

01173

6



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA  
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**"ANALISIS DE TRANSFERENCIA DE CALOR CONJUGADO  
EN UNA ALETA VERTICAL INMERSA EN UN MEDIO  
POROSO"**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
MAESTRO EN INGENIERIA MECANICA  
( AREA DE TERMOFLUIDOS )**

**P R E S E N T A**

**LORENZO ALBERTO MARTINEZ SUASTEGUI**

**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. CESAR TREVIÑO TREVIÑO**



MEXICO, D.F.



2003

A



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## *Agradecimientos*

*Deseo agradecerle a mi tutor el Dr. Cesar Treviño por brindarme la oportunidad de trabajar con él, por su paciencia durante todo el tiempo que me dedicó y por su apoyo incondicional durante este proyecto.*

*Deseo agradecer a todos mis sinodales por haberme guiado para la realización de esta tesis. Agradezco al Dr. Francisco Solorio por la revisión y observaciones al manuscrito y en especial al Dr. Federico Méndez por todas sus enseñanzas.*

*Agradezco a mis compañeros y amigos de cubículo Jorge e Irais por todas sus atenciones (y en ocasiones uno que otro regaño). En especial quiero agradecer a Pepe, ya que siempre estuvo dispuesto a ofrecer su ayuda desinteresada, pasando horas enteras trabajando conmigo y enseñándome para poder sacar adelante este trabajo. Tu ayuda fue invaluable para mí.*

*Agradezco a mis amigos Fausto (no es como yo digo, es como es), Lord Foullon, Marky Mark (que la historia nos juzge), Regina, Eréndira, Marquitos (pss igual), Lee (see ya when I get there!), a Pulido, al Comoquema, a Buenrostro (es lo que te estoy diciendo), a los Mecánicos Naniel, Nõñe, Jack (el Destapador) y Joel, a la banda Wazaa, a Alex, al Coach Manolo y a todo el equipo de entrenadores.*

*Agradezco a Quico por todo lo que me inculcó cuando era más joven. Tus enseñanzas me acompañan siempre.*

*Agradezco a CONACYT por la beca (con número de registro 166149) que se me otorgó durante mis estudios.*

*Agradezco a la familia Noguez Jimeno por toda la confianza y cariño que tienen en mí.*

♡



## *Dedicatorias*

*Dedico este trabajo a Bernardo y en especial a mi querida hermana Elizabeth. Gracias por toda tu ayuda no sólo con este trabajo, sino a lo largo de toda mi vida. Verdaderamente es una fortuna contar con alguien como tu, siempre dispuesta a apoyarme en todo lo que haga. Te adoro.*

*A mi querida novia Laura, por creer en mi y por toda tu paciencia. Tu compañía me ha transformado por completo y me ha ayudado a madurar en todos los aspectos. Es una dicha poder compartir las mismas metas. Esta es una de ellas. Te amo!*

*A mis padres:*

*Todo lo que hago en esta vida es por ustedes y gracias a ustedes. Gracias por confiar en mí. Su apoyo incondicional en todo momento fue el que me ayudó a lograr esta meta. Su ejemplo es el que me motiva a seguir trabajando siempre, a nunca rendirme y a sonreír y disfrutar de esta vida que gracias a ustedes es maravillosa. Poder compartir este logro con ustedes es una dicha.*

*Mi gratitud hacia ustedes será eterna.*

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

C

# Definición de Símbolos

## Letras Latinas

$g$	aceleración de la gravedad
$L$	longitud de la aleta
$L^*$	longitud de penetración térmica
$h$	semigrosor de la aleta
$K$	permeabilidad específica del medio poroso
$p$	presión
$u, v$	velocidad longitudinal y transversal respectivamente
$u_c, v_c$	velocidad crítica longitudinal y transversal
$Ra^*$	número de Rayleigh basado en $L^*$
$Ra_h$	número de Rayleigh basado en $h$
$T$	temperatura
$x, y$	coordenadas Cartesianas vertical y horizontal
$C_p$	capacidad térmica específica a presión constante
$U, V, s$	variables adimensionales
$A$	constante
$Z$	coordenada longitudinal adimensional

## Letras Griegas

$\delta$	espesor de la capa límite
$\varphi$	porosidad
$\alpha_m$	difusividad térmica del medio poroso saturado de fluido
$\beta$	coeficiente de expansión térmica
$\mu$	viscosidad dinámica del fluido
$\nu$	coeficiente cinemático de viscosidad del fluido
$\lambda$	conductividad térmica del medio poroso
$\rho$	densidad
$\theta, \eta, \chi$	variables adimensionales
$\epsilon$	relación de esbeltez de la aleta
$\xi, \zeta, s$	variables adimensionales
$\sigma$	coordenada longitudinal adimensional

## Subíndices

0	condiciones en la base de la aleta
$\infty$	condiciones muy lejos de la aleta
$w$	condiciones en la aleta
$s$	condiciones en la matriz del medio poroso

TEXIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Índice general

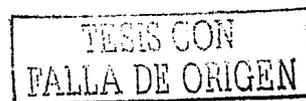
<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	5
1.2. Objetivos . . . . .	8
1.3. Estructura de la Tesis . . . . .	8
<b>2. Formulación del Problema</b>	<b>10</b>
2.1. Introducción . . . . .	10
<b>3. Ecuaciones de Capa Límite y Aproximación de Darcy-Boussinesq</b>	<b>12</b>
<b>4. Definición de Aleta Corta y Aleta Larga</b>	<b>16</b>
4.1. Análisis de Ordenes de Magnitud. . . . .	18
4.1.1. Aleta Larga . . . . .	18
4.1.2. Aleta Corta . . . . .	21
<b>5. Solución por Autosemejanza</b>	<b>23</b>
5.1. Aletas Largas . . . . .	23
<b>6. Aleta Corta</b>	<b>27</b>
6.1. Solución para la Aleta Corta . . . . .	27
6.2. Solución Asintótica para $s \rightarrow \infty$ . . . . .	29
<b>7. Método Numérico para la Solución de la Aleta Corta</b>	<b>32</b>
<b>8. Resultados</b>	<b>34</b>



<b>9. Conclusiones</b>	<b>37</b>
<b>A. Solución por Autosemejanza</b>	<b>41</b>
<b>B. Discretización de la Ecuación (5.6)</b>	<b>46</b>
<b>C. Solución para aleta corta</b>	<b>52</b>
<b>D. Discretización para la aleta corta</b>	<b>57</b>

# Índice de figuras

2.1. Esquema del problema de la aleta vertical inmersa en un medio poroso saturado de fluido. . . . .	11
4.1. Esquema de la Aleta Corta . . . . .	17
4.2. Esquema de la Aleta Larga . . . . .	18
4.3. Número de Nusselt reducido, $Nu/Ra^{1/2}$ como una función de $s$ , obtenido según órdenes de magnitud. . . . .	22
5.1. Gráfica con la solución numérica de $g(\zeta)$ . . . . .	26
8.1. Comparación entre la solución numérica y la solución asintótica de primer y segundo orden. . . . .	35
8.2. Gráfica con las temperaturas adimensionales en la aleta como una función de $\chi$ para diferentes valores de $s$ . . . . .	36



## Resumen

En este trabajo, se estudian las características de transferencia de calor conjugado en una aleta vertical delgada, de longitud finita, que está inmersa en un medio poroso saturado de fluido. Este estudio se realiza empleando técnicas numéricas y asintóticas. La distribución de temperaturas adimensionales en la aleta junto con el número de Nusselt reducido, se obtienen como una función del parámetro de penetración  $s$ , el cual mide la región térmica para la cual la temperatura de la aleta disminuye asintóticamente hasta la temperatura que se tiene en el fluido circundante. Los valores numéricos de este parámetro adimensional nos permiten distinguir entre dos regímenes físicos posibles, los cuales presentan soluciones diferentes. Dichos regímenes son: aletas térmicamente largas, una región de transición intermedia y aletas térmicamente cortas.

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Antecedentes

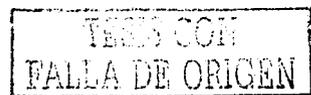
Cuando hablamos de un medio poroso nos referimos a un material que consiste en una matriz sólida con un vacío interconectado. Suponemos que la matriz sólida es rígida (situación usual) o que sufre una pequeña deformación. El hecho de que los poros (el vacío) estén interconectados permite el flujo de uno o más fluidos a través del material. En el caso más simple (flujo monofásico) el vacío está saturado con un solo fluido, mientras que en el caso de flujo bifásico el espacio está ocupado tanto por líquido como gas. En un medio poroso natural, la distribución de los poros (con respecto a su forma y su tamaño) es irregular. Ejemplos de medios porosos naturales son la arena de playa, la madera, los pulmones, el pan de centeno, la piedra caliza y la arenisca.

La porosidad  $\varphi$  de un medio poroso se define como la fracción del volumen total del medio que está ocupada por espacio vacío (recordando que se ha asumido que todo el espacio vacío está conectado), mientras que  $1 - \varphi$  es la fracción que está ocupada por sólido. Para medios porosos naturales,  $\varphi$  normalmente no excede el valor de 0.6. En el caso en el que el tamaño de los granos es poco uniforme, se tienen valores de porosidad menores debido a que los granos pequeños llenan los poros formados por los granos más grandes.

La transferencia de calor por convección natural en un medio poroso ha sido un área de intensa investigación en las últimas dos décadas debido a que ha habido un incremento por parte de la sociedad en la demanda a la solución a problemas de tipo geofísico, ambiental y tecnológico. Dichos

problemas son de interés, por ejemplo, en la utilización de energía geotérmica, intercambiadores de calor regenerativos, colectores solares, estructuras con múltiples protecciones que se emplean para el aislamiento de reactores nucleares, almacenamiento de productos agrícolas, dispersión de contaminantes en mantos acuíferos, procesos de transporte en sistemas biomecánicos y una recuperación más eficiente de los recursos petroleros. En la industria de las tecnologías de aislamientos térmicos de alto rendimiento para edificios se emplea una matriz sólida de baja conductividad térmica junto con materiales aislantes fibrosos. En este tipo de configuraciones que forman un sistema combinado de dos materiales para formar paredes de aislamiento, los efectos conjugados de transferencia de calor no pueden ser despreciados. Un incontable número de aplicaciones prácticas del modelo han ocasionado una rápida expansión en la investigación y se han encontrado algunas correlaciones aplicables a varias configuraciones para problemas tanto industriales como ambientales para diversos valores del número de Nusselt y el número de Rayleigh. El parámetro  $Nu$  (número de Nusselt) es igual al gradiente de temperatura adimensional en la superficie y proporciona una medida de la transferencia de calor por convección que ocurre en la superficie. El número de Nusselt es para la capa límite térmica lo que el coeficiente de fricción es a la capa límite de velocidad y se define como  $Nu = hL/k_f$ . La transición en una capa límite de convección libre depende de la magnitud relativa de las fuerzas de empuje y viscosa en el fluido y se acostumbra correlacionar su ocurrencia en términos del número de Rayleigh, que es simplemente el producto de los números de Grashof y Prandtl. Para aletas verticales inmersas en un medio poroso el número de Rayleigh es  $Ra = Gr Pr = gK\beta(T_0 - T_\infty)L/\alpha_m\nu$ .

Recientemente, el libro de Pop e Ingham [1] presenta abundante evidencia teórica acerca del fenómeno de transferencia de calor conjugada. El libro de Sundén y Heggs [2] muestra que este tipo de configuración geométrica aparece en un rango muy amplio de problemas tanto científicos como ingenieriles asociados a diversas aplicaciones industriales. Ejemplos adicionales y tópicos relacionados están presentes en los libros de Ingham y Pop [3], Nield y Bejan [4] y Vafai [5]. El primer estudio teórico que abordó el problema conjugado de conducción-convección natural de una aleta vertical inmersa en un medio poroso con calentamiento en la base fue hecho por Lock y Gunn [9]. Ellos encontraron que existen soluciones por semejanza para geometrías específicas de las aletas. Basados en aproximaciones similares, han aparecido varios trabajos enfocados principalmente a obtener soluciones autosimilares y cuasi-similares, como es el caso de los trabajos realizados por Cheng y



Minkowycz [10], Kuehn *et al.* [11] y Sparrow y Acharya [12]. Basados en estos estudios, Pop *et al.* [13] obtuvieron una serie de soluciones por semejanza para una aleta larga vertical proyectándose hacia abajo desde una base plana horizontal calentada a temperatura uniforme para el caso en el que el producto conductividad térmica-espesor de la aleta variaba como una función de la distancia a partir de un origen especificado. Posteriormente, Pop *et al.* [14], refinando dicho análisis, desarrollaron un esquema numérico para diferencias finitas considerando uniforme tanto la conductividad térmica como el espesor de la aleta. En uno de los artículos en [2], Pop y Nakayama [15] hacen un repaso moderno de la transferencia de calor conjugado de una aleta vertical inmersa en un medio poroso saturado de fluido. Cabe mencionarse que en la mayoría de los casos, los autores normalmente consideran una aleta infinitamente larga para formular las ecuaciones acopladas que rigen dicho fenómeno. Por ejemplo, Pop y Nakayama introducen para adimensionalizar las ecuaciones y para seleccionar un origen de coordenadas apropiado una longitud característica  $x_b$  (ec. 14, referencia [15]) como parte del problema. No obstante, la interpretación física para escoger esta escala no está suficientemente aclarada. Por lo tanto, el espíritu de esta tesis es probar que esta escala de longitud, denominada  $L^*$ , puede ser encontrada fácilmente empleando un análisis de órdenes de magnitud a las ecuaciones que describen dicho fenómeno. Además, se evita la condición innecesaria de asumir una aleta infinitamente larga considerando una aleta vertical de longitud finita  $L$ , de tal manera que dependiendo de los valores asumidos para el cociente  $L^*/L$ , se muestran todos los regímenes posibles de este proceso de transferencia de calor conjugado. De esta forma, los resultados reportados con anterioridad por los diferentes autores aparecen como casos particulares de esta formulación.

