

00324

7



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO



FACULTAD DE CIENCIAS

SEMINUCLEOS, NUCLEOS Y NUCLEOS POR TRAYECTORIAS DIRIGIDAS MONOCROMATICAS.

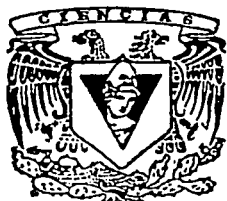
T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A ;

PIETRA ADRIANA DELGADO ESCALANTE



FACULTAD DE CIENCIAS UNAM

DIRECTOR DE TESIS: DRA. HORTENSIA GALEANA SANCHEZ



2003

FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**TESIS CON  
FALLA DE  
ORIGEN**



UNIVERSIDAD DE LA GUAYANA FRANCESA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
MATEMÁTICAS

**DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA**  
**Jefa de la División de Estudios Profesionales de la**  
**Facultad de Ciencias**  
**Presente**

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Seminúcleos, núcleos y núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas"

realizado por Pietra Adriana Delgado Escalante

con número de cuenta 9850612-1 , quien cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Dra. Hortensia Galeana Sánchez

Propietario Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía

Propietario Mat. Laura Pastrana Ramírez

Laura Pastrana R.

Suplente M. en C. Patricia Cortés Flores

Suplente M. en C. Pilar Valencia Saravia

Consejo Departamental de  
Matemáticas



M. en C. José Antonio Gómez Ortega

CONSEJO DEPARTAMENTAL DE  
MATEMÁTICAS

2

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**A mis padres, Juan y Gise.**



# Contenido

Introducción.....	7
Notación.....	9
Capítulo 1. Introducción a la Teoría de Digráficas.....	11
Capítulo 2. Núcleos y seminúcleos en digráficas.....	27
Capítulo 3. Aplicaciones del concepto de núcleo.....	43
Capítulo 4. Trayectorias y ciclos dirigidos monocromáticos en torneos $m$ -coloreados.....	55
Capítulo 5. Trayectorias y ciclos dirigidos monocromáticos en casitorneos $m$ -coloreados.....	83
Conclusiones.....	123
Bibliografía.....	125





# Introducción

El presente texto tiene como objetivo principal realizar el análisis de recientes resultados en la Teoría de Digráficas, en particular del tema de núcleos en digráficas.

Inicialmente, en el primer capítulo (*Introducción a la Teoría de Digráficas*), se proporcionan los conceptos básicos que resultan necesarios para el desarrollo de la presente tesis, y se presenta al lector la notación y lenguaje matemático de que se hará uso. Con tales herramientas es posible demostrar los primeros resultados que, aunque son en sí mismos de gran interés, también serán de utilidad en los siguientes capítulos.

En el segundo capítulo (*Núcleos y seminúcleos en digráficas*) es presentado el concepto de *seminúcleo* de una digráfica y a continuación, el de mayor importancia en el presente texto, nos referimos al concepto de *núcleo* de una digráfica. Inmediatamente son probadas afirmaciones que relacionan ambos conceptos, y se culmina la sección con las definiciones de *digráficas núcleo perfectas* y *núcleo imperfectas críticas*, así como con Teoremas que las involucran.

El siguiente capítulo (*Aplicaciones del concepto de núcleo*) presenta al lector interesantes aplicaciones del concepto de núcleo y de resultados asociados a él. En particular, Teoría de Juegos y Lógica, son áreas en las que las aplicaciones de la Teoría de Gráficas son claramente útiles, como se muestra a lo largo de este capítulo.

Los últimos dos capítulos de la tesis concentran el análisis de recientes investigaciones relativas a núcleos en digráficas. Se inicia el cuarto capítulo (*Trayectorias y ciclos dirigidos monocromáticos en torneos m-coloreados*) introduciendo los conceptos de *torneo*, *digráfica m-coloreada* y *trayectorias dirigidas monocromáticas* en digráficas m-coloreadas, para así definir *núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas* y analizar algunas condiciones suficientes para que un torneo m-coloreado tenga núcleo por trayectorias dirigidas, sin embargo para este último análisis, las herramientas son aún insuficientes sin el concepto de *cerradura de una digráfica*, el que es estudiado aquí al igual que las condiciones para que la cerradura de un torneo m-coloreado sea núcleo perfecta.

Es en el último capítulo (*Trayectorias y ciclos dirigidos monocromáticos en casitorneos m-coloreados*) en donde se define un *casitorneo* y también se analizan condiciones suficientes para que la cerradura de un casitorneo sea núcleo perfecta, realizando las debidas comparaciones con los resultados analizados para torneos.

Finalmente, la tesis culmina con conclusiones y comentarios en base al análisis de los recientes resultados obtenidos en Teoría de Gráficas y aquí presentados. Como podrá observar el lector, el texto es autocontenido y ha sido escrito de forma tal que puede de ser estudiado de manera fluida por cualquier lector interesado en el tema.



# Notación

$\&$	Conjunción
$\dagger$	Indica la culminación de una demostración
<b>si</b>	Si y solo si
$\Leftrightarrow$	Si y solo si
$a \rightarrow b$	Es la flecha del vértice $a$ al vértice $b$
$(x,y)$	Es la flecha del vértice $x$ al vértice $y$
$[x,y]$	Es la flecha entre los vértices $x$ & $y$
$[x,y]_D$	Es la flecha entre los vértices $x$ & $y$ en la digráfica $D$
$ N $	es la cardinalidad del conjunto $N$
$\overline{D}$	es la digráfica complementaria de $D$ .
$\Gamma^+(u)$	$\{v \in V(D) \text{ tal que } (u,v) \in F(D)\}$
$D[B]$	Subdigráfica inducida por el conjunto de vértices $B$
<b>AB-flecha</b>	Flecha que va de un vértice del conjunto $A$ a uno del conjunto $B$
<b>P</b> $\cup$ <b>Q</b>	Camino que resulta de recorrer el camino $P$ seguido del camino $Q$ .
<b>(a,P,b)</b> $\cup$ <b>Q</b>	Camino que resulta de recorrer el camino $P$ del vértice $a$ hasta el vértice $b$ , y unirlo con el camino $Q$
$H \subseteq^* D$	$H$ es una subdigráfica inducida de $D$



## Capítulo 1

# Introducción a la Teoría de Digráficas

En el presente capítulo se proporcionan al lector los conceptos básicos de Teoría de Digráficas que permiten entender y analizar algunos de los últimos resultados concernientes a la Teoría de Núcleos, análisis que constituye el objetivo más importante de la presente tesis.

Se inicia con las definiciones básicas de *Digráfica*, *grado*, *orden y tamaño*, *digráficas isomorfas*, *subdigráficas*, *torneos*, *caminos*, *caminos dirigidos*, *trayectorias y ciclos*. Se continúa con algunos resultados relativos a *trayectorias*, *ciclos*, *conexidad*. Se concluye finalmente con el *Principio de Dualidad* y el análisis de algunas digráficas especiales, como lo son la digráfica complementaria, la dual y la parte simétrica de una digráfica.

## 1.1 Conceptos y resultados preliminares

Una *digráfica o gráfica dirigida*  $D$  es un conjunto finito no vacío de objetos llamados vértices, con un conjunto posiblemente vacío de parejas ordenadas de distintos vértices de  $D$  y denominadas flechas. El conjunto de vértices de  $D$  es denotado por  $V(D)$ , y el conjunto de flechas de  $D$  es denotado por  $F(D)$ . Cabe mencionar que en la notación de las flechas está implícita la dirección:  $(u,v)$  es una flecha del vértice  $u$  al vértice  $v$ .

El *orden* de una digráfica es la cardinalidad de los vértices de  $D$ , mientras que el *tamaño* es la cardinalidad de  $F(D)$ .

### Lema 1.1

Sea  $p$  el orden de  $D$  y  $q$  su tamaño.

Entonces  $0 \leq q \leq 2 \frac{p!}{2!(p-2)!} = p^2 - p$

### Demostración

El número posible de aristas o flechas sin dirección, es a lo más las combinaciones de los  $p$  vértices tomados de dos en dos, pero por cada una de esas combinaciones hay dos posibles flechas (pues hay dos direcciones posibles entre todo par de vértices), de ahí que se multiplique por 2 al número de combinaciones  $\frac{p!}{2!(p-2)!}$ . La última igualdad se obtiene tras una manipulación algebraica:

$$2 \frac{p!}{2!(p-2)!} = p(p-1) = p^2 - p.$$

†

Decimos que si  $a=(u,v)$  es flecha de la digráfica  $D$ , entonces la flecha  $a$  une el vértice  $u$  al vértice  $v$ ,  $a$  es incidente desde  $u$ , y es incidente hacia el vértice  $v$ . Se dice también que  $u$  es adyacente hacia  $v$ , mientras que  $v$  es adyacente desde  $u$ .

Dos vértices  $u,v$  no son adyacentes si  $u$  no es adyacente hacia  $v$  y  $u$  no es adyacente desde  $v$ .

Una flecha  $(u_1, u_2)$  de  $D$  se define como una  $S_1 S_2$ -flecha siempre que  $u_1 \in S_1$  &  $u_2 \in S_2$ .

Se define con el nombre de *exgrado* de  $v$  y se escribe  $\delta^+(v)$ , al número de flechas que salen desde  $v$ , es decir,  $\delta^+(v) = |\{u \in V(D) \mid (v,u) \in F(D)\}|$ .

Por igual se define con el nombre de *ingrado* de  $v$  y se escribe  $\delta^-(v)$ , al número de flechas que entran a  $v$ , es decir,  $\delta^-(v) = |\{u \in V(D) \mid (u,v) \in F(D)\}|$ .

Finalmente se define el *grado* de  $v$ , o  $\delta(v)$ , haciendo uso de las dos definiciones previas:  $\delta(v) = \delta^+(v) + \delta^-(v)$

### Teorema 1.1

Sea  $D$  una digráfica de orden  $p$ , tamaño  $q$  y  $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ . Entonces  $\sum_{i=1}^p \delta^+(v_i) = \sum_{i=1}^p \delta^-(v_i) = q$ .

### Demostración

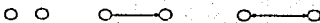
Cuando los exgrados de los vértices son sumados, cada flecha es contada una sola vez, pues cada flecha es incidente desde un vértice exactamente. Por igual, cuando los ingrados de los vértices son sumados, cada flecha es contada una sola vez, pues cada flecha es incidente hacia un vértice exactamente, de ahí que la suma total coincida con la cardinalidad de  $F(D)$  que es  $q$ .

†

Decimos que  $D_1$  es *isomorfa* a  $D_2$  si existe una función  $\phi$  biyectiva (un isomorfismo)  $\phi: V(D_1) \rightarrow V(D_2)$ , tal que  $(u,v) \in F(D_1) \Leftrightarrow (\phi(u),\phi(v)) \in F(D_2)$ . La relación *ser isomorfa* es una relación de equivalencia, i.e. induce una partición del conjunto de digráficas en clases de equivalencia. Dos digráficas que no son isomorfas pertenecen a diferentes clases. Escribimos  $D_1 \cong D_2$  si  $D_1$  es isomorfa a  $D_2$ . Observemos algunos ejemplos, recordando que  $p$  es número de vértices, y  $q$  el número de flechas de la digráfica:

- Solo existe una digráfica (salvo isomorfismo) con  $p=1$  y  $q=0$ , se trata de la digráfica trivial (que consiste de un solo vértice).
- Solo existe una digráfica (salvo isomorfismo) con  $p=2$ ,  $q=0$  (figura a), una con  $p=2$  y  $q=1$  (figura b), y una con  $p=2$  y  $q=2$  (figura c).
- Hay cuatro digráficas distintas con  $p=3$  y  $q=3$  (fig. d):

*Figuras a, b, c (respectivamente)*

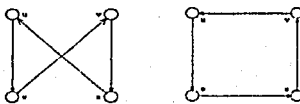


*Figura d*



Se dice que  $D_1$  es *idéntica* a  $D_2$  si  $V(D_1)=V(D_2)$  y  $F(D_1)=F(D_2)$ , y se escribe  $D_1 \equiv D_2$ . Observemos que  $[D_1 \equiv D_2 \Rightarrow D_1 \cong D_2]$  pero  $[D_1 \cong D_2 \not\Rightarrow D_1 \equiv D_2]$ , como prueba basta analizar el siguiente contraejemplo (las siguientes digráficas son isomorfas pero no idénticas):

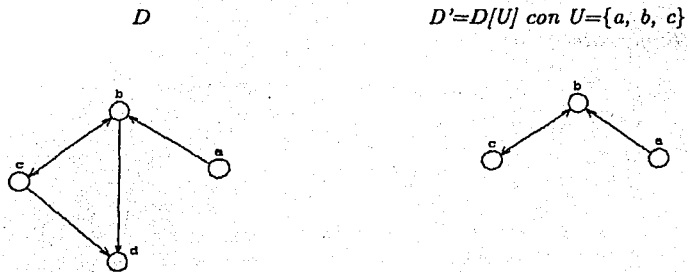
*Contraejemplo*



Diremos que  $D'$  es *subdigráfica* de  $D$  si  $V(D') \subseteq V(D)$  y  $F(D') \subseteq F(D)$ , y se denotará  $D' \subseteq D$ . Sea  $D'$  una subdigráfica de  $D$ , se dice que  $D'$  es *subdigráfica generadora* de  $D$  si  $V(D')=V(D)$ . Si  $D$  no es trivial y si  $v \in V(D)$ , entonces  $D-v$  es la digráfica tal que  $V(D-v)=V(D)-\{v\}$ , mientras que  $F(D-v) = \{f \in F(D) \mid f \text{ no es incidente desde } v \text{ y } f \text{ no es incidente hacia } v\}$ . Si  $f \in F(D)$ , entonces

$V(D-f) = V(D)$ , mientras que  $F(D-f) = F(D) - \{f\}$ . Análogamente se define la suma de vértices y flechas: sea  $D$  una digráfica tal que  $u, v \in V(D)$  y  $f = (u, v) \notin F(D)$ , entonces  $V(D+f) = V(D)$  y  $F(D+f) = F(D) \cup \{f\}$ .

Si  $U \subseteq V(D)$ , con  $U \neq \emptyset$ , entonces la *subdigráfica inducida por  $U$*  denotada como  $D[U]$ , es tal que  $V(D[U]) = U$  &  $F(D[U]) = \{\text{flechas de } D \text{ que unen vértices de } U\}$ . Se dice que  $D_1$  es una subdigráfica inducida de  $D$  ( $D_1 \prec D$ ) si  $D_1 \cong D[U]$  para algún  $U \subseteq V(D)$ . Observemos que cualquier subdigráfica inducida de  $D$  puede ser obtenida quitando vértices de  $D$ . A continuación un ejemplo:



Una digráfica  $D$  es *simétrica* si  $\forall (u, v) \in F(D) [(v, u) \in F(D)]$ , es decir, para toda flecha  $(u, v)$  de  $D$  se tiene que la flecha en el sentido contrario  $(v, u)$  también está en la digráfica.

*Digráfica simétrica*

*Digráfica asimétrica*



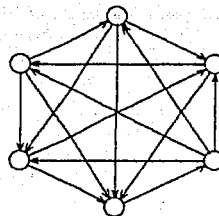
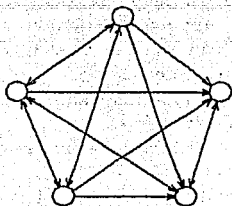
$D$  es *asimétrica* si  $\forall (u, v) \in F(D) [(v, u) \notin F(D)]$ , es decir, para toda flecha  $(u, v)$  de  $D$  se tiene que la flecha en el sentido contrario  $(v, u)$  no está en la digráfica. Es interesante mencionar que hay una correspondencia uno a uno entre el conjunto de las digráficas simétricas y el conjunto de las gráficas. Una digráfica  $D$  puede obtenerse de una gráfica  $G$  asignando una dirección a cada



arista de  $G$ , entonces se dice que  $D$  es una *orientación* de  $G$ .

$D$  es una digráfica *completa* si para todo  $u, v \in V(D)$  se tiene que al menos una de las flechas  $(u, v)$  o  $(v, u)$  está en la digráfica.

### Digráficas completas

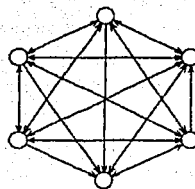
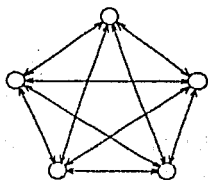


La digráfica *completa simétrica* de orden  $p$ , denotada por  $K_p$ , tiene ambas flechas  $(u, v)$ ,  $(v, u)$  para todo  $u, v \in V(D)$  (con  $u \neq v$ ), i.e.  $|F(D)| = 2 \frac{p!}{2!(p-2)!} = p(p-1) = p^2 - p$  y  $\forall v \in V(D)$   $[\delta^+(v) = \delta^-(v) = p-1]$ .

Un *torneo*  $T$  es una digráfica completa y asimétrica. Son este tipo de digráficas las que serán de sumo interés a lo largo del presente texto.

$D$  es una digráfica *r-regular* o de grado  $r$  si  $\forall v \in V(D)$   $[\delta^+(v) = \delta^-(v) = r]$ , es decir, si para todo vértice de  $D$ , su grado interior es igual a su grado exterior e igual a  $r$ . De manera que  $K_p$  es  $(p-1)$ -regular.

### Digráficas completas simétricas



## 1.2 Caminos, caminos dirigidos y trayectorias

Sean  $u, v \in V(D)$  no necesariamente distintos. Un *uv-camino* de  $D$  es una sucesión finita de vértices ( $u = u_1, u_2, \dots, u_n = v$ ), que comienza en el vértice  $u$  y termina en el vértice  $v$ , tal que  $(u_{i-1}, u_i) \in F(D)$  o  $(u_i, u_{i-1}) \in F(D)$  para toda  $i = 1, 2, \dots, n$ , donde  $n$  es el número de ocurrencias de flechas y la longitud del camino. Ahora bien, si para toda  $i = 1, 2, \dots, n$  se tiene que las flechas del camino son de la forma  $(u_{i-1}, u_i)$ , entonces se trata de un *uv-camino dirigido*. Debemos observar que tanto en caminos como en caminos dirigidos pueden repetirse vértices y flechas. Se dice que los dos *uv-caminos* ( $u = u_0, u_1, \dots, u_n = v$ ) y ( $u = v_0, v_1, \dots, v_m = v$ ) son iguales si  $n = m$  y  $u_i = v_i$  para toda  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ . Un *uv-camino* es *cerrado* o *abierto* si  $u = v$  o  $u \neq v$  respectivamente. Un camino  $C$  (dirigido o no dirigido) de una digráfica  $D$  es *generador* si  $V(D) = V(C)$ .

Una *uv-trayectoria* es un *uv-camino* dirigido que no repite vértices. Si  $P$  es una *uv-trayectoria*, entonces los vértices de  $P$  distintos de  $u$  y  $v$  son vértices internos de  $P$ .

Un *uv-paseo* es un *uv-camino* dirigido que no repite flechas. Observemos que si  $P$  es una *uv-trayectoria*, entonces  $P$  es un *uv-camino* dirigido, sin embargo si  $P$  es un camino dirigido, no necesariamente  $P$  es una *trayectoria*.

Un *circuito* de  $D$  es un *paseo* cerrado no trivial de  $D$ . Un *ciclo* de  $D$  es un *circuito* ( $w_1, w_2, \dots, w_n, w_1$ ) tal que  $n \geq 2$  y  $w_i \neq w_j$  para toda  $i, j$ . Si  $D$  no tiene ciclos entonces entonces que es una digráfica *acíclica*. A los ciclos de longitud  $n$  se les denomina *n-ciclos*, mientras que a las digráficas de orden  $n$  ( $n \geq 2$ ) que son ciclos, se les conoce como  $C_n$ . Un ciclo dirigido de  $D$ ,  $\gamma$ , es *hamiltoniano* si  $V(\gamma) = V(D)$ , y diremos que  $D$  es *hamiltoniana* si  $D$  tiene un ciclo hamiltoniano.

A continuación presento resultados imprescindibles relativos a caminos, trayectorias y ciclos.

### Teorema 1.2

Todo *uv-camino* dirigido contiene una *uv-trayectoria*.

#### Demostración

Por inducción sobre la longitud del camino dirigido:

Base: Si  $\text{long}(C) = 0$  entonces  $C$  consiste de un solo vértice, por lo tanto en  $C$  no se repiten vértices, de manera que  $T = C$  es la *trayectoria* buscada. Si  $\text{long}(C) = 1$  entonces  $C = (u, v)$ , de ahí que no repitan vértices en  $C$ , por lo tanto  $T = C$  es la *trayectoria* buscada.

Hipótesis inductiva: supongamos que todo *uv-camino* dirigido de longitud menor que  $n$  contiene una *uv-trayectoria* dirigida. Por demostrar que todo *uv-camino* dirigido  $C$  tal que  $\text{long}(C) = n$  contiene una *uv-trayectoria* dirigida.

Sea  $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_n = v)$  un *uv-camino* dirigido de longitud  $n$ . (por demostrar que  $C$  contiene una *uv-trayectoria* dirigida).

Existen dos casos a analizar (ver las dos figuras de la página siguiente):

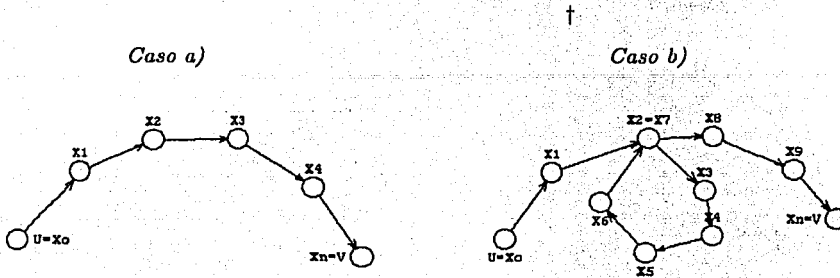
a) Si  $x_i \neq x_j$  para toda  $i \neq j$ , con  $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , entonces  $T = C$  es una *uv-trayectoria* dirigida y el Teorema se cumple.

b) Si  $x_i = x_j$  para algún  $i \neq j$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $i$  es menor que  $j$ .

Entonces  $C$  es de la forma  $C = (u = x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_j = x_i, x_{j+1}, \dots, x_n = v)$ .

Consideremos  $C' = (u=x_0, x_1, \dots, x_i=x_j, x_{j+1}, \dots, x_n=v)$ .  $C'$  es un uv-camino dirigido cuya longitud es estrictamente menor que  $n$ . Por lo tanto por hipótesis de inducción,  $C'$  contiene una uv-trayectoria dirigida  $T$ .

Ahora, como  $T \subseteq C'$  y  $C' \subseteq C$ , entonces  $T \subseteq C$ . Por lo tanto  $C$  contiene una uv-trayectoria dirigida.



### Teorema 1.3

Todo camino dirigido cerrado  $C$  de longitud impar contiene un ciclo de longitud impar  $\gamma$

#### Demostración

Por inducción sobre  $n=|V(C)|$ .

Base: Para  $n=1$ , la digráfica consiste de un solo vértice, de ahí que no hay camino dirigido cerrado y el Teorema se cumple por vacuidad. Para  $n=3$  el único camino dirigido cerrado de longitud tres es el ciclo dirigido de tal longitud, de manera que con  $\gamma=C$  el Teorema se cumple.

Hipótesis inductiva: supongamos que el Teorema se cumple para todo camino cerrado de longitud impar menor que  $n$ .

Sea  $C$  un camino dirigido cerrado de longitud impar igual a  $n$ . Se demostrará que  $C$  contiene un ciclo dirigido de longitud impar.

$C$  es de la forma:  $C = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}=x_0)$ .

Existen dos casos a analizar:

a) Si  $x_i \neq x_j$  para toda  $i \neq j$ , con  $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , entonces  $C$  es un ciclo dirigido de longitud impar y el Teorema se cumple.

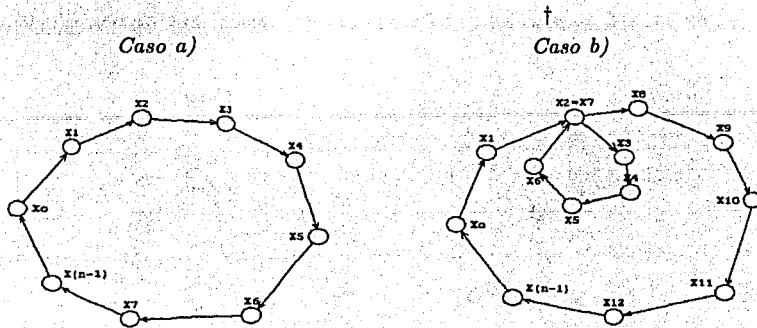
b) Si existen  $i, j$  tales que  $x_i = x_j$ , con  $i \neq j$ , entonces  $C$  es de la forma  $C = (x_0, x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_j = x_i, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{n-1} = x_0)$ .

De manera que  $C_1 = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_i = x_j, x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{n-1} = x_0)$  y  $C_2 = (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_j = x_i)$  son caminos dirigidos cerrados y uno de ellos tiene longitud impar menor que  $n$ , pues  $\text{long}(C_1) + \text{long}(C_2) = \text{long}(C)$ , donde  $\text{long}(C)$  es impar.

Sin pérdida de generalidad, sea  $C_1$  el camino cerrado de longitud impar menor que  $n$ , entonces por hipótesis inductiva se tiene que  $C_1$  contiene un ciclo dirigido de longitud impar  $\gamma_1$ .

Entonces  $\gamma_1 \subset C$  y  $C_1 \subset C$ , de manera que  $\gamma_1 \subset C$ .

Por lo tanto  $C$  contiene un ciclo dirigido de longitud impar, a saber  $\gamma_1$ .



### Lema 1.2

Sea  $D$  una digráfica. Si  $\forall v \in V(D) [\delta^+(v) \geq 1]$ , entonces  $D$  tiene un ciclo dirigido.

#### Demostración

Sea  $T$  una trayectoria dirigida  $T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de longitud máxima en  $D$ .

Como  $\delta^+(x_n) \geq 1$ , entonces  $\exists w \in V(D) [(x_n, w) \in F(D)]$ .

$w \in T$ , de lo contrario  $T' = T \cup (x_n, w)$  es tal que su longitud es mayor que la de  $T$ , contradiciendo la elección de  $T$ . Por lo tanto  $w = x_i$  para algún  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , i.e.  $C = (x_i = w, x_{i+1}, \dots, x_n, x_i)$  es un ciclo dirigido.

### Lema 1.3

Sea  $D$  una digráfica. Si  $\forall v \in V(D) [\delta^-(v) \geq 1]$ , entonces  $D$  tiene un ciclo dirigido.

#### Demostración

Sea  $T$  una trayectoria dirigida  $T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  de longitud máxima en  $D$ .

Como  $\delta^-(x_1) \geq 1$ , entonces  $\exists w \in V(D) [(w, x_1) \in F(D)]$ .

$w \in T$ , de lo contrario  $T' = (w, x_1) \cup T$  es tal que su longitud es mayor que la de  $T$ , contradiciendo la elección de  $T$ .

Por lo tanto  $w = x_i$  para algún  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , i.e.  $C = (x_1, x_2, \dots, x_{i-2}, x_i = w, x_1)$  es un ciclo dirigido.

### 1.3 Conexidad en digráficas

Existen varias formas en que una digráfica  $D$  puede ser conexa:

Sean  $u, v \in V(D)$ :

Se dice que  $u$  está conectado a  $v$  en  $D$  si existe un  $uv$ -camino en  $D$  (o análogamente un  $vu$ -camino en  $D$ ).

$D$  es conexa si  $\forall u, v \in V(D)$  [ $u$  y  $v$  están conectados]. Si  $D$  no es conexa, entonces es disconexa. La relación estar conectados es una relación de equivalencia sobre  $V(D)$ , y la subdigráfica inducida por los vértices que están en una clase de equivalencia se denomina *componente conexa de  $D$*  o simplemente *componente*. Este concepto puede ser definido de diversas maneras, como se podrá leer en las siguientes páginas.

Decimos que  $v$  es alcanzable desde  $u$  en  $D$  si  $D$  contiene un  $uv$ -camino dirigido.

$D$  es unilateralmente conexa o unilateral si para todo  $u, v \in V(D)$  distintos, se tiene que al menos uno de ellos es alcanzable desde el otro.

$D$  es fuertemente conexa o fuerte si para todo  $u, v \in V(D)$  distintos, cada vértice es alcanzable desde el otro.

Observamos entonces que si  $D$  es fuertemente conexa entonces  $D$  es unilateral, y si  $D$  es unilateral entonces  $D$  es conexa.

Si  $u$  es alcanzable desde  $v$  y  $v$  es alcanzable desde  $u$ , decimos entonces que  $u$  y  $v$  son mutuamente alcanzables. La relación ser mutuamente alcanzables es una relación de equivalencia sobre los vértices de  $D$ , i.e. esta relación parte  $V(D)$  en clases  $V_1, V_2, \dots, V_n$  ( $n \geq 2$ ), de manera que dos vértices son mutuamente alcanzables si y sólo si están en la misma clase. Sea  $S_i = D[V_i]$  ( $1 \leq i \leq n$ ), si  $u, v \in S_i$ , entonces existe un  $uv$ -camino dirigido  $W_1$  en  $D$  (pues  $v$  es alcanzable desde  $u$ ) y existe un  $vu$ -camino dirigido  $W_2$  (pues  $u$  es alcanzable desde  $v$ ). El camino dirigido  $W = W_1 \cup W_2$  es un  $uu$ -camino dirigido en  $D$ , y decimos que para todo  $u, v \in W$ ,  $u$  y  $v$  son mutuamente alcanzables, es decir,  $u$  y  $v$  pertenecen a la misma subdigráfica  $S_i$ , i.e.  $S_i$  es una subdigráfica fuertemente conexa y cada  $S_i$  es maximal con respecto a esta propiedad;  $S_1, S_2, \dots, S_n$  se dicen *componentes fuertemente conexas de  $D$* .

Una *componente fuertemente conexa terminal de  $D$*  es una componente fuertemente conexa de  $D$  tal que de ella no salen flechas hacia otra componente fuertemente conexa distinta.

A continuación se demostrarán afirmaciones importantes en el tema de conexidad en digráficas.

#### Teorema 1.4

- $D$  es conexa sii  $D$  contiene un camino generador.
- $D$  es unilateral sii  $D$  contiene un camino dirigido generador.
- $D$  es fuertemente conexa sii  $D$  contiene un camino dirigido cerrado generador.

#### Demostración (a, $\Leftarrow$ )

Supongamos que  $D$  contiene un camino generador  $W$ .

Sean  $u, v \in V(D)$ ,  $u \neq v$  arbitrarios.

Como  $W$  contiene todos los vértices de  $D$  entonces  $u, v \in V(W)$ , de modo que  $W = (x_0, x_1, \dots, x_i = u, x_{i+1}, \dots, x_j = v, x_{j+1}, \dots, x_n)$ .

Entonces  $W' = (x_i = u, x_{i+1}, \dots, x_j = v)$  es un  $uv$ -camino en  $D$ . Por lo tanto  $D$  es conexa.

†

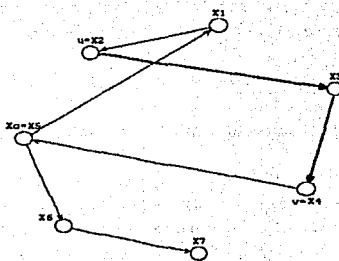
### Demostración (a, $\Rightarrow$ )

Sea  $D$  conexa con  $V(D) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ . Entonces  $D$  contiene un  $v_i v_{i+1}$ -camino  $W_i$  para toda  $i = 1, 2, \dots, p-1$ . Definamos  $W_i'$  como el camino  $W_i$  pero sin el último término.

Entonces  $W_1' \cup W_2' \cup \dots \cup W_{p-2}' \cup W_{p-1}$  es un  $v_1 v_p$ -camino  $P$  tal que  $V(P) = V(D)$ , que era lo que buscábamos. (Observemos que de no extraer el último término en cada  $W_i$  para construir  $W_i'$ , en  $P$  habría lazos).

†

Figura: Demostración (a,  $\Rightarrow$ ),  $W' = (u = x_2, x_3, x_4 = v)$



### Demostración (b, $\Leftarrow$ )

Supongamos que  $D$  tiene un camino dirigido  $P$  tal que  $V(P) = V(D)$ . Sean  $u, v \in V(D)$ , con  $u \neq v$  arbitrarios, por demostrar que al menos uno es alcanzable desde el otro (i.e. por demostrar que  $D$  contiene un  $uv$ -camino dirigido o un  $vu$ -camino dirigido)

Como  $V(P) = V(D)$  entonces  $u, v \in V(P)$ . Entonces  $P$  es de la forma  $P = (x_0, x_1, \dots, x_i = u, x_{i+1}, \dots, x_j = v, x_{j+1}, \dots, x_n)$  si  $i$  es menor que  $j$ , de manera que  $P' = (x_i = u, x_{i+1}, \dots, x_j = v)$  es un  $uv$ -camino dirigido en  $D$ , por lo tanto  $D$  es unilateral. Análogamente  $P$  es de la forma  $P = (x_0, x_1, \dots, x_i = v, x_{i+1}, \dots, x_j = u, x_{j+1}, \dots, x_n)$  si  $j$  es menor que  $i$ , de manera que  $P' = (x_j = v, x_{j+1}, \dots, x_i = u)$  es un  $vu$ -camino dirigido en  $D$ , por lo tanto  $D$  es unilateral.

†

### Demostración (b, $\Rightarrow$ )

Supongamos que  $D$  es unilateral, sea  $W$  un camino dirigido que contiene el máximo número de vértices distintos de  $D$  y supongamos que  $W$  es un  $w_1 w_2$ -camino dirigido.

Si  $W$  es tal que  $V(W) = V(D)$ , entonces el Teorema se cumple.

Si no sucede lo anterior, entonces existe  $v \in V(D)$  tal que  $v \notin V(W)$ .

Entonces por como fue elegido  $W$ , no existe un  $w_1 v$ -camino dirigido y no existe un  $w_2 v$ -camino dirigido en  $D$  (de lo contrario  $W$  no tendría el máximo número de vértices).

Como  $D$  no tiene un  $w_1 v$ -camino dirigido y  $D$  es unilateral, entonces  $D$  contiene un  $w_1 v$ -camino dirigido.

Sea  $u$  el último vértice de  $W$  tal que el  $uv$ -camino dirigido está en  $D$  (notemos que  $u \neq w_2$  pues no existe un  $w_2v$ -camino dirigido en  $D$ ). Sea  $u'$  la última ocurrencia de  $u$  en  $W$ . Denotemos con  $W_1$  un  $u'v$ -camino dirigido en  $D$ .

Sea  $w$  el vértice que sigue a  $u'$  en  $W$ , observemos que  $w$  existe pues  $u \neq w_2$ .

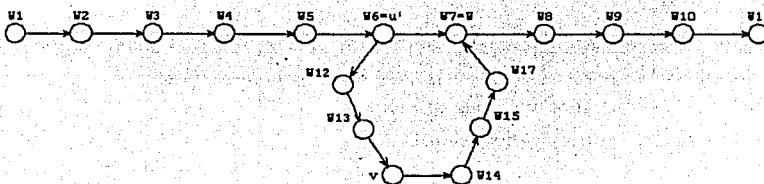
Por la elección de  $u$  sabemos que no existe un  $wv$ -camino dirigido en  $D$ , pero al ser  $D$  unilateral, eso implica que existe un  $vw$ -camino  $W_2$  en  $D$ .

Entonces  $C = (w_1, W, u') \cup W_1 \cup W_2 \cup (w_1, W, w_2)$  es un camino dirigido con más vértices que  $W$ , contradiciendo la elección de  $W$ .

†

Figura: Demostración (b, $\Rightarrow$ )

$$W_1 = (u' = w_6, w_{12}, w_{13}, v), w_2 = (v, w_{14}, w_{15}, w_{17}, w_7 = w)$$



### Demostración (c, $\Leftarrow$ )

Supongamos que existe un camino dirigido cerrado  $W$  tal que  $V(W) = V(D)$ , i.e. para todo  $u, v \in V(D)$  se tiene que  $u, v \in V(W)$ .

Se demostrará que existe un  $uv$ -camino dirigido y un  $vu$ -camino dirigido en  $D$ .

$W$  es de la forma  $W = (w_1, \dots, w_i = u, w_{i+1}, \dots, w_j = v, w_{j+1}, \dots, w_n = w_1)$ . Consideremos  $W' = (w_i = u, w_{i+1}, \dots, w_j = v)$  y  $W'' = (w_j = v, w_{j+1}, \dots, w_1, w_2, w_i = u)$ , donde  $W' \subset W$  y  $W'' \subset W$ .

$W'$  es un  $uv$ -camino dirigido en  $D$  y  $W''$  es un  $vu$ -camino dirigido en  $D$ , por lo tanto  $D$  es fuertemente conexa.

†

### Demostración (c, $\Rightarrow$ )

Supongamos que  $D$  es fuertemente conexa. Se demostrará que  $D$  contiene un camino dirigido cerrado y generador.

Sean  $u, v \in V(D)$ . Como  $D$  es fuertemente conexa, entonces  $D$  es unilateral. Por lo tanto, por el inciso (b) se sigue que  $D$  contiene un  $uv$ -camino dirigido  $W$  tal que  $V(W) = V(D)$ .

Si  $u=v$  entonces  $W$  es un camino dirigido cerrado generador en  $D$  y el Teorema se cumple.  
 Si  $u \neq v$ : como  $D$  es fuertemente conexa,  $D$  contiene una  $vu$ -trayectoria dirigida  $P$ . Entonces  $W' = W \cup P$  es un camino dirigido cerrado generador.

†

### Teorema 1.5

Una digráfica  $D$  es fuertemente conexa sii para toda partición de  $V(D)$ ,  $\{V_1, V_2\}$ , existe una  $V_1 V_2$ -flecha en  $D$ .

#### Demostración ( $\Rightarrow$ )

Sea  $\{V_1, V_2\}$  una partición arbitraria de  $V(D)$ .

Sea  $v_1 \in V_1$ , y  $v_2 \in V_2$ .

Como  $D$  es fuertemente conexa entonces existe una  $v_1 v_2$ -trayectoria dirigida en  $D$ ,  $T = (u_0 = v_1, u_1, u_2, \dots, u_n = v_2)$ .

Por ser  $\{V_1, V_2\}$  una partición de  $V(D)$  entonces  $\forall u_i [u_i \in V_1 \text{ o } u_i \in V_2, \text{ con } i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}]$ .

Observemos  $\exists u_j [u_j \in V_2, \text{ con } j \in \{1, 2, \dots, n\}]$  pues al menos  $u_n = v_2 \in V_2$ .

Sea  $m = \min \{j \mid u_j \in V_2\}$  (notemos que  $m \geq 1$ ).

Entonces  $(u_{m-1}, u_m)$  es una  $V_1 V_2$ -flecha en  $D$ .<sup>1</sup>

†

#### Demostración ( $\Leftarrow$ )

Sean  $x, y \in V(D)$  arbitrarios. Se demostrará que existe un  $xy$ -camino dirigido en  $D$ . Sean:

$V_1 = \{w \in V(D) \mid \text{existe un } xw\text{-camino dirigido en } D\}$ .

$V_2 = V(D) - V_1$ .

Si  $y \in V_1$  entonces existe un  $xy$ -camino dirigido en  $D$ , por definición de  $V_1$ , y el Teorema se cumple.

Si  $y \notin V_1$ :

- Entonces  $y \in V_2$  y por lo tanto  $V_2 \neq \emptyset$ . Además se sabe que  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  y que  $V_1 \cup V_2 = V(D)$  (por definición de  $V_1$  y  $V_2$ ), de manera que  $\{V_1, V_2\}$  es una partición de  $V(D)$ .

- Así que, por hipótesis existe una  $V_1 V_2$ -flecha en  $D$ , digamos  $(z, w)$ , donde  $z \in V_1$  y  $w \in V_2$ .

- Como  $z \in V_1$  entonces existe un  $xz$ -camino dirigido  $C_1$  en  $D$ . Por lo tanto  $C_1 \cup (z, w)$  es un  $xw$ -camino dirigido en  $D$ , de donde se sigue que  $w \in V_1$ , contradiciendo que  $w \in V_2$ .

Por lo tanto  $y \in V_1$ , de manera que existe un  $xy$ -camino dirigido en  $D$ .

Análogamente existe un  $yx$ -camino dirigido en  $D$ :

Sean:

$V_1 = \{w \in V(D) \mid \text{existe un } wx\text{-camino dirigido en } D\}$ .

$V_2 = V(D) - V_1$ .

Si  $y \in V_1$  entonces existe un  $yx$ -camino dirigido en  $D$ , por definición de  $V_1$ , y el Teorema se cumple.

<sup>1</sup>Dado que la afirmación es válida para toda partición, entonces existe también una  $V_2 V_1$ -flecha en  $D$ .



Si  $y \notin V_1$ :

- Entonces  $y \in V_2$  y por lo tanto  $V_2 \neq \emptyset$ . Además se sabe que  $V_1 \neq \emptyset$  (pues  $x \in V_1$ ),  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  y que  $V_1 \cup V_2 = V(D)$  (por definición de  $V_1$  y  $V_2$ ), de manera que  $\{V_1, V_2\}$  es una partición de  $V(D)$ .
- Así que, por hipótesis existe una  $V_2 V_1$ -flecha en  $D$ , digamos  $(w, z)$ , donde  $z \in V_1$  y  $w \in V_2$ .
- Como  $z \in V_1$  entonces existe un  $zx$ -camino dirigido  $C_1$  en  $D$ . Por lo tanto  $(w, z) \cup C_1$  es un  $wx$ -camino dirigido en  $D$ , de donde se sigue que  $w \in V_1$ , contradiciendo que  $w \in V_2$ .

Por lo tanto  $y \in V_1$ , de manera que existe un  $yx$ -camino dirigido en  $D$ .

Por consiguiente  $D$  es fuertemente conexa.

†

### Teorema 1.6

Toda digráfica fuertemente conexa tiene ciclos dirigidos.

#### Demostración

Sea  $D$  una digráfica fuertemente conexa. Por demostrar que existe un ciclo dirigido en  $D$ .

Sean  $u, v \in V(D)$  elegidos de manera arbitraria.

Como  $D$  es fuertemente conexa, existen en  $D$  un  $uv$ -camino dirigido  $C_1 = (u=x_0, x_1, \dots, x_n=v)$  y un  $vu$ -camino dirigido  $C_2 = (v=y_0, y_1, \dots, y_m=u)$ .

Observemos que  $\exists y_j \{y_j = x_k \text{ para algún } k \in \{0, 1, \dots, n\}, \text{ con } j \in \{0, 1, \dots, m\}\}$  pues  $y_m = u = x_0$ .

Sea  $m = \min \{j \geq 1 \mid y_j = x_k \text{ para algún } k \in \{0, 1, \dots, n\}, \text{ con } j \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ . Entonces  $(x_k, C_1, v) \cup (v, C_2, y_m = x_k)$  es un ciclo dirigido en  $D$ .

†

### Teorema 1.7

Toda digráfica unilateral  $D$  de orden  $p \geq 2$  contiene dos vértices distintos  $u$  y  $v$  tales que  $D-u$  y  $D-v$  son unilaterales.

#### Demostración

Como  $D$  es unilateral, por el Teorema 1.4 inciso b,  $D$  contiene un camino dirigido generador. Sea  $W$  el  $uv$ -camino dirigido generador de mínima longitud.

Nótese que  $u$  aparece exactamente una vez en  $W$ , de lo contrario el camino que se obtiene al borrar el primer vértice (y por consiguiente la primera flecha) de  $W$ , es un camino dirigido generador de longitud menor que  $W$ , contradiciendo la elección de  $W$ . Por el mismo razonamiento tenemos que  $v$  aparece una vez en  $W$ .

Entonces  $u \neq v$  y las digráficas  $D-u$  y  $D-v$  contienen un camino dirigido generador.

