p(dh \wedge \tau) = \int_P (dh \wedge \tau)(v)dv_p = 0$ ya que el campo v es tangente a P . Tenemos así que

$$\sigma_p(d(h\tau)) = \sigma_p(dh \wedge \tau + h d\tau) = \sigma_p(h d\tau)$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \int_S h(P)d\{g_\tau\mu'\}(P) &= \int_S h(P)\sigma_p(d\tau)d\mu'(P) = \int_S \sigma_p(h(P)d\tau)d\mu'(P) \\ &= \int_S \sigma_p(d(h\tau))d\mu'(P) = z(d(h\tau)) = \partial z(h\tau) = 0 \end{aligned}$$

Es cero ya que $z \in Z_{\delta_p}$.

Como las funciones diferenciables sobre S son densas en el espacio de funciones continuas (relativa a la norma uniforme), nuestro argumento anterior sigue

siendo válido cuando h es solamente continua. Así tenemos que la medida $g_r \mu'$ se anula como se afirmaba y $\partial \sigma_p(\tau)$ se anula para μ' -casi toda P . El espacio topológico $D_{p-1}^c(V)$ es separable; por lo que si tomamos un subconjunto denso numerable $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$, tal que para toda i se tenga que las $\partial \sigma_p(\tau_i)$ se anulan simultáneamente sobre μ' -casi toda P , por la continuidad de las corrientes $\partial \sigma_p$ sobre $D_{p-1}^c(V)$ se sigue la afirmación.

Nota 3.1.4. En lo anterior siempre asumimos que las hojas de la foliación \mathfrak{F} tienen frontera vacía, esta hipótesis es $\partial(M) = \partial_r(M)$ y es esencial.

De aquí en adelante podemos asumir que la corriente σ_p es cerrada para toda $P \in S$. Por el teorema 2.1.12, aplicado a la p -variedad no compacta y sin frontera P , podemos concluir que existe un número $\kappa(P)$ para toda $P \in S$ tal que

$$\sigma_p = \kappa(P)\theta_p.$$

Esta función $\kappa : S \rightarrow \mathbb{R}$ es μ' -medible y podemos entonces definir la medida $\mu = \kappa \mu'$ sobre S . Si $\eta \in D_p^c(V)$ y $\eta(v) \geq 0$, entonces $\theta_p(\eta) \geq 0$ y $\sigma_p(\eta) \geq 0$. Así tenemos que la función κ toma valores no-negativos y μ es entonces una medida no-negativa.

Lema 3.1.5. *La medida μ es la única medida no-negativa sobre S , finita sobre subconjuntos compactos, tal que para toda $\eta \in C_p^c(V)$ satisface que:*

$$z(\eta) = \int_S \left(\int_P \eta \right) d\mu(P).$$

Demostración. Dada $\eta \in D_p^c(V)$ tenemos

$$\begin{aligned} z(\eta) &= \int_S \sigma_p(\eta) d\mu'(P) \\ &= \int_S \kappa(P) \theta_p(\eta) d\mu'(P) \\ &= \int_S \theta_p(\omega) d[\kappa \mu'](P) \\ &= \int_S \left(\int_P \eta \right) d\mu(P). \end{aligned}$$

Se puede encontrar una forma ζ con soporte compacto en las x -coordenadas, pero no en las y -coordenadas, tal que $\int_P \zeta = 1$ para toda $P \subset V$. Si $h : S \rightarrow \mathbf{R}$ es una función diferenciable con soporte compacto, entonces pensándola como función definida sobre V y constante a lo largo de placas, tenemos que $h\zeta \in D_p^0(V)$; por lo cual:

$$\int_S h d\mu = \int_S h \left(\int_P \zeta \right) d\mu = z(h\zeta)$$

es finita, y de esta manera se sigue que μ es finita sobre subconjuntos compactos.