Por consiguiente, el problema de capa límite conjugado es reformulado con un enfoque para obtener nuevas soluciones para una aleta vertical no isotérmica. Se considera el caso común en el que la parte superior de la aleta está fija a una temperatura determinada. Empleando análisis de órdenes de magnitud a las ecuaciones acopladas que rigen dicho fenómeno, identificamos una longitud de penetración térmica  $L^*$  (que también es proporcionada por Pop y Nakayama [15]), en la cual la temperatura de una aleta infinitamente larga tendrá un descenso hasta alcanzar la temperatura del fluido circundante. Como fue mencionado anteriormente, la relación entre  $L^*$  y la longitud  $L$  de la aleta es un parámetro fundamental que sirve para clasificar los regímenes posibles. Otro parámetro importante es el número de Rayleigh

(que será definido posteriormente) junto con las aproximaciones de flujo en convección libre para analizar la transición de una aleta térmicamente corta ( $s = L^*/L \gg 1$ ) a una aleta térmicamente larga ( $s \ll 1$ ). Esto con el objeto de poder averiguar la influencia de las propiedades técnicas de la aleta en la razón de transferencia de calor total. Finalmente, las soluciones analíticas obtenidas empleando métodos de perturbación se comparan con los resultados numéricos.

## 1.2. Objetivos

Los objetivos del presente trabajo son:

- Estudiar los efectos de convección natural y conducción de calor en una aleta vertical que se encuentra inmersa en un medio poroso saturado de fluido.
- Encontrar los parámetros importantes del sistema.
- Investigar los perfiles de temperatura, flujo de calor y velocidad del fluido en el medio poroso, así como las temperaturas en la aleta.

## 1.3. Estructura de la Tesis

En el Capítulo 2 se plantea el problema a resolver y se da una descripción detallada de la geometría del problema, el origen de coordenadas y las suposiciones empleadas para resolverlo. Como parte fundamental de este capítulo se deducen las ecuaciones que se emplearon para resolver el fenómeno de convección natural para un flujo bidimensional. Para llegar a dichas ecuaciones, se introducen y se explican las suposiciones que simplifican las ecuaciones fundamentales, tales como la aproximación de Darcy-Boussinesq y la aproximación de capa límite. Una vez que las ecuaciones elementales han sido descritas, el problema queda perfectamente definido con las condiciones iniciales y de frontera apropiadas.

En el Capítulo 3 se introducen las ecuaciones que rigen el fenómeno de transferencia de calor conjugado en una aleta vertical inmersa en un medio poroso saturado de fluido.

En el Capítulo 4 se explica lo que es una aleta larga, una aleta corta y en que radica la diferencia principal entre ambas. Para poder explicar dichos conceptos, se define una longitud característica de fundamental importancia

para este problema denominada longitud de penetración térmica. Posteriormente, se define a una variable adimensional  $s$  que relaciona esta longitud característica con la longitud de la aleta,  $s = L^*/L$ . De esta manera, el análisis teórico y numérico del proceso de transferencia de calor conjugado en la aleta proporcionará resultados en función de esta variable adimensional, pudiéndose determinar así si se está trabajando bajo el régimen de aleta larga o de aleta corta. A continuación se realiza el análisis de órdenes de magnitud para el espesor de la capa límite  $\delta$  y para las velocidades características longitudinal y transversal del fluido en el medio poroso  $u_c$  y  $v_c$  respectivamente. Del orden de magnitud de las ecuaciones de la energía de la aleta y del fluido en el medio poroso se obtiene el orden de magnitud de la longitud característica  $L^*$ .

En el Capítulo 5 se adimensionalizan las ecuaciones que rigen el fenómeno de transferencia de calor conjugado para el caso de una aleta larga y se obtiene la solución por autosemejanza.

En el Capítulo 6 se desarrolla la solución de la aleta corta.

En el Capítulo 7 se presenta el método numérico que se emplea para resolver el problema de la aleta corta.

En el Capítulo 8 y 9 se exponen los resultados y conclusiones del presente trabajo.

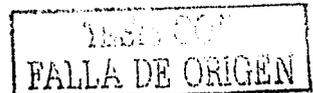
# Capítulo 2

## Formulación del Problema

### 2.1. Introducción

En esta tesis se analiza el problema conjugado de transferencia de calor de una aleta vertical inmersa en un medio poroso que se encuentra a una temperatura diferente que la de la aleta. La base de la aleta se encuentra en la parte superior de la misma. El esquema del problema se muestra en la figura 2.1, y consiste en una aleta plana vertical de longitud  $L$  y espesor  $2h$ . Se supone que la aleta es muy delgada, de tal forma que la relación de esbeltez  $\epsilon = h/L$  es pequeña comparada con la unidad. La aleta se somete a un proceso de enfriamiento inmersa en un medio poroso inicialmente en reposo a temperatura  $T_\infty$ . La base de la aleta se supone a una temperatura uniforme  $T_0 > T_\infty$ . Durante el proceso, calor es transferido por conducción desde la aleta y por convección natural en el fluido al establecerse una capa límite de fluido viscoso no isotérmica debido a la diferencia de temperatura y densidad del fluido en el medio poroso.

Considerando una aleta infinitamente larga y debido a la transferencia de calor hacia el medio poroso circundante, la temperatura decrece hacia abajo desde la base de la aleta hasta alcanzar la temperatura del medio poroso en una región de penetración térmica cuya longitud característica  $L^*$  puede estimarse realizando un balance de transferencia de calor al fluido y de conducción de calor a lo largo de la aleta. Asumiendo que el número de Rayleigh  $Ra^* = gK\beta(T_0 - T_\infty)L^*/\alpha_m\nu$  es mucho mayor a la unidad, el flujo alrededor de la aleta está confinado a una capa límite de convección natural. Aquí  $g, K, \beta, \alpha_m$  y  $\nu$  son la aceleración de la gravedad, la permeabilidad específica del



medio poroso, el coeficiente de expansión térmica, la difusividad térmica del medio poroso saturado de fluido y la viscosidad cinemática respectivamente.

Para la formulación matemática del problema se ha fijado la esquina inferior derecha de la aleta como el origen del sistema de coordenadas Cartesianas. El eje  $x$  va en dirección longitudinal y el eje  $y$  va en la dirección normal a la aleta. Se supone que el medio es infinito lo mismo que las dimensiones de la aleta en dirección normal al plano  $xy$ , de manera que no existen gradientes de temperatura tanto en el fluido como en la aleta en esa dirección. El extremo inferior de la aleta se considera adiabático, por lo que el enfriamiento sólo se debe a la transferencia de calor por las superficies laterales hacia el fluido en el medio poroso.

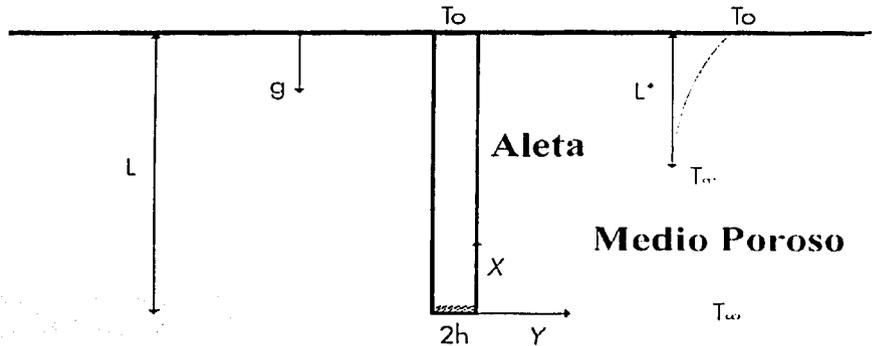


Figura 2.1: Esquema del problema de la aleta vertical inmersa en un medio poroso saturado de fluido.

## Capítulo 3

# Ecuaciones de Capa Límite y Aproximación de Darcy-Boussinesq

Las ecuaciones que modelan la convección en un medio poroso adyacente a una aleta vertical caliente en la que se forma una capa límite térmica delgada para grandes valores del número de Rayleigh son la ecuación de conservación de la masa (continuidad), la ecuación de Darcy-Boussinesq y la ecuación de conservación de energía.

La ecuación de continuidad se expresa como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.1)$$

donde  $u$  y  $v$  son las componentes longitudinal y transversal de la velocidad del fluido en el medio poroso.

La ecuación de Darcy-Boussinesq, que relaciona la velocidad del fluido con los gradientes de presión y de flotación para un flujo bidimensional cuyo vector de aceleración debido al campo gravitacional está en la dirección  $-x$  es:

$$u = \frac{K}{\mu} \left[ -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \beta (T - T_{\infty}) \right] \quad (3.2)$$

donde  $p$  denota la presión hidrostática local y  $\beta$  es el coeficiente de expansión térmica volumétrica definido por  $\beta = (-1/\rho) (\partial \rho / \partial T)_p$ .

Como los cambios de presión en dirección transversal son muy pequeños en comparación con los cambios de presión en dirección longitudinal, tenemos

que

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

Eliminando la presión en las ecuaciones (3.2)-(3.3) y empleando la función de corriente, Nield y Bejan [4] demuestran que la ley de Darcy-Boussinesq crítica para el caso de una aleta vertical inmersa en un medio poroso está dada por la ecuación siguiente:

$$u = \frac{g\rho K\beta(T - T_\infty)}{\mu} \quad (3.4)$$

La ecuación de conservación de energía para el caso particular de un medio poroso homogéneo en donde no existe generación interna de calor  $q'''$  y los efectos de disipación viscosa son despreciables es:

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.5)$$

En la ecuación anterior,  $T$  es la temperatura y  $\alpha$  es la difusividad térmica del medio poroso homogéneo, la cual se define como  $\alpha = (\lambda/\rho C_p)$ . Aquí,  $\lambda$  representa la conductividad térmica del medio poroso [4],  $\lambda = \varphi\lambda_f + (1 - \varphi)\lambda_s$ , donde  $\varphi$  es la porosidad y  $\lambda_f$  y  $\lambda_s$  son las conductividades térmicas del fluido y de la matriz porosa respectivamente. La ecuación anterior cuenta con el término  $\sigma$ , que representa la inercia térmica del medio poroso y que es una función de la inercia térmica tanto del fluido como del sólido. Dicho término se define de la siguiente manera:  $\sigma = [\varphi\rho C_p + (1 - \varphi)\rho_s C_{ps}] / \rho C_p$ . Las consideraciones que se hicieron para el caso de la ecuación de la conservación de energía son las siguientes:

1. El medio poroso es homogéneo. Esto significa que la matriz sólida y el fluido contenido dentro de los poros están distribuidos uniformemente a lo largo de todo el medio poroso.
2. El medio poroso es isotrópico y por lo tanto las propiedades de transporte como la permeabilidad específica del medio poroso y la conductividad térmica no dependen de la dirección del experimento a partir de la cual se está midiendo.
3. En cualquier punto del medio poroso existe un equilibrio térmico entre la matriz sólida y el fluido que llena los poros.
4. Las ecuaciones asumen como válida la aproximación de Boussinesq y se auxilian de la ecuación constitutiva  $\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)]$ , donde  $\rho_0$  es la densidad del fluido a la temperatura de referencia  $T_0$ . Dicha aproximación se

basa en considerar constantes todas las propiedades del medio poroso excepto la densidad, la cual es una función de la temperatura. Esta aproximación es válida siempre y cuando los cambios de densidad  $\Delta\rho$  sean pequeños en comparación con  $\rho_0$  y que las variaciones de temperatura sean insuficientes como para hacer que las propiedades del medio (tanto sólido como fluido) varíen significativamente de sus valores medios.

Para el caso de estado permanente, desaparece el término temporal de la ecuación (3.5) y tenemos que la ecuación de energía es:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (3.6)$$

Si empleamos las condiciones de capa límite [6] y [7], tenemos que  $y \sim \delta$ ,  $u \sim u_c$ ,  $x \sim L$ , con  $\delta \ll L$ . Sustituyendo las condiciones previamente mencionadas en la ecuación 3.6, tenemos que

$$u_c \frac{\Delta T}{L} + v \frac{\Delta T}{\delta} = \alpha \left( \frac{\Delta T}{L^2} + \frac{\Delta T}{\delta^2} \right) \quad (3.7)$$

con  $\Delta T = T_0 - T_\infty$ . La ecuación de la energía se analiza bajo la consideración de que el espesor de la capa límite térmica  $\delta$  es muy pequeño comparado con la escala longitudinal  $L$ , de manera que  $\Delta T/L^2 \ll \Delta T/\delta^2$ . Tomando en cuenta dicha consideración, la segunda derivada respecto a la coordenada longitudinal se puede despreciar por ser mucho menor que el término de segundo grado que tiene a la coordenada transversal, con lo que la ecuación de energía se reduce a la expresión siguiente:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_m \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.8)$$

De acuerdo con lo anterior, las ecuaciones que gobiernan el proceso de enfriamiento de convección natural para un flujo bidimensional son:

Continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.9)$$

Ley de Darcy-Boussineq

$$u = \frac{gK\beta}{\nu} (T - T_\infty) \quad (3.10)$$

Energía en el medio poroso

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_m \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (3.11)$$

Por otra parte, la ecuación de la energía en la aleta es la ecuación de Laplace y está dada por

$$\frac{\partial^2 T_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.12)$$

donde  $T_w$  es la temperatura de la aleta. Estas ecuaciones hay que resolverlas con las condiciones de frontera siguientes:

En la base de la aleta, la temperatura de la aleta es  $T_0$ .

$$T_w = T_0 \text{ en } x = L$$

Adiabaticidad en el extremo inferior de la aleta.