Por lo tanto, por el Teorema 1.4 inciso b, tenemos que  $D-u$  y  $D-v$  son digráficas unilaterales.

†

### Corolario 1.1

Toda digráfica  $D$  fuertemente conexa de orden  $p \geq 2$  contiene dos vértices distintos  $u$  y  $v$  tales que  $D-u$  y  $D-v$  son unilaterales.

### Demostración

Como  $D$  es fuertemente conexa, entonces  $D$  es unilateral, de modo que por el Teorema anterior,  $D-u$  y  $D-v$  son unilaterales.

†

## 1.4 Digráficas asociadas a una digráfica dada y el Principio de dualidad

La *parte asimétrica de  $D$*  denotada por  $\text{Asim}(D)$ , es la subdigráfica generadora de  $D$  cuyas flechas son las flechas asimétricas de  $D$ . La *parte simétrica de  $D$*  denotada por  $\text{Sim}(D)$ , es la subdigráfica generadora de  $D$  cuyas flechas son las flechas simétricas de  $D$ .

El *complemento de  $D$*  denotado por  $\bar{D}$ , es la digráfica tal que  $V(\bar{D}) = V(D)$  y para cada  $u, v \in V(D)$  con  $u \neq v$ , se tiene que  $(u, v) \in F(\bar{D})$  sii  $(u, v) \notin F(D)$ .

Otra digráfica asociada a una digráfica  $D$  dada, es la *digráfica de condensación* denotada por  $D^*$ , que hereda las propiedades básicas de conexidad de  $D$ , como vemos a continuación. Sean  $S_1, S_2, \dots, S_n$  las componentes fuertemente conexas de  $D$  y sean  $u_1, u_2, \dots, u_n$  los vértices de  $D^*$  los cuales pueden ser puestos en correspondencia uno a uno con las componentes de  $D$ :  $u_i$  tal que  $(u_i, u_j) \in F(D^*)$  corresponde a  $S_i$  ( $i \neq j$ ) sii algún vértice de  $S_i$  es adyacente hacia al menos un vértice de  $S_j$ . Con relación a la digráfica de condensación podemos demostrar el siguiente resultado.

### Teorema 1.8

Para toda digráfica  $D$ , su digráfica de condensación  $D^*$  es acíclica.

### Demostración

Supongamos lo contrario, i.e. existe  $D$  tal que  $D^*$  contiene ciclos.

Sean  $S_1, S_2, \dots, S_n$  las componentes fuertemente conexas de  $D$ . Sea  $V(D^*) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  tales que  $u_i$  corresponde a  $S_i$  en base a la definición previa de condensación, para  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Supongamos que etiquetamos a los vértices  $u_i$  de manera que  $(u_1, \dots, u_k, u_1)$  es un ciclo en  $D^*$ .

Para  $i = 1, 2, \dots, k-1$  existe  $v_i' \in V(S_i)$  y  $v_{i+1} \in V(S_{i+1})$  tales que  $(v_i', v_{i+1}) \in F(D)$ , por la definición de condensación. Además existe la flecha  $(v_k', v_1)$  en  $D$ , con  $v_k' \in V(S_k)$  y  $v_1 \in V(S_1)$ . Notemos que  $v_i', v_i$  con  $i = 1, 2, \dots, k$  no son necesariamente distintos.

Como  $S_i$  es componente fuertemente conexa ( $i=1, 2, \dots, k$ ), entonces existe  $v_i v_i'$ -trayectoria dirigida  $P_i$  en  $S_i$ .

Por lo tanto  $P_1 \cup (v_1', v_2) \cup P_2 \cup (v_2', v_3) \cup \dots \cup P_k \cup (v_k', v_1)$  es un  $v_1 v_1'$ -ciclo en  $D$ .

Entonces en particular  $v_1$  y  $v_2$  son mutuamente alcanzables, contradiciendo que están en componentes fuertemente conexas distintas.

Por lo tanto  $D^*$  no contiene ciclos.

†

La *digráfica dual* de  $D$ , que denotaremos aquí por  $D'$ , es tal que  $V(D')=V(D)$  y  $[(u,v) \in F(D') \text{ sii } (v,u) \in F(D)]$ . Diremos que  $D$  es *propriadamente dual* si  $D' \cong D$ .

Se define el *dual de un concepto*, haciendo uso de digráficas, como el concepto que resulta de aplicar el concepto original en la dual de una digráfica, v.g. el concepto de adyacencias en digráficas..

Se enunciará ahora el *Principio de dualidad direccional* y se dará continuación un ejemplo de su utilidad en la demostración de algunos resultados en Teoría de Digráficas:

*Principio de dualidad direccional:* para cada Teorema concierne a digráficas existe un Teorema correspondiente que se obtiene al reemplazar cada concepto por el concepto dual.

### **Teorema 1.9**

Toda digráfica acíclica contiene al menos un vértice de grado exterior cero

#### **Demostración**

Sea  $D$  una digráfica acíclica. Sea  $P$  la trayectoria de máxima longitud en  $D$ . Supongamos que  $P$  es una  $uv$ -trayectoria dirigida.

Si  $v$  es adyacente a algún vértice de  $P$ , se produce entonces un ciclo, contradiciendo la hipótesis.

Si  $v$  es adyacente a algún vértice que no esté en  $P$ , entonces existe una trayectoria cuya longitud excede la de  $P$ , contradiciendo la elección de  $P$ .

Entonces  $v$  no es adyacente hacia algún vértice de  $D$ , i.e. el grado exterior de  $v$  es cero.

†

Aplicando el Principio de Dualidad al Teorema anterior, obtenemos el siguiente

### **Corolario 1.2**

Toda digráfica acíclica contiene al menos un vértice de grado interior cero.

†

Culminamos así esta primer sección que corresponde a las nociones básicas de Teoría de Digráficas, y que permitirá al lector asirse de herramientas básicas para abordar los últimos capítulos de la presente tesis.



## Capítulo 2

# Seminúcleos y núcleos

En este capítulo el lector encontrará la definiciones de *conjunto independiente* y *conjunto absorbente*, a partir de las cuales se introducirán de manera natural las definiciones de *seminúcleos* y *de núcleos en digráficas*.

Se presentan ejemplos y resultados interesantes relativos al concepto de *seminúcleo* y *núcleo* y a su relación entre ellos (v.g. *El conjunto de seminúcleos de una digráfica es inductivo superiormente, todo núcleo es un seminúcleo máximo, toda digráfica sin ciclos dirigidos tiene núcleo*).

Se proporcionan las definiciones de *digráficas núcleo perfectas* y *digráficas núcleo imperfectas críticas* y resultados importantes que serán de gran utilidad para el análisis posterior en los capítulos finales: el lector podrá encontrar demostraciones de resultados tales como *el Teorema de Richardson, toda digráfica finita núcleo imperfecta crítica no tiene seminúcleos no vacíos y toda digráfica no núcleo perfecta contiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica*, entre otros resultados interesantes.

Para definir un seminúcleo y un núcleo de una digráfica, es necesario introducir previamente el siguiente concepto:

Sea  $D$  una digráfica. Un conjunto  $I \subseteq V(D)$  es *independiente* si  $F(D[I]) = \emptyset$ .

### Lema 2.1

Si  $S \subseteq V(D)$  es un conjunto independiente en una subdigráfica inducida de  $D$ , entonces  $S$  es un conjunto independiente en  $D$ .

### Demostración

Como  $S$  es un conjunto independiente en una subdigráfica inducida de  $D$ ,  $D'$ , entonces el conjunto de flechas de  $D'$  es igual al conjunto de flechas en  $D$  que hacen adyacentes a los elementos de  $V(D')$ , pues recalquemos que  $D'$  es una subdigráfica inducida de  $D$ . Por lo tanto al completar la digráfica  $D$  en base a  $D'$ , ya no será necesario agregar alguna flecha entre los vértices de  $D'$ . Por lo tanto la propiedad de  $S$  de ser un conjunto independiente, se conserva en la digráfica total,  $D$ . †

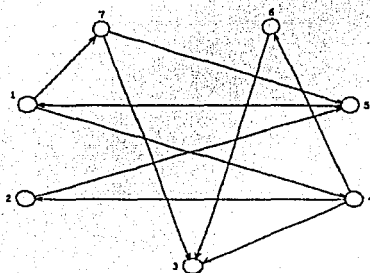
Podemos ya definir el concepto de seminúcleo de una digráfica. Diremos que  $S \subseteq V(D)$  es un *seminúcleo* de  $D$  si:

- (a)  $S$  es independiente,
- (b) Para cada flecha  $f$  que va de  $S$  a  $x$  ( $x \in V(D) - S$ ) dada la condición (a), existe una flecha  $f'$  que va del vértice  $x$  al conjunto  $S$ .

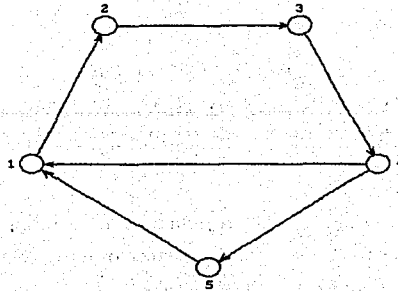
Notemos que el conjunto vacío es un seminúcleo.

A continuación presentamos dos digráficas con sus respectivos seminúcleos (aunque debe notar el lector que el seminúcleo de una digráfica puede no ser único):

Digráfica  $D_1$ ,  $S_{D_1} = \{1, 2, 3\}$

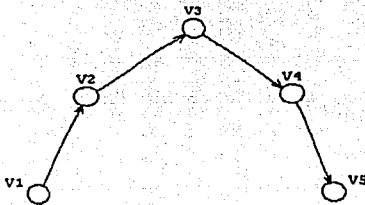


Digráfica  $D_2$ ,  $S_{D_2} = \{1, 3\}$

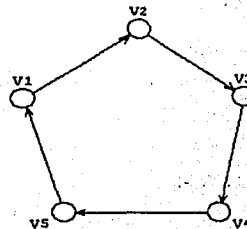


Es importante mencionar que no toda digráfica tiene seminúcleos no vacíos, y de existir un seminúcleo, éste puede no ser único, como muestran los siguientes ejemplos, en donde  $S_1 = \{v_5\}$  y  $S_2 = \{v_1, v_3, v_5\}$  son dos ejemplos de seminúcleos de  $D_1$ ; mientras que la digráfica  $D_2$  no tiene algún seminúcleo no vacío.

Digráfica  $D_1$



Digráfica  $D_2$



Los siguientes son resultados importantes relativos a seminúcleos, y para probar el primero de ellos, definimos una cadena  $C$  de seminúcleos como una colección de seminúcleos tal que si  $S_1, S_2 \in C$ , entonces  $S_1 \subseteq S_2$  o bien  $S_2 \subseteq S_1$ .

### Lema 2.2

El conjunto  $M$  de seminúcleos de  $D$ , ordenado por inclusión, es inductivo superiormente (i.e.  $M$  el conjunto de seminúcleos de  $D$  es parcialmente ordenado con la relación de contención, y toda cadena  $C \subseteq M$  está acotada ahí, es decir,  $\exists b \in M \forall x \in C [x \subseteq b]$ ).

## Demostración

Sea  $C$  una cadena de seminúcleos de  $D$ .

Sea  $U = \cup \{S \mid S \in C\}$

-  $U$  es independiente:

Supongamos lo contrario. i.e. existe  $(u,v) \in F(D)$  donde  $u,v \in U$ .

Por lo tanto  $u \in S_1 \in C$  para algún  $S_1$  &  $v \in S_2 \in C$  para algún  $S_2$

$u,v \in \max\{S_1, S_2\} \in C$  lo que no puede suceder pues tanto  $S_1$  como  $S_2$  son conjuntos independientes.

Por lo tanto  $U$  es independiente.

- Por ver que se cumple la condición (b) de la definición de seminúcleos, para  $U$ :

Si  $f$  es una flecha que va de  $U$  a  $x$  (por demostrar que existe flecha  $f'$  que va de  $x$  a  $U$ ).

Entonces  $\exists s[f=(s,x) \ \& \ s \in S \in C]$  por construcción de  $U$ .

Dado que  $S$  es seminúcleo existe una flecha  $f'$  que va de  $x$  a  $S$  y por ende a  $U$  (pues  $S \subseteq U$ ).

Por lo tanto  $U$  cumple la condición (b).

Por lo tanto el conjunto de seminúcleos de  $D$ , ordenado por inclusión, es inductivo superiormente.

La pregunta natural que surge ahora es si dado un seminúcleo de una digráfica, existirá un seminúcleo máximo que lo contenga?; y los siguientes resultados responden.

### Lema 2.3

Sea  $S$  un seminúcleo de  $D$ ,

sea  $B = \{v \in V(D) \mid \text{no existe flecha de } v \text{ a } S\}$

sea  $S'$  un seminúcleo de la subdigráfica  $B'$  de  $D$  inducida por  $B$ .

Entonces  $S \cup S'$  es un seminúcleo de  $D$ .

### Demostración

- Veamos inicialmente que  $S' \cup S$  es independiente:

Sea  $f=(u,v)$  con  $u,v \in S \cup S'$ . Existen cuatro casos a analizar:

- 1)  $u,v \in S$
- 2)  $u,v \in S'$
- 3)  $u \in S'$  y  $v \in S$
- 4)  $u \in S$  y  $v \in S'$

Vemos que los primeros casos 1) y 2) no pueden cumplirse dado que  $S$  y  $S'$  son independientes; y el caso 3) es también imposible pues  $S' \subseteq B$  y por definición de  $B$ ; por último, si el caso 4) se cumpliera entonces existe otra flecha de  $S'$  a  $S$  (pues  $S$  es seminúcleo), lo cual satisface el caso 3) el cual sabemos que es imposible. Entonces ninguno de los posibles casos es factible.

Por lo tanto,  $S \cup S'$  es independiente.

- Por ver que  $S \cup S'$  cumple la condición b) de la definición de seminúcleo:



Sea  $A=V(D)-(SUB)$  y  $x \in V(D)-(SUS')$ .

Sea  $f$  una flecha de  $SUS'$  a  $x$ . Se demostrará que existe una flecha  $f'$  de  $x$  a  $SUS'$ .

Si  $x \in A$ , entonces existe una flecha  $f'$  de  $x$  a  $S$  (de lo contrario  $x \in B$ , i.e.  $x \notin A$  contradiciendo la hipótesis) y como  $S \subseteq SUS'$  entonces existe una flecha  $f'$  de  $x$  a  $SUS'$ .

Si  $x \notin A$ , entonces necesariamente  $f$  sale de  $S'$  (pues  $x \in B$ , de modo que si  $f$  saliera del seminúcleo  $S$  deberá existir la flecha  $f'$  de  $x$  a  $S$ , contradiciendo la hipótesis de que no hay flechas de  $B$  hacia  $S$ ) y llega a  $B-S'$  (pues  $f$  sale de  $SUS'$  y  $x \in SUB$ , de manera que si  $x \in S$  o  $x \in S'$ , entonces  $SUS'$  no es independiente). Como  $S'$  es seminúcleo de  $B'$ , entonces existe una flecha  $f'$  de  $x$  a  $S'$  y por ende a  $SUS'$ .

Por lo tanto existe una flecha  $f'$  de  $x$  a  $SUS'$ .

- Por lo tanto  $SUS'$  es un seminúcleo de  $D$ .

†

Para el siguiente resultado, será de utilidad recordar antes el Lema de Zorn: Para todo  $[M,r]$  conjunto parcialmente ordenado con la relación  $r$ , no vacío tal que toda cadena  $C \subseteq M$  está acotada en  $M$  (i.e.  $\exists b \in M \forall x \in C [xrb \text{ ó } x=b]$ ), hay un elemento  $m \in M$   $r$ -máximo en  $[M,r]$  (i.e.  $\forall y \in M [m \not r y]$ ). En la siguiente prueba,  $M$  es el conjunto de los seminúcleos de  $D$  y la contención es la relación  $r$ .

### Teorema 2.1

Todo seminúcleo está incluido en un seminúcleo máximo.

### Demostración

Si  $D$  es finita el Teorema se cumple.

Si  $D$  no es finita entonces se tiene que todo seminúcleo está contenido en  $M$  el conjunto de seminúcleos de  $D$  que está ordenado por inclusión y es inductivo superiormente (i.e.  $M$  el conjunto de seminúcleos de  $D$  es parcialmente ordenado con la relación  $\subseteq$ , y toda cadena  $C \subseteq M$  está acotada ahí, es decir,  $\exists b \in M \mid \forall x \in C [x \subseteq b \text{ ó } x = b]$ ), tales propiedades de  $M$  las asegura el Lema 2.2.

Entonces se cumplen las hipótesis del Lema de Zorn

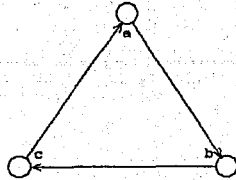
Por lo tanto existe un elemento máximo en  $M$  con respecto a la contención, por el Lema de Zorn.

†

Ahora estamos ya preparados para introducir la definición de núcleo. Sea  $D$  una digráfica, sea  $S \subseteq V(D)$ . Se dice que  $S$  es un **núcleo** de  $D$  si:

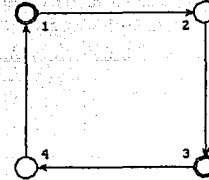
- $S$  es independiente.
- Para todo  $x \in V(D)-S$  existe una flecha de  $x$  a  $S$ . Diremos entonces que  $S$  es absorbente.

$D_1$  Digráfica sin núcleo



$D_2$  Digráfica con dos núcleos:

$N_1 = \{1, 3\}, N_2 = \{2, 4\}$



### Teorema 2.2

Sea  $D$  una digráfica. Si  $N$  es núcleo de  $D$ , entonces  $N$  es un conjunto independiente máximo y un absorbente mínimo con respecto a la contención.

### Demostración

Sea  $N$  un núcleo de  $D$ .

- Demostraremos que  $N$  es un conjunto independiente máximo:

Supongamos lo contrario, i.e.  $\exists I \subseteq V(D)$  [ $I$  independiente,  $N \subset I$  y  $N \neq I$ ]. Entonces  $\exists x \in I [x \notin N]$ .

Como  $x \notin N$  y  $N$  es absorbente, entonces  $(x, y) \in F(D)$  para algún  $y \in N$ .

Por lo tanto, como  $N \subset I$  y  $N \neq I$ , tenemos que  $y \in I$ ,  $x \in I$  y  $(x, y) \in F(D)$ , contradiciendo que  $I$  es independiente.

Por lo tanto  $N$  es un conjunto independiente máximo.

†

- Por demostrar que  $N$  es un conjunto absorbente mínimo con respecto a la contención:

Supongamos lo contrario, i.e.  $\exists A \subseteq V(D)$  [ $A$  es absorbente,  $A \subset N$  y  $A \neq N$ ]. Entonces  $\exists x \in N [x \notin A]$ .

Como  $A$  es absorbente,  $\exists y \in A [(x, y) \in F(D)]$ ; se sigue que  $x \in N$ ,  $y \in N$  y  $(x, y) \in F(D)$ , contradiciendo la independencia de  $N$ . Por lo tanto  $N$  es un conjunto absorbente mínimo con respecto a la contención.

†

Nótese que los núcleos son seminúcleos máximos, aunque el recíproco no es verdadero, como se demuestra en el siguiente Lema.

## Lema 2.4

Si  $S$  es núcleo entonces  $S$  es seminúcleo máximo

### Demostración

Si  $S$  es núcleo,  $S$  cumple ambas condiciones de la definición de seminúcleo.

Faltaría solamente demostrar que  $S$  es un seminúcleo máximo:

Supongamos lo contrario, es decir, existe un seminúcleo  $S'$  tal que  $S \subsetneq S'$  &  $S' \neq S$ .

i.e.  $\exists x \in S' [x \notin S]$  esto es, existe un elemento  $x$  en  $S'$  tal que no está en  $S$ .

Como  $x \in V(D) - S$  entonces  $\exists s \in S [(x, s) \in F(D)]$  pues  $S$  es núcleo.

Por lo tanto  $(x, s) \in F(D)$  con  $x, s \in S'$  y  $S'$  seminúcleo.

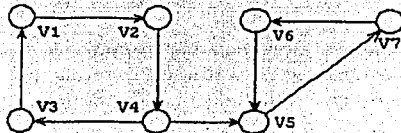
De manera que  $S'$  no es independiente, contradiciendo el hecho de que  $S'$  es seminúcleo (y es por tanto independiente).

Por lo tanto,  $S$  es un seminúcleo máximo.

†

Notemos que el recíproco del Lema anterior es falso, para demostrarlo basta dar el contraejemplo siguiente, en el que  $S = \{v_2, v_3\}$  es seminúcleo máximo en la digráfica  $D$  pero no núcleo (pues  $v_5, v_6$  y  $v_7$  no son absorbidos)

*D tiene seminúcleo máximo pero no tiene núcleo*



## Teorema 2.3

Si  $B_0, B_1, \dots, B_k, B_{k+1}$  y  $S_0, S_1, \dots, S_k$  son dos sucesiones de subconjuntos de  $V$  tales que:

a)  $B_0 = V(D)$ ,  $B_k \neq \emptyset$ ,  $B_{k+1} = \emptyset$ .

b)  $S_i$  es seminúcleo de la subdigráfica de  $D$  inducida por  $B_i$  para  $i=0, \dots, k$

c)  $B_{i+1} = \{x \in B_i \text{ tales que no existe flecha de } x \text{ a } S_i\}$  para  $i=0, \dots, k$ .

Entonces  $\bigcup_{i=0}^k S_i$  es un núcleo de  $D$ .

## Demostración

$S_0$  es seminúcleo de  $D$  y  $S_1$  es seminúcleo de  $D[B_1]$ , la subdigráfica de  $D$  inducida por  $B_1$ . Por el Lema 2.3, tenemos que  $S_0 \cup S_1$  es seminúcleo.

Ahora, análogamente para los siguientes pasos:  $S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_j$  es seminúcleo de  $D$  y  $S_{j+1}$  es seminúcleo de  $D[B_{j+1}]$ , la subdigráfica de  $D$  inducida por  $B_{j+1}$ . Entonces, por el Lema 2.3,  $S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{j+1}$  es seminúcleo.

Debemos notar que el Lema 2.3 es aplicable, pues en cada paso  $B_{i+1}$  cumple que  $\forall v \in B_{i+1} [v \in (V(D) - S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_j)]$  y no existe flecha de  $v$  a  $S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_j$ .

Entonces (cuando  $j=k-1$ ) la unión finita de los  $S_i$  desde cero hasta  $k$ , llamémosle  $S$ , es un seminúcleo de  $D$ .

En este paso tenemos que  $B_{k+1}$  es el conjunto vacío (por la condición c), de modo que no existen vértices en  $V(D)-S$  sin flechas hacia  $S$ . Por lo tanto  $S$  es núcleo de  $D$ .

†

Continuemos con algunos resultados relativos a la existencia de núcleos en una digráfica:

## Teorema 2.4

Toda digráfica simétrica tiene un núcleo  $N$ .

## Demostración

Sea  $D$  una digráfica simétrica.

Será suficiente probar que  $N$  es núcleo de  $D$  si  $N$  es un conjunto independiente maximal ya que siempre es posible encontrar en una digráfica un conjunto independiente maximal.

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $N$  es núcleo de  $D$ , entonces por el Teorema 2.2  $N$  es un conjunto independiente maximal.

( $\Leftarrow$ ) Sea  $N$  un conjunto independiente maximal. Por lo tanto  $\forall x \in (V(D)-N)$  [ $\exists xN$ -flecha o  $\exists Nx$ -flecha]. Pero como  $D$  es una digráfica simétrica, entonces  $\exists Nx$ -flecha &  $\exists xN$ -flecha, por lo que  $N$  absorbe a todos los vértices de  $V(D)-N$ . Por lo tanto  $N$  es núcleo de  $D$ .

Por lo tanto toda digráfica simétrica tiene núcleo.

†

## Teorema 2.5

Sea  $D$  una digráfica. Si  $D$  no tiene ciclos dirigidos entonces  $D$  tiene núcleo.

## Demostración

Supongamos que  $D$  no tiene ciclos dirigidos, entonces  $\exists v \in V(D)$  [ $\delta_D^+(v) = 0$ ], por contrapositiva del Lema 1.2

Consideremos a los siguiente conjuntos :

$$N_i = \{x \in V(D_i) \mid \delta_{D_i}^+(x) = 0\},$$

$$\Gamma^-(N_i) = \{y \in V(D_i) \mid \exists yN_i\text{-flecha}\},$$

$$D_{i+1} = D_i - (N_i \cup \Gamma^-(N_i)).$$

Con  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ , por lo que  $D_0 = D$ ; y con  $n = \min \{j \mid D_{j+1} = \emptyset\}$ .

Demostraremos que  $\cup_{i=0}^k N_i$  es núcleo de  $D-D_{k+1}$  para toda  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  (en particular, que  $\cup_{i=0}^n N_i$  es núcleo de  $D-D_{n+1}$ ), y lo haremos por inducción sobre  $k$ .

Base. Para  $k=0$ , efectivamente  $N_0$  es núcleo de  $D-D_1$ : pues  $D-D_1 = N_0 \cup \Gamma^-(N_0)$ , y por consiguiente  $N_0$  es un conjunto absorbente (por definición de  $\Gamma^-(N_0)$ ) e independiente (por definición de  $N_0$ ) en  $D-D_1$ .

Hipótesis inductiva: supongamos que el resultado es cierto para  $k=t-1$ , es decir,  $\cup_{i=0}^{t-1} N_i$  es núcleo de  $D-D_t$ .

Por demostrar que  $\cup_{i=0}^t N_i$  es núcleo de  $D-D_{t+1}$ :

- Por hipótesis inductiva se tiene que  $\cup_{i=0}^{t-1} N_i$  es núcleo de  $D-D_t$ , de manera que  $\cup_{i=0}^{t-1} N_i$  es un conjunto independiente en  $D-D_t$ , y es también independiente en  $(D-D_t) \cup (N_t \cup \Gamma^-(N_t)) = D-D_{t+1}$ , por definición de  $N_t$  y  $\Gamma^-(N_t)$  y por construcción de  $D-D_{t+1}$ . Por otra parte,  $N_t$  es independiente en  $D-D_{t+1}$  pues es un conjunto independiente en una subdigráfica inducida de  $D-D_{t+1}$  (Lema 2.1). Además, no hay flechas de  $N_t$  a  $\cup_{i=0}^{t-1} N_i$  en  $D-D_{t+1}$  pues  $N_t \subseteq D_t$  y por definición,  $D_t$  no tiene vértices de  $\cup_{i=0}^{t-1} \Gamma^-(N_i)$ . Y sucede además que no hay flechas de  $\cup_{i=0}^{t-1} N_i$  a  $N_t$  en  $D-D_{t+1}$  ya que debido a la construcción de los conjuntos  $N_i$ , de cada  $N_j$  solo pueden salir flechas hacia  $N_k$ , con  $k$  estrictamente menor que  $j$ . Por lo tanto no hay flechas entre los elementos de  $\cup_{i=0}^t N_i$  en  $D-D_{t+1}$ , i.e.  $\cup_{i=0}^t N_i$  es un conjunto independiente en  $D-D_{t+1}$ .

- Por hipótesis inductiva se tiene que  $\cup_{i=0}^{t-1} N_i$  es núcleo de  $D-D_t$ , de manera que  $\cup_{i=0}^{t-1} N_i$  es un conjunto absorbente en  $D-D_t$ , y dado que  $D_t - D_{t+1} = N_t \cup \Gamma^-(N_t)$ , entonces  $(\cup_{i=0}^t N_i) \cup (\cup_{i=0}^t \Gamma^-(N_i)) = D-D_{t+1}$ , por lo tanto  $\cup_{i=0}^t N_i$  es un conjunto absorbente en  $D-D_{t+1}$ .

Por lo tanto  $\cup_{i=0}^t N_i$  es núcleo en  $D-D_{t+1}$ .

†

Existen digráficas con ciertas características que serán de gran utilidad en el estudio de núcleos en digráficas, y las definimos a continuación. Diremos que  $D$  es una digráfica *núcleo-perfecta* si toda subdigráfica inducida de  $D$  posee un seminúcleo no trivial (distinto del vacío). Notemos que si  $D$  es núcleo-perfecta y  $D_0$  es subdigráfica de  $D$ , entonces  $D_0$  es también núcleo-perfecta (pues la propiedad mencionada es para toda subdigráfica inducida de  $D$ ).

Por otra parte,  $D$  es llamada *núcleo-imperfecta crítica* cuando  $D$  no tiene núcleo pero cada subdigráfica inducida propia de  $D$  sí tiene núcleo.

A continuación dos primeros resultados para digráficas núcleo-perfectas:

### Lema 2.5

Toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene núcleo si y solo si toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene seminúcleo no vacío.

### Demostración ( $\Rightarrow$ )

Si para toda subdigráfica inducida de  $D$ ,  $D'$ , se tiene que  $D'$  posee núcleo entonces, como tal núcleo es también seminúcleo máximo de la subdigráfica  $D'$  (por Lema 2.4), tenemos que la implicación es cierta.

†

## Demostración ( $\Leftarrow$ )

Supongamos que toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene seminúcleo. Sea  $D'$  una subdigráfica arbitraria inducida de  $D$ , y sea  $S$  su seminúcleo.

Por Teorema 2.1 tenemos que  $S$  está contenido en un seminúcleo máximo  $S'$  ( $S \subseteq S'$ ).

Analicemos a los vértices  $v \in (V(D') - S')$ . Existen varios casos a considerar:

- Si existe  $S'$ - $v$ -flecha en  $D$ , entonces como  $S'$  es seminúcleo, tenemos que existe la  $vS'$ -flecha en  $D$ , por lo que  $S'$  absorbe a  $v$ .
- Si existe la  $vS'$ -flecha en  $D$ , entonces  $S'$  absorbe a  $v$ .
- Si no existen flechas entre  $S'$  y  $v$ : sea  $B = \{u \in (V(D') - S') \text{ tal que no hay flechas entre } u \text{ y } S'\}$  (en este caso  $B \neq \emptyset$ , de lo contrario se trataría del caso (a) o el caso (b)), sea  $B'$  la subdigráfica inducida por  $B$ . Observemos que  $B'$  no puede tener seminúcleo no vacío (de lo contrario, por el Lema 2.3,  $S' \cup S''$  es seminúcleo de  $D'$ , con  $S''$  seminúcleo no vacío de  $B'$ , pero  $S' \subset S' \cup S''$ , contradiciendo que  $S'$  era seminúcleo máximo, por lo tanto  $B'$  no tiene seminúcleo no vacío), lo que contradice la hipótesis de que toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene seminúcleo no vacío ( $B'$  es una subdigráfica inducida de  $D$  sin seminúcleo no vacío). Así que este tercer caso no puede suceder.

Por lo tanto,  $\forall v \in (V(D') - S') [S' \text{ absorbe a } v]$ .

Dado que  $S'$  era seminúcleo, entonces sabemos que se trata de un conjunto independiente.

Por lo tanto  $S'$  es núcleo de  $D'$ .

$D'$  fue una subdigráfica inducida de  $D$  elegida de manera arbitraria, por lo que el resultado obtenido es válido para toda subdigráfica inducida de  $D$ .

†

## Teorema 2.6

Toda digráfica núcleo-perfecta posee al menos un núcleo.

### Demostración

Sea  $D$  una digráfica núcleo-perfecta.

Sea  $S$  un seminúcleo máximo de  $D$  (en el caso finito, la existencia de tal seminúcleo es inmediata, para el caso infinito el Teorema 2.1 nos asegura que hay tal).

Sea  $B = \{v \in V(D) - S \text{ tales que no existe flecha de } v \text{ a } S\}$ .

Observemos que  $B$  no es distinto del vacío:

De lo contrario existe un seminúcleo  $S'$  distinto del vacío de la subdigráfica  $B'$  de  $D$  inducida por  $B$  (por ser  $D$  núcleo perfecta).

Entonces  $S \cup S'$  es un seminúcleo de  $D$  (por Lema 2.3), y como  $S$  está contenido propiamente en  $S \cup S'$  se tiene que  $S$  no es seminúcleo máximo de  $D$ , lo que contradice la hipótesis.

Entonces  $\forall v \in V(D) - S$  [existe una flecha de  $v$  a  $S$ ] con  $S$  un conjunto independiente por ser seminúcleo.

Por lo tanto  $S$  es núcleo de  $D$ .

†

El siguiente es un resultado relativo a digráficas núcleo imperfectas críticas del cual se presentan dos demostraciones con el fin de distraer al lector de la monotoneidad de una demostración única.

### Lema 2.6

Si  $D$  es una digráfica finita núcleo imperfecta crítica, entonces  $D$  no tiene seminúcleos no vacíos.

#### Demostración 1

Supongamos lo contrario, i.e.  $D$  tiene un seminúcleo no vacío que denotaremos por  $S_0$ .

Entonces como  $D$  tiene seminúcleo y es finita, podemos considerar a  $B_0, B_1, \dots, B_k, B_{k+1}$  y  $S_0, S_1, \dots, S_k$  dos sucesiones de subconjuntos de  $V(D)$  tales que:

- a)  $B_0 = V(D), B_k \neq \emptyset, B_{k+1} = \emptyset.$
- b)  $S_i$  es seminúcleo de la subdigráfica de  $D$  inducida por  $B_i$  para  $i=0, \dots, k$
- c)  $B_{i+1} = \{x \in B_i \text{ tales que no existe flecha de } x \text{ a } S_i\}$  para  $i=0, \dots, k.$

Observemos que al menos  $B_1$  es distinto del vacío, de lo contrario  $S_0$  es núcleo de  $D$ , contradiciendo que  $D$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica (y que por tanto no tiene núcleo). Además el inciso b) es válido dada la hipótesis de que  $D$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica y que por tanto toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene núcleo y por consiguiente seminúcleo no vacío.

Entonces, por el Teorema 2.3 tenemos que  $\bigcup_{i=0}^k S_i$  es núcleo de  $D$ , contradiciendo la hipótesis de que  $D$  es núcleo imperfecta crítica (y que por tanto no tiene núcleo).

Por lo tanto  $D$  no contiene seminúcleos no vacíos.

†

#### Demostración 2

Supongamos lo contrario, i.e.  $D$  tiene un seminúcleo no vacío que denotaremos por  $S_D$ .

Sea  $B = \{x \in (V(D) - S_D) \text{ tales que no existe flecha de } x \text{ a } S_D\}$ . Notemos que  $B \neq \emptyset$ , de lo contrario  $S_D$  absorbe a todos los vértices de  $(D - S_D)$  y por tanto  $S_D$  es núcleo de  $D$ , contradiciendo que  $D$  es núcleo imperfecta crítica (y que por tanto no tiene núcleo).

Sea  $N_B$  un núcleo de  $B$ .

$N_B \cup S_D$  es un conjunto absorbente en  $D$  por construcción de  $S_D, N_B$  y  $B$ .

Por otra parte, no existen  $S_D N_B$ -flechas pues de lo contrario existe al menos una  $N_B S_D$ -flecha (ya que  $S_D$  es seminúcleo de  $D$ ), contradiciendo la definición de  $B$ . Además, como  $N_B \subseteq B$ , no existen  $N_B S_D$ -flechas, por construcción de  $B$ . Por lo tanto  $N_B \cup S_D$  es un conjunto independiente en  $D$ , así que  $N_B \cup S_D$  es un núcleo no vacío de  $D$ , contradiciendo que  $D$  es núcleo imperfecta crítica.

†

El siguiente resultado será de utilidad en la prueba de un Teorema posterior:

### Teorema 2.7

Si  $D$  es finita y no posee ciclos dirigidos impares, entonces  $D$  contiene un seminúcleo no vacío.

#### Demostración

Definamos previamente en  $V(D)$  las relaciones binarias  $\sim$  y  $\preceq$ :

a) Para  $v, w \in V(D)$ :  $v \preceq w$  sii existe en  $D$  un camino dirigido de  $w$  a  $v$ .

b) Para  $v, w \in V(D)$ :  $v \sim w$  sii  $v \preceq w$  y  $w \preceq v$ .

La relación  $\preceq$  es un preorden (relación binaria transitiva y reflexiva):

a)  $[u \preceq v \text{ y } v \preceq w] \Rightarrow [\text{existe un } vu\text{-camino dirigido } P \text{ y existe un } wv\text{-camino dirigido } R] \Rightarrow [R \cup P \text{ es un } wu\text{-camino dirigido}] \Rightarrow [u \preceq w]$ . Por lo tanto la relación es transitiva.

b) Para todo vértice  $u$  existe el  $uu$ -camino dirigido de longitud nula, de ahí que  $u \preceq u$ . Por lo tanto la relación es reflexiva.

La relación  $\sim$  es de equivalencia:

a) Para todo vértice  $u$  existe el  $uu$ -camino dirigido de longitud nula, de ahí que  $u \sim u$ . Por lo tanto la relación es reflexiva.

b)  $u \sim v \Rightarrow [\text{existe } uv\text{-camino dirigido y existe } vu\text{-camino dirigido}] \Rightarrow [\text{existe } vu\text{-camino dirigido y existe } uv\text{-camino dirigido}] \Rightarrow v \sim u$ . Por lo tanto la relación es simétrica.

c)  $[u \sim v \text{ y } v \sim w] \Rightarrow [\text{existen } vu\text{-camino } P, uv\text{-camino } Q \text{ y existen un } wv\text{-camino } R, vw\text{-camino } S] \Rightarrow [R \cup P \text{ es un } wu\text{-camino dirigido y } Q \cup S \text{ es un } uw\text{-camino dirigido}] \Rightarrow [u \sim w]$ . Por lo tanto la relación es transitiva.

Sea  $m_0 \in V(D)$  un elemento mínimo con respecto a la relación  $\preceq$ , es decir,  $\forall m \in V(D) [m \preceq m_0 \Rightarrow m \sim m_0]$ .

Sea  $M = \{m \in V(D) \text{ tal que } m \sim m_0\}$

Si consideramos los siguientes conjuntos:

$S = \{m \in M \text{ tal que existe un camino dirigido de longitud par de } m_0 \text{ a } m\}$

$I = \{m \in M \text{ tal que existe un camino dirigido de longitud impar de } m_0 \text{ a } m\}$

Entonces se tiene que:

a)  $m_0 \in S$

b)  $S \cap I = \emptyset$ :

- De lo contrario  $\exists s \in S \cap I$

- i.e. existe  $m_0s$ -camino dirigido  $P$  de longitud par,  $m_0s$ -camino dirigido  $Q$  de longitud impar y existe un  $sm_0$ -camino dirigido  $R$  pues  $m_0 \sim s$

- Si  $R$  es de longitud par, entonces  $Q \cup R$  es un camino dirigido cerrado de longitud impar.

- Si  $R$  es de longitud impar, entonces  $P \cup R$  es un camino dirigido cerrado de longitud impar.

- Como todo camino dirigido cerrado de longitud impar contiene un ciclo dirigido de longitud impar (Teorema 1.3) se tiene que  $D$  contiene uno, contradiciendo la hipótesis.

- Por lo tanto  $S \cap I = \emptyset$ .

Veamos ahora que todas las flechas de  $D$  que salen de elementos de  $S$ , llegan a  $I$ : sean  $u \in S$  y  $v \in V(D)$  tales que  $(u, v) \in F(D)$ , como  $u \in S$  entonces existe un  $m_0u$ -camino dirigido  $P$  de longitud par, de manera que  $P \cup (u, v)$  es un  $m_0v$ -camino dirigido de longitud impar, por lo tanto,  $v \in I$ .



Por otra parte, de cada vértice de  $I$  sale alguna flecha hacia  $S$ : observemos primero que de todo vértice en  $I$  salen flechas ya que si  $u \in I$  entonces existe un  $m_0 u$ -camino dirigido de longitud impar, i.e.  $u \preceq m_0$ , entonces  $u \sim m_0$  por la elección de  $m_0$  ( $m_0$  es un elemento mínimo con respecto a la relación  $\preceq$ ), por lo tanto existe un  $u m_0$ -camino dirigido, por lo que de todo vértice  $u \in I$  salen flechas. Además, todas las flechas que salen de  $u \in I$  llegan a  $S$  pues si  $u \in I$  y  $v \in V(D)$  de manera que  $(u,v) \in F(D)$  (sabemos ya que tal flecha existe), como  $u \in I$  entonces existe un  $m_0 u$ -camino dirigido de longitud impar  $P$ , por lo tanto  $P \cup (u,v)$  es un camino dirigido de longitud par, de ahí que  $v \in S$ .

Entonces, de las dos observaciones anteriores se sigue que  $S$  es seminúcleo pues es un conjunto independiente (las flechas que salen de  $S$  llegan a  $I$ , con  $S$  e  $I$  disjuntos) y todas las flechas que salen de  $S$  llegan a vértices de  $I$ , de los cuales, por la segunda observación, salen flechas hacia  $S$ . Observemos además que al menos  $m_0 \in S$ , por lo tanto  $S \neq \emptyset$ .

Por lo tanto  $D$  contiene un seminúcleo no vacío ( $S$ ).

†

El siguiente es un resultado cuya demostración original se caracterizó por ser extensa y compleja. Aquí, con la evidente ayuda del concepto de seminúcleos, se presenta la elegante demostración del Dr. Newmann.

### Corolario 2.1

(Teorema de Richardson) Si  $D$  es finita y no posee ciclos impares, entonces  $D$  es núcleo-perfecta y por consiguiente posee un núcleo.

### Demostración

Observemos que cada una de las subdigráficas  $D_i$  de  $D$  (donde  $V(D_i) \subseteq V(D)$ ) cumplen con las hipótesis del Teorema 2.7 (es decir, toda subdigráfica  $D_i$  de  $D$  es finita y no posee ciclos impares, pues de no ser así,  $D$  no sería finita o tendría algún ciclo impar).

De manera que el Teorema 2.7 nos asegura que toda subdigráfica inducida de  $D$  posee un seminúcleo no vacío.

Por lo tanto, por definición,  $D$  es una digráfica núcleo-perfecta.

Entonces, por el Teorema 2.6 se tiene que  $D$  posee un núcleo.

†

Otros resultados importantes se incluyen a continuación:

### Lema 2.7

Si  $D$  es bipartita, entonces  $D$  es núcleo-perfecta.

### Demostración

Dado que toda subdigráfica  $D_i$  de una digráfica bipartita también lo es (de lo contrario  $D$  no sería bipartita pues  $V(D_i) \subseteq V(D)$  para toda  $D_i$ ), entonces basta probar que toda digráfica bipartita  $D'$  contiene al menos un seminúcleo:

Si existe  $v \in V(D')$  tal que de  $v$  no salen flechas, entonces  $\{v\}$  es un seminúcleo (pues es un conjunto independiente y cumple la segunda condición de seminúcleos por vacuidad), y la prueba culmina.

De no ser así, entonces la digráfica no puede ser la trivial, de manera que es válido considerar  $(A, B)$  una partición de  $V(D')$  en conjuntos independientes ajenos (tal partición existe pues  $D'$  es bipartita). Observamos que  $A$  y  $B$  son núcleos de  $D'$  pues son independientes por construcción, y por esa propiedad, considerando además de que no existen vértices de los que no salen flechas (pues ese fue el primer caso), se tiene que para todo vértice en  $A$  (o  $B$ ) existen flechas de  $A$  (o  $B$ ) hacia  $B$  (o  $A$ ).

†

### Teorema 2.8

Toda digráfica no núcleo perfecta contiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica.

#### Demostración

Sea  $D$  una digráfica que no es núcleo perfecta. Por lo tanto existe una subdigráfica inducida de  $D$  que no tiene núcleo. Sea  $D^*$  la mínima subdigráfica inducida de  $D$  que no tiene núcleo, con respecto al siguiente orden:  $H \leq F$  si  $H$  es una subdigráfica inducida de  $F$ . Entonces toda subdigráfica inducida propia de  $D^*$  tiene núcleo<sup>1</sup>. Por lo tanto  $D$  contiene una digráfica núcleo imperfecta crítica, a saber  $D^*$ .