Supongamos ahora que $\bar{\mu}$ es otra medida que satisface el ser no negativa y finita sobre subconjuntos compactos. La medida $(\mu - \bar{\mu})$ es una medida con signo que es finita sobre subconjuntos compactos y debe además satisfacer que para toda $\eta \in D_p^0(V)$:

$$\int_S \left(\int_P \eta \right) d[\mu - \bar{\mu}](P) = 0$$

Tenemos de esta manera, al igual que antes, que $\int_S h d[\mu - \bar{\mu}](P) = 0$ para toda función h diferenciable con soporte compacto sobre S ; es decir, $\mu - \bar{\mu}$ se anula sobre subconjuntos compactos por lo cual $\mu = \bar{\mu}$. □

Para demostrar el teorema principal 3.1.2 de que **todo ciclo foliado está dado por una medida invariante por holonomía**, consideremos una carta coordenada $(U_\alpha, x_\alpha, y_\alpha) \in \mathcal{U}$; en la demostración del lema 3.1.5 vimos que en esta carta coordenada tenemos una medida no negativa μ_α sobre el espacio S_α transverso a esta carta. Por la definición de atlas foliado regular existe una carta foliada (W, x, y) tal que la cerradura de U_α está contenida en W , donde placas distintas de la cerradura de U_α están en placas distintas de W . De esta manera: si denotamos por \tilde{S} al espacio transverso de W , entonces existe una inclusión natural de la cerradura del espacio transverso S_α (que denotaremos por \tilde{S}_α) en \tilde{S} .

La medida $\tilde{\mu}$ sobre \tilde{S} obtenida como antes, se restringe a una medida $\tilde{\mu}_\alpha$ sobre el espacio S_α con las propiedades deseadas, y por del lema 3.1.5 tenemos garantizado que $\mu_\alpha = \tilde{\mu}_\alpha$. En particular; ya que $\tilde{\mu}(S_\alpha) < \infty$, tenemos que $\mu_\alpha(S_\alpha) < \infty$ y entonces podemos definir una medida finita

$$\mu = \prod_{\alpha \in \mathfrak{U}} \mu_\alpha \quad \text{sobre} \quad \prod_{\alpha \in \mathfrak{U}} S_\alpha.$$

Notemos además que podemos asumir que el atlas es tal que siempre que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, entonces existe una carta foliada biregular (W, x, y) tal que se satisfaga que $U_\alpha \cup U_\beta \subset W$ ([CC00], pag. 27). Así, por la unicidad de las medidas μ_α y μ_β , esto implica que ambas coinciden con las restricciones de $\tilde{\mu}$ y por lo cual coinciden bajo las transformaciones de cociclo $\gamma_{\alpha,\beta}$. Ya que las transformaciones de cociclo generan el pseudogrupo de holonomía, tenemos que la medida μ es $\Gamma_{\mathfrak{U}}$ -invariante; es decir, invariante por holonomía.

Finalmente, si $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{U}}$ es una partición de la unidad subordinada al atlas \mathfrak{U} tenemos que cada $\eta \in D_p$ se puede descomponer como

$$\eta = \sum_{\alpha \in \mathfrak{U}} \lambda_\alpha \eta$$

donde cada $\lambda_\alpha \eta \in D_p^c(U_\alpha)$.

Por lo cual tenemos que:

$$\begin{aligned} z(\eta) &= \sum_{\alpha \in \mathfrak{U}} z(\lambda_\alpha \eta) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathfrak{U}} \int_{S_\alpha} \left(\int_P \lambda_\alpha \eta \right) d\mu(P) \\ &= \varphi_\mu(\eta). \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Apéndice A

Integración Fibrada

En este apéndice enunciaremos los resultados principales de la teoría general de la Integración Fibrada, la cual es utilizada para mostrar la biyección entre medidas invariantes por holonomía en la foliación determinada sobre un haz fibrado localmente trivial por la proyección y las medidas definidas sobre el espacio base del haz.

La referencia básica de este apéndice es [SHV72] capítulo VII.

A.1 El Haz Vertical

Sea $(E, \Pi, B; F)$ un haz fibrado diferenciable con $\dim(F) = r$ y $\dim(B) = n$. Es conocido que la derivada $d\Pi : T(E) \rightarrow T(B)$ de la proyección Π es una aplicación de haces tangentes de E y de B . Para cada $z \in E$ definimos el **Espacio Vertical** de $T_z(E)$ dado por $V_z(E) = \text{Ker}(d\Pi)_z$. Como las aplicaciones lineales $(d\Pi)_z$ son suprayectivas para toda $z \in E$ tenemos que $\dim(V_z(E)) = \dim(E) - \dim(B) = \dim(F)$.