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_w}{\partial y} &= 0 \text{ en } y = -h \\ \frac{\partial T_w}{\partial x} &= 0 \text{ en } x = 0 \end{aligned}$$

La temperatura y el flujo de calor en la interfaz sólido-fluido es la misma tanto para el sólido como para el fluido. En dicha interfaz, se cumple la condición de no deslizamiento y de impermeabilidad para la velocidad longitudinal y transversal del fluido respectivamente.

$$\text{en } y = 0, \quad u = v = 0, \quad T = T_w, \quad \text{y } \lambda \frac{\partial T}{\partial y} = \lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial y}$$

Muy lejos de la capa límite, la velocidad longitudinal del fluido en el medio poroso tiende a cero y la temperatura del medio poroso es  $T_\infty$ .

$$u \rightarrow 0, \quad \text{y } T \rightarrow T_\infty \text{ cuando } y \rightarrow \infty.$$

## Capítulo 4

# Definición de Aleta Corta y Aleta Larga

Las aletas pueden ser cortas o largas dependiendo del régimen de transferencia de calor bajo el cual trabajan. La diferencia entre ambas radica en la relación de la longitud de la aleta con la longitud de penetración térmica, la cual se define como la longitud para la cual la temperatura de la aleta tiende asintóticamente hacia la que se tiene muy lejos de ésta. Para longitudes mayores a la longitud de penetración térmica, como la aleta y el medio poroso se encuentran a la misma temperatura (la cual está dada por las condiciones de frontera), el flujo de calor de la aleta hacia el medio circundante es despreciable. Es por eso que todo el material de la aleta que se encuentre más allá de la longitud de penetración térmica es inútil en cuanto al proceso de transferencia de calor se refiere.

Si la conductividad térmica del material de la aleta es grande, la penetración térmica de la aleta será mayor y ésta se verá reflejada hasta la parte inferior de la aleta. Para este caso, la longitud de penetración térmica  $L^*$  será mayor o igual a la longitud total de la aleta  $L$ . Para el caso en el que se cumple la condición  $L \ll L^*$ , estamos hablando de una aleta corta.

Por otro lado, existe toda una gama de materiales que poseen una conductividad térmica relativamente baja. Es para este tipo de materiales que la penetración térmica de la aleta a partir de su base no será lo suficientemente grande como para alcanzar la parte inferior de ésta. Ésto ocasiona que la temperatura en la parte inferior de la aleta sea la misma que se tiene en una zona que esté muy alejada de la aleta (fuera de la capa límite). En este caso, la longitud de penetración térmica es menor a la longitud total de la aleta y

a este caso se le define como una aleta larga, donde  $L \gg L^*$ .

Como la longitud de penetración térmica define el tipo de aleta, si definimos una variable  $s$  que relacione ambos conceptos, el análisis teórico y numérico del proceso de transferencia de calor conjugado en la aleta nos permitirá obtener los valores indicados que determinarán si se está trabajando bajo el régimen de aleta corta o de aleta larga.

Sea  $s = L^*/L$ , entonces existe un rango de valores de  $s$  para el cual se tiene una aleta corta o una aleta larga y está dado por la siguiente expresión:

$$\boxed{\text{Aleta larga } 1 \gg s \gg 1 \text{ Aleta corta}}$$

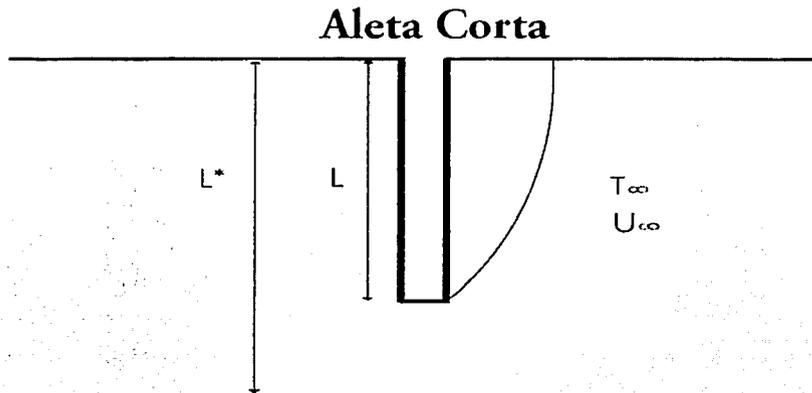


Figura 4.1: Equema de la Aleta Corta

## Aleta Larga

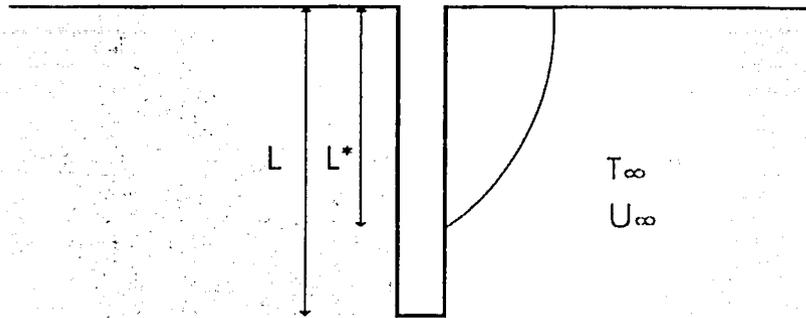


Figura 4.2: Esquema de la Aleta Larga

### 4.1. Análisis de Ordenes de Magnitud.

#### 4.1.1. Aleta Larga

Con base en el sistema de ecuaciones (3.9)-(3.12) y considerando las definiciones de orden de magnitud dadas con anterioridad, se deduce que la velocidad característica en dirección longitudinal es, de acuerdo a la ecuación (3.10)

$$u_c \sim \frac{gK\beta}{\nu}(T - T_\infty) \quad (4.1)$$

Asimismo, la velocidad característica en dirección transversal es, de la ecuación (3.9)

$$v_c \sim \frac{u_c \delta}{L^*} \quad (4.2)$$

Substituyendo (4.1) en (4.2), se obtiene

$$v_c \sim \frac{\delta}{L^*} \left[ \frac{gK\beta}{\nu} (T - T_\infty) \right] \quad (4.3)$$

De la ecuación (3.11), tenemos que

$$u_c \frac{\Delta T}{L^*} \sim \frac{\alpha_m \Delta T}{\delta^2}$$

Cancelando la diferencia de temperaturas a ambos lados de la ecuación y reacomodando términos se tiene que

$$\frac{\delta^2}{L^*} \sim \frac{\alpha_m}{u_c}$$

Sustituyendo  $u_c$  por su orden de magnitud dado por la relación (4.1), obtenemos

$$\frac{\delta}{L^*} \sim \frac{1}{Ra^{*1/2}} \quad (4.4)$$

donde el número de Rayleigh,  $Ra$  está definido de la siguiente forma

$$Ra = \frac{gK\beta(T - T_\infty)L^*}{\alpha\nu} \quad (4.5)$$

Si se completan términos en la ecuación de Darcy, se puede formar el número de Rayleigh tal como está definido en (4.5). El orden de magnitud de  $u_c$  queda dado por

$$u_c \sim \left[ \frac{gk\beta(T - T_\infty)}{\nu} \cdot \frac{L^*}{\alpha_m} \right] \left( \frac{\alpha_m}{L^*} \right) \sim \frac{Ra^* \alpha_m}{L^*} \quad (4.6)$$

Completando una vez más el número de Rayleigh y sustituyendo la relación (4.4) en la relación (4.2), se obtiene el orden de magnitud de  $v_c$ , el cual está dado por

$$v_c \sim \left[ \frac{gk\beta}{\nu} (T - T_\infty) \right] \frac{\delta}{L^*} \sim Ra^{*1/2} \frac{\alpha_m}{L^*} \quad (4.7)$$

Por otro lado, el orden de magnitud del flujo de calor en la interfaz sólido-fluido

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \sim \frac{\lambda(T_0 - T_\infty)}{\delta} \sim \frac{\lambda(T_0 - T_\infty) Ra^{*1/2}}{L^*} \quad (4.8)$$

donde se ha utilizado la relación (4.4).

El flujo de calor total en la aleta se obtiene al multiplicar (4.8) por la longitud característica,  $L^*$ . Sustituyendo y empleando una vez más a la relación (4.4) se obtiene el orden de magnitud del flujo de calor total.

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \cdot L^* \sim \frac{\lambda(T_0 - T_\infty)L^*}{\delta} \sim \lambda(T_0 - T_\infty) Ra^{*1/2} \quad (4.9)$$

Para el flujo de calor total en la base de la aleta, la ecuación de conducción se multiplica por el espesor de la aleta cuyo valor es  $h$  y se valúa a lo largo de toda la longitud, que para este caso es la longitud de penetración térmica.

$$\lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial x} \Big|_{x=L} \cdot h \sim \frac{\lambda_w (T_0 - T_\infty) h}{L^*} \quad (4.10)$$

Igualando (4.9) con (4.10)

$$\lambda (T_0 - T_\infty) Ra^{*1/2} \sim \frac{\lambda_w (T_0 - T_\infty) h}{L^*} \quad (4.11)$$

se obtiene el orden de magnitud de la longitud de penetración térmica

$$L^* \sim \frac{\lambda_w}{\lambda} \frac{h}{Ra^{*1/2}} \quad (4.12)$$

Empleando un número de Rayleigh basado en el espesor de la aleta  $Ra_h$ , el orden de magnitud de la longitud de penetración térmica queda expresado por

$$L^* \sim \left( \frac{\lambda_w}{\lambda} \right)^{2/3} \frac{h}{Ra_h^{1/3}} \quad (4.13)$$

El flujo de calor total en la aleta se obtiene substituyendo el orden de magnitud de la longitud de penetración térmica en la siguiente expresión

$$q_w = \lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial x} \Big|_L \cdot h \sim \lambda_w \frac{\Delta T}{L^*} h \sim \lambda \Delta T Ra^{*1/2} \quad (4.14)$$

Expresando el flujo de calor total en forma adimensional, el número de Nusselt está dado por la siguiente expresión:

$$\boxed{Nu_{larga} = \frac{q_w}{\lambda \Delta T} \sim Ra^{*1/2}} \quad (4.15)$$

Como puede observarse de la expresión anterior, para éste régimen, la longitud de la aleta se vuelve irrelevante por completo.

### 4.1.2. Aleta Corta

De la relación (4.4)

$$\delta \sim \frac{L}{Ra^{1/2}}$$

Para el flujo de calor total en la parte lateral de la aleta, se emplea la relación (4.4) en la relación (4.9) valuada a lo largo de toda la longitud de la misma.

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_0 L \sim \lambda \frac{\Delta T}{\delta} L \sim \lambda \Delta T Ra^{1/2} \quad (4.16)$$

Para la obtención del flujo de calor en la base de la aleta, se emplea la relación (4.10) valuada en el espesor que vale  $h$ .

$$\lambda_w \frac{\partial T_w}{\partial x} \Big|_L h \sim \lambda_w \frac{(T - T_1)}{L} h \quad (4.17)$$

Igualando (4.16) con (4.17), se obtiene el orden de magnitud del flujo de calor para una aleta corta.

$$\lambda_w \frac{(T - T_1)}{L} h \sim \lambda \Delta T Ra^{1/2}$$

Por lo tanto, el flujo de calor es del orden de:

$$q_w \sim \lambda \Delta T Ra^{1/2} \sim \lambda \Delta T Ra^{*1/2} \cdot \left( \frac{L}{L^*} \right)^{1/2}$$

Para este tipo de casos donde  $s \gg 1$ , la temperatura de la aleta es casi uniforme e igual a la temperatura que se tiene en la base de la aleta. En forma adimensional, el número de Nusselt para una aleta corta queda definido por la siguiente expresión:

$$\boxed{Nu_{corta} = \frac{q_w}{\lambda \Delta T} \sim \frac{Ra^{*1/2}}{s^{1/2}}} \quad (4.18)$$

donde  $s \gg 1$ .

Con base en el análisis anterior de órdenes de magnitud, el comportamiento del número de Nusselt reducido como función de  $s$  en la aleta es de la forma presentada en la Figura 4.3.

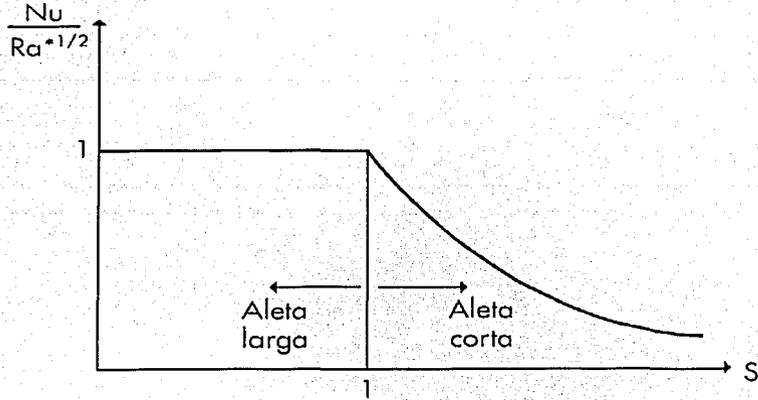


Figura 4.3: Número de Nusselt reducido,  $Nu/Ra^{1/2}$  como una función de  $s$ , obtenido según órdenes de magnitud.

