UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

EXTENSION DE CARGAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

JUAN MANUEL VÁZQUEZ LANDERO

DIRECTOR DE TESIS: DR. MIGUEL ÁNGEL GARCÍA ÁLVAREZ

2003

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

PAGINACIÓN

DISCONTINUA

UNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"EXTENSION DE CARGAS"

realizado por VAZQUEZ LANDERO JUAN MANUEL

con número de cuenta 09653492-4, quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Miguel Angel García Alvarez
Propietario	M. en C. Agustín Ontiveros Pineda
Propietario	M. en C. Julio César Cedillo Sánchez
Suplente	Mat. Hugo Villaseñor Hernández
Suplente	Act. Marisa Miranda Tirado

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

13

EXTENSIÓN DE CARGAS

Juan Manuel Vázquez Landero

2003

Dedicatoria

Dedicada a mi familia. A mi papá, Sr. José Manuel Vázquez Ramírez. A mi mamá, Sra. Flavia Landero Argüello y a mi hermana I.A.Q. Ana Laura Vázquez Landero.

Por los esfuerzos que les significó, la larga espera de este momento y los anhelos que tienen de mí; este trabajo es dedicado a ustedes.

Agradecimientos

Ante todo, doy gracias a Dios, por la vida y especialmente por haberme permitido estudiar esta carrera y realizar esta tesis.

Gracias a mis padres y mi hermana, por todo lo que me han ofrecido. Nunca dejaré de agradecerlo.

Gracias a la Universidad y a sus profesores de quienes aprendí el sentido de esta profesión.

Gracias a mi director de tesis, Dr. Miguel Ángel Garcia Álvarez, por su apoyo y paciencia, así como a mis sinodales.

Gracias a mis tíos y primos de México, D.F., por su hospitalidad y respaldo en los años de estudio. También a todos mis demás parientes, amigos y compañeros, que me ayudaron y alentaron para lograr esta meta.

A todos los que hicieron posible esta tesis, con lo que representa. Gracias.

Índice

Introducción

Comúnmente, en los cursos de Análisis Matemático, se estudian a las medidas como funciones σ-aditivas, definidas en un σ-álgebra de conjuntos. De acuerdo a este concepto, como veremos en este trabajo, las cargas son medidas finitamente aditivas definidas en ciertas colecciones de conjuntos. El objetivo de esta tesis es mostrar, bajo qué condiciones y de que manera se puede extender una carga definida sobre algún tipo de colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de un conjunto Ω, a una carga definida en cualquier álgebra de subconjuntos de Ω que contenga la colección $\mathcal{C}$ inicial.

Debemos señalar que esta tesis está basada principalmente en el libro de "Teoria de Cargas: Un Estudio de Medidas Finitamente Aditivas" de K.P.S. Bhaskara Rao y M. Bhaskara Rao, de 1983; en donde se hace un tratado completo de las cargas o medidas finitamente aditivas, pues se estudian diversas clasificaciones de éstas, como cargas no atómicas, cargas puras, etc.,integración de cargas, rango de cargas, entre otros temas, así como el tema de extensiones de cargas en su tercer capítulo, que es la base para el desarrollo de nuestra tesis.

Veamos a continuación las diferencias entre las medidas finitamente aditivas y las medidas σ-aditivas, notándolo desde el plano de la Probabilidad.

En 1933 Kolmogorov introdujo un sistema axiomático de probabilidad que consistió básicamente en que

i) $0 \leq P(A)$, donde A representa un evento del σ-álgebra de eventos de un conjunto Ω.

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) P es σ-aditiva.

Las funciones $P(\cdot)$ que satisfacían este sistema axiomático eran llamadas funciones de probabilidad matemática. Más tarde DeFinetti sugirió que el sistema de Kolmogorov debía ser modificado en su inciso (iii), por el axioma de la aditividad finita. Se adoptó el sistema axiomático de la propiedad de la aditividad numerable mientras que pocos autores favorecieron la aditividad finita. En el sistema de aditividad numerable, a algunos subconjuntos del conjunto Ω no se les puede asignar una probabilidad (no medibles), mientras que en el sistema axiomático de aditividad finita, a cada subconjunto se le puede llegar a asignar una probabilidad, aunque muchas veces ésta no pueda ser asignada de forma única, ya que requiere que la probabilidad sea interpretada subjetivamente como una probabilidad personal para un individuo dado.

Con el sistema de aditividad numerable, en los puntos de discontinuidad x_o, de las funciones de distribución acumulativas F(x) se tiene que :

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_o)$$

esto es, F(x) es continua por la derecha en los puntos x_o. Con el sistema de aditividad finita, esta continuidad no necesariamente resulta ser cierta; recordando que las funciones de distribución acumulativas F(x) son definidas como $F(x) = P\{X \leq x\}$, esto es, es la probabilidad del evento $\{ X \leq x \}$, donde X denota alguna variable aleatoria. [S. James Press, 1989].

Desde otro punto de vista, el de la Teoría de la Medida cabe hacer historia que a principios del siglo XX, Henry Lebesgue planteó el problema de la medida que consistió en encontrar una función m definida sobre todos los subconjuntos acotados de números reales que satisficiera que m fuera no negativa, σ-aditiva, invariante bajo traslaciones y que $m([0,1]) = 1$. Más tarde fue demostrado que este problema no tiene solución. Tiempo después, A. Tarski en 1930 se planteó el problema de la medida en un sentido más amplio buscando encontrar una función m definida sobre todos los subconjuntos de [0,1] que cumpliera con que m fuera no negativa, finitamente aditiva y si I es un intervalo, $m(I)$ fuera igual a su longitud. Los resultados mostraron que aunque el problema tenía solución, ésta no era única.[Royden, 1963]

Como analizaremos en los siguientes capítulos, la asignación de medidas finitamente aditivas o cargas puede ser realizada sobre una colección de conjuntos más grande que con la asignación de medidas σ-aditivas, aunque la unicidad no necesariamente es asegurada, opción que se toma en Estadística Bayesiana, por ejemplo.

En este trabajo titulado "Extensión de Cargas", primeramente veremos algunos resultados preliminares necesarios para el desarrollo del mismo, después brevemente analizaremos el proceso de extensión de medidas σ-aditivas con tal de hacer notar la diferencia con nuestro estudio. A continuación, llegaremos a la parte central de este pequeño trabajo, el tercer capítulo, en donde se analiza el proceso de extensión de cargas diversas definidas en ciertas colecciones de conjuntos, ayudándonos de cierta funcional natural en un espacio vectorial específico, introduciendo el concepto de carga real parcial y estudiando diversos tipos de extensiones, de los cuales se debe hacer notar el proceso de extensión de Łos y Marczewski. Se concluye este trabajo en el capítulo final en donde se estudia el aspecto de la unicidad de las extensiones de cargas, observando las condiciones bajo las cuales se puede dar esta unicidad; así como también se desarrollan algunos ejemplos de extensiones.

Se debe mencionar que un requisito necesario para entender la exposición de este trabajo es un manejo de Análisis Real, Teoría de Conjuntos y Teoría de la Medida.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Varios tipos de clases de conjuntos son presentados en este capítulo, de los cuales el más importante para nosotros será el álgebra de subconjuntos de un conjunto dado, ya que éste es el dominio de definición para las medidas finitamente aditivas o cargas. Estos conceptos también serán introducidos, así como algunas propiedades básicas y ejemplos.

1.1 Definiciones. Sea Ω un conjunto y $\mathcal{F}$ una colección de subconjuntos de Ω.

(1). $\mathcal{F}$ es un *latiz* en Ω si se satisfacen las siguientes condiciones.

(i). $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$.

(ii). $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.

(2). $\mathcal{F}$ es un *semi-anillo* en Ω si se satisfacen las siguientes condiciones.

(i). $\varnothing \in \mathcal{F}$.

(ii). $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.

(iii). Si $A, B \in \mathcal{F}$ y $A \subset B$, entonces existe un número finito $A_0, A_1, \ldots, A_n$ de conjuntos en $\mathcal{F}$ tales que $A = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = B$ y $A_i - A_{i-1} \in \mathcal{F}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

(3). $\mathcal{F}$ es una *semi-álgebra* en Ω si $\mathcal{F}$ es un semi-anillo y $\Omega \in \mathcal{F}$.

(4). $\mathcal{F}$ es un *anillo* en Ω si se satisfacen las siguientes condiciones.

(i). $\varnothing \in \mathcal{F}$.

(ii). $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$.

(iii). $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A - B \in \mathcal{F}$.

(5). $\mathcal{F}$ es un *álgebra* en Ω si $\mathcal{F}$ es un anillo y $\Omega \in \mathcal{F}$.

(6). $\mathcal{F}$ es un *σ-anillo* en Ω si se satisfacen las siguientes condiciones.

(i). $\varnothing \in \mathcal{F}$.

(ii). $\{A_n;\ n \geq 1\} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$.

(iii). $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A - B \in \mathcal{F}$.

(7). $\mathcal{F}$ es una *σ-álgebra* en Ω si $\mathcal{F}$ es un σ-anillo en Ω y $\Omega \in \mathcal{F}$.

1.2 Teorema. *Sea Ω un conjunto cualquiera.*

(1). *Sea $\mathcal{C}$ un semi-anillo en Ω y $\mathcal{F}=\{\bigcup_{i=1}^{n} C_i$; $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son conjuntos ajenos por parejas en $\mathcal{C}$ y $n \geq 1\}$. Entonces $\mathcal{F}$ es el anillo más pequeño en Ω que contiene a $\mathcal{C}$.*

(2). *Sea $\mathcal{C}$ una semi-álgebra en Ω y $\mathcal{F}=\{\bigcup_{i=1}^{n} C_i$; $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son conjuntos ajenos por parejas en $\mathcal{C}$ y $n \geq 1\}$. Entonces $\mathcal{F}$ es el álgebra más pequeño en Ω que contiene a $\mathcal{C}$.*

(3). *Sea $\mathcal{C}$ un anillo en Ω. Sea $\mathcal{C}_1=\{A\subset\Omega;\ A^c\in \mathcal{C}\}$. Entonces $\mathcal{F}= \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1$ es el álgebra más pequeño que contiene a $\mathcal{C}$.*

(4). *Sea $\mathcal{C}$ un σ-anillo en Ω. Sea $\mathcal{C}_1=\{A\subset\Omega;\ A^c\in \mathcal{C}\}$. Entonces $\mathcal{F}= \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1$ es la σ-álgebra más pequeña en Ω que contiene a $\mathcal{C}$.*

Prueba. (1) De la definición de $\mathcal{F}$, es claro que $\mathcal{F}$ es cerrado bajo uniones finitas ajenas. Mostraremos que $\mathcal{F}$ es cerrado bajo intersecciones finitas. Sean $\bigcup_{i=1}^{m} C_i$ y $\bigcup_{j=1}^{n} D_j$ ambos elementos de $\mathcal{F}$, donde $C_1, C_2, \ldots, C_m$ son elementos ajenos por parejas en $\mathcal{C}$ y $D_1, D_2, \ldots, D_n$ son elementos ajenos por parejas en $\mathcal{C}$. Entonces

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m} C_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^{n} D_j \right) = \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n} (C_i \cap D_j) \in \mathcal{F},$$

ya que $C_i \cap D_j$, $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$ son conjuntos ajenos por parejas en $\mathcal{C}$. Ahora, mostraremos que es cerrado bajo diferencias. Suponga que $E, F \in \mathcal{C}$ y $E \subset F$. Entonces existen $E_0, E_1, \ldots, E_n$ en $\mathcal{C}$ tales que $E = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_n = F$ y $E_i - E_{i-1}$ pertenecen a $\mathcal{C}$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Así, $F - E = \bigcup_{i=1}^{n} (E_i - E_{i-1}) \in \mathcal{F}$, ya que $E_i - E_{i-1}$ son ajenos por parejas (*). Sean $\bigcup_{i=1}^{m} C_i$ y $\bigcup_{j=1}^{n} D_j$ dos conjuntos en $\mathcal{F}$, donde $C_1, C_2, \ldots, C_m$ son elementos ajenos por parejas en $\mathcal{C}$ y $D_1, D_2, \ldots, D_n$ son elementos ajenos por parejas en $\mathcal{C}$. Entonces note que:

$$\bigcup_{j=1}^{n} D_j - \bigcup_{i=1}^{m} C_i = \bigcup_{j=1}^{n} \left[D_j - \left(\bigcup_{i=1}^{m} C_i \right) \right] = \bigcup_{j=1}^{n} \bigcap_{i=1}^{m} (D_j - (C_i \cap D_j)).$$

De lo que mencionamos arriba(*), $D_j - (C_i \cap D_j) \in \mathcal{F}$ para cada i y j. Ya que $\mathcal{F}$ es cerrado bajo intersecciones finitas, $\bigcap_{i=1}^{m} (D_j - (C_i \cap D_j)) \in \mathcal{F}$ para cada j. Como $\mathcal{F}$ es cerrado bajo uniones finitas ajenas,

$$\bigcup_{j=1}^{n} \bigcap_{i=1}^{m} (D_j - (C_i \cap D_j)) \in \mathcal{F}.$$

Si probamos que $\mathcal{F}$ es cerrado bajo uniones finitas, implicaría que $\mathcal{F}$ es un anillo en Ω. Sean A, B en $\mathcal{F}$. Entonces $A \cup B = A \cup (B - A)$. Ya que $(B - A) \in \mathcal{F}$ y A y $(B - A)$ son ajenos, se sigue que $A \cup B \in \mathcal{F}$. Es claro que $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ y que $\mathcal{F}$ es el anillo más pequeño que contiene a $\mathcal{C}$, pues un anillo es cerrado bajo uniones finitas.

(2). Este es similar a 1.

(3). Mostraremos que $\mathcal{F}$ es un álgebra en Ω. Es obvio que $\mathcal{F}$, es cerrado bajo complementos y que $\varnothing, \Omega \in \mathcal{F}$. Veamos que $\mathcal{F}$ es cerrado bajo uniones finitas. Sean $E, F \in \mathcal{F}$.

Caso (i). $E, F \in \mathcal{C}$. Entonces $(E \cup F) \in \mathcal{C} \subset \mathcal{F}$.

Caso (ii). $E \in \mathcal{C}$ y $F \in \mathcal{C}_1$. Entonces $(E \cup F) \in \mathcal{C}_1$ ya que $(E \cup F)^c = E^c \cap F^c = (F^c - E)$ que es un elemento de $\mathcal{C}$.

Caso (iii). $E \in \mathcal{C}_1$, $F \in \mathcal{C}$. Este caso es similar al anterior.

Caso (iv). $E, F \in \mathcal{C}_1$. Entonces $(E \cup F) \in \mathcal{C}_1$, pues $(E \cup F)^c = (E^c \cap F^c) \in \mathcal{C}$, el cual es cerrado bajo intersecciones finitas, pues es cerrado bajo uniones y diferencias finitas.

En cualquier caso se tiene que $E \cup F \in \mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F}$ es un álgebra en Ω que contiene a $\mathcal{C}$. Es obvio que $\mathcal{F}$, es el álgebra más pequeño en Ω que contiene a $\mathcal{C}$, pues un álgebra es cerrado bajo complementos.

(4). Este puede ser probado como en (3). ■

1.3 Teorema. *Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω y $A \subset \Omega$ con $A \notin \mathcal{F}$. Entonces el álgebra más pequeño $\mathcal{F}_1$ en Ω que contiene a $\mathcal{F}$ y a $\{A\}$, está dado por*

$$\mathcal{F}_1 = \{(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A^c);\ B_1, B_2 \in \mathcal{F}\}$$

Prueba. Mostraremos directamente que $\mathcal{F}_1$ es un álgebra de subconjuntos de Ω que contiene a $\mathcal{F}$. Sea $B \in \mathcal{F}$, tomando a $B = B_1 = B_2$ se tiene que $(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A^c) = B \in \mathcal{F}_1$, así que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$. Veremos ahora que $\mathcal{F}_1$ es cerrado bajo uniones finitas y complementos. Sean $[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A^c)]$, $[(B_3 \cap A) \cup (B_4 \cap A^c)]$ en $\mathcal{F}_1$; donde $B_1, B_2, B_3, B_4 \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\begin{aligned}[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A^c)] \cup [(B_3 \cap A) \cup (B_4 \cap A^c)] &= [(B_1 \cap A) \cup (B_3 \cap A)] \cup [(B_2 \cap A^c) \cup (B_4 \cap A^c)] \\ &= [(B_1 \cup B_3) \cap A)] \cup [(B_2 \cup B_4) \cap A^c] \in \mathcal{F}_1\end{aligned}$$

ya que tanto $(B_1 \cup B_3)$ como $(B_2 \cup B_4)$ son elementos del álgebra $\mathcal{F}$. Por tanto $\mathcal{F}_1$ es cerrado bajo uniones finitas. Observemos ahora que $[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A^c)]^c \in \mathcal{F}_1$, puesto que

$$\begin{aligned}[(B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A^c)]^c &= [(B_1 \cap A)^c \cap (B_2 \cap A^c)^c] \\ &= [(B_1^c \cup A^c) \cap (B_2^c \cup A)] = [(B_1^c \cap B_2^c) \cup (B_1^c \cap A) \cup (A^c \cap B_2^c)] \\ &= (B_1^c \cap B_2^c) \cup [(B_1^c \cup A^c) \cap (B_1^c \cup B_2^c) \cap (A \cup B_2^c) \cap \Omega\ ] \\ &= [(B_1^c \cap B_2^c) \cup (B_1^c \cup A^c)] \cap [(B_1^c \cap B_2^c) \cup (B_1^c \cup B_2^c)] \cap \\ &\quad [(B_1^c \cap B_2^c) \cup (A \cup B_2^c)] \\ &= [(B_1^c \cup A^c) \cap (B_1^c \cup B_2^c) \cap (A \cup B_2^c) \cap \Omega] \\ &= [(B_1^c \cap A)] \cup (B_2^c \cap A^c)]\end{aligned}$$

y tanto B_1^c como B_2^c pertenecen al álgebra $\mathcal{F}$. Así que $\mathcal{F}_1$ es cerrado bajo complementos y por lo tanto, bajo intersecciones finitas. Entonces se concluye que $\mathcal{F}_1$ es un álgebra de subconjuntos que contiene a $\mathcal{F}$. De la construcción de $\mathcal{F}_1$ se sigue que éste es en efecto el álgebra más pequeño que contiene a $\mathcal{F}$, pues un álgebra es cerrado bajo complementos, uniones e intersecciones finitas. ■

1.4 Definiciones. Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω.

(1). Una función μ: $\mathcal{F} \to [-\infty,\infty]$ es una *carga* en $\mathcal{F}$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

(i). $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii). Si $A, B \in \mathcal{F}$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(2). Una carga μ en $\mathcal{F}$ es *carga real* si $-\infty < \mu(F) < \infty$ para cada F en $\mathcal{F}$.

(3). Una carga μ en $\mathcal{F}$ es *acotada* si $\operatorname{Sup}\{|\mu(F)|; F \in \mathcal{F}\} < \infty$.

(4). Una carga μ en $\mathcal{F}$ es *positiva* si $\mu(F) \geq 0$ para cada F en $\mathcal{F}$.

(5). Una carga μ en $\mathcal{F}$ es 0-*a valuada* ($a \neq 0$) si $\mu(F) = 0$ ó a para cada F en $\mathcal{F}$ y existe un conjunto F_0 en $\mathcal{F}$ tal que $\mu(F_0) = a$.

(6). Una carga μ en $\mathcal{F}$ es *carga de probabilidad* si μ es positiva y $\mu(\Omega) = 1$.

Uno podría introducir la noción de carga exactamente en el mismo sentido como anteriormente en dominios generales como lo son semi-anillos de conjuntos o anillos de conjuntos.

Si μ es una carga en un álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω, μ no puede tomar ambos valores $-\infty$ y ∞. Para A, B en $\mathcal{F}$ tales que $\mu(A) = \infty$ y $\mu(B) = -\infty$, entonces $\mu(\Omega) = \mu(A) + \mu(A^c) = \infty = \mu(B) + \mu(B^c) = -\infty$, lo cual es contradictorio.

1.5 Propiedades. A continuación se enlistan algunas propiedades de las cargas, fáciles de probar, donde μ es una carga en un álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de Ω.

(i). *Si* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *es un número finito de elementos en* $\mathcal{F}$ *ajenos por parejas entonces*:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i)$$

(ii). *Si* $E, F \in \mathcal{F}$, $E \subset F$ *y* $-\infty < \mu(E) < \infty$, *entonces* $\mu(F-E) = \mu(F) - \mu(E)$.

(iii). *Si* $E, F \in \mathcal{F}$, $E \subset F$ *y* μ *es positiva, entonces* $\mu(E) \leq \mu(F)$.

(iv). *Si* $F_0, F_1, \ldots, F_n$ *es un número finito de elementos en* $\mathcal{F}$ *tales que* $F_0 \subset \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ *y* μ *es positiva, entonces:*

$$\mu(F_0) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i)$$

En particular,

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) = \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i)$$

(v). *Si* $F \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(F) < \infty$, *entonces* $\mu(E) < \infty$ *para cualquier* $E \subset F$, *con* $E \in \mathcal{F}$.

(vi). *Si* $F \in \mathcal{F}$ *y* $\mu(F) > -\infty$, *entonces* $\mu(E) > -\infty$ *para cualquier* $E \subset F$, *con* $E \in \mathcal{F}$.

(vii). *Si* $F \in \mathcal{F}$ *y* $-\infty < \mu(F) < \infty$, *entonces* $-\infty < \mu(E) < \infty$ *para cualquier* $E \subset F$, *con* $E \in \mathcal{F}$.

(viii). *Si* E_n, $n \geq 1$ *es una sucesión de elementos ajenos por parejas en* $\mathcal{F}$, $E \in \mathcal{F}$, $\bigcup_{n \geq 1} E_n \subset E$ *y* μ *es positiva, entonces* $\sum_{n \geq 1} \mu(E_n) \leq \mu(E)$.

(ix). μ *es modular,* i.e. $\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F)$ *para cualquier* E, F *en* $\mathcal{F}$.

(x). *Si* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *es un número finito de elementos en* $\mathcal{F}$, *entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(F_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\right) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{\substack{j=1 \\ i<j}}^{n} F_i \cap F_j\right) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{\substack{j=1 \\ i<j<k}}^{n} \bigcup_{k=1}^{n} F_i \cap F_j \cap F_k\right) + \ldots + \mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right).$$

Prueba.

(i) se sigue por inducción. (ii) y (iii) se siguen de la propiedad finita de las cargas.

(iv). Sean $E_1 = F_1$, $E_2 = F_2 - F_1$, $E_3 = F_3 - (F_2 \cup F_1)$, $\ldots$, $E_n = F_n - (\bigcup_{i=1}^{n-1} F_i)$. Por lo que los conjuntos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son ajenos por parejas, $E_i \subset F_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$. Entonces se tiene que

$$\mu(F_0) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{n} F_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(F_i)$$

(v). Sea $F \in \mathcal{F}$ con $\mu(F) < \infty$, entonces como $\mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E)$, se debe tener que $\mu(E) < \infty$. Del mismo modo se obtiene (vi). (vii) es consecuencia de los dos incisos anteriores.

(viii). Sabemos que para todo $m \geq 1$, $\bigcup_{i=1}^{m} E_i \subset E$, así que $\sum_{i=1}^{m} \mu(E_i) = \mu(\bigcup_{i=1}^{m} E_i) \leq \mu(E)$.

Entonces se sigue que $\sum_{n\geq 1} \mu(E_n) \leq \mu(E)$.

(ix). Por una parte se tiene que $\mu(E) + \mu(F) = [\mu(E - F) + \mu(E \cap F)] + [\mu(F - E) + \mu(E \cap F)]$ y por otra que $\mu(E \cup F) + \mu(E \cap F) = [\mu(E - F) + \mu(F - E) + \mu(E \cap F)] + \mu(E \cap F)$.

(x). Esto es una generalización de (ix) y se prueba por inducción. Por el inciso anterior el resultado es cierto para $n = 2$. Supongamos que el resultado es cierto para $n = m$ y se prueba que es cierto para $n = m + 1$. Sean $F_1, F_2, \ldots, F_{m+1}$ conjuntos de $\mathcal{F}$ por lo que

$\sum_{i=1}^{m+1} \mu(F_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu(F_i) + \mu(F_{m+1})$; usando la hipótesis de inducción tenemos que

$$= [\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} F_i\right) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{\substack{j=1\\ i<j}}^{m} F_i \cap F_j\right) + \ldots + \mu\left(\bigcap_{i=1}^{m} F_i\right)] + \mu(F_{m+1})$$

$$= \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} F_i\right) + \mu(\left(\bigcup_{i=1}^{m} F_i\right) \cap F_{m+1}) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{\substack{j=1\\ i<j}}^{m} F_i \cap F_j\right) + \ldots + \mu\left(\bigcap_{i=1}^{m} F_i\right)$$

este último paso al usar la hipótesis de inducción para la suma $\mu(\bigcup_{i=1}^{m} F_i) + \mu(F_{m+1})$ para $n = 2$. Continuando de este modo, se obtiene el resultado deseado. ■

Finalmente, terminamos este capítulo fijando el término de medida que se mantendrá en los siguientes capítulos y daremos algunos ejemplos de cargas y medidas.