†

### Teorema 2.9

Si  $D$  es una digráfica núcleo-imperfecta-crítica entonces: 1) no existe una partición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(D)$  tal que  $D[V_1, V_2] \subseteq \text{Sim}(D)$ , donde  $D[V_1, V_2] = \{uv \in E(D) \text{ tales que } u \in V_1 \text{ y } v \in V_2\}$ ; 2) es decir,  $\text{Asim}(D)$  es fuertemente conexa.

#### Demostración

1) Probemos la primer parte del Teorema haciendo uso del Lema 2.6:

Supongamos lo contrario, i.e. existe una partición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(D)$  tal que  $D[V_1, V_2] \subseteq \text{Sim}(D)$ , donde  $D[V_1, V_2] = \{uv \in E(D) \text{ tales que } u \in V_1 \text{ y } v \in V_2\}$ .

Consideremos la subdigráfica inducida de  $D$ ,  $D[V_1]$ , que es una subdigráfica propia debido a que  $\{V_1, V_2\}$  es una partición de  $V(D)$  y por consiguiente  $V_2 \neq \emptyset$  y  $V_1 \neq V(D)$ . Entonces  $D[V_1]$  tiene un núcleo no vacío que denotaremos por  $N$  (pues por hipótesis  $D$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica).

Veamos que  $N$  es seminúcleo (no vacío) de  $D$ :

- $N$  es independiente en  $D$  ya que es independiente en una subdigráfica inducida de  $D$ .
- Sea  $v \in V(D) - N$ . Afirmamos que para toda  $Nv$ -flecha en  $D$ , existe una  $vN$ -flecha en  $D$ : si  $v \in V_1$  la afirmación se cumple pues  $N$  es núcleo en  $D[V_1]$ ; en cambio, si  $v \in V_2$  entonces existe  $vN$ -flecha simétrica en  $D$  (pues por hipótesis  $D[V_1, V_2] \subseteq \text{Sim}(D)$ ), por lo que la afirmación es cierta.

<sup>1</sup>El mínimo está bien definido pues las digráficas que solo tienen uno o dos vértices, son núcleo perfectas

Por lo tanto hemos encontrado un seminúcleo no vacío de  $D, N$ , lo que contradice la hipótesis de que  $D$  es núcleo imperfecta crítica (por el Lema 2.6). Se sigue que no existe una partición de  $V(D)$  con las propiedades mencionadas en el enunciado.

†

2) Ahora se probará que  $\text{Asim}(D)$  es fuertemente conexa:

Sabemos por hipótesis que no existe una partición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(D)$  tal que  $D[V_1, V_2] \subseteq \text{Sim}(D)$ , i.e. para toda partición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(D)$ ,  $D[V_1, V_2] \not\subseteq \text{Sim}(D)$ . Por lo tanto existe una  $V_1 V_2$ -flecha en  $\text{Asim}(D)$ <sup>2</sup>. De modo que haciendo uso del Teorema 1.5 (cuya demostración puede leerse en el capítulo 1) tenemos que  $\text{Asim}(D)$  es fuertemente conexa.

†

## Corolario 2.2

Si  $D$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica entonces  $\text{Asim}(D)$  tiene ciclos dirigidos.

### Demostración

El inciso b) del Teorema anterior nos asegura que  $\text{Asim}(D)$  es fuertemente conexa, por lo tanto  $\text{Asim}(D)$  tiene ciclos dirigidos por el Teorema 1.6.

†

## Teorema 2.10

Si en una digráfica  $D$  cada ciclo dirigido contiene una flecha simétrica entonces  $D$  es núcleo perfecta<sup>3</sup>.

### Demostración

Supongamos lo contrario, i.e.  $D$  no es núcleo perfecta. Entonces por el Teorema 2.8,  $D$  contiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica,  $H$ ; así que existe un ciclo dirigido  $\gamma \subseteq \text{Asim}(H)$  como consecuencia del Corolario 2.2, y dado  $H$  es subdigráfica inducida de  $D$ , entonces  $\gamma \subseteq \text{Asim}(D)$ , lo que contradice la hipótesis inicial de que en  $D$  cada ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica. Por lo tanto  $D$  es una digráfica núcleo perfecta.

†

## Corolario 2.3

Si  $D$  no es una digráfica núcleo perfecta (es decir,  $D$  es núcleo imperfecta crítica o contiene alguna subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica y no necesariamente propia), entonces existe un ciclo dirigido contenido en  $\text{Asim}(D)$ .

### Demostración

Este corolario se cumple por contrapositiva del Teorema anterior.

†

<sup>2</sup>Como la propiedad de que  $D[V_1, V_2] \not\subseteq \text{Sim}(D)$  se cumple para toda partición de  $V(D)$ , en particular para  $\{V_2, V_1\}$ , entonces también existe una  $V_2 V_1$ -flecha en  $\text{Asim}(D)$

<sup>3</sup>Es decir,  $D$  no es núcleo imperfecta crítica y no contiene alguna subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica

El siguiente resultado (cuya prueba original fue debida a Berge), permitirá demostrar importantes resultados en el Capítulo 4:

### **Teorema 2.11 (Berge)**

Una digráfica completa  $D$  es núcleo-perfecta sii todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica.

#### **Demostración ( $\Rightarrow$ )**

Supongamos que  $D$  es núcleo-perfecta, i.e. toda subdigráfica inducida de  $D$  tiene núcleo.

Si  $D$  no tiene ciclos entonces el Teorema se cumple por vacuidad.

Si  $D$  tiene un ciclo  $\Gamma$ , por demostrar que  $\Gamma$  tiene al menos una flecha simétrica:

Consideremos la subdigráfica inducida por tal ciclo, es decir,  $D[V(\Gamma)]$ . Por hipótesis  $D[V(\Gamma)]$  tiene núcleo, que consiste de un solo punto  $\{v\}$  pues  $D$  es completa.

Observemos que  $v \in \Gamma$  (pues  $V(\Gamma) = V(D[V(\Gamma)])$ ), por lo tanto  $\exists u, w \in \Gamma \subseteq D[V(\Gamma)]$  tales que  $(v, u) \in F(D)$  y  $(w, v) \in F(D)$ .

Como  $\{v\}$  es núcleo, entonces en particular el vértice  $u$  es absorbido por  $v$ , de manera que  $(u, v) \in F(D)$ .

Por lo tanto  $\Gamma$  tiene al menos un arco simétrico, a saber el arco entre  $u$  &  $v$ .

†

#### **Demostración ( $\Leftarrow$ )**

Supongamos lo contrario, i.e.  $D$  no es núcleo perfecta. Entonces  $D$  contiene una subdigráfica inducida núcleo imperfecta crítica (por el Teorema 2.8), por lo que existe un ciclo dirigido contenido en  $Asim(D)$  (por el Corolario 2.2), contradiciendo la hipótesis inicial de que todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica.

†

El siguiente Teorema será utilizado en el Capítulo 4 y en la presente tesis no se anexa su demostración por tratarse de una extensa prueba que desviaría al lector del objetivo principal del este trabajo; sin embargo, la demostración puede encontrarse en la referencia [4].

### **Teorema 2.12 (Galeana-Sánchez y Rajsbaum (4))**

Sea  $T$  un torneo hamiltoniano con  $n$  vértices y  $\gamma$  un ciclo dirigido hamiltoniano de  $T$ . Para cada  $k$  ( $3 \leq k \leq n-1$ ) existe un ciclo dirigido de longitud  $k$ , digamos  $\gamma_k$ , contenido en  $T$ , tal que  $|A(\gamma_k) \cap A(\gamma)| \geq 1$ .

Culminamos así este capítulo que tiene como principal objetivo presentar al lector el concepto más importante de la presente tesis, el de núcleo de una digráfica; además de reunir importantes resultados que serán de gran utilidad en capítulos posteriores.

## Capítulo 3

# Aplicaciones de núcleos

Las aplicaciones del concepto de *núcleo de una digráfica*, son muy diversas; el presente capítulo presenta el análisis de algunas de ellas que pertenecen al área de Teoría de Juegos, Lógica y Combinatoria. Debe observar el lector que lograr representar correctamente un problema de cualquier índole con una digráfica, permite concluir muchos resultados del problema planteado originalmente, haciendo uso de las propiedades y Teoremas estudiados en la Teoría de Digráficas (en este caso nos referimos a propiedades y Teoremas relativos al concepto de núcleo). Algunos de tales problemas son de *el juego entre dos personas, cómo determinar una base de axiomas, y las antibases de una teoría*, entre otros. En algunas de las aplicaciones se hace uso del resultado *toda digráfica transitiva tiene núcleo y todos sus núcleos tienen la misma cardinalidad*, cuya prueba es también incluida en el presente capítulo.

### 3.1 Teoría de Juegos

El concepto de núcleo fue introducido con el nombre de *solución* en la Teoría de Juegos de la siguiente forma:

Considérense  $n$  personas  $(1),(2),\dots,(n)$  que elegirán de manera colectiva un punto  $x$  o *situación* de un conjunto  $X$  o *conjunto de situaciones*, es decir, entre las  $n$  personas deberá construirse una estructura de preferencia entre las situaciones y para ello deberán establecer una relación de preferencias entre pares de elementos de  $X$ . Se analizará aquí bajo qué criterios se establece tal relación. Debe mencionarse que dado que las preferencias individuales pueden no ser compatibles y que se requiere de una elección colectiva, éstas no serán consideradas; además, aunque la preferencia unánime de una situación  $a$  sobre una situación  $b$  sería la mejor solución, es poco probable, de ahí que lo que consideraremos será la capacidad de imponer u obligar la preferencia de  $a$  sobre  $b$ .

Se dice que  $a$  es *efectivamente preferida* a la situación  $b$  si entre las  $n$  personas existe un grupo capaz de imponer la preferencia de  $a$  sobre  $b$ .

El conjunto  $X$  y la relación de preferencia efectiva entre algunos pares de situaciones define una digráfica  $D$  tal que  $V(D)=X$  y  $(a,b) \in F$  si  $b$  es efectivamente preferida sobre  $a$ .

Ahora bien, si la digráfica  $D$  tiene un núcleo  $S$ , entonces la elección de un punto  $x$  se limita simplemente a elegir un punto de  $S$  pues dado que  $S$  es independiente se tiene que ninguna situación en  $S$  es efectivamente preferida a otra de  $S$ , y si  $x \notin S$  entonces existe otra situación en  $S$  que es efectivamente preferible a  $x$ .<sup>1</sup>

### 3.2 Base de axiomas

Considérese una Teoría o conjunto de proposiciones

$T=\{a,b,c,\dots\}$ . Encontrar una *base de axiomas* para esta Teoría es equivalente a encontrar un conjunto de proposiciones  $B$  tal que:

1. Cada proposición que no está en  $B$  es consecuencia lógica de alguno de los axiomas.
2. Ningún axioma es consecuencia de algún otro axioma.

Representando cada proposición con un vértice y si cada vez que  $b$  implique  $a$  entonces  $a \rightarrow b$ , obtenemos una digráfica  $D$  transitiva, es decir,  $[(a,b) \in F(D) \text{ y } (b,c) \in F(D) \text{ implica que } (a,c) \in F(D)]$ . A continuación se demostrará que toda digráfica transitiva tiene al menos un núcleo, y que todos los posibles núcleos tienen la misma cardinalidad.

Para el siguiente Teorema es necesario recordar la definición introducida en el primer capítulo: una *componente fuertemente conexa terminal* de  $D$  es una componente fuertemente conexa de  $D$  tal que de ella no salen flechas hacia otra componente fuertemente conexa distinta.

#### Teorema 3.1

Si  $D$  es transitiva, entonces:

- a)  $D$  tiene al menos un núcleo  $N$
- b)  $|S| = |N|$  para todo núcleo  $S$ .

<sup>1</sup>Notemos aquí la utilidad de la construcción de las flechas en  $D$  con respecto a la relación de preferencia efectiva pues de haber optado por la otra construcción posible  $(a,b) \in F$  si  $a$  es efectivamente preferida sobre  $b$  entonces ya no se cumple que para  $x$  en  $X-V(S)$  existe otra situación en  $S$  que es efectivamente preferible a  $x$ .

## Demostración.

Se dice que una componente fuertemente conexa es aislada cuando no hay caminos con vértices de ésta y de alguna otra componente.

La prueba consiste de las siguientes proposiciones:

Proposición  $P_1$ .  $\forall K_i \exists x \in K_i [x \in N]$  con  $K_i$  componente fuertemente conexa terminal; es decir, toda componente fuertemente conexa terminal  $K_i$  tiene un vértice que es también elemento del núcleo  $N$ .

Demostración  $P_1$

Supongamos lo contrario, i.e.  $\exists K_j [\forall x \in V(K_j) [x \notin N]]$  con  $K_j$  componente fuertemente conexa terminal; es decir, existe una componente fuertemente conexa terminal  $K_j$  tal que no tiene ningún elemento del núcleo.

Por ser terminal, de  $K_j$  no salen flechas.

Por lo tanto  $N$  no es absorbente (pues para todo vértice  $x$  de  $K_j$  no hay flechas de  $x$  a  $N$ ), contradiciendo que  $N$  es núcleo.

†

Proposición  $P_2$ . Para toda componente fuertemente conexa no terminal (y por ende no aislada) <sup>2</sup> existe camino dirigido de ésta a alguna componente fuertemente conexa terminal.

Demostración  $P_2$

Por inducción sobre el número de componente fuertemente conexas.

Base. Si  $D$  tiene una sola componente fuertemente conexa  $C_i$  entonces tal componente es terminal, por lo que de  $C_i$  no salen flechas, de ahí que sea aislada. Por lo tanto la proposición  $P_2$  se cumple por vacuidad.

Hipótesis de inducción. Si  $D$  tiene  $n$  componentes fuertemente conexas entonces de cada una de las componentes fuertemente conexas no terminales (las cuales son no aisladas pues de lo contrario serían terminales) hay un camino dirigido hacia alguna componente fuertemente conexa terminal.

Por demostrar que si  $D$  tiene  $n+1$  componentes fuertemente conexas entonces de cada una de las componentes fuertemente conexas no terminales (las cuales son no aisladas) hay un camino dirigido hacia alguna componente fuertemente conexa terminal:

En  $D$  siempre existe una componente fuertemente conexa terminal, entonces por el Principio de Dualidad (aplicado a la existencia de tal componente) existe  $X_k$  componente fuertemente conexa tal que a ella no entran flechas.

Consideremos  $D' = D - X_k$ .

$D'$  tiene  $n$  componentes fuertemente conexas <sup>3</sup>, así que por hipótesis de inducción hay un camino dirigido de cada una de las componentes fuertemente conexas no terminales de  $D'$  hacia alguna componente fuertemente conexa terminal. †

Veamos ahora qué sucede con  $X_k$ :

Si de  $X_k$  no salen flechas, entonces es una componente aislada, y por lo tanto se cumple la proposición  $P_2$ .

En cambio, si hay flechas que salen de  $X_k$ , hay dos posibles casos:

<sup>2</sup>Esto se debe a que si una componente es aislada entonces es terminal)

<sup>3</sup>No aumenta el número de componentes fuertemente conexas pues de lo contrario, algún par de componentes tendría vértices en común, contradiciendo el hecho de que las componentes son ajenas entre sí

- Si las flechas salen hacia alguna componente terminal, entonces se cumple la proposición  $P_2$ .
- Si las flechas salen hacia alguna componente no terminal: sea  $(u,v) \in F(D)$  donde  $u \in X_k$  y  $v \in C_j$  componente no terminal; por hipótesis de inducción hay un  $wz$ -camino dirigido  $P$  de  $C_j$  a alguna componente terminal  $C_i$  (donde  $w \in V(C_j)$  y  $z \in V(C_i)$ ); ahora bien, como  $C_j$  es fuertemente conexa, existe un  $vw$ -camino dirigido  $P'$  en tal componente; de manera que  $R = (u,v) \cup P' \cup P$  es un camino dirigido de  $X_k$  a una componente fuertemente conexa terminal.

Por lo tanto la proposición se cumple también para la componente  $X_k$ .

Por lo tanto de cada componente fuertemente conexa no terminal (y por tanto no aislada), hay un camino dirigido hacia alguna componente fuertemente conexa terminal.

†

Proposición  $P_3$ .  $\forall x \in N [x \in K_j$  para alguna componente fuertemente conexa terminal  $K_j]$ , es decir, si  $x$  pertenece al núcleo entonces también pertenece a una componente fuertemente conexa terminal.

Demostración  $P_3$ .

Supongamos lo contrario, i.e.  $\exists n \in N [n \in C_k$  con  $C_k$  no terminal], es decir, existe un elemento del núcleo que pertenece a una componente no terminal.

Por  $P_2$ , hay un  $yw$ -camino dirigido  $P$  de  $C_k$  a alguna componente terminal  $K_j$  (donde  $y \in V(C_k)$  y  $w \in V(K_j)$ ).

Por  $P_1$ ,  $\exists n' \in N [n' \in K_j]$ , es decir, existe un elemento  $n'$  del núcleo en  $K_j$ .

Como  $C_k$  y  $K_j$  son fuertemente conexas entonces existe un  $ny$ -camino dirigido  $Q$  en  $C_k$  y un  $wn'$ -camino dirigido  $R$  en  $K_j$ .

Consideremos  $S = Q \cup P \cup R$ , que es un  $nn'$ -camino dirigido.

Por transitividad aplicada tantas veces como la longitud del camino  $S$ , se tiene que  $(n, n') \in F(D)$ .

Entonces  $N$  no es independiente, lo que contradice que  $N$  es núcleo.

Por lo tanto  $\forall x \in N [x \in K_j$  para alguna componente fuertemente conexa terminal  $K_j]$

†

Proposición  $P_4$ . No puede haber más de un elemento del núcleo en una misma componente fuertemente conexa terminal.

Demostración  $P_4$ .

Supongamos lo contrario, i.e.  $\exists x, y \in N [x, y \in K_j$  para alguna  $K_j$  componente terminal], esto es, existen dos elementos del núcleo que pertenecen a una misma cfc terminal.

Como  $K_j$  es fuertemente conexa, existe un camino dirigido  $T$  de  $x$  a  $y$ .

Aplicando la transitividad de  $D$  tantas veces como la longitud de  $T$  se tiene que  $(x, y) \in F(D)$ , lo que contradice que  $N$  sea un conjunto independiente.

†

Con los resultados anteriores se puede entonces asegurar que la digráfica transitiva  $D$  siempre tiene un núcleo, pues basta tomar un elemento de cada componente fuertemente conexa terminal para construirlo; y además la cardinalidad del núcleo es igual al número de componentes fuertemente conexas terminales de  $D$ , por lo que es la misma para cualquier otro núcleo de la digráfica.



Podemos entonces enunciar el siguiente

### Corolario 3.1

Toda digráfica  $D$  transitiva tiene un núcleo, y todos los núcleos tienen la misma cardinalidad.

Entonces, dado que la demostración anterior nos asegura que toda digráfica transitiva tiene núcleo, el problema de encontrar una *base de axiomas* es equivalente a encontrar un núcleo  $N$  en  $D$ : como  $N$  es independiente entonces ningún axioma de  $N$  es consecuencia de algún otro elemento del núcleo (que es la propiedad 2), y al ser  $N$  es absorbente entonces todas las propiedades de la Teoría que están representadas por vértices de  $V(D)-N$  son implicaciones de algún axioma o vértice en  $N$  (es que la propiedad 1).

### 3.3 Juego entre dos personas

Sean  $a, b$  dos jugadores y  $D$  una digráfica finita, conexa y sin ciclos. Definamos un juego como sigue:

Sea  $x_0 \in V(D)$  un punto inicial. El jugador  $a$  selecciona un punto  $x_1$  en  $\Gamma^+(x_0)$ , inmediatamente el jugador  $b$  escoge cualquier vértice  $x_2$  en  $\Gamma^+(x_1)$ , después nuevamente  $a$  selecciona  $x_3$  en  $\Gamma^+(x_2)$ , y así sucesivamente hasta que uno de los dos jugadores pierda cuando no pueda elegir más vértices. Obsérvese que si  $D$  tuviera ciclos entonces el juego podría no tener fin.

Ahora bien, si  $D$  tiene un núcleo  $N$ , entonces el jugador que elige un punto en él empatará o ganará el juego por las razones que se exponen a continuación:

Sea  $x_i \in N$  la elección de alguno de los jugadores, digamos  $a$ . Si  $\Gamma^+(x_i) = \emptyset$  entonces el jugador  $b$  ya no podrá elegir otro punto dándole a su contrincante la victoria; en cambio, si  $\Gamma^+(x_i) \neq \emptyset$ , dado que  $\Gamma^+(x_i) \subset (V(D)-N)$  (pues  $N$  es independiente), entonces el jugador  $b$  solo podrá elegir algún punto  $x_{i+1}$  fuera del núcleo y el juego no puede terminar aquí pues  $N$  es absorbente (i.e.  $\exists y \in N$  tal que  $(x_{i+1}, y) \in F(D)$ ); a continuación  $a$  siempre tendrá la opción de elegir un punto en  $N$  (siempre existe tal vértice pues  $N$  es absorbente) regresando al caso que ya hemos explicado en donde el jugador  $b$  no puede ganar.

### 3.4 Lógica y combinatoria

Sea  $P$  un conjunto de propiedades  $P = \{P_1, P_2, P_3, \dots\}$  y un conjunto de Teoremas de la forma  $P_i$  implica  $P_j$ , los que pueden ser representados por una digráfica  $D$  donde  $V(D) = P$  y  $(P_i, P_j) \in F(D)$  sii  $[P_i$  implica  $P_j$  es consecuencia lógica de al menos uno de los teoremas].

Supongamos que se quiere demostrar que la Teoría representada en  $D$  es completa, es decir, que todas las implicaciones representadas por  $\bar{D}$  son falsas, o bien, por cada  $(p, q) \notin F(D)$  con  $p \neq q$  debemos asignar un estudiante con la tarea de encontrar un contraejemplo de la afirmación  $p$  implica  $q$ . Notamos que dependiendo la Teoría, el hecho de encontrar un contraejemplo por cada  $(p, q) \notin F(D)$  puede constituir un arduo y quizá innecesario trabajo debido a la posibilidad de demostrar la falsedad de todas las implicaciones probando solamente la falsedad de un subconjunto de ellas; afortunadamente podemos por medio de la teoría de núcleos, determinar

el mínimo número de estudiantes necesarios para mostrar que todas las posibles implicaciones están ya representadas en la digráfica  $\bar{D}$ :

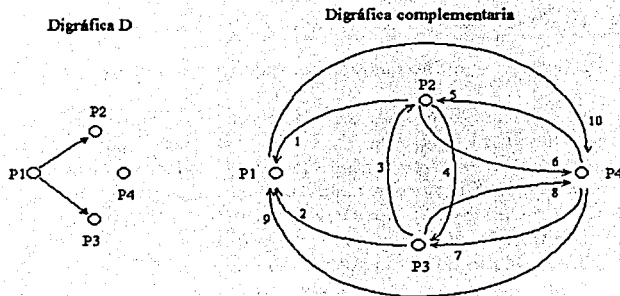
a) Construyamos la digráfica  $H$  tal que  $V(H)=F(\bar{D})$  y donde  $(i,j)\in F(H)$  sii [la implicación  $i$  es verdadera implica la implicación  $j$  es verdadera],

b)  $H$  es transitiva y por consiguiente tiene al menos un núcleo  $N$  donde  $|N|=|S|$  tal que  $S$  es núcleo (por el Teorema 3.1),

c) Ahora bien, dado que  $N$  es absorbente se tiene que si las implicaciones que están en  $N$  son falsas, entonces todas las implicaciones (que son flechas en  $\bar{D}$  y vértices en  $H$ ) son falsas<sup>4</sup>; y como  $N$  es independiente resulta ser un conjunto minimal (mínimo por contención) con la propiedad previa.

d) Entonces  $|N|$  es el número de contraejemplos (estudiantes) necesarios para mostrar que todas las implicaciones de  $\bar{D}$  son falsas.

A continuación un ejemplo de esta aplicación de núcleos: consideremos la siguiente digráfica  $D$  y su correspondiente digráfica complementaria.

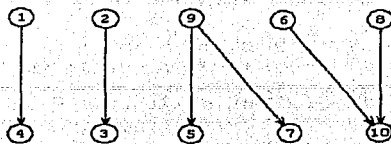


En este ejemplo deseamos verificar que es suficiente probar la falsedad de las implicaciones representadas por las flechas 3, 4, 5, 7 y 10 de  $\bar{D}$ , pues de ellas se sigue la falsedad de las otras posibles implicaciones (v.g.  $P_2 \not\Rightarrow P_1$  pues de lo contrario  $P_2 \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_3$ , contradiciendo la afirmación de que la flecha  $(P_2, P_3)$  es falsa).

En este caso, la digráfica  $H$  cuyos vértices representan las diez flechas de  $\bar{D}$ , y donde  $(i,j)\in F(H)$  sii [la implicación  $i$  es verdadera implica la implicación  $j$  es verdadera], es la siguiente:

<sup>4</sup>Ya que si consideramos una implicación  $i$  fuera del núcleo  $N$ , hay una flecha hacia un elemento de  $N$ , digamos  $j$ ; como  $(i,j)\in F(H)$  entonces la veracidad de  $i$  implica la veracidad de  $j$ , i.e. la falsedad de  $j$  implica la falsedad de  $i$ , por lo tanto no es necesario probar la falsedad de  $i$

### Digráfica H asociada a D



Observamos que en H, el conjunto  $N = \{3, 4, 5, 7, 10\}$  es un núcleo. Ahora, por ser N un conjunto absorbente, se tiene que si las implicaciones 3, 4, 5, 7 y 10 son falsas, entonces todas las 10 implicaciones son falsas (\*); y dado que N es un conjunto independiente, entonces N es un conjunto minimal con respecto a la propiedad anterior (\*). Al ser N el único núcleo de H, se sigue que cinco contraejemplos son necesarios para probar que todas las implicaciones de  $\overline{D}$  son falsas.

## 3.5 Antibases de una Teoría

Una Teoría  $T = (X, C)$  se define por:

1. Un conjunto  $X$  de proposiciones  $x_1, x_2, x_3, \dots$
2. Una relación de cerradura  $C$  en  $X$ : para  $S \subseteq X$  se denota con  $C(S)$  al conjunto de todas las proposiciones en  $X$  que pueden ser probadas a partir de las proposiciones en  $S$ . Para  $s \in X$  denotaremos como  $C(s)$  a  $C(\{s\})$ .

Se dice que una Teoría  $T = (X, C)$  es *unitaria* si se cumple que  $\forall x \in C(S) \exists s \in S [x \in C(s)]$  es decir, si para cada elemento  $x$  de  $C(S)$  existe un elemento  $s$  en  $S$  tal que  $x$  pertenezca a la cerradura  $C$  de  $s$ . De otro modo  $T$  es *plural*. Si  $T$  es unitaria entonces puede ser representada por una digráfica transitiva  $D$  tal que  $V(D) = X$  y donde  $(x, y) \in F(D)$  sii  $x \in C(y)$ .

Se define como una *base de axiomas* para  $T$  a un conjunto  $B \subseteq X$  tal que  $C(B) = X$  y el cual es mínima respecto a la propiedad mencionada.

Una *antibase* para  $T$  es un conjunto  $A \subseteq X$  que cumple lo siguiente:  $\forall x \in X [C(x) \cap A \neq \emptyset]$  y el cual es mínima con respecto a esta propiedad. Ésto se interpreta como sigue: si todas las proposiciones en  $A$  son falsas entonces todas las proposiciones en  $X$  también lo son <sup>5</sup>, y  $A$  es minimal con respecto a esta propiedad.

La *inversa*  $T' = (X, C')$  de una Teoría  $T = (X, C)$  se define con lo siguiente:  $\forall x \in X [x \in C'(S)$  sii  $C(x) \cap S \neq \emptyset]$ .  $T'$  es una Teoría pues  $X$  es el mismo conjunto de proposiciones que en  $T$ , y  $C'$

<sup>5</sup>Tómese una implicación cualquiera  $x$  en  $X$ , si  $x$  es falsa el enunciado es cierto, si  $x$  es verdadera entonces todas las implicaciones de  $C(x)$  lo son, contradiciendo nuestra afirmación inicial.

es una relación de cerradura en  $X$ .

El problema que se plantea es el siguiente: dado  $A \subseteq X$ , determinar si  $A$  es antibase de la Teoría  $T=(X,C)$ . La teoría de núcleos proporciona herramientas suficientes para resolverlo:

- Determinar si  $A$  es base para  $T'=(X,C')$ :
  - + Sea  $H$  la digráfica que representa a  $T'$ . Se prueba (en el Lema 3.1) que  $T'$  es unitaria, por lo que siempre puede ser representada por una digráfica transitiva.
  - + Basta verificar que  $A$  es núcleo de  $H$  (por el Lema 3.3), para ello es suficiente observar que  $A$  intersecta a cada una de las componentes fuertemente conexas terminales de  $H$  exactamente en un punto (pues  $H$  es transitiva y por el Teorema 3.1)
- Si el punto anterior se cumple entonces  $A$  es antibase de  $T$  (tal implicación se demuestra lema 3.2)

A continuación presentamos el fundamento teórico del argumento anterior:

### Lema 3.1

La inversa  $T'=(X,C')$  de una Teoría  $T$  es unitaria.

### Demostración

Sea  $S \subseteq X$  y  $x \in C'(S)$ . Por demostrar que  $\exists s \in S$  tal que  $x \in C'(s)$ .

Por definición de  $C'$  tenemos que  $C(x) \cap S \neq \emptyset$ . Sea  $s \in C(x) \cap S$ , por lo tanto  $s \in C(x) \cap \{s\}$ .

Entonces  $C(x) \cap \{s\} \neq \emptyset$ , i.e.  $x \in C'(s)$  por definición de  $C'(s)$ ; i.e.  $T'$  es unitaria.

†

El Lema anterior nos permite observar que dado que la inversa de una Teoría es unitaria, entonces podrá ser representada por una digráfica transitiva.

### Lema 3.2

$A \subseteq X$  es una antibase para  $T=(X,C)$  sii  $A$  es una base para  $T'=(X,C')$  la inversa de  $T$

### Demostración ( $\Rightarrow$ ) .

Supongamos que  $A \subseteq X$  es una antibase para  $T$ .

Entonces por definición de antibase se tiene lo siguiente:  $\forall x \in X [C(x) \cap A \neq \emptyset]$ , esto es, para todo elemento de  $X$  la intersección de  $A$  con la cerradura de  $x$  es no vacía. Y además,  $A$  es un conjunto mínimo con respecto a esa propiedad.

Por lo tanto  $\forall x \in X [x \in C'(A)]$  con  $C'$  la relación de cerradura de  $T$ . Ésto se debe a la definición de una teoría inversa; y  $A$  continúa siendo mínima con respecto a tal propiedad.

Por lo tanto  $X = C'(A)$  y  $A$  es minimal con respecto a esta propiedad.

Entonces  $A$  es una base de axiomas para  $T'$ .

†

### **Demostración ( $\Leftarrow$ ).**

Supongamos que  $A$  es una base de axiomas para  $T'$ .

Entonces  $C'(A)=X$  y  $A$  es mínima con respecto a esta propiedad, por definición de base.

i.e.  $\forall x \in X [x \in C'(A)]$ . Por lo tanto  $\forall x \in X [C(x) \cap A \neq \emptyset]$ , es decir, para todo elemento  $x$  de  $X$  se tiene que  $x$  es elemento de la cerradura  $C'$  de  $A$ , debido a la definición de una teoría inversa.

Por lo tanto por definición de antibase,  $A$  es una antibase para  $T$ .

†

### **Lema 3.3**

$A \subseteq X$  es una base para  $T'=(X, C')$  sii  $A$  es un núcleo para  $H$  la digráfica transitiva que representa a  $T'$ .

### **Demostración ( $\Leftarrow$ ).**

Sea  $H$  la digráfica que representa a  $T'=(X, C')$ , de modo que  $V(H)=X$  y  $[(x, y) \in F(H) \text{ sii } x \in C'(y)]$ .

Sea  $N$  un núcleo de  $H$ . Por demostrar que  $N$  es base para  $T'=(X, C')$ .

Como  $N$  es absorbente,  $\forall x \in (X-N) \exists y \in N [(x, y) \in F(H)]$ , lo que significa que para todo elemento  $x$  que no forma parte del núcleo siempre existe un vértice  $y$  de  $N$  tal que la flecha  $(x, y)$  está en  $H$ .

i.e.  $\forall x \in (X-N) \exists y \in N [x \in C'(y)]$ , debido a cómo fueron construidas las flechas de  $H$ ; i.e.  $X=C'(N)$ .

Por otra parte,  $N$  es mínimo con respecto a la propiedad anterior, de lo contrario:

$\exists N' [N' \subset N \text{ y } N' \neq N \text{ y } X=C'(N')]$

Entonces sea  $x' \in (N-N') \subset X$ .

Como  $N$  es independiente entonces para todo punto  $y$  del núcleo  $N$  no hay flechas de la forma  $(x', y)$ , por lo tanto, debido a cómo fueron construidas las flechas en  $H$  se tiene que  $\forall y \in N' [x' \notin C'(y)]$ , por lo tanto  $x' \notin C'(N')$

Por lo tanto  $X \neq C'(N')$  contradiciendo que  $N'$  es base.

Entonces  $N$  es mínimo con respecto a la propiedad mencionada anteriormente.

i.e.  $N$  es base de axiomas de  $T'$ .

†

### **Demostración ( $\Rightarrow$ ).**

Sea  $H$  la digráfica que representa a  $T'=(X, C')$ , de modo que  $V(H)=X$ ,  $[(x, y) \in F(H) \text{ sii } x \in C'(y)]$  y  $x \neq y$ .

Sea  $N$  una base de axiomas para  $T'=(X, C')$ . Por demostrar que  $N$  es núcleo de  $H$ .

Se sabe que  $X=C'(N)$  y  $N$  es mínimo con respecto a esta propiedad por definición de base.

Por el lema 1.1.1  $T'$  es unitaria, i.e.  $\forall x \in C'(N) \exists y \in N [x \in C'(y)]$  para cualquier elemento  $x$  de  $C'(N)$  existe un elemento  $y$  de  $N$  tal que  $x$  pertenece a  $C'(y)$ , debido a la definición de una Teoría unitaria.

Entonces  $\forall x \in X \exists y \in N [x \in C'(y)]$  pues  $N$  es base (por lo que  $X=C'(N)$ )

Se sigue que  $\forall x \in X-N \exists y \in N [(x, y) \in F(H)]$  siendo  $N$  mínimo con respecto a esta propiedad. Esta implicación se debe a cómo fue construida  $H$  y a que  $X-N \subseteq X$ , y puede interpretarse como sigue: para cualquier elemento  $x$  fuera de  $N$  existe siempre un elemento  $y$  de  $N$  tal que hay una flecha de  $x$  a  $y$  en  $H$ .

Por lo tanto  $N$  es absorbente.

Probaremos a continuación que  $N$  es independiente:

Supongamos que  $N$  no lo es, i.e.  $\exists x, x' \in N [(x, x') \in F(H)]$ , es decir, existen dos puntos en  $N$  tales que hay una flecha entre ellos.

Si  $y \in C'(x)$  y  $y \neq x$ <sup>6</sup> entonces  $(y, x) \in F(H)$  por construcción de  $H$ .

Entonces  $\{(y, x) \in F(H) \text{ y } (x, x') \in F(H)\}$ , así que  $(y, x') \in F(H)$  por la transitividad de  $H$ .

Además,  $y \in C'(x')$  por cómo fue construida  $H$ .

Se sigue que  $X = C'(N - \{x\})$ , contradiciendo la hipótesis de que  $N$  es mínimo respecto a esa propiedad.

Por lo tanto  $N$  es independiente.

Entonces  $N$  es un conjunto absorbente e independiente.

i.e.  $N$  es núcleo de  $H$ .

†

### 3.6 Digráfica de implicaciones

Sea  $D$  una digráfica transitiva tal que sus vértices representan proposiciones y cuyas flechas representan implicaciones. Sean  $x_1, x_2, \dots, x_m$  las flechas de  $\bar{D}$  la digráfica complementaria de  $D$ . Sea  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ . Para  $S \subset X$  sea  $C(S)$  las implicaciones que se pueden derivar de las implicaciones en  $S$ , esto es, todas las flechas de  $X$  que están en la cerradura transitiva<sup>7</sup> de  $D+S$ , o bien, a partir de la falsedad de  $S$  se deduce la falsedad de las implicaciones generadas en su cerradura transitiva.

Se dice que una Teoría es la pareja  $T=(X, C)$ , y ha sido definida por medio de una digráfica transitiva.

#### Teorema 3.2

En la Teoría  $T=(X, C)$  (definida anteriormente por una digráfica transitiva  $D$ ), se tiene que:

1. Todas las antibases tienen la misma cardinalidad.
2. Tal cardinalidad es el número de absorción de la digráfica  $H$  definida como sigue:  $V(H)=X$  y  $\{(x, y) \in F(H) \text{ sii } y \text{ es una flecha de la cerradura transitiva de } D+x\}$ .
3. Hay una correspondencia uno a uno entre las antibases de  $T$  y los núcleos de  $H$ .

<sup>6</sup>Nótese que para los elementos  $x$  de  $N$  puede suceder que el elemento  $y$  correspondiente tal que  $y \in C'(x)$ , sea  $x$  mismo; en ese caso la flecha  $(x, y)$  no existiría por construcción de  $H$ . Además, cuando  $y=x$   $x$  está implicado por  $x'$  pues  $(x, x') \in F(H)$ .

<sup>7</sup>La cerradura transitiva de una digráfica  $D$  se construye agregando a  $D$  las flechas necesarias para convertirla en una digráfica transitiva.

## Demostración

Comencemos por demostrar que  $H$  es transitiva:

$(x,y) \in F(H)$  sii  $y \in C(x)$  por definición de  $F(H)$ .

sii  $C(x) \cap \{y\} \neq \emptyset$

sii  $x \in C'(y)$  por definición de  $C'$ .

i.e.  $H$  representa a  $T'$  la inversa de  $T$ , que es una Teoría unitaria (por Lema 3.1)

Por lo tanto  $H$  es transitiva.

Sea  $A \subseteq V(H)$  [ $A$  es núcleo de  $H$ ] (siempre existe tal conjunto pues recordemos que  $H$  es transitiva)

i.e.  $A$  es base para  $T'$  por el Lema 3.3

i.e.  $A$  es antibase para  $T$  por el Lema 3.2

Ahora bien, dado que  $A$  es núcleo de  $H$  entonces cualquier otro posible núcleo de tal digráfica tiene la misma cardinalidad de  $H$  (Teorema 3.1); de ahí que todas las antibases de  $T$  también tengan la misma cardinalidad.

†

Podríamos extender aún más el presente capítulo, dada la diversidad de aplicaciones del concepto de núcleo, sin embargo considero que es pertinente no hacerlo debido a que no es el objetivo principal de la tesis. Continuemos pues con el que considero el climax del presente escrito.





## Capítulo 4

# Trayectorias y ciclos dirigidos monocromáticos en torneos $m$ -coloreados

En este cuarto capítulo se definen *torneo*, *digráficas  $m$ -coloreadas* y *trayectorias dirigidas monocromáticas* para entonces introducir el concepto de *núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas*. El problema principal es determinar bajo qué condiciones un torneo  $m$ -coloreado tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas; para resolverlo se hace uso de una nueva herramienta, la *cerradura de una digráfica  $C(D)$* , estudiando primero varios resultados generales (v.g. *una digráfica completa es núcleo perfecta si todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica*) y otros relativos a la nueva definición de cerradura (v.g.  *$N$  es núcleo de  $C(D)$  si  $N$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D$* ). Entonces puede probarse que algunas condiciones suficientes para que la cerradura de un torneo  $m$ -coloreado  $T$  sea núcleo perfecta son: a) cada ciclo dirigido contenido en  $T$  y de longitud a lo más cuatro es casimonocromático, b) que cada ciclo dirigido contenido en  $T$  y de longitud tres es monocromático (o  $C(T)$ -monocromático), y c) si existe  $k$  ( $3 \leq k \leq p$ ) tal que para todo torneo  $m$ -coloreado  $T' \subseteq T$ ,  $T'$  no contiene ciclos dirigidos de longitud  $k$ , se tiene que  $C(T')$  es una digráfica núcleo perfecta; o tal que cada ciclo dirigido de longitud  $k$  contenido en  $T$  es  $C(T)$ -monocromático.

Comencemos definiendo conceptos que nos serán de utilidad:

Como se definió en el capítulo primero, un *torneo* es una digráfica completa asimétrica.

$D$  es una *digráfica m-coloreada* si las flechas de  $D$  son coloreadas con  $m$  colores.

Denotamos con  $T_3$  al torneo transitivo de orden 3 cuyas flechas son coloreadas con tres distintos colores; análogamente, denotamos con  $C_3$  al 3-ciclo tal que sus flechas son coloreadas con tres distintos colores.

Si  $D$  es  $m$ -coloreada, entonces un ciclo o trayectoria dirigida es llamado *monocromático* si cada una de sus flechas son coloreadas con el mismo color. Un ciclo dirigido es llamado *casi-monocromático* si con a lo más una excepción todas sus flechas son coloreadas de igual manera. Un conjunto  $I \subseteq V(D)$  es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas si para todo  $u, v \in I$ , no existe una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ . Se dice que  $H \subseteq V(D)$  es absorbente en  $D$  por trayectorias dirigidas monocromáticas, si para todo  $z \in V(D) - H$  existe una  $zH$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  (una trayectoria dirigida monocromática de  $z$  a algún elemento de  $H$ ). Ahora bien, decimos que  $N \subseteq V(D)$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D$  si es independiente y absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$ .

Sands, Sauer y Woodrow [2] probaron que todo torneo 2-coloreado  $T$  tiene un vértice  $v$  tal que para cualquier otro vértice  $x$  de  $T$  existe una trayectoria monocromática de  $x$  a  $v$  (es decir, que  $T$  contiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas)<sup>1</sup>; y a continuación propusieron el siguiente problema: sea  $T$  un torneo 3-coloreado que no contiene  $C_3$ , la pregunta es si debe  $T$  contener un vértice  $v$  tal que para cualquier otro vértice de  $T$  existe una trayectoria monocromática de  $x$  a  $v$ .

Fue entonces que Minggang [3] respondió a la pregunta planteada, bajo ciertas condiciones: si en el problema  $T$  no contiene  $T_3$  ni  $C_3$  entonces la respuesta es afirmativa, como se demuestra a continuación:

#### Teorema 4.1

Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado que no contiene  $T_3$  ni  $C_3$ . Entonces existe un vértice  $v$  de  $T$  tal que  $\{v\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas (i.e. para cualquier otro vértice  $x$  de  $T$  existe una trayectoria monocromática de  $x$  a  $v$ ).

#### Demostración

Por inducción sobre  $n$ , el orden de  $T$ .

Base: Si  $D$  consiste de un solo vértice ( $n=1$ ), entonces el Teorema se cumple por vacuidad, pues no existe algún vértice  $x$  tal que el resultado sea falso. Para el caso  $n=2$ , es decir, si  $D$  consiste de dos vértices  $x$  &  $y$ , entonces  $(x,y) \in F(D)$  (o  $(y,x) \in F(D)$ , pues  $D$  es un torneo); así que para cualquier otro vértice distinto de  $x$  (respectivamente de  $y$ ), a saber  $y$  ( $x$ ), existe una trayectoria dirigida monocromática de  $x$  a  $y$  (de  $y$  a  $x$ ) que es la única flecha de la digráfica; de ahí que el Teorema se cumpla.

Hipótesis inductiva: supongamos que el resultado se cumple para todo torneo  $m$ -coloreable de orden menor que  $n$ , con  $n > 2$ .