# Capítulo 5

## Solución por Autosemejanza

### 5.1. Aletas Largas

Para aletas térmicamente largas donde  $L \gg L^*$  (valores para  $s \ll 1$ ), la longitud característica apropiada es  $L^*$ . Para este tipo de régimen, se introducen las siguientes variables adimensionales:

$$\begin{aligned}U &= \frac{u}{u_c}, \quad V = \frac{v}{u_c} Ra^{1/2} \\ \sigma &= \frac{L_0 - x}{L^*} \\ Z &= \frac{y}{L^*} Ra^{1/2} \\ \theta &= \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}, \quad \theta_w = \frac{T_w - T_\infty}{(T_0 - T_\infty)}\end{aligned}$$

donde  $L_0$  es una longitud que se calculará más adelante y  $u_c$  es la velocidad característica de flujo, definida por  $u_c = gK\beta(T - T_\infty)/\nu$ .

La forma adimensional de las ecuaciones (3.9)-(3.12) queda como:

Continuidad

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma} + \frac{\partial V}{\partial Z} = 0 \quad (5.1)$$

Darcy:

$$U = -\theta \quad (5.2)$$

Energía:

$$U \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} + V \frac{\partial \theta}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \quad (5.3)$$

Es muy importante mencionar que si la relación de esbeltez de la aleta  $h/L^* \ll 1$ , la ecuación de la energía en la aleta (3.12) puede ser integrada en dirección transversal. Esta aproximación se llama aproximación de la aleta térmicamente delgada y se basa en el hecho de que las variaciones transversales de temperatura a través de la aleta son muy pequeñas comparadas con la diferencia total de temperatura. En este caso, se asume que la temperatura de la aleta depende exclusivamente de la coordenada longitudinal, por lo que la ecuación de la energía en la aleta adimensional queda como

$$\frac{d^2 \theta_w}{d\sigma^2} + \frac{\partial \theta}{\partial Z} \Big|_0 = 0 \quad (5.4)$$

con las correspondientes condiciones de frontera adimensionales:

$$\begin{aligned} \text{en } V &= 0 \text{ y } Z = 0, \theta = \theta_w, \text{ mientras que } U = 0 \text{ cuando } Z, \sigma \rightarrow \infty \\ \theta_w &= 1 \text{ para } \sigma = \sigma_0 \text{ y } \theta_w \rightarrow 0 \text{ cuando } \sigma \rightarrow \infty \end{aligned}$$

donde  $\sigma_0 = (L_0 - L)/L^*$ .

Si se definen a unas nuevas variables tal que

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_w \phi(\xi) = \theta_w \frac{df}{d\eta} \\ \xi &= \frac{Z}{\sigma^2} \\ \theta_w &= \frac{A}{\sigma^3} \\ V &= \frac{F(\xi)}{\sigma^2}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde  $A = \sigma_0^3$  es una constante a determinarse posteriormente. De la ecuación de continuidad (5.1), se obtiene una relación entre  $F(\xi)$  y  $f(\xi)$  de la forma

$$F = A \left\{ -f - 2\xi \frac{df}{d\xi} \right\}$$

Por lo tanto, la ecuación de energía (5.4) se transforma en una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden (ver apéndice A) dada por

$$\frac{1}{A} \frac{d^3 f}{d\xi^3} - 3 \left( \frac{df}{d\xi} \right)^2 + f \frac{d^2 f}{d\xi^2} = 0 \quad (5.6)$$

con las condiciones de frontera dadas por

$$\left. \frac{df}{d\xi} \right|_{\infty} = 0, \quad \left. \frac{df}{d\xi} \right|_0 = 1, \quad \left. \frac{d^2f}{d\xi^2} \right|_0 = -12, \quad f(0) = 0 \quad (5.7)$$

Tenemos cuatro condiciones de frontera para una ecuación diferencial de tercer orden, por lo que automáticamente se puede encontrar el valor para la constante  $A$ . Haciendo un cambio de variable, tanto para la independiente como dependiente de la forma  $f = g/\sqrt{A}$  y  $\xi = \zeta/\sqrt{A}$ , la ecuación toma la forma universal

$$\frac{d^3g}{d\zeta^3} - 3 \left( \frac{dg}{d\zeta} \right)^2 + g \frac{d^2g}{d\zeta^2} = 0, \quad (5.8)$$

que debe integrarse con las tres condiciones de frontera

$$g(0) = 0, \quad \left. \frac{dg}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = 1, \quad \text{y} \quad \left. \frac{dg}{d\zeta} \right|_{\zeta \rightarrow \infty} = 0 \quad (5.9)$$

Invirtiendo la transformación, resulta que  $d^2g/d\zeta^2|_0 = 1/\sqrt{A}$  y  $d^2f/d\xi^2|_0 = -12/\sqrt{A}$ . Si se conoce  $d^2g/d\zeta^2|_0$  entonces se determina el valor de la constante  $A$ . La figura 5.1 muestra la solución numérica de la ecuación (5.8) con sus respectivas condiciones de frontera (5.9), mediante la técnica numérica descrita en el apéndice B. El valor obtenido de  $d^2g/d\zeta^2|_0 = -1.5158$ , por lo que el valor de  $A = 62.67$  y  $\sigma_0 = 3.9722$ . El flujo de calor adimensional en la parte superior de la aleta está dado por

$$Nu = Ra^{*1/2} \frac{3}{\sigma_0} \simeq 0.75525 Ra^{*1/2} \quad (5.10)$$

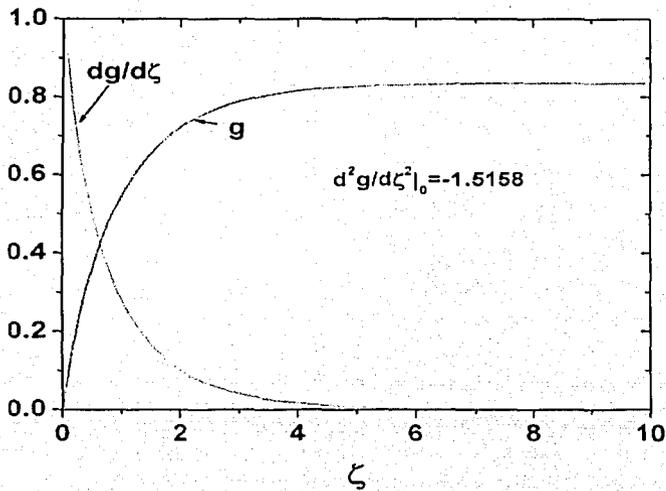


Figura 5.1: Gráfica con la solución numérica de  $g(\zeta)$

## Capítulo 6

### Aleta Corta

Para una aleta corta,  $L \ll L^*$ , ( $s \gg 1$ ) se emplea un análisis de orden de magnitud semejante al descrito para una aleta larga. La única diferencia radica en que la longitud característica apropiada es  $L$ , en vez de  $L^*$ . El orden de magnitud de  $\delta/L$  es por lo tanto

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{Ra^{1/2}} \quad (6.1)$$

por lo que se puede definir al espesor de la capa límite como una función de  $x$  tal que

$$\delta(x) \sim \frac{x}{Ra_x^{1/2}} \sim \frac{\sqrt{xL}}{Ra^{1/2}}, \quad (6.2)$$

donde  $Ra_x = Ra(x/L)$ .

#### 6.1. Solución para la Aleta Corta

El problema de transferencia de calor para este régimen puede ser estudiado empleando las siguientes variables adimensionales de orden unidad:

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{x}{L}, \quad \eta = \frac{yRa^{1/2}}{\sqrt{xL}} \\ \theta_w &= \frac{T_w(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty}, \quad \theta = \frac{T(x, y) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{u}{u_c} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \\ V &= v \frac{Ra^{1/2} \sqrt{\chi}}{u_c} \left[ \frac{1}{2} \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{f}{2} - \chi \frac{\partial f}{\partial \chi} \right] \end{aligned}$$

La ecuación de conducción de calor adimensional para una aleta corta se transforma a

$$s^{3/2} \frac{d^2 \theta_w}{d\chi^2} = - \frac{1}{\sqrt{\chi}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \Big|_0, \quad (6.3)$$

donde las condiciones de frontera en los extremos de la aleta están dadas por

$$\theta_w = 1 \text{ en } \chi = 1 \text{ y } \frac{d\theta_w}{d\chi} = 0 \text{ en } \chi = 0. \quad (6.4)$$

La ecuación adimensional que rige el movimiento del fluido inmerso en el medio poroso (ver apéndice C), se reduce a

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{f}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \chi \left[ \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \chi \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \chi} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] \quad (6.5)$$

con las condiciones de frontera adimensionales siguientes:

$$f = \frac{df}{d\eta} = \theta_w \text{ en } \eta = 0 \text{ y } \frac{df}{d\eta} = 0 \text{ cuando } \eta \longrightarrow \infty \quad (6.6)$$

## 6.2. Solución Asintótica para $s \rightarrow \infty$

Para grandes valores de  $s$  comparada con la unidad, se puede obtener una solución asintótica de las ecuaciones (6.3) y (6.6) mediante la expansión en potencias de  $s^{-3/2}$ . La solución puede ser escrita como

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_w(\chi) \\ f(\chi, \eta) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \theta_w \\ f_0(\eta) \end{array} \right\} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{s^{3j/2}} \left\{ \begin{array}{l} \theta_w(\chi) \\ f_j(\chi, \eta) \end{array} \right\}. \quad (6.7)$$

En este caso, el término dominante para la temperatura adimensional en la aleta es  $\theta_{w0} = 1$ . Acarrecando las expansiones dadas en las ecuaciones (6.7) a las ecuaciones adimensionales (6.3) y (6.5) con las condiciones de frontera asociadas y desarrollando términos hasta el orden  $s^{-3}$ , se obtienen las ecuaciones siguientes:

Para el sólido:

$$\frac{d^2 \theta_w}{d\chi^2} = -\frac{1}{\chi^{1/2}} \frac{\partial^2 f_{j-1}}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=0} \quad \text{para } j \geq 1, \quad (6.8)$$

con las condiciones de frontera

$$\frac{d\theta_w}{d\chi} \Big|_{\chi=0} = \theta_w(1) = 0, \quad \text{para } j \geq 1 \quad (6.9)$$

Para el fluido inmerso en el medio poroso:

$$\frac{d^3 f_0}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f_0 \frac{d^2 f_0}{d\eta^2} = 0 \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial^3 f_1}{\partial \eta^3} + \frac{1}{2} \left( f_0 \frac{\partial^2 f_1}{\partial \eta^2} + \frac{d^2 f_0}{d\eta^2} f_1 \right) - \chi \left[ \frac{df_0}{d\eta} \frac{\partial^2 f_1}{\partial \chi \partial \eta} - \frac{d^2 f_0}{d\eta^2} \frac{\partial f_1}{\partial \chi} \right] = 0, \quad (6.11)$$

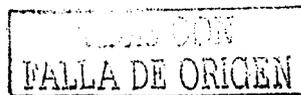
con las condiciones de frontera válidas para  $j \geq 0$

$$f_j = \frac{\partial f_j}{\partial \eta} - \theta_w = 0 \quad \text{en } \eta = 0 \quad (6.12)$$

y

$$\frac{\partial f_j}{\partial \eta} = 0 \quad \text{para } \eta \rightarrow \infty. \quad (6.13)$$

La ecuación (6.10) junto con las condiciones de frontera (6.12) y (6.13), para  $j = 0$ , corresponden al problema clásico de convección en un medio



poroso adyacente a una aleta vertical isotérmica con calentamiento [10], dando  $d^2 f_0/d\eta^2|_0 = -G_0 = -0.444$ . La corrección de primer orden para la temperatura adimensional de la aleta dada por la ecuación (6.8) se puede obtener después de integrarla dos veces, obteniéndose así

$$\theta_w = \sum_{n=0,3/2} a_n \chi^n = -\frac{4G_0}{3} (1 - \chi^{3/2}). \quad (6.14)$$

donde  $a_0 = -a_{3/2} = -4G_0/3$ . Las soluciones para la ecuación lineal (6.11) con las correspondientes condiciones de frontera deben ser de la forma

$$f_1(\chi, \eta) = \sum_{n=0,3/2} a_n \chi^n g_n(\eta)$$

donde  $g_n(\eta)$  satisface las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d^3 g_n}{d\eta^3} + \frac{1}{2} f_0 \frac{d^2 g_n}{d\eta^2} - n \frac{df_0}{d\eta} \frac{dg_n}{d\eta} + \left(\frac{1}{2} - n\right) \frac{d^2 f_0}{d\eta^2} g_n = 0, \text{ para } n = 0, 3/2. \quad (6.15)$$

Las condiciones de frontera asociadas para  $g_n$  son

$$g_n(0) = \left. \frac{dg_n}{d\eta} \right|_{\eta=0} - 1 = \left. \frac{dg_n}{d\eta} \right|_{\eta \rightarrow \infty} = 0. \quad (6.16)$$

La solución de las ecuaciones (6.15) y (6.16) da los valores  $G_1(n) = -d^2 g_n/d\eta^2|_0$ . Empleando las propiedades de invariancia de las ecuaciones de la capa límite, se puede demostrar que  $G_1(0) = 3/2 G_0 = 0.666$ . El valor numérico obtenido de  $G_1(3/2) = 0.937$ . Siguiendo el mismo procedimiento, la corrección de segundo orden de la temperatura adimensional de la aleta está dada por

$$\theta_w = \sum_{n=0,3/2} \frac{a_n G_1(n)}{(n+1/2)(n+3/2)} (\chi^{n+1/2} - 1). \quad (6.17)$$

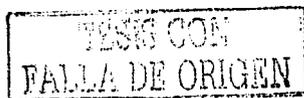
Resumiendo, la temperatura adimensional de la aleta para grandes valores del parámetro  $s$ , hasta términos del orden  $s^{-3}$ , pueden ser escrita como

$$\begin{aligned} \theta_w = & 1 - \frac{4}{3} \frac{G_0}{s^{3/2}} (1 - \chi^{3/2}) \\ & + \frac{2}{9} \frac{G_0}{s^3} [12G_0 (1 - \chi^{3/2}) - G_1(3/2) (1 - \chi^3)] + O(s^{-5/2}). \end{aligned} \quad (6.18)$$

El número de Nusselt reducido,  $Nu/Ra^{*1/2} = s d\theta_w/d\chi|_1$ , está dado por

$$\frac{Nu}{Ra^{*1/2}} = \frac{2G_0}{s^{1/2}} \left[ 1 - \frac{(6G_0 - G_1(3/2))}{3s^{3/2}} \right] + O(s^{-7/2}), \text{ para } s \rightarrow \infty. \quad (6.19)$$

Las propiedades térmicas del material, tomando en cuenta la definición de la longitud de penetración térmica  $L^*$ , no juegan ningún papel en la transferencia de calor del orden dominante debido a que  $Ra^{*1/2}/s^{1/2} = Ra^{1/2}$  es independiente de  $L^*$ .