1.6 Definición. Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω. Una *medida* en $\mathcal{F}$ es una función de $\mathcal{F}$ a $[-\infty, \infty]$ que tiene las siguientes propiedades

(i). $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii). Si $\{F_n\}$, $n \geq 1$ es una sucesión de conjuntos ajenos por parejas en $\mathcal{F}$ y si $\bigcup_{n\geq 1} F_n$ pertenece a $\mathcal{F}$, entonces

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} F_n\Big) = \sum_{n\geq 1} \mu(F_n).$$

Toda medida es una carga. Si μ es real valuada, diremos que μ es medida real. Si μ es acotada en $\mathcal{F}$, diremos que μ es medida acotada. Si $\mu \geq 0$, diremos que μ es medida positiva. También diremos que μ es σ-finita si existe una sucesión $\{F_n\}$, $n \geq 1$, de conjuntos en $\mathcal{F}$, con $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} F_n$ y tal que $\mu(F_n) < \infty$ para toda n.

1.7 Ejemplos

(1) Sea Ω el conjunto de los números reales en $[0,1)$ y $\mathcal{F} = \{\bigcup_{i=1}^{n}[a_i, b_i) \cap \Omega;$

$[a_i, b_i) \cap [a_j, b_j) = \varnothing$ para $i \neq j$, $0 \leq a_i \leq b_i \leq 1$ para toda i, a_i, b_i reales para toda i y $n \geq 1\}$.

$\mathcal{F}$ es un álgebra en Ω. Para cualquier conjunto en $\mathcal{F}$ sea

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n}[ai, bi) \cap \Omega\Big) = \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$$

Entonces μ es una carga positiva acotada en $\mathcal{F}$.

(1.1) En el mismo álgebra señalado en el inciso anterior y si φ es una función real continua monótona creciente definida en $[0,1]$ y definimos μ en $\mathcal{F}$ como sigue: para $0 \leq a \leq b \leq 1$, $\mu([a,b)) = \varphi(b) - \varphi(a)$. Para cualquier $F \in \mathcal{F}$, $\mu(F)$ es definida aditivamente. Resulta fácil notar que μ es una carga positiva acotada

(2) Sea Ω un conjunto infinito y $\mathcal{F}$ el álgebra finita-cofinita en Ω, es decir, $\mathcal{F}$ consiste de los subconjuntos finitos de Ω y los subconjuntos de Ω de complemento finito. Sea μ definida en $\mathcal{F}$ como:

$$\mu(A) = 0, \quad \text{si A es finito}$$
$$\mu(A) = 1, \quad \text{si A es cofinito.}$$

Resulta sencillo probar que $\mathcal{F}$ es en realidad un álgebra de conjuntos en Ω. Observemos que μ es una carga, puesto que $\mu(\varnothing) = 0$ y si A, B son elementos ajenos de $\mathcal{F}$, entonces ambos son finitos y $\mu(A)+\mu(B) = 0 = \mu(A \cup B)$ ó sólo uno de los dos es de complemento finito, en cuyo caso $\mu(A)+\mu(B) = 1 = \mu(A \cup B)$. Entonces μ es una carga en $\mathcal{F}$. Ahora analicemos dos casos, cuando Ω es numerable y cuando Ω es no numerable para comprobar cuando μ es una medida.

(2.1) Ω numerable. En este caso podemos describir a Ω como $\Omega = \{x_n; n \geq 1\}$ y sea $\{F_n\}$, $n \geq 1$ la sucesión de conjuntos ajenos por parejas en $\mathcal{F}$ dada como $\{F_n\} = \{x_n\}$ para cada $n \geq 1$. Entonces tenemos que:

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} F_n\Big) = \mu(\Omega) = 1 \neq 0 = \sum_{n\geq 1} \mu(F_n).$$

Por lo tanto en este caso μ no cumple con ser una medida en $\mathcal{F}$.

(2.2) Ω no numerable. Sea $\{F_n\}$, $n \geq 1$ una sucesión de conjuntos ajenos por parejas en $\mathcal{F}$ y con la condición de que $\bigcup_{n\geq 1} F_n$ pertenece a $\mathcal{F}$; entonces únicamente se tienen dos casos:

- El primer caso es que haya un solo conjunto de complemento finito F_j en la sucesión, un número finito de conjuntos finitos y el resto de conjuntos vacíos. Por tanto se tendría que:

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} F_n\Big) = 1 = \mu(F_j) = \sum_{n\geq 1} \mu(F_n).$$

- El segundo caso consiste en que haya un número finito de conjuntos finitos en la sucesión y el resto de conjuntos vacíos. Entonces tendríamos que

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} F_n\Big) = 0 = \sum_{n\geq 1} \mu(F_n).$$

En ambos casos se obtiene la igualdad deseada, es por eso que cuando Ω es no numerable, μ cumple con ser una medida en $\mathcal{F}$.

(3) Un ejemplo estándar de una medida es la Medida de Lebesgue λ en la σ-álgebra de Borel B de la línea real R. Esta es la medida en B tal que $\lambda\{(a,b)\} = b - a$ para todo $-\infty < a < b < \infty$.

CAPÍTULO 2

Extensión de medidas

Un importante teorema de extensión que se estudia en Teoría de la Medida es el teorema de extensión de Caratheodory. A lo largo de este capítulo trabajaremos con una medida μ positiva y acotada definida en un álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto Ω, de la cual analizaremos que existe la σ-álgebra $\mathcal{U}$ en Ω que contiene a $\mathcal{F}$, en la cual existe una medida positiva que es una extensión de μ. Para llegar al teorema necesitaremos los siguientes conceptos.

2.1 Definición. Sea μ una medida positiva acotada en un álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto Ω, Sea B un subconjunto arbitrario de Ω, entonces definamos

$$\mu^*(B) = \inf \{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)\}$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las sucesiones $\{E_j\}$ de conjuntos en $\mathcal{F}$ tales que

$$B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j.$$

Note que como $\Omega \in \mathcal{F}$, pues es un álgebra, se tiene que el ínfimo definido siempre tiene sentido. A la función μ^* que hemos definido le llamaremos la *medida exterior* generada por μ. A pesar de que este término no es apropiado, pues μ^* en general no es una medida, veremos que μ^* cumple con algunas propiedades parecidas a las de una medida. También observe que como μ es una función no negativa, se tienen únicamente dos posibilidades; las sumas $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ son absolutamente convergentes, en cuyo caso el valor de la suma no depende del orden de los sumandos, ó la suma es divergente, y en este caso se le asigna el valor ∞.

2.2 Lema. *La función μ^* satisface las siguientes propiedades:*

(a) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(b) $\mu^*(B) \geq 0$, *para todo* $B \subseteq \Omega$.

(c) *Si* $A \subseteq B$, *entonces* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(d) *Si* $B \in \mathcal{F}$, *entonces* $\mu^*(B) = \mu(B)$.

(e) *σ-subaditividad. Si* $\{B_n\}$ *es una sucesión de subconjuntos de* Ω, *entonces*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n).$$

Prueba.

• (b) Sea $B \subseteq \Omega$, entonces $\mu^*(B) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)\}$ donde el ínfimo es tomado sobre todas las sucesiones $\{E_j\}$ de conjuntos en $\mathcal{F}$ tales que $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$. Ya que μ es una medida positiva, el ínfimo $\mu^*(B)$ se toma sobre números no negativos, por lo tanto $\mu^*(B) \geq 0$.

• (a) Tomando la sucesión de subconjuntos en $\mathcal{F}$, $\{\emptyset. \ \emptyset, \ \ldots\}$ se sigue que $\mu^*(\emptyset) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\emptyset) = 0$. Del inciso (b), obtenemos que $\mu^*(\emptyset) = 0$.

• (c) Se sigue del hecho de que el conjunto de todas las sucesiones $\{E_j\}$ de conjuntos en $\mathcal{F}$ tales que $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, está contenido en el conjunto de todas las sucesiones $\{F_k\}$ de conjuntos en $\mathcal{F}$ tales que $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$.

• (d) Como la sucesión $\{B, \emptyset, \emptyset, \ldots\}$ es una colección de elementos en $\mathcal{F}$ cuya unión contiene a B, se sigue que

$$\mu^*(B) \leq \mu(B) + 0 + 0 + \ldots = \mu(B).$$

Ahora, sea $\{E_n\}$ un sucesión en $\mathcal{F}$, tal que $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, de lo que $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} (E_n \cap B)$. Por lo tanto tenemos

$$\mu(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B \cap E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

entonces debemos tener que $\mu(B) \leq \mu^*(B)$.

• (e) Sea $\varepsilon > 0$ y para cada n escojamos una sucesión (E_{nk}) de conjuntos en $\mathcal{F}$ tales que

$$B_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{nk} \text{ y } \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{nk}) \leq \mu^*(B_n) + \varepsilon/2^n.$$

Entonces encontramos que $\{E_{nk}: n, k \in \mathcal{N}\}$ es una colección numerable de conjuntos en $\mathcal{F}$ cuya unión contiene a $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, se sigue entonces que

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{nk}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) + \varepsilon.$$

Ya que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se sigue la desigualdad deseada. ■

Como mencionamos anteriormente, la función μ^* está definida sobre cualquier subconjunto de Ω, sin embargo, no necesariamente satisface la aditividad o la σ-aditividad. Por tanto, restringiremos μ^* a una σ-álgebra más pequeña que $P(\Omega)$, el conjunto potencia, que contenga a $\mathcal{F}$ y sobre el cual μ^* sea σ-aditiva. Para esto usaremos la condición de Caratheodory.

2.3 Definición. Sea E un subconjunto de Ω. Se dice que E es *μ^*-medible* si

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

para todo subconjunto A de Ω. La colección de todos los conjuntos μ^*-medibles será denotada por $\mathcal{F}^*$.

2.4 Teorema. *La colección $\mathcal{F}^*$ de los conjuntos μ^*-medibles es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{F}$. Más aún, si $\{E_n\}$ es una sucesión de elementos de $\mathcal{F}^*$ ajenos por parejas, entonces*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Prueba. De la definición previa, es claro que $\varnothing$ y Ω son conjuntos μ^*-medibles, y que si E pertenece a $\mathcal{F}^*$, entonces también E^c es un conjunto μ^*-medible.

Veamos que $\mathcal{F}^*$ es cerrado bajo intersecciones. Sean E y F conjuntos μ^*-medibles y A subconjunto arbitrario de Ω. Ya que $E \in \mathcal{F}^*$, tenemos

$$\mu^*(A \cap F) = \mu^*(A \cap F \cap E) + \mu^*((A \cap F) \cap E^c)$$

Como $F \in \mathcal{F}^*$, entonces

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F) + \mu^*(A \cap F^c)$$

y también

$$\begin{aligned}\mu^*(A \cap (E \cap F)^c) &= \mu^*(A \cap (E \cap F)^c \cap F) + \mu^*(A \cap (E \cap F)^c \cap F^c) \\ &= \mu^*((A \cap F) \cap E^c) + \mu^*(A \cap F^c)\end{aligned}$$

De lo que se obtiene

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &= \mu^*(A \cap F \cap E) + \mu^*((A \cap F) \cap E^c) + \mu^*(A \cap F^c) \\ &= \mu^*(A \cap (E \cap F)) + \mu^*(A \cap (E \cap F)^c),\end{aligned}$$

por tanto, $E \cap F$ pertenece a $\mathcal{F}^*$. Ya que $\mathcal{F}^*$ es cerrado bajo complementos e intersecciones, $\mathcal{F}^*$ es cerrado bajo uniones y entonces se tiene que $\mathcal{F}^*$ es un álgebra.

Supongamos que $E, F \in \mathcal{F}^*$, que $E \cap F = \varnothing$ y sea $A \subseteq \Omega$. Entonces

$$\begin{aligned}\mu^*(A \cap (E \cup F)) &= \mu^*(A \cap (E \cup F) \cap E) + \mu^*(A \cap (E \cup F) \cap E^c) \\ &= \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap F)\end{aligned}$$

Tomando $A = \Omega$, se sigue que μ^* es finitamente aditiva en $\mathcal{F}^*$.

Veamos ahora que $\mathcal{F}^*$ es una σ-álgebra y que μ^* es σ-aditiva en $\mathcal{F}^*$. Sea E_k una sucesión de conjuntos ajenos por parejas de $\mathcal{F}^*$ y sea $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Como $\mathcal{F}^*$ es álgebra, se tiene que $F_n = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ pertenece a $\mathcal{F}^*$ para cada n y si A es un subconjunto arbitrario de Ω,

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap F_n) + \mu^*(A \cap (F_n)^c) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap (F_n)^c)$$

Note que como $F_n \subseteq E$, se tiene que $A \cap E^c \subseteq A \cap (F_n)^c$ para todo n. Lo que da

$$\mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Como esta desigualdad es válida para toda $n \in \mathbb{N}$, hacemos tender n al infinito,

$$\mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Por otra parte, del lema anterior (e), se sigue que

$$\mu^*(A \cap E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) \quad \text{y} \quad \mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Usando las dos desigualdades anteriores obtenemos que

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_k) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Lo que muestra que $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ es μ^*-medible, por lo tanto $\mathcal{F}^*$ una σ-álgebra de conjuntos de Ω. En particular, si se toma $A = E$ se obtiene la igualdad deseada, es decir que $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$ y se cumple con la σ-aditividad.

Sólo resta probar que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$. Sabemos por el lema anterior (d), que si $E \in \mathcal{F}$, entonces $\mu^*(E) = \mu(E)$, lo que no nos dice que E sea μ^*-medible. Sea A un subconjunto cualquiera de Ω y $E \in \mathcal{F}$, entonces por el mismo lema (e), se da que

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario y $\{F_n\}$ una sucesión de conjuntos de $\mathcal{F}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ y se satisface que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon$, por la definición del ínfimo. Ya que se tiene que $A \cap E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap E)$ y $A \cap E^c \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap E^c)$, del lema anterior (e), se sigue que

$$\mu^*(A \cap E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n \cap E), \quad \mu^*(A \cap E^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n \cap E^c).$$

Por tanto

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n \cap E) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n \cap E^c)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \{\mu(F_n \cap E) + \mu(F_n \cap E^c)\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Puesto que ε es arbitrario, se sigue que

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

es decir E pertenece a $\mathcal{F}^*$. Por lo tanto $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}^*$. ■

Veremos ahora que en el caso en que μ es acotada, existe una única extensión a una medida positiva en $\mathcal{F}^*$. Supongamos que existe una medida positiva ν en $\mathcal{F}^*$ la cual es una extensión de μ en $\mathcal{F}$. Note que tanto μ^* como ν son acotadas. Sea E un subconjunto arbitrario de $\mathcal{F}^*$ y sea $\{E_n\}$ una sucesión de conjuntos en $\mathcal{F}$ tal que $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Entonces como μ y ν coinciden en $\mathcal{F}$, se tiene que

$$\nu(E) \leq \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Por lo tanto $\nu(E) \leq \mu^*(E)$ para cualquier elemento E de $\mathcal{F}^*$. Del hecho que ν y μ^* son aditivas en $\mathcal{F}^*$, se sigue que

$$\mu(\Omega) = \mu^*(E) + \mu^*(E^c) = \nu(E) + \nu(E^c)$$

Como los términos $\nu(E)$ y $\nu(E^c)$ son finitos y no mayores que los términos $\mu^*(E)$ y $\mu^*(E^c)$ respectivamente, se sigue que $\mu^*(E) = \nu(E)$ para todo $E \in \mathcal{F}^*$. Lo anterior establece la unicidad de la medida positiva en $\mathcal{F}^*$, extensión de μ en $\mathcal{F}$. También se puede hacer notar que en el caso en que μ es σ-finita la extensión es única. [*Bartle*, sección 9.8, pag. 104]

2.5 Ejemplos

- Un ejemplo de este tipo de extensión, es tomar como conjunto $\mathcal{F}$ al conjunto de todas las uniones finitas de los conjuntos de la forma

$$(a, b], \quad (-\infty, b], \quad (a, \infty], \quad (-\infty, \infty),$$

donde a y b son números reales. Es fácil ver que $\mathcal{F}$ es un álgebra de subconjuntos de R y que la función longitud l nos da una medida en este álgebra $\mathcal{F}$. Si aplicamos el procedimiento de extensión de este capítulo a l y a $\mathcal{F}$, obtenemos el espacio de medida (R, $\mathcal{F}^*$, l^*). La σ-álgebra $\mathcal{F}^*$ es llamada la colección de los conjuntos Lebesgue medibles y la medida l en $\mathcal{F}^*$ es la medida de Lebesgue.

- Otro ejemplo análogo es tomar el mismo álgebra $\mathcal{F}$ mencionado en el párrafo anterior y usar una función g monótona creciente continua de R a R. Para esta función se definen

$$\mu_g((a, b]) = g(b) - g(a)$$

$$\mu_g((-\infty, b]) = g(b) - \lim_{x\to-\infty} g(x)$$

$$\mu_g((a, +\infty)) = \lim_{x\to\infty} g(x) - g(a)$$

$$\mu_g((-\infty, \infty)) = \lim_{x\to\infty} g(x) - \lim_{x\to-\infty} g(x)$$

Para cualquier $F \in \mathcal{F}$, $\mu(F)$ es definida aditivamente. Es fácil hacer notar que μ_g resulta ser una medida σ-finita en el álgebra $\mathcal{F}$. Por lo tanto existe una única extensión de μ_g a una σ-álgebra que contiene los conjuntos de Borel, tal que la medida de todo intervalo es la diferencia de la función valuada en sus extremos. Esta extensión es llamada la medida de Lebesgue – Stieltjes generada por g.[*Bartle*, pag. 108].

CAPÍTULO 3

Extensiones de cargas

Una manera de obtener cargas en un álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto Ω es buscar en aquellas subcolecciones $\mathcal{C}$, contenidas en $\mathcal{F}$ y funciones ν definidas ya en $\mathcal{C}$ y analizar si ν puede ser extendida a $\mathcal{F}$ como una carga. Por ejemplo, si ν es una carga 0-1 valuada en un álgebra $\mathcal{C}$ contenida en $\mathcal{F}$, nosotros podremos extender ν de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$ como una carga 0-1 valuada, al final de este capítulo. El tema principal del capítulo es buscar extensiones semejantes al ejemplo mencionado.

3.1 FUNCIONES REAL VALUADAS Y FUNCIONALES INDUCIDAS

Cualquier función real valuada μ en una clase dada $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto Ω, bajo ciertas condiciones, da lugar a una funcional lineal natural en un espacio vectorial específico. Estudiemos esta correspondencia en esta sección.

3.1.1 Definición. Sea $\mathcal{F}$ una colección de subconjuntos de un conjunto Ω. Sea

$$\mathcal{L}(\mathcal{F}) = \{ f\colon \Omega \to \mathrm{R};\ f = \sum_{i=1}^{n} r_i I_{A_i} \quad \text{para algunos } A_1, A_2,\ldots, A_n \text{ en } \mathcal{F},\ r_1, r_2,\ldots, r_n \text{ números racionales, } 1 \le n \}.$$

Es claro que $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ es un espacio vectorial sobre el campo de los números racionales, con la suma y el producto escalar definidos en la forma usual.

3.1.2 Definición. Sea una $\mathcal{F}$ colección de subconjuntos de un conjunto Ω y μ una función real valuada en $\mathcal{L}(\mathcal{F})$. Sea

$$T\Big(\sum_{i=1}^{n} r_i I_{A_i} \Big) = \sum_{i=1}^{n} r_i\ \mu(A_i),$$

para $A_1, A_2,\ldots, A_n$ en $\mathcal{F}$, $r_1, r_2,\ldots, r_n$ números racionales, $1 \le n$.

Estudiemos la relación entre μ y T. Antes de todo, examinemos la definición de T. Más precisamente, si $\sum_{i=1}^{n} r_i \boldsymbol{I}_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} s_j \boldsymbol{I}_{B_j}$, para algunos $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_m$ en $\mathcal{F}$, $r_1, r_2, \ldots, r_n, s_1, s_2, \ldots s_m$ números racionales, entonces, ¿es cierto que $\sum_{i=1}^{n} r_i \ \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} s_j \mu(B_j)$?

Si T está bien definida, la llamaremos la funcional en $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ inducida por μ. La siguiente proposición responde a la pregunta anterior.

3.1.3 Proposición. *T está bien definida si y sólo si*

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)$$

se mantiene para cualesquiera dos sucesiones finitas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *y* $B_1, B_2, \ldots, B_m$ *de elementos no necesariamente distintos de* $\mathcal{F}$ *que satisfagan*

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{I}_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{I}_{B_j} .$$

Prueba. ($\Leftarrow$) Para mostrar que T está bien definida es necesario establecer que

$$\sum_{i=1}^{k} r_i \ \mu(C_i) = \sum_{j=1}^{t} s_j \mu(D_j)$$

siempre que

$$\sum_{i=1}^{k} r_i \boldsymbol{I}_{C_i} = \sum_{j=1}^{t} s_j \boldsymbol{I}_{D_j}$$

para $C_1, C_2, \ldots, C_k, D_1, D_2, \ldots, D_t$ en $\mathcal{F}$ y $r_1, r_2, \ldots, r_k, s_1, s_2, \ldots s_t$ racionales. Ya que $r_1, r_2, \ldots, r_k, s_1, s_2, \ldots s_t$ son racionales, podemos rescribir la igualdad

$$\sum_{i=1}^{k} r_i \boldsymbol{I}_{C_i} = \sum_{j=1}^{t} s_j \boldsymbol{I}_{D_j} \qquad \text{como} \qquad \sum_{i=1}^{k} m_i \boldsymbol{I}_{C_i} = \sum_{j=1}^{t} n_j \boldsymbol{I}_{D_j}$$

cancelando el común denominador de todos los racionales dados, llegando a que los $m_1, m_2, \ldots, m_k, n_1, n_2, \ldots n_t$ son enteros distintos de cero. De esta última igualdad podemos pasar al lado derecho las funciones $r_i \boldsymbol{I}_{C_i}$ cuyo coeficiente r_i sea negativo, para $1 \leq i \leq k$. Por otra parte podemos pasar al lado izquierdo las funciones $s_j \boldsymbol{I}_{D_j}$ cuyo coeficiente s_j sea negativo, de modo que la última igualdad la podemos expresar como

$$\sum_{i=1}^{p} g_i \, I_{Ei} = \sum_{j=1}^{q} h_j \, I_{Fj}$$

donde los Ei's y Fj's vienen de los $C_1, C_2, \ldots, C_k, D_1, D_2, \ldots, D_t$ y ahora los $g_1, g_2, \ldots, g_p$ y $h_1, h_2, \ldots, h_q$ son enteros positivos. Ya que cada $g_i \cdot I_{Ei}$ es igual a sumar g_i veces la función I_{Ei} así como $h_j \, I_{Fj}$ corresponde a sumar h_j veces la función I_{Fj}, podemos expresar la última igualdad como

$$\sum_{i=1}^{w} I_{Xi} = \sum_{j=1}^{z} I_{Yj}$$

donde cada X_i es alguno de los $E_1, E_2, \ldots, E_p$ y cada Y_j es alguno de los $F_1, F_2, \ldots, F_q$. Entonces por hipótesis se tiene que

$$\sum_{i=1}^{w} \mu(X_i) = \sum_{j=1}^{z} \mu(Y_j)$$

Regresando por los pasos anteriores se obtiene que

$$\sum_{i=1}^{k} r_i \, \mu(C_i) = \sum_{j=1}^{t} s_j \, \mu(D_j).$$

Esto prueba el regreso. La ida es trivial. ■

Por tanto, si T está bien definida en el espacio vectorial $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, entonces es una funcional lineal en $\mathcal{L}(\mathcal{F})$.

Ahora, se desea mostrar que T es un funcional bien definida en $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ cuando $\mathcal{F}$ es un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω y μ es una carga real en $\mathcal{F}$. Más aún, existe una correspondencia uno a uno y sobre entre las funcionales lineales en el espacio vectorial $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ y las cargas real valuadas en $\mathcal{F}$. Para esto necesitamos los siguientes resultados.

(Para conjuntos $C_1, C_2, \ldots, C_n$ y $k>n$, usaremos la convención de que

$\bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} \bigcap_{j=1}^{k} C_{ij} = \varnothing$.)

3.1.4 Lema. *Para cualesquiera dos sucesiones finitas* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *y* $B_1, B_2, \ldots, B_m$ *de conjuntos, los siguientes enunciados son ciertos.*

(a). $\sum_{i=1}^{n} I_{Ai} \leq \sum_{j=1}^{m} I_{Bj}$, *si y sólo si*

$$\bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{ij} \subset \bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m} \bigcap_{j=1}^{k} B_{ij}$$

para cada $1 \le k \le n$.

(b). $\sum_{i=1}^{n} I_{Ai} = \sum_{j=1}^{m} I_{Bj}$, *si y sólo si*

$$\bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} = \bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} \bigcap_{j=1}^{k} B_{i_j}$$

para cada $1 \le k \le \max\{m,n\}$.

Más aún, siempre se puede escribir $\sum_{i=1}^{n} I_{Ai} = \sum_{i=1}^{n} I_{Ci}$, *donde*

$$C_k = \bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}, \quad 1 \le k \le n.$$

Prueba.

Note que $\sum_{i=1}^{n} I_{Ai}(w) \ge k$, donde k es un entero positivo, si y sólo si w pertenece al menos a k elementos de $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, es decir si w pertenece a $\bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$.

