872715
6

UNIVERSIDAD DON VASCO, A.C.
INCORPORACION No.8727-15 A LA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

DESARROLLO DE HERRAMIENTAS DE ANÁLISIS ESTRUCTURAL PARA SU USO DESDE LA INTERNET.

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO CIVIL
P R E S E N T A N :

GONZALO PAZ MENDOZA
DAVID JOAQUIN DELGADO HERNANDEZ
ALFONSO ISLAS HERNÁNDEZ

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

UNIVERSIDAD
DON VASCO.A.C.

Uruapan, Michoacán.,México, 2003.

A

PAGINACION

DISCONTINUA

Agradecimientos:

A Dios

Agradecimiento especial a:

M. I. Octavio García Domínguez

Armando Durán Correa

Alejandro Vázquez Gutiérrez

B

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN Y ANTECEDENTES.

El presente trabajo pretende ser un texto de interés para estudiantes a nivel licenciatura y maestría, profesores y profesionistas de la ingeniería civil en el área de estructuras. Introduce metodologías modernas para la solución de estructuras esqueletales basadas en las herramientas de cómputo actuales como la Internet.

La estructura del texto consta de dos partes. En la primera se plantea una introducción al análisis de estructuras esqueletales mediante los principios de continuidad, Ley de Hooke y de Equilibrio, reforzando en forma constante estos principios y haciendo énfasis en el papel que juega cada concepto en una técnica de análisis dada. Se desarrolla de manera general la aplicabilidad de estos principios a la mecánica del medio continuo. Mientras que en la segunda parte de este trabajo, se muestra la aplicación de las computadoras al análisis de estructuras esqueletales.

El estilo del texto se caracteriza por una gran cantidad de figuras que avalan la obtención de las ecuaciones y se parte siempre de lo simple a lo más complejo. Así mismo se presenta la solución detallada de distintos ejemplos que permiten aplicar los fundamentos antes mencionados.

En el primer capítulo se presentan las hipótesis y las teorías a manejar durante este trabajo. Se pretende transmitir como son utilizados los conceptos fundamentales de equilibrio estático, el principio de continuidad, que relaciona las deformaciones en los elementos estructurales con los desplazamientos de sus nudos y relaciones entre fuerzas y desplazamientos (Ley de Hooke), para resolver estructuras esqueletales, utilizando dos formulaciones analíticas:

- El método convencional del ensamble de submatrices de rigidez, y
- El método de la matriz de continuidad

En el segundo capítulo se muestra la aplicación de los principios fundamentales para obtener la solución de modelos planos y espaciales de armaduras y marcos, incluyendo también el caso de la retícula plana. En este capítulo se identifican variables importantes del análisis estructural. Se introducen los conceptos de grados de libertad e indeterminación en los apoyos. Se incluye la formación de conjuntos válidos de ecuaciones de equilibrio y se relacionan con su descripción matemática en forma de matrices, utilizando los dos planteamientos de solución antes mencionados en las estructuras estudiadas. Así mismo se comparan ambos, para verificar la validez del principio de continuidad.

Durante el tercer capítulo se presentan siete programas de computadora, resultado de las formulaciones analíticas estudiadas para el análisis de estructuras. Estos, fueron realizados en *FORTRAN 90*, y fueron calibrados con programas comerciales para verificar su funcionalidad y exactitud.

Esta última parte del trabajo, tiene como objetivo proveer a los lectores de herramientas de cómputo para el análisis de estructuras esqueletales, basadas en algoritmos de gran sencillez y eficiencia. De estos programas se incluyen los códigos fuente para que el lector pueda realizar modificaciones futuras que mejoren el alcance de los mismos.

Los programas de análisis desarrollados se nombraron de la siguiente manera:

ARMA2D	*ARMADURAS PLANAS*
ARMA3D	*ARMADURAS TRIDIMENSIONALES*
MAR2Dr	*MARCOS PLANOS POR EL MÉTODO DE RIGIDECES*
MAR2Dc	*MARCOS PLANOS POR EL MÉTODO DE CONTINUIDAD*
RET2D	*RETÍCULA PLANA*
MAR3D	*MARCOS TRIDIMENSIONALES*
ARMA2DGR	*INTERFAZ GRÁFICA DE ARMADURAS PLANAS*

TABLA I. Descripción de los programas elaborados.

Todos ellos permiten obtener desplazamientos en los nudos, deformaciones en las barras y por ende los elementos mecánicos en estas. Se desarrollaron interfaces gráficas que permiten observar algunos de los resultados anteriores.

En el cuarto capítulo presentamos, desde el punto de vista de aplicación, la programación con *JAVA SCRIPT* en la internet. Dado que se trata de un trabajo para Ingenieros Civiles, no se profundiza en este campo de la computación, sin embargo, para los interesados se presentan algunas referencias bibliográficas que nos sirvieron de base para desarrollar las aplicaciones en internet.

En el capitulo quinto, se presenta la filosofia que se siguió para obtener una interfaz amigable, que permita a todos los usuarios, accesar de forma sencilla a los programas realizados por medio de Internet. De esta manera se intenta que via Internet, se puedan tener disponibles herramientas, para ser usadas en distintos puntos geográficos. En la página elaborada se explica detalladamente como funcionan los programas.

El sexto capitulo presenta los manuales de usuario de los programas de análisis mencionados, explicando también la forma en que los resultados son presentados. Paralelo a esto, se presentan algunos ejemplos de aplicación que ilustran el empleo de los programas desarrollados.

Finalmente, el capitulo séptimo presenta las conclusiones del trabajo y hace algunas recomendaciones a los lectores, para que tengan un máximo aprovechamiento del material presentado.

EVOLUCIÓN DE LAS COMPUTADORAS Y SU APLICACIÓN AL ANÁLISIS ESTRUCTURAL.

Desde tiempos muy remotos la inquietud que los seres humanos han tenido por mejorar sus condiciones de calidad de vida, motivó el desarrollo de ciencias que al ser aplicadas y convertidas a tecnología permiten un constante avance, que en la actualidad no sabemos si tendrá limites.

Hoy en día es muy natural que cualquier persona este familiarizada con el uso de computadoras personales e incluso de estaciones de trabajo, las cuales permiten obtener y procesar información de manera rápida y confiable, debido a la gran evolución tecnológica que ha sufrido este campo del conocimiento.

Sin pretender ser muy detallistas, mencionamos a continuación las generaciones que anteceden a las computadoras actuales:

Generación.	*Observaciones.*
Primera.	Caracterizada por la implementación de procesamiento mediante *Bulbos.*
Segunda.	En esta generación se inventan los *Transistores* que desplazan a los *Bulbos.*
Tercera.	El avance de la tecnología hace posible la creación de los *Circuitos integrados*, característicos de esta generación.
Cuarta.	Como resultado de la innovación de los *Microprocesadores* se desarrollan las primeras computadoras personales ó *PC'S.*
Quinta.	La globalización que enfrenta el mundo, conduce a un solo camino, la elaboración de *Redes* mediante la intercomunicación de diversas computadoras personales o la que existe entre diversos servidores y usuarios.

TABLA II. Generaciones de las computadoras.

Es evidente que las redes permiten una mejor comunicación entre las personas que habitamos el planeta Asi por ejemplo la red internacional mejor conocida como INTERNET es un medio eficaz que en cuestión de segundos permite obtener cualquier tipo de información, no sólo del pais ni del continente, sino de todo el mundo

El ingeniero civil dentro de las múltiples áreas en que se desarrolla tanto, en la docencia como en la practica profesional necesita contar con el apoyo de medios que le permitan optimizar los recursos de que dispone. Es evidente que en el pasado reciente, se invertía gran cantidad de tiempo en el modelado y análisis matemático de problemas físicos, debido a la falta de algún medio que permitiera simplificar estos procesos tediosos Sin embargo, la enorme rapidez con que avanza la tecnología provoca que hoy el ingeniero cuente con una gran diversidad de herramientas que facilitan en gran medida la realización de su trabajo, por lo que el nuevo enfoque de la ingeniería tiende a emplear con mayor frecuencia la generación de nuevos métodos y algoritmos de solución a partir de los conocimientos adquiridos y con la opción de aplicarlos en una computadora.

Es indiscutible, que en nuestros días la computación es una necesidad sin la cual existe una desventaja diferencial con respecto a quien la maneja

En la actualidad son ya muchas las personas que utilizan la Internet como un medio de consulta, comunicación o herramienta de trabajo, debido a la enorme comodidad que representa el poder disponer de lo antes mencionado, sin necesidad de moverse físicamente de un lugar de trabajo o residencia

Con base en lo anterior, en este trabajo, se eligió elaborar los medios que faciliten la solución de ciertos problemas de ingeniería estructural mediante el enfoque de que los programas implementados resulten "amigables" para cualquier usuario, ofreciendo todas las ventajas que representa el hecho de que se encuentre dentro de la red.

De esta forma es como las computadoras han permitido que la ingeniería estructural emplee sus algoritmos y siendo las matrices entes matemáticos que requieren del empleo de memoria y del almacenamiento de gran cantidad de datos, facilitan la tarea de realizar acciones repetitivas y tediosas que no se podían evitar en el pasado.

Nuestra idea, como ingenieros civiles, es aprovechar la tecnología existente para lograr los objetivos mencionados. Desde luego que este trabajo tiene a la computación como un apoyo más no la considera un fin.

David Joaquín Delgado Hernández.
Alfonso Islas Hernández.
Gonzalo Paz Mendoza.

CAPÍTULO I

FUNDAMENTOS DEL MÉTODO DE RIGIDECES.

El método básico de las *rigideces* deriva su nombre del hecho de que tanto las relaciones de *fuerza - desplazamiento* de los miembros como de la estructura se expresan en términos de la rigidez. Iniciando con la relación de rigidez entre las fuerzas de un miembro estructural y sus desplazamientos, se utilizan las relaciones de *equilibrio* y *continuidad* del sistema para generar un conjunto de *n* ecuaciones con *n* grados de libertad desconocidos. Estas ecuaciones finales son de la misma forma que las relaciones *fuerza - desplazamiento*, en el elemento; esto es, algún conjunto de fuerzas es equivalente al producto de la rigidez de la estructura y los desplazamientos de la misma. Una vez formadas, estas ecuaciones pueden resolverse para los desplazamientos de la estructura y estos pueden entonces sustituirse en las relaciones entre fuerzas y desplazamientos de cada elemento para encontrar todas las fuerzas y deformaciones que actúan sobre ellos.

1.1 Hipótesis del análisis elástico lineal.

Se estudiarán estructuras cuyos elementos tienen un comportamiento elástico lineal. Se considerará al material de las estructuras como homogéneo e isótropo, cuyo comportamiento mecánico obedece a una relación lineal proporcional de los esfuerzos generados en el material debido a la acción de deformaciones. Esta relación puede enunciarse como sigue:

"La deformación ejercida en el elemento es proporcional a los esfuerzos generados en función de las características físicas del material".

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (1.1.1)$$

Las características del material se representan con el módulo de elasticidad *(E)*, el cual se define como la pendiente de la curva *esfuerzo - deformación* para el material en cuestión. Los esfuerzos son representados por la letra *(σ)* y las deformaciones con la letra *(ε)*, tal como puede apreciarse en la figura (1.1.1), en donde la pendiente de la curva *esfuerzo - deformación* es constante y por lo mismo el módulo de elasticidad *(E)*, también lo es.

Las hipótesis anteriores son válidas dentro de un cierto rango de operación donde los desplazamientos son pequeños bajo la de acción de cargas.

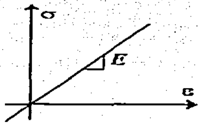


Figura I.1.1 Diagrama *esfuerzo - deformación* para un material con comportamiento elástico lineal.

Otro requisito para que la hipótesis planteada sea válida es que, al descargar un miembro, el desplazamiento debe seguir exactamente la misma trayectoria *carga - desplazamiento* que tuvo durante el proceso de carga hasta recuperar su forma inicial. Se dice que un material que se comporta de ésta forma es elástico; de otro modo, se llama inelástico. Las trayectorias de carga de la figura (I.1.2) ilustran varios tipos de comportamiento del material.

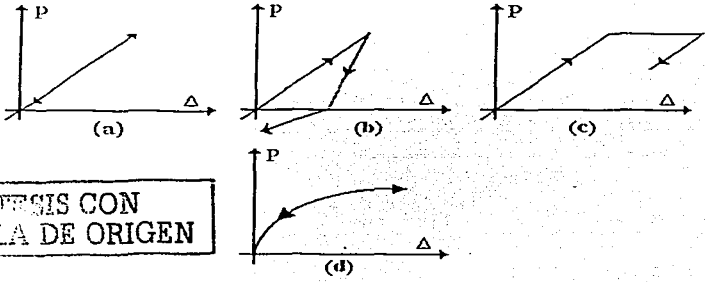


Figura I.1.2 Trayectorias de carga y descarga en diversos diagramas *fuerza - desplazamiento* para diversos comportamientos de materiales.

(a) Elásticamante lineal.
(b) Inelásticamente lineal.
(c) Inelásticamente no lineal.
(d) Elásticamente no lineal.

Principios fundamentales del análisis estructural.

El análisis estructural lineal esta basado en tres principios:

1) Principio de continuidad.
2) Ley de Hooke.
3) Principio de equilibrio.

Para demostrar su generalidad, inicialmente describiremos la aplicación de estos principios a un medio continuo.

1.2 Continuidad.

Si aplicamos un estado de fuerzas como el que se muestra en la figura (1.2.1) a un cuerpo elástico, este se deforma y el punto *P* pasará a la posición *P'*, por lo que se puede decir que los desplazamientos de un elemento diferencial de un cuerpo elástico son funciones continuas, en lo sucesivo éstas últimas se expresarán como $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$ y $w(x,y,z)$.

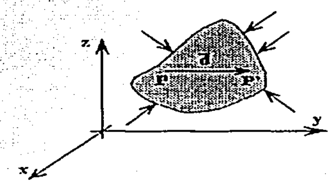


Figura 1.2.1 Deformación de un medio continuo.

"El principio de continuidad permite obtener las deformaciones en función de los desplazamientos".

La convención de signos adoptada, considera que los desplazamientos lineales y fuerzas serán positivas en dirección de los ejes coordenados, mientras que las rotaciones lo serán alrededor de los ejes, manejando la regla de la mano derecha: positivos en sentido antihorario, como se muestra en la figura (1.2.2).

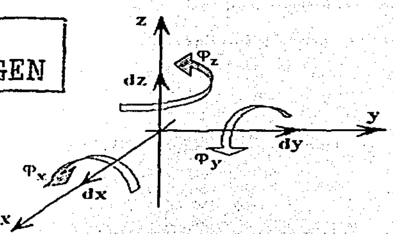


Figura I.2.2 Convención de signos positivos para los desplazamientos lineales y angulares.

Las deformaciones en un medio continuo pueden ser de dos tipos: longitudinales y angulares. Las deformaciones longitudinales se definen como:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{(Deformación en la dirección del eje } x\text{)} \qquad \text{(I.2.1.a)}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{(Deformación en la dirección del eje } y\text{)} \qquad \text{(I.2.1.b)}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{(Deformación en la dirección del eje } z\text{)} \qquad \text{(I.2.1.c)}$$

Las deformaciones angulares se obtienen como:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{yx} \qquad \text{(I.2.2.a)}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{zx} \qquad \text{(I.2.2.b)}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{zy} \qquad \text{(I.2.2.c)}$$

De esta manera, conocidas las funciones de desplazamientos u, v y w, podemos conocer las funciones de deformación (tanto lineales como angulares).

Expresando las ecuaciones de deformación en forma matricial, se tiene que:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \qquad (1.2.3)$$

Estas mismas ecuaciones en forma condensada resultan:

$$\{e\} = [A]\{d\} \qquad (1.2.4)$$

La expresión (1.2.4) es la ecuación fundamental del principio de continuidad.

Donde:

- **$\{e\}$ = Es el vector de deformaciones tanto lineales como angulares.**
- **$[A]$ = Es operador matricial que relaciona las deformaciones con los desplazamientos.**
- **$\{d\}$ = Es el vector de desplazamientos u, v y w sobre los ejes x, y y z respectivamente.**

1.3 Ley de Hooke.

Este principio se refiere al estudio de la relación entre las fuerzas internas en los elementos y sus deformaciones. La naturaleza de las deformaciones determina el tipo de fuerzas internas. La relación entre fuerzas internas y deformaciones en las barras, cualquiera que sea el tipo de estructura que se analice, se hará con base en los conocimientos de resistencia de materiales.

Si consideramos un elemento diferencial de un medio continuo como el mostrado en la figura (I.3.1), se tiene un estado de esfuerzos normales y tangenciales en las caras del elemento.

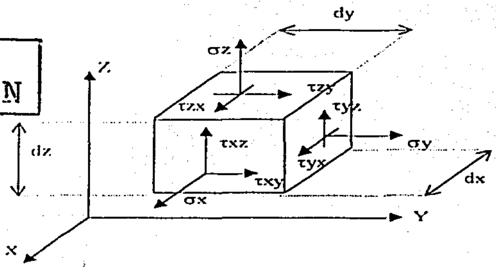


Figura I.3.1 Elemento diferencial del medio continuo

En la figura (I.3.1) consideramos que en el entorno de un punto conocemos los esfuerzos normal *(σ)* y cortante *(τ)* en tres planos respectivamente perpendiculares entre sí; el subíndice del esfuerzo normal indica el eje al cual este esfuerzo es paralelo. El esfuerzo cortante se designa con dos subíndices: el primero indica la dirección de la normal al plano donde actúa el esfuerzo cortante y el segundo indica la dirección al eje al cual es paralelo el esfuerzo cortante.

σ_x, σ_y, σ_z representan los esfuerzos normales a las caras en las direcciones x, y y z respectivamente. Mientras que τ_{xy}, τ_{xz} y τ_{yz} representan los esfuerzos tangenciales en las caras del elemento diferencial de la figura (I.3.1).

Por equilibrio en las caras opuestas, los esfuerzos cortantes o tangenciales resultan:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \qquad (I.3.1.a)$$
$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \qquad (I.3.1.b)$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad (I.3.1.c)$$

Basándose en lo anterior, se puede establecer una relación directa entre los esfuerzos y las deformaciones del elemento diferencial.

Considérese un elemento del medio continuo como el que se muestra en la figura (I.3.2) sujeto a carga axial en el que se toma en cuenta la deformación en dirección longitudinal y transversal.

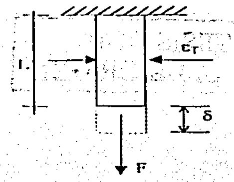


Figura I.3.2 Deformación longitudinal y transversal debido a carga axial.

Se tendrá entonces, que la deformación unitaria en dirección de la fuerza es:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \tag{I.3.2}$$

Donde:

- ε = Deformación unitaria en la dirección de la carga.
  δ = Desplazamiento en dirección de la carga.
  L = Longitud inicial del elemento.

Por efecto del alargamiento de la barra se producirá una deformación transversal *(ε_t)* que se calcula con la ecuación (I.3.3) definida como:

$$\varepsilon_t = -\nu\,\varepsilon \tag{I.3.3}$$

Donde:

ν = Relación de Poisson, $0 \le \nu \le 0.5$

Para el estado de carga mostrado en la figura (I.3.2), el esfuerzo axial en la barra se calcula con la ecuación (I.1.1) donde se puede ver que es directamente proporcional a la deformación longitudinal (ver figura I.1.1). De manera análoga, se puede demostrar que para un estado triaxial de esfuerzos se tienen las siguientes relaciones de *esfuerzo deformación*.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] \tag{I.3.4.a}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \tag{I.3.4.b}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] \tag{I.3.4.c}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad (1.3.4.d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \qquad (1.3.4.e)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \qquad (1.3.4.f)$$

Donde, G = módulo de rigidez al cortante, y se calcula como: $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

Expresando matricialmente estas expresiones, se tiene que:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \qquad (1.3.5)$$

En forma condensada:

$$\{e\} = [f]\{S\} \qquad (1.3.6)$$

Donde :

{e} = es el vector de deformaciones.
[f] = es un operador .
{S} = es el vector de esfuerzos.

Si hacemos

$$[k] = [f]^{-1} \qquad (1.3.7)$$

Podemos escribir:

$$\{S\} = [k]\ \{e\} \qquad (1.3.8)$$

Que es la ecuación fundamental del principio de la ley de Hooke.

Se podrá estudiar más adelante que el operador *[f]* es equivalente a la matriz que representa las flexibilidades en estructuras esqueletales, es decir es un arreglo que contiene los desplazamientos debidos a fuerzas unitarias. La inversa de la matriz de flexibilidades es la matriz de rigidez *[K]*, que representa las fuerzas debidas a la acción de desplazamientos unitarios

1.4 Equilibrio

Este principio se refiere las condiciones que deben tener fuerzas internas y fuerzas externas para que se satisfagan las leyes de la estática, es decir, la relación entre fuerzas internas y externas determinadas por $\Sigma F_X=0$, $\Sigma F_Y=0$ y $\Sigma F_Z=0$. Las fuerzas internas quedaron definidas en el estudio del principio de la *ley de Hooke.*

A continuación mostramos las ecuaciones de equilibrio aplicadas al continuo (figura 1.3.1):

$\Sigma F_X=0$

$$X+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=0 \qquad (1.3.9.a)$$

$\Sigma F_Y=0$

$$Y+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=0 \qquad (1.3.9.b)$$

$\Sigma F_Z=0$

$$Z+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0 \qquad (1.3.9.c)$$

X, Y y Z son las fuerzas de cuerpo o de peso propio $F_c=\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} dV$, en sus tres direcciones.

En forma matricial se tiene:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}=\{0\} \qquad (1.3.10)$$

De manera condensada queda como:

$$\{F_C\} + [A]^T \{S\} = \{0\} \qquad (1.3.11)$$

Las ecuaciones (1.3.9) son las ecuaciones fundamentales de equilibrio.

Una vez planteados los tres principios, el problema se resuelve sustituyendo las ecuaciones (1.2.4) y (1.3.8) en la ecuación (1.3.11), y resulta que:

$$\{F_C\} + [A]^T [k] [A] \{d\} = \{0\} \qquad (1.3.12)$$

Que representan las ecuaciones de *Navier*. Estas son ecuaciones diferenciales de segundo grado.

La formulación desarrollada mediante la aplicación al medio continuo de los tres principios (principio de continuidad, ley de Hooke y principio de equilibrio) establece la base de la Teoría de la Elasticidad.

CAPÍTULO II

ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS RETICULARES

PROCESO DE ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS.

Antes de discutir la metodologia empleada en el análisis estructural, es importante entender la relación del análisis con los objetivos de la ingenieria estructural. En términos simples, la ingenieria estructural abarca dos áreas: el análisis y el diseño de un sistema estructural. Los objetivos del procedimiento de análisis, en su mayor parte, se refieren a la determinación de fuerzas y desplazamientos de una estructura. En cambio los objetivos del proceso de diseño incluyen la selección y el detallamiento de los componentes del sistema estructural. Aún cuando estos dos aspectos de la ingenieria estructural se estudian con frecuencia en cursos separados en los planes de estudio de las escuelas de ingenieria, en la práctica profesional son inseparables

El análisis de una estructura parte del conocimiento de las dimensiones de todos sus miembros, que inicialmente se obtienen de un prediseño. Este diseño a menudo esta basado en un análisis mas o menos burdo o simple, y está influenciado por la experiencia y criterio del ingeniero. Habiendo determinado un conjunto inicial de tamaños de los miembros, puede hacerse un análisis mas detallado para determinar las fuerzas y los desplazamientos. Esto puede entonces conducir a un rediseño y un análisis subsecuente

Lo anterior representa la situación típica de la interacción entre el análisis y el diseño estructural. El proceso de ingenieria en su conjunto es ciclico, como se ilustra en la figura (II.1) donde S_i representa la colección de todos los tamaños de los miembros (como el área de la sección transversal y la inercia) para el ciclo de diseño i. Las cantidades F_i, Δ_i y σ_i son respectivamente las fuerzas en los miembros, los desplazamientos estructurales importantes y los esfuerzos pertinentes en los miembros para el ciclo i. Los términos σ_{max} y Δ_{max} son los esfuerzos y desplazamientos máximos permisibles.

El proceso de análisis y diseño puede, en realidad, ser considerado como un problema de optimización. Para ello se introdujo el término C_i en la figura (II.1) que representa el costo del sistema estructural. Seria ideal satisfacer todos los requisitos de esfuerzos y restricciones de desplazamientos (es decir, $\sigma_i < \sigma_{max}$ y $\Delta_i < \Delta_{max}$) y al mismo tiempo, minimizar el costo.

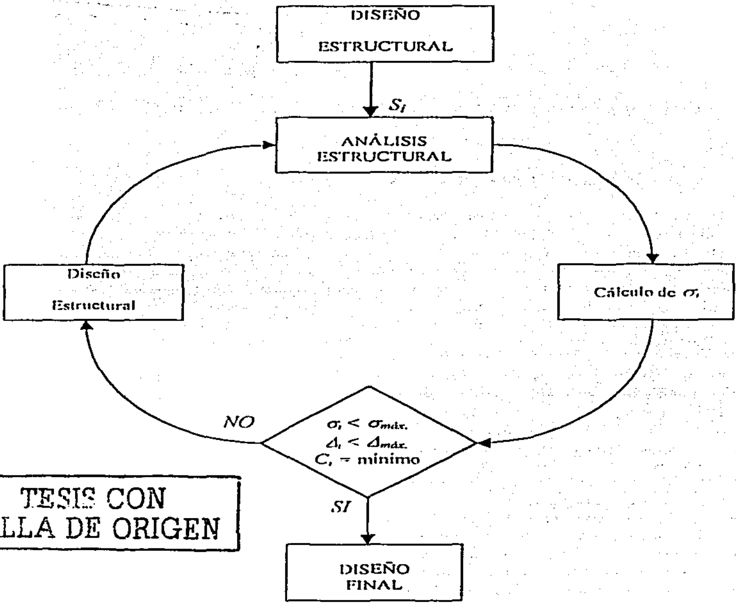


Figura II.1 Proceso cíclico del análisis y el diseño estructural.

El procedimiento anterior es bastante general, en ocasiones hay circunstancias en las que todos esos pasos pueden efectuarse de manera simultánea, pero está restringido a las estructuras más simples. Sin embargo es práctica común diseñar la estructura con base en las fuerzas obtenidas del análisis y revisar los desplazamientos sólo después de haber satisfecho todas las restricciones relativas a los esfuerzos.

TIPOS DE ESTRUCTURAS.

La ingeniería estructural se ocupa de una gran diversidad de estructuras tales como edificios, puentes, estadios, torres de transmisión, torres de radio y televisión, cables, arcos, tanques de agua, pavimentos de concreto y muchas otras. A fin de considerar esta amplia gama de estructuras se deben conocer los principios básicos que se aplican no sólo a las estructuras antes mencionadas, sino también a otros tipos de construcciones que no necesariamente son propias del área de la ingeniería civil como barcos y aviones por ejemplo.

En este trabajo nos enfocaremos en el estudio de estructuras esqueletales, es decir, aquellas que se pueden modelar con barras ya sean vigas, columnas, elementos biarticulados, etc.

GRADOS DE LIBERTAD.

Los grados de libertad de una estructura son el número mínimo de parámetros necesarios para describir de manera única la figura deformada de la misma. Estos parámetros pueden ser ciertos desplazamientos lineales y angulares en diversos puntos de la estructura que relacione los grados de libertad de los nudos que lo definen. La forma desplazada de un miembro estructural puede, en general, expresarse en términos de una ecuación.

Analicemos un nudo en un marco de una estructura tridimensional como el mostrado en la figura (II.2.a), en el cual para, el sistema de referencia mostrado se presenta seis grados de libertad: tres desplazamientos lineales uno en dirección de cada eje y de tres rotaciones cada una alrededor de cada dirección principal. Estos seis desplazamientos pueden inducir seis movimientos de cuerpo rígido de un miembro de marco tridimensional conectado a ese nudo (véanse figura II.2 b y II.2 c). Es decir en cada nudo de un marco tridimensional existen seis posibles grados de libertad independientes. También existen seis posibles movimientos de cuerpo rígido.

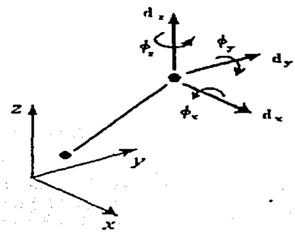


Figura II.2.a Grados de libertad de un nudo en el espacio.

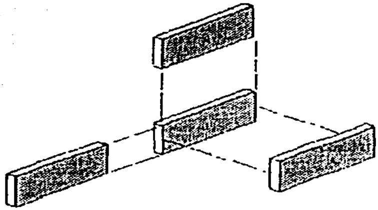


Figura II.2.b. Movimientos lineales de un elemento estructural en el espacio.

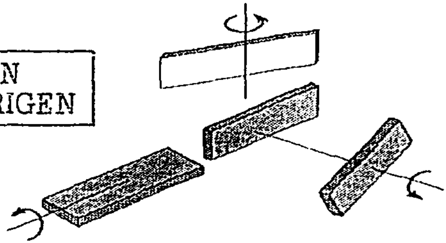


Figura II.2.c. Movimientos angulares de un elemento estructural en el espacio

Ahora bien, si analizamos un marco plano, observamos que su modelo es un caso particular del marco tridimensional, ya que se restringen tres grados de libertad (dos rotaciones y un desplazamiento lineal). En un marco plano los desplazamientos lineales independientes ocurren en dos ejes perpendiculares y una rotación alrededor de un tercer eje perpendicular al plano formado por los dos primeros. Figura (II.3).

Si consideramos un modelo de retícula plana, observamos que se trata también de un caso particular del marco tridimensional. La retícula plana presenta tres grados de libertad de la siguiente forma: dos rotaciones alrededor de dos ejes perpendiculares y un desplazamiento lineal perpendicular a los otros dos. Esto se representa en la figura (II.4). La superposición de los modelos de marco plano y de retícula plana forma el marco tridimensional

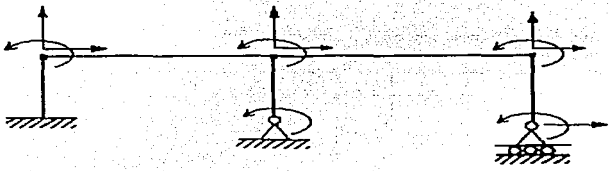


Figura II.3 Grados de libertad de un marco plano de acuerdo a las restricciones de sus nudos libres y apoyos.

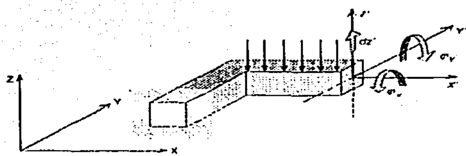


Figura II.4 Modelo de retícula plana.

Una armadura espacial, es otro caso particular del marco tridimensional. Debido a la escasa o nula inercia en los extremos de sus elementos, estos soportan únicamente fuerzas axiales que proyectamos en tres direcciones, por lo tanto, se tienen tres grados de libertad por nudo los cuales corresponden a desplazamientos lineales en los tres ejes coordenados. Figura (II.5).

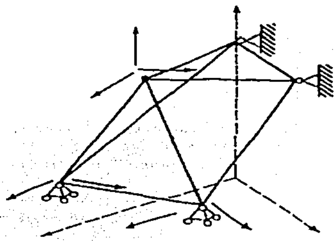


Figura II.5 Ejemplo de armadura tridimensional con sus grados de libertad indicados de acuerdo a sus nudos libres y apoyos restringidos parcialmente.

Una armadura en el plano, a su vez es un caso particular de una armadura espacial, ya que existen sólo dos grados de libertad que corresponden a desplazamientos de traslación en su plano en dirección de dos ejes cartesianos. Figura (II.6).

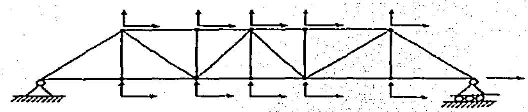


Figura II.6 Ejemplo de armadura plana con sus grados de libertad indicados en nudos libres y apoyos.

A lo largo del presente trabajo se utilizará entonces el término "*grados de libertad*" en sentido más general para significar todos los movimientos posibles de los nudos de una estructura. Figura (II.7)

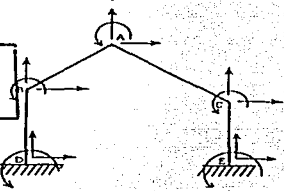


Figura II.7 Grados de libertad libres y prescritos.

En el marco plano de la figura (II.7), se muestra que los desplazamientos libres ocurren en los nudos *A*, *B* y *C*, mientras que los nudos *E* y *D* se presentan movimientos prescritos a desplazamientos nulos.

II.1 ARMADURAS PLANAS Y ESPACIALES.

Una armadura es una estructura integrada por un conjunto de barras conectadas de manera que forman uno o más triángulos. Ya que estos elementos se supone que están unidos mediante articulaciones ideales, la forma triangular es una configuración estructuralmente estable, aunque existen algunas excepciones.

En casos prácticos, el considerar la escasa rigidez a flexión que pudieran tener sus elementos, complica el procedimiento numérico y no se logran grandes beneficios.

Las armaduras planas son estructuras que generalmente se emplean en naves industriales, puentes, techos, anuncios espectaculares, etc.

Hipótesis para el análisis de armaduras.

Se consideran las siguientes hipótesis con el fin de simplificar el análisis de armaduras:

1. Las barras están unidas mediante articulaciones libres de fricción. En realidad las conexiones de pasador se utilizan muy poco en las armaduras actuales y a ninguna se le puede considerar libre de fricción. Entre una robusta unión atornillada o soldada, y una articulación ideal de pasador libre de fricción, existe una gran diferencia, aunque el modelo de armadura podría cambiar si la rigidez a flexión de los elementos es considerable, para lo cual sería recomendable un análisis de marco

2. Los elementos que forman una armadura poseen momento de inercia despreciable por lo que sólo soportan fuerzas axiales de compresión o de tensión.

3. Las barras son elementos perfectamente rectilíneos, si no lo fueran las fuerzas axiales causarían sobre ellas momentos flexionantes, se tendrían problemas de pandeo y de reducción de la capacidad a compresión.

4. Las deformaciones de una armadura originadas por cambios en la longitud de sus elementos son despreciables para causar cambios importantes en su configuración inicial.

5. Los elementos de una armadura están dispuestos de manera que las cargas y reacciones a que está sujeta se consideran aplicadas únicamente en sus nudos.

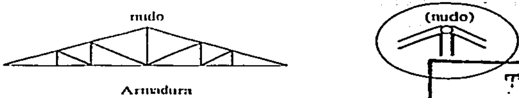


Figura II.1.1 Ejemplo de armadura plana.

La figura (II.1.1) ilustra una armadura en la cual se observa que sus elementos forman triángulos, y por las hipótesis mencionadas se considera que sólo trabajan a tensión o a compresión.

A continuación se presentan dos métodos matriciales que nos permiten resolver este tipo de estructuras, empezando con el método de las rigideces que durante mucho tiempo ha sido el más usado en el ejercicio profesional de la ingeniería, y finalmente se presenta el planteamiento por medio de la matriz de continuidad que es un método eficiente y sencillo para la solución de este tipo de estructuras y en general de aquellas formadas por barras.

Además para tener cierto orden en la exposición de las ideas se verá primero el caso de armaduras en dos dimensiones, tratando de fijar en el lector los conceptos fundamentales aplicados a este caso, para facilitar su comprensión en el modelo tridimensional.

II.1.1 Planteamiento por el método convencional utilizando el método del ensamble de submatrices de rigideces.

Entenderemos por ***rigidez***, la fuerza debida a un desplazamiento unitario aplicado en dirección de un grado de libertad de un nudo. Por lo tanto, tendremos varios tipos de rigideces, por ejemplo, rigidez axial, rigidez a flexión, rigidez a torsión, etc.

Armaduras planas.

Para abordar este tema, será necesario estudiar previamente un elemento con propiedades elásticas lineales como el mostrado en la figura (II.1.1.1). Este elemento esta definido a partir de los nudos inicial *(A)* y final *(B)*.

Si aplicamos un desplazamiento axial unitario en el extremo *"A"* del elemento, en dirección positiva de los ejes de referencia, se produce una fuerza axial *EA/L* que depende de sus propiedades mecánicas y geométricas, como se observa en la figura (II.1.1.1).

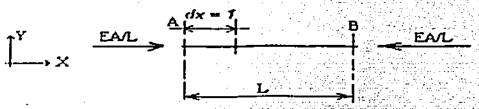


Figura II.1.1.1 Elemento sujeto a un desplazamiento axial unitario positivo en su extremo inicial

Donde:

E = Módulo de elasticidad.
A = Área de la sección (transversal).
L = Longitud del elemento.

A la fuerza axial resultante debida al desplazamiento unitario en dirección axial, se le conoce como rigidez axial del elemento y queda definido por:

$$k = \frac{EA}{L}$$

A continuación se estudia una barra inclinada un ángulo α con respecto a una horizontal. Sea la barra i de la figura (II.1.1.1.a), en la que provocaremos desplazamientos unitarios positivos en las direcciones de los grados de libertad de cada nudo. Es importante recalcar que los desplazamientos unitarios serán siempre en sentido positivo de los ejes del sistema de referencia.

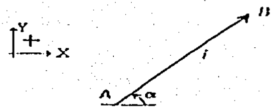


Figura II.1.1.1.a Elemento de armadura plana, inclinada un ángulo α

Se encontrará una relación matricial entre las fuerzas originadas por la aplicación de desplazamientos unitarios positivos en sus extremos en dirección de los grados de libertad de los nudos del elemento. Los desplazamientos unitarios se aplicarán en forma independiente, manteniéndose restringidos los demás grados de libertad

Encontraremos las fuerzas debidas a la aplicación de desplazamientos unitarios en el extremo *A*. En la figura (II.1.1.2) se presentan las fuerzas generadas por un desplazamiento unitario en la dirección *x* ($dx_A = 1$).

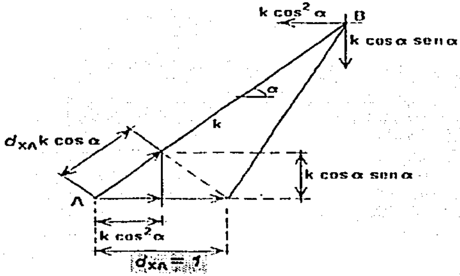


Figura II.1.1.2 Elemento inclinado bajo la aplicación de un desplazamiento unitario positivo en dirección x

Las fuerzas calculadas son función directa de la deformación axial inducida al elemento por el desplazamiento aplicado y se obtienen al multiplicar la rigidez axial por la deformación calculada en la misma dirección, como se observa en la figura (II.1.1.2). Las fuerzas en el extremo *B* se obtienen por equilibrio estático. Es decir:

$$d_{XA} = 1 \quad \begin{cases} F_{XA} = k\cos^2\alpha \\ F_{YA} = k\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ F_{XB} = -k\cos^2\alpha \\ F_{YB} = -k\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

Si ahora provocamos un desplazamiento unitario en el extremo *A* pero en la dirección *y* ($d_{YA} = 1$).

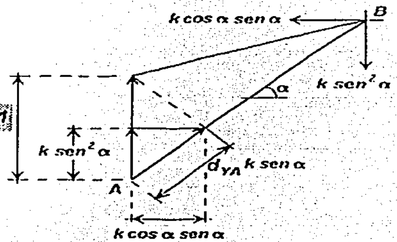


Figura II.1.1.3 Elemento inclinado con desplazamiento en dirección *y* en el extremo *A*

Se obtiene el siguiente sistema de fuerzas, ilustrado en la figura (II.1.1.3).

$$d_{YA} = 1 \quad \begin{cases} F_{XA} = k\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha \\ F_{YA} = k\operatorname{sen}^2\alpha \\ F_{XB} = -k\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha \\ F_{YB} = -k\operatorname{sen}^2\alpha \end{cases}$$

Si se hace lo mismo para el extremo *B* de la barra y se provoca un desplazamiento unitario en dirección *x* ($d_{XB} = 1$), se obtienen las fuerzas de la figura (II.1.1.4).

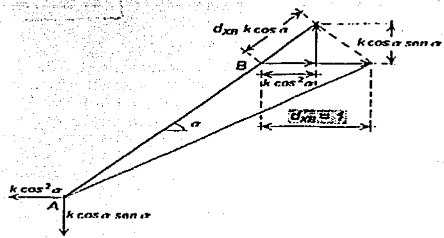


Figura II.1.1.4 Elemento inclinado con desplazamiento en dirección *x* en el extremo *B*.

Es decir:

$$d_{XB}=1\quad\begin{cases}F_{XA}=-k\cos^2\alpha\\F_{YA}=-k\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha\\F_{XB}=k\cos^2\alpha\\F_{YB}=k\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha\end{cases}$$

Finalmente si se provoca un desplazamiento unitario en el extremo B en sentido positivo de la dirección del eje y ($d_{YB}=1$).

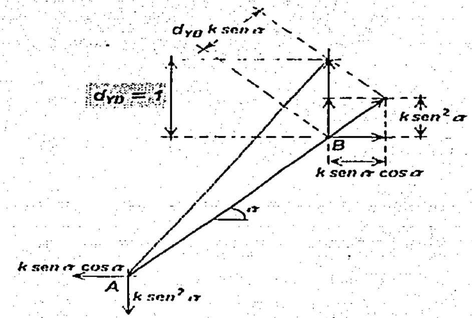


Figura II.1.1.5 Elemento inclinado con desplazamiento en dirección y en el extremo B.

Es decir:

$$d_{YB}=1\quad\begin{cases}F_{XA}=-k\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha\\F_{YA}=-k\,\mathrm{sen}^2\alpha\\F_{XB}=k\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha\\F_{YB}=k\,\mathrm{sen}^2\alpha\end{cases}$$

Expresemos las ecuaciones anteriores en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix}Fx_A\\Fy_A\\Fx_B\\Fy_B\end{Bmatrix}=\left[\begin{array}{cc:cc}c^2 & cs & -c^2 & -cs\\ cs & s^2 & -cs & -s^2\\ -c^2 & -cs & c^2 & cs\\ -cs & -s^2 & cs & s^2\end{array}\right]k\begin{Bmatrix}dx_A\\dy_A\\dx_B\\dy_B\end{Bmatrix}\qquad\text{(II.1.1.1)}$$

En forma condensada se puede expresar como:

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ \hline F_B \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} k_{AA} & k_{AB} \\ \hline k_{BA} & k_{BB} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} d_A \\ \hline d_B \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.1.1.2)}$$

Donde:

k_{AA} = Fuerzas en el extremo *A* del elemento, debido a desplazamientos unitarios en el extremo *A*.

k_{BA} = Fuerzas en el extremo *B* del elemento, debido a desplazamientos unitarios en el extremo *A*.

k_{BB} = Fuerzas en el extremo *B* del elemento, debido a desplazamientos unitarios en el extremo *B*.

k_{AB} = Fuerzas en el extremo *A* del elemento, debido a desplazamientos unitarios en el extremo *B*.

Puede observarse que la expresión anterior representa la ecuación de rigideces:

$$\{F\}_i = [K]_i \{d\}_i \qquad \text{(II.1.1.3)}$$

Este análisis corresponde sólo para una barra *i* cualquiera de una armadura plana.

Posteriormente, se procede a ensamblar las submatrices de cada barra en función de los nudos asociados a los extremos de esta.

Nótese que para resolver la ecuación (II.1.1.3), matemáticamente se tendria que invertir la matriz de rigideces y después multiplicar por el vector de fuerzas para obtener los desplazamientos, sin embargo, se puede demostrar que esto es equivalente a resolver un sistema de ecuaciones lineales, cuyo manejo numérico es menos tedioso, incluso para una computadora. Los desplazamientos obtenidos del planteamiento anterior son referidos a un sistema de referencia global. Para conocer las fuerzas internas de un elemento, se requiere hacer el traslado de los desplazamientos calculados a un sistema local y multiplicarlos por su respectiva matriz de rigidez local. Para facilitar este procedimiento, se definirá una matriz de transformación de coordenadas.

Matriz de transformación de coordenadas para armaduras planas.

Si se considera el elemento inclinado de la figura (II.1.1.6), en el cual se presentan dos sistemas de referencia, uno de ellos global *(X, Y)* y otro local *(X', Y')*, el vector de fuerzas axiales sobre el elemento, se puede representar como un vector de fuerzas relativo al sistema global, mediante la proyección de sus componentes. Es decir, si tenemos un vector de fuerzas axiales sobre la barra:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix}$$

En sistema global tendremos:

$$Fx_A = F_A \cos\theta$$

$$Fy_A = F_A \operatorname{sen}\theta$$

$$Fx_B = F_B \cos\theta$$

$$Fy_B = F_B \operatorname{sen}\theta$$

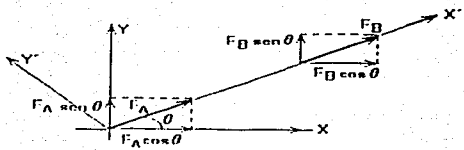


Figura II.1.1.6 Elemento de una armadura plana sujeto a un vector de fuerzas.

Expresado en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} Fx_A \\ Fy_A \\ Fx_B \\ Fy_B \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.1.1.4)}$$

Donde: $c = \cos\theta$ y $s = \operatorname{sen}\theta$

La matriz integrada por los cosenos y senos representa a la matriz de transformación que denotaremos como: $[T]$. En forma condensada se representa como:

$$\{F_G\} = [T]\{F_L\} \qquad \text{(II.1.1.5)}$$

El subíndice G denota el sistema global, mientras que L denota al sistema local.

Ya que este planteamiento es aplicable a vectores, siguiendo un procedimiento análogo al del vector de fuerzas, también se puede trabajar con el vector de desplazamientos, sin embargo, ahora nos interesará proyectar los desplazamientos de los nudos, obtenidos al resolver la ecuación fundamental (II.1.1.3) en un sistema global, sobre un sistema local en el elemento para conocer las deformaciones inducidas en este, figura (II.1.1.7).

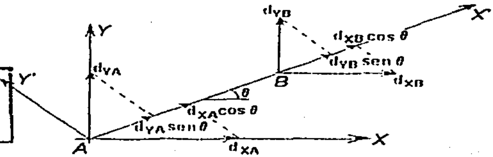


Figura II.1.1.7 Elemento sujeto a un vector de desplazamientos.

Es decir:

$$\delta_A = d_{XA}\cos\theta + d_{YA}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\delta_B = d_{XB}\cos\theta + d_{YB}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Expresado matricialmente:

$$\begin{Bmatrix}\delta_A\\ \delta_B\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0\\ 0 & 0 & c & s\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} dx_A\\ dy_A\\ dx_B\\ dy_B\end{Bmatrix} \qquad \text{(II.1.1.6)}$$

Se puede observar que el arreglo matricial de cosenos y senos es la transpuesta de la matriz $[T]$. En forma condensada, se puede escribir:

$$\{\delta\} = \{T\}^T\{d_G\} \qquad \text{(II.1.1.7)}$$

A continuación se presenta un ejemplo del método convencional de rigideces anteriormente descrito.

Problema 1

En la figura (II.1.1.8) se presenta una armadura plana de cinco barras, dos nudos y dos apoyos. Cada barra tiene las siguientes rigideces: $k_1 = k_4 = 2$ *ton/cm*, $k_2 = k_3 = k_5 = 3$ *ton/cm*. Se presentan además las cargas que actúan sobre la estructura, las cuales están aplicadas en los nudos.

Solución.

Comenzaremos por calcular las submatrices de rigideces de cada barra. Por comodidad, anotaremos un par de números en la parte superior de cada submatriz con el fin de identificar los grados de libertad correspondientes a cada nudo asociado del elemento. Para ello, emplearemos la ecuación (II.1.1.2).

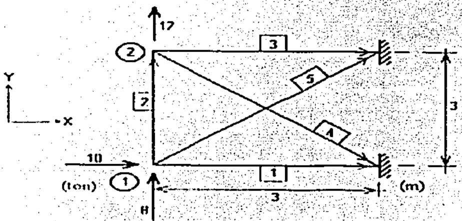


Figura II.1.1.8 Ejemplo de armadura plana por el método de las rigideces.

Obtención de la matriz de rigideces de los elementos.

Barra 1. $\theta = 0°$, $c = 1$ y $s = 0$

$$K_1 = \begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ k_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix}_1 = 2 \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & X \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} {}^{ton}/_{cm}$$

Barra 2. $\theta = 90°$, $c = 0$ y $s = 1$

$$K_2 = \begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ k_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix}_2 = 3 \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} {}^{ton}/_{cm}$$

Barra 3. $\theta = 0°$, $c = 1$ y $s = 0$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 2 & X \end{array} \\ K_3 = \left[\begin{array}{c|c} k_{AA} & k_{AB} \\ \hline k_{BA} & k_{BB} \end{array}\right]_3 = 3 & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] ton/cm \end{array}$$

Barra 4. $\theta = 315°$, $c = 0.7071$ y $s = -0.7071$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 2 & X \end{array} \\ K_4 = \left[\begin{array}{c|c} k_{AA} & k_{AB} \\ \hline k_{BA} & k_{BB} \end{array}\right]_4 = 2 & \left[\begin{array}{cc|cc} .5 & -.5 & 0 & 0 \\ -.5 & .5 & 0 & 0 \\ \hline -.5 & .5 & 0 & 0 \\ .5 & -.5 & 0 & 0 \end{array}\right] ton/cm \end{array}$$

Barra 5. $\theta = 45°$, $c = 0.7071$ y $s = 0.7071$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & X \end{array} \\ K_5 = \left[\begin{array}{c|c} k_{AA} & k_{AB} \\ \hline k_{BA} & k_{BB} \end{array}\right] = 3 & \left[\begin{array}{cc|cc} .5 & .5 & 0 & 0 \\ .5 & .5 & 0 & 0 \\ \hline -.5 & -.5 & 0 & 0 \\ -.5 & -.5 & 0 & 0 \end{array}\right] ton/cm \end{array}$$

Para realizar el ensamble se toma en cuenta la concurrencia de las barras en cada nudo. La matriz de rigidez de la estructura estará formada solo por las fuerzas o rigideces en los extremos de un elemento en la dirección de los grados de libertad.

Por lo tanto para el caso de elementos en que solo uno de sus extremos es nudo, se tendrá participación en las columnas y renglones de la matriz de rigidez global asociadas al nudo en ese extremo, para el caso de un elemento en que sus dos extremos son nudos, además de participar en la diagonal principal de la matriz de rigidez, lo hará en los renglones y columnas de los dos nudos correspondientes a sus extremos.

Lo anterior se representa en la siguiente expresión:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} nudo\ 1 & nudo\ 2 \end{array} \\ [K] = & \left[\begin{array}{c|c} k_{AA1} + k_{AA2} + k_{AA5} & k_{AB2} \\ \hline k_{BA2} & k_{BB2} + k_{AA3} + k_{AA4} \end{array}\right] \end{array}$$

Manejando las mismas unidades para las rigideces, haremos el análisis de cada nudo.

Para el *nudo 1*:

$$\left[k_{A11}+k_{A12}+k_{A15}\right]=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1.5 & 1.5\\ 1.5 & 1.5\end{bmatrix}$$

$$\left[k_{B12}\right]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

Para el *nudo 2*:

$$\left[k_{AB2}\right]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$$

$$\left[k_{A12}+k_{A13}+k_{A14}\right]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz de rigideces global de la estructura es:

$$K=\begin{bmatrix}3.5 & 1.5 & 0 & 0\\ 1.5 & 4.5 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 4 & -1\\ 0 & -3 & -1 & 4\end{bmatrix} ton/cm$$

De la figura (II.1.1.8) se puede obtener el vector de fuerzas en los nudos, esto es:

$$F=\begin{bmatrix}F_{X1}\\ F_{Y1}\\ F_{X2}\\ F_{Y2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\ 8\\ 0\\ 12\end{bmatrix} ton$$

Resolviendo el sistema $\{F\}=[K]\{d\}$, se tiene que:

$$\{d\}=\begin{Bmatrix}d_{X1}\\ d_{Y1}\\ d_{X2}\\ d_{Y2}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-1.059\\ 9.137\\ 2.627\\ 10.51\end{Bmatrix} cm$$

Una vez obtenido el vector de desplazamiento, se calculan las fuerzas en las barras. Para ello se utiliza el mismo concepto de rigideces, identificando previamente los desplazamientos que corresponden a cada extremo del elemento.

$$\{F_i\} = [k_i]\{d_{Gi}\}$$

Es decir:

$$\left\{\begin{array}{c} F_A \\ \hline F_B \end{array}\right\} = \left[\begin{array}{c|c} k_{AA} & k_{AB} \\ \hline k_{BA} & k_{BB} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} d_A \\ \hline d_B \end{array}\right\}$$

Las fuerzas así obtenidas se encuentran en sistema global. Para obtener la fuerza axial en cada elemento, bastará con proyectar las fuerzas globales sobre su eje axial con ayuda de la matriz de transformación de coordenadas respectiva.

Para el elemento *1* los desplazamientos del nudo inicial corresponden a los del nudo 1, mientras que el nudo final no presenta desplazamientos dado que se encuentra apoyado.

Barra 1: $\{F_1\} = [k_1]\{d_1\}$

$$\{F_1\} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1.059 \\ 9.137 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.118 \\ 0 \\ 2.118 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{AX} \\ F_{AY} \\ F_{BX} \\ F_{BY} \end{Bmatrix} ton$$

Barra2: $\{F_2\} = [k_2]\{d_2\}$

$$\{F_2\} = 3\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1.059 \\ 9.137 \\ 2.627 \\ 10.51 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -4.119 \\ 0 \\ 4.119 \end{Bmatrix} ton$$

Barra3: $\{F_3\} = [k_3]\{d_3\}$

$$\{F_3\} = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 2.627 \\ 10.51 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.881 \\ 0.0 \\ -7.881 \\ 0.0 \end{Bmatrix} ton$$

Barra 4: $\{F_4\} = [k_4]\{d_4\}$

$$\{F_4\} = 2\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 2.627 \\ 10.51 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -7.883 \\ 7.883 \\ 7.883 \\ -7.883 \end{Bmatrix} ton$$

Barra 5: $\{F_5\} = [k_5]\{d_5\}$

$$\{F_5\} = 3\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -1.059 \\ 9.137 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12.117 \\ 12.117 \\ -12.117 \\ -12.117 \end{Bmatrix} ton$$

Cálculo de fuerzas en sistema local.

Para todas las barras.

$$\{F_i\}_G = [T]\{F_i\}_L$$

por lo tanto:

$$\{F_i\}_L = [T]^{-1}\{F_i\}_G$$

Es decir:

$$\{F_i\}_L = [T]^T\{F_i\}_G$$

Barra 1: $\theta = 0°$

$$\{F_1\}_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -2.118 \\ 0 \\ 2.118 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.118 \\ 2.118 \end{Bmatrix} ton$$

Barra 2: $\theta = 90°$

$$\{F_2\}_L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ -4.119 \\ 0 \\ 4.119 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4.119 \\ 4.119 \end{Bmatrix} ton$$

Barra 3: $\theta = 0°$

$$\{F_3\}_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 7.881 \\ 0 \\ -7.881 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.881 \\ -7.881 \end{Bmatrix} ton$$

Barra 4: $\theta = 315°$

$$\{F_4\}_L = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7071 & -0.7071 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -7.883 \\ 7.883 \\ 7.883 \\ -7.883 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -11.148 \\ 11.148 \end{Bmatrix} \; ton$$

Barra 5: $\theta = 45°$

$$\{F_5\}_L = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 12.117 \\ 12.117 \\ -12.117 \\ -12.117 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 17.136 \\ -17.136 \end{Bmatrix} \; ton$$

Las fuerzas finales en cada miembro de la armadura se presentan en la figura (II.1.1.9). Para su representación, se tomó como convención que las fuerzas de tensión son positivas y las de compresión son negativas.

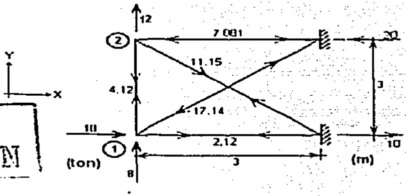


Figura II.1.1.9 Solución a la armadura de la figura II.1.1.8.

Armaduras tridimensionales.

Estudiaremos ahora el caso general de armaduras, es decir armaduras en tres dimensiones. En este tipo de estructuras ahora existen tres grados de libertad, ya que tienen posibilidad de movimiento lineal en las direcciones x, y y z. Por lo cual el vector de desplazamientos $\{d\}$ se define como:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

Por ende, el vector $\{F\}$ también crece, y lo definiremos como: $\{F\} = \begin{Bmatrix} Fx \\ Fy \\ Fz \end{Bmatrix}$

En la figura (II.1.1.10), se muestra el caso general de un elemento tridimensional biarticulado en el que ambos extremos *(A y B)* son nudos. Para obtener la matriz de rigidez de este elemento, se procederá de manera análoga al caso de armaduras planas, es decir, se irán provocando desplazamientos unitarios en las tres direcciones, en sentido positivo de ellas y para ambos extremos de la barra.

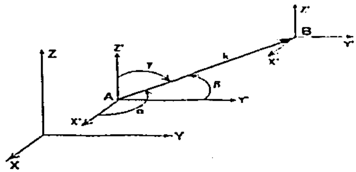


Figura II.1.1.10 Elemento de una armadura tridimensional de rigidez k, bajo sistema de referencia global y local.

Si aplicamos un desplazamiento unitario en dirección x del extremo A ($d_{XA}=1$) como se indica en la figura (II.1.1.11), se obtendrán las siguientes fuerzas:

$$d_{XA}=1 \quad \begin{cases} F_{XA} = k\cos^2\alpha \\ F_{YA} = k\cos\alpha\cos\beta \\ F_{ZA} = k\cos\alpha\cos\gamma \\ F_{XB} = -k\cos^2\alpha \\ F_{YB} = -k\cos\alpha\cos\beta \\ F_{ZB} = -k\cos\alpha\cos\gamma \end{cases}$$

Se observa que las últimas tres fuerzas tienen la misma magnitud pero signo contrario a las primeras tres, dado que resultan ser reacciones en B de las acciones en el extremo A.

Donde :

$\alpha =$ ángulo medido del eje x al eje de la barra.
$\beta =$ ángulo medido del eje y al eje de la barra.
$\gamma =$ ángulo medido del eje z al eje de la barra.
$k =$ rigidez axial = EA/L.

Si provocamos un desplazamiento en dirección y del extremo A ($d_{YA}=1$), el elemento se comporta según lo indica la figura (II.1.1.12).

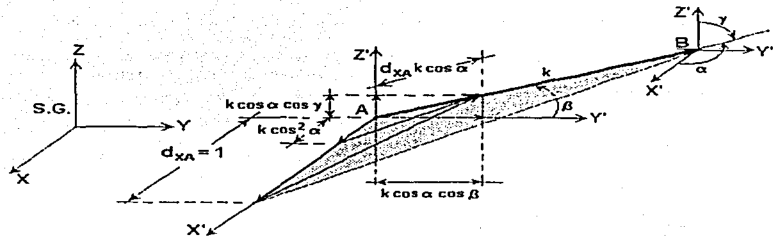


Figura II.1.1.11 Elemento de armadura espacial sujeto a un desplazamiento en dirección x en su extremo A.

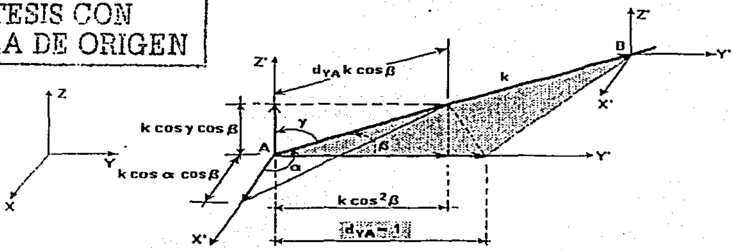


Figura II.1.1.12 Elemento de armadura espacial bajo un desplazamiento en dirección y en el extremo A.