Ahora, si $a \in B$ entonces la fibra $\Pi^{-1}(a) = F_a$ es una subvariedad cerrada de E y tenemos definida una aplicación inclusión $j_a : F_a \rightarrow E$, y se tiene además que $V_z(E) = \text{Im}(dj_a)_z$ para cada $a \in B$ y $z \in F_a$. Ya que $\Pi \circ j_a$ es la

aplicación constante dada por $F_a \rightarrow a$, con lo cual $d(\Pi \circ j_a) = d(\Pi) \circ d(j_a) = 0$ lo cual implica que $Im(dj_a) \subset V_z(E)$ y como $d(j_a)_z$ es inyectiva tenemos que $dim(Im(dj_a)_z) = dim(F) = dim(V_z(E))$.

Si consideramos ahora el subconjunto $V(E) \subset T(E)$ definido por $V(E) = \bigcup_{z \in E} V_z(E)$ éste resulta ser un sub-haz de $T(E)$ llamado el **Sub-haz Vertical**. Considerando una representación coordenada $\{U_\alpha, \Psi_\alpha\}$ del haz (E, Π, B, F) el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} TU_\alpha \times TF & \xrightarrow{d\Psi_\alpha} & T_{\Pi^{-1}(U_\alpha)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_\alpha \times F & \xrightarrow{\Psi_\alpha} & \Pi^{-1}U_\alpha \end{array}$$

se restringe al siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \times TF & \xrightarrow{d\Psi_\alpha} & V_E|_{\Pi^{-1}(U_\alpha)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ U_\alpha \times F & \xrightarrow{\Psi_\alpha} & \Pi^{-1}U_\alpha \end{array}$$

Dotando de esta manera a V_E una estructura de haz, y además es una sub-variedad de $T(E)$ de dimensión $dim(V_E) = n + 2r$. Lo anterior nos dice que las aplicaciones $dj_a : T(F_a) \rightarrow T(E)$ pueden restringirse, dando lugar a aplicaciones de haz $dj_a : T(F_a) \rightarrow V_E$ induciendo isomorfismos lineales sobre las fibras, por lo cual V_E es llamado el **haz a lo largo de las fibras**. Se dice que un campo vectorial Z sobre E es un **campo vectorial vertical** si para todo $z \in Z$ el vector $Z(z)$ es vertical. Se satisface además que el producto de Lie de dos campos vectoriales verticales Z_1 y Z_2 es nuevamente un campo vertical, con lo cual los campos vectoriales verticales forman una sub-álgebra $\Xi_1(E)$ del álgebra de Lie de campos vectoriales de E , $\Xi(E)$.

A.2 El Sub-Haz Horizontal

Si (E, Π, B, F) es un haz diferenciable, diremos que un sub-haz H_E del haz tangente $T(E)$ es un **sub-haz horizontal** si:

$$T(E) = H_E \oplus V_E.$$

A las fibras de $H_E(z)$, $z \in E$ de un sub-haz horizontal se les llaman **sub-espacios horizontales**.

Si se ha escogido un sub-haz horizontal fijo H_E , entonces la derivada $d\Pi : T(E) \rightarrow T(B)$ se restringe a una aplicación de haz $H_E \rightarrow T(B)$, que induce un isomorfismo lineal en cada fibra, así H_E es isomorfo al pull-back de $T(B)$ via Π y además H_E es una variedad de $T(E)$ de dimensión $\dim(H_E) = 2n + r$. Se dice que un campo vectorial Z es un **campo vectorial horizontal** si $Z(z) \in H_E(z)$ para toda $z \in E$. Estos en general no forman una sub-álgebra de Lie de $\Xi(E)$.

Se tiene así que todo campo vectorial $Z \in \Xi(E)$ de E se puede entonces escribir de manera única como:

$$Z = Z_V + Z_H$$

donde $Z_V \in X_V(E)$ y $Z_H \in X_H(E)$ y sus componentes en esta descomposición son llamadas vertical y horizontal respectivamente.

Ejemplo A.2.1. $E = B \times F$ el haz trivial. El sub-haz vertical para este caso es $V_{B \times F} = B \times T(F)$ y el subespacio horizontal es $H_{B \times F} = T(B) \times F$.

A.3 Formas Diferenciables

Sea (E, Π, B, F) un haz fibrado diferenciable. Diremos que una forma diferencial $\Phi \in A(E)$ es una **forma diferencial horizontal** si:

$$i(X)\Phi = 0$$

para todo campo $X \in \Xi_V(E)$, donde $i(X)$ es la aplicación contracción. Las formas diferenciables horizontales forman una sub-álgebra graduada del álgebra de formas diferenciables sobre E , que denotamos por $A_H(E)$. Esta sub-álgebra es llamada la **sub-álgebra horizontal** y la denotaremos por $A_H(E)$.