(a) $\Rightarrow$) Sea $w \in \bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$ para $1 \le k \le n$, entonces se tiene que

$$\sum_{i=1}^{m} I_{Bi}(w) \ge \sum_{i=1}^{n} I_{Ai}(w) \ge k; \text{ por lo tanto } w \in \bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \bigcap_{j=1}^{k} B_{i_j}.$$

$\Leftarrow$) Ahora, sea $w \in \Omega$. Si $\sum_{i=1}^{n} I_{Ai}(w) = 0$, entonces $\sum_{i=1}^{n} I_{Ai}(w) \le \sum_{i=1}^{m} I_{Bi}(w)$, pues ambas son funciones no negativas. Supongamos que $\sum_{i=1}^{n} I_{Ai}(w) = k$, para $1 \le k \le n$. Entonces se tiene que w pertenece a exactamente k elementos de $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, esto es que:

$$w \in \bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \subset \bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \bigcap_{j=1}^{k} B_{i_j},$$

por lo que

$$\sum_{i=1}^{m} I_{Bi}(w) \ge k.$$

(b) es una consecuencia de (a).

Para probar la última parte de (b), note que $C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n$, pues si $w \in C_k$, para $2 \le k \le n$, $w \in \bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$, e.d., w pertenece a k elementos de $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, por lo que w pertenece a k-1 elementos de $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, esto es $w \in \bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{k-1} \le n} \bigcap_{j=1}^{k-1} A_{i_j} = C_{k-1}$. Por lo tanto

$$\bigcup_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} \bigcap_{j=1}^{k} C_{ij} = \bigcup_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} C_{i_k} = C_k$$

$$= \bigcup_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{ij}, \text{ para } 1 \le k \le n.$$

Aplicando la primera parte de (b), se obtiene que $\sum_{i=1}^{n} I_{A_i} = \sum_{i=1}^{n} I_{C_i}$. ■

Recordemos que si $\mathcal{F}$ es un latiz de subconjuntos de un conjunto Ω, entonces una función real valuada μ en $\mathcal{F}$ es una función real modular en $\mathcal{F}$ si $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A\cup B) + \mu(A\cap B)$ para cada A,B en $\mathcal{F}$.

3.1.5 Proposición. *Sea $\mathcal{F}$ un latiz de subconjuntos de un conjunto Ω y μ una función real modular en $\mathcal{F}$. Entonces para cualquier número finito de conjuntos* $A_1, A_2,\ldots, A_n$ *de $\mathcal{F}$, se tiene*

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{k=1}^{n} \mu\Big(\bigcup_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{ij}\Big).$$

En particular, si es $\mathcal{F}$ un álgebra y μ una carga real en $\mathcal{F}$.

Prueba. Por la definición de función real modular, el resultado es válido para n = 2. Supongamos que el resultado es válido para n = m. Probaremos el resultado para n = m + 1. Sean $A_1, A_2,\ldots, A_{n+1}$ elementos de $\mathcal{F}$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{m+1} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) + \mu(A_{m+1})$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} \mu(A_i) = \sum_{k=1}^{m} \mu\Big(\bigcup_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le m} \bigcap_{j=1}^{k} A_{ij}\Big) + \mu(A_{m+1})$$

(por hipótesis de inducción). Separando los sumandos

$$\sum_{i=1}^{m+1} \mu(A_i) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\Big) + \mu\Big(\bigcup_{1\le i_1<i_2\le m} \bigcap_{j=1}^{2} A_{ij}\Big) + \ldots + \mu\Big(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\Big)$$

$$+ \mu(A_{m+1})$$

Note que por hipótesis, tenemos que

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\Big) + \mu(A_{m+1}) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\Big) + \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m} (A_i\cap A_{m+1})\Big)$$

$$= \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\Big) + \mu\Big(\Big(\bigcup_{1\le i_1\le m} (A_{i_1} \cap A_{m+1})\Big)\Big).$$

Por lo que

$$\sum_{i=1}^{m+1} \mu(A_i) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\Big) + \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m} (A_i\cap A_{m+1})\Big) + \mu\Big(\bigcup_{1\le i_1<i_2\le m} \bigcap_{j=1}^{2} A_{ij}\Big)$$

$$+ \ldots + \mu\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right).$$

Nuevamente observe que por hipótesis de inducción tenemos que

$$\mu\left(\bigcup_{1\le i_1<i_2\le m} \bigcap_{j=1}^{2} A_{i_j}\right) + \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} (A_i \cap A_{m+1})\right) =$$

$$\mu\left(\bigcup_{1\le i_1<i_2\le m+1} \bigcap_{j=1}^{2} A_{i_j}\right) + \mu\left(\bigcup_{1\le i_1<i_2\le m} \bigcap_{j=1}^{2} A_{i_j} \cap A_{m+1}\right)$$

Por lo que podemos escribir

$$\sum_{i=1}^{m+1} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\right) + \mu\left(\bigcup_{1\le i_1<i_2\le m+1} \bigcap_{j=1}^{2} A_{i_j}\right)$$

$$+ \mu\left(\bigcup_{1\le i_1<i_2\le m} \bigcap_{j=1}^{2} A_{i_j} \cap A_{m+1}\right) + \ldots + \mu\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right).$$

Procediendo de manera análoga llegamos hasta obtener

$$\sum_{i=1}^{m+1} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\right) + \mu\left(\bigcup_{1\le i_1<i_2\le m+1} \bigcap_{j=1}^{2} A_{i_j}\right) + \ldots +$$

$$+ \mu\left(\bigcup_{1\le i_1<i_2<\ldots i_{m-1}\le m+1} \bigcap_{j=1}^{m-1} A_{i_j}\right)$$

$$+ \mu\left(\bigcup_{1\le i_1<\ldots<i_{m-1}\le m} \bigcap_{j=1}^{m-1} A_{i_j} \cap A_{m+1}\right) + \mu\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right).$$

Note por último que, por hipótesis de inducción

$$\mu\left(\bigcup_{1\le i_1<\ldots<i_{m-1}\le m} \bigcap_{j=1}^{m-1} A_{i_j} \cap A_{m+1}\right) + \mu\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right) =$$

$$\mu\left(\bigcup_{1\le i_1<\ldots<i_m\le m+1} \bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right) + \mu\left(\bigcap_{i=1}^{m+1} A_i\right).$$

Por lo tanto se obtiene que

$$\sum_{i=1}^{m+1} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\right) + \mu\left(\bigcup_{1\le i_1<i_2\le m+1} \bigcap_{j=1}^{2} A_{i_j}\right) + \ldots +$$

$$+ \mu\left(\bigcup_{1\le i_1<\ldots<i_m\le m+1} \bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}\right) + \mu\left(\bigcap_{i=1}^{m+1} A_i\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m+1} \mu\left(\bigcup_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le m+1} \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right). \blacksquare$$

El siguiente teorema muestra que T está bien definida en algunos casos especiales.

3.1.6 Teorema.

(1). *Sea $\mathcal{F}$ un latiz de subconjuntos de un conjunto Ω con $\varnothing$ en $\mathcal{F}$ y sea μ una función real fuertemente aditiva en $\mathcal{F}$,* i.e. *μ es una función real modular en $\mathcal{F}$ que satisface la condición $\mu(\varnothing) = 0$. Entonces la funcional T inducida en $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ está bien definida.*

(2). *Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω y μ una carga real en $\mathcal{F}$. Entonces la funcional inducida T en está bien definida.*

Prueba.

- (1). En vista de la proposición 3.1.3, es suficiente mostrar que

  $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)$ siempre que $\sum_{i=1}^{n} I_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} I_{B_j}$ para $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $B_1, B_2, \ldots, B_m$ en $\mathcal{F}$. Por la proposición 3.1.5,

  $$\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{k=1}^{n} \mu\left(\bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) \quad \text{y}$$

  $$\sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) = \sum_{k=1}^{m} \mu\left(\bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} \bigcap_{j=1}^{k} B_{i_j}\right).$$

  Como $\sum_{i=1}^{n} I_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} I_{B_j}$, por el lema 3.1.4(b),

  $$\bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} = \bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} \bigcap_{j=1}^{k} B_{i_j}$$

  para cada $1 \le k \le \max\{m,n\}$. Supongamos sin perder generalidad, que $m \le n$. Si $m < k \le n$, es claro que por la convención anterior al Lema 3.1.4 que

  $$\bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} = \bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} \bigcap_{j=1}^{k} B_{i_j} = \varnothing$$

  Ya que μ es una función real fuertemente aditiva en $\mathcal{F}$, se sigue que

  $$\sum_{i=1}^{n} I_{A_i} = \sum_{k=1}^{m} \mu\left(\bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) + \sum_{k=m+1}^{n} \mu(\varnothing)$$

  $$= \sum_{k=1}^{m} \mu\left(\bigcup_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le m} \bigcap_{j=1}^{k} B_{i_j}\right) + 0 = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j).$$

  Esto prueba (1).

- (2) es un caso especial de (1). ■

El siguiente teorema muestra la implicación inversa al anterior teorema.

3.1.7 Teorema. *Para una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto Ω, sea T una funcional lineal definida en el espacio vectorial $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ sobre el campo de los racionales. Para A en $\mathcal{F}$, sea $\mu(A) = T(I_A)$. Entonces los siguientes enunciados son ciertos.*

(1). *Si es $\mathcal{F}$ un latiz en Ω, μ es una función real modular en $\mathcal{F}$.*

(2). *Si es $\mathcal{F}$ un álgebra de subconjuntos de Ω, μ es una carga real en $\mathcal{F}$.*

(3). *Si es $\mathcal{F}$ una clase arbitraria de subconjuntos de Ω, la función μ en satisface la siguiente condición:* $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)$ *siempre que* $\sum_{i=1}^{n} I_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} I_{B_j}$ *para* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *y* $B_1, B_2, \ldots, B_m$ *en $\mathcal{F}$.*

Prueba.

(1). Sean A, B en $\mathcal{F}$. Ya que $I_A + I_B = I_{A\cup B} + I_{A\cap B}$ y T es lineal, tenemos que:

$$\mu(A) + \mu(B) = T(I_A) + T(I_B) = T(I_A + I_B) = T(I_{A\cup B} + I_{A\cap B}) = T(I_{A\cup B}) + T(I_{A\cap B})$$
$$= \mu(A\cup B) + \mu(A\cap B).$$

Por tanto μ es una función real modular en $\mathcal{F}$. Note que si $\varnothing \in \mathcal{F}$, entonces:

$\mu(\varnothing) = T(I_\varnothing) = T(0) = 0.$

Ahora (2) es un caso especial de (1).

(3) se sigue del hecho de que T es una funcional lineal en $\mathcal{L}(\mathcal{F})$. ∎

3.1.8 Corolario. (1). *Sea $\mathcal{F}$ un latiz de subconjuntos de un conjunto Ω tal que $\varnothing \in \mathcal{F}$. Entonces existe una correspondencia uno a uno y sobre entre la colección de todas las funciones reales fuertemente aditivas en $\mathcal{F}$ y las funcionales lineales en $\mathcal{L}(\mathcal{F})$.*

(2). *Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω. Entonces existe una correspondencia uno a uno y sobre entre la colección de todas las cargas reales en $\mathcal{F}$ y las funcionales lineales en $\mathcal{L}(\mathcal{F})$.* ∎

Ahora, veamos la relación existente entre las cargas positivas acotadas μ en un álgebra de subconjuntos $\mathcal{F}$ de un conjunto Ω y las funcionales lineales T inducidas en $\mathcal{L}(\mathcal{F})$.

3.1.9 Teorema. *Sea $\mathcal{F}$ una colección de subconjuntos de un conjunto Ω y μ una función real valuada en $\mathcal{F}$. Sea T definida en $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ como en la definición (3.1.2) Considere los siguientes enunciados:*

(*a*). *μ es positiva.*

(*b*). $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \geq \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)$ *siempre que* $\sum_{i=1}^{n} I_{A_i} \geq \sum_{j=1}^{m} I_{B_j}$ *para* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *y* $B_1, B_2, \ldots, B_m$ *en* $\mathcal{F}$.

(*c*). *T está bien definida y $T(f) \geq 0$ siempre que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ y $f \geq 0$.*

Entonces los siguientes enunciados son ciertos.

(i). (*b*) *y* (*c*) *son equivalentes.*

(ii). (*b*) *implica* (*a*).

(iii). (*a*), (*b*) *y* (*c*) *son equivalentes si $\mathcal{F}$ es un álgebra o anillo en Ω y μ una carga en $\mathcal{F}$.*

Prueba.

(i). Suponga cierto (b). Por la proposición 3.1.3, T está bien definida. Sea f en $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ y $f \geq 0$. Entonces $f = \sum_{i=1}^{k} r_i I_{C_i}$ para algunos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ en $\mathcal{F}$ y $r_1, r_2, \ldots, r_k$ racionales. Escribiendo $r_i = m_i/m$, $i = 1, 2, \ldots, k$, donde $m_1, m_2, \ldots, m_k$ son enteros y m algún entero positivo, observamos que $mf = \sum_{i=1}^{k} m_i I_{C_i}$. Podemos rescribir esta igualdad como $mf = \sum_{i=1}^{p} I_{A_i} - \sum_{i=1}^{q} I_{B_j}$ con los A_i's y B_j's viniendo de $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ y $p, q \geq 1$. Si $f \geq 0$, se tiene que $\sum_{i=1}^{p} I_{A_i} \geq \sum_{i=1}^{q} I_{B_j}$. Por (b), $\sum_{i=1}^{p} \mu(A_i) \geq \sum_{i=1}^{q} \mu(B_j)$. Por lo tanto

$$T(mf) = m\,T(f) = T\Big(\sum_{i=1}^{p} I_{A_i} - \sum_{i=1}^{q} I_{B_j}\Big) = \sum_{i=1}^{p} \mu(A_i) - \sum_{i=1}^{q} \mu(B_j) \geq 0.$$

Esto prueba (c). Si se supone (c) es claro que (b) se cumple.

(ii). Sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces $I_A + I_A \geq I_A$. Por tanto, $\mu(A) + \mu(A) \geq \mu(A)$, lo cual implica que $\mu(A) \geq 0$.

(iii). Demostraremos que (a) implica (b). Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $B_1, B_2, \ldots, B_m$ en $\mathcal{F}$, tales que $\sum_{i=1}^{n} I_{Ai} \geq \sum_{j=1}^{m} I_{Bj}$. Por el lema 3.1.4 se tiene que para cada $1 \leq k \leq m$

$$\bigcup_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{ij} \supset \bigcup_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq m} \bigcap_{j=1}^{k} B_{ij}$$

por ser μ una carga positiva en un anillo $\mathcal{F}$, se tiene que

$$\mu\Big(\bigcup_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{ij}\Big) \geq \mu\Big(\bigcup_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq m} \bigcap_{j=1}^{k} B_{ij}\Big),\ 1 \leq k \leq m$$

entonces usando la proposición 3.1.5 obtenemos

$$\sum_{j=1}^{m} \mu(I_{Bj}) = \sum_{k=1}^{m} \mu\Big(\bigcup_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq m} \bigcap_{j=1}^{k} B_{ij}\Big)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{m} \mu\Big(\bigcup_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{ij}\Big)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \mu\Big(\bigcup_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{ij}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(I_{Ai})$$

La segunda desigualdad se obtiene suponiendo que $m \leq n$ y de que μ es positiva. Si se tiene que $n < m$, entonces se tiene que para $n+1 \leq k \leq m$

$$\varnothing = \bigcup_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{ij} \supset \bigcup_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq m} \bigcap_{j=1}^{k} B_{ij}$$

En este caso se tendría

$$\sum_{j=1}^{m} I_{Bj} = \sum_{k=1}^{m} \mu\Big(\bigcup_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq m} \bigcap_{j=1}^{k} B_{ij}\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mu\Big(\bigcup_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} \bigcap_{j=1}^{k} B_{ij}\Big) + \sum_{k=n+1}^{m} \mu\Big(\bigcup_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} \bigcap_{j=1}^{k} B_{ij}\Big)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mu\Big(\bigcup_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{ij}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mu(I_{Ai})$$

Entonces (a), (b) y (c) son equivalentes cuando $\mathcal{F}$ es un anillo o álgebra en Ω. ∎

3.2 CARGAS PARCIALES REALES Y SUS EXTENSIONES

En esta sección, mostraremos bajo que condiciones naturales se puede extender una función real valuada en una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de un conjunto Ω a cualquier álgebra $\mathcal{F}$ en Ω que contenga a $\mathcal{C}$, como una carga.

3.2.1 Definición. Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de un conjunto Ω. Una función real valuada μ en $\mathcal{C}$ es llamada una *carga real parcial* si $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)$, siempre que $\sum_{i=1}^{n} I_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} I_{B_j}$ para $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $B_1, B_2, \ldots, B_m$ en $\mathcal{C}$, i.e. si la funcional T en $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ está bien definida.

3.2.2 Definición. Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de un conjunto Ω y μ una función real valuada positiva en $\mathcal{C}$. μ es una *carga positiva real parcial* si $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) \leq \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)$, siempre que $\sum_{i=1}^{n} I_{A_i} \leq \sum_{j=1}^{m} I_{B_j}$ para $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $B_1, B_2, \ldots, B_m$ en $\mathcal{C}$.

Obsérvese que si μ es una carga real parcial en $\mathcal{C}$ y $\mu(C) \geq 0$ para cada C en $\mathcal{C}$, no necesariamente se sigue que μ es una carga positiva real parcial en $\mathcal{C}$.

Del corolario 3.1.8 se deriva que si $\mathcal{C}$ es un álgebra o un anillo de conjuntos en Ω, entonces una función real valuada en $\mathcal{C}$ es una carga real parcial en $\mathcal{C}$ si y sólo si es una carga real en $\mathcal{C}$. También tenemos que si $\mathcal{C}$ es un latiz en Ω con $\emptyset \in \mathcal{C}$, entonces una función real valuada en $\mathcal{C}$ es una carga parcial en $\mathcal{C}$ si y sólo si es fuertemente aditiva.

La siguiente proposición demuestra que para el problema de extensión de cargas, la función dada debe ser al menos una carga parcial.

3.2.3 Proposición.

(a). *Sea μ una carga real en un álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto Ω. Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Entonces la restricción $\overline{\mu}$ de μ a $\mathcal{C}$ es una carga real parcial en $\mathcal{C}$.*

(b). *Sea μ una carga positiva en un álgebra $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto Ω. Sea $\mathcal{C}$ subconjunto de $\mathcal{F}$. Entonces la restricción $\overline{\mu}$ de μ a $\mathcal{C}$ es una carga positiva real parcial en $\mathcal{C}$.*

Prueba.

(a) es una consecuencia de la proposición 3.1.3 y del teorema 3.1.6(2).

(b) es una consecuencia del teorema 3.1.9(iii). ∎

Ahora, hemos llegado a la parte de extensión para cargas.

3.2.4 Teorema. *Sea μ una carga real parcial en una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de un conjunto Ω. Sea $A \subset \Omega$ tal que $A \notin \mathcal{C}$. Entonces existe una carga real parcial $\overline{\mu}$ definida en $\mathcal{C} \cup \{A\}$ la cual es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C} \cup \{A\}$.*

Prueba. Sea T la funcional lineal en inducida por μ en $\mathcal{L}(\mathcal{C})$. Si $I_A \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$, se define $\overline{\mu}(A) = T(I_A)$. Si $I_A \notin \mathcal{L}(\mathcal{C})$, sea $\overline{\mu}(A)$ = algún real arbitrario fijo. Para C en $\mathcal{C}$, sea $\overline{\mu}(C) = \mu(C)$. Ahora, afirmamos que $\overline{\mu}$ es una carga real parcial en $\mathcal{C} \cup \{A\}$. Es claro que $\overline{\mu}$ es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C} \cup \{A\}$.

Si $I_A \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$, note que entonces se tiene que $\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \{A\}) = \mathcal{L}(\mathcal{C})$. Por lo tanto el mapeo $T: \mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \{A\}) \to R$ está bien definido, entonces la función $\overline{\mu}$ en $\mathcal{C} \cup \{A\}$ definida como $\overline{\mu}(B) = T(I_B)$ para B en $\mathcal{C} \cup \{A\}$ es una carga real parcial en $\mathcal{C} \cup \{A\}$ por el teorema 3.1.7(3). Ya que $T(I_B) = \mu(B)$ para B en $\mathcal{C}$, $\overline{\mu}$ es la extensión deseada en este caso.

Si $I_A \notin \mathcal{L}(\mathcal{C})$, entonces $\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \{A\}) = \{f + rI_A; f \in \mathcal{L}(\mathcal{C}),\ r \text{ racional}\}$. En $\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \{A\})$, defina una funcional T_1 como sigue. Para $f + rI_A$ en $\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \{A\})$, $T_1(f + rI_A) = T(f) + rd$, donde d es un número real fijo. Afirmamos que T_1 es una funcional bien definida en $\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \{A\})$. Sean $f_1 + r_1 I_A = f_2 + r_2 I_A$ para algunos f_1, f_2 en $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ y r_1, r_2 racionales. Esto implica que $f_1 - f_2 = (r_1 - r_2) I_A$. Ya que $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$, $f_1 - f_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$. Como $I_A \notin \mathcal{L}(\mathcal{C})$, se sigue que $r_1 - r_2 = 0$. Por lo tanto $f_1 = f_2$. De esto se sigue que T_1 está bien definida en $\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \{A\})$. Además, tenemos que T_1 es una funcional lineal en $\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \{A\})$, pues sean $f_1 + r_1 I_A$, $f_2 + r_2 I_A$ en $\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \{A\})$ y s un racional, entonces:

$$\begin{aligned} T_1(s(f_1 + r_1 I_A) + (f_2 + r_2 I_A)) &= T_1((sf_1 + f_2) + (sr_1 + r_2) I_A) = T(sf_1 + f_2) + (sr_1 + r_2)d \\ &= sT(f_1) + T(f_2) + sr_1 d + r_2 d = s(T(f_1) + dr_1) + (T(f_2) + r_2 d) \end{aligned}$$

$$= sT(f_1) + T(f_2) + sr_1d + r_2d = s(T(f_1)+dr_1) + (T(f_2) + r_2d)$$
$$= sT_1(f_1 + r_1 I_A) + T_1(f_2 + r_2 I_A).$$

$\therefore T_1$ es una funcional lineal en $\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \{A\})$. Así que si definimos $\overline{\mu}$ en $\mathcal{C} \cup \{A\}$ como

$$\overline{\mu}(B) = T_1(I_B) \quad \text{para B en } \mathcal{C} \cup \{A\}$$

es una carga real parcial por el teorema 3.1.7(3). Esto completa la prueba. ■

El siguiente es el teorema de extensión deseado.

3.2.5 Teorema. *Sea μ una carga real parcial en una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de un conjunto Ω. Sea $\mathcal{F}$ algún álgebra en Ω que contiene a $\mathcal{C}$. Entonces existe una carga real $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$ la cual es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$.*

Prueba.

Daremos una prueba basada en el teorema 3.2.4 y en inducción transfinita. Sea α_o el mínimo ordinal correspondiente al número cardinal de la colección $\mathcal{F}-\mathcal{C}$, por lo que podemos escribir $\mathcal{F}-\mathcal{C} = \{A_\alpha ; \alpha \text{ ordinal y } \alpha < \alpha_o\}$ Estamos suponiendo que $\alpha_0 \geq \aleph^0$, (de lo contrario se usa inducción finita y el teorema anterior en la prueba). Para cada ordinal $\alpha < \alpha_o$, sea $\mathcal{C}_{\alpha+1} = \mathcal{C}_\alpha \cup \{A_\alpha\}$, donde $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$. Si α es un ordinal límite, sea $\mathcal{C}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{C}_\beta$. Si μ_α es una carga real parcial en $\mathcal{C}_\alpha$, sea $\mu_{\alpha+1}$ una carga real parcial en $\mathcal{C}_{\alpha+1}$ la cual es una extensión de μ_α de $\mathcal{C}_\alpha$ a $\mathcal{C}_{\alpha+1}$, utilizando en teorema 3.2.4. Si α es un ordinal límite, μ_α se define en $\mathcal{C}_\alpha$ como sigue. Si $A \in \mathcal{C}_\alpha$, entonces $A \in \mathcal{C}_\beta$, para algún $\beta < \alpha$, y definimos $\mu_\alpha(A) = \mu_\beta(B)$. Es claro que si $\alpha < \beta < \alpha_o$, entonces $\mu_\alpha = \mu_\beta$ en $\mathcal{C}_\alpha$. Note que $\bigcup_{\alpha<\alpha_o} \mathcal{C}_\alpha = \mathcal{F}$. $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$ es definida como sigue. Sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces A pertenece a algún $\mathcal{C}_\alpha$, para algún $\alpha < \alpha_o$. Sea $\overline{\mu}(A) = \mu_\alpha(A)$. Entonces $\overline{\mu}$ es la extensión deseada de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$. Ahora es claro que $\overline{\mu}$ es una carga real en $\mathcal{F}$, ya que $\mathcal{F}$ es un álgebra. ■

Ahora, llegamos al problema de extender una carga positiva real parcial definida en una colección $\mathcal{C}$ dada de subconjuntos de Ω a cualquier álgebra $\mathcal{F}$ en Ω que contenga a $\mathcal{C}$ como una carga positiva real parcial. Esto no puede ser siempre posible. El éxito de la extensión depende, en la mayoría de los casos, de que $\Omega \in \mathscr{C}$ ó no. Si $\Omega \in \mathscr{C}$, mostraremos que una extensión siempre es posible. Si $\Omega \notin \mathscr{C}$, la carga positiva real en $\mathscr{C}$ puede ser extendida a $\mathscr{F}$ como una carga positiva parcial, pero esta extensión puede tomar el valor ∞ en algunos conjuntos. Consideremos primero el caso en que $\Omega \in \mathscr{C}$.