En este caso se observa que las fuerzas son:

$$d_{YA}=1 \quad \begin{cases} F_{XA} = k\cos\alpha\ \cos\beta \\ F_{YA} = k\cos^2\beta \\ F_{ZA} = k\cos\beta\cos\gamma \\ F_{XB} = -k\cos\alpha\ \cos\beta \\ F_{YB} = -k\cos^2\beta \\ F_{ZB} = -k\cos\beta\cos\gamma \end{cases}$$

De manera similar, al generarse desplazamientos unitarios en la dirección z del extremo A (d_{ZA}=1) y en el extremo B en las tres direcciones ($d_{XB}=1$, $d_{YB}=1$, $d_{ZB}=1$ respectivamente) encontraremos las ecuaciones de equilibrio estático correspondientes. Al igual que en armaduras planas, podemos expresar dichas ecuaciones en forma matricial, lo cual es válido para cualquier barra que componga a la armadura

$$[K]=\begin{Bmatrix} c^2\alpha & c\alpha\, c\beta & c\alpha\, c\gamma & -c^2\alpha & -c\alpha\, c\beta & -c\alpha\, c\gamma \\ c\beta\, c\alpha & c^2\beta & c\beta\, c\gamma & -c\beta\, c\alpha & -c^2\beta & -c\beta\, c\gamma \\ c\gamma\, c\alpha & c\beta\, c\gamma & c^2\gamma & -c\gamma\, c\alpha & -c\gamma c\beta & -c^2\gamma \\ -c^2\alpha & -c\alpha\, c\beta & -c\alpha\, c\gamma & c^2\alpha & c\alpha\, c\beta & c\alpha\, c\gamma \\ -c\beta\, c\alpha & -c^2\beta & -c\beta\, c\gamma & c\beta\, c\alpha & c^2\beta & c\beta\, c\gamma \\ -c\gamma\, c\alpha & -c\gamma\, c\beta & -c^2\gamma & c\gamma\, c\alpha & c\gamma\, c\beta & c^2\gamma \end{Bmatrix}\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{L}} \qquad \text{(II.1.1.8)}$$

De esta forma se ha obtenido la matriz de rigidez de un elemento de armadura tridimensional. Obsérvese que la matriz (II.1.1.8), es el caso general de la correspondiente al modelo plano, dado que β es el ángulo complementario de α, se tiene que $c\beta = s\alpha$, además $c\gamma =$ 0, obteniendo así la ecuación (II.1.1.1).

Ahora podemos expresar la ecuación de rigideces antes vista como:

$$\{F\}=[K]\{d\}$$

Que en forma matricial se expresa como:

$$\begin{Bmatrix} Fx_A \\ Fy_A \\ Fz_A \\ \hline Fx_B \\ Fy_B \\ Fz_B \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\left\{\begin{array}{ccc|ccc} c^2\alpha & c\alpha\, c\beta & c\alpha\, c\gamma & -c^2\alpha & -c\alpha\, c\beta & -c\alpha\, c\gamma \\ c\beta\, c\alpha & c^2\beta & c\beta\, c\gamma & -c\beta\, c\alpha & -c^2\beta & -c\beta\, c\gamma \\ c\gamma\, c\alpha & c\beta\, c\gamma & c^2\gamma & -c\gamma\, c\alpha & -c\gamma\, c\beta & -c^2\gamma \\ \hline -c^2\alpha & -c\alpha\, c\beta & -c\alpha\, c\gamma & c^2\alpha & c\alpha\, c\beta & c\alpha\, c\gamma \\ -c\beta\, c\alpha & -c^2\beta & -c\beta\, c\gamma & c\beta\, c\alpha & c^2\beta & c\beta\, c\gamma \\ -c\gamma\, c\alpha & -c\gamma\, c\beta & -c^2\gamma & c\gamma\, c\alpha & c\gamma\, c\beta & c^2\gamma \end{array}\right\}\begin{Bmatrix} dx_A \\ dy_A \\ dz_A \\ dx_B \\ dy_B \\ dz_B \end{Bmatrix}$$

(II.1.1.9)

En este caso de estructuras también es posible realizar el planteamiento de submatrices de rigideces de acuerdo a los desplazamientos aplicados en un extremo y sus rigideces originadas en los mismos, es decir, la ecuación (II.1.1.9) se puede expresar como:

$$\{F_A\} = \begin{Bmatrix} Fx_A \\ Fy_A \\ Fz_A \end{Bmatrix} \qquad \{F_B\} = \begin{Bmatrix} Fx_B \\ Fy_B \\ Fz_B \end{Bmatrix} \qquad \{d_A\} = \begin{Bmatrix} dx_A \\ dy_A \\ dz_A \end{Bmatrix} \qquad \{d_B\} = \begin{Bmatrix} dx_B \\ dy_B \\ dz_B \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ \hline F_B \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} k_{AA} & k_{AB} \\ \hline k_{BA} & k_{BB} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} d_A \\ \hline d_B \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.1.1.10)}$$

Matriz de transformación de coordenadas para Armaduras Espaciales.

Sea la barra de la figura (II.1.1.13) un elemento cualquiera de una armadura tridimensional, orientado un ángulo α con respecto al eje X, un ángulo β con respecto al eje Y, y un ángulo γ con respecto al eje Z.

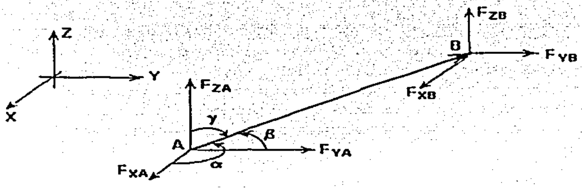


Figura II.1.1.13 Elemento inclinado de una armadura espacial bajo un vector de fuerzas en sus extremos.

Siendo F_A la fuerza en el extremo A y F_{XA}, F_{YA} y F_{ZA} las proyecciones de dicha fuerza sobre los ejes coordenados. De igual forma para el extremo B. Obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} F_{XA} &= F_A\, c\alpha \\ F_{YA} &= F_A\, c\beta \\ F_{ZA} &= F_A\, c\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{XB} &= F_B\, c\alpha \\ F_{YB} &= F_B\, c\beta \\ F_{ZB} &= F_B\, c\gamma \end{aligned}$$

Que expresadas de forma matricial, resultan:

$$\begin{Bmatrix} Fx_A \\ Fy_A \\ Fz_A \\ Fx_B \\ Fy_B \\ Fz_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c\alpha & 0 \\ c\beta & 0 \\ c\gamma & 0 \\ 0 & c\alpha \\ 0 & c\beta \\ 0 & c\gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} \qquad (II.1.1.11)$$

Siendo *[T]* la matriz de transformación de coordenadas del sistema de ejes local a global

$$[T] = \begin{bmatrix} c\alpha & 0 \\ c\beta & 0 \\ c\gamma & 0 \\ 0 & c\alpha \\ 0 & c\beta \\ 0 & c\gamma \end{bmatrix} \qquad (II.1.1.12)$$

Procediendo de manera análoga que para el caso de armadura plana, los desplazamientos globales proyectados sobre el eje axial del elemento son:

$$\delta_A = d_{XA}\, c\alpha + d_{YA}\, c\beta + d_{ZA}\, c\gamma$$

$$\delta_B = d_{XB}\, c\alpha + d_{YB}\, c\beta + d_{ZB}\, c\gamma$$

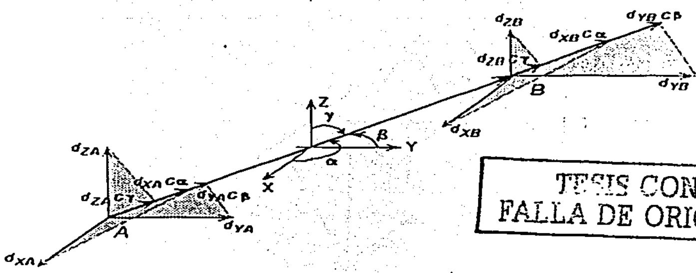


Figura II.1.1.14 Elemento de armadura espacial con desplazamientos en sus extremos

Expresándolo matricialmente, tenemos:

$$\begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c\alpha & c\beta & c\gamma & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & c\alpha & c\beta & c\gamma \end{array}\right] \begin{Bmatrix} dx_A \\ dy_A \\ dz_A \\ dx_B \\ dy_B \\ dz_B \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.1.1.13)}$$

Donde:

$[T]^t$ = transpuesta de la matriz de transformación.

$$[T]^t = \left[\begin{array}{ccc|ccc} c\alpha & c\beta & c\gamma & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & c\alpha & c\beta & c\gamma \end{array}\right] \qquad \text{(II.1.1.14)}$$

De igual forma, se puede demostrar que la matriz $[T]^T$ resulta ser la inversa de $[T]$.

$$\{\delta\} = [T]^T\{d\} \qquad \text{(II.1.1.15)}$$

Problema 2.

Se tiene una armadura que consta de diecinueve barras, cuatro nudos y cuatro apoyos, con las siguientes rigideces axiales en sus elementos: $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = k_7 = k_8 = 4$ *ton/cm* , $k_9 = k_{10} = 3$ *ton/cm*, $k_{11} = ... = k_{19} = 2$ *ton/cm*. Figura (II.1.1.15).

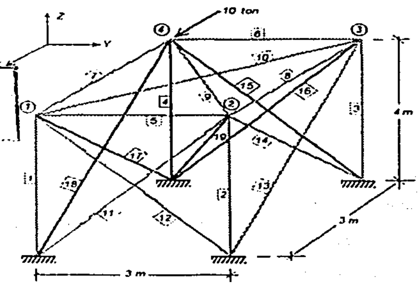


Figura II.1.1.15 Problema 2.

El procedimiento de solución de este problema se realiza de manera similar a como se estudió para el caso de armaduras planas.

Se obtienen las matrices de rigidez de cada barra, en función de la concurrencia a los nudos, se ensambla la matriz de rigideces de la estructura, una vez hecho esto, se resuelve el sistema de ecuaciones para obtener el vector de desplazamientos, finalmente se multiplica la matriz de rigidez de cada barra por aquella parte del vector de desplazamientos que contengan los elementos asociados a ambos extremos de la barra, llegando asi a obtener las fuerzas axiales que actúan en cada barra. Dada la gran cantidad de información sólo se presentan los resultados.

Resultados :

Barra	*Fuerza axiales (ton)*
1	*-2.51*
2	*-2.83*
3	*2.21*
4	*2.65*
5	*0.61*
6	*0.03*
7	*-4.03*
8	*0.09*
9	*-2.84*
10	*1.09*
11	*0.35*
12	*-2.30*
13	*-1.43*
14	*1.21*
15	*3.29*
16	*-1.34*
17	*5.44*
18	*-6.60*
19	*2.31*

II.1.2 Planteamiento por el método de la matriz de continuidad.

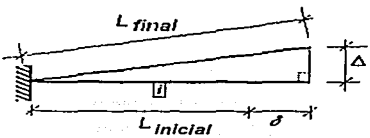
Continuidad.

La continuidad es el estudio geométrico de las estructuras y se refiere específicamente a la relación existente entre los cambios de geometría significativos que ocurren en los elementos y los cambios de posición de puntos específicos de la misma. A los primeros se les llama *deformaciones* y a los segundos *desplazamientos*.

En general las deformaciones de una estructura son función de los desplazamientos en sus nudos y dependerán de la forma de la estructura y del comportamiento de sus elementos. Los desplazamientos de los nudos son los grados de libertad de la estructura, o sea, el número necesario y suficiente de movimientos que definen la configuración deformada de la estructura. Para obtener la relación entre deformación y desplazamientos se obliga a que la estructura tenga todos los posibles desplazamientos en sentido positivo de un sistema global.

Para el caso de elementos biarticulados, se puede demostrar que la deformación (e), ya sea alargamiento o acortamiento, es igual a su desplazamiento relativo longitudinal, esto es, que $e = \delta$, donde δ se obtiene como la diferencia entre la longitud final y la inicial $(L_f - L_i)$.

Demostración.



δ = Desplazamiento relativo longitudinal
Δ = Desplazamiento relativo transversal
L = longitud inicial

Figura II.1.2.1. Relación desplazamiento – deformación.

En la figura (II.1.2.1), se muestra una barra en la que se provoca un desplazamiento en su extremo libre, que a su vez produce deformaciones longitudinales y perpendiculares al eje del elemento. Si llamamos:

e = *alargamiento* = $L_{final} - L_{inicial}$

Aplicando el teorema de Pitágoras, podemos expresar el alargamiento como:

$$e = \sqrt{(L+\delta)^2 + \Delta^2} - L \qquad (II.1.2.1)$$

Si desarrollamos el binomio al cuadrado dentro de la raíz llegamos a:

$$e = \sqrt{L^2 + 2L\delta + \delta^2 + \Delta^2} - L \qquad \text{(II.1.2.2)}$$

Factorizando a L se obtiene:

$$e = L\left\{\sqrt{1 + \left(\frac{2\delta}{L}\right) + \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{L}\right)^2} - 1\right\} \qquad \text{(II.1.2.3)}$$

Como el desplazamiento relativo longitudinal δ es muy pequeño con respecto a la longitud total del elemento, máxime elevándolo al cuadrado, el problema se simplifica ya que:

$$\left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \cong 0 \qquad \text{(II.1.2.4)}$$

Con suficiente aproximación se puede decir que:

$$\left(\frac{\Delta}{L}\right)^2 \cong 0 \qquad \text{(II.1.2.5)}$$

Lo cual reduce los términos dentro del radical, quedando sólo lo siguiente:

$$e = L\left\{\sqrt{1 + 2\frac{\delta}{L}} - 1\right\} \qquad \text{(II.1.2.6)}$$

Ahora, como:

$$\sqrt{1 + 2\frac{\delta}{L}} \cong 1 + \frac{\delta}{L} \qquad \text{(II.1.2.7)}$$

Ya que si eliminamos la raíz del miembro izquierdo de la ecuación, necesariamente elevaremos al cuadrado el miembro derecho, que al momento de desarrollarlo resulta en:

$$\left(1 + \frac{\delta}{L}\right)^2 = 1 + 2\frac{\delta}{L} + \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \qquad \text{(II.1.2.8)}$$

Sustituyendo (II.1.2.4) en (II.1.2.8) llegamos a:

$$e = L\left\{1 + \frac{\delta}{L} - 1\right\} \qquad \text{(II.1.2.9)}$$

Dado que lo que se encuentra dentro de los corchetes es la deformación relativa longitudinal, y los unos se eliminan al efectuar la diferencia, podemos decir finalmente que:

$$e = L\left(\frac{\delta}{L}\right) \qquad (II.1.2.9.a)$$

Como conclusión se puede deducir que relación entre deformaciones y desplazamientos es "aproximadamente" lineal geométrica o geométricamente lineal. Por lo que al manejar algebraicamente esta última ecuación llegamos a la siguiente afirmación:

$$e \cong \delta \qquad (II.1.2.10)$$

Lo anterior nos indica que la deformación importante en elementos biarticulados como es el caso de armaduras, ocurre en dirección axial del elemento, pudiéndose despreciar la perpendicular a su eje, sin consecuencias graves.

Después de tener claro este concepto, se desarrollará un ejemplo en el que se obtendrán las deformaciones de los elementos para formar la matriz de continuidad en armaduras.

En la figura (II.1.2.2) se presenta una armadura plana, la cual se empleará con frecuencia en este tema para mostrar algunas variantes del modelo plano. En la figura, se identifican los nudos y los elementos. De acuerdo a las hipótesis mencionadas, consideraremos dos grados de libertad en cada nudo y se manejarán las siguientes convenciones:

(1) Los desplazamientos en los nudos están referidos a un sistema coordenado cartesiano derecho.

(2) Se aplicarán desplazamientos unitarios positivos en cada nudo de las barras, esto es, mediante la aplicación de desplazamientos en dirección arbitraria entre $0°$ y $90°$.

(3) Las deformaciones de las barras se tomarán positivas si las proyecciones de las componentes de los desplazamientos sobre los ejes axiales producen alargamiento en el elemento y negativas si lo acortan.

(4) La inclinación θ de los elementos se medirá en sentido antihorario y desde un eje horizontal.

La deformación axial de un elemento se obtendrá como la diferencia algebráica de las componentes de los desplazamientos aplicados en los extremos de la barra, en las direcciones de los grados de libertad de los nudos.

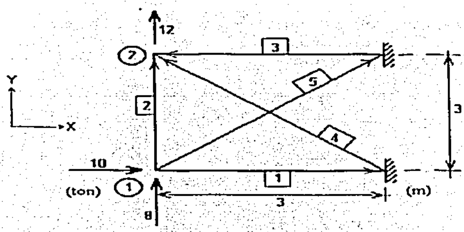


Figura II.1.2.2. Ejemplo de armadura plana.

Problema 3.

En la figura (II.1.2.2), se presenta una armadura formada por cinco barras y dos nudos libres. Se desea calcular inicialmente su matriz de continuidad.

Para estudiar la *barra uno*, aplicamos un desplazamiento en el *nudo uno*, (d_1), el cual se proyecta sobre los dos ejes cartesianos establecidos, tendremos que:

$$d_{X1} = d_1 \cdot \cos\theta$$
$$d_{Y1} = d_1 \cdot \operatorname{sen}\theta$$

De la figura (II.1.2.3), se observa que $\theta = 0°$, por lo que al proyectar axialmente las componentes de desplazamiento anteriores, la deformación e de la *barra uno* es:

$$e_1 = \delta = -d_{X1} \qquad \text{(II.1.2.11)}$$

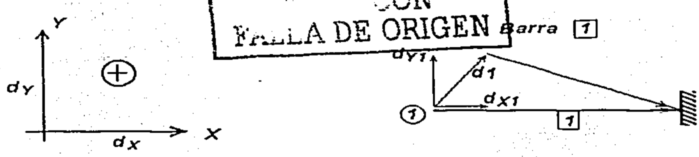


Figura. II.1.2.3 Estudio de la barra uno.

Para obtener la deformación de la *barra dos*, figura (II.1.2.4), se aplican los desplazamientos d_1 y d_2. Al proyectar las componentes de ambos desplazamientos sobre el eje axial y perpendicular de la barra, se tiene que:

$$\delta = d_{Y2} - d_{Y1} \qquad \Delta = d_{X2} - d_{X1}$$

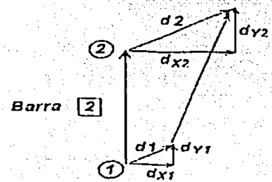


Figura. II.1.2.4 Estudio de la barra dos.

Por lo tanto:

$$e_2 = d_{Y2} - d_{Y1} \qquad (II.1.2.12)$$

En la figura (II.1.2.5) se muestra que la *barra tres* presenta el mismo comportamiento de la *barra uno*, pero en función del desplazamiento del *nudo dos*, es decir:

$$e_3 = \delta = -d_{X2} \qquad (II.1.2.13)$$

Figura II.1.2.5 Estudio de las barras tres y cuatro

En la figura (II.1.2.5) se presenta el cálculo de la deformación en la *barra cuatro*:

$$e_4 = -d_{X2}\cos 45° + d_{Y2}\,\mathrm{sen}\,45° \qquad (II.1.2.14)$$

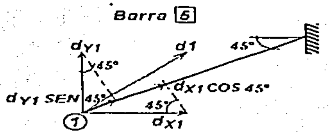


Figura II.1 2.6 Estudio de la barra cinco.

De la figura (II.1.2.6) la deformación de la *barra cinco* vale:

$$e_5 = -d_{X1}\cos 45° - d_{Y1}\operatorname{sen} 45° \qquad \text{(II.1.2.15)}$$

A continuación se presentan matricialmente, las relaciones entre desplazamientos y deformaciones de las barras (ecuaciones II.1.2.11 a II.1.2.15):

$$\{e\} = [A]\{d\}$$

$$\underset{NB*1}{\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{Bmatrix}} = \underset{NB*2NN}{\begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & 1 \\ & & -1 & \\ & & -0.71 & 0.71 \\ -0.71 & -0.71 & & \end{bmatrix}} \underset{2NN*1}{\begin{Bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \end{Bmatrix}} \qquad \text{(II.1.2.16)}$$

Donde:

- $\{e\}$ = vector de deformaciones.
- $[A]$ = la matriz de continuidad.
- $\{d\}$ = vector de desplazamientos.
- NB = número de barras.
- NN = número de nudos.

En la ecuación (II.1.2.16), también se indican las dimensiones de los arreglos matriciales.

Obtención directa de la matriz de continuidad [A].

Si estudiamos un elemento cualquiera i con una inclinación θ_i, orientación AB, biarticulado como el que se muestra en la figura (II.1.2.7) y aplicamos desplazamientos en ambos extremos referidos al sistema global de referencia, se puede obtener la deformación e, proyectando los desplazamientos sobre el eje axial del elemento.

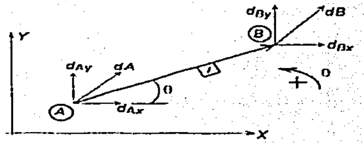


Figura II.1.2.7 Elemento biarticulado con desplazamientos positivos en sus extremos.

La deformación se calcula como:

$$e_i = \delta_B - \delta_A \qquad \text{(II.1.2.17)}$$

Ahora consideremos cada desplazamiento con sus componentes respectivas referidas al sistema coordenado.

$$\delta_A = d_{AX} \cos \theta_i + d_{AY} \operatorname{sen} \theta_i$$
$$\delta_B = d_{BX} \cos \theta_i + d_{BY} \operatorname{sen} \theta_i$$

Posteriormente se proyectan estas componentes al eje de la barra:

$$e_i = d_{BX} \cos\theta_i + d_{BY} \operatorname{sen}\theta_i - d_{AX} \cos\theta_i - d_{AY} \operatorname{sen}\theta_i \qquad \text{(II.1.2.18)}$$

Se puede observar que $\cos \theta_i$ y $\operatorname{sen} \theta_i$ son las proyecciones de un vector unitario u_i paralelo al eje de la barra, como se presenta en la figura (II.1.2.8).

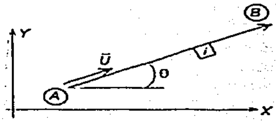


Figura II.1.2.8 Vector unitario paralelo al eje axial del elemento AB.

$$u_i = \begin{Bmatrix} \cos\theta_i \\ \operatorname{sen}\theta_i \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.1.2.19)}$$

La deformación e_i de la barra también se puede obtener en función del producto punto, es decir:

$$e_i = d_B \cdot u_i - d_A \cdot u_i \qquad \text{(II.1.2.20)}$$

Escribiéndolo de manera matricial se tiene que:

$$\{e\}_{barra\ i} = \left[\ \cdots \ \middle|\ \overbrace{-\cos\theta_i \ \middle|\ -\text{sen}\,\theta_i}^{A} \ \middle|\ \overbrace{\cos\theta_i \ \middle|\ \text{sen}\,\theta_i}^{B} \ \middle|\ \cdots\ \right] \begin{Bmatrix} d_{XA} \\ d_{YA} \\ d_{XB} \\ d_{YB} \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.1.2.21)}$$

En forma condensada:

$$\{e\} = [A]\ \{d\} \qquad \text{(II.1.2.21.a)}$$

Es decir, la deformación e_i de una barra es el renglón i de la matriz de continuidad $[A]$.

Obsérvese que la matriz $[A]$ depende del número de barras en sus renglones y de los grados de libertad de la estructura en las columnas, sin embargo se puede obtener considerando las cuatro columnas no nulas de cada barra indicando los grados de libertad correspondientes a los extremos A y B, es decir:

$$[A]_i = \Big[\ \overbrace{\boxed{-Ux}\ \boxed{-Uy}}^{A}\ \overbrace{\boxed{Ux}\ \boxed{Uy}}^{B}\ \Big] \qquad \text{(II.1.2.22)}$$

Donde:

A = nudo inicial de la barra.
B = nudo final de la barra.
$Ux = \cos\theta_i = (X_B - X_A)/L$
$Uy = \text{sen}\ \theta_i = (Y_B - Y_A)/L$

Ux y Uy son los llamados cosenos directores.

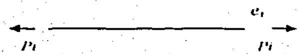
La identificación de los grados de libertad de una estructura, previo a su solución, es recomendada para identificar las cuatro celdas de la deformación e_i con la ventaja de poder resolver apoyos no completos o nudos parcialmente restringidos. Además permite ahorrar gran cantidad de memoria en la computadora.

Generalizando el planteamiento tenemos:

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & 1 \\ & & -1 & \\ & & -0.71 & 0.71 \\ -0.71 & -0.71 & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dy_1 \\ dx_2 \\ dy_2 \end{Bmatrix}$$

Ley de Hooke.

Ahora aplicaremos a la armadura de la figura (II.1.2.2) la *ley de Hooke*. Las fuerzas axiales en cada barra serán:



$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{Bmatrix}_{(NB*1)} \tag{II.1.2.23}$$

Como sabemos, la ley de Hooke, dice:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \tag{II.1.2.24}$$

Donde:

ε = Deformación unitaria.
σ = Esfuerzo normal.
E = Módulo de elasticidad.

Además el esfuerzo normal es también:

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{II.1.2.25}$$

P = Carga axial
A = Área de la sección transversal.

Al sustituir (II.1.2.24) en (II.1.2.25) se llega a:

$$\varepsilon = \frac{P}{E\,A} \tag{II.1.2.26}$$

Y ε es la deformación unitaria definida como:

$$\varepsilon = \frac{e}{L} \qquad \text{(II.1.2.27)}$$

e - Deformación sobre el eje de la barra.
L Longitud del elemento.

Si se igualan las expresiones (II.1.2.26) y (II.1.2.27):

$$\frac{e}{L} = \frac{P}{EA}$$

Y si despejamos a P, tenemos que:

$$P = \frac{(EA)}{L}e \qquad \text{(II.1.2.28)}$$

Donde:

$$k_i = \frac{EA}{L} \qquad \text{(II.1.2.29)}$$

k es la rigidez axial del elemento, quedándonos finalmente:

$$P_i = k_i e \qquad \text{(II.1.2.30)}$$

De esta forma podemos establecer una relación entre las fuerzas y las deformaciones en las barras de la armadura:

$$\begin{aligned} P_1 &= k_1 e_1 \\ P_2 &= k_2 e_2 \\ P_3 &= k_3 e_3 \\ P_4 &= k_4 e_4 \\ P_5 &= k_5 e_5 \end{aligned}$$

Matricialmente tenemos:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & & & & \\ & k_2 & & & \\ & & k_3 & & \\ & & & k_4 & \\ & & & & k_5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.1.2.31)}$$

Los elementos superiores e inferiores a la diagonal principal de la matriz cuadrada $[k]$, son ceros. Así, podemos escribir:

$$\{P\} = [k]\{e\} \qquad \text{(II.1.2.32)}$$

Se puede observar que el arreglo $[k]$ es una matriz diagonal.

Si para nuestro ejemplo, las rigideces de las barras son $k_1 = k_4 = 2$ *ton/cm* y $k_2 = k_3 = k_5 = 3$ *ton/cm*, tenemos:

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{Bmatrix}$$

Equilibrio.

Las fuerzas que obran en las armaduras son aplicadas en los nudos. Si se obtiene el equilibrio en los nudos de la armadura de la figura (II.1.2.9) y se agrupa matricialmente, resulta la ecuación (II.1.2.33).

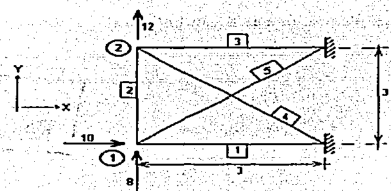
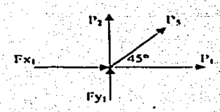


Figura II.1.2.9. Fuerzas en los nudos de la armadura plana.

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_{X1} \\ F_{Y1} \\ F_{X2} \\ F_{Y2} \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.1.2.33)}$$

Donde *{F}* es el vector de fuerzas en los nudos que actúan en las direcciones x y y respectivamente.

En el *nudo 1* se observa que:

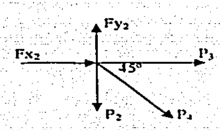


Se debe cumplir que:

$$\Sigma Fx = 0$$
$$Fx_1 + P_5 \cos 45° + P_1 = 0$$
$$Fx_1 = - P_1 - P_5 \cos 45° \qquad \text{(II.1.2.34)}$$

$$\Sigma Fy = 0$$
$$P_2 + Fy_1 + P_5 \operatorname{sen} 45° = 0$$
$$Fy_1 = - P_2 - P_5 \operatorname{sen} 45° \qquad \text{(II.1.2.35)}$$

De forma similar para el *nudo* 2:



También deben cumplirse las dos condiciones de equilibrio, de tal suerte que tendremos:

$$\Sigma Fx=0$$
$$Fx_2 + P_3 + P_4 \cos 45° = 0$$
$$Fx_2 = - P_3 - P_4 \cos 45° \qquad \text{(II.1.2.36)}$$

$$\Sigma Fy=0$$
$$Fy_2 - P_2 - P_4 \operatorname{sen} 45° = 0$$
$$Fy_2 = P_2 + P_4 \operatorname{sen} 45° \qquad \text{(II.1.2.37)}$$

Expresando matricialmente las ecuaciones (II.1.2.33) a (II.1.2.37) llevamos a lo siguiente:

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} -1 & & & & -0.71 \\ \hline & -1 & & & -0.71 \\ \hline & & -1 & -0.71 & \\ \hline & 1 & & 0.71 & \end{array}\right] \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.1.2.38)}$$

En forma condensada, podemos expresarla como: $\{F\} = [B]\{P\}$.

Se puede demostrar que la matriz de equilibrio $[B]$ es la transpuesta de la matriz de continuidad, es decir:

$$[B] = [A]^T$$

$$\therefore \quad \{F\}=[A]^T\{P\} \qquad \text{(II.1.2.39)}$$

La solución del problema puede plantearse en función de las ecuaciones obtenidas para los tres principios:

1. $\{e\}=[A]\{d\}$ Continuidad.
2. $\{P\}=[k]\{e\}$ Ley de Hooke.
3. $\{F\}=[A]^T\{P\}$ Ley del equilibrio.

Sustituyendo (1) en (2):

4. $\{P\}=[k][A]\{d\}$

Ahora, al sustituir (4) en (3):

5. $\{F\}=[A]^T[k][A]\{d\}$

Si hacemos que:

$$\{K\}=[A]^T[k][A] \qquad \text{(II.1.2.39.a)}$$

Finalmente se obtiene:

6. $\{F\}=[K]\{d\}$

Que es la ecuación clásica del método de las rigideces (de los desplazamientos).

La matriz de rigideces $[K]$ de la estructura, es una matriz cuadrada, no singular (a menos que la estructura sea inestable), positiva y con diagonal principal pesada.

Las dimensiones de las matrices son:

$$[A]_{NB \times 2NN}$$
$$[k]_{NB \times NB}$$
$$[K]_{2NN \times 2NN}$$
$$\{P\}_{NB \times 1}$$
$$\{F\}_{2NN \times 1}$$

Donde:

NB = número de barras.
NN = número de nudos.

Una vez calculado el vector de desplazamientos $\{d\}$ se calcula ahora el vector de deformaciones, mediante la sustitución de los valores de $\{d\}$ en la ecuación de continuidad.

$\{e\}=[A]\{d\}$ Continuidad.

De aquí, podemos calcular el vector de fuerzas internas mediante:

$\{P\}=[k]\{e\}$ Ley de Hooke.

Y como comprobación se sustituyen valores en:

$\{F\}=[A]^T\{P\}$ Ley del equilibrio.

Se sugiere verificar el equilibrio en los nudos manualmente pues representa la forma más confiable de comprobación, ya que si la matriz $[A]$ fue mal calculada, el sistema resultante $\{F\} = [K]\{d\}$, se malcondiciona y puede arrojar resultados que en principio cumplan con la ecuación de equilibrio, sin embargo, serán incorrectos.

Simplificación del producto de matrices para obtener $[K]$.

Como sabemos, para obtener la matriz global o de toda la estructura se realiza el producto:

$$[K]=[A]^T[k][A]$$

Sin embargo, se demostrará que no es necesario realizar textualmente el producto matricial, dadas las características del producto de una matriz por su transpuesta, y principalmente debido a la presencia de la matriz diagonal $[k]$.

Si hacemos que $[B]=[k][A]$, tenemos el algoritmo siguiente:

$$b_{ij} = k_i\, a_{ij}$$

Por ejemplo, suponiendo que alguna estructura conste de tres barras y dos nudos, se tiene que:

$$[B]_{NB*2NN} = \begin{bmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{bmatrix}_{NB*NB} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}_{NB*2NN}$$

$$\therefore$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= k_1 a_{11} + 0a_{21} + 0a_{31} \\ b_{12} &= k_1 a_{12} + 0a_{22} + 0a_{32} \\ b_{13} &= k_1 a_{13} + 0a_{23} + 0a_{33} \\ b_{14} &= k_1 a_{14} + 0a_{24} + 0a_{34} \\ b_{21} &= 0a_{11} + k_2 a_{21} + 0a_{31} \\ b_{22} &= 0a_{12} + k_2 a_{22} + 0a_{32} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Es decir:

$$b_{ij} = k_i a_{ij} \quad \text{o bien} \quad b_{ij} = k_i a_{ij}$$

Ahora, realizando el producto restante, se tiene que:

$$[K] = [A]^T\,[B]$$

Bajo las mismas dimensiones de número de barras y número de nudos:

$$[K]_{2NN*2NN} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{bmatrix}}_{[A]^T{}_{2NN*NB}} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{bmatrix}}_{[B]_{NB*2NN}}$$

$$K_{11} = a_{11}\, b_{11} + a_{21}\, b_{21} + a_{31}\, b_{31}$$

$$K_{12} = a_{11}\, b_{12} + a_{21}\, b_{22} + a_{31}\, b_{32}$$

$$K_{ij} = a_{li}\, b_{lj}$$

$$si \quad b_{lj} = k_l\, a_{lj}$$

Por lo tanto:

$$K_{ij} = \sum_{l=1}^{NB} k_l\, a_{li}\, a_{lj} \qquad (II.1.2.40)$$

Esto es, la matriz [K] se puede obtener como una multiplicación de tres columnas:

- *La multiplicación de la columna l de la matriz [k].*
- *La columna i de la matriz [A], y.*
- *La columna j de la matriz [A].*

Utilizaremos la matriz de continuidad y la de rigidez diagonal del *problema 3* para demostrar la validez del algoritmo anterior.

$$[A] = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & 1 \\ & & -1 & \\ & & -0.71 & 0.71 \\ -0.71 & -0.71 & & \end{bmatrix}$$

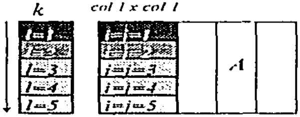
$$[k] = \begin{bmatrix} 2 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 3 \end{bmatrix} \text{ton/cm}$$

Por facilidad, cambiaremos la representación de la matriz *[k]*, y la expresaremos como un vector columna, por lo que cada renglón indica el valor de la rigidez de cada barra:

$$[k] = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow & 1 \\ \rightarrow & 2 \\ \rightarrow & 3 \\ \rightarrow & 4 \\ \rightarrow & 5 \end{matrix}$$

Empleando el algoritmo de la ecuación (II.1.2.40) se tiene lo siguiente:

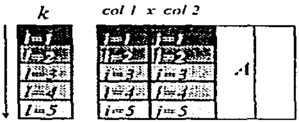
Para el elemento $K_{1,1}$ de la matriz de rigidez global, realizamos la suma de los productos de los elementos k_i por los elementos $A[\,i\,,1]$ y por los elementos $A[\,j\,,1]$. Esto se ejemplifica en el siguiente esquema:



Realizando la suma de los productos se tiene que:

$$K_{1,1} = 2(-1)(-1)+3(-0.71)(-0.71) = 3.5$$

Para el elemento $K_{1,2}$ se hace la suma de los productos de los elementos k_i por los elementos $A[\,i\,,1]$ por los elementos $A[\,j\,,2]$, lo cual se representa el siguiente esquema:



Realizando la suma de productos se tiene que:

$$K_{1,2} = 3(-0.71)(-0.71) = 1.5$$

Para cada uno de los elementos restantes de la matriz de rigideces global se hace lo mismo, de tal forma que los resultados son los siguientes:

$$K_{1,3} = 0$$
$$K_{1,4} = 0$$
$$K_{2,2} = 4.5$$
$$K_{2,3} = 0$$
$$K_{2,4} = -3$$
$$K_{3,3} = 4$$
$$K_{3,4} = -1$$
$$K_{4,4} = 4$$

Podemos ahora presentar la matriz *[K]*:

$$[K]=\left[\begin{array}{c:c:c:c} 3.5 & 1.5 & & \\ \hdashline 1.5 & 4.5 & & -3 \\ \hdashline & & 4 & -1 \\ \hdashline & -3 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

Regresando al problema y con base en el vector de fuerzas asociado a la estructura en cuestión, podemos obtener inicialmente los desplazamientos de los nudos, resolviendo el sistema *{F}=[K]{d}*.

A partir de:

$$[F]=\begin{Bmatrix}10\\8\\0\\12\end{Bmatrix} ton$$

Llegamos a:

$$\{d\}=\begin{Bmatrix}-1.059\\9.137\\2.627\\10.51\end{Bmatrix} cm$$

Sustituyendo en la ecuación del principio de continuidad se obtienen las deformaciones:

$$\begin{Bmatrix}e_1\\e_2\\e_3\\e_4\\e_5\end{Bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c|c|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -0.71 & -0.71 \\ \hline -0.71 & -0.71 & 0 & 0 \end{array}\right]\begin{Bmatrix}-1.059\\9.137\\2.627\\10.51\end{Bmatrix}$$

Realizando el producto matricial:

$$\{e\}=\begin{Bmatrix}1.059\\1.373\\-2.627\\5.574\\-5.712\end{Bmatrix} cm$$

Empleando ahora la ecuación de la ley de Hooke para obtener el vector de fuerzas internas

$$\{P\}=\begin{bmatrix}3.5 & 1.5 & 0 & 0\\ 1.5 & 4.5 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 4 & -1\\ 0 & -3 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1.059\\ 1.373\\ -2.627\\ 5.574\\ -5.712\end{Bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$\{P\}=\begin{Bmatrix}2.118\\ 4.119\\ -7.881\\ 11.148\\ -17.136\end{Bmatrix} ton$$

Las fuerzas en la armadura se muestran en la figura (II.1.2.10). Manejando la convención ya mencionada, en la que los valores positivos indican tensión y los negativos compresión del elemento sobre el nudo respectivamente, tendremos:

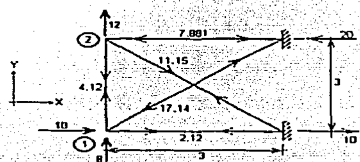


Figura II.1.2.10. Solución a la Armadura plana de la figura II.1.2.2.

Las reacciones se obtienen directamente por las fuerzas que concurren a los apoyos.

Comprobación del equilibrio.

Nudo 1.

ΣFx=0
10 + 2.12 - 17.14 cos 45 ° = 0

ΣFy=0
8 + 4.12 - 17.14 sen 45 ° = 0

Nudo 2

ΣFx=0
-7.88 + 11.15 cos 45 ° = 0

ΣFy=0
- 4.12 + 12 - 11.15 sen 45 ° = 0

Por lo tanto, al verificarse estas condiciones se concluye que la solución es correcta.

Armaduras tridimensionales.

Para el problema de la armadura tridimensional, los nudos presentan tres grados de libertad, esto es, tres movimientos lineales. Para atacar este tipo de estructura por medio de la matriz de continuidad lo haremos en forma análoga que en Armaduras planas. Nos auxiliaremos de la figura (II.1 2.11).

Problema 4.

En la figura (II.1.2.11) se presenta la armadura espacial resuelta en el *problema 2* por el método de rigideces.

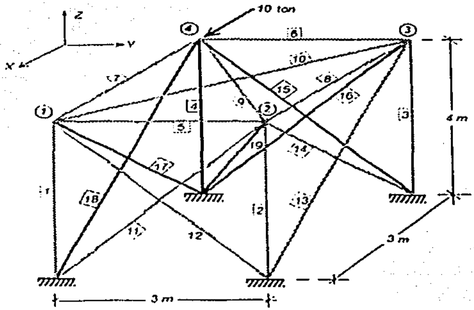


Figura II.1.2.11 Ejemplo de armadura espacial por medio de la matriz de continuidad.

Empezaremos por identificar el número de nudos, barras y apoyos. Tenemos cuatro nudos asociados a tres grados de libertad por nudo, por lo tanto tendremos doce grados de libertad, manejando la convención del sistema de referencia cartesiano positivo y la notación antes vista para obtener la matriz *[A]*.

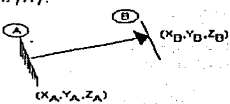


Figura II.1 2.12 Identificación de un elemento de una armadura espacial mediante los nudos inicial y final, también se presentan sus coordenadas en sistema cartesiano.

Como se puede observar, los cosenos directores en el espacio también se pueden calcular en función de las coordenadas de los extremos de la barra.

$$\left.\begin{aligned} U_x &= \frac{X_B - X_A}{L} \\ U_Y &= \frac{Y_B - Y_A}{L} \\ U_Z &= \frac{Z_B - Z_A}{L} \end{aligned}\right\} \textit{ cosenos directores}$$

De manera análoga a armaduras planas, en armaduras tridimensionales la ubicación de los cosenos directores de una barra en la matriz de continuidad depende directamente de los nudos en sus extremos, de acuerdo con la siguiente regla:

	gl_{3A-2}	gl_{3A-1}	gl_{3A}	gl_{3B-2}	gl_{3B-1}	gl_{3B}	
barra [i]	- Ux	- Uy	- Uz	Ux	Uy	Uz	$A \rightarrow B$

Donde:

[i] = Número de barra.
A = Número del nudo inicial.
B = Número del nudo final.

$$\left.\begin{aligned} & gl_{3A-1} = \text{grado de libertad.} \\ & [\,\text{- Uy}\,] = \text{coseno en dirección } y. \end{aligned}\right\} \text{asociado al nudo } A.$$

$$\left.\begin{aligned} & gl_{3B-1} = \text{grado de libertad.} \\ & [\,\text{Uy}\,] = \text{coseno en dirección } y. \end{aligned}\right\} \text{asociado al nudo } B.$$

Es claro que si uno de los extremos de una barra no es nudo, sólo existirán tres celdas

El planteamiento anterior es ampliamente recomendado para armaduras tridimensionales ya que la matriz de continuidad por lo general es de gran tamaño y por otro lado altamente porosa (muchas celdas son cero). De esta manera sólo calculamos las celdas de interés, las cuales se pueden asociar fácilmente a la columna correspondiente de la matriz de continuidad, en función de los nudos de los extremos de una barra.

A continuación se calcularán los cosenos directores y la ubicación de los mismos en las columnas de la matriz de continuidad.

Para denotar un empotramiento en cada barra, se utilizará una letra X.

La *barra 1* tiene como extremo B al *nudo 1* por lo que le corresponderán los grados de libertad 1,2 y 3 a sus cosenos directores, ya que si B = *1 (nudo 1)*:

3(B) - 2 = 3(1) - 2 = 1
3(B) - 1 = 3(1) – 1 = 2
3(B) = 3(1) = 3

Barra 1 — 1 - X

1	*2*	*3*
0	0	1

La *barra 2* tiene como extremo *B* al *nudo 2* por lo que le corresponderán los grados de libertad 4, 5 y 6 a sus cosenos directores, ya que si *B = 2 (nudo 2)*

3(B) - 2 = 3(2) - 2 = 4
3(B) - 1 = 3(2) – 1 = 5
3(B) = 3(2) = 6

Barra 2 — 2 - X

4	*5*	*6*
0	0	1

De manera análoga se obtienen estos valores para las *barras 3* a *19*.

Barra 3 — 3 - X

7	*8*	*9*
0	0	1

Barra 4 — 4 - X

10	*11*	*12*
0	0	1

Barra 5 — 1 - 2

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
0	-1	0	0	1	0

Barra 6 — 3 - 4

7	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
0	-1	0	0	1	0

Barra 7 — 4 - 1

10	*11*	*12*	*1*	*2*	*3*
-1	0	0	1	0	0

Barra 8 — 3 - 2

7	*8*	*9*	*4*	*5*	*6*
-1	0	0	1	0	0

Barra 9 — 4 - 2

10	*11*	*12*	*4*	*5*	*6*
-0.7071	-0.7071	0	0.7071	0.7071	0

Barra 10 — 3 - 1

7	*8*	*9*	*1*	*2*	*3*
-0.7071	0.7071	0	0.7071	-0.7071	0

Barra 11 — 2 - X

4	*5*	*6*
0	0.6	0.8

Barra	1	2	3	Nudos
Barra 12	0	-0.6	0.8	1 - X

Barra	7	8	9	Nudos
Barra 13	-0.6	0	0.8	3 - X

Barra	4	5	6	Nudos
Barra 14	0.6	0	0.8	2 - X

Barra	10	11	12	Nudos
Barra 15	0	-0.6	0.8	4 - X

Barra	7	8	9	Nudos
Barra 16	0	0.6	0.8	3 - X

Barra	1	2	3	Nudos
Barra 17	0.6	0	0.8	1 - X

Barra	10	11	12	Nudos
Barra 18	-0.6	0	0.8	4 - X

Barra	4	5	6	Nudos
Barra 19	0.5145	0.5145	0.686	2 - X

Aunque estamos en la posibilidad de formar la matriz de continuidad de la estructura, no se hará así y se aprovechará que se tienen identificadas las celdas de los cosenos directores de cada barra y utilizando el algoritmo de multiplicación de columnas de la ecuación (II.1.2.40) se puede obtener sin problema la matriz de rigidez global de la estructura.

Por otro lado, de la figura (II.1.2.11) podemos obtener el vector de fuerzas externas en la estructura.

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 10 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ton$$

Realizando las operaciones por medio del algoritmo propuesto en la ecuación (II.1.2.40), y resolviendo el sistema:

$$\{F\} = [K]\{d\}$$

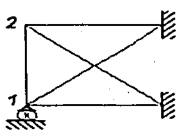
Aplicando los dos primeros principios (continuidad y ley de Hooke) se obtienen los siguientes resultados:

Barra	*Fuerzas axiales (ton)*
1	*-2.51*
2	*-2.83*
3	*2.21*
4	*2.65*
5	*0.61*
6	*0.03*
7	*-4.03*
8	*0.09*
9	*-2.84*
10	*1.09*
11	*0.35*
12	*-2.30*
13	*-1.43*
14	*1.21*
15	*3.29*
16	*-1.34*
17	*5.44*
18	*-6.60*
19	*2.31*

Se puede observar que éstos resultados coinciden con lo obtenidos en el subcapítulo anterior.

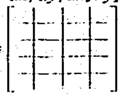
Apoyos incompletos en armaduras.

Es posible trabajar con apoyos incompletos o nudos parcialmente restringidos en armaduras. Para fines de análisis los apoyos con posibilidad de movimiento en una dirección cualquiera se consideran como un nudo más en la estructura y solo se tendrá que eliminar en la matriz *[A]*, la columna correspondiente al *"grado de libertad"* que está restringido en el apoyo, es decir, su desplazamiento vale cero. El cálculo de la matriz de rigidez global no se afecta, excepto que ahora se tiene una matriz de continuidad reducida. Por ejemplo si tenemos la siguiente estructura con un rodillo horizontal.



Si consideramos que se tienen dos nudos y dado que es un modelo plano, en principio la matriz de continuidad tendrá cuatro columnas:

$dx_1\ dy_1\ dx_2\ dy_2$

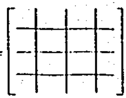
$[A] =$ 

Se elimina el desplazamiento d_{Y1}, el cual no existe, la matriz de continuidad es función sólo de los desplazamientos d_{X1}, d_{X2}, d_{Y2} como se muestra a continuación:

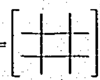
$dx_1\quad dx_2\ dy_2$

$[A] =$ 

Otra forma de resolver el problema es partiendo de la matriz *[K]*, eliminando el renglón y la columna correspondiente al grado de libertad que no existe:

$[K] =$ 

Para el ejemplo anterior se eliminan la segunda columna y el segundo renglón, resultando una matriz *[K]* de tres renglones por tres columnas.

$[K] =$ 

Transformación de coordenadas.

Si se tiene un vector *{u}* en el sistema cartesiano derecho *X-Y* como el mostrado en la figura (II.1.2.13), se pueden calcular sus componentes en un sistema girado mediante el siguiente planteamiento:

Sea *{U}* un vector cuyas componentes en un sistema *XY* son:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} Ux \\ Uy \end{Bmatrix}$$

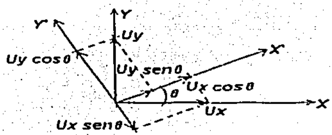


Figura II.1.2.13 Transformación de un vector en un sistema XY a un sistema girado.

Proyectando las componentes de Ux y Uy referidas al sistema X-Y, sobre el sistema girado, algebraicamente, se pueden obtener las siguientes expresiones:

$$Ux' = Ux \cos\theta + Uy \operatorname{sen}\theta$$
$$Uy' = -Ux \operatorname{sen}\theta + Uy \cos\theta$$

Matricialmente se expresa como:

$$\begin{Bmatrix} Ux' \\ Uy' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Ux \\ Uy \end{Bmatrix}$$

$$\{U'\} = [T]\{U\}$$

Se puede demostrar que $[T]^{-1} = [T]^{T}$, por lo que también se puede escribir:

$$\{U\} = \{T\}^{T}\{U'\}$$

Apoyo de rodillo en superficie inclinada.

Un caso muy particular de rodillos, es cuando estos se encuentran sobre superficies inclinadas. Debido a que los desplazamientos en el rodillo se llevan a cabo en direcciones diferentes a las de los ejes de referencia del sistema global, la solución a este problema no es directa, ni aún para programas comerciales, los cuales tienen que recurrir a algoritmos que involucran el manejo de elementos auxiliares con propiedades especiales.

Para ilustrar el procedimiento de solución, estudiaremos la armadura de la figura (II.1.2.14).

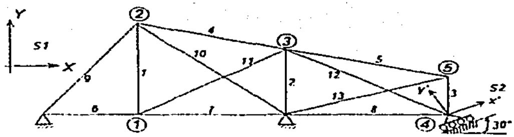


Figura II.1.2.14 Ejemplo de armadura plana con apoyo de rodillo sobre una superficie inclinada

Si empleamos un procedimiento manual, se observa, que los desplazamientos de los nudos se deberán analizar en dos sistemas de referencia independientes y relacionados entre si por la inclinación del plano de deslizamiento del rodillo. Es decir, el sistema de referencia *S-1* (sistema global de la estructura) regula el movimiento de los nudos uno, dos, tres y cinco, mientras que el sistema *S-2* (sistema local) el del nudo cuatro.

Siendo congruentes con las hipótesis que dieron origen a la matriz *[A]*, los cosenos directores correspondientes a los nudos de la estructura, estarán referidos a los sistemas que gobiernen el comportamiento de los mismos, por lo que, para nuestro ejemplo, las columnas de *[A]* estarán referidas a los sistemas *S1* y *S2*.

Para el caso particular del elemento tres, cuyos extremos *A* y *B* son el nudo cinco y cuatro respectivamente, los cosenos directores en las columnas nueve y diez de la matriz *[A]* se calcularán respecto al sistema *S1* y los correspondientes a las columnas siete y ocho, se obtendrán respecto al sistema *S2*, sin olvidar que en el extremo *B* se colocarán los valores obtenidos con las ecuaciones:

$$Ux = \cos \theta = (X_B - X_A)/L.$$
$$Uy = \operatorname{sen} \theta = (Y_B - Y_A)/L.$$

Mientras que en el extremo *A* serán de signo contrario. Esto mismo sucede para los elementos ocho y doce.

Es decir:

Barra $\boxed{3}$ $5 \rightarrow 4$

$$A_3 = \left[S1 \mid S2 \right]$$

El manejo de dos sistemas de referencia debe ser congruente en todo el proceso por lo que, si la matriz *[A]* depende de los sistemas *S1* y *S2*, la matriz *[K]* y el vector *{F}* también lo harán.

Ahora, si se utiliza un programa de computadora, por principio no se puede modelar directamente el comportamiento del nudo cuatro, ya que en general los programas existentes describen el movimiento de sus nudos empleando solo un sistema de referencia global, por lo que se tendrá que hacer uso de elementos auxiliares conectados al nudo, que ayuden a reproducir el comportamiento del mismo. Por ejemplo, para nuestro caso, el desplazamiento del nudo cuatro debe restringirse en dirección perpendicular al plano de deslizamiento, con una barra de rigidez axial muy grande. Este algoritmo, permitirá que, para desplazamientos pequeños, el nudo pueda desplazarse sobre el plano inclinado. Eso se representa en la figura (II.1.2.15)

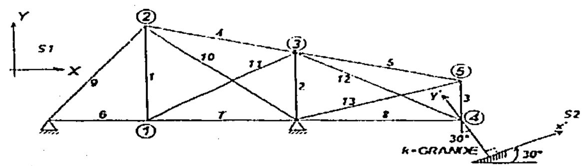


Figura II.1.2.15 Ejemplo del modelado del nudo cuatro empleando un programa de computadora.

II.2 MARCOS PLANOS CON BARRAS INCLINADAS.

II.2.1 Planteamiento por el método convencional utilizando el ensamble de submatrices de rigidez.

Un marco, es un sistema estructural de soporte formado generalmente por elementos vigas y columnas, conectados por nudos ideales. Este tipo de estructuras se emplean en casas, edificios, naves industriales, lugares de esparcimiento, centrales telefónicas, invernaderos, etc. Son de gran utilidad para hacer simplificaciones en el análisis estructural. Dependiendo del trabajo y tipo de carga sobre estas estructuras, tendremos modelos de marcos planos y tridimensionales. Este último es el caso más general de las estructuras esqueletales. Así, por ejemplo, las armaduras son un caso particular de marcos, ya que están formadas por elementos biarticulados y no pueden tomar momentos.

Hipótesis.

Los marcos planos en un sistema global XY tienen las siguientes características:

a) Todos los ejes de las barras están en el plano XY.
b) Las fuerzas que se aplican en los marcos son de la forma:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

c) Los desplazamientos de cualquier punto son de la forma indicada en el siguiente vector:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ \varphi_z \end{Bmatrix}$$

Para esto se requiere que todas las barras tengan como eje principal al eje z' en su sección Transversal.

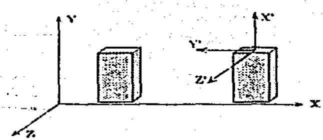


Figura II.2.1.1. Los ejes Y y Z de un marco plano, son principales.

Si se aplican fuerzas a un marco que no tiene estas características en sus elementos se debería hacer un análisis tridimensional.

Los elementos mecánicos son: $\begin{Bmatrix} M \\ V \\ N \end{Bmatrix}$, es decir: $\begin{Bmatrix} M_z \\ F_y \\ F_x \end{Bmatrix}$

En otras palabras, podemos decir que en los marcos planos:

1. Los nudos presentan tres grados de libertad, ya que por sus restricciones sólo les es posible desplazarse en dos ejes cartesianos y rotar alrededor de un tercer eje perpendicular al plano definido por los dos primeros.

2. Los elementos, compuestos por elementos rectilíneos de sección variable o constante, son capaces de resistir fuerzas normales de compresión y tensión, además de fuerzas de corte perpendiculares a estas y de momento flexionante alrededor de un eje perpendicular a las dos anteriores.

Estudiaremos la solución de marcos planos por el método de la matriz de rigideces.

II.2.2 Convención de signos.

En éste estudio emplearemos la convención mostrada en la figura (II.2.2.1).

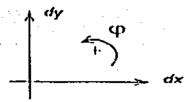


Figura II.2.2.1 Convención de signos en marcos planos.

Se consideran las fuerzas normales positivas cuando provocan alargamiento. En cuanto a las fuerzas cortantes se tomaran positivas si para un segmento de un elemento le provocan un giro en sentido horario. La flexión se considerará positiva cuando actúe de tal forma que al elemento le induzca compresión en la fibra o cara superior mientras que en la cara inferior se presenta tensión. En las figuras (II.2.2.2) se muestra esta convención gráficamente.

Nombraremos el extremo inicial de un elemento como A y el extremo final como B.

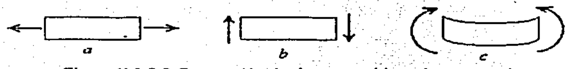


Figura II.2.2.2 Convención de signos positivos de marcos planos. (a) Fuerza axial, (b) Fuerza cortante, (c) Momento flexionante.

II.2.3. Obtención de la matriz de rigideces para un elemento cualquiera del marco plano.

Recordando el planteamiento estudiado para el caso de armaduras, el método consiste en encontrar la matriz de rigideces de cada elemento, para ser ensambladas en una matriz de rigidez total de la estructura. La solución del problema se obtiene resolviendo la ecuación fundamental de rigideces.

$$\{F\} = [K]\{d\}$$

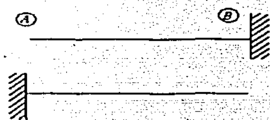


Figura II.2.3.1 Viga en voladizo de sección constante.

Para simplificar el problema se estudiarán las vigas de sección constante en voladizo de la figura (II.2.3.1).

En este elemento se considerarán las siguientes variables:

E = Módulo de elasticidad.
I = Momento de inercia.
A = Área transversal de la sección.
L = Longitud del elemento.
c = Coeficiente de cortante = $\dfrac{6(1+\nu)I}{A_c L^2}$

donde : ν = Relación de Poisson,

$$A_c = \text{Area de cortante} = \int_A \frac{I_x^2 b^2}{\left[\int_y^{y_{max}} y\,dA\right]^2} dA$$

b = base de la sección.
y = distancia del eje neutro a la fibra superior.

Para el caso de secciones rectangulares el área de cortante, A_c, es:

$$A_c = Area\ axial\ /\ (1.2 \times factor\ de\ forma)$$

Con base en la definición y obtención de la matriz de rigidez, aplicaremos desplazamientos positivos unitarios en los extremos de los elementos de la figura (II.2.3.1) para conocer las submatrices de rigideces en cada uno de ellos.

Aplicando primero un desplazamiento unitario positivo en la dirección del eje x en el extremo A, $d_{XA}=1$, como se muestra en la figura (II.2.3.2), se generan fuerzas en los extremos de valor EA/L.

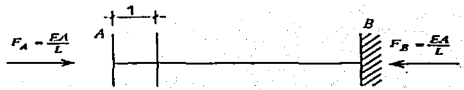
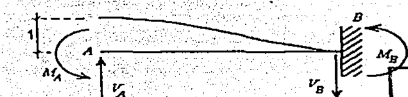


Figura II.2.3.2 $d_{XA}=1$

A partir del equilibrio y haciendo $\Sigma Fx = 0$ se tienen las siguientes fuerzas:

$$d_{XA}=1 \begin{cases} F_{XA} = EA/L \\ F_{YA} = 0 \\ M_{ZA} = 0 \\ F_{XB} = -EA/L \\ F_{YB} = 0 \\ M_{ZB} = 0 \end{cases}$$

Ahora aplicando un desplazamiento vertical unitario positivo en el extremo A, $d_{YA}=1$ y considerando el efecto de cortante, como se indica en la figura (II.2.3.3), se tiene que:



$$M_A = \frac{6EI}{L^2(1+4c)} \qquad M_B = \frac{6EI}{L^2(1+4c)}$$

$$V_A = \frac{12EI}{L^3(1+4c)} \qquad V_B = \frac{12EI}{L^3(1+4c)}$$

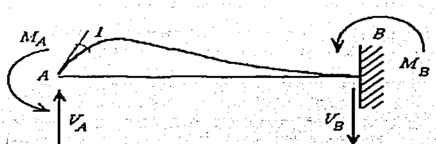
Figura II.2.3.3 $d_{YA}=1$

Es decir:

$$
d_{YA}=1
\begin{cases}
F_{XA}=0\\
F_{YA}=\dfrac{12EI}{L^3(1+4c)}\\
M_{ZA}=\dfrac{6EI}{L^2(1+4c)}\\
F_{XB}=0\\
F_{YB}=-\dfrac{12EI}{L^3(1+4c)}\\
M_{ZB}=\dfrac{6EI}{L^2(1+4c)}
\end{cases}
$$

Provocando ahora un desplazamiento angular unitario positivo en el extremo A, $\varphi_{ZA}=1$, figura (II.2.3.4), y considerando el efecto de cortante, tenemos que:

$$
\varphi_{ZA}=1
\begin{cases}
F_{XA}=0\\
F_{YA}=\dfrac{6EI}{L^2(1+4c)}\\
M_{ZA}=\dfrac{4EI(1+c)}{L(1+4c)}\\
F_{XB}=0\\
F_{YB}=-\dfrac{6EI}{L^2(1+4c)}\\
M_{ZB}=\dfrac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)}
\end{cases}
$$



$$M_A=\frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} \qquad M_B=\frac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)}$$

$$V_A=\frac{6EI}{L^2(1+4c)} \qquad V_B=\frac{6EI}{L^2(1+4c)}$$

Figura II.2.3.4 $\varphi_{ZA}=1$

Ahora estudiaremos la barra en voladizo en su extremo B.

Provocando un desplazamiento unitario positivo en la dirección x de éste, $d_{XB}=1$, se tiene:

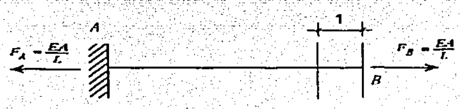
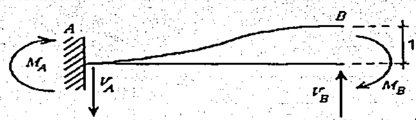


Figura II.2.3.5. $d_{XB}=1$.