---

<sup>1</sup>Notemos que en un Torneo un núcleo consiste de un solo punto, de lo contrario no sería un conjunto independiente.

Sea  $T$  un torneo de orden  $n$ , entonces por hipótesis inductiva se tiene que  $\forall v \in V(T) \exists f(v) \in V(T)$  [  $\forall x \in V(T) - \{v\} \exists xf(v)$ -trayectoria dirigida monocromática], es decir, para cada  $v \in V(T)$  existe un vértice de  $T$ , llámese  $f(v)$ , tal que para cada  $x \in V(T) - \{v\}$  existe una trayectoria dirigida monocromática de  $x$  a  $f(v)$ .

Ahora, si existe  $f(u)=f(v)$  con  $u \neq v$ , entonces tenemos que  $\forall x \in (V(T) - \{u\})$   $x$  es absorbido por  $f(u)$  y  $\forall x \in (V(T) - \{v\})$   $x$  es absorbido por  $f(v)$ , por lo tanto  $f(u)$  y  $f(v)$  absorben a todo vértice de  $T$  (incluyendo al vértice  $u$  y al vértice  $v$ ). Pero dado que  $f(u)=f(v)$ , entonces  $f(u)$  absorbe a todos los vértices de  $T$ . Por lo tanto  $\{f(u)\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas y el Teorema se cumple.

O bien, si  $\exists v \in V(T) \exists vf(v)$ -trayectoria dirigida monocromática], entonces como además  $f(v)$  ya absorbía a todos los vértices distintos de  $v$ , se tiene que  $f(v)$  absorbe a todos los vértices de  $T$ , por lo tanto  $\{f(v)\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, de ahí que el Teorema se cumpla.

Con  $f$  como una biyección, supongamos entonces que no existe una  $vf(v)$ -trayectoria dirigida monocromática (de otra manera estamos en los casos analizados en los dos párrafos anteriores en donde observamos ya que el Teorema se cumple):

Podemos renombrar a los vértices de  $T$  de la siguiente forma:  $f(v_i)=v_{i+1}$ , los cuales están particionados en ciclos<sup>2</sup> de la forma :  $(v_1, v_2, \dots, v_{n_1}), (v_{n_1+1}, \dots, v_{n_2}), \dots$  en donde  $f(v_1) = v_2, \dots, f(v_{n_1}) = v_1, f(v_{n_1+1}) = v_{n_1+2}, \dots, f(v_{n_2}) = v_{n_1+1}$ .

Veamos que solo hay un ciclo de esta forma: si hubiera más de un ciclo entonces los vértices de cualquiera de ellos no son todos los vértices del torneo (que es de orden  $n$ ), i.e. el orden de tales ciclos es estrictamente menor que  $n$  (de hecho, el orden de tales ciclos es a lo más  $n-3$  pues el ciclo más pequeño que puede existir es de orden 3, debido a que  $T$  es un torneo). De manera que por hipótesis inductiva aplicada al torneo inducido por uno de esos ciclos, digamos  $L=\{v_1, v_2, \dots, v_{n_1}\}$ , existe  $v \in L$  tal que  $\{v\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas; por lo tanto  $v_i=f(v_i)$  pues  $v_i$  pertenece al ciclo, contradiciendo nuestra suposición de que  $f(v_i)$  no absorbía a  $v_i$ .

Entonces existe un solo ciclo, sea  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  tal ciclo; ahora bien, dado que no hay una  $v_i v_{i+1}$  trayectoria dirigida monocromática, y al ser  $T$  un torneo, entonces existen las flechas  $(v_2, v_1), (v_3, v_2), \dots, (v_n, v_{n-1}), (v_1, v_n)$ , y sean sus colores  $a_1, a_2, \dots, a_n$  respectivamente.

- Observemos que si  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1}$ , entonces  $(v_n, \dots, v_2, v_1)$  es una  $v_n v_1$ -trayectoria dirigida monocromática con color  $a_1$ , contradiciendo en ambos casos nuestra suposición de que tal trayectoria no existe. De manera que  $a_1, a_2, \dots, a_n$  no pueden ser iguales.

- Entonces deben existir  $a_{s-1} \neq a_s$ .

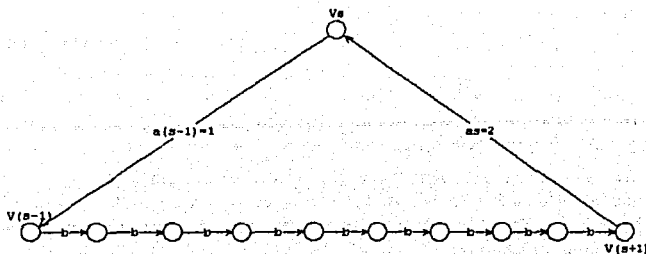
- Sin pérdida de generalidad sea  $a_{s-1}=1$  y  $a_s=2$ . Sabemos que existe una trayectoria dirigida monocromática de  $v_{s-1}$  a  $v_{s+1}$  con color  $b$ , cuyos vértices forman las flechas  $(v_{s+1}, v_s)$  de color  $a_s=2$ , y  $(v_s, v_{s-1})$  de color  $a_{s-1}=1$ , como se muestra en la figura 1.

- Observemos que  $b \neq 1$  y  $b \neq 2$ : si  $b=1$  entonces existe una  $v_s v_{s+1}$ -trayectoria dirigida monocromática de color 1, contradiciéndose el supuesto de que tal trayectoria no existe; y si  $b=2$  entonces existe una  $v_{s-1} v_s$ -trayectoria dirigida monocromática de color 2, contradiciéndose por igual, el supuesto de que tal trayectoria no existe.

- De ahí que debemos suponer que  $b=3$ .

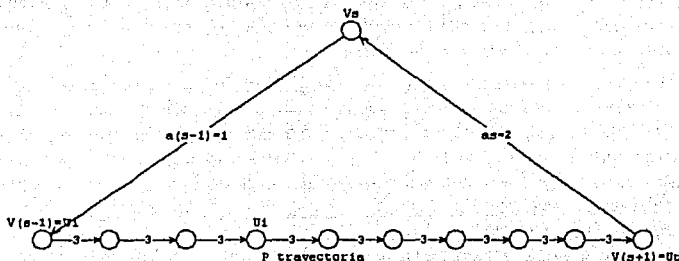
<sup>2</sup>Debe recalarse que tales ciclos no son los que hemos definido como ciclos dirigidos o no dirigidos en digráficas, sino arreglos de vértices que surgen en base a la definición de  $f$  y haciendo uso de trayectorias monocromáticas

Figura 1



Ahora, sea  $(u_1, u_2, \dots, u_t)$  la trayectoria dirigida monocromática de menor longitud, llámese  $P$ , que va de  $v_{s-1}$  a  $v_{s+1}$ , como puede observarse en la figura 2, en donde  $u_1 = v_{s-1}$  y  $u_t = v_{s+1}$ .

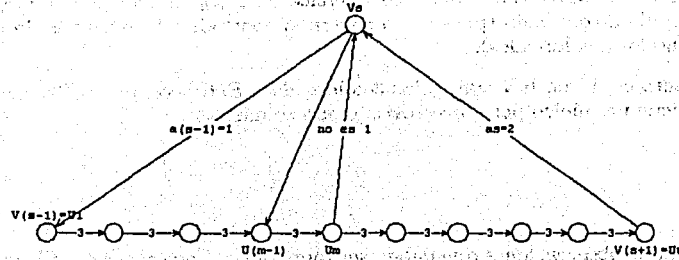
Figura 2



- Como  $T$  es torneo, para toda  $i=1, 2, \dots, t$  existe la flecha entre  $v_s$  y  $u_i$  (sin importar en que dirección). Si existiera una flecha  $(v_s, u_k)$  de color 3 (o análogamente, si existiera la flecha  $(u_m, v_s)$  de color 3) entonces  $(u_1, P, u_k) \cup (u_k, v_s)$  es una  $v_{s-1}v_s$  trayectoria-dirigida monocromática (análogamente  $(v_s, u_m) \cup (u_m, P, u_t) \cup$  es una  $v_s v_{s+1}$  trayectoria-dirigida monocromática), contradiciendo nuestra suposición de que tal trayectoria no existía. Por lo tanto las flechas entre  $v_s$  y  $u_i$  (con  $i=1, 2, \dots, t$ ) no son de color 3.

- Observemos que existe  $u_i$  tal que la flecha entre  $v_s$  y  $u_i$  y la flecha entre  $v_s$  y  $u_{i+1}$  tienen colores distintos: existe una flecha entre  $v_s$  y  $u_j$  de color distinto de 1, con  $j \in \{2, 3, \dots, t\}$ , ya que al menos la flecha  $(v_s, u_t)$  es de color 2; consideremos entonces  $m = \min \{j \mid \text{la flecha entre } v_s \text{ y } u_j \text{ tiene color distinto de } 1\}$ , y como  $m$  es mayor que 1, entonces la flecha entre  $v_s$  y  $u_m$  tiene distinto color a la flecha entre  $v_s$  y  $u_{m-1}$ . La figura 3 ilustra las observaciones previas:

Figura 3



- Entonces  $v_s, u_m, u_{m-1}$  es un triángulo ( $T_3$  o  $C_3$ ) con tres colores distintos, contradiciendo nuestra hipótesis inicial de que en  $T$  no había  $T_3$  ni  $C_3$ .

Por lo tanto el Teorema se cumple.

†

Del resultado anterior es posible obtener algunos corolarios:

#### Corolario 4.1

Sea  $T$  un torneo 2-coloreado. Entonces existe un vértice  $v$  en  $T$  tal que para cualquier otro vértice  $x$  de  $T$  existe una  $xv$ -trayectoria dirigida monocromática.

#### Demostración <sup>3</sup>

Como  $T$  es un torneo 2-coloreado entonces  $T$  no contiene ni  $C_3$  ni  $T_3$ , de ahí que las hipótesis del Teorema 4.1 se cumplan.

Entonces  $T$  contiene un núcleo por trayectorias monocromáticas por el Teorema 4.1.

†

<sup>3</sup>La demostración original de este Corolario, que no hace uso del Teorema 4.1, puede encontrarse en la referencia [2]

## Corolario 4.2

Supongamos  $T = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $H_1, H_2, \dots, H_n$  torneos  $m$ -coloreados tales que no contienen triángulos 3-coloreados. Sea  $T'$  un torneo que se construye de reemplazar cada vértice  $v_i$  de  $T$  por  $H_i$ , y sean todas las aristas <sup>4</sup> entre  $H_i$  y  $H_j$  del mismo color que las aristas entre  $v_i$  y  $v_j$  aunque con direcciones arbitrarias. Entonces  $T'$  contiene un núcleo por trayectorias monocromáticas (i.e. existe  $v \in V(T')$  tal que para cualquier otro vértice  $x$  de  $T'$  existe una  $xv$ -trayectoria dirigida monocromática).

### Demostración

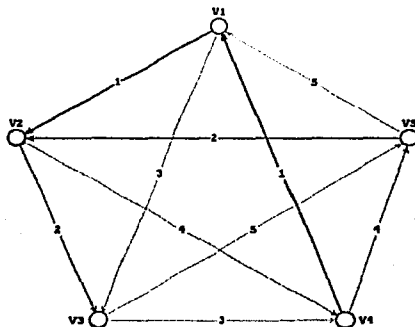
Observemos que para cualesquiera tres vértices  $v_i, v_j, v_k$ , el triángulo  $v_i, v_j, v_k$  no puede ser un triángulo 3-coloreado (pues de lo contrario contradice la hipótesis de que  $T$  no contiene triángulos 3-coloreados).

Por lo tanto en  $T'$  no hay triángulos 3-coloreados. Entonces, por el Teorema anterior 4.1,  $T'$  contiene un núcleo por trayectorias monocromáticas

†

Existen varias observaciones que deben ser mencionadas con respecto a los resultados previos:

1. Si en el Teorema 4.1 se pide solamente que  $T$  no contenga  $C_3$ , entonces la afirmación del Teorema es falsa, como prueba proporcionamos el siguiente contraejemplo, la digráfica  $G_5$  que se puede ver a continuación:



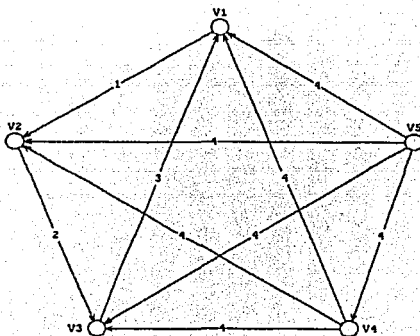
<sup>4</sup>Nos referimos a las flechas de una digráfica como aristas si la dirección de la flecha es arbitraria o no es de interés para nuestro análisis.

$G_5$  es 5-coloreada, de orden 5 y no contiene algún 3-ciclo 3-coloreado, sin embargo  $G_5$  no contiene algún núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas (i.e. no existe  $v \in V(G_5)$  tal que para cualquier otro vértice  $x$  de  $G_5$  existe una  $xv$ -trayectoria dirigida monocromática) dado que en  $G_5$  no existen  $v_{i+1}v_i$ -trayectorias dirigidas monocromáticas (con  $i+1$  módulo 5). Podemos encontrar más contraejemplos con  $m=5$  agregando vértices a  $G_5$  y en cada paso conectando cada nuevo vértice a todos los vértices anteriores por medio de una flecha coloreada con 1.

2. Si en el Teorema 4.1 se pide solamente que  $T$  no contenga  $T_3$ , entonces el resultado es falso, como prueba el siguiente contraejemplo: sea  $D_n$  un torneo 4-coloreado con vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  tal que las flechas  $a=(v_1, v_2)$ ,  $b=(v_2, v_3)$ ,  $c=(v_3, v_1)$  tienen color 1, 2 y 3 respectivamente, mientras que todas las flechas restantes son de la forma  $(v_i, v_j)$  si  $i > j$ , y están coloreadas con el color 4. Este contraejemplo puede observarse en la siguiente figura para  $n=5$ .

$D_n$  es un torneo 4-coloreado que no contiene  $T_3$ , pues si existiera,  $T_3$  debería cumplir lo siguiente: 1) tener al menos dos de las flechas  $a, b$  o  $c$ , y la tercer flecha debería compartir un vértice con cada una de las dos flechas anteriores, y además, 2) esa tercer flecha de  $T_3$  deberá tener una orientación tal que se se forme el torneo transitivo. Sin embargo ninguna flecha de color 4 cumple la característica 1), y las flechas del ciclo  $(v_1, v_2, v_3)$  no cumplen 2). Pero  $D_n$  no contiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas pues  $v_1$  no absorbe a  $v_2$  por trayectorias dirigidas monocromáticas,  $v_2$  no absorbe a  $v_3$  por trayectorias dirigidas monocromáticas,  $v_3$  no absorbe a  $v_1$  por trayectorias dirigidas monocromáticas, y  $v_i$  no absorbe por trayectorias dirigidas monocromáticas a  $v_j$  si  $i$  es mayor que  $j$  ya que no hay trayectorias dirigidas en esos casos.

Digráfica  $D_5$



3. Minggang probó además que si  $m \geq 5$  las hipótesis del Teorema 4.1 (que la digráfica no contenga  $C_3$  ni  $T_3$ ) no pueden ser mejoradas.

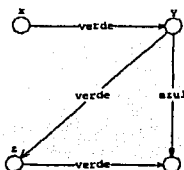
TESIS CON <sup>61</sup>  
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

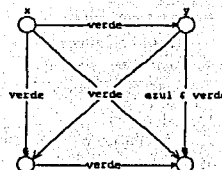
A continuación se introducirá un concepto que permitirá redefinir el de núcleo: la *cerradura de D*, denotada por  $C(D)$ , es la digráfica m-coloreada definida así:

$V(C(D))=V(D)$  y  $F(C(D))=F(D)\cup\{\cup_{i=1}^n \{uv \text{ de color } i \text{ tales que existe una uv-trayectoria dirigida monocromática de color } i \text{ contenida en } D\}\}$ . Ahora, ejemplificaremos este nuevo concepto:

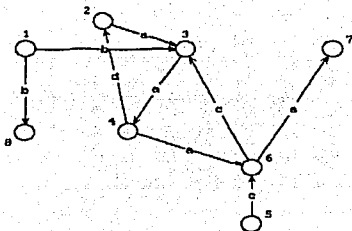
$D_1$



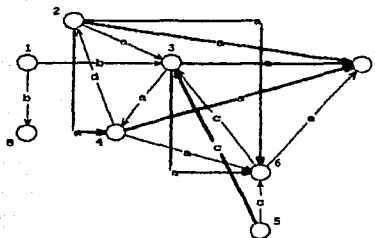
$C(D_1)$



$D_2$



$C(D_2)$



Continuemos con más definiciones relacionadas con la cerradura de una digráfica:

Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada y  $g_n=(0,1,\dots,n-1,0)$  un ciclo dirigido de  $D$ . Se dice que  $g_n$  es  $C(D)$ -*monocromático* si existe un conjunto  $\{f_i=(i,i+1)\in F(C(D))\}$  tal que  $i \in \{1,\dots,n\} \text{ mod } n\}$  de flechas coloreadas por igual.

Sea  $H$  una digráfica y  $U \subseteq V(H)$ , se denota con  $C(H)[U]$  la subdigráfica inducida por  $U$  en la cerradura de  $H$ .

Los siguientes son resultados relacionados con la cerradura de una digráfica, y algunos de ellos vinculan ese nuevo concepto con el de núcleo de una digráfica.



### Lema 4.1

Para toda digráfica  $D$ ,  $A=C(C(D))\cong C(D)=B$

#### Demostración

Por demostrar que existe una función  $f:V(A)\rightarrow V(B)$  inyectiva tal que  $(u,v)\in F(A)$  sii  $(fu, fv)\in F(B)$ .

Por definición de cerradura,  $V(A)=V(B)$ . Ahora bien, sea  $T=(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n)$  una trayectoria dirigida monocromática de color  $k$  en  $D$ . Entonces en  $C(D)$  serán trazadas las flechas de color  $k$ :

$$\begin{array}{c} (u_0, u_2), (u_0, u_3), (u_0, u_4), \dots, (u_0, u_n) \\ (u_1, u_3), (u_1, u_4), \dots, (u_1, u_n) \\ \dots \\ (u_{n-2}, u_n) \end{array}$$

Que son todas las posibles flechas entre los vértices de la trayectoria.

De manera que para todas las posibles nuevas  $u_i u_j$ -trayectorias dirigidas de color  $k$  en  $C(C(D))$ , ya existe la flecha  $(u_i, u_j)$  en  $C(D)$  del mismo color.

Y eso para toda trayectoria dirigida monocromática en la digráfica  $D$ .

Por lo tanto al construir  $C(C(D))$  ya no hacen falta flechas.

Entonces la función identidad es la función buscada.

†

### Teorema 4.2

$N$  es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D$  sii  $N$  es un núcleo en  $C(D)$ .

#### Demostración

- Observemos que:

$N$  es absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$  sii  $\forall v \in (V(D)-N) [\exists vN$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D]$  sii  $\forall v \in (V(D)-N) [\exists vN$ -flecha en  $C(D)]$  (por definición de  $C(D)$ ), sii  $N$  es absorbente en  $C(D)$ .

$N$  no es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$  sii  $\exists n, n' \in N [\exists nn'$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D]$  sii  $\exists n, n' \in N [\exists nn'$ -flecha en  $C(D)]$  (por definición de  $C(D)$ ), sii  $N$  no es independiente en  $C(D)$ .

- Por lo tanto  $N$  es absorbente e independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $C(D)$  sii  $N$  es absorbente e independiente en  $D$ .

†

### Corolario 4.3

Si dos a dos las flechas de  $D$  tienen distinto color, entonces  $N$  es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$  sii  $N$  es un núcleo en  $D$ .

#### Demostración

Se sigue de la hipótesis que  $D=C(D)$ , de manera que por el Teorema anterior, la afirmación es cierta.

†

Al inicio del presente capítulo se mencionaron ciertos resultados importantes, los reescribimos a continuación haciendo uso de la definición de cerradura de una digráfica:

- Todo torneo 2-coloreado  $T$  tiene un vértice  $v$  tal que para cualquier otro vértice  $x$  de  $T$  existe una trayectoria dirigida monocromática de  $x$  a  $v$ , es decir,  $\{v\}$  es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D$ ; lo que es equivalente a afirmar que  $\{v\}$  es núcleo de  $C(T)$ .
- De hecho, se prueba en general que para toda digráfica 2-coloreada  $D$ , se tiene que  $C(D)$  es una digráfica núcleo-perfecta.

El problema que surgió como consecuencia de tales resultados y que ya fue mencionado en párrafos anteriores, se replantea de la siguiente manera: sea  $T$  un torneo 3-coloreado tal que todo ciclo dirigido de longitud 3 es casimonocromático (por lo que  $T$  no contiene  $C_3$ ), la pregunta es si necesariamente  $C(T)$  debe tener un núcleo (lo que, por el Teorema 4.2 es equivalente a preguntarse si  $D$  tiene algún núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas).

Con respecto a tal pregunta sabemos ya por el Teorema 4.1 que si se pide además la condición de Shen Minggang, que consiste en que cualquier torneo transitivo de orden 3 sea casimonocromático, entonces la respuesta a la pregunta planteada es afirmativa.

Puede observarse entonces cuán útil es determinar bajo qué condiciones la cerradura de una digráfica tiene núcleo, a continuación se presentan algunas de ellas, como lo es pedir que cualquier ciclo dirigido de longitud a lo más 4, sea un ciclo casimonocromático (Teorema 4.6); además se prueba que tal condición no implica la condición de Minggang, y viceversa.

A continuación recordamos al lector algunos resultados importantes que serán de utilidad, cuyas pruebas pueden estudiarse nuevamente en el capítulo 2:

### **Teorema 2.9**

Si  $D$  es una digráfica núcleo-imperfecta-crítica entonces: 1) no existe una partición  $\{V_1, V_2\}$  de  $V(D)$  tal que  $D[V_1, V_2] \subseteq \text{Sim}(D)$ , donde  $D[V_1, V_2] = \{uv \in E(D) \text{ tales que } u \in V_1 \text{ y } v \in V_2\}$ ; 2) es decir,  $\text{Asim}(D)$  es fuertemente conexa.

### **Corolario 2.2**

Si  $D$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica entonces  $\text{Asim}(D)$  tiene ciclos dirigidos.

### **Teorema 2.11**

Una digráfica completa  $D$  es núcleo-perfecta sii todo ciclo dirigido tiene al menos una flecha simétrica.

### **Teorema 4.5 [4]**

Sea  $T$  un torneo hamiltoniano con  $n$  vértices y  $\gamma$  un ciclo dirigido hamiltoniano de  $T$ . Para cada  $k$  ( $3 \leq k \leq n-1$ ) existe un ciclo dirigido de longitud  $k$ , digamos  $\gamma_k$ , contenido en  $T$ , tal que  $|\Lambda(\gamma_k) \cap \Lambda(\gamma)| \geq 1$ .

Con tales herramientas podemos ya presentar la prueba del siguiente Teorema, en el que se presenta una nueva condición para que la cerradura de un torneo  $m$ -coloreado sea núcleo perfecta.

### Teorema 4.3

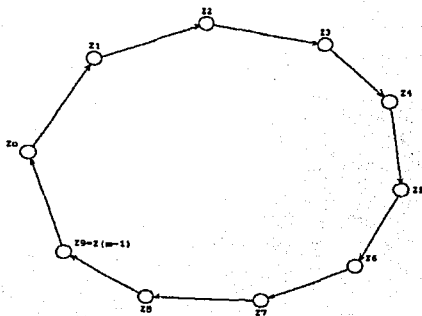
Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado. Si cada ciclo dirigido contenido en  $T$  y de longitud a lo más 4 es casimonocromático, entonces  $C(T)$  es una digráfica núcleo-perfecta.

### Demostración

Procediendo por contradicción, supongamos que  $C(T)$  no es una digráfica núcleo-perfecta.

Como  $C(T)$  es una digráfica completa (pues  $T$  ya lo era, y obtuvimos  $C(T)$  agregando aristas a  $T$ ), entonces por el Teorema 2.11, existe un ciclo dirigido tal que todas sus flechas son asimétricas, es decir, existe un ciclo dirigido contenido en  $\text{Asim}(C(T))$ .

Sea  $\gamma = (z_0, z_1, \dots, z_{m-1}, z_0)$  un ciclo dirigido de longitud mínima contenido en  $\text{Asim}(C(T))$ . V.g. para  $m=8$ :



A continuación serán probadas diversas afirmaciones que en conjunto conforman la prueba del teorema:

a)  $\gamma \subseteq T$ .

Supongamos lo contrario, i.e. existe  $(z_j, z_{j+1}) \in F(\gamma)$  tal que  $(z_j, z_{j+1}) \notin F(T)$ . Como  $T$  es torneo, entonces necesariamente  $(z_{j+1}, z_j) \in F(T)$ , por lo tanto  $(z_{j+1}, z_j) \in F(C(T))$  por construcción de  $C(T)$ . Tenemos por otra parte que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ , entonces  $(z_j, z_{j+1}) \in F(C(T))$ , de modo que  $(z_j, z_{j+1}) \in F(C(T))$  y  $(z_{j+1}, z_j) \in F(C(T))$ , contradiciendo que  $\gamma$  está contenido en la parte asimétrica de  $C(T)$  (es decir, que todas las flechas del ciclo son asimétricas). Por lo tanto  $\gamma \subseteq T$ .

b)  $\text{long}(\gamma) = m \geq 5$ .

Supongamos lo contrario, i.e.  $\text{long}(\gamma) = m \leq 4$ . Como  $\gamma \subseteq T$  entonces por hipótesis del Teorema,  $\gamma$  es casimonocromático. Sin pérdida de generalidad,  $\{(z_j, z_{j+1}) \in F(\gamma) \mid i=0, \dots, m-2\}$  es el conjunto de flechas igualmente coloreadas. De manera que  $(z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$  es una

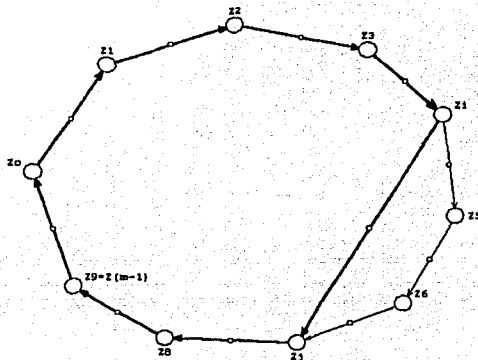
trayectoria dirigida monocromática. Por lo tanto por definición de  $C(T)$ , tenemos que  $(z_0, z_{m-1}) \in F(C(T))$ . Pero recordemos que  $(z_{m-1}, z_0) \in F(\gamma) \subseteq \text{Asim}(C(T))$ , de manera que  $(z_{m-1}, z_0) \in F(\text{Sim}(C(T)) \cap \gamma)$ , contradiciendo que  $\gamma$  está contenida en la parte asimétrica de  $C(T)$ , pues hemos encontrado una flecha simétrica de  $\gamma$ . Por lo tanto  $\text{long}(\gamma) = m \geq 5$ .

c)  $\gamma$  no es monocromático.

Supongamos lo contrario,  $\gamma$  es monocromático, entonces en particular  $(z_0, z_1, \dots, z_{m-1})$  es una trayectoria dirigida monocromática, por lo tanto por definición de  $C(T)$ , tenemos que  $(z_0, z_{m-1}) \in F(C(T))$ . Pero recordemos que  $(z_{m-1}, z_0) \in F(\gamma) \subseteq \text{Asim}(C(T))$ , de manera que  $(z_{m-1}, z_0) \in F(\text{Sim}(C(T)) \cap \gamma)$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ , pues hemos encontrado una flecha simétrica de  $\gamma$ .

d) Para todo  $z_j, z_i \in V(\gamma) \mid j \notin \{i-1, i+1\}$  (es decir, que no sean vértices consecutivos en  $\gamma$ ), entonces  $\{(z_i, z_j), (z_j, z_i)\} \subseteq F(C(T))$ .

Sean  $z_i, z_j \in V(\gamma) \mid j \notin \{i-1, i+1\}$ . Como  $\gamma \subseteq T$  (por a), entonces  $\{z_i, z_j\} \in V(T)$ . Por ser  $T$  torneo, entonces  $(z_i, z_j) \in F(T)$  o bien  $(z_j, z_i) \in F(T)$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $(z_i, z_j) \in F(T)$ :



Entonces  $\gamma' = (z_i, z_j, z_{j+1}, \dots, z_{i-1}, z_i)$  módulo  $m$ , es un ciclo dirigido <sup>5</sup>. Observemos que la longitud de  $\gamma'$  es menor que la longitud de  $\gamma$ , y como  $\gamma$  era el ciclo de menor longitud contenido en  $\text{Asim}(C(T))$ , entonces  $\gamma' \not\subseteq \text{Asim}(C(T))$ . Pero dado que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ , entonces todas las flechas de  $\gamma'$  que están también en  $\gamma$  son asimétricas, de manera que  $(z_j, z_i) \in F(\text{Sim}(C(T)))$  (pues  $(z_i, z_j)$  es la única flecha de  $\gamma'$  que no está en  $\gamma$ ). Entonces  $(z_i, z_j) \in F(C(T))$  y  $(z_j, z_i) \in F(C(T))$ , i.e.  $\{(z_i, z_j), (z_j, z_i)\} \subseteq F(C(T))$  (es decir, hay flechas simétricas en  $C(T)$  para cualesquiera dos vértices no consecutivos en  $\gamma$ ).

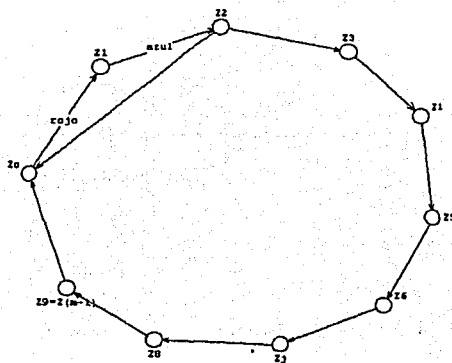
Ahora bien, como  $\gamma$  no es monocromático, existen dos flechas consecutivas con diferente color. Sin pérdida de generalidad digamos que  $(z_0, z_1)$  es roja, y que  $(z_1, z_2)$  es azul.

<sup>5</sup>La notación módulo  $m$  resulta muy cómoda dado que  $z_i$  y  $z_j$  fueron elegidos arbitrariamente

e)  $(z_2, z_0) \notin F(T)$ .

Considerando la afirmación anterior relativa a la coloración de ciertas flechas, supongamos lo contrario, i.e.  $(z_2, z_0) \in F(T)$ : Entonces  $\gamma_3 = (z_0, z_1, z_2, z_0)$  es un ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $T$ .  $\gamma_3$  cumple las hipótesis del Teorema, entonces es casimonocromático, por lo tanto  $(z_2, z_0)$  es roja o es azul. Si  $(z_2, z_0)$  es roja, entonces  $(z_2, z_0, z_1)$  es una trayectoria dirigida monocromática en  $T$ , y  $(z_2, z_1) \in F(C(T))$  por definición de  $C(T)$ , entonces  $(z_1, z_2) \in F(\text{Sim}(C(T)))$  y  $(z_1, z_2) \in F(\gamma)$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ ; por lo tanto  $(z_2, z_0)$  no es roja.

Si  $(z_2, z_0) \in F(T)$



Si  $(z_2, z_0)$  es azul entonces  $(z_1, z_2, z_0)$  es una trayectoria dirigida monocromática en  $T$ , por lo que  $(z_1, z_0) \in F(C(T))$  por definición de  $C(T)$ , por lo tanto  $(z_0, z_1) \in \text{Sim}(C(T))$  y  $(z_0, z_1) \in F(\gamma)$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ ; por lo tanto  $(z_2, z_0)$  no es azul. Por lo tanto  $(z_2, z_0) \notin F(T)$ .

Sin embargo, por la proposición d) tenemos que existe una flecha simétrica entre  $z_2$  y  $z_0$  en  $C(T)$ , i.e.  $(z_2, z_0) \in F(C(T))$ . Entonces existe una trayectoria dirigida monocromática de longitud al menos 2, de  $z_2$  a  $z_0$  contenida en  $T$ . Sea  $\alpha = (z_2 = 0, 1, 2, \dots, p = z_0)$  tal trayectoria dirigida (con  $p \geq 2$ ).

f)  $\alpha$  no es azul.

Supongamos lo contrario, i.e.  $\alpha$  es azul, entonces  $(z_1, z_2) \cup \alpha$  es una trayectoria dirigida monocromática en  $T$ , por lo que  $(z_1, z_0) \in F(C(T))$  por definición de  $C(T)$ , lo que contradice que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$  (pues  $(z_0, z_1) \in F(\gamma)$ , entonces  $(z_0, z_1) \in F(\gamma \cap \text{Sim}(C(T)))$ ). Por lo tanto  $\alpha$  no es azul.

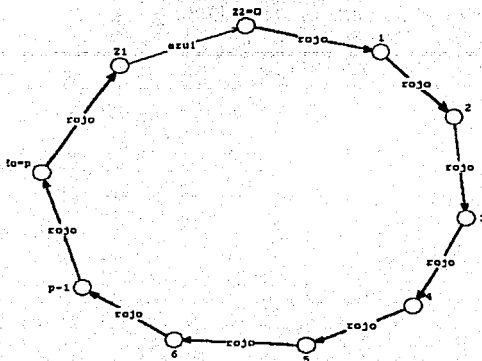
g)  $\alpha$  no es roja.

Supongamos lo contrario, i.e.  $\alpha$  es roja:

Entonces  $\alpha \cup (z_0, z_1)$  es una trayectoria dirigida monocromática en  $T$ , por lo que  $(z_2, z_1)$

$\in F(C(T))$  por definición de  $C(T)$ , lo que contradice que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$  (pues  $(z_1, z_2) \in F(\gamma)$ , por lo que  $(z_1, z_2) \in F(\gamma \cap \text{Sim}(C(T)))$ ). Por lo tanto  $\alpha$  no es roja.

*Si  $\alpha$  es roja:*



Sin pérdida de generalidad supongamos entonces que  $\alpha$  es negra.

h) Para cada  $i \geq 0 \mid 2i < p$ ,  $(z_1, 2i) \in F(T)$ .

Supongamos lo contrario, i.e.  $\exists i \geq 0 \mid 2i < p$  y  $(z_1, 2i) \notin F(T)$ .

Sea  $2i_0 = \min \{2i \mid (z_1, 2i) \notin F(T), \text{ con } 0 \leq 2i < p\}$ .

Veamos que  $2i_0$  es mayor que cero: como  $i_0 \geq 0$  entonces  $2i_0 \geq 0$ , pero la igualdad no puede darse pues  $z_2 = 0$  y  $(z_1, z_2) \in F(T)$  (por el inciso (a) tenemos que  $\gamma \subseteq T$ ), por lo tanto  $2i_0$  es mayor que cero. Se sigue que  $2i_0 - 2 \geq 0$ .

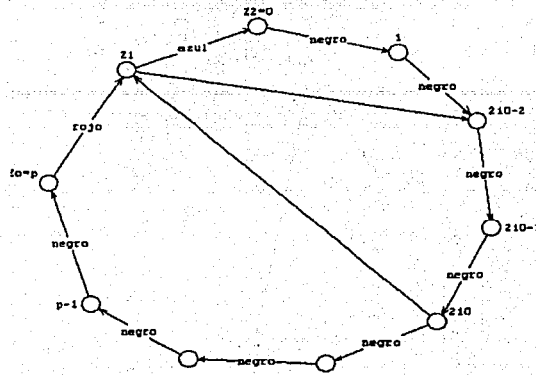
Ahora, por definición de  $2i_0$  tenemos que  $(z_1, 2i_0 - 2) \in F(T)$  (pues  $2i_0$  era el más pequeño para el que la pertenencia anterior no se daba y  $2i_0 - 2$  es menor que  $2i_0$ ), y  $(z_1, 2i_0) \notin F(T)$ , entonces  $(2i_0, z_1) \in F(T)$  por ser  $T$  torneo.

Sea  $\gamma_4 = (z_1, 2i_0 - 2, 2i_0 - 1, 2i_0, z_1)$ , recordemos que  $(2i_0 - 2, 2i_0 - 1) \in F(\alpha) \subseteq T$ , lo mismo que  $(2i_0 - 1, 2i_0)$ , y ya sabemos por las líneas previas, que  $(z_1, 2i_0 - 2)$  y  $(2i_0, z_1)$  están en  $F(T)$ , por lo tanto  $\gamma_4$  es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en  $T$  con dos flechas negras (a saber las que pertenecen también a  $\alpha$ , es decir,  $(2i_0 - 2, 2i_0 - 1)$  &  $(2i_0 - 1, 2i_0)$ ).

$\gamma_4$  cumple las hipótesis del Teorema, así que  $\gamma_4$  es un ciclo casimonocromático, entonces al menos una de las flechas  $(z_1, 2i_0 - 2)$  o  $(2i_0, z_1)$  es negra.

Si  $(z_1, 2i_0 - 2)$  es negra, entonces  $(z_1, 2i_0 - 2) \cup (2i_0 - 2, 2i_0 - 1, \dots, p = z_0)$  es una trayectoria dirigida monocromática, así que  $(z_1, z_0) \in F(C(T))$  por definición de  $C(T)$ , por lo tanto  $(z_0, z_1) \in F(\gamma \cap \text{Sim}(C(T)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ , por lo tanto  $(z_1, 2i_0 - 2)$  no es negra.

$$\gamma_4 = (z_1, 2i_0-2, 2i_0-1, 2i_0, z_1)$$



Si  $(2i_0, z_1)$  es negra, entonces  $(z_2=0, 1, 2, \dots, 2i_0) \cup (2i_0, z_1)$  es una trayectoria dirigida monocromática, de manera que  $(z_2, z_1) \in F(C(T))$  por definición de  $C(T)$ , por lo tanto  $(z_1, z_2) \in F(\gamma \cap \text{Sim}(C(T)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ , por lo tanto  $(2i_0, z_1)$  no es negra.

En ambos casos hemos llegado a una contradicción, por lo tanto la hipótesis de que  $(z_1, 2i) \notin F(T)$  es falsa, por lo tanto  $(z_1, 2i) \in F(T)$  para todo  $i \geq 0$  tal que  $2i$  es menor que  $p$ .

Analicemos ahora qué sucede si  $p$  es par o impar:

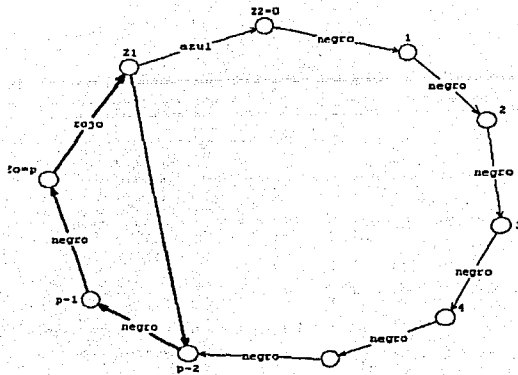
Caso 1) Si  $p$  es par entonces  $p-2$  también lo es, y dado que  $p \geq 2$  entonces  $p-2 \geq 0$ .

Ahora, por (h) tenemos  $(z_1, 2i) \in F(T)$  (para todo  $i \geq 0$  tal que  $2i$  es menor que  $p$ ), así que con  $2i=p-2$  (se cumple que  $0 \leq 2i=p-2 < p$ ) tenemos que  $(z_1, 2i) = (z_1, p-2) \in F(T)$ .

De manera que  $\gamma_4 = (z_1, p-2, p-1, p=z_0, z_1)$  es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en  $T$  (pues  $(z_1, p-2) \in F(T)$  como se vió en la línea previa, y  $\{(p-2, p-1), (p-1, p)\} \subseteq \alpha \subseteq T$ ) y tiene al menos dos flechas negras que son  $(p-2, p-1)$  y  $(p-1, p)$  (pues estaban también en  $\alpha$ ).

$\gamma_4$  cumple la hipótesis del Teorema, así que es casimonocromático, por lo tanto  $(z_1, p-2)$  es negra (pues ya sabíamos que  $(p=z_0, z_1)$  es roja). Por lo tanto  $(z_1, p-2, p-1, p)$  es una trayectoria dirigida monocromática, de manera que  $(z_1, p=z_0) \in F(C(T))$  por definición de  $C(T)$ , por lo tanto  $(z_0, z_1) \in F(\gamma \cap \text{Sim}(C(T)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ . Por lo tanto  $p$  no es par.

caso 1)  $\gamma_4 = (z_1, p-2, p-1, p=z_0, z_1)$



Caso 2) Si  $p$  es impar. Veamos varias afirmaciones:

i) Si  $p$  es impar, entonces para cada  $i \geq 0 \mid 1 \leq 2i+1 \leq p$  se tiene que  $(2i+1, z_1) \in F(T)$ .

Por contradicción, supongamos que existe  $i \geq 0 \mid 1 \leq 2i+1 \leq p$  y  $(2i+1, z_1) \notin F(T)$ .

Sea  $2i_0+1 = \max \{2i+1 \mid (2i+1, z_1) \notin F(T), \text{ con } 1 \leq 2i+1 \leq p\}$ .

Como  $p=z_0$  y  $(z_0, z_1) \in F(\gamma) \subseteq T$  (por lo tanto  $(z_0, z_1) \in F(T)$ ), entonces  $2i_0+1 \neq p = z_0$ , de modo que  $2i_0+1$  es menor que  $p$ ; entonces  $(2i_0+3, z_1) \in F(T)$  (por la elección de  $2i_0$ ) y además  $(z_1, 2i_0+1) \in F(T)$  (debido a que  $T$  es torneo y  $(2i_0+1, z_1) \notin F(T)$ ).

Sea  $\gamma_4 = (z_1, 2i_0+1, 2i_0+2, 2i_0+3, z_1)$ , sabemos que todas las flechas de  $\gamma_4$  existen en  $T$  (como se vió en las líneas previas), de manera que  $\gamma_4$  es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en  $T$  y que tiene además dos flechas negras, a saber  $(2i_0+1, 2i_0+2)$  y  $(2i_0+2, 2i_0+3)$  ya que también eran flechas de  $\alpha$ .

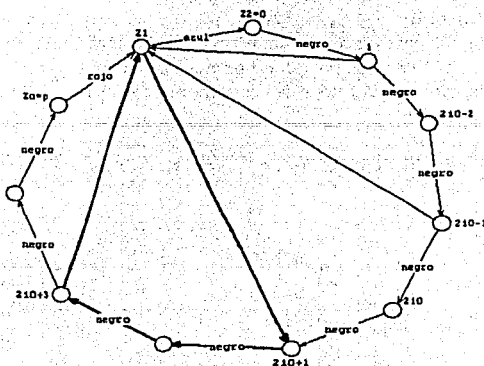
$\gamma_4$  cumple entonces con las hipótesis del Teorema, de modo que es casimonocromático, y entonces al menos una de las flechas  $(z_1, 2i_0+1)$  o  $(2i_0+3, z_1)$  es negra.

Si  $(z_1, 2i_0+1)$  es negra, entonces  $(z_1, 2i_0+1) \cup (2i_0+1, 2i_0+2, \dots, p=z_0)$  es una trayectoria dirigida monocromática, por lo tanto  $(z_1, z_0) \in F(C(T))$  por definición de  $C(T)$ , por lo que  $(z_0, z_1) \in F(\gamma \cap \text{Sim}(C(T)))$ , lo que contradice que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ , por lo tanto  $(z_1, 2i_0+1)$  no es negra.

Si  $(2i_0+3, z_1)$  es negra, entonces  $(z_2=0, 1, 2, \dots, 2i_0+1, 2i_0+2, 2i_0+3) \cup (2i_0+3, z_1)$  es una trayectoria dirigida monocromática, por lo tanto  $(z_2=0, z_1) \in F(C(T))$  por definición de  $C(T)$ , por lo que  $(z_1, z_2) \in F(\gamma \cap \text{Sim}(C(T)))$ , lo que contradice que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ , por lo tanto  $(2i_0+3, z_1)$  no es negra.