Supongamos ahora que tenemos escogido un sub-haz horizontal $H_E \subset T(E)$ y sea $\Xi_H(E)$ el sub-módulo de campos vectoriales horizontales sobre E . Definimos una sub-álgebra graduada $A_V(E) \subset A(E)$ por:

$$A_V(E) = \{\Phi \in A(E) \text{ tal que } i(X)\Phi = 0, \text{ para } X \in \Xi_H(E)\}.$$

Llamaremos a $A_V(E)$ la **sub-álgebra vertical de $A(E)$** y esta depende de la elección de H_E .

Si consideramos el álgebra graduada anticonmutativa $A_H(E) \otimes A_V(E)$, que es el producto tensorial anticonmutativo de álgebras, entonces el morfismo dado por:

$$\Phi \otimes \Psi \rightarrow \Phi \wedge \Psi$$

define un isomorfismo de álgebras graduadas $\mu: A_H(E) \otimes A_V(E) \rightarrow A(E)$.

Nota A.3.1. La inclusión $\wedge V_E \rightarrow \wedge T(E)$ induce un homomorfismo de álgebras $\rho_V: A(E) \rightarrow \text{Sec } \wedge V_E^*$ dado por:

$$\rho_V \Phi(z, \psi_1, \dots, \psi_p) = \Phi(z, \psi_1, \dots, \psi_p),$$

con $z \in E$ y $\psi_i \in V_z(E)$ independiente de la elección de un sub-haz horizontal, y este morfismo ρ_V es suprayectivo. De hecho, si H_E es un sub-haz horizontal y

$A_V(E)$ es la correspondiente sub-álgebra vertical entonces se tiene que $\rho_V|_{A_V(E)}$ es la aplicación inversa del isomorfismo F_V , donde $F_V : Sec \wedge V_E^r \rightarrow A_V(E)$ dado por $F_V \Psi(z, \psi_1, \dots, \psi_r) = \Psi(z, V_z \psi_1, \dots, V_z \psi_r)$ con $V_z : T_z(E) \rightarrow V_z(E)$ la correspondiente proyección sobre el haz vertical.

A.4 Orientación en Haces Fibrados

Sea $\Gamma = (E, \Pi, B, F)$ un haz fibrado diferenciable, $\dim(B) = n$ y $\dim(F) = r$. Consideremos aquellas formas diferenciables $\Phi \in A^r(E)$ tal que para cada $x \in B$ la forma diferencial $j_x^* \Phi \in A^r(F_x)$ orienta a la subvariedad F_x . Diremos que dos formas diferenciables Φ_1 y Φ_2 son equivalentes si $j_x^* \Phi_1$ y $j_x^* \Phi_2$ inducen la misma orientación sobre F_x para toda $x \in B$.

Definición A.4.1. El Haz Γ es un **haz orientable** si existe una r -forma diferenciable Ψ de E tal que $j_x^* \Psi$ orienta a F_x para toda $x \in B$.

Una clase de equivalencia de estas r -formas diferenciables es llamada una **orientación para el haz Γ** y un miembro de alguna clase diremos que representa a la orientación.

Cada orientación en el haz determina una orientación en las fibras F_x , y en particular la fibra típica de un haz orientable es orientable.

Ejemplo A.4.2. El haz trivial $(B \times F, \Pi, B, F)$ es orientable si y sólo si F es orientable. Si la fibra F es orientable, sea $\Delta_F \in A^r(F)$ una r -forma diferenciable de orientación para la fibra. Entonces para la forma diferencial $1 \times \Delta_F$ se tiene que $j_x^*(1 \times \Delta_F) = \Delta_F$, con lo cual tenemos que la forma $1 \times \Delta_F$ orienta el haz.

Recordemos que tenemos el morfismo $\rho_V : A(E) \rightarrow Sec \wedge (V_E^r)$. Entonces para cada $z \in E$ podemos considerar la aplicación $\wedge(dj_z)_z$ con $\Pi(z) = x$; como

un isomorfismo: $\sigma_x : \wedge(T_x(F_x)) \rightarrow \wedge(V_x(E))$. Así, para $\Psi \in \mathcal{A}(E)$ tenemos que $\sigma_x^z(\rho_V \Psi(z)) = (j_x^* \Psi)(z)$ con $z \in E$ y $\Pi(z) = x$.