Generándose el estado de fuerzas siguiente:

$$d_{XB}=1 \begin{cases} F_{XA} = -EA/L \\ F_{YA} = 0 \\ M_{ZA} = 0 \\ F_{XB} = EA/L \\ F_{YB} = 0 \\ M_{ZB} = 0 \end{cases}$$

Provocando ahora un desplazamiento vertical unitario positivo en el extremo B, $d_{YB}=1$ y considerando el efecto de cortante, se tiene la siguiente configuración:



$$M_A = \frac{6EI}{L^2(1+4c)} \qquad M_B = \frac{6EI}{L^2(1+4c)}$$

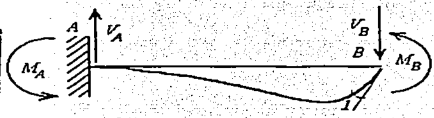
$$V_A = \frac{12EI}{L^3(1+4c)} \qquad V_B = \frac{12EI}{L^3(1+4c)}$$

Figura II.2.3.6. $d_{YB}=1$.

Es decir:

$$d_{YB}=1 \left\{ \begin{array}{l} F_{XA} = 0 \\ F_{YA} = -\dfrac{12EI}{L^3(1+4c)} \\ M_{ZA} = -\dfrac{6EI}{L^2(1+4c)} \\ F_{XB} = 0 \\ F_{YB} = \dfrac{12EI}{L^3(1+4c)} \\ M_{ZB} = -\dfrac{6EI}{L^2(1+4c)} \end{array} \right.$$

Finalmente provocando ahora un desplazamiento angular unitario positivo en el extremo B, $\varphi_{ZB}=1$, y considerando el efecto de cortante, se tiene la siguiente configuración:



$$M_A = \frac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} \qquad M_B = \frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)}$$

$$V_A = \frac{6EI}{L^2(1+4c)} \qquad V_B = \frac{6EI}{L^2(1+4c)}$$

Figura II.2.3.7 $\varphi_{ZB}=1$

Generándose el estado de fuerzas siguiente:

$$\varphi_{ZB}=1 \left\{ \begin{array}{l} F_{XA} = 0 \\ F_{YA} = \dfrac{6EI}{L^2(1+4c)} \\ M_{ZA} = \dfrac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} \\ F_{XB} = 0 \\ F_{YB} = -\dfrac{6EI}{L^2(1+4c)} \\ M_{ZB} = \dfrac{4EI(.+c)}{L(1+4c)} \end{array} \right.$$

Expresando los resultados anteriores en forma matricial, se llega a la ecuación (II.2.3.1), en la que se puede ver la relación entre los desplazamientos (las columnas) y las fuerzas o rigideces (los renglones). Esta es la matriz de rigidez de un elemento en un sistema local, ya que las fuerzas obtenidas son referidas a ejes axiales y perpendiculares del elemento.

$$[K]=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} dx_A & dy_A & \varphi_A & dx_B & dy_B & \varphi_B \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} & 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+4c)} & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} \\
0 & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} & \frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} & \frac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} \\
\hline
-\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI}{L^3(1+4c)} & -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} & 0 & \frac{12EI}{L^3(1+4c)} & -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} \\
0 & \frac{6EI}{L^2(1+4c)} & \frac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+4c)} & \frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)}
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{c} \\ Fx_A \\ Fy_A \\ Mz_A \\ Fx_B \\ Fy_B \\ Mz_B \end{array}$$

Ecuación (II.2.3.1)

La división con líneas continuas dentro del arreglo es para indicar las submatrices. En forma condensada la ecuación (II.2.3.1) puede expresarse como:

$$\{K\}=\left\{\begin{array}{c|c} k_{AA} & k_{AB} \\ \hline k_{BA} & k_{BB} \end{array}\right\} \qquad \text{(II.2.3.2)}$$

Con lo cual se establece la ecuación fundamental para un elemento ya sea en un sistema local o global, es decir:

$$\left\{\begin{array}{c} F_A \\ F_B \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c|c} k_{AA} & k_{AB} \\ \hline k_{BA} & k_{BB} \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{c} d_A \\ d_B \end{array}\right\} \qquad \text{(II.2.3.3)}$$

Además por tratarse de una matriz simétrica se tiene que:

$$[k_{AB}] = [k_{BA}]^T$$

Si estamos conscientes que los elementos de una estructura pueden tener cualquier inclinación respecto a un sistema global de referencia y por consiguiente sus rigideces locales, es importante estudiar la condición en que estas últimas puedan ser referidas a un sistema global, como lo requiere la ecuación fundamental del método de rigideces, en la cual las fuerzas, desplazamientos y rigideces están referidas a un sistema global.

Para lograr lo anterior, necesitaremos hacer uso de las matrices de transformación de coordenadas antes vistas, que nos permiten pasar de un sistema a otro de manera sistemática.

Recordando el procedimiento para realizar la transformación de coordenadas a diferentes sistemas de referencia, figura (II.2.3.8), se tiene que:

$$F'x = Fx\cos\theta + Fy\,\mathrm{sen}\,\theta \qquad \text{(II.2.3.4.a)}$$
$$F'y = -Fx\,\mathrm{sen}\,\theta + Fy\cos\theta \qquad \text{(II.2.3.4.b)}$$
$$M' = M \qquad \text{(II.2.3.4.c)}$$

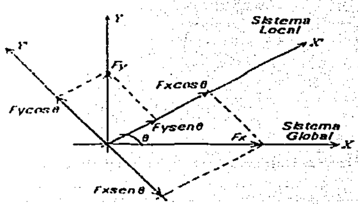


Figura II.2.3.8 Proyecciones de elementos en sistema global a local.

Ecuaciones que puestas de forma matricial nos conducen a:

$$\{F'\} = \begin{Bmatrix} F'x \\ F'y \\ M' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta & 0 \\ -\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Fx \\ Fy \\ M \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.2.3.5)}$$

$$\{F'\} = [T]\{F\} \qquad \text{(II.2.3.6.a)}$$

$$\{d'\} = [T]\{d\} \qquad \text{(II.2.3.6.b)}$$

También :

$$\{F\} = [T]^T\{F'\} \qquad \text{(II.2.3.7.a)}$$

$$\{d\} = [T]^T\{d'\} \qquad \text{(II.2.3.7.b)}$$

Ya que puede demostrarse que $[T]^{-1} = [T]^T$. Sabemos que en sistema local:

$$\{ F_A' \} = [k_{AA}'] \{ d_A' \} \qquad (II.2.3.8)$$

En sistema global tendremos:

$$\{ F_A \} = [k_{AA}] \{ d_A \} \qquad (II.2.3.9)$$

A partir de las ecuaciones (II.2.3.7) y (II.2.3.9) se tiene que:

$$\{ F_A \} = [T]^T \{ F_A' \} = [T]^T [k_{AA}'] [T] \{ d_A \} \qquad (II.2.3.10)$$

Es decir:

$$\{ F_A \} = [T]^T [k_{AA}'] [T] \{ d_A \} \qquad (II.2.3.11)$$

En general podemos expresarlo como:

$$\{ F \} = [T]^T [k'] [T] \{ d \} \qquad (II.2.3.12)$$

Donde:

$$[k] = [T]^T [k'] [T] \qquad (II.2.3.13)$$

El planteamiento anterior nos permite referir las rigideces locales de cualquier elemento inclinado a otro sistema de referencia de interés y haciendo el producto señalado en la ecuación (II.2.3.13), se pueden obtener fórmulas de aplicación directa en función de la inclinación del elemento respecto a un sistema cartesiano derecho X-Y y de las rigideces locales del elemento.

Por lo tanto, si asignamos nombres de variables a los valores de rigidez con objeto de simplificar los cálculos, tenemos:

$$K11 = \frac{EA}{L} \qquad (II.2.3.14.a)$$

$$K22 = \frac{12EI}{L^3(1+4c)} \qquad (II.2.3.14.b)$$

$$K23 = K32 = \frac{6EI}{L^2(1+4c)} \qquad (II.2.3.14.c)$$

$$K33 = \frac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} \qquad (II.2.3.14.d)$$

$$K33' = \frac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} \tag{II.2.3.14 c}$$

c = coeficiente de cortante.

$$c = \cos\theta \tag{II.2.3.15 a}$$
$$s = \operatorname{sen}\theta \tag{II.2.3.15 b}$$

Haciendo el producto de matrices de la ecuación (II.2.3.13), tenemos que:

$$\left[k_{AA}\right]_{SG} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K11 & 0 & 0 \\ 0 & K22 & K23 \\ 0 & K32 & K33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{II.2.3.16}$$

$$\left[k_{AA}\right]_{SG} = \begin{bmatrix} K11c^2 + K22s^2 & (K11-K22)cs & -K23s \\ (K11-K22)cs & K11s^2 + K22c^2 & K23c \\ -K32s & K32c & K33 \end{bmatrix} \tag{II.2.3.17}$$

Que representa las rigideces en el extremo A del elemento inclinado, al aplicarle un vector de desplazamientos unitarios en el mismo. Los cosenos directores estarán referidos respecto al eje X y de acuerdo con nuestra convención, el ángulo de inclinación del elemento se medirá en sentido antihorario.

Ahora:

$$\left[k_{AB}\right]_{SG} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K11 & 0 & 0 \\ 0 & -K22 & K23 \\ 0 & -K32 & K33' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{II.2.3.18}$$

$$\left[k_{AB}\right]_{SG} = \begin{bmatrix} -K11c^2 - K22s^2 & -(K11-K22)cs & -K23s \\ -(K11-K22)cs & -K11s^2 - K22c^2 & K23c \\ K32s & -K32c & K33' \end{bmatrix} \tag{II.2.3.19}$$

Representa las rigideces del elemento en el extremo A debido a los desplazamientos en B.

Siguiendo con los cálculos, tenemos que:

$$\left[k_{BA}\right]_{SG} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K11 & 0 & 0 \\ 0 & -K22 & -K23 \\ 0 & K32 & K33' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{II.2.3.20}$$

$$\left[k_{BA}\right]_{SG} = \left[\begin{array}{c|c|c} -K11c^2 - K22s^2 & -(K11-K22)cs & K23s \\ \hline -(K11-K22)cs & -K11s^2 - K22c^2 & -K23c \\ \hline -K32s & K32c & K33 \end{array}\right] \qquad (II.2.3.21)$$

Representa las rigideces en el extremo B debido a desplazamientos unitarios en A.

Para la última submatriz tenemos

$$\left[k_{BB}\right]_{SG} = \left[\begin{array}{c|c|c} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \hline \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} K11 & 0 & 0 \\ \hline 0 & K22 & -K23 \\ \hline 0 & -K32 & K33 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ \hline -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad (II.2.3.22)$$

$$\left[k_{BB}\right]_{SG} = \left[\begin{array}{c|c|c} K11c^2 + K22s^2 & (K11-K22)cs & K23s \\ \hline (K11-K22)cs & K11s^2 + K22c^2 & -K23c \\ \hline K32s & -K32c & K33 \end{array}\right] \qquad (II.2.3.23)$$

Representa las rigideces en el extremo B debido a desplazamientos unitarios en el mismo.

Marcos con cargas o fuerzas que no están aplicadas en los grados de libertad.

Usualmente en estructuras, las cargas actúan en los claros de sus elementos. El problema será obtener éstas fuerzas actuando directamente en los nudos de la misma, ya que se conoce bien el método para resolverlas bajo esta condición. El procedimiento se divide en *dos estados*.

Estado I.

Las cargas sobre la longitud de los elementos se trasladan a los nudos mediante fuerzas de empotramiento equivalentes en los extremos del elemento utilizando las teorías y principios de resistencia de materiales. Estas fuerzas actúan directamente sobre las barras y les llamaremos *"fuerzas de fijación"*.

Estado II.

Una vez que se tienen las fuerzas en los extremos de las barras (Estado I), se obtienen las fuerzas que actúan sobre los nudos de la estructura en la dirección de sus grados de libertad (momentos, cortantes y normales), cambiando el sentido de las primeras (Estado I). A las fuerzas del estado II les llamaremos *" fuerzas efectivas "*. Con las fuerzas actuando directamente en los nudos se procede a realizar el análisis estructural del modelo.

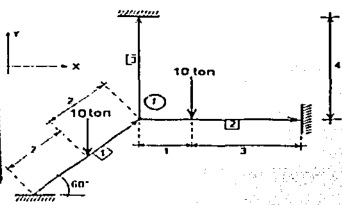
La solución del problema se obtiene al superponer los dos estados de carga anteriores.

Solución = Estado I + Estado II.

Para ilustrar el método descrito anteriormente, se propone el siguiente ejemplo.

Problema 5.

En La figura (II.2.3.9) se muestra un marco plano compuesto de tres barras con inclinación variable, un nudo libre y tres apoyos. También se muestra la orientación de cada barra y el sistema de referencia global. En las barras uno y dos se tienen cargas concentradas de *10 ton* a las distancias indicadas. Se pide analizar la estructura para determinar los desplazamientos en sus nudos, fuerzas internas y reacciones.



EI = constante, EA = 10 EI, longitudes en metros,
coeficiente de cortante = 0

Figura II.2.3.9. Modelo de marco plano del problema 5.

Solución.

Estado I (Cálculo de fuerzas de empotramiento).

En la figura (II.2.3.10) se obtienen las fuerzas de empotramiento para la condición de carga dada. La fuerza de *10 ton* que actúa sobre la *barra 1*, se proyecta en las direcciones axial y normal a su eje, obteniéndose *8.66 ton* en dirección axial y *5 ton* en dirección perpendicular al eje. Estas fuerzas producen las reacciones indicadas, las cuales se obtuvieron con las fórmulas:

$$F_{AX} = \frac{Fx(b)}{L}, \qquad F_{BX} = \frac{Fx(a)}{L}$$

Donde a y b son las distancias al punto de aplicación de la fuerza del extremo izquierdo y derecho respectivamente.

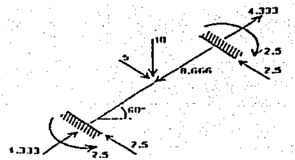


Figura II.2.3.10 Fuerzas de empotramiento de la barra 1.

Al proyectar las reacciones de la *barra 1*, figura (II.2.3.10), a los ejes globales, tendremos los valores indicados en la figura (II.2.3.11). Si efectuamos una suma algebraica de fuerzas en el extremo *A*, obtenemos los siguientes vectores de fuerzas de empotramiento, ya en sistema global:

$$\{F_A\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2.5 \end{Bmatrix} \qquad \{F_B\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 5 \\ -2.5 \end{Bmatrix}$$

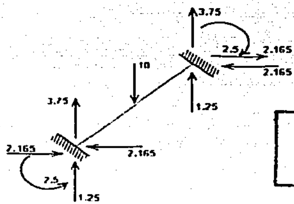


Figura II.2.3.11 Fuerzas de empotramiento de la barra 1 en sistema global.

Para la *barra 2*, se procede de manera semejante, calculando las reacciones en la barra, suponiendo que se encuentra empotrada en sus extremos, llegando a los siguientes valores.

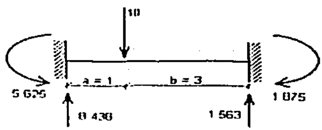


Figura II.2.3.12 Fuerzas de empotramiento de la barra 2.

Expresados en forma vectorial tenemos:

$$\{F_A\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 8.4375 \\ 5.625 \end{Bmatrix} \qquad \{F_B\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.5625 \\ -1.875 \end{Bmatrix}$$

Los vectores de fuerzas anteriores, ya están referidos directamente a un sistema global.

Dado que la *barra 3* no tiene fuerzas, no será de interés en el Estado I.

Con base en los vectores obtenidos, se formará a continuación el vector de fuerzas de fijación que actúa en el nudo 1 referido al sistema global.

$$\{F\}_{nudo\ 1} = \{\{F_B\}_{barra\ 1} + \{F_A\}_{barra\ 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 13.4375 \\ 3.125 \end{Bmatrix}$$

Estado II (Cálculo de fuerzas sobre los nudos).

El vector calculado anteriormente corresponde a fuerzas sobre las barras, y dado que estas son contrarias a las aplicadas en los nudos, simplemente cambiaremos los signos de las mismas para llevar a cabo el análisis. Es decir:

$$\{F_{nudo}\}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ -13.4375 \\ -3.125 \end{Bmatrix}$$

Ahora obtendremos la matriz de rigidez de la estructura, sumando la participación de las submatrices de cada barra. Para entender mejor el procedimiento, se aplican las relaciones entre fuerzas y desplazamientos, ecuación (II.2.3.1), estudiadas para las vigas en voladizo de la figura (II.2.3.1) en el extremo que es nudo de cada barra:

$$\{F_B\}_1 = [k_{BB}]_1 \{d\}_1 \qquad \text{(II.2.3.24.a)}$$

$$\{F_A\}_2 = [k_{AA}]_2 \{d\}_1 \qquad \text{(II.2.3.24.b)}$$

$$\{F_A\}_3 = [k_{AA}]_3 \{d\}_1 \qquad \text{(II.2.3.24.c)}$$

$$\Sigma\{F_1\} = [K]_1 \{d\}_1 \qquad \text{(II.2.3.25)}$$

La ecuación (II.2.3.25) es la ecuación fundamental del método de rigideces. Se tiene por tanto que:

$$[K] = [k_{BB}]_1 + [k_{AA}]_2 + [k_{AA}]_3 \tag{II.2.3.26}$$

$$\{F\} - \{F_1\} = \{F_B\}_1 + \{F_A\}_2 + \{F_A\}_3$$

Por lo tanto, se calcularán las submatrices de rigidez indicadas en las ecuaciones (II.2.3.24).

Barra 1.

$\theta = 60°$ ∴ $sen\ \theta = 0.866$ y $\cos\theta = 0.5$, se calcula $[k_{BB}]$ en sistema local y global:

$$\left[k'_{BB}\right]_1 = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1875 & -0.375 \\ 0 & -0.375 & 1.0 \end{bmatrix} EI \rightarrow \left[k_{BB}\right]_1 = \begin{bmatrix} 0.766 & 1.001 & 0.325 \\ 1.001 & 1.922 & -0.188 \\ 0.325 & -0.188 & 1.0 \end{bmatrix} EI$$

Barra 2.

$\theta = 0°$, $\cos\theta = 1$ y $sen\ \theta = 0$. Como la barra es paralela al eje X, $[k'_{AA}]_2 = [k_{AA}]_2$, por lo que si sustituimos directamente en la ecuación (II.2.3.16), llegamos a:

$$\left[k'_{AA}\right]_2 = \left[k_{AA}\right]_2 = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1875 & 0.375 \\ 0 & 0.375 & 1.0 \end{bmatrix} EI$$

Barra 3.

$\theta = 90°$, $\cos\theta = 0$ y $sen\ \theta = 1$. Esta barra es paralela al eje Y. Se obtendrá la submatriz $[K_{AA}]$ en sistema local y global.

$$\left[k'_{AA}\right]_3 = \begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1875 & 0.375 \\ 0 & 0.375 & 1.0 \end{bmatrix} EI \rightarrow \left[k_{AA}\right]_3 = \begin{bmatrix} 0.1875 & 0 & -0.375 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ -0.375 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} EI$$

Con las matrices anteriores estamos en posibilidades de ensamblar la matriz de rigideces de toda la estructura.

$$[K]=\begin{bmatrix} 0.7666+2.5+0.1875=3.454 & 1.001 & 0.325-0.375=-0.05 \\ 1.001 & 1.922+0.1875+2.5=4.6095 & -0.188+0.375=0.187 \\ 0.325-0.375=-0.05 & -0.188+0.375=0.187 & 3.0 \end{bmatrix} EI$$

Resolviendo el sistema:

$$\{F\}=[K]\{d\}$$

Si realizamos operaciones llegamos a:

$$\{d\}=\begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ \varphi \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0.878 \\ -3.070 \\ -0.835 \end{Bmatrix}\frac{1}{EI}$$

Cálculo de fuerzas en barras en sistema global.

Con base en la ecuación fundamental para obtener la relación entre desplazamientos y fuerzas en los extremos de un elemento, ecuación (II.2.3.3), se procede a realizar el cálculo de los mismos.

Ya que el problema en cuestión sólo tiene un nudo, el vector de desplazamientos $\{d\}$ intervendrá en el cálculo de las fuerzas de las tres barras. Inicialmente se calcularán las fuerzas en un sistema global y después se hará la conversión a sistema local.

Para la *barra 1*, se tiene que:

$$\{F_B\}_1=[k_{BB}]_1\{d\}_1=\begin{Bmatrix} -2.672 \\ -4.865 \\ 0.027 \end{Bmatrix}$$

Es importante destacar que para el cálculo de las fuerzas en el extremo *A* de la *barra 1*, no se utilizó la ecuación (II.2.3.3) y por tanto no se requirió contar con la submatriz $[k_{AA}]_1$. El vector $\{F_A\}_1$ se obtuvo por estática, que en el fondo es como se formó la ecuación antes descrita.

$$\{F_A\}_1=\begin{Bmatrix} 2.672 \\ 4.865 \\ 0.447 \end{Bmatrix}$$

Para la *barra 2*, de la ecuación (II.2.3.24) en el extremo *A*, tenemos:

$$\{F_A\}_2=[k_{AA}]_2\{d\}_1=\begin{Bmatrix}2.194\\-0.889\\-1.986\end{Bmatrix}$$

Después, por equilibrio de la barra:

$$\{F_B\}_2=\begin{Bmatrix}-2.194\\0.889\\-1.57\end{Bmatrix}$$

Para el extremo *A* de la *barra 3* se tiene que:

$$\{F_A\}_3=[k_{AA}]_3\{d\}_1=\begin{Bmatrix}0.478\\-7.674\\-1.164\end{Bmatrix}$$

Por equilibrio:

$$\{F_B\}_3=\begin{Bmatrix}-0.478\\7.674\\-0.748\end{Bmatrix}$$

Solución (Estado I + Estado II).

Barra 1:

$$\{F_A\}_1=\begin{Bmatrix}0\\5.0\\2.5\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}2.672\\4.865\\0.447\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2.672\\9.865\\2.947\end{Bmatrix}$$

$$\{F_B\}_1=\begin{Bmatrix}0\\5\\-2.5\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}-2.672\\-4.865\\0.027\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-2.672\\0.135\\-2.473\end{Bmatrix}$$

En la barra 2 se tendrá:

$$\{F_A\}_2=\begin{Bmatrix}0\\8.4375\\5.625\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}2.194\\-0.889\\-1.986\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2.194\\7.549\\3.639\end{Bmatrix}$$

$$\{F_B\}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.5625 \\ -1.875 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2.194 \\ 0.887 \\ -1.57 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2.194 \\ 2.4515 \\ -3.445 \end{Bmatrix}$$

En la barra 3:

$$\{F_A\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0.478 \\ -7.674 \\ -1.164 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.478 \\ -7.674 \\ -1.164 \end{Bmatrix}$$

$$\{F_B\}_3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -0.478 \\ 7.674 \\ -0.748 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.478 \\ 7.674 \\ -0.748 \end{Bmatrix}$$

Para comprobar el equilibrio, se tiene que las fuerzas de los extremos de las barras que concurren al nudo deben sumar algebraicamente cero.

$$\{F_B\}_1 + \{F_A\}_2 + \{F_A\}_3 = \{0\}$$

Cálculo de fuerzas en sistema local.

Esta tarea se llevará a cabo utilizando la matriz de transformación de coordenadas para cada barra, ecuaciones (II.2.3.6).

Para la barra 1, con $\theta = 60\,°$ $\cos\theta = 0.5$ $\mathrm{sen}\,\theta = 0.866$

$$\{F'_A\}_1 = [T]_1\ \{F_A\}_1 = \begin{Bmatrix} 9.879 \\ 2.618 \\ 2.947 \end{Bmatrix}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\{F'_B\}_1 = [T]_1\ \{F_B\}_1 = \begin{Bmatrix} -1.219 \\ 2.383 \\ -2.473 \end{Bmatrix}$$

Para la barra 2 $\theta = 0\,°$ $\cos\theta = 1.0$ $\mathrm{sen}\,\theta = 0.0$

$$\{F'_A\}_2 = [T]_2\ \{F_A\}_2 = \begin{Bmatrix} 2.194 \\ 7.549 \\ 3.639 \end{Bmatrix}$$

$$\{F'_B\}_2 = [T]_2\ \{F_B\}_2 = \begin{Bmatrix} -2.194 \\ 2.451 \\ -3.445 \end{Bmatrix}$$

Para la barra 3, $\theta = 90\ ^{\circ}\ \cos\theta = 0.0 \quad \operatorname{sen}\theta = 1.0$

$$\{F'_A\}_3 = [T]_3\ \{F_A\}_3 = \begin{Bmatrix} -7.674 \\ -0.478 \\ -1.164 \end{Bmatrix}$$

$$\{F'_B\}_3 = [T]_3\ \{F_B\}_3 = \begin{Bmatrix} 7.674 \\ 0.478 \\ -0.748 \end{Bmatrix}$$

II.2.4 Marcos planos con barras inclinadas, planteamiento por medio de la matriz de Continuidad.

Recordando la definición planteada de marcos planos en el subcapítulo anterior, podemos decir que tanto la estructura compuesta por elementos que conforman al marco plano como las fuerzas que actúan en él están comprendidos en un plano *X-Y*. En esta sección se considera que las fuerzas actúan en los nudos de los elementos de este tipo de estructuras, por lo que son de la forma:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} Fx \\ Fy \\ Mz \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.2.4.a)}$$

Los desplazamientos de sus nudos son de la forma:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_x \\ d_Y \\ \varphi_Z \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.2.4.b)}$$

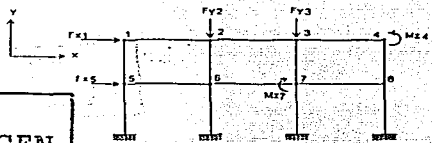


Figura II.2.4.1 Ejemplo de marco plano.

En la figura (II.2.4.1) se muestra un ejemplo de marco plano. Con base en la ecuación (II.2.3.3), existe una relación directa entre las fuerzas y los desplazamientos de un elemento.

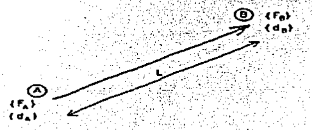


Figura II.2.4.2 Orientación de una barra de marco plano.

Es decir:

$$\left\{\begin{matrix}\{F_A\}\\ \{F_B\}\end{matrix}\right\} = \left[\begin{matrix}[k_{AA}] & [k_{AB}]\\ [k_{BA}] & [k_{BB}]\end{matrix}\right]\left\{\begin{matrix}\{d_A\}\\ \{d_B\}\end{matrix}\right\} \qquad \text{(II.2.4.1)}$$

En la figura (II.2.4.3) se presentan los elementos mecánicos característicos de una barra de una estructura con cargas en los nudos. Se puede demostrar que el cortante V en el elemento se obtendría como la sumatoria de los momentos M_A y M_B, entre la longitud del mismo. Por lo anterior, el cortante se considera como una variable dependiente y el vector de elementos mecánicos en una barra cualquiera, estará integrado por la fuerza normal, y los momentos en los extremos de la misma.

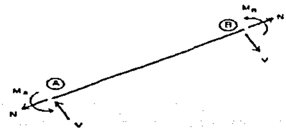
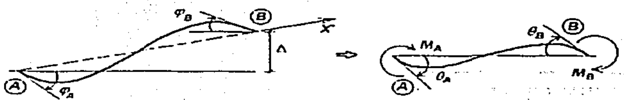


Figura II.2.4.3 Fueras en los extremos de una barra de un marco plano de longitud L

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ N \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.2.4.2)}$$

$$V = \frac{M_A + M_B}{L} \qquad \text{(II.2.4.3)}$$



(a) (b)

Figura II.2.4.4. Elemento deformado por la acción de giros en sus extremos.

Si seguimos un planteamiento con base en los tres principios fundamentales y con ayuda de la figura (II.2.4.4), el vector de deformaciones de un elemento cualquiera es:

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \delta \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.2.4.4)}$$

Si hacemos:

$$\theta = \varphi + \Delta/L \qquad (II.2.4.5)$$

En donde:

θ = deformación angular en un extremo i de un elemento.
φ = giro en el extremo i.
Δ = deformación perpendicular al eje axial del elemento.

Entonces para un elemento cualquiera se tendrá:

$$\theta_A = \varphi_A + \Delta/L \qquad (II.2.4.6)$$

$$\theta_B = \varphi_B + \Delta/L \qquad (II.2.4.7)$$

Generalizando el planteamiento, para un elemento de sección variable, r_{AA} estará definida como la rigidez angular en el extremo A debido a una rotación unitaria en el mismo extremo. La primera letra indica el lugar donde se producen las fuerzas y la segunda, donde se aplican los desplazamientos unitarios. De manera análoga se obtienen r_{AB}, r_{BA} y r_{BB}. Con base en lo anterior, podemos obtener los momentos en sus extremos:

$$M_A = r_{AA}\theta_A + r_{AB}\theta_B \qquad (II.2.4.8)$$

$$M_B = r_{BA}\theta_A + r_{BB}\theta_B \qquad (II.2.4.9)$$

Para el caso de la fuerza normal N, tenemos:

$$N = r_N\,\delta \qquad (II.2.4.10)$$

Donde r_N es la rigidez axial y δ es la deformación axial del elemento.

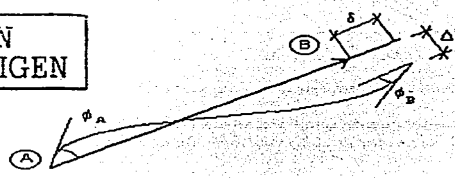


Figura II.2.4.5. Configuración deformada de una barra de un marco plano.

Agrupando matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{AA} & r_{AB} & 0 \\ r_{BA} & r_{BB} & 0 \\ 0 & 0 & r_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \delta \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.2.4.11)}$$

El arreglo matricial de la ecuación (II.2.4.11) es el principio de la *ley de Hooke*:

$$\{P\} = [k]\{e\}$$

Por lo que la matriz de rigidez de una barra *i* es:

$$[k] = \left[\begin{array}{c:c:c} r_{AA} & r_{AB} & 0 \\ \hdashline r_{BA} & r_{BB} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & r_N \end{array}\right] \qquad \text{(II.2.4.12)}$$

Para elementos de sección constante la matriz de rigidez anterior es:

$$[k] = \left[\begin{array}{c:c:c} \dfrac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} & \dfrac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} & 0 \\ \hdashline \dfrac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)} & \dfrac{4EI(1+c)}{L(1+4c)} & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & \dfrac{EA}{L} \end{array}\right] \qquad \text{(II.2.4.12.a)}$$

Como se puede observar, la matriz de la ecuación (II.2.4.12.a) no es diagonal, sin embargo si se quiere contar con un método similar al empleado para resolver armaduras mediante los tres principios fundamentales (continuidad, ley de Hooke y equilibrio), es necesario que la matriz de rigidez de un elemento cualquiera sea diagonal. Para ello utilizaremos el siguiente algoritmo matemático, en el cual intervienen variables que no tienen significado físico.

Algoritmo:

Sea:

$$\theta_1 = \theta_A \qquad \text{(II.2.4.13.a)}$$
$$\theta_3 = \theta_B \qquad \text{(II.2.4.13.b)}$$
$$\theta_2 = \theta_A + \theta_B \qquad \text{(II.2.4.13.c)}$$

Además:

$$M_1 = (r_{AA} - r_{AB})\,\theta_1 \qquad \text{(II.2.4.13.d)}$$
$$M_2 = r_{AB}\,\theta_2 \qquad \text{(II.2.4.13.e)}$$
$$M_3 = (r_{BB} - r_{AB})\,\theta_3 \qquad \text{(II.2.4.13.f)}$$

Para lo cual se tiene que cumplir que:

$$M_1 + M_2 = M_A \qquad \text{(II.2.4.13.g)}$$
$$M_3 + M_2 = M_B \qquad \text{(II.2.4.13.h)}$$

Lo cual se demuestra a continuación.

$$M_A\,\theta_A + M_B\,\theta_B = M_1\,\theta_1 + M_2\,\theta_2 + M_3\,\theta_3 \qquad \text{(II.2.4.14)}$$

Sustituyendo las ecuaciones (II.2.4.13) en la ecuación (II.2.4.14), tenemos que:

$$(M_1 + M_2)\,\theta_1 + (M_2 + M_3)\,\theta_3 = M_1\,\theta_1 + M_2(\theta_1 - \theta_3) + M_3\,\theta_3 \qquad \text{(II.2.4.15)}$$

Es decir, se cumple el principio de contragradiencia o trabajos recíprocos.

Volviendo a plantear el principio de la *Ley de Hooke* tenemos:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{AA} - r_{AB} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{AB} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{BB} - r_{AB} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \delta \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.2.4.16)}$$

Por facilidad, manejaremos la matriz de rigidez angular de la ecuación (II.2.4.16) como una matriz columna, sin perder de vista que se trata de una matriz diagonal.

$$[k] = \begin{bmatrix} r_{AA} - r_{AB} \\ \hdashline r_{AB} \\ \hdashline r_{BB} - r_{AB} \\ \hdashline r_N \end{bmatrix} \qquad \text{(II.2.4.17)}$$

Obtendremos enseguida la matriz de continuidad para una barra cualquiera de un marco plano.

En la figura (II.2.4.6) se muestra una barra de marco plano en estudio, inclinada un ángulo β en dirección del vector unitario $\hat{U}$. Se presenta además el sistema de referencia en forma global que la gobierna. En dicho elemento estudiaremos su comportamiento bajo un desplazamiento lineal unitario positivo axial en el extremo B con objeto de conocer sus deformaciones de acuerdo con el principio de continuidad.

De la figura (II.2.4.4):

$$\{d_A\} = \begin{Bmatrix} dx_A \\ dy_A \\ \varphi_A \end{Bmatrix} \tag{II.2.4.18}$$

$$\{d_B\} = \begin{Bmatrix} dx_B \\ dy_B \\ \varphi_B \end{Bmatrix} \tag{II.2.4.19}$$

Donde el vector $\{d_A\}$ representa los desplazamientos en el extremo A, mientras que el vector $\{d_B\}$ los desplazamientos del extremo B:

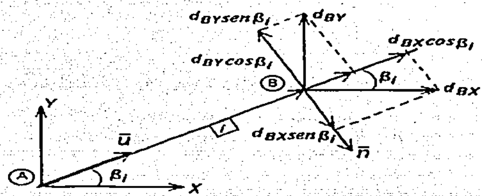


Figura II.2.4.6 Barra de marco plano con desplazamiento en el extremo B.

En la figura (II.2.4.6) muestra el vector unitario $\bar{U}$ paralelo al eje axial del elemento en estudio, además, se muestra el vector $\bar{n}$ también unitario pero en dirección normal al eje de la barra. Ambos vectores están referidos de acuerdo al sistema coordenado mostrado.

Estos vectores se expresan matemáticamente como:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \cos\beta \\ \operatorname{sen}\beta \end{Bmatrix} \tag{II.2.4.20}$$

$$\{n\} = \begin{Bmatrix} \operatorname{sen}\beta \\ -\cos\beta \end{Bmatrix} \tag{II.2.4.21}$$

En la misma figura el vector de desplazamientos $\{d_B\}$ se proyecta en las direcciones de los ejes X y Y del sistema de referencia. Luego cada componente se proyecta sobre las direcciones de los vectores antes definidos, lo cual tiene la finalidad de conocer las deformaciones lineales en dirección del eje del elemento y en dirección perpendicular a él.

Las cuales se representan mediante δ y Δ respectivamente. Para ello consideremos además la figura (II.2.4.7), en la cual se muestra la misma barra de marco plano con desplazamientos angulares o giros en sus dos extremos y poder conocer sus deformaciones lineales antes mencionadas.

Obtendremos ahora los valores de las deformaciones en coordenadas globales.

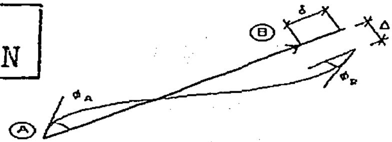


Figura II.2.4.7 Barra de marco plano deformada por la acción de giros en sus extremos.

Se puede observar que la deformación axial esta dada por la diferencia algebraica de las proyecciones sobre el vector axial $\hat{U}$ de los vectores de desplazamientos aplicados en B y en A. Matemáticamente se expresa como:

$$\delta = d_{B\,u} - d_{A\,u} \qquad \text{(II.2.4.22)}$$

Es decir:

$$\delta = d_{BX}\cos\beta + d_{BY}\,\mathrm{sen}\,\beta - d_{AX}\cos\beta - d_{AY}\,\mathrm{sen}\,\beta \qquad \text{(II.2.4.23)}$$

Por otro lado, la deformación perpendicular al eje del elemento esta dada por la diferencia de las proyecciones sobre el vector $\vec{n}$ de los mismos desplazamientos, que matemáticamente se expresa como:

$$\Delta = d_{B\,n} - d_{A\,n} \qquad \text{(II.2.4.24)}$$

De la figura (II.2.4.6) se tiene que:

$$\Delta = d_{BX}\,\mathrm{sen}\,\beta - d_{BY}\cos\beta - d_{AX}\,\mathrm{sen}\,\beta + d_{AY}\cos\beta \qquad \text{(II.2.4.25)}$$

Una vez obtenidas las deformaciones en un elemento cualquiera, podemos plantear el principio de continuidad:

$$\{e\}_i = [A]_i \left\{ \begin{matrix} \{d_A\} \\ \hline \{d_B\} \end{matrix} \right\}_i \qquad \text{(II.2.4.26.a)}$$

Donde:

$$\{e\}_i = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \delta \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.2.4.26.b)}$$

Es el vector de deformaciones de un elemento *i*, *[A]* es la matriz de continuidad y *{d}* es el vector de desplazamientos.

Recordando que se definieron nuevas variables, sustituimos la ecuación (II.2.4.6) y la (II.2.4.7) en las ecuaciones (II.2.4.13) llegamos a:

$$\theta_1 = \theta_A = \varphi_A + \frac{\Delta}{L} \qquad \text{(II.2.4.27.a)}$$

$$\theta_3 = \theta_B = \varphi_B + \frac{\Delta}{L} \qquad \text{(II.2.4.27.b)}$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \theta_3 = \varphi_A + \varphi_B + \frac{2\Delta}{L} \qquad \text{(II.2.4.27.c)}$$

Sustituyendo estas ecuaciones en la ecuación (II.2.4.26.a), podemos realizar la siguiente relación matricial de desplazamientos con deformaciones de una barra cualquiera:

$$[A]_i = \begin{array}{c} \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \delta \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} d_{Ax} & d_{Ay} & \varphi_A & d_{Bx} & d_{By} & \varphi_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} -\frac{\operatorname{sen}\beta}{L} & \frac{\cos\beta}{L} & 1 & \frac{\operatorname{sen}\beta}{L} & -\frac{\cos\beta}{L} & 0 \\ \hline -2\frac{\operatorname{sen}\beta}{L} & 2\frac{\cos\beta}{L} & 1 & 2\frac{\operatorname{sen}\beta}{L} & -2\frac{\cos\beta}{L} & 1 \\ \hline -\frac{\operatorname{sen}\beta}{L} & \frac{\cos\beta}{L} & 0 & \frac{\operatorname{sen}\beta}{L} & -\frac{\cos\beta}{L} & 1 \\ \hline -\cos\beta & -\operatorname{sen}\beta & 0 & \cos\beta & \operatorname{sen}\beta & 0 \end{array}\right] \end{array} \qquad \text{(II.2.4.28)}$$

La matriz anterior es la matriz de continuidad de una barra cualquiera de un marco plano. Hay que notar que se encuentra en sistema local y en función sólo de la geometría de la estructura, por lo que su construcción es sencilla.

Recordando las ecuaciones básicas ya vistas en el *capítulo I*, y sustituyendo, tenemos que:

$\{e\} = [A]\{d\}$ Principio de Continuidad. (II.2.4.29.a)

$\{P\} = [k]\{e\}$ Ley de Hooke. (II.2.4.29.b)

$\{F\}=[A]^T\{P\}$ Equilibrio. (II.2.4.29.c)

$\{F\}=[A]^T[k][A]\{d\}$

$\{F\}=[K]\{d\}$ Ecuación Fundamental de Rigideces. (II.2.4.29.d)

Tal como se realizó en el planteamiento del método de ensamble de submatrices de rigideces en el subcapítulo anterior, por el método de continuidad, la matriz de rigideces esta dada por:

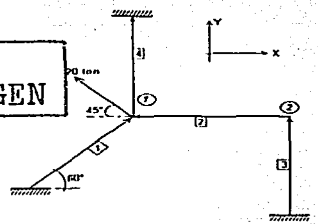
$$[K]=[A]^T[k][A] \qquad \text{(II.2.4.30)}$$

Se puede demostrar que la matriz [K] obtenida es la misma matriz $\begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ k_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix}$ del elemento.

Para ilustrar el procedimiento descrito anteriormente, se presenta el siguiente ejemplo.

Problema 6.

En la figura (II.2.4.8) se muestra un marco plano compuesto de cuatro barras, una de las cuales esta inclinada *60 °* con respecto a la horizontal. Cuenta además con dos nudos libres y con tres apoyos. En el *nudo 1* se aplica la fuerza indicada. Los datos se indican en la misma figura.



EI = cte
EA = 10EI
L=4 unidades de longitud en todas las barras

coeficiente de cortante=0

Figura II.2.4.8 Ejemplo de marco plano.

Solución.

Todos los elementos son de sección constante, por lo que la matriz de rigidez diagonal de cada uno se calcula de la siguiente forma mediante la ecuación (II.2.4.17).

$$[k]=\begin{bmatrix}\dfrac{2EI}{L}\\ \dfrac{2EI(1-2c)}{L(1+4c)}\\ \dfrac{2EI}{L}\\ \dfrac{EA}{L}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5\\0.5\\0.5\\5.0\end{bmatrix}EI$$

Como se tienen dos nudos libres en la estructura, existen seis grados de libertad asociados a seis desplazamientos a los que llamaremos:

	N° de Grado de libertad
d_{x1} $\rightarrow$	1
d_{y1} $\rightarrow$	2
φ_{z1} $\rightarrow$	3
d_{x2} $\rightarrow$	4
d_{y2} $\rightarrow$	5
φ_{z2} $\rightarrow$	6

Para la *barra 1* con una inclinación de *60 °*, *cos* β = *0.5*, *sen* β = *0.8666* y usando la ecuación (II.2.4.28), se tiene que su matriz de continuidad es:

$$[A]=\begin{array}{c}\overbrace{\begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array}}^{B}\\ \begin{bmatrix}0.217 & -0.125 & 0\\ 0.434 & -0.250 & 1\\ 0.217 & -0.125 & 1\\ 0.5 & 0.866 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

Los números indicados en la parte superior del arreglo matricial asocian las columnas a los desplazamientos y son en el extremo *B* de la *barra 1*. Nótese que el extremo *A* de la *barra 1* es el apoyo, por lo cual, su contribución a la matriz de continuidad es nula.

Para la *barra 2*, con $\beta = 0$ °, *cos* $\beta = 1$ y *sen* $\beta = 0$. Así, tenemos:

$$[A]_2=\begin{array}{c}\overbrace{\begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array}}^{B}\ \overbrace{\begin{array}{ccc}4 & 5 & 6\end{array}}^{A}\\ \begin{bmatrix}-0.250 & 0 & 1 & 0 & -0.250 & 0\\ 0 & 0.5 & 1 & 0 & -0.5 & 1\\ 0 & 0.250 & 0 & 0 & -0.250 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

Para la *barra 3*, con $\beta = 90$ °, *cos* $\beta = 0$ y *sen* $\beta = 1$, por lo tanto:

$$[A]_3 = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccc} 4 & 5 & 6 \end{array}}^{B} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} 0.250 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 \\ 0.250 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Para la *barra 4*, $\beta = 90°$, $\cos\beta = 0$ y $\operatorname{sen}\beta = 1$, por lo tanto:

$$[A]_4 = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array}}^{A} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} -0.250 & 0 & 1 \\ -0.5 & 0 & 1 \\ -0.250 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Ahora, se procede a obtener la matriz global de rigideces, en función de las matrices de continuidad obtenidas anteriormente, utilizando el algoritmo de multiplicación de columnas como se hizo para armaduras:

$$K_{ij} = \sum_{i=1}^{NB} k_i a_{li} a_{lj}$$

Con lo que se obtiene la siguiente matriz:

$$[K] = \begin{array}{c|cccccc} & d_{1X} & d_{1Y} & \varphi_1 & d_{2X} & d_{2Y} & \varphi_2 \\ \hline 1 & 6.579 & 2.09 & -0.05 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & 2.084 & 8.984 & 0.188 & 0 & -0.188 & 0.375 \\ 3 & -0.05 & 0.188 & 3 & 0 & -0.375 & 0.5 \\ 4 & -0.5 & 0 & 0 & 5.188 & 0 & 0.375 \\ 5 & 0 & -0.188 & -.0375 & 0 & 5.188 & -0.375 \\ 6 & 0 & 0.375 & 0.5 & 0.375 & -0.375 & 2 \end{array} \times EI$$

De las fuerzas aplicadas en el *nudo 1*, se tiene el siguiente vector:

$$\{F\} = \left\{\begin{array}{c} -14.14 \\ 14.14 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\} Ton$$

Resolviendo el sistema $\{F\} = [K]\{d\}$, se llega al vector de desplazamientos mostrado:

$$\{d\}=\left\{\begin{array}{c}-14.14\\4.796\\-0.827\\\hdashline-13.768\\0.254\\1.936\end{array}\right\}\begin{array}{l}\to 1\\\to 2\\\to 3\\\to 4\\\to 5\\\to 6\end{array}\times\frac{1}{EI}$$

Ahora se procede a obtener las deformaciones y los elementos mecánicos en las barras.

Barra 1. Sustituyendo en la ecuación (II.2.4.26.a):

$$\{e\}_1=\begin{bmatrix}0.217 & -0.125 & 0\\0.434 & -0.250 & 1\\0.217 & -0.125 & 1\\0.5 & 0.866 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-14.14\\4.796\\-0.827\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-3.678\\-8.163\\-4.495\\-2.917\end{Bmatrix}\times\frac{1}{EI}$$

Aplicando la ecuación (II.2.4.29.b):

$$\{P\}_1=[k]\{e\}_1=\begin{bmatrix}-1.839\\-4.091\\-2.247\\-14.583\end{bmatrix}\begin{array}{l}\to M_1\\\to M_2\\\to M_3\\\to N\end{array}$$

Sustituyendo en (II.2.4.13), tenemos que:

$$M_A=-5.92$$
$$M_B=-6.33$$
$$N=-14.58$$

Este procedimiento se hará para todas las barras.

Es importante aclarar que los resultados obtenidos están ya en sistema local, debido a la naturaleza de la matriz de continuidad, la cual lleva implícita la inclinación de los elementos.

Barra 2.

$$\{e\}_2=\begin{Bmatrix}0.309\\3.380\\3.072\\0.372\end{Bmatrix}\times\frac{1}{EI}$$

$$\{P\}_2=[k]\{e\}_2=\begin{Bmatrix}0.154\\1.690\\1.536\\1.860\end{Bmatrix}\begin{array}{l}\to M_1\\\to M_2\\\to M_3\\\to N\end{array}$$

$$M_A=1.84$$
$$M_B=3.23$$
$$N=1.86$$

Barra 3.

$$\{e\}_3 = \begin{Bmatrix} -3.342 \\ -4.948 \\ -1.506 \\ 0.2540 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{EI}$$

$$\{P\}_3 = [k]\{e\}_3 = \begin{Bmatrix} -1.67 \\ -2.47 \\ -0.75 \\ -1.27 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow M_1 \\ \rightarrow M_2 \\ \rightarrow M_3 \\ \rightarrow N \end{matrix}$$

$$M_A = -4.14$$
$$M_B = -3.22$$
$$N = 1.27$$

Barra 4.

$$\{e\}_4 = \begin{Bmatrix} -3.678 \\ -8.163 \\ -4.495 \\ -2.917 \end{Bmatrix} \times \frac{1}{EI}$$

$$\{P\}_4 = [k]\{e\}_4 = \begin{Bmatrix} -1.35 \\ 3.12 \\ 1.77 \\ -23.98 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow M_1 \\ \rightarrow M_2 \\ \rightarrow M_3 \\ \rightarrow N \end{matrix}$$

$$M_A = 1.77$$
$$M_B = 4.89$$
$$N = -23.98$$

En la figura (II.2.4.9), se muestra que existe equilibrio en todos los nudos del marco, además se presentan las reacciones en los apoyos y los elementos mecánicos en las barras.

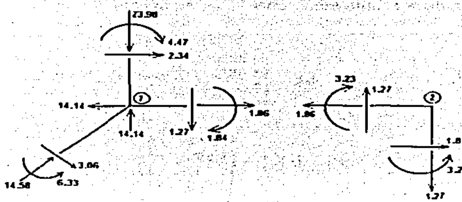


Figura II.2.4.9 Solución del marco plano de la figura II.2.4.8.

II.3 RETÍCULA PLANA.

La retícula plana es un tipo de estructura que tiene la misma configuración de un marco plano, pero a diferencia de este último, las cargas se aplican en dirección perpendicular al plano que la contiene. La superposición de los modelos de comportamiento de marco plano y retícula nos conduce al modelo del marco tridimensional. Este tipo de estructuras se emplea en parrillas de cimentación, voladizos, losas voladas, etc.

Hipótesis.

La retícula plana cumple las siguientes condiciones, para los fines de este trabajo:

a) Todos los ejes locales de las barras están contenidos dentro del sistema global de referencia XY (modelo plano).
b) Tienen como eje principal al eje Z (ver figura II.3.1).
c) Las fuerzas en los nudos se aplican en forma perpendicular a la estructura y se tienen momentos flexionantes alrededor del eje Y y de torsión alrededor del eje X así como con una fuerza de cortante en el eje Z. Esto se representa en la ecuación siguiente:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ F_z \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.3.1)}$$

d) Los desplazamientos en los nudos de la estructura son de la forma:

$$\{d_i\} = \begin{Bmatrix} \varphi_{xi} \\ \varphi_{yi} \\ d_{zi} \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.3.2)}$$

e) Los elementos mecánicos son:

$$\begin{Bmatrix} M_Y \\ F_Z \\ M_X \end{Bmatrix} \quad \text{o bien:} \quad \begin{Bmatrix} M_Y \\ V_Z \\ M_T \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.3.3)}$$

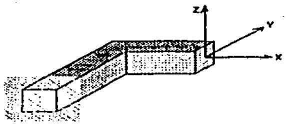


Figura II.3.1 Sección transversal de un elemento en retícula plana, el eje principal es el eje Z.

En la figura (II.3.2) se muestran los ejes locales de un elemento de la retícula y las tres posibles fuerzas a las que puede estar sometido dicho elemento, las cuales están expresadas en la ecuación (II.3.1).

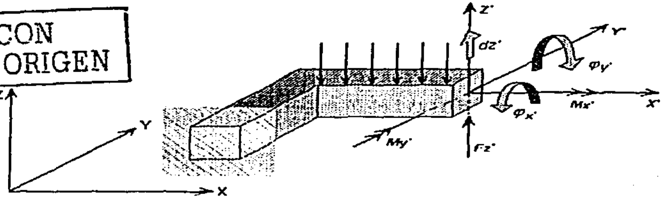


Figura II.3.2 Ejes locales y fuerzas en los mismos en un elemento de retícula plana.

Convención de signos.

Esta convención establece el sentido horario para los giros o momentos, y surge de la representación vectorial de estos en los ejes *X'* y *Y'* de un elemento de retícula. Definiremos como momento torsionante positivo aquel que, en forma vectorial salga del elemento, o bien, mediante el uso de la regla de la mano derecha: cuando el pulgar apunta hacia afuera del elemento en dirección axial. Lo anterior se ejemplifica en la figura (II.3.3).

En la figura (II.3.3.a) se indican los sentidos positivos de los momentos y fuerza cortante en un elemento de retícula plana en el espacio. Mientras que en la figura (II.3.3.b) se representan los momentos en forma vectorial en el plano *X' - Y'*. Por último se muestra el mismo elemento con la representación vectorial de momentos y fuerza en el plano *Z' - X'*.

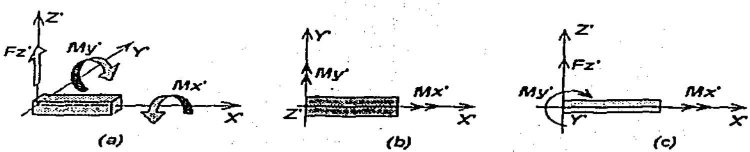


Figura II.3.3 Convención de signos positivos en un elemento de retícula plana.

En la figura (II.3.4) se muestra un ejemplo de retícula. Obsérvese que la fuerza $F2$ produce flexión a la barra donde esta aplicada mientras que en las otras dos produce torsión. Siendo que la fuerza $F1$ produce flexión a la *barra 1* y torsión a la *barra 2*.

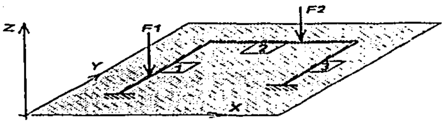
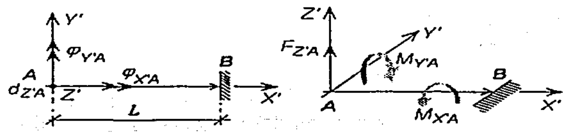


Figura II.3.4. Ejemplo de retícula plana.

En la figura (II.3.5) se muestra una barra de retícula con un extremo libre bajo la acción de desplazamientos y fuerzas generadas, mientras que el otro extremo esta empotrado. Como se mencionó anteriormente, en esta figura se hace énfasis en el enfoque vectorial para representar a los giros y momentos. Así mientras la figura (II.3.5.a) muestra las fuerzas en el extremo inicial del elemento de longitud L como vectores en sentido positivo y referidos al sistema local $X' - Y'$. La figura (II.3.5.b) representa la misma barra pero en el espacio. La nomenclatura de la primera figura se manejará de aquí en adelante.



(a) (b)

Figura II.3.5 Representación de los desplazamientos y fuerzas, según la convención de signos, en el extremo A.

Teniéndose entonces los siguientes vectores de fuerzas y desplazamientos respectivamente:

$$\{F_A\} = \begin{Bmatrix} M_{X'A} \\ M_{Y'A} \\ F_{Z'A} \end{Bmatrix} \tag{II.3.4}$$

$$\{d_A\} = \begin{Bmatrix} \varphi_{X'A} \\ \varphi_{Y'A} \\ d_{Z'A} \end{Bmatrix} \tag{II.3.5}$$

El primer elemento del vector de fuerzas, representa el momento torsionante alrededor del eje axial X de la barra, mientras que el segundo y el tercero son, respectivamente, el momento flexionante alrededor del eje Y y la fuerza cortante en dirección del eje Z. El segundo vector contiene los giros alrededor de los ejes X y Y así como el desplazamiento en el eje Z. Todos estos valores corresponden al extremo A de la figura (II.3.5).

Planteamiento por el método convencional.

De manera análoga a como se estudio en el planteamiento para la solución de marcos planos, en reticula también se puede trabajar con submatrices k_{AA} , k_{AB} , k_{BA} y k_{BB} . Para obtener la matriz de rigideces de un elemento por medio de su ensamble.

Si aplicamos desplazamientos unitarios en el extremo libre de un elemento de reticula, encontraremos las fuerzas del mismo, es decir, sus rigideces.

Haciendo $\varphi_{YA} = 1$, tenemos que la configuración deformada es la que se muestra en la figura (II.3.6), en la cual el eje Y' es normal al plano definido por X' y Z' (siguiendo la regla de la mano derecha).

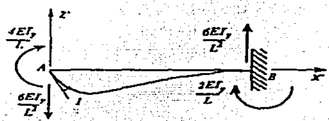


Figura II.3.6 Elemento con giro unitario en el extremo libre alrededor del eje Y'

Si hacemos $d_{AZ} = 1$, tendremos la configuración deformada mostrada en la figura (II.3.7).

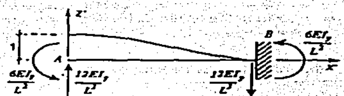


Figura II.3.7 Elemento con un extremo empotrado y el otro libre en el cual se aplica un desplazamiento unitario positivo en dirección Z'.

Por último estudiaremos el comportamiento de este elemento bajo la acción de un giro alrededor de su eje axial X', esto se representa en al figura (II.3.8).

Al igual que en marcos planos, podemos plantear una relación matricial entre los desplazamientos aplicados en un extremo del elemento y las fuerzas generadas en el mismo.

Lo anterior se muestra en la ecuación (II.3.6). Obsérvese que la torsión esta desacoplada de la flexión en el eje Y' y del cortante en el eje Z', al igual que la fuerza normal lo está del cortante en Y' y del momento en Z', para el caso de marcos planos.

Lo mismo podemos hacer para obtener cada submatriz de rigideces.

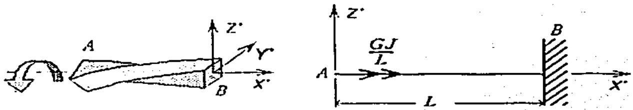


Figura II.3.8 Elemento con giro unitario positivo alrededor de su eje axial.

$$[k_{AA}] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi_{XA} & \varphi_{YA} & d_{ZA} \end{array} \\ \begin{bmatrix} \dfrac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{4EI_y}{L} & \dfrac{-6EI_y}{L^2} \\ 0 & \dfrac{-6EI_y}{L^2} & \dfrac{12EI_y}{L^3} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} M_{XA} \\ M_{YA} \\ F_{ZA} \end{array} \qquad \text{(II.3.6)}$$

Planteamiento por la matriz de continuidad.

Sea la figura (II.3.9) donde se muestra la configuración deformada de un elemento de retícula, con sus dos extremos libres, debido a la acción de desplazamientos angulares o rotaciones en A y en B. Estudiaremos las deformaciones angulares en ambos extremos y las fuerzas generadas en el elemento.

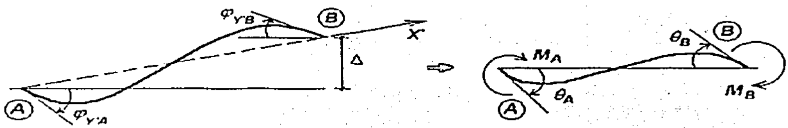


Figura II.3.9 Elemento deformado por la acción de rotaciones unitarias.

Podemos decir que en dicha configuración, análogo a como se planteo para marcos planos, en el extremo A la deformación angular vale:

$$\theta_A = \varphi_{AY'} + \Delta/L \qquad \text{(II.3.7.a)}$$

Mientras que en el extremo B podemos hacer lo mismo:

$$\theta_B = \varphi_{BY'} + \Delta/L \qquad \text{(II.3.7.b)}$$

Nota: Δ no importa ya que el eje Z siempre será principal. Por lo tanto $\Delta' = \Delta$

Estas dos ecuaciones se cumplen tanto para sección constante como variable. Además como se estudio en marcos planos, y con ayuda de la figura (II.3.10), los momentos en los extremos pueden calcularse como:

$$M_A = r_{AA}\theta_A + r_{AB}\,\theta_B \qquad \text{(II.3.8.a)}$$

$$M_B = r_{BA}\theta_A + r_{BB}\,\theta_B \qquad \text{(II.3.8.b)}$$

Cabe hacer la observación que, para sección constante, las rigideces angulares en los extremos debido a los desplazamientos aplicados en ellos, son iguales, esto es:

$$r_{AA} = 4EI/L = r_{BB} \qquad \text{(II.3.9)}$$

Además ocurre lo mismo con las rigideces de los extremos contrarios a la aplicación de desplazamientos:

$$r_{AB} = 2EI/L = r_{BA} \qquad \text{(II.3.10)}$$

Finalmente de la figura (II.3.10) podemos decir que:

$$r_T = GJ/L \qquad \text{(II.3.11)}$$

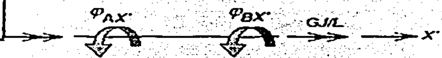


Figura II.3.10 Rigidez a torsión del elemento en estudio.

Podemos expresar la deformación por torsión como:

$$\theta_T = \varphi_{X'B} - \varphi_{X'A} \qquad \text{(II.3.12)}$$

Mientras que podemos decir que el momento torsionante vale:

$$M_T = r_T\, \theta_T \qquad (II.3.13)$$

Donde las variables empleadas son: $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

En la que:

G = Módulo de rigidez a cortante.
E = Módulo de elasticidad del material de la barra.
ν = Relación de Poisson.
J = Momento polar modificado (teoria de la torsión).
L = Longitud del elemento.