3.2.6 Definiciones. Sea $\mathscr{C}$ una colección de subconjuntos de un conjunto Ω con $\Omega \in \mathscr{C}$. Sea μ una carga positiva real parcial en $\mathscr{C}$. Para cualquier subconjunto A de Ω, sea

$$\mu_i(A) = \sup \frac{\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) - \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)}{k},$$

donde el supremo es tomado sobre todas las sucesiones finitas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $B_1, B_2, \ldots, B_m$ de $\mathscr{C}$ que satisfagan la condición que

$$kI_A + \sum_{j=1}^{m} I_{B_j} \geq \sum_{i=1}^{n} I_{A_i}$$

para algún entero positivo k.

También, para cualquier subconjunto A de Ω, sea

$$\mu_e(A) = \inf \frac{\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) - \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)}{k},$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las sucesiones finitas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $B_1, B_2, \ldots, B_m$ de $\mathscr{C}$ que satisfagan la condición que

$$\sum_{i=1}^{n} I_{A_i} \geq kI_A + \sum_{j=1}^{m} I_{B_j}$$

para algún entero positivo k.

El supremo definido anteriormente siempre tiene sentido. Uno puede tomar cualquier conjunto C en $\mathscr{C}$ y notar que $I_A + I_C \geq I_C$. El ínfimo definido arriba tiene sentido también ya que como $\Omega \in \mathscr{C}$, se tiene que $I_\Omega + I_\Omega \geq I_\Omega + I_C$.

La siguiente proposición pone a μ_i y μ_e en perspectiva con relación al problema de extensión.

3.2.7 Proposición. *Sea $\mathscr{C}$ una colección de subconjuntos de un conjunto Ω con $\Omega \in \mathscr{C}$. Sea μ una carga positiva real parcial en $\mathscr{C}$. Sea A cualquier subconjunto de Ω. Si $\overline{\mu}$ es una carga positiva real parcial en $\mathscr{C} \cup \{A\}$ la cual es una extensión de μ, entonces*

$$\mu_i(A) \leq \bar{\mu}(A) \leq \mu_e(A)$$

Prueba.

(i) Sean $A_1, A_2,\ldots, A_n$ y $B_1, B_2, \ldots, B_m$ elementos de $\mathcal{C}$ que satisfagan la condición que $kI_A + \sum_{j=1}^{m} I_{Bj} \geq \sum_{i=1}^{n} I_{Ai}$ para algún entero positivo k. Ya que $\bar{\mu}$ es una carga positiva real parcial en $\mathcal{C} \cup\{A\}$, tenemos que $k\bar{\mu}(A) + \sum_{j=1}^{m} \bar{\mu}(B_j) \geq \sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}(A_j)$.

Ya que $\bar{\mu}$ es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C} \cup\{A\}$, tenemos

$$\bar{\mu}(A) \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) - \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)}{k},$$

por lo tanto, obtenemos la desigualdad $\bar{\mu}(A) \geq \mu_i(A)$ tomando el supremo sobre todas las sucesiones con la propiedad especificada anteriormente.

• (ii) Sean $A_1, A_2,\ldots, A_n$ y $B_1, B_2, \ldots, B_m$ elementos de $\mathcal{C}$ que satisfagan la condición que $\sum_{i=1}^{n} I_{Ai} \geq kI_A + \sum_{j=1}^{m} I_{Bj}$ para algún entero positivo k. Ya que $\bar{\mu}$ es una carga positiva real parcial en $\mathcal{C} \cup\{A\}$, tenemos que $\sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}(A_i) \geq k\bar{\mu}(A) + \sum_{j=1}^{m} \bar{\mu}(B_j)$. Ya que $\bar{\mu}$ es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C} \cup\{A\}$, tenemos que

$$\bar{\mu}(A) \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) - \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)}{k},$$

por tanto, tomando el ínfimo sobre todas las sucesiones finitas con la propiedad mencionada arriba, obtenemos la desigualdad $\bar{\mu}(A) \leq \mu_e(A)$. ■

De la proposición anterior es claro que cuando buscamos una extensión $\bar{\mu}$ de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C} \cup \{A\}$, la elección del número $\bar{\mu}(A)$ deberá confirmar las desigualdades establecidas anteriormente. La siguiente proposición da algunas propiedades de las funciones μ_i y μ_e.

3.2.8 Proposición. *Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de un conjunto Ω, tal que Ω sea elemento de $\mathcal{C}$. Sea μ una carga positiva real parcial en $\mathcal{C}$. Sean μ_i y μ_e las funciones definidas en el conjunto potencia* P(Ω), *de* Ω, *como se indicaron en* 3.2.6. *Entonces los siguientes enunciados son válidos.*

(i). $0 \leq \mu_i(A) \leq \mu_e(A) \leq \mu(\Omega)$ *para todo* $A \subset \Omega$.

(ii). *Si* $A \in \mathcal{C}$ ó $I_A \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$, *entonces* $\mu_i(A) = \mu_e(A) = T(I_A)$, *donde* T *es la funcional lineal definida en* $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ *inducida por* μ.

(iii). *Si* $A, B \subset \Omega$ *y* $A \cap B = \varnothing$, *entonces*

$$\mu_i(A) + \mu_i(B) \leq \mu_i(A \cup B) \leq \mu_i(A) + \mu_e(B) \leq \mu_e(A \cup B) \leq \mu_e(A) + \mu_e(B).$$

(iv). *Si* $A \in \mathcal{C}$, $B \subset \Omega$ y $A \cap B = \varnothing$, *entonces*

$$\mu_i(A \cup B) = \mu(A) + \mu_i(B) \quad \text{y} \quad \mu_e(A \cup B) = \mu(A) + \mu_e(B).$$

(v). *Si* $A, B \subset \Omega$, $A \cap B = \varnothing$ y $A \cup B \in \mathcal{C}$, *entonces*

$$\mu(A \cup B) = \mu_i(A) + \mu_e(B) = \mu_e(A) + \mu_i(B).$$

En particular, para cualquier $A \subset \Omega$, $\mu_i(A) + \mu_e(A^c) = \mu_e(A) + \mu_i(A^c) = \mu(\Omega)$.

Prueba.

(i). Para cualquier B en $\mathcal{C}$, $I_A + I_B \geq I_B$. Por lo tanto,

$$\mu_i(A) \geq \frac{\mu(B) - \mu(B)}{1} = 0$$

Si se tiene que $C \in \mathcal{C}$, ya que $\Omega \in \mathcal{C}$, entonces $I_\Omega + I_\Omega \geq I_\Omega + I_C$, por tanto

$$\mu_e(A) \leq \frac{\mu(\Omega) + \mu(\Omega) - \mu(\Omega)}{1} = \mu(\Omega).$$

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$; $B_1, B_2, \ldots, B_m$; $C_1, C_2, \ldots, C_p$; $D_1, D_2, \ldots, D_q$ elementos de $\mathcal{C}$ tales que $kI_A + \sum_{j=1}^{m} I_{Bj} \geq \sum_{j=1}^{n} I_{Aj}$, para algún entero positivo k, y $\sum_{j=1}^{p} I_{Cj} \geq \sum_{j=1}^{q} I_{Dj} + sI_A$ para algún entero positivo s. De estas desigualdades, se sigue que

$$k\left[\sum_{j=1}^{p} I_{Cj} - \sum_{j=1}^{q} I_{Dj}\right] \geq s\left[\sum_{j=1}^{n} I_{Aj} - \sum_{j=1}^{m} I_{Bj}\right]$$

Así que,

$$k\sum_{j=1}^{p} I_{Cj} + s\sum_{j=1}^{m} I_{Bj} \geq k\sum_{j=1}^{q} I_{Dj} + s\sum_{j=1}^{n} I_{Aj}$$

Ya que μ es una carga positiva real parcial en $\mathcal{C}$, obtenemos

$$k\sum_{j=1}^{p} \mu(C_j) + s\sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) \geq k\sum_{j=1}^{q} \mu(D_j) + s\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

Reacomodando los términos, obtenemos

$$\frac{\sum_{j=1}^{p}\mu(C_j)-\sum_{j=1}^{q}\mu(D_j)}{s}\geq\frac{\sum_{j=1}^{n}\mu(A_j)-\sum_{j=1}^{m}\mu(B_j)}{k}.$$

Lo anterior implica que $\mu_i(A)\leq\ \mu_e(A)$.

(ii). Si $I_A\in\mathcal{L}(\mathcal{C})$, podemos escribir $I_A=\sum_{i=1}^{m} r_iI_{Ci}$ para algunos $C_1, C_2,\ldots, C_m$ en $\mathcal{C}$ y y $r_1, r_2,\ldots, r_m$ racionales. Escribiendo $r_i = n_i/N$, para $i = 1, 2,\ldots,m$, donde $n_1, n_2,\ldots, n_m$ son enteros y N es un entero positivo, podemos rescribir lo anterior como

$$NI_A=\sum_{i=1}^{m} n_iI_{Ci}=\sum_{j=1}^{p} I_{Aj}-\sum_{j=1}^{q} I_{Bj}$$

con $p, q\geq 1$ y $A_1, A_2,\ldots, A_p, B_1, B_2,\ldots, B_q$ viniendo de $\{C_1, C_2,\ldots, C_m\}$. La representación anterior nos indica que

$$\mu_i(A)\geq\frac{\sum_{j=1}^{p}\mu(A_j)-\sum_{j=1}^{q}\mu(B_j)}{N}\quad y\quad \mu_e(A)\leq\frac{\sum_{j=1}^{p}\mu(A_j)-\sum_{j=1}^{q}\mu(B_j)}{N}$$

Entonces $\mu_i(A)=\mu_e(A)=T(I_A)$.

(iii). (a) Sean $A_1, A_2,\ldots, A_n$; $B_1, B_2, \ldots, B_m$; $C_1, C_2,\ldots, C_p$; $D_1, D_2,\ldots, D_q$ elementos de $\mathcal{C}$ tales que $kI_A+\sum_{j=1}^{m} I_{Bj}\geq\sum_{j=1}^{n} I_{Aj}$, para algún entero positivo k, y $sI_B+\sum_{j=1}^{q} I_{Dj}\geq\sum_{j=1}^{p} I_{Cj}$, para algún entero positivo s. Entonces

$$ks(I_A+I_B)+s\sum_{j=1}^{m} I_{Bj}+k\sum_{j=1}^{q} I_{Dj}\geq s\sum_{j=1}^{n} I_{Aj}+k\sum_{j=1}^{p} I_C.$$

Como $A\cap B=\varnothing$, se tiene que $I_A+I_B=I_{A\cup B}$, así que

$$\mu_i(A\cup B)\geq[\ s\sum_{j=1}^{n}\ \mu(A_j)+k\sum_{j=1}^{p}\ \mu(C_j)-s\sum_{j=1}^{m}\ \mu(B_j)-k\sum_{j=1}^{q}\ \mu(D_j)\ ]\ /\ ks.$$

La desigualdad anterior la podemos escribir como

$$\mu_i(A\cup B)\geq\frac{\sum_{j=1}^{n}\mu(A_j)-\sum_{j=1}^{m}\mu(B_j)}{k}+\frac{\sum_{j=1}^{p}\mu(C_j)-\sum_{j=1}^{q}\mu(D_j)}{s}.$$

De esto, se sigue que $\mu_i(A\cup B)\geq\mu_i(A)+\mu_i(B)$.

(b) Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n; B_1, B_2, \ldots, B_m; C_1, C_2, \ldots, C_p; D_1, D_2, \ldots, D_q$ elementos de $\mathscr{C}$ tales que $k(I_{A\cup B}) + \sum_{j=1}^{m} I_{Bj} \geq \sum_{j=1}^{n} I_{Aj}$, para algún entero positivo k, y $\sum_{j=1}^{q} I_{Dj} \geq sI_B + \sum_{j=1}^{p} I_{Cj}$, para algún entero positivo s. Ya que $I_A + I_B = I_{A\cup B}$,

$$\frac{\sum_{j=1}^{q} I_{Dj} - \sum_{j=1}^{p} I_{Cj}}{s} \geq I_B \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} I_{Aj} - \sum_{j=1}^{m} I_{Bj}}{k} - I_A.$$

Multiplicando en ambos lados por ks, se obtiene

$$k\sum_{j=1}^{q} I_{Dj} + s\sum_{j=1}^{m} I_{Bj} + ks\, I_A \geq s\sum_{j=1}^{n} I_{Aj} + k\sum_{j=1}^{p} I_{C}.$$

Por lo tanto,

$$\mu_i(A) \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) - \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)}{k} - \frac{\sum_{j=1}^{q} \mu(D_j) - \sum_{j=1}^{p} \mu(C_j)}{s}.$$

Tomando supremo sobre $A_1, A_2, \ldots, A_n; B_1, B_2, \ldots, B_m$; k, primero y entonces el supremo sobre $C_1, C_2, \ldots, C_p; D_1, D_2, \ldots, D_q$; s, obtenemos que $\mu_i(A) \geq \mu_i(A\cup B) - \mu_e(B)$. $\therefore$ se sigue que $\mu_i(A) + \mu_e(B) \geq \mu_i(A\cup B)$.

(c) Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n; B_1, B_2, \ldots, B_m; C_1, C_2, \ldots, C_p; D_1, D_2, \ldots, D_q$ elementos de $\mathscr{C}$ tales que $\sum_{j=1}^{n} I_{Aj} \geq k(I_{A\cup B}) + \sum_{j=1}^{m} I_{Bj}$, para algún entero positivo k, y $sI_A + \sum_{j=1}^{p} I_{Cj} \geq \sum_{j=1}^{q} I_{Dj}$, para algún entero positivo s. De aquí que

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} I_{Aj} - \sum_{j=1}^{m} I_{Bj}}{k} - I_B \geq I_A \geq \frac{\sum_{j=1}^{q} I_{Dj} - \sum_{j=1}^{p} I_{Cj}}{s}.$$

Multiplicando en ambos lados por ks, se obtiene

$$s\sum_{j=1}^{n} I_{Aj} + k\sum_{j=1}^{p} I_{C} \geq k\sum_{j=1}^{q} I_{Dj} + s\sum_{j=1}^{m} I_{Bj} + ks\, I_B.$$

Por lo tanto,

$$\mu_e(B) \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) - \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)}{k} - \frac{\sum_{j=1}^{q} \mu(D_j) - \sum_{j=1}^{p} \mu(C_j)}{s}.$$

Tomando el ínfimo sobre $A_1, A_2, \ldots, A_n; B_1, B_2, \ldots, B_m; k$, primero y entonces el ínfimo sobre $C_1, C_2, \ldots, C_p; D_1, D_2, \ldots, D_q; s$, obtenemos que

$\mu_e(B) \leq \mu_e(A \cup B) - \mu_i(A)$. $\therefore$ Se sigue que $\mu_i(A) + \mu_e(B) \leq \mu_e(A \cup B)$.

(d) Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n; B_1, B_2, \ldots, B_m; C_1, C_2, \ldots, C_p; D_1, D_2, \ldots, D_q$ elementos de $\mathscr{C}$ tales que $\sum_{j=1}^{n} I_{Aj} \geq kI_A + \sum_{j=1}^{m} I_{Bj}$, para algún entero positivo k, y $\sum_{j=1}^{p} I_{Cj} \geq sI_B + \sum_{j=1}^{q} I_{Dj}$, para algún entero positivo s. Entonces

$$s\sum_{j=1}^{n} I_{Aj} + k\sum_{j=1}^{p} I_C \geq ks(I_A + I_B) + s\sum_{j=1}^{m} I_{Bj} + k\sum_{j=1}^{q} I_{Dj}$$

Como $A \cap B = \varnothing$, se tiene que $I_A + I_B = I_{A\cup B}$, así que

$$\mu_e(A \cup B) \leq [\, s\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) + k\sum_{j=1}^{p} \mu(C_j) - s\sum_{j=1}^{m} \mu(B_j) - k\sum_{j=1}^{q} \mu(D_j)\,] / ks.$$

La desigualdad anterior la podemos escribir como

$$\mu_e(A \cup B) \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) - \sum_{j=1}^{m} \mu(B_j)}{k} + \frac{\sum_{j=1}^{p} \mu(C_j) - \sum_{j=1}^{q} \mu(D_j)}{s}.$$

Tomando ínfimos en ambos sumandos, se sigue que $\mu_e(A \cup B) \leq \mu_e(A) + \mu_e(B)$.

(iv). Sean $A \in \mathscr{C}$, $B \subset \Omega$ y $A \cap B = \varnothing$, entonces por el punto (iii) anterior

$\mu_i(A) + \mu_i(B) \leq \mu_i(A \cup B) \leq \mu_i(B) + \mu_e(A)$

ya que $\mu_i(A) = \mu_e(A) = \mu(A)$, entonces

$\mu(A) + \mu_i(B) \leq \mu_i(A \cup B) \leq \mu_i(B) + \mu(A)$, por tanto $\mu(A) + \mu_i(B) = \mu_i(A \cup B)$.

También, por (iii) se tiene que

$\mu_i(A) + \mu_e(B) \leq \mu_e(A \cup B) \leq \mu_e(A) + \mu_e(B)$, entonces

$\mu(A) + \mu_e(B) \leq \mu_e(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu_e(B)$, por tanto $\mu(A) + \mu_e(B) = \mu_e(A \cup B)$.

(v). Por el punto (iii) se tienen las dos siguientes desigualdades

$\mu_i(A \cup B) \leq \mu_i(A) + \mu_e(B) \leq \mu_e(A \cup B)$ y $\mu_i(A \cup B) \leq \mu_i(B) + \mu_e(A) \leq \mu_e(A \cup B)$

Ya que $A \cup B \in \mathscr{C}$. entonces $\mu_e(A \cup B) = \mu_i(A \cup B) = \mu(A \cup B)$, así que

$\mu(A \cup B) = \mu_i(A) + \mu_e(B)$ y $\mu(A \cup B) = \mu_i(B) + \mu_e(A)$.

La segunda parte se sigue del hecho de que $\Omega \in \mathscr{C}$. ■

El siguiente teorema nos presenta el camino para la extensión de cargas positivas reales parciales.

3.2.9 Teorema. *Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de un conjunto Ω con $\Omega \in \mathcal{C}$. Sea μ una carga positiva real parcial en $\mathcal{C}$. Sea $A \subset \Omega$ tal que $A \notin \mathcal{C}$. Entonces existe una carga positiva real parcial en $\mathcal{C} \cup \{A\}$ la cual es una extensión de μ.*

Prueba. Sea T la funcional lineal en $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ inducida por μ.

Caso (i). $I_A \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$. Entonces la función $\overline{\mu}$ en $\mathcal{C} \cup \{A\}$ definida como $\overline{\mu}(B) = T(I_B)$, para B en $\mathcal{C} \cup \{A\}$, es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C} \cup \{A\}$, pues si $B \in \mathcal{C}$ tenemos que $\overline{\mu}(B) = T(I_B) = \mu(B)$. Como $I_A \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$, note que entonces se tiene que $\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \{A\}) = \mathcal{L}(\mathcal{C})$. Por lo tanto el mapeo $T_1: \mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \{A\}) \to R$ inducido por $\overline{\mu}$ es el mismo mapeo $T: \mathcal{L}(\mathcal{C}) \to R$ inducido por μ. Por tanto T_1 está bien definido y $T_1(f) \geq 0$ si $f \geq 0$ con $f \in \mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \{A\})$. Por tanto $\overline{\mu}$ en $\mathcal{C} \cup \{A\}$ definida como $\overline{\mu}(B) = T(I_B)$ para B en $\mathcal{C} \cup \{A\}$ es una carga positiva real parcial en $\mathcal{C} \cup \{A\}$ de acuerdo al teorema 3.1.9.

Caso (ii). $I_A \notin \mathcal{L}(\mathcal{C})$. Observe que entonces $\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \{A\}) = \{f + rI_A; f \in \mathcal{L}(\mathcal{C}), r$ un racional$\}$. Escojamos un número real fijo d que satisfaga $0 \leq \mu_i(A) \leq d \leq \mu_e(A)$ y definamos $\overline{\mu}$ en $\mathcal{C} \cup \{A\}$ como $\overline{\mu}(B) = \mu(B)$ si $B \in \mathcal{C}$ y $\overline{\mu}(A) = d$. Entonces $\overline{\mu}$ es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{C} \cup \{A\}$. Sea T_1 la funcional en $\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \{A\})$ inducida por $\overline{\mu}$, entonces afirmamos que el mapeo T_1 está bien definido. Note que si $f + rI_A$ pertenece al conjunto $\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \{A\})$, entonces $f = \sum_{i=1}^{k} r_i I_{C_i}$ para algunos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ en $\mathcal{C}$ y $r_1, r_2, \ldots, r_k$ racionales. Así que:

$$T_1(f + rI_A) = T_1\left(\sum_{i=1}^{k} r_i I_{C_i} + rI_A\right) = \sum_{i=1}^{k} r_i \overline{\mu}(C_i) + r\overline{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{k} r_i \mu(C_i) + rd = T(f) + rd.$$

Sean $f_1 + r_1 I_A = f_2 + r_2 I_A$ para algunos f_1, f_2 en $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ y r_1, r_2 racionales. Esto implica que $f_1 - f_2 = (r_1 - r_2) I_A$. Ya que f_1, f_2 pertenecen a $\mathcal{L}(\mathcal{C})$, $f_1 - f_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{C})$. Ya que $I_A \notin \mathcal{L}(\mathcal{C})$, se sigue que $r_1 - r_2 = 0$. Por lo tanto $f_1 = f_2$. De esto se sigue que T_1 está bien definida en $\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \{A\})$ pues

$$T_1(f_1 + r_1 I_A) = T(f_1) + r_1 d = T(f_2) + r_2 d = T_1(f_2 + r_2 I_A).$$

Veamos ahora que $T_1(f + rI_A) \geq 0$, para toda $f + rI_A \in \mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \{A\})$ que satisfaga la condición $f + rI_A \geq 0$.

(a) $r = 0$. En este caso $T_1(f + rI_A) = T_1(f) = T(f) \geq 0$ que se sigue por el teorema 3.1.9(i) ya que μ es una carga positiva real parcial en $\mathcal{L}(\mathcal{C})$.

(b) $r > 0$. Ya que $f + rI_A = \sum_{i=1}^{k} r_i I_{Ci} + rI_A$, para algunos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ en $\mathcal{C}$ y $r_1, r_2, \ldots, r_k$ racionales, entonces se tiene que $\sum_{i=1}^{k} r_i I_{Ci} + rI_A \geq 0$. Multiplicando por K donde K es un entero positivo tal que $rK=m$ y $r_iK=m_i$, con m y los m_i's enteros (m es positivo) podemos escribir lo anterior como $\sum_{i=1}^{k} m_i I_{Ci} + mI_A \geq 0$. Esta desigualdad la podemos escribir como $\sum_{i=1}^{p} I_{Ai} - \sum_{i=1}^{q} I_{Bi} + mI_A \geq 0$, con los A_i's y B_j's viniendo de $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$; $p, q \geq 1$ y suponiendo que $\sum_{i=1}^{k} m_i I_{Ci} = \sum_{i=1}^{p} I_{Ai} - \sum_{i=1}^{q} I_{Bi}$. Por lo que $mI_A + \sum_{i=1}^{p} I_{Ai} \geq \sum_{i=1}^{q} I_{Bi}$.

Entonces notemos que $d \geq \mu_i(A) \geq \dfrac{\sum_{j=1}^{q} \mu(B_j) - \sum_{j=1}^{p} \mu(A_j)}{m}$, de aquí que tengamos

$$md \geq -\left[\sum_{i=1}^{p} \mu(A_i) - \sum_{i=1}^{q} \mu(B_i)\right] = -\sum_{i=1}^{k} m_i \mu(C_i),$$

por lo que si dividimos entre K obtenemos que

$rd \geq -\sum_{i=1}^{k} r_i \mu(C_i) = -T(f)$. Entonces $T(f) + rd = T_1(f + rI_A) \geq 0$.

(c) $r < 0$. Ya que $f + rI_A = \sum_{i=1}^{k} r_i I_{Ci} + rI_A$, para algunos $C_1, C_2, \ldots, C_k$ en $\mathcal{C}$ y $r_1, r_2, \ldots, r_k$ racionales, entonces se tiene que $\sum_{i=1}^{k} r_i I_{Ci} + rI_A \geq 0$. Multiplicando por K donde K es un entero positivo tal que $rK=m$ y $r_iK=m_i$, con m y los m_i's enteros (m es negativo) podemos escribir lo anterior como $\sum_{i=1}^{k} m_i I_{Ci} + mI_A \geq 0$. Esta desigualdad la podemos escribir como

$\sum_{i=1}^{p} I_{Ai} - \sum_{i=1}^{q} I_{Bi} + mI_A \geq 0$, con los A_i's y B_j's viniendo de $\{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$; p, q $\geq$ 1, y

suponiendo que $\sum_{i=1}^{k} m_i I_{Ci} = \sum_{i=1}^{p} I_{Ai} - \sum_{i=1}^{q} I_{Bi}$. Por lo que $\sum_{i=1}^{p} I_{Ai} \geq -mI_A + \sum_{i=1}^{q} I_{Bi}$.