Proposición A.4.3. 1. Si $\Psi \in \mathcal{A}^r(E)$ orienta el haz Γ , entonces se tiene que $\rho_V \Psi \in \text{Sec} \wedge(V_E^r)$ orienta el haz vertical V_E .

2. Ψ y Φ representan la misma orientación de Γ si y sólo si $\rho_V \Psi$ y $\rho_V \Phi$ representan la misma orientación.

3. Las orientaciones del haz Γ y las orientaciones de V_E están en correspondencia biyectiva.

A.5 Orientación Producto Local

Sea (E, Π, B, F) un haz fibrado orientado por una r -forma diferenciable Ψ y asumamos que una n -forma diferenciable $\Delta_B \in \mathcal{A}(B)$ orienta a B . Se tiene el siguiente resultado:

Lema A.5.1. La $(n+r)$ -forma diferenciable $\Delta_E = \Pi^* \Delta_B \wedge \Psi$ orienta la variedad E y la orientación de E representada por Δ_E depende solamente de la orientación del haz y de la orientación de B .

Definición A.5.2. La orientación determinada por la forma diferenciable $\Delta_E = \Pi^* \Delta_B \wedge \Psi$ es llamada la **orientación producto local de E** .

A.6 La Integral Fibrada

Sea $\Gamma = (E, \Pi, B, F)$ un haz fibrado diferenciable en el cual $\dim(B) = n$, $\dim(F) = r$ y V_E el correspondiente haz vertical del haz tangente $T(E)$. Sea $\Psi = (\mathcal{M}, \Pi_M, B, H)$ un haz vectorial sobre B y supongamos que tenemos

asociada una aplicación de haz $\Phi : \wedge^r V_E \rightarrow \Psi$ tal que induce a la función $\Pi : E \rightarrow B$ en las variedades base.

$$\begin{array}{ccc} \wedge^r V_E & \xrightarrow{\Phi} & M \\ \downarrow & & \downarrow \pi_M \\ E & \xrightarrow{\Pi} & B \end{array}$$

Definición A.6.1. El soporte de Φ es la cerradura en el espacio E del conjunto $\{z \in E | \Phi_z \neq 0\}$ y la denotaremos por $Car(\Phi)$.

Diremos que tiene Φ soporte-fibra compacto si para todos los subconjuntos compactos $A \subset B$ se tiene que $\Pi^{-1}(A) \cap Car(\Phi)$ es un subconjunto compacto de E .

Diremos que una forma diferencial $\Omega \in A(E)$ tiene soporte fibra compacto si para todo subconjunto compacto $K \subset B$ el conjunto $\Pi^{-1}(K) \cap Sop(\Omega)$ es compacto, donde $Sop(\Omega)$ denota el soporte usual de Ω .

Al conjunto de formas diferenciables con soporte-fibra compacto lo denotaremos por $A_F(E)$, este es un ideal graduado de $A(E)$ y que además es estable bajo contracciones, derivada de Lie y derivada exterior.

Asumamos que el haz Γ es orientado y que Φ tiene soporte-fibra compacto. Definiremos una sección $\sigma \in Sec(\Psi)$ la cual llamaremos la *integral sobre la fibra de Φ* . Para esto, si $x \in B$, Φ determina una r -forma diferenciable con valores en H_x definida sobre F_x , $\Phi_x \in \wedge^r(F_x; H_x)$ dada por:

$$\Phi_x(z; \eta_1, \dots, \eta_r) = \Phi(\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r)$$

para $z \in F_x$ y $\eta_i \in T_x(F_x) = V_x(E)$.

Como Φ tiene soporte compacto, tenemos que cada Φ_x tiene soporte fibra compacto y como además Γ es orientado tenemos definida una orientación sobre cada F_x . Tenemos de esta manera definida una función $\sigma : B \rightarrow M$ dada por:

$$\sigma(x) = \int_{F_x} \Phi_x \quad \text{para } x \in B.$$

En particular se tiene que $\sigma(x) \in H_x$ por lo cual $\Pi_M \circ \sigma = Id$ y esta resulta ser una sección cruzada diferenciable del haz Ψ . A σ la denotaremos por $\sigma = \int_F \Phi$ y la llamaremos *la integral sobre la fibra de Φ* .