Las ecuaciones anteriores podemos expresarlas mediante un arreglo matricial aplicando el principio de la *ley de Hooke* como:

$$\{e\} = \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \\ \theta_T \end{bmatrix} \quad \text{vector de deformaciones.} \qquad (II.3.14)$$

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} M_A \\ M_B \\ M_T \end{Bmatrix} \quad \text{vector de fuerzas internas.} \qquad (II.3.15)$$

Entonces la matriz de rigideces del elemento estudiado vale:

$$[k] = \begin{bmatrix} \dfrac{4EI}{L} & \dfrac{2EI}{L} & 0 \\ \dfrac{2EI}{L} & \dfrac{4EI}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{GJ}{L} \end{bmatrix} \qquad (II.3.16)$$

Que también puede expresarse de la siguiente manera:

$$[k] = \begin{bmatrix} r_{AA} & r_{AB} & 0 \\ r_{BA} & r_{BB} & 0 \\ 0 & 0 & r_T \end{bmatrix} \qquad (II.3.17)$$

Obsérvese que la *ley de Hooke* ha sido planteada en forma parcial y tendremos como objetivo principal lograr que la matriz de rigideces del elemento sea diagonal. Por ello utilizaremos el siguiente algoritmo matemático, en el cual haremos intervenir las siguientes variables que carecen de significado físico pero que serán de gran utilidad para lograr nuestro propósito.

Algoritmo:

$$\theta_1 = \varphi_{y'A} + \frac{\Delta}{L} = \theta_A \qquad \text{(II.3.18.a)}$$

$$\theta_3 = \varphi_{y'B} + \frac{\Delta}{L} = \theta_B \qquad \text{(II.3.18.b)}$$

$$\theta_2 = \varphi_{y'B} + \varphi_{y'A} + \frac{2\Delta}{L} = \theta_A + \theta_B \qquad \text{(II.3.18.c)}$$

Mientras que para las fuerzas en el mismo elemento tenemos:

$$M_1 = (r_{AA} - r_{AB})\ \theta_1 \qquad \text{(II.3.18.d)}$$

$$M_2 = (r_{AB})\ \theta_2 \qquad \text{(II.3.18.e)}$$

$$M_3 = (r_{BB} - r_{AB})\ \theta_3 \qquad \text{(II.3.18.f)}$$

Con base en el algoritmo presentado, los momentos en los extremos se calculan como:

$$M_A = M_1 + M_2 \qquad \text{(II.3.18.g)}$$

$$M_B = M_2 + M_3 \qquad \text{(II.3.18.h)}$$

Podemos establecer ahora las nuevas dimensiones de los vectores de deformaciones y fuerzas internas, las cuales se muestran a continuación:

$$\{e_i\} = \begin{Bmatrix} \theta_{1r'} \\ \theta_{2r'} \\ \theta_{3r'} \\ \theta_{T'} \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.3.19)}$$

$$\{P_i\} = \begin{Bmatrix} M_{1r'} \\ M_{2r'} \\ M_{3r'} \\ M_{T} \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.3.20)}$$

Agrupando nuevamente las ecuaciones (II.3.18.d), (II.3.18.e) y (II.3.18.f), tenemos:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{AA}-r_{AB} & & & \\ & r_{AB} & & \\ & & r_{BB}-r_{AB} & \\ & & & r_T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_T \end{Bmatrix}$$

La matriz diagonal de rigideces del elemento resulta ser:

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} r_{AA}-r_{AB} & & & \\ & r_{AB} & & \\ & & r_{BB}-r_{AB} & \\ & & & r_T \end{Bmatrix} \text{ o bien } \{k\} = \begin{Bmatrix} r_{AA}-r_{AB} \\ r_{AB} \\ r_{BB}-r_{AB} \\ r_T \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.3.21)}$$

Para sección constante resulta ser:

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{2EI_y}{L} \\ \dfrac{2EI_y}{L} \\ \dfrac{2EI_y}{L} \\ \dfrac{GJ}{L} \end{Bmatrix}$$

Para obtener la matriz de continuidad del elemento, estudiaremos el comportamiento de la barra inclinada de la figura (II.3.11), a la cual se le aplican desplazamientos angulares y traslacionales positivas, según el sistema de referencia global $X-Y$, con el objeto de conocer las deformaciones que se presentan, como lo establece el principio de continuidad.

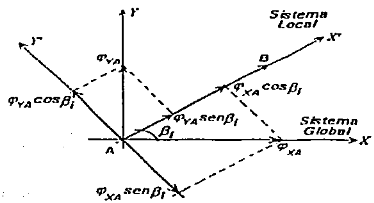


Figura II.3.11 Elemento inclinado sujeto a desplazamientos positivos en sistema global.

El primer paso consiste en proyectar los desplazamientos angulares positivos, aplicados en los extremos, sobre los ejes axial y normal al elemento, $X' - Y'$. Además, nos auxiliaremos de la figura (II.3.12) para estudiar los desplazamientos traslacionales.

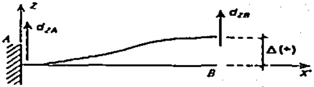


Figura II.3.12 Configuración del elemento con desplazamiento perpendicular a su eje.

Por lo tanto, de la figura (II.3.11) obtenemos los giros $\varphi_{Y'A}$ y $\varphi_{X'A}$ en sistema local:

$$\varphi_{Y'A} = -\varphi_{XA}\, sen\ \beta i + \varphi_{YA} \cos \beta i \qquad (II.3.22)$$

$$\varphi_{X'A} = -\varphi_{XA} \cos \beta i - \varphi_{YA}\, sen\ \beta i \qquad (II.3.23)$$

De la figura (II.3.12) tenemos que:

$$\Delta = d_{ZB} - d_{Z1} \qquad (II.3.24)$$

Sustituyendo las ecuaciones (II.3.22) a (II.3.24) en las ecuaciones (II.3.18) tenemos que:

$$\theta_A = \theta_1 = \varphi_{Y'A} + \Delta/L$$
$$\theta_1 = -\varphi_{XA} sen\ \beta i + \varphi_{YA} \cos \beta i - d_{ZA}/L + d_{ZB}/L \qquad (II.3.25.a)$$

$$\theta_B = \theta_3 = \varphi_{Y'B} + \Delta/L$$
$$\theta_3 = -\varphi_{XB} sen\ \beta i + \varphi_{YB} \cos \beta i - d_{ZA}/L + d_{ZB}/L \qquad (II.3.25.b)$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \theta_3 = \varphi_{Y'A} + \varphi_{Y'B} + 2\Delta/L$$
$$\theta_2 = -\varphi_{XA} sen\ \beta i + \varphi_{YA} \cos \beta i - 2d_{ZA}/L - \varphi_{XB} sen\ \beta i + \varphi_{YB} \cos \beta i + 2d_{ZB}/L \qquad (II.3.25.c)$$

$$\theta_T = -\varphi_{XA} \cos \beta i - \varphi_{YA} sen\ \beta i + \varphi_{XB} \cos \beta i + \varphi_{YB} sen\ \beta i \qquad (II.3.25.d)$$

Es decir, $\{e\}=[A]\{d\}$ o bien $\{e\}_i = [A]_i * \begin{Bmatrix} \{d_A\} \\ \{d_B\} \end{Bmatrix}$

Con los vectores $\{e\}$ y $\{d\}$ definidos antes y con la figura mostrada se tiene la matriz de continuidad en la ecuación (II.3.26).

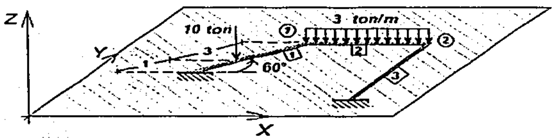
Cabe hacer el comentario de que al igual que en armaduras y en marcos planos, la matriz de continuidad para reticula plana esta en función sólo de la geometria de la estructura (cosenos directores y longitudes de elementos).

$$[A]_i = \begin{array}{c} \\ O_1 \\ O_2 \\ O_3 \\ O_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \varphi_{XA} & \varphi_{YA} & \delta_{ZA} & \varphi_{XB} & \varphi_{YB} & \delta_{ZB} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} -\operatorname{sen}\beta i & \cos\beta i & -1/L & 0 & 0 & 1/L \\ \hline -\operatorname{sen}\beta i & \cos\beta i & -2/L & -\operatorname{sen}\beta i & \cos\beta i & 2/L \\ \hline 0 & 0 & -1/L & -\operatorname{sen}\beta i & \cos\beta i & 1/L \\ \hline -\cos\beta i & -\operatorname{sen}\beta i & 0 & \cos\beta i & \operatorname{sen}\beta i & 0 \end{array}\right] \end{array} \qquad \text{(II.3.26)}$$

A continuación se presenta un ejemplo en el que se aplicará el planteamiento descrito.

Problema 7.

La figura (II.3.13) muestra una retícula plana de tres barras, dos nudos y dos apoyos, una de sus barras se encuentra inclinada *60* ° con respecto a la horizontal. Los valores de cargas, longitudes y propiedades de material están indicados enseguida. Las unidades de longitud están en metros.



EI_y = constante, $GJ = 0.5\ EI_y$, longitud en todos los elementos = 4 m.
Figura II.3.13. Ejemplo de retícula plana.

Solución:

Estado I (fuerzas de empotramiento).

A continuación obtendremos las fuerzas de empotramiento de la *barra 1* y *barra 2*, figuras (II.3.14) y (II.3.15), para trasladarlas a los nudos.

Posteriormente proyectamos las fuerzas al sistema global y realizamos un equilibrio de los nudos para obtener el vector de fuerzas externas.

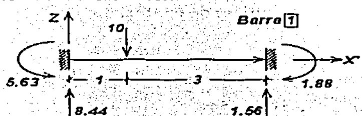


Figura II.3.14 Fuerzas de empotramiento de la barra 1.

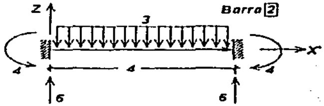


Figura II.3.15 Fuerzas de empotramiento de la barra 2.

Con base en las fuerzas de empotramiento, las fuerzas de fijación en la estructura son:

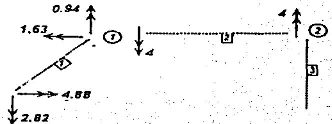


Figura II.3.16 Obtención de las fuerzas de fijación.

Después de realizar la suma vectorial de momentos y cortantes se tiene el siguiente vector de fuerzas:

$$\{F_{ef}\}=\begin{Bmatrix} 1.63 \\ 3.06 \\ -7.56 \\ 0 \\ -4 \\ -6 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} M_{x1} \\ M_{y1} \\ F_{z1} \\ \hline M_{x2} \\ M_{y2} \\ F_{z2} \end{Bmatrix}$$

Estado II (fuerzas en los nudos).

Dado que se cuenta con dos nudos libres, existen seis grados de libertad asociados a seis desplazamientos posibles, para ello se considera la siguiente numeración con el objeto de identificar las columnas en las matrices de continuidad de cada elemento.

$$\text{Sea:}\quad \begin{Bmatrix} \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ d_{z1} \\ \hline \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ d_{z2} \end{Bmatrix}\begin{matrix} \rightarrow 1 \\ \rightarrow 2 \\ \rightarrow 3 \\ \rightarrow 4 \\ \rightarrow 5 \\ \rightarrow 6 \end{matrix}$$

Las matrices de continuidad se obtendrán con la ecuación (II.3.26).

Para la *barra 1*, con $\beta = 60\ °$, se tiene que la matriz de continuidad esta compuesta de tres columnas ya que están asociadas a su único extremo final libre.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\
[A]_1 = & \left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0.25 \\ \hdashline -0.866 & 0.5 & 0.5 \\ \hdashline -0.866 & 0.5 & 0.25 \\ \hdashline 0.5 & 0.866 & 0 \end{array}\right]
\end{array}
$$

Para la *barra 2*, $\beta = 0\ °$, con dos nudos libres, su matriz comprende los seis grados de libertad de la estructura:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
[A]_2 = & \left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c} 0 & 1 & -0.25 & 0 & 0 & 0.25 \\ \hdashline 0 & 1 & -0.5 & 0 & 1 & 0.5 \\ \hdashline 0 & 0 & -0.25 & 0 & 1 & 0.25 \\ \hdashline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]
\end{array}
$$

Para la *barra 3*, con $\beta = 90\ °$, que tan sólo presenta tres columnas debido a su extremo final libre:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} 4 & 5 & 6 \end{array} \\
[A]_3 = & \left[\begin{array}{c:c:c} 0 & 0 & 0.25 \\ \hdashline -1 & 0 & 0.5 \\ \hdashline -1 & 0 & 0.25 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 \end{array}\right]
\end{array}
$$

Aplicando el algoritmo expuesto, de la ecuación (II.3.21) para sección constante, la matriz diagonal k es:

$$
[k] = \begin{bmatrix} 0.5 & & & \\ & 0.5 & & \\ & & 0.5 & \\ & & & 0.125 \end{bmatrix} EI
$$

Resolviendo la multiplicación de la matriz transpuesta de continuidad por la matriz anterior y este producto a su vez por la matriz de continuidad se tiene la matriz de rigideces de toda la estructura es: $[K] = [A]^T[k][A]$

	φ_{X1}	φ_{Y1}	d_{Z1}	φ_{X2}	φ_{Y2}	d_{Z2}
M_{X1}	.9063	-.3789	-.3248	-.1250	.0000	.0000
M_{Y1}	-.3789	1.3437	-.1875	.0000	.5000	.3750
F_{Z1}	-.3248	-.1875	.3750	.0000	-.3750	-.1875
M_{X2}	-.1250	.0000	.0000	1.1250	.0000	-.3750
M_{Y2}	.0000	.5000	-.3750	.0000	1.1250	.3750
F_{Z2}	.0000	.3750	-.1875	-.3750	.3750	.3750

Resolviendo el sistema de ecuaciones *{F} = [K] {d}* por cualquier método, obtenemos los desplazamientos en los dos nudos de la estructura:

$$EI\{d\}=\begin{Bmatrix}\varphi_{XA}\\ \varphi_{YA}\\ d_{ZA}\\ \hline \varphi_{XB}\\ \varphi_{YB}\\ d_{ZB}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-47.02\\ 11.49\\ -130.01\\ \hline -50.85\\ -6.28\\ -137.17\end{Bmatrix}$$

Ahora obtendremos las fuerzas del estado II de cada barra mediante la aplicación de *la ley de Hooke*, donde los momentos en cada barra están dados por las ecuaciones (II.3.18.g) y (II.3.18.h). La solución final, resulta de sumar los estados I y II.

Para la barra 1. (Fuerzas locales)

Estado I	Estado II	Solución
$M_A = -5.63$	$M_A = -25.52$	$M_A = -31.15$
$M_B = 1.88$	$M_B = -2.28$	$M_B = -0.40$
$M_T = 0$	$M_T = -1.68$	$M_T = -1.68$

Barra 2. (Fuerzas locales)

Estado I	Estado II	Solución
$M_A = -4.0$	$M_A = 5.66$	$M_A = 1.66$
$M_B = 4.0$	$M_B = -3.23$	$M_B = 0.77$
$M_T = 0$	$M_T = -0.49$	$M_T = -0.49$

Barra 3. (Fuerzas locales)

Estado I	Estado II	Solución
$M_A = 0$	$M_A = -25.95$	$M_A = -25.95$
$M_B = 0$	$M_B = -0.48$	$M_B = -0.48$
$M_T = 0$	$M_T = -0.79$	$M_T = -0.79$

Por último, en la figura (II.3.17), se comprueba el equilibrio estático de la estructura en cada nudo y se obtienen las reacciones, figura (II.3.18).

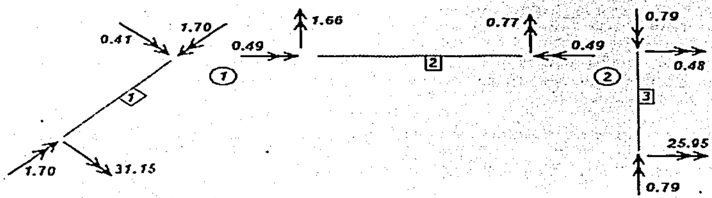


Figura II.3.17 Equilibrio de la retícula del ejemplo de la figura II.3.13

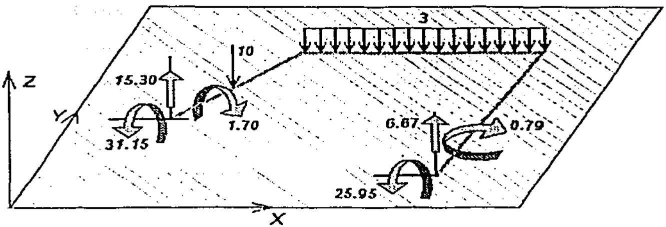


Figura II.3.18 Reacciones en los apoyos de la retícula de la figura II.3.13.

II.4 MARCO TRIDIMENSIONAL.

En esta sección se presenta el planteamiento del método de la matriz de continuidad para la solución de marcos tridimensionales. No se utilizará el método convencional ya que involucra un trabajo numérico muy grande y sólo se comentará ligeramente.

El marco tridimensional es la estructura esqueletal más compleja que estudiaremos en este trabajo, ya que tanto los elementos que la integran como las fuerzas que actúan en ellos se ubican en el espacio.

Con ligeras variantes, el modelo de marco tridimensional es la base para el análisis estático y/o dinámico de edificios. Encontramos su aplicación en casas, bodegas, almacenes, naves industriales, teatros, cines, centrales telefónicas, etc.

Hipótesis.

Mencionaremos a continuación las hipótesis bajo las cuales se comporta un marco tridimensional:

- Los nudos presentan seis grados de libertad o desplazamientos independientes, de los cuales tres corresponden a desplazamientos lineales en las direcciones de los tres ejes coordenados de un sistema cartesiano, y los tres restantes corresponden a desplazamientos angulares alrededor de cada eje mencionado.
- Sus elementos soportan fuerzas normales, cortantes en dos direcciones perpendiculares entre sí; momentos flexionantes también alrededor de dos direcciones perpendiculares y momento torsionante sobre el eje axial de la barra.
- Sus elementos pueden ser de sección variable o constante.

En éste método los vectores de desplazamientos y de fuerzas en un nudo tendrán la siguiente forma:

$$\{d\}_i = \begin{Bmatrix} d_{xi} \\ d_{yi} \\ d_{zi} \\ \varphi_{xi} \\ \varphi_{yi} \\ \varphi_{zi} \end{Bmatrix} \qquad (II.4.1)$$

$$\{F\}_i = \begin{Bmatrix} F_{xi} \\ F_{yi} \\ F_{zi} \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \end{Bmatrix} \qquad (II.4.2) \qquad i = nudo.$$

Convención de signos.

De acuerdo con las ecuaciones (II.4.1) y (II.4.2), se tiene que un elemento de esta estructura presenta seis fuerzas asociadas cada una con su respectivo grado de libertad. Es decir seis elementos mecánicos referidos en el sistema de referencia de la barra.

En la figura (II.4.1) se presenta una barra de un marco tridimensional con elementos mecánicos en las direcciones positivas de su sistema local. Así mismo se muestra el sistema de referencia global de la estructura. Nótese que en esta figura se maneja una representación vectorial de fuerzas.

En la figura (II.4.2) se muestra la convención que se utilizará para manejar el momento torsionante alrededor del eje axial del elemento. Se considerará positivo si el vector sale del elemento y negativo en caso contrario.

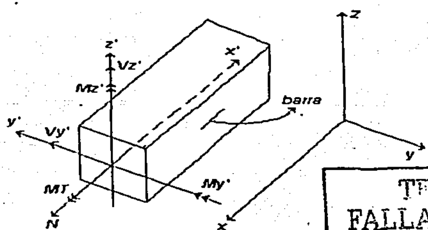


Figura II.4.1 Convención de signos para las fuerzas de un elemento de marco tridimensional de acuerdo al sistema de referencia local.

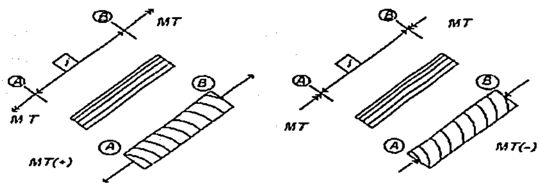


Figura II.4.2 Convención de la torsión alrededor del eje axial de un elemento de marco tridimensional.

Tratamiento clásico.

Para obtener la matriz de rigideces de un elemento tridimensional mediante el método convencional de ensamble de submatrices de rigideces, se requiere de un trabajo complejo pues si cada nudo libre tiene seis grados de libertad, para obtener una submatriz local de rigidez se requerirá realizar seis esquemas de deformación de un elemento, correspondientes a seis desplazamiento unitarios y así conocer las seis fuerzas que representan las rigideces por cada extremo. Cada submatriz estará conformada por seis columnas de acuerdo a los seis grados de libertad del nudo y de seis renglones correspondientes a las fuerzas generadas por los desplazamientos, como se indica en el arreglo (II.4.3).

$$[k_{AA}]= \begin{array}{c} \\ F_{XA} \\ F_{YA} \\ F_{ZA} \\ M_{XA} \\ M_{YA} \\ M_{ZA} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} d_{XA} & d_{YA} & d_{ZA} & \varphi_{XA} & \varphi_{YA} & \varphi_{ZA} \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_Z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_Y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_Y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_Y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_Z}{L} \end{array}\right] \end{array} \qquad (II.4.3)$$

La matriz de rigidez de un elemento cualquiera, ya sea local o global, estará formada por cuatro submatrices como la K_{AA} y su dimensión serán de doce columnas por doce renglones, como se muestra en la ecuación (II.4.4).

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{array}{c} \\ 6 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 6 & 6 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} k_{AA} & k_{AB} \\ \hline k_{BA} & k_{BB} \end{array}\right] \end{array} \begin{Bmatrix} d_A \\ d_B \end{Bmatrix} \qquad (II.4.4)$$

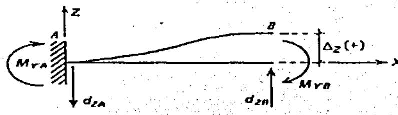
El tratamiento del marco tridimensional se vuelve más complejo aún ya que después de obtener las submatrices en un sistema local, es necesario realizar la transformación de las mismas a un sistema global para construir la matriz de rigidez global de la estructura.

Por lo anterior, estudiaremos un planteamiento más sencillo con base en el método de la matriz de continuidad

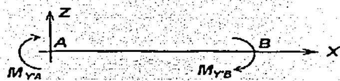
Planteamiento del método de la matriz de continuidad.

El procedimiento a seguir es análogo al empleado en marco plano y retícula, sin embargo, existirán algunas variantes producto de la complejidad del modelo. En resumen, el algoritmo matemático para el análisis es la fusión de los modelos planos antes mencionados.

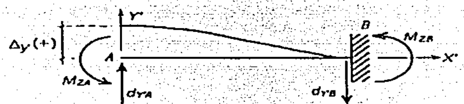
Comenzaremos por estudiar el comportamiento de un elemento de marco tridimensional bajo la acción de desplazamientos y conocer sus deformaciones. Para ello conviene recordar algunas convenciones utilizadas en marcos y retículas para obtener deformaciones.



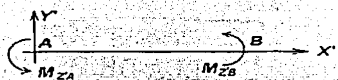
a) Configuración deformada de un elemento de retícula plana.



b) Convención de signos en un elemento de retícula plana.



c) Configuración deformada de un elemento de marco plano.



d) Convención de signos en un elemento de marco plano.

Figura II.4.3 Configuraciones deformadas y convenciones de signos de marco plano y retícula, con desplazamientos unitarios positivos.

De las figuras (II.4.3.a) y (II.4.3.b), se obtienen las siguientes relaciones:

$$\Delta z' = d_{Z'A} - d_{Z'B}$$
$$\Delta y' = d_{Y'A} - d_{Y'B}$$

Con base en el algoritmo para marco plano y en las figuras (II.4.3) plantearemos las siguientes ecuaciones para conocer las deformaciones del elemento:

$$\theta_{1Y'} = \theta_{AY} = \varphi_{AY'} + \Delta z'/L \qquad \text{(II.4.4.a)}$$

$$\theta_{3Y'} = \theta_{BY} = \varphi_{BY'} + \Delta z'/L \qquad \text{(II.4.4.b)}$$

$$\theta_{2Y'} = \theta_A + \theta_B = \varphi_{AY'} + \varphi_{BY'} + 2\Delta z'/L \qquad \text{(II.4.4.c)}$$

$$\theta_{1Z'} = \theta_{AZ} = \varphi_{AZ'} + \Delta_{Y'}/L \qquad \text{(II.4.5.a)}$$

$$\theta_{3Z'} = \theta_{BZ} = \varphi_{BZ'} + \Delta_{Y'}/L \qquad \text{(II.4.5.b)}$$

$$\theta_{2Z'} = \theta_A + \theta_B = \varphi_{AZ'} + \varphi_{BZ'} + 2\Delta_{Y'}/L \qquad \text{(II.4.5.c)}$$

$$\delta = d_{BX'} - d_{AX'} \qquad \text{(II.4.6)}$$

$$\theta_T = \varphi_{BX'} - \varphi_{AX'} \qquad \text{(II.4.7)}$$

Para el caso de sección constante, las rigideces angulares en cada extremo debido a los desplazamientos en sus respectivos extremos vale:

$$r_{AA} = r_{BB} = 4EI/L \qquad \text{(II.4.8)}$$

Lo mismo ocurre con las rigideces angulares en los extremos contrarios a la aplicación de los desplazamientos:

$$r_{AB} = r_{BA} = 2EI/L \qquad \text{(II.4.9)}$$

Además, se tiene que:

$$M_{1Y} = (r_{AA} - r_{AB})\ \theta_{1Y} \qquad \text{(II.4.10.a)}$$
$$M_{2Y} = (r_{AB})\ \theta_{2Y} \qquad \text{(II.4.10.b)}$$
$$M_{3Y} = (r_{BB} - r_{AB})\ \theta_{3Y} \qquad \text{(II.4.10.c)}$$
$$M_{1Z} = (r_{AA} - r_{AB})\ \theta_{1Z} \qquad \text{(II.4.10.a)}$$
$$M_{2Z} = (r_{AB})\ \theta_{2Z} \qquad \text{(II.4.11.b)}$$
$$M_{3Z} = (r_{BB} - r_{AB})\ \theta_{3Z} \qquad \text{(II.4.11.c)}$$

$$N = EA/L\ \delta \tag{II.4.12}$$

$$M_T = r_T\ \theta_T \tag{II.4.13}$$

Los vectores de deformaciones y de fuerzas internas tienen ahora las siguientes dimensiones:

$$\{e\} = \begin{bmatrix} \theta_{1Y'} \\ \theta_{2Y'} \\ \theta_{3Y'} \\ \hline \theta_{1Z'} \\ \theta_{2Z'} \\ \theta_{3Z'} \\ \hline \delta \\ \theta_T \end{bmatrix} \tag{II.4.14}$$

$$\{p\} = \begin{bmatrix} M_{1Y'} \\ M_{2Y'} \\ M_{3Y'} \\ \hline M_{1Z'} \\ M_{2Z'} \\ M_{3Z'} \\ \hline N \\ M_T \end{bmatrix} \tag{II.4.15}$$

Expresándolo en forma matricial queda: $\{P\}_i = [k]_i\{e\}_i$

Esto es:

$$\begin{Bmatrix} M_{1Y'} \\ M_{2Y'} \\ M_{3Y'} \\ \hline M_{1Z'} \\ M_{2Z'} \\ M_{3Z'} \\ \hline N \\ M_T \end{Bmatrix}_i = \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} (r_{AA}-r_{AB}) & & & & & & & \\ & r_{AB} & & & & & & \\ & & (r_{BB}-r_{AB}) & & & & & \\ \hline & & & (r_{AA}-r_{AB}) & & & & \\ & & & & r_{AB} & & & \\ & & & & & (r_{BB}-r_{AB}) & & \\ \hline & & & & & & EA/L & \\ & & & & & & & r_T \end{array}\right]_i \begin{Bmatrix} \theta_{1Y'} \\ \theta_{2Y'} \\ \theta_{3Y'} \\ \hline \theta_{1Z'} \\ \theta_{2Z'} \\ \theta_{3Z'} \\ \hline \delta \\ \theta_T \end{Bmatrix}_i$$

Mientras que los elementos mecánicos se calculan como:

$$M_{Ay'} = M_{1y'} + M_{2y'} \tag{II.4.16.a}$$

$$M_{By'} = M_{2y'} + M_{3y'} \tag{II.4.16.b}$$

$$M_{Az'} = M_{1z'} + M_{2z'} \tag{II.4.16.c}$$

$$M_{Bz'} = M_{2z'} + M_{3z'} \tag{II.4.16.d}$$

Por estática se obtienen:

$$V_{y'} = \frac{M_{Ay'} + M_{By'}}{L} \quad V_{z'} = \frac{M_{Az'} + M_{Bz'}}{L} \tag{II.4.16.e}$$

Para un elemento de sección constante, la matriz de rigideces diagonal se compone de la siguiente forma:

$$[k]_i = \left[\begin{array}{ccc:ccc:cc}
\frac{2EI_{y'}}{L} & & & & & & & \\
& \frac{2EI_{y'}}{L} & & & & & & \\
& & \frac{2EI_{y'}}{L} & & & & & \\
\hdashline
& & & \frac{2EI_{z'}}{L} & & & & \\
& & & & \frac{2EI_{z'}}{L} & & & \\
& & & & & \frac{2EI_{z'}}{L} & & \\
\hdashline
& & & & & & \frac{EA}{L} & \\
& & & & & & & \frac{GJ}{L}
\end{array}\right] \tag{II.4.15}$$

Con base en lo antes definido estamos en la posibilidad de armar la matriz de continuidad para una barra, la cual tendrá ocho filas, correspondientes a las deformaciones y doce columnas que dependerán de los nudos en sus extremos.

Para comprender mejor el tratamiento expuesto, se presenta la figura (II.4.4). En ella se muestra un elemento de un marco tridimensional, sus ejes locales y el sistema global de referencia. Los dos sistemas anteriores, están definidos en un sistema cartesiano derecho.

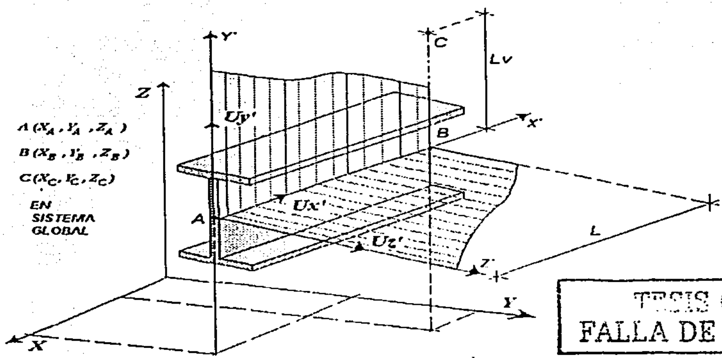


Figura II.4.4 Ubicación del eje Y' de un elemento de marco tridimensional en el espacio mediante un nudo auxiliar.

Donde *{Ux'}*, el vector unitario alojado en el eje x' y proyectado sobre ejes globales, es:

$$\{U_{x'}\} = \begin{Bmatrix} U_{x'x} \\ U_{x'y} \\ U_{x'z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{X_B - X_A}{L} \\ \dfrac{Y_B - Y_A}{L} \\ \dfrac{Z_B - Z_A}{L} \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.4.18)}$$

En el estudio de los marcos tridimensionales, se requiere el empleo de nudos auxiliares que nos permitan orientar los ejes de flexión de un elemento y ubicarlos respecto a un sistema global de referencia. Como se pudo ver en la figura (II.4.4), el vector *{Ux'}*, depende solo de las coordenadas de los extremos de las barras sobre el sistema global. Para obtener los vectores unitarios *{Uy'}* ó *{Uz'}* los cuales definen la dirección de los ejes *y'* y *z'* de la sección transversal del elemento, se traza un vector cualquiera en una de las dos direcciones *y'* o *z'* con ayuda del nudo auxiliar. Conocido ese vector se obtiene el correspondiente unitario y mediante el producto cruz (producto vectorial), se encuentra el tercer vector unitario. Esto se presenta en la figura (II.4.4). De esta manera el vector unitario *{Uy'}*, referido a un sistema global, está definido como:

$$\left\{U_{y'}\right\} = \begin{Bmatrix} U_{y'x} \\ U_{y'y} \\ U_{y'z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{X_C - X_B}{L_v} \\ \dfrac{Y_C - Y_B}{L_v} \\ \dfrac{Z_C - Z_B}{L_v} \end{Bmatrix} \qquad \text{(II.4.19)}$$

Por lo tanto $U_{z'}$ resulta: $\{U_{Z'}\} = \{U_{X'}\} \times \{U_{Y'}\}$

$$U_{Z'} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ U_{X'X} & U_{X'Y} & U_{X'Z} \\ U_{Y'X} & U_{Y'Y} & U_{Y'Z} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} U_{Z'X} &= U_{X'Y}\,U_{Y'Z} - U_{Y'Y}\,U_{X'Z} \\ U_{Z'Y} &= U_{X'Z}\,U_{Y'X} - U_{Y'Z}\,U_{X'X} \\ U_{Z'Z} &= U_{X'X}\,U_{Y'Y} - U_{Y'X}\,U_{X'Y} \end{aligned} \qquad \text{(II.4.20)}$$

Siguiendo un planteamiento análogo al establecido para marco plano y retícula y con base en las dimensiones de los vectores de deformación y de desplazamientos para un elemento tridimensional, la matriz de continuidad esta dada por la ecuación (II.4.21) que se muestra en la siguiente página:

Ecuación (II.4.21). matriz de continuidad para marcos tridimensionales.

$$
[A]_i = \begin{array}{c} \\ \\ \theta_{1Y'} \\ \theta_{2Y'} \\ \theta_{3Y'} \\ \theta_{1Z'} \\ \theta_{2Z'} \\ \theta_{3Z'} \\ \delta \\ \theta_T \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc|cccccc}
 & & \{d_A\} & & & & & & \{d_B\} & & & \\
d_{AX} & d_{AY} & d_{AZ} & \varphi_{AX} & \varphi_{AY} & \varphi_{AZ} & d_{BX} & d_{BY} & d_{BZ} & \varphi_{BX} & \varphi_{BY} & \varphi_{BZ}
\end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
\frac{-U_{Z'X}}{L} & \frac{-U_{Z'Y}}{L} & \frac{-U_{Z'Z}}{L} & U_{Y'X} & U_{Y'Y} & U_{Y'Z} & \frac{U_{Z'X}}{L} & \frac{U_{Z'Y}}{L} & \frac{U_{Z'Z}}{L} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{-2U_{Z'X}}{L} & \frac{-2U_{Z'Y}}{L} & \frac{-2U_{Z'Z}}{L} & U_{Y'X} & U_{Y'Y} & U_{Y'Z} & \frac{2U_{Z'X}}{L} & \frac{2U_{Z'Y}}{L} & \frac{2U_{Z'Z}}{L} & U_{Y'X} & U_{Y'Y} & U_{Y'Z} \\
\frac{-U_{Z'X}}{L} & \frac{-U_{Z'Y}}{L} & \frac{-U_{Z'Z}}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{U_{Z'X}}{L} & \frac{U_{Z'Y}}{L} & \frac{U_{Z'Z}}{L} & U_{Y'X} & U_{Y'Y} & U_{Y'Z} \\
\frac{U_{Y'X}}{L} & \frac{U_{Y'Y}}{L} & \frac{U_{Y'Z}}{L} & U_{Z'X} & U_{Z'Y} & U_{Z'Z} & \frac{-U_{Y'X}}{L} & \frac{-U_{Y'Y}}{L} & \frac{-U_{Y'Z}}{L} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{2U_{Y'X}}{L} & \frac{2U_{Y'Y}}{L} & \frac{2U_{Y'Z}}{L} & U_{Z'X} & U_{Z'Y} & U_{Z'Z} & \frac{-2U_{Y'X}}{L} & \frac{-2U_{Y'Y}}{L} & \frac{-2U_{Y'Z}}{L} & U_{Z'X} & U_{Z'Y} & U_{Z'Z} \\
\frac{U_{Y'X}}{L} & \frac{U_{Y'Y}}{L} & \frac{U_{Y'Z}}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{-U_{Y'X}}{L} & \frac{-U_{Y'Y}}{L} & \frac{-U_{Y'Z}}{L} & U_{Z'X} & U_{Z'Y} & U_{Z'Z} \\
-U_{X'X} & -U_{X'Y} & -U_{X'Z} & 0 & 0 & 0 & U_{X'X} & U_{X'Y} & U_{X'Z} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -U_{X'X} & -U_{X'Y} & -U_{X'Z} & 0 & 0 & 0 & U_{X'X} & U_{X'Y} & U_{X'Z}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Para ilustrar el planteamiento anterior, a continuación se presenta el siguiente ejemplo.

Problema 8.

Consideremos el marco en tres dimensiones definido en la figura (II.4.5), en el cual identificamos dos nudos libres y un tercer nudo incompleto. Este último sólo se puede girar alrededor de los ejes x y y.

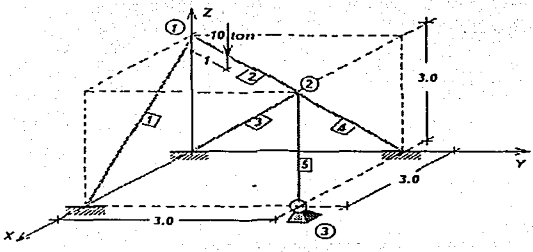


Figura II.4.5
Ejemplo de marco tridimensional por el método de la matriz de continuidad.

PROPIEDADES

$I_Y = I$
$I_Z = 2I$
$J_r = 0.5I$

$A = 15I$
$G = 0.4E$

Longitudes en metros y fuerzas en toneladas

Además se hacen las siguientes consideraciones sobre los vectores unitarios de la barra uno a cuatro.

$$U_{Y'Z} = 0$$
$$U_{Y'X} = -U_{X'Y} / V$$
$$U_{Y'Y} = U_{X'X} / V$$

$$V = \sqrt{U_{x'y}^{2} + U_{x'x}^{2}}$$

Para la barra cinco, se debe cumplir que:

$$U_{Y'X} = 1$$
$$U_{Y'Y} = U_{Y'Z} = 0$$

Las longitudes de están en metros y las fuerzas en ton.

Solución

El vector de desplazamientos {d} es el que se muestra a la derecha.

Número de Grados de libertad

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_{x1} \\ d_{y1} \\ d_{z1} \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ \varphi_{z1} \\ d_{x2} \\ d_{y2} \\ d_{z2} \\ \varphi_{x2} \\ \varphi_{y2} \\ \varphi_{z2} \\ \varphi_{x3} \\ \varphi_{y3} \end{Bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{Bmatrix}$$

Estado 1

Iniciaremos con el cálculo del vector de fuerzas de empotramiento, para la *barra 2*, como se muestra en la figura (II.4.6.a) así como en las figuras (II.4.6.b) y (II.4.6.c) en el plano *ZX'* y en el plano *XY* respectivamente.

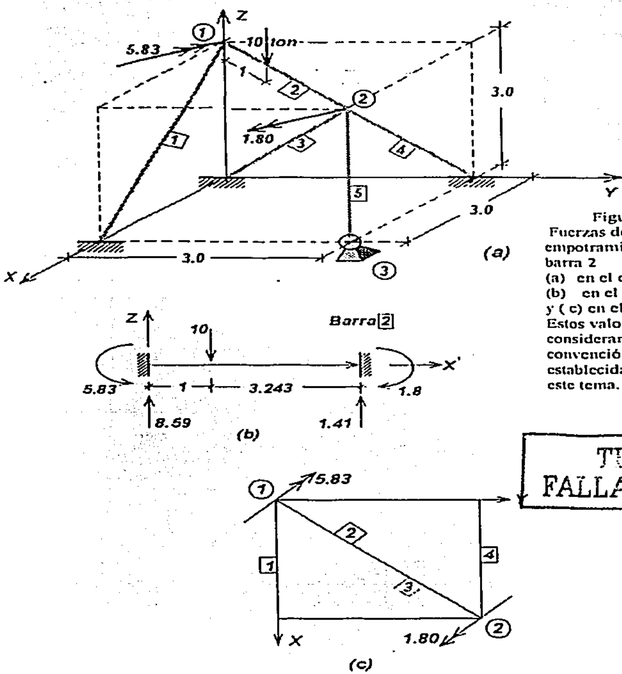


Figura II.4.6.
Fuerzas de empotramiento para la barra 2
(a) en el espacio,
(b) en el plano ZX'
y (c) en el plano XY.
Estos valores se obtienen considerando la convención de signos establecida al inicio de este tema.

Estado II

Para cada barra se muestran sus longitudes, vectores unitarios, vectores de rigideces diagonal Además su matriz de continuidad de acuerdo a los grados de libertad de los nudos que los definen.

Barra: 1
L = 4.24 m

Ux' =	Uy' =	Uz' =
-0.71	0	0.71
0	-1	0
0.71	0	0.71

k =	EI	A =	1	2	3	4	5	5
0.472			0.167	0	0.167	0	0	0
0.472			0.334	0	0.334	0	-1	0
0.472			0.167	0	0.167	0	-1	0
0.943			0	0.236	0	0	0	0
0.943			0	0.472	0	0.707	0	0.707
0.943			0	0.236	0	0.707	0	0.707
3.538			-0.707	0	0.707	0	0	0
0.047			0	0	0	-0.707	0	0.707

Barra: 2
L = 4.24 m

Ux' =	Uy' =	Uz' =
0.71	-0.71	0
0.71	0.71	0
0	0	1

k =	EI	A =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0.472			0	0	-0.236	-0.707	0.707	0	0	0	0.236	0	0	0
0.472			0	0	-0.472	-0.707	0.707	0	0	0	0.472	-0.707	0.707	0
0.472			0	0	-0.236	0	0	0	0	0	0.236	-0.707	0.707	0
0.943			-0.167	0.167	0	0	0	1	0.167	-0.167	0	0	0	0
0.943			-0.334	0.334	0	0	0	1	0.334	-0.334	0	0	0	1
0.943			-0.167	0.167	0	0	0	0	0.167	-0.167	0	0	0	1
3.538			-0.707	-0.707	0	0	0	0	0.707	0.707	0	0	0	0
0.047			0	0	0	-0.707	-0.707	0	0	0	0	0.707	0.707	0

Barra : 3
L = 5.2 m

Ux' =	Uy' =	Uz' =
0.577	-0.71	-0.408
0.577	0.71	0.408
0.577	0	0.816

k = [vector] EI, A = [matriz]

k (EI)
0.385
0.385
0.385
0.769
0.769
0.769
2.887
0.038

A =

7	8	9	10	11	12
-0.079	-0.079	0.157	0	0	0
-0.158	-0.158	0.314	-0.707	0.71	0
-0.079	-0.079	0.157	-0.707	0.71	0
0.136	-0.136	0	0	0	0
0.271	-0.271	0	-0.408	-0.408	0.816
0.136	-0.136	0	-0.408	-0.408	0.816
0.577	0.577	0.577	0	0	0
0	0	0	0.577	0.577	0.577

Barra : 4
L = 4.24 m

Ux' =	Uy' =	Uz' =
0.71	-0.71	0
0.71	0.71	0
0	0	1

k (EI)
0.472
0.472
0.472
0.943
0.943
0.943
3.536
0.047

A =

7	8	9	10	11	12
0.167	0	-0.167	0	-1	0
0.334	0	-0.334	0	-1	0
0.167	0	-0.167	0	0	0
0	-0.236	0	-0.707	0	0.707
0	-0.472	0	-0.707	0	0.707
0	-0.236	0	0	0	0
0.707	0	0.707	0	0	0
0	0	0	0.707	0	0.707

Barra : 5
L = 3.0 m

Ux' =	Uy' =	Uz' =
0	1	0
0	0	1
1	0	0

k (EI)
0.667
0.667
0.667
1.333
1.333
1.333
5

A =

13	14	7	8	9	10	11	12
1	0	0	0.333	0	0	0	0
1	0	0	0.667	0	1	0	0
0	0	0	0.333	0	1	0	0
0	1	-0.333	0	0	0	0	0
0	1	-0.667	0	0	0	1	0
0	0	-0.333	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	0

MATRIZ DE RIGIDEZ. [K]

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	3.712	1.61	-1.689	0.0	-0.236	-0.472	-1.296	-1.610	0.0	0.0	0.0	-0.472	0.0	0.0
2	1.610	2.24	0.0	0.472	0.0	0.944	-1.610	-1.926	0.0	0.0	0.0	0.472	0.0	0.0
3	-1.689	0.0	2.004	0.236	-0.472	0.0	0.0	0.0	-1.580	0.236	-0.236	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.47	0.263	1.461	-0.448	0.919	0.0	0.0	-0.236	0.212	-0.259	0.0	0.0	0.0
5	-0.236	0.0	-0.472	-0.448	1.438	0.0	0.0	0.0	0.236	-0.259	0.212	0.0	0.0	0.0
6	-0.472	0.94	0.0	0.919	0.0	2.852	0.472	-0.472	0.0	0.0	0.0	0.943	0.0	0.0
7	-1.296	-1.61	0.0	0.0	0.0	0.472	5.722	2.502	2.623	-0.064	-1.761	0.728	0.0	-1.333
8	1.610	-1.30	0.0	0.0	0.0	-0.472	2.502	3.746	0.934	1.331	0.064	-1.199	0.667	0.0
9	0.0	0.0	-0.158	-0.236	0.236	0.0	2.623	0.934	8.023	-0.364	0.600	0.0	0.0	0.0
10	0.0	0.0	0.236	0.212	-0.259	0.0	-0.064	1.331	-0.364	3.449	-0.563	-1.420	0.667	0.0
11	0.0	0.0	-0.236	-0.259	0.212	0.0	-1.761	0.064	0.600	-0.563	4.759	-0.500	0.0	1.333
12	-0.472	0.47	0.0	0.0	0.0	0.943	0.728	-1.199	0.0	-1.420	-0.500	3.958	0.0	0.0
13	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00	0.667	0.0	0.667	0.0	0.0	1.333	0.0
14	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-1.333	0.0	0.0	0.0	1.333	0.0	0.0	2.667

RESOLVIENDO EL SISTEMA {F} = [K] {d} SE TIENE QUE:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} dx1 \\ dy1 \\ dz1 \\ \varphi x1 \\ \varphi y1 \\ \varphi z1 \\ dx2 \\ dy2 \\ dz2 \\ \varphi x2 \\ \varphi y2 \\ \varphi z2 \\ \varphi x3 \\ \varphi y3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -23.064 \\ 20.524 \\ -27.919 \\ -3.289 \\ -11.103 \\ -8.672 \\ -1.407 \\ -1.909 \\ 0.377 \\ 0.234 \\ -2.400 \\ -3.909 \\ .838 \\ 196 \end{Bmatrix}$$

DEFORMACIONES Y FUERZAS EN LAS BARRAS

1 CÁLCULO DE *{e} = [A] {d}*

BARRA	1	2	3	4	
$\theta_{y'1}$	-8.848	1.153	0.321	2.102	0.202
$\theta_{y'2}$	-6.593	5.968	-1.220	1.804	-0.201
$\theta_{y'3}$	2.255	4.815	-1.541	-0.298	-0.402
$\theta_{z'1}$	4.844	-0.975	0.068	-2.479	-0.965
$\theta_{z'2}$	1.230	2.813	-2.619	-2.028	-0.966
$\theta_{z'3}$	-3.614	3.788	-2.238	0.451	-1.931
δ	-2.019	0.865	-1.696	-0.728	0.377
θ_T	-3.806	8.645	-3.505	-2.599	-3.909

2 CÁLCULO DE {P} = [k]{e}

BARRA	1	2	3	4	5
$M_{y'1}$	-4.176	0.544	0.124	0.992	0.135
$M_{y'2}$	-3.112	2.817	-0.470	0.851	-0.134
$M_{y'3}$	1.064	2.273	-0.593	-0.141	-0.268
$M_{z'1}$	4.568	-0.919	0.052	-2.338	1.287
$M_{z'2}$	1.160	2.653	-1.670	-1.912	-1.288
$M_{z'3}$	-3.408	3.572	-1.723	0.425	-2.575
N	-7.143	3.060	-4.896	-2.576	1.885
M_T	-0.179	0.406	-0.135	-0.122	-0.261

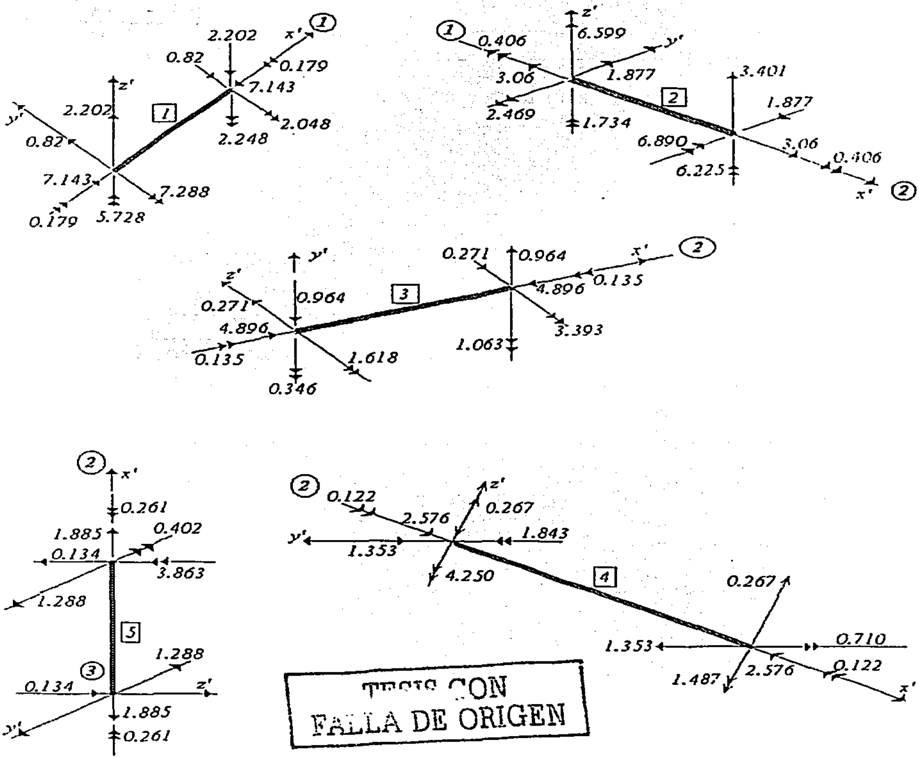
3 TABLA ACCIONES ESTADO II

BARRA	1	2	3	4	5
$M_{AY'}$	-7.288	3.361	-0.346	1.843	0.001
$M_{BY'}$	-2.048	5.090	-1.063	-0.710	-0.402
$M_{AZ'}$	5.728	1.734	-1.618	-4.250	-0.001
$M_{BZ'}$	-2.248	6.225	-3.393	-1.487	-3.863
N	-7.143	3.060	-4.896	-2.576	1.885
M_T	-0.179	0.406	-0.135	-0.122	-0.261

TABLA SOLUCIÓN : ESTADO I +
ESTADO II

BARRA	1	2	3	4	5
$M_{AY'}$	-7.288	-2.469	-0.346	1.843	0.001
$M_{BY'}$	-2.048	6.890	-1.063	-0.710	-0.402
$M_{AZ'}$	5.728	1.734	-1.618	-4.250	-0.001
$M_{BZ'}$	-2.248	6.225	-3.393	-1.487	-3.863
N	-7.143	3.060	-4.896	-2.576	1.885
M_T	-0.179	0.406	-0.135	-0.122	-0.261

Elementos mecánicos y comprobación del equilibrio.



CAPITULO III.

DESARROLLO DE HERRAMIENTAS DE CÓMPUTO PARA EL ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS ESQUELETALES.

A continuación se presentan los códigos fuente realizados en FORTRAN que permiten resolver distintos tipos de estructuras esqueletales, el orden en que se presentan es el siguiente:

- Programa ARMA2D.- Armaduras planas.
- Programa ARMA3D.- Armaduras tridimensionales.
- Programa MAR2DC.- Marcos planos (Por el método de la matriz de continuidad).
- Programa MAR2DR.- Marcos planos (Por el método de la matriz de rigidez).
- Programa MAR3D.- Marcos tridimensionales.
- Programa RET2D.- Retícula plana.
- Programa ARMA2DGR.- Interfase gráfica para Armaduras planas.