Caso b)  $\gamma_4 = (z_1, 2i_0+1, 2i_0+2, 2i_0+3, z_1)$



Por lo tanto la suposición de que  $(2i+1, z_1) \notin F(T)$  es falsa, de manera que para cada  $i \geq 0$   $| 1 \leq 2i+1 \leq p$  se tiene que  $(2i+1, z_1) \in F(T)$ .

j) Si  $p$  es impar, entonces  $(1, z_1) \in F(T)$  y es azul.

Para  $i=0, 1 \leq 2i+1=1 \leq p$  con  $p$  impar, por lo que usando el inciso i) se tiene que  $(2i+1, z_1) = (1, z_1) \in F(T)$ .

Entonces  $\gamma_3 = (z_1, z_2=0, 1, z_1)$  es un ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $T$  (pues  $(z_1, z_2) \in F(\gamma)$  con  $\gamma \subseteq T$ , y es azul por hipótesis,  $(0, 1) \in F(\alpha)$  con  $\alpha \subseteq T$  y es negra, y sabemos ya que  $(1, z_1) \in F(T)$ ), por lo tanto por la hipótesis del Teorema,  $\gamma_3$  es casimonocromático, de modo que  $(1, z_1)$  es azul o negra.

Si  $(1, z_1)$  es negra entonces  $(z_2=0, 1, z_1)$  es una trayectoria dirigida monocromática (pues  $(0, 1) \in F(\alpha)$  que es negro), por lo tanto  $(z_2, z_1) \in F(C(T))$ , así que  $(z_1, z_2) \in F(\gamma \cap \text{Sim}(C(T)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ ; por lo tanto  $(1, z_1)$  no es negra. Entonces  $(1, z_1)$  es azul.

k) Si  $p$  es impar, entonces  $(z_1, p-1) \in F(T)$  y es roja.

Como  $p$  es impar entonces  $p-1$  es par, de manera que por el inciso (h) con  $2i=p-1$  se tiene que  $(z_1, 2i=p-1) \in F(T)$ .

Entonces  $\gamma_3 = (z_1, p-1, p=z_0, z_1)$  es un ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $T$  (pues  $(z_1, p-1) \in F(T)$  por la línea previa,  $(p-1, p) \in F(\alpha)$  con  $\alpha \subseteq T$ , y  $(z_0, z_1) \in F(\gamma)$  con  $\gamma \subseteq T$ ); por lo tanto por la hipótesis del Teorema,  $\gamma_3$  es casimonocromático. Ahora,  $(p-1, p)$  es negra pues pertenece a  $\alpha$ , y  $(z_0, z_1)$  es roja por hipótesis, de manera que  $(z_1, p-1)$  es roja o negra.

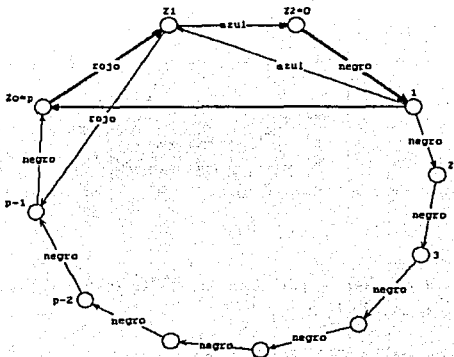
Si  $(z_1, p-1)$  es negra, entonces  $(z_1, p-1, p)$  es una trayectoria dirigida monocromática, por lo tanto  $(z_1, p=z_0) \in F(C(T))$  por definición de  $C(T)$ , por lo tanto  $(z_0, z_1) \in F(\gamma \cap \text{Sim}(C(T)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ ; por lo tanto  $(z_1, p-1)$  es roja.

Veamos qué sucede entre  $p=z_0$  y 1:

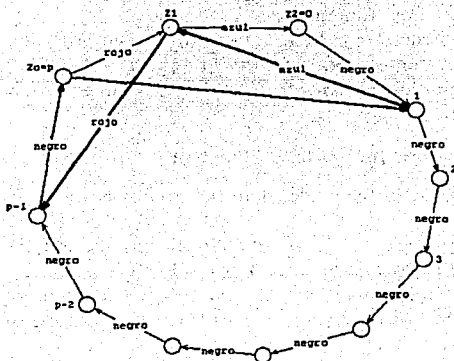
Como  $T$  es torneo, entonces  $(p,1) \in F(T)$  o  $(1,p) \in F(T)$ .

Si  $(1,p) \in F(T)$  entonces  $\gamma_4 = (z_0 = p, z_1, z_2 = 0, 1, p)$  es ciclo dirigido de longitud 4 contenido en  $T$ , entonces por la hipótesis del Teorema,  $\gamma_4$  es casimonocromático; sin embargo  $(p=z_0, z_1)$  es roja y  $(z_1, z_2)$  es azul por hipótesis, y  $(0,1)$  es negra pues pertenece a  $\alpha$ ; de manera que  $\gamma_4$  no puede ser casimonocromático, contradiciendo lo anterior; por lo tanto  $(1,p) \notin F(T)$ .

Si  $(1,p) \in F(T)$ ,  $\gamma_4 = (z_0 = p, z_1, z_2 = 0, 1, p)$



Si  $(p,1) \in F(T)$ ,  $\gamma_4 = (1, z_1, p-1, p, 1)$



Ahora, si  $(p,1) \in F(T)$ , entonces  $\gamma_4 = (1, z_1, p-1, p, 1)$  es ciclo dirigido de longitud 4

contenido en  $T$ , entonces por la hipótesis del Teorema es casimonocromático; sin embargo  $(1, z_1) \in F(T)$  y es azul por (j),  $(z_1, p-1) \in F(T)$  y es roja por (k),  $(p-1, p) \in F(T)$  y es negra pues está en  $\alpha$ ,  $(p=z_0, 1) \in F(T)$  por la hipótesis de este subcaso; de manera que  $\gamma_4$  no puede ser casimonocromático, contradiciendo lo anterior; por lo tanto  $(p, 1) \notin F(T)$ .

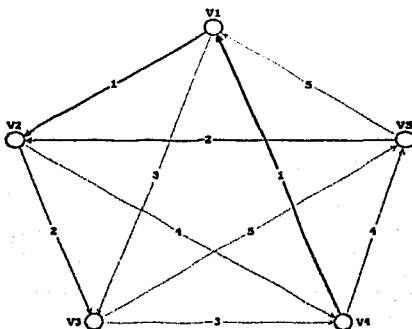
En todos los casos posibles hemos llegado a una contradicción, por lo tanto  $p$  tampoco es impar.

Entonces la hipótesis de que  $C(T)$  no es núcleo-perfecta es falsa. Por lo tanto  $C(T)$  es núcleo perfecta.

†

Es importante observar que si en el Teorema anterior solo se pidiera que todo triángulo dirigido contenido en  $T$  fuera un ciclo casimonocromático, el resultado sería falso, y el torneo  $G_5$  obtenido por Shen Minggang es la prueba de ello (pues tal digráfica cumple con las nuevas hipótesis y no tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas<sup>6</sup>):

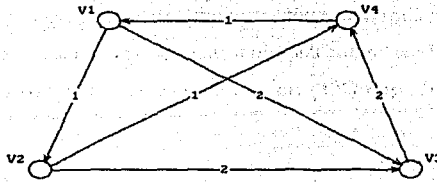
Digráfica  $G_5$



Además, la condición de Shen Minggang mencionada en páginas anteriores (que consiste en pedir que  $T$  sea un torneo  $m$ -coloreado que no contiene ni  $T_3$  ni  $C_3$ ), no implica la condición del Teorema 4.3, como lo prueba la digráfica  $T_1$ , que aunque no contiene  $T_3$  ni  $C_3$ , no todo ciclo dirigido de longitud a lo más 4 es casimonocromático ( $\gamma_4 = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_1)$  no es casimonocromático):

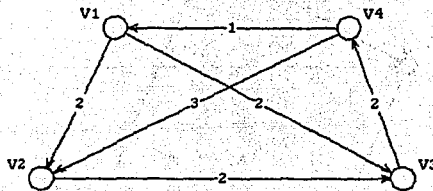
<sup>6</sup>El análisis detallado de que  $G_5$  no tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas puede encontrarse en la página 61

Digráfica  $T_1$



Por igual, la condición del Teorema 4.3 no implica la condición de Shen Mingang, como lo prueba la digráfica  $T_2$ , en la que todo ciclo dirigido de longitud a lo más 4 es casimonocromático, pero  $T$  contiene  $T_3=(v_1, v_2, v_4)$ :

Digráfica  $T_2$



El Teorema 4.3 nos permite encontrar otra condición para que  $C(T)$  sea núcleo perfecta, como lo muestra el siguiente Teorema.

#### Teorema 4.4

Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $T$  es un ciclo monocromático. Entonces  $C(T)$  es una digráfica núcleo perfecta.

## Demostración

Para hacer uso del Teorema 4.3 previamente demostrado, probaremos que cada ciclo dirigido de longitud a lo más 4 es casimonocromático. Notemos que en  $T$  no puede haber ciclos de longitud dos (por ser un torneo), y con respecto a los ciclos de longitud 3 sabemos por hipótesis que son monocromáticos (y por tanto casimonocromáticos); entonces la hipótesis del Teorema anterior se cumple para tales ciclos de longitud 2 y longitud 3, de manera que solo resta analizar si los ciclos dirigidos de longitud 4 contenidos en  $T$  son casimonocromáticos:

Sea  $\gamma_4 = (0,1,2,3,0)$  un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en  $T$  y supongamos que  $\gamma_4$  no es monocromático. Entonces, sin pérdida de generalidad podemos asumir que la flecha  $(0,1)$  es roja, mientras que la flecha  $(1,2)$  es azul.

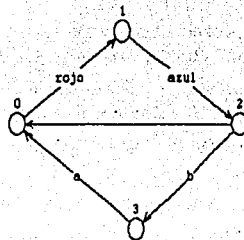
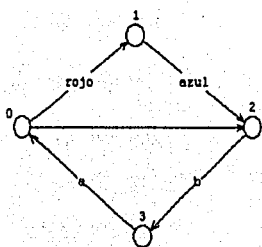
Veamos que las flechas  $(2,3)$  y  $(3,0)$  tienen el mismo color:

Supongamos lo contrario, i.e.  $(2,3)$  y  $(3,0)$  tienen asignado distintos colores (b y a respectivamente).

Como  $T$  es torneo entonces  $(0,2) \in F(T)$  o  $(2,0) \in F(T)$ .

Si  $(0,2) \in F(T)$ :  $\gamma_3 = (0,2,3,0)$

Si  $(2,0) \in F(T)$ :  $\gamma_3 = (0,1,2,0)$



Si  $(0,2) \in F(T)$ , entonces el ciclo dirigido de longitud 3  $\gamma_3 = (0,2,3,0)$  no es monocromático (pues  $(2,3)$  tiene distinto color a  $(3,0)$  debido a nuestra suposición), contradiciendo la hipótesis del Teorema. Si  $(2,0) \in F(T)$ , entonces el ciclo dirigido de longitud 3,  $\gamma_3 = (0,1,2,0)$ , no es monocromático (pues  $(0,1)$  es roja y  $(1,2)$  es azul), contradiciendo la hipótesis del Teorema:

Por lo tanto las flechas  $(2,3)$  y  $(3,0)$  tienen el mismo color. Veamos ahora que tales flechas son azules o rojas:

Supongamos lo contrario, digamos que  $(2,3)$  y  $(3,0)$  tienen color negro.

Como  $T$  es torneo, entonces  $(1,3) \in F(T)$  o  $(3,1) \in F(T)$ . Si  $(1,3) \in F(T)$  entonces  $\gamma_3 = (0,1,3,0)$  no es un ciclo dirigido monocromático de longitud tres contenido en  $T$  (pues  $(0,1)$  es roja mientras que  $(3,0)$  es negra), contradiciendo la hipótesis del Teorema.

Si  $(3,1) \in F(T)$  entonces  $\gamma_3 = (1,2,3,1)$  no es un ciclo dirigido monocromático de longitud tres contenido en  $T$  (pues  $(1,2)$  es azul mientras que  $(2,3)$  es negra), contradiciendo la hipótesis del Teorema.

Por lo tanto las flechas (2,3) y (3,0) tienen el color azul o rojo necesariamente. En ambos casos el ciclo dirigido  $\gamma_4=(0,1,2,3,0)$  es casimonocromático.

Por lo tanto cada ciclo dirigido de longitud 4 es casimonocromático. Entonces por el Teorema anterior tenemos que  $C(T)$  es núcleo perfecta.

†

Para estudiar otras dos condiciones suficientes para que  $C(T)$  sea núcleo perfecta (Teoremas 4.5 y 4.7), es necesario recordar la siguiente definición: sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada y  $g_n=(0,1,\dots,n-1,0)$  un ciclo dirigido de  $D$ , se dice que  $g_n$  es  $C(D)$ -monocromático si existe un conjunto  $\{f_i=(i,i+1) \in F(C(D))\}$  tal que  $i \in \{1,\dots,n\} \bmod n$  de flechas coloreadas por igual.

### Teorema 4.5

Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $T$  es  $C(T)$ -monocromático.<sup>7</sup> Entonces  $C(T)$  es una digráfica núcleo perfecta.

### Demostración

Como  $T$  es un torneo entonces es una digráfica completa, de manera que  $C(T)$  también es completa por construcción de  $C(T)$ .

Entonces, haciendo uso del Teorema 2.11 bastaría demostrar que todo ciclo dirigido contenido en  $C(T)$  tiene al menos una flecha simétrica.

Sea  $\gamma$  un ciclo dirigido contenido en  $C(T)$ . Por demostrar que  $\gamma$  tiene al menos una flecha simétrica.

Supongamos lo contrario, i.e.  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ .

Por lo tanto  $\gamma \subseteq T$  (por el mismo argumento usado en la prueba del Teorema 4.3-a).

De manera que existe un conjunto de vértices  $C \subseteq V(T)$  tal que  $C=V(\gamma)$ . Observemos que la subdigráfica inducida por  $C$ ,  $D[C]$ , es también un torneo, y lo denotaremos por  $T'$ .

Entonces  $\gamma$  es un ciclo dirigido hamiltoniano de  $T'$ , por lo que tal torneo es hamiltoniano.

Por lo tanto, por el Teorema 2.12, para cada  $k$  ( $3 \leq k \leq |V(T')|-1$ ) existe un ciclo dirigido de longitud  $k$ ,  $\gamma_k$ , contenido en  $T'$  tal que  $|F(\gamma) \cap F(\gamma_k)| \geq 1$ .

En particular, para  $k=3$ , existe el ciclo dirigido de longitud 3,  $\gamma_3 \subseteq T'$ , tal que  $\gamma$  tiene al menos una flecha  $f$  de  $\gamma_3$ .

Dado que  $\gamma_3$  es  $C(T)$ -monocromático, entonces para cualesquiera dos vértices  $i, j$  de  $\gamma_3 \subseteq C(T)$  tales que  $(i, j) \in F(\gamma_3)$ , existe una  $j$ -trayectoria dirigida monocromática (por estar en el ciclo), de manera que  $(j, i) \in F(C(T))$  por definición de  $C(T)$ . Por lo tanto  $\gamma_3 \subseteq \text{Sim}(C(T))$ .

Por lo tanto  $f \in F(\gamma)$  es una flecha simétrica de  $C(T)$ , contradiciendo la hipótesis inicial de que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(T))$ .

Por lo tanto  $\gamma$  tiene al menos una flecha simétrica. Entonces, por el Teorema 2.11,  $C(T)$  es núcleo perfecta.

†

<sup>7</sup>La prueba permite generalizar esta condición de la siguiente forma: Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado tal que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $T$  es  $M$ -monocromático, donde  $M$  es una multidigráfica que contiene a  $C(T)$ .

El siguiente Teorema será de utilidad al demostrar que las condiciones del Teorema 4.7 son suficientes para que  $C(T)$  sea núcleo perfecta:

### Teorema 4.6

Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado con  $p$  vértices y tal que existe una digráfica  $H$  con  $V(T)=V(H)$ ,  $C(T)\subseteq H$ , donde  $C(H)$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica. Si existe algún  $k$  ( $4\leq k\leq p$ ) tal que cualquier ciclo dirigido de longitud  $k$  y contenido en  $T$  es  $C(H)$ -monocromático, entonces cada ciclo dirigido de longitud  $k-1$  contenido en  $T$  es  $C(H)$ -monocromático.

### Demostración

Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado que cumple las hipótesis del Teorema. Sea  $\gamma_{k-1}=(z_0, z_1, \dots, z_{k-2}, z_0)$  un ciclo dirigido de longitud  $k-1$  contenido en  $T$ , donde  $3\leq k-1\leq p-1$ . Para demostrar que  $\gamma_{k-1}$  es  $C(H)$ -monocromático, analicemos los casos posibles:

- Caso I:

$\exists w \in (V(T) - V(\gamma_{k-1})) \{ \{ (z, w) \in F(T) \mid z \in V(\gamma_{k-1}) \} \neq \emptyset \ \& \ \{ (w, z) \in F(T) \mid z \in V(\gamma_{k-1}) \} \neq \emptyset \}$ , es decir, existe un vértice  $w$  de  $T$  que no está en el ciclo  $\gamma_{k-1}$  tal que existe al menos una flecha del conjunto de vértices de  $\gamma_{k-1}$  a  $w$  y existe al menos una flecha de  $w$  al conjunto de vértices de  $\gamma_{k-1}$ .

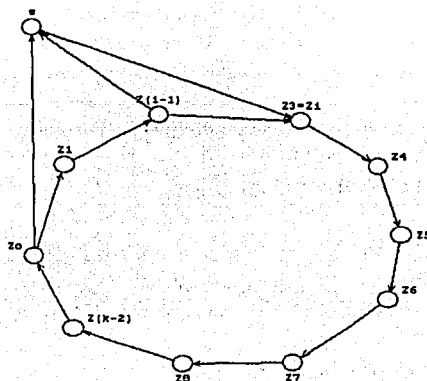
Sin pérdida de generalidad supongamos que  $(z_0, w) \in F(T)$ .

Sea  $i = \min \{ j \in \{1, 2, \dots, k-2\} \mid (w, z_j) \in F(T) \}$ , es decir,  $z_i$  es el primer vértice de  $\gamma_{k-1}$  tal que existe la flecha de  $w$  a  $z_j$  (i existe por la hipótesis del caso 1).

Ahora, por definición de  $i$  tenemos que  $(w, z_i) \in F(T)$  y  $(w, z_{i-1}) \notin F(T)$  (pues  $z_i$  es el primer vértice del ciclo que cumple esto), pero dado que  $T$  es torneo, entonces  $(z_{i-1}, w) \in F(T)$ .

Por lo tanto  $\gamma = (z_{i-1}, w, z_i) \cup (z_i, \gamma_{k-1}, z_{i-1})$  es un ciclo dirigido de longitud  $k$  contenido en  $T$ .

Figura:  $\gamma = (z_{i-1}, w, z_i) \cup (z_i, \gamma_{k-1}, z_{i-1})$



Por hipótesis del Teorema,  $\gamma$  es un ciclo  $C(H)$ -monocromático, digamos de color azul.

Notemos entonces que las flechas  $\{(z_{i-1}, w), (w, z_i)\}$  son azules en  $C(H)$  (pues son flechas de  $\gamma$ ).

Por lo tanto existe una  $z_{i-1}z_i$ -flecha en  $C(C(H))$  que es de color azul, por definición de la cerradura aplicada a  $C(H)$ .

Por el Lema 4.1 también existe una  $z_{i-1}z_i$ -flecha en  $C(H)$  que es de color azul. De manera que existen las flechas  $\{(z_i, z_{i+1}) \mid i \in \{0, 1, \dots, k-2\} \text{ módulo } k-2\}$  de color azul en  $C(H)$ .

Por lo tanto  $\gamma_{k-1}$  es  $C(H)$ -monocromático y el Teorema se cumple.

- Caso II:

$\forall w \in (V(T) - V(\gamma_{k-1})) \{ \{(z, w) \in F(T) \mid z \in V(\gamma_{k-1})\} = \emptyset \text{ o bien } \{(w, z) \in F(T) \mid z \in V(\gamma_{k-1})\} = \emptyset \}$ .

Es decir, para todo vértice  $w$  de  $T$  que no está en el ciclo  $\gamma_{k-1}$ , solo hay flechas en  $T$  del ciclo a  $w$  o solamente las hay de  $w$  al ciclo.

Denotemos:

$V_1 = \{w \in (V(T) - V(\gamma_{k-1})) \mid \{(w, z) \in F(T) \mid z \in V(\gamma_{k-1})\} = \emptyset\}$

$V_2 = \{w \in (V(T) - V(\gamma_{k-1})) \mid \{(z, w) \in F(T) \mid z \in V(\gamma_{k-1})\} = \emptyset\}$

Analicemos dos subcasos:

- Caso II-a:

Si  $V_2 = \emptyset$ : como  $V_1 \cup V_2 = (V(T) - V(\gamma_{k-1}))$  debido a la hipótesis del caso II y dado que  $|V(T)| = p \geq k > k-1 = |V(\gamma_{k-1})|$ , entonces  $|V_1| = |V_1 \cup V_2| \neq \emptyset$ .

Ahora bien, por hipótesis  $C(H)$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica, de modo que toda subdigráfica inducida propia de  $C(H)$ , en particular  $C(H)[V_1]$ , tiene núcleo, al que denotaremos con  $N_1$ .

Pero por definición de  $V_1$ , para cada  $w \in V_1$  y para cada  $z \in V(\gamma_{k-1})$  se tiene que  $(z, w) \in F(T)$  (pues por definición de  $V_1$   $\{(w, z) \in F(T) \mid z \in V(\gamma_{k-1})\} = \emptyset$ ) y  $T$  es torneo, es decir, siempre hay flechas de  $\gamma_{k-1}$  a  $V_1$ .

Veamos que  $N_1$  es también núcleo de  $C(H)$ :

-  $N_1$  absorbe a todo elemento de  $C(H)$  pues  $V(C(H)) = V(H) = V(T) = V_1 \cup V_2 \cup V(\gamma_{k-1}) = V_1 \cup V(\gamma_{k-1})$  y sabíamos ya que  $N_1$  absorbe a  $V_1$  y a los vértices del ciclo  $\gamma_{k-1}$ .

-  $N_1$  es independiente en  $C(H)$  pues es un conjunto independiente en una subdigráfica inducida de  $C(H)$  (por el Lema 2.1)

Por lo tanto  $N_1$  es núcleo de  $C(H)$ , contradiciendo que  $C(H)$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica (y que por tanto no tiene núcleo).

Concluimos entonces que el Caso II-a es imposible.

- Caso II-b:

Si  $V_1 = \emptyset$ : como  $V_1 \cup V_2 = (V(T) - V(\gamma_{k-1}))$ , y  $|V(T)| = p \geq k > k-1 = |V(\gamma_{k-1})|$  entonces  $|V_2| = |V_1 \cup V_2| \neq \emptyset$ .

Ahora bien, por hipótesis  $C(H)$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica, de modo que toda subdigráfica inducida propia de  $C(H)$ , en particular  $C(H)[V(\gamma_{k-1})]$ , tiene núcleo. Denotemos con  $N_1$  a tal núcleo.

Veamos que  $N_1$  es también núcleo de  $C(H)$ :

-  $N_1$  absorbe a todo elemento de  $C(H)$  pues  $V(C(H)) = V(H) = V(T) = V_1 \cup V_2 \cup V(\gamma_{k-1}) = V_2 \cup V(\gamma_{k-1})$  y sabíamos ya que  $N_1$  absorbe a  $V_2$  y a los vértices del ciclo  $\gamma_{k-1}$ .

-  $N_1$  es independiente en  $C(H)$  pues es un conjunto independiente en una subdigráfica inducida de  $C(H)$  (por el Lema 2.1)



Por lo tanto  $N_1$  es núcleo de  $C(H)$ , contradiciendo que  $C(H)$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica (y que por tanto no tiene núcleo).

Concluimos entonces que el Caso II-b es imposible.

- Caso II-c:

Si  $V_1 \neq \emptyset$  y  $V_2 \neq \emptyset$  entonces por cómo fueron definidos  $V_1$  y  $V_2$  tenemos que  $(V_2, V_1 \cup V(\gamma_{k-1}))$  es una partición de  $V(T)$ . Pero dado que  $V(T) = V(H) = V(C(H))$  entonces  $(V_2, V_1 \cup V(\gamma_{k-1}))$  es también una partición de  $V(C(H))$ .

Como  $C(H)$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica, entonces  $\text{Asim}(C(H))$  es fuertemente conexa, por el Teorema 2.9 (inciso 2). Por lo tanto existe una flecha en  $\text{Asim}(C(H))$  de  $V_1 \cup V(\gamma_{k-1})$  a  $V_2$ .

Pero por definición de  $V_2$  no existen flechas de  $V(\gamma_{k-1})$  a  $V_2$  contenidas en  $T$ . Además,  $\{(u,v) \in \text{Asim}(C(H)) \Rightarrow (u,v) \in F(T)\}$  pues:

Como  $(u,v) \in F(\text{Asim}(C(H)))$  entonces existe una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática en  $H$  y no existe una  $vu$ -trayectoria dirigida monocromática en  $H$ ; por lo tanto no existe una  $vu$ -trayectoria dirigida monocromática en  $T$ , pues  $C(T) \subseteq H$  y  $V(H) = V(T)$  (de lo contrario, existe una  $vu$ -trayectoria dirigida monocromática en  $H$ , contradiciendo que tal trayectoria no existe); entonces  $(v,u) \notin F(C(T))$  y por tanto  $(v,u) \notin F(T)$  (de lo contrario se tiene que  $(v,u) \in F(C(T))$  por definición de  $C(T)$ , contradiciendo lo anterior); y dado que  $T$  es torneo, entonces  $(u,v) \in F(T)$ .

Entonces por contrapositiva de tal implicación tenemos que no existen flechas de  $V(\gamma_{k-1})$  a  $V_2$  contenidas en  $\text{Asim}(C(H))$ .

Por lo tanto existe una flecha de  $V_1$  a  $V_2$  en  $\text{Asim}(C(H))$ . Sea  $(x,y)$  una flecha de  $V_1$  a  $V_2$  contenida en  $\text{Asim}(C(H))$  (pues  $\text{Asim}(C(H))$  es fuertemente conexa).

Observemos que como  $x \in V_1$  entonces para todo  $z \in V(\gamma_{k-1})$ ,  $(x,z) \notin F(T)$  (por definición de  $V_1$ ); pero como  $T$  es torneo entonces  $(z,x) \in F(T)$  para todo  $z \in V(\gamma_{k-1})$ . En particular  $(z_0,x) \in F(T)$ .

Análogamente observemos que como  $y \in V_2$ , entonces para todo  $z \in V(\gamma_{k-1})$ ,  $(z,y) \notin F(T)$  por definición de  $V_2$ ; pero como  $T$  es torneo entonces  $(y,z) \in F(T)$  para todo  $z \in V(\gamma_{k-1})$ . En particular  $(y,z_2) \in F(T)$ .

Por lo tanto  $\gamma_k = (z_0, x, y, z_2) \cup (z_2, \gamma_{k-1}, z_0)$  es un ciclo dirigido de longitud  $k$  contenido en  $T$ . Entonces, por la hipótesis del Teorema,  $\gamma_k$  es  $C(H)$ -monocromático, de manera que existe una  $yx$ -trayectoria dirigida monocromática en  $C(H)$ , por lo tanto  $(y,x) \in F(C(H))$  por definición de  $C(H)$ , contradiciendo que  $(x,y) \in F(\text{Asim}(C(H)))$ .

Por lo tanto el caso II-c es imposible también.

Entonces el único caso posible es el caso I, en el que ya concluimos que el Teorema se cumple.

†

#### Teorema 4.7

Sea  $T$  un torneo  $m$ -coloreado con  $p$  vértices. Si existe  $k$  (donde  $3 \leq k \leq p$ ) tal que cumpla las siguientes condiciones:

- Para todo torneo  $m$ -coloreado  $T' \subseteq T$  tal que  $T'$  no contiene ciclos dirigidos de longitud  $k$ , se tiene que  $C(T')$  es una digráfica núcleo perfecta.
- Cada ciclo dirigido de longitud  $k$  contenido en  $T$  es  $C(T)$ -monocromático.

Entonces  $C(T)$  es una digráfica núcleo perfecta.

## Demostración

Supongamos lo contrario, i.e.  $C(T)$  no es una digráfica núcleo perfecta, por lo tanto existe una subdigráfica inducida de  $C(T)$ , digamos  $H$ , tal que  $H$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica (por el Teorema 2.8)

Sea  $T_H = T[V(H)]$  el torneo inducido por  $V(H)$ .

Notemos que  $C(T_H) \subseteq H$  (ver *Observación* al final de la prueba).

Ahora bien, si  $T_H$  no contiene ciclos dirigidos de longitud  $k$ , entonces  $C(T_H)$  es núcleo perfecta, por la hipótesis a) del Teorema. Así que  $C(T_H)$  tiene núcleo, que consiste de un solo vértice, digamos  $\{v\}$  (pues  $T$  es torneo), y observemos que  $\{v\}$  es también núcleo de  $H$  (pues  $C(T_H) \subseteq H$ ), contradiciendo la suposición de que  $H$  es una digráfica núcleo imperfecta crítica (y que por tanto que no tiene núcleo).

Por lo tanto  $T_H$  contiene al menos un ciclo dirigido de longitud  $k$ .

Recordemos que la hipótesis b) del Teorema implica que cada ciclo dirigido de longitud  $k$  es  $C(T)$ -monocromático.

Cuando  $k=3$ , por el Teorema 4.5 (cuyas hipótesis se cumplen pues  $T_H \subseteq T$  contiene al menos un ciclo dirigido de longitud  $k$ , por consiguiente  $T$  contiene al menos un ciclo dirigido de longitud  $k$ , y cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $T$  es  $C(T)$ -monocromático), tenemos que  $C(T)$  es una digráfica núcleo perfecta, contradiciendo la suposición inicial.

Cuando  $k \geq 4$ , se cumplen las hipótesis del Teorema 4.6 aplicado a  $T_H$  y  $H$ : pues  $V(T_H) = V(H)$ ,  $C(T_H) \subseteq H$ ,  $C(H)$  es núcleo imperfecta crítica y cada ciclo dirigido de longitud  $k$  contenido en  $T_H$  (y por tanto contenido en  $T$ ) es  $C(T)$ -monocromático y por consiguiente  $C(H)$ -monocromático, pues  $H$  es una subdigráfica inducida de  $C(T)$ . Por lo tanto el Teorema 4.6 implica que cada ciclo dirigido de longitud  $k-1$  contenido en  $T_H$  es  $C(H)$ -monocromático y por consiguiente  $C(T)$ -monocromático. Utilizando este argumento repetidamente ( $k-3$  veces) obtenemos entonces que cada ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $T_H$  es  $C(T)$ -monocromático.

Veamos que  $H$  es una digráfica núcleo perfecta: supongamos lo contrario, i.e.  $H$  no es núcleo perfecta. Como  $H$  es completa, entonces  $H$  tiene un ciclo  $\gamma \subseteq \text{Asim}(H)$  por el Teorema 2.11. Debemos observar que  $\gamma \subseteq T_H$ .<sup>8</sup> Entonces, aplicando el Teorema 2.12 a  $T_H$ , se tiene que existe un ciclo de longitud 3,  $\gamma_3 \subseteq T_H$ , tal que  $|F(\gamma_3) \cap F(\gamma)| \geq 1$ . Ahora bien, como  $\gamma_3$  es  $C(T)$ -monocromático, entonces  $\gamma_3$  es simétrico en  $C(T)$ , por lo tanto  $\gamma$  tiene al menos una flecha simétrica en  $H$  (pues  $H \subseteq C(T)$ ), contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(H)$ . Por lo tanto  $H$  es núcleo perfecta, lo que contradice la hipótesis de que  $H$  es núcleo imperfecta crítica.

Por lo tanto la suposición de que  $C(T)$  no es una digráfica núcleo perfecta es falsa.

†

Observación:  $C(T_H) \subseteq H^9$

Recordemos que  $V(H) = V(C(T_H))$ , por lo tanto para probar la contención, basta analizar al conjunto de las flechas de cada digráfica:

$H$  es una subdigráfica inducida de  $C(T)$ , por lo tanto para toda  $xy$ -trayectoria dirigida monocromática en  $T$ , con  $x, y \in V(H)$ , se tiene que  $(x, y) \in F(H)$ . Observemos que tales trayectorias pueden tener vértices no terminales en  $(V(T) - V(H))$ , sea  $P$  una  $xy$ -trayectoria con esa propiedad. Entonces  $P \not\subseteq T[V(H)]$ , y por lo tanto  $(x, y) \notin F(C(T[V(H)])) = F(C(T_H))$ . Por lo tanto no necesariamente todo elemento de  $F(H)$  pertenece a  $F(C(T_H))$ .

<sup>8</sup>Por demostrar que  $\gamma \subseteq T_H$ : sea  $(x, y) \in F(\gamma)$  arbitraria, si  $(x, y) \notin F(T_H)$  entonces  $(y, x) \in F(T_H)$  ya que  $T_H$  es torneo, por lo tanto  $(x, y)$  es una flecha simétrica en  $H$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(H)$ ; por lo tanto  $\gamma \subseteq T_H$ .

<sup>9</sup> $T_H$  y  $H$  como fueron definidos en el Teorema 4.10

Por otra parte, la contención  $F(C[T_H]) \subseteq F(H)$  es cierta: si  $(x,y) \in F(C[T_H])$ , entonces, o  $(x,y) \in F(T_H)$ , o existe una  $xy$ -trayectoria dirigida monocromática  $P$  totalmente contenida en  $T_H \subseteq F(H)$ . Pero  $(x,y) \in F(T_H) \Rightarrow (x,y) \in F(T) \Rightarrow (x,y) \in F(C(T))$ , con  $x,y \in V(H) \Rightarrow (x,y) \in F(H)$ . Y si existe una  $xy$ -trayectoria dirigida monocromática  $P$  totalmente contenida en  $T_H \subseteq F(H)$ , entonces  $(x,y) \in F(C(T))$ , con  $x,y \in V(H)$ , de donde  $(x,y) \in F(H)$ .

Por lo tanto  $C(T_H) \subseteq H$ .

Con esta prueba culmina el cuarto capítulo de la presente tesis, que reúne algunas condiciones suficientes para que la cerradura de un torneo  $m$ -coloreado sea núcleo perfecta. Observe el lector cuán útil resulta ser el Teorema 2.11, pues constituye en sí mismo una herramienta imprescindible en algunas demostraciones. Con ello en mente el lector encontrará natural el inicio del siguiente capítulo.



## Capítulo 5

# Trayectorias y ciclos dirigidos monocromáticos en casitorneos $m$ -coloreados

El lector debe preguntarse ahora si los resultados probados en el capítulo previo para torneos  $m$ -coloreados, son también válidos para otras digráficas, y más aún, si las herramientas que resultaron útiles entonces, también lo son ahora (resulta inevitable pensar en el Teorema de Berge). Considerando digráficas muy particulares, los casitorneos, la respuesta a la primer interrogante es afortunadamente afirmativa en algunos casos, mientras que la segunda pregunta se responde con una rotunda negativa, pues recordemos que una de las implicaciones del Teorema de Berge es sólo válido para digráficas completas (característica que no cumplen los casitorneos por definición); así que es necesario crear primero la preciada herramienta que nos permita demostrar que ciertas condiciones son suficientes para que  $C(D)$  sea núcleo perfecta; por lo tanto inicialmente se demuestra que si toda subdigráfica inducida propia de un casitorneo  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, entonces  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas o bien existe un ciclo dirigido  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D)) \mid \{x, y\} \subseteq V(\gamma)$  y para cualesquiera dos vértices no consecutivos de  $\gamma$  existe una flecha simétrica entre ellos en  $C(D)$ . La generalización de este resultado también es probada.

Posteriormente se prueba una afirmación análoga al resultado obtenido en torneos por S. Minggang: que la cerradura de toda  $\{C_3, T_3\}$ - $m$ -coloración libre de un casitorneo  $D$  no solo tiene núcleo, sino que es núcleo perfecta; y ello se logra haciendo uso de la siguiente afirmación: si  $D$  no contiene  $T_3$  ni  $C_3$ , entonces  $C(D)$  no contiene algún ciclo asimétrico  $\gamma$  tal que: a)  $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$ , y b) entre cualesquiera dos vértices no consecutivos de  $\gamma$ , existe una flecha simétrica. Y finalmente se prueba un Teorema análogo al resultado para torneos en el capítulo previo: si todo ciclo dirigido contenido en un casitorneo  $D$  y de longitud a lo más cuatro, es casi-monocromático, entonces  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Se define como *casitorneo* a la digráfica que se obtiene de eliminar una única flecha de algún torneo coloreado (i.e.  $D \cong T_n - [x, y]$ ).

A falta de la validez del Teorema de Berge (Teorema 2.11), el siguiente resultado constituye la preciada herramienta que nos permitirá demostrar que ciertas condiciones son suficientes para que  $C(D)$  sea núcleo perfecta.

### Teorema 5.1

Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada que resulta de eliminar una única flecha  $[x, y]$  de algún torneo  $m$ -coloreado  $T_n$  (i.e.  $D \cong T_n - [x, y]$ ). Si toda subdigráfica inducida propia de  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, entonces se cumple al menos una de las siguientes afirmaciones:

- i)  $D$  tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.
- ii) Existe un ciclo dirigido  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D)) \mid \{x, y\} \subseteq V(\gamma)$ ; y para cualesquiera dos vértices no consecutivos de  $\gamma$  existe una flecha simétrica entre ellos en  $C(D)$ .

### Demostración

Supongamos que  $D$  no tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, así que se probará la afirmación (ii), para ello definamos primero un orden en  $V(D) - \{x\}$  de la siguiente forma:

-Por hipótesis toda subdigráfica inducida propia de  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, de ahí que  $D - \{x\}$  tiene un vértice, digamos  $w_0$ , tal que  $\{w_0\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D - \{x\}$ .

-Si existe una  $xw_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , entonces  $w_0$  es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D$ , contradiciendo nuestra suposición inicial. Por lo tanto no existe alguna  $xw_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ .

-Si  $\{x, w_0\}$  es un conjunto independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas, entonces  $w_0 = y$  (pues los únicos vértices no adyacentes entre sí por trayectorias dirigidas monocromáticas entre sí en  $D$  son  $x$  &  $y$ ) y  $\{x, w_0\}$  es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$ , contradiciendo nuestra suposición inicial. Por lo tanto  $\{x, w_0\}$  no es un conjunto independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$ , y dado que no existe una  $xw_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , entonces existe alguna  $w_0x$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , y por consiguiente  $(w_0, x) \in F(C(D))$  por definición de  $C(D)$ , y de hecho  $(w_0, x) \in F(\text{Asim}(C(D)))$  (pues no existe una  $xw_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ ).

-Ahora,  $D - \{x, w_0\}$  es una subdigráfica propia inducida de  $D$ , entonces por hipótesis existe  $w_1 \in V(D - \{x, w_0\})$  tal que  $\{w_1\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D - \{x, w_0\}$ .

-Continuando con este proceso podemos establecer un orden en los vértices de  $D - \{x\}$ , de manera que  $\{w_k\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D - \{x, w_0, w_1, \dots, w_{k-1}\}$ . Llamaremos a tal orden un  $w$ -orden de  $V(D) - \{x\}$  y diremos que un vértice  $v_1$  es  $w$ -anterior a otro vértice  $v_2$  si  $v_1$  aparece antes que  $v_2$  en el  $w$ -orden (es decir, si  $\{v_2\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D - \{x, w_0, \dots, w_{m-1}\}$  para algún  $m$  tal que  $w_m = v_2$ , donde  $v_1 \in \{w_0, \dots, w_{m-1}\}$ ).

Si  $\{x\}$  es absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D - \{x\}$  entonces  $\{x\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$ , contradiciendo nuestra suposición inicial. Por lo tanto existe un vértice en  $D - \{x, w_0\}$  que no es absorbido por trayectorias dirigidas

monocromáticas por  $x$  (recordemos que existe una  $w_0x$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ ).

Sea  $k = \min \{i \in \mathbb{N} \mid \exists w_i x\text{-trayectoria dirigida monocromática en } D\}$  (notemos que por la elección de  $k$ , todos los vértices  $w$ -anteriores a  $w_k$  son absorbidos por trayectorias dirigidas monocromáticas por  $x$ , es decir, para cada  $0 \leq i < k$  existe una  $w_i x$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ ).

Si  $\{x, w_k\}$  es un conjunto independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$ , entonces  $\{x, w_k\}$  es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$  (esto se debe a que  $x$  absorbe por trayectorias dirigidas monocromáticas a los vértices  $w$ -anteriores a  $w_k$ , mientras que  $w_k$  absorbe por trayectorias dirigidas monocromáticas a los vértices restantes que son  $w$ -posteriores a  $w_k$ ), contradiciendo nuestra suposición inicial.

Entonces existe una  $xw_k$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  (pues  $\{x, w_k\}$  no es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$  pero no existe una  $w_k x$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ ) y por consiguiente  $(x, w_k) \in F(C(D))$  por definición de  $C(D)$ , de hecho  $(x, w_k) \in F(\text{Asim}(C(D)))$  ya que no existe una  $w_k x$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ .

Sea  $u_0 = w_k$ .

Debe existir un vértice en el  $w$ -orden de  $V(D) - \{x\}$  tal que no sea absorbido por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$  por  $u_0$  (de lo contrario  $\{u_0\}$  absorbe a  $V(D) - \{x\}$  y dado que existe una  $xu_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , entonces  $\{u_0\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$ , contradiciendo nuestra suposición inicial) y que deba ser  $w$ -anterior a  $u_0$  (pues recordemos que  $\{u_0 = w_k\}$  es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D - \{x, w_0, w_1, \dots, w_{k-1}\}$ ).

Sea  $t_1 = \min \{i \geq 0 \mid \exists w_i u_0\text{-trayectoria dirigida monocromática en } D\}$ .

Denotemos  $u_1 = w_{t_1}$ .

Observemos que existe una  $u_0 u_1$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ : sabemos ya que no existe una  $u_1 u_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  (por la elección de  $t_1$ ), y si  $\{u_0, u_1\}$  es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$  entonces es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$  (pues  $w_t$  es absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $V(D) - \{x, w_0, \dots, w_{t-1}\}$ ,  $w_k$  es absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $V(D) - \{x, w_0, \dots, w_{k-1}\}$ , con  $t$  menor que  $k$ ,  $u_0$  absorbe por trayectorias dirigidas monocromáticas a  $\{w_0, w_1, \dots, w_{t-1}\}$  por la elección de  $t$ , y se sabe además que  $u_0$  absorbe a  $x$  por trayectorias dirigidas monocromáticas), lo que contradice nuestra suposición inicial. Por lo tanto existe una  $u_0 u_1$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ .

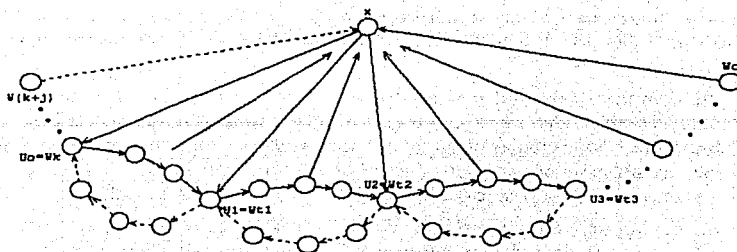
Entonces  $(u_0, u_1) \in F(C(D))$  por definición de  $C(D)$ , y de hecho  $(u_0, u_1) \in F(\text{Asim}(C(D)))$  (pues no existe una  $u_1 u_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ ).