Entonces notemos que $d \leq \mu_c(A) \leq \dfrac{\sum_{j=1}^{p} \mu(A_j) - \sum_{j=1}^{q} \mu(B_j)}{-m}$, de aquí que tengamos:

$$md \geq -\left[\sum_{i=1}^{p} \mu(A_i) - \sum_{i=1}^{q} \mu(B_i)\right] = -\sum_{i=1}^{k} m_i \mu(C_i),$$

por lo que si dividimos entre K obtenemos que

$rd \geq -\sum_{i=1}^{k} r_i \mu(C_i) = -T(f)$. Entonces $T(f) + rd = T_1(f + rI_A) \geq 0$.

En los tres casos anteriores hemos mostrado que $T_1(f + rI_A) \geq 0$, para toda $f + rI_A$ en el espacio $\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \{A\})$, que satisfaga $f + rI_A \geq 0$. Por lo tanto, usando el teorema 3.1.9 se sigue que $\bar{\mu}$ es una carga positiva real parcial en $\mathcal{C} \cup \{A\}$. ■

3.2.10 Teorema. *Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de un conjunto Ω con $\Omega \in \mathcal{C}$. Sea μ una carga positiva real parcial en $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{F}$ un álgebra en Ω que contiene a $\mathcal{C}$. Entonces existe una carga positiva $\bar{\mu}$ en $\mathcal{F}$ la cual es una extensión de μ.*

Prueba. Se obtiene la prueba basándonos en inducción transfinita y con el teorema anterior. El argumento es similar al empleado en el teorema 3.2.5 extendiendo μ a $\bar{\mu}$ en $\mathcal{F}$ no sólo como carga positiva real parcial, sino como carga positiva real pues $\mathcal{F}$ es álgebra. ■

3.3 PROCEDIMIENTO DE EXTENSION DE ŁOS Y MARCZEWSKI

El procedimiento de extensión descrito en la sección previa consiste en extender la función dada en una colección de conjuntos dada a la colección que se obtiene de la unión de la colección dada con únicamente un conjunto unitario. En esta sección, se presenta el procedimiento de Łos y Marczewski para el problema de extensión el cual puede ser descrito como sigue. Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω y un $\mathcal{C}$ subálgebra de $\mathcal{F}$, es decir, un álgebra contenido en $\mathcal{F}$. Sea μ una carga positiva acotada en $\mathcal{C}$. Sea $A \in \mathcal{F}$ tal que $A \notin \mathcal{C}$. Denote a $\mathcal{F}(\mathcal{C}. A)$ como el álgebra más pequeño en Ω que contiene a $\mathcal{C}$ y a $\{A\}$. El procedimiento de Łos y Marczewski consiste en extender a μ de C a $\mathcal{F}(\mathcal{C}. A)$ como una carga positiva en un solo paso. Repitiendo este procedimiento, se puede extender μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$, a como una carga positiva.

Primero, observemos que las expresiones de μ_i y μ_e introducidas en la sección anterior se simplifican si el dominio de μ es un álgebra de conjuntos, como se prueba en la siguiente proposición.

3.3.1 Proposición. *Sea $\mathcal{C}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω. Sea μ una carga positiva acotada en $\mathcal{C}$. Sean μ_i y μ_e las funciones definidas en el conjunto potencia* $P(\Omega)$, *de* Ω, *como se definieron anteriormente. Entonces para cualquier subconjunto* A *de* Ω, *tenemos las siguientes igualdades*:

(i). $\mu_i(A) = \operatorname{Sup}\{\mu(B);\, B \subset A,\, B \in \mathcal{C}\}$

(ii). $\mu_e(A) = \operatorname{Inf}\{\mu(C);\, A \subset C,\, C \in \mathcal{C}\}$.

Prueba.

(i). Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $B_1, B_2, \ldots, B_m$ elementos de $\mathcal{C}$ que satisfagan

$$k_0 I_A + \sum_{i=1}^{m} I_{Bi} \geq \sum_{i=1}^{n} I_{Ai}$$

para algún entero positivo k_0. Mostraremos que existe un conjunto F_1 en $\mathcal{C}$ tal que $F_1 \subset A$ y

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \sum_{i=1}^{m} \mu(B_i)}{k_0} \leq \mu(F_1).$$

Ya que $\varnothing \in \mathcal{C}$. podemos asumir que $m = n$. Definamos para cada $1 \leq k \leq n$,

$$C_k = \bigcup_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \quad \text{y} \quad D_k = \bigcup_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} \bigcap_{j=1}^{k} B_{i_j}.$$

Por el lema 3.1.4 se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} I_{A_i} = \sum_{k=1}^{n} I_{C_k} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} I_{B_i} = \sum_{k=1}^{n} I_{D_k}.$$

Entonces podemos cambiar la desigualdad original como

$$k_0 I_A + \sum_{i=1}^{n} I_{D_i} \ge \sum_{i=1}^{n} I_{C_i}.$$

Esto nos lleva a

$$k_0 I_A + \sum_{i=1}^{n} I_{D_i - C_i} + \sum_{i=1}^{n} I_{D_i \cap C_i} \ge \sum_{i=1}^{n} I_{C_i - D_i} + \sum_{i=1}^{n} I_{C_i \cap D_i}.$$

Por lo tanto podemos escribir

$$k_0 I_A + \sum_{i=1}^{n} I_{D_i - C_i} \ge \sum_{i=1}^{n} I_{C_i - D_i}.$$

Ya que $C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n$ y $D_1 \supset D_2 \supset \ldots \supset D_n$, se tiene que $(D_i - C_i) \cap (C_j - D_j) = \varnothing$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n$; y de esta manera obtenemos esta nueva desigualdad:

$$k_0 I_A \ge \sum_{i=1}^{n} I_{C_i - D_i} = \sum_{i=1}^{n} I_{E_i}, \text{ si } E_i = C_i - D_i, \text{ para } 1 \le i \le n.$$

Sea ahora, para cada $1 \le k \le n$,

$$F_k = \bigcup_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} \bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j}.$$

Note que por el Lema 3.1.4, $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n$ y $\sum_{i=1}^{n} I_{E_i} = \sum_{i=1}^{n} I_{F_i}$. Sea k_1 el mayor entero tal que $F_{k_1} \ne \varnothing$. (Si $F_1 = \varnothing$, entonces es obvio que $F_1 \subset A$ y se tendría regresando los pasos que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \sum_{i=1}^{m} \mu(B_i)}{k_0} \le 0 = \mu(F_1).)$$

Note también que $k_0 \ge k_1$, ya que tenemos

$$k_0 I_A \ge \sum_{i=1}^{n} I_{F_i} = \sum_{i=1}^{k_1} I_{F_i},$$

así que si $k_0 < k_1$ se tendría que si $w \in F_{k_1}$, $k_0 I_A(w) \le k_0 < k_1 = \sum_{i=1}^{k_1} I_{F_i}(w)$.

Por tanto se tiene que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i) - \sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)}{k_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\mu(C_i) - \sum_{i=1}^{n}\mu(D_i)}{k_0}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\mu(C_i - D_i) - \sum_{i=1}^{n}\mu(D_i - C_i)}{k_0}$$

$$\leq \frac{\sum_{i=1}^{n}\mu(C_i - D_i)}{k_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i)}{k_0}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}\mu(F_i)}{k_0} = \frac{\sum_{i=1}^{k_1}\mu(F_i)}{k_0}$$

$$\leq \frac{\sum_{i=1}^{k_1}\mu(F_i)}{k_1} \leq \mu(F_1).$$

Como $k_0 I_A \geq \sum_{i=1}^{n} I_{F_i}$, se sigue del lema 3.1.4 que $A \supset \bigcup_{i=1}^{n} F_i = F_1$. Así que $A \supset F_1$.

Por lo tanto

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i) - \sum_{i=1}^{n}\mu(B_i)}{k_0} \leq \mu(F_1) \leq \operatorname{Sup}\{\mu(B);\, B \subset A,\, B \in \mathscr{C}\}.$$

Entonces $\mu_i(A) \leq \operatorname{Sup}\{\mu(B);\, B \subset A,\, B \in \mathscr{C}\}$.

Por otra parte, para B en $\mathscr{C}$ con $B \subset A$, observe que $I_A + I_\varnothing \geq I_B$. Así que

$$\mu_i(A) \geq [\mu(B) - \mu(\varnothing)]/1 = \mu(B).$$

Por lo tanto,

$$\mu_i(A) \geq \operatorname{Sup}\{\mu(B);\, B \subset A,\, B \in \mathscr{C}\}.$$

Esto prueba la igualdad deseada.

(ii). Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ y $B_1, B_2, \ldots, B_m$ elementos de $\mathscr{C}$ que satisfagan

$$\sum_{i=1}^{n} I_{A_i} \geq k_0 I_A + \sum_{i=1}^{m} I_{B_i}$$

para algún entero positivo k_0. Mostraremos que existe un conjunto F_{k_1} en $\mathscr{C}$ tal que $A \subset F_{k_1}$ y

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i) - \sum_{i=1}^{m}\mu(B_i)}{k_0} \geq \mu(F_{k_1}).$$

Ya que $\varnothing \in \mathscr{C}$, podemos asumir que $m = n$. Definamos para cada $1 \leq k \leq n$,

$$C_k = \bigcup_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \ \text{ y } \ D_k = \bigcup_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} \bigcap_{j=1}^{k} B_{i_j}.$$

Por el lema 3.1.4 se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} I_{A_i} = \sum_{k=1}^{n} I_{C_k} \ \text{ y } \ \sum_{i=1}^{n} I_{B_i} = \sum_{k=1}^{n} I_{D_k}.$$

Entonces podemos cambiar la desigualdad original como

$$\sum_{i=1}^{n} I_{C_i} \ge k_0 I_A + \sum_{i=1}^{n} I_{D_i}$$

Esto nos lleva a

$$\sum_{i=1}^{n} I_{C_i-D_i} + \sum_{i=1}^{n} I_{C_i\cap D_i} \ge k_0 I_A + \sum_{i=1}^{n} I_{D_i-C_i} + \sum_{i=1}^{n} I_{D_i\cap C_i}$$

Por lo tanto podemos escribir

$$\sum_{i=1}^{n} I_{C_i-D_i} \ge \sum_{i=1}^{n} I_{D_i-C_i} + k_0 I_A.$$

Ya que $C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_n$ y $D_1 \supset D_2 \supset \ldots \supset D_n$, se tiene que $(D_i - C_i) \cap (C_j - D_j) = \varnothing$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots, n$. De este modo, para que se cumpla la desigualdad debe suceder que $(D_i - C_i) = \varnothing$ para $1 \le i \le n$. Ahora tenemos una nueva desigualdad

$$\sum_{i=1}^{n} I_{E_i} = \sum_{i=1}^{n} I_{C_i-D_i} \ge k_0 I_A, \text{ con } E_i = C_i - D_i,\ 1 \le i \le n.$$

Sea, para cada $1 \le k \le n$,

$$F_k = \bigcup_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le n} \bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j}.$$

Note que por el Lema 3.1.4, $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n$ y $\sum_{i=1}^{n} I_{E_i} = \sum_{i=1}^{n} I_{F_i}$. Sea k_1 el mayor entero tal que $F_{k_1} \supset A$; $k_1 \ge 1$ pues de lo contrario existe $w \in A$ con $w \notin F_i$ para toda $i = 1, 2, \ldots n$. Entonces $k_0 I_A(w) = k_0 > 0 = \sum_{i=1}^{n} I_{F_i}(w)$, lo cual contradice la última desigualdad. De lo anterior también se sigue que $k_1 \ge k_0$. Entonces se tiene

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)}{k_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu(C_i) - \sum_{i=1}^{n} \mu(D_i)}{k_0}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu(C_i - D_i) - \sum_{i=1}^{n} \mu(D_i - C_i)}{k_0}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu(C_i - D_i)}{k_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)}{k_0}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \mu(F_i)}{k_0} \geq \frac{\sum_{i=1}^{k_1} \mu(F_i)}{k_0}$$

$$\geq \frac{\sum_{i=1}^{k_1} \mu(F_{k_1})}{k_0} \geq \frac{\sum_{i=1}^{k_1} \mu(F_{k_1})}{k_1}$$

$$= \mu(F_{k_1}).$$

Por lo tanto

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) - \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i)}{k_0} \geq \mu(F_{k_1}) \geq \operatorname{Inf}\{\mu(C);\, C \supset A,\, C \in \mathcal{C}\}.$$

Entonces $\mu_e(A) \geq \operatorname{Inf}\{\mu(C);\, C \supset A,\, C \in \mathcal{C}\}$.

Por otra parte, para C en $\mathcal{C}$ con $C \supset A$, observe que $I_C \geq I_A + I_\varnothing$. Así que

$$\mu_e(A) \leq [\mu(C) - \mu(\varnothing)]/1 = \mu(C).$$

Por lo tanto,

$$\mu_e(A) \leq \operatorname{Inf}\{\mu(C);\, C \supset A,\, C \in \mathcal{C}\}.$$

Esto prueba la igualdad mencionada en este inciso. ■

Si $\mathcal{C}$ es un álgebra de conjuntos, μ_i y μ_e exhiben algunas propiedades adicionales, como se muestra en la siguiente proposición.

3.3.2 Proposición. *Sea $\mathcal{C}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω y μ una carga positiva acotada en $\mathcal{C}$. Sean μ_i y μ_e las funciones definidas en el conjunto potencia $P(\Omega)$ de Ω como se definieron anteriormente. Si A y B son dos subconjuntos de Ω que satisfacen las condiciones $A \subset C$, $B \subset D$, $C \cap D = \varnothing$ y $C, D \in \mathcal{C}$. entonces*

$$\mu_i(A \cup B) = \mu_i(A) + \mu_i(B) \quad y \quad \mu_e(A \cup B) = \mu_e(A) + \mu_e(B).$$

Prueba.

Por la proposición 3.2.8 tenemos que $\mu_i(A) + \mu_i(B) \leq \mu_i(A \cup B)$. Por la proposición 3.3.1, para cualquier $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $E \subset (A \cup B)$ tal que $E \in \mathcal{C}$ y que satisfaga $\mu(E) \geq \mu_i(A \cup B) - \varepsilon$. Notemos que

$$\mu_i(A \cup B) - \varepsilon \leq \mu(E) = \mu(E \cap (C \cup D)) = \mu((E \cap C) \cup (E \cap D))$$
$$= \mu(E \cap C) + \mu(E \cap D) \text{ (pues C y D son ajenos)}$$

$$\leq \mu_i(A) + \mu_i(B)$$

ya que $E \cap C \subset A$ y $E \cap D \subset B$. Ya que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que

$$\mu_i(A \cup B) \leq \mu_i(A) + \mu_i(B).$$

Entonces $\mu_i(A \cup B) = \mu_i(A) + \mu_i(B)$.

Ahora, por proposición 3.2.8 tenemos que $\mu_e(A \cup B) \leq \mu_e(A) + \mu_e(B)$. Por la proposición 3.3.1, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $F \in \mathcal{C}$, tal que $(A \cup B) \subset F$ y que cumpla con que $\mu(F) \leq \mu_e(A \cup B) + \varepsilon$. Así que

$$\begin{aligned}
\mu_e(A \cup B) + \varepsilon \geq \mu(F) &= \mu[(F \cap (C \cup D)) \cup (F \cap (C \cup D)^c)] \\
&= \mu[F \cap (C \cup D)] + \mu[F - (C \cup D)] \\
&\geq \mu[F \cap (C \cup D)] = \mu[(F \cap C) \cup (F \cap D)] \\
&= \mu(F \cap C) + \mu(F \cap D) \\
&\geq \mu_e(A) + \mu_e(B)
\end{aligned}$$

ya que $A \subset C$, $A \subset F$ y $B \subset D$, $B \subset F$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se sigue que

$$\mu_e(A \cup B) \geq \mu_e(A) + \mu_e(B).$$

Entonces $\mu_e(A \cup B) = \mu_e(A) + \mu_e(B)$. ■

Ahora, probaremos el teorema de extensión.

3.3.3 Teorema. *Sea $\mathcal{C}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω. Sea μ una carga positiva acotada en $\mathcal{C}$. Sea $A \subset \Omega$ tal que $A \notin \mathcal{C}$. Sea $\mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$ el álgebra más pequeño en Ω que contiene a $\mathcal{C}$ y $A \in \mathcal{F}$. Entonces existe una carga positiva acotada $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$ la cual es una extensión de μ. Más aún, si d es algún real entre $\mu_i(A)$ y $\mu_e(A)$, entonces existe una carga positiva acotada $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$ tal que $\overline{\mu}(A) = d$ y $\overline{\mu}$ es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$.*

Prueba.

Elijamos y fijemos un número $d \in [\mu_i(A), \mu_e(A)]$. Entonces, para $C \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$, sea

$$\overline{\mu}(C) = a[\mu_i(C \cap A) + \mu_e(C \cap A^c)] + (1-a)\,[\mu_e(C \cap A) + \mu_i(C \cap A^c)],$$

donde a satisface la ecuación $d = a\mu_i(A) + (1-a)\mu_e(A)$. Si $\mu_i(A) = \mu_e(A)$, escojamos a en $[0,1]$; así que en cualquier caso se tiene $0 \leq a \leq 1$, por tanto $\overline{\mu}$ es una función real positiva en $\mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$. Mostraremos que $\overline{\mu}$ es una extensión de μ. Sea $C \in \mathcal{C}$, ya que

$$(C \cap A) \cup (C \cap A^c) = C \in \mathcal{C} \text{ y } (C \cap A) \cap (C \cap A^c) = \varnothing,$$

por la proposición 3.2.8(v),

$$\mu_i(C \cap A) + \mu_e(C \cap A^c) = \mu(C) = \mu_e(C \cap A) + \mu_i(C \cap A^c).$$

Por tanto, $\overline{\mu}(C) = a\,\mu(C) + (1 - a)\,\mu(C) = \mu(C)$.

Esto prueba que $\overline{\mu}$ es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$. Falta mostrar que $\overline{\mu}$ es en efecto una carga en $\mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$. Sea μ_1 y μ_2 las funciones definidas en $\mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$ como

$$\mu_1(C) = \mu_i(C \cap A) + \mu_e(C \cap A^c), \ C \text{ en } \mathcal{F}(\mathcal{C}, A) \ \text{ y}$$

$$\mu_2(C) = \mu_i(C \cap A^c) + \mu_e(C \cap A), \ C \text{ en } \mathcal{F}(\mathcal{C}, A).$$

Sean $C, D \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$ tal que $C \cap D = \varnothing$. Entonces podemos escribir

$$C = (C_1 \cap A) \cup (C_2 \cap A^c) \quad \text{y} \quad D = (D_1 \cap A) \cup (D_2 \cap A^c)$$

para algunos C_1, C_2, D_1, D_2 en $\mathcal{C}$ (ver teorema 1.3). Si es necesario, reemplazando C_1 por $C_1 - D_1$, D_1 por $D_1 - C_1$, C_2 por $C_2 - D_2$ y D_2 por $D_2 - C_2$; podemos suponer que sucede lo siguiente: $C_1 \cap D_1 = \varnothing = C_2 \cap D_2$. Esto es posible porque como $C \cap D = \varnothing$, entonces

$$[(C_1 \cap A) \cup (C_2 \cap A^c)] \cap [(D_1 \cap A) \cup (D_2 \cap A^c)] = \varnothing,$$

por lo que

$$(C_1 \cap A) \cap (D_1 \cap A) = C_1 \cap A \cap D_1 = \varnothing = C_2 \cap A^c \cap D_2 = (C_2 \cap A^c) \cap (D_2 \cap A^c)$$

así que se tiene

$$(C_1 \cap A) = ((C_1 \cap D_1) \cap A) \cup ((C_1 - D_1) \cap A) = (C_1 - D_1) \cap A$$

$$(D_1 \cap A) = ((D_1 \cap C_1) \cap A) \cup ((D_1 - C_1) \cap A) = (D_1 - C_1) \cap A$$

$$(C_2 \cap A^c) = ((C_2 \cap D_2) \cap A^c) \cup ((C_2 - D_2) \cap A^c) = (C_2 - D_2) \cap A^c$$

$$(D_2 \cap A^c) = ((D_2 \cap C_2) \cap A^c) \cup ((D_2 - C_2) \cap A^c) = (D_2 - C_2) \cap A^c$$

Por lo tanto

$$\mu_1(C \cup D) = \mu_i((C \cup D) \cap A) + \mu_e((C \cup D) \cap A^c)$$
$$= \mu_i((C \cap A) \cup (D \cap A)) + \mu_e((C \cap A^c) \cup (D \cap A^c))$$

por construcción:

$$= \mu_i((C_1 \cap A) \cup (D_1 \cap A)) + \mu_e((C_1 \cap A^c) \cup (D_1 \cap A^c))$$

$$= \mu_i(C_1 \cap A) + \mu_i(D_1 \cap A) + \mu_e(C_2 \cap A^c) + \mu_e(D_2 \cap A^c)$$

la anterior igualdad por la proposición 3.3.2,

$$= \mu_i(C_1 \cap A) + \mu_e(C_2 \cap A^c) + \mu_i(D_1 \cap A) + \mu_e(D_2 \cap A^c)$$

nuevamente, por la construcción:

$$= \mu_i(C \cap A) + \mu_e(C \cap A^c) + \mu_i(D \cap A) + \mu_e(D \cap A^c)$$

$$= \mu_1(C) + \mu_1(D).$$

Esto muestra que μ_1 es una carga.

Al mismo tiempo, observemos que

$$\mu_2(C \cup D) = \mu_e((C \cup D) \cap A) + \mu_i((C \cup D) \cap A^c)$$

$$= \mu_e((C \cap A) \cup (D \cap A)) + \mu_i((C \cap A^c) \cup (D \cap A^c))$$

por la construcción:

$$= \mu_e((C_1 \cap A) \cup (D_1 \cap A)) + \mu_i((C_1 \cap A^c) \cup (D_1 \cap A^c))$$

$$= \mu_e(C_1 \cap A) + \mu_e(D_1 \cap A) + \mu_i(C_2 \cap A^c) + \mu_i(D_2 \cap A^c)$$

la anterior igualdad por la proposición 3.3.2,

$$= \mu_e(C_1 \cap A) + \mu_i(C_2 \cap A^c) + \mu_e(D_1 \cap A) + \mu_i(D_2 \cap A^c)$$

nuevamente, por la construcción:

$$= \mu_e(C \cap A) + \mu_i(C \cap A^c) + \mu_e(D \cap A) + \mu_i(D \cap A^c)$$

$$= \mu_2(C) + \mu_2(D).$$

Esto muestra que también μ_2 es una carga.

Consecuentemente, es fácil probar que $\overline{\mu} = a\mu_1 + (1-a)\mu_2$ es en efecto una carga en el álgebra $\mathcal{F}(\mathcal{C}. A)$. ■

El teorema anterior nos ayudará para el siguiente resultado general de extensión.

3.3.4 Corolario. *Sea $\mathcal{C}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω y μ una carga positiva acotada en $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{F}$ un álgebra en Ω que contiene a $\mathcal{C}$. Entonces existe una carga positiva acotada $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$ tal que $\overline{\mu}$ es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$ y el rango de $\overline{\mu}$ es un subconjunto de la cerradura del rango de μ en $\mathcal{C}$.*

Prueba.

Sea $\overline{R}(\mu)$ la cerradura del rango de μ en $\mathcal{C}$. Sea:

$$X = \{(B, \nu, D, \lambda); \mathcal{C} \subset B \subset D \subset \mathcal{F}, \text{ B y D son álgebras en } \Omega,$$
$$\nu \text{ es una carga positiva en B, } \lambda \text{ es una carga positiva en D,}$$
$$\lambda / B = \nu, \nu / \mathcal{C} = \mu \text{ y el rango de } \lambda \text{ está contenido en } \overline{R}(\mu)\}.$$

($\nu / \mathcal{C}$ es la carga ν restringida al subálgebra $\mathcal{C}$.)

En X, se introduciremos un orden parcial como sigue. Para $(B_1, \nu_1, D_1, \lambda_1)$ y $(B_2, \nu_2, D_2, \lambda_2)$ en X, diremos que $(B_1, \nu_1, D_1, \lambda_1) \leq (B_2, \nu_2, D_2, \lambda_2)$ si se cumple lo siguiente

(i) $B_2 \subset B_1$.

(ii) $\nu_1 / B_2 = \nu_2$.

(iii) $D_1 \subset D_2$.

(iv) $\lambda_2 / D_1 = \lambda_1$.

Sea $Y = \{(B_\alpha, \nu_\alpha, D_\alpha, \lambda_\alpha); \alpha \in \Gamma\}$ una cadena en X, esto es, Y es subconjunto de X tal que el orden parcial $\leq$ restringido a Y es un orden lineal o total. Sean los siguientes conjuntos $\mathsf{B} = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha$ y $\mathsf{D} = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} D_\alpha$, ν la restricción de ν_{α_0} de B_{α_0} a B para cualquier α_0 fijo y λ en D definida como $\lambda(E) = \lambda_\alpha(E)$ si $E \in D_\alpha$, $\alpha \in \Gamma$. Así, λ está bien definida en D, pues si $E \in \mathsf{D}$, con $E \in D_\alpha$, $E \in D_\beta$; suponiendo que $\alpha \neq \beta$, ya que Y es una cadena, se tiene que $D_\alpha \subset D_\beta$ ó $D_\alpha \supset D_\beta$, además que $\lambda_\beta / D_\alpha = \lambda_\alpha$ ó $\lambda_\alpha / D_\beta = \lambda_\beta$, respectivamente. Por tanto en cualquier caso tenemos que $\lambda_\alpha(E) = \lambda_\beta(E)$. Afirmamos que $(\mathsf{B}, \nu, \mathsf{D}, \lambda) \in X$ y además es cota superior de la cadena. Para esto, observemos lo siguiente.