III.1 PROGRAMA ARMA2D.

```
C
C     ***************************************************************
C     *                                                             *
C     *   PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA EL ANALISIS DE ARMADURAS     *
C     *                   EN DOS DIMENSIONES                        *
C     *   BASADO EN EL METODO DE LA MATRIZ DE CONTINUIDAD.          *
C     *                                                             *
C     ***************************************************************
C
      DIMENSION K(300,300),X(100),Y(100),E(200),P(200),L(100),EAL(200)
      DIMENSION LN(100),LF(100),A(200,200),DE(100),AR(200)
      INTEGER Q,QQ,Z
      REAL L,K,X,Y,E,P,EAL,AR
      CHARACTER*20 INPUT,OUTPUT
C
      WRITE(*,*)'****************************************************'
      WRITE(*,*)'*                                                  *'
      WRITE(*,*)'*                                                  *'
      WRITE(*,*)'*       ANALISIS DE ARMADURAS EN 2 DIMENSIONES     *'
      WRITE(*,*)'*                                                  *'
      WRITE(*,*)'*               ( A R M A 2 D )                    *'
      WRITE(*,*)'*                                                  *'
      WRITE(*,*)'*               Elaborado por:                     *'
      WRITE(*,*)'*                                                  *'
      WRITE(*,*)'*          Octavio García Domínguez                *'
      WRITE(*,*)'*          David Delgado Hernández                 *'
      WRITE(*,*)'*          Alfonso Islas Hernández                 *'
      WRITE(*,*)'*          Gonzalo Paz Mendoza                     *'
      WRITE(*,*)'*                                                  *'
      WRITE(*,*)'*                                                  *'
      WRITE(*,*)'*          Estructuras, DEPFI, UNAM                *'
      WRITE(*,*)'*                                                  *'
      WRITE(*,*)'*        México D.F., Febrero de 1998              *'
      WRITE(*,*)'*                                                  *'
      WRITE(*,*)'*                                                  *'
      WRITE(*,*)'****************************************************'
C
C     Apertura de archivos
```

```
      WRITE(*,10)
   10 FORMAT(/,1X,'ARCHIVO DE DATOS: ')
      READ(*,42)INPUT
   42 FORMAT(A20)
      WRITE(*,11)
      READ(*,113)OUTPUT
  113 FORMAT (A20)
   11 FORMAT(/,1X,'ARCHIVO DE SALIDA: ')
      OPEN(1,FILE=INPUT,STATUS='OLD')
      OPEN(2,FILE=OUTPUT,STATUS='unknown')
      WRITE(*,*)
C
      WRITE(2,*)'*****************************************************'
      WRITE(2,*)'*                                                 **'
      WRITE(2,*)'*               ANALISIS DE ARMADURAS PLANAS      **'
      WRITE(2,*)'*                     ( A R M A 2 D )              **'
      WRITE(2,*)'*                                                 **'
      WRITE(2,*)'*****************************************************'
C
C     LECTURA DE DATOS GENERALES
C
      READ (1,*)NB,NU,NAP
C
      nnu=NU+NAP
      nuu=2*NU
      nun=nuu+1
C
C   LECTURA DE COORDENADAS DE NUDOS Y FUERZAS EN LOS MISMOS
C
      DO 200 I=1,NNU
       READ(1,*)X(I),Y(I),K(2*I-1,nun),K(2*I,nun)
 200  CONTINUE
C
C  GENERACION DE LA MATRIZ DE CONTINUIDAD [ A ]
C
      DO 250 I=1,NB
C LECTURA DE LA RIGIDEZ AXIAL, EL NUDO INICIAL Y EL NUDO FINAL D LAS BARRAS
C
       READ(1,*)E(I),AR(I),IIN(I),IFI(I)
C
       L(I)=((x(IfI(I))-x(Iin(I)))**2+(y(IfI(I))-y(Iin(I)))**2)**.5
       ux=(x(IfI(I))-x(Iin(I)))/l(I)
       uy=(y(IfI(I))-y(Iin(I)))/l(I)
        IF (Iin(I).LE.NU) THEN
          a(I,2*Iin(I)-1)=-ux
          a(I,2*Iin(I))=-uy
        ENDIF
?       IF ( IfI(I).LE.NU) THEN
          a(I,2*IFI(I)-1)=ux
          a(I,2*IFI(I))=uy
        ENDIF
250   CONTINUE
      write(2,22)
 22   format(//'Matriz de Continuidad [A]'//)
      WRITE(2,39)((a(I,J),j=1,2*nu),i=1,Nb)
 39   FORMAT(4F10.4)
C   [AT][K][A]
C
C     nuu : dimension de la matriz de rigideces [K]
C      EAL(I)=(E(I)*AR(I))/(L(I))
       nuu=2*nu
       DO 260 I=1,NUU
      DO 280 J=1,NUU
       DO 300 M=1,NB
         EAL(M)=(E(M)*AR(M))/(L(M))
        K(I,J)=K(I,J)+a(M,I)*a(M,J)*EAL(M)
 300    CONTINUE
 280   CONTINUE
 260  CONTINUE
      write(2,23)
 23   format(//'Matriz de Rigideces [K]'//)
      WRITE(2,37)((K(I,J),j=1,NUN),i=1,NUU)
 37   format(5f10.4)
C
C      SOLUCION DEL SISTEMA POR GAUSS-JORDAN
```

```
c
      DO 146 Z=1,N
       DO 144 I=1,N
         DO 150 J=N+1,Z,-1
           IF (I.EQ.Z) GOTO 144
            IF (K(Z,Z).EQ.0) THEN
c
              DO 132 Q=Z+1,N
               IF (K(Q,Z).NE.0) THEN
                 DO 134 QQ=1,N+1
                   W=K(Q,QQ)
                   K(Q,QQ)=K(Z,QQ)
                   K(Z,QQ)=W
 134             CONTINUE
                 GOTO 142
               ENDIF
 132            CONTINUE
c
                WRITE(*,*)'EL SISTEMA ES INDETERMINADO'
                STOP
            ENDIF
c
 142        K(I,J)=K(I,J)+K(Z,J)*(-K(I,Z))/K(Z,Z)
c
 150     CONTINUE
 144    CONTINUE
 146  CONTINUE
c
       DO 128 I=1,N
         K(I,N+1)=K(I,N+1)/K(I,I)
 128   CONTINUE
c
c     IMPRIME LOS DESPLAZAMIENTOS DE LOS NUDOS
c
      write(2,47)
 47   format(//'Desplazamientos de los nudos :'//)
      DO 600 I=1,NU
       WRITE(2,*)I,'DX',K(2*I-1,N+1)
       WRITE(2,*)I,'DY',K(2*I,N+1)
 600  CONTINUE
c
      write(2,57)
      write(2,58)
 57   format(//'RESULTADOS FINALES :'//)
 58   format(9x,'Barra',6X,'Deformacion',6X,'Fuerza'//)
c
c     DEFORMACIONES EN LAS BARRAS
c
         DO 620 i=1,NB
         DO 640 j=1,nuu
             de(i)=de(i)+a(i,j)*K(j,n+1)
 640     CONTINUE
 620    CONTINUE
c
c      FZAS EN LAS BARRAS
c
      DO 342 I=1,NB
        P(I)=de(I)*EAL(I)
        write(2,*)I,DE(I),P(I)
 342  CONTINUE
c
      END
```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

III.2 PROGRAMA ARMA3D

```
c
c     *************************************************************
c     *                                                           *
c     *   PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA EL ANALISIS DE ARMADURAS   *
c     *                    TRIDIMENSIONALES                       *
c     *   BASADO EN EL METODO DE LA MATRIZ DE CONTINUIDAD.        *
```

```
c     *                                                          *
c     ************************************************************
c
      DIMENSION k(300,300),X(100),Y(100),Z(100),EAL(200),P(200),L(100)
      DIMENSION IIn(100),IFI(100),a(200,200),DE(100),E(200),AR(200)
      INTEGER O,OO,ZZ
      REAL L,K,X,Y,E,EAL,AR
      CHARACTER*20 INPUT,OUTPUT
c
      WRITE(*,*)'*****************************************************'
      WRITE(*,*)'**                                                 **'
      WRITE(*,*)'**                                                 **'
      WRITE(*,*)'**       ANALISIS DE ARMADURAS EN 3 DIMENSIONES    **'
      WRITE(*,*)'**                                                 **'
      WRITE(*,*)'**                 ( A R M A 3 D )                 **'
      WRITE(*,*)'**                                                 **'
      WRITE(*,*)'**                  Elaborado por:                 **'
      WRITE(*,*)'**                                                 **'
      WRITE(*,*)'**              Octavio Garcia Dominguez           **'
      WRITE(*,*)'**              David Delgado Hernández            **'
      WRITE(*,*)'**              Alfonso Islas Hernández            **'
      WRITE(*,*)'**              Gonzalo Paz Mendoza                **'
      WRITE(*,*)'**                                                 **'
      WRITE(*,*)'**                                                 **'
      WRITE(*,*)'**              Estructuras, DEPFI, UNAM           **'
      WRITE(*,*)'**                                                 **'
      WRITE(*,*)'**            México D.F., Abril de 1998           **'
      WRITE(*,*)'**                                                 **'
      WRITE(*,*)'**                                                 **'
      WRITE(*,*)'*****************************************************'
c
c    Apertura de archivos
      WRITE(*,10)
   10 FORMAT(/,1X,'ARCHIVO DE DATOS: ')
      READ(*,42)INPUT
   42 FORMAT(A20)
      WRITE(*,11)
      READ(*,113)OUTPUT
  113 FORMAT (A20)
   11 FORMAT(/,1X,'ARCHIVO DE SALIDA: ')
      OPEN(1,FILE=INPUT,STATUS='OLD')
      OPEN(2,FILE=OUTPUT,STATUS='unknown')
      WRITE(*,*)
c
      WRITE(2,*)'*****************************************************'
      WRITE(2,*)'**                                                 **'
      WRITE(2,*)'**         ANALISIS DE ARMADURAS TRIDIMENSIONALES  **'
      WRITE(2,*)'**                  ( A R M A 3 D )                **'
      WRITE(2,*)'**                                                 **'
      WRITE(2,*)'*****************************************************'
C
C     LECTURA DE DATOS GENERALES
C
      READ (1,*)NB,NU,NAP
C
      nnu=NU+NAP
      nuu=3*NU
      nun=nuu+1
C
C    LECTURA DE COORDENADAS DE NUDOS Y FUERZAS EN LOS MISMOS
C
      DO 200 I=1,NNU
       READ(1,*)X(I),Y(I),Z(I),K(3*i-2,nun),K(3*i-1,nun),K(3*i,nun)
 200  CONTINUE
C
C  GENERACION DE LA MATRIZ DE CONTINUIDAD [ A ]
C
      DO 250 I=1,NB
C LECTURA DE LA RIGIDEZ AXIAL, EL NUDO INICIAL Y EL NUDO FINAL D LAS BARRAS
       READ(1,*)E(I),AR(I),IIN(I),IFI(I)
c
       L(i)=((x(IFI(i))-x(IIn(i)))**2+(y(IFI(i))-y(IIn(i)))**2+(z(IFI(i))
     * )-z(IIn(i)))**2)**.5
       ux=(x(IFI(i))-x(IIn(i)))/L(i)
       uy=(y(IFI(i))-y(IIn(i)))/L(i)
```

```
            a(I,3*Iin(I)-1)=-uy
            a(I,3*Iin(I))=-uz
          ENDIF
2         IF ( IFI(I).LE.NU) THEN
            a(I,3*IFI(I)-2)=ux
            a(I,3*IFI(I)-1)=uy
            a(I,3*IFI(I))=uz
          ENDIF
250    CONTINUE
       write(2,22)
 22    format(//'Matriz de Continuidad [A]'//)
       WRITE(2,39)((a(I,J),j=1,3*nu),i=1,Nb)
 39    FORMAT(6F10.1)
C    [AT][K][A]
C
c      nuu : dimension de la matriz de rigideces [K]
       nuu=3*nu
       DO 260 I=1,NUU
        DO 280 J=1,NUU
         DO 300 M=1,NB
            EAL(M)=(E(M)*AR(M))/(L(M))
          K(I,j)=K(I,j)+a(M,I)*a(M,j)*EAL(M)
 300     CONTINUE
 280    CONTINUE
 260   CONTINUE
       write(2,23)
 23    format(//'Matriz de Rigideces [K]'//)
       WRITE(2,37)((K(I,J),j=1,NUN),I=1,NUU)
 37    format(7f12.2)
C
C        SOLUCION DEL SISTEMA POR GAUSS-JORDAN
C
       N=NUU
c
        DO 146 ZZ=1,N
         DO 144 I=1,N
           DO 150 J=N+1,ZZ,-1
             IF (I.EQ.ZZ) GOTO 144
              IF (K(ZZ,ZZ).EQ.0) THEN
C
               DO 132 Q=ZZ+1,N
                IF (K(Q,ZZ).NE.0) THEN
                  DO 134 QQ=1,N+1
                    W=K(Q,QQ)
                    K(Q,QQ)=K(ZZ,QQ)
                    K(ZZ,QQ)=W
 134              CONTINUE
                  GOTO 142
                ENDIF
 132            CONTINUE
C
                WRITE(*,*)'EL SISTEMA ES INDETERMINADO'
                STOP
             ENDIF
C
 142         K(I,J)=K(I,J)+K(ZZ,J)*(-K(I,ZZ))/K(ZZ,ZZ)
C
 150       CONTINUE
 144     CONTINUE
 146   CONTINUE
C
        DO 128 I=1,N
          K(I,N+1)=K(I,N+1)/K(I,I)
 128    CONTINUE
C
C      IMPRIME LOS DESPLAZAMIENTOS DE LOS NUDOS
C
       write(2,47)
 47    format(//'Desplazamientos de los nudos :'//)
       DO 600 I=1,NU
        WRITE(2,*)I,'DX',K(3*I-2,N+1)
        WRITE(2,*)I,'DY',K(3*I-1,N+1)
        WRITE(2,*)I,'DZ',K(3*I,N+1)
 600   CONTINUE
 C
```

```
      write(2,57)
      write(2,58)
 57   format(//'RESULTADOS FINALES :'//)
 58   format(9x,'Barra',6X,'Deformacion',6X,'Fuerza'//)
c
c     DEFORMACIONES EN LAS BARRAS
c
         DO 620 I=1,NB
         DO 640 j=1,nuu
            de(I)=de(I)+a(I,j)*K(j,n+1)
 640     CONTINUE
 620    CONTINUE
c
c      FZAS EN LAS BARRAS
c
      DO 312 I=1,NB
        P(I)=de(I)*EAL(I)
        write(2,*)I,DE(I),P(I)
 312  CONTINUE
c
      END
```

III.3 PROGRAMA MAR2DC

```
c
c     ******************************************************************
c     *                                                                *
c     *  PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA EL ANALISIS DE MARCOS PLANOS     *
c     *  BASADO EN EL METODO DE LA MATRIZ DE CONTINUIDAD.              *
c     *                                                                *
c     ******************************************************************
c
c     ******************************************************************
c     DIMENSIONAMIENTO Y DECLARACION DE VARIABLES
c
      DIMENSION X(100),Y(100),R(4),A(4,6),K(300,300)
      dimension DEF(4),P(4),DAB(6)
      INTEGER O,OO,ZZ
      REAL L,MA,MB,N,IZ,K
      CHARACTER*20 INPUT,OUTPUT
c
c     ******************************************************************
c     IMPRESION EN PANTALLA
c
      WRITE(*,*)'*******************************************************'
      WRITE(*,*)'*                                                     *'
      WRITE(*,*)'*                                                     *'
      WRITE(*,*)'*             ANALISIS DE MARCOS PLANOS               *'
      WRITE(*,*)'*                                                     *'
      WRITE(*,*)'*                  ( M A R 2 D c )                    *'
      WRITE(*,*)'*                                                     *'
      WRITE(*,*)'*      (POR EL MÉTODO DE LA MATRIZ DE CONTINUIDAD)    *'
      WRITE(*,*)'*                                                     *'
      WRITE(*,*)'*                 Elaborado por:                      *'
      WRITE(*,*)'*                                                     *'
      WRITE(*,*)'*             Octavio Garcia Dominguez                *'
      WRITE(*,*)'*             David Delgado Hernández                 *'
      WRITE(*,*)'*             Alfonso Islas Hernández                 *'
      WRITE(*,*)'*             Gonzalo Paz Mendoza                     *'
      WRITE(*,*)'*                                                     *'
      WRITE(*,*)'*                                                     *'
      WRITE(*,*)'*             Estructuras, DEPFI, UNAM                *'
      WRITE(*,*)'*                                                     *'
      WRITE(*,*)'*          México D.F., octubre de 1998               *'
      WRITE(*,*)'*                                                     *'
      WRITE(*,*)'                                                      *'
      WRITE(*,*)'*******************************************************'
c
c     ******************************************************************
c     APERTURA DE ARCHIVOS
c
      WRITE(*,101)
```

```
   10 FORMAT(/,1X,'ARCHIVO DE DATOS: ')
      READ(*,42)INPUT
   42 FORMAT(A20)
      WRITE(*,11)
   11 FORMAT(/,1X,'ARCHIVO DE SALIDA: ')
      READ(*,42)OUTPUT
      WRITE(*,*)
      OPEN(1,FILE=INPUT,STATUS='OLD')
      OPEN(2,FILE=OUTPUT,STATUS='unknown')
c
c     ************************************************************
c     IMPRESION DE ENCABEZADO EN EL ARCHIVO DE SALIDA.
c
      WRITE(2,*)'************************************************************'
      WRITE(2,*)'*                                                          *'
      WRITE(2,*)'*                                                          *'
      WRITE(2,*)'*             ANALISIS DE MARCOS PLANOS                    *'
      WRITE(2,*)'*                                                          *'
      WRITE(2,*)'*                  ( M A R 2 D c )                         *'
      WRITE(2,*)'*                                                          *'
      WRITE(2,*)'*     (POR EL MÉTODO DE LA MATRIZ DE CONTINUIDAD)          *'
        WRITE(2,*)'*                                                        *'
      WRITE(2,*)'************************************************************'
c
c     ************************************************************
c     LECTURA DE DATOS GENERALES
c
c     Variables empleadas
c
c     NB  = NUMERO DE BARRAS
c     NU  = NUMERO DE NUDOS ( con FIX, FIY, DZ )
c     NAP = NUMERO DE APOYOS
c
      READ (1,*)NB,NU,NAP
c
c     ************************************************************
c     CONTADORES AUXILIARES
c
      nnu=NU+NAP
      nuu=3*NU
      nun=nuu+1
c
c     ************************************************************
c     LECTURA DE COORDENADAS DE NUDOS Y FUERZAS EN LOS MISMOS ( MX, MY, FZ )
c     LOS NUDOS SE NUMERAN PRIMERO QUE LOS APOYOS
c
      DO 200 I=1,NNU
       READ(1,*)X(I),Y(I),K(3*I-2,nun),K(3*I-1,nun),K(3*I,nun)
  200 CONTINUE
c  35  FORMAT(5F10.4)
c
c     ************************************************************
c     GENERACION DE LA MATRIZ DE CONTINUIDAD [ A ] DE CADA BARRA Y
c     ENSAMBLE DE SU PARTICIPACION A LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
c
c      Barrido de elementos
c
       DO 250 IB=1,NB
         Write(2,78)ib
   78    format(/' barra ',I5/)
C
C      Lectura de propiedades ( E,I,A) y conectividades ( A,B ) de la barra
C
         READ(1,*)E,IZ,AA,IIN,IFI
C
c      Longitud y cosenos directores de la barra
c
          L=((x(ifi)-x(iin))**2+(y(ifi)-y(iin))**2)**.5
          ux=(x(ifi)-x(iin))/L
          uy=(y(ifi)-y(iin))/L
c
C      Matriz de rigidez diagonal de la barra
C
       R(1)=2*E*IZ/(L)
       R(2)=2*E*IZ/(L)
```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

```
        R(3)=2*E*IZ/(L)
        R(4)=E*AA/L
c
c       El extremo A de la barra, es nudo !
c
         IF(IIN.LE.NU)THEN
           a(1,1)=-uy/L
           a(1,2)=ux/L
           a(1,3)=1
           a(2,1)=-(2*uy)/L
           a(2,2)=(2*ux)/L
           a(2,3)=1
           a(3,1)=-uy/L
           a(3,2)=ux/L
           a(3,3)=0
           a(4,1)=-ux
           a(4,2)=-uy
           a(4,3)=0
c
c       Producto [AT][K][A]
c
           DO 565 I=1,3
            DO 585 J=1,3
             DO 505 M=1,4
         K(3*iIn-3+i,3*iIn-3+j)=K(3*iIn-3+i,3*iIn-3+j)+a(M,i)*a(M,j)*R(M)
 505         CONTINUE
 585        CONTINUE
 565       CONTINUE
         ENDIF
c
c       El extremo B de la barra, es nudo !
c
         IF(IFI.LE.NU)THEN
           a(1,4)=uy/L
           a(1,5)=-ux/L
           a(1,6)=0
           a(2,4)=(2*uy)/L
           a(2,5)=-(2*ux)/L
           a(2,6)=1
           a(3,4)=uy/L
           a(3,5)=-ux/L
           a(3,6)=1
           a(4,4)=ux
           a(4,5)=uy
           a(4,6)=0
c
c      Producto [AT][K][A]
c
           DO 555 I=4,6
            DO 655 J=4,6
             DO 755 M=1,4
        K(3*iFi-6+i,3*iFi-6+j)=K(3*iFi-6+i,3*iFi-6+j)+a(M,i)*a(M,j)*R(M)
 755         CONTINUE
 655        CONTINUE
 555       CONTINUE
        ENDIF
c
c      A y B son nudos
c       Producto [AT][K][A]
       IF((IIN.LE.NU).and.(ifi.le.nu))THEN
           DO 515 I=1,3
            DO 615 J=4,6
             DO 715 M=1,4
         K(3*iIn-3+i,3*iFi-6+j)=K(3*iIn-3+i,3*iFi-6+j)+a(M,i)*a(M,j)*R(M)
 715         CONTINUE
 615        CONTINUE
 515       CONTINUE
c
           DO 2515 I=1,3
            DO 2615 J=4,6
             DO 2715 M=1,4
         K(3*iFi-6+j,3*iIn-3+i)=K(3*iFi-6+j,3*iIn-3+i)+a(M,i)*a(M,j)*R(M)
 2715         CONTINUE
 2615        CONTINUE
 2515       CONTINUE
```

```
C
         ENDIF
c        Imprime A
           write(2,22)
 22        format('Matriz de Continuidad [A]'/)
           WRITE(2,39)((a(i,j),j=1,6),i=1,4)
 39        FORMAT(6F10.4)
c
C        Termina el ciclo del barrido y limpia la matriz de continuidad [ A ]
          DO 320 I=1,4
           DO 340 J=1,3*nu
             a(I,J)=0
340        CONTINUE
320       CONTINUE
C
250     CONTINUE
c
c       Hace simetrica la matriz [ K ]
c
          DO 267 I=1,6
           DO 287 J=1,6
             K(j,i)=K(i,j)
 287       CONTINUE
 267      CONTINUE
c
c       Impresion de la matriz de rigidez global [ K ]
c
        write(2,23)
 23     format(//'Matriz Golbal de Rigideces [ K ]'//)
        WRITE(2,37)((K(I,J),j=1,NUU),i=1,NUU)
 37     format(6f10.4)
c
c        SOLUCION DEL SISTEMA POR GAUSS-JORDAN
c
        N=NUU
c
         DO 146 ZZ=1,N
          DO 144 I=1,N
            DO 150 J=N+1,ZZ,-1
              IF (I.EQ.ZZ) GOTO 144
               IF (K(ZZ,ZZ).EQ.0) THEN
c
                DO 132 Q=ZZ+1,N
                 IF (K(Q,ZZ).NE.0) THEN
                   DO 134 QQ=1,N+1
                     W=K(Q,QQ)
                     K(Q,QQ)=K(ZZ,QQ)
                     K(ZZ,QQ)=W
 134               CONTINUE
                  GOTO 142
                 ENDIF
 132             CONTINUE

                 WRITE(*,*)'EL SISTEMA ES INDETERMINADO'
                 STOP
               ENDIF
C
 142           K(I,J)=K(I,J)+K(ZZ,J)*(-K(I,ZZ))/K(ZZ,ZZ)
C
 150        CONTINUE
 144      CONTINUE
 146    CONTINUE
C
         DO 128 I=1,N
           K(I,N+1)=K(I,N+1)/K(I,I)
 128     CONTINUE
C
C       IMPRIME LOS DESPLAZAMIENTOS DE LOS NUDOS
C
        write(2,47)
 47     format(//'Desplazamientos de los nudos :'//)
        DO 600 I=1,NU
         WRITE(2,*)I,'Dx',K(3*I-2,N+1)
         WRITE(2,*)I,'Dy',K(3*I-1,N+1)
         WRITE(2,*)I,'giro',K(3*I,N+1)
```

```
  600   CONTINUE
c
c
c       Calculo de deformaciones y fuerzas sobre las barras
        REWIND 1
c
        READ (1,*)NB,NU,NAP
c
c       ************************************************************
c       LECTURA DE COORDENADAS DE NUDOS Y FUERZAS EN LOS MISMOS ( MX, MY, FZ )
c       LOS NUDOS SE NUMERAN PRIMERO QUE LOS APOYOS
c
        DO 2010 I=1,NNU
         READ(1,*)X(I),Y(I)
 2010    CONTINUE
c
c       ************************************************************
c       GENERACION DE LA MATRIZ DE CONTINUIDAD [ A ] DE CADA BARRA Y
c       ENSAMBLE DE SU PARTICIPACION A LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
c
c        Barrido de elementos
c
         DO 1250 IB=1,NB
           Write(2,781)IB
  781       format(/' barra ',I5/)
c
C        Lectura de propiedades ( E,I,A) y conectividades ( A,B ) de la barra
C
           READ(1,*)E,IZ,AA,IIN,IFI
c
c        Longitud y cosenos directores de la barra
c
            L=((x(ifi)-x(iin))**2+(y(ifi)-y(iin))**2)**.5
            ux=(x(ifi)-x(iin))/L
            uy=(y(ifi)-y(iin))/L
c
C        Matriz de rigidez diagonal de la barra
C
         R(1)=2*E*Iz/(L)
         R(2)=2*E*Iz/(L)
         R(3)=2*E*Iz/(L)
         R(4)=E*AA/L
c
c        El extremo A de la barra, es nudo !
c
         IF(IIN.LE.NU)THEN
            a(1,1)=-uy/L
            a(1,2)=ux/L
            a(1,3)=1
            a(2,1)=-(2*uy)/L
            a(2,2)=(2*ux)/L
            a(2,3)=1
            a(3,1)=-uy/L
            a(3,2)=ux/L
            a(3,3)=0
            a(4,1)=-ux
            a(4,2)=-uy
            a(4,3)=0
C       Identifica los desplazamientos en el nudo A de la barra
          DO 1655 I=1,3
            DAB(I)=K(3*IIN-3+I,NUN)
1655      CONTINUE
c
          ENDIF
c
c        El extremo B de la barra, es nudo !
c
          IF(IFI.LE.NU)THEN
            a(1,4)=uy/L
            a(1,5)=-ux/L
            a(1,6)=0
            a(2,4)=(2*uy)/L
            a(2,5)=-(2*ux)/L
            a(2,6)=1
            a(3,4)=uy/L
```

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

```
          a(3,5)=-ux/L
          a(3,6)=1
          a(4,4)=ux
          a(4,5)=uy
          a(4,6)=0
c
c      Identifica los desplazamientos en el nudo B de la barra
          DO 1550 I=4,6
            DAB(I)=K(3*IFI-6+I,NUN)
 1550     CONTINUE
        ENDIF
c
          WRITE(2,192)(DAB(j),j=1,6)
 192      FORMAT(' DESPLAZAMIENTOS EN A Y B ', 6F10.4)
c      Producto {e}= [A]{d}
c
        DO 8000 I=1,4
         DO 8001 J=1,6
          DEF(I)=DEF(I)+A(I,J)*DAB(J)
8001     CONTINUE
8000    CONTINUE
c
c      Producto {p}= [k]{e} ( Elementos mecánicos )
c
        DO 8002 I=1,4
         P(I)=R(I)*DEF(I)
8002    CONTINUE
c
        MA=P(1)+P(2)
        MB=P(2)+P(3)
        N =P(4)
c
          write(2,32)
 32       format('DEFORMACIONES : '/)
          WRITE(2,126)(DEF(j),j=1,4)
 126       FORMAT(/4F10.4/)
c
       write(2,33)MA,MB,N
 33    format(' ELEMENTOS MECANICOS '//,'MA: ',F10.3/,'MB: ',F10.3/,
      *'N: ',F10.3/)
c      LIMPIA DEFORMACIONES Y DESPLAZAMIENTOS
        DO 2345 J=1,4
          DEF(j)=0.0
 2345   CONTINUE
        DO 1345 J=1,6
          DAB(j)=0.0
 1345   CONTINUE
c
 1250   CONTINUE
       end
```


III.4 PROGRAMA MAR2DR

```
c
c      **************************************************************
c      *                                                            *
c      *   PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA EL ANALISIS DE MARCOS       *
c      *                     PLANOS                                 *
c      *   BASADO EN EL MÉTODO DE LA MATRIZ DE RIGIDECES .          *
c      *                                                            *
c      **************************************************************
c
       DIMENSION X(10),Y(10),FA(3),FB(3)
       COMMON/RIGI/ AK(30,30),AKI(6,6),DA(3),DB(3)
       INTEGER Q,QQ,Z
       REAL L
       CHARACTER*20 INPUT,OUTPUT
c
c      PORTADA DEL PROGRAMA EN LA SALIDA DEL MONITOR
c
       WRITE(*,*)'*************************************************
```

```
      WRITE(*,*)'*                                                      *'
      WRITE(*,*)'*                                                      *'
      WRITE(*,*)'*         ANALISIS DE MARCOS EN 2 DIMENSIONES          *'
      WRITE(*,*)'*                                                      *'
      WRITE(*,*)'*                   (  M A R 2 D r  )                  *'
      WRITE(*,*)'*                                                      *'
      WRITE(*,*)'*     ( POR EL MÉTODO DE LA MATRIZ DE RIGIDECES )      *'
      WRITE(*,*)'*                                                      *'
      WRITE(*,*)'*                  Elaborado por:                      *'
      WRITE(*,*)'*                                                      *'
      WRITE(*,*)'*              Octavio Garcia Dominguez                *'
      WRITE(*,*)'*              David Delgado Hernández                 *'
      WRITE(*,*)'*              Alfonso Islas Hernández                 *'
      WRITE(*,*)'*              Gonzalo Paz Mendoza                     *'
      WRITE(*,*)'*                                                      *'
      WRITE(*,*)'*                                                      *'
      WRITE(*,*)'*              Estructuras, DEPFI, UNAM                *'
      WRITE(*,*)'*                                                      *'
      WRITE(*,*)'*            México D.F., Octubre de 1998              *'
      WRITE(*,*)'*                                                      *'
      WRITE(*,*)'*                                                      *'
      WRITE(*,*)'********************************************************'
C
C    Apertura de archivos
C
      WRITE(*,10)
   10 FORMAT(/,1X,'ARCHIVO DE DATOS: ')
      READ(*,42)INPUT
   42 FORMAT(A20)
      WRITE(*,11)
      READ(*,113)OUTPUT
  113 FORMAT (A20)
   11 FORMAT(/,1X,'ARCHIVO DE SALIDA: ')
      OPEN(1,FILE=INPUT,STATUS='OLD')
      OPEN(2,FILE=OUTPUT,STATUS='unKnown')
      WRITE(*,*)
C
C    PORTADA DEL PROGRAMA EN EL ARCHIVO DE SALIDA
C
      WRITE(2,*)'********************************************************'
      WRITE(2,*)'*                                                      *'
      WRITE(2,*)'*              ANALISIS DE MARCOS PLANOS               *'
      WRITE(*,*)'*                                                      *'
      WRITE(2,*)'*                   ( M A R 2 D r )                    *'
      WRITE(2,*)'*                                                      *'
      WRITE(2,*)'*     ( POR EL MÉTODO DE LA MATRIZ DE RIGIDECES )      *'
      WRITE(2,*)'*                                                      *'
      WRITE(2,*)'********************************************************'

C
C      LECTURA DE DATOS GENERALES
C
      READ (1,*)NB,NU,NAP
C     Variables de dimensionamiento de arreglos
      nnu=NU+NAP
      nuu=3*NU
      nun=nuu+1
C
C      LECTUA DE COORDENADAS DE NUDOS Y FUERZAS EFECTIVAS EN LOS MISMOS
C
      DO 200 I=1,NNU
       READ(1,*)X(I),Y(I),AK(3*I-2,nun),AK(3*I-1,nun),AK(3*I,nun)
 200  CONTINUE
C
C      GENERACION DE LA MATRIZ DE RIGIDECES [ AK ]
C
      DO 250 I=1,NB
C LECTURA DE LAS PROPIEDADES, EL NUDO INICIAL Y EL NUDO FINAL DE LAS BARRAS
C NUMERANDO PRIMERO LOS NUDOS Y AL ULTIMO LOS APOYOS
C MODULO E, AREA, MOMENTO DE INERCIA, NUDO INICIAL, NUDO FINAL
       READ(1,*)E,RI,A,iin,ifi
c  cosenos directores
       L=((x(ifi)-x(iin))**2+(y(ifi)-y(iin))**2)**.5
       ux=(x(ifi)-x(iin))/l
       uy=(y(ifi)-y(iin))/l
```

```
c  calculo de las constantes de rigidez consirerando efecto de cortante
      C=0
      C11=E*A/L
      C22=12*E*RI/(L**3)/(1+4*c)
      C23=6*E*RI/(L**2)/(1+4*c)
      C33=4*E*RI*(1+c)/L/(1+4*c)
      CAB=2*RI*(1-2*c)/L/(1+4*c)
c
c      SE ENSAMBLA EL EXTREMO A DE LA BARRA ( NUDO INICIAL )
        IF (IIn.lE.NU) THEN
          R1=C11
          R2=C22
          R3=C23
          R4=C23
          R5=C33
          CALL ATAKA(AK,IIN,IIN,R1,R2,R3,R4,R5,UX,UY)
        ENDIF
c
c      SE ENSAMBLA EL EXTREMO B DE LA BARRA ( NUDO FINAL )
2        IF ( IfI.lE.NU) THEN
          R1=C11
          R2=C22
          R3=-C23
          R4=-C23
          R5=C33
          CALL ATAKA(AK,IFI,IFI,R1,R2,R3,R4,R5,UX,UY)
        ENDIF
c
c      SE ENSAMBLA EL EXTREMO A Y B DE LA BARRA
c
c      [KAB]
        IF ((Iin.LE.NU).AND.(IfI.LE.NU)) THEN
          R1=-C11
          R2=-C22
          R3=C23
          R4=-C23
          R5=CAB
          CALL ATAKA(AK,IIN,IFI,R1,R2,R3,R4,R5,UX,UY)
        ENDIF
c
250    CONTINUE
c
c      nuu : dimension de la matriz de rigideces [AK]
       nuu=3*nu
       DO 260 I=1,NUU
         DO 280 J=1,NUU
           AK(J,I)=AK(I,J)
 280     CONTINUE
 260   CONTINUE
c
       write(2,23)
 23    format(//'Matriz de Rigideces [AK]'//)
       WRITE(2,37)((AK(I,J),j=1,NUU),i=1,NUU)
 37    format(6f12.2)
c
c         SOLUCION DEL SISTEMA POR GAUSS-JORDAN
c
       N=NUU
c
        DO 146 Z=1,N
         DO 144 I=1,N
           DO 150 J=N+1,Z,-1
             IF (I.EQ.Z) GOTO 144
              IF (AK(Z,Z).EQ.0) THEN
c
               DO 132 Q=Z+1,N
                IF (AK(Q,Z).NE.0) THEN
                  DO 134 QQ=1,N+1
                    W=AK(Q,QQ)
                    AK(Q,QQ)=AK(Z,QQ)
                    AK(Z,QQ)=W
 134              CONTINUE
                  GOTO 142
                ENDIF
 132            CONTINUE
```

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

```
C
                  WRITE(*,*)'EL SISTEMA ES INDETERMINADO'
                  STOP
               ENDIF
C
 142           AK(I,J)=AK(I,J)+AK(Z,J)*(-AK(I,Z))/AK(Z,Z)
C
 150         CONTINUE
 144       CONTINUE
 146    CONTINUE
C
         DO 128 I=1,N
           AK(I,N+1)=AK(I,N+1)/AK(I,I)
 128     CONTINUE
C
C       IMPRIME LOS DESPLAZAMIENTOS DE LOS NUDOS
C
        write(2,77)
 77     format(//'Desplazamientos de los nudos :'//)
        DO 600 I=1,NU
         WRITE(2,*)I,'DX',AK(3*I-2,N+1)
         WRITE(2,*)I,'DY',AK(3*I-1,N+1)
         WRITE(2,*)I,'FI',AK(3*I,N+1)
 600    CONTINUE
C
C       REEMBOBINAR EL ARCHIVO DE DATOS Y LEER LAS PROPIEDADES DE LAS BARRAS
C       PARA CAULCULAR OTRAVEZ LAS MATRICES DE RIGIDEZ GLOBALES.
C       SE OBTENDRAN LAS FUERZAS EN EL SISTEMA GLOBAL Y AL FINAL SE TRANSFORMAN A
LOCALES
C
C        write(*,*)' va a reembobinar el archivo de datos'
        REWIND 1
        write(2,58)
 58     format(//'RESULTADOS :'//)
        READ (1,*)NB,NU,NAP
         DO 202 I=1,NNU
           READ(1,*)X(I),Y(I)
 202     CONTINUE
C  57    FORMAT(/2F10.2)
C
        DO 650 K=1,NB
C
        write(2,59)K
 59     format(/'BARRA :',I5/)
          READ(1,*)E,A,RI,IIN,IFI
c  cosenos directores
         L=((x(ifi)-x(iin))**2+(y(ifi)-y(iin))**2)**.5
         ux=(x(ifi)-x(iin))/l
         uy=(y(ifi)-y(iin))/l
c  calculo de las constantes de rigidez consirerando efecto de cortante
         C=0
         C11=E*A/L
         C22=12*E*RI/(L**3)/(1+4*c)
         C23=6*E*RI/(L**2)/(1+4*c)
         C33=4*E*RI*(1+c)/L/(1+4*c)
         CAB=2*RI*(1-2*c)/L/(1+4*c)
C
c      INICIALIZACION DE LA MATRIZ DEL ELEMENTO Y FUERZAS
        DO 990 I=1,6
         DO 995 J=1,6
           AKI(I,J)=0
  995     CONTINUE
 990    CONTINUE
        DO 997 J=1,3
          FA(J)=0
          FB(J)=0
          DA(J)=0
          DB(J)=0
  997    CONTINUE
C       SE CALCULA KAA DE LA BARRA EN SISTEMA GLOBAL
            R1=C11
            R2=C22
            R3=C23
            R4=C23
            R5=C33
```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

```
      WRITE(2,*)' < kaa   S.G'
          CALL ATKI(AKI,1,1,R1,R2,R3,R4,R5,UX,UY)
C
C     SE CALCULA KBB DE LA BARRA EN SISTEMA GLOBAL
         R1=C11
         R2=C22
         R3=-C23
         R4=-C23
         R5=C33
      WRITE(2,*)'< kbb   S.G.'
       CALL ATKI(AKI,2,2,R1,R2,R3,R4,R5,UX,UY)
C
C     SE CALCULA KAB DE LA BARRA EN SISTEMA GLOBAL
         R1=-C11
         R2=-C22
         R3=C23
         R4=-C23
         R5=CAB
      WRITE(2,*)'< kab   S.G'
         CALL ATKI(AKI,1,2,R1,R2,R3,R4,R5,UX,UY)
C
C     SE CALCULA KBA DE LA BARRA EN SISTEMA GLOBAL
         R1=-C11
         R2=-C22
         R3=-C23
         R4=C23
         R5=CAB
      WRITE(2,*)'< kba   S.G.'
         CALL ATKI(AKI,2,1,R1,R2,R3,R4,R5,UX,UY)
C
C     CALCULO DE FUERZAS GLOBALES EN LAS BARRAS
C     FA=[ KAA KAB ] DA
C     FB=[ KBA KBB ] DB
C
C     DESPLAZAMIENTOS DE LOS EXTREMOS
        IF(IIN.LE.NU) THEN
          DO 810 J=1,3
            DA(J)=AK(3*IIN-3+J,N+1)
 810      CONTINUE
        ENDIF
        IF(IFI.LE.NU) THEN
          DO 815 J=1,3
            DB(J)=AK(3*IFI-3+J,N+1)
 815      CONTINUE
        ENDIF
C
      WRITE(2,76)
 76   format(/' Desplazamiento de los extremos'/)
      WRITE(2,395)(DA(I),I=1,3)
      WRITE(2,396)(DB(I),I=1,3)
 395  FORMAT('A',6F10.3)
 396  FORMAT('B',6F10.4)
      WRITE(2,66)
 66   format(/' Matriz global del elemento'/)
      WRITE(2,385)((AKI(I,J),J=1,6),I=1,6)
 385  FORMAT(6F10.2)
C     OBTENCION DE FUERZAS EN EL SISTEMA GLOBAL
      DO 730 I=1,3
         DO 785 J=1,3
           FA(I)=FA(I)+AKI(I,J)*DA(J)+AKI(I,J+3)*DB(J)
           FB(I)=FB(I)+AKI(I+3,J)*DA(J)+AKI(I+3,J+3)*DB(J)
 785     CONTINUE
 730  CONTINUE
C
C     FUERZAS EN LOS ELEMENTOS EN SISTEMA LOCAL
C
      FAX=FA(1)*UX+FA(2)*UY
      FAY=-FA(1)*UY+FA(2)*UX
      AM=FA(3)
C
      FBX=FB(1)*UX+FB(2)*UY
      FBY=-FB(1)*UY+FB(2)*UX
      BM=FB(3)
       WRITE(2,54)FAX,FAY,AM,FBX,FBY,BM
 54    FORMAT(//'FUERZAS EN LAS BARRAS'//6X,'FAX',7X,'FAY',7X,'MA',7X,
```

```
     * 'FBX',7X,'FBY',7X,'MB'//6F10.3/)
C
 650  CONTINUE
      STOP
      END
C
C       SUBROUTINE ATAKA
      SUBROUTINE ATAKA (aAK,IN,IF,R1K,R2K,R3K,R4K,R5K,UX,UY)
C       COMMON/RIGI/ AK(30,30)
C
      DIMENSION aAK(30,30)
      aAK(3*in-2,3*if-2)=R1K*UX**2+R2K*UY**2
     *+aAK(3*in-2,3*if-2)
      aAK(3*in-2,3*if-1)=(R1K-R2K)*UX*UY
     *+aAK(3*in-2,3*if-1)
      aAK(3*in-2,3*if)=-R3K*UY
     *+aAK(3*in-2,3*if)
      aAK(3*in-1,3*if-2)=(R1K-R2K)*UX*UY
     *+aAK(3*in-1,3*if-2)
      aAK(3*in-1,3*if-1)=R1K*UY**2+R2K*UX**2
     *+aAK(3*in-1,3*if-1)
      aAK(3*in-1,3*if)=R3K*UX
     *+aAK(3*in-1,3*if)
      aAK(3*in,3*if-2)=-R4K*UY
     *+aAK(3*in,3*if-2)
      aAK(3*in,3*if-1)=R4K*UX
     *+aAK(3*in,3*if-1)
      aAK(3*in,3*if)=R5K
     *+aAK(3*in,3*if)
C
      RETURN
      END
C
C       SUBROUTINE ATAKA
      SUBROUTINE ATKI (aAK,IN,IF,R1K,R2K,R3K,R4K,R5K,UX,UY)
C
      DIMENSION AAK(6,6)
      aAK(3*in-2,3*if-2)=R1K*UX**2+R2K*UY**2
      aAK(3*in-2,3*if-1)=(R1K-R2K)*UX*UY
      aAK(3*in-2,3*if)=-R3K*UY
      aAK(3*in-1,3*if-2)=(R1K-R2K)*UX*UY
      aAK(3*in-1,3*if-1)=R1K*UY**2+R2K*UX**2
      aAK(3*in-1,3*if)=R3K*UX
      aAK(3*in,3*if-2)=-R4K*UY
      aAK(3*in,3*if-1)=R4K*UX
      aAK(3*in,3*if)=R5K
      WRITE(2,386)aAK(3*in-2,3*if-2),aAK(3*in-2,3*if-1),aAK(3*in-2,3*if)
     *,aAK(3*in-1,3*if-2),aAK(3*in-1,3*if-1),aAK(3*in-1,3*if),
     *aAK(3*in,3*if-2),aAK(3*in,3*if-1),aAK(3*in,3*if)
  386 FORMAT(/3F10.2/3F10.2/3F10.2/)
C
      RETURN
      END
```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

III.5 PROGRAMA MAR3D

```
PROGRAM MARCO3D
C     **********************************************************
C     *                                                        *
C     *  PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA EL ANALISIS DE MARCOS    *
C     *                  TRIDIMENSIONALES                      *
C     *  BASADO EN EL METODO DE LA MATRIZ DE CONTINUIDAD.      *
C     *                                                        *
C     **********************************************************
C
C     **********************************************************
C      DIMENSIONAMIENTO Y DECLARACION DE VARIABLES
C
      DIMENSION X(50),Y(50),Z(50),JP(50),IZ(50),IY(50)
      DIMENSION A(8,12),AR(50),E(50),G(50),R(8),K(100,100),DF(8),MI(8)
      DIMENSION P(8),DAB(12)
      integer OP,O,OO,AP,AY,COND
```

```
      REAL IZ,IY,L,LP,K,jp,P,DAB,MI
      CHARACTER*20 INPUT,OUTPUT
c
c      ***************************************************************
c       IMPRESION EN PANTALLA
c
      WRITE(*,*)'*************************************************************'
      WRITE(*,*)'*                                                           *'
      WRITE(*,*)'*                                                           *'
      WRITE(*,*)'*              ANALISIS DE MARCOS EN 3 DIMENSIONES          *'
      WRITE(*,*)'*                                                           *'
      WRITE(*,*)'*                     ( M A R 3 D )                         *'
      WRITE(*,*)'*                                                           *'
      WRITE(*,*)'*                     Elaborado por:                        *'
      WRITE(*,*)'*                                                           *'
      WRITE(*,*)'*                Octavio Garcia Dominguez                   *'
      WRITE(*,*)'*                David Delgado Hernández                    *'
      WRITE(*,*)'*                Alfonso Islas Hernández                    *'
      WRITE(*,*)'*                Gonzalo Paz Mendoza                        *'
      WRITE(*,*)'*                                                           *'
      WRITE(*,*)'*                                                           *'
      WRITE(*,*)'*                Estructuras, DEPFI, UNAM                   *'
      WRITE(*,*)'*                                                           *'
      WRITE(*,*)'*              México D.F., Diciembre de 1998               *'
      WRITE(*,*)'*                                                           *'
      WRITE(*,*)'*                                                           *'
      WRITE(*,*)'*************************************************************'
c
c      ***************************************************************
c      APERTURA DE ARCHIVOS
c
      WRITE(*,10)
   10 FORMAT(/,1X,'ARCHIVO DE DATOS: ')
      READ(*,42)INPUT
   42 FORMAT(A20)
      WRITE(*,11)
   11 FORMAT(/,1X,'ARCHIVO DE SALIDA: ')
      READ(*,42)OUTPUT
      WRITE(*,*)
      OPEN (1,FILE=INPUT,STATUS='OLD')
      OPEN (2,FILE=OUTPUT,STATUS='unknown')
c
c      ***************************************************************
c      IMPRESION DE ENCABEZADO EN EL ARCHIVO DE SALIDA.
c
      WRITE(2,*)'*************************************************************'
      WRITE(2,*)'*                                                           *'
      WRITE(2,*)'*                                                           *'
      WRITE(2,*)'*              ANALISIS DE MARCOS EN 3 DIMENSIONES          *'
      WRITE(2,*)'*                                                           *'
      WRITE(2,*)'*                     ( M A R 3 D )                         *'
      WRITE(2,*)'*                                                           *'
      WRITE(2,*)'*                                                           *'
      WRITE(2,*)'*************************************************************'
c
c      ***************************************************************
c       LECTURA DE DATOS GENERALES
c
c       Variables empleadas
c
c       NB  - NUMERO DE BARRAS
c       NU  - NUMERO DE NUDOS ( con DX,DY,DZ,FIX, FIY,FIZ )
c       NAP - NUMERO DE APOYOS
c         NAY - NUMERO DE NUDOS DE AYUDA
c         COND - CONDICIONAL
c
C LECTURA DEL NUMERO DE NUDOS Y COORDENADAS Y
C LECTURA DE FUERZAS EN LOS NUDOS FX,FY,FZ,MX,MY.MZ

      READ(1,*)NB,N,AP,AY,NP,COND
      DO 14 I=1,N
      READ(1,*)X(I),Y(I),Z(I),
     *K(6*I-5,6*N+1),K(6*I-4,6*N+1),K(6*I-3,6*N+1),
     *K(6*I-2,6*N+1),K(6*I-1,6*N+1),K(6*I,6*N+1)
   14 CONTINUE
```

```
C LECTURA DEL NUMERO DE APOYOS
      NNU=AP+N
      DO 15 I=N+1,NNU
      READ(1,*)X(I),Y(I),Z(I)
   15 CONTINUE
C LECTURA DEL NUMERO DE NUDOS DE AYUDA
      IF(COND.EQ.1) GOTO 9
      GOTO 8
    9 DO 16 I=NNU+1,NNU+AY
      READ(1,*)X(I),Y(I),Z(I)
   16 CONTINUE
C LECTURA DEL NUMERO DE BARRAS Y PROPIEDADES GEOMETRICAS
    8 DO 20 J=1,NP
      READ(1,*)E(J),AR(J),IY(J),IZ(J),G(J),JP(J)
   20 CONTINUE
C
C CALCULO DE LA LONGITUD DE CADA BARRA
C
C         BARRIDO DE ELEMENTOS
C
      DO 50 IB=1,NB
      WRITE(2,21)
   21 FORMAT(/'')
      WRITE(2,*)'BARRA ',IB
C
C         LECTURA DE NUDO INICIAL, NUDO FINAL Y TIPO DE PROPIEDAD
C
      READ(1,*)INI,IFI,NPP,NAY
C
      L=((X(INI)-X(IFI))**2+(Y(INI)-Y(IFI))**2
     *+(Z(INI)-Z(IFI))**2)**0.5
      UXX=(X(IFI)-X(INI))/L
      UXY=(Y(IFI)-Y(INI))/L
      UXZ=(Z(IFI)-Z(INI))/L
C
      LP=((X(NAY)-X(IFI))**2+(Y(NAY)-Y(IFI))**2
     *+(Z(NAY)-Z(IFI))**2)**0.5
      UYX=(X(NAY)-X(IFI))/LP
      UYY=(Y(NAY)-Y(IFI))/LP
      UYZ=(Z(NAY)-Z(IFI))/LP
C
      UZX=((UXY*UYZ)-(UXZ*UYY))
      UZY=-((UXX*UYZ)-(UXZ*UYX))
      UZZ=((UXX*UYY)-(UXY*UYX))
C
C     MATRIZ DE RIGIDECES [K DIAGONAL] DE LA BARRA
C
C       DO 30 J=1,NP
         IF(NPP.LE.NP)GOTO 32
        GOTO 30
   32   R(1)=2*IY(npp)*E(npp)/L
      R(2)=2*IY(npp)*E(npp)/L
      R(3)=2*IY(npp)*E(npp)/L
      R(4)=2*Iz(npp)*E(npp)/L
      R(5)=2*Iz(npp)*E(npp)/L
      R(6)=2*Iz(npp)*E(npp)/L
      R(7)=(E(npp)*AR(npp))/L
      R(8)=(G(npp)*JP(npp))/L
   30   CONTINUE
C
      WRITE(2,24)
   24 FORMAT('K DIAGONAL'/)
      WRITE(2,287)(R(J),J=1,8)
  287 FORMAT(1F10.4)
C
C         ACOMODO DE ELEMENTOS DE A
C
C         El extremo A de la barra, es nodo!
C
      IF (INI.LE.N)THEN
      A(1,1)=-UZX/L
      A(1,2)=-UZY/L
      A(1,3)=-UZZ/L
      A(1,4)=UYX
      A(1,5)=UYY
```

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

```
      A(1,6)=UYZ
      A(2,1)=-2*UZX/L
      A(2,2)=-2*UZY/L
      A(2,3)=-2*UZZ/L
      A(2,4)=UYX
      A(2,5)=UYY
      A(2,6)=UYZ
      A(3,1)=-UZX/L
      A(3,2)=-UZY/L
      A(3,3)=-UZZ/L
      A(3,4)=0
      A(3,5)=0
      A(3,6)=0
      A(4,1)=UYX/L
      A(4,2)=UYY/L
      A(4,3)=UYZ/L
      A(4,4)=UZX
      A(4,5)=UZY
      A(4,6)=UZZ
      A(5,1)=2*UYX/L
      A(5,2)=2*UYY/L
      A(5,3)=2*UYZ/L
      A(5,4)=UZX
      A(5,5)=UZY
      A(5,6)=UZZ
      A(6,1)=UYX/L
      A(6,2)=UYY/L
      A(6,3)=UYZ/L
      A(6,4)=0
      A(6,5)=0
      A(6,6)=0
      A(7,1)=-UXX
      A(7,2)=-UXY
      A(7,3)=-UXZ
      A(7,4)=0
      A(7,5)=0
      A(7,6)=0
      A(8,1)=0
      A(8,2)=0
      A(8,3)=0
      A(8,4)=-UXX
      A(8,5)=-UXY
      A(8,6)=-UXZ
C
C        producto [AT] [K] [A]
C
      DO 565 I=1,6
       DO 585 J=1,6
        DO 505 M=1,8
         K(6*INI-6+I,6*INI-6+J)=K(6*INI-6+I,6*INI-6+J)
     *   +a(M,I)*a(M,J)*R(M)
 505    CONTINUE
 585   CONTINUE
 565  CONTINUE
      ENDIF
C
C
C        El extremo B de la barra, es nodo!
C
      IF (IFI.LE.N) THEN
      A(1,7)=UZX/L
      A(1,8)=UZY/L
      A(1,9)=UZZ/L
      A(1,10)=0
      A(1,11)=0
      A(1,12)=0
      A(2,7)=2*UZX/L
      A(2,8)=2*UZY/L
      A(2,9)=2*UZZ/L
      A(2,10)=UYX
      A(2,11)=UYY
      A(2,12)=UYZ
      A(3,7)=UZX/L
      A(3,8)=UZY/L
      A(3,9)=UZZ/L
```

```
          A(3,10)=UYX
          A(3,11)=UYY
          A(3,12)=UYZ
          A(4,7)=-UYX/L
          A(4,8)=-UYY/L
          A(4,9)=-UYZ/L
          A(4,10)=0
          A(4,11)=0
          A(4,12)=0
          A(5,7)=-2*UYX/L
          A(5,8)=-2*UYY/L
          A(5,9)=-2*UYZ/L
          A(5,10)=UZX
          A(5,11)=UZY
          A(5,12)=UZZ
          A(6,7)=-UYX/L
          A(6,8)=-UYY/L
          A(6,9)=-UYZ/L
          A(6,10)=UZX
          A(6,11)=UZY        A(6,12)=UZZ
          A(7,7)=UZZ
          A(7,8)=UZY
          A(7,9)=UZZ
          A(7,10)=0
          A(7,11)=0
          A(7,12)=0
          A(8,7)=0
          A(8,8)=0
          A(8,9)=0
          A(8,10)=UZX
          A(8,11)=UZY
          A(8,12)=UZZ
C
C           producto [AT] [K] [A]
C
          DO 555 I=7,12
           DO 655 J=7,12
            DO 755 M=1,8
           K(6*IFI-12+i,6*IFI-12+j)=K(6*IFI-12+i,6*IFI-12+j)
     *          +a(M,i)*a(M,j)*R(m)
  755       CONTINUE
  655      CONTINUE
  555     CONTINUE
          ENDIF
C
C         A Y B son nodos
C        producto [AT] [K] [A]
C
          IF((INI.LE.N).and.(IFI.LE.N))THEN
          DO 515 I=1,6
           DO 615 J=7,12
            DO 715 M=1,8
             K(6*INI-6+i,6*IFI-12+j)=K(6*INI-6+i,6*IFI-12+j)
     *          +a(M,i)*a(M,j)*R(m)
  715       CONTINUE
  615      CONTINUE
  515     CONTINUE
C
          DO 2515 I=1,6
           DO 2615 J=7,12
            DO 2715 M=1,8
             K(6*IFI-12+j,6*INI-6+i)=K(6*IFI-12+j,6*INI-6+i)
     *          +a(M,i)*a(M,j)*R(m)
 2715       CONTINUE
 2615      CONTINUE
 2515     CONTINUE
C
          ENDIF
C         IMPRIME [A]
C
          WRITE(2,22)
   22     FORMAT(/'MATRIZ DE CONTINUIDAD [A]'/)
          WRITE(2,26)((A(I,J),J=1,12),I=1,8)
   26     FORMAT(12F6.3)
C
```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

```
C         TERMINA EL CICLO Y LIMPIA LA MATRIZ [A]
C
      DO 41 I=1,8
        DO 43 J=1,12
         A(I,J)=0
   43   CONTINUE
   41 CONTINUE
C
        DO 340 I=1,8
          R(I)=0
  340   CONTINUE
C
   50  CONTINUE
C
C      MATRIZ DE RIGIDECES GLOBAL [K]
      OP=6*N
      WRITE(2,66)
   66 FORMAT(//'MATRIZ GLOBAL DE RIGIDECES [K]'/)
       WRITE(2,67)((K(I,J),J=1,OP+1),I=1,OP)
   67 FORMAT(25F8.3)
C
C SOLUCION DEL SISTEMA F=KD
       DO 146 KZZ=1,OP
        DO 144 I=1,OP
          DO 150 J=OP+1,KZZ,-1
            IF (I.EQ.KZZ) GOTO 141
             IF (K(KZZ,KZZ).EQ.0) THEN
C
              DO 132 Q=KZZ+1,OP
               IF (K(Q,KZZ).NE.0) THEN
                 DO 134 QQ=1,OP+1
                   W=K(Q,QQ)
                   K(Q,QQ)=K(KZZ,QQ)
                   K(KZZ,QQ)=W
 134             CONTINUE
                 GOTO 142
               ENDIF
 132            CONTINUE
C
                WRITE(*,*)'EL SISTEMA ES INDETERMINADO'
                STOP
             ENDIF
C
 142         K(I,J)=K(I,J)+K(KZZ,J)*(-K(I,KZZ))/K(KZZ,KZZ)
C
 150        CONTINUE
 144      CONTINUE
 146  CONTINUE
C
        DO 128 I=1,OP
         K(I,OP+1)=K(I,OP+1)/K(I,1)
 128    CONTINUE
C
C IMPRIME DESPLAZAMIENTOS
      WRITE(2,91)
   91 FORMAT(/'NUMERO DE NUDO Y DESPLAZAMIENTO EN dx,dy,dz,ox,oy,oz'/)
C
      DO 101 I=1,N
      WRITE(2,*)'NUDO ',I
      WRITE(2,*)
      WRITE(2,*)'DX',K(6*I-5,OP+1)
      WRITE(2,*)'DY',K(6*I-4,OP+1)
      WRITE(2,*)'DZ',K(6*I-3,OP+1)
      WRITE(2,*)'GX',K(6*I-2,OP+1)
      WRITE(2,*)'GY',K(6*I-1,OP+1)
      WRITE(2,*)'GZ',K(6*I,OP+1)
      WRITE(2,*)
  101 CONTINUE
C
C      Calculo de las deformaciones y fzas sobre las barras
      REWIND 1
       READ(1,*)
         do 333 I=1,n+ay+ap
           READ(1,*)
 333     continue
```

```
            do 334 I=1,np
                 READ(1,*)
 334        continue
C
C       BARRIDO DE ELEMENTOS
C
      DO 503 IB=1,NB
      WRITE(2,210)
  210 FORMAT(/'')
      WRITE(2,*)'BARRA ',IB
C
C         LECTURA DE NUDO INICIAL, NUDO FINAL Y TIPO DE PROPIEDAD
C
      READ(1,*)INI,IFI,NPP,NAY
C
      L=((X(INI)-X(IFI))**2+(Y(INI)-Y(IFI))**2
     *+(Z(INI)-Z(IFI))**2)**0.5
      UXX=(X(IFI)-X(INI))/L
      UXY=(Y(IFI)-Y(INI))/L
      UXZ=(Z(IFI)-Z(INI))/L
C
      LP=((X(NAY)-X(IFI))**2+(Y(NAY)-Y(IFI))**2
     *+(Z(NAY)-Z(IFI))**2)**0.5
      UYX=(X(NAY)-X(IFI))/LP
      UYY=(Y(NAY)-Y(IFI))/LP
      UYZ=(Z(NAY)-Z(IFI))/LP
C
      UZX=((UXY*UYZ)-(UXZ*UYY))
      UZY=-((UXX*UYZ)-(UXZ*UYX))
      UZZ=((UXX*UYY)-(UXY*UYX))
C
C     MATRIZ DE RIGIDECES (K DIAGONAL) DE LA BARRA
C
C      DO 301 J=1,NP
         IF(NPP.LE.NP)GOTO 321
       GOTO 301
  321  R(1)=2*IY(npp)*E(npp)/L
      R(2)=2*IY(npp)*E(npp)/L
      R(3)=2*IY(npp)*E(npp)/L
      R(4)=2*Iz(npp)*E(npp)/L
      R(5)=2*Iz(npp)*E(npp)/L
      R(6)=2*Iz(npp)*E(npp)/L
      R(7)=(E(npp)*AR(npp))/L
      R(8)=(G(npp)*JP(npp))/L
  301  CONTINUE
C
      OP=6*N
C
C       ACOMODO DE ELEMENTOS DE A
C
C       El extremo A de la barra, es nodo!
C
      IF (INI.LE.N)THEN
      A(1,1)=-UZX/L
      A(1,2)=-UZY/L
      A(1,3)=-UZZ/L
      A(1,4)=UYX
      A(1,5)=UYY
      A(1,6)=UYZ
      A(2,1)=-2*UZX/L
      A(2,2)=-2*UZY/L
      A(2,3)=-2*UZZ/L
      A(2,4)=UYX
      A(2,5)=UYY
      A(2,6)=UYZ
      A(3,1)=-UZX/L
      A(3,2)=-UZY/L
      A(3,3)=-UZZ/L
      A(3,4)=0
      A(3,5)=0
      A(3,6)=0
      A(4,1)=UYX/L
      A(4,2)=UYY/L
      A(4,3)=UYZ/L
      A(4,4)=UZX
```

```
      A(4,5)=UZY
      A(4,6)=UZZ
      A(5,1)=2*UYX/L
      A(5,2)=2*UYY/L
      A(5,3)=2*UYZ/L
      A(5,4)=UZX
      A(5,5)=UZY
      A(5,6)=UZZ
      A(6,1)=UYX/L
      A(6,2)=UYY/L
      A(6,3)=UYZ/L
      A(6,4)=0
      A(6,5)=0
      A(6,6)=0
      A(7,1)=-UXX
      A(7,2)=-UXY
      A(7,3)=-UXZ
      A(7,4)=0
      A(7,5)=0
      A(7,6)=0
      A(8,1)=0
      A(8,2)=0
      A(8,3)=0
      A(8,4)=-UXX
      A(8,5)=-UXY
      A(8,6)=-UXZ
      DO 1650 I=1,6
        DAB(I)=K(6*IDI-6+I,OPI)
 1650   CONTINUE
        endif
C
C        producto [AT] [K] [A]
C
C
C        El extremo B de la barra, es nodo!
C
      IF (IFI.LE.N) THEN
      A(1,7)=UZX/L
      A(1,8)=UZY/L
      A(1,9)=UZZ/L
      A(1,10)=0
      A(1,11)=0
      A(1,12)=0
      A(2,7)=2*UZX/L
      A(2,8)=2*UZY/L
      A(2,9)=2*UZZ/L
      A(2,10)=UYX
      A(2,11)=UYY
      A(2,12)=UYZ
      A(3,7)=UZX/L
      A(3,8)=UZY/L
      A(3,9)=UZZ/L
      A(3,10)=UYX
      A(3,11)=UYY
      A(3,12)=UYZ
      A(4,7)=-UYX/L
      A(4,8)=-UYY/L
      A(4,9)=-UYZ/L
      A(4,10)=0
      A(4,11)=0
      A(4,12)=0
      A(5,7)=-2*UYX/L
      A(5,8)=-2*UYY/L
      A(5,9)=-2*UYZ/L
      A(5,10)=UZX
      A(5,11)=UZY
      A(5,12)=UZZ
      A(6,7)=-UYX/L
      A(6,8)=-UYY/L
      A(6,9)=-UYZ/L
      A(6,10)=UZX
      A(6,11)=UZY
      A(6,12)=UZZ
      A(7,7)=UXX
      A(7,8)=UXY
```

```
      A(7,9)=UXZ
      A(7,10)=0
      A(7,11)=0
      A(7,12)=0
      A(8,7)=0
      A(8,8)=0
      A(8,9)=0
      A(8,10)=UXX
      A(8,11)=UXY
      A(8,12)=UXZ
      DO 1652  I=7,12
         DAB(I)=K(6*IFI-12+I,OP+1)
1652   CONTINUE
       ENDIF
      WRITE(2,*)
C
C   CALCULO DE DEFORMACIONES(DF)
C
       DO 1000 I=1,8
      DO 950 J=1,12
      DF(I)=DF(I)+A(I,J)*DAB(J)
  950  CONTINUE
 1000 CONTINUE
C
C CALCULO DE FUERZAS INTERNAS(P)
C
       DO 1050 I=1,8
         P(I)=R(I)*DF(I)
 1050  CONTINUE
       WRITE(2,*)'DEFORMACIONES (e) Y FUERZAS INTERAS (P)'
       WRITE(2,*)
      WRITE(2,*)DF(1),P(1)
       WRITE(2,*)DF(2),P(2)
       WRITE(2,*)DF(3),P(3)
       WRITE(2,*)DF(4),P(4)
       WRITE(2,*)DF(5),P(5)
       WRITE(2,*)DF(6),P(6)
       WRITE(2,*)DF(7),P(7)
       WRITE(2,*)DF(8),P(8)
C
      MI(1)=P(1)+P(2)
      MI(2)=P(2)+P(3)
      MI(3)=(p(1)+2*P(2)+p(3))/L
      MI(4)=P(4)+P(5)
      MI(5)=P(5)+P(6)
      MI(6)=(P(4)+2*P(5)+P(6))/L
      MI(7)=P(7)
      MI(8)=P(8)
C VECTOR FINAL DE FUERZAS INTERNAS
      WRITE(2,1180)
 1180  FORMAT(/'ELEMENTOS MECANICOS MyA,MyB,Vy,MzA,MzB,Vz,N,MT')
       WRITE(2,*)
      WRITE(2,*)'MyA',MI(1)
       WRITE(2,*)'MyB',MI(2)
       WRITE(2,*)'Vy ',MI(3)
       WRITE(2,*)'MzA',MI(4)
       WRITE(2,*)'MzB',MI(5)
       WRITE(2,*)'Vz ',MI(6)
       WRITE(2,*)'N  ',MI(7)
       WRITE(2,*)'MT ',MI(8)
C      LIMPIEZA DE DEFORMACIONES Y DESPLAZAMIENTOS
       DO 2345 J=1,8
       DF(J)=0.0
 2345  CONTINUE
       DO 1345 J=1,12
       DAB(J)=0.0
 1345  CONTINUE
       DO 2346 J=1,8
       P(J)=0.0
 2346  CONTINUE  503 continue
      END
```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