De igual manera definimos los siguientes  $u_r$  vértices en el nuevo orden que denominaremos  $u$ -orden; suponiendo que  $u_0, u_1, \dots, u_r$  ya están definidos, procedamos a construir el siguiente elemento del  $u$ -orden:

- Si no existe una  $xu_r$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , entonces  $u_r$  es el último vértice de la sucesión de vértices definidos según el  $u$ -orden,<sup>1</sup> y existe una  $u_r x$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  (pues  $u_r$  es  $w$ -anterior a  $w_k$  y por la elección de  $k$ ).

<sup>1</sup>Recordemos que existe al menos un vértice  $w$  tal que no existe una  $xw$ -trayectoria dirigida monocromática, a saber  $w = w_0$ , de ahí que  $u_r$  esté bien definido

Figura: u-orden en  $V(D)-\{x\}$



- Si existe una  $xu_r$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , entonces debe existir un vértice en el  $w$ -orden de  $V(D)-\{x\}$  tal que no sea absorbido por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$  por  $u_r$  (de lo contrario  $\{u_r\}$  absorbe por trayectorias dirigidas monocromáticas a  $V(D)-\{x\}$  y dado que existe un  $xu_r$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , entonces  $\{u_r\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$ , contradiciendo nuestra suposición inicial) y que deba ser  $w$ -anterior a  $u_r$  (pues recordemos que  $\{u_r = w_j\}$ , para algún  $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ , es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D-\{x, w_0, w_1, \dots, w_{j-1}\}$ ). Sea  $t_{r+1} = \min \{i \in \mathbb{N} \mid \nexists w_i u_r\text{-trayectoria dirigida monocromática en } D\}$ . Denotemos  $u_{r+1} = w_{t_{r+1}}$ . Observemos que existe una  $u_r u_{r+1}$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ : sabemos que no existe una  $u_{r+1} u_r$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  (por la elección de  $t_{r+1}$ ), y si  $\{u_{r+1}, u_r\}$  es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$  entonces es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$  (pues  $w_{t_{r+1}}$  es absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $V(D)-\{x, w_0, \dots, w_{t_{r+1}-1}\}$ ,  $w_j = u_r$  es absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $V(D)-\{x, w_0, \dots, w_{j-1}\}$ , con  $t_{r+1}$  menor que  $j$ ,  $u_r$  absorbe por trayectorias dirigidas monocromáticas a  $\{w_0, w_1, \dots, w_{t_{r+1}-1}\}$  por la elección de  $t_{r+1}$ , y se sabe además que  $u_r$  absorbe a  $x$  por trayectorias dirigidas monocromáticas), contradiciendo nuestra suposición inicial. Por lo tanto existe una  $u_r u_{r+1}$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D^2$ . Entonces  $(u_r, u_{r+1}) \in F(C(D))$  por definición de  $C(D)$ , y de hecho  $(u_r, u_{r+1}) \in F(\text{Asim}(C(D)))$  (pues no existe una  $u_{r+1} u_r$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ ).

Así definimos el  $u$ -orden, el cual no necesariamente incluye a todos los vértices de  $D-\{x\}$ .

La sucesión de vértices definidos según el  $u$ -orden es finita, pues  $D$  lo es y existe un  $w_i$  (a saber,  $w_0$ ) tal que no existe una  $xw_i$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ . Sea  $u_m$  el  $u$ -último vértice de la sucesión  $(u_i)$ , y por la definición de tal sucesión sabemos que no existe una  $xu_m$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  (de otro modo se puede definir el vértice  $u_{m+1}$ ).

<sup>2</sup>En realidad basta el siguiente argumento para la existencia de tal trayectoria: como  $D-\{x\}$  es Torneo, entonces  $[u_r, u_{r+1}] \in F(D)$ , y dado que no existe una  $u_{r+1} u_r$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , entonces  $(u_{r+1}, u_r) \notin F(C(D))$  y por tanto  $(u_{r+1}, u_r) \notin F(D)$ , y se sigue que  $(u_r, u_{r+1}) \in F(D)$ , que es una  $u_r u_{r+1}$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ .



Notemos que existe una  $u_m x$ -trayectoria dirigida monocromática en D, pues  $u_m$  es w-anterior a  $w_k$  y por la elección de k.

En conclusión, existe una  $u_i u_{i+1}$ -trayectoria dirigida monocromática en D (con  $i=0, 1, \dots, m-1$ ) debido al u-orden, y por la misma razón no existe una  $u_{i+1} u_i$ -trayectoria dirigida monocromática en D; existe una  $x u_0$ -trayectoria dirigida monocromática en D y no existe una  $u_0 x$ -trayectoria dirigida monocromática en D; y existe una  $u_m x$ -trayectoria dirigida monocromática en D y no existe una  $x u_m$ -trayectoria dirigida monocromática en D. Entonces, por definición de C(D) se tiene que  $\{(x, u_0), (u_0, u_1), \dots, (u_{m-1}, u_m), (u_m, x)\}$  es un conjunto de flechas asimétricas en C(D), de modo que el ciclo  $\gamma = (x, u_0, u_1, u_2, \dots, u_m, x) \subseteq \text{Asim}(C(D))$  está bien definido, y además se tiene que  $x \in V(\gamma)$ .

Veamos que  $y \in V(\gamma)$ : si  $y \notin V(\gamma)$  entonces la subdigráfica propia inducida por  $V(\gamma)$ ,  $D[V(\gamma)]$ , es una subdigráfica propia de D (pues  $x$  &  $y$  son los únicos vértices no adyacentes entre sí) y por hipótesis tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, es decir, existe  $z \in V(\gamma)$  tal que  $\{z\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D[V(\gamma)]$ , contradiciendo el hecho de que no existe algún vértice de  $\gamma$  que absorba por trayectorias dirigidas monocromáticas a todos los demás vértices del ciclo  $\gamma$ <sup>3</sup>. Por lo tanto  $y \in V(\gamma)$ <sup>4</sup>.

Por lo tanto  $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$ , que es la primer parte de la afirmación (ii) que se quería demostrar.

Veamos ahora que para cualesquiera dos vértices no consecutivos de  $\gamma$  existe una flecha simétrica entre ellos en C(D):

- Sean  $u_i, u_j \in V(\gamma) - \{x\} = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ , tales que  $j \notin \{i+1, i-1\}$ , y sin pérdida de generalidad supongamos que  $i$  es menor que  $j$  (i.e.  $j=i+k$ , para algún  $k \geq 2$ ). Por demostrar que  $(u_i, u_j) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ : por construcción del u-orden,  $u_i$  y  $u_j$  son elementos del w-orden, por lo que  $u_i = w_{t_i}$  y  $u_j = w_{t_j}$  (conservando la notación usada para la construcción del u-orden, a la que agregamos que  $u_0 = w_k = w_{t_0}$ ). Ahora bien,  $u_j = w_{t_j}$  absorbe por trayectorias dirigidas monocromáticas a todo vértice w-posterior a él (tal es el caso de  $u_i$ ) ya que  $u_j = w_{t_j}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $V(D) - \{x, w_0, w_1, \dots, w_{t_j-1}\}$ , por lo tanto existe una  $u_i u_j$ -trayectoria dirigida monocromática, y por consiguiente  $(u_i, u_j) \in F(C(D))$  por definición de C(D). Por otra parte, recordemos que  $w_{t_i+1} = (u_{i+1})$  es el primer vértice en el w-orden tal que no existe una  $w_{t_i+1} w_{t_i}$ -trayectoria dirigida monocromática, entonces para todos los u vértices w-antiores a  $w_{t_i+1} = (u_{i+1})$ , se tiene que existe una  $u w_{t_i}$ -trayectoria dirigida monocromática en D, en particular existe una  $w_{t_j} w_{t_i}$ -trayectoria dirigida monocromática en D (pues  $w_{t_j}$  es w-anterior a  $w_{t_i+1}$  dado que  $j=i+k$ , para algún  $k \geq 2$ ), i.e. existe una  $u_j u_i$ -trayectoria dirigida monocromática en D, y por consiguiente  $(u_i, u_j) \in F(C(D))$  por definición de C(D). Por lo tanto  $(u_i, u_j) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ .

- Sea  $x$  &  $u_i \in V(\gamma) - \{u_0, u_m\} = \{x, u_1, u_2, \dots, u_{m-1}\}$ . Por demostrar que  $(x, u_i) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ : Notemos primero que  $u_i$  es u-anterior a  $u_m$  en el u-orden. Ahora bien, como  $u_m$  es el primer vértice en el u-orden tal que no existe una  $x u_m$ -trayectoria dirigida monocromática en D, entonces existe una  $x u_i$ -trayectoria dirigida monocromática en D, y por consiguiente  $(x, u_i) \in F(C(D))$  por definición de C(D). Por otra parte  $\forall u_i \in \{u_1, u_2, \dots, u_{m-1}\}$  [ $u_i$  es w-anterior a  $w_k = u_0$ ] por la construcción del u-orden, entonces existe una  $u_i x$ -trayectoria dirigida monocromática en D, debido a la elección de k; y por consiguiente  $(x, u_i) \in F(C(D))$  por definición de C(D). Por lo tanto  $(x, u_i) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ .

<sup>3</sup>Por construcción del ciclo  $\gamma$ , x absorbe a cualquier vértice de  $\gamma$  excepto a  $u_0$ ,  $u_i$  absorbe a cualquier vértice de  $\gamma$  excepto a  $u_{i+1}$  ( $0 \leq i \leq m$ ), y  $u_m$  absorbe a cualquier vértice de  $\gamma$  excepto a x

<sup>4</sup>Otro argumento para justificar que  $y \in V(\gamma)$  es el siguiente:  $D[V(\gamma)]$  es una subdigráfica completa, y por ser subdigráfica propia de D, tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, al igual que todas sus subdigráficas inducidas; por lo tanto  $D[V(\gamma)]$  es núcleo perfecta por trayectorias dirigidas monocromáticas, de manera que  $C(D[V(\gamma)])$  es núcleo perfecta y completa; entonces por el Teorema 2.11 se tiene que cada ciclo dirigido contenido en  $C(D[V(\gamma)])$  tiene al menos una flecha simétrica, lo que contradice que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ .

Por lo tanto para cualesquiera dos vértices no consecutivos de  $\gamma$  existe una flecha simétrica entre ellos en  $C(D)$ .

†

Tras el análisis anterior, la pregunta inmediata es si los argumentos utilizados en el Teorema 5.1 funcionan para digráficas de la forma  $D \cong T_n - \{[x, y_1], [x, y_2], \dots, [x, y_k]\}$  donde  $\{y_i\}$  es un conjunto de vértices adyacentes a  $x$  en  $T_n$ , con  $k \geq i \geq 1$ , es decir, si  $D$  resulta de eliminar más de una flecha de la forma  $[x, y_i]$  de algún torneo  $m$ -coloreado  $T_n$ . Afirmamos que efectivamente los argumentos utilizados anteriormente funcionan para este nuevo problema pero con la siguiente condición: si  $D$  resulta de eliminar todas las flechas de la forma  $[x, y_i]$  de algún torneo  $m$ -coloreado  $T_n$ , o bien, si  $D$  es la digráfica que se obtiene al eliminar a los más  $n-3$  flechas de la forma  $[x, y_i]$  de algún torneo  $m$ -coloreado  $T_n$  (con  $\delta_{T_n}(x) = n-1$ ).

### Teorema 5.2

Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada de orden  $n$  que resulta de eliminar todas o a lo más  $n-3$  flechas de la forma  $[x, y_i]$  de algún torneo  $m$ -coloreado  $T_n$ , donde  $n-3 \geq i \geq 1$  (i.e.  $D \cong T_n - \{[x, y_1], [x, y_2], \dots, [x, y_k]\}$ , con  $n-3 \geq k$ ); y además, tal que  $\delta_D^+(x) \geq 1$  &  $\delta_D^-(x) \geq 1$ . Si toda subdigráfica inducida propia de  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, entonces se cumple al menos una de las siguientes afirmaciones:

- i)  $D$  tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.
- ii) Existe un ciclo dirigido  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D)) \mid \{x, y_r\} \subseteq V(\gamma)$  para algún  $k \geq r \geq 1$ ; y para cualesquiera dos vértices no consecutivos de  $\gamma$  existe una flecha simétrica entre ellos en  $C(D)$ .

### Demostración

Si  $D$  resulta de eliminar todas las flechas de la forma  $[x, y_i]$  de algún torneo  $m$ -coloreado  $T_n$ , dado que  $D - \{x\}$  tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, digamos  $\{n\}$  (pues  $D - \{x\}$  es una subdigráfica propia inducida de  $D$ ), entonces  $\{x, n\}$  es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D$  ( $n$  es absorbente en  $D - \{x\}$ , y entre  $x$  y  $n$  no hay trayectorias dirigidas monocromáticas debido a la construcción de  $D$ ). Por lo tanto el Teorema se cumple.

Si  $D$  es una digráfica  $m$ -coloreada de orden  $n$  que resulta de eliminar a lo más  $n-3$  flechas de la forma  $[x, y_i]$  de algún torneo  $m$ -coloreado  $T_n$ , donde  $n-3 \geq i \geq 1$ :

Supongamos que  $D$  no tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, así que se probará la afirmación (ii), para ello definamos primero un orden en  $V(D) - \{x\}$  de la siguiente forma:

- Por hipótesis toda subdigráfica inducida propia de  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, de ahí que  $D - \{x\}$  tiene un vértice, digamos  $w_0$ , tal que  $\{w_0\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D - \{x\}$ .
- Si existe una  $xw_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , entonces  $w_0$  es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D$ , contradiciendo nuestra suposición inicial. Por lo tanto no existe alguna  $xw_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ .
- Si  $\{x, w_0\}$  es un conjunto independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas, entonces  $w_0 = y$  (pues los únicos vértices no adyacentes entre sí en  $D$  son  $x$  &  $y$ ) y  $\{x, w_0\}$  es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$ , contradiciendo nuestra suposición inicial. Por lo tanto  $\{x, w_0\}$  no es un conjunto independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$ , y dado que no existe una  $xw_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , entonces existe alguna  $w_0x$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , y por con-

<sup>5</sup>He aquí la utilidad de pedir como condición inicial que  $\delta_D^-(x) \geq 1$

siguiente  $(w_0, x) \in F(C(D))$  por definición de  $C(D)$ , y de hecho  $(w_0, x) \in F(\text{Asim}(C(D)))$  (pues no existe una  $xw_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ ).

-Ahora,  $D-\{x, w_0\}$  es una subgráfica propia inducida de  $D$ , entonces por hipótesis existe  $w_1 \in V(D-\{x, w_0\})$  tal que  $\{w_1\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D-\{x, w_0\}$ .

-Continuando con este proceso podemos establecer un orden en los vértices de  $D-\{x\}$ , de manera que  $\{w_k\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D-\{x, w_0, w_1, \dots, w_{k-1}\}$ . Llamaremos a tal orden un  $w$ -orden de  $V(D)-\{x\}$  y diremos que un vértice  $v_1$  es  $w$ -anterior a otro vértice  $v_2$  si  $v_1$  aparece antes que  $v_2$  en el  $w$ -orden (es decir, si  $\{v_2\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D-\{x, w_0, \dots, w_{m-1}\}$  para algún  $m$  tal que  $w_m = v_2$ , donde  $v_1 \in \{w_0, \dots, w_{m-1}\}$ ).

Si  $\{x\}$  es absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D-\{x\}$  entonces  $\{x\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$ , contradiciendo nuestra suposición inicial. Por lo tanto existe un vértice en  $D-\{x, w_0\}$  que no es absorbido por trayectorias dirigidas monocromáticas por  $x$  (recordemos que existe una  $w_0x$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ ).

Sea  $k = \min \{i \in \mathbb{N} \mid \nexists w_i x\text{-trayectoria dirigida monocromática en } D\}$  (notemos que por la elección de  $k$ , todos los vértices  $w$ -anteriores a  $w_k$  son absorbidos por  $x$ , es decir, para cada  $0 \leq i \leq k$  existe una  $w_i x$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ ).

Si  $\{x, w_k\}$  es un conjunto independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$ , entonces  $\{x, w_k\}$  es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$  (ya que  $x$  absorbe por trayectorias dirigidas monocromáticas los vértices  $w$ -anteriores a  $w_k$ , mientras que  $w_k$  absorbe por trayectorias dirigidas monocromáticas a los vértices restantes que son  $w$ -posteriores a  $w_k$ ), contradiciendo nuestra suposición inicial.

Entonces existe una  $xw_k$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D^0$  (pues  $\{x, w_k\}$  no es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$  pero no existe una  $w_k x$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ ) y por consiguiente  $(x, w_k) \in F(C(D))$  por definición de  $C(D)$ , de hecho  $(x, w_k) \in F(\text{Asim}(C(D)))$  ya que no existe una  $w_k x$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ .

Sea  $u_0 = w_k$ .

Debe existir un vértice en el  $w$ -orden de  $V(D)-\{x\}$  tal que no sea absorbido por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$  por  $u_0$  (de lo contrario  $\{u_0\}$  absorbe a  $V(D)-\{x\}$  y dado que existe un  $xu_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , entonces  $\{u_0\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$ , contradiciendo nuestra suposición inicial) y que deba ser  $w$ -anterior a  $u_0$  (pues recordemos que  $\{u_0 = w_k\}$  es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D-\{x, w_0, w_1, \dots, w_{k-1}\}$ ).

Sea  $t_1 = \min \{i \geq 0 \mid \nexists w_i u_0\text{-trayectoria dirigida monocromática en } D\}$ .

Denotemos  $u_1 = w_{t_1}$ .

Observemos que existe una  $u_0 u_1$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ : sabemos ya que no existe una  $u_1 u_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  (por la elección de  $t_1$ ), y si  $\{u_0, u_1\}$  es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$  entonces es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$  (pues  $w_t$  es absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $V(D)-\{x, w_0, \dots, w_{t-1}\}$ ,  $w_k$  es absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $V(D)-\{x, w_0, \dots, w_{k-1}\}$ , con  $t$  menor que  $k$ ,  $u_0$  absorbe por trayectorias dirigidas monocromáticas a  $\{w_0, w_1, \dots, w_{t-1}\}$  por la elección de  $t$ , y se sabe

<sup>6</sup>He aquí la utilidad de pedir como condición inicial que  $\delta_D^+(x) \geq 1$ .

además que  $u_0$  absorbe a  $x$  por trayectorias dirigidas monocromáticas), lo que contradice nuestra suposición inicial. Por lo tanto existe una  $u_0 u_1$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ .

Entonces  $(u_0, u_1) \in F(C(D))$  por definición de  $C(D)$ , y de hecho  $(u_0, u_1) \in F(\text{Asim}(C(D)))$  (pues no existe una  $u_1 u_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ ).

De igual manera definimos los siguientes  $u_r$  vértices en el nuevo orden que denominaremos  $u$ -orden; suponiendo que  $u_0, u_1, \dots, u_r$  ya están definidos, procedamos a construir el siguiente elemento del  $u$ -orden:

- Si no existe una  $x u_r$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  entonces  $u_r$  es el último vértice de la sucesión de vértices definidos según el  $u$ -orden,<sup>7</sup> y existe una  $u_r x$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  (pues  $u_r$  es  $w$ -anterior a  $w_k$  y por la elección de  $k$ ).

- Si existe una  $x u_r$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , entonces debe existir un vértice en el  $w$ -orden de  $V(D) - \{x\}$  tal que no sea absorbido por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$  por  $u_r$  (de lo contrario  $\{u_r\}$  absorbe por trayectorias dirigidas monocromáticas a  $V(D) - \{x\}$  y dado que existe un  $x u_r$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , entonces  $\{u_r\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$ , contradiciendo nuestra suposición inicial) y que deba ser  $w$ -anterior a  $u_r$  (pues recordemos que  $\{u_r = w_j\}$ , para algún  $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ , es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D - \{x, w_0, w_1, \dots, w_{j-1}\}$ ). Sea  $t_{r+1} = \min \{i \in \mathbf{N} \mid \nexists w_i u_r\text{-trayectoria dirigida monocromática en } D\}$ . Denotemos  $u_{r+1} = w_{t_{r+1}}$ . Observemos que existe una  $u_r u_{r+1}$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  (por la elección de  $t_{r+1}$ ), y si  $\{u_{r+1}, u_r\}$  es independiente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$  entonces es un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$  (pues  $w_{t_{r+1}}$  es absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $V(D) - \{x, w_0, \dots, w_{t_{r+1}-1}\}$ ,  $w_j = u_r$  es absorbente por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $V(D) - \{x, w_0, \dots, w_{j-1}\}$ , con  $t_{r+1}$  menor que  $j$ ,  $u_r$  absorbe por trayectorias dirigidas monocromáticas a  $\{w_0, w_1, \dots, w_{t_{r+1}-1}\}$  por la elección de  $t_{r+1}$ , y se sabe además que  $u_r$  absorbe a  $x$  por trayectorias dirigidas monocromáticas), contradiciendo nuestra suposición inicial. Por lo tanto existe una  $u_r u_{r+1}$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ <sup>8</sup>. Entonces  $(u_r, u_{r+1}) \in F(C(D))$  por definición de  $C(D)$ , y de hecho  $(u_r, u_{r+1}) \in F(\text{Asim}(C(D)))$  (pues no existe una  $u_{r+1} u_r$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ ).

Es así como definimos el  $u$ -orden, el cual no necesariamente incluye a todos los vértices de  $D - \{x\}$ .

La sucesión de vértices definidos según el  $u$ -orden es finita, pues  $D$  lo es y existe un  $w_i$  (a saber,  $w_0$ ) tal que no existe una  $x w_i$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ . Sea  $u_m$  el  $u$ -último vértice de la sucesión  $(u_i)$ , y por la definición de tal sucesión sabemos que no existe una  $x u_m$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  (de otro modo se puede definir el vértice  $u_{m+1}$ ).

Notemos que existe una  $u_m x$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , pues  $u_m$  es  $w$ -anterior a  $w_k$  y por la elección de  $k$  (y recordemos además que  $\delta_{\bar{w}}(x) \geq 1$ ).

En conclusión, existe una  $u_i u_{i+1}$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  (con  $i=0, 1, \dots, m-1$ ) debido al  $u$ -orden, y por la misma razón no existe una  $u_{i+1} u_i$ -trayectoria dirigida

<sup>7</sup>Recordemos que existe al menos un vértice  $w$  tal que no existe una  $xw$ -trayectoria dirigida monocromática, a saber  $w = w_0$ , de ahí que  $u_r$  esté bien definido

<sup>8</sup>En realidad basta el siguiente argumento para la existencia de tal trayectoria: como  $D - \{x\}$  es Torneo, entonces  $\{u_r, u_{r+1}\} \in F(D)$ , y dado que no existe una  $u_{r+1} u_r$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , entonces  $(u_{r+1}, u_r) \notin F(C(D))$  y por tanto  $(u_{r+1}, u_r) \notin F(D)$ , y se sigue que  $(u_r, u_{r+1}) \in F(D)$ , que es una  $u_r u_{r+1}$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$

monocromática en D; existe una  $xu_0$ -trayectoria dirigida monocromática en D y no existe una  $u_0x$ -trayectoria dirigida monocromática en D; y existe una  $u_mx$ -trayectoria dirigida monocromática en D y no existe una  $xu_m$ -trayectoria dirigida monocromática en D. Entonces, por definición de  $C(D)$  se tiene que  $\{(x, u_0), (u_0, u_1), \dots, (u_{m-1}, u_m), (u_m, x)\}$  es un conjunto de flechas asimétricas en  $C(D)$ , de modo que el ciclo  $\gamma = (x, u_0, u_1, u_2, \dots, u_m, x) \subseteq \text{Asim}(C(D))$  está bien definido, y además se tiene que  $x \in V(\gamma)$ .

Veamos que  $\exists y_i \in V(\gamma)$ , para algún  $k \geq i \geq 1$ : si  $\forall y_i [y_i \notin V(\gamma)]$  entonces la subdigráfica propia inducida por  $V(\gamma)$ ,  $D[V(\gamma)]$ , es una subdigráfica completa de D (pues los únicos vértices no adyacentes entre sí son  $x$  &  $y_i$ , para cada  $i$ ) y por hipótesis tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, es decir, existe  $z \in V(\gamma)$  tal que  $\{z\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $D[V(\gamma)]$ , contradiciendo el hecho de que no existe algún vértice de  $\gamma$  que absorba por trayectorias dirigidas monocromáticas a todos los demás vértices del ciclo  $\gamma$ <sup>9</sup>. Por lo tanto  $\exists y_i \in V(\gamma)$ , para algún  $k \geq i \geq 1$ <sup>10</sup>.

Por lo tanto  $\{x, y_i\} \subseteq V(\gamma)$  (para algún  $k \geq i \geq 1$ ), que es la primer parte de la afirmación (ii) que se quería demostrar.

Veamos ahora que para cualesquiera dos vértices no consecutivos de  $\gamma$  existe una flecha simétrica entre ellos en  $C(D)$ :

- Sean  $u_i, u_j \in V(\gamma) - \{x\} = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ , tales que  $j \notin \{i+1, i-1\}$ , y sin pérdida de generalidad supongamos que  $i$  es menor que  $j$  (i.e.  $j=i+k$ , para algún  $k \geq 2$ ). P.d.  $(u_i, u_j) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ : por construcción del u-orden,  $u_i$  &  $u_j$  son elementos del w-orden, por lo que  $u_i = w_{t_i}$  y  $u_j = w_{t_j}$  (conservando la notación usada para la construcción del u-orden, a la que agregamos que  $u_0 = w_k = w_{t_0}$ ). Ahora bien,  $u_j = w_{t_j}$  absorbe por trayectorias dirigidas monocromáticas a todo vértice w-posterior a él (tal es el caso de  $u_i$ ) ya que  $u_j = w_{t_j}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de  $V(D) - \{x, w_0, w_1, \dots, w_{t_j-1}\}$ , por lo tanto existe una  $u_i u_j$ -trayectoria dirigida monocromática, y por consiguiente  $(u_i, u_j) \in F(C(D))$  por definición de  $C(D)$ . Por otra parte, recordemos que  $w_{t_i+1} = (u_{i+1})$  es el primer vértice en el w-orden tal que no existe una  $w_{t_i+1} w_{t_i}$ -trayectoria dirigida monocromática, entonces para todos los u vértices w-antiores a  $w_{t_i+1} = (u_{i+1})$ , se tiene que existe una  $w_{t_i}$ -trayectoria dirigida monocromática en D, en particular existe una  $w_{t_j} w_{t_i}$ -trayectoria dirigida monocromática en D (pues  $w_{t_j}$  es w-anterior a  $w_{t_i+1}$  dado que  $j=i+k$ , para algún  $k \geq 2$ ), i.e. existe una  $u_j u_i$ -trayectoria dirigida monocromática en D, y por consiguiente  $(u_i, u_j) \in F(C(D))$  por definición de  $C(D)$ . Por lo tanto  $(u_i, u_j) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ .
- Sea  $x$  &  $u_i \in V(\gamma) - \{x, u_0, u_m\} = \{u_1, u_2, \dots, u_{m-1}\}$ . P.d.  $(x, u_i) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ : Notemos primero que  $u_i$  es u-anterior a  $u_m$  en el u-orden. Ahora bien, como  $u_m$  es el primer vértice en el u-orden tal que no existe una  $xu_m$ -trayectoria dirigida monocromática en D, entonces existe una  $xu_i$ -trayectoria dirigida monocromática en D, y por consiguiente  $(x, u_i) \in F(C(D))$  por definición de  $C(D)$ . Por otra parte  $\forall u_i \in \{u_1, u_2, \dots, u_{m-1}\}$   $\{u_i$  es w-anterior a  $w_k = u_0\}$  por la construcción del u-orden, entonces existe una  $u_i x$ -trayectoria dirigida monocromática en D, debido a la elección de  $k$ ; y por consiguiente  $(x, u_i) \in F(C(D))$  por definición de  $C(D)$ . Por lo tanto  $(x, u_i) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ .

Así que entre cualesquiera dos vértices no consecutivos de  $\gamma$  existe una flecha simétrica  $C(D)$ .

†

<sup>9</sup>Por construcción del ciclo  $\gamma$ ,  $x$  absorbe a cualquier vértice de  $\gamma$  excepto a  $u_0$ ,  $u_i$  absorbe a cualquier vértice de  $\gamma$  excepto a  $u_{i+1}$  ( $0 \leq i \leq m$ ), y  $u_m$  absorbe a cualquier vértice de  $\gamma$  excepto a  $x$

<sup>10</sup>Otro argumento para justificar que  $\exists y_i \in V(\gamma)$ , para algún  $k \geq i \geq 1$ , es el siguiente:  $D[V(\gamma)]$  es una subdigráfica completa, y es núcleo perfecta por trayectorias dirigidas monocromáticas por ser una subdigráfica inducida propia de D (y por hipótesis del Teorema), entonces  $C(D[V(\gamma)])$  es núcleo perfecta; entonces por el Teorema 4.0.4 se sigue que cada ciclo dirigido contenido en  $C(D[V(\gamma)])$  tiene al menos una flecha simétrica, lo que contradice que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$

Del Teorema 5.1 obtenemos el siguiente

### Corolario 5.1

Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada que resulta de eliminar una única flecha  $[x,y]$  de algún torneo  $m$ -coloreado  $T_n$  (i.e.  $D \cong T_n - [x,y]$ ) y tal que toda subdigráfica inducida propia de  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Si no existe un ciclo dirigido  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$  tal que  $\{x,y\} \subseteq V(\gamma)$  y tal que entre cualesquiera dos vértices no consecutivos de  $\gamma$  existe una flecha simétrica, entonces  $D$  es una digráfica núcleo perfecta por trayectorias dirigidas monocromáticas (i.e. Si todo ciclo dirigido  $\gamma \subseteq C(D)$  tal que  $\{x,y\} \subseteq V(\gamma)$  y tal que entre cualesquiera dos vértices no consecutivos de  $\gamma$  existe una flecha simétrica, tiene al menos una flecha simétrica, entonces  $D$  es una digráfica núcleo perfecta por trayectorias dirigidas monocromáticas).

### Demostración

Por contrapositiva del Teorema 5.1

†

Es de importancia posterior hacer notar que la demostración del Teorema 5.1 (específicamente por la definición del  $w$ -orden) permite que la condición de que toda subdigráfica inducida propia de  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, pueda ser sustituida por la condición de que toda subdigráfica completa de  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, sin modificar el resultado del Teorema. Considerando ésta última observación, podemos enunciar el siguiente

### Corolario 5.2

Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada que resulta de eliminar una única flecha  $[x,y]$  de algún torneo  $m$ -coloreado  $T_n$  (i.e.  $D \cong T_n - [x,y]$ ) y tal que toda subdigráfica completa de  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Si no existe un ciclo dirigido  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$  tal que  $\{x,y\} \subseteq V(\gamma)$  y tal que entre cualesquiera dos vértices no consecutivos de  $\gamma$  existe una flecha simétrica, entonces  $D$  tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas (i.e. Si todo ciclo dirigido  $\gamma \subseteq C(D)$  tal que  $\{x,y\} \subseteq V(\gamma)$  y tal que entre cualesquiera dos vértices no consecutivos de  $\gamma$  existe una flecha simétrica, tiene al menos una flecha simétrica, entonces  $D$  tiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas).

Sea  $D$  una digráfica, una  $\{C_3, T_3\}$ - $m$ -coloración-libre de  $D$  es una  $m$ -coloración de  $D$  tal que todo torneo de orden 3 es casimonocromático. Denotemos con  $E$  a la clase de las digráficas tal que la cerradura de toda  $\{C_3, T_3\}$ - $m$ -coloración-libre de  $D$ , tiene núcleo. A continuación se probará que si una digráfica  $D$  es tal que  $D \cong T_n - [x,y]$  para algún torneo  $T_n$ , entonces  $D$  pertenece a  $E$  (Teorema 5.4), de hecho se probará que la cerradura de cualquier  $\{C_3, T_3\}$ - $m$ -coloración-libre de  $D$ , es núcleo perfecta (Teorema 5.5). Sin embargo es necesario probar previamente el siguiente teorema.

### Teorema 5.3

Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada que se obtiene de eliminar una única flecha de algún torneo  $m$ -coloreado (i.e.  $D \cong T_n - \{x, y\}$ ). Si  $D$  no contiene  $T_3$  ni  $C_3$ , entonces  $C(D)$  no contiene algún ciclo asimétrico  $\gamma$  tal que: a)  $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$ , y b) entre cualesquiera dos vértices no consecutivos de  $\gamma$ , existe una flecha simétrica.

### Demostración

Procediendo por contradicción, asumamos que existe un ciclo asimétrico  $\gamma$  contenido en  $C(D)$  tal que a)  $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$ , y b) entre cualesquiera dos vértices no consecutivos de  $\gamma$ , existe una flecha simétrica.

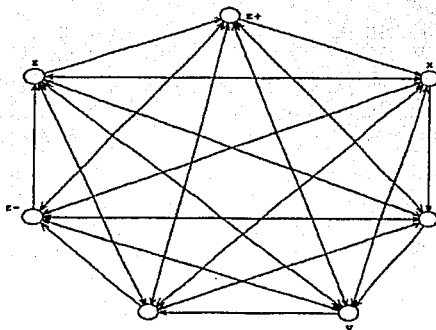
Serán probadas una serie de afirmaciones que permitirán llegar a una contradicción:

Sea  $z \in V(\gamma)$ , denotemos con  $z^-$  y  $z^+$  al predecesor y sucesor de  $z$  en  $\gamma$ , respectivamente. Nótese que por la segunda propiedad (b) de  $\gamma$  y dado que es un ciclo asimétrico, entonces  $z^-$  es el único vértice de  $\gamma$  tal que  $(z, z^-) \notin F(C(D))$  y  $z^+$  es el único vértice de  $\gamma$  tal que  $(z^+, z) \notin F(C(D))$ .

(1) Si  $z \in V(\gamma)$  entonces  $(z^+, z^-) \in F(C(D))$ .

Pues  $z$  es el único vértice en  $\gamma$  que no es absorbido por  $z^-$ . Además,  $z^-$  &  $z^+$  son vértices no consecutivos en  $\gamma$ , y por la propiedad (b) de  $\gamma$ , se tiene que existe una flecha simétrica entre ellos en  $C(D)$ .

Figura: Flechas de  $\gamma$  en  $C(D)$

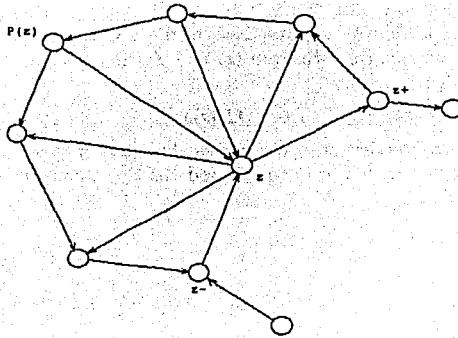


Ahora bien, como  $(z^+, z^-) \in F(C(D))$ , entonces por definición de  $C(D)$  se tiene que existe una  $(z^+z^-)$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ . Para  $z \in V(\gamma)$ , sea  $P(z)$  una  $(z^+z^-)$ -trayectoria dirigida monocromática de menor longitud en  $D$ .

(2) Si  $z \in V(\gamma)$  es adyacente en  $D$  a todo vértice de  $P(z)$ , entonces  $(z^-, z) \in F(D)$ ,  $(z, z^+) \in F(D)$ , y ambas flechas son del mismo color.

Como  $z$  es adyacente a todo vértice de  $P(z)$  en  $D$ , en particular  $z$  es adyacente a  $z^-$ , pero  $(z, z^-) \notin F(D)$  (de lo contrario  $(z, z^-) \in F(C(D))$  por definición de  $C(D)$ , contradiciendo que no existe una  $zz^-$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , pues  $(z^-, z) \in F(\text{Asim}(C(D)))$ ), por lo tanto  $(z^-, z) \in F(D)$ . Análogamente, como  $z$  es adyacente a todo vértice de  $P(z)$  en  $D$ , en particular  $z$  es adyacente a  $z^+$ , pero  $(z^+, z) \notin F(D)$  (de lo contrario  $(z^+, z) \in F(C(D))$  por definición de  $C(D)$ , contradiciendo que no existe una  $z^+z$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , pues  $(z, z^+) \in F(\text{Asim}(C(D)))$ ), por lo tanto  $(z, z^+) \in F(D)$ .

Figura (inciso 2): Flechas de  $\gamma$  en  $D$   
 Por demostrar que  $(z^-, z) \in F(D)$  y  $(z, z^+) \in F(D)$  son azules



Ahora, sin pérdida de generalidad, asumamos que  $(z, z^+)$  es una flecha azul, y veamos que  $(z^+, z)$  es también de color azul por medio de las siguientes afirmaciones:

(2a)  $P(z)$  no es azul.

De lo contrario, i.e. si  $P(z)$  es azul,  $(z, z^+) \cup P(z)$  contiene una  $zz^-$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , de lo que se sigue que  $(z, z^-) \in F(C(D))$ , contradiciendo que  $(z^-, z) \in F(\text{Asim}(C(D)))$ . Entonces, sin pérdida de generalidad, asumamos que  $P(z)$  es verde, y sea  $P(z) = (v_0 = z^+, v_1, v_2, \dots, v_t = z^-)$ .

(2b) Para  $t \geq i \geq 1$ ,  $(z^+, v_i) \in F(C(D))$  y es verde, y  $(v_i, z^-) \in F(C(D))$  y es verde.

Recordemos que  $P(z)$  es una  $z^+z^-$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  de color verde, de modo que recorriendo  $P(z)$  desde  $z^-$  hasta un vértice  $v_i$ , obtenemos una  $zv_i$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , y se sigue que  $(z, v_i) \in F(C(D))$  de color verde (por definición de  $C(D)$ ). De manera análoga, recorriendo  $P(z)$  desde  $v_i$  hasta  $z^-$ , obtenemos una  $v_iz^-$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , de donde se sigue que  $(v_i, z^-) \in F(C(D))$  y es de color verde (por definición de  $C(D)$ ).



Figura (inciso 2a): Si  $P(z)$  es azul

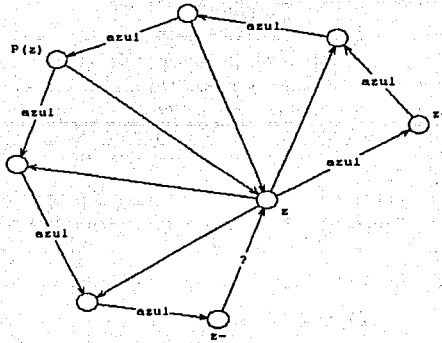
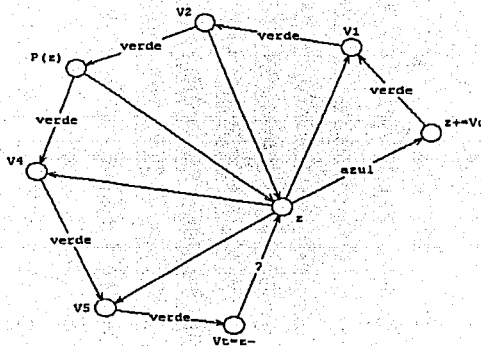


Figura (inciso 2b)



(2c) Para  $t \geq i \geq 1$ , la flecha entre  $z$  y  $v_i$  en  $D$  no es verde.

Recalquemos que hemos supuesto que  $z$  es adyacente en  $D$  a cada vértice de  $P(z)$ . Ahora, si  $(z, v_i) \in F(D)$  es verde, entonces  $(z, v_i) \cup (v_i, P(z), z^-)$  es una  $zz^-$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , y por tanto  $(z, z^-) \in F(C(D))$ , lo que contradice que  $(z^-, z) \in F(\text{Asim}(C(D)))$ . Análogamente, si  $(v_i, z) \in F(D)$  es verde, entonces  $(z^+, P(z), v_i) \cup (v_i, z)$  es una  $z^+z$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , y por tanto  $(z^+, z) \in F(C(D))$ , lo

que contradice que  $(z, z^+) \in F(\text{Asim}(C(D)))$ . Por lo tanto para  $t \geq i \geq 1$ , la flecha entre  $z$  y  $v_i$  en  $D$  no es verde.

(2d) Para  $t \geq i \geq 1$ , si la flecha entre  $z$  y  $v_{i-1}$  en  $D$  es azul, entonces la flecha entre  $z$  y  $v_i$  en  $D$  es azul también.

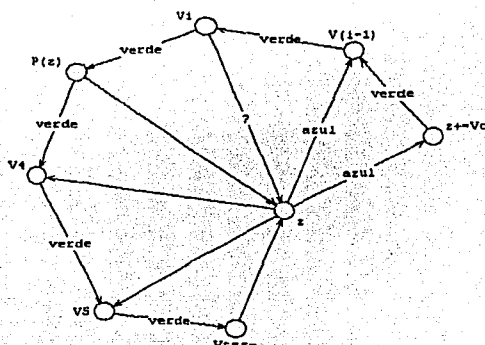
Tenemos que  $(v_{i-1}, v_i) \in F(D)$  es verde (pues es una flecha de  $P(z)$ ) y estamos asumiendo que la flecha entre  $z$  y  $v_{i-1}$  es azul, y como  $D$  no tiene  $T_3$  ni  $C_3$  por hipótesis, entonces la flecha entre  $z$  &  $v_i$  debe ser azul o verde. Pero por (2c) sabemos que tal flecha no puede ser verde, por lo tanto la flecha entre  $z$  &  $v_i$  es azul.

(2e)  $(z^-, z) \in F(D)$  y es azul.

Hemos asumido desde el inicio del inciso (2) que  $(z, z^+) \in F(D)$  es azul, donde  $z^+ = v_0$ , entonces, aplicando el inciso (2d)  $t$  veces, tenemos que la flecha entre  $z$  &  $v_t$  es azul (con  $v_t = z^-$ ), y sabemos ya que  $(z^-, z) \in F(D)$ .

Concluimos entonces que  $(z^-, z) \in F(D)$ ,  $(z, z^+) \in F(D)$ , y ambas flechas son azules.

Figura (inciso 2d): Si  $[z, v_{i-1}]_D$  es azul



(3) Si  $s \in V(\gamma) - \{x, y\}$ , entonces  $(s^-, s) \in F(D)$  y  $(s, s^+) \in F(D)$  y ambas flechas son del mismo color.

Como  $s \notin \{x, y\}$  entonces  $s$  es adyacente en  $D$  a todo vértice de  $P(s)$ , y se sigue por el inciso (2) que  $(s^-, s) \in F(D)$ ,  $(s, s^+) \in F(D)$  y que ambas flechas son del mismo color.

(4) Las trayectorias  $(x, \gamma, y)$  &  $(y, \gamma, x)$  son monocromáticas en  $D$ .

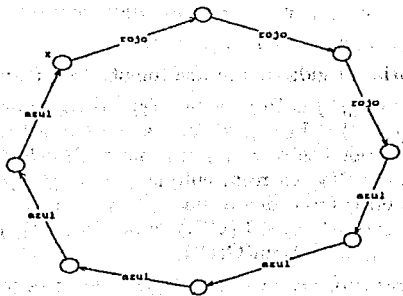
Todo vértice interior  $v_i$  en tales trayectorias es distinto de  $x$  &  $y$ , por lo tanto, por el inciso (3) se tiene que  $(v_i^-, v_i)$  y  $(v_i, v_i^+)$  son flechas de  $D$  con la misma coloración entre ellas.

(5)  $x$  &  $y$  no son vértices consecutivos en  $\gamma$ .

Supongamos lo contrario, i.e.  $x$  &  $y$  son vértices consecutivos en  $\gamma$ . Ahora, como  $(x, \gamma, y)$  y  $(y, \gamma, x)$  son trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$ , entonces  $(x, y) \in F(C(D))$  &  $(y, x) \in F(C(D))$ , de modo que  $(x, y)$  es una flecha simétrica en  $\gamma$ , contradiciendo que  $\gamma \in \text{Asim}(C(D))$ . Por lo tanto  $x$  &  $y$  no son vértices consecutivos en  $\gamma$ .