## Capítulo 7

# Método Numérico para la Solución de la Aleta Corta

Para poder resolver numéricamente el sistema de ecuaciones (6.3)-(6.6), lo que procede es modificar el problema de manera que se pueda convertir a éste de uno con valores en la frontera a un problema de valores iniciales. Esta transformación se hace introduciendo una nueva coordenada longitudinal adimensional. Dicha coordenada está dada por  $\zeta = \chi/s$ . Empleando la nueva transformación, la ecuación para la conducción de calor en la aleta adimensionalizada queda representada por la ecuación siguiente

$$\frac{d^2\theta_w}{d\zeta^2} = - \frac{1}{\zeta^{1/2}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \Big|_0, \quad (7.1)$$

mientras que la ecuación (6.5), que es la del fluido inmerso en el medio poroso, queda de la forma

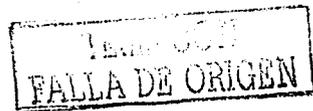
$$\frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + \frac{f}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = \zeta \left[ \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta \partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right] \quad (7.2)$$

Con las condiciones de frontera en la base y parte inferior de la aleta dadas por

$$\theta_w = 1 \text{ en } \zeta = \zeta_f \text{ y } \frac{d\theta_w}{d\zeta} = 0 \text{ en } \zeta = 0, \quad (7.3)$$

donde  $\zeta_f = 1/s$ . Cabe mencionarse que cerca del borde inferior de la aleta, cuando  $\zeta \rightarrow 0$ ,  $\theta_w$  tiene el siguiente comportamiento asintótico

$$\theta_w = a + \frac{4}{3} a^{3/2} G_0 \zeta^{3/2} + O(\zeta^{7/2}), \quad \zeta \rightarrow \infty. \quad (7.4)$$



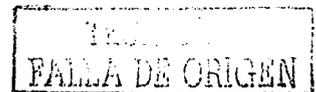
donde  $a \leq 1$  es una constante que se propone a priori. Para un valor dado de  $a$ , se obtiene un valor de  $\zeta_f$  y de  $s$ . Para valores de  $s > 1$ , se emplea la ecuación (6.18) para poder tener un perfil preliminar de la temperatura adimensional en la aleta. El flujo de calor adimensional  $\partial^2 f / \partial \eta^2|_0$  como una función de  $\zeta$  se obtiene integrando la ecuación (7.2) con las correspondientes condiciones de frontera. Esta ecuación se descompone en una ecuación de primer orden y en otra de segundo orden para que posteriormente se resuelva empleando una discretización en diferencias finitas centradas, tal como se describe en el apéndice D. Una vez que se ha obtenido el flujo de calor adimensional en cada posición de  $\zeta$ , se obtiene el nuevo perfil adimensional de temperatura en la aleta resolviendo la ecuación (7.1) con el comportamiento inicial dado por la ecuación (7.4), empleando para ésto un procedimiento Runge-Kutta de cuarto orden. Posteriormente, se repetirá todo este proceso hasta que se llegue a un criterio de convergencia.

# Capítulo 8

## Resultados

En este capítulo se presentan los resultados analíticos y numéricos obtenidos para el caso de una aleta vertical delgada inmersa en un medio poroso saturado de fluido. La gráfica 8.1 muestra el número de Nusselt reducido como función del parámetro adimensional  $s$ . El rango de valores de este parámetro va de 0.1 hasta 10. La solución numérica junto con las expansiones asintóticas de primer y segundo orden se presentan juntas para posteriormente poder hacer una comparación entre las dos soluciones.

La gráfica 8.2 muestra la distribución de las temperaturas adimensionales de la aleta como una función de  $\chi$  para diferentes valores del parámetro  $s$ .



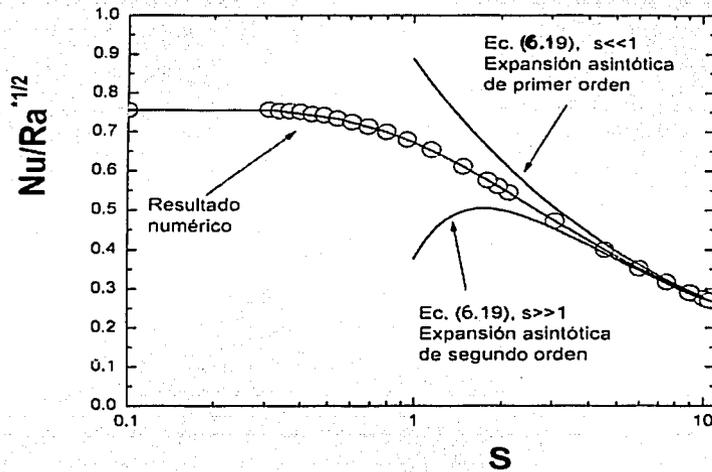


Figura 8.1: Comparación entre la solución numérica y la solución asintótica de primer y segundo orden.

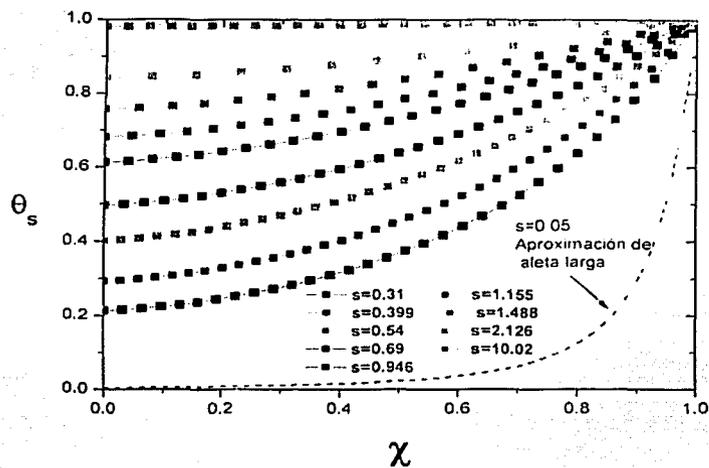


Figura 8.2: Gráfica con las temperaturas adimensionales en la aleta como una función de  $\chi$  para diferentes valores de  $s$ .

# Capítulo 9

## Conclusiones

En esta tesis se estudió el fenómeno de transferencia de calor conjugado en una aleta vertical inmersa en un medio poroso saturado de fluido. La temperatura en la aleta, que depende de su espesor y de las propiedades térmicas tanto de la aleta como del medio poroso en el que se encuentra inmersa, tiende a disminuir asintóticamente hasta alcanzar la temperatura del medio circundante. Esta condición se cumple cuando se alcanza una longitud  $L^*$  llamada longitud de penetración térmica.

Para grandes valores del número de Rayleigh, el problema estudiado depende únicamente del parámetro adimensional  $s = L^*/L$ , el cual nos permite distinguir dos regímenes posibles: aletas térmicamente largas y aletas térmicamente cortas.

Para el caso límite en el que  $s \ll 1$ , se trata de una aleta larga y corresponde al trabajo previamente reportado por [15], donde el problema tiene una solución por autosemejanza para valores pequeños de  $s$  comparados con la unidad.

Para el caso límite en el que  $s \gg 1$  (aleta corta), el número de Nusselt reducido depende muy débilmente de las propiedades térmicas del material de la aleta. Esto es evidente si se observa el primer término de la ecuación (6.19), en la cual el término de primer orden es independiente de la conductividad térmica del material.

En la figura 7-1, se observa que la solución asintótica obtenida en la ecuación (6.19) se ajusta perfectamente a la solución obtenida numéricamente para valores de  $s \gg 1$ , mientras que para valores de  $s \ll 1$  la solución numérica converge con la solución de la ecuación (5.10).

Se derivó una solución asintótica de segundo orden para el límite en el que  $s \rightarrow \infty$  y se demuestra que la aproximación de aleta corta es válida para valores de  $s > 4$ , mientras que la aproximación de aleta larga [10]-[15] es válida para valores de  $s < 0.4$ . Cabe mencionarse que la importancia de esta tesis radica en haber estudiado la transición de una aleta corta (que cuenta con pequeñas razones de transferencia de calor) a una aleta larga (con grandes razones de transferencia de calor).

En la figura 7-2, se observa que para el caso de aletas cortas que cuentan con grandes valores de la variable adimensional  $s$ , la temperatura adimensional de la aleta tiende a ser uniforme en toda su extensión. Esto se debe a que la longitud de la aleta no es lo suficientemente grande como para disipar calor de forma considerable, razón por la cual la temperatura adimensional en la base de la aleta es casi la misma que se tiene en su parte inferior. Por otro lado, es evidente que conforme disminuye el valor de la variable  $s$ , las curvas se vuelven más pronunciadas. Dicho comportamiento resalta el hecho de que existe una relación directa entre el valor de  $s$  y la diferencia de temperaturas que hay desde la base de la aleta hasta su parte inferior. Este comportamiento está íntimamente relacionado con la longitud de la aleta, pues mientras la longitud de ésta sea mayor, es claro que se tendrá una mayor capacidad para disipar calor (por el hecho de que se cuenta con una superficie más grande) y por ende habrá una diferencia mayor entre la temperatura de la base de la aleta y la punta de la misma.

## Referencias

- [1] I. Pop and D.B. Ingham, *Convective Heat Transfer: Mathematical and Computational Modelling of Viscous Fluids in Porous Media*. Pergamon, Oxford, 2001.
- [2] B. Sundén and P. J. Heggs (editors), *Recent Advances in Analysis of Heat Transfer for Fin Type Surfaces*, WIT Press, Southampton, Boston, 2000.
- [3] D.B. Ingham and I. Pop (editors), *Transport Phenomena in Porous Media*. Pergamon, Oxford, 1998.
- [4] D.A. Nield and A. Bejan, *Convection in Porous Media* (2nd edition). Springer, New York, 1999.
- [5] K. Vafai (ed.), *Handbook of Porous Media*. Marcel Dekker, Inc., New York, 2000.
- [6] I.G. Currie, *Fundamental Mechanics of Fluids*, McGraw-Hill, Inc, 2nd. edition, 1993.
- [7] H. Schlichting, *Boundary-Layer*, 6th ed., McGraw-Hill, 1968.
- [8] B. *Finite Differences Math. Comp*, 51, N 184, 669-706 (1988).
- [9] G. S. Lock and J. C. Gunn, Laminar free convection from a downward-projecting fin, *J. Heat Transfer*, 90, 63-70 (1968).
- [10] P. Cheng and W. J. Minkowycz, *Free convection about a vertical flat plate embedded in a porous medium with application to heat transfer from a dike*, *J. Geophys. Res.*, 82, 2040-2044 (1977).

- [11] T. H. Kuehn, S. S. Kwon and A. K. Tolpadi, *Similarity solution for conjugate natural convection heat transfer from a long vertical fin*, Int. J. Heat Mass Transfer **26**, 1718-1721 (1983).
- [12] E. M. Sparrow and S. Acharya, *A natural convection fin with a solution-determined nonmonotonically varying heat transfer coefficient*, J. Heat Transfer, **103**, 218-225 (1981).
- [13] I. Pop, J. K. Sunada, P. Cheng and W. J. Minkowycz, *Conjugate free convection from long vertical plate fins embedded in a porous medium at high Rayleigh numbers*, Int. J. Heat Mass Transfer **28**, 1629-1636 (1985).
- [14] I. Pop, D. B. Ingham, P. J. Heggs and D. Gardner, *Conjugate heat transfer from a downward projecting fin immersed in a porous medium*, In Proc. 8th Int. Heat Transfer Conference, San Francisco, CA, 1986.
- [15] I. Pop and A. Nakayama, *Conjugate free and mixed convection heat transfer from a vertical fin embedded in a porous medium*, in B. Sundén and P. J. Heggs (editors), *Recent Advances in Analysis of Heat Transfer for Fin Type Surfaces*, Chapter 4, WIT Press, Southampton, Boston, 2000.

## Apéndice A

### Solución por Autosemejanza

En éste apéndice se desarrolla la solución por autosemejanza para el régimen de aleta larga, partiendo de las ecuaciones adimensionalizadas que gobiernan el proceso de enfriamiento de convección natural para un flujo bidimensional.