Note que $\mathcal{C} \subset B_\alpha$, $\forall \alpha \in \Gamma$, entonces $\mathcal{C} \subset \mathsf{B} = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha$ y que como $B_\alpha \subset D_\alpha, \forall \alpha \in \Gamma$, entonces $\mathsf{B} = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha \subset \mathsf{D} = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} D_\alpha \subset \mathcal{F}$, pues $D_\alpha \subset \mathcal{F}$, $\forall \alpha \in \Gamma$. Resulta fácil probar que B es un álgebra en Ω, mientras que D también es un álgebra en Ω y que si E_1 y E_2 pertenecen a D, se tiene que $E_1 \in D_\alpha$ y $E_2 \in D_\beta$ con α y β en Γ, y sin perder generalidad podemos suponer que $D_\alpha \subset D_\beta$ y D_β es un álgebra en Ω. De lo anterior se sigue que si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, entonces $\lambda(E_1 \cup E_2) = \lambda_\beta(E_1 \cup E_2) = \lambda_\beta(E_1) + \lambda_\beta(E_2) = \lambda(E_1) + \lambda(E_2)$, entonces λ es una carga positiva en D y por la definición de λ, se sigue que el rango de λ está contenido en $\overline{R}(\mu)$. Observe que ν es una carga positiva en B, pues es la restricción de una carga positiva, ν_{α_0} de B_{α_0} a B para algún α_0 en Γ. Además tenemos que:

$$\nu / \mathcal{C} = (\nu_{\alpha_0} / \mathsf{B}) / \mathcal{C} = \nu_{\alpha_0} / \mathcal{C} = \mu,$$

y si $E \in \mathsf{B} = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} B_\alpha$, entonces $E \in B_{\alpha_0}$ por tanto

$$\lambda(E) = \lambda_{\alpha_0}(E) = \nu_{\alpha_0}(E) = \nu(E).$$

De todo lo anterior se concluye que $(\mathcal{B}, \nu, \mathcal{D}, \lambda) \in X$.

Por otra parte observemos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_\alpha$, $\forall \alpha \in \Gamma$ y $\mathcal{D}_\alpha \subset \mathcal{D}$, $\forall \alpha \in \Gamma$. Al mismo tiempo se tiene que si $\alpha \in \Gamma$ y $E \in \mathcal{B}$, entonces E pertenece tanto a $\mathcal{B}_\alpha$ como a $\mathcal{B}_{\alpha_0}$, lo que nos da $\nu_\alpha(E) = \nu_{\alpha_0}(E) = \nu(E)$; por lo que $\nu_\alpha / \mathcal{B} = \nu$, $\forall \alpha \in \Gamma$. Mientras que si $F \in \mathcal{D}_\alpha$, con $\alpha \in \Gamma$, entonces por definición se tiene que $\lambda(F) = \lambda_\alpha(F)$; por lo tanto $\lambda / \mathcal{D}_\alpha = \lambda_\alpha$ $\forall \alpha \in \Gamma$. En conclusión obtenemos que $(\mathcal{B}, \nu, \mathcal{D}, \lambda)$ es una cota superior de la cadena Y.

Como resultado de las dos conclusiones anteriores y del Lema de Zorn, existe un elemento maximal $(\mathcal{B}_0, \nu_0, \mathcal{D}_0, \lambda_0)$ en X; de lo que se sigue que $\mathcal{B}_0 = \mathcal{C}$, $\nu_0 = \mu$, ya que el elemento $(\mathcal{C}, \mu, \mathcal{D}_0, \lambda_0) \in X$ y se tiene que $(\mathcal{B}_0, \nu_0, \mathcal{D}_0, \lambda_0) \leq (\mathcal{C}, \mu, \mathcal{D}_0, \lambda_0)$; entonces se tiene $(\mathcal{B}_0, \nu_0, \mathcal{D}_0, \lambda_0) = (\mathcal{C}, \mu, \mathcal{D}_0, \lambda_0)$. Ahora, afirmamos que $\mathcal{D}_0 = \mathcal{F}$. Suponga que $\mathcal{D}_0$ está contenido propiamente en $\mathcal{F}$. Sea $A \in (\mathcal{F} - \mathcal{D}_0)$ y sea $\mathcal{C}^* = \mathcal{F}(\mathcal{D}_0, A)$. Sean λ_{0i} y λ_{0e} como en la definición 3.2.6 para la carga μ_0 en $\mathcal{D}_0$. Definamos λ^* en $\mathcal{C}^*$ como

$$\lambda^*(C) = \lambda_{0i}(C \cap A) + \lambda_{0e}(C \cap A^c), \text{ para } C \in \mathcal{F}(\mathcal{D}_0, A).$$

Como vimos en el Teorema 3.3.3, λ^* es una carga positiva en $\mathcal{C}^*$, que es una extensión de λ_0 de $\mathcal{D}_0$ a $\mathcal{C}^*$. Veamos ahora que el rango de λ^* está contenido en $\overline{R}(\mu)$. Sea B_n, $n \geq 1$, una sucesión en $\mathcal{D}_0$, tal que $B_n \subset (C \cap A)$ para todo $n \geq 1$ y $\lim_{n\to\infty} \lambda_0(B_n) = \lambda_{0i}(C \cap A)$, (la sucesión existe por la definición de λ_{0i} en el álgebra $\mathcal{D}_0$). Sea D_n, $n \geq 1$ una sucesión en $\mathcal{D}_0$, tal que $(C \cap A^c) \subset D_n$ para toda $n \geq 1$ y $\lim_{n\to\infty} \lambda_0(D_n) = \lambda_{0e}(C \cap A^c)$. Así, $(C \cap A^c)$ está contenido en $(D_n - B_n)$, para todo $n \geq 1$, pues $B_n \subset A$ para todo $n \geq 1$. Por lo que resulta $\lambda_{0e}(C \cap A^c) \leq \lambda_0(D_n - B_n) \leq \lambda_0(D_n)$ para toda $n \geq 1$; por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_0(D_n - B_n) = \lambda_{0e}(C \cap A^c).$$

De aquí que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \lambda_0(B_n \cup D_n) &= \lim_{n\to\infty} [\lambda_0(B_n) + \lambda_0(D_n - B_n)] \\ &= \lim_{n\to\infty} \lambda_0(B_n) + \lim_{n\to\infty} \lambda_0(D_n - B_n) \\ &= \lambda_{0i}(C \cap A) + \lambda_{0e}(C \cap A^c) = \lambda^*(C). \end{aligned}$$

Por lo tanto, el rango de λ^* en $\mathcal{C}^*$ está contenido en la cerradura del rango de λ_0 y el rango de λ_0 está contenido en $\overline{R}(\mu)$, con lo que tenemos $R(\lambda^*) \subset \overline{R}(\lambda_0) \subset \overline{\overline{R}}(\mu) = \overline{R}(\mu)$.

De la construcción anterior hemos encontrado que $(B_0, \nu_0, \mathcal{C}^*, \lambda^*) \in X$, así como $(B_0, \nu_0, D_0, \lambda_0) < (B_0, \nu_0, \mathcal{C}^*, \lambda^*)$, lo que contradice la maximalidad de $(B_0, \nu_0, D_0, \lambda_0)$. $\therefore$ se debe tener que $D_0 = \mathcal{F}$. De esta forma, λ_0 es la extensión deseada de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$. ■

Como casos particulares del teorema anterior, se tienen los siguientes corolarios.

3.3.5 Corolario. *Sea μ una carga 0-1 valuada en un álgebra $\mathcal{C}$ de subconjuntos de un conjunto Ω. Sea $\mathcal{F}$ un álgebra en Ω que contiene a $\mathcal{C}$. Entonces existe una carga* 0-1 *valuada $\bar{\mu}$ en $\mathcal{F}$ la cual es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$.* ■

3.3.6 Corolario. *Sea $\mathcal{C}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω y μ una carga acotada en $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{F}$ un álgebra en Ω que contiene a $\mathcal{C}$. Entonces existe una carga acotada $\bar{\mu}$ en $\mathcal{F}$ la cual es una extensión de μ.*

Prueba. Se debe aplicar el Teorema de Descomposición para cargas acotadas de Jordan a μ en $\mathcal{C}$ y entonces el corolario 3.3.4 a la variación positiva y negativa de μ separadamente, ya que éstas son cargas positivas acotadas. [*K.P.S. Bhaskara Rao y M. Bhaskara Rao*, teorema 2.2.2, pág. 46].

3.3.7 Ejemplos.

1) Aplicando el teorema anterior al inciso (1) de los ejemplos 1.7, encontramos que existe una carga positiva acotada μ^* definida para todos los subconjuntos de $\Omega = [0,1)$, tal que la carga de todo intervalo de la forma $[a,b)$ con $0 \le a \le b \le 1$, es su longitud misma. En este caso podemos encontrar diversos tipos de extensiones, veamos algunas

   (i) Si Q es el conjunto de racionales en Ω, es fácil notar que $\mu_i(Q) = 0$ y $\mu_e(Q) = 1$, ya que Q no contiene intervalos, por lo tanto podemos construir la extensión μ^* tal que $\mu^*(Q)$ sea cualquier real entre 0 y 1.

   (ii) Si C es el conjunto de Cantor menos $\{1\}$, entonces podemos observar que $\mu_i(C) = 0 = \mu_e(C)$, por lo tanto en cualquier extensión μ^* mencionada se debe tener que $\mu^*(C) = 0$.

(iii) Si V es un conjunto de Vitali en Ω, podemos encontrar que mientras que $\mu_i(V)$ es cero puesto que V no contiene ningún intervalo, $\mu_e(V)$ varía entre 0 y 1 dependiendo del conjunto que resulte de escogerlo mediante el Axioma de Elección. Sin embargo observemos que $\mu_e(V) \neq 0$, ya que en este caso μ_e coincide con el contenido exterior (de Jordan) de V el cual es mayor o igual que la medida exterior (de Lebesgue) de V. Si fuera que $\mu_e(V) = 0$, se tendría que V sería un conjunto nulo con la medida de Lebesgue, y por lo tanto V sería un conjunto Lebesgue medible, lo cual es falso.

2) Usando el teorema anterior, en el inciso (2) del ejemplo 1.7 también encontramos una carga μ^* definida en $P(\Omega)$, con $\Omega = N$, ó con $\Omega = R$, tal que $\mu^*(A)$ es cero si A es subconjunto finito de Ω y $\mu^*(A)$ es 1 si A^c es subconjunto finito de Ω. Así, si $\Omega = N$, A el conjunto de los naturales pares y B el de los impares, podemos notar que $\mu_i(A) = \mu_i(B) = 0$ y $\mu_e(A) = \mu_e(B) = 1$. Entonces podemos encontrar una carga μ^* definida en $P(\Omega)$, tal que $\mu^*(A) = 1$ y $\mu^*(B) = 0$ y otra extensión en que $\mu^*(A) = 0$ y $\mu^*(B) = 1$, entre muchas otras extensiones.

3.4 EXTENSION DE CARGAS PARCIALES EN EL CASO GENERAL

En la sección 3.2 se manejó el problema de la extensión de cargas positivas reales parciales definidas en una colección dada $\mathcal{C}$ de subconjuntos de un conjunto Ω cuando $\Omega \in \mathcal{C}$. En esta sección, examinamos la situación cuando $\Omega \notin \mathcal{C}$ y también la extensión de cargas parciales en $\mathcal{C}$ que toman valores infinitos.

3.4.1 Lema. *Sea $\mathcal{C}$ un anillo de subconjuntos de un conjunto Ω, donde $\Omega \notin \mathcal{C}$. Sea μ una carga real positiva en $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{F}$ el álgebra en Ω generada por $\mathcal{C}$. Entonces existe una carga positiva $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$ que posiblemente tome el valor infinito la cual es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$.*

Prueba. Sea $\mathcal{C}_1 = \{A \subset \Omega;\ A^c \in \mathcal{C}\}$. Por el teorema 1.2, inciso (3), del capítulo 1, se tiene que $\mathcal{F} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}$. Sea $d = \text{Sup}\{\mu(C);\ C \in \mathcal{C}\}$.

Caso (1). $d = \infty$. En este caso, definamos $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$ como sigue:

$$\overline{\mu}(A) = \mu(A), \quad \text{si } A \in \mathcal{C}.$$

$$= \infty, \quad \text{si } A \in \mathcal{F} - \mathcal{C}.$$

Es claro que $\overline{\mu}$ es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$. Probaremos que $\overline{\mu}$ es una carga positiva en $\mathcal{F}$. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ y $A \cap B = \varnothing$.

(i) $A, B \in \mathcal{C}$. Entonces $\overline{\mu}(A \cup B) = \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B)$.

(ii) $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{C}_1$. Entonces se tiene que $(A \cup B) \in \mathcal{C}_1$, ya que $(A \cup B)^c = (A^c \cap B^c) = (B^c - A) \in \mathcal{C}$, pues A y $B^c \in \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}$ es un anillo. Así que $\overline{\mu}(A \cup B) = \infty = \mu(A) + \infty = \mu(A) + \overline{\mu}(B) = \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B)$.

(iii) $A \in \mathcal{C}_1$, $B \in \mathcal{C}$. Este caso es análogo al caso (ii).

(iv) $A, B \in \mathcal{C}_1$. Entonces en este caso se tendría que $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \Omega \in \mathcal{C}$. lo cual no es posible pues $\Omega \notin \mathcal{C}$. Así que este caso no puede suceder. Por lo tanto $\overline{\mu}$ es una carga en $\mathcal{F}$.

Caso (2). $d < \infty$. En este caso, se define $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$ como sigue.

$$\overline{\mu}(A) = \mu(A), \quad \text{si } A \in \mathcal{C}.$$

$$= d - \mu(A^c), \quad \text{si } A \in \mathcal{F} - \mathcal{C}.$$

También en este caso es claro que $\overline{\mu}$ es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$. Afirmamos que $\overline{\mu}$ es una carga positiva en $\mathcal{F}$. $\overline{\mu}$ es positiva por la definición de d. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ y $A \cap B = \emptyset$.

(i) $A, B \in \mathcal{C}$. Entonces $\overline{\mu}(A \cup B) = \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B)$.

(ii) $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{C}_1$. Entonces como se notó anteriormente, $A \cup B \in \mathcal{C}_1$. Así que

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(A \cup B) &= d - \mu((A \cup B)^c) = d - \mu(A^c \cap B^c)\\ &= d - \mu(B^c - A) = d - (\mu(B^c) - \mu(A)) = d - \mu(B^c) + \mu(A)\\ &= \overline{\mu}(B) + \mu(A) = \overline{\mu}(B) + \overline{\mu}(A).\end{aligned}$$

(iii) $A \in \mathcal{C}_1$; $B \in \mathcal{C}$. Este caso es análogo al caso (ii).

(iv) $A, B \in \mathcal{C}_1$. Entonces este caso no puede suceder, como se notó anteriormente.

Por lo tanto $\overline{\mu}$ es una carga en $\mathcal{F}$. ■

Ahora, veamos el resultado que complementa al Teorema 3.2.10.

3.4.2 Teorema. *Sea $\mathcal{C}$ una colección de subconjuntos de un conjunto Ω, con $\Omega \notin \mathcal{C}$. Sea μ una carga positiva real parcial en $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{F}$ un álgebra en Ω que contiene a $\mathcal{C}$. Entonces existe una carga positiva $\overline{\overline{\mu}}$ en $\mathcal{F}$ que posiblemente tome el valor ∞, la cual es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$.*

Prueba.

Sea $D = \{A \in \mathcal{F};\ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ para algunos $C_1, C_2, \ldots C_n$ en $\mathcal{C}\}$. D es un anillo en Ω, pues es claro que $\emptyset \in D$ y si $A, B \in D$, entonces $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ para algunos $C_1, C_2, \ldots C_n$ en $\mathcal{C}$ y $B \subset \bigcup_{i=1}^{m} D_i$ para algunos $D_1, D_2, \ldots D_n$ en $\mathcal{C}$. Por lo anterior, $(A \cup B)$ está contenido en $(\bigcup_{i=1}^{n} C_i) \cup (\bigcup_{i=1}^{m} D_i)$, que pertenece a D; mientras que$(A - B)$ está contenido en $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$.

Mostraremos que μ puede ser extendida de $\mathcal{C}$ a D como una carga positiva real parcial en D. Note que $\mu_e(A)$ está bien definido y es un real para cualquier $A \in D$, pues entonces existen algunos $C_1, C_2, \ldots C_n$ en $\mathcal{C}$ tal que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ y del lema 3.1.4(a) se sigue que $\sum_{k=1}^{n} I_{C_k} \geq I_A$, de lo que $\mu_e(A) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(C_k) < \infty$. Además, como se notó en la definición 3.2.6, $\mu_i(A)$ está bien definida para todo $A \in D$ y es real pues de la proposición

3.2.8 notamos que $0 \leq \mu_i(A) \leq \mu_e(A) < \infty$. Usando el argumento que se usó en las pruebas de los teoremas 3.2.9 y 3.2.10, podemos encontrar una carga positiva real parcial $\overline{\mu}$ en D la cual es una extensión de μ en $\mathcal{C}$ (la hipótesis de que $\Omega \in \mathcal{C}$ se usó en esos teoremas para mostrar que μ_i y μ_e estaban bien definidas y eran real valuadas para cualquier subconjunto de Ω). Como se observó en la definición 3.2.2, $\overline{\mu}$ es una carga real positiva en D. Ahora, extendamos $\overline{\mu}$ de D a $\mathcal{F}$ como una carga positiva. Sea entonces $d = \text{Sup}\{\overline{\mu}(E); E \in D\}$.

Caso (i). $d = \infty$. Defina entonces $\overline{\overline{\mu}}$ en $\mathcal{F}$ como sigue.

$$\overline{\overline{\mu}}(A) = \overline{\mu}(A), \quad \text{si } A \in D,$$
$$= \infty, \qquad \text{si } A \in \mathcal{F} - D.$$

Claramente $\overline{\overline{\mu}}$ es una extensión de $\overline{\mu}$ y además es positiva. Veamos que $\overline{\overline{\mu}}$ es una carga en $\mathcal{F}$. Sean A, B $\in \mathcal{F}$ y $A \cap B = \varnothing$.

- A, B $\in$ D. Entonces como D es un anillo, $\overline{\overline{\mu}}(A \cup B) = \overline{\mu}(A \cup B) = \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B) = \overline{\overline{\mu}}(A) + \overline{\overline{\mu}}(B)$.

- $A \in D$, $B \in \mathcal{F} - D$. Entonces se tiene que $(A \cup B) \in \mathcal{F} - D$, pues si $(A \cup B)$ estuviera en D, $(A \cup B) - A = B$ estaría en D, lo que contradice la hipótesis. Así que $\overline{\overline{\mu}}(A \cup B) = \infty = \overline{\mu}(A) + \infty = \overline{\mu}(A) + \overline{\overline{\mu}}(B) = \overline{\overline{\mu}}(A) + \overline{\overline{\mu}}(B)$.

- $A \in \mathcal{F} - D$, $B \in D$. Este caso es análogo al caso (ii).

- A, B $\in \mathcal{F} - D$. Entonces en este caso se tiene que $(A \cup B) \in \mathcal{F} - D$, pues de lo contrario se tendría que tanto A como B estarían en D, de acuerdo con la definición de D. Entonces se tiene que $\overline{\overline{\mu}}(A \cup B) = \infty = \infty + \infty = \overline{\overline{\mu}}(A) + \overline{\overline{\mu}}(B)$. Por lo tanto $\overline{\overline{\mu}}$ es una carga positiva en $\mathcal{F}$ y extensión de $\overline{\mu}$ de D a $\mathcal{F}$.

Caso (ii). $d < \infty$. Sea $\mathcal{F}_1$ el álgebra más pequeña en Ω que contiene a D. Definamos entonces μ_1 en $\mathcal{F}_1$ como sigue.

$$\mu_1(A) = \overline{\mu}(A), \quad \text{si } A \in D.$$
$$= d - \overline{\mu}(A^c), \quad \text{si } A \in \mathcal{F}_1 - D.$$

Usando el argumento dado en la prueba del lema 3.4.1, se muestra que μ_1 es una carga positiva acotada en $\mathcal{F}_1$ la cual es claramente una extensión de μ en $\mathcal{C}$. Entonces por el Corolario 3.3.4, existe una carga positiva acotada $\overline{\overline{\mu}}$ en $\mathcal{F}$ la cual es una extensión de μ en $\mathcal{C}$. ■

Ahora, daremos una condición bajo la cual una carga positiva real parcial en una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de un conjunto Ω admite una extensión $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$, tal que $\overline{\mu}$ es una carga positiva acotada $\mathcal{F}$ es cualquier álgebra en Ω que contiene a $\mathcal{C}$.

3.4.3 Teorema. *Sea μ una carga positiva real parcial en una colección $\mathcal{C}$ de subconjuntos de un conjunto Ω. Sea $\mathcal{F}$ un álgebra en Ω que contiene a $\mathcal{C}$. Sean:*

i) $D = \{A \in \mathcal{F}; A \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ *para algunos* $C_1, C_2, \ldots C_n$ *en* $\mathcal{C}\}$,

ii) μ_e *la función definida en* D, *como en la definición* 3.2.6.

Entonces existe una carga positiva acotada $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$ la cual es una extensión de μ en $\mathcal{C}$ si:

$$\operatorname{Sup}\{\mu_e(E); E \in D\} < \infty.$$

Prueba. La prueba de este resultado está contenida en las pruebas de los teoremas 3.4.2 y 3.2.9. ■

Finalizaremos esta sección analizando los casos en que las cargas toman el valor infinito.

3.4.4 Teorema. *Sea $\mathcal{C}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω y sea $\mathcal{F}$ un álgebra en Ω que contiene a $\mathcal{C}$. Sea μ una carga positiva en $\mathcal{C}$ que posiblemente tome el valor infinito. Entonces existe una carga positiva $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$ la cual es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$.*

Prueba.

Sea $D = \{A \in \mathcal{C}; \mu(A) < \infty\}$. Afirmamos que D es un anillo en Ω. Claramente $\emptyset \in D$. Sean A, B en D, entonces $(A \cup B) \in D$ pues $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B) < \infty$; mientras que $(A - B) \in D$, pues $\mu(A - B) \leq \mu(A) < \infty$. Sea λ la restricción de μ a D. λ es una carga positiva real parcial en D (ver sección 3.2). Entonces por el teorema 3.4.2, podemos encontrar una carga positiva $\bar{\lambda}$ en $\mathcal{F}$ la cual es una extensión de λ de D a $\mathcal{F}$. Definamos $\bar{\mu}$ en $\mathcal{F}$ como sigue: sea $A \in \mathcal{F}$, entonces

$$\bar{\mu}(A) = \bar{\lambda}(A), \quad \text{si } A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ para algún número finito de conjuntos } A_1, A_2, \ldots A_n \text{ en D.}$$
$$= \infty, \quad \text{en cualquier otro caso.}$$

Afirmamos que $\bar{\mu}$ es la extensión deseada de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$. Es claro que $\bar{\mu}$ es una función positiva, veamos que $\bar{\mu}$ es extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$. Sea $A \in \mathcal{C}$, si $\mu(A) = \infty$, entonces $A \notin D$, ni $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ para algunos $A_1, A_2, \ldots A_n$ en D, pues entonces se tendría que $\mu(A) \leq \mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) < \infty$; note entonces que $\bar{\mu}(A) = \infty$. Si $\mu(A) < \infty$, entonces $A \in D$, por lo que $\bar{\mu}(A) = \bar{\lambda}(A) = \mu(A)$. Por lo tanto $\bar{\mu}$ es extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$. Resta demostrar que $\bar{\mu}$ es una carga en $\mathcal{F}$. Sean A, B en $\mathcal{F}$ con $A \cap B = \varnothing$.

(i) Suponga que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ para algunos $A_1, A_2, \ldots A_n$ en D y $B \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i$ para algunos $B_1, B_2, \ldots, B_m$ en D, entonces $(A \cup B)$ está contenido en la unión de un número finito de conjuntos en D, por lo que $\bar{\mu}(A \cup B) = \bar{\lambda}(A \cup B) = \bar{\lambda}(A) + \bar{\lambda}(B) = \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B)$.

(ii) Suponga que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ para algunos $A_1, A_2, \ldots A_n$ en D, pero que B no está contenido en la unión de un número finito de conjuntos en D, entonces $(A \cup B)$ tampoco está contenido en la unión de un número finito de conjuntos en D, por lo que $\bar{\mu}(A \cup B) = \infty = \bar{\lambda}(A) + \infty = \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B)$.

(iii) El caso en que A no está contenido en la unión de un número finito de conjuntos en D, pero B sí lo está, es análogo al anterior.

(iv) Suponga que ni A ni B están contenidos en la unión de un número finito de conjuntos en D, así que tampoco lo está $(A \cup B)$, por lo tanto $\bar{\mu}(A \cup B) = \infty = \infty + \infty = \bar{\mu}(A) + \bar{\mu}(B)$. Entonces $\bar{\mu}$ es la extensión deseada de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$. ■

Por último presentamos un resultado que trata con cargas en general.