III.6 PROGRAMA RET2D


```
c     ***********************************************************
c     *                                                         *
c     *  PROGRAMA DE COMPUTADORA PARA EL ANALISIS DE RETICULAS PLANAS *
c     *  BASADO EN EL METODO DE LA MATRIZ DE CONTINUIDAD.       *
c     *                                                         *
c     ***********************************************************
c
c     ***********************************************************
c      DIMENSIONAMIENTO Y DECLARACION DE VARIABLES
c
       DIMENSION X(100),Y(100),R(4),A(4,6),K(300,300)
       dimension DEF(3),P(4),DAN(6)
       INTEGER Q,QQ,ZZ
       REAL L,JJ,K,E,D,G,MA,MB,MT
       CHARACTER*20 INPUT,OUTPUT
c
c     ***********************************************************
c     IMPRESION EN PANTALLA
c
       WRITE(*,*)'*************************************************'
       WRITE(*,*)'*                                               *'
       WRITE(*,*)'*                                               *'
       WRITE(*,*)'*          ANALISIS DE RETICULAS PLANAS         *'
       WRITE(*,*)'*                                               *'
       WRITE(*,*)'*                ( R E T 2 D )                  *'
       WRITE(*,*)'*                                               *'
       WRITE(*,*)'*               Elaborado por:                  *'
       WRITE(*,*)'*                                               *'
       WRITE(*,*)'*           Octavio García Domínguez            *'
       WRITE(*,*)'*           David Delgado Hernández             *'
       WRITE(*,*)'*           Alfonso Islas Hernández             *'
       WRITE(*,*)'*           Gonzalo Paz Mendoza                 *'
       WRITE(*,*)'*                                               *'
       WRITE(*,*)'*                                               *'
       WRITE(*,*)'*           Estructuras, DEPFI, UNAM            *'
       WRITE(*,*)'*                                               *'
       WRITE(*,*)'*          México D.F., octubre de 1998         *'
       WRITE(*,*)'*                                               *'
       WRITE(*,*)'*                                               *'
       WRITE(*,*)'*************************************************'
c
c     ***********************************************************
c     APERTURA DE ARCHIVOS
c
       WRITE(*,10)
    10 FORMAT(/,1X,'ARCHIVO DE DATOS: ')
       READ(*,42)INPUT
    42 FORMAT(A20)
       WRITE(*,11)
    11 FORMAT(/,1X,'ARCHIVO DE SALIDA: ')
       READ(*,42)OUTPUT
       WRITE(*,*)
       OPEN(1,FILE=INPUT,STATUS='OLD')
       OPEN(2,FILE=OUTPUT,STATUS='unknown')
c
c     ***********************************************************
c     IMPRESION DE ENCABEZADO EN EL ARCHIVO DE SALIDA.
c
       WRITE(2,*)'*************************************************'
       WRITE(2,*)'*                                               *'
       WRITE(2,*)'*                                               *'
       WRITE(2,*)'*          ANALISIS DE RETICULAS PLANAS         *'
       WRITE(2,*)'*                                               *'
       WRITE(2,*)'*                ( R E T 2 D )                  *'
       WRITE(2,*)'*                                               *'
       WRITE(2,*)'*                                               *'
       WRITE(2,*)'*************************************************'
c
c     ***********************************************************
c      LECTURA DE DATOS GENERALES
```

```
c
c       Variables empleadas
c
c       NB  = NUMERO DE BARRAS
c       NU  = NUMERO DE NUDOS ( con FIX, FIY, DZ )
c       NAP = NUMERO DE APOYOS
c
        READ (1,*)NB,NU,NAP
C 15     FORMAT(//3I5)
c
c      ***********************************************************
c       CONTADORES AUXILIARES
c
        nnu=NU+NAP
        nuu=3*NU
        nun=nuu+1
c
c      ***********************************************************
c       LECTURA DE COORDENADAS DE NUDOS Y FUERZAS EN LOS MISMOS ( MX, MY, FZ )
c       LOS NUDOS SE NUMERAN PRIMERO QUE LOS APOYOS
c
        DO 200 I=1,NNU
         READ(1,*)X(I),Y(I),K(3*I-2,nun),K(3*I-1,nun),K(3*I,nun)
 200    CONTINUE
C  35    FORMAT(5F10.4)
c
c      ***********************************************************
c       GENERACION DE LA MATRIZ DE CONTINUIDAD [ A ] DE CADA BARRA Y
c       ENSAMBLE DE SU PARTICIPACION A LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
c
c        Barrido de elementos
c
         DO 250 IB=1,NB
           Write(2,78)ib
  78       format(/' barra ',i5/)
C
C        Lectura de propiedades ( E,I,G,J) y conectividades ( A,B ) de la barra
C
           READ(1,*)E,IY,G,JJ,IIN,IFI
C  25       FORMAT(4F10.2,2I5)
C
c        Longitud y cosenos directores de la barra
c
            L=((x(ifi)-x(iin))**2+(y(ifi)-y(iin))**2)**.5
            ux=(x(ifi)-x(iin))/L
            uy=(y(ifi)-y(iin))/L
c
C        Matriz de rigidez diagonal de la barra
C
         R(1)=2*E*Iy/(L)
         R(2)=2*E*Iy/(L)
         R(3)=2*E*Iy/(L)
         R(4)=G*JJ/L
c
c        El extremo A de la barra, es nudo !
c
          IF(IIN.LE.NU)THEN
            a(1,1)=-uy
            a(1,2)=ux
            a(1,3)=-1/L
            a(2,1)=-uy
            a(2,2)=ux
            a(2,3)=-2/L
            a(3,1)=0
            a(3,2)=0
            a(3,3)=-1/L
            a(4,1)=-ux
            a(4,2)=-uy
            a(4,3)=0
c
c        Producto [AT][K][A]
c
            DO 565 I=1,3
             DO 585 J=1,3
              DO 505 M=1,4
```

```
      K(3*Iin-3+i,3*Iin-3+j)=K(3*Iin-3+i,3*Iin-3+j)+a(M,i)*a(M,j)*R(M)
 505        CONTINUE
 585       CONTINUE
 565      CONTINUE
        ENDIF
c
c       El extremo B de la barra, es nudo !
c
         IF(IFI.LE.NU)THEN
           a(1,4)=0
           a(1,5)=0
           a(1,6)=1/L
           a(2,4)=-uy
           a(2,5)=ux
           a(2,6)=2/L
           a(3,4)=-uy
           a(3,5)=ux
           a(3,6)=1/L
           a(4,4)=ux
           a(4,5)=uy
           a(4,6)=0
c
c       Producto [AT][K][A]
c
           DO 555 I=1,6
            DO 655 J=1,6
             DO 755 M=1,4
      K(3*Ifi-6+i,3*Ifi-6+j)=K(3*Ifi-6+i,3*Ifi-6+j)+a(M,i)*a(M,j)*R(M)
 755         CONTINUE
 655        CONTINUE
 555       CONTINUE
        ENDIF
c
c       A y B son nudos
c        Producto [AT][K][A]
         IF((IIN.LE.NU).and.(IFI.le.nu))THEN
           DO 515 I=1,3
            DO 615 J=4,6
             DO 715 M=1,4
      K(3*Iin-3+i,3*Ifi-6+j)=K(3*Iin-3+i,3*Ifi-6+j)+a(M,i)*a(M,j)*R(M)
 715         CONTINUE
 615        CONTINUE
 515       CONTINUE
c
            DO 2515 I=1,3
           DO 2615 J=4,6
            DO 2715 M=1,4
      K(3*Ifi-6+j,3*Iin-3+i)=K(3*Ifi-6+j,3*Iin-3+i)+a(M,i)*a(M,j)*R(M)
 2715        CONTINUE
 2615       CONTINUE
 2515      CONTINUE
        ENDIF
c
c        Imprime A
           write(2,22)
 22         format('Matriz de Continuidad [A]'/)
           WRITE(2,39)((a(i,j),j=1,6),i=1,4)
 39         FORMAT(6F10.4)
c
C        Termina el ciclo del barrido y limpia la matriz de continuidad [ A ]
          DO 320 I=1,4
           DO 340 J=1,3*nu
             a(I,J)=0
 340       CONTINUE
 320      CONTINUE
C
 250    CONTINUE
c
c       Hace simetrica la matriz [ K ]
c
          DO 267 I=1,6
           DO 287 J=1,6
              K(J,I)=K(I,J)
 287       CONTINUE
 267      CONTINUE
```

```
c
c       Impresion de la matriz de rigidez global [ K ]
c
        write(2,23)
 23     format(//'Matriz Golbal de Rigideces [ K ]'//)
        WRITE(2,37)((K(I,J),j=1,NUU),i=1,NUU)
 37     format(6f10.4)
c
c        SOLUCION DEL SISTEMA POR GAUSS-JORDAN
c
        N=NUU
c
         DO 146 ZZ=1,N
          DO 144 I=1,N
            DO 150 J=N+1,ZZ,-1
              IF (I.EQ.ZZ) GOTO 144
               IF (K(ZZ,ZZ).EQ.0) THEN
c
                DO 132 Q=ZZ+1,N
                 IF (K(Q,ZZ).NE.0) THEN
                   DO 134 QQ=1,N+1
                     W=K(Q,QQ)
                     K(Q,QQ)=K(ZZ,QQ)
                     K(ZZ,QQ)=W
 134                CONTINUE
                  GOTO 142
                 ENDIF
 132              CONTINUE

                  WRITE(*,*)'EL SISTEMA ES INDETERMINADO'
                  STOP
               ENDIF
c
 142           K(I,J)=K(I,J)+K(ZZ,J)*(-K(I,ZZ))/K(ZZ,ZZ)
c
 150        CONTINUE
 144      CONTINUE
 146    CONTINUE
c
         DO 128 I=1,N
           K(I,N+1)=K(I,N+1)/K(I,I)
 128     CONTINUE
c
c       IMPRIME LOS DESPLAZAMIENTOS DE LOS NUDOS
c
        write(2,47)
 47     format(//'Desplazamientos de los nudos :'//)
        DO 600 I=1,NU
         WRITE(2,*)I,'FHIX',K(3*I-2,N+1)
         WRITE(2,*)I,'FHIY',K(3*I-1,N+1)
         WRITE(2,*)I,'DZ',K(3*I,N+1)
 600    CONTINUE
c
c
c       Calculo de deformaciones y fuerzas sobre las barras

        REWIND 1
c
        READ (1,*)NB,NU,NAP
c
c       ***************************************************************
c       CONTADORES AUXILIARES
c
        nnu=NU+NAP
        nuu=3*NU
        nun=nuu+1
c
c       ***************************************************************
c       LECTURA DE COORDENADAS DE NUDOS Y FUERZAS EN LOS MISMOS ( MX, MY, FZ )
c       LOS NUDOS SE NUMERAN PRIMERO QUE LOS APOYOS
c
        DO 2002 I=1,NNU
         READ(1,*)X(I),Y(I)
 2002    CONTINUE
c
```

```
      READ(1,*)X(I),Y(I)
 2002 CONTINUE
c
c     ***************************************************************
c     GENERACION DE LA MATRIZ DE CONTINUIDAD [ A ] DE CADA BARRA Y
c     ENSAMBLE DE SU PARTICIPACION A LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL
c
c      Barrido de elementos
c
       DO 1250 IB=1,NB
         Write(2,782)ib
  782     format(/' barra ',I5/)
C
C      Lectura de propiedades ( E,I,G,J) y conectividades ( A,B ) de la barra
C
         READ(1,*)E,IY,G,JJ,IIN,IFI
C
c      Longitud y cosenos directores de la barra
c
          L=((x(IfI)-x(Iin))**2+(y(IfI)-y(Iin))**2)**.5
          ux=(x(IfI)-x(Iin))/L
          uy=(y(IfI)-y(Iin))/L
c
C      Matriz de rigidez diagonal de la barra
C
       R(1)=2*E*Iy/(L)
       R(2)=2*E*Iy/(L)
       R(3)=2*E*Iy/(L)
       R(4)=G*JJ/L
c
c      El extremo A de la barra, es nudo !
c
        IF(IIN.LE.NU)THEN
          a(1,1)=-uy
          a(1,2)=ux
          a(1,3)=-1/L
          a(2,1)=-uy
          a(2,2)=ux
          a(2,3)=-2/L
          a(3,1)=0
          a(3,2)=0
          a(3,3)=-1/L
          a(4,1)=-ux
          a(4,2)=-uy
          a(4,3)=0
C      Identifica los desplazamientos en el nudo A de la barra
        DO 1650 I=1,3
          DAB(I)=K(3*IIN-3+I,NUN)
 1650   CONTINUE
       ENDIF
c
c      El extremo B de la barra, es nudo !
c
        IF(IFI.LE.NU)THEN
          a(1,4)=0
          a(1,5)=0
          a(1,6)=1/L
          a(2,4)=-uy
          a(2,5)=ux
          a(2,6)=2/L
          a(3,4)=-uy
          a(3,5)=ux
          a(3,6)=1/L
          a(4,4)=ux
          a(4,5)=uy
          a(4,6)=0
C      Identifica los desplazamientos en el nudo B de la barra
          DO 1550 I=4,6
            DAB(I)=K(3*IFI-6+I,NUN)
 1550     CONTINUE
        ENDIF
c
          WRITE(2,192)(DAB(j),j=1,6)
  192     FORMAT(' DESPLAZAMIENTOS EN A Y B ', 6F10.4)
c      Producto {e}= [A]{d}
```

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

```
c
       DO 8000 I=1,4
        DO 8001 J=1,6
         DEF(I)=DEF(I)+A(I,J)*DAB(J)
8001    CONTINUE
8000   CONTINUE
C
c      Producto (p)= (k)(e) ( Elementos mecánicos )
C
       DO 8002 I=1,4
        P(I)=R(I)*DEF(I)
8002   CONTINUE
C
        MA=P(1)+P(2)
        MB=P(2)+P(3)
        MT=P(4)
C
          write(2,32)
 32       format('DEFORMACIONES : '/)
          WRITE(2,126)(DEF(j),j=1,4)
 126       FORMAT(/4F10.4/)
C
      write(2,33)MA,MB,MT
 33   format(' ELEMENTOS MECANICOS '//,'MA: ',F10.3/,'MB: ',F10.3/,
     *'MT: ',F10.3/)
C     LIMPIA DEFORMACIONES Y DESPLAZAMIENTOS
       DO 2345 J=1,4
         DEF(j)=0.0
 2345  CONTINUE
       DO 1345 J=1,6
         DAB(j)=0.0
 1345  CONTINUE
C
1250     CONTINUE
End
```


III.7 PROGRAMA ARMA2DGR.

Fue diseñado para mostrar gráficamenete la interpretación de resultados del programa de armaduras planas "ARMA2D".

```
REM limpia la pantalla

CLS

REM Entrada de archivo

INPUT "Archivo de datos (estructura):", InFile$
REM INPUT "Archivo de salida:", OutFile$

REM archivo de salida

OPEN InFile$ FOR INPUT AS #3
REM OPEN OutFile$ FOR OUTPUT AS #2
OPEN "salida" FOR OUTPUT AS #2

REM abre archivo origen

    INPUT "Archivo de salida del arma2d:"; n$
    OPEN n$ FOR INPUT AS #1

    REM entrada de datos

    INPUT #3, nb, nn, na

    LET nna = nn + na

    DIM x(100)
```

```
DIM y(100)
DIM fx(100)
DIM fy(100)
DIM mz(100)
DIM mx(100)
DIM my(100)
DIM mfx(100)
DIM mfy(100)
DIM dx(100)
DIM dy(100)

FOR i = 1 TO nna STEP 1
INPUT #3, x(i), y(i), fx(i), fy(i)
NEXT i

REM declara el tamaño de las matrices de datos

DIM e(100)
DIM a(100)
DIM ni(100)
DIM nf(100)
DIM fa(100)

FOR j = 1 TO nb STEP 1
INPUT #3, e(j), a(j), ni(j), nf(j)
NEXT j

REM éxito en la entrada de archivos

FOR j = 1 TO 4 STEP 1
SOUND 4666, 2
SOUND 2333, 1.5
NEXT j

REM impresión en el archivo de salida

PRINT #2, "                    Programa Arma2dgr "
PRINT #2, " "
PRINT #2, "                 Interfaz gráfica de Arma2d "
PRINT #2, " "
PRINT #2, "         David Delgado, Alfonso Islas, Gonzalo Paz "
PRINT #2, " "
PRINT #2, "Barras = ", nb
PRINT #2, "Nudos = ", nn
PRINT #2, "Apoyos = ", na
PRINT #2, " "

FOR k = 1 TO nna
PRINT #2, "Coordenada x ", k, " =", x(k)
PRINT #2, "Coordenada y ", k, " =", y(k)
PRINT #2, "Fuerza x ", k, " =", fx(k)
PRINT #2, "Fuerza y ", k, " =", fy(k)
PRINT #2, " "
NEXT k

FOR k = 1 TO nb
PRINT #2, "Barra ", k
PRINT #2, "Nudo inicial ", k, " =", ni(k)
PRINT #2, "Nudo final ", k, " =", nf(k)
PRINT #2, " "
NEXT k

PRINT #2, " "

REM busca la palabra desplazamientos

DO WHILE NOT EOF(1)

REM comienza leyendo las lineas del archivo de resultados

LINE INPUT #1, lineIn$

REM elimina los espacios en blanco

lineIn$ = LTRIM$(RTRIM$(lineIn$))
```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

```
REM Busca desplazamientos

IF lineIn$ = "Desplazamientos de los nudos :" THEN

LINE INPUT #1, lineIn$
LINE INPUT #1, lineIn$
FOR j = 1 TO nn STEP 1
INPUT #1, a1, a2
INPUT #1, a3, a4

LET dx(j) = (a2)
LET dy(j) = (a4)
PRINT #2, " "
PRINT #2, "Nudo ", j
PRINT #2, "dx ", j, "=", dx(j)
PRINT #2, "dy ", j, "=", dy(j)

NEXT j
ELSE

      REM Busca fuerzas en barras

      IF lineIn$ = "RESULTADOS FINALES :" THEN

      LINE INPUT #1, lineIn$
      LINE INPUT #1, lineIn$
      LINE INPUT #1, lineIn$
      LINE INPUT #1, lineIn$
      LINE INPUT #1, lineIn$

      FOR j = 1 TO nb STEP 1
      INPUT #1, b1, b2, b3

      LET fa(j) = (b3)
      PRINT #2, " "
      PRINT #2, "Fuerza axial en barra ", j, "=", fa(j)
      PRINT #2, " "
      NEXT j

      ELSE
      END IF

END IF

REM  PRINT #2, lineIn$

LOOP

    REM declaración del tipo de gráfico

SCREEN 9

REM máxima coordenada en x

LET mx = 0
FOR i = 1 TO nna STEP 1
 FOR j = 1 TO nna STEP 1
 IF i <> j THEN
  IF x(i) > x(j) THEN
   IF mx < x(i) THEN
     mx = x(i)
    ELSE
    END IF
  ELSE
  END IF
 ELSE
 END IF
 NEXT j
NEXT i

PRINT #2, "Máxima x = ", mx
PRINT #2, " "

REM máxima coordenada en y
```

```
LET my = 0
FOR i = 1 TO nna STEP 1
 FOR j = 1 TO nna STEP 1
 IF i <> j THEN
  IF y(i) > y(j) THEN
   IF my < y(i) THEN
     my = y(i)
    ELSE
    END IF
  ELSE
  END IF
 ELSE
 END IF
 NEXT j
NEXT i

 PRINT #2, "Máxima y = ", my
 PRINT #2, " "

IF mx = 0 THEN
 mx = 1
 ELSE
 END IF

IF my = 0 THEN
 my = 1
 ELSE
 END IF

REM dibujo de las barras

 REM cálculo del factor de escala

    LET esx = 450 / mx
    LET esy = 230 / my

    IF esx < esy THEN
     es = esx
     ELSE
     es = esy
    END IF

 REM máxima fuerza en x

 LET mfx = 0
 FOR i = 1 TO nna STEP 1
  FOR j = 1 TO nna STEP 1
  IF i <> j THEN
   IF ABS(fx(i)) > ABS(fx(j)) THEN
    IF mfx < ABS(fx(i)) THEN
      mfx = ABS(fx(i))
     ELSE
     END IF
   ELSE
   END IF
  ELSE
  END IF
  NEXT j
 NEXT i

 PRINT #2, "Máxima fuerza en x = ", mfx
 PRINT #2, " "

 REM máxima fuerza en y

 LET mfy = 0
 FOR i = 1 TO nna STEP 1
  FOR j = 1 TO nna STEP 1
  IF i <> j THEN
   IF ABS(fy(i)) > ABS(fy(j)) THEN
    IF mfy < ABS(fy(i)) THEN
      mfy = ABS(fy(i))
     ELSE
     END IF
```

```
   ELSE
   END IF
  ELSE
  END IF
  NEXT j
NEXT i

PRINT #2, "Máxima fuerza en y = ", mfy
PRINT #2, " "

REM máxima fuerza axial

LET mfa = 0
FOR i = 1 TO nb STEP 1
 FOR j = 1 TO nb STEP 1
 IF i <> j THEN
  IF ABS(fa(i)) > ABS(fa(j)) THEN
   IF mfa < ABS(fa(i)) THEN
     mfa = ABS(fa(i))
    ELSE
    END IF
  ELSE
  END IF
 ELSE
 END IF
 NEXT j
NEXT i

PRINT #2, "Maxima fuerza axial = ", mfa
PRINT #2, " "

REM máxima desplazamiento en x

LET mdx = 0
FOR i = 1 TO nna STEP 1
 FOR j = 1 TO nna STEP 1
 IF i <> j THEN
  IF ABS(dx(i)) > ABS(dx(j)) THEN
   IF mdx < ABS(dx(i)) THEN
     mdx = ABS(dx(i))
    ELSE
    END IF
  ELSE
  END IF
 ELSE
 END IF
 NEXT j
NEXT i

PRINT #2, "Máximo desplazamiento en x = ", mdx
PRINT #2, " "

REM máxima fuerza en y

LET mdy = 0
FOR i = 1 TO nna STEP 1
 FOR j = 1 TO nna STEP 1
 IF i <> j THEN
  IF ABS(dy(i)) > ABS(dy(j)) THEN
   IF mdy < ABS(dy(i)) THEN
     mdy = ABS(dy(i))
    ELSE
    END IF
  ELSE
  END IF
 ELSE
 END IF
 NEXT j
NEXT i

PRINT #2, "Máximo desplazamiento en y = ", mdy
PRINT #2, " "

REM dibujo de las barras
```

```
REM cálculo del factor de escala

   IF mfx <> 0 THEN
   LET esfx = 45 / mfx
   ELSE
   esfx = 1
   END IF

   IF mfy <> 0 THEN
   LET esfy = 30 / mfy
   ELSE
   esfy = 1
   END IF

     IF mfa <> 0 THEN
     LET esfa = 10 / mfa
     ELSE
     esfa = 1
     END IF

   IF esfx < esfy THEN
    esf = esfx
    ELSE
    esf = esfy
   END IF

   REM factor de escala para desplazamientos

   IF mdx <> 0 THEN
   LET esdx = 45 / mdx
   ELSE
   esdx = 1
   END IF

   IF mdy <> 0 THEN
   LET esdy = 30 / mdy
   ELSE
   esdy = 1
   END IF


   IF esdx < esdy THEN
    esd = esdx
    ELSE
    esd = esdy
   END IF

  REM multiplica por el factor de escala

   FOR i = 1 TO nna STEP 1
   x(i) = es * x(i)
   y(i) = es * y(i)
   fx(i) = esf * fx(i)
   fy(i) = esf * fy(i)
   NEXT i

  REM desplazamientos a escala

   FOR i = 1 TO nna STEP 1
   dx(i) = esd * dx(i)
   dy(i) = esd * dy(i)
   NEXT i

  REM esfuerzos a escala

   FOR i = 1 TO nb STEP 1
   fa(i) = esfa * fa(i)
   NEXT i

 REM limites de la ventana de interfaz

   WINDOW (-140, -70)-(500, 280)
```

```
REM marco de la interfaz gráfica

    LINE (-50, -55)-(490, 265), 10, B

REM Leyendas en pantalla

    PRINT "  "
    PRINT " Interfaz"
    PRINT " gráfica: "
    PRINT " "
    PRINT " "
    PRINT " Arma2dgr"
    PRINT " "
    PRINT " "
    PRINT " "
    PRINT "Armaduras"
    PRINT "  Planas"
    PRINT " "
    PRINT " "
    PRINT " "
    PRINT "  DEP-FI"
    PRINT "   UNAM "
    PRINT " Abr/99"
    PRINT " "
    PRINT " "
    PRINT " "
    PRINT " Delgado"
    PRINT "   Islas"
    PRINT "     Paz"

REM dibujo de la estructura

    REM PRINT "                                                    Estructura"
    FOR i = 1 TO nb
    LINE (x(ni(i)), y(ni(i)))-(x(nf(i)), y(nf(i))), 7
    NEXT i

REM Dibuja los apoyos

    FOR i = (nn + 1) TO nna STEP 1
    CIRCLE (x(i), y(i)), 3
    NEXT i

REM detiene la primera pantalla con la geometria

  SLEEP 0

REM Dibuja las fuerzas en x

    REM PRINT "                                                         Cargas"
    FOR i = 1 TO nn STEP 1
    IF fx(i) <> 0 THEN
    LINE ((x(i) - fx(i)), y(i))-(x(i), y(i)), 14
    LINE ((x(i) - .09654 * fx(i)), (y(i) + .02588 * fx(i)))-(x(i), y(i)), 14
    LINE ((x(i) - .09654 * fx(i)), (y(i) - .02588 * fx(i)))-(x(i), y(i)), 14
    END IF
    NEXT i

REM dibuja las fuerzas en y

    REM PRINT "                                                         Cargas"
    FOR i = 1 TO nn STEP 1
    IF fy(i) <> 0 THEN
    LINE ((x(i)), y(i) - fy(i))-(x(i), y(i)), 14
    LINE ((x(i) + .02588 * fy(i)), y(i) - .09654 * fy(i))-(x(i), y(i)), 14
    LINE ((x(i) - .02588 * fy(i)), y(i) - .09654 * fy(i))-(x(i), y(i)), 14
    END IF
    NEXT i

REM dibuja ahora las fuerzas en y

    SLEEP 0
```

```
REM dibujo de la estructura deformada

     REM PRINT "                                              Estructura deformada"
     FOR i = 1 TO nb
     LINE (x(ni(i)) + dx(ni(i)), y(ni(i)) + dy(ni(i)))-(x(nf(i)) + dx(nf(i)),
y(nf(i)) + dy(nf(i))), 12
     NEXT i

REM detiene momentaneamente el programa

SLEEP 0

REM dibujo de los esfuerzos de la estructura

     REM PRINT "                                                         Esfuerzos"
     FOR i = 1 TO nb
      IF fa(i) >= 0 THEN
       REM LINE (x(ni(i)), y(ni(i)))-(x(nf(i)) + 01 * fa(i), y(nf(i)) + 01 * fa(i)),
11, B
       LINE (x(ni(i)), y(ni(i)))-(x(nf(i)), y(nf(i))), 11
      ELSE
      END IF
     NEXT i

     REM PRINT "                                                         Esfuerzos"
     FOR i = 1 TO nb
      IF fa(i) < 0 THEN
       REM LINE (x(ni(i)), y(ni(i)))-(x(nf(i)) + 01 * fa(i), y(nf(i)) + 01 * fa(i)),
9, B
       LINE (x(ni(i)), y(ni(i)))-(x(nf(i)), y(nf(i))), 9
      ELSE
      END IF
     NEXT i

REM detiene momentaneamente el programa

SLEEP 0

REM fin del programa

     END

  REM cierra archivo de entrada y de salida

CLOSE #1, #2

END
```


Este programa genera un archivo de texto llamado "SALIDA" en el cual el usuario verifica que los datos fueron proporcionados de manera adecuada.

CAPITULO IV.

PROGRAMACIÓN CON JAVA SCRIPT.

En la actualidad, la World Wide Web (WWW) es un medio para intercambiar información entre millones de personas, las cuales comparten textos, video, sonidos e imágenes, y cada vez son mas personas las que hacen páginas web interactivas. Las compañías intentan vender sus productos, los programadores producen programas de ayuda para el diseño, las universidades difunden sus investigaciones por medio de la WWW cuyo acceso se realiza por medio de aplicaciones de visualización.

IV.1 Lenguaje HTML.

HTML significa Hyper Text Markup Language y es el lenguaje utilizado para crear documentos en la WWW. Este lenguaje emplea comandos que permiten dar formato de salida a cualquier tipo de documento.

Casi todos los programas que interpretan páginas Web leen texto normal y corriente, pero la utilización del lenguaje HTML tiene muchas ventajas, como las ya mencionadas antes: incluir texto con efectos, imágenes, enlaces con otras páginas y direcciones electrónicas, aplicaciones multimedia, etc.

Cuando se creó este lenguaje se pensó en que fuera portable al cien por ciento, es decir, que pudiera ser llevado o visualizado independientemente del sistema operativo que gobernara la computadora. De esta manera, es factible crear una página HTML en una computadora personal con sistema operativo MS - DOS para luego ponerla en un servidor de HTML en una máquina bajo ambiente UNIX y que pueda ser vista por usuarios con equipo Macintosh con sistema operativo LINUX. Esta característica se debe a que todo lo que hay en la página es texto, caracteres ASCII, los cuales son interpretados por todos los tipos de sistemas operativos.

Al margen de todo esto hay una serie de aportaciones al lenguaje HTML realizadas por compañías ajenas al estándar que han creado sus propios comandos en HTML, sin embargo, se corre el peligro de que la página HTML no se vea bien en diferentes lectores de este lenguaje.

El desarrollo de documentos en HTML está teniendo mucho auge debido al crecimiento de la Internet, principal medio por el que se difunde este tipo de documentos mediante el acceso a los llamados Webs o servidores de HTML. Mediante estos servicios se pueden elaborar aplicaciones de todo tipo, desde bases de datos hasta aplicaciones multimedia.

Una de las herramientas que complementan al lenguaje HTML, es el Java Script, para ejecutar aplicaciones que interactuen con el usuario. A continuación se presenta una breve descripción sobre este lenguaje de programación.

IV.2 Empleo de Java Script.

El Java Script es un lenguaje de programación que corre bajo cualquier plataforma, diseñado para aplicaciones distribuidas en Internet. En la actualidad este lenguaje permite a los diseñadores Web, cambiar el contenido de una página en respuesta a las acciones del usuario, es decir, la información es dinámica y fácil de manejar.

Java Script es una herramienta en evolución, al igual que otras herramientas asociadas con Internet y la WWW, Java Script es un lenguaje potente, menos estricto que otros lenguajes de programación; es un Script (lenguaje de archivos de comandos). En realidad no existe aún una definición exacta de la expresión *lenguaje Script* o de archivo de comandos.

En muchos casos se utiliza para aludir a la posibilidad, integrada en diversas aplicaciones, de crear macros. También se habla con frecuencia de lenguajes scripts al tratar de la capacidad formal BASIC, integrada en las aplicaciones de tratamiento de textos, de hojas de cálculo y de multimedia. En principio se está pensando en un tipo de lenguaje de programación que, siendo sencillo y dotado de pocas reglas y preceptos, permita agregar pequeñas unidades funcionales a las aplicaciones o simplificar y automatizar la ejecución de las funciones. Hasta no hace mucho tiempo, las caracteristicas antes mencionadas del lenguaje Script habían sido desempeñadas por los macros que, en realidad, sólo eran una sucesión de diversos comandos o acciones,

Por la enorme popularidad alcanzada por el BASIC, basada en la sencillez de su lenguaje, y como consecuencia del crecimiento continuo de las exigencias demandadas a las macros, ha ido aumentado el deseo de disponer de un lenguaje de macros mucho más potente y versátil. Observando el transcurso de los hechos y teniendo en cuenta esta nueva posibilidad de ampliar las aplicaciones más populares surgió una categoría de software totalmente nueva y, al mismo tiempo, se abrió un nuevo mercado.

Los lenguajes script dotan a las aplicaciones de una importante y potente caracteristica, muy útil para los usuarios. Java Script amplia las capacidades de una página Web estándar, mucho más allá de sus posibilidades normales de utilización, pero no asi las del navegador. Un documento HTML, en el que se utilice Java Script ofrece más posibilidades que un documento HTML corriente.

Para obtener mas información en una página Web estándar, se pulsa con el ratón en un hipervínculo con lo que el servidor nos enviará un nuevo archivo. En las páginas con algo más de interactividad se llena un formulario, se transmite al servidor o se espera la correspondiente respuesta. En cualquier caso, el usuario tiene que esperar la respuesta del servidor o vincularse a una nueva página.

En las páginas ampliadas con Java Script, el código de Java Script está incorporado al código HTML. De esta forma, Java Script está en condiciones de suministrar inmediatamente nuevas informaciones mediante el establecimiento de la conexión con el servidor, una vez que la página HTML ya se transmitió con el código de Java Script.

Esta información puede estar formada por las entradas de usuario o encontrarse ya dispuesta para la consulta en un documento HTML.

El diseño de programas orientados a objetos presupone que tales programas constan de una colección de partes que hacen cosas diferentes de forma aislada y con rasgos posiblemente heredados, y no de una serie de instrucciones secuenciales que ejecutan determinadas tareas. Los objetos del mismo tipo se inscriben en clases. La diferencia entre los lenguajes orientados a objetos y los basados en objetos, radica en que los primeros ofrecen la posibilidad de definir objetos mientras que en el segundo sólo es una colección de estos. Estos objetos están, por tanto, integrados en el lenguaje.

Toda acción que se realiza en la página Web, es un evento, es decir, la pulsación sobre un botón, el movimiento del puntero del ratón cuando se carga una página o cuando se transmite un formulario, etc. Java Script está controlado por eventos, de forma que reaccionará ante la aparición de cualquier evento. El tipo de reacción dependerá de la forma en que se haya programado.

Java Script está diseñado para poder representar y manipular la información mediante el navegador, pero no es capaz de leer un archivo, ni de enviar datos al servidor o al ordenador del usuario. Esto significa que no se puede escribir un programa en Java Script, que lea un directorio en un ordenador o que lo borre. En cambio, si es posible crear un archivo de comandos que supervise y grabe la sesión del navegador, que acumule o guarde en un archivo lógico las páginas que ha visitado y lo que ha introducido. Para evitar los posibles problemas resultantes de todo ello, algunos navegadores desactivan la ejecución del código de Java Script. Esta configuración se encuentra en el menú de opciones de las fichas de seguridad.

Un programa que funciona bajo Windows no se puede ejecutar en un equipo Macintosh, sin embargo, Java Script no tiene dependencia funcional bajo ninguna plataforma y solo está vinculado al navegador que lo interpreta. Para Java Script resulta igual utilizar un navegador Netscape para Macintosh, para Windows o para UNIX, ya que se ejecuta en forma similar en las tres plataformas con excepción de algunas funciones.

Como cualquier otro lenguaje de programación, Java Script también establece vínculos. Estos vínculos o métodos manipulan la información con la ayuda de objetos. Con algunas excepciones, Java Script está limitado a operar con los objetos del navegador. Esto le permite crear nuevos documentos y modificar los formularios existentes. Puesto que Java Script trabaja con objetos del navegador, este lenguaje es fácil de aprender. El código maneja generalmente los elementos del lenguaje HTML.

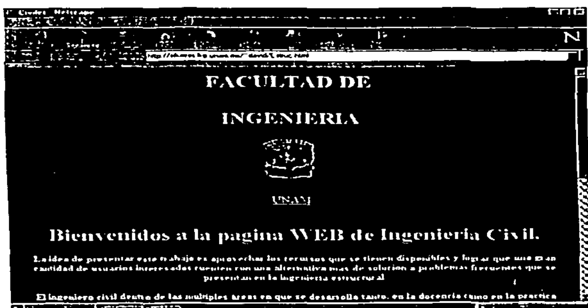
Con base en lo anterior, Java Script tiene limitantes importantes y actualmente no existen nuevas capacidades multimedia como el sonido o las imágenes. Para poder agregar estas posibilidades se tienen que ampliar las capacidades del navegador con plug ins o applets de Java. Sin embargo, estos programas no están siempre en condiciones de reconocer Java Script.

CAPITULO V.

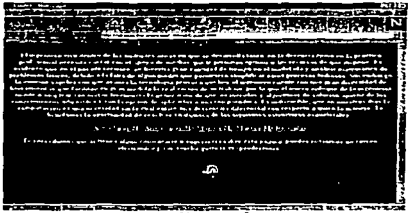
DESARROLLO E IMPLANTACIÓN DE LA INTERFASE EN LA INTERNET PARA LOS PROGRAMAS DE ANÁLISIS UTILIZANDO JAVA SCRIPT.

La interfase desarrollada para ejecutar los programas de análisis presentados en este trabajo puede ser vista desde la Internet al entrar a la página de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México. Consta de un conjunto de páginas ligadas entre sí, que interactuan con el usuario, brindándole la posibilidad de navegar de una página a otra en función del tipo de estructura que pretenda resolver. En la página principal se encuentra una breve descripción de la importancia que tiene aplicar herramientas de cómputo en la ingeniería estructural. Para utilizar los programas de análisis se selecciona el modelo estructural y se ingresa a una interfase que solicita la información requerida para la solución del problema. Las opciones que pueden seleccionarse son: Armaduras planas y espaciales, marcos planos y espaciales y retículas planas. Los resultados se muestran en una impresión que generan los programas.

A continuación se presentan las ventanas que forman la página principal de la interfase, a partir de la cual el usuario puede seleccionar el modelo de análisis requerido.

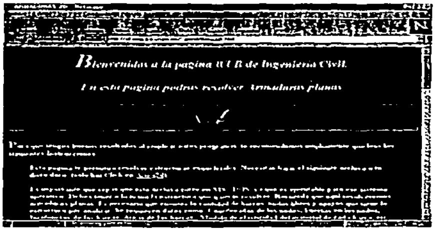


Ventana 1.

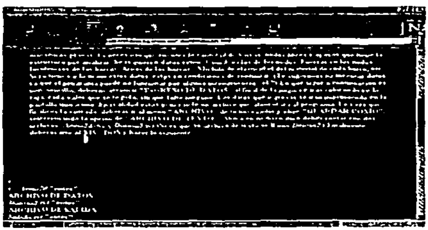


Ventana 2

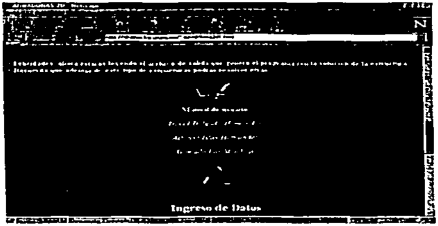
Si se activa la liga "*Armadura2d*" el usuario abrirá la siguiente página:



Ventana 3.

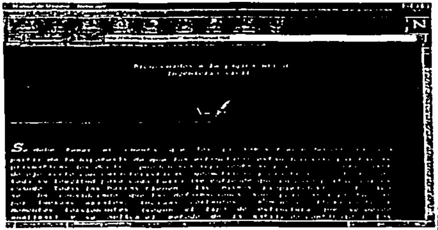


Ventana 4.

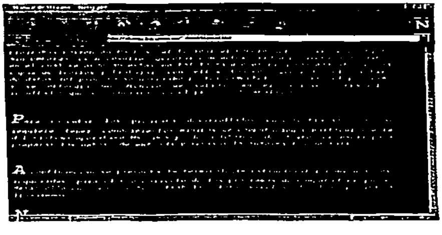


Ventana 5

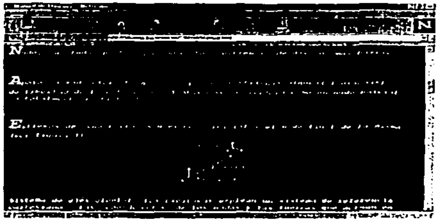
Si el usuario activa "*Manual de usuario*" llegará a:



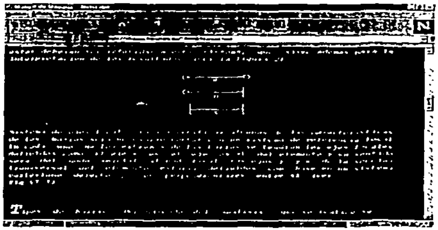
Ventana 6.



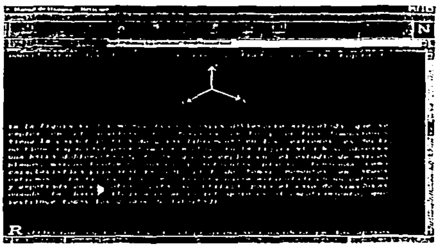
Ventana 7.



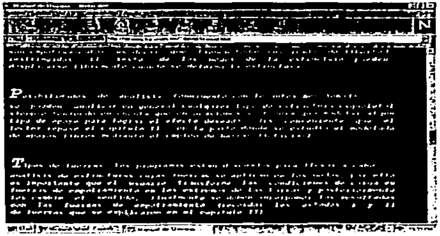
Ventana 8



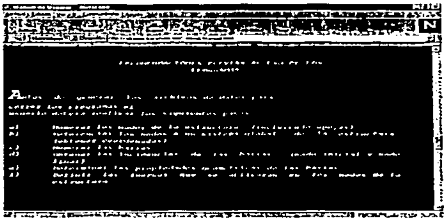
Ventana 9.



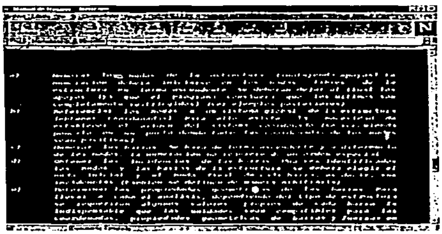
Ventana 10.



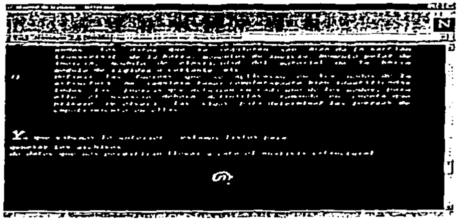
Ventana 11.



Ventana 12.

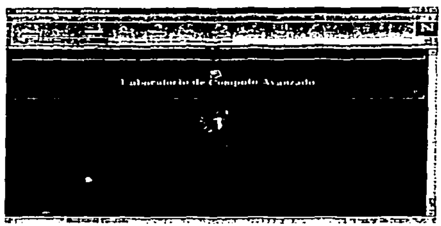


Ventana 13



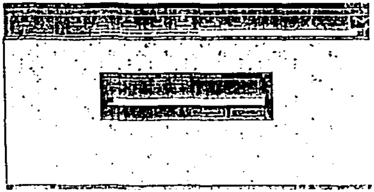
Ventana 14.

Ventana 15



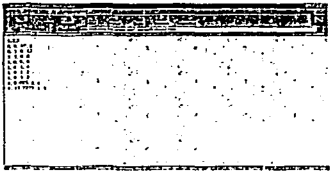
Ventana 16

Si el usuario seleccionara *"Ingreso de datos"* verá lo siguiente:



Ventana 17

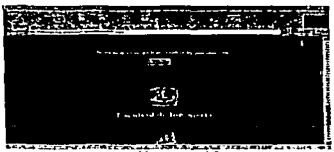
En la ventana 17 se introducen los datos requeridos por el programa. El usuario ve físicamente en la caja de entrada que información se va necesitando. Al terminar de ingresar las cantidades aparecerán en pantalla.



Ventana 18.

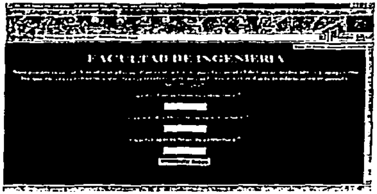
La ventana 18 es un archivo de entrada para Armaduras en dos dimensiones, con el formato especificado en los Manuales de Usuario descritos en el capítulo VI.

De forma alterna se puede resolver la estructura en Internet; estando en la página de Armaduras planas, el usuario deberá seleccionar el botón que le permita llevar a cabo esta operación:



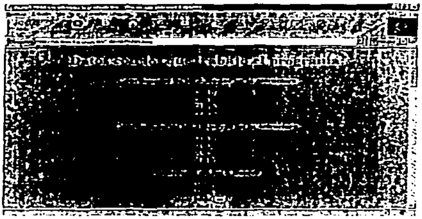
Ventana 19

Al activar el botón llegará a la Ventana 20:

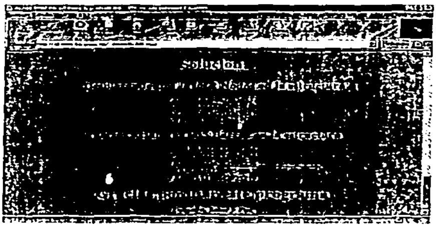


Ventana 20.

En esta última ventana, el usuario proporciona la información requerida. El programa realiza el análisis de la estructura y despliega los resultados como se muestra en las ventanas 21 y 22.



Ventana 21.



Ventana 22.

A continuación se presenta el código fuente de las páginas desarrolladas:

Código en lenguaje HTML para la interfase de la página principal.

```
<HTML>
<HEAD><TITLE>Civiles</TITLE>
<HEAD>
<BODY BACKGROUND="Entrada.jpg" BGCOLOR="FFFFf0" >
<CENTER>
<FORM ACTION=mailto:david@sorjuana.fi-p.unam.mx>
<FONT COLOR="#ffff00"  SIZE="5" FACE="Technical" ><P></P>
<P></P>
<P></P>

</FONT >
</FORM>
<FONT COLOR="FF0000" SIZE="4" >
<B><I><H1><P>
</P>FACULTAD DE <P>
</P>INGENIERIA</H1> </I></B> <P>
</P>
</FONT >
<A HREF=www.unam.mx"><FONT COLOR="FF0000" SIZE="4" >UNAM</FONT ></A>
<FONT COLOR="#ffff00" SIZE="4" >
<B><I><H1><P>
</P>Bienvenidos a la pagina WEB de Ingenieria Civil.</H1> </I></B> <P>
</P>
</FONT >

<B><H4><FONT COLOR="#00ff00"  >
La idea de presentar este trabajo es aprovechar los recursos
que se tienen disponibles y lograr que una gran cantidad de usuarios interesados
cuenten con una alternativa más de solución a problemas frecuentes que se
presentan en la ingenieria estructural.<P>
</P></B><P>El ingeniero civil dentro de las múltiples áreas en que se desarrolla
tanto, en la docencia como en la practica profesional necesita contar con el apoyo
de medios que le permitan optimizar los recursos de que dispone. Es evidente que
en el pasado reciente, se invertia gran cantidad de tiempo en el modelado y
análisis matemático de problemas fisicos, debido a la falta de algún medio que
permitiera simplificar estos procesos tediosos. Sin embargo la enorme rapidez con
que avanza la tecnologia  provoca que hoy el ingeniero cuente con una gran
diversidad de herramientas que facilitan en gran medida la realización de su
trabajo, por lo que el nuevo enfoque de la ingenieria tiende a emplear con mayor
frecuencia la generación de nuevos métodos y algoritmos de solución apartir de los
conocimientos adquiridos y con la opción de aplicarlos a una computadora. Es
indiscutible, que en nuestros dias la computación es una necesidad sin la cual
existe una desventaja diferencial con respecto a quien la maneja.
Te brindamos la oportunidad de resolver cualquiera de las siguientes estructuras
esqueletales:

/P>
<A HREF = "Arma2d1.html"><FONT COLOR="#FFf00">Armaduras 2D</FONT></A>
<A HREF = "Arma3d1.html"><FONT COLOR="#FFf00">Armaduras 3D</FONT></A>
<A HREF = "Mar2d1.html"><FONT COLOR="#FFf00">Marcos 2D</FONT></A>
<A HREF = "Mar3d1.html"><FONT COLOR="#FFf00">Marcos 3D</FONT></A>
<A HREF = "Ret2d1.html"><FONT COLOR="#FFf00">Reticulas</FONT></A>

</CENTER>

<P>
</P>
<CENTER></H4><B>
Te recordamos que si tienes algún comentario o sugerencia sobre esta pagina,
puedes enviarnos un correo electrónico y con mucho gusto te responderemos.
</B></CENTER>
<P>
</P>
<MENU><CENTER><BR><IMG SRC="Arroba.gif"><BR><BR>
<ALIGN="RIGHT"><LI><A HREF="mailto:alfonso@sikeiros.fi-p.unam.mx">
<FONT COLOR="#FF0000">alfonso@sikeiros.fi-p.unam.mx"</FONT></A><P></P>
</ALIGN>
<ALIGN="RIGHT"><LI><A HREF="mailto:david@sikeiros.fi-p.unam.mx">
```

```
<FONT COLOR="#FF0000">david@sikeiros.fi-p.unam.mx"</FONT></A><P></P>
</ALIGN>
<ALIGN="RIGHT"><LI><A HREF="mailto:gonzalo@sikeiros.fi-p.unam.mx">
<FONT COLOR="#FF0000">gonzalo@sikeiros.fi-p.unam.mx"</FONT></A><P></P>
</ALIGN>

</CENTER>
</MENU>
</BODY>
</HTML>
```

Se generaron cinco páginas secundarias, una para cada tipo de estructura. El código es el mismo para todas, solo cambia el nombre, por lo cual a continuación se presenta solo uno de ellos. (Armaduras planas)

Código en lenguaje HTML para la interfase de armaduras planas

```
<HTML>
<HEAD><TITLE>ARMADURAS 2D</TITLE>
<HEAD>
<BODY BACKGROUND="Sala.jpg">

<FORM ACTION="mailto:juan@sikeiros.fi-p.unam.mx">
<FONT COLOR="#E6E8FA"  SIZE="5"  FACE="Technical" >

</FONT >
</FORM><CENTER>
<FONT COLOR="#ffff00" SIZE="4" >
<B><I> Bienvenidos a la pagina WEB de Ingenieria Civil. <P></P>
En esta pagina podrás resolver Armaduras planas
<P></P>
</CENTER>

</I></B> <P>
</FONT >
</P><B><FONT COLOR="#E6E8FA"  >
Para que tengas buenos resultados al emplear estos programas, te recomendamos
ampliamente que leas las siguientes Instrucciones:<BR>
<P>
<BR><LI>Esta pagina te permitirá resolver estructuras esqueletales.
<BR><LI>Necesitas bajar el siguiente archivo  a tu disco duro, (solo haz Click
en <A HREF="Arma2d.exe" BGCOLOR="FF00FF"><FONT
COLOR="#ffff00">Arma2d</FONT></A>).
<BR><LI>Es importante que sepas que este archivo corre en MS - DOS, ya que es
ejecutable para ese sistema operativo.
<BR><LI>Debes tener a la mano la estructura que quieras resolver. Recuerda que
aqui resolveremos armaduras planas.
<BR><LI>Es necesario que cuentes la cantidad de barras, nodos libres y apoyos
que tiene la estructura por analizar.
<BR><LI>Se  requieren  datos  como:  Coordenadas  de  los  nodos,  Fuerzas  en  los
nodos, Incidencias de las barras, Areas de las barras
, Modulo de elasticidad del material de cada barra, etc.
<BR><LI>Si ya tienes a la mano estos datos, estas en condiciones de continuar.
(Te sugerimos no inventar datos, ya que el programa puede no funcionar por
alguna incongruencia.)
<BR><LI>Lo que sigue a continuación es muy sencillo, deberás accionar "INGRESO
DE DATOS" al final de la pagina e iras colocando en la caja, cada valor que se
te pida, sin que falte ninguno.
<BR><LI>Los datos que ingresas se irán imprimiendo en la pantalla uno a uno.
<BR><LI>En realidad estas generando un archivo que alimentara al programa.
<BR><LI>Una vez que finalices la entrada, deberás ir al menú "ARCHIVO" de tu
navegador y elige "GUARDAR COMO", seleccionando la opción de "ARCHIVO DE
TEXTO".
<BR><LI>Ahora en tu disco duro debes contar con dos archivos, <I>Arma2d.exe</I>
y <I> Datosa2.txt</I> (Si es que tu archivo de texto se llamo <I> Datoaa2</I> 1
<BR><LI>Finalmente deberás lite al MS - DOS  y hacer lo siguiente:<BR><BR><BR>
c:><BR>
c:><I><B>Arma2d</B></I>  "enter" <BR>
ARCHIVO DE DATOS:<BR>
```

```
<I><B>Datosa2.txt</B></I> "enter"  <BR>
ARCHIVO DE SALIDA:<BR>
<I><B>Salida.txt</B></I> "enter" <BR>
c:><BR>
c:><I><B>edit Salida.txt</B></I> "enter"  <BR><BR><BR>
</P>
<BR><LI>Felicidades, ahora estarás leyendo el archivo de salida que genero el
programa con la solución de la estructura.
<LI>Recuerda que además de este tipo de estructuras podrás resolver otros.
<P></P><P></P>
<CENTER>
</B><P></P>
<B><I>
David Delgado Hernández<P></P>
Alfonso Islas Hernández<P></P>
Gonzalo Paz Mendoza<P></P><P></P>
</B></I>
</B></I>
<A HREF = "Datosa2.html"><H3><FONT COLOR="#ffffff">Ingreso de Datos
</FONT></H3></A>
<HR SIZE=8>
<BR>
<BR>
<P>
Si así lo deseas, podrás resolver tu armadura en
<A HREF = "Ar2d4.html"><H3><FONT COLOR="#ffff00">Internet</FONT></H3></A>.
</P>
</CENTER>
</BODY>
</HTML>
```

A continuación se presenta el código fuente de la página con el programa en Java Script que resuelve Armaduras planas.

Código en lenguaje HTML y Java Script para la interfase de armaduras planas

```
<HTML>
<BODY BACKGROUND="Entrada.jpg" BGCOLOR = "#0000FF">
<FONT COLOR="#ffff00">
<FORM>
<SCRIPT LANGUAGE="JavaScript">
function calcular(form)
    {
    /*DEFINICION DE VARIABLES Y ARREGLOS*/

    var r = 0;
    var q = 0;
    var temp = 0;
    var tempo = 0;
    var nNNU = 0;
    var nNUN = 0;
    var nNUU = 0;
    var i = 0;
    var DX = 0;
    var DY = 0;

    vX = new Array(100);
    vY = new Array(100);
    k = new Array();
    R = new Array();

    for(var i=1;i<=100;i++){

        k[i] = new Array();

    }
```

```
    for(var i=1;i<=100;i++){

        R[i] = new Array();

    }

    vE = new Array(100);
    vAR = new Array(100);
    vP = new Array(100);
    vL = new Array(100);
    vIIN = new Array(100);
    vIFI = new Array(100);
    vDE = new Array(100);
    mA = new Array();

    for(var i=1;i<=100;i++){

        mA[i] = new Array();

    }

    EAL = new Array(100);

/* formulas de NNN y UUU */

    nNNU = eval(form.NU.value) + eval(form.NAP.value);
    nNUU = 2*eval(form.NU.value) ;
    nNRU = eval(nNUU) + 1;

/* fin de formulas NNN y UUU */

/*LECTURA DE DATOS DE COORDENADAS DE LOS NODOS*/

for(var i=1;i<=nNNU;i++)
{

vX[i] = prompt('COORDENADA X' + i ,'');

vY[i] = prompt('COORDENADA Y' + i ,'');

}

/*LECTURA DE DATOS EN LAS BARRAS*/


var bara = eval(form.NB.value);
var nas = eval(form.NAP.value);
var num = eval(form.NU.value);


for (var i=1;i<=eval(form.NB.value);i++)
{

vE[i] = prompt('MODULO DE ELASTICIDAD DE LA BARRA ' + i ,'');

vAR[i] = prompt('AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL DE LA BARRA ' + i ,'');

vIIN[i] = prompt('NODO INICIAL DE LA BARRA ' + i ,'');

vIFI[i] = prompt('NODO FINAL DE LA BARRA ' + i ,'');

    DX=((eval(vX[eval(vIFI[i])])-eval(vX[eval(vIIN[i])])));
    DY=((eval(vY[eval(vIFI[i])])-eval(vY[eval(vIIN[i])])));

    vL[i]= Math.sqrt(Math.pow(eval(DX),2)+Math.pow(eval(DY),2));

    EAL[i] = eval(vE[i])*eval(vAR[i])/eval(vL[i]);

    var mel =2*vIIN[i]-1;
    var mal =2*vIIN[i];
    var mil =2*vIFI[i]-1;
```

```
   var mol =2*vIF1[i];

   if(vIIN[i]<=eval(form.NU.value))
   {
        mA[i][eval(mel)]=-eval(DX)/eval(vL[i]);
        mA[i][eval(mal)]=-eval(DY)/eval(vL[i]);

   /*FIN DE IF*/
   }

   if(vIF[i]<=eval(form.NU.value))
   {
        mA[i][eval(mil)]=eval(DX)/eval(vL[i]);
        mA[i][eval(mol)]=eval(DY)/eval(vL[i]);

   }
}// fin de for

   for(i=1;i<=eval(form.NB.value);i++)
   {
        for(j=1;j<=2*eval(form.NU.value);j++)
        {

             if(mA[i][j])
             {}else
             {
                  mA[i][j] = eval(0);

             }

        }

   }

var aux;
var aux1;
var aux2;

for(var i=1;i<=10n;i++){

          k[i] = new Array();

    }

    for(var i=1;i<=nNUU;i++)
    {
         for(var j = 1;j<=nNUU;j++)
         {

              k[i][j] = 0;

              for(var m=1;m <=eval(form.NB.value);m++)
              {

         k[i][j]= k[eval(i)][eval(j)] +
eval(mA[eval(m)][eval(i)])*eval(mA[eval(m)][eval(j)])*eval(EAL[eval(m)]);

              }
         }

    }// terminación de los 3 for.

 // fin de ver matriz k

 for(var i=1;i<=form.NU.value;i++)
 {
     var mel = 2*i-1;
     var mal = 2*i;

 k[eval(mel)][eval(nNUN)] = eval(prompt('Fuerza en direccion X del nodo' + i
 ,''));
```

```
k[eval(mal)][eval(nNUU)] = eval(prompt('Fuerza en direccion Y del nodo' + i
,''));

}

/* fin de pide ***************/

// GAUSS***************

var quel = 2*eval(form.NU.value);

for(var i=1;i<=quel;i++)
{
    temp = eval(k[eval(i)][eval(i)]);

    for(var j=1;j<=eval(quel)+1;j++)
    {
    var milo = 1 / eval(temp);

        k[i][j] = eval(k[eval(i)][eval(j)])*eval(milo);

    }// fin for Secundario  A

    for(var q=1;q<=eval(quel);q++)
    {
        if(q!=i)
        {
            tempo = eval(k[eval(q)][eval(i)]);

            for(r=1;r<=eval(quel)+1;r++)
            {

            k[q][r] = eval(k[eval(q)][eval(r)])-
eval(tempo)*eval(k[eval(i)][eval(r)]);

            }// fin de for TERCERO

        }// fin de if

    }// fin for Secundario  B

}// fin  FOR PRINCIPAL.

// fin de GAUSS *******

/* fin de ciclo  -----------*/

/****  vector de deformaciones ****************/

    for(i=1;i<=form.NB.value;i++)
    {
        vDE[i]=0;
        for(j=1;j<=nNUU;j++)
        {
            vDE[i]=eval(vDE[i]) + eval(mA[i][j])*eval(k[j][nNUU+1]);
        }

    } /* fin de for */

/******** fin de vector de deform ***********/

    for(i=1;i<=eval(form.NB.value);i++)
    {
        vP[i] = eval(vDE[i])*eval(EAL[i]);

    }

/*VERIFICANDO LA ENTRADA DE DATOS*/

var nus = eval(form.NU.value);
```

```
document.write('<CENTER>'+"<H1>" + "Datos con los que trabajo el programa:"+
"</H1>"+'</CENTER>');
document.write('<CENTER>'+"  "+'<BR>'+ '</CENTER>');


document.write('<CENTER>'+"<H3>" + " Coordenadas de los " + eval(nus)  + "
Nodos en la estructura</H3>"+'</CENTER>');

for(var i=1;i<=eval(nus);i++) {
      var au = 2*eval(i) - 1
    var ae = 2*eval(i)
    var ua = 1 + 2*eval(nus)

    document.write('<CENTER>'+"X" +  i + " = " + vX[eval(i)] + " , " +
'<BR>'+'</CENTER>');
      document.write('<CENTER>'+"Y" +  i + " = " + vY[eval(i)]+ " , " +
'<BR>'+'</CENTER>');

}

document.write('<CENTER>'+"<H3>" + " Coordenadas de los " + eval(nus)  + "
Apoyos en la estructura</H3>"+'</CENTER>');

var nusu = 1 + eval(nus)
var nasa = eval(nus) + eval(nas)

 for(var i=eval(nusu);i<=eval(nasa);i++) {
       var au = 2*eval(i) - 1
    var ae = 2*eval(i)
    var ua = 1 + 2*eval(nus)

    document.write('<CENTER>'+"X" +  i + " = " + vX[eval(i)] + " , " +
'<BR>'+'</CENTER>');
      document.write('<CENTER>'+"Y" +  i + " = " + vY[eval(i)]+ " , " +
'<BR>'+'</CENTER>');

}

document.write('<CENTER>'+"<H3>" + " Propiedades de las " + eval(bars)  + "
Barras "+"</H3>"+'</CENTER>');

var nusu = 1 + eval(nus)
var nasa = eval(nus) + eval(nas)

for(var i=1;i<=eval(bars);i++) {
       var au = 2*eval(i) - 1
    var ae = 2*eval(i)
    var ua = 1 + 2*eval(nus)

    document.write('<CENTER>'+"E" +  i + " = " + vE[eval(i)] + " , " +
'</CENTER>');
      document.write('<CENTER>'+"A" +  i + " = " + vAR[eval(i)]+ " , "
+'</CENTER>');
    document.write('<CENTER>'+"Nodo inicial" +  i + " = " + vIIN[eval(i)] + " ,
" +'</CENTER>');
      document.write('<CENTER>'+"Nodo final" +  i + " = " + vIFI[eval(i)]+ " ,
" + '<BR>'+'</CENTER>');
      document.write('<CENTER>'+"   " + '<BR>'+'</CENTER>');
    }

//var nus = eval(form.NU.value);

document.write('<CENTER>'+"<H3>" + " Matriz de
continuidad"+"</H3>"+'</CENTER>');

for(var i=1;i<=eval(bars);i++) {

    document.write('<CENTER>' + "Barra  "+ i + '</CENTER>');

     for(var j=1;j<=2*eval(nus);j++) {

        document.write('<CENTER>' + mA[eval(i)][eval(j)] + '</CENTER>');
```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

```
    }

    document.write('<CENTER>' + '<BR>' + '</CENTER>');

}

    document.write('<CENTER>' +"<H3>"  + "Matriz diagonal de rigidez  "
+"</H3>" +'</CENTER>');

    for(var j=1;j<= eval(bars);j++) {

        document.write('<CENTER>' + eval(EAL[eval(j)]) + '</CENTER>');

    }
document.write('<CENTER>' + "<H1>" + " Solucion:" + "</H1>" + '</CENTER>');
document.write('<CENTER>'+"  "+'<BR>'+ '</CENTER>');


document.write('<CENTER>'+  "<H2>" + " Desplazamientos en los " + eval(nus) +
" Nudos en la estructura</H2>"+'</CENTER>');

for(var i=1;i<=eval(nus);i++) {
        var au = 2*eval(i) - 1
    var av = 2*eval(i)
    var as = 1 + 2*eval(nus)

    document.write('<CENTER>'+ " D X  " +  i + " = " + k[eval(au)][eval(as)] +
"  " + '<BR>'+'</CENTER>');
      document.write('<CENTER>'+ " D Y  " +  i + " = " + k[eval(av)][eval(as)]
+ "  " + '<BR>'+'</CENTER>');

}

var nbs = eval(bars);

document.write('<CENTER>'+  "<H2>" + " Fuerzas axiales en las" +  eval(nbs)+ "
Barras en la estructura</H2>"+'</CENTER>');

for(var i=1;i<=eval(nbs);i++) {

    document.write('<CENTER>'+ " F " +  i + " = " + vP[eval(i)]+ "  " +
'<BR>'+'</CENTER>');

}

document.write('<CENTER>'+"<H1>" + "Gracias por usar este
programa"+'</CENTER>');
document.write('<CENTER>'+"<H3>" +"<I>"+ "Delgado, Islas y
Paz"+"</I>"+'</CENTER>');


//*<INPUT TYPE="text"NAME="RESULTADO"SIZE=200>*//

}/*FIN DE FUNCION*/

</SCRIPT><P></P>
<B>
<BR>
<CENTER>
<H1>FACULTAD DE INGENIERIA</H1>
<P>Aqui puedes resolver Armaduras planas. Basta con que coloques la cantidad de
barras, nudos libres y apoyos con los que cuenta la estructura que deseas
resolver, acciones el boton y vayas dando la información requerida. Sencillo
¿no? <P></p>

<P> Cuantas barras tiene tu estructura ?.<P></p>
<INPUT TYPE="text"NAME="NB"SIZE=15 BGCOLOR="#FF0000">
<P> Cuantos nodos libres tiene tu estructura ?.<P></p>
<INPUT TYPE="text"NAME="NU"SIZE=15>
<P> Cuantos apoyos tiene tu estructura ?.<P></p>
<INPUT TYPE="text"NAME="NAP"SIZE=15><FONT  COLOR="#000000">
<BR><BR><INPUT TYPE="button"  VALUE="INTRODUCE DATOS"
ONCLICK="calcular(this.form)">
```

```
</FONT>
<BR>
</FONT><BR>
<FONT COLOR="#FF0000"><BR><H4>Agradecimiento especial para:<BR><B><I>Armando
Duran Correa</I></B></H4></FONT>
<A HREF="armandus10@hotmail.com"><IMG SRC="Arroba.gif" BORDER=0></A>
<P>
<P></p>
</CENTER>
</FORM>
</BODY>
</HTML>
```

Es importante aclarar, que en el momento en el que se escribió este trabajo las páginas tenían estos códigos. Debido a la velocidad con la que evolucionan las herramientas de cómputo, existe la posibilidad de que estos sufran modificaciones para optimizar su rendimiento.