De la ecuación de continuidad adimensionalizada

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} + \frac{\partial V}{\partial Z} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Introduciendo las variables siguientes

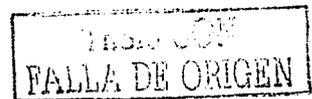
$$\begin{aligned} \theta &= \theta_w \phi(\xi) \\ \xi &= \frac{Z}{\sigma^n} \\ \theta_w &= A\sigma^n \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

La derivada del primer término de la ecuación de continuidad adimensionalizada es de la forma

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \phi \frac{d\theta_w}{d\sigma} + \theta_w \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\xi}{d\sigma}$$

sustituyendo las variables (A.2) en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} &= \phi \frac{d\theta_w}{d\sigma} - \theta_w \left( \frac{-nZ}{\sigma^{n+1}} \right) \frac{d\phi}{d\xi} = \phi \frac{d\theta_w}{d\sigma} - \theta_w \left( \frac{n\xi\sigma^n}{\sigma^{n+1}} \right) \frac{d\phi}{d\xi} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} &= \phi \frac{d\theta_w}{d\sigma} - \theta_w \left( \frac{n\xi}{\sigma} \right) \frac{d\phi}{d\xi} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$



El segundo término de la ecuación de continuidad adimensionalizada queda de la forma siguiente

$$\frac{\partial V}{\partial Z} = \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial Z} = \frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{1}{\sigma^n} \quad (\text{A.4})$$

Igualando (A.3) con (A.4)

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = \frac{\partial V}{\partial Z}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{1}{\sigma^n} = \phi \frac{d\theta_w}{d\sigma} - \theta_w \frac{n\xi}{\sigma} \frac{d\phi}{d\xi}$$

sea  $\theta_w = A\sigma^m$ , si se introduce esta nueva variable a la ecuación anterior

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} \frac{1}{\sigma^n} = \phi A m \sigma^{m-1} - A \sigma^{m-1} n \xi \frac{d\phi}{d\xi}$$

mientras que  $V = \sigma^r F(\xi)$ . Si se introduce el cambio de variable en la ecuación anterior, se tiene

$$\frac{dF}{d\xi} \sigma^{r-n} = \sigma^{m-1} A \left[ \phi m - n \xi \frac{d\phi}{d\xi} \right]$$

igualando exponentes

$$r - n = m - 1, \implies r = m - 1 + n$$

Para la ecuación de Laplace adimensionalizada

$$\frac{d^2 \theta_w}{d\sigma^2} + \frac{\partial \theta}{\partial Z} \Big|_0 = 0$$

se tiene que

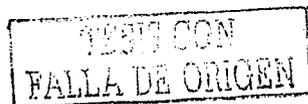
$$\frac{d^2 \theta_w}{d\sigma^2} + \theta_w \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\xi}{dZ} \Big|_0 = 0$$

Substituyendo nuevamente las variables (A.2), se obtiene una ecuación de la forma

$$Am(m-1)\sigma^{m-2} + A\sigma^m \frac{d\phi}{d\xi} \Big|_0 \frac{1}{\sigma^n} = 0$$

$$Am(m-1)\sigma^{m-2} + A\sigma^{m-n} \frac{d\phi}{d\xi} \Big|_0 = 0$$

$$m(m-1)\sigma^{m-2} + \sigma^{m-n} \frac{d\phi}{d\xi} \Big|_0 = 0$$



igualando una vez más los exponentes

$$m - 2 = m - n, \implies n = 2$$

Para el primer término de la ecuación de energía

$$-\theta \frac{d\theta}{d\sigma} = -\phi \left[ \phi \frac{d\theta_w}{d\sigma} - \theta_w \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\xi}{d\sigma} \right]$$

Sustituyendo nuevamente las variables (A.2)

$$\begin{aligned} -\theta \frac{d\theta}{d\sigma} &= -\phi \left[ \phi A m \sigma^{m-1} - A \sigma^m \frac{d\phi}{d\xi} \left( \frac{-nZ}{\sigma^{n+1}} \right) \right] = -\phi \left[ \phi A m \sigma^{m-1} - A \sigma^m \frac{2\xi}{\sigma} \frac{d\phi}{d\xi} \right] \\ -\theta \frac{d\theta}{d\sigma} &= -A^2 \sigma^{2m-1} \phi \left[ \phi m - 2\xi \frac{d\phi}{d\xi} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

El segundo término de la ecuación de la energía adimensionalizada queda de la siguiente forma

$$V \frac{d\theta}{dZ} = \sigma^r F \theta_w \frac{d\phi}{d\xi} \frac{d\xi}{dZ} = \sigma^r F \frac{A \sigma^m}{\sigma^2} \frac{d\phi}{d\xi} = A \sigma^{r+m-2} F \frac{d\phi}{d\xi} \quad (\text{A.6})$$

El lado derecho de la ecuación de energía está dado por

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} = \theta_w \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} \frac{d^2 \xi}{dZ^2} = A \sigma^m \left( \frac{1}{\sigma^4} \right) \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} \quad (\text{A.7})$$

Sustituyendo los términos (A.5)-(A.7) de la ecuación de energía, la ecuación resultante es

$$-A^2 \sigma^{2m-1} \phi \left[ \phi m - 2\xi \frac{d\phi}{d\xi} \right] + A \sigma^{r+m-2} F \frac{d\phi}{d\xi} = A \sigma^{m-4} \frac{d^2 \phi}{d\xi^2} \quad (\text{A.8})$$

igualando exponentes

$$\begin{aligned} 2m - 1 &= r + m - 2 = m - 4 \\ 2m - 1 &= m - 4, \implies m = -3 \\ 2(-3) - 1 &= r - 3 - 2, \implies r = -2 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

sustituyendo los valores obtenidos

$$-3(-4) + \left. \frac{d\phi}{d\xi} \right|_0 = 0$$



se obtiene

$$\left. \frac{d\phi}{d\xi} \right|_0 = -12$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \theta_w(\sigma) &= \frac{1}{\sigma^3} \\ \xi &= \frac{Z}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Empleando los valores obtenidos en (A.9), se tiene que la ecuación resultante es

$$\frac{d(F/A)}{d\xi} = -3\phi - 2\xi \frac{d\phi}{d\xi} \quad (\text{A.10})$$

Integrando la ecuación (A.10) se obtiene

$$\frac{F}{A} - 3 \int_0^\xi \phi d\xi - 2 \int_0^\xi \xi \frac{d\phi}{d\xi} d\xi$$

sea  $\phi = df/d\xi$ , sustituyendo el cambio de variable en la ecuación anterior

$$\frac{F}{A} = -3 \int_0^\xi \frac{df}{d\xi} d\xi - 2 \int_0^\xi \xi \frac{d^2 f}{d\xi^2} d\xi$$

Integrando por partes se llega a la ecuación siguiente

$$\frac{F}{A} = -f - 2\xi \frac{df}{d\xi} \quad (\text{A.11})$$

Sustituyendo (A.11) en la ecuación (A.8)

$$\begin{aligned} -A \frac{df}{d\xi} \left[ -3 \frac{df}{d\xi} - 2\xi \frac{d^2 f}{d\xi^2} \right] + A \left[ -f - 2\xi \frac{df}{d\xi} \right] \frac{d^2 f}{d\xi^2} &= \frac{d^3 f}{d\xi^3} \\ 3 \left( \frac{df}{d\xi} \right)^2 + 2\xi \frac{df}{d\xi} \frac{d^2 f}{d\xi^2} - f \frac{d^2 f}{d\xi^2} - 2\xi \frac{df}{d\xi} \frac{d^2 f}{d\xi^2} &= \frac{1}{A} \frac{d^3 f}{d\xi^3} \end{aligned}$$

por lo que la ecuación diferencial ordinaria de tercer orden resultante es:

$$\frac{1}{A} \frac{d^3 f}{d\xi^3} - 3 \left( \frac{df}{d\xi} \right)^2 + f \frac{d^2 f}{d\xi^2} = 0 \quad (\text{A.12})$$

La cual está sujeta a las condiciones de frontera siguientes

$$\left. \frac{df}{d\xi} \right|_{\infty} = 0, \quad \left. \frac{df}{d\xi} \right|_0 = 1, \quad \left. \frac{d^2 f}{d\xi^2} \right|_0 = -12, \quad f(0) = 0 \quad (\text{A.13})$$

## Apéndice B

### Discretización de la Ecuación (5.6)

En este apéndice se utiliza el método de diferencias finitas centradas (o método de la caja) para resolver la ecuación diferencial ordinaria obtenida en el apéndice A. El programa principal, escrito en lenguaje FORTRAN, consta de una subrutina principal que resuelve la matriz tridiagonal. Partiendo de la ecuación (A.12)

$$\frac{1}{A} \frac{d^3 f}{d\xi^3} - 3 \left( \frac{df}{d\xi} \right)^2 + f \frac{d^2 f}{d\xi^2} = 0$$

con sus respectivas condiciones de frontera

$$\left. \frac{df}{d\xi} \right|_{\infty} = 0, \quad \left. \frac{df}{d\xi} \right|_0 = 1, \quad \left. \frac{d^2 f}{d\xi^2} \right|_0 = -12, \quad f(0) = 0$$

empleando un cambio de variable de la forma  $f = g/\sqrt{A}$  y  $\xi = \zeta/\sqrt{A}$ , la ecuación diferencial ordinaria toma la forma universal

$$\frac{d^3 g}{d\zeta^3} - 3 \left( \frac{dg}{d\zeta} \right)^2 + g \frac{d^2 g}{d\zeta^2} = 0 \quad (\text{B.1})$$

que debe integrarse con las tres condiciones de frontera

$$g(0) = 0, \quad \left. \frac{dg}{d\zeta} \right|_0 = 1, \quad \left. \frac{dg}{d\zeta} \right|_{\infty} = 0 \quad (\text{B.2})$$

Se propone el cambio de variable  $u = dg/d\zeta$  y se sustituye en la ecuación (B.1)

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2} - 3u^2 + g \frac{du}{d\zeta} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Ahora las nuevas condiciones de frontera son

$$u(0) = 1, \text{ y } u(\infty) = 0 \quad (\text{B.4})$$

sea  $g = \int_0^\zeta u d\zeta$  y  $g(0) = 0$ .

Realizando un cambio de variable de la forma

$$u^2 = 2u_a u - (u_a)^2 \quad (\text{B.5})$$

Se substituye la ecuación (B.5) en la ecuación (B.3).

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\zeta^2} - 3(2u_a u - (u_a)^2) + g \frac{du}{d\zeta} &= 0 \\ \frac{d^2u}{d\zeta^2} - 6u_a u + 3(u_a)^2 + g \frac{du}{d\zeta} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

El sistema de ecuaciones anterior se lleva de un espacio continuo a uno discreto, utilizando para ello un arreglo en red que contiene a la placa proyectada en un espacio que la cubre totalmente. Aplicando el método de diferencias finitas centrales de Forenberg [8] y discretizando término a término, se obtiene

$$\begin{aligned} u &= u_i \\ \frac{du}{d\zeta} &= \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta\zeta} \\ \frac{d^2u}{d\zeta^2} &= \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta\zeta^2} \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Sustituyendo las ecuaciones (B.7) en la ecuación (B.6) se tiene que

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta\zeta^2} - 6u_i^2 u_i + g_i \left( \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta\zeta} \right) = -3u_i^2$$

Ordenando la ecuación anterior por índices

$$\frac{u_{i+1}}{\Delta\zeta^2} - \frac{2u_i}{\Delta\zeta^2} + \frac{u_{i-1}}{\Delta\zeta^2} - 6u_i^2 u_i + g_i \frac{u_{i+1}}{2\Delta\zeta} - g_i \frac{u_{i-1}}{2\Delta\zeta} = -3u_i^2$$

$$u_{i+1} \left( \frac{1}{\Delta\zeta^2} + g_i \frac{1}{2\Delta\zeta} \right) + u_i \left( -\frac{2}{\Delta\zeta^2} - 6u_i^a \right) + u_{i-1} \left( \frac{1}{\Delta\zeta^2} - g_i \frac{1}{2\Delta\zeta} \right) = -3u_i^a$$

Multiplicando todo por  $\Delta\zeta^2$

$$u_{i+1} \left( 1 + g_i \frac{\Delta\zeta}{2} \right) + u_i (-2 - 6u_i^a \Delta\zeta^2) + u_{i-1} \left( 1 - g_i \frac{\Delta\zeta}{2} \right) = -3u_i^a \Delta\zeta^2$$

Las condiciones de arranque y de terminación de la corrida son las siguientes

$$u_{i=1} = 1, \text{ y } u_{i=n} = 0$$

Donde las correspondientes en la tridiagonal resultante a resolver son:

$$\begin{aligned} A &= u_{i-1} \left( 1 - g_i \frac{\Delta\zeta}{2} \right) \\ B &= u_i (-2 - 6u_i^a \Delta\zeta^2) \\ C &= u_{i+1} \left( 1 - g_i \frac{\Delta\zeta}{2} \right) \\ R &= -3u_i^a \Delta\zeta^2 \end{aligned}$$

Por lo que la matriz tridiagonal a resolver queda de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} B & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A & B & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & B & C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A & B & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A & B & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u \\ u \\ u \\ u \\ u \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ R \\ R \\ R \\ R \\ R \\ R \end{bmatrix}$$