3.4.5 Teorema. *Sea $\mathcal{C}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω y sea $\mathcal{F}$ un álgebra en Ω que contiene a $\mathcal{C}$. Sea μ una carga en $\mathcal{C}$ que posiblemente tome el valor infinito. Entonces existe una carga $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$ la cual es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$. Si μ es real valuada, se puede escoger que $\overline{\mu}$ lo sea.*

Prueba. Si μ es real valuada en $\mathcal{C}$, usando el Teorema 3.2.5 encontramos una carga real $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$ la cual es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$. Supongamos que μ toma el valor ∞. Sea $D = \{A \in \mathcal{C}; \mu(A) < \infty\}$. Afirmamos que D es un anillo en Ω. Claramente $\varnothing \in D$. Sean A, B en D, entonces $(A \cup B) \in D$ pues $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$ y como $\mu(A \cap B)$ es finito se sigue que $\mu(A \cup B) < \infty$; mientras que $(A - B) \in D$, pues $(A - B)$ está contenido en A por lo que $\mu(A - B) < \infty$. Sea λ la restricción de μ a D. λ es una carga real parcial en D (ver sección 3.2). Entonces por el teorema 3.2.5, podemos encontrar una carga $\overline{\lambda}$ en $\mathcal{F}$ la cual es una extensión de λ de D a $\mathcal{F}$. Definamos $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$ como sigue: sea $A \in \mathcal{F}$, entonces

$$\begin{aligned} \overline{\mu}(A) &= \overline{\lambda}(A), && \text{si } A \subset \textstyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ para algún número finito de} \\ & && \text{conjuntos } A_1, A_2, \ldots A_n \text{ en } D. \\ &= \infty, && \text{en cualquier otro caso.} \end{aligned}$$

Afirmamos que $\overline{\mu}$ es la extensión deseada de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$. Veamos que $\overline{\mu}$ es extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$. Sea $A \in \mathcal{C}$, si $\mu(A) = \infty$, entonces $A \notin D$ y $A \not\subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ para algunos $A_1, A_2, \ldots A_n$ en D, pues $\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) < \infty$, ya que D es un anillo; notemos entonces que $\overline{\mu}(A) = \infty$. Si $\mu(A) < \infty$, entonces $A \in D$, por lo que $\overline{\mu}(A) = \overline{\lambda}(A) = \mu(A)$. Por lo tanto $\overline{\mu}$ es extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$. Nos falta probar que $\overline{\mu}$ es una carga en $\mathcal{F}$. Sean A, B en $\mathcal{F}$ con $A \cap B = \varnothing$.

(i) Suponga que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ para algunos $A_1, A_2, \ldots A_n$ en D y $B \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i$ para algunos $B_1, B_2, \ldots, B_m$ en D, entonces $(A \cup B)$ está contenido en la unión de un número finito de conjuntos en D, por lo que $\overline{\mu}(A \cup B) = \overline{\lambda}(A \cup B) = \overline{\lambda}(A) + \overline{\lambda}(B) = \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B)$.

(ii) Suponga que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ para algunos $A_1, A_2, \ldots A_n$ en D, pero que B no está contenido en la unión de un número finito de conjuntos en D, entonces $(A \cup B)$ tampoco está contenido en la unión de un número finito de conjuntos en D, por lo que:

$$\overline{\mu}(A \cup B) = \infty = \overline{\lambda}(A) + \infty = \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B).$$

(iii) El caso en que A no está contenido en la unión de un número finito de conjuntos en D, pero B sí lo está, es análogo al anterior.

(iv) Suponga que ni A ni B están contenidos en la unión de un número finito de conjuntos en D, así que tampoco lo está $(A \cup B)$, por lo tanto $\overline{\mu}(A \cup B) = \infty = \infty + \infty = \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B)$.

Entonces $\overline{\mu}$ es la extensión deseada de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$. ■

3.4.6 Ejemplo. Usando el teorema 3.4.4 y el inciso (3) del ejemplo 1.7 podemos encontrar una carga λ^* definida en $P(\Omega)$, con $\Omega = \mathbb{R}$, tal que $\lambda^*\{(a,b)\} = b - a$, para todos $-\infty < a < b < +\infty$.

3.5 EXTENSIONES DIVERSAS

En esta sección daremos algunos teoremas de extensión clásicos para casos especiales.

3.5.1 Teorema. (i). *Sea $\mathcal{C}$ un semi-anillo de conjuntos de un conjunto Ω. Sea μ una carga real en $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{F}$ el anillo más pequeño en Ω que contiene a $\mathcal{C}$. Entonces existe una única carga real $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$ la cual es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$. Si μ es positiva en $\mathcal{C}$, también lo es $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$.*

(ii). *Sea $\mathcal{C}$ un semi-álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω. Sea μ una carga real en $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{F}$ el álgebra más pequeña en Ω que contiene a $\mathcal{C}$. Entonces existe una única carga real $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$ la cual es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$. Si μ es positiva en $\mathcal{C}$ también lo es $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$.*

(iii). *Sea $\mathcal{C}$ un anillo de subconjuntos de un conjunto Ω y μ una carga real en $\mathcal{C}$. Sea $\mathcal{F}$ el álgebra más pequeña en Ω que contiene a $\mathcal{C}$. Entonces existe una única carga real $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$ tal que $\overline{\mu}(\Omega)$ es un número prescrito. Si μ es una carga positiva en $\mathcal{C}$, existe una carga positiva $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$ la cual es una extensión de μ. Tal $\overline{\mu}$ es única si se elige que $\overline{\mu}(\Omega) =$ Sup$\{\mu(B); B \in \mathcal{C}\}$ y μ es positiva real valuada.*

Prueba.

(i). Por el teorema 1.2, $\mathcal{F} = \{A \subset \Omega$; A es una unión finita de conjuntos ajenos por parejas de $\mathcal{C}\}$. Definamos $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$ como sigue. Sea $A \in \mathcal{F}$, entonces $A = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$ para algunos conjuntos ajenos pos parejas en $\mathcal{C}$. así que sea $\overline{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{m} \mu(C_i)$. Veamos que $\overline{\mu}$ está bien definida. Supongamos que $A = \bigcup_{i=1}^{m} C_i = \bigcup_{j=1}^{n} D_j$, donde $C_1, C_2, \ldots, C_m$ son conjuntos ajenos por parejas en $\mathcal{C}$ y $D_1, D_2, \ldots, D_n$ son conjuntos ajenos por parejas en $\mathcal{C}$. Por lo que

$$A \cap A = A = \bigcup_{i=1}^{m}\bigcup_{j=1}^{n}(C_i \cap D_j).$$

Note que $C_i = \bigcup_{j=1}^{n}(C_i \cap D_j)$ para cada $1 \le i \le m$ y $C_i \cap D_j \in \mathcal{C}$ para toda i y j. Similarmente $D_j = \bigcup_{i=1}^{m}(C_i \cap D_j)$ para toda $1 \le j \le n$. Ya que μ es una carga en $\mathcal{C}$, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(C_i) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mu(C_i \cap D_j) \quad y \quad \sum_{j=1}^{n} \mu(D_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \mu(C_i \cap D_j).$$

Lo que prueba que $\overline{\mu}$ está bien definida, de lo que se sigue que $\overline{\mu}(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{C}$. esto es, $\overline{\mu}$ es extensión de μ. Veamos ahora que $\overline{\mu}$ es una carga en $\mathcal{F}$. Sean A y B en $\mathcal{F}$, con $A \cap B = \emptyset$. Entonces $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, $B = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$, donde $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son conjuntos ajenos por parejas en $\mathcal{C}$ y $B_1, B_2, \ldots, B_n$ son conjuntos ajenos por parejas en $\mathcal{C}$. De lo que

$$\overline{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) \quad y \quad \overline{\mu}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i).$$

Mientras que, como podemos escribir $(A \cup B) = (\bigcup_{i=1}^{m} A_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{n} B_j) \in \mathcal{F}$, por lo que

$$\overline{\mu}(A \cup B) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) + \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) = \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B).$$

Si existiera otra carga real μ_1 en $\mathcal{F}$, extensión de μ en $\mathcal{C}$, entonces si $A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ donde $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son conjuntos ajenos por parejas en $\mathcal{C}$. tendríamos que

$$\mu_1(A) = \sum_{i=1}^{m} \mu_1(A_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i) = \overline{\mu}(A).$$

Es claro de la definición, de que $\overline{\mu}$ es real y además positiva en $\mathcal{F}$ si μ es positiva en $\mathcal{C}$.

(ii). Esta prueba es similar a la del inciso anterior.

(iii). Podemos suponer que $\Omega \notin \mathcal{C}$. (Si $\Omega \in \mathcal{C}$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{C}$.) Sea $\mathcal{C}_1 = \{A;\ A^c \in \mathcal{C}\}$. Por el teorema 1.2, tenemos que $\mathcal{F} = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}_1$. Sea d un real prescrito. Definamos μ en $\mathcal{F}$ como sigue:

$$\begin{aligned} \overline{\mu}(A) &= \mu(A), && \text{si } A \in \mathcal{C}. \\ &= d - \mu(A^c), && \text{si } A \in \mathcal{F} - \mathcal{C}. \end{aligned}$$

$\overline{\mu}$ claramente es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$. Veamos que $\overline{\mu}$ es una carga real en $\mathcal{F}$. Sean $A, B \in \mathcal{F}$ con $A \cap B = \emptyset$.

- $A, B \in \mathcal{C}$. Entonces $\overline{\mu}(A \cup B) = \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = \overline{\mu}(A) + \overline{\mu}(B)$.
- $A \in \mathcal{C}$. $B \in \mathcal{C}_1$. Entonces como se notó en el lema 3.4.1, $A \cup B \in \mathcal{C}_1$. Así que:
  $\overline{\mu}(A \cup B) = d - \mu((A \cup B)^c) = d - \mu(A^c \cap B^c) = d - \mu(B^c - A)$

$$= d - \mu(B^c) + \mu(A) = \overline{\mu}(B) + \mu(A) = \overline{\mu}(B) + \overline{\mu}(A).$$

- $A \in \mathcal{C}_1$, $B \in \mathcal{C}$. Este caso es análogo al caso (ii).
- A, $B \in \mathcal{C}_1$. Entonces este caso no puede suceder, ya que $A^c \cup B^c$ pertenece a $\mathcal{C}$. pero: $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \Omega$.

Por lo tanto $\overline{\mu}$ es una carga real en $\mathcal{F}$. Si μ_1 es otra carga real en $\mathcal{F}$, extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$, se tendría entonces que si $A \in \mathcal{F} - \mathcal{C}$:

$$d = \mu_1(\Omega) = \mu_1(A \cup A^c) = \mu_1(A) + \mu_1(A^c) = \mu_1(A) + \mu(A^c).$$

De lo que se sigue que la extensión es única.

- Si μ es una carga positiva en $\mathcal{C}$. definamos $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$ como sigue

$$\overline{\mu}(A) = \mu(A), \quad \text{si } A \in \mathcal{C}.$$
$$= \infty, \quad \text{si } A \in \mathcal{F} - \mathcal{C}.$$

Es claro que $\overline{\mu}$ es una extensión positiva de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$. Con los argumentos usados en el Lema 3.4.1 se sigue que $\overline{\mu}$ es una carga positiva en $\mathcal{F}$.

- Si μ es una carga positiva real valuada en $\mathcal{C}$. se define $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}$ como

$$\overline{\mu}(A) = \mu(A), \quad \text{si } A \in \mathcal{C}.$$
$$= d - \mu(A^c), \quad \text{si } A \in \mathcal{F} - \mathcal{C}.$$

donde $d = \operatorname{Sup}\{\mu(B);\ B \in \mathcal{F}\}$. También en este caso es claro que $\overline{\mu}$ es una extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$. De la prueba dada en el Lema 3.4.1 se afirma que $\overline{\mu}$ es una carga positiva en $\mathcal{F}$. Si existe otra carga μ_1, extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}$, que satisfaga la condición de que $\mu_1(\Omega) = \operatorname{Sup}\{\mu(B);\ B \in \mathcal{C}\} = d$ entonces tendríamos que si $A \in \mathcal{F} - \mathcal{C}$:

$$d = \mu_1(\Omega) = \mu_1(A \cup A^c) = \mu_1(A) + \mu_1(A^c) = \mu_1(A) + \mu(A^c).$$

De lo que se sigue que $\mu_1(A) = d - \mu(A^c)$, esto es, la extensión es única. ■

El problema a considerar a continuación es el siguiente. Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω y sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos álgebras contenidas en $\mathcal{F}$. Sean μ_1 y μ_2 dos cargas positivas en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ respectivamente. Observaremos bajo que condiciones se puede encontrar una carga positiva μ en $\mathcal{F}$ que sea una extensión tanto de μ_1, como de μ_2, a $\mathcal{F}$.

3.5.2 Teorema. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos álgebras sobre un conjunto Ω y μ_1 y μ_2 cargas positivas acotadas en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ respectivamente. Sea $\mathcal{F}$ un álgebra en Ω que contiene a $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. Entonces una condición necesaria y suficiente para que exista una carga positiva acotada en $\mathcal{F}$ que sea una extensión común de μ_1 y μ_2 es que:*

$$\mu_1(C) \geq \mu_2(D) \quad \textit{siempre que } C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D} \textit{ y } C \supset D, \textit{ y}$$

$$\mu_1(E) \leq \mu_2(F) \quad \textit{siempre que } E \in \mathcal{C}, F \in \mathcal{D} \textit{ y } E \subset F.$$

Prueba. Que sea necesaria la condición es claro. Veremos que también es suficiente. Note que de la condición mencionada se sigue que $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ para todo $A \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$. Así que podemos definir la función $\overline{\mu}$ en $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ como sigue:

$$\begin{aligned} \overline{\mu}(A) &= \mu_1(A), \quad \text{si } A \in \mathcal{C}, \\ &= \mu_2(A), \quad \text{si } A \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Veamos que $\overline{\mu}$ es una carga positiva real parcial en $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_{m+n}$ y $B_1, B_2, \ldots, B_{p+q}$ dos sucesiones finitas de conjuntos de $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{m+n} I_{A_i} \geq \sum_{i=1}^{p+q} I_{B_i}.$$

Supongamos, sin perder generalidad, que $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{C}$ y $A_{m+1}, A_{m+2}, \ldots, A_{m+n} \in \mathcal{D}$, $B_1, B_2, \ldots, B_p \in \mathcal{C}$ y $B_{p+1}, B_{p+2}, \ldots, B_{p+q} \in \mathcal{D}$. Esta desigualdad puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\sum_{i=1}^{m} I_{A_i} + \sum_{i=1}^{n} I_{A_{m+i}} \geq \sum_{i=1}^{p} I_{B_i} + \sum_{i=1}^{q} I_{B_{p+i}}.$$

Ya que $\varnothing \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, podemos asumir que $m = p$ y que $n = q$. También, por el Lema 3.1.4 podemos suponer que $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_m$; $A_{m+1} \supset A_{m+2} \supset \ldots \supset A_{m+n}$; $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_p$; $B_{p+1} \supset B_{p+2} \supset \ldots \supset B_{p+q}$. Entonces la desigualdad anterior se puede escribir como:

$$\sum_{i=1}^{m} I_{A_i - B_i} + \sum_{i=1}^{n} I_{A_{m+i} - B_{m+i}} \geq \sum_{i=1}^{m} I_{B_i - A_i} + \sum_{i=1}^{n} I_{B_{m+i} - A_{m+i}}.$$

Sean $C_i = A_i - B_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $D_i = B_i - A_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $E_i = A_{m+i} - B_{m+i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $F_i = B_{m+i} - A_{m+i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Por lo que podemos escribir:

$$\sum_{i=1}^{m} I_{C_i} + \sum_{i=1}^{n} I_{E_i} \geq \sum_{i=1}^{m} I_{D_i} + \sum_{i=1}^{n} I_{F_i}.$$

Observe que $C_i \cap D_j = \varnothing$ para todos i y j y que $E_i \cap F_j = \varnothing$ para todo i y j. Lo que nos lleva a las siguientes dos desigualdades:

$$\sum_{i=1}^{m} I_{C_i} \geq \sum_{i=1}^{n} I_{F_i} \quad y \quad \sum_{i=1}^{n} I_{E_i} \geq \sum_{i=1}^{m} I_{D_i}.$$

(pues sea $w \in \Omega$, si $\sum_{i=1}^{n} I_{F_i}(w) = 0$, la primera desigualdad es clara; si $\sum_{i=1}^{n} I_{F_i}(w) > 0$, entonces w pertenece al menos a un F_i con $i = 1, 2, \ldots, n$, de lo que $\sum_{i=1}^{n} I_{E_i}(w) = 0$. Ya que tenemos que

$$\sum_{i=1}^{m} I_{C_i}(w) + \sum_{i=1}^{n} I_{E_i}(w) \geq \sum_{i=1}^{m} I_{D_i}(w) + \sum_{i=1}^{n} I_{F_i}(w),$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{m} I_{C_i}(w) \geq \sum_{i=1}^{m} I_{D_i}(w) + \sum_{i=1}^{n} I_{F_i}(w),$$

en particular

$$\sum_{i=1}^{m} I_{C_i}(w) \geq \sum_{i=1}^{n} I_{F_i}(w).$$

Análogamente ocurre con la segunda desigualdad.)

Notemos que $C_1, C_2, \ldots, C_m, D_1, D_2, \ldots, D_m \in \mathscr{C}$, y $E_1, E_2, \ldots, E_n, F_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathscr{D}$.

Por el Lema 3.1.4, podemos asumir que $C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_m$; $D_1 \supset D_2 \supset \ldots \supset D_m$; $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n$; $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n$ y también que $F_i \subset C_i$ y $D_i \subset E_i$ para toda i. Por lo tanto, de la condición dada inicialmente, se sigue que:

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_1(C_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu_2(F_i) \quad y \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_2(E_i) \geq \sum_{i=1}^{m} \mu_1(D_i).$$

De lo que:

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{\mu}(C_i) + \sum_{i=1}^{n} \overline{\mu}(E_i) \geq \sum_{i=1}^{m} \overline{\mu}(D_i) + \sum_{i=1}^{n} \overline{\mu}(F_i).$$

Regresando todos los pasos y usando la Proposición 3.1.5 llegamos a que:

$$\sum_{i=1}^{m+n} \overline{\mu}(A_i) \geq \sum_{i=1}^{p+q} \overline{\mu}(B_i).$$

Por lo tanto $\overline{\mu}$ es una carga positiva real parcial en $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$. Por el Teorema 3.2.10, se puede encontrar una carga positiva acotada μ en $\mathcal{F}$ la cual es una extensión de $\overline{\mu}$ de $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ a $\mathcal{F}$. ■

3.5.3 Teorema. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos álgebras sobre un conjunto Ω y μ_1 y μ_2 cargas reales definidas en $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ respectivamente. Sea $\mathcal{F}$ un álgebra en Ω que contiene tanto a $\mathcal{C}$ como a $\mathcal{D}$. Entonces una condición necesaria y suficiente para que exista una carga real en $\mathcal{F}$ que sea una extensión común de μ_1 y μ_2 es que:*

$$\mu_1(A) = \mu_2(A) \textit{ para todo } A \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}.$$

Prueba. Que sea necesaria la condición es claro. Veremos que también es suficiente. Definamos entonces la función $\overline{\mu}$ en $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ como sigue

$$\begin{aligned} \overline{\mu}(A) &= \mu_1(A), \quad \text{si } A \in \mathcal{C}, \\ &= \mu_2(A), \quad \text{si } A \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Veamos que $\overline{\mu}$ es una carga real parcial en $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$. Sean $A_1, A_2, \ldots, A_{m+n}$ y $B_1, B_2, \ldots, B_{p+q}$ dos sucesiones finitas de conjuntos de $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{m+n} I_{A_i} = \sum_{i=1}^{p+q} I_{B_i}.$$

Podemos asumir, sin perder generalidad, que $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathcal{C}$ y $A_{m+1}, A_{m+2}, \ldots, A_{m+n} \in \mathcal{D}$, $B_1, B_2, \ldots, B_p \in \mathcal{C}$ y $B_{p+1}, B_{p+2}, \ldots, B_{p+q} \in \mathcal{D}$. Esta igualdad puede ser escrita de la siguiente forma

$$\sum_{i=1}^{m} I_{A_i} + \sum_{i=1}^{n} I_{A_{m+i}} = \sum_{i=1}^{p} I_{B_i} + \sum_{i=1}^{q} I_{B_{p+i}}.$$

Ya que $\varnothing \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$, podemos asumir que $m = p$ y que $n = q$. También, por el Lema 3.1.4 podemos suponer que que $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_m$; $A_{m+1} \supset A_{m+2} \supset \ldots \supset A_{m+n}$; $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_p$; $B_{p+1} \supset B_{p+2} \supset \ldots \supset B_{p+q}$. Entonces la igualdad anterior se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^{m} I_{A_i - B_i} + \sum_{i=1}^{n} I_{A_{m+i} - B_{m+i}} = \sum_{i=1}^{m} I_{B_i - A_i} + \sum_{i=1}^{n} I_{B_{m+i} - A_{m+i}}.$$

Sean $C_i = A_i - B_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $D_i = B_i - A_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $E_i = A_{m+i} - B_{m+i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $F_i = B_{m+i} - A_{m+i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Por lo que podemos escribir:

$$\sum_{i=1}^{m} I_{Ci} + \sum_{i=1}^{n} I_{Ei} = \sum_{i=1}^{m} I_{Di} + \sum_{i=1}^{n} I_{Fi}. \qquad (1)$$

Observe que $C_i \cap D_j = \varnothing$ para todos i y j y que $E_i \cap F_j = \varnothing$ para todo i y j. Lo que nos lleva a las siguientes dos igualdades:

$$\sum_{i=1}^{m} I_{Ci} = \sum_{i=1}^{n} I_{Fi} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} I_{Ei} = \sum_{i=1}^{m} I_{Di}.$$

(Pues sea $w \in \Omega$ y suponga que $\sum_{i=1}^{n} I_{Fi}(w) = 0$, entonces si $\sum_{i=1}^{m} I_{Ci}(w) > 0$, se tendría que $w \in C_i$ para algún $1 \le i \le m$. Debido a la observación anterior, $\sum_{i=1}^{m} I_{Di}(w) = 0$, lo cual va a contradecir la igualdad (1). Por tanto $\sum_{i=1}^{m} I_{Ci}(w) = 0$.

Supongamos ahora que $\sum_{i=1}^{n} I_{Fi}(w) > 0$, entonces w pertenece al menos a un F_i con i = 1, 2,..., n, de lo que $\sum_{i=1}^{n} I_{Ei}(w) = 0$. De acuerdo con la igualdad (1) tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{m} I_{Ci}(w) = \sum_{i=1}^{m} I_{Di}(w) + \sum_{i=1}^{n} I_{Fi}(w) > 0,$$

de lo que, como vimos anteriormente, $\sum_{i=1}^{m} I_{Di}(w) = 0$, entonces se obtiene que:

$$\sum_{i=1}^{m} I_{Ci}(w) = \sum_{i=1}^{n} I_{Fi}(w),$$

Análogamente se prueba la otra igualdad.)

Notemos que $C_1, C_2,\ldots, C_m, D_1, D_2,\ldots, D_m \in \mathcal{C}$, y $E_1, E_2,\ldots, E_n, F_1, F_2,\ldots, F_n \in \mathcal{D}$. Por el Lema 3.1.4, podemos asumir que $C_1 \supset C_2 \supset\ldots\supset C_m$; $D_1 \supset D_2 \supset\ldots\supset D_m$; $E_1 \supset E_2 \supset \ldots\supset E_n$; $F_1 \supset F_2 \supset\ldots\supset F_n$. Ahora observemos también de aquel Lema que $F_i = C_i$ para $1 \le i \le \max\{m, n\}$ y $D_i = E_i$ para toda $1 \le i \le \max\{m, n\}$. Entonces $C_1, C_2,\ldots, C_m, D_1, D_2,\ldots, D_m, E_1, E_2,\ldots, E_n, F_1, F_2,\ldots, F_n \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.

Por lo tanto, de la condición inicial dada, se sigue que:

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_1(C_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu_2(F_i) \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} \mu_2(E_i) = \sum_{i=1}^{m} \mu_1(D_i).$$

De lo que

$$\sum_{i=1}^{m} \overline{\mu}(C_i) + \sum_{i=1}^{n} \overline{\mu}(E_i) = \sum_{i=1}^{m} \overline{\mu}(D_i) + \sum_{i=1}^{n} \overline{\mu}(F_i).$$

Regresando todos los pasos y usando la Proposición 3.1.5 se tiene:

$$\sum_{i=1}^{m+n} \overline{\mu}(A_i) = \sum_{i=1}^{p+q} \overline{\mu}(B_i).$$

Por lo tanto $\overline{\mu}$ es una carga real parcial en $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$. Por el Teorema 3.2.5, se puede encontrar una carga real μ en $\mathcal{F}$ la cual es una extensión de $\overline{\mu}$ de $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ a $\mathcal{F}$. ■

CAPÍTULO 4

Unicidad de la extensión de cargas

A lo largo de este capítulo, usaremos el teorema de extensión de Łos y Marczewski, en cargas positivas definidas en un álgebra, con el fin de dar condiciones necesarias y suficientes que aseguren la unicidad de la extensión del tipo de cargas mencionado.