CAPITULO VI.

APLICACIONES Y MANUALES DE USUARIO.

Manual de usuario.

Se presenta a continuación el total de variables a emplear en los programas realizados, siendo todas ellas comunes a cualquier análisis, tanto en dos como en tres dimensiones.

- NB: Número de barras que tiene la estructura a analizar.
- NN: Número de nudos o articulaciones libres.
- NA: Número de apoyos.
- NAY: Número de nudos auxiliares para orientar las barras (Solo en MAR3D).
- NM: Número de materiales a emplear en la estructura (Solo en MAR3D).
- NU= NN+NA: Como un contador.
- KC=0 Si no se requiere la ayuda de NAY (Estructura tridimensional con ejes locales de las barras paralelos a los ejes globales de la estructura).
- KC:=1 Si se requiere la ayuda de NAY (Estructura tridimensional con ejes locales de las barras no paralelos a los ejes globales de la estructura).
- X(i): Coordenada en X del nudo *i* referida a sistema global.
- Y(i): Coordenada en Y del nudo *i* referida a sistema global.
- Z(i): Coordenada en Z del nudo *i* referida a sistema global.

- FX(i): Fuerza actuante en dirección X en el nudo *i*.
- FY(i): Fuerza actuante en dirección Y en el nudo *i*.
- FZ(i): Fuerza actuante en dirección Z en el nudo *i*.
- MX(i): Momento actuante en dirección X en el nudo *i*.
- MY(i): Momento actuante en dirección Y en el nudo *i*.
- MZ(i): Momento actuante en dirección Z en el nudo *i*.

- E(j): Módulo de elasticidad del material de la barra *j*.
- A(j): Area transversal de la sección de la barra *j*.
- IY(j): Momento de inercia con respecto al eje Y local de la barra *j*.
- IZ(j): Momento de inercia con respecto al eje Z local de la barra *j*.
- G(j): Módulo de rigidez al cortante de la barra *j*.
- J(j): Momento polar de inercia de la barra *j*.

- NI(j): Nudo inicial de la barra *j*.
- NF(j): Nudo final de la barra *j*.

Se debe tener en cuenta que los programas fueron desarrollados a partir de la hipótesis de que las estructuras están formadas por barras prismáticas (es decir, pueden ser representadas por su eje centroidal) de eje recto con caracteristicas geométricas y elásticas constantes en toda su longitud para cada barra (se entiende que un caso particular es cuando todas las barras tienen las mismas propiedades).

También se ha considerado que las deformaciones son pequeñas y producidas por fuerzas axiales, fuerzas cortantes, momentos flexionantes y momentos torsionantes (según el tipo de estructura que se desee analizar) y se aplica el método de la matriz de continuidad

Los programas corren en MS – DOS, al teclear el nombre del archivo ejecutable Sin embargo, es necesario generar con anterioridad un archivo de datos, en el cual se ordenan estos de tal forma que el programa ejecutable sea capaz de leerlos y trabajar con ellos

Una vez generado el archivo de datos (el proceso se describe posteriormente), se corre el programa y se obtendrá un archivo de salida, en el cual se imprimen los resultados que se generaron en el proceso de análisis.

Para ejecutar los programas desarrollados en este trabajo, solo se requiere tener conocimientos mínimos de computación y particularmente del sistema operativo MS – DOS y de editores de texto en ASCII para preparar los datos de entrada y revisar la información de salida.

A continuación se presenta la terminología estructural y convenciones requeridas para el uso correcto de los programas de computadora que se desarrollaron en este trabajo.

Para efectos de los programas llamaremos:

- ✓ Nudo, a todo punto que una los extremos de dos o más barras.
- ✓ Apoyo, a todo elemento que es capaz de restringir alguno(s) grado(s) de libertad de la estructura. También se considera como un nudo parcial o totalmente restringido.
- ✓ Extremos de una barra, son el nudo inicial y el nudo final de la misma. (ver figura VI.1).

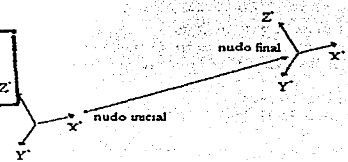


Fig VI.1 Ejes locales de una barra.

- ✓ Sistema de ejes global. Los programas emplean un sistema de referencia cartesiano.

- ✓ Las coordenadas de los nudos y las fuerzas que actúan en estos deberán ser referidas a este sistema, que sirve además para la interpretación de los resultados. (ver la figura VI.2).

- ✓ Sistema de ejes local. Para identificar algunas de las características de las barras será necesario contar con un sistema de referencia local. En cada uno de los extremos de las barras se tendrán los ejes locales definidos como:

- ✓ El eje x' es el eje axial del elemento y su sentido será del nudo inicial al nudo final.

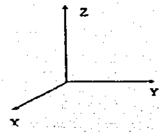


Fig. VI.2 Sistema global de referencia

- ✓ Los ejes y' y z' de la sección transversal del elemento estarán definidos con base en un sistema cartesiano derecho y son perpendiculares entre si. (ver figura VI.1).

- ✓ Tipos de barras. Dependiendo del análisis que se realice se consideraran los tipos de barras mostrados en la figura (VI.3).

- ✓ En la figura (VI.3.a) se muestra una barra doblemente articulada, que se emplea en el análisis de Armaduras en dos y en tres dimensiones; tiene la característica de girar libremente en los extremos, es decir, no tiene capacidad para tomar momentos.

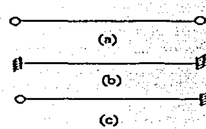


Fig. VI.3 Tipos de barras

- ✓ En la figura (VI.3.b) se observa una barra doblemente empotrada, que se emplea en el estudio de marcos planos, marcos tridimensionales y retículas planas, teniendo como característica principal la capacidad de tomar momentos en ambos extremos.

- ✓ La figura (VI.3.c) muestra una barra articulada en un extremo y empotrada en el otro, esta se utiliza para el caso de armaduras cuando la barra llega a un apoyo (El apoyo es el empotramiento, que restringe todos los grados de libertad).

- ✓ Restricciones en los nudos. En el programa se considera que los apoyos son empotramientos, es decir, que tienen todos sus grados de libertad restringidos. El resto de los nudos de la estructura pueden desplazarse libremente cuando se deforma la estructura.

- ✓ Posibilidades de análisis. Congruente con lo antes mencionado, se pueden analizar en general cualquier tipo de estructura esqueletal, siempre teniendo en cuenta que en ocasiones se tendrá que modelar algún tipo de apoyo para lograr el efecto deseado. (Es conveniente que el lector repase el capitulo II, en la parte donde se estudio el modelado de apoyos libres mediante el empleo de barras auxiliares).

- ✓ Tipos de fuerzas. Los programas están diseñados para llevar a cabo análisis de estructuras cuyas fuerzas se aplican en los nudos, por ello es importante que el usuario transforme las condiciones de carga en fuerzas de empotramiento en los extremos de las barras y posteriormente les cambie el sentido, finalmente se deben superponer los resultados con las fuerzas de empotramiento (recordar los estados I y II de fuerzas que se explicaron en el capítulo II).

Recomendaciones previas al uso de los programas.

Antes de generar los archivos de datos para correr los programas el usuario deberá realizar los siguientes pasos:

a) Numerar los nudos de la estructura (incluyendo apoyos).
b) Referenciar los nudos a un sistema global de la estructura (obtener coordenadas)
c) Identificar el número de barras en la estructura.
d) Obtener las incidencias de las barras (nudo inicial y nudo final).
e) Determinar las propiedades geométricas de las barras.
f) Definir las fuerzas que se aplicaran en los nudos de la estructura.

a) Numerar los nudos de la estructura (incluyendo apoyos).

La numeración deberá iniciarse en los nudos libres de la estructura en forma ascendente; se deberán dejar al final los apoyos (ya que el programa considera que los últimos son completamente restringidos, ver ejemplos posteriores)

b) Referenciar los nudos a un sistema global de la estructura (obtener coordenadas).

Para ello existe la necesidad de establecer el origen del sistema coordenado (se recomienda ponerlo en un punto donde todas las coordenadas de los nudos sean positivas).

c) Identificar el número de barras en la estructura.

La numeración de las barras será consecutiva y de manera aleatoria se podrán identificar todos los elementos en la estructura.

d) Obtener las incidencias de las barras.

Una vez identificados los nudos y las barras de la estructura, se deberá indicar el nudo inicial y el nudo final de cada barra, es decir, sus incidencias (también se definen de manera arbitraria).

e) Determinar las propiedades geométricas de las barras.

Para llevar a cabo el análisis, dependiendo del tipo de modelo estructural, se requerirán datos específicos para calcular las diferentes rigideces de los elementos que lo forman. Es indispensable que las unidades sean compatibles para las coordenadas, propiedades geométricas de barras y fuerzas en nudos. El elemento estructural más general utilizado en los programas requiere de la siguiente información: Area axial de la sección transversal de la barra, momentos de inercia respecto a los ejes locales de la sección transversal, momento polar de inercia, módulo de elasticidad del material y módulo de rigidez a cortante. En el algoritmo de análisis de los programas, no se considera la deformación por coeficiente de cortante

f) Definir las fuerzas que se aplicarán en los nudos de la estructura.

Se requiere tener identificadas todas las fuerzas que actuarán en la estructura, pudiéndose presentar cargas en los nudos, en los elementos o una combinación de ambas. En el primero de los casos se resuelve directamente el sistema $\{F\} = [K]\{d\}$. En el segundo caso se tienen que trasladar las cargas en los elementos hacia los nudos mediante la obtención de fuerzas de empotramiento y utilizar la superposición de dos estados de carga para encontrar la solución como se discutió en el capitulo II. En el tercer caso el vector de fuerzas $\{F\}$ sobre la estructura se compone de fuerzas aplicadas directamente en los nudos y fuerzas efectivas producto de las correspondientes de empotramiento.

Se sugiere tabular toda esta información para un manejo más eficiente de la misma, que nos permita formar de manera confiable los archivos de datos para análisis.

A continuación se describe, para cada modelo estructural, la manera en que la información es solicitada para construir los archivos de datos.

Es importante mencionar que, para todos los programas desarrollados en este trabajo, la información se captura en un editor de textos ASCII y el formato de entrada, de acuerdo con las variables definidas previamente, es libre, por lo tanto, solo se requiere separar los datos por medio de uno o más espacios, o bien, por medio de una coma. Además entre linea y linea del archivo generado no deben existir renglones en blanco.

1.- Armaduras planas.

Nombre del programa: ARMA2D.

NB	NN	NA	
X(1)	Y(1)	FX(1)	FY(1)
X(2)	Y(2)	FX(2)	FY(2)
X(3)	Y(3)	FX(3)	FY(3)
⋮	⋮	⋮	⋮
X(i)	Y(i)	FX(i)	FY(i)
⋮	⋮	⋮	⋮
X(NU)	Y(NU)	FX(NU)	FY(NU)
E(1)	A(1)	NI(1)	NF(1)
E(2)	A(2)	NI(2)	NF(2)
E(3)	A(3)	NI(3)	NF(3)
⋮	⋮	⋮	⋮
E(j)	A(j)	NI(j)	NF(j)
⋮	⋮	⋮	⋮
E(NB)	A(NB)	NI(NB)	NF(NB)

Donde *(i)* denota el número de nudo, y *(j)* denota el número de barra.

2.- Armaduras tridimensionales.

Nombre del programa: ARMA3D.

NB	NN	NA			
X(1)	Y(1)	Z(1)	FX(1)	FY(1)	FZ(1)
X(2)	Y(2)	Z(2)	FX(2)	FY(2)	FZ(2)
X(3)	Y(3)	Z(3)	FX(3)	FY(3)	FZ(3)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
X(i)	Y(i)	Z(i)	FX(i)	FY(i)	FZ(i)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
X(NU)	Y(NU)	Z(NU)	FX(NU)	FY(NU)	FZ(NU)
E(1)	A(1)	NI(1)	NF(1)		
E(2)	A(2)	NI(2)	NF(2)		
E(3)	A(3)	NI(3)	NF(3)		
⋮	⋮	⋮	⋮		
E(j)	A(j)	NI(j)	NF(j)		
⋮	⋮	⋮	⋮		
E(NB)	A(NB)	NI(NB)	NF(NB)		

3.- Marcos planos.

Nombre del programa: MAR2Dc y MAR2Dr.

NB	NN	NA		
X(1)	Y(1)	FX(1)	FY(1)	MZ(1)
X(2)	Y(2)	FX(2)	FY(2)	MZ(2)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
X(i)	Y(i)	FX(i)	FY(i)	MZ(i)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
X(NU)	Y(NU)	FX(NU)	FY(NU)	MZ(NU)
E(1)	IY(1)	A(1)	NI(1)	NF(1)
E(2)	IY(2)	A(2)	NI(2)	NF(2)
E(3)	IY(3)	A(3)	NI(3)	NF(3)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
E(j)	IY(j)	A(j)	NI(j)	NF(j)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
E(NB)	IY(NB)	A(NB)	NI(NB)	NF(NB)

4.- Retículas planas.

Nombre del programa: RET2D.

NB	NN	NA			
X(1)	Y(1)	MX(1)	MY(1)	FZ(1)	
X(2)	Y(2)	MX(2)	MY(2)	FZ(2)	
X(3)	Y(3)	MX(3)	MY(3)	FZ(3)	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
X(i)	Y(i)	MX(i)	MY(i)	FZ(i)	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
X(NU)	Y(NU)	MX(NU)	MY(NU)	FZ(NU)	
E(1)	IY(1)	G(1)	J(1)	NI(1)	NF(1)
E(2)	IY(2)	G(2)	J(2)	NI(2)	NF(2)
E(3)	IY(3)	G(3)	J(3)	NI(3)	NF(3)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
E(j)	IY(j)	G(j)	J(j)	NI(j)	NF(j)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
E(NB)	IY(NB)	G(NB)	J(NB)	NI(NB)	NF(NB)

5.- Marcos Tridimensionales.

Nombre del programa: MAR3D.

NB	NN	NA	NAY	NM	KC			
X(1)	Y(1)	Z(1)	FX(1)	FY(1)	FZ(1)	MX(1)	MY(1)	MZ(1)
X(2)	Y(2)	Z(2)	FX(2)	FY(2)	FZ(2)	MX(2)	MY(2)	MZ(2)
X(3)	Y(3)	Z(3)	FX(3)	FY(3)	FZ(3)	MX(3)	MY(3)	MZ(3)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
X(i)	Y(i)	Z(i)	FX(i)	FY(i)	FZ(i)	MX(i)	MY(i)	MZ(i)
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
X(NU)	Y(NU)	Z(NU)	FX(NU)	FY(NU)	FZ(NU)	MX(NU)	MY(NU)	MZ(NU)
E(1)	A(1)	IY(1)	IZ(1)	G(1)	J(1)			
E(2)	A(2)	IY(2)	IZ(2)	G(2)	J(2)			
E(3)	A(3)	IY(3)	IZ(3)	G(3)	J(3)			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
E(j)	A(j)	IY(j)	IZ(j)	G(j)	J(j)			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮			
E(NB)	A(NB)	IY(NB)	IZ(NB)	G(NB)	J(NB)			
NI(1)	NF(1)	NM(1)	NAY(1)					
NI(2)	NF(2)	NM(2)	NAY(2)					
NI(3)	NF(3)	NM(3)	NAY(3)					
⋮	⋮	⋮	⋮					
NI(j)	NF(j)	NM(j)	NAY(j)					
⋮	⋮	⋮	⋮					
NI(NB)	NF(NB)	NM(NB)	NAY(1)					

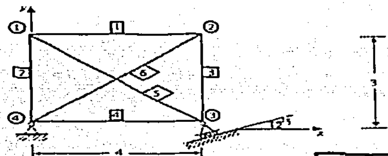
Ejemplos de aplicación en el modelado de estructuras esqueletales planas y espaciales.

Se presentan a continuación, ejemplos de aplicación para cada uno de los programas mostrados anteriormente. En todos los casos se tiene en primera instancia el archivo de entrada, el archivo de salida (pueden llamarse de cualquier forma, por ejemplo "ENTRADA" y "SALIDA" respectivamente), y finalmente se presenta el archivo de resultados, que muestra los elementos mecánicos y los desplazamientos en los nudos de la estructura

Los programas desarrollados en este trabajo fueron verificados con programas comerciales como el SAP90 (Structural Analisys Program 1990), empleando modelos estructurales más complejos que los presentados en este capítulo para fines de ilustración.

Ejemplo 1.

En la figura (VI.4) se muestra una armadura plana compuesta de cinco barras, dos nudos libres y dos apoyos, uno fijo y otro con posibilidad de desplazarse sobre un plano inclinado.



Unidades en toneladas y metros.

Fig. VI.4 Ejemplo de Armadura plana

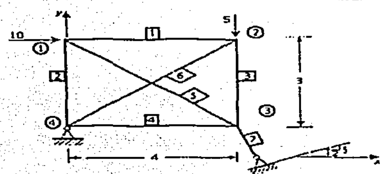


Fig. VI.5 Modelación del apoyo inclinado mediante una barra auxiliar.

a) Solución con el programa ARMA2D.

Como se explicó en el capitulo II, en la sección correspondiente a Armaduras planas, el apoyo inclinado, se puede modelar como se indica en la figura (VI.5), es decir, se coloca una barra de rigidez axial muy grande perpendicular al plano de deslizamiento del apoyo que restrinja el desplazamiento del nudo fuera de este plano.

En seguida, se presenta el archivo de entrada requerido para el análisis del modelo estructural, formado con base en la metodología establecida al inicio del presente capitulo.

Archivo de entrada:

```
7       3       2
0       3       10      0
4       3       0       -5
4       0       0       0
0       0       0       0
4.05    -0.12   0       0
1       1       1       2
1       1       1       4
1       1       2       3
1       1       3       4
1       1       1       3
1       1       4       2
1       1000    3       5
```


El último renglón del archivo anterior, representa la barra que simula el apoyo móvil sobre el plano inclinado. A esta barra, se le proporcionó una área 1000 veces mayor que el área de las barras reales, para garantizar que no tendrá movimiento fuera del plano, esto es, por supuesto para desplazamientos pequeños.

El archivo de salida para este ejemplo es el siguiente:

```
*************************************************
*                                               *
*         ANALISIS DE ARMADURAS PLANAS          *
*               ( A R M A 2 D )                 *
*                                               *
*************************************************

Matriz de Continuidad [A]

  -1.0000      .0000    1.0000      .0000      .0000      .0000
    .0000    1.0000      .0000      .0000      .0000      .0000
    .0000      .0000      .0000    1.0000      .0000   -1.0000
    .0000      .0000      .0000      .0000    1.0000      .0000
   -.8000      .6000      .0000      .0000      .8000    -.6000
    .0000      .0000      .8000      .6000      .0000      .0000
    .0000      .0000      .0000      .0000    -.3846      .9231

Matriz de Rigideces [K]

    .3780    -.0960    -.2500      .0000    -.1280      .0960   10.0000
   -.0960     .4053      .0000      .0000      .0960    -.0720      .0000
   -.2500     .0000      .3780      .0960      .0000      .0000      .0000
    .0000     .0000      .0960      .4053      .0000    -.3333    -5.0000
   -.1280     .0960      .0000      .0000   111.1695  -273.1956      .0000
    .0960    -.0720      .0000     -.3333  -273.1956   655.8445      .0000
```

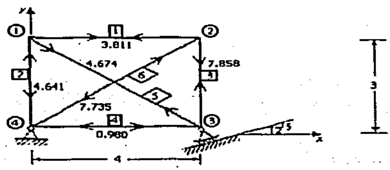
Desplazamientos de los nudos:

1DX	61.497780
1DY	13.923590
2DX	46.250830
2DY	-21.962160
3DX	3.919969
3DY	1.614249

RESULTADOS FINALES:

Barra	Deformación	Fuerza
1	-15.246950	-3.811737
2	13.923590	4.641198
3	-23.576410	-7.858804
4	3.919969	9.799922E-01
5	-38.676640	-7.735328
6	23.823360	4.764673
7	-1.760407E-02	-13.541590

En la figura (VI.6) se representan los resultados numéricos anteriores, tomando en cuenta la convención establecida para manejar fuerzas axiales de compresión y tensión. Las reacciones en los apoyos se calculan por equilibrio de fuerzas en los mismos.



Unidades en toneladas y metros.
Figura VI.6 Interpretación de resultados

b) Solución con el programa SAP90.

J O I N T   D I S P L A C E M E N T S

JOINT	U(X)	U(Y)
1	61.497714	13.923611
2	46.250800	-21.962230
3	3.919753	1.614159
4	.000000	.000000
5	.000000	.000000

F R A M E   E L E M E N T   F O R C E S

ELT ID	LOAD COND	AXIAL FORCE	DIST END1
1			
	1	-3.81	
2			
	1	4.64	
3			
	1	-7.86	

ELT ID	LOAD COND	AXIAL FORCE
4		
	1	.98
5		
	1	-7.74
6		
	1	4.76
7		
	1	-13.54

Se puede observar que los resultados obtenidos con ambos programas son muy aproximados y sus diferencias radican en el número de decimales que se manejan en los archivos de datos.

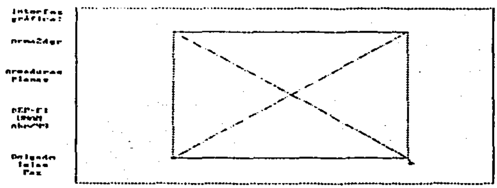
En el capitulo III se presentó el código fuente del programa ARMA2DGR el cual es una interfase para armaduras planas, en este capitulo se mostrará la aplicación de este programa.

El programa se ejecuta bajo ambiente MS-DOS; requiere el nombre del archivo de datos que modela la estructura y del archivo de salida del programa ARMA2D, es decir, el programa ARMA2DGR lee dos archivos, el de datos y el de resultados generado por ARMA2D, siendo este último el análisis de la estructura. Como resultado se obtienen cuatro gráficos en la pantalla.

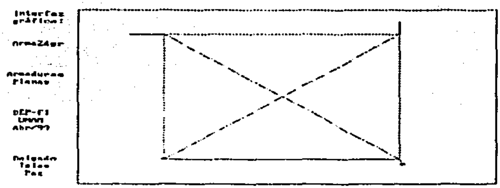
El primer gráfico muestra la geometría de la estructura, en el segundo aparecen las cargas que actúan en los nudos, el tercero representa la configuración de la estructura deformada y el último presenta el diagrama de esfuerzos en cada una de las barras. La pantalla permanecerá estática hasta que el usuario pulse alguna tecla.

Para el ejemplo analizado se presentan los gráficos generados por este programa.

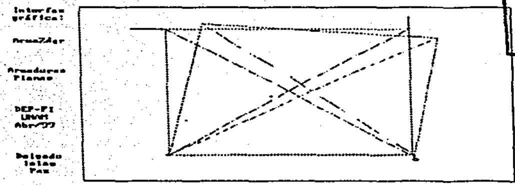
Geometria de la estructura:



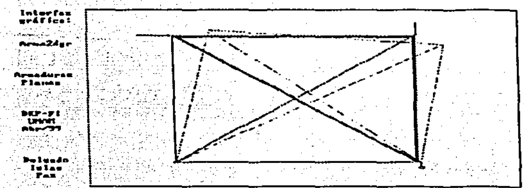
Fuerzas en los nudos:



Estructura deformada:



Esfuerzos en las barras:

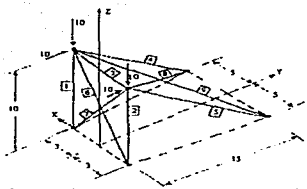


En este último gráfico, las líneas más gruesas indican compresión mientras que las líneas delgadas presentan tensión.

Ejemplo 2.

En la figura (VI.7) se muestra una armadura tridimensional, sometida a un estado de carga como el que se indica. El área de la sección transversal de los elementos que la forman es de 1 m^2 y tienen un módulo de elasticidad E= 1 t/ m^2. Obtenga los desplazamientos de los nudos y las fuerzas en las barras.

a) Solución con el programa ARMA3D.



Longitudes en metros y fuerzas en toneladas.
Fig. VI.7 Ejemplo de armadura tridimensional.

Archivo de entrada:

9	2	1			
3	0	10	0	10	-10
-3	0	10	0	10	-10
3	0	0	0	0	0
-3	0	0	0	0	0
5	15	0	0	0	0
-5	15	0	0	0	0
1	1	1	3		
1	1	2	4		
1	1	1	2		
1	1	1	5		
1	1	2	6		
1	1	1	1		
1	1	2	3		
1	1	2	5		
1	1	1	6		

El archivo generando por el programa es el siguiente:

```
**************************************************
*                                                *
*     ANALISIS DE ARMADURAS TRIDIMENSIONALES     *
*              ( A R M A 3 D )                   *
*                                                *
**************************************************
```

Matriz de Continuidad [A]

.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	1.0000
1.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000	.0000
-.1103	-.8270	.5513	.0000	.0000	.0000
.0000	.0000	.0000	.1103	-.8270	.5513
.5145	.0000	.8575	.0000	.0000	.0000
.0000	.0000	.0000	-.5145	.0000	.8575
.0000	.0000	.0000	-.4056	-.7605	.5070
.4056	-.7605	.5070	.0000	.0000	.0000

Matriz de Rigideces [K]

.20	-.01	.04	-.17	.00	.00	.00
-.01	.07	-.04	.00	.00	.00	10.00
.04	-.04	.19	.00	.00	.00	-10.00
-.17	.00	.00	.20	.01	-.04	.00
.00	.00	.00	.01	.07	-.04	10.00
.00	.00	.00	-.04	-.04	.19	-10.00

```
Desplazamientos de los nudos:

             1DX          66.553
             1DY        1355.1200
             1DZ        -219.85620
             2DX         -66.46557
             2DY        1355.91200
             2DZ        -219.85620

RESULTADOS FINALES:

          Barra        Deformación          Fuerza
            1          -219.85620          -2.198562
            2          -219.85620          -2.198562
            3           132.93110           2.215518
            4         -1249.76400          -6.890175
            5         -1249.76500          -6.890175
            6          -154.32890          -1.323359
            7          -154.32890          -1.323359
            8         -1115.64800          -5.656560
            9         -1115.64800          -5.656559
```

La interpretación es similar a la que se hizo en armaduras planas. Se recomienda al lector que la lleve a cabo.

b) Solución con el programa SAP90.

```
 J O I N T   D I S P L A C E M E N T S

 JOINT          U(X)          U(Y)          U(Z)
     1      66.46558    1355.91222    -219.85621
     2     -66.46558    1355.91222    -219.85621
     3       .000000       .000000       .000000
     4       .000000       .000000       .000000
     5       .000000       .000000       .000000
     6       .000000       .000000       .000000

F R A M E   E L E M E N T   F O R C E S

  ELT LOAD       AXIAL  DIST
  ID  COND       FORCE  ENDI
   1 ---------------------------
         1       -2.20
   2 ---------------------------
         1       -2.20
   3 ---------------------------
         1        2.22
   4 ---------------------------
         1       -6.89

  ELT LOAD       AXIAL  DIST
  ID  COND       FORCE  ENDI
   5 ---------------------------
         1       -6.89
   6 ---------------------------
         1       -1.32
   7 ---------------------------
         1       -1.32
   8 ---------------------------
         1       -5.66
   9 ---------------------------
         1       -5.66
```

Se observa que los resultados coinciden con los obtenidos del programa ARMA3D.

Ejemplo 3.

Continuando con la aplicación de los programas, se muestra enseguida el correspondiente a MAR2Dc por medio de la matriz de continuidad, aunque como ya se presentó antes, tanto para este programa como para el de MAR2Dr por la matriz de rigideces, aceptan el mismo archivo de entrada.

En la figura (VI.8) se presenta un pórtico formado por diez barras, seis nudos y tres apoyos. Las longitudes se indican en metros y las fuerzas en toneladas. Las propiedades de las barras son:

$E = 1 \text{ ton/m}^2$
$A = 1 \text{ m}^2$
$I = 1 \text{ m}^4$

El tipo de cargas aplicadas puede considerarse como el efecto de un sismo.

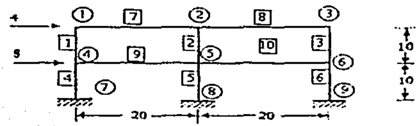


Fig. VI.8 Ejemplo de Marco plano.

a) Solución con el programa MAR2Dc.

El archivo de entrada resulta ser:

```
10   6    3
0    20   4    0    0
20   20   0    0    0
40   20   0    0    0
0    10   8    0    0
20   10   0    0    0
40   10   0    0    0
0    0    0    0    0
20   0    0    0    0
40   0    0    0    0
1    1    1    1    4
1    1    1    2    5
1    1    1    3    6
1    1    1    4    7
1    1    1    5    8
1    1    1    6    9
1    1    1    1    2
1    1    1    2    3
1    1    1    4    5
1    1    1    5    6
```

El archivo de salida es el siguiente:

```
*****************************************************
*                                                   *
*                                                   *
*        ANALISIS DE MARCOS PLANOS                  *
*                                                   *
*             ( M A R 2 D c )                       *
*                                                   *
*                                                   *
*****************************************************
```

barra 1

Matriz de Continuidad [A]

.1000	.0000	1.0000	-.1000	.0000	.0000
.2000	.0000	1.0000	-.2000	.0000	1.0000
.1000	.0000	.0000	-.1000	.0000	1.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000

barra 2

Matriz de Continuidad [A]

.1000	.0000	1.0000	-.1000	.0000	.0000
.2000	.0000	1.0000	-.2000	.0000	1.0000
.1000	.0000	.0000	-.1000	.0000	1.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000

barra 3

Matriz de Continuidad [A]

.1000	.0000	1.0000	-.1000	.0000	.0000
.2000	.0000	1.0000	-.2000	.0000	1.0000
.1000	.0000	.0000	-.1000	.0000	1.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000

barra 4

Matriz de Continuidad [A]

.1000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.2000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.1000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

barra 5

Matriz de Continuidad [A]

.1000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.2000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.1000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

barra 6

Matriz de Continuidad [A]

.1000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.2000	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.1000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

barra 7

Matriz de Continuidad [A]

.0000	.0500	1.0000	.0000	-.0500	.0000
.0000	.1000	1.0000	.0000	-.1000	1.0000
.0000	.0500	.0000	.0000	-.0500	1.0000
-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000

barra 8

Matriz de Continuidad [A]

.0000	.0500	1.0000	.0000	-.0500	.0000
.0000	.1000	1.0000	.0000	-.1000	1.0000
.0000	.0500	.0000	.0000	-.0500	1.0000
-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000

```
barra     9

Matriz de Continuidad [A]

      .0000     .0500    1.0000     .0000    -.0500     .0000
      .0000     .1000    1.0000     .0000    -.1000    1.0000
      .0000     .0500     .0000     .0000    -.0500    1.0000
    -1.0000     .0000     .0000    1.0000     .0000     .0000

 barra    10

Matriz de Continuidad [A]
      .0000     .0500    1.0000     .0000    -.0500     .0000
      .0000     .1000    1.0000     .0000    -.1000    1.0000
      .0000     .0500     .0000     .0000    -.0500    1.0000
    -1.0000     .0000     .0000    1.0000     .0000     .0000

Desplazamientos de los nudos:

        1Dx     1135.599000                    4Dx      659.846700
        1Dy       27.698920                    4Dy       21.225770
        1giro    -24.991310                    4giro    -59.343620
        2Dx     1068.577000                    5Dx      574.018900
        2Dy     7.583269E-01                   5Dy    -1.130898E-01
        2giro    -20.857060                    5giro    -41.141070
        3Dx     1045.852000                    6Dx      532.290300
        3Dy      -28.457250                    6Dy      -21.112690
        3giro    -31.028240                    6giro    -52.746340

barra     1

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B  1135.5980   27.6989  -24.9913  659.8467   21.2258  -59.3436

DEFORMACIONES :    22.5839   10.8154  -11.7685    6.4731

 ELEMENTOS MECANICOS

MA:      6.690
MB:      -.191
N:        .647

barra     2

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B  1068.5770     .7583  -20.8571  574.0189    -.1131  -41.1411

DEFORMACIONES :    28.5987   36.9134    8.3147     .8714

 ELEMENTOS MECANICOS

MA:     13.102
MB:      9.046
N:        .087

barra     3

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B  1045.8520  -28.4572  -31.0282  532.2903  -21.1127  -52.7463

DEFORMACIONES :    20.3279   18.9377   -1.3902   -7.3446

 ELEMENTOS MECANICOS

MA:      7.853
MB:      3.509
N:       -.734

barra     4

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B   659.8467   21.2258  -59.3436     .0000     .0000     .0000
```

```
DEFORMACIONES :       6.6411   72.6257   65.9847   21.2258

 ELEMENTOS MECANICOS

MA:       15.853
MB:       27.722
N:        2.123


barra     5

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B   574.0189    -.1131  -41.1411     .0000     .0000     .0000

DEFORMACIONES :     16.2608   73.6627   57.4019   -.1131

 ELEMENTOS MECANICOS

MA:       17.985
MB:       26.213
N:        -.011

barra     6

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B   532.2903  -21.1127  -52.7463     .0000     .0000     .0000

DEFORMACIONES :         .1827   53.7117   53.2290  -21.1127

 ELEMENTOS MECANICOS

MA:       10.839
MB:       21.388
N:       -2.111

barra     7

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B  1135.5980   27.6989  -24.0913 1068.5770     .7583  -20.8571

DEFORMACIONES :    -23.6443  -43.1543  -19.5100  -67.0215

 ELEMENTOS MECANICOS

MA:       -6.680
MB:       -6.266
N:       -3.351

barra     8

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B  1068.5770     .7583  -20.8571 1045.8520  -28.4572  -31.0282

DEFORMACIONES :    -19.3963  -48.9637  -29.5675  -22.7252

 ELEMENTOS MECANICOS

MA:       -6.836
MB:       -7.853
N:       -1.136

barra     9

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B   659.8467   21.2258  -59.3436  574.0189    -.1131  -41.1411

DEFORMACIONES :    -58.2767  -98.3508  -40.0741  -85.8278

 ELEMENTOS MECANICOS
MA:      -15.663
MB:      -13.842
N:       -4.291

barra     10

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B   574.0189    -.1131  -41.1411  532.2903  -21.1127  -52.7463
```

```
DEFORMACIONES :    -40.0911   -91.7875   -51.6964   -41.7286

 ELEMENTOS MECANICOS

MA:      -13.188
MB:      -14.348
N:       -2.086
```

En la figura (VI.8.b) se indican los resultados para la barra 10:

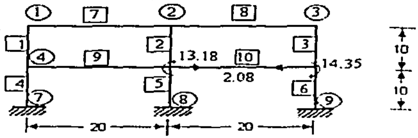


Fig. VI.8.b Resultados para la barra 10.

b) Solución con el programa SAP90.

J O I N T   D I S P L A C E M E N T S

LOAD CONDITION   1 -   DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
1	.1136E+04	.2770E+02	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	-.2499E+02
2	.1069E+04	.7583E+00	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	-.2086E+02
3	.1046E+04	-.2846E+02	.0000E+00	.0000E+00	.0000E+00	-.3103E+02
4	659.846394	21.225769	.000000	.000000	.000000	-59.343609
5	574.018662	-.113087	.000000	.000000	.000000	-41.141064
6	532.289944	-21.112681	.000000	.000000	.000000	-52.746327
7	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
8	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
9	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000

F R A M E   E L E M E N T   F O R C E S

ELT ID	LOAD COND	AXIAL FORCE	DIST ENDI	1-2 PLANE SHEAR	1-2 PLANE MOMENT
1					
	1	.65			
			.0	.65	-6.68
			10.0	.65	-.19
2					
	1	.09			
			.0	2.21	-13.10
			10.0	2.21	9.05
3					
	1	-.73			
			.0	1.14	-7.85
			10.0	1.14	3.51
4					
	1	2.12			
			.0	4.36	-15.95
			10.0	4.36	27.72
5					
	1	-.01			
			.0	4.42	-17.98
			10.0	4.42	26.21
6					
	1	-2.11			
			.0	3.22	-10.84
			10.0	3.22	21.39
7					
	1	-3.35			
			.0	-.65	6.68
			20.0	-.65	-6.27
8					
	1	-1.14			
			.0	-.73	6.84
			20.0	-.73	-7.85
9					
	1	-4.29			
			.0	-1.48	15.66
			20.0	-1.48	-13.81
10					
	1	-2.09			
			.0	-1.38	13.19
			20.0	-1.38	-14.35

Ejemplo 4.

En este ejemplo se resuelve el problema anterior (figura VI.8) utilizando el programa MAR2Dr, el cual esta basado en el algoritmo del método convencional por ensamble de submatrices de rigidez:

El archivo de entrada es igual al del ejemplo 3.

El archivo de salida es:

```
***********************************************
*                                             *
*         ANALISIS DE MARCOS PLANOS           *
*             ( M A R 2 D r )                 *
*                                             *
***********************************************

Desplazamientos de los nudos:

        1DX     1135.599000                 4DX     659.846700
        1DY       27.698910                 4DY      21.225770
        1FI      -24.931320                 4FI     -59.343630
        2DX     1068.577000                 5DX     574.018900
        2DY     7.583292E-01                5DY   -1.130878E-01
        2FI      -20.857060                 5FI     -41.141070
        3DX     1045.852000                 6DX     532.290300
        3DY      -28.457250                 6DY     -21.112680
        3FI      -31.028740                 6FI     -52.746360

RESULTADOS :

BARRA :     1

 Matriz global del elemento

      .01       .00       .06      -.01       .00       .06
      .00       .10       .00       .00      -.10       .00
      .06       .00       .40      -.06       .00       .20
     -.01       .00      -.06       .01       .00      -.06
      .00      -.10       .00       .00       .10       .00
      .06       .00       .20      -.06       .00       .40

FUERZAS EN LAS BARRAS

      FAX       FAY       MA       FBX       FBY       MB

     -.647      .649     6.680     .647     -.649     -.191
BARRA :     2

 Matriz global del elemento

      .01       .00       .06      -.01       .00       .06
      .00       .10       .00       .00      -.10       .00
      .06       .00       .40      -.06       .00       .20
     -.01       .00      -.06       .01       .00      -.06
      .00      -.10       .00       .00       .10       .00
      .06       .00       .20      -.06       .00       .40

FUERZAS EN LAS BARRAS

      FAX       FAY       MA       FBX       FBY       MB

     -.087     2.215    13.102     .087    -2.215     9.046
```

BARRA : 3

Matriz global del elemento

.01	.00	.06	-.01	.00	.06
.00	.10	.00	.00	-.10	.00
.06	.00	.40	-.06	.00	.20
-.01	.00	-.06	.01	.00	-.06
.00	-.10	.00	.00	.10	.00
.06	.00	.20	-.06	.00	.40

FUERZAS EN LAS BARRAS

FAX	FAY	MA	FBX	FBY	MB
.734	1.136	7.853	-.734	-1.136	3.510

BARRA : 4

Matriz global del elemento

.01	.00	.06	-.01	.00	.06
.00	.10	.00	.00	-.10	.00
.06	.00	.40	-.06	.00	.20
-.01	.00	-.06	.01	.00	-.06
.00	-.10	.00	.00	.10	.00
.06	.00	.20	-.06	.00	.40

FUERZAS EN LAS BARRAS

FAX	FAY	MA	FBX	FBY	MB
-2.123	4.358	15.853	2.123	-4.358	27.722

BARRA : 5

Matriz global del elemento

.01	.00	.06	-.01	.00	.06
.00	.10	.00	.00	-.10	.00
.06	.00	.40	-.06	.00	.20
-.01	.00	-.06	.01	.00	-.06
.00	-.10	.00	.00	.10	.00
.06	.00	.20	-.06	.00	.40

FUERZAS EN LAS BARRAS

FAX	FAY	MA	FBX	FBY	MB
.011	4.420	17.985	-.011	-4.420	26.213

BARRA : 6

Matriz global del elemento

.01	.00	.06	-.01	.00	.06
.00	.10	.00	.00	-.10	.00
.06	.00	.40	-.06	.00	.20
-.01	.00	-.06	.01	.00	-.06
.00	-.10	.00	.00	.10	.00
.06	.00	.20	-.06	.00	.40

FUERZAS EN LAS BARRAS

FAX	FAY	MA	FBX	FBY	MB
2.111	3.223	10.839	-2.111	-3.223	21.389

BARRA : 7

Matriz global del elemento

.05	.00	.00	-.05	.00	.00
.00	.00	.01	.00	.00	.01
.00	.01	.20	.00	-.01	.10
-.05	.00	.00	.05	.00	.00
.00	.00	-.01	.00	.00	-.01
.00	.01	.10	.00	-.01	.20

FUERZAS EN LAS BARRAS

FAX	FAY	MA	FBX	FBY	MB
3.351	-.617	-6.680	-3.351	.617	-6.286

BARRA : 8

Matriz global del elemento

.05	.00	.00	-.05	.00	.00
.00	.00	.01	.00	.00	.01
.00	.01	.20	.00	-.01	.10
-.05	.00	.00	.05	.00	.00
.00	.00	-.01	.00	.00	-.01
.00	.01	.10	.00	-.01	.20

FUERZAS EN LAS BARRAS

FAX	FAY	MA	FBX	FBY	MB
1.136	-.734	-6.936	-1.136	.734	-7.853

BARRA : 9

Matriz global del elemento

.05	.00	.00	-.05	.00	.00
.00	.00	.01	.00	.00	.01
.00	.01	.20	.00	-.01	.10
-.05	.00	.00	.05	.00	.00
.00	.00	-.01	.00	.00	-.01
.00	.01	.10	.00	-.01	.20

FUERZAS EN LAS BARRAS

FAX	FAY	MA	FBX	FBY	MB
4.291	-1.475	-15.663	-4.291	1.475	-13.442

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

BARRA : 10

Matriz global del elemento

.05	.00	.00	-.05	.00	.00
.00	.00	.01	.00	.00	.01
.00	.01	.20	.00	-.01	.10
-.05	.00	.00	.05	.00	.00
.00	.00	-.01	.00	.00	-.01
.00	.01	.10	.00	-.01	.20

FUERZAS EN LAS BARRAS

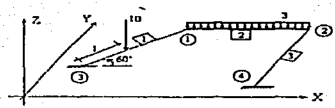
FAX	FAY	MA	FBX	FBY	MB
2.086	-1.377	-13.188	-2.086	1.377	-14.349

Como se observa, aunque cambia un poco la presentación de resultados, estos son prácticamente los mismos que los del *ejemplo 3.*

Ejemplo 5.

En la figura (VI.9) se muestra un ejemplo de retícula plana, formada por tres barras, dos nudos y dos apoyos. Observe que la carga aplicada es perpendicular al plano de la estructura.

a) Solución con el programa RET2D.



Donde:

E = 1 ton/cm^2	Iy = 1 cm^4	G = 0.5 kg/cm^2	J = 1 cm^4
ω= 3 ton/cm.	L =4 m. en todos los elementos.		

Fig. VI.9 Ejemplo de retícula plana.

Archivo de entrada:

```
3        2        2
2.0      4.0      1.61     3.06     -7.56
6.0      1.0      0.0      -4.0     -6.0
0.0      0.5358   0.0      0.0      0.0
6.0      0.0      0.0      0.0      0.0
1.0      1.0      1.0      0.5      3        1
1.0      1.0      1.0      0.5      1        2
1.0      1.0      1.0      0.5      4        2
```

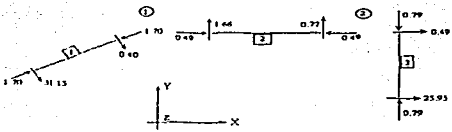

Y su archivo de salida:

```
*****************************************************
*                                                   *
*                                                   *
*        ANALISIS DE RETICULAS PLANAS               *
*                                                   *
*                ( R E T 2 D )                      *
*                                                   *
*                                                   *
*****************************************************

barra      1

Matriz de Continuidad [A]

     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .2500
     .0000     .0000     .0000   -.8660      .5000     .5000
     .0000     .0000     .0000   -.8660      .5000     .2500
     .0000     .0000     .0000     .5000     .8660     .0000
```

```
barra      2

Matriz de Continuidad [A]

     .0000    1.0000    -.2500     .0000     .0000     .2500
     .0000    1.0000    -.5000     .0000    1.0000     .5000
     .0000     .0000    -.2500     .0000    1.0000     .2500
   -1.0000     .0000     .0000    1.0000     .0000     .0000

barra      3

Matriz de Continuidad [A]

     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000     .2500
     .0000     .0000     .0000   -1.0000     .0000     .5000
     .0000     .0000     .0000   -1.0000     .0000     .2500
     .0000     .0000     .0000     .0000    1.0000     .0000

Matriz Global de Rigideces [ K ]

     .9062    -.3789    -.3217    -.1250     .0000     .0000
    -.3789    1.3437    -.1875     .0000     .5000     .3750
    -.3217    -.1875     .3750     .0000    -.3750    -.1875
    -.1250     .0000     .0000    1.1250     .0000    -.3750
     .0000     .5000    -.3750     .0000    1.1250     .3750
     .0000     .3750    -.1875    -.3750     .3750     .3750

Desplazamientos de los nudos:

            1FHIX      -46.971960
            1FHIY       11.502090
            1DZ      -129.916300
            2FHIX      -50.925410
            2FHIY       -6.266718
            2DZ      -137.118900

barra      1

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B      .0000      .0000      .0000   -46.9719   11.5021 -129.9163

DEFORMACIONES :    -32.4784   -18.5267    13.9517   -13.5243

ELEMENTOS MECANICOS

MA:     -25.502
MB:      -2.287
MT:      -1.690

barra      2

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B   -46.9719   11.5021 -129.9163   -50.9254   -6.2667 -137.1189

DEFORMACIONES :       9.7014     1.6340    -8.0674   -3.4535

ELEMENTOS MECANICOS

MA:       5.668
MB:      -3.217
MT:       -.494

barra      3

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B      .0000      .0000      .0000   -50.9254   -6.2667 -137.1189

DEFORMACIONES :    -34.2737   -17.6341    16.6457   -6.2667
```

```
ELEMENTOS MECANICOS

MA:    -25.957
MB:      -.494
MT:      -.783
```

La interpretación de resultados se muestra en la siguiente figura.



b) Solución con el programa SAP90.

J O I N T   D I S P L A C E M E N T S

LOAD CONDITION   1 -   DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
1	.000000	.000000	-123.216313	-46.971869	11.502085	.000000
2	.000000	.000000	-137.119321	-50.925404	-6.266724	.000000
3	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
4	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000

R E A C T I O N S   A N D   A P P L I E D   F O R C E S

LOAD CONDITION   1 -   FORCES "F" AND MOMENTS "M"

JOINT	F(Z)	M(X)	M(Y)
1	-7.5600	1.6300	3.0600
2	-6.0000	.0000	-4.0000
3	6.9472	22.9308	-11.7867
4	6.6128	25.9569	.7833
TOTAL	.0000E+00	.5057E+02	-.1144E+02

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

F R A M E   E L E M E N T   F O R C E S

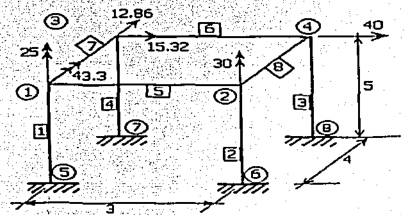
ELT ID	LOAD COND	AXIAL FORCE	DIST ENDI	1-2 PLANE SHEAR	1-2 PLANE MOMENT	1-3 PLANE SHEAR	1-3 PLANE MOMENT	AXIAL TORQ
1								
	1	.00						-1.69
			.0	.00	.00	6.95	-25.50	
			4.0	.00	.00	6.95	2.29	
2								
	1	.00						-.49
			.0	.00	.00	-.61	5.67	
			4.0	.00	.00	-.61	3.22	
3								
	1	.00						-.78
			.0	.00	.00	6.61	-25.96	
			4.0	.00	.00	6.61	.49	

Se observa que los resultados son correctos.

Ejemplo 6.

En la figura (VI.10) se muestra un marco espacial formado por ocho barras, cuatro nudos libres y cuatro apoyos. Los datos de la estructura se indican en la tabla de la figura. Las longitudes están en metros y las fuerzas en toneladas.

a) Solución con el programa MAR3D.



$E(T/m^2)$	$A(m^2)$	$Iy(m^4)$	$Iz(m^4)$	$G(T/m^2)$	$J(T/m^4)$	barras
1	15	1	2	0.4	0.5	1 - 5
1	1	1	2	0.4	0.5	6
1	23	2	3	0.4	0.5	7
1	18	2	4	0.4	0.5	8

Figura VI.10 Ejemplo de marco tridimensional.

El archivo de entrada es el siguiente:

```
8    4    4    3       4       1
4    0    5    0       0       0     -43.3   0    25
4    3    5    0       0       0     0       0    30
0    0    5    -12.85  15.32   0     0       0    0
0    3    5    0       40      0     0       0    0
4    0    0
4    3    0
0    0    0
0    3    0
-1   3    5
4    4    5
0    4    5
1    15   1    2    0.4    0.5
1    1    1    2    0.4    0.5
1    23   2    3    0.4    0.5
1    18   2    4    0.4    0.5
5    1    1    10
6    2    1    10
8    1    1    11
7    3    1    11
1    2    1    9
3    4    2    9
3    1    3    10
4    7    4    10
```

El archivo de salida generado por el programa MAR3D es:

```
*******************************************************
*                                                     *
*                                                     *
*         ANALISIS DE MARCOS EN 3 DIMENSIONES         *
*                                                     *
*               ( M A R 3 D )                         *
*                                                     *
*                                                     *
*******************************************************

BARRA              1

K DIAGONAL

      .4000
      .4000
      .4000
      .8000
      .8000
      .8000
     3.0000
      .0400

MATRIZ DE CONTINUIDAD [A]

   .000   .000   .000   .000   .000   .000 -.200   .000   .000   .000   .000   .000
   .000   .000   .000   .000   .000   .000 -.400   .000   .000   .000 1.000   .000
   .000   .000   .000   .000   .000   .000 -.200   .000   .000   .000 1.000   .000
   .000   .000   .000   .000   .000   .000  .000 -.200   .000   .000   .000   .000
   .000   .000   .000   .000   .000   .000  .000 -.400   .000-1.000   .000   .000
   .000   .000   .000   .000   .000   .000  .000 -.200   .000-1.000   .000   .000
   .000   .000   .000   .000   .000   .000  .000   .000 1.000   .000   .000   .000
   .000   .000   .000   .000   .000   .000  .000   .000  .000   .000   .000 1.000

BARRA              2

K DIAGONAL

      .4000
      .4000
      .4000
      .8000
      .8000
      .8000
     3.0000
      .0400

MATRIZ DE CONTINUIDAD [A]

   .000   .000   .000   .000   .000   .000 -.200   .000   .000   .000   .000   .000
   .000   .000   .000   .000   .000   .000 -.400   .000   .000   .000 1.000   .000
   .000   .000   .000   .000   .000   .000 -.200   .000   .000   .000 1.000   .000
   .000   .000   .000   .000   .000   .000  .000 -.200   .000   .000   .000   .000
   .000   .000   .000   .000   .000   .000  .000 -.400   .000-1.000   .000   .000
   .000   .000   .000   .000   .000   .000  .000 -.200   .000-1.000   .000   .000
   .000   .000   .000   .000   .000   .000  .000   .000 1.000   .000   .000   .000
   .000   .000   .000   .000   .000   .000  .000   .000  .000   .000   .000 1.000

BARRA              3

K DIAGONAL

      .4000
      .4000
```

```
     .4000
     .8000
     .8000
     .8000
    3.0000
     .0400

MATRIZ DE CONTINUIDAD [A]

   .000  .000  .000  .000  .000  .000 -.200  .000  .000  .000  .000  .000
   .000  .000  .000  .000  .000  .000 -.400  .000  .000  .000 1.000  .000
   .000  .000  .000  .000  .000  .000 -.200  .000  .000  .000 1.000  .000
   .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000 -.200  .000  .000  .000  .000
   .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000 -.400  .000-1.000  .000  .000
   .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000 -.200  .000-1.000  .000  .000
   .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000 1.000  .000  .000  .000
   .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000 1.000

BARRA          4

K DIAGONAL

     .4000
     .4000
     .4000
     .8000
     .8000
     .8000
    3.0000
     .0400

MATRIZ DE CONTINUIDAD [A]

   .000  .000  .000  .000  .000  .000 -.200  .000  .000  .000  .000  .000
   .000  .000  .000  .000  .000  .000 -.400  .000  .000  .000 1.000  .000
   .000  .000  .000  .000  .000  .000 -.200  .000  .000  .000 1.000  .000
   .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000 -.200  .000  .000  .000  .000
   .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000 -.400  .000-1.000  .000  .000
   .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000 -.200  .000-1.000  .000  .000
   .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000 1.000  .000  .000  .000
   .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000  .000 1.000

BARRA          5

K DIAGONAL

     .6667
     .6667
     .6667
    1.3333
    1.3333
    1.3333
    5.0000
     .0667

MATRIZ DE CONTINUIDAD [A]

   .000  .000 -.333-1.000  .000  .000  .000  .000  .333  .000  .000  .000
   .000  .000 -.667-1.000  .000  .000  .000  .000  .667-1.000  .000  .000
   .000  .000 -.333  .000  .000  .000  .000  .000  .333-1.000  .000  .000
  -.333  .000   000  .000  .000 1.000  .333  .000  .000  .000  .000  .000
  -.667  .000  .000  .000  .000 1.000  .667  .000  .000  .000  .000 1.000
  -.333  .000  .000  .000  .000  .000  .333  .000  .000  .000  .000 1.000
   .000-1.000  .000  .000  .000  .000  .000 1.000  .000  .000  .000  .000
   .000  .000  .000  .000-1.000  .000  .000  .000  .000  .000 1.000  .000
```

BARRA 6

K DIAGONAL

.6667
.6667
.6667
1.3333
1.3333
1.3333
.3333
.0667

MATRIZ DE CONTINUIDAD [A]

.000	.000	-.333	-1.000	.000	.000	.000	.000	.333	.000	.000	.000
.000	.000	-.667	-1.000	.000	.000	.000	.000	.667	-1.000	.000	.000
.000	.000	-.333	.000	.000	.000	.000	.000	.333	-1.000	.000	.000
-.333	.000	.000	.000	.000	1.000	.333	.000	.000	.000	.000	.000
-.667	.000	.000	.000	.000	1.000	.667	.000	.000	.000	.000	1.000
-.333	.000	.000	.000	.000	.000	.333	.000	.000	.000	.000	1.000
.000	-1.000	.000	.000	.000	.000	.000	1.000	.000	.000	.000	.000
.000	.000	.000	.000	-1.000	.000	.000	.000	.000	.000	1.000	.000

BARRA 7

K DIAGONAL

1.0000
1.0000
1.0000
1.5000
1.5000
1.5000
5.7500
.0500

MATRIZ DE CONTINUIDAD [A]

.000	.000	-.250	.000	1.000	.000	.000	.000	.250	.000	.000	.000
.000	.000	-.500	.000	1.000	.000	.000	.000	.500	.000	1.000	.000
.000	.000	-.250	.000	.000	.000	.000	.000	.250	.000	1.000	.000
.000	.250	.000	.000	.000	1.000	.000	-.250	.000	.000	.000	.000
.000	.500	.000	.000	.000	1.000	.000	-.500	.000	.000	.000	1.000
.000	.250	.000	.000	.000	.000	.000	-.250	.000	.000	.000	1.000
-1.000	.000	.000	.000	.000	.000	1.000	.000	.000	.000	.000	.000
.000	.000	.000	-1.000	.000	.000	.000	.000	.000	1.000	.000	.000

BARRA 8

K DIAGONAL

1.0000
1.0000
1.0000
2.0000
2.0000
2.0000
1.5000
.0500

MATRIZ DE CONTINUIDAD [A]

.000	.000	-.250	.000	1.000	.000	.000	.000	.250	.000	.000	.000
.000	.000	-.500	.000	1.000	.000	.000	.000	.500	.000	1.000	.000
.000	.000	-.250	.000	.000	.000	.000	.000	.250	.000	1.000	.000
.000	.250	.000	.000	.000	1.000	.000	-.250	.000	.000	.000	.000
.000	.500	.000	.000	.000	1.000	.000	-.500	.000	.000	.000	1.000
.000	.250	.000	.000	.000	.000	.000	-.250	.000	.000	.000	1.000

```
-1.000   .000   .000   .000   .000   .000 1.000   .000   .000   .000   .000   .000
  .000   .000   .000-1.000   .000   .000   .000   .000   .000 1.000   .000   .000
```

NUMERO DE NUDO Y DESPLAZAMIENTO EN dx,dy,dz,ox,oy,oz

NUDO	1
DX	-10.176230
DY	86.217290
DZ	8.959136
GX	-27.758300
GY	-1.679095
GZ	-11.179590

NUDO	2
DX	-11.817550
DY	95.822280
DZ	-6.186826
GX	-11.092280
GY	-1.446141
GZ	-19.185420

NUDO	3
DX	-72.298260
DY	162.003900
DZ	7.064404
GX	-23.843390
GY	-4.946348
GZ	-19.640540

NUDO	4
DX	-10.528590
DY	187.758300
DZ	-9.536713
GX	-28.776680
GY	-1.289963
GZ	-25.363620

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

BARRA 1

DEFORMACIONES (e) Y FUERZAS
INTERNAS (P)

14.035250	5.614099
23.391400	9.356560
9.356152	3.742461
-17.243460	-13.794770
-4.728621	-3.782897
12.514840	10.011870
8.959136	26.877410
-14.479590	-5.791835E-01

ELEMENTOS MECANICOS

MyA	14.970660
MyB	13.099020
Vy	5.613936
MzA	-17.577670
MzB	6.228975
Vz	-2.269738
N	26.877410
MT	-5.791835E-01

BARRA 2

DEFORMACIONES (e) Y FUERZAS
INTERNAS (P)

2.363511	9.454044E-01
3.280881	1.312152
9.173700E-01	3.669180E-01
-17.164460	-13.731570
-23.236640	-18.587310
-6.072178	-4.857742
-6.486826	-19.460180
-19.485420	-7.794167E-01

ELEMENTOS MECANICOS

MyA	2.257757
MyB	1.679300
Vy	7.874115E-01
MzA	-32.320870
MzB	-23.447050
Vz	-11.153580
N	-19.460480
MT	-7.794167E-01

BARRA 3

DEFORMACIONES (e) Y FUERZAS
INTERNAS (P)

2.105719	8.422875E-01
2.921475	1.168590
8.157563E-01	3.263025E-01
-37.551650	-30.041320
-46.326630	-37.061310
-8.774975	-7.019980
-9.536713	-28.610140
-25.363620	-1.014545

ELEMENTOS MECANICOS

MyA	2.010878
MyB	1.494893
Vy	7.011541E-01
MzA	-67.102630
MzB	-44.081290
Vz	-22.236780
N	-28.610140
MT	-1.014545

BARRA 4

DEFORMACIONES (e) Y FUERZAS INTERNAS (P)

14.459650	5.783861
23.972950	9.589182
9.513303	3.805321
-32.400790	-25.920630
-40.958180	-32.766550
-8.557398	-6.845918
7.064404	21.193210
-19.640540	-7.856214E-01

ELEMENTOS MECANICOS

MyA	15.373040
MyB	13.394500
Vy	5.753509
MzA	-58.687180
MzB	-39.612460
Vz	-19.659930
N	21.193210
MT	-7.856214E-01

BARRA 5

DEFORMACIONES (e) Y FUERZAS INTERNAS (P)

24.609640	16.406430
30.553270	20.368850
5.943625	3.962417
4.973306	6.631075
4.910783	6.587710
-3.252411E-02	-4.336548E-02
-3.950119E-01	-1.975060
3.232954	2.155303E-01

ELEMENTOS MECANICOS

MyA	36.775280
MyB	24.331260
Vy	20.368850
MzA	13.218790
MzB	6.544345
Vz	6.587710
N	-1.975060
MT	2.155303E-01

BARRA 6

DEFORMACIONES (e) Y FUERZAS INTERNAS (P)

18.309680	12.206460
41.552660	27.701770
23.242970	15.495320
9.493518E-01	1.265803
-3.824377	-5.099170
-4.773729	-6.361973
25.754330	8.584778
3.656386	2.437591E-01

ELEMENTOS MECANICOS

MyA	39.908230
MyB	43.197090
Vy	27.701770
MzA	-3.833367
MzB	-11.464140
Vz	-5.099170
N	8.584778
MT	2.437591E-01

BARRA 7

DEFORMACIONES (e) Y FUERZAS INTERNAS (P)

-4.472665	-4.472665
-8.678077	-8.678077
-4.205412	-4.205412
-6.938744E-01	-1.040812
3.773201	5.659801
4.467073	6.700610
2.122025	12.201640
-5.914909	-2.957455E-01

ELEMENTOS MECANICOS

MyA	-13.150740
MyB	-12.883490
Vy	-6.508557
MzA	4.618990
MzB	12.360410
Vz	4.244850
N	12.201640
MT	-2.957455E-01

BARRA 8

DEFORMACIONES (e) Y FUERZAS INTERNAS (P)

-5.274910E-01	-5.274910E-01
-1.211160	-1.211160
-6.836693E-01	-6.836693E-01
1.203804E-01	2.407608E-01
6.118959	12.237920
5.998579	11.997160
-1.288960	-5.800318
17.684400	8.842201E-01

ELEMENTOS MECANICOS

MyA	-1.738651
MyB	-1.894830
Vy	-9.083703E-01
MzA	12.478680
MzB	24.235080
Vz	9.178439
N	-5.800318
MT	8.842201E-01

b) Solución con el programa SAP90.