- (6) Las trayectorias monocromáticas  $(x, \gamma, y)$  y  $(y, \gamma, x)$  de  $D$  no tienen el mismo color.

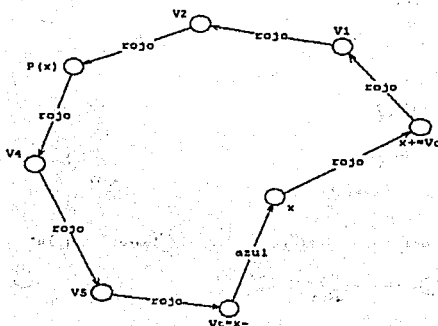
De lo contrario  $\gamma$  es monocromático y para cualesquiera dos vértices  $u, v \in V(\gamma)$ , existe una  $uv$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  y una  $vu$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , en particular para los vértices consecutivos en  $\gamma$ , por lo que  $(u, v) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ . Sin pérdida de generalidad supongamos que  $(x, \gamma, y)$  es roja en  $D$  y  $(y, \gamma, x)$  es azul en  $D$ .



- (7)  $P(x)$ , una  $x^+x^-$ -trayectoria dirigida monocromática de mínima longitud en  $D$ , no es roja ni azul.

Si  $P(x)$  es roja, entonces  $(x, x^+) \cup P(x)$  es una  $(xx^-)$ -trayectoria dirigida de color rojo en  $D$  (recordemos que  $(x, x^+) \in F(x, \gamma, y)$ ), de modo que  $(x, x^-)$  es una flecha simétrica de  $\gamma$  en  $C(D)$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ ; por lo tanto  $P(x)$  no es roja.

Figura (inciso 7): Si  $P(x)$  es roja



Ahora, si  $P(x)$  es azul, entonces  $P(x) \cup (x^-, x)$  es una  $(x^+x)$ -trayectoria dirigida de color azul en  $D$  (recordemos que  $(x^-, x) \in F(y, \gamma, x)$ ), de modo que  $(x^+, x)$  es una flecha simétrica de  $\gamma$  en  $C(D)$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ ; por lo tanto  $P(x)$  no es azul ni roja.

- (8)  $y \in V(P(x))$ . De lo contrario, i.e. si  $y \notin V(P(x))$ , entonces  $x$  es adyacente en  $D$  a todo vértice de  $P(x)$  (pues  $D - \{y\}$  es torneo), y por (2) se tiene que  $(x^-, x) \in F(D)$  y  $(x, x^+) \in F(D)$  y son flechas con el mismo color, lo que contradice que  $(x^-, x) \in F(y, \gamma, x)$  que es de color azul, y  $(x, x^+) \in F(x, \gamma, y)$  es de color rojo. Por lo tanto  $y \in V(P(x))$ .

Sea  $P(x) = (x^+ = a_0, a_1, a_2, \dots, a_r, y = a_{r+1}, \dots, x^-)$ .

- (9)  $P(y)$ , una  $y^+y^-$ -trayectoria dirigida de mínima longitud en  $D$ , no es roja ni azul.

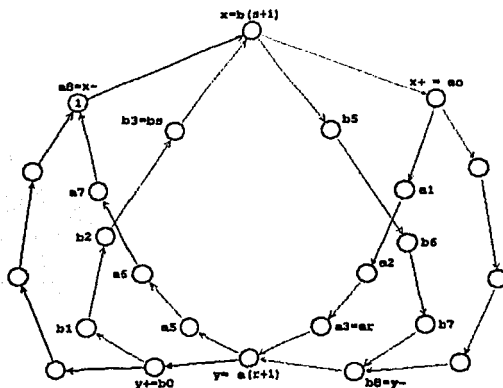
Si  $P(y)$  es azul, entonces  $(y, y^+) \cup P(y)$  es una  $(yy^-)$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  (recordemos que  $(y, y^+) \in F(y, \gamma, x)$  que es una trayectoria de color azul), de modo que  $(y, y^-) \in F(C(D))$  y por tanto  $(y^-, y)$  es una flecha simétrica de  $\gamma$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq F(\text{Asim}(C(D)))$ . Si  $P(y)$  es roja, entonces  $P \cup (y^-, y)$  es una  $(y^+y)$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  (recordemos que  $(y^-, y) \in F(x, \gamma, y)$  que es una trayectoria de color rojo), de modo que  $(y^+, y) \in F(C(D))$  y por tanto  $(y, y^+)$  es una flecha simétrica de  $\gamma$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq F(\text{Asim}(C(D)))$ .

- (10)  $x \in V(P(y))$ . De lo contrario, i.e. si  $x \notin V(P(y))$ , entonces  $y$  es adyacente en  $D$  a todo vértice de  $P(y)$  (pues los únicos vértices no adyacentes entre sí en  $D$ , son  $x$  &  $y$ ), y por (2) se tiene que  $(y^-, y) \in F(D)$  y  $(y, y^+) \in F(D)$  y son flechas con el mismo color, lo que contradice que  $(y^-, y) \in F(x, \gamma, y)$  que es de color rojo, y  $(y, y^+) \in F(y, \gamma, x)$  es de color azul. Por lo tanto  $x \in V(P(y))$ .

Sea  $P(y) = (y^+ = b_0, b_1, b_2, \dots, b_s = y, b_{s+1}, \dots, y^-)$ .

Analicemos ahora los dos posibles casos respecto a la coloración de  $P(y)$  y  $P(x)$ :

Caso A. Si  $P(x)$  y  $P(y)$  tienen la misma coloración. Sin pérdida de generalidad asumamos que ambas trayectorias son de color verde:

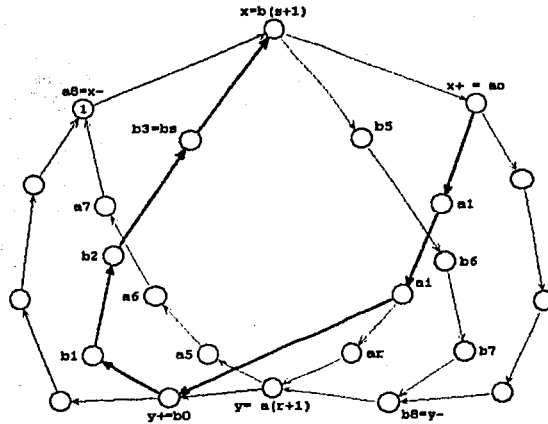
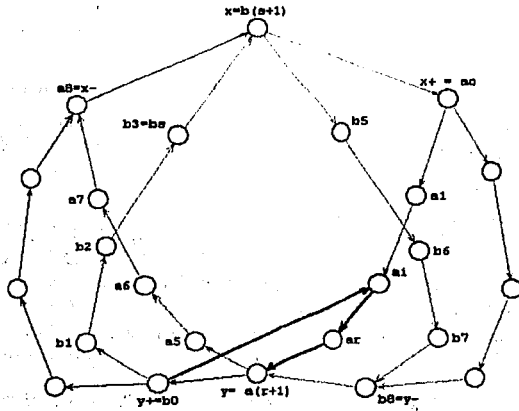


Analicemos como es la flecha en  $D$  entre  $x^+$  &  $y^+$ :

La flecha en  $D$  entre  $x^+$  &  $y^+$  ( $[x^+, y^+]_D$ ) existe pues  $\{x^+, y^+\} \not\subseteq \{x, y\}$  debido a que  $x$  &  $y$  no son adyacentes en  $\gamma$ , por lo tanto  $x^+$  &  $y^+$  son adyacentes en  $D$ .

(A1)  $[x^+, y^+]_D$  es azul:

a) Para toda  $r \geq i \geq 0$ ,  $[a_i, y^+]_D$  no es verde. En las siguientes figuras se muestra si  $(y^+, a_i) \in F(D)$  es verde y si  $(a_i, y^+) \in F(D)$  es verde, respectivamente:



Si  $(y^+, a_i) \in F(D)$  es verde, entonces  $(y^+, a_i) \cup (a_i, P(x), a_{r+1}=y)$  es una  $y^+y$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  y entonces  $(y^+, y) \in F(C(D))$ , lo que contradice que  $(y, y^+) \in F(\text{Asim}(C(D)))$ , por lo tanto  $(y^+, a_i) \in F(D)$  no es verde.

Si  $(a_i, y^+) \in F(D)$  es verde, entonces  $(x^+ = a_0, P(x), a_i) \cup (a_i, y^+) \cup (y^+ = b_0, P(y), b_{s+1}=x)$  es una  $x^+x$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  y entonces  $(x^+, x) \in F(C(D))$ , lo que contradice que  $(x, x^+) \in F(\text{Asim}(C(D)))$ , por lo tanto  $(a_i, y^+)$  no es verde.

b) Si para toda  $r \geq i \geq 0$ ,  $[a_{i+1}, y^+]_D$  es azul, entonces  $[a_i, y^+]_D$  es azul:  $[a_i, y^+]_D$  no es verde por el inciso anterior,  $(a_i, a_{i+1}) \in F(D)$  es verde, hemos supuesto que  $[a_{i+1}, y^+]_D$  es azul, y se sabe que  $D$  no contiene  $T_3$  ni  $C_3$ .

c)  $[y^+, a_{r+1}]_D$  es azul: pues  $a_{r+1} = y$  &  $(y, y^+) \in F(y, \gamma, x)$  es azul.

Entonces la flecha entre  $y^+$  &  $a_0$  es azul (aplicando  $r$  veces el argumento del inciso (b) a  $[y^+, a_{r+1}]_D$ ); pero recordemos que  $a_0 = x^+$ . Por lo tanto la flecha entre  $x^+$  &  $y^+$  es azul.

(A2)  $[x^+, y^+]_D$  es roja:

a) Para toda  $s \geq i \geq 0$ ,  $[b_i, x^+]_D$  no es verde:

Si  $(x^+, b_i) \in F(D)$  es verde, entonces  $(x^+, b_i) \cup (b_i, P(y), b_{s+1}=x)$  es una  $x^+x$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  y entonces  $(x^+, x) \in F(C(D))$ , lo que contradice que  $(x, x^+) \in F(\text{Asim}(C(D)))$ , por lo tanto  $(x^+, b_i) \in F(D)$  no es verde.

Si  $(b_i, x^+) \in F(D)$  es verde, entonces  $(y^+ = b_0, P(y), b_i) \cup (b_i, x^+) \cup (x^+ = a_0, P(x), a_{r+1}=y)$  es una  $y^+y$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  y entonces  $(y^+, y) \in F(C(D))$ , lo que contradice que  $(y, y^+) \in F(\text{Asim}(C(D)))$ , por lo tanto  $(b_i, x^+)$  no es verde.

Figura (inciso A2-a): Si  $(x^+, b_i) \in F(D)$  es verde

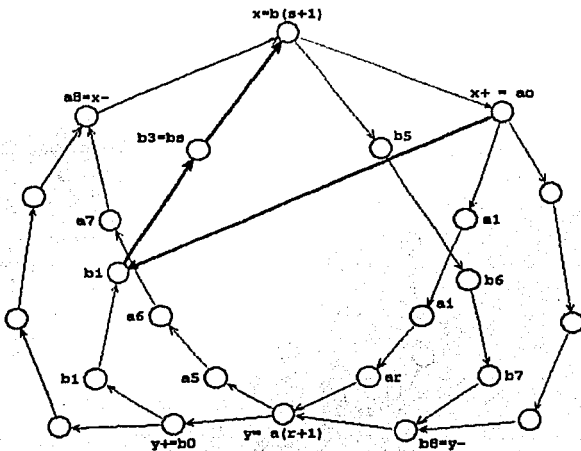
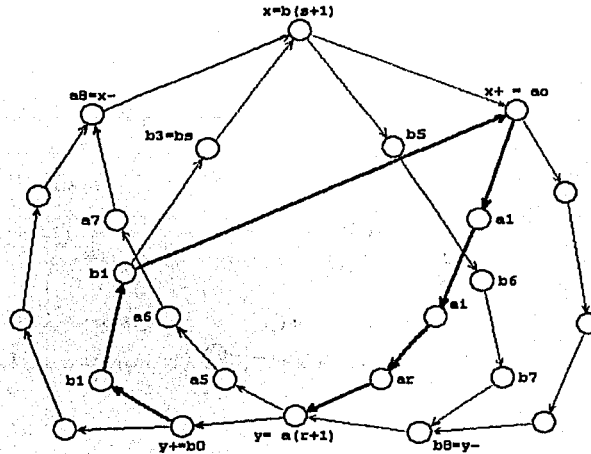


Figura (inciso A2-a): Si  $(b_i, x^+) \in F(D)$  es verde



b) Si para toda  $s \geq i \geq 0$ ,  $[b_{i+1}, x^+]_D$  es roja, entonces  $[b_i, x^+]_D$  es roja:  $[b_i, x^+]_D$  no es verde por el inciso anterior,  $(b_i, b_{i+1}) \in F(D)$  es verde, hemos supuesto que  $[b_{i+1}, x^+]_D$  es azul, y se sabe que  $D$  no contiene  $T_3$  ni  $C_3$ .

c)  $[x^+, b_{s+1}]_D$  es roja: pues  $b_{s+1} = x$  &  $(x, x^+) \in F(x, \gamma, y)$  es roja.

Entonces la flecha entre  $x^+$  &  $b_s$  es roja (aplicando  $s$  veces el argumento del inciso (b) a  $[x^+, b_{s+1}]_D$ ); pero recordemos que  $b_s = y^+$ . Por lo tanto la flecha entre  $x^+$  &  $y^+$  es roja.

De A1) y A2) concluimos entonces que el caso A es imposible.

Caso B. Si  $P(x)$  y  $P(y)$  tienen distinta coloración. Sin pérdida de generalidad supongamos que  $P(x)$  es verde y  $P(y)$  morada (recordemos que ninguna de las dos trayectorias puede ser roja o azul, por los incisos 7,9).

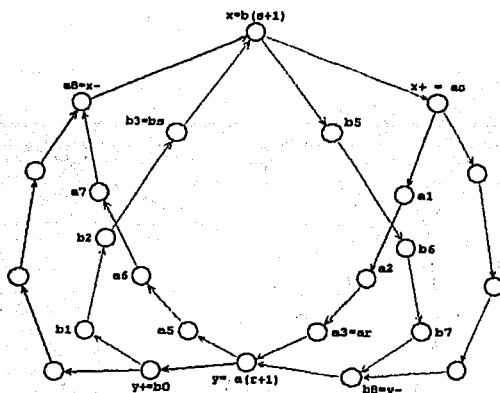
Analicemos la coloración de la flecha en  $D$  entre  $a_r$  y  $b_s$  (que recordemos es denotada con  $[a_r, b_s]_D$ )<sup>11</sup>

(B1)  $[x, a_r]_D$  es roja:

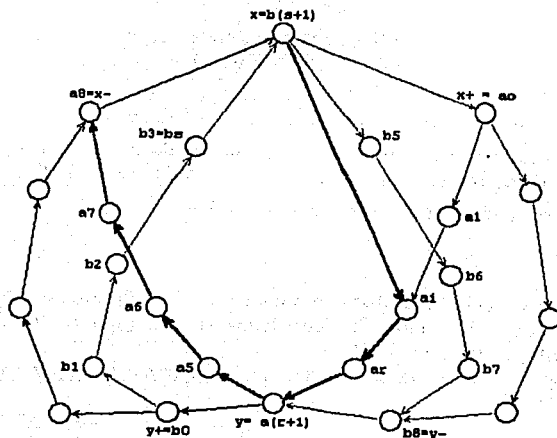
a) Para toda  $r \geq i \geq 1$ ,  $[x, a_i]_D$  no es verde:

<sup>11</sup>Tal flecha existe pues  $\{a_r, b_s\} \subseteq [x, y]$ , por lo tanto  $a_r$  y  $b_s$  son adyacentes en  $D$ .

*Figura: Caso B*



*Figura (inciso B1-a): Si  $(x, a_i) \in F(D)$  es verde*





Si  $(x, a_i) \in F(D)$  es verde, entonces  $(x, a_i) \cup (a_i, P(x), x^-)$  es una  $xx^-$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  y entonces  $(x, x^-) \in F(C(D))$ , lo que contradice que  $(x^-, x) \in F(\text{Asim}(C(D)))$ , por lo tanto  $(x, a_i) \in F(D)$  no es verde. Si  $(a_i, x) \in F(D)$  es verde, entonces  $(x^+ = a_0, P(x), a_i) \cup (a_i, x)$  es una  $x^+x$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  y entonces  $(x^+, x) \in F(C(D))$ , lo que contradice que  $(x, x^+) \in F(\text{Asim}(C(D)))$ , por lo tanto  $(a_i, x)$  no es verde.

b) Si para toda  $r \geq i \geq 1$ ,  $[x, a_{i-1}]_D$  es roja, entonces  $[x, a_i]_D$  es roja:  $[x, a_i]_D$  no es verde por el inciso anterior,  $(a_{i-1}, a_i) \in F(D)$  es verde (pues es una flecha de  $P(x)$ ), hemos supuesto que  $[x, a_{i-1}]_D$  es roja, y se sabe que  $D$  no contiene  $T_3$  ni  $C_3$ .

c)  $[x, a_0]_D$  es roja: pues  $a_0 = x^+$  &  $(x, x^+) \in F(x, \gamma, y)$  es roja.

Entonces la flecha en  $D$  entre  $x$  &  $a_r$  es roja (aplicando  $r$  veces el argumento del inciso (b) a  $[x, a_0]_D$ ).

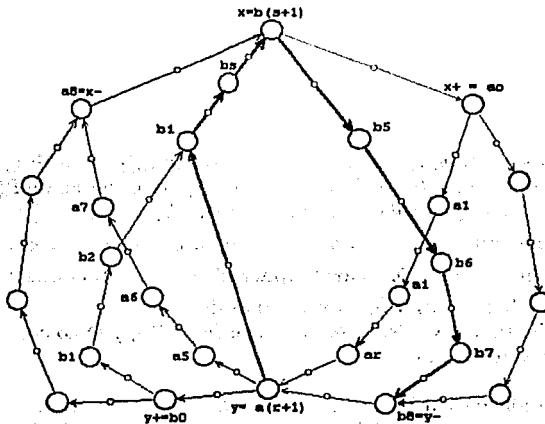
(B2)  $[a_r, b_s]_D$  es roja o morada:

$(b_s, x) \in F(P(y))$  es morada,  $[x, a_r] \in F(D)$  es roja (por el inciso B1), y  $D$  no contiene  $T_3$  ni  $C_3$ ; por lo tanto  $[a_r, b_s]_D$  es roja o morada.

(B3)  $[y, b_s]_D$  es azul:

a) Para toda  $s \geq i \geq 1$ ,  $[y, b_i]_D$  no es morada:

Figura (inciso B3-a): Si  $(y, b_i) \in F(D)$  es morada

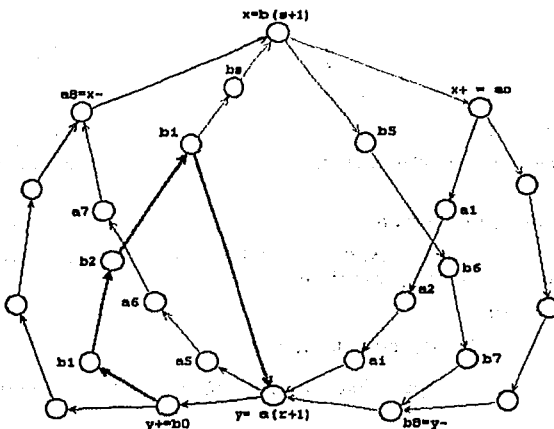


Si  $(y, b_i) \in F(D)$  es morada, entonces  $(y, b_i) \cup (b_i, P(y), y^-)$  es una  $yy^-$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  y entonces  $(y^-, y) \in F(C(D))$ , lo que contradice que  $(y^-, y) \in F(\text{Asim}(C(D)))$ . Entonces  $[y, b_i]_D$  no es morada.

Si  $(b_i, y) \in F(D)$  es morada, entonces  $(y^+ = b_0, P(y), b_i) \cup (b_i, y)$  es una  $y^+y$ -trayectoria

dirigida monocromática en  $D$  y entonces  $(y^+, y) \in F(C(D))$ , lo que contradice que  $(y, y^+) \in F(\text{Asim}(C(D)))$ , por lo tanto  $(b_i, y)$  no es morada.

Figura (inciso B3-a): Si  $(b_i, y) \in F(D)$  es morada



- b) Si para toda  $s \geq i \geq 1$ ,  $[b_{i-1}, y]_D$  es azul, entonces  $[b_i, y]_D$  es azul:  $[y, b_i]_D$  no es morada por el inciso anterior,  $(b_{i-1}, b_i) \in F(D)$  es morada (pues es flecha de  $P(y)$ ), hemos supuesto que  $[b_{i-1}, y]_D$  es azul, y se sabe que  $D$  no contiene  $T_3$  ni  $C_3$ .
- c)  $[y, b_0]_D$  es azul: pues  $b_0 = y^+$  y se sabe que  $(y, y^+) \in F(y, \gamma, x)$  es azul.

Entonces la flecha entre  $y$  &  $b_s$  es azul (aplicando  $s$  veces el argumento del inciso (b) a  $[y, b_0]_D$ ).

B4) La flecha en  $D$  entre  $a_r$  y  $b_s$  es verde o azul:

$(a_r, y) \in F(P(x))$  es verde,  $[y, b_s]_D$  es azul (por B3), y  $D$  no contiene  $T_3$  ni  $C_3$ ; por lo tanto  $[a_r, b_s]_D$  es verde o azul.

Notemos que la afirmación B4 contradice a B2. Por lo tanto el caso B también es imposible y concluimos entonces que  $C(D)$  no contiene algún ciclo asimétrico  $\gamma$  tal que: a)  $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$ , y b) entre cualesquiera dos vértices no consecutivos de  $\gamma$ , existe una flecha simétrica.

†

Podemos ya probar que si una digráfica  $D$  es tal que  $D \cong T_n - [x, y]$  para algún torneo  $T_n$ , entonces  $D$  pertenece a  $E$ , y aún más: se probará que la cerradura de cualquier  $\{C_3, T_3\}$ -m-coloración-libre de  $D$ , es núcleo perfecta. Note el lector que el siguiente es un resultado análogo al Teorema de Minggang para torneos.

### Teorema 5.4

Sea  $D$  una digráfica que resulta de eliminar una única flecha  $[x,y]$  de un torneo  $m$ -coloreado. Si  $D$  no tiene  $T_3$  ni  $C_3$ , entonces el núcleo de  $C(D)$  es no vacío.

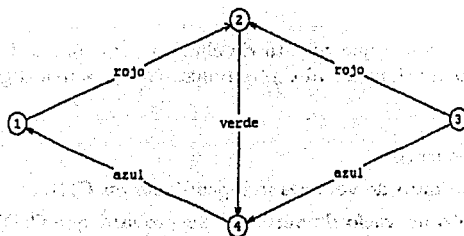
### Demostración

Por hipótesis  $D$  no tiene  $T_3$  ni  $C_3$ , por lo tanto toda subdigráfica de  $D$  no contiene  $T_3$  ni  $C_3$ , en particular toda subdigráfica completa de  $D$ , no contiene  $T_3$  ni  $C_3$ . Se sigue del Teorema 4.1 que toda subdigráfica completa de  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Además, por el Teorema anterior se tiene que  $C(D)$  no contiene algún ciclo asimétrico  $\gamma$  tal que  $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$  y tal que entre cualesquiera dos vértices no consecutivos de  $\gamma$  existe una flecha simétrica (pues  $D$  no contiene  $T_3$  ni  $C_3$ ). Entonces es consecuencia del Corolario 5.2 que  $C(D)$  tiene un núcleo no vacío.

†

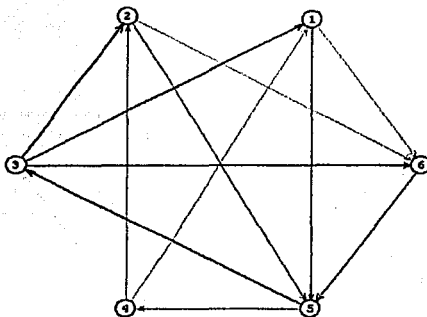
Si en el Teorema anterior solo se pide la condición de que  $D$  no contenga  $T_3$ , permitiendo así la existencia de algún  $C_3$  en  $D$ , entonces el Teorema no se cumple, como prueba el siguiente contraejemplo ( $D$  contiene  $C_3$  pero no contiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas no vacío):

Figura: Contraejemplo 1



Si en el Teorema anterior solo se pide la condición de que  $D$  no contenga  $C_3$ , permitiendo así la existencia de algún  $T_3$  en  $D$ , entonces el Teorema no se cumple, como prueba el siguiente contraejemplo ( $D$  contiene  $T_3$  y  $C(D)$  no contiene un núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas no vacío):

Figura: Contraejemplo 2



Recuerde el lector que en el capítulo anterior fueron analizadas condiciones suficientes para que la cerradura de un Torneo  $m$ -coloreado fuera una digráfica núcleo perfecta. Nuestro propósito ahora es analizar condiciones suficientes para que la cerradura de un casitorneo sea una digráfica núcleo perfecta:

### Teorema 5.5

Sea  $D$  una digráfica  $m$ -coloreada que resulta de eliminar una única flecha  $[x, y]$  de un torneo  $m$ -coloreado. Si  $D$  no contiene  $T_3$  ni  $C_3$ , entonces  $C(D)$  es una digráfica núcleo perfecta.

### Demostración

Consideremos dos posibles casos:

- Caso A:  $\{x, y\}$  es un conjunto de vértices independiente en  $C(D)$ .

Sea  $H \subseteq V(D)$  un conjunto no vacío de vértices. Se probará que  $C(D)[H]$  tiene un núcleo no vacío:

Como  $D[H]$  es completa o completa menos una única flecha  $[x, y]$ , entonces por los Teoremas 4.1 y 5.4 respectivamente, se tiene que  $C(D[H])$  tiene un núcleo no vacío.

Sea  $B$  un núcleo no vacío de  $C(D[H])$ . P.d.  $B$  es núcleo de  $C(D)[H]$ .

+  $B$  es un conjunto absorbente en  $C(D)[H]$ :  $B$  es un conjunto absorbente en  $C(D[H])$ , las trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D[H]$  también son trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D$ , además de que  $F(C(D[H])) \subseteq F(C(D)[H])$ .

+ Dependiendo si  $D[H]$  es completa o completa menos una flecha,  $B$  tiene uno o dos vértices (recordemos que el vacío no es absorbente). Analicemos esos dos subcasos:

a)  $B$  tiene un solo vértice: Entonces  $B$  es un conjunto independiente en  $C(D)[H]$  y por

tanto B es un núcleo no vacío de  $C(D)[H]$ .

b) B tiene dos vértices: Entonces  $B = \{x, y\}$  pues x & y son los únicos vértices que pueden ser independientes en  $C(D)[H]$ . Ahora bien, B es un conjunto independiente en  $C(D)$  por hipótesis del caso A, por lo tanto  $\forall x, y \in V(D) [\exists xy\text{-trayectoria dirigida monocromática en } D]$ , de donde  $\forall x, y \in V(H) [\exists xy\text{-trayectoria dirigida monocromática en } H]$ , por lo tanto B es un conjunto independiente en  $C(D)[H]$ . Por lo tanto B es un núcleo no vacío de  $C(D)[H]$ .

Completamos así el caso A.

- Caso B:  $\{x, y\}$  no es un conjunto de vértices independiente en  $C(D)$ . Por demostrar que  $C(D)$  es núcleo perfecta.

Supongamos lo contrario, i.e.  $C(D)$  no es núcleo perfecta.

Como cualesquiera dos vértices son adyacentes en  $C(D)$  (pues  $D - \{x, y\}$  es una digráfica completa & x, y son adyacentes por hipótesis del caso B) entonces  $C(D)$  es una digráfica completa. Se sigue entonces del Teorema 4.4 que  $C(D)$  tiene un ciclo asimétrico. Sea  $\gamma$  un ciclo asimétrico de menor longitud contenido en  $C(D)$ .

Observemos que para cualesquiera dos vértices no consecutivos en  $\gamma$ , existe una flecha simétrica entre ellos, de lo contrario, como  $C(D)$  es una digráfica completa, existe un ciclo asimétrico contenido en  $C(D)$  de menor longitud que  $\gamma$ , contradiciendo la elección de  $\gamma$ .

Además,  $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$ : de lo contrario,  $D[V(\gamma)]$  es una digráfica completa, y dado que no contiene  $T_3$  ni  $C_3$ , entonces existe  $v \in V(\gamma)$  tal que  $\{v\}$  es núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D[V(\gamma)]$  (lo que es consecuencia del Teorema 4.1), por consiguiente  $\{v\}$  es núcleo de  $C(D[V(\gamma)])$ , de donde se sigue que  $\{v\}$  es núcleo de  $C(D)[V(\gamma)]$  (pues las trayectorias dirigidas monocromáticas en  $D[H]$  también son trayectorias dirigidas monocromáticas en D, además de que  $F((C(D)[H])) \subseteq F(C(D)[V(\gamma)])$  con  $H = D[V(\gamma)]$ ), contradiciendo la construcción de  $\gamma$  (el sucesor de v en  $\gamma$  no es absorbido por  $\{v\}$  en  $C(D)$ ).

Entonces  $\gamma$  es un ciclo asimétrico en  $C(D)$  tal que  $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$  y para cualesquiera dos vértices no consecutivos en  $\gamma$  existe una flecha simétrica entre ellos, lo cual contradice al Teorema 5.3 que asegura que tal ciclo no existe.

Por lo tanto  $C(D)$  es núcleo perfecta y concluimos así el caso B.

Por lo tanto  $C(D)$  es núcleo perfecta.

†

En el capítulo anterior, el Teorema establece que la condición de que *todo ciclo dirigido contenido en un torneo, y de longitud a lo más cuatro, es casimonocromático*, es suficiente para asegurar que tal torneo tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Analicemos ahora si la misma condición es suficiente para casitorneos:

### Teorema 5.6

Sea D una digráfica m-coloreada que resulta de eliminar una única flecha  $\{x, y\}$  de un torneo m-coloreado  $T_n$  (i.e.  $D \cong T_n - \{x, y\}$ ). Si todo ciclo dirigido contenido en D y de longitud a lo más cuatro es casimonocromático, entonces D tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

## Demostración

La prueba es por inducción sobre  $|V(D)| = n$ .

Base. Para  $n=1$ ,  $D$  consiste de un solo vértice, de ahí que efectivamente  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas. Para  $n=2$ ,  $D$  consiste de dos vértices aislados que son los que forman el núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas de la digráfica.

Hipótesis inductiva: supongamos que toda digráfica  $m$ -coloreada,  $D'$ , que resulta de eliminar una única flecha  $[x, y]$  de algún torneo  $m$ -coloreado,  $T'$ , tal que  $|V(D')|$  es estrictamente menor que  $n$  y tal que todo ciclo dirigido de longitud a lo más cuatro es casimonocromática, tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Por demostrar que  $D$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Supongamos lo contrario, i.e.  $D$  no tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Entonces, por el Teorema 5.1<sup>12</sup> se tiene que existe un ciclo dirigido  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$  tal que  $\{x, y\} \subseteq V(\gamma)$ . Probaremos a continuación varias propiedades del ciclo  $\gamma$ :

(1)  $\gamma$  no es monocromático.

De lo contrario  $\forall u, v \in V(\gamma)$  consecutivos  $\exists$   $uv$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  y  $\exists$   $vu$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , por lo tanto  $(u, v) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ .

(2) Si  $z_i, z_j \in V(\gamma)$ , con  $j \notin \{i-1, i+1\}$ , entonces  $\{(z_i, z_j), (z_j, z_i)\} \subseteq F(C(D))$ ; es decir, para cualesquiera dos vértices no consecutivos en  $\gamma$ , hay flecha simétrica entre ellos, como fue probado en el Teorema 5.1 (cuyas hipótesis se cumplen).

(3) Los cambios de color en  $\gamma$  son únicamente en los vértices  $x$  &  $y$ .

Supongamos que  $z_1 \notin \{x, y\}$  es un vértice de  $\gamma$  tal que  $(z_0, z_1) \in F(D)$  es roja y  $(z_1, z_2) \in F(D)$  es azul:

(3.1)  $(z_2, z_0) \notin F(D)$ .

Supongamos que  $(z_2, z_0) \in F(D)$ . Entonces  $\gamma_3 = (z_0, z_1, z_2, z_0)$  es un ciclo dirigido contenido en  $D$  (observemos que  $(z_0, z_1) \in F(D)$ , de lo contrario  $(z_1, z_0) \in F(D)$  ya que  $z_1 \notin \{x, y\}$  y es por tanto adyacente a todo vértice de  $D$ , por tanto  $(z_1, z_0) \in F(C(D))$ , así que  $(z_0, z_1) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ ; análogamente  $(z_1, z_2) \in F(D)$ , de lo contrario  $(z_2, z_1) \in F(D)$  ya que  $z_1 \notin \{x, y\}$  y es por tanto adyacente a todo vértice de  $D$ , por tanto  $(z_2, z_1) \in F(C(D))$ , así que  $(z_1, z_2) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ ) y por hipótesis del Teorema,  $\gamma_3$  es casimonocromático, por lo que  $(z_2, z_0)$  es roja o azul. Si  $(z_2, z_0)$  es roja entonces  $(z_2, z_0, z_1)$  es una  $z_2 z_1$ -trayectoria dirigida monocromática, por lo tanto  $(z_2, z_1) \in F(C(D))$  y  $(z_1, z_2) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ . Si  $(z_2, z_0)$  es azul entonces  $(z_1, z_2, z_0)$  es una  $z_1 z_0$ -trayectoria dirigida monocromática, por lo tanto  $(z_1, z_0) \in F(C(D))$  y  $(z_0, z_1) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ . Por lo tanto  $(z_2, z_0) \notin F(D)$ .

Ahora bien, por el inciso (2) se tiene que  $(z_2, z_0) \in F(C(D))$ , así que por definición de  $C(D)$  existe una  $z_2 z_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$  de longitud al menos 2 (debido al inciso 3.1). Sea  $\alpha = (z_2=0, 1, 2, \dots, p=z_0)$  tal trayectoria dirigida monocromática (con  $p \geq 2$ ).

<sup>12</sup>Se cumplen las hipótesis del Teorema 5.1 pues toda subdigráfica completa de  $D$ ,  $H$ , es una subdigráfica inducida propia de  $D$ , tal que  $|V(H)|$  es menor que  $n$ , así que por hipótesis de inducción,  $H$  tiene núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas.

Figura: (3.1) Supongamos que  $(z_2, z_0) \in F(D)$

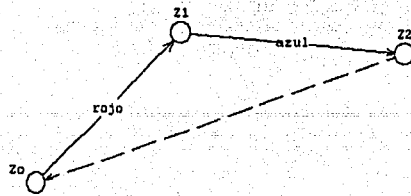
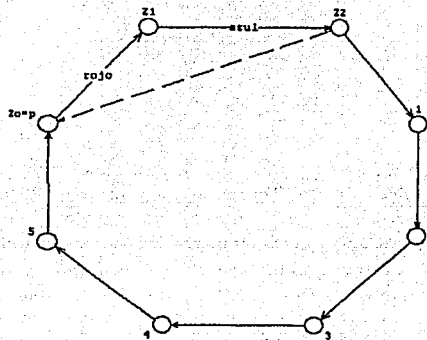


Figura: La trayectoria  $\alpha$  en  $D$



(3.2)  $\alpha$  no es azul

De lo contrario  $(z_1, z_2) \cup \alpha$  es una  $z_1 z_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , por lo que  $(z_1, z_0) \in F(C(D))$  y  $(z_0, z_1) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ .

(3.3)  $\alpha$  no es roja

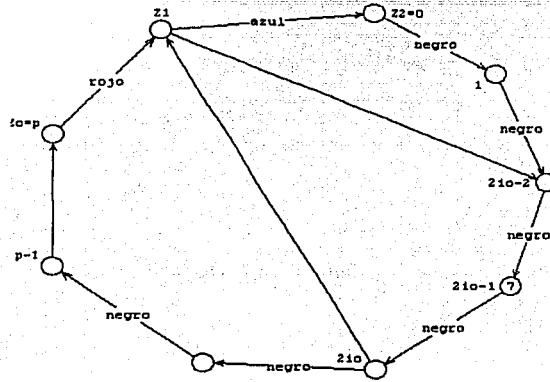
De lo contrario  $\alpha \cup (z_0, z_1)$  es una  $z_2 z_1$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , por lo que  $(z_2, z_1) \in F(C(D))$  y  $(z_1, z_2) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ .

Asumamos entonces, sin pérdida de generalidad, que  $\alpha$  es de color negro.

(3.4)  $\forall i \geq 0 \mid 2i < p [ (z_1, 2i) \in F(D) ]$ .

Supongamos lo contrario, i.e.  $\exists i \geq 0 \mid 2i \leq p \mid [(z_1, 2i) \in F(D)]$ . Sea  $2i_0 = \min \{ 2i \mid (z_1, 2i) \notin F(D) \}$  ( $0 \leq 2i_0 \leq p$ ), como  $z_2=0$  y  $(z_1, z_2) \in F(D)$ , entonces  $2i_0$  es mayor que cero &  $2i_0 \geq 2$ . Ahora,  $(z_1, 2i_0-2) \in F(D)$  y  $(z_1, 2i_0) \notin F(D)$  por definición de  $2i_0$ , y como  $z_1 \notin \{x, y\}$  y  $D$  es casitorneo, entonces  $(2i_0, z_1) \in F(D)$ .

Figura (3.4)



Entonces  $\gamma_4 = (z_1, 2i_0-2, 2i_0-1, 2i_0, z_1)$  es un ciclo dirigido contenido en  $D$  y es casi-monocromático por hipótesis del Teorema, y como las flechas  $(2i_0-2, 2i_0-1)$  y  $(2i_0-1, 2i_0)$  son de color negro (pertenecen a  $\alpha$ ), entonces al menos una de las flechas  $(z_1, 2i_0-2)$  o  $(2i_0, z_1)$  es de color negro: si  $(z_1, 2i_0-2)$  es negra, entonces  $(z_1, 2i_0-2) \cup (2i_0-2, \alpha, z_0)$  es una  $z_1 z_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , por lo que  $(z_1, z_0) \in F(C(D))$  y  $(z_0, z_1) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ . Si  $(2i_0, z_1)$  es negra, entonces  $(z_2=0, \alpha, 2i_0) \cup (2i_0, z_1)$  es una  $z_2 z_1$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , por lo que  $(z_2, z_1) \in F(C(D))$  y  $(z_1, z_2) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ . Por lo tanto  $\forall i \geq 0 \mid 2i \leq p \mid (z_1, 2i) \in F(D)$ .

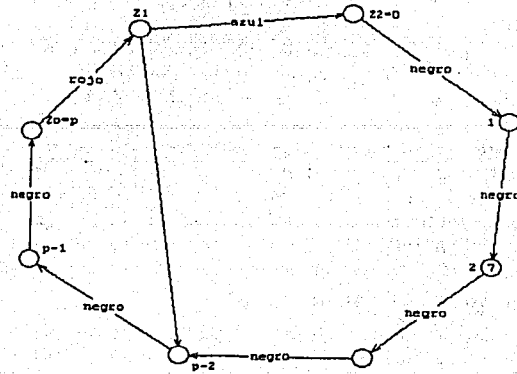
Para finalizar el inciso 3, consideremos ahora los dos posibles casos relativos a la paridad de  $p$ :

Caso a) Si  $p$  es par entonces  $p-2$  también lo es, y dado que  $p \geq 2$  entonces  $p-2 \geq 0$ . Entonces con  $2i=p-2$  se cumplen las hipótesis del inciso (3.4) (es decir,  $i \geq 0$ ,  $2i$  menor que  $p$ ) y se sigue que  $(z_1, 2i=p-2) \in F(D)$ . Entonces  $\gamma_4 = (z_1, p-2, p-1, p, z_1)$  es un ciclo dirigido contenido en  $D$ , así que es casimonocromático debido a la hipótesis del Teorema, y tiene dos flechas negras, a saber  $(p-2, p-1)$  y  $(p-1, p)$ , y una flecha roja,  $(z_0, z_1)$ ; por lo tanto  $(z_1, p-2)$  es de color negro y  $(z_1, p-2, p-1, p=z_0)$  es una  $z_1 z_0$ -trayectoria dirigida monocromática contenida en  $D$ , por lo que  $(z_1, z_0) \in F(C(D))$  y  $(z_0, z_1) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ .

Concluimos así que el caso en que  $p$  es par no es posible.



Figura (caso a): Si  $p$  es par



Caso b) si  $p$  es impar:

(3.5) Si  $p$  es impar entonces  $\forall i \geq 0$  tal que  $p \geq 2i+1 \geq 1$  se tiene que  $(2i+1, z_1) \in F(D)$ .

Supongamos lo contrario, i.e.  $\exists i \geq 0$  tal que  $p \geq 2i+1 \geq 1$  y  $(2i+1, z_1) \notin F(D)$ .

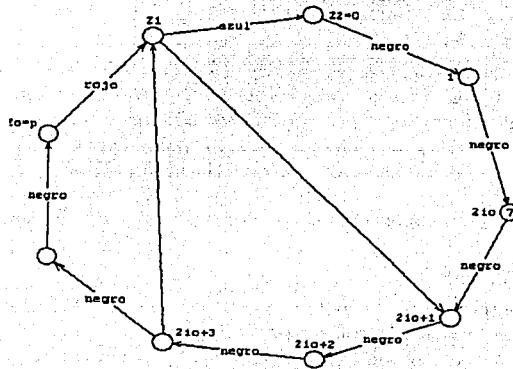


Figura (3.5): Si  $\exists i \geq 0$  tal que  $p \geq 2i+1 \geq 1$  y  $(2i+1, z_1) \notin F(D)$

Sea  $2i_0+1 = \max \{ 2i+1 \mid (2i+1, z_1) \notin F(D), \text{ con } p \geq 2i+1 \geq 1 \}$ . Como  $p=z_0$  y  $(z_0, z_1) \in F(D)$ , entonces  $2i_0+1$  es menor que  $p$ . Ahora, como  $z_1 \notin \{x, y\}$ , entonces  $z_1$  es adyacente a todo vértice de  $D - \{z_1\}$  y por tanto  $(z_1, 2i_0+1) \in F(D)$ , y además  $(2i_0+3, z_1) \in F(D)$  por definición de  $2i_0+1$ .

Entonces  $\gamma_4 = (z_1, 2i_0+1, 2i_0+2, 2i_0+3, z_1)$  es un ciclo dirigido contenido en  $D$  y por hipótesis del teorema, es un ciclo casimonocromático con dos flechas negras, a saber  $(2i_0+1, 2i_0+2)$  y  $(2i_0+2, 2i_0+3)$ , por lo que al menos una de las flechas  $(z_1, 2i_0+1)$  o  $(2i_0+3, z_1)$  es negra.

Si  $(z_1, 2i_0+1)$  es negra, entonces  $(z_1, 2i_0+1) \cup (2i_0+1, \alpha, z_0=p)$  es una  $z_1 z_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , de ahí que  $(z_0, z_1) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ . Si  $(2i_0+3, z_1)$  es negra, entonces  $(z_2=0, 1, 2, \dots, 2i_0+3) \cup (2i_0+3, z_1)$  es una  $z_2 z_1$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , de ahí que  $(z_1, z_2) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ . Por lo tanto si  $p$  es impar entonces  $\forall i \geq 0$  tal que  $p \geq 2i+1 \geq 1$  se tiene que  $(2i+1, z_1) \in F(D)$ .

(3.6) Si  $p$  es impar entonces  $(1, z_1) \in F(D)$  y es azul.