Sea $\mathcal{C}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω. Sea μ una carga positiva (posiblemente no acotada) en $\mathcal{C}$. Sea $A \subset \Omega$ tal que $A \notin \mathcal{C}$. Sea $\mathcal{F}(\mathcal{C}. A)$ el álgebra más pequeño en Ω que contiene a $\mathcal{C}$ y $A \in \mathcal{F}$. El teorema de Łos y Marczewski ha demostrado que si μ es acotada, entonces μ se puede extender a una carga positiva acotada $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}(\mathcal{C}. A)$. Así como en el caso de que μ es acotada, definamos

$\mu_i(A) = \text{Sup}\{\mu(B); B \subset A, B \in \mathcal{C}\}$ y $\mu_e(A) = \text{Inf}\{\mu(C); A \subset C, C \in \mathcal{C}\}$, para todo $A \subset \Omega$.

También, son μ_1 y μ_2 las funciones definidas en $\mathcal{F}(\mathcal{C}. A)$ como

$\mu_1(C) = \mu_i(C \cap A) + \mu_e(C \cap A^c)$, para C en $\mathcal{F}(\mathcal{C}. A)$ y

$\mu_2(C) = \mu_i(C \cap A^c) + \mu_e(C \cap A)$, para C en $\mathcal{F}(\mathcal{C}. A)$.

Por el teorema 3.3.3, si μ es acotada, μ_1 y μ_2 son cargas positivas definidas en $\mathcal{F}(\mathcal{C}. A)$ que extienden a μ, definida en $\mathcal{C}$. Analizando la prueba del teorema de Łos y Marczewski notaremos que aún si μ no es acotada, μ_1 y μ_2 son cargas positivas, extensiones de μ. De este hecho, encontraremos condiciones necesarias y suficientes para que la extensión de μ de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{F}(\mathcal{C}. A)$ sea única. En el caso en que μ es acotada, las condiciones llegan a ser muy simples. También veremos la unicidad de la extensión de μ de $\mathcal{C}$ a otro álgebra $\mathcal{F}$, tal que $\mathcal{C}$ está contenido en $\mathcal{F}$.

Como en el caso en que μ es acotada, la siguiente proposición nos da algunas propiedades de las funciones μ_i y μ_e.

4.1 Proposición. *Si μ es una carga positiva no acotada en un álgebra de subconjuntos $\mathscr{C}$ de un conjunto Ω, entonces se satisface lo siguiente:*

i) μ_i *y* μ_e *son funciones crecientes.*

ii) $0 \leq \mu_i(A) \leq \mu_e(A) \leq \mu(\Omega)$ *para todo* $A \subset \Omega$ *y* $\mu_i(A) = \mu(A) = \mu_e(A)$ *si* $A \in \mathscr{C}$.

iii) *Si* $A, B \subset \Omega$ *y* $A \cap B = \varnothing$, *entonces*

$\mu_i(A) + \mu_i(B) \leq \mu_i(A \cup B) \leq \mu_i(A) + \mu_e(B) \leq \mu_e(A \cup B) \leq \mu_e(A) + \mu_e(B)$.

iv) *Si* $A \in \mathscr{C}$, $B \subset \Omega$ *y* $A \cap B = \varnothing$, *entonces*

$\mu_i(A \cup B) = \mu(A) + \mu_i(B)$ *y* $\mu_e(A \cup B) = \mu(A) + \mu_e(B)$.

v) *Si* $A, B \subset \Omega$, $A \cap B = \varnothing$ *y* $A \cup B \in \mathscr{C}$, *entonces*

$\mu(A \cup B) = \mu_i(A) + \mu_e(B) = \mu_e(A) + \mu_i(B)$. *En particular, para cualquier* $A \subset \Omega$,

$\mu_i(A) + \mu_e(A^c) = \mu_e(A) + \mu_i(A^c) = \mu(\Omega)$.

vi) *Si* $\overline{\mu}$ *definida en un álgebra* $\mathscr{F}$ *de subconjuntos de* Ω, *es una carga positiva extensión de* μ, *entonces para cualquier* $B \in \mathscr{F}$, $\mu_i(B) \leq \overline{\mu}(B) \leq \mu_e(B)$.

Prueba.

(i) y (ii) se siguen de que μ es una carga positiva definida en $\mathscr{C}$.

(iii) - Sean C' y $C'' \in \mathscr{C}$ tales que $C' \subset A$ y $C'' \subset B$, entonces $(C' \cap C'') = \varnothing$, $(C' \cup C'') \subset (A \cup B)$ y por tanto $\mu(C') + \mu(C'') = \mu(C' \cup C'') \leq \mu_i(A \cup B)$. Tomando primero el supremo sobre $C' \subset A$ y entonces sobre $C'' \subset B$ obtenemos que

$$\mu_i(A) + \mu_i(B) \leq \mu_i(A \cup B).$$

- Sean C' y $C'' \in \mathscr{C}$ tales que $C' \subset (A \cup B)$ y $B \subset C''$; de lo que $(C' - A) \subset B \subset C''$ y $(C' - C'') \subset A$. Por lo tanto:

$$\mu(C' - C'') \leq \mu_i(A) \text{ y } \mu(C') = \mu(C' - C'') + \mu(C' \cap C'') \leq \mu_i(A) + \mu(C''),$$

esto es, $\mu(C') \leq \mu_i(A) + \mu(C'')$. Tomando el supremo sobre C' obtenemos que:

$$\mu_i(A \cup B) \leq \mu_i(A) + \mu(C'').$$

Tomando el ínfimo sobre C'' llegamos a que:

$$\mu_i(A \cup B) \leq \mu_i(A) + \mu_e(B).$$

- Ahora probaremos que $\mu_i(A) + \mu_e(B) \leq \mu_e(A \cup B)$. Si $\mu_e(A \cup B) = \infty$ se cumple la desigualdad obviamente. Supongamos que $\mu_e(A \cup B) < \infty$ y sea $C'' \in \mathscr{C}$ tal que $(A \cup B) \subset C''$ con $\mu(C'') < \infty$. Entonces para cualquier $C' \subset A$, $C' \subset \Omega$; como B está contenido en (C''- C'), tenemos que $\mu_e(B) \leq \mu(C''-C') = \mu(C'') - \mu(C')$, lo que es lo mismo, ya que los términos son finitos, $\mu_e(B) + \mu(C') \leq \mu(C'')$. Tomando el ínfimo sobre C'', se tiene que $\mu_e(B) + \mu(C') \leq \mu_e(A \cup B)$ y después el supremo sobre C', obtenemos la desigualdad deseada.

- Si $\mu_e(A) = \infty$ ó $\mu_e(B) = \infty$ entonces se cumple que $\mu_e(A \cup B) \leq \mu_e(A) + \mu_e(B)$. Supongamos que tanto $\mu_e(A)$ como $\mu_e(B)$ son finitos. Sean C' y C'' $\in \mathscr{C}$ tales que $A \subset C'$ y $B \subset C''$, entonces $(A \cup B) \subset (C' \cup C'')$ y por tanto:

$\mu_e(A \cup B) \leq \mu(C' \cup C'') \leq \mu(C') + \mu(C'')$.

Tomando primero el ínfimo sobre $C' \supset A$ y entonces el ínfimo sobre $C'' \supset B$, obtenemos que $\mu_e(A \cup B) \leq \mu_e(A) + \mu_e(B)$.

(iv) y (v) se siguen de los incisos anteriores (ver el teorema 3.2.8)

(vi) Supongamos que existe $B \in \mathcal{F}$, tal que $\overline{\mu}(B) < \mu_i(B)$. Entonces existe $C \in \mathscr{C}$ tal que $C \subset B$ y $\overline{\mu}(B) < \mu(C) = \overline{\mu}(C)$, lo que contradice que $\overline{\mu}$ sea carga positiva. También, si existe $D \in \mathcal{F}$ tal que $\overline{\mu}(D) > \mu_e(D)$, existe $C \in \mathscr{C}$ tal que $C \supset D$ y $\overline{\mu}(D) > \mu(C) = \overline{\mu}(C)$ lo que contradice que $\overline{\mu}$ sea carga positiva. ■

4.2 Proposición. *Si μ es una carga positiva (acotada o no) en un álgebra de conjuntos $\mathscr{C}$ de un conjunto Ω, A y B son dos subconjuntos de Ω que satisfacen las condiciones $A \subset C$, $B \subset D$, $C \cap D = \varnothing$ y $C, D \in \mathscr{C}$, entonces*

$$\mu_i(A \cup B) = \mu_i(A) + \mu_i(B) \quad y \quad \mu_e(A \cup B) = \mu_e(A) + \mu_e(B).$$

Prueba. Si $\mu_i(A \cup B)$ es finito, la primera desigualdad se sigue del caso en que μ es acotada, ya que como μ_i es creciente, $\mu_i(A)$ y $\mu_i(B)$ son finitos (ver el teorema 3.3.2). Supongamos que $\mu_i(A \cup B) = \infty$, entonces para cualquier $k > 0$, existe $E \subset (A \cup B)$ tal que $E \in \mathscr{C}$ y $\mu(E) > k$. Por tanto tenemos que

$$k < \mu(E) = \mu(E \cap (C \cup D)) = \mu(E \cap C) + \mu(E \cap D) \leq \mu_i(A) + \mu_i(B)$$

ya que $(E \cap C) \subset A$ y $(E \cap D) \subset B$. Como $k > 0$ es arbitrario, se sigue que

$$\mu_i(A) + \mu_i(B) = \infty.$$

Análogamente, si $\mu_e(A \cup B)$ es real, también lo son $\mu_e(A)$ y $\mu_e(B)$, puesto que μ_e es una función creciente. Entonces la segunda igualdad se prueba como en el teorema 3.3.2 .Si

$\mu_e(A \cup B) = \infty$, tenemos por la proposición anterior que $\mu_e(A) + \mu_e(B) \geq \mu_e(A \cup B) = \infty$. Por lo que se cumple la igualdad. ■

4.3 Teorema. *Sea $\mathcal{C}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω. Sea μ una carga positiva acotada o no acotada en $\mathcal{C}$. Sea $A \subset \Omega$ tal que $A \notin \mathcal{C}$. Sea $\mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$ el álgebra más pequeño en Ω que contiene a $\mathcal{C}$ y $A \in \mathcal{F}$. Entonces existe una carga positiva $\overline{\mu}$ en $\mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$ la cual es una extensión de μ.*

Prueba. La prueba de este teorema es la misma como la usada en el teorema 3.3.3 del caso en que μ es acotada, pero en este caso se usan las dos proposiciones anteriores. ■

En el siguiente teorema veremos las condiciones que aseguren la unicidad de la extensión de una carga positiva en un álgebra $\mathcal{C}$ de subconjuntos de un conjunto Ω al álgebra $\mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$.

4.4 Teorema. *Sea $\mathcal{C}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω. Sea μ una carga positiva en $\mathcal{C}$. Sea $A \subset \Omega$ tal que $A \notin \mathcal{C}$. Sea $\mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$ el álgebra más pequeño en Ω que contiene a $\mathcal{C}$ y $A \in \mathcal{F}$. Entonces existe una única carga positiva en $\mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$, la cual es una extensión de μ si y sólo si:*

$$\mu_i(C \cap A) = \mu_e(C \cap A) \quad y \quad \mu_e(C \cap A^c) = \mu_i(C \cap A^c) \text{ para todo } C \in \mathcal{C}.$$

(Recordemos que $\mu_1(D) = \mu_i(D \cap A) + \mu_e(D \cap A^c)$, $\mu_2(D) = \mu_i(D \cap A^c) + \mu_e(D \cap A)$, *están definidas para todo* D *en* $\mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$.)

Prueba.

$\Rightarrow$) Como se nota en el teorema anterior y en el teorema 3.3.3, μ_1 y μ_2 son extensiones de μ, siendo ésta acotada o no, por lo tanto, si la extensión es única, hallamos que $\mu_1 = \mu_2$. Entonces se tiene que $\mu_1(C \cap A) = \mu_2(C \cap A)$ para todo $C \in \mathcal{C}$. Pero por definición se sigue que:

$$\mu_i(C \cap A) = \mu_1(C \cap A) = \mu_2(C \cap A) = \mu_e(C \cap A) \text{ para todo } C \in \mathcal{C}.$$

Y por otra parte, $\mu_1(C \cap A^c) = \mu_2(C \cap A^c)$ para todo $C \in \mathcal{C}$. Así que de la misma forma

$$\mu_e(C \cap A^c) = \mu_1(C \cap A^c) = \mu_2(C \cap A^c) = \mu_i(C \cap A^c) \text{ para todo } C \in \mathcal{C}.$$

$\Leftarrow$) Sea $\overline{\mu}$ una carga positiva definida en $\mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$, extensión de μ. Por la proposición 4.1 inciso (vi), para todo $C \in \mathcal{C}$ se debe satisfacer que:

$$\mu_i(C \cap A) \leq \overline{\mu}(C \cap A) \leq \mu_e(C \cap A)$$

y por nuestra hipótesis:

$$\mu_i(C \cap A) = \overline{\mu}(C \cap A) = \mu_e(C \cap A).$$

Análogamente encontraremos que:

$$\mu_i(C \cap A^c) = \overline{\mu}(C \cap A^c) = \mu_e(C \cap A^c).$$

Puesto que todo elemento de D de $\mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$, se puede escribir de la forma $D = (C_1 \cap A) \cup (C_2 \cap A^c)$ donde C_1, C_2 pertenecen a $\mathcal{C}$ (ver teorema 3.3.3). Entonces

$$\overline{\mu}(D) = \overline{\mu}(C_1 \cap A) + \overline{\mu}(C_2 \cap A^c) = \mu_i(C_1 \cap A) + \mu_e(C_2 \cap A^c)$$
$$= \mu_e(C_1 \cap A) + \mu_i(C_2 \cap A^c).$$

De lo anterior se desprende que para todo $D \in \mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$ se cumple que:

$$\overline{\mu}(D) = \mu_1(D) = \mu_2(D)$$

lo que garantiza la unicidad de la extensión. ■

En el caso en que μ sea una carga positiva acotada, las condiciones anteriores del teorema anterior se simplifican, como lo muestra el siguiente teorema.

4.5 Teorema. *Sea $\mathcal{C}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω. Sea μ una carga positiva acotada en $\mathcal{C}$. Sea $A \subset \Omega$ tal que $A \notin \mathcal{C}$. Sea $\mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$ el álgebra más pequeño en Ω que contiene a $\mathcal{C}$ y $A \in \mathcal{F}$. Entonces son equivalentes estos enunciados:*

a) *La extensión como carga positiva de μ a $\mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$ es única.*

b) $\mu_i(C \cap A) = \mu_e(C \cap A)$ *y* $\mu_e(C \cap A^c) = \mu_i(C \cap A^c)$ *para todo* $C \in \mathcal{C}$.

c) $\mu_i(C \cap A) = \mu_e(C \cap A)$ *para todo* $C \in \mathcal{C}$.

d) $\mu_i(A) = \mu_e(A)$.

e) $\mu_i(A) = \mu_e(A)$ *y* $\mu_i(A^c) = \mu_e(A^c)$.

Prueba.

(a) $\Leftrightarrow$ (b) se sigue del teorema anterior, mientras que es obvio que (b) $\Rightarrow$ (c).

(c) implica (d) tomando en (c) a C como Ω.

(d) $\Rightarrow$ (e) ya que por la proposición 4.1.(v) y como μ es acotada tenemos que:

$$\mu_i(A^c) = \mu(\Omega) - \mu_e(A) \quad y \quad \mu_e(A^c) = \mu(\Omega) - \mu_i(A),$$

entonces por la hipótesis se tiene que $\mu_i(A^c) = \mu_e(A^c)$.

Por último veamos que (e) $\Rightarrow$ (b). Por la proposición 4.2 sabemos que para cualquier $C \in \mathcal{C}$

$$\mu_i(A) = \mu_i(A \cap C) + \mu_i(A \cap C^c) \quad y \quad \mu_e(A) = \mu_e(A \cap C) + \mu_e(A \cap C^c).$$

ya que $(C \cap A) \subset C$, $(C^c \cap A) \subset C^c$ y $C \cap C^c = \emptyset$. Además sabemos que:

$$\mu_i(C \cap A) \leq \mu_e(C \cap A) \quad y \quad \mu_i(C^c \cap A) \leq \mu_e(C^c \cap A)$$

entonces, como:

$$\mu_i(A \cap C) + \mu_i(A \cap C^c) = \mu_i(A) = \mu_e(A) = \mu_e(A \cap C) + \mu_e(A \cap C^c)$$

y ya que μ es finita, se sigue que:

$$\mu_i(A \cap C) = \mu_e(A \cap C) \text{ y } \mu_i(A \cap C^c) = \mu_e(A \cap C^c)$$

para cualquier $C \in \mathcal{C}$. ■

4.6 Ejemplos. Si la carga μ no es acotada, los enunciados del teorema anterior no son siempre equivalentes. Veamos algunos ejemplos.

1. - Sea $\Omega = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y sea $\mathcal{C} = \{A \subset \Omega$; A es subconjunto finito de $\mathbb{N}$ ó A^c es subconjunto finito de $\mathbb{N}\}$. No es dificil hacer notar de la definición de $\mathcal{C}$ que éste es un álgebra sobre Ω y que μ es una carga positiva en $\mathcal{C}$. si μ está definida para todo $C \in \mathcal{C}$. como sigue:

$$\mu(C) = |C| \quad \text{si C es finito}$$
$$= \infty \quad \text{si C no es finito.}$$

Observemos que si $A = \mathbb{N}$, entonces $A \notin \mathcal{C}$ así como $\mu_i(A) = \mu_e(A) = \infty$; sin embargo se puede mostrar que $\mu_i(A^c) = \mu_i(\{\infty\}) = 0$ y $\mu_e(A^c) = \mu_e(\{\infty\}) = \infty$. Por lo tanto, si μ no es acotada, no sucede que (d) implique (e).

De este mismo ejemplo, veremos también que aunque se cumple (d), esto no implica (a), es decir, que la extensión de μ a $\mathcal{F}(\mathcal{C}, A)$ no es única. Por la proposición 1.3 sabemos que

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}, A) = \{ (C' \cap \mathbb{N}) \cup (C'' \cap \{\infty\}); C', C'' \in \mathcal{C} \}$$
$$= \{ C \subset \Omega; C \text{ finito o } C^c \text{ es subconjunto finito de } \Omega\}$$

por lo que únicamente resta definir la carga en $\{\infty\}$. Si se definen μ_1 y μ_2 en $\mathcal{F}(\mathcal{C}. A)$ extensiones de μ como $\mu_1(\{\infty\}) = 1$ y $\mu_2(\{\infty\}) = 2$, obtenemos diferentes cargas positivas extensiones de μ.

2.- Sea $\Omega = R$ y $\mathcal{C}$ el álgebra que resulta de todas las uniones finitas de los conjuntos de la forma:

$$(a,b], \quad (-\infty, b], \quad (a, +\infty), \quad (-\infty, +\infty).$$

donde a y b son números reales y sea μ la carga positiva en $\mathcal{C}$ tal que $\mu((a, b]) = b - a$; mientras que:

$$\mu((-\infty, b]) = \mu((a, +\infty)) = \mu((-\infty, +\infty)) = +\infty.$$

Sea $A = Z^- \cup R^+$, donde $Z^- = \{-1, -2, -3, \ldots\}$ y $R^+ = [0, \infty)$. Es simple notar que $\mu_i(A) = \mu_i(A^c) = \infty$ y por esto, también $\mu_e(A) = \mu_e(A^c) = \infty$.

Si $C = (-\infty, -1]$, entonces $(C \cap A) = Z^-$, por lo tanto $\mu_i(C \cap A) = 0$, $\mu_e(C \cap A) = \infty$. De lo que no necesariamente (e) implica (b) en el teorema anterior si μ no es acotada.

Además de las extensiones de la forma en como se mencionan en el teorema de Łos y Marczewski, existen otros tipos de extensiones de cargas positivas definidas en un álgebra. Observemos el siguiente ejemplo.

3.- Sea $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{C} = \{\emptyset, \Omega, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ y $A = \{2, 3\}$. El álgebra $\mathcal{F}(\mathcal{C}. A)$ es entonces $P(\Omega)$. Supongamos que la carga positiva μ está definida en $\mathcal{C}$ como sigue:

$$\mu(\emptyset) = 0,\ \mu(\Omega) = 1,\ \mu(\{1, 2\} = ½ = \mu(\{3, 4\}.$$

Sean μ_1 y μ_2 las funciones definidas en el teorema 3.3.3, esto es:

$\mu_1(C) = \mu_i(C \cap A) + \mu_e(C \cap A^c)$, $\mu_2(C) = \mu_i(C \cap A^c) + \mu_e(C \cap A)$, para $C \in P(\Omega)$.

Así que, para encontrar μ_1 y μ_2, basta con conocerlas en los unitarios $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, con lo que tenemos lo siguiente:

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$
μ_1	½	0	0	½
μ_2	0	½	½	0

Como vimos en el capítulo anterior, la forma de la extensión de μ en $P(\Omega)$ es una combinación convexa de μ_1 y μ_2, es decir:

$$\mu_a = a\,\mu_1 + (1 - a)\,\mu_2 \text{ con } a \in [0, 1].$$

Por tanto tenemos:

	{1}	{2}	{3}	{4}
μ_a	$a/2$	$(1-a)/2$	$(1-a)/2$	$a/2$

Si definimos $\overline{\mu}$ otra carga positiva extensión de μ en $P(\Omega)$, como se indica:

	{1}	{2}	{3}	{4}
$\overline{\mu}$	C	½ - c	d	½ - d

tales que $c, d \in [0, ½]$ y que $c + d \neq ½$, entonces podemos notar que $\overline{\mu}$ es una extensión de μ en $P(\Omega)$ pero que no es del tipo de μ_a.

En los teoremas anteriores hemos analizado la unicidad de la extensión de una carga positiva en el álgebra $\mathcal{C}$ al álgebra $\mathcal{F}(\mathcal{C}.\ A)$, donde $A \notin \mathcal{C}$. Usaremos estos resultados para determinar la unicidad de la extensión a un álgebra $\mathcal{F}$ que contiene a $\mathcal{C}$.

4.7 Teorema. *Sea $\mathcal{C}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω. Sea μ una carga positiva en $\mathcal{C}$ y sea $\mathcal{F}$ algún álgebra de subconjuntos en Ω tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$; entonces la extensión de μ como carga positiva en $\mathcal{F}$ es única si y sólo si:*

$$\mu_i(A) = \mu_e(A) \textit{ para todo } A \in \mathcal{F}.$$

Prueba.

$\Rightarrow$) Sea $A \in \mathcal{F} - \mathcal{C}$ y supongamos que la extensión $\overline{\mu}$ de μ en $\mathcal{F}$ es única, entonces lo mismo también sucede en $\mathcal{F}(\mathcal{C}.\ A)$. Entonces por el teorema 4.4 se sigue que $\mu_i(A) = \mu_e(A)$. Ya que $A \in \mathcal{F} - \mathcal{C}$. es arbitrario, se sigue lo deseado.

$\Leftarrow$) Sea $\overline{\mu}$ una extensión de μ en $\mathcal{F}$ como carga positiva. Entonces como vimos en proposición 4.1, $\mu_i(A) \leq \overline{\mu}(A) \leq \mu_e(A)$ para todo $A \in \mathcal{F}$, y de acuerdo a nuestra hipótesis, se sigue que la extensión es única. ■

De los resultados anteriores tenemos este importante corolario.

4.8 Corolario. *Sea $\mathcal{C}$ un álgebra de subconjuntos de un conjunto Ω. Sea μ una carga positiva acotada definida en $\mathcal{C}$. Si $\mathcal{F} = \{C \subset \Omega;\ \mu_i(C) = \mu_e(C)\}$, entonces $\mathcal{F}$ es un álgebra de subconjuntos que Ω que contiene a $\mathcal{C}$. μ tiene una única extensión como carga positiva a $\mathcal{F}$ y si $\mathcal{C}$' es un álgebra en Ω tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}$' y μ tiene una única extensión como carga positiva a $\mathcal{C}$', entonces $\mathcal{C}' \subset \mathcal{F}$.*

Prueba. De la proposición 4.1 (ii) se sigue $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Así que es claro que $\varnothing$ y $\Omega \in \mathcal{F}$. Sean A y B subconjuntos de Ω tales que $\mu_i(A) = \mu_e(A)$ y $\mu_i(B) = \mu_e(B)$. De la proposición 4.1(iii) se sigue que $\mu_i(A \cup B) = \mu_e(A \cup B)$; por lo que $\mathcal{F}$ es cerrado bajo uniones finitas. Del teorema 4.5 se sigue también que $\mathcal{F}$ es cerrado bajo complementos, por lo tanto, $\mathcal{F}$ es un álgebra de Ω. La afirmación restante se sigue del teorema anterior. ■

Bibliografía

Theory of Charges, A Study of Finitely Additive Measures. K.P.S. Bhaskara Rao, Indian Statistical Institute, Calcutta, India. M. Bhaskara Rao, University of Sheffield, U.K. Academic Press, 1983. QA612 B536.

The Elements of Integration and Lebesgue Measure. Robert G. Bartle, Eastern Michigan University and University of Illinois, Wiley Classics Library Edition Published 1995. QA312 B37.

Real Analysis. H.L. Royden. New York , Macmillan 1963. QA331.5 R6.

Bayesian Statistics, principles, models and applications. S. James Press. QA 279.5 P74. 1989. Wiley NY.

Contemporary Mathematics. Measure and measurable dynamics. Editorial Board. American Mathematical Society. Volume 94. QA 312 C65. 1989.