A.7 Formas Diferenciables

Sea $\Gamma = (E, \Pi, B, F)$ un haz fibrado diferenciable orientado, $\dim(B) = n$ y $\dim(F) = r$.

Definiremos una aplicación lineal $f : A(E) \rightarrow A(E)$ homogénea de grado $-r$ que llamaremos la *integración sobre la fibra*.

Sea $\Omega \in A_r^{+p}(E)$ con $p \leq 0$. Para cada $x \in B$, Ω determina una r -forma diferenciable con soporte-fibra compacto Ω_x sobre F_x^* con valores en $\wedge^p T_x(B)^*$ de la siguiente manera:

Sea $z \in F_x$ y vectores tangentes $\eta_1, \dots, \eta_r \in V_x(E)$ y $\psi_1, \dots, \psi_p \in T_x(E)$. Consideremos vectores tangentes $\gamma_1, \dots, \gamma_p \in T_x(E)$ tales que $d\Pi(\gamma_i) = \psi_i$ para toda $i = 1, \dots, p$. Ya que $V_x(E) = \text{Ker}(d\Pi)_x$ tenemos que su dimensión es r y el número $\Omega(z; \gamma_1, \dots, \gamma_p, \eta_1, \dots, \eta_r)$ es independiente de las elecciones de los γ_i . Definimos Ω_x por:

$$\langle \Omega_x(z; \eta_1, \dots, \eta_r); (\psi_1, \dots, \psi_p) \rangle = \Omega(z; \gamma_1, \dots, \gamma_p, \eta_1, \dots, \eta_r).$$

Observación A.7.1. Tenemos definida una p -forma diferenciable $f_F \Omega$ sobre B definida por:

$$(f_F \Omega)(x) = \int_{F_x} \Omega_x \quad \text{para } x \in B.$$

Para ver que $f_F \Omega$ es diferenciable, definimos una aplicación de haz $\Phi_\Omega : \wedge^r V_E \rightarrow \wedge^p T(B)^*$ dada por:

$$\Phi_\Omega(z; \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_r) = \Omega_{\Pi(z)}(\eta_1, \dots, \eta_r),$$

con lo cual tenemos que $f_F \Omega = f_F \Phi_\Omega$, y por lo tanto $f_F \Omega$ es diferenciable.

Resulta además que $f_F : A_r^{+p}(E) \rightarrow A^p(B)$ es una aplicación lineal que la

podemos extender a formas de grado menor que r por $\int_F \Omega = 0$ para $\Omega \in A_F^q(E)$ con $q < r$.

Ejemplo A.7.2. Sea $E = F$ y $B = \{*\}$ un punto.

Tenemos entonces que F es una variedad orientada y \int_F es la aplicación lineal $\int_F : A_c^r \rightarrow \mathbb{R}$ y la podemos extender a $A_c(F)$ por la condición $\int_F \Omega = 0$ si el grado de Ω es menor que r . Aquí $A_c(F)$ denota a las formas diferenciables con soporte compacto.

A.8 Productos

Supongamos que $E = B \times F$.

Si $\Omega \in A^{p+r}(B \times F)$ entonces se tiene que $\Omega_x \in A^r(F; \wedge^p T_x(B)^*)$ dada por

$$\langle \Omega_x(y; \eta_1, \dots, \eta_r); \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_p \rangle = \Omega(x, y; \psi_1, \dots, \psi_p, \eta_1, \dots, \eta_r)$$

para $x \in B$, $\psi_i \in T_x(B)$ y $\eta_j \in T_y(F)$.

Si $\Delta_F \in A^r(F)$ orienta la variedad F , tenemos entonces que la forma diferencial $1 \times \Delta_F$ orienta el haz. Más aún si $\Psi \in A_c(F)$ y $\Phi \in A(B)$ entonces tenemos la forma diferencial $\Psi \times \Phi \in A_F(B \times F)_x$, y se satisface que

$$\int_F (\Psi \times \Phi) = \left(\int_F \Psi \right) \Phi.$$

De hecho $(\Phi \times \Psi)_x \in A_c(F; \wedge^p T_x(B)^*)$ dada por $(\Phi \times \Psi)_x = \Psi \otimes \Phi(x)$ con $x \in B$. De esta manera tenemos que:

$$\left(\int_F (\Phi \times \Psi) \right)(x) = \left(\int_F \Psi \right) \Phi(x).$$

A.9 Propiedades de la Integral fibrada \int_F

Teorema A.9.1. *La integral fibrada $\int_F : A_F(E) \rightarrow A(B)$ es una aplicación lineal suprayectiva que satisface lo siguiente:*

$$\int_F \Pi^* \Phi \wedge \Psi = \Phi \wedge \int_F \Psi$$

para $\Phi \in A(B)$ y $\Psi \in A_F(E)$.