Del inciso (3.5) se sigue que  $(1, z_1) \in F(D)$  (con  $2i+1=1$  se cumple que  $p \geq 2i+1=1 \geq 1$ ), así que  $\gamma_3 = (z_1, z_2, 1, z_1)$  es un ciclo dirigido contenido en  $D$  cuya flecha  $(z_1, z_2)$  es azul, y  $(z_2, 1)$  negra; por hipótesis del Teorema  $\gamma_3$  es casimonocromático, por lo tanto la flecha  $(1, z_1)$  es azul o negra: si  $(1, z_1)$  es negra entonces  $(z_2=0, 1, z_1)$  es una  $z_2 z_1$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , de ahí que  $(z_1, z_2) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ . Por lo tanto  $(1, z_1) \in F(D)$  y es azul.

(3.7) Si  $p$  es impar entonces  $(z_1, p-1) \in F(D)$  y es roja.

Como  $p$  es impar entonces  $p-1$  es par y con  $2i=p-1$  se sigue del inciso (3.4) que  $(z_1, 2i=p-1) \in F(D)$ , así que  $\gamma_3 = (z_1, p-1, p, z_1)$  es un ciclo dirigido contenido en  $D$  cuya flecha  $(p, z_1)$  es roja, y  $(p-1, p)$  negra; por hipótesis del Teorema  $\gamma_3$  es casimonocromático, por lo tanto la flecha  $(z_1, p-1)$  es roja o negra: si  $(z_1, p-1)$  es negra entonces  $(z_1, p-1, p=z_0)$  es una  $z_1 z_0$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , de ahí que  $(z_0, z_1) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ . Por lo tanto  $(z_1, p-1) \in F(D)$  y es roja.

(3.8)  $\{(1,p), (p, 1)\} \cap F(D) = \emptyset$

Si  $(1, p) \in F(D)$  entonces  $\gamma_4=(1, p=z_0, z_1, z_2, 1)$  es un ciclo dirigido de longitud cuatro contenido en  $D$  con al menos tres colores (la flecha  $(z_1, z_2) \in F(D)$  pues  $z_1 \notin \{x, y\}$ , y es azul),  $(z_2, 1) \in \alpha$  es negra,  $(z_0 = p, z_1)$  es roja), contradiciendo que  $\gamma_4$  es casimonocromático por hipótesis. Si  $(p, 1) \in F(D)$  entonces  $\gamma_4=(p, 1, z_1, p-1, p)$  es un ciclo dirigido de longitud cuatro contenido en  $D$  con al menos tres colores (la flecha  $(1, z_1) \in F(D)$  y es azul por el inciso (3.6),  $(z_1, p-1) \in F(D)$  y es roja por el inciso (3.7), y  $(p-1, p) \in \alpha \subseteq D$  es negra), contradiciendo que  $\gamma_4$  es casimonocromático por hipótesis. Por lo tanto  $\{(1,p), (p, 1)\} \cap F(D) = \emptyset$ .

(3.9)  $\{(0,p-1), (p-1, 0)\} \cap F(D) = \emptyset$

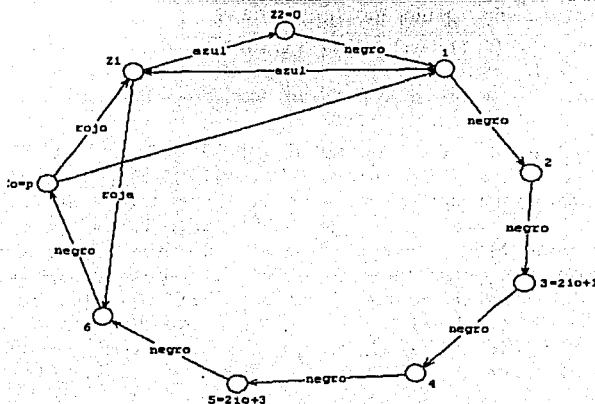
Si  $(0, p-1) \in F(D)$  entonces  $\gamma_4=(0, p-1, p, z_1, 0)$  es un ciclo dirigido de longitud cuatro contenido en  $D$  con al menos tres colores (la flecha  $(p-1, p) \in F(\alpha) \subseteq D$  es negra,  $(p, z_1) \in F(D)$  pues  $z_1 \notin \{x, y\}$  y es de color rojo, y  $(z_1, 0)$  es azul), contradiciendo que  $\gamma_4$  es casimonocromático por hipótesis. Si  $(p-1, 0) \in F(D)$  entonces  $\gamma_4=(p-1, 0, 1, z_1, p-1)$  es un ciclo dirigido de longitud cuatro contenido en  $D$  con al menos tres colores (la flecha  $(1, z_1) \in F(D)$  y es azul por el inciso (3.4),  $(z_1, p-1) \in D$  y es roja por el inciso (3.7), y  $(0, 1) \in F(\alpha) \subseteq D$  es negra), contradiciendo que  $\gamma_4$  es casimonocromático por hipótesis. Por lo tanto  $\{(0, p-1), (p-1, 0)\} \cap F(D) = \emptyset$ .

Observemos que por la construcción de  $D$ , se sigue de los incisos (3.8) y (3.9) que  $\{x, y\} = \{1, p\}$  y  $\{x, y\} = \{0, p-1\}$  respectivamente, de donde  $\{0, p-1\} = \{1, p\}$ , lo cual es imposible

dado que  $p \geq 2$ . Así concluimos la proposición (3), es decir,  $x$  &  $y$  son los únicos vértices de  $\gamma$  en los que hay cambio de color.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $(x, \gamma, y)$  es de color azul, y que  $(y, \gamma, x)$  es de color rojo.

Figura: (3.8) Si  $[p, 1] \in F(D)$



(4)  $\gamma \subseteq D$ .

Como  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$  y  $D \cong (T_n - [x, y])$  entonces basta probar que  $x$  &  $y$  no son vértices consecutivos en  $\gamma$ . Supongamos lo contrario, i.e.  $x$  &  $y$  son vértices consecutivos en  $\gamma$ , sin pérdida de generalidad, sea  $x=1, y=2$  &  $\gamma = (1, 2, \dots, q, 1)$ ; del inciso (3) se sigue que  $(2, 1) \in F(C(D))$ , y entonces  $(x=1, y=2) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $(1, 2) \in F(\text{Asim}(C(D)))$ . Por lo tanto  $\gamma \subseteq D$ .

(5)  $\text{long}(\gamma) \geq 5$ .

Sea  $\gamma = (1, 2, 3, \dots, q, 1)$ . Supongamos lo contrario, i.e. la longitud de  $\gamma$  es menor que 4. Entonces por hipótesis del teorema,  $\gamma$  es un ciclo casimonocromático, y podemos suponer que  $(2, 3, \dots, q, 1)$  es una trayectoria dirigida monocromática, de donde  $(2, 1) \in F(C(D))$  y  $(1, 2) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq F(\text{Asim}(C(D)))$ . Por lo tanto  $\text{long}(\gamma) \geq 5$ .

De aquí en adelante denotaremos  $\text{long}(\gamma) = q$ ,  $\text{long}(x, \gamma, y) = p$ , y  $\gamma = (x = q, 1, 2, \dots, p-1, p = y, p+1, p+2, \dots, q-1, q)$  y asumamos sin pérdida de generalidad, que  $\text{long}(y, \gamma, x) \geq \text{long}(x, \gamma, y)$ .

(6)  $\forall i \mid p-1 \geq i \geq 1 \{[q-i, i] \in F(D)\}$

Procedamos por inducción sobre  $i$ :

(6.1) Base: para  $i=1$ , p.d.  $(q-1, 1) \in F(D)$ . Supongamos lo contrario, i.e.  $(q-1, 1) \notin F(D)$ .

Como  $\{q-1, 1\} \cap \{x, y\} = \emptyset$  (pues  $x$  &  $y$  no son consecutivos en  $\gamma$ , como se probó en el

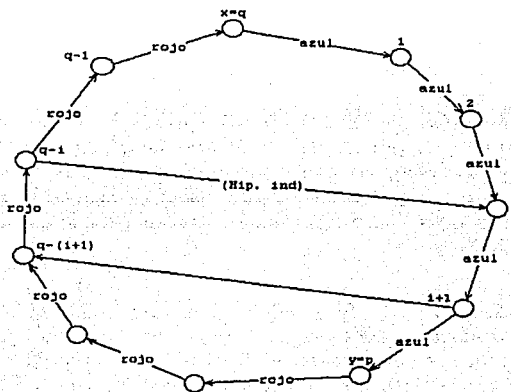
inciso 4), entonces por definición de  $D$  se tiene que  $(1, q-1) \in F(D)$ , así que  $\gamma_3 = (1, q-1, q, 1)$  es un ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $D$  y es casimonocromático por hipótesis, por lo tanto  $(1, q-1)$  es de color rojo o azul. Si  $(1, q-1)$  es roja, entonces  $(1, q-1, q)$  es una  $1q$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , y se sigue que  $(1, q) \in F(C(D))$ , por lo que  $(q, 1) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq F(\text{Asim}(C(D)))$ . Si  $(1, q-1)$  es azul, entonces  $(q, 1, q-1)$  es una  $qq-1$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , y se sigue que  $(q, q-1) \in F(C(D))$ , por lo que  $(q-1, q) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq F(\text{Asim}(C(D)))$ . Por lo tanto  $(q-1, 1) \in F(D)$ .

(6.2) Hipótesis inductiva: supongamos que  $(q-i, i) \in F(D)$ .

(6.3) Por demostrar que  $(q-(i+1), i+1) \in F(D)$  para  $p-1 \geq i+1 \geq 1$ : supongamos lo contrario, i.e.  $(q-(i+1), i+1) \notin F(D)$  para  $p-1 \geq i+1 \geq 1$ . Como  $p-1 \geq i+1 \geq 1$  entonces  $i+1 \notin \{x, y\}$ , así que  $i+1$  es adyacente a todo vértice de  $D$ , y entonces, por definición de  $D$ ,  $(i+1, q-(i+1)) \in F(D)$ .

Entonces  $\gamma_4 = (i+1, q-(i+1), q-i, i, i+1)$  es un ciclo dirigido de longitud cuatro contenido en  $D$  (pues  $\{(q-(i+1), q-i), (i, i+1)\} \subseteq \gamma \subseteq D$ , y  $(q-i, i) \in F(D)$  por hipótesis inductiva) y es casimonocromático por hipótesis del teorema, y considerando que  $(q-(i+1), i+1)$  es una flecha roja y  $(i, i+1)$  es azul, se tiene que las flechas  $(i+1, q-(i+1))$  y  $(q-i, i)$  son ambas azules o ambas rojas. Si  $(i+1, q-(i+1))$  y  $(q-i, i)$  son rojas, entonces  $(i+1, q-(i+1), q-i, i)$  es una  $i+1-i$ -trayectoria dirigida monocromática, por lo que  $(i+1, i) \in F(C(D))$  y  $(i, i+1) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \in F(\text{Asim}(C(D)))$ . Si  $(i+1, q-(i+1))$  y  $(q-i, i)$  son azules, entonces  $(q-i, i, i+1, q-(i+1))$  es una trayectoria dirigida monocromática, por lo que  $(q-(i+1), q-i) \in F(C(D))$  y  $(q-(i+1), q-i) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \in F(\text{Asim}(C(D)))$ . Por lo tanto  $(q-(i+1), i+1) \in F(D)$  para  $p-1 \geq i+1 \geq 1$ .

Figura: (6.3) Si  $(q-(i+1), i+1) \notin F(D)$



(7)  $\forall i \mid p-1 \geq i \geq 1 \mid [(p-i, p+i) \in F(D)]$

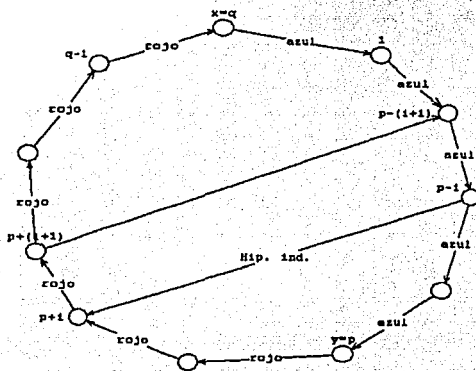
Procedamos por inducción sobre  $i$ :

(7.1) Base: para  $i=1$ , p.d.  $(p-1, p+1) \in F(D)$ . Supongamos lo contrario, i.e.  $(p-1, p+1) \notin F(D)$ . Como  $\{p-1, p+1\} \cap \{x, y\} = \emptyset$  (pues  $x$  &  $y$  no son consecutivos en  $\gamma$ , como se probó en el inciso 4), entonces por definición de  $D$  se tiene que  $(p+1, p-1) \in F(D)$ , así que  $\gamma_3 = (p+1, p-1, p, p+1)$  es un ciclo dirigido de longitud 3 contenido en  $D$ , en donde  $(p-1, p)$  es azul y  $(p, p+1)$  es roja;  $\gamma_3$  es casimonocromático por hipótesis, por lo tanto  $(p+1, p-1)$  es de color rojo o azul. Si  $(p+1, p-1)$  es roja, entonces  $(p, p+1, p-1)$  es una  $p, p-1$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , y se sigue que  $(p, p-1) \in F(C(D))$ , por lo que  $(p-1, p) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \in F(\text{Asim}(C(D)))$ . Si  $(p+1, p-1)$  es azul, entonces  $(p+1, p-1, p)$  es una  $p+1, p$ -trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , y se sigue que  $(p+1, p) \in F(C(D))$ , por lo que  $(p, p+1) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \in F(\text{Asim}(C(D)))$ . Por lo tanto  $(p-1, p+1) \in F(D)$ .

(7.2) Hipótesis inductiva: supongamos que  $(p-i, p+i) \in F(D)$ .

(7.3) Por demostrar que  $(p-(i+1), p+(i+1)) \in F(D)$  para  $p-1 \geq i+1 \geq 1$ : supongamos lo contrario, i.e.  $(p-(i+1), p+(i+1)) \notin F(D)$  para  $p-1 \geq i+1 \geq 1$ .

Figura: (7.3)  $(p-(i+1), p+(i+1)) \notin F(D)$



Como  $p-1 \geq i+1 \geq 1$  entonces  $-1 \geq -(i+1) \geq 1-p$  &  $p-1 \geq p-(i+1) \geq 1$ , así que  $p-(i+1) \notin \{x, y\}$ , por lo que  $p-(i+1)$  es adyacente a todo vértice de  $D$  y entonces por definición de  $D$  se tiene que  $(p+(i+1), p-(i+1)) \in F(D)$ .

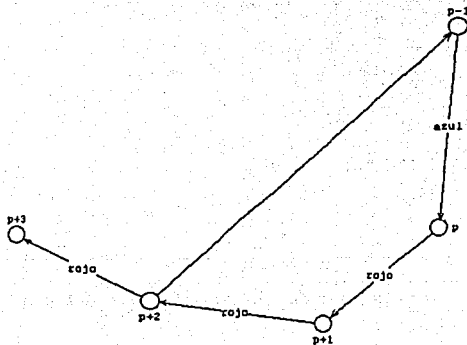
Entonces  $\gamma_4 = (p+i, p+(i+1), p-(i+1), p-i, p+i)$  es un ciclo dirigido de longitud cuatro contenido en  $D$  (pues  $\{(p-(i+1), p-i), (p+i, p+(i+1))\} \subseteq \gamma \subseteq D$ , y  $(p-i, p+i) \in F(D)$  por hipótesis inductiva) y es casimonocromático por hipótesis del teorema, y considerando que  $(p-(i+1), p-i)$  es una flecha azul y  $(p+i, p+(i+1))$  es roja, se tiene que las flechas  $(p+(i+1), p-(i+1))$  y  $(p-i, p+i)$  son ambas azules o ambas rojas. Si  $(i+1, q-(i+1))$  y  $(q-i, i)$  son rojas, entonces  $(p-i, p+i, p+(i+1), p-(i+1))$  es una trayectoria dirigida monocromática, por lo que  $(p-i, p-(i+1)) \in F(C(D))$  y  $(p-(i+1), p-i) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \in F(\text{Asim}(C(D)))$ . Si  $(i+1, q-(i+1))$  y  $(q-i, i)$  son azules, entonces  $(p+(i+1), p-(i+1), p-i, p+i)$  es una trayectoria dirigida monocromática, por lo que  $(p+(i+1), p+i) \in F(C(D))$  y  $(p-(i+1), p-i) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \in F(\text{Asim}(C(D)))$ . Por lo tanto  $(p-(i+1), p+(i+1)) \in F(D)$  para  $p-1 \geq i+1 \geq 1$ .

(8)  $(p-1, p+2) \in F(D)$ .

Supongamos lo contrario, i.e.  $(p-1, p+2) \notin F(D)$ . Como  $\{p-1, p+2\} \cap \{x, y\} = \emptyset$  (ya que  $p=y$ , y sabemos que  $x$  &  $y$  no son consecutivos en  $\gamma$ ), entonces por la definición de  $D$  se tiene que  $(p+2, p-1) \in F(D)$ .

Entonces  $\gamma_4 = (p+2, p-3, p, p+1, p+2)$  es un ciclo dirigido de longitud 4 contenido en  $D$  y es casimonocromático por hipótesis del Teorema, y considerando que  $(p-1, p)$  es azul, mientras que  $(p, p+1)$ ,  $(p+1, p+2)$  son rojas, se tiene que  $(p+2, p-1)$  es una flecha de color rojo; por lo tanto  $(p, p+1, p+2, p-1)$  es una trayectoria dirigida monocromática, lo que implica que  $(p, p-1) \in F(C(D))$  y por tanto  $(p-1, p) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \in \text{Asim}(C(D))$ .

Figura: (8) Si  $(p+2, p-1) \in F(D)$



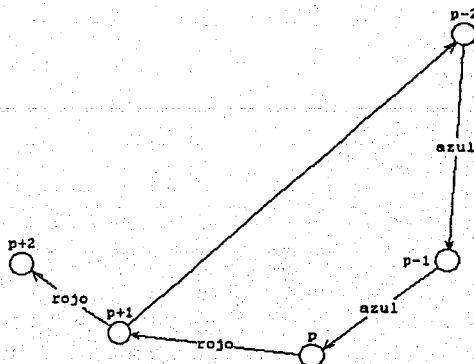
(9)  $\forall i \mid p-2 \geq i \geq 1 [(p-(i+1), p+i) \in F(D)]$

Procedamos por inducción sobre  $i$ :

(9.1) Base: para  $i=1$ , p.d.  $(p-2, p+1) \in F(D)$ . Supongamos lo contrario, i.e.  $(p-2, p+1) \notin F(D)$ ; como  $p=y$  y los vértice  $x$  &  $y$  no son consecutivos en  $\gamma$ , entonces  $\{p+1\} \cap \{x, y\} = \emptyset$ , y por la definición de  $D$  tenemos entonces que  $(p+1, p-2) \in F(D)$ .

Así que  $\gamma_4 = (p-2, p-1, p, p+1, p-2)$  es un ciclo dirigido contenido en  $D$  de longitud 4, y es casimonocromático por hipótesis del Teorema; como  $(p-2, p-1)$  y  $(p-1, p)$  son flechas de color azul y  $(p, p+1)$  es roja, entonces  $(p+1, p-2)$  es necesariamente de color azul, lo que implica que  $(p+1, p-2, p-1, p)$  es una trayectoria dirigida monocromática y  $(p+1, p) \in F(C(D))$ , de donde  $(p, p+1) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \in \text{Asim}(C(D))$ .

Figura: (9.1) Si  $((p-2, p+1) \notin F(D))$



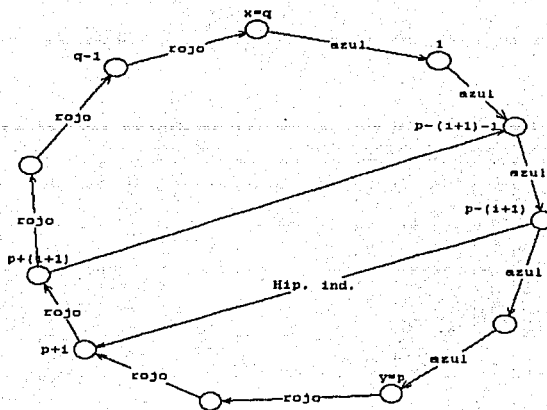
(9.2) Hipótesis inductiva: supongamos que  $(p-(i+1), p+i) \in F(D)$ .

(9.3) Por demostrar que  $(p-((i+1)+1), p+(i+1)) \in F(D)$  para  $p-2 \geq i+1 \geq 1$ : supongamos lo contrario, i.e.  $(p-((i+1)+1), p+(i+1)) = (p-(i+1)-1, p+(i+1)) \notin F(D)$  para  $p-2 \geq i+1 \geq 1$ . Como  $p-2 \geq i+1 \geq 1$  entonces  $-1 \geq -(i+1) \geq 2-p$  &  $p-2 \geq p-(i+1)-1 \geq 1$ , así que  $p-(i+1)-1 \notin \{x, y\}$ , por lo que  $p-(i+1)-1$  es adyacente a todo vértice de  $D$ , y entonces por definición de  $D$  se tiene que  $(p+(i+1)-1, p-(i+1)) \in F(D)$ .

Entonces  $\gamma_4 = (p+i, p+(i+1), p-(i+1)-1, p-(i+1), p+i)$  es un ciclo dirigido de longitud cuatro contenido en  $D$  (pues  $\{(p-(i+1), p-(i+1)-1), (p+i, p+(i+1))\} \subseteq \gamma \subseteq D$ , y  $(p-(i+1), p+i) \in F(D)$  por hipótesis inductiva) y es casimonocromático por hipótesis del teorema, y considerando que  $(p-(i+1)-1, p-(i+1))$  es una flecha azul y  $(p+i, p+(i+1))$  es roja, se tiene que las flechas  $(p+(i+1), p-(i+1)-1)$  y  $(p-(i+1), p+i)$  son ambas azules o ambas rojas.

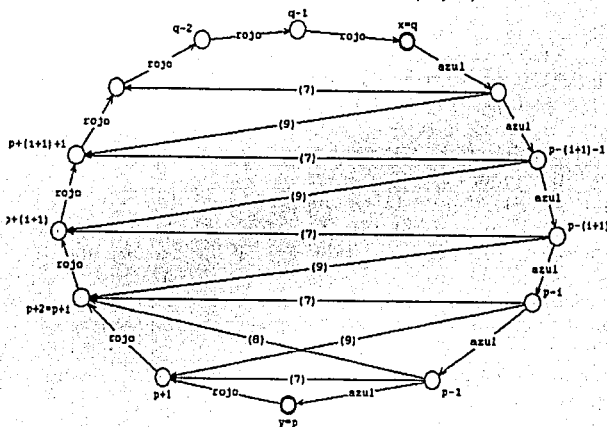
Si son rojas, entonces  $(p-(i+1), p+i, p+(i+1), p-(i+1)-1)$  es una trayectoria dirigida monocromática, por lo que  $(p-(i+1), p-(i+1)-1) \in F(C(D))$  y  $(p-(i+1)-1, p-(i+1)) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \in F(\text{Asim}(C(D)))$ . Si  $(p+(i+1), p-(i+1)-1)$  y  $(p-(i+1), p+i)$  son azules, entonces  $(p+(i+1), p-(i+1)-1, p-(i+1), p+i)$  es una trayectoria dirigida monocromática, por lo que  $(p+(i+1), p+i) \in F(C(D))$  y  $(p-(i+1), p-i) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \in F(\text{Asim}(C(D)))$ . Por lo tanto  $(p-((i+1)+1), p+(i+1)) \in F(D)$  para  $p-2 \geq i+1 \geq 1$ .

Figura: (9.3) Si  $(p-(i+1), p+(i+1)) \notin F(D)$



Recordemos que se ha supuesto que  $p = \text{long}(x, \gamma, y) \leq \text{long}(y, \gamma, x)$ , por lo tanto  $q = \text{long}(\gamma) \geq 2p = 2 \text{long}(x, \gamma, y)$ . Entonces  $\text{long}(x, \gamma, y) \leq q/2$ .

Figura: De los incisos 6, 7, 8, 9:





Observemos que si  $2p=q$  entonces con  $i=(q/2)-1=p-1$  ( $1 \leq i+1=p-1$ ) se sigue del inciso (6) que  $(q-i, i) = (q-p+1, p-1) = (p+1, p-1) \in F(D)$ , lo que contradice la afirmación del inciso (7) para  $i=1$  ( $(p-1, p+1) \in F(D)$ ). Por lo tanto  $2p \neq q$ , y  $p=\text{long}(x, \gamma, y)$  es estrictamente menor que  $\text{long}(y, \gamma, x)$ .

Si  $2p = q-1$ , entonces  $p+2 = q-(p-1)^{13}$ , y se sigue del inciso (6) (con  $i=p-1$ ) que  $(q-(p-1), p-1) = (p+2, p-1) \in F(D)$ , lo que contradice la observación del inciso (8) ( $(p-1, p+2) \in F(D)$ ). Por lo tanto  $2p$  es estrictamente menor que  $q-1$ .

(10)  $\forall i \mid p-1 \geq i \geq 1 \exists j(i) \in (y, \gamma, x) \mid (p-i, j(i)) \in F(D)$  es roja y  $p+i \leq j(i) \leq q-(p-i)$

Procedamos por inducción sobre  $i$ :

(10.1) Base: para  $i=1$ , p.d.  $\exists j(1) \in (y, \gamma, x) \mid (p-1, j(1)) \in F(D)$  es roja y  $p+1 \leq j(1) \leq q-(p-1)$ .

Sea  $j(1) = \min \{ K \mid p+2 < K \leq q, \text{ y } (K, p-1) \in F(D) \} - 2$ ; de donde  $p+2 \leq \min \{ K \mid p+2 < K \leq q, \text{ y } (K, p-1) \in F(D) \} \leq q$ .

Observemos que  $j(1)$  está bien definido: con  $i=p-1$  se sigue del inciso (6) que  $(q-(p-1), p-1) \in F(D)$ , donde  $p+2 < q-(p-1) \leq q$  (pues sabemos que  $2p < q-1$ , de donde  $2p+1 < q$  y por tanto  $p+2 < q-p+1 = q-(p-1)$ ); de donde se sigue que  $p+2 < \min \{ K \mid p+2 < K \leq q, \text{ y } (K, p-1) \in F(D) \} - 2 = j(1) \leq q-(p-1)^{14}$ , y por consiguiente que  $p < \min \{ K \mid p+2 \leq K \leq q, \text{ y } (K, p-1) \in F(D) \} - 2 = j(1) \leq q-(p-1)$ , por lo que  $p+1 \leq j(1) \leq q-(p-1)$ .

Ahora bien, con  $i=1$  se sigue del inciso (7) que  $(p-1, p+1) \in F(D)$ , y se tiene que  $(p-1, p+2) \in F(D)$  por el inciso (8); por lo tanto, de la definición de  $j(1)$  es consecuencia que  $\{(p-1, j(1)), (p-1, j(1)+1), (j(1)+2, p-1)\} \subseteq F(D)$ .

Por lo tanto  $\gamma_4 = (j(1)+2, p-1, j(1), j(1)+1, j(1)+2)$  es un ciclo dirigido de longitud cuatro contenido en  $D$ , así que es casimonocromático por hipótesis del Teorema, y como  $\gamma_4$  tiene dos flechas rojas (que son  $(j(1), j(1)+1)$  y  $(j(1)+1, j(1)+2)$ ), entonces al menos una de las flechas  $(j(1)+2, p-1)$  o  $(p-1, j(1))$  es de color rojo.

Si  $(j(1)+2, p-1)$  es roja, entonces  $(p, p+1, \dots, j(1), j(1)+2, p-1)$  es una trayectoria dirigida monocromática y  $(p, p-1) \in F(C(D))$ , de donde  $(p-1, p) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq F(\text{Asim}(C(D)))$ .

Por lo tanto  $(j(1)+2, p-1)$  no es de color rojo, y  $(p-1, j(1))$  sí lo es. Así concluimos la prueba del inciso (10.1):  $\exists j(1) \in (y, \gamma, x) \mid (p-1, j(1)) \in F(D)$  es roja y  $p+1 \leq j(1) \leq q-(p-1)$ .

(10.2) Hipótesis inductiva: sea  $1 < i \leq p-1$  y supongamos que  $\exists j(i) \in (y, \gamma, x) \mid (p-i, j(i)) \in F(D)$  es roja, y  $p+i \leq j(i) \leq q-(p-i)$ .

(10.3) Suponiendo que  $1 \leq i+1 \leq p-1$ , se demostrará que  $\exists j(i+1) \in (y, \gamma, x) \mid (p-(i+1), j(i+1)) \in F(D)$  es roja, con  $p+(i+1) \leq j(i+1) \leq q-(p-(i+1))$ .

Sea  $j(i+1) = \min \{ K \mid p+(i+1)+1 < K \mid (K, p-(i+1)) \in F(D) \} - 2$ .

Observemos que  $j(i+1)$  está bien definido: con  $i=p-(i+1)$  se sigue del inciso (6) que  $(q-(p-(i+1)), p-(i+1)) \in F(D)^{15}$ ; y por otra parte,  $2p < q-1$  (suposición posterior al inciso 10)  $\Rightarrow p < q-1-p \Rightarrow p+(i+1)+1 < q-1-p+(i+1)+1 = q-p+i+1 = q-(p-i) = q-(p-(i+1)) \Rightarrow p+(i+1)+1 < q-(p-(i+1))$ .

Entonces  $p+(i+1)+1 < \min \{ K \mid p+(i+1)+1 < K \mid (K, p-(i+1)) \in F(D) \} \leq q-(p-(i+1))$ , de donde  $p+i < j(i+1) \leq q-(p-(i+1))$ , y finalmente  $p+(i+1) \leq j(i+1) \leq q-(p-(i+1))$ .

Ahora bien, como  $1 \leq i+1 \leq p-1$ , se sigue del inciso (7) que  $(p-(i+1), p+(i+1)) \in F(D)$ ; y por otra parte, dado que  $1 \leq i+1 \leq p-1$  entonces  $1 < i \leq p-2$ , así que es consecuencia del inciso (9) que  $(p-(i+1), p+(i+1)-1) = (p-(i+1), p+i) \in F(D)$ .

<sup>13</sup> $2p = q-1 \Rightarrow p+p+1 = q \Rightarrow p+1 = q-p \Rightarrow p+2 = q-p+1 = q-(p-1)$

<sup>14</sup>La primera desigualdad es estricta y la asegura el inciso (8), y la segunda desigualdad se debe a que  $q-(p-1)$  cumple que  $p+2 < q-(p-1) < q$  &  $(q-(p-1), p-1) \in F(D)$ , observación que ya fue demostrada.

<sup>15</sup>Ya que se cumplen las hipótesis del inciso (6):  $1 \leq i+1 \leq p-1 \Rightarrow -1 \geq -(i+1) \geq 1-p \Rightarrow p-1 \geq p-(i+1) \geq 1$



Así que de la definición de  $j(i+1)$  se sigue que  $\{(j(i+1)+1, p-(i+1)), (p+(i+1), j(i+1))\} \subseteq F(D)$ .

Por lo tanto  $\gamma_4 = (p-(i+1), j(i+1), j(i+1)+1, j(i+1)+2, p-(i+1))$  es un ciclo dirigido de longitud cuatro contenido en  $D$ .

A fin de continuar la prueba de (10) analizando el ciclo  $\gamma_4$ , se requiere de las siguientes afirmaciones:

(10.4) Sea  $z \in (x, \gamma, y) - \{x, y\} \mid z+1 \in (x, \gamma, y) - \{x, y\}$ . P.d. si  $i \in (y, \gamma, x)$ ,  $i-1 \neq y$  &  $(i, z) \in F(D)$ , entonces  $(i-1, z+1) \in F(D)$

Supongamos lo contrario, i.e.  $(i-1, z+1) \in F(D)$ . Se sigue de las hipótesis que  $i-1$  es adyacente a todo vértice de  $D$  (es hipótesis que  $i \in (y, \gamma, x)$ , así que  $i-1 \neq x$ , por lo que  $i-1$  es adyacente a todo vértice de  $D$ ), entonces  $(z+1, i-1) \in F(D)$  por definición de  $D$ .

Así que  $\gamma_4 = (z+1, i-1, i, z, z+1)$  es un ciclo dirigido de longitud cuatro contenido en  $D$ , y es casimonocromático por hipótesis del Teorema.  $\gamma_4$  tiene una flecha roja,  $(i-1, i)$ , y una flecha de color azul,  $(z, z+1)$ ; por lo tanto las flechas  $(i, z)$  y  $(z+1, i-1)$  son ambas azules o ambas rojas:

Si  $(i, z)$  y  $(z+1, i-1)$  son rojas, entonces  $(z+1, i-1, i, z)$  es una trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , así que  $(z+1, z) \in F(C(D))$  y  $(z, z+1) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ . Si  $(i, z)$  y  $(z+1, i-1)$  son azules, entonces  $(i, z, z+1, i-1)$  es una trayectoria dirigida monocromática en  $D$ , así que  $(i, i-1) \in F(C(D))$  y por tanto  $(i-1, i) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq \text{Asim}(C(D))$ .

Por lo tanto  $(i-1, z+1) \in F(D)$ .

(10.5) Si  $K \in (y, \gamma, x)$ ,  $K > p+(i+1)+1$ ,  $i \geq 1$  &  $(K, p-(i+1)) \in F(D)$ , entonces  $K-1 \in (y, \gamma, x)$ ,  $K-1 > p+i+1$  &  $(K-1, p-i) \in F(D)$ .

Como  $K \in (y, \gamma, x)$ , entonces  $K \leq q$ , de donde  $K-1 \leq q-1 \leq q$ . Por otra parte, como  $K > p+i+2$ , entonces  $K-1 > p+(i+1)$ . Por lo tanto  $p=y < p+(i+1) \leq K-1 \leq q=x$ , de donde se sigue que  $K-1 \in (y, \gamma, x)$ .

Ahora, observemos que se cumplen las hipótesis del inciso 10.4 para  $i=K$  &  $z=p-(i+1)$ : a)  $i \geq 1 \Rightarrow i+1 \geq 2 \Rightarrow -(i+1) \leq -2 \Rightarrow p-(i+1) \leq p-2 \Rightarrow z = p-(i+1) \neq p=y$ . Además,  $p-(i+1) \neq x$ , de lo contrario  $p-(i+1)=q$ , de donde  $q-p=-(i+1) \leq 0$ , contradiciendo que  $2p \leq q-1$ . Por lo tanto  $z = p-(i+1) \in (x, \gamma, y) - \{x, y\}$ . b) De a) se tiene que  $1 \leq p-i-1 \leq p-2$ , así que  $2 \leq p-i \leq p-1$ , por lo que  $z-1 = p-(i+1)+1 = p-i \in (x, \gamma, y) - \{x, y\}$ . c) Por hipótesis  $K > p+i+2$ , entonces  $K-1 > p+(i+1) \geq p+2 > p=y$ , por lo tanto  $K-1 \neq y$ . d) Por hipótesis  $K \in (y, \gamma, x)$  &  $(K, p-(i+1)) \in F(D)$ .

Entonces por el inciso 10.4,  $(K-1, p-(i+1)+1) \in F(D)$ .

(10.6)  $j(i) \leq j(i+1)-1$ .

Sea  $K_0 = \min \{K \in (y, \gamma, x) \mid K > p+(i+1)+1 \text{ y } (K, p-(i+1)) \in F(D)\}^{16}$ .

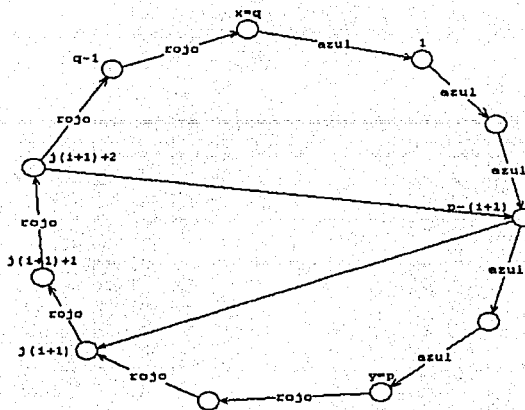
Notemos que se cumplen las hipótesis del inciso anterior para  $K_0$ , así que el inciso 10.5 nos asegura que  $K_0-1 \in (y, \gamma, x)$ ,  $K_0 > p+i+1$  &  $(K_0-1, p-i) \in F(D)$ .

Por lo tanto  $K_0-1 > \min \{K \in (y, \gamma, x) \mid K > p+i+1 \text{ y } (K, p-i) \in F(D)\}$ .

Así que  $K_0-1-2 \geq \min \{K \in (y, \gamma, x) \mid K > p+i+1 \text{ y } (K, p-i) \in F(D)\} - 2 = j(i)$ . Pero  $K_0-2 = j(i+1)$ . Por lo tanto  $j(i+1)-1 \geq j(i)$ .

<sup>16</sup>  $K_0$  está bien definido: el inciso (6) nos asegura que  $(q-(p-(i+1)), p-(i+1)) \in F(D)$ ; y con  $K=q-(p-(i+1))$  se cumple que  $K > p+i+2$  (ya que  $2p < q-1 \Rightarrow q-p > p+1 \Rightarrow q-p+i+1 > p+i+2 \Rightarrow K > p+i+2$ )

Figura: (10).  $\gamma_4$



Consideremos nuevamente a  $\gamma_4 = (p-(i+1), j(i+1), j(i+1)+1, j(i+1)+2, p-(i+1))$ , que es un ciclo dirigido de longitud cuatro contenido en  $D$  y casimonocromático por hipótesis del Teorema. Observemos que  $(j(i+1), j(i+1)+1)$  y  $(j(i+1)+1, j(i+1)+2)$  son dos flechas rojas en  $\gamma_4$ , entonces al menos una de las flechas  $(p-(i+1), j(i+1))$  o  $(j(i+1)+2, p-(i+1))$  es de color rojo:

Si  $(j(i+1)+2, p-(i+1))$  es roja, entonces  $T = (p-i, j(i), j(i)+1, \dots, j(i+1), j(i+1)+1, j(i+1)+2, p-(i+1))$  es una trayectoria dirigida de color rojo contenida en  $D^{17}$ , por lo que  $(p-i, p-(i+1)) \in F(C(D))$ , de donde  $(p-(i+1), p-i) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq F(\text{Asim}(C(D)))$ .

Por lo tanto  $(p-(i+1), j(i+1))$  es roja, y culminamos así la demostración del inciso 10.

Para finalizar la prueba del Teorema, apliquemos ahora el resultado del inciso 10 a  $i=p-1$ : se tiene entonces que existe  $j(p-1) \in (y, \gamma, x)$  tal que  $(p-(p-1), j(p-1)) = (1, j(p-1)) \in F(D)$  es roja. Por lo tanto  $(1, j(p-1), j(p-1)+1, j(p-1)+2, \dots, x)$  es una trayectoria dirigida monocromática (roja), por lo que  $(1, x) \in F(C(D))$  y  $(x, 1) \in F(\text{Sim}(C(D)))$ , contradiciendo que  $\gamma \subseteq F(\text{Asim}(C(D)))$ .

†

Culminamos así esta larga pero afortunada prueba que asegura un resultado análogo al obtenido para torneos en el capítulo previo.

<sup>17</sup> Observemos que  $(p-i, j(i)) \in F(D)$  y es roja por hipótesis inductiva (inciso 10.2); y el resultado del inciso (10.6) justifica que  $T$  es una trayectoria.



# Conclusiones

El presente texto no solamente tiene como objetivo reunir resultados interesantes relativos a núcleos en digráficas, sino también hacer obvio al lector cómo cada nuevo concepto y cada prueba conforman las piezas de un divertido y creativo rompecabezas. Para ello, como en cualquier juego que comienza, debieron ser presentadas las reglas, que aquí se refieren a los conceptos y resultados básicos de Teoría de Digráficas, y que permitieron después introducir el concepto de seminúcleo, núcleo y núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas en una digráfica; inmediatamente después se analizan algunas de las propiedades importantes de estos últimos, condiciones suficientes y necesarias para su existencia, y se recurre después a dos tipos de digráficas que serán de utilidad, me refiero a digráficas núcleo perfectas y núcleo imperfectas críticas.

Posteriormente se muestran al lector algunas de las diversas aplicaciones del concepto de núcleo de una digráfica, en las áreas de Lógica, Combinatoria y Teoría de Juegos; lo que constituye la mejor prueba de que, si bien la teoría de núcleos en digráficas es una mina de preciosos tesoros para las Matemáticas Teóricas, también lo puede ser para quienes buscan su aplicación.

Tras presentarse al lector una digráfica muy particular denominada torneo, y los conceptos de digráficas  $m$ -coloreadas y núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas, puede observarse que el contenido subsecuente de la tesis retrata de manera natural la necesidad de explorar cuáles son condiciones suficientes para que un torneo  $m$ -coloreado tenga núcleo por trayectorias dirigidas monocromáticas; en el cuarto capítulo se presentan algunas de esas condiciones y en un orden tal que, tras cada Teorema, la afirmación que le sigue no es del todo inesperada (aunque las demostraciones bien pueden llegar a sorprender, como sucedió a la que suscribe): se comienza con la condición de la no existencia de ciclos y torneos transitivos de longitud 3 y 3-coloreados, después, si cada ciclo dirigido de longitud a lo más cuatro es casimonocromático, y finalmente, si existe  $k$  (donde  $3 \leq k \leq p$ ) tal que cumpla las condiciones de que, a) para todo torneo  $m$ -coloreado  $T' \subseteq T$  tal que  $T'$  no contiene ciclos dirigidos de longitud  $k$ , se tiene que  $C(T')$  es una digráfica núcleo perfecta, y b) Cada ciclo dirigido de longitud  $k$  contenido en  $T$  es  $C(T)$ -monocromático. Finalmente, en la última parte de este texto, se hace un análisis análogo al realizado a torneos  $m$ -coloreados, a digráficas denominadas casitorneos  $m$ -coloreados, obteniéndose también interesantes resultados.

La interrogante respecto al tema de núcleos en digráficas, en particular respecto al tema de núcleos por trayectorias dirigidas monocromáticas en torneos  $m$ -coloreados, son muy diversas, y están en espera de ser resueltas para dar a luz, a su vez, a nuevos y vastos temas de investigación. Así que el juego sigue... y es cada vez más divertido.

Es mi deseo que al término del análisis de la presente tesis, el lector haya podido completar este pequeño aunque muy colorido rompecabezas, y que retrata tan solo una parte del infinito y bello rompecabezas que con las Matemáticas la mente humana ha podido concebir.



# Bibliografía

1. G. Chartrand, *Graphs and Digraphs*, Chapman and Hall, London, 1996.
2. B. Sands, N.Sauer, R. Woodrow, *On monochromatic paths ins edge-coloured digraphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B33, (1988), 271-275.
3. Shen Minggana, *On monochromatic paths in  $m$ -coloured torunaments*, Journal of Combinatorial Theory, Series B45, (1988), 108-111.
4. H. Galeana-Sánchez, S. Rajsbaum, *Cycle pancyclism in tournaments III*, submitted.
5. H. Galeana-Sánchez, *On monochromatic paths and monochromatic cycles in edge coloured tournaments*, Discrete Math. 156 (1996), 103-112.
6. H. Galeana-Sánchez *Kernels in edge-colored digraphs*, Discrete Math. 184 (1998), 87-99.
7. H. Galeana-Sánchez and J. García-Ruvalcaba, *Kernels in the closure of coloured digraphs*, D. Mathematicae-Graph Theory 20 (2000), 243-254.
8. H. Galeana-Sánchez and J. García-Ruvalcaba; *On graphs all of whose  $\{C_3, T_3\}$ -free arc colorations are kernel-perfect.*
9. V. Neumann-Lara, *Seminúcleos y núcleos*, Anales del Instituto de Matemáticas Vol.11, UNAM (1971), 55-62.
10. M. R. Rojas-Monroy, *Resultados recientes en teoría de los núcleos*, Tesis de licenciatura UNAM, 1988, 1-10.
11. H. Galeana-Sánchez and V. Neumann Lara, *On kernel prefect critical digraphs*, Discrete Math. 59 (1986), 257-265.