Programa que calcula la solución asintótica para el problema de la aleta con enfriamiento.

```
PROGRAM Lorenzo
IMPLICIT REAL*8 (a-h,o-z)
PARAMETER (N=1000)
DIMENSION A(N),B(N),C(N),R(N),UN(N),g(N),GAM(N+1),U(N),UA(N)
IS=1
ICON=0
ICONT=0
G(1)=0.D0
DETA=0.001D0
DETA2=DETA*DETA
NMAX=10/DETA
IT=0
REL0=.5D0
12 CONTINUE
OPEN(10,file='Lorenzo.dat')
DO J=1,N
ETA=(J-1)*DETA
IF(ETA.LT.1.D0) THEN
U(J)=1.D0-ETA
ELSE
U(J)=0.D0
END IF
END DP
UPA=-1.D0
IT=0
40 CONTINUE
IT=IT+1
IF(IT.GT.1000) GOTO 13
WRITE(6,*) IT,UP,UPA
G(1)=0.D0
UA(1)=1.D0
DO 41 J=2,N
UA(J)=U(J)
41 G(J)=G(J-1)+(U(J)+U(J-1))*DETA/2.D0
C(1)=0.D0
```

```

B(1)=1.D0
R(1)=1.D0
A(N)=0.D0
B(N)=1.D0
R(N)=0.D0
DO 31 J=2,N-1
ETA=(J-1)*DETA
A(J)=1.D0-.5D0*DETA*G(J)
C(J)=1.D0+.5D0*DETA*G(J)
B(J)=-2.D0-6.D0*UA(J)*DETA2
R(J)=-3.D0*UA(J)*UA(J)*DETA2
31 CONTINUE
CALL TRI(A,B,C,R,UN,N,GAM)
DO 42 J=1,N
U(J)=UN(J)*RELO+UA(J)*(1.D0-RELO)
42 CONTINUE
UP=(-U(3)+4.D0*U(2)-3.D0*U(1))/(2.D0*DETA)
IF(DABS(UP-UPA)/DABS(UP).LT.1.D-10) GOTO 13
UPA=UP
GOTO 40
13 CONTINUE
DO J=1,N,10
ETA=(J-1)*DETA
WRITE(10,100) ETA,G(J),U(J),UP
WRITE(6,100) ETA,G(J),U(J)
END DO
100 FORMAT(5e15.5)
STOP
END
C *****
SUBROUTINE TRI(A,B,C,R,U,N,GAM)
IMPLICIT REAL*8(a-h,o-z)
DIMENSION GAM(N+1),A(N),B(N),C(N),R(N),U(N)
IF (B(1).EQ.0.D0) PAUSE 'SINGULAR MATRIZ'
BET=B(1)
U(1)=R(1)/BET
DO 11 J=2,N
GAM(J)=C(J-1)/BET

```

```
BET =B(J)-A(J)*GAM(J)
IF(BET.EQ.0.D0) PAUSE 'MATRIZ SINGULAR'
U(J)=(R(J)-A(J)*U(J-1))/BET
11 CONTINUE
DO 12 J=N-1,1,-1
U(J)=U(J)-GAM(J+1)*U(J+1)
12 CONTINUE
RETURN
END
```

## Apéndice C

### Solución para aleta corta

A continuación se presenta la solución para el régimen de aleta corta, partiendo una vez más de las ecuaciones adimensionalizadas que gobiernan el proceso de enfriamiento de convección natural para un flujo bidimensional. Empleando las siguientes variables adimensionales de orden unidad

$$\eta = \frac{yRa^{1/2}}{\sqrt{xL}}, \quad \chi = \frac{x}{L}$$
$$\theta_w = \frac{T_w(x) - T_\infty}{T_0 - T_\infty}, \quad \theta = \frac{T(x,y) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \frac{u}{u_c} = \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

La Ley de Darcy-Boussinesq adimensionalizada queda de la forma siguiente

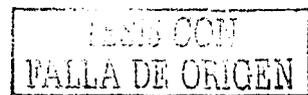
$$u = \frac{gK\beta\Delta T}{\nu}\theta = u_c\theta = \frac{\partial f}{\partial \eta}\theta \quad (\text{C.1})$$

Para el primer término de la ecuación de continuidad adimensionalizada se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{u_c}{L} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \chi} + u_c \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \left[ -\frac{1}{2} \frac{\eta}{x} \right] = \frac{u_c}{L} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \chi} - \frac{1}{2} \frac{\eta}{x} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right]$$

Mientras que el segundo término de la ecuación de continuidad adimensionalizada está dado por

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{Ra^{1/2}}{\sqrt{xL}}$$



Igualando ambos términos

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{Ra^{1/2}}{\sqrt{xL}} = -\frac{u_c}{L} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \chi} + \frac{1}{2} \frac{u_c \eta}{L \chi} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \frac{\eta}{x}$$

Dividiendo toda la ecuación entre  $u_c$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{Ra^{1/2}}{\sqrt{xL}u_c} = -\frac{1}{L} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \chi} + \frac{1}{2} \frac{\eta}{\chi L} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$$

Multiplicando toda la ecuación por  $x$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{Ra^{1/2}x^{1/2}}{L^{1/2}u_c} = -\frac{x}{L} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \chi} + \frac{x}{2} \frac{\eta}{\chi L} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$$

Se obtiene la siguiente expresión para el orden de magnitud de  $V$

$$v \frac{Ra^{1/2}x^{1/2}}{L^{1/2}u_c} \sim V \quad (C.2)$$

Substituyendo (C.2) en la ecuación anterior

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = -\frac{\chi L}{L} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \chi} + \frac{\chi L}{2} \frac{\eta}{\chi L} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = -\chi \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \chi} + \frac{1}{2} \eta \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}$$

Integrando por partes, se obtiene el valor de  $V$ .

$$V = -\chi \frac{\partial}{\partial \chi} \int_0^\eta \frac{\partial f}{\partial \eta} d\eta + \frac{1}{2} \int_0^\eta \eta \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} d\eta = \frac{1}{2} \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{f}{2} - \chi \frac{\partial f}{\partial \chi} \quad (C.3)$$

Para la ecuación de la energía y empleando un análisis semejante al anterior, para el caso del primer término se tiene

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = u_c \frac{\partial f}{\partial \eta} \Delta T \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \chi} \frac{1}{L} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{1}{2} \frac{\eta}{\chi L} \right] = \frac{u_c \Delta T}{L} \frac{\partial f}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \chi} - \frac{1}{2} \frac{\eta}{\chi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right]$$

Substituyendo la ecuación (C.3) en la relación (C.2), la expresión resultante es la relación siguiente

$$v \sim \frac{L^{1/2}u_c}{Ra^{1/2}x^{1/2}} V \sim \frac{L^{1/2}u_c}{Ra^{1/2}x^{1/2}} \left[ \frac{1}{2} \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{f}{2} - \chi \frac{\partial f}{\partial \chi} \right] \quad (C.4)$$

Se substituye la relación (C.4) en el segundo término de la ecuación de energía

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{L^{1/2} u_c \Delta T}{Ra^{1/2} x^{1/2}} \left[ \frac{1}{2} \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{f}{2} - \chi \frac{\partial f}{\partial \chi} \right] \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{1}{2} \frac{Ra^{1/2}}{x^{1/2} L^{1/2}} \\ &= \frac{u_c \Delta T}{\chi L} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \left[ \frac{1}{2} \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{f}{2} - \chi \frac{\partial f}{\partial \chi} \right] \end{aligned}$$

Para el término derecho de la ecuación de energía

$$\alpha_m \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \alpha_m \Delta T \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \frac{Ra}{xL} = \alpha_m \Delta T \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \frac{Ra}{\chi L^2} = \frac{\alpha_m \Delta T Ra}{L^2} \frac{1}{\chi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}$$

Por otro lado, eliminando términos y simplificando:

$$\begin{aligned} \frac{u_c \Delta T}{L} &= \frac{\alpha_m \Delta T Ra}{L^2} \frac{\alpha_m}{L} Ra & (C.5) \\ u_c &= \frac{\alpha_m}{L} \cdot \frac{gk\beta\Delta TL}{\alpha_m \nu} = \frac{gk\beta\Delta T}{\nu} \end{aligned}$$

Substituyendo las ecuaciones obtenidas para cada término de la ecuación de la energía y tomando en cuenta la simplificación dada por la ecuación (C.5), la ecuación resultante queda como

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial \chi} - \frac{1}{2} \frac{\eta}{\chi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{\chi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \left[ \frac{1}{2} \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{f}{2} - \chi \frac{\partial f}{\partial \chi} \right] = \frac{1}{\chi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}$$

Realizando los productos

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} - \frac{1}{2} \frac{\eta}{\chi} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{1}{2} \frac{\eta}{\chi} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{1}{\chi} \frac{f}{2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \frac{\partial f}{\partial \chi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{\chi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}$$

Simplificando y multiplicando toda la ecuación por  $\chi$

$$\chi \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} - \frac{f}{2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \chi \frac{\partial f}{\partial \chi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2}$$

Reacomodando términos y factorizando, la ecuación resultante es de la forma

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{f}{2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \chi \left[ \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \chi} - \frac{\partial f}{\partial \chi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] \quad (C.6)$$

donde  $\theta = \partial f / \partial \eta$ . Empleando otra notación, la ecuación (C.6) se expresa como

$$f_{\eta\eta\eta} + \frac{f}{2} f_{\eta\eta} = \chi [f_{\eta} f_{\chi\eta} - f_{\chi} f_{\eta\eta}]$$

Las condiciones de frontera correspondientes son

$$\eta = 0, f = 0, \frac{\partial f}{\partial \eta} = \theta_w$$

$$\eta \rightarrow \infty, \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$$

Realizando un balance de flujo de calor en la aleta y el fluido se tiene

$$\lambda_w \frac{\partial T_s}{\partial y} \Big|_s = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_0$$

Empleando la variable adimensional  $z = y/h$  junto con las demás variables adimensionales de orden unidad

$$\frac{\lambda_w}{h} \frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \Big|_0 \Delta T = \lambda \Delta T \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_0 \frac{Ra^{1/2}}{\sqrt{\chi} L}$$

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \Big|_0 = \frac{\lambda}{\lambda_w} \frac{h}{L} \frac{Ra^{1/2}}{\sqrt{\chi}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_0 \quad (C.7)$$

Empleando las siguientes ecuaciones para obtener una relación entre  $Ra^*$  y  $Ra$ :

$$\begin{aligned} Ra &= AL \\ Ra^* &= AL^* = \frac{Ra}{L} \cdot L^* \end{aligned} \quad (C.8)$$

Realizando un balance de flujo de calor de la aleta y el fluido

$$\lambda_w \frac{\Delta T}{L^*} h \sim \lambda \frac{\Delta T}{\delta} L$$

y como de análisis previos de órdenes de magnitud se sabe que  $\delta^* = L^* / Ra^{*1/2}$

$$\frac{\lambda_w}{\lambda} h \sim \frac{L^{*2} Ra^{*1/2}}{L^*}$$

Simplificando y reacomodando términos se obtiene

$$\frac{\lambda}{\lambda_w} = \frac{h}{L^* Ra^{*1/2}} \quad (C.9)$$

$$\frac{\lambda_w}{\lambda} h \sim L^* Ra^{*1/2} \frac{L^{*1/2}}{L^{3/2}}$$

Substituyendo la relación (C.9) en la ecuación (C.7)

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \Big|_0 = \frac{h}{L^* Ra^{*1/2}} \frac{h Ra^{1/2}}{L} \frac{\partial \theta}{\sqrt{\chi}} \Big|_0 = \frac{h^2}{L^* Ra^{*1/2} L} \frac{Ra^{1/2}}{\sqrt{\chi}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_0$$

Substituyendo la ecuación (C.8) en la ecuación anterior se obtiene la expresión siguiente

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \Big|_0 = \frac{h^2}{L^* Ra^{*1/2} L} \frac{Ra^{1/2} L^{1/2}}{L^{*1/2}} \frac{1}{\sqrt{\chi}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_0 = \frac{h^2}{L^* L^{1/2} L^{*1/2}} \frac{1}{\sqrt{\chi}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_0 = \frac{h^2}{L^{*3/2} L^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{\chi}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_0$$

Multiplicando toda la ecuación por  $L^{*3/2}$

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \Big|_0 = \frac{h^2}{L^2} \frac{L^{3/2}}{L^{*3/2}} \frac{1}{\sqrt{\chi}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_0 \quad (C.10)$$

Sabemos que para valores de  $s = L^*/L \gg 1$  se trata de una aleta corta y que  $\varepsilon^2 = h^2/L^2$ , por lo que  $L^{3/2}/L^{*3/2} = s^{3/2}$ . Si se substituyen estas ecuaciones en la ecuación (C.10), la ecuación resultante esta dada por la expresión siguiente

$$\frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \Big|_0 = \frac{1}{s^{3/2}} \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\chi}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_0 \quad (C.11)$$

Para el caso de una aleta térmicamente delgada

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} + \frac{L^2}{h^2} \frac{\partial \theta_w}{\partial Z} \Big|_0 &= 0 \\ \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{1}{s^{3/2}} \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\chi}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_0 \\ s^{3/2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} &= -\frac{1}{\sqrt{\chi}} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \Big|_0 \end{aligned}$$

y como  $\theta = \partial f / \partial \eta$ , la ecuación adimensionalizada resultante para la energía en la aleta toma la forma

$$s^{3/2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} = -\frac{1}{\sqrt{\chi}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \Big|_0 \quad (C.12)$$

Donde las condiciones de frontera correspondientes son

$$\theta_w = 1 \text{ en } \chi = 1 \text{ y } \frac{\partial \theta_w}{\partial \chi} = 0 \text{ en } \chi = 0.$$

## Apéndice D

### Discretización para la aleta corta

En este apéndice se desarrolla la forma en que se realiza el cambio de variable que hace que la ecuación para la aleta adquiera la forma universal y posteriormente se muestra la forma en la que se pasa de un espacio continuo a uno discreto empleando diferencias finitas centradas.