J O I N T   D I S P L A C E M E N T S

LOAD CONDITION   1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	U(Z)	R(X)	R(Y)	R(Z)
1	-70.151941	86.222920	8.958693	-29.759078	-4.677414	-14.476493
2	-11.803581	85.827898	-6.487540	-11.093057	-1.441967	-19.482369
3	-72.273160	161.998187	7.064836	-23.842589	-4.914604	-19.631317
4	-10.514608	187.752467	-9.535990	-28.775864	-1.289785	-25.360461
5	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000
6	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000	.000000

R E A C T I O N S   A N D   A P P L I E D   F O R C E S

LOAD CONDITION   1 - FORCES "F" AND MOMENTS "M"

JOINT	F(X)	F(Y)	F(Z)	M(X)	M(Y)	M(Z)
1	.0000	.0000	.0000	-43.3000	.0000	25.0000
2	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	30.0000
3	-12.8500	15.3200	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0000	40.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
5	5.6120	-2.2704	-26.8761	17.5797	14.9655	.5791
6	.7861	-11.1543	19.4626	32.3229	2.2543	.7793
7	5.7515	-19.6592	-21.1945	58.6851	15.3678	.7855
8	.7001	-22.2361	28.6080	67.1005	2.0080	1.0144
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

F R A M E   E L E M E N T   F O R C E S

ELT ID	LOAD COND	AXIAL FORCE	DIST END1	1-2 PLANE SHEAR	1-2 PLANE MOMENT	1-3 PLANE SHEAR	1-3 PLANE MOMENT	AXIAL TORQ
1								
	1	26.88						-.58
			.0	5.61	-14.97	-2.27	17.58	
			5.0	5.61	13.09	-2.27	6.23	
2								
	1	-19.46						-.78
			.0	.79	-2.25	-11.15	32.32	
			5.0	.79	1.68	-11.15	-23.45	
3								
	1	-28.61						-1.01
			.0	.70	-2.01	-22.24	67.10	
			5.0	.70	1.49	-22.24	-44.08	
4								
	1	21.19						-.79
			.0	5.75	-15.37	-19.66	58.69	
			5.0	5.75	13.39	-19.66	-39.61	
5								
	1	-1.98						.22
			.0	20.37	-36.78	6.59	-13.22	
			3.0	20.37	24.33	6.59	6.54	
6								
	1	8.58						.24
			.0	27.70	-39.91	-5.10	3.83	
			3.0	27.70	43.20	-5.10	-11.47	
7								
	1	12.20						-.30
			.0	-6.51	13.15	4.25	-4.62	
			4.0	-6.51	-12.88	4.25	12.36	
8								
	1	-5.80						.89
			.0	-.91	1.74	9.18	-12.48	
			4.0	-.91	-1.89	9.18	24.24	

Se observa que los resultados obtenidos son los mismos que generó el programa MAR3D.

VI.4 Ejemplo del modelado en interacción suelo – estructura.

A continuación se presenta la aplicación de los programas generados en el modelado de la interacción suelo - estructura entre una zapata de concreto y un terreno arenoso con las características que se indican en la figura (VI.11).

Ejemplo 7.

Se tiene una zapata de concreto de 16 metros de largo por 2 metros de ancho, con la sección transversal mostrada en la figura (VI.11), se encuentra apoyada sobre la estratigrafía indicada. Se pide obtener los hundimientos debido a la condición de carga impuesta, se considera que el desplazamiento horizontal de la zapata se encuentra restringido, además se hará el cálculo de los elementos mecánicos en la misma para lograr un diseño estructural adecuado.

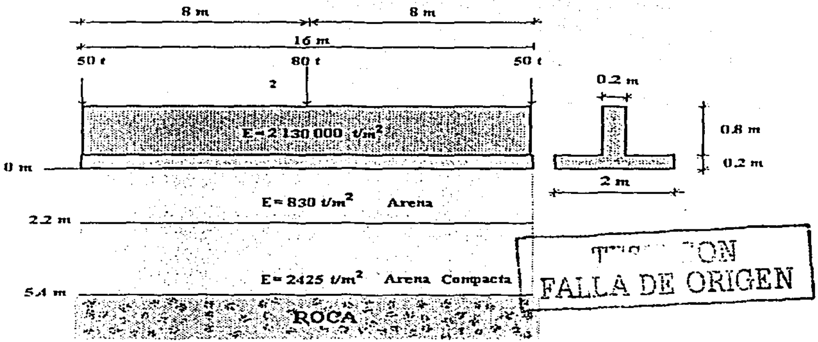


Figura VI.11. Ejemplo de interacción suelo estructura.

Solución.

Para resolver el problema consideraremos a cada estrato de suelo como un material homogéneo e isótropo, razón por la cual es posible generar un modelo de marco plano que represente el comportamiento del terreno de apoyo. Para lograr esto dividiremos al suelo en ocho secciones que tomaremos como elementos estructurales con las propiedades mecánicas del estrato y formaremos una nueva estructura que se unirá a la zapata. De esta forma tendremos una estructura con las propiedades de la zapata y las del suelo, esto se visualiza en la figura (VI.12).

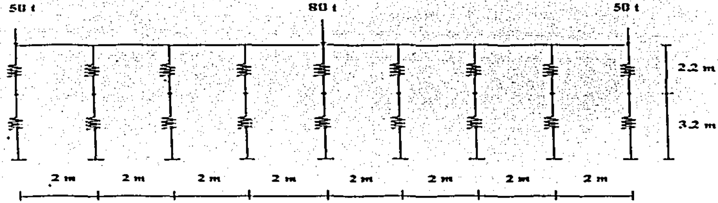


Figura VI.12 Modelado de los estratos del suelo.

En la figura (VI.12) se presentan los elementos estructurales que modelan el comportamiento mecánico de los estratos del suelo, estos elementos cuentan con una rigidez equivalente a la del estrato en el que están ubicados, dado que se requiere obtener los desplazamientos verticales de la zapata, sólo se muestran elementos en esa dirección y además se consideran empotrados en la superficie de contacto entre el segundo estrato y la capa dura; debido a que la zapata debe permanecer en equilibrio estable, se introduce una barra adicional que impida el desplazamiento horizontal de la estructura, ésta se encuentra en el extremo derecho y se caracteriza por tener una gran rigidez axial tal, que garantice que no se presenten desplazamientos horizontales apreciables en la zapata, esto se muestra en la figura(VI.13).

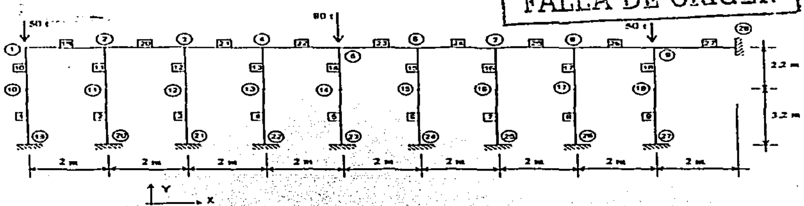


Figura VI.13 Modelo completo para el estudio de la interacción suelo estructura de la figura VI.11.

Con base en la figura (VI.13) podemos realizar el archivo de datos y llevar a cabo el análisis de la estructura mediante la aplicación del programa MAR2Dc.

a) Solución con el programa MAR2Dc.

27	18	10		
2	5.4	0	-50	0
4	5.4	0	0	0
6	5.4	0	0	0
8	5.4	0	0	0
10	5.4	0	-80	0
12	5.4	0	0	0
14	5.4	0	0	0
16	5.4	0	0	0
18	5.4	0	-50	0
2	3.2	0	0	0
4	3.2	0	0	0
6	3.2	0	0	0
8	3.2	0	0	0
10	3.2	0	0	0
12	3.2	0	0	0
14	3.2	0	0	0
16	3.2	0	0	0
18	3.2	0	0	0
2	0	0	0	0
4	0	0	0	0
6	0	0	0	0
8	0	0	0	0
10	0	0	0	0
12	0	0	0	0
14	0	0	0	0
16	0	0	0	0
18	0	0	0	0

20	5.4	0	0	0
2425	4.74	7.55	10	19
2425	4.74	7.55	11	20
2425	4.74	7.55	12	21
2425	4.74	7.55	13	22
2425	4.74	7.55	14	23
2425	4.74	7.55	15	24
2425	4.74	7.55	16	25
2425	4.74	7.55	17	26
2425	4.74	7.55	18	27
830	6.2	8.6	1	10
830	6.2	8.6	2	11
830	6.2	8.6	3	12
830	6.2	8.6	4	13
830	6.2	8.6	5	14
830	6.2	8.6	6	15
830	6.2	8.6	7	16
830	6.2	8.6	8	17
830	6.2	8.6	9	18
2130000	.1341	.56	1	2
2130000	.1341	.56	2	3
2130000	.1341	.56	3	4
2130000	.1341	.56	4	5
2130000	.1341	.56	5	6
2130000	.1341	.56	6	7
2130000	.1341	.56	7	8
2130000	.1341	.56	8	9
1000000	.0001	100	9	28

El archivo de salida es el siguiente:

```
**************************************************
*                                                *
*          ANALISIS DE MARCOS PLANOS             *
*                                                *
*               ( M A R 2 D c )                  *
*                                                *
*  (POR EL MÉTODO DE LA MATRIZ DE CONTINUIDAD)   *
*                                                *
**************************************************

barra      1

Matriz de Continuidad [A]

   .3125     .0000    1.0000     .0000     .0000     .0000
   .6250     .0000    1.0000     .0000     .0000     .0000
   .3125     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
   .0000    1.0000     .0000     .0000     .0000     .0000

barra      2

Matriz de Continuidad [A]

   .3125     .0000    1.0000     .0000     .0000     .0000
   .6250     .0000    1.0000     .0000     .0000     .0000
   .3125     .0000     .0000     .0000     .0000     .0000
   .0000    1.0000     .0000     .0000     .0000     .0000
```

barra 3

Matriz de Continuidad [A]

.3125	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.6250	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.3125	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

barra 4

Matriz de Continuidad [A]

.3125	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.6250	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.3125	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

barra 5

Matriz de Continuidad [A]

.3125	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.6250	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.3125	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

barra 6

Matriz de Continuidad [A]

.3125	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.6250	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.3125	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

barra 7

Matriz de Continuidad [A]

.3125	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.6250	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.3125	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

barra 8

Matriz de Continuidad [A]

.3125	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.6250	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.3125	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

barra 9

Matriz de Continuidad [A]

.3125	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.6250	.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000
.3125	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	.0000	.0000

barra 10

Matriz de Continuidad [A]

.4545	.0000	1.0000	-.4545	.0000	.0000
.9091	.0000	1.0000	-.9091	.0000	1.0000
.4545	.0000	.0000	-.4545	.0000	1.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000

barra 11

Matriz de Continuidad [A]

.4545	.0000	1.0000	-.4545	.0000	.0000
.9091	.0000	1.0000	-.9091	.0000	1.0000
.4545	.0000	.0000	-.4545	.0000	1.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000

barra 12

Matriz de Continuidad [A]

.4545	.0000	1.0000	-.4545	.0000	.0000
.9091	.0000	1.0000	-.9091	.0000	1.0000
.4545	.0000	.0000	-.4545	.0000	1.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000

barra 13

Matriz de Continuidad [A]

.4545	.0000	1.0000	-.4545	.0000	.0000
.9091	.0000	1.0000	-.9091	.0000	1.0000
.4545	.0000	.0000	-.4545	.0000	1.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000

barra 14

Matriz de Continuidad [A]

.4545	.0000	1.0000	-.4545	.0000	.0000
.9091	.0000	1.0000	-.9091	.0000	1.0000
.4545	.0000	.0000	-.4545	.0000	1.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000

barra 15

Matriz de Continuidad [A]

.4545	.0000	1.0000	-.4545	.0000	.0000
.9091	.0000	1.0000	-.9091	.0000	1.0000
.4545	.0000	.0000	-.4545	.0000	1.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000

barra 16

Matriz de Continuidad [A]

.4545	.0000	1.0000	-.4545	.0000	.0000
.9091	.0000	1.0000	-.9091	.0000	1.0000
.4545	.0000	.0000	-.4545	.0000	1.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000

barra 17

Matriz de Continuidad [A]

.4545	.0000	1.0000	-.4545	.0000	.0000
.9091	.0000	1.0000	-.9091	.0000	1.0000
.4545	.0000	.0000	-.4545	.0000	1.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000

barra 18

Matriz de Continuidad [A]

.4545	.0000	1.0000	-.4545	.0000	.0000
.9091	.0000	1.0000	-.9091	.0000	1.0000
.4545	.0000	.0000	-.4545	.0000	1.0000
.0000	1.0000	.0000	.0000	-1.0000	.0000

barra 19

Matriz de Continuidad [A]

.0000	.5000	1.0000	.0000	-.5000	.0000
.0000	1.0000	1.0000	.0000	-1.0000	1.0000
.0000	.5000	.0000	.0000	-.5000	1.0000
-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000

barra 20

Matriz de Continuidad [A]

.0000	.5000	1.0000	.0000	-.5000	.0000
.0000	1.0000	1.0000	.0000	-1.0000	1.0000
.0000	.5000	.0000	.0000	-.5000	1.0000
-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000

barra 21

Matriz de Continuidad [A]

.0000	.5000	1.0000	.0000	-.5000	.0000
.0000	1.0000	1.0000	.0000	-1.0000	1.0000
.0000	.5000	.0000	.0000	-.5000	1.0000
-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000

barra 22

Matriz de Continuidad [A]

.0000	.5000	1.0000	.0000	-.5000	.0000
.0000	1.0000	1.0000	.0000	-1.0000	1.0000
.0000	.5000	.0000	.0000	-.5000	1.0000
-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000

barra 23

Matriz de Continuidad [A]

.0000	.5000	1.0000	.0000	-.5000	.0000
.0000	1.0000	1.0000	.0000	-1.0000	1.0000
.0000	.5000	.0000	.0000	-.5000	1.0000
-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000

barra 24

Matriz de Continuidad [A]

.0000	.5000	1.0000	.0000	-.5000	.0000
.0000	1.0000	1.0000	.0000	-1.0000	1.0000
.0000	.5000	.0000	.0000	-.5000	1.0000
-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000

barra 25

Matriz de Continuidad [A]

.0000	.5000	1.0000	.0000	-.5000	.0000
.0000	1.0000	1.0000	.0000	-1.0000	1.0000
.0000	.5000	.0000	.0000	-.5000	1.0000
-1.0000	.0000	.0000	1.0000	.0000	.0000

barra 26

Matriz de Continuidad [A]

.0000	.5000	1.0000	.0000	-.5000	.0000
.0000	1.0000	1.0000	.0000	-1.0000	1.0000

```
      .0000        .5000        .0000        .0000       -.5000       1.0000
    -1.0000        .0000        .0000       1.0000        .0000        .0000

 barra     27
Matriz de Continuidad [A]

      .0000        .5000       1.0000        .0000        .0000        .0000
      .0000       1.0000       1.0000        .0000        .0000        .0000
      .0000        .5000        .0000        .0000        .0000        .0000
    -1.0000        .0000        .0000        .0000        .0000        .0000

Desplazamientos de los nudos:

1Dx    -2.640298E-05
1Dy    -1.153110E-02
1giro   8.231854E-04
2Dx    -2.460701E-05
2Dy    -9.982571E-03
2giro   6.616615E-04
3Dx    -2.136133E-05
3Dy    -9.000499E-03
3giro   3.046812E-04
4Dx    -1.746983E-05
4Dy    -8.719977E-03
4giro   7.701988E-06
5Dx    -1.357409E-05
5Dy    -8.762315E-03
5giro   2.175144E-05
6Dx    -9.645073E-06
6Dy    -8.628522E-03
6giro   1.055788E-05
7Dx    -5.636128E-06
7Dy    -8.801497E-03
7giro  -2.433196E-04
8Dx    -2.171768E-06
8Dy    -9.613218E-03
8giro  -5.856552E-04
9Dx    -6.563170E-09
9Dy    -1.101749E-02
9giro  -7.292668E-04
10Dx    5.151686E-04
10Dy   -4.172879E-03
10giro -1.629170E-04
11Dx    1.110224E-04
11Dy   -3.612405E-03
11giro -1.306544E-04
12Dx    1.838154E-04
12Dy   -3.297019E-03
12giro -5.709129E-05
13Dx   -5.328841E-06
13Dy   -3.155109E-03
13giro  3.259419E-06
14Dx    6.024534E-06
14Dy   -3.170927E-03
14giro -7.291359E-07
15Dx    2.046479E-05
15Dy   -3.122413E-03
15giro -5.710981E-06
16Dx   -1.601954E-04
16Dy   -3.185005E-03
16giro  5.189712E-05
17Dx   -3.789657E-04
17Dy   -3.489600E-03
17giro  1.217189E-04
18Dx   -1.701798E-04
18Dy   -3.986909E-03
18giro  1.508511E-04

barra      1

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B       .0005      -.0042      -.0002       .0000       .0000       .0000

DEFORMACIONES :        .0000       .0002       .0002      -.0042

 ELEMENTOS MECANICOS

        MA:        1.128
        MB:        2.299
        N:       -23.875

barra      2

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B       .0004      -.0036      -.0001       .0000       .0000       .0000

DEFORMACIONES :        .0000       .0001       .0001      -.0036

 ELEMENTOS MECANICOS

        MA:         .911
        MB:        1.850
        N:       -20.668

barra      3

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B       .0002      -.0033      -.0001       .0000       .0000       .0000

DEFORMACIONES :        .0000       .0001       .0001      -.0033

 ELEMENTOS MECANICOS

        MA:         .418
        MB:         .828
        N:       -18.635
```

```
barra     4

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B      .0000    -.0032    .0000    .0000    .0000    .0000

DEFORMACIONES :      .0000      .0000     .0000    -.0032

ELEMENTOS MECANICOS

     MA:        .011
     MB:       -.012
     N:      -18.052

barra     5

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B      .0000    -.0032    .0000    .0000    .0000    .0000

DEFORMACIONES :      .0000      .0000     .0000    -.0032

ELEMENTOS MECANICOS

     MA:        .030
     MB:        .035
     N:      -18.142

barra     6

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B      .0000    -.0031    .0000    .0000    .0000    .0000

DEFORMACIONES :      .0000      .0000     .0000    -.0031

ELEMENTOS MECANICOS

     MA:        .056
     MB:        .097
     N:      -17.865

barra     7

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B     -.0002    -.0032    .0001    .0000    .0000    .0000

DEFORMACIONES :      .0000      .0000    -.0001    -.0032

ELEMENTOS MECANICOS

     MA:       -.333
     MB:       -.706
     N:      -18.223

barra     8

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B     -.0004    -.0035    .0001    .0000    .0000    .0000

DEFORMACIONES :      .0000     -.0001    -.0001    -.0035

ELEMENTOS MECANICOS

     MA:       -.802
     MB:      -1.677
     N:      -19.966

barra     9

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B     -.0005    -.0040    .0002    .0000    .0000    .0000

DEFORMACIONES :      .0000     -.0001    -.0001    -.0040
```

ELEMENTOS MECANICOS

MA: -.992
MB: -2.093
N: -22.811

barra 10

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B .0000 -.0115 .0009 .0005 -.0042 [illegible]

DEFORMACIONES : .0006 .0002 -.0004 -.0074

ELEMENTOS MECANICOS

MA: 3.485
MB: -1.128
N: -23.875

barra 11

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B .0000 -.0100 .0007 .0004 -.0036 [illegible]

DEFORMACIONES : .0005 .0001 -.0003 -.0064

ELEMENTOS MECANICOS

MA: 2.809
MB: -.911
N: -20.668

barra 12

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B .0000 -.0090 .0003 .0002 -.0033 [illegible]

DEFORMACIONES : .0002 .0001 -.0002 -.0057

ELEMENTOS MECANICOS

MA: 1.275
MB: -.418
N: -19.635

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

barra 13

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B .0000 -.0087 .0000 .0000 -.0032 [illegible]

DEFORMACIONES : .0000 .0000 .0000 -.0056

ELEMENTOS MECANICOS

MA: .010
MB: -.011
N: -18.052

barra 14

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B .0000 -.0088 .0000 .0000 -.0032 .0000

DEFORMACIONES : .0000 .0000 .0000 -.0056

ELEMENTOS MECANICOS

MA: .075
MB: -.030
N: -18.142

barra 15

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B .0000 -.0086 .0000 .0000 -.0031 [illegible]

DEFORMACIONES : .0000 .0000 .0000 -.0055

```
ELEMENTOS MECANICOS

      MA:          .161
      MB:         -.056
      N:       -17.865

barra     16

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B      .0000    -.0088    -.0002    -.0002    -.0032    .0001

DEFORMACIONES :      -.0002    -.0001    .0001    -.0056

ELEMENTOS MECANICOS

      MA:       -1.048
      MB:         .333
      N:      -18.223

barra     17

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B      .0000    -.0096    -.0006    -.0004    -.0035    .0001

DEFORMACIONES :      -.0001    -.0001    .0003    -.0062

ELEMENTOS MECANICOS

      MA:       -2.507
      MB:         .802
      N:      -19.966

barra     18

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B      .0000    -.0110    -.0007    -.0005    -.0040    .0002

DEFORMACIONES :      -.0005    -.0002    .0001    -.0070

ELEMENTOS MECANICOS

      MA:       -3.118
      MB:         .999
      N:      -22.811

barra     19

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B      .0000    -.0115    .0008    .0000    -.0100    .0007

DEFORMACIONES :       .0000    -.0001    -.0001    .0000

ELEMENTOS MECANICOS

      MA:       -3.485
      MB:      -48.765
      N:         1.071

barra     20

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B      .0000    -.0100    .0007    .0000    -.0090    .0003

DEFORMACIONES :       .0002    .0000    -.0002    .0000

ELEMENTOS MECANICOS

      MA:       45.956
      MB:      -56.866
      N:         1.934

barra     21

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B      .0000    -.0090    .0003    .0000    -.0087    .0000
```

DEFORMACIONES : .0002 .0000 -.0001 .0000

ELEMENTOS MECANICOS

MA: 55.593

MB: -29.234

N: 2.323

barra 22

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B .0000 -.0087 .0000 .0000 -.0088 .0000

DEFORMACIONES : .0000 .0001 .0000 .0000

ELEMENTOS MECANICOS

MA: 23.224

MB: 33.237

N: 2.323

barra 23

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B .0000 -.0088 .0000 .0000 -.0096 .0000

DEFORMACIONES : .0000 -.0001 .0000 .0000

ELEMENTOS MECANICOS

MA: -33.313

MB: -27.911

N: 2.343

barra 24

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B .0000 -.0086 .0000 .0000 -.0088 -.0002

DEFORMACIONES : .0001 .0000 -.0002 .0000

ELEMENTOS MECANICOS

MA: 27.790

MB: -53.305

N: 2.331

barra 25

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B .0000 -.0088 -.0002 .0000 -.0096 -.0006

DEFORMACIONES : .0002 .0000 -.0002 .0000

ELEMENTOS MECANICOS

MA: 54.353

MB: -43.430

N: 2.066

barra 26

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B .0000 -.0096 -.0006 .0000 -.0110 -.0007

DEFORMACIONES : .0001 .0001 .0000 .0000

ELEMENTOS MECANICOS

MA: 15.937

MB: 4.917

N: 1.291

barra 27

DESPLAZAMIENTOS EN A Y B .0000 -.0110 -.0007 .0000 .0000 .0000

DEFORMACIONES : -.0062 -.0117 -.0055 .0000

ELEMENTOS MECANICOS

MA: -1.798
MB: -1.726
H: .170

b) La solución generada con Sap90 es la siguiente:

J O I N T   D I S P L A C E M E N T S

LOAD CONDITION 1 - DISPLACEMENTS "U" AND ROTATIONS "R"

JOINT	U(X)	U(Y)	R(Z)	JOINT	U(X)	U(Y)	R(Z)
1	-.000026	-.011532	.000923	15	.000020	-.003122	-.000006
2	-.000025	-.009983	.000665	16	-.000160	-.003185	.000052
3	-.000021	-.009001	.000305	17	-.000379	-.003490	.000122
4	-.000017	-.008719	.000008	18	-.000470	-.003987	.000151
5	-.000014	-.008762	.000022	19	.000000	.000000	.000000
6	-.000010	-.008629	.000041	20	.000000	.000000	.000000
7	-.000006	-.008802	-.000243	21	.000000	.000000	.000000
8	-.000002	-.009643	-.000586	22	.000000	.000000	.000000
9	.000000	-.011018	-.000729	23	.000000	.000000	.000000
10	.000515	-.004173	-.000163	24	.000000	.000000	.000000
11	.000414	-.003612	-.000131	25	.000000	.000000	.000000
12	.000184	-.003257	-.000057	26	.000000	.000000	.000000
13	-.000005	-.003155	.000003	27	.000000	.000000	.000000
14	.000006	-.003171	-.000001	28	.000000	.000000	.000000

R E A C T I O N S   A N D   A P P L I E D   F O R C E S

LOAD CONDITION 1 - FORCES "F" AND MOMENTS "M"

JOINT	F(X)	F(Y)	M(Z)	JOINT	F(X)	F(Y)	M(Z)
1	.0000	-50.0000	.0000	15	.0000	.0000	.0000
2	.0000E+00	-.2135E-11	.0000E+00	16	.0000	.0000	.0000
3	.0000	.0000	.0000	17	.0000	.0000	.0000
4	.0000E+00	-.1137E-11	.0000E+00	18	.0000	.0000	.0000
5	.0000	-80.0000	.0000	19	-1.0711	23.8753	2.2991
6	.0000	.0000	.0000	20	-.8628	20.6685	1.8499
7	.0000	.0000	.0000	21	-.3894	18.6352	.8281
8	.0000E+00	-.1041E-11	.0000E+00	22	.0005	18.0521	-.0125
9	.0000	-50.0000	.0000	23	-.0205	18.1420	.0354
10	.0000	.0000	.0000	24	-.0477	17.8649	.0968
11	.0000	.0000	.0000	25	.3248	18.2231	-.7061
12	.0000	.0000	.0000	26	.7748	19.9658	-1.6770
13	.0000	.0000	.0000	27	.9632	22.8111	-2.0829
14	.0000	.0000	.0000	28	.3282	1.7620	-1.7256
TOTAL	.5551E-16	-.2176E-13	-.1095E+01				

F R A M E   E L E M E N T   F O R C E S

ELT ID	LOAD COND	AXIAL FORCE	DIST ENDI	1-2 PLANE SHEAR	1-2 PLANE MOMENT	ELT ID	LOAD COND	AXIAL FORCE	DIST ENDI	1-2 PLANE SHEAR	1-2 PLANE MOMENT
1						4					
	1	-23.88	.0	1.07	-1.13		1	-18.05	.0	.00	-.01
			3.2	1.07	2.30				3.2	.00	-.01
2						5					
	1	-20.67	.0	.86	-.91		1	-18.14	.0	.02	-.03
			3.2	.86	1.85				3.2	.02	.04
3						6					
	1	-18.64	.0	.39	-.42		1	-17.86	.0	.05	-.06
			3.2	.39	.83				3.2	.05	.10

ELT ID	LOAD COND	AXIAL FORCE	DIST ENDI	1-2 PLANE SHEAR	MOMENT
7					
	1	-19.22	.0	-.32	.33
			3.2	-.32	-.71
8					
	1	-19.97	.0	-.77	.90
			3.2	-.77	-1.58
9					
	1	-22.81	.0	-.96	1.00
			3.2	-.96	-2.08
10					
	1	[illegible]	.0	1.07	[illegible]
			2.2	1.07	-1.17
11					
	1	[illegible]	.0	.86	-2.91
			2.2	.86	-.91
12					
	1	-18.61	.0	.39	-1.27
			2.2	.39	-.12
13					
	1	-18.05	.0	.00	-.01
			2.2	.00	-.01
14					
	1	-18.14	.0	.02	-.08
			2.2	.02	-.03
15					
	1	-17.96	.0	.05	-.16
			2.2	.05	-.06
16					
	1	-18.22	.0	-.32	1.05
			2.2	-.32	.33

ELT ID	LOAD COND	AXIAL FORCE	DIST ENDI	1-2 PLANE SHEAR	MOMENT
17					
	1	-19.97	.0	-.77	[illegible]
			2.2	-.77	[illegible]
18					
	1	-22.81	.0	-.96	[illegible]
			2.2	-.96	[illegible]
19					
	1	1.07	.0	-26.12	[illegible]
			2.0	-26.12	[illegible]
20					
	1	1.93	.0	-5.46	[illegible]
			2.0	-5.46	[illegible]
21					
	1	2.32	.0	13.19	[illegible]
			2.0	13.19	[illegible]
22					
	1	2.32	.0	31.23	[illegible]
			2.0	31.23	[illegible]
23					
	1	2.34	.0	-30.63	[illegible]
			2.0	-30.63	[illegible]
24					
	1	2.39	.0	-12.76	[illegible]
			2.0	-12.76	[illegible]
25					
	1	2.07	.0	5.46	[illegible]
			2.0	5.46	[illegible]
26					
	1	1.29	.0	25.43	[illegible]
			2.0	25.43	[illegible]
27					
	1	.33	.0	-1.76	[illegible]
			2.0	-1.76	[illegible]

Se puede observar que la solución coincide al realizar el análisis de la estructura con ambos programas. Los desplazamientos que la zapata presenta no exceden 1.1 cm, lo cual indica que para la condición de carga estudiada, la geometría propuesta resultó adecuada, teniéndose la posibilidad de disminuir las dimensiones de la zapata, siempre vigilando que no se excedan los hundimientos máximos que establece el reglamento de construcciones local.

CAPITULO VII

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

CONCLUSIONES.

Una conclusión evidente a la que se llega en este trabajo, es que, es relativamente sencillo programar algoritmos bien definidos y sistemáticos como lo es el método de las rigideces para la solución de estructuras esqueletales, particularmente, el método de la matriz de continuidad.

Algunos de los planteamientos matriciales que se presentan en ésta tesis como el método de la matriz de continuidad, fueron implantados el *Ing. Julio Damy Rios* y debido a su gran sencillez es una herramienta poderosa en el cálculo de estructuras.

Como se pudo estudiar y a diferencia del método convencional de rigideces por ensamble, en el método de la matriz de continuidad la formación de la matriz de rigidez global de una estructura, depende solo de los cosenos directores de las barras y de un vector de rigideces muy simple. El algoritmo resultante se pudo aplicar a todos los modelos de estructuras esqueletales.

La facilidad que se tiene en la actualidad de accesar a una computadora, permite que cualquier persona tenga la disponibilidad de aplicar estas técnicas de análisis, por ello se presentan los códigos que generan los programas.

Lo programas presentados en este trabajo, se elaboraron de forma didáctica, tratando de presentar, en sus archivos de salida, las variables representativas de los modelos de análisis considerados en cada caso.

Al comparar los archivos de resultados de los programas aquí mostrados con los del *SAP90* (Structural Analysis Program 1990) que emplea la teoría de los elementos finitos, vemos que tiene la misma precisión por lo que los resultados de los programas desarrollados son confiables.

Reiteramos que el desarrollo de los algoritmos de los programas que se presentan en esta tesis, fue enfocado para fines didácticos, sin perder de vista su aplicación práctica y solo se requieren unos pequeños ajustes para optimizarlos.

El haber colocado los programas de cómputo desarrollados en un servidor con la finalidad de que múltiples usuarios los puedan accesar desde la Internet, representa una gran innovación y ventaja, debido al gran auge que ha adquirido el uso de este medio.

La velocidad con la que evolucionan los lenguajes de programación para aplicaciones en Internet, marcará la pauta para seguir desarrollando este tipo de herramientas con el objeto de mejorarlas y hacerlas más eficientes.

RECOMENDACIONES.

Una ventaja que se tiene con programas específicos de estructuras, es que el espacio que se genera por la existencia de los archivos ejecutables es pequeño en comparación con otros programas de análisis muy generales (los 7 caben en un diskette de 1.4 MB).

La capacidad de los programas desarrollados puede modificarse al contarse con su código fuente.

En cuanto a la manera de ingresar los datos en el editor, puede apreciarse su sencillez en comparación con la creación de un archivo de datos de *SAP90*. En los programas, se trato en lo posible de mantener un mismo formato del ingreso de los datos con un primer bloque de descripción del número de barras, nudos y apoyos; continuando un segundo bloque de ubicación de nudos, apoyos y aplicación de fuerzas y el último bloque corresponde a la orientación y tipo de material de los elementos.

Es importante mencionar que el uso adecuado de estos y de otros programas es responsabilidad de la persona que los maneja, ya que si no se tienen las bases necesarias en la materia, se corre el riesgo de obtener información errónea.

Si bien es cierto que este trabajo muestra la realización y aplicación de herramientas de cómputo para la solución de problemas de ingeniería estructural, también es cierto que nunca se pretende desplazar o eliminar el buen juicio y criterio del ingeniero en el manejo, operación e interpretación de los resultados obtenidos.

Anexo a este trabajo se incluye un diskette con los programas ejecutables desarrollados y sus códigos fuente con la finalidad de que el usuario interesado los modifique a sus necesidades y lograr con esto un aprovechamiento óptimo del material. Para ello se requiere contar con el compilador de FORTRAN 90 para Windows y el QUICK BASIC bajo MS-DOS.

David Joaquín Delgado Hernández.
Alfonso Islas Hernández.
Gonzalo Paz Mendoza.

BIBLIOGRAFÍA

Análisis Estructural. Jeffrey Laible. Mc Graw-Hill. Colombia, 1995.

Análisis Estructural. Jack McCormac. Harla. México, 1983.

Apuntes de la clase de Teoría General de las Estructuras I. DEPFI, UNAM.

Apuntes de la clase de Tópicos Estructurales y Aplicación de las Computadoras al Análisis Estructural. M. en I. Octavo García Domínguez. DEPFI, UNAM.

Apuntes de cimentaciones. Demeneghi, Puebla, Sanginés. Facultad de Ingeniería, UNAM. 1996.

Aprendiendo JAVA SCRIPT en una semana, Arman Danesh. Prentice Hall, México, 1996.

Basic. Ricardo Castellanos Casas. Progreso. México, 1987.

Creando una página Web con HTML fácil. Paul Mc Fedries. Prentice Hall. México. 1996.

Métodos Numéricos para Ingenieros. Steven Chapra. Mc Graw-Hill. México, 1988.

HTML. Diseño y creación de páginas Web. Ramón Soria. Ed. RA - MA. México, 1997.

HTML 3.2 Referencia visual. Dean Scharf. Prentice Hall. México, 1997.

HTML 3.2 Soluciones instantáneas. Robet Mullen, Prentice Hall. México, 1997.

Internet, ¿Qué hay que saber?. Ned Snell. Prentice Hall, Madrid España, 1996.

Introducción al comportamiento de los materiales. Demeneghi, Magaña y Sanginés. Facultad de Ingeniería. UNAM. México. 1986.

Introducción a JAVA. John December. Prentice Hall. México, 1996.

Instructivo para el programa de computadora Marplain. Fernando Monroy Miranda. Facultad de Ingeniería. UNAM. México. 1997.

JAVA Soluciones instantáneas. Michael Afergan. Prentice Hall. México, 1997

JAVA SCRIPT. Soluciones instantáneas. Rick Darnell. Prentice Hall. México. 1997.

Microsoft, JAVA SCRIPT versión 1.1 ¡Fácil!. Aaron Weiss. Prentice Hall. México, 1997 .

Using JAVA SCRIPT Special edition. Mark Reynolds. Prentice Hall. USA. 1997.

APÉNDICE A

SIMBOLOGÍA.

(Por orden de aparición)

Unidades:

F = Fuerzas

L= Longitudes

Ang = Angulares

( ) = Adimensional

σ = Esfuerzo normal (F/L^2)

E = Módulo de elasticidad (F/L^2)

ε = Deformación ( )

P = Fuerza normal (F)

Δ = Desplazamiento (L)

$\vec{d}$ = Vector de desplazamientos en el medio continuo (L)

$\varepsilon_{X,Y,Z}$ = Deformaciones lineales unitarias ( )

$\gamma_{XY,XZ,ZY}$ = Deformaciones angulares unitarias ( )

$\{e\}$ = Vector de deformaciones (L)

$[A]$ = Matriz de continuidad ( )

$\{d\}$ = Vector de desplazamientos (L)

$\tau_{XY,YZ,YZ}$ = Esfuerzos tangenciales (F/L^2)

$\sigma_{x,y,z}$ = Esfuerzos normales (F/L^2)

ε_T = Deformación transversal ( )

δ = Desplazamiento longitudinal (L)

G = Módulo de rigidez a cortante (F/L^2)

ν = Relación de Poisson ( )

$[f']$ = Matriz de flexibilidades ( )

$[S]$ = Vector esfuerzo (F/L^2)

$[F_c]$ = Fuerzas de cuerpo (F)

dV = Diferencial de volumen (L^3)

S_i = Propiedades de los elementos estructurales ( )

$\theta_{x,y,z}$ = Deformaciones angulares (Ang)

$\varphi_{x,y,z}$ = Giros en nudos con respecto a los ejes x, y, z respectivamente (Ang)

$d_{x,y,z}$ = Desplazamiento en dirección x, y ,z respectivamente (L)

A = Area de la sección transversal de un elemento (L^2)

L = Longitud de un elemento (L)

I = Momento de inercia del elemento (L^4)

k = Rigidez (F)

$[K]$ = Matriz de rigidez ( )

c = Función coseno ( )

s = Función seno ( )

M_t = Momento torsionante (F L)

$F_{x,y,z}$ = Fuerzas en dirección x, y, z respectivamente (F)

$M_{x,y,z}$ = Momentos en dirección x, y, z respectivamente (F L)

V = Fuerza cortante (F)

$S.\ G.$ = Sistema global de referencia ( )

$S.\ L.$ = Sistema local de referencia ( )

$[\ T\ ]$ = Matriz de transformación ( )

$[\ F_G\ ]$ = Vector de fuerzas en sistema globlal (F)

$[\ F_L\ ]$ = Vector de fuerzas en sistema local (F)

$[\ d_G\ ]$ = Vector de desplazamientos en sistema globlal (L)

$[\ d_L\ ]$ = Vector de desplazamientos en sistema local (L)

$[\ k_{AA}\ ],\ [\ k_{AB}\ ],\ [\ k_{BB}\ ],\ [\ k_{BA}\ ]$ = Submatrices de rigidez ( )

α = Angulo de inclinación de una barra con respecto al eje x (Ang)

β = Angulo de inclinación de una barra con respecto al eje y (Ang)

γ = Angulo de inclinación de una barra con respecto al eje z (Ang)

$U_{x,y,z}$ = Cosenos directores en x, y, z respectivamente ( )

$[\ P\ ]$ = Vector de cargas (F)

a_{ij} = Elemento del renglon i y de la columna j de la matriz de continuidad ( )

NN = Número de nudos ( )

NB = Número de barras ( )

Nudo = Nodo

$[\ B\ ]$ = Matriz de orden $NN \cdot NB$

gl = Grados de libertad en la estructura ( )

$[\ u\ ]$ = Vector de cosenos directores ( )

$S1$ = Sistema global 1 ( )

$S2$ = Sistema local 2 ( )

c = Coeficiente de cortante ( )

b = base de sección transversal (L)

y = Distancia del eje neutro a fibra superior (L)

A_c = Area de cortante (L^2)

$[F_A]$ = Fuerzas en el extremo A de una barra (F)

$[F_B]$ = Fuerzas en el extremo B de una barra (F)

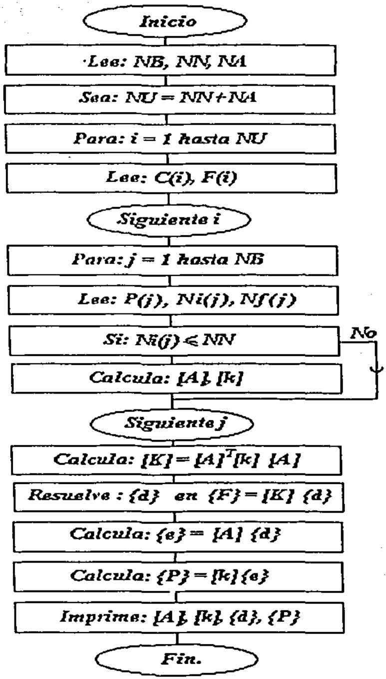
C(i) = Coordenas de nudos en un sistema de referencia dado.

F(i) = Fuerzas en los nudos referidas a un sistema de referencia dado.

P(i) = Propiedades geométricas y mecánicas del elemento que integra una estructura.

APÉNDICE B

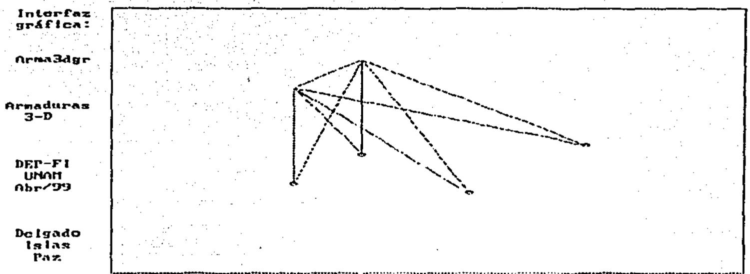
DIAGRAMA DE FLUJO DE LOS PROGRAMAS GENERADOS.



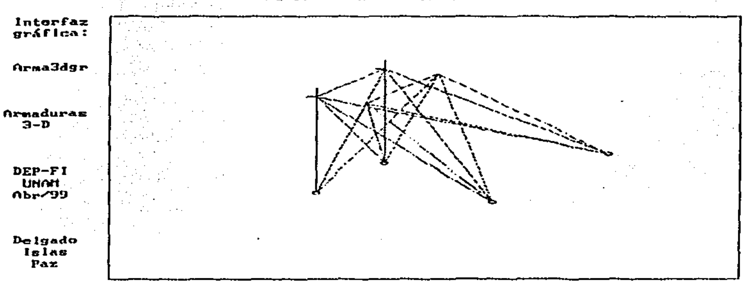
APÉNDICE C

APLICACIONES DEL CAPITULO VI.

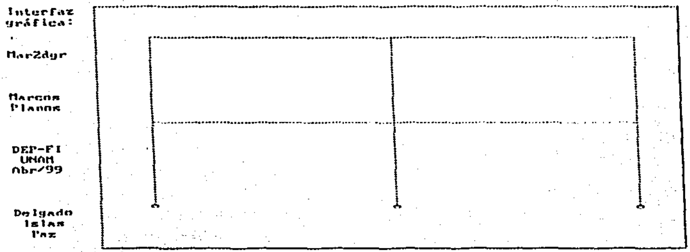
Ejemplo 2. Armadura tridimensional.



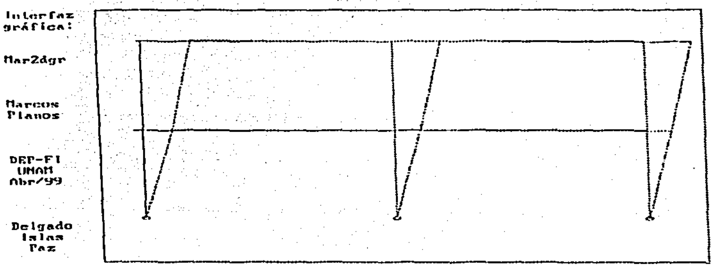
Configuración deformada:



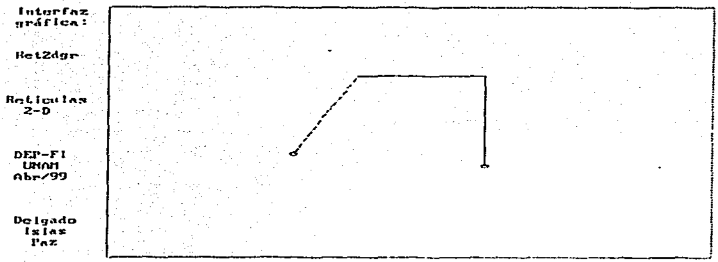
Ejemplo 3. Marco plano.



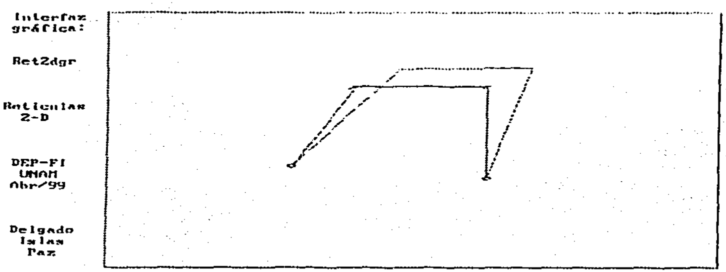
Configuración deformada:



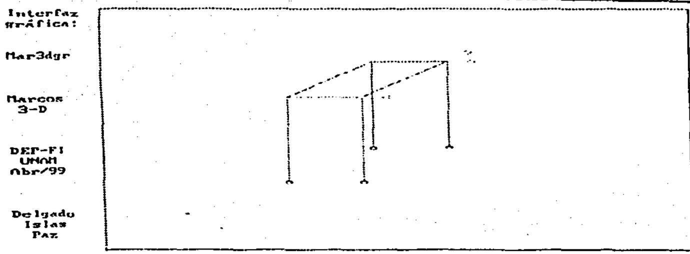
Ejemplo 5. Retícula plana.



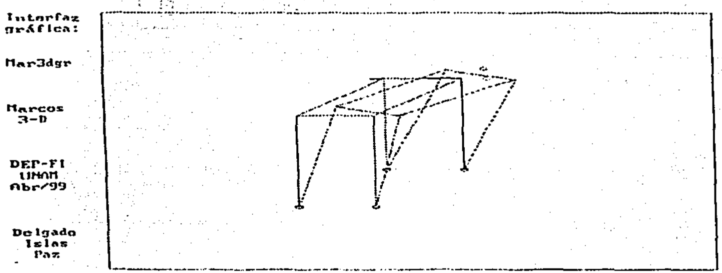
Configuración deformada:



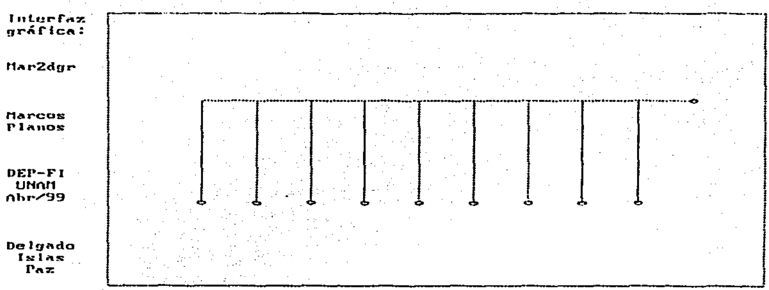
Ejemplo 6. Marco tridimensional.



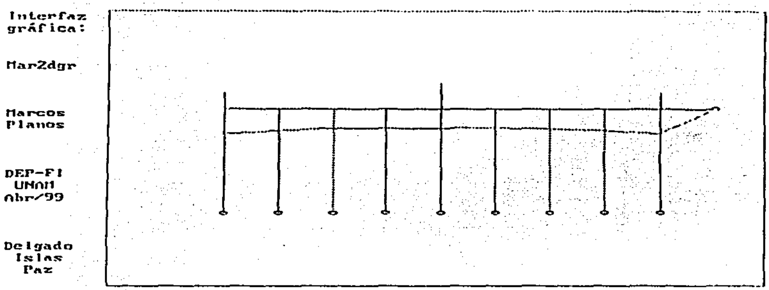
Configuración deformada:



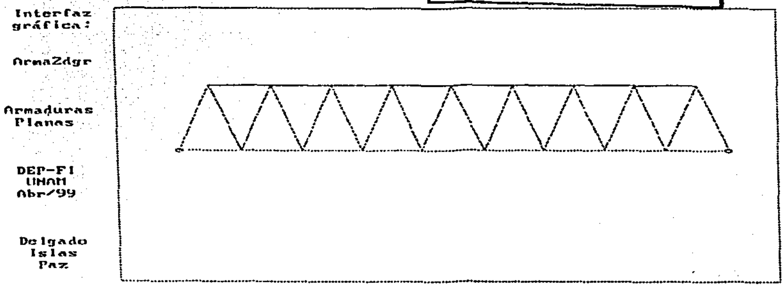
Ejemplo de interacción Suelo – estructura.



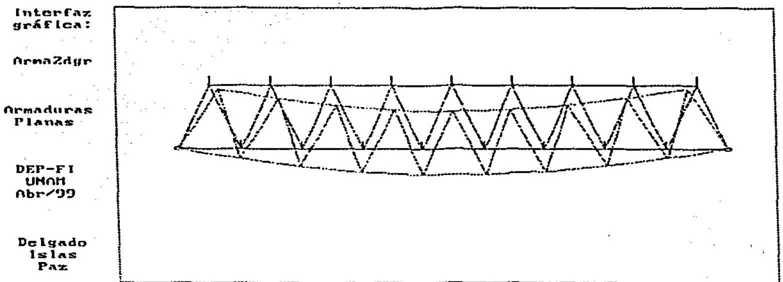
Configuración deformada:



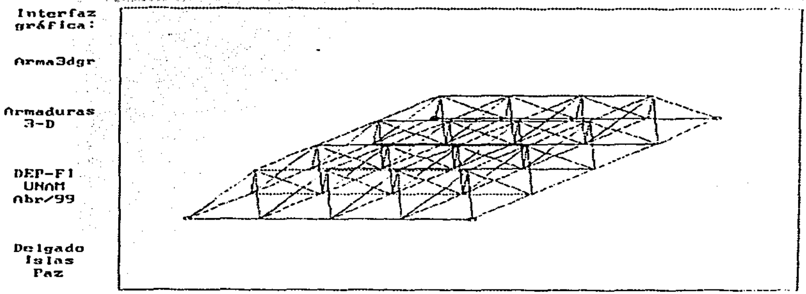
Aplicación en armaduras planas.



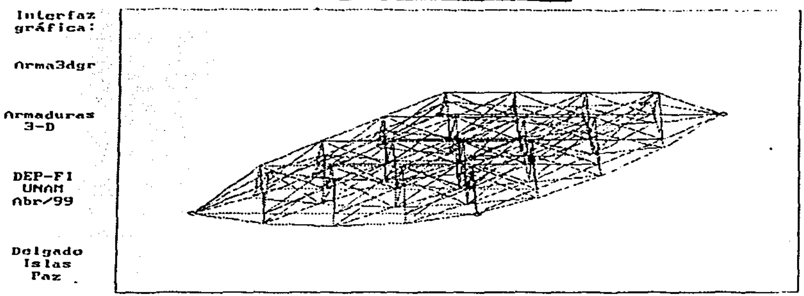
Configuración deformada.



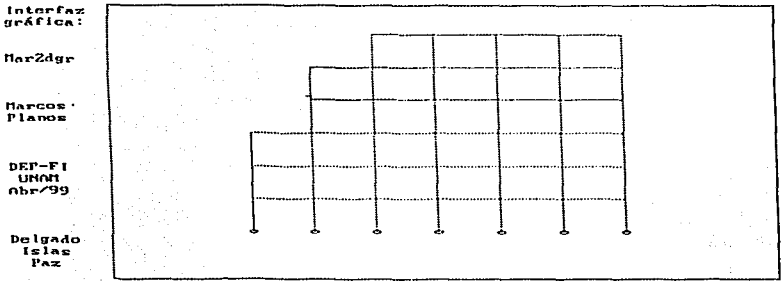
Aplicación en armaduras espaciales.



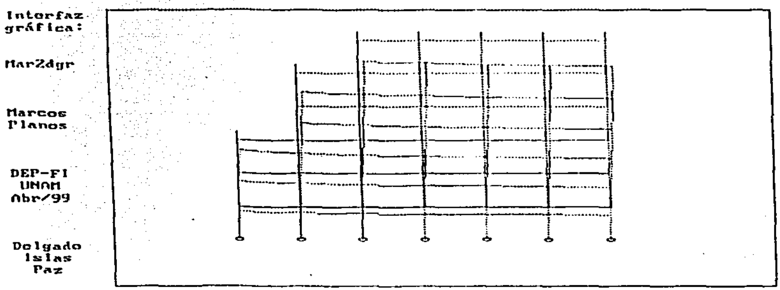
Configuración deformada.



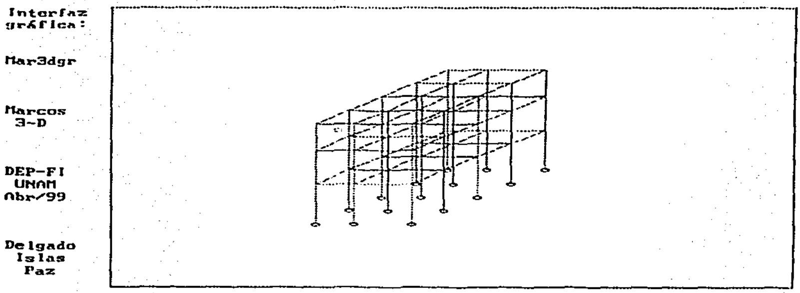
Aplicación en Marcos planos.



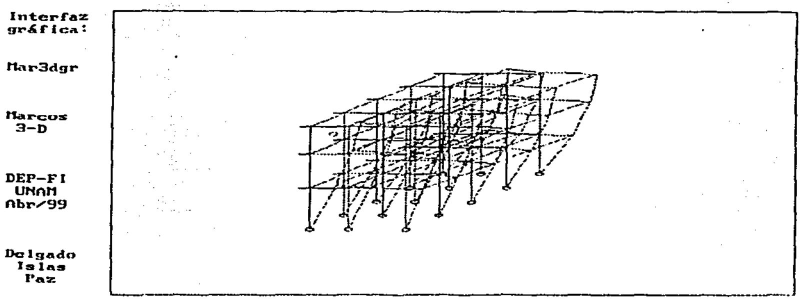
Configuración deformada.



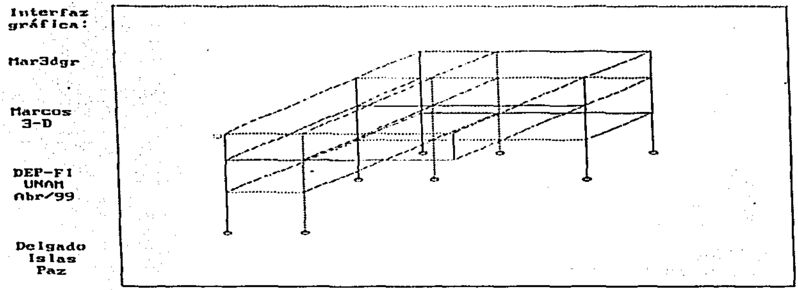
Aplicación en marcos espaciales.



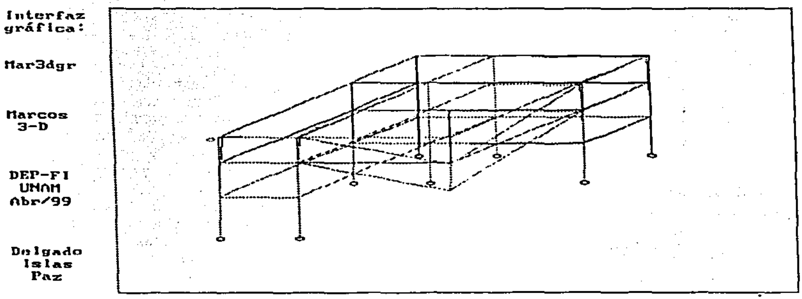
Configuración deformada.



Aplicación en retícula plana.



Configuración deformada.



INDICE ALFABÉTICO.

A

C

D