Además \int_F se restringe a una aplicación lineal suprayectiva

$$\int_F : A_c(E) \rightarrow A_c(B).$$

Proposición A.9.2. *La integral fibrada satisface las siguientes relaciones:*

1. $\iota(Y) \circ \int_F = \int_F \circ \iota(Z)$.
2. $\Theta(Y) \circ \int_F = \int_F \circ \Theta(Z)$.
3. $\delta \circ \int_F = \int_F \circ \delta$.

Donde $Z \in X(E)$ y $Y \in X(B)$ están Π -relacionados, $\iota(\)$ es la aplicación contracción, $\Theta(\)$ es la derivada de Lie y δ es la derivada exterior.

Además se tiene un teorema tipo Fubini para este caso:

Teorema A.9.3. *Sea (E, Π, B, F) un haz fibrado diferenciable orientado, b variedad orientada, $\dim(B) = n$, $\dim(F) = r$ y E tiene la correspondiente orientación producto. Entonces:*

$$\int_E = \int_B \circ \int_F : A_c^{n+r}(E) \rightarrow (R).$$

Bibliografía

- [CC00] A. Candel and L. Conlon., *Foliations 1*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 23, American Mathematical Society, 2000.
- [CN85] Cesar Camacho and Alcides Lins Neto., *Geometric theory of foliations*, BIRKHÄUSER, Boston- Basel- Stuttgart, 1985.
- [DS] N. Dunford and J. T. Schwartz., *Linear operators, part 1*, Interscience Publishers, Inc. New York.
- [God91] Claude Godbillon., *Feuilletages etudes geometriques*, Progress in Mathematics, vol. 98, BIRKHÄUSER Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1991.
- [HH83] G. Hector and U. Hirsh., *Introduction to the geometry of foliations, part b*, Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1983.
- [Hir76] Morris W. Hirsch., *Differential topology*, Springer-Verlag, New York- Heidelberg- Berlin, 1976.
- [Hor66] Jhon Horvath., *Topological vector spaces and distributions*, vol. 1, Addison-Wesley, 1966.
- [Hu.49] Sze-Tsen Hu., *On singular homology in differentiable spaces.*, Ann. of Math 50 (1949).

- [Jr.77] H. Blaine Lawson Jr., *The quantitative theory of foliations*, Conference Board of the Mathematical Sciences, Regional Conference Series in Mathematics, National Science Foundation, vol. 27, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1977.
- [Köt69] Gottfried Köthe., *Topological vector spaces 1*, Springer-Verlag, New York, 1969.
- [MS88] Calvin C. Moore and Claude Schoquet., *Global analysis on foliated spaces*, Mathematical Sciences Research, Institute Publications, vol. 9, Springer-Verlag, 1988.
- [Pla75] J. F. Plante., *Foliations with measure preserving holonomy*, Ann. of Math **102** (1975), 449-456.
- [PRHG74] J. H. Ewing P. R. Halmos and F. W. Gehring., *Measure theory*, Graduate texts in Mathematics, vol. 18, Springer-Verlag, New York Inc, 1974.
- [Rha84] Georges De Rham., *Differentiable manifolds, currents, harmonic forms*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 266, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [RR73] A. P. Robertson and W. J. Robertson., *Topological vector spaces*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, vol. 53, Cambridge University Press, 1973.
- [RS75] D. Ruelle and D. Sullivan., *Currents, flows, and diffeomorphisms*, Topology **14** (1975), 319-327.
- [Sch50] L. Schwartz., *Théorie des distributions*, vol. Tome 1, Hermann, Paris, 1950.

- [Sch86] H. H. Schaefer., *Topological vector spaces*, Graduate texts in Mathematics, vol. 3, Springer-Verlag, 1986.
- [SHV72] W. Greub S. Halperin and R. Vanstone., *Connections, curvature, and cohomology*, Pure and Applied Mathematics, 47, vol. 1, Academic Press, 1972.