Partiendo de las ecuaciones adimensionalizadas para la aleta corta para el sólido y el fluido respectivamente

$$s^{3/2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \chi^2} = - \frac{1}{\sqrt{\chi}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \Big|_0$$
$$f_{\eta\eta\eta} + \frac{f}{2} f_{\eta\eta} = \chi [f_{\eta} f_{\chi\eta} - f_{\chi} f_{\eta\eta}]$$

Proponiendo un cambio de variable de la forma  $\zeta = c/\chi$ , si se introduce en la ecuación adimensionalizada de la aleta, resulta

$$s^{3/2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \zeta^2} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial \chi} \right)^2 = - \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\zeta}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \Big|_0$$

Reacomodando términos

$$s^{3/2} c^{2-1/2} \frac{\partial^2 \theta_w}{\partial \zeta^2} = - \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \Big|_0$$

Igualando exponentes, se tiene que  $s^{3/2} c^{3/2} = 1$ , por lo que  $c = 1/s$  y por lo tanto

$\zeta = \chi/s$ . Como resultado, la ecuación para la aleta adquiere la forma universal

$$\frac{d^2 \theta_w}{d\zeta^2} = - \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \Big|_0$$

Mientras que la ecuación adimensionalizada para el fluido se transforma en la siguiente ecuación

$$f_{\eta\eta\eta} + \frac{1}{2} f f_{\eta\eta} = \zeta [f_{\eta} f_{\zeta\eta} - f_{\zeta} f_{\eta\eta}]$$

Como sabemos que  $\theta = df/d\eta$ , la ecuación para el fluido es de la forma

$$\theta_{\eta\eta} + \frac{1}{2} f \theta_{\eta} = \zeta [f_{\eta} \theta_{\zeta} - f_{\zeta} \theta_{\eta}] \quad (D.1)$$

Pasando los términos de la ecuación (C.12) de un espacio continuo a uno discreto empleando las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} \theta_{\eta} &= \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \\ \theta_{\eta\eta} &= \frac{\theta_{i,j+1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j-1}}{\Delta\eta^2} \\ f_{\eta} &= \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \\ f_{\zeta} &= \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta\zeta} \\ \theta_{\zeta} &= \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i-1,j}}{\Delta\zeta} \end{aligned} \quad (D.2)$$

Si se substituye a las ecuaciones (D.2) en la ecuación (D.1):

$$\begin{aligned} &\frac{\theta_{i,j+1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j-1}}{\Delta\eta^2} + \frac{1}{2} f_i \left[ \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \right] = \\ &\zeta_i \left[ \left( \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \right) \left( \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i-1,j}}{\Delta\zeta} \right) - \left( \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta\zeta} \right) \left( \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}}{2\Delta\eta} \right) \right] \end{aligned}$$

Ordenando la ecuación anterior por índices, la ecuación resultante es la que se empleará para ser resuelta por el método numérico descrito con anterioridad.

$$\begin{aligned} \theta_{i,j+1} \left[ 1 + \frac{1}{4} f_i \Delta\eta + \zeta_i \left( \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta\zeta} \right) \frac{\Delta\eta}{2} \right] + \theta_{i,j} \left[ -2 - \zeta_i \left( \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta\zeta} \right) \Delta\eta \right] + \\ \theta_{i,j-1} \left[ 1 - \frac{1}{4} f_i \Delta\eta - \zeta_i \left( \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta\zeta} \right) \frac{\Delta\eta}{2} \right] = -\zeta_i \left( \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2} \right) \frac{\theta_{i-1,j}}{\Delta\zeta} \Delta\eta \end{aligned}$$

Programa que resuelve las ecuaciones que rigen el problema de la aleta corta.

```
PROGRAM MedioPoroso
implicit real*8 (a-h,o-z)
real*8 mr,nu
character*11 f1
character*14 f2
character*4 filename
character*1 num
integer cent,dece,unid,mile
parameter (nec=2)
dimension y(nec)
DIMENSION A(999),B(999),C(999),R(999),U(999),g(501,999),ga(999),
f(501,999),tetaw(501),gp(501),tetawa(501),tw(21,501), mr(21),tprom(21),num(0:9)
data num /'0','1','2','3','4','5','6','7','8','9' /
open(7,file='nusselt.dat')
do iss=1,20
s=1.1d0-iss*0.05d0
is=int(100.d0*s)
mile = int(is/1000.)
cent = int((is - mile*1000)/100.)
dece = int((is - mile*1000 - cent*100)/10.)
unid = int((is - mile*1000 - cent*100 - dece*10)/1.)
filename = num(mile)//num(cent)//num(dece)//num(unid)
f1='mns'//filename//'.dat'
f2='tetans'//filename//'.dat'
open(8,file=f2)
g0=0.444d0
gtm=0.937d0 ! g1(3/2)
rela=1.d0
rel=rela
iplot=0.d0
N=999
etaf=15.d0
deta=etaf/((N-1)*1.d0)
In=n
nx=500
```

```

zetaf=1.5d0/s
dzeta=zetaf/((nx-1)*1.d0)
dt=.1d0
it=0
do izeta=1,nx
zeta=(izeta-1)*dzeta
x=s*zeta
f(izeta,1)=0.d0
if(s.ge.1.d0) then
tetaw(izeta)=1.d0-4.d0/3.d0*g0/s**1.5d0*(1.d0-x**1.5d0)+
22.d0/9.d0*g0/s**3.d0*(12.d0*g0*(1.d0-x**1.5d0)-gtm*(1.d0-x**3.d0))
else
tetaw(izeta)=tetaw(izeta)*.9d0
end if
end do
do 9 j=1,N
eta=(j-1)*deta
g(1,j)=tetaw(1)*(1.d0-eta/etaf)
9 continue
gp(1)=(-g(1,3)+4.d0*g(1,2)-3.d0*g(1,1))/(2.d0*deta)
il1=0
t=0.d0
10 continue
il1=il1+1
write(6,125) il1,it,izeta,xi,dtetaw
125 format(3i5,2e15.5)
do 11 j=2,n
11 f(1,j)=f(1,j-1)+(g(1,j)+g(1,j-1))*deta/2.d0
C(1)=0.d0
B(1)=1.d0
R(1)=tetaw(1)
A(N)=0.d0
B(N)=1.d0
R(N)=0.d0
DO 12 J=2,N-1
ETA=(J-1)*DETA
A(J)=1.d0-f(1,j)*deta/4.d0
C(J)=1.d0+f(1,j)*deta/4.d0

```

```

B(J)=-2.d0
R(J)=0.d0
12 CONTINUE
CALL TRI(A,B,C,R,U,IN)
DO 13 J=1;N
ga(j)=g(1,j)
g(1,j)=rel*u(J)+(1.d0-rel)*ga(j)
13 CONTINUE
gpa=gp(1)
gp(1)=(-g(1,3)+4.d0*g(1,2)-3.d0*g(1,1))/(2.d0*deta)
if(dabs((gp(1)-gpa)/gp(1)).gt.1.d-8) goto 10
do j=1,n-1
eta=(j-1)*deta
dg=(g(1,j+1)-g(1,j))/deta
end do
14 continue
do 300 izeta=2,nx
zeta=(izeta-1)*dzeta
c1=.25d0*deta
c2=(izeta-1)*deta/2.d0
c3=(izeta-1)*deta*deta
gp(izeta)=gp(izeta-1)
do 15 j=1,n
g(izeta,j)=g(izeta-1,j)
ga(j)=g(izeta-1,j)
15 f(izeta,j)=f(izeta-1,j)
icon=0
icon100=0
rel=rela
il2=0
16 continue
il2=il2+1
C(1)=0.d0
B(1)=1.d0
R(1)=tetaw(izeta)
A(N)=0.d0
B(N)=1.d0
R(N)=0.d0

```

```

DO 17 J=2,N-1
ETA=(J-1)*DETA
A(J)=1.d0-c1*f(izeta,j)-c2*(f(izeta,j)-f(izeta-1,j))
C(J)=1.d0+c1*f(izeta,j)+c2*(f(izeta,j)-f(izeta-1,j))
B(J)=-2.d0-c3*(2.d0*ga(j)-g(izeta-1,j))
R(J)=-c3*ga(j)*ga(j)
17 CONTINUE
*****
DO 18 J=1,N
ga(j)=g(izeta,j)
g(izeta,j)=rel*u(J)+(1.d0-rel)*ga(j)
18 CONTINUE
do 19 j=2,n
19 f(izeta,j)=f(izeta,j-1)+(g(izeta,j)+g(izeta,j-1))*deta/2.d0
if(il2.ge.100) then
rel=rel/9.d0
il2=1
endif
gpa=gp(izeta)
gp(izeta)=(-g(izeta,3)+4.d0*g(izeta,2)-3.d0*g(izeta,1))/(2.d0*deta)
if(dabs((gp(izeta)-gpa)/gp(izeta)).gt.1.d-8) goto 16
300 continue ! termina ix
200   format(3i5)
it=it+1
tetawa(1)=tetaw(1)
h = dzeta
zeta=dzeta
y(1)=tetaw(1)+4.d0/3.d0*tetaw(1)**1.5d0*g0*zeta**1.5d0
y(2)=2.d0*tetaw(1)**1.5d0*g0*dsqrt(zeta)
izeta=2
tetawa(izeta)=tetaw(izeta)
tetaw(izeta)=y(1)
1 izeta=izeta+1
*****
call runge(h,zeta,y,gp(izeta))
tetawa(izeta)=tetaw(izeta)
tetaw(izeta)=y(1)
if(izeta.lt.nx) goto 1

```

```

do izeta=1,nx
dtetaw=dabs((tetaw(izeta)-tetawa(izeta))/tetaw(izeta))
if(dtetaw.gt.1.d-05) goto 10
end do
3001 CONTINUE !termina ial
do izeta=1,nx
zeta=(izeta-1)*dzeta
if(tetaw(izeta).gt.1.d0) then
dz=dzeta*(tetaw(izeta)-1.d0)/(tetaw(izeta)-tetaw(izeta-1))
zetaf=zeta-dz
esc=1.d0/zetaf
nu=(tetaw(izeta)-tetaw(izeta-1))/dzeta
goto 3002
end if
end do
3002 continue
do izeta=1,nx
zeta=(izeta-1)*dzeta
xi=esc*zeta
write(8,102) xi,esc,nu,tetaw(izeta)
if(tetaw(izeta).gt.1.d0) exit
end do
write(7,102) esc,nu
close(8)
end do ! iss
stop
100 format(i5,7c12.5)
102 format(12e15.5)
END
C *****
SUBROUTINE TRI(A,B,C,R,U,N)
IMPLICIT REAL*8(a-h,o-z)
PARAMETER(NMAX=1000)
DIMENSION GAM(NMAX),A(N),B(N),C(N),R(N),U(N)
IF (B(1).EQ.0.d0) PAUSE 'SINGULAR MATRIZ'
BET=B(1)
U(1)=R(1)/BET
DO 11 J=2,N

```

```

GAM(J)=C(J-1)/BET
BET =B(J)-A(J)*GAM(J)
IF(BET.EQ.0.d0) PAUSE 'MATRIZ SINGULAR'
U(J)=(R(J)-A(J)*U(J-1))/BET
11 CONTINUE
DO 12 J=N-1,1,-1
U(J)=U(J)-GAM(J+1)*U(J+1)
12 CONTINUE
RETURN
END
C *****
FUNCTION ERFCC(X)
implicit real*8(a-h,o-z)
Z=dabs(X)
T1=1.d0/(1.d0+0.5d0*Z)
A1=-.82215223d0+T1*.17087277d0
B1=1.48851587d0+T1*A1
C1=-1.13520398d0+T1*B1
D1=.27886807d0+T1*C1
E1=-.18628806d0+T1*D1
F1=.09678418d0+T1*E1
F2=.37409196d0+T1*F1
ERFCC=T1*dexp(-Z*Z-1.26551223d0+T1*(1.00002368d0+T1*F2))
IF(X.LT.0.d0) ERFCC=2.d0-ERFCC
RETURN
END
c*****
implicit real*8 (a-h,o-z)
parameter (nec=2)
dimension y(nec),d(nec), p(nec), e(nec), g(nec), f(nec)
h05 = .5d0 * h
call ecua(x,y,d,gpi)
x1 = x
do 10 i = 1,nec
p(i) = y(i)
y(i) = p(i) + h05 * d(i)
e(i) = d(i)
10 continue

```

```

x = x1 + h05
call ecua(x,y,d,gpi)
do 20 i = 1,nec
y(i) = p(i) + h05 * d(i)
f(i) = d(i)
20 continue
call ecua(x,y,d,gpi)
do 30 i = 1,nec
y(i) = p(i) + h * d(i)
g(i) = d(i)
30 continue
x = x1 + h
*****
call ecua(x,y,d,gpi)
do 40 i = 1,nec
y(i) = p(i) + h * (e(i) + 2.d0 * (f(i) + g(i)) + d(i)) / 6.d0
40 continue
return
end
c*****
subroutine ecua(x,y,d,gpi)
implicit real*8 (a-h,o-z)
parameter (nec=2)
dimension y(nec),d(nec)
(1) = y(2)
d(2) = -gpi/dsqrt(x)
return
end

```

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN