

00362  
8



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO**

**POSGRADO EN CIENCIAS FISICAS**

**"DETERMINACION DE LOS COEFICIENTES  
DE ASFERICIDAD DE UNA SUPERFICIE  
OPTICA RAPIDA"**

**T E S I S**  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:  
**MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)**  
P R E S E N T A :  
**MARIO FRANCISCO GONZALEZ CARDEL**

**DIRECTOR DE TESIS:  
DR. JOSE RUFINO DIAZ URIBE**

**pcf**

posgrado en ciencias físicas  
u n a m

MEXICO, D. F.

**pcf**

posgrado en ciencias físicas  
u n a m

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

2003.

1



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# **PAGINACIÓN DISCONTINUA**

**Dedico esta tesis a:**

**† Mis padres  
que siempre están en mi pensamiento.**

**Anita,  
que a pesar de las  
discusiones te quiero.**

**Y a Isaac.**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

## **AGRADECIMIENTOS.**

*Mi más sincero agradecimiento al Dr. Rufino Díaz Uribe por su paciencia, apoyo y dirección en la realización de este trabajo de tesis.*

*Agradezco al Ing. Benjamín Valera, del Laboratorio de Metrología Dimensional del Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, por su colaboración al caracterizar las superficies ópticas con la mesa de coordenadas.*

*Agradezco a la Quím. Josefina Elizalde Torres por la revisión del trabajo y muy especialmente por sus palabras de ánimo así como por su apoyo y amistad que me ha brindado.*

*Un especial agradecimiento a todos mis amigos y compañeros que me brindaron su apoyo y que echaron porras para la realización de este trabajo.*

*Deseo agradecer también al Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico por darme la oportunidad de alcanzar este objetivo al proporcionarme las facilidades para la realización de esta tesis.*

*Este trabajo fue realizado con los apoyos parciales de los proyectos CONACyT 37077-E y PAPIIT IN115000*

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## INDICE.

|  |    |
|--|----|
| RESUMEN.   | 1  |
| INTRODUCCIÓN.  | 11 |
| 1. DESCRIPCIÓN Y APLICACIONES DE LAS SUPERFICIES ASFÉRICAS EN ÓPTICA                       | 1  |
| 1.1 Introducción.  | 2  |
| 1.2 Superficies esféricas.   | 3  |
| 1.3 Descripción matemática de una superficie esférica.                                     | 13 |
| 1.4 Pruebas ópticas.   | 15 |
| 1.4.1 Pruebas Geométricas.   | 15 |
| 1.4.1.1 Prueba de la Navaja.   | 17 |
| 1.4.1.2 Prueba del alambre.  | 20 |
| 1.4.1.3 Prueba de Ronchi.  | 21 |
| 1.4.1.4 Prueba de Ronchi en dos dimensiones.   | 23 |
| 1.4.1.5 Prueba de Hartmann.  | 24 |
| 1.4.1.6 Prueba de Platzeck Gaviola.  | 26 |
| 1.4.1.7 Pantallas Nulas.   | 27 |
| 1.4.2 Pruebas Interferométricas.   | 30 |
| 1.4.2.1 Interferómetro de Newton.  | 30 |
| 1.4.2.2 Interferómetro de Fizeau.  | 32 |
| 1.4.2.3 Interferómetro de Twyman- Green.   | 34 |
| 1.5 Pruebas Mecánicas.   | 36 |
| 1.6 Conclusiones.  | 38 |
| 1.7 Referencias.   | 39 |
| 2. PRUEBAS POR DEFLECTOMETRÍA LÁSER  | 42 |
| 2.1 Introducción.  | 43 |
| 2.2 Deflectometría láser.  | 43 |
| 2.3 Método de medición.  | 44 |
| 2.4 Análisis de datos.   | 49 |
| 2.5 Mediciones   | 50 |
| 2.6 Obtención de los coeficientes de asfericidad por el método de la inversión polinomial. | 52 |
| 2.6.1 Cónicas.   | 52 |
| 2.6.2 Esféricas  | 57 |
| 2.7 Conclusiones.  | 66 |
| 2.8 Referencias.   | 66 |
| 3. EVALUACIÓN DE SUPERFICIES ASFERICAS.  | 68 |
| 3.1 Introducción.  | 69 |
| 3.2 Integración numérica.  | 69 |
| 3.2.1 Planteamiento del problema.  | 69 |
| 3.2.2 Aproximación Inicial.  | 70 |
| 3.2.3 Primera Iteración.   | 71 |

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

|  |     |
|--|-----|
| 3.2.4 k-ésima iteración.   | 73  |
| 3.2.5 Convergencia del método.                                     | 75  |
| 3.2.6 Criterio de Paro.  | 81  |
| 3.2.7 Precisión del método.  | 83  |
| 3.2.7.1 Lente <i>A</i> , Cinephore de Bausch & Lomb.               | 84  |
| 3.2.7.2 Lente <i>B</i> , LAG 017 de Melles Griot                   | 92  |
| 3.3 Comparación con otras mediciones.                              | 99  |
| 3.3.1 Pruebas geométricas.   | 99  |
| 3.3.1.1 Prueba de la Navaja.                                       | 99  |
| 3.3.1.2 Prueba del alambre.  | 100 |
| 3.3.1.3 Prueba de Ronchi.  | 101 |
| 3.3.1.4 Prueba de Hartmann.  | 101 |
| 3.3.2 Método Fotográfico.  | 102 |
| 3.3.3 Método mecánico.   | 106 |
| 3.3.3.1 Superficie óptica <i>B</i> , de Melles Griot.              | 110 |
| 3.3.3.2 Superficie óptica <i>A</i> , de Bausch & Lomb.             | 113 |
| 3.4 Estabilidad del método.  | 116 |
| 3.5 Conclusiones.  | 117 |
| 3.7 Referencias.   | 118 |
| <b>4. CONCLUSIONES.</b>  | 119 |
| 4.1 Introducción.  | 120 |
| 4.2 El método.   | 120 |
| 4.3 Características.   | 121 |
| 4.3.1 La aproximación inicial.                                     | 121 |
| 4.3.2 Convergencia.  | 121 |
| 4.3.3 Criterio de paro.  | 121 |
| 4.3.4 Precisión.   | 122 |
| 4.3.5 Estabilidad.   | 122 |
| 4.4 Ventajas.  | 123 |
| 4.5 Resultados.  | 123 |
| 4.6 Aplicaciones.  | 124 |
| 4.7 El futuro.   | 124 |
| 4.8 Un comentario final.   | 126 |
| 4.9 Referencias.   | 126 |
| Apéndice A: Inversión Polinomial.                                  | 127 |
| Apéndice B: Tablas.  | 136 |
| Apéndice C: Programa para ajuste polinomial por mínimos cuadrados. | 145 |
| Apéndice D: Álgebra complementaria                                 | 149 |
| <b>Bibliografía</b>  | 153 |

## RESUMEN.

En este trabajo se propone un método para obtener el perfil de superficies ópticas rápidas con simetría de revolución, a partir de mediciones experimentales de la aberración longitudinal y el ángulo entre líneas normales a la superficie de prueba y su eje óptico, en este caso, determinados experimentalmente por deflectometría láser. Dicho método está basado en una integración numérica y se aplica iterativamente al conjunto de mediciones experimentales, el método entrega un conjunto de puntos sobre la superficie de prueba en coordenadas cartesianas, con lo que se puede determinar la forma de la superficie, de manera independiente de un modelo matemático particular que la describa. Con tal información es posible ajustar un polinomio de grado diez para determinar el radio de curvatura paraxial y los coeficientes de asfericidad. Para probar el método, se aplica a dos superficies y los resultados se comparan con los obtenidos por un método de contacto, encontrando diferencias de décimas de milímetro entre ambos. Así mismo, se desarrolla el análisis numérico con el que se demuestra la convergencia y estabilidad del método propuesto, siendo éstas sus principales ventajas. Queda por resolver la necesidad de hacer mediciones cercanas al vértice, así como la de incrementar la precisión experimental.

## SUMMARY.

In this work a method to obtain the profile of optic surfaces with revolution symmetry is shown. It starts from experimental measurement of the longitudinal aberration and the angle between each normal line and the optical axis of the surface, in this case, determined experimentally by laser deflectometry. This method is based on a numeric integration which is applied iteratively to the set of experimental measurements, the method gives a set of points on the profile surface's in Cartesian coordinates, from which the form of the surface can be determined in an independent way of a particular mathematical model that describes it. With such information it is possible to adjust a ten degree polynomial to determine the paraxial radius of curvature and the aspheric coefficients. To prove the method, it is applied to two surfaces and the results are compared with those obtained by a contact method, finding differences of some tenths of a millimeter between both. The numeric analysis is developed and the convergence and stability of the proposed method are demonstrated, being these its main advantages. It remains to solve the necessity to make measurements near to the vertex, as well as the one of increasing the experimental precision.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



## INTRODUCCIÓN

En años recientes el uso de superficies ópticas esféricas en el diseño de sistemas ópticos se ha incrementado considerablemente, debido a las ventajas que presentan frente al uso de superficies esféricas, teniendo como costo la dificultad para su construcción, lo que trae como consecuencia la necesidad de caracterizar las superficies ópticas, o bien de probar su calidad. Dicha superficie puede ser parte de algún elemento de un sistema, o bien, el sistema mismo. Entendiendo por caracterizar el determinar la forma de la superficie, o sus parámetros. En este sentido surgen dos problemas: el primero se refiere a probar la calidad de una superficie que ha sido construida basándose en un diseño conocido, es decir, se conocen todos sus parámetros, como radio de curvatura paraxial, constante de conicidad o coeficientes de deformación, y la caracterización de esta implica medir las diferencias entre el diseño y la superficie real; el segundo problema se refiere a la caracterización de una superficie desconocida, donde la prueba implica la obtención de los parámetros que determinan o describen la superficie.

El tener una descripción de la superficie quiere decir conocer las coordenadas de cada punto de la misma, y/o establecer un modelo matemático que permita conocer dichas coordenadas. Existe una gran variedad de procedimientos para determinar la calidad de una superficie óptica, denominados pruebas ópticas, entre las que se pueden citar las geométricas, las interferométricas y las mecánicas. Algunas se destacan por su alta precisión como las interferométricas y otras por su simplicidad, como algunas geométricas.

Las superficies esféricas, muy en especial las denominadas rápidas, es decir las superficies cuyo  $f/\#$  es menor que 1, tienen características muy particulares, que hacen difícil y a veces imposible el uso de las pruebas ópticas convencionales, por lo que es necesario modificarlas y en algunos casos hasta se requiere proponer nuevas pruebas. En el Laboratorio de Óptica aplicada del Centro de Instrumentos (hoy Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico) de la Universidad Nacional Autónoma de México, desde finales del siglo pasado se viene trabajando en el desarrollo de pruebas alternativas que permitan caracterizar superficies esféricas rápidas. En particular se ha desarrollado una prueba a la que llamaremos PRUEBA POR DEFLECTOMETRÍA LÁSER DE REFLEXIÓN, la que consiste en medir el ángulo de deflexión de un haz láser que se hace incidir sobre la superficie que se quiere caracterizar. Posteriormente la superficie se ubica de forma que el haz se retrorefleje, permitiendo con ello conocer el ángulo de la normal y la aberración longitudinal para un conjunto de puntos sobre la superficie; hasta ahora se ha trabajado con superficies que presentan simetría de revolución, por lo que basta con medir un perfil para tener la descripción completa de la superficie.

Una vez que se tienen los valores del ángulo de la normal y la aberración longitudinal para un conjunto de puntos sobre un perfil de la superficie se requiere un procedimiento para obtener, a partir de dichos datos, las coordenadas cartesianas para cada punto.

Un método para hallar las coordenadas cartesianas para cada punto es propuesto en este trabajo, el cual está formado por cuatro capítulos. En el primero se describen las superficies ópticas esféricas, tanto físicamente como matemáticamente, también se muestran algunos ejemplos de superficies ópticas esféricas comerciales, mencionando algunas características y aplicaciones de ellas, así como las principales pruebas ópticas conocidas.

En el capítulo dos, se describe el procedimiento experimental empleado en la medición de la aberración longitudinal y el ángulo entre las normales y el eje óptico de una superficie de prueba, así mismo se plantea la extensión de un método basado en una inversión polinomial aplicado a superficies cónicas, desarrollado por Díaz Uribe (1985), encontrando ciertas limitaciones por las que no es aplicable de manera general a superficies esféricas.

Posteriormente, en el capítulo tres, se propone un método basado en una integración numérica el cual permite encontrar las coordenadas cartesianas de cada uno de los puntos para los cuales se midieron experimentalmente los parámetros antes indicados; en este mismo capítulo se desarrolla el análisis numérico del método determinando su precisión, criterios de convergencia, posibles aproximaciones iniciales y criterios de paro. A continuación y como paso adicional, sin ser parte del método, se ajustó por el método de mínimos cuadrados, al conjunto de puntos obtenido por el método numérico, un polinomio de grado 10 y como consecuencia de la simetría de revolución, sólo con términos de grado par, es decir de la forma:

$$z = D_2s^2 + D_4s^4 + D_6s^6 + D_8s^8 + D_{10}s^{10}.$$

El método propuesto se aplicó en la caracterización de dos superficies comerciales, hallando los polinomios que las describen. Una vez que se cuenta con el polinomio, que en principio describe a las superficies de prueba, para conocer la eficiencia del método propuesto, se caracterizaron ambas superficies por un método mecánico. Dicho método consistió en tomar directamente las coordenadas cartesianas, de un gran número de puntos sobre la superficie, con una mesa de tres coordenadas utilizada en el Laboratorio de Metrología Dimensional del Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico de la UNAM. Ya hecha la caracterización por ambos métodos se compararon los resultados encontrando que ambas descripciones difieren en décimas de milímetros.

En virtud de los resultados obtenidos, en el último capítulo se comenta la posibilidad de extender la aplicación del método al caso de superficies esféricas sin simetría de revolución y/o superficies fuera de eje, hecho que permitirá contribuir en la caracterización de dispositivos ópticos desarrollados a partir de óptica segmentada como el Gran Telescopio Milimétrico que planea construir la Universidad de Massachusetts en colaboración con el Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica y el Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**DESCRIPCIÓN Y APLICACIONES DE LAS SUPERFICIES  
ASFÉRICAS EN ÓPTICA.**

**CAPÍTULO 1**

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

1

## 1.1 INTRODUCCIÓN.

**D**esde mucho tiempo atrás las lentes han sido construidas casi exclusivamente a partir de superficies esféricas; un ejemplo es el primer telescopio que construyó Galileo (Galileo, 1999), y aunque sólo suponía la esfericidad de sus lente, en sus notas lo describe así: *"Preparé antes un tubo de plomo, y puse en sus extremos dos vidrios como espejos; los dos planos de una parte, y de la otra uno cóncavo y otro convexo en forma esferoidal"*.

Es tan común el uso de lentes esféricas que hasta Walt Disney lo menciona en su cortometraje titulado *"Donald en el país de las matemágicas"* (Disney, 1959). Esto es en gran parte debido a que su elaboración es más fácil, lo cual implica un costo menor y a que existen diversas pruebas para verificar su calidad.

El uso de superficies esféricas implica que los sistemas ópticos desarrollados sean de gran tamaño o bien que utilicen gran número de lentes. Para resolver este problema en tiempos recientes las superficies ópticas asféricas son usadas con mayor frecuencia en el diseño de sistemas ópticos, ya que el uso de estas superficies mejora o iguala la calidad de la imagen, con un número menor de superficies.

La eficiencia de un sistema óptico depende fuertemente de la calidad de las superficies ópticas que lo forman, por lo que es necesario verificar que se encuentra dentro de las tolerancias permitidas en el diseño. Las pruebas ópticas tradicionales, como las interferométricas, mecánicas o geométricas, fueron diseñadas principalmente para probar la calidad de superficies esféricas, (Ojeda 1992). Debido a esto, dichas pruebas son aplicables sólo a superficies que no difieran mucho de una esfera y principalmente superficies cóncavas de número  $f/\#$  grande, ya que para superficies convexas, es necesario adicionar sistemas ópticos complicados que compensen la divergencia de los haces, (Offner y Malacara 1992) lo que aumenta el costo, la complejidad y la incertidumbre de las pruebas, pues los resultados dependen de la calidad óptica de estos sistemas.

Por todo lo anterior se hace necesario modificar las pruebas existentes, o bien, proponer nuevas pruebas, (Díaz y Campos 2000), para poder verificar la calidad de superficies asféricas en general con un grado de precisión aceptable. Si bien se han desarrollado diferentes métodos de prueba para superficies asféricas, algunos de ellos sólo

son aplicables cuando el  $f/\#$  es mayor a 1, o para superficies cóncavas o algunos son tan elaborados que el costo sufre un aumento considerable. Como objetivo del presente trabajo, es proponer un método en el que a partir de la medida de la aberración longitudinal y el ángulo entre las líneas normales a la superficie y el eje óptico para un conjunto de puntos sobre ella, se realiza una integración numérica que permite obtener las coordenadas cartesianas de cada uno de los puntos, obteniendo así un perfil de la superficie en cuestión. Posteriormente se realiza un ajuste por mínimos cuadrados para obtener un polinomio que describe ese perfil, el que a su vez permite identificar los coeficientes de asfericidad. El método es aplicado a dos superficies ópticas, esféricas, con simetría de revolución, comerciales de número  $f/\#$  es menor a 1, superficies que son muy complicadas de caracterizar por las pruebas tradicionales. Se presenta además un análisis de las incertidumbres y errores al aplicar el método a las superficies antes mencionadas.

## **1.2 SUPERFICIES ASFÉRICAS.**

Una lente es una porción de vidrio u otro material refractor transparente limitado por dos superficies comúnmente esféricas, una de las cuales puede ser plana ( $R = \infty$ ) ver figuras 1.1 y 1.2.

El uso de superficies esféricas se desprende de la relativa facilidad en su elaboración, ya que si se tienen dos superficies esféricas, una cóncava y otra convexa, de igual radio, al colocar una sobre la otra, estas entran en contacto íntimo en todos sus puntos, de no ser así, colocando algún abrasivo y frotando una contra la otra, como se muestra en la figura 1.3, las imperfecciones y deformaciones respecto de una esfera, de ambas superficies disminuirán o desaparecerán, por otro lado, debido a su relativa facilidad de fabricación, el uso de esféricas implica un menor costo, comparado con el uso de superficies esféricas. (Hetch y Zajac, 1990).

Recientemente se ha incrementado el uso de superficies esféricas en el diseño de sistemas ópticos, como por ejemplo telescopios, cámaras de vídeo, reflectores y hasta lentes oftálmicas. Pero, *¿qué es una superficie Esférica?* Podemos definir de manera breve a una superficie esférica, como aquella superficie que no es esférica. Haciendo combinaciones de superficies esféricas, o bien esféricas con esféricas, pueden diseñarse sistemas ópticos con

características muy particulares que amplían la gama de aplicaciones de estas superficies, entre las que se encuentran colimadores, radiómetros, condensadores, sistemas de proyección, cámaras fotográficas, además de las ya mencionadas.

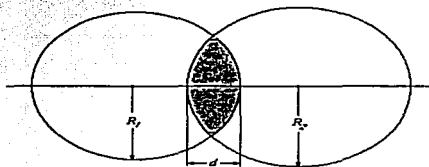


Figura 1.1. Lente formado por la intersección de dos superficies esféricas de diferentes radios..

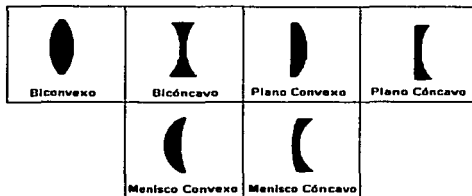


Figura 1.2. Diversos tipos de lentes esféricas

Con una lente esférica se puede tener un sistema con distancia focal mucho menor de lo que se tendría con una lente esférica de igual diámetro e igual aberración esférica. (Melles Griot 1997-98).

Muchas lentes simples comerciales, como las usadas para el desarrollo del presente trabajo, tienen sólo una superficie esférica, siendo la otra superficie plana, convexa o cóncava esférica.



Figura 1.3. Proceso de tallado de una superficie esférica (Hetch, Zajac, 1990)

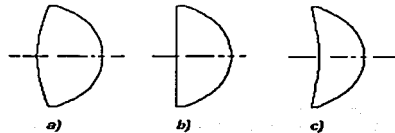


Figura 1.4. Perfiles de diversas lentes esféricas comerciales. a) Una superficie esférica y la otra esférica convexa, b) Una superficie esférica y la otra plana, c) Una superficie esférica y la otra esférica cóncava. (Imagen tomada del catálogo de Melles Griot, 1978)

Estas lentes pueden reducir y en algunos casos eliminar las aberraciones esféricas y de coma, con ellas se pueden concentrar más energía en un área pequeña, como en una pupila de entrada, en un sistema de proyección o el área sensible de un sensor. (Melles Griot, 1997-98).

Las superficies esféricas pueden eliminar la aberración en los haces luminosos que pasan cerca del borde de la lente. Estas lentes son ideales para trabajar con números  $f$  pequeños ( $f/\# < 1$ ), arreglos que son de gran utilidad en sistemas de proyección y de iluminación. Otras de las aplicaciones de las lentes esféricas incluyen comunicación óptica,

donde se usa una lente esférica para dirigir los haces de la fuente luminosa hacia una fibra óptica, sistemas de detección de humo, fuego e intrusión, donde mediante una lente asférica se enfoca un haz luminoso sobre un detector y al interponerse el humo el haz cambia de dirección o se desenfoca, también se les encuentra en equipos de detección, monitoreo y alarma de vapores químicos, etc.

Las lentes esféricas pueden ser utilizadas solas o combinadas con otros componentes ópticos, como lentes esféricas, filtros, espejos, etc. En general se puede decir que una lente esférica es un elemento óptico altamente eficiente en aplicaciones donde el espacio sea limitado, en sistemas que requieran una distancia focal corta y/o bien un número  $f$  pequeño, además una esférica puede sustituir a dos o más esferas disminuyendo el número de capas antirreflectoras y su uso se ha extendido tanto que comercialmente podemos encontrar una gran variedad de ellas, con diversas características, utilizables en un sinnúmero de aplicaciones, algunos ejemplos de estas superficies se muestran en la figura 1.5 y las características de algunas de ellas se listan en la tabla 1.1, en donde podemos comparar sus números  $f$ , y observar que se trata de superficies rápidas.



*Figura 1.5. Lentes condensadoras esféricas comerciales de la serie 01LAG de la marca Melles Griot.*

*Tabla 1.1: Características de esféricas de la serie 01-LAG del distribuidor Melles Griot*

| $f$ (mm) | $\phi$ (mm) | $f/\#$ | Num. Cat.  |
|----------|-------------|--------|------------|
| 8.5      | 12.0        | 0.71   | 01 LAG 000 |
| 12.0     | 18.0        | 0.67   | 01 LAG 111 |
| 33.0     | 52.0        | 0.63   | 01 LAG 010 |
| 35.0     | 50.0        | 0.70   | 01 LAG 013 |

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Otros ejemplos de sistemas ópticos que también pueden ser diseñados a partir de superficies esféricas son los espejos, elementos que se usan como reflectores, su amplia gama de aplicaciones ha llevado a los fabricantes a incluirlos en sus catálogos, para que así estén a disposición de los usuarios diversos tipos de espejos con una amplia variedad de especificaciones. Comercialmente existen espejos parabólicos, o elípticos. Estos espejos pueden contener al vértice, o no, dependiendo de la aplicación particular en la que se usarán.



Figura 1.6a. Espejo Parabólico, distribuido por la empresa Melles Griot correspondiente a la serie 02RPM.

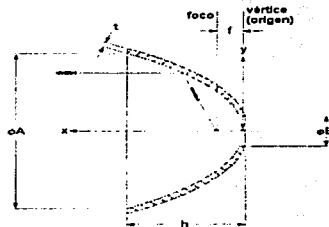


Figura 1.6b. Perfil y parámetros del espejo parabólico de la figura 1.6a.

En las figuras 1.6a y 1.6b se muestra un espejo parabólico sin vértice de la serie 02 RPM del distribuidor Melles Griot, el cual puede ser utilizado como reflector, ya que al colocar una fuente luminosa en el foco, se obtienen haces paralelos, las características de unos pocos de los reflectores de esta serie se muestran en la tabla 1.2, en la que podemos observar que se trata de superficies cóncavas muy rápidas que difieren de las lentes ya que las segundas son convexas y refringentes.

Tabla 1.2: Características de espejos parabólicos de la serie 02-RPM del distribuidor Melles Griot

| $f$ (mm) | $oA$ (mm) | $f/\#$ | $oB$ (mm) | $h$ (mm) | $t$ (mm) | No. Cat.   |
|----------|-----------|--------|-----------|----------|----------|------------|
| 10.2     | 88.9      | 0.11   | 22.2      | 46.1     | 0.6      | 02 RPM 001 |
| 19.1     | 152.4     | 0.13   | 22.2      | 75.2     | 0.8      | 02 RPM 008 |
| 38.1     | 241.3     | 0.16   | 57.2      | 91       | 1        | 02 RPM 017 |

Otro ejemplo de superficies asféricas son los espejos elipsoidales, en las figuras 1.7a y 1.7b se muestra un espejo formado por una sección elíptica sin vértice, de la serie 02 REM del distribuidor Melles Griot, las características de algunos de los reflectores de esta serie se muestran en la tabla 1.3, en donde al igual que en las tablas anteriores se observa que son superficies rápidas concavas.



Figura 1.7a Espejos Elípticos, distribuidos por la empresa Melles Griot, de la serie 02 REM.

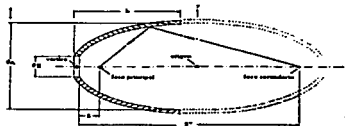


Figura 1.7b. Perfil y parámetros del espejo elíptico mostrado en la figura 1.7a.

Tabla 1. 3: Características de espejos elípticos de la serie 02-REM del distribuidor Melles Griot

| $s$ (mm) | $oA$ (mm) | $f/\#$ | $h$ (mm) | $s''$ (mm) | $S''-s$ (mm) | $oB$ (mm) | $t$ (mm) | No. Cat.   |
|----------|-----------|--------|----------|------------|--------------|-----------|----------|------------|
| 12.1     | 74.4      | 0.16   | 56.1     | 115        | 102.8        | 25.4      | 0.76     | 02 REM 005 |
| 12.1     | 74.4      | 0.16   | 58.9     | 115        | 102.8        | 12.7      | 0.76     | 02 REM 001 |
| 21       | 144.2     | 0.15   | 105.4    | 262        | 241          | 31.8      | 0.76     | 02 REM 011 |

Otros ejemplos de superficies esféricas que comercialmente podemos encontrar son los reflectores fuera de eje, es decir, están formados por una sección cualquiera de una cónica, generalmente alejada del eje focal, y por tanto del vértice de la superficie esférica en cuestión. En la figura 1.8 se muestra un elemento fuera de eje.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

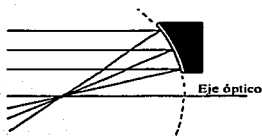


Figura 1.8. Sección esférica fuera de eje. la superficie no cruza al eje óptico.

En la geometría mostrada en la figura 1.8 el haz enfocado puede ser procesado posteriormente sin obstruir el espejo. Estas superficies pueden encontrarse comercialmente en diversos materiales y calidades ópticas, en las siguientes figuras se presentan ejemplos de este tipo de superficies, que se encuentran en el mercado.



Figura 1.9a Espejo Parabólico fuera de eje, distribuido por la empresa Melles Griot. Utilizado en el diseño de un Queratopógrafo Láser en el Centro de Instrumentos de la UNAM.

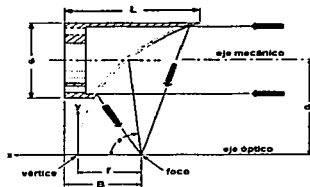


Figura 1.9b. Diagrama esquemático de los espejos parabólicos fuera de eje, mostrados en la figura 1.9a

En la figura 1.9a se muestra un conjunto de espejos parabólicos fuera de eje de la serie 02 POA del distribuidor Melles Griot, las características de algunos de los reflectores de esta serie se muestran en la figura 1.9b y en la tabla 1.4, que muestra superficies cóncavas rápidas.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Tabla 1. 4: Características de espejos parabólicos fuera de eje de la serie 02-POA del distribuidor Melles Griot

| $f$ (mm) | $o$ (mm) | $f\#$ | $d$ (mm) | $B$ (mm) | $\theta$ (grad) | $L$ (mm) | $A$ (mm) | No. Cat.   |
|----------|----------|-------|----------|----------|-----------------|----------|----------|------------|
| 10.2     | 25.4     | 0.40  | 25.4     | 12.7     | 102.8           | 38.4     | 12.7     | 02 POA 011 |
| 38.1     | 50.8     | 0.75  | 76.2     | 34.9     | 90              | 64.5     | 34.9     | 02 POA 015 |
| 59.7     | 63.5     | 0.94  | 119.4    | 38.1     | 90              | 74.2     | 44.5     | 02 POA 017 |

Aunque estas superficies también son ejemplos de esféricas cóncavas rápidas y que pueden ser parte de una superficie de revolución, su caracterización se vuelve complicada y el trabajo aquí desarrollado y presentado no cubre la caracterización de este tipo de superficies, sólo se limita a las superficies esféricas en eje con simetría de revolución, pero se pretende extenderlo a ellas en un futuro cercano. Como un ejemplo de la aplicación de las superficies esféricas fuera de eje, se puede citar el diseño y construcción de un prototipo de queratopógrafo láser, desarrollado en el Centro de Instrumentos de la UNAM, (Díaz y Granados, 1999). En la siguiente figura se muestra un diagrama esquemático del equipo, donde se aprecia el uso de un espejo parabólico fuera de eje para concentrar sobre el centro de curvatura promedio de la córnea los haces provenientes del sistema de barrido.

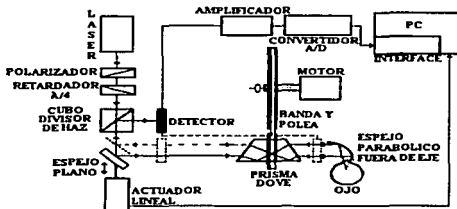


Figura 1.10. Diagrama esquemático de un queratopógrafo láser, desarrollado en el CIUNAM, en el cual se utiliza un espejo parabólico fuera de eje.

Este prototipo fue diseñado para medir las deformaciones de la superficie corneal, a partir de la medición de la posición de un haz láser reflejado por la córnea. En su recorrido el láser es reflejado por un espejo parabólico fuera de eje, y llevado por el resto del sistema óptico hasta un detector de posición de haces luminosos. En esta aplicación es de gran importancia conocer la calidad de los componentes ópticos, ya que las deformaciones medidas en la superficie corneal son muy pequeñas y debe quedar muy claro si las desviaciones del haz reflejado se deben a deformaciones de la córnea o a defectos de los elementos ópticos del sistema.

Ahora se mencionan dos ejemplos más de superficies esféricas con simetría de revolución, que resultan difíciles de caracterizar por los métodos convencionales. Estas superficies se generan al tomar una línea que puede ser recta, como en la figura 1.11 o una sección de parábola, como en la figura 1.12, y hacerlas girar sobre un eje arbitrario, dando así origen a una superficie de revolución. En el primer caso se tiene un cono, o axicon en la terminología óptica actual, y en el segundo caso un paraboloides poco común, denominado *condensador parabólico compuesto* (CPC). (Díaz 1990).

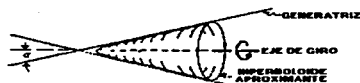
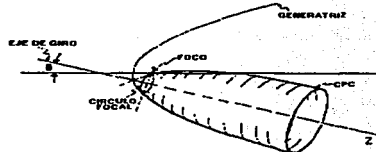


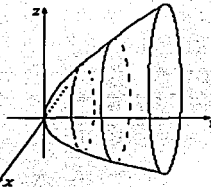
Figura 1.11, Esférica generada al girar una línea recta sobre un eje arbitrario.



*Figura 1.12. Al considerar la sección de una parábola y hacerla girar sobre un eje que se encuentra a un ángulo  $\theta$  del eje focal, se genera un condensador parabólico compuesto CPC, que es una superficie esférica con simetría de revolución.*

Estos dos últimos ejemplos muestran superficies bastante rápidas, de números  $f$  pequeños, por lo que resultan difíciles de caracterizar, y aunque cuentan con simetría de revolución no pueden caracterizarse por el método propuesto, ya que no cuentan con un radio de curvatura paraxial, que es un parámetro importante para el método propuesto en este trabajo.

Ahora veamos un ejemplo más general de superficie esférica, esta se presenta cuando la superficie no cuenta con simetría de revolución, como se muestra en la figura 1.13.



*Figura 1.13. Superficie esférica sin simetría de revolución.*

Un ejemplo práctico de este tipo de superficies esféricas se presenta en la figura 1.14 donde se observa una cornea que sufre de un queratocono avanzado donde se pierde toda simetría.



*Figura 1.14. Imagen de un queratocono avanzado donde se observan irregularidades que pierden toda simetría de la superficie corneal.*

Como ya se dijo este estudio alcanza solamente a las superficies con simetría de revolución.

### 1.3 DESCRIPCIÓN MATEMÁTICA DE UNA SUPERFICIE ASFÉRICA.

Las superficies esféricas con simetría de revolución más simples y comunes son aquellas cuyo perfil es una cónica, es decir, una circunferencia, parábola, hipérbola o elipse, y existen varias formas de representar estas curvas, conocidas como forma general, forma canónica, etc., (Lehman 1978), pero se tiene una representación por cada tipo de curva. Existe una representación un poco más general, la cual consiste en un polinomio de segundo grado en dos variables:

$$As^2 + Bs_z + Cz^2 + Ds + Ez + F = 0,$$

donde  $s$  es el semidiámetro ( $s^2 = x^2 + y^2$ ), y  $z$  la sagita. Este polinomio representa cualquiera de las curvas cónicas dependiendo sólo del valor de los coeficientes.

La forma más comúnmente usada en óptica es la que describe al perfil de la superficie como una serie de potencias en términos pares para conservar la simetría de revolución y que parte de una superficie base simple como una esfera, (Shannon 1980). La superficie base puede ser una cónica y se acostumbra describirla en términos de la sagita, esto es:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$z = \frac{cs^2}{1 + \sqrt{1 - (k+1)c^2s^2}}, \quad (1.1)$$

donde  $c$  es la curvatura paraxial, definida como el inverso multiplicativo del radio de curvatura en el vértice,  $s$  es el semidiámetro y está entre 0 y el valor del diámetro de la superficie, y  $k = -e^2$  es la constante de conicidad y  $e$  es la excentricidad de la cónica. Entonces la esférica puede representarse por:

$$z = \frac{cs^2}{1 + \sqrt{1 - (k+1)c^2s^2}} + \sum_{i=2}^n A_i s^{2i}, \quad (1.2)$$

donde la superficie base es una cónica de revolución de acuerdo a:

|   |                |
|---|----------------|
| Hiperboloide  | $k < -1$ ,     |
| Paraboloide   | $k = -1$ ,     |
| Elipse rotada sobre su eje mayor<br>(esferoide prolato o elipsoide) | $-1 < k < 0$ . |
| Esfera  | $k = 0$ ,      |
| Elipse rotada sobre su eje menor<br>(esferoide oblato)              | $k > 0$ .      |

Para una discusión más detallada de estas representaciones ver Rodgers 1984 y Diang-Qiang y Ya-Nan 1985, así como otras representaciones en Lerner y Sasian 2000.

Si en la ecuación (1.2)  $A_i \neq 0$  para alguna  $i$ , entonces la curva ya no es una cónica. El primer término es la superficie cónica base y los términos adicionales se consideran como términos de deformación.

Finalmente podemos desarrollar en series de McClaurin el término correspondiente a la cónica base, esto es:

$$\frac{cs^2}{1 + \sqrt{1 - (k+1)c^2s^2}} = \frac{c}{2}s^2 + \frac{(k+1)c^3}{8}s^4 + \frac{(k+1)^2c^5}{16}s^6 + \frac{5(k+1)^3c^7}{128}s^8 + \frac{7(k+1)^4c^9}{256}s^{10}, \quad (1.3)$$



de manera que al sustituir y agrupar con los términos de deformación dados en (1.2) tenemos un polinomio de la forma:

$$z = D_2 s^2 + D_4 s^4 + D_6 s^6 + D_8 s^8 + D_{10} s^{10}, \quad (1.4)$$

que constituye otra representación de una superficie esférica, y aún cuando la serie de McClaurin es infinita, algunos autores (Malacara 1992) aseguran que con un polinomio de grado 10 es suficiente para describir una superficie óptica con simetría de revolución.

## 1.4 PRUEBAS ÓPTICAS

Para caracterizar superficies ópticas, existe un gran número de métodos conocidos con el nombre de *pruebas ópticas*, entre las que se pueden citar las geométricas, las interferométricas, y las mecánicas. En este trabajo mencionaremos algunas de las pruebas geométricas más comunes, así como, la prueba interferométrica de Fizeau y una prueba mecánica.

### 1.4.1 Pruebas geométricas.

Las pruebas geométricas para una superficie óptica se basan, como su nombre lo indica, en el principio geométrico de que dos puntos determinan una línea recta y de que en óptica geométrica una línea recta representa un rayo de luz. En estas pruebas se requiere determinar la trayectoria que siguen haces luminosos incidentes a la superficie de prueba y los reflejados por ella. Para determinar estos haces se requieren al menos dos puntos por cada haz, así que se coloca una fuente luminosa puntual frente a la superficie de prueba en el eje óptico y muy cerca del foco; esto determina un punto *A* del haz incidente, se coloca también frente a la superficie de prueba una pantalla, como se muestra en la figura 1.15 esto determina otro punto *B* del haz incidente, con esto queda determinado el punto de incidencia, que a su vez es punto de reflexión lo que determina un punto *C* para el haz reflejado, la trayectoria de este haz se encontrará con la pantalla, o bien, con una elemento de observación y/o registro, lo que determina un punto *D* del segundo haz. El haz es registrado con el fin de detectar desplazamientos laterales de rayos debidos a bloqueo o modificación. Este bloqueo o modificación se lleva a cabo al colocar la pantalla en algún

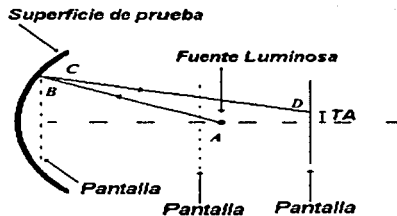
plano de convergencia de la luz que pasa o que es reflejada por la superficie bajo prueba (Ojeda 1992).

Midiendo la magnitud de los desplazamientos respecto de las posiciones teóricas se pueden determinar la magnitud de las deformaciones y su ubicación, lo que implica que se debe contar con información sobre la forma *teórica* de la superficie de prueba.

La principal ventaja de estas pruebas es su gran sensibilidad y su simplicidad, tanto en los dispositivos utilizados como en su interpretación cualitativa.

Para aplicar la prueba a superficies ópticas cóncavas se utiliza un arreglo experimental similar al mostrado en la figura 1.15.

La ubicación y tipo de pantalla es característica de cada una de las pruebas existentes, y pueden ser aplicadas a superficies cóncavas, convexas y lentes.



*Figura 1.15. Arreglo experimental para aplicar una prueba geométrica a una superficie óptica cóncava, dependiendo de la prueba es la posición de la pantalla.*

La prueba para superficies convexas es un poco más complicada, ya que los haces que llegan a la superficie divergen. Para colectar los haces se utiliza un arreglo óptico denominado esfera de Hindle, la cual debe tener un radio de curvatura tal que los haces incidan radialmente y regresen sobre si mismos, la trayectoria de los haces colectados depende de la calidad de la esfera de Hindle, Figura 1.16, (Offner y Malacara, 1992).

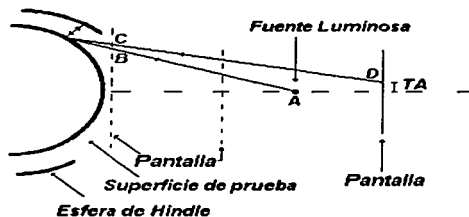


Figura 1.16. Arreglo experimental para caracterizar una superficie óptica convexa. La pantalla se coloca según la prueba a realizar.

En el caso de las lentes, la prueba puede realizarse por transmisión, utilizando el arreglo mostrado en la figura 1.17, con este arreglo se prueba el efecto de toda la lente, es decir, las deformaciones de ambas superficies de la lente. Para estudiar cada una de las superficies de manera independiente, se consideran como espejos, aunque su reflectancia es muy baja.

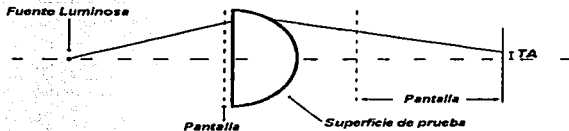


Figura 1.17 Esquema del arreglo experimental utilizado en una prueba geométrica a una lente.

A continuación se presentan las pruebas geométricas más frecuentes.

#### 1.4.1.1 Prueba de la Navaja.

La prueba de la navaja, introducida por Foucault en 1858-59, puede ser considerada, en general, como un método de detección de aberración transversa. Esto se hace por bloqueo de una parte de un plano transversal cruzado por rayos o luz difractada para que una sombra aparezca sobre la pupila de salida del sistema óptico.

Por su simplicidad, esta prueba puede ser considerada como la primera prueba óptica a partir de la cual se desarrollaron otras pruebas.

La pantalla puede ser simplemente un borde recto como el filo de una navaja, figura 1.18



*Figura 1.18 Esquema de la pantalla utilizada para realizar la prueba de la navaja.*

La prueba de la navaja consiste en colocar una fuente puntual a un lado del centro de curvatura de un espejo cóncavo esférico, la imagen de esta fuente se localiza al otro lado del centro de curvatura del espejo esférico.

Cuando la navaja es introducida, corta los haces luminosos que forman la imagen, un observador colocado en el lugar de la imagen verá una sombra aparecer sobre la superficie uniformemente iluminada.

En el caso de una superficie perfectamente esférica podemos analizar tres situaciones:

a) Cuando la navaja es introducida entre el foco y el espejo, el patrón consiste en una zona oscura y otra brillante bien definidas y separadas por una línea recta. Al desplazar la navaja, la región sombreada se desplaza en el mismo sentido de la navaja.

b) Por otro lado si la navaja se coloca de manera que el foco quede entre la navaja y el espejo, entonces la zona oscura del patrón sombreado cruzará el espejo en dirección opuesta al movimiento de la navaja.

c) Cuando la navaja es introducida justo en el foco, el espejo parecerá brillante hasta que la navaja bloquee el punto imagen, en cuyo caso la imagen será oscura totalmente.

Cuando la superficie no es esférica, supongamos una parabólica, tenemos puntos sobre el espejo con diferentes radios de curvatura y por tanto con focos diferentes, al introducir la navaja en algún plano transversal, su posición satisficará la condición descrita en el inciso a para algunos puntos de la superficie, mientras que para otros se vera

satisfecha cualquiera de las condiciones en los otros dos incisos, por lo que se generarán patrones que se pueden considerar como la superposición de los tres patrones descritos anteriormente. Ver figura 1.19.

Ahora que si la superficie es irregular el patrón obtenido será algo más complejo, tal vez como el mostrado en la figura 1.20. (Ojeda 1992).

Un análisis de la interpretación física de esta prueba aparece en Barakat 1959, así mismo en Ojeda 1992.

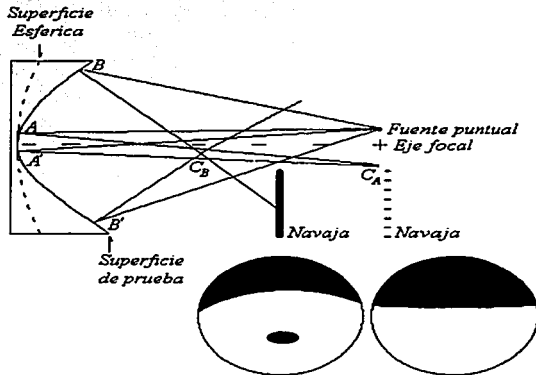


Figura 1.19 Diagrama esquemático de la prueba de la Navaja.



*Figura 1.20. Patrón de sombras para una superficie irregular.*

Las desventajas de esta prueba es que para superficies esféricas los pequeños errores de la superficie se pierden por la asfericidad de la superficie, esto se debe a que la prueba es muy sensible a detectar errores zonales, por ello no es usualmente utilizada para probar superficies esféricas rápidas. (Ojeda, 1992).

#### **1.4.1.2 Prueba de Alambre.**

Como la prueba de la navaja es básicamente para probar superficies esféricas, o asféricas muy lentas, es decir  $f/\# \gg 1$ , se requiere de una prueba más fina para superficies asféricas, esto es el caso de la prueba del alambre, denominada así debido a que la pantalla utilizada en esta prueba geométrica consiste de un alambre delgado y opaco, presentando así dos bordes rectos a la superficie. Esta prueba es útil principalmente en superficies asféricas (Comejo 1992) que pueden ser cónicas o no, y es similar a la prueba de la navaja, pues funciona también por bloqueo de rayos desviados.

El alambre se desplaza cerca de las intersecciones de los haces reflejados que provienen de varias zonas anulares del espejo, con el eje óptico de la superficie de prueba, figura 1.21.

Al igual que en la prueba de la navaja, si se prueba una superficie reflectora, la fuente puntual luminosa no necesita ser monocromática.



Figura 1.21. Patrón obtenido con la prueba del alambre en una superficie esférica. (Malacara 1992)

La principal ventaja de la prueba del alambre sobre el método de la navaja es restringir el bloqueo de haces a una región muy estrecha. Como consecuencia, las medidas de las intersecciones de las normales con el eje óptico son más precisas y de esta forma las desviaciones entre valores experimentales de las intersecciones y los valores teóricos pueden ser medidos; es decir, se pueden determinar las aberraciones, lo que implica que debemos conocer los valores teóricos de las intersecciones, o bien, conocer la forma teórica de la superficie, previamente.

La prueba del alambre provee un buen método para probar una superficie óptica esférica, ya que es efectivo para medir la aberración longitudinal, e integrando numéricamente es posible obtener la aberración del frente de onda.

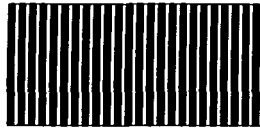
La principal desventaja es que el ancho del patrón sombreado puede enmascarar pequeños desplazamientos de la sombra mientras se mueve el alambre a lo largo del eje óptico.

Meinel (1968) indicó que la prueba del alambre puede ser usada para probar astigmatismo.

#### 1.4.1.3 Prueba de Ronchi.

Otra de las pruebas geométricas para medir las aberraciones de un sistema óptico es la prueba de Ronchi, la cual es uno de los métodos más simples y poderosos, ya que con esta prueba se puede determinar la aberración esférica, coma, astigmatismo y desenfoque. Este método usa como pantalla una *rejilla de Ronchi*, esta es un arreglo de líneas claras y

oscuras igualmente espaciadas y perfectamente paralelas, con frecuencias que pueden ir de 50 a 5000 líneas por pulgada. El proveedor Edmund Scientific las ofrece en presentaciones desde 1 a 6 pulgadas por lado, en la figura 1.22 se muestra, esquemáticamente, una rejilla de Ronchi.



*Figura 1.22 Esquema de una rejilla de Ronchi.*

Ronchi descubrió que cuando una rejilla es colocada cerca del centro de curvatura de un espejo, la imagen se superpone sobre la rejilla, produciendo un tipo de patrón de moiré a lo que él llamó combinación de franjas. La forma de este patrón depende de las aberraciones del espejo, por lo que este fenómeno es utilizado en la prueba de la calidad de superficies ópticas. Sin embargo el patrón de franjas es extremadamente difícil de interpretar.

La prueba de Ronchi tiene dos interpretaciones, una geométrica, interpretando los patrones como sombras debidas a un arreglo de franjas opacas. La otra física, donde se interpreta como franjas debidas a interferencia y difracción. Una de las primeras aplicaciones fue la determinación de aberraciones en el telescopio desarrollado por Galileo y una lente fabricada por Torricelli (Cornejo 1992). Shultz en 1948 denominó Ronchigramas a los patrones observados durante la aplicación de la prueba de Ronchi.

Para probar una superficie óptica utilizando una rejilla de Ronchi se utiliza un arreglo similar al mostrado en la figura 1.23, que es similar al utilizado en las pruebas anteriores. En la figura 1.24 se muestran algunos ejemplos de los patrones obtenidos mediante esta prueba.



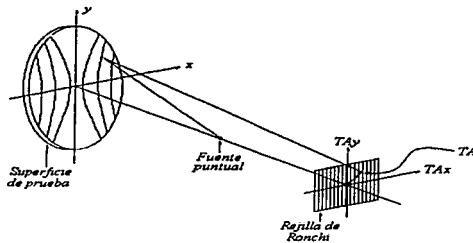


Figura 1.23 Esquema del arreglo óptico para realizar la prueba de Ronchi (imagen tomada de Cornejo 1992)



Figura 1.24. Ronchigramas con aberración esférica (Cornejo 1992)

La principal ventaja de la prueba de Ronchi radica en su extrema facilidad para ser aplicada, pues todo lo que se requiere es una rejilla, y puede ser aplicada con luz blanca y su principal desventaja esta en la complejidad para interpretar tradicionalmente de forma cuantitativa los patrones observados, (Cornejo 1992).

#### 1.4.2.4 Prueba de Ronchi en dos dimensiones (Bironchi).

Una variante de la prueba de Ronchi se obtiene al superponer dos arreglos de líneas similares a la rejilla de Ronchi, pero con sus ejes perpendiculares entre sí, dando origen a un arreglo de aberturas perfectamente cuadradas e igualmente espaciadas en ambos ejes, un esquema de este tipo de rejillas se muestra en la figura 1.25.



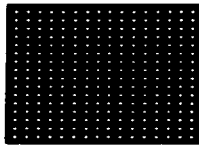
Figura 1.25 Representación esquemática de una rejilla cuadrículada usada en la prueba Bironchi.

El uso de esta rejilla aumenta la potencia de la prueba de Ronchi. Esta rejilla se coloca cerca del centro de curvatura, de la superficie de prueba, tal como se hace en la prueba de Ronchi descrita en el apartado anterior. Los arreglos experimentales necesarios para aplicar esta prueba a superficies concavas o convexas son similares a los utilizados en la prueba de Ronchi en una dimensión. Igual que en el caso anterior las deformaciones o errores que presenta la superficie se pueden estimar a través de las desviaciones que se observan en el patrón real respecto del patrón calculado, pero a diferencia de la prueba anterior, ahora es posible hacerlo en dos ejes.

Se han desarrollado métodos para calcular los patrones de Ronchi (Ronchigramas) para los casos en que la superficie de prueba es una sección cónica centrada o bien fuera de eje, (Cordero, *et al.* 1992).

#### 1.4.1.5 Prueba de Hartmann.

Entre las pruebas geométricas, la de Hartmann es otra ampliamente usada. Esta es similar a la prueba de Bironchi, pues también utiliza una rejilla cuadrículada, (rejilla de Hartman), similar a la rejilla usada en la prueba de Bironchi, esquemáticamente esta rejilla se muestra en la figura 1.26.



*Figura 1.26 Representación esquemática de una rejilla de Hartman.*

Los arreglos ópticos necesarios para aplicar la prueba de Hartman a superficies concavas o convexas son similares a los utilizados en las pruebas precedentes. La gran diferencia consiste en colocar la pantalla entre la fuente y la lente y muy cerca de la superficie de prueba, ya no cerca del foco como se hizo en las anteriores, y se localiza la imagen de la pantalla cerca del punto focal en un elemento de observación y/o registro.

La prueba se basa en el hecho de que bastan dos puntos para determinar la trayectoria de un rayo de luz, como se conocen la posición de la fuente y la posición de los orificios en la pantalla de Hartmann, se tienen los dos puntos que determinan la trayectoria del haz incidente en un orificio particular, aproximando el punto de incidencia por la posición del orificio, se determina también la posición de la imagen, y como el orificio es común al haz incidente y al reflejado se tienen también dos puntos que determinan al haz reflejado, ver figura 1.27, puede calcularse el ángulo de reflexión y así conocer los ángulos de incidencia y reflexión, así integrando numéricamente se puede conocer la forma de la superficie.

La principal desventaja de este método radica en que para superficies rápidas no es válido aproximar la posición del punto de incidencia por la posición del orificio, por lo que la prueba pierde eficiencia con superficies rápidas, aunque se puede seguir un proceso iterativo.

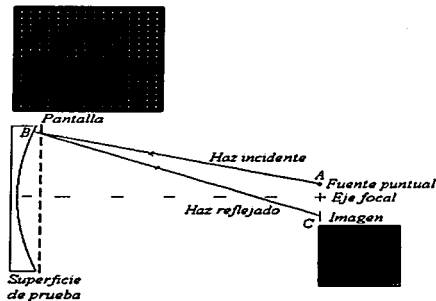


Figura 1.27. Representación esquemática del arreglo experimental para realizar la prueba de Hartmann, en el se aprecia que el haz incidente va de A a B y el reflejado desde B hasta C.

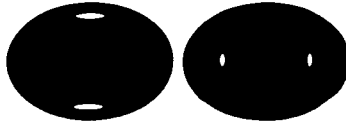
Las pruebas de Bironchi y Hartmann pueden ser utilizadas para probar sistemas ópticos y espejos, y ambas pueden ser analizadas con la misma teoría matemática, (Cordero, *et al.* 1998). Sin embargo tienen algunas diferencias importantes entre las que podemos citar:

- La rejilla de Bironchi es colocada cerca del delplano focal, mientras que la rejilla de Hartman se coloca cerca de la superficie.
- Para la descripción del frente de onda para alguna forma arbitraria la prueba de Bironchi utiliza datos obtenidos de dos Ronchigramas cruzados, mientras que la prueba de Hartmann se analizan los datos debidos a un solo Hartmangrama.

#### 1.4.1.6 Prueba de Platzcek Gaviola.

Otra prueba geométrica que se utiliza para caracterizar una superficie óptica es la de Platzcek Gaviola, introducida en 1939, también llamada prueba de la cáustica, ya que tiene como finalidad determinar las coordenadas de la cáustica de la superficie de prueba, entendiendo por cáustica la curva que contiene los centros de curvatura de los puntos sobre el espejo, (Cardona 1983). Esta prueba está basada en el hecho de que el centro de curvatura de algún segmento fuera de eje sobre un espejo parabólico perfecto, no está sobre

el eje óptico de la superficie, pero el centro de curvatura determina la cáustica y no la superficie.



*Figura 1.28 Rejillas utilizadas para realizar la prueba de Plazcek Gaviola.*

En esta prueba un espejo parabólico se cubre con una pantalla que tiene dos orificios elípticos colocados simétricamente (figura 1.28), el espejo es entonces iluminado por una fuente alargada, y las imágenes de estos orificios son registrados para diferentes posiciones de la lámpara (Ojeda 1992 y Hatch 1992). Cuando las imágenes coinciden sobre un pequeño alambre colocado cerca de la lámpara, y se tiene la mínima iluminación sobre él, se ha localizado el centro de curvatura para las regiones expuestas por los orificios.

Esta prueba tiene las principales ventajas:

- 1) Es posible observar sólo uno de los orificios de la pantalla a la vez.
- 2) Perforaciones más amplias pueden ser usadas, incluso tan amplias como que simulen la prueba de la navaja, para probar errores zonales.
- 3) El criterio para conocer el centro de curvatura de la porción de espejo expuesto por un orificio de la pantalla es el mínimo de iluminación.

Esta prueba tiene la desventaja de comparar la cáustica medida con la cáustica teórica, lo que implica la necesidad de conocer previamente la forma de la superficie, es decir, la prueba no determina la forma, o por lo menos no se tiene evidencia de que exista un método de determinar la forma real de la superficie a partir de esta prueba.

La elección de uno u otro método depende del tipo de superficie.

#### **1.4.1.7 Pantallas Nulas.**

El grupo de pruebas ópticas del CCADET – UNAM bajo la dirección del Dr. Rufino Díaz ha desarrollado recientemente un método para probar superficies ópticas rápidas ( $f/\# = 0.25$ ), esféricas, convexas y con simetría de revolución, que no requiere la construcción de

elementos ópticos para corregir la asfericidad. El método utiliza una pantalla cilíndrica con un conjunto de líneas trazadas sobre ella, denominada *pantalla nula*.

Se propone una pantalla cilíndrica porque esta produce una imagen casi plana al reflejarse sobre una superficie esférica, el diámetro de esta superficie debe ser un poco mayor que el diámetro de la superficie de prueba, mientras que el área que será cubierta sobre la superficie de prueba determina la longitud de la pantalla. Para superficies relativamente pequeñas ( $\approx 10$  mm de diámetro) esta pantalla se puede trazar sobre una hoja de papel y con ayuda de una impresora láser. La figura 1.29 muestra un ejemplo de estas pantallas.

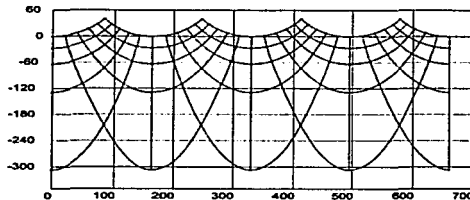
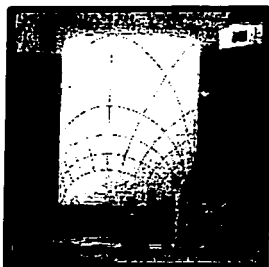


Figura 1.29 Trazado de líneas que dan forma a la pantalla nula

Estos trazos o líneas que forman la malla están calculados para que al reflejarse sobre una superficie libre de deformaciones de acuerdo al diseño teórico, se forme la imagen de una retícula cuadrada perfecta. (Díaz y Campos, 2000), y se determina haciendo un trazado *inverso* de rayos.

Esta pantalla plana se enrolla e inserta dentro de un cilindro translúcido y se ilumina desde el exterior como muestra la figura 1.30.



*Figura 1.30 Pantalla neta dentro de un cilindro de acrílico, donde toma la forma circular, para proyectarse sobre la superficie de prueba.*

Finalmente, se requiere de un sistema óptico capaz de formar y proyectar la imagen de la pantalla formada por reflexión en la superficie de prueba, sobre un detector CCD.

Se coloca la superficie de prueba en el centro del cilindro a una altura determinada por el diseño y se captura la imagen de la pantalla formada sobre ella. Las deformaciones que se aprecien en la imagen se deberán a deformaciones de la superficie, es posible fotografiar estas imágenes para ubicar y cuantificar las deformaciones. En la figura 1.31 se muestra la imagen de la pantalla de la figura 1.29 sobre la superficie de una lente modelo Cinephore distribuida por Baush. & Lomb. El diseño de la pantalla se hizo para una superficie parabólica. La figura 1.36 muestra deformaciones de las líneas respecto a las líneas rectas y retícula cuadrada haciendo evidente que la superficie esférica de la lente Cinephore se parece a una parábola pero no lo es estrictamente.



*Figura 1.31 Imagen de la retícula cuadrada generada por la pantalla nula de la figura 1.29 sobre la superficie Cinephore de Baush & Lomb, se han trazado rectas que permiten apreciar deformaciones en la retícula reflejada sobre la superficie..*

En simulaciones numéricas el método ha mostrado que es posible detectar deformaciones sobre una superficie de prueba del orden de  $5\mu\text{m}$ . y sensibilidades del orden de  $10\lambda$  a  $100\lambda$ , dependiendo de la superficie probada y suponiendo una resolución de un píxel.

#### **1.4.2 Pruebas interferométricas.**

Otro tipo de pruebas que se aplican a superficies ópticas son las conocidas como pruebas interferométricas, la amplia variedad de estas pruebas impide describirlas a todas en este trabajo, pero comentaremos las más características de ellas.

##### **1.4.2.1 Interferómetro de Newton.**

Posiblemente el primer estudio sobre franjas de interferencia de luz esparcida se debe a Sir Isaac Newton (Hetch y Zajac 1990) y fue publicado en su libro *Optiks* (1704 libro II parte IV). Según la definición de Mantravadi 1992, que llama interferómetro de Newton a un arreglo de dos superficies en contacto iluminadas por una fuente de luz monocromática, en la figura 1.32 se muestra esquemáticamente un interferómetro de Newton.



El sistema óptico produce luz difusa que incide sobre el arreglo de lentes y es reflejada hacia el observador. Debido a las reflexiones en las interfaces se forman zonas de interferencia destructiva y constructiva, apareciendo una franja brillante u oscura cada que el espesor de la capa de aire varía en  $\lambda/2$ , ver figura 1.33.

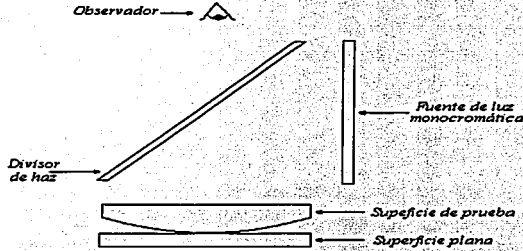


Figura 1.32 Esquema de un interferómetro de Newton. Una lente planoconvexa se coloca sobre una superficie plana y son iluminadas con una fuente monocromática.

Estas reflexiones llegan hasta el observador, permitiendo evaluar la separación entre franjas y así determinar el espesor de la capa de aire y por tanto la forma de las superficies de prueba.

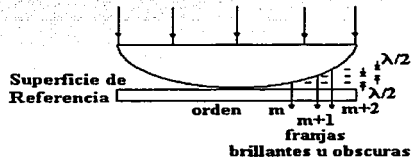


Figura 1.33. Cuando el espesor de la capa de aire varía en media longitud de onda ( $\lambda/2$ ), aparece una franja brillante u oscura

Un ejemplo de estos patrones son los conocidos como anillos de Newton que se muestra en la figura 1.34, y que se obtienen al comparar una lente con un plano de referencia.

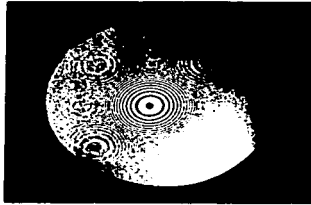


Figura 1.34 Patrón de Anillos de Newton, observados con un interferómetro al probar una lente. Foto tomada de Halliday y Resnick 1979.

#### 1.4.2.2 Interferómetro de Fizeau.

Otra práctica común, es el uso de un interferómetro de Fizeau, similar a la versión de Newton, ver figura 1.35.

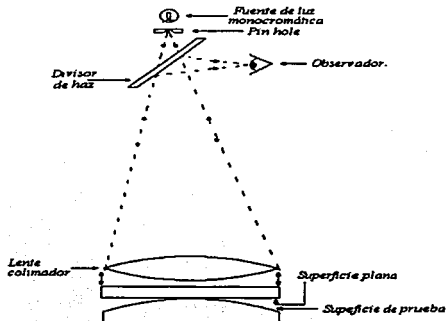
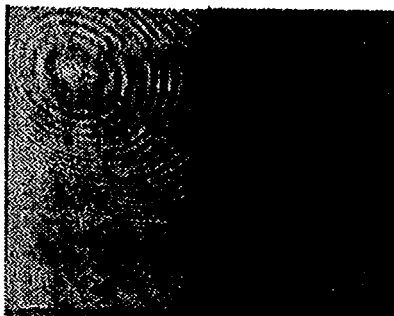


Figura 1.35. Esquema de un interferómetro de Fizeau probando la superficie curva de una lente plano cóncava.

en este dispositivo se tiene una fuente puntual que emite sobre una lente colimadora para producir haces paralelos que incidirán sobre el arreglo óptico, y nuevamente las reflexiones en las interfaces producirán zonas de interferencia destructiva y constructiva dando lugar a un patrón de franjas oscuras y brillantes, patrón que es reflejado sobre el divisor de haz y a su vez es desviado hacia el observador, permitiendo registrarlo y realizar mediciones de las separaciones entre franjas y así determinar la forma y el espesor de las superficies de prueba. En la figura 1.36 se observa la interferencia entre dos portaobjetos colocados uno al lado del otro y sobre una placa de vidrio, donde la separación entre líneas brillantes depende del espesor de la capa de aire entre la superficie del portaobjeto que da hacia la placa de vidrio y la cara superior de la placa.



*Figura 1.36. Patrón de interferencia entre una placa de vidrio y dos portaobjetos, tomada con un interferómetro de Fizeau.*

En la figura 1.37 se muestra una imagen del interferómetro de Fizeau, ubicado en el Laboratorio de Pruebas Ópticas del Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico de la UNAM.



*Figura 1.37 Interferómetro de Fizeau.  
Laboratorio de pruebas ópticas del  
CCADET*

#### **1.4.2.3 Interferómetro de Twyman-Green.**

El Twyman-Green fue inventado y patentado por F. Twyman y A. Green en 1916, diseñado para probar prismas y objetivos de microscopio y posteriormente fue adaptado y aplicado a la prueba de lentes de cámara (Malacara 1992). Es un instrumento de gran importancia en el terreno de las pruebas ópticas modernas (Hetch y Zajac 1990). Entre sus características físicas más sobresalientes son (como se ilustra en la figura 1.38) una fuente puntual cuasimonocromática o monocromática y una lente  $L_1$  que asegura una fuente de entrada de ondas planas, y una lente  $L_2$  la cual permite que toda la luz de la abertura entre en el ojo de modo que todo el campo pueda ser observado, es decir, cualquier porción de  $M_1$  y  $M_2$  puede ser vista. Un láser continuo sirve como fuente ya que asegura la presencia de franjas, aún bajo de grandes diferencias en la longitud del camino óptico y, además, tiempos de exposición fotográfica cortos. Ellos tienden a reducir los indeseables efectos de vibración.

El divisor de haz está hecho de tal manera que la cara A refleja la cantidad apropiada de luz por medio de una cubierta parcialmente reflectora, pero la cara B refleja poca luz. Para evitar las reflexiones en esta cara B se utiliza una cubierta antirreflectora multicapa. Otra solución simple es colocar la placa en su ángulo de Brewster y usar una fuente con polarización  $p$  lo cual también evita la reflexión en ésta.

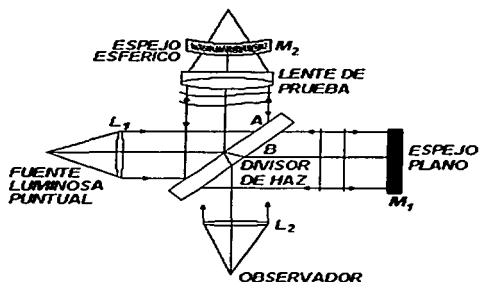


Figura 1.38 Esquema de un interferómetro de Twyman Green adaptado para probar una lente.

Versiones del Twyman-Green con láser están entre los artefactos de pruebas ópticas más efectivas. Como se muestra en la figura 1.38, el dispositivo está arreglado para probar una lente. El espejo esférico  $M_2$  tiene su centro de curvatura coincidente con el punto focal de la lente. Si la lente que está siendo probada está libre de aberraciones, la luz reflejada y que regresa al divisor de haz será nuevamente una onda plana. Sin embargo, si el astigmatismo, la coma, o la aberración esférica deforman el frente de onda, el patrón de franjas observado lo manifestará claramente. Si el espejo esférico  $M_2$  es sustituido por un espejo plano, el interferómetro puede ser usado para probar otros elementos ópticos como prismas o planos ópticos.

Existen otros muchos otros tipos de interferómetros y variantes de los ya mencionados, pero todos tienen como objetivo generar un patrón de interferencia en el cual la separación entre franjas es función de la separación entre una superficie calibrada y una superficie de prueba.

Para probar una superficie esférica con este tipo de pruebas se requiere una superficie calibrada con las características de la superficie de prueba, y en el caso del interferómetro de Newton y el de Fizeau debe tener la concavidad invertida, (el *master* de la superficie), como estas superficies no se encuentran en el mercado, es necesario

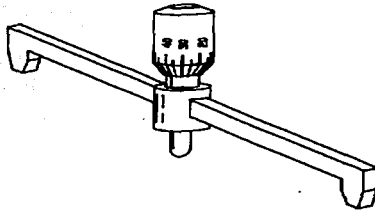
construirlas, por lo que la eficiencia de la prueba depende de la calidad de una segunda superficie, lo cual es un gran inconveniente aunque en algunos casos la inversión económica y de esfuerzo es redituable.

Aunque estas pruebas alcanzan precisiones de fracciones de longitud de onda, las superficies calibradas que comercialmente se pueden encontrar son planos y esferas, lo que limita estas pruebas a superficies lentas, es decir, que no tengan números  $f$  pequeños, esto es  $f/\lambda > 2$ . Y es tan común este tipo de pruebas que ya existen tablas con los patrones correspondientes a diferentes tipos de deformaciones de las superficies de prueba. (Malacara 1992). Otra limitante es el tamaño de las superficies de prueba ya que deben tener aproximadamente las dimensiones de las componentes del interferómetro, aunque recientemente se ha desarrollado un método en el que se caracteriza una superficie por partes y después utilizando métodos estadísticos se une la información para tener la prueba de la superficie completa. (Murphy *et al.* 2003), con lo que el tamaño de las superficies a probar crece varias veces, pero sigue existiendo la limitante de las superficies de referencia.

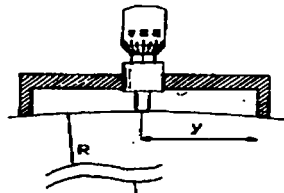
## **1.5 PRUEBAS MECÁNICAS.**

También en este campo el número de pruebas es grande, pero entre las más simples está la medición con un esferómetro que mide únicamente la sagita respecto del punto central, figura 1.39, si este punto pertenece a una esfera, es posible calcular su radio, pero si el punto es el vértice de una superficie esférica, la medición permite calcular una aproximación al radio de curvatura paraxial. La precisión de esta medición dependerá de que tanto difiere la superficie de prueba de una esfera.

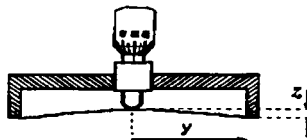
En la figura 1.39 se muestra un esferómetro de barra y en las figuras 1.40 y 1.41 el esferómetro se encuentra en contacto físico con la superficie de prueba,



*Figura 1.39. Imagen de un esfómetro de barra.*

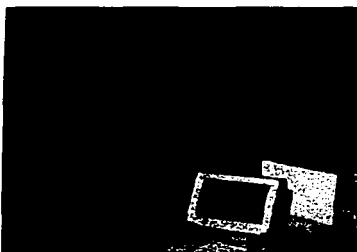


*Figura 1.40. Aplicación de un esfómetro.*



*Figura 1.41 Con el esfómetro se determina la sagita del punto de contacto respecto del punto central.*

Otra prueba de este tipo requiere del uso de un "palpador" y una mesa de tres coordenadas, es decir, un dispositivo con la capacidad de moverse de manera automática o manual en tres ejes perpendiculares entre sí, con el cual se puede obtener las coordenadas cartesianas de un conjunto de puntos. Si la superficie cuenta con simetría de revolución, es suficiente con medir puntos a lo largo de un perfil de la superficie, con un dispositivo de dos movimientos perpendiculares, en la figura 1.42 se muestra una máquina de medición de coordenadas (MMC), ubicada en el Laboratorio de Metrología del Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico, y tiene una precisión de micrómetros.



*Figura 1.42 Mesa de tres coordenadas, utilizada para medir espesores, y caracterizar superficies.*

## **1.6 CONCLUSIONES.**

Las pruebas geométricas presentadas son muy similares ya que en la primera se utiliza un borde, en la del alambre, son dos los bordes que se utilizan, en la de Ronchi se usan una gran cantidad de bordes orientados siempre en la misma dirección y en las pruebas de Bironchi y Hartman se presentan varios bordes, sólo que ahora se presentan alineados en dos direcciones para tener más información sobre la superficie. En la última prueba, la de Platzcek y Gaviola se utiliza dos pequeñas rendijas y se acerca o se aleja la fuente de luz, para determinar las coordenadas de la cáustica para compararla con la



superficie teórica correspondiente. El principal inconveniente radica en que las pruebas anteriores son aplicables principalmente a superficies cóncavas, pues como ya se mostró en el caso de superficies convexas, se requiere de superficies auxiliares (Esfera de Hindle), y los resultados dependen de la calidad de estas superficies adicionales que se emplean. En el caso de las pruebas por transmisión, las imágenes obtenidas muestran el efecto de ambas superficies de la lente, inclusive las variaciones del índice de refracción del vidrio.

En cuanto a las pruebas interferométricas, alcanzan muy buena precisión, difícilmente alcanzada por otro tipo de pruebas, pero está limitada a superficies lentas o a contar con el *master* de la superficie de prueba, una superficie de referencia ó un compensador. Otra limitación puede ser el tamaño de la superficie, pues es poco práctica para evaluar superficies grandes.

Con relación a las pruebas mecánicas, el esferómetro sólo mide la sagita de donde se deduce el radio de curvatura paraxial, mientras que el uso de un *palpador* entrega la descripción de la superficie directamente en coordenadas cartesianas, lo cual es una gran ventaja, ya que no requiere de cálculos adicionales para cambiar de representación; sus desventajas son, por un lado el tamaño de la superficie, ya que se requiere un *palpador* que pueda desplazarse grandes distancias, para una superficie grande, y por otro lado, esta prueba requiere un contacto físico con la superficie de prueba, lo cual no siempre es deseable, por si se trata de una cornea, o bien el contacto con la superficie puede causar daño en ella, haciendo poco recomendable usar la prueba.

Por todo lo anterior, resulta conveniente contar con un método que sea aplicable a superficies rápidas ( $f/\# < 1$ ) convexas y que no requiera ni el contacto físico con la superficie de prueba, ni de una superficie de referencia.

## 1.7 REFERENCIAS.

Barakat R. "General Diffraction Theory of Optical Aberration Tests, from the Point of View of Spatial Filtering" Journal of the Optical Society of America, Vol. 59, No. 11, Nov. 1969.

Cardona N. O., Pedraza C. J., Cornejo R. A. y Cordero D. A., "Significado de las superficies cáusticas en óptica" Rev. Mex. Fis., Vol. 29, No. 2, 245-258, (1983).

Cordero Davila A., Cornejo Rodríguez A. Y Cardona Núñez O. "Ronchi and Hartmann tests with the same mathematical theory", Appl. Opt., Vol. 31, No. 13, 2370-2376, (1992)

Cordero Davila A., Luna Aguilar E., Zarate Vazquez S. y Percino Zacarias M. E.. "Ronchi test with a square grid", *Appl. Opt.*, Vol. 37, No. 4, 672-675, (1998).

Cornejo, A. and Malacara, D. "Caustic coordinates in Platzeck-Gaviola test of conic mirrors", *Applied Optics*, Vol. 17, No. 1, January 1978, 18-19.

Cornejo Rodríguez A. *Ronchi Test*, en *Optical Shop Testing*, Segunda Edición, Editado por Daniel Malacara, John Wiley & Sons, Inc., 1992.

Diang Qiang Su and Ya Na Wang "Some ideas about representations of apheric optical surfaces", *Applied Optics*, Vol. 24, No. 3, February 1985.

Díaz Uribe R., "Pruebas ópticas por deflectometría láser", Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias UNAM, México 1990.

Díaz Uribe R. y Granados Agustín F., "Corneal Shape Evaluation by using laser keratopography" *Optometry and Vision Science*, Vol 76, No. 1, January 1999.

Díaz Uribe R. y Campos García M. "Null screen testing of fast convex aspheric surfaces" *Applied optics*, Vol. 39, No. 16, 2670, (2000).

Disney Walt, *Donald in Mathmagic Land*, Mini-Clasico. Director: Hamilton Luske, Estudio: Buena Vista Home Vid, Formato: Dibujos animados, Duración: 28 min. USA, 1959.

Galilei G., *El mensajero Sideral*, IPN, México 1999, pp. 7.

Ghazeil I. *Hartmann and Other Sceeen Tests*, en *Optical Shop Testing*, Segunda Edición, Editado por Daniel Malacara, John Wiley & Sons, Inc., 1992.

Hatch, M. R., Stoltzmann, D. E., "Extending the caustic test to general aspheric surfaces", *Applied Optics*, Vol. 31, No. 22, August 1992, 4343 - 4349

Hetch E. y Zajac A., *Óptica* Ed. Fondo Educativo Interamericano, México 1990.

Holliday D. y Resnick R. *Física* Compañía editorial continental S. A. De C. V. Ed. Combinada, parte 1 y 2, 1049, México 1983.

Lehman H. Ch., *Geometría Analítica*, UTEHA, México 1978.

Lerner S. A. y Sasian J. M. "Optical desing with parametrically defined aspheric surfaces", *Applied Optics*, Vol. 39, No. 28, Oct 2000.

Malacara D. *Optical Shop Testing*, Segunda Edición, John Wiley & Sons, Inc., 1992

Malacara D. "Twyman-Green Interferometer", en *Optical Shop Testing*, Segunda Edición, Editado por Daniel Malacara, John Wiley & Sons, Inc., 1992.

Mantravi M. V. "Newton, Fizeau, and Haidinger Interferometers", en *Optical Shop Testing*, Segunda Edición, Editado por Daniel Malacara, John Wiley & Sons, Inc., 1992.

Meinel A. B., "Quantitative Reduction of a wire test (Azimuthal is Explained)" *Opt. Sci. Newlett* 2(5) 134 (1968).

Meiles - Griott, Catalogo de productos 1997 - 1998.

Murphy P., Forbes G., Fleig J., Dumas P. y Tricard M. "Stitching Interferometry", *OPN* May 2003, 38-43.

Offner A. and Malacara D. "Null Tests Using Compensators", en *Optical Shop Testing*, Segunda Edición, Editado por Daniel Malacara, John Wiley & Sons, Inc., 1992.

Ojeda Castañeda J. "Foucault Wire, and Phase Modulation Tests", en *Optical Shop Testing*, Segunda Edición, Editado por Daniel Malacara, John Wiley & Sons, Inc., 1992.

Rodgers J. N., "Nonstandard representations of aspheric surfaces in a telescope desing" *Applied Optics*, Vol. 23, No. 4, February 1984.

Shannon R. R., "Aspheric Surfaces", *Applied optics and optical engineering*, vol III, 1980.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**PRUEBAS POR DEFLECTOMETRÍA LÁSER.**

**CAPÍTULO 2**

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## 2.1 INTRODUCCIÓN.

**E**n este segundo capítulo se describe el proceso experimental para la obtención de datos de una superficie por medio de un proceso denominado *deflectometría láser*. En particular nos enfocaremos en el método basado en la medición de la aberración longitudinal y el ángulo que forman el eje óptico con la línea normal en cada punto de un perfil de la superficie de prueba, (Díaz Uribe 1990). Como la descripción de una superficie en función de estos parámetros no es la más fácil de interpretar, se hace necesario cambiar de representación a otra en coordenadas cartesianas. También en este capítulo se muestra un método propuesto para obtener una descripción de una superficie de prueba en este tipo de coordenadas, a partir de los parámetros medidos por deflectometría láser. En dicho método se establece primero un conjunto de relaciones entre los coeficientes de los polinomios que describen a la superficie, uno en el espacio cartesiano y el otro en el espacio de los parámetros medidos experimentalmente, estas relaciones involucran una inversión polinomial.

En segundo lugar se halla el polinomio que relaciona ambos parámetros experimentales. Finalmente, con los coeficientes del polinomio hallado y las relaciones derivadas, se obtienen los coeficientes del polinomio que describe a la superficie en el espacio cartesiano, y se muestra que sólo es aplicable a algunas superficies

## 2.2 DEFLECTOMETRÍA LÁSER.

En 1985 Díaz Uribe *et al* proponen un método para medir la aberración longitudinal y el ángulo formado por las rectas normales a una superficie y su eje óptico, utilizando para ello un haz láser, por lo que se denominó *Deflectometría Láser*. Se entiende por deflectometría láser al conjunto de técnicas que se utilizan para determinar propiedades físicas de un sistema a partir de la medición de la deflexión que sufre un haz de láser al interactuar con un sistema. En este caso, los parámetros indicados se obtienen cuando el ángulo de deflexión del haz es nulo.

### 2.3 MÉTODO DE MEDICIÓN.

El Método consiste en lo siguiente:

1. Inicialmente se fija la superficie a un arreglo de platinas que permitan el movimiento lineal a lo largo de su eje óptico, además de permitir un movimiento angular, con centro de giro variable, pero a lo largo del eje óptico. En las figuras 2.1 y 2.2 se muestra esquemáticamente el arreglo experimental utilizado.

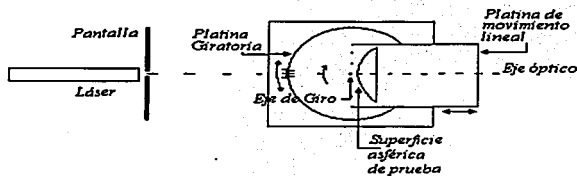


Figura 2.1. Esquema de una vista superior del arreglo experimental utilizado para medir la aberración longitudinal y el ángulo entre las normales y el eje óptico de una superficie asférica de prueba.

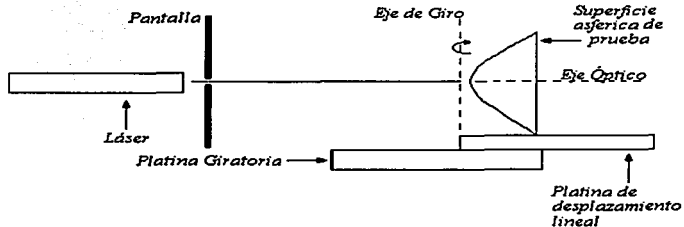


Figura 2.2. Esquema lateral del arreglo experimental empleado en la caracterización de una superficie asférica.

2. Se alinea el sistema de manera que el haz incida en el vértice y a lo largo del eje óptico. Para determinar el vértice de una lente, se mueve la superficie o el láser hasta lograr la retroreflexión, cuando ésta se logra, se observará un patrón de interferencia a la salida del láser (sobre el tubo láser), el cual es debido a la reflexión de ambas superficies de la lente de prueba. Para ubicar fácilmente el haz reflejado es conveniente colocar una pantalla perforada frente al láser, el patrón será similar al mostrado en la siguiente figura 2.3. Si la superficie de prueba es un espejo, esta se gira un cierto ángulo y se mide el ángulo de reflexión, se gira el mismo ángulo, pero en sentido contrario y se mide el ángulo de reflexión, si en ambos casos es el mismo, se ha localizado el vértice, ya que se supone simetría de revolución.



*Figura 2.3. Patrón obtenido al alinear el láser con el eje óptico de la superficie de prueba, incidiendo este sobre el vértice.*

3. Ahora se ubica el vértice como centro de giro de la superficie de prueba. Para lograr esto,
  - a) Se gira la superficie  $90^\circ$ .

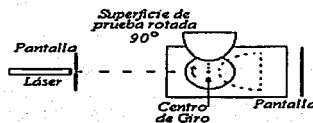


Figura 2.4 Una vez ubicado el vértice, se gira la superficie para hacerlo coincidir con el eje de giro.

- b) Se desplaza longitudinalmente la superficie hasta que el haz pasa tangente a ella, el haz se observa en una pantalla colocada detrás de la superficie, se observa el patrón formado en la pantalla, se gira la superficie  $180^\circ$

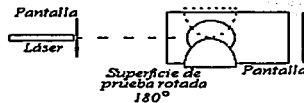


Figura 2.5 Se gira la superficie  $180^\circ$  para observar al haz tangente a la superficie, siendo el vértice el punto de contacto

El haz debe seguir siendo tangente a la superficie y la mancha luminosa sobre la pantalla, detrás de la superficie debe ser simétrica a la observada inicialmente, los patrones tendrán una forma similar al mostrado en la figura 2.6.

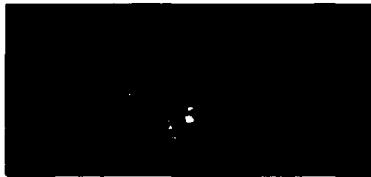


Figura 2.6. Imagen del láser al tocar tangencialmente en el vértice a la superficie de prueba



- c) Si no se cumple esta condición debe ajustarse la posición longitudinal hasta lograrlo.
- d) Se deben anotar las lecturas de las platinas.

4. Debe hacerse coincidir el eje de giro con el centro de curvatura paraxial, esto se logra desplazando la superficie longitudinalmente. Si el centro de curvatura paraxial coincide con el centro de giro, al rotar la superficie un ángulo pequeño no se modificará considerablemente el ángulo de reflexión del láser, además el patrón de interferencia debido a las irregularidades que la superficie presente en el vértice que no cambiará de forma, aunque puede cambiar ligeramente de tamaño, debemos anotar las lecturas de las platinas, la distancia recorrida longitudinalmente, es decir la diferencia entre lecturas, es el radio de curvatura paraxial.



*Figura 2.7 Patrón debido a las deformaciones en el vértice de una superficie esférica.*

En caso de que no se forme un patrón como el mostrado en la figura (2.7) puede ponerse un poco de talco sobre la superficie para generar un patrón, (Díaz Uribe. 1985).

Ahora estamos en condiciones de iniciar la medición, ya que el haz incide en el vértice y este coincide con el centro de giro.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

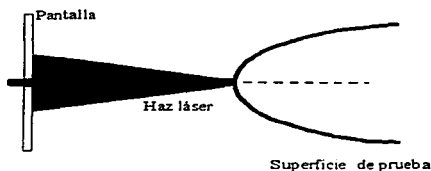


Figura 2.8 El láser se encuentra alineado con el vértice y el centro de curvatura paraxial y tomaremos a este como centro de giro.

5. Posteriormente se rota la superficie un ángulo  $\theta_1$  tomando como centro de giro al centro de curvatura paraxial hasta observar un cambio en el ángulo de reflexión del láser, ver figuras 2.8 y 2.9.

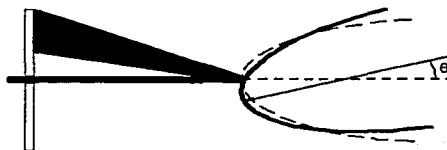


Figura 2.9. Al girar la superficie de prueba un ángulo  $\theta$  el láser es reflejado con cierto ángulo respecto del haz incidente.

6. El siguiente paso es desplazar la superficie longitudinalmente, manteniendo fijo el eje de giro, hasta que el láser regrese sobre sí mismo, como se muestra en el esquema de la figura 2.10. El haz reflejado sobre la pantalla se observa como una *mancha*, para determinar su posición se usa el patrón de difracción generado por un cabello colocado sobre la trayectoria del láser. (Díaz Uribe *et al.* 1985).

7. Medimos el desplazamiento, y ahora tenemos los primeros valores de  $\theta_1$  y  $X_1$ ,

8. Giramos la superficie hasta  $\theta_2$  repetimos los pasos 5, 6 y 7 para determinar  $X_2$ , distancia medida desde  $X_0 = 0$ , y así sucesivamente hasta obtener los valores correspondientes a un conjunto de puntos sobre la superficie.

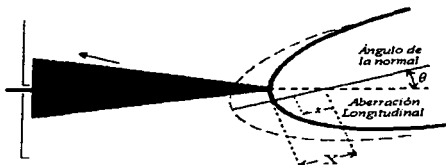


Figura 2.10. La superficie es desplazada una distancia  $X$ , hasta que el láser regresa sobre sí mismo. En esta figura  $x$  es la aberración longitudinal.

Con este procedimiento se obtiene un conjunto de valores del ángulo entre las normales y el eje óptico, así como los valores de distancia entre el vértice y las intersecciones de las normales, ya que todos los valores están referidos al primer punto que coincide con el vértice. De requerirse, las aberraciones longitudinales (Esto es la distancia del centro de curvatura paraxial al punto de intersección), pueden obtenerse restando a cada valor de  $X$ , el radio de curvatura paraxial. Esto concluye la medición.

#### 2.4 ANÁLISIS DE DATOS.

Como ya se mencionó, los datos medidos no son los parámetros más adecuados para describir o caracterizar la superficie de prueba, pues los datos útiles son el radio de curvatura, el diámetro, constante de conicidad, y en su caso, coeficientes de deformación, valores que son difíciles de obtener a partir de los parámetros medidos, así que debemos encontrar una representación en otro tipo de coordenadas, como por ejemplo la representación mostrada en la ec. (1.4), que corresponde a coordenadas cartesianas, donde el primer término esta relacionado con el radio de curvatura paraxial, y los términos restantes con la constante de conicidad, si se trata de una superficie cónica, y con los coeficientes de deformación si la superficie es una asférica en general.

## 2.5 MEDICIONES.

Con el método descrito en el párrafo anterior se caracterizaron dos superficies de número  $f$  pequeño, las superficies se muestran en la figura 2.11. La superficie **B**, a la izquierda, modelo 01 LAG 017 distribuida por *Melles Griot*, es una lente con una superficie esférica y otra esférica, la superficie esférica cuenta con un radio de curvatura paraxial de 21 mm y un diámetro de 75 mm. por lo que tiene un número  $f/0.16$ . La superficie **A** a la derecha es una lente del fabricante *Bausch & Lomb*, modelo Cinephore, con una superficie plana y otra esférica. La superficie esférica tiene un radio de curvatura paraxial de 44.5 mm y un diámetro de 100 mm, por lo tanto cuenta con un número  $f/0.23$ , es decir, se trata de dos superficies bastante rápidas. Ambas superficies se caracterizaron por deflectometría láser. Los valores obtenidos para la superficie *Bausch & Lomb* se presentan en la tabla 2.1.



Figura 2.11. A la izquierda una lente **B** distribuida por *Melles Griot*, con un número  $f/0.16$ , a la derecha una lente **A** distribuida por *Bausch & Lomb* de número  $f/0.23$ , y al frente una superficie esférica de radio pequeño

| $\theta$ (°) | $X$ (mm) | $\theta$ (°) | $X$ (mm) | $\theta$ (°) | $X$ (mm) | $\theta$ (°) | $X$ (mm) |
|--------------|----------|--------------|----------|--------------|----------|--------------|----------|
| 10           | 45.04    | 18           | 46.99    | 26           | 49.99    | 34           | 53.93    |
| 11           | 45.21    | 19           | 47.42    | 27           | 50.4     | 35           | 54.62    |
| 12           | 45.45    | 20           | 47.79    | 28           | 50.82    | 36           | 55.43    |
| 13           | 45.61    | 21           | 48.15    | 29           | 51.26    | 37           | 56.38    |
| 14           | 45.88    | 22           | 48.52    | 30           | 51.7     | 38           | 57.51    |
| 15           | 46.08    | 23           | 48.9     | 31           | 52.17    | 39           | 58.88    |
| 16           | 46.32    | 24           | 49.24    | 32           | 52.72    | 40           | 60.65    |
| 17           | 46.59    | 25           | 49.61    | 33           | 53.28    | 41           | 62.29    |

Tabla 2.1: Valores de la intersección entre líneas normales y el eje óptico para la superficie de *Bausch & Lomb*

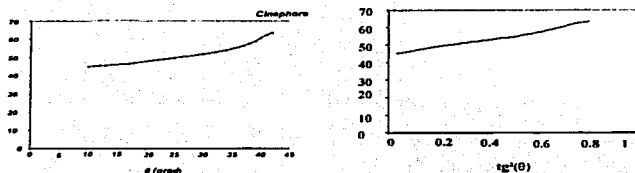


Figura 2.12 A la izquierda el ángulo contra la distancia  $X$ , a la derecha la  $\text{tg}^2(\theta)$  contra la distancia  $X$ , para los datos medidos sobre la superficie Baush & Lomb.

Mientras que para la superficie de Melles Griott las siguientes mediciones fueron tomadas:

| $\theta$ (°) | $X$ (mm) | $\theta$ (°) | $X$ (mm) | $\theta$ (°) | $X$ (mm) | $\theta$ (°) | $X$ (mm) |
|--------------|----------|--------------|----------|--------------|----------|--------------|----------|
| 7            | 21.28    | 19           | 21.89    | 30           | 23.42    | 42           | 26.56    |
| 8            | 21.34    | 20           | 21.94    | 31           | 23.62    | 43           | 26.84    |
| 9            | 21.41    | 21           | 22       | 32           | 23.93    | 44           | 27.18    |
| 10           | 21.45    | 22           | 22.1     | 33           | 24.18    | 45           | 27.52    |
| 11           | 21.5     | 23           | 22.2     | 34           | 24.4     | 46           | 27.92    |
| 12           | 21.55    | 24           | 22.31    | 35           | 24.71    | 47           | 28.31    |
| 13           | 21.59    | 25           | 22.42    | 36           | 24.9     | 48           | 28.77    |
| 14           | 21.63    | 26           | 22.62    | 37           | 25.29    | 49           | 29.22    |
| 15           | 21.67    | 27           | 22.81    | 38           | 25.53    | 50           | 29.64    |
| 16           | 21.7     | 28           | 22.99    | 39           | 25.77    | 51           | 30.07    |
| 17           | 21.74    | 29           | 23.17    | 40           | 26.02    | 52           | 30.61    |
| 18           | 21.82    | 30           | 23.42    | 41           | 26.27    | 53           | 31.15    |

Tabla 2.2: Valores de la intersección entre líneas normales y el eje óptico para la superficie de Melles Griot

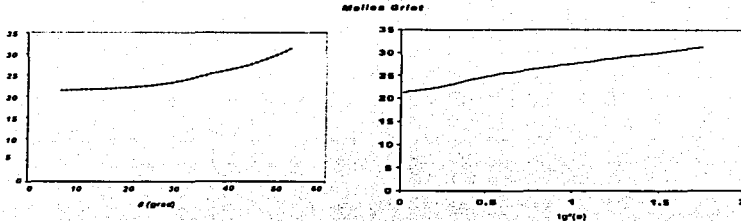


Figura 2.13. A la izquierda, la gráfica de  $\theta$  contra  $X$ (mm), a la derecha la gráfica de  $\theta^2$  contra  $X$  (mm) para los datos medidos sobre la superficie Melles Griot.

De las gráficas se puede observar que la relación entre el ángulo y la aberración longitudinal no guardan una relación lineal, pero Díaz Uribe (1990) muestra que existe relación casi lineal entre la aberración longitudinal y el cuadrado de la tangente del ángulo, parámetros que se determinan a partir de las mediciones experimentales.

## 2.6 OBTENCIÓN DE LOS COEFICIENTES DE ASFERICIDAD POR EL MÉTODO DE LA INVERSIÓN POLINOMIAL.

En Díaz Uribe (1987) se presenta la aplicación del método de medición a superficies cónicas. También se muestra el análisis de datos a partir del cual se determina el radio de curvatura paraxial y la constante de conicidad. Ahora analizaremos la extensión del método a superficies esféricas en general.

### 2.6.1 Cónicas.

Para hallar la representación de la superficie de prueba en coordenadas cartesianas se parte de la relación (1.1) que relaciona el semidiámetro y la sagita para una superficie cónica

$$z = \frac{cs^2}{1 + \sqrt{1 - (k+1)c^2s^2}} \quad (1.1)$$

Si ahora multiplicamos y dividimos la ecuación 1.1 por:

$$1 - \sqrt{1 - (k+1)c^2s^2} \quad (2.1)$$

obtenemos:

$$z = \frac{cs^2 \left( 1 - [1 - (k+1)c^2s^2]^{1/2} \right)}{(k+1)c^2s^2} \quad (2.2)$$

o bien

$$z = \frac{1}{Qc} \left( 1 - [1 - Qc^2s^2]^{1/2} \right) \quad (2.3)$$

con  $Q = (k+1)$ .

Ahora podemos desarrollar la raíz aplicando el teorema del binomio de Newton hasta grado 10, como se hace Malacara (1992):

$$(1 - Qc^2s^2)^{1/2} = \left[ 1 - \frac{Qc^2s^2}{2} - \frac{Q^2c^4s^4}{8} - \frac{Q^3c^6s^6}{16} - \frac{5Q^4c^8s^8}{128} - \frac{7Q^5c^{10}s^{10}}{256} \right] \quad (2.4)$$

Como los términos son de la forma (Hall y Knight, 1982):

$$\frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - 1 \right) \left( \frac{1}{2} - 2 \right) \dots \left( \frac{1}{2} - n \right) (-Qc^2s^2)^{n+1}}{(n+1)!} = \prod_{k=0}^n \frac{\left( \frac{1}{2} - k \right)}{(k+1)!} (-Qc^2s^2)^{n+1} \quad (2.5)$$

Podemos verificar su convergencia. La serie converge cuando  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ , entonces:

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n\right)\left(-Qc^2s^2\right)^{n+1}}{(n+1)!} = \left(\frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)}{n} - 1\right) \left(-Qc^2s^2\right). \quad (2.6)$$

$$\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n-1\right)\left(-Qc^2s^2\right)^n}{n!}$$

Esto es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\left(\frac{1}{2}-1\right)}{n} - 1 \right) \left(-Qc^2s^2\right) = Qc^2s^2. \quad (2.7)$$

por lo que la serie infinita converge siempre que

$$|Qc^2s^2| < 1.$$

Por tanto a la sagita  $z$  la podemos escribir así:

$$z = \frac{1}{Qc} \left( 1 - \left[ 1 - \frac{Qc^2s^2}{2} - \frac{Q^2c^4s^4}{8} - \frac{Q^3c^6s^6}{16} - \frac{5Q^4c^8s^8}{128} - \frac{7Q^5c^{10}s^{10}}{256} \right] \right). \quad (2.8)$$

Pero el desarrollo a través del teorema del binomio no dice nada sobre el error de la serie truncada. Para hacer una estimación del error consideremos la forma de Lagrange para el residuo de una serie de Mc Clairin (Spivak 1978), que coincide con el desarrollo del binomio en (2.8), que va como el primer término despreciado:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} x^{n+1},$$

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN



y  $t \in (0, x)$  seleccionando su valor de manera que  $R_n(x)$  sea máximo.

Por lo anterior debemos desarrollar a  $(1 - Qc^2s^2)^{1/2}$  de la ecuación (2.3) en serie de Mc Claurin hasta orden 12, tomando  $a = -Qc^2s^2$ , por lo tanto  $a' = -2Qc^2s$ , y  $a'' = -2Qc^2$ .

Entonces:

$$u = (1 + a)^{1/2}, \quad (2.9)$$

$$u^{(1)} = \frac{1}{2} a' (1 + a)^{-1/2},$$

$$u^{(2)} = -\frac{1}{4} (a')^2 (1 + a)^{-3/2} + \frac{1}{2} (a'')(1 + a)^{-1/2},$$

$$u^{(3)} = -\frac{3}{4} (a' a'')(1 + a)^{-3/2} + \frac{3}{8} (a'')^2 (1 + a)^{-5/2},$$

$$u^{(4)} = -\frac{3}{4} (a'')^2 (1 + a)^{-3/2} + \frac{18}{8} (a'^2 a'')(1 + a)^{-3/2} - \frac{15}{16} a'^4 (1 + a)^{-7/2},$$

$$u^{(5)} = \frac{45}{8} a' a''^2 (1 + a)^{-5/2} - \frac{150}{16} (a'^3 a'')(1 + a)^{-7/2} + \frac{105}{32} a'^5 (1 + a)^{-9/2},$$

$$u^{(6)} = \frac{45}{8} (a'')^3 (1 + a)^{-5/2} - \frac{675}{16} a'^2 a''^2 (1 + a)^{-7/2} + \frac{1575}{32} (a'^4 a'')(1 + a)^{-9/2} - \frac{945}{64} a'^6 (1 + a)^{-11/2},$$

$$u^{(7)} = -\frac{1575}{16} a' a''^3 (1 + a)^{-7/2} + \frac{11025}{32} a'^3 a''^2 (1 + a)^{-9/2} - \frac{19845}{64} (a'^5 a'')(1 + a)^{-11/2} - \frac{10395}{128} a'^7 (1 + a)^{-13/2},$$

$$u^{(8)} = -\frac{1575}{16} a'^4 (1 + a)^{-7/2} + \frac{44100}{32} a'^2 a''^3 (1 + a)^{-9/2} - \frac{198450}{64} (a'^6 a'')(1 + a)^{-11/2} + \frac{291060}{128} a'^8 a'' (1 + a)^{-13/2} - \frac{135135}{256} a'^8 (1 + a)^{-15/2},$$

$$u^{(9)} = \frac{99225}{32} a'^5 a''^2 (1 + a)^{-9/2} - \frac{1190700}{64} a'^3 a''^3 (1 + a)^{-11/2} + \frac{3929310}{128} a'^5 a''^2 (1 + a)^{-13/2} -$$

$$\frac{4864860}{256} a'^7 a'' (1 + a)^{-15/2} + \frac{2027025}{512} a'^9 (1 + a)^{-17/2},$$

$$u^{(10)} = \frac{99225}{32} a''^3 (1 + a)^{-9/2} - \frac{4465125}{64} a'^2 a''^4 (1 + a)^{-11/2} + \frac{32744250}{128} a'^4 a''^3 (1 + a)^{-13/2} -$$

$$\frac{85135050}{256} a'^6 a''^2 (1 + a)^{-15/2} + \frac{91216125}{512} a'^8 a'' (1 + a)^{-17/2} - \frac{34459425}{1024} a'^{10} (1 + a)^{-19/2},$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$\begin{aligned} \mu^{(11)} &= -\frac{9823275}{64} a^7 a'^5 (1+a)^{-11/2} + \frac{180093375}{128} a^3 a'^4 (1+a)^{-13/2} - \frac{936485550}{256} a^5 a'^3 (1+a)^{-15/2} + \\ &\quad \frac{2006754750}{512} a^7 a'^2 (1+a)^{-17/2} - \frac{1895268375}{1024} a^9 a'' (1+a)^{-19/2} + \frac{654729075}{2048} a^{11} (1+a)^{-21/2}, \\ \mu^{(12)} &= -\frac{9823275}{64} a^6 a'^6 (1+a)^{-11/2} + \frac{551085700}{128} a^2 a'^5 (1+a)^{-13/2} - \frac{7023641625}{256} a^4 a'^4 (1+a)^{-15/2} + \\ &\quad \frac{28094566500}{512} a^6 a'^3 (1+a)^{-17/2} - \frac{51172246125}{1024} a^8 a'' (1+a)^{-19/2} + \\ &\quad \frac{43212118950}{2048} a^{10} a'' (1+a)^{-21/2} - \frac{13749310575}{4096} a^{12} (1+a)^{-23/2}. \end{aligned}$$

Al reducir términos y sustituir los valores de  $a$ ,  $a'$  y  $a''$ , en la expresión del residuo, tenemos una cota superior para el error en  $z$ , esta es menor o igual a:

$$R(z) \leq \left| \frac{Q^5 c^{11} s^{12}}{256(1-Qc^2s^2)^{11/2}} \left[ 1 + 1155 \frac{Qc^2s^2}{(1-Qc^2s^2)} + 6006 \left( \frac{Qc^2s^2}{(1-Qc^2s^2)} \right)^2 + 12870 \left( \frac{Qc^2s^2}{(1-Qc^2s^2)} \right)^3 + \right. \right. \\ \left. \left. 12155 \left( \frac{Qc^2s^2}{(1-Qc^2s^2)} \right)^4 + 4199 \left( \frac{Qc^2s^2}{(1-Qc^2s^2)} \right)^5 \right] \right| \quad (2.10)$$

Con esta expresión se determinan los intervalos para  $Q$  y  $c$  donde el error de la aproximación polinomial de  $z$  es aceptable, pero resulta demasiado complicada de evaluar y numéricamente se introducen demasiados errores de redondeo tal que las estimaciones carecen de precisión. Sin embargo, pueden hacerse algunas consideraciones sobre  $Q$  y  $c$  y posteriormente evaluar el residuo dado en (2.10):

Expresemos en términos del número  $f$  la siguiente relación:

$$|Qc^2s^2| < 1.$$

Como el valor máximo de  $s$  es el valor del semidiámetro de la superficie, y  $c$  es el inverso del radio de curvatura paraxial, y recordando que el número  $f$  para una superficie reflectora es el radio dividido entre el doble del diámetro, esto es:

$$c = 1/r, \quad s_{\max} = D/2, \quad f\# = r/2D.$$

aunque nuestra superficie no es totalmente reflectora, si trabajamos con el haz reflejado, por lo que podemos considerar la expresión anterior válida, Entonces:

$$|Qc^2s^2| = \left| \frac{QD^2}{4r^2} \right| = \left| \frac{Q}{16(f\#)^2} \right| < 1.$$

de donde

$$\left| \frac{\sqrt{Q}}{4} \right| < f / \# .$$

Para analizar el comportamiento del error dado en la expresión (2.10) daremos valores a  $Q$  y  $f/\#$ , y así estimaremos el error para diferentes cónicas.

Si  $Q = 0$ , se trata de una parábola, y  $f/\# > 0$  y la  $R(s)$  dado en (2.10), toma el valor cero, esto implica que para una parábola la expansión en serie de McClaurin es exacta.

Si  $Q = 1$ , se trata de una esfera, y  $f/\# = 1/4$ , lo que implica que el valor de  $s$  donde la expansión converge equivale a la magnitud del radio de la esfera, esto es, para toda la esfera, pero una estimación del residuo, o bien del error, para  $s = r$  es aproximadamente del 6 %.

Si  $0 < Q < 1$ , se trata de un elipsoide, y  $f/\# > 1/4$ , lo que implica que el valor de  $2s$  es menor que el radio de curvatura paraxial. Realizando una evaluación numérica del residuo para el caso cuando el valor de  $2s$  es del 70 % del radio de curvatura paraxial, se encuentra que es de aproximadamente del 5 %.

Para un hiperboloide los valores de  $s$  son similares a los obtenidos para el elipsoide, por lo que la cota para el error dado por (2.10) es también similar.

### 2.6.2 Asféricas.

Como se menciona en el capítulo 1, ecuación (1.2), a una superficie esférica, la podemos considerar como una cónica con términos de deformación, esto es (Malacara, 1992):

$$z = \frac{cs^2}{1 + \sqrt{1 - (k+1)c^2s^2}} + A_1 s^4 + A_2 s^6 + A_3 s^8 + A_4 s^{10}, \quad (2.11)$$

donde las  $A_i$  son los términos de deformación.

Si ahora desarrollamos en serie de McClaurin el término en  $s^2$ , hasta grado 10 y agrupamos, tenemos:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$z = \frac{c}{2} s^2 + \left( \frac{Qc^3}{8} + A_1 \right) s^4 + \left( \frac{Q^2 c^5}{16} + A_2 \right) s^6 + \left( \frac{5Q^3 c^7}{128} + A_3 \right) s^8 + \left( \frac{7Q^4 c^9}{256} + A_4 \right) s^{10}, \quad (2.12)$$

o bien

$$z = \sum_{n=1}^5 D_{2n} s^{2n}, \quad (2.13)$$

con

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{c}{2}, \\ D_4 &= \frac{Qc^3}{8} + A_1, \\ D_6 &= \frac{Q^2 c^5}{16} + A_2, \\ D_8 &= \frac{5Q^3 c^7}{128} + A_3, \\ D_{10} &= \frac{7Q^4 c^9}{256} + A_4. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Se pueden obtener relaciones entre los parámetros de cada descripción ( $s, z$ ) y  $(x, \theta)$ , como sigue: ver figura 2.10.

$$X = z + \frac{s}{\operatorname{tg}(\theta)}, \quad (2.15)$$

que es el parámetro medido, pero puede obtenerse la aberración longitudinal como sigue:

$$x = z + \frac{s}{\operatorname{tg}(\theta)} - r. \quad (2.16)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

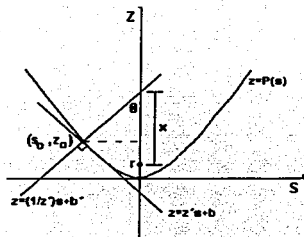


Figura 2.14. Superficie óptica esférica, en ella se puede observar la relación entre los parámetros  $(s, z)$  y  $(\theta, x)$

y el ángulo de las normales:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{dz}{ds} \quad (2.17)$$

Para expresar a  $x$  como un polinomio en  $\theta$ , derivamos (2.13) para expresar a la  $\operatorname{tg}(\theta)$  como un polinomio, así que podemos escribir a la  $\operatorname{tg}(\theta)$  como:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \sum_{n=1}^3 2nD_{2n}s^{2n-1} = \sum_{n=0}^4 E_{2n+1}s^{2n+1}, \quad (2.19)$$

donde

$$\begin{aligned} E_1 &= 2 \frac{c}{2} = c, \\ E_3 &= 4 \left( \frac{Qc^3}{8} + A_1 \right) = \frac{Qc^3}{2} + 4A_1, \\ E_5 &= 6 \left( \frac{Q^2c^5}{16} + A_2 \right) = \frac{3Q^2c^5}{8} + 6A_2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$E_7 = 8 \left( \frac{5Q^3 c^7}{128} + A_3 \right) = \frac{5Q^3 c^7}{16} + 8A_3,$$

$$E_9 = 10 \left( \frac{7Q^4 c^9}{256} + A_4 \right) = \frac{35Q^4 c^9}{128} + 10A_4,$$

Ahora  $\text{tg}(\theta)$  es una función de  $s$ , pero podemos encontrar el polinomio inverso, donde  $s$  sea un polinomio en  $\text{tg}(\theta)$ , según el método convencional descrito por Arfken (1985), ver apéndice A, este polinomio tiene la forma que sigue (Díaz *et al* 1987):

$$s = \sum_{n=0}^4 T_{2n+1} \text{tg}^{2n+1}(\theta), \quad (2.21)$$

con

$$T_1 = \frac{1}{E_1},$$

$$T_3 = -\frac{E_3}{E_1^4},$$

$$T_5 = \frac{1}{E_1^7} (3E_3^2 - E_1 E_5), \quad (2.22)$$

$$T_7 = \frac{1}{E_1^{10}} (8E_1 E_3 E_5 - 12E_3^3 - E_1^2 E_7),$$

$$T_9 = \frac{1}{E_1^{13}} (-55E_1 E_3^2 E_5 + 55E_3^4 + 10E_1^2 E_3 E_7 + 5E_1^2 E_5^2 - E_1^3 E_9).$$

Esta expresión la podemos sustituir en la ecuación (2.16) para  $x$ .

$$x = z + \frac{\sum_{n=0}^4 T_{2n+1} \operatorname{tg}^{2n+1}(\theta)}{\operatorname{tg}(\theta)} - r. \quad (2.23)$$

Cada término de  $s$  es de potencia impar, al realizar el cociente todos los términos tienen potencias pares, de forma que la expresión para  $x$  es:

$$x = z + \sum_{n=0}^4 T_{2n+1} \operatorname{tg}^{2n}(\theta) - r. \quad (2.24)$$

La variable  $s$  puede ser sustituida en la expresión polinomial para  $z$ :

$$z = \sum_{n=1}^5 D_{2n} \left( \sum_{n=0}^4 T_{2n+1} \operatorname{tg}^{2n+1}(\theta) \right)^{2n}. \quad (2.25)$$

como cada término impar es elevado a una potencia par, todos los términos tienen potencia par, y al agruparlos tenemos un polinomio de grado 90, de la forma (ver apéndice D):

$$z = \sum_{n=1}^{45} F_{2n} \operatorname{tg}(\theta)^{2n}, \quad (2.26)$$

para ser congruentes con la ecuación (1.4) sólo se conservan los términos de grado menor o igual a 10, y al sustituir (2.26) y (2.24) en la expresión (2.23) para  $x$ :

$$x = \sum_{n=1}^5 F_{2n} \operatorname{tg}(\theta)^{2n} + \sum_{n=0}^4 T_{2n+1} \operatorname{tg}^{2n}(\theta) - r. \quad (2.27)$$

donde  $T_i$  resulta igual a  $r$  pero de signo contrario, por lo que se anulan mutuamente. Simplificando:

$$x = \sum_{n=1}^5 G_{2n} \operatorname{tg}(\theta)^{2n}, \quad (2.28)$$

donde (ver Díaz 1987):

$$\begin{aligned} G_2 &= \frac{1}{4D_2} \left( 1 - \frac{D_4}{D_2} \right), \\ G_4 &= \frac{-3D_4}{16D_2^2} + \frac{3}{8D_2^2} \left( \frac{D_4^2}{D_2} - \frac{D_6}{4} \right), \\ G_6 &= \frac{5}{16D_2^3} \left( \frac{D_4^2}{D_2} - \frac{D_6}{4} \right) + \frac{3}{8D_2^3} \left( \frac{D_4 D_6}{D_2} - \frac{2D_8}{D_2^2} - \frac{D_8}{12} \right), \\ G_8 &= \frac{-21D_4^2}{32D_2^{10}} + \frac{21D_4 D_6}{64D_2^8} - \frac{7D_8}{256D_2^4} + \frac{55D_4^4}{32D_2^{13}} - \frac{5D_{10}}{512D_2^{10}} - \frac{165D_4^2 D_6}{128D_2^{12}} + \frac{45D_6^2}{512D_2^{11}} + \frac{5D_4 D_8}{32D_2^{11}}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$G_{10} = \frac{-9D_{10}}{1024D_2^{10}} + \frac{99D_4^4}{64D_2^{13}} - \frac{297D_4^2}{256D_2^{12}} + \frac{81D_6^2}{1024D_2^{11}} + \frac{9D_2D_8}{64D_2^{11}}.$$

De estas expresiones pueden despejarse los coeficientes  $D_{2n}$  como función de los coeficientes  $G$ 's., esto es:

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{1}{4} \left\{ G_2 - \frac{4G_4}{3} + \frac{8G_6}{5} - \frac{64G_8}{35} + \frac{4096G_{10}}{63} \right\}^{-1}, \\ D_4 &= \frac{-16D_2^4}{3} \left\{ G_4 - \frac{6G_6}{5} - \frac{1024G_{10}}{21} + \frac{48G_8}{35} \right\}, \\ D_6 &= \frac{-64D_2^6 G_6}{5} + \frac{4D_2^4}{D_4} - \frac{32768D_2^6 G_{10}}{63} + \frac{512D_2^6 G_{10}}{35}, \\ D_8 &= \frac{-256D_2^8 G_8}{7} - \frac{24D_2^4}{D_4^2} + \frac{12D_2D_6}{D_4} + \frac{2560D_2^8 G_{10}}{63} \\ D_{10} &= \frac{-1024D_2^{10} G_{10}}{9} + \frac{176D_2^4}{D_2^3} - \frac{132D_2^2}{D_2^2} + \frac{9D_2^2}{D_2} + \frac{16D_2D_8}{D_2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Como  $D_2$  depende únicamente de las  $G$ 's entonces se puede evaluar directamente y sustituirse en las expresiones anteriores para determinar todas las  $D$ 's conociendo las  $G$ 's. Para conocer las  $G$ 's basta con realizar una regresión polinomial a los datos de  $x$  y  $\text{tg}^2(\theta)$ .

De acuerdo con el apéndice A, los valores de  $x$  pueden expresarse en metros para reducir el dominio del polinomio inverso.

Este método funcionaría bien siempre que el proceso de inversión fuera estable, pero esto no siempre sucede; el método sólo funciona cuando los coeficientes guardan la siguiente relación:

$$D_{2n+1} \ll D_{2n}. \quad (2.31)$$

Mediante las simulaciones numéricas se puede determinar que si  $D_{2n+1} < 0.1D_{2n}$ , el error de la inversión polinomial es despreciable.

#### EJEMPLO:

Se propone una superficie, descrita por la ecuación:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



$$z = D_2 s^2 + D_4 s^4 + D_6 s^6 + D_8 s^8 + D_{10} s^{10}, \quad (2.32)$$

con  $D_2 = 100$ ,  $D_4 = 10$ ,  $D_6 = 1$ ,  $D_8 = 0.1$  y  $D_{10} = 0.01$ , con lo que el polinomio (2.32) toma la forma:

$$z = 100s^2 + 10s^4 + s^6 + 0.1s^8 + 0.01s^{10}.$$

Se calculan los valores de  $\text{tg}^2(\theta)$  y  $X'$  para un conjunto de puntos  $(s, z)$  a partir de las expresiones (2.15), (2.16), (2.17)

| $s$   | $z$        | $\text{tg}(\theta)$ | $\text{tg}^2(\theta)$ | $X'$       |
|-------|------------|---------------------|-----------------------|------------|
| 0.001 | 0.0001     | 0.20000004          | 0.04000002            | 0.0051     |
| 0.002 | 0.0004     | 0.40000032          | 0.16000026            | 0.0054     |
| 0.003 | 0.0009     | 0.60000108          | 0.3600013             | 0.00589999 |
| 0.004 | 0.0016     | 0.80000256          | 0.6400041             | 0.00659999 |
| 0.005 | 0.00250001 | 1.000005            | 1.00001               | 0.00749998 |
| 0.006 | 0.00360001 | 1.20000864          | 1.44002074            | 0.00859998 |
| 0.007 | 0.00490002 | 1.40001372          | 1.96003842            | 0.00989998 |
| 0.008 | 0.00640004 | 1.60002048          | 2.56006554            | 0.01139998 |
| 0.009 | 0.00810007 | 1.80002916          | 3.24010498            | 0.01309998 |
| 0.01  | 0.0100001  | 2.00004             | 4.00016               | 0.015      |
| 0.011 | 0.01210015 | 2.20005324          | 4.84023426            | 0.01710003 |
| 0.012 | 0.01440021 | 2.40006912          | 5.76033179            | 0.01940006 |
| 0.013 | 0.01690029 | 2.60008788          | 6.760457              | 0.02190012 |
| 0.014 | 0.01960038 | 2.80010976          | 7.84061469            | 0.02460019 |
| 0.015 | 0.02250051 | 3.000135            | 9.00081005            | 0.02750028 |
| 0.016 | 0.02560066 | 3.20016385          | 10.2410486            | 0.0306004  |
| 0.017 | 0.02890084 | 3.40019653          | 11.5613364            | 0.03390055 |
| 0.018 | 0.03240105 | 3.60023329          | 12.9616798            | 0.03740073 |
| 0.019 | 0.0361013  | 3.80027437          | 14.4420853            | 0.04110094 |
| 0.02  | 0.04000016 | 4.00032002          | 16.0025603            | 0.0450012  |
| 0.021 | 0.04410194 | 4.20037046          | 17.643112             | 0.0491015  |
| 0.022 | 0.04840234 | 4.40042595          | 19.3637485            | 0.05340186 |
| 0.023 | 0.0529028  | 4.60048672          | 21.164478             | 0.05790227 |
| 0.024 | 0.05760332 | 4.80055301          | 23.0453092            | 0.06260274 |
| 0.025 | 0.06250391 | 5.00062506          | 25.006251             | 0.06750328 |
| 0.026 | 0.06760457 | 5.20070311          | 27.0473129            | 0.07260389 |
| 0.027 | 0.07290531 | 5.40078741          | 29.1685046            | 0.07790459 |
| 0.028 | 0.07840615 | 5.60087818          | 31.3698364            | 0.08340536 |
| 0.029 | 0.08410707 | 5.80097568          | 33.6513189            | 0.08910623 |
| 0.03  | 0.0900081  | 6.00108015          | 36.0129629            | 0.0950072  |
| 0.031 | 0.09610924 | 6.20119181          | 38.4547799            | 0.10110828 |
| 0.032 | 0.10241049 | 6.40131092          | 40.9767815            | 0.10740946 |
| 0.033 | 0.10891186 | 6.60143771          | 43.5789799            | 0.11391077 |

|       |            |            |            |            |
|-------|------------|------------|------------|------------|
| 0.034 | 0.11561336 | 6.80157243 | 46.2613876 | 0.12061221 |
| 0.035 | 0.12251501 | 7.00171532 | 49.0240174 | 0.12751378 |
| 0.036 | 0.1296168  | 7.2018666  | 51.8668826 | 0.1346155  |
| 0.037 | 0.13691874 | 7.40202654 | 54.7899968 | 0.14191738 |
| 0.038 | 0.14442085 | 7.60219536 | 57.7933742 | 0.14941941 |
| 0.039 | 0.15212314 | 7.8023733  | 60.8770291 | 0.15712162 |
| 0.04  | 0.1600256  | 8.00256061 | 64.0409764 | 0.165024   |
| 0.041 | 0.16812826 | 8.20275754 | 67.2852312 | 0.17312658 |
| 0.042 | 0.17643112 | 8.4029643  | 70.6098091 | 0.18142936 |
| 0.043 | 0.18493419 | 8.60318116 | 74.0147261 | 0.18993235 |
| 0.044 | 0.19363749 | 8.80340835 | 77.4999986 | 0.19863555 |
| 0.045 | 0.20254101 | 9.00364611 | 81.0656432 | 0.20753899 |
| 0.046 | 0.21164478 | 9.20389468 | 84.7116772 | 0.21664267 |
| 0.047 | 0.22094881 | 9.4041543  | 88.438118  | 0.2259466  |
| 0.048 | 0.2304531  | 9.60442521 | 92.2449836 | 0.23545079 |
| 0.049 | 0.24015766 | 9.80470766 | 96.1322922 | 0.24515526 |

Ajustamos un polinomio de grado 5 a los datos de  $\text{tg}^2(\theta)$  y  $X$ , mostrados en la siguiente gráfica.

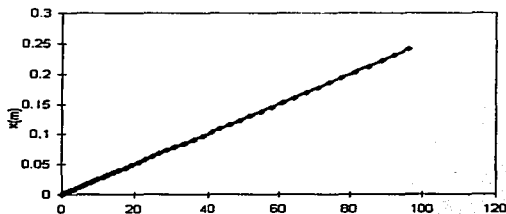


Figura 2.15 Gráfica de los valores de  $\text{tg}^2(\theta)$  contra  $X$  utilizando los coeficientes propuestos.

Mientras que el polinomio ajustado es:

$$x = 0.0025\alpha - 2 \times 10^{-8}\alpha^2 + 2 \times 10^{-13}\alpha^3 - 4 \times 10^{-18}\alpha^4 + 8 \times 10^{-22}\alpha^5$$

donde  $\alpha = \text{tg}^2(\theta)$  y tenemos:

$$\begin{aligned} G_2 &= 0.0025 \\ G_4 &= -2 \times 10^{-8} \\ G_6 &= 2 \times 10^{-13} \end{aligned}$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$G_8 = -4 \times 10^{18}$$

$$G_{10} = 8 \times 10^{22}$$

Aplicando las relaciones (2.30), se tienen los siguientes valores para los coeficientes  $D$ 's:

$$D_2 = 100$$

$$D_4 = 10.667$$

$$D_6 = 1.991$$

$$D_8 = 1.099$$

$$D_{10} = -6.092$$

Los valores de los coeficientes  $D_2$  y  $D_4$  son parecidos o iguales, y en el resto de los coeficientes el error aumenta conforme aumenta el grado del coeficiente, por lo tanto si los coeficientes satisfacen la relación (2.31), existe un intervalo donde el método de la inversión polinomial es aplicable. Pero estos coeficientes reproducen los valores para  $x$  y  $\theta$ , utilizados en la inversión polinomial con un error máximo de 0.003%. En la siguiente gráfica se muestran ambos conjuntos de valores.

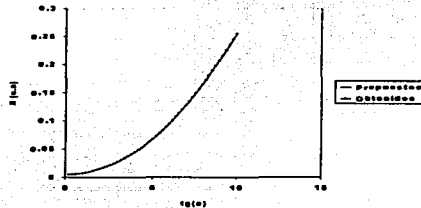


Figura 2.16. Gráfica de los valores de  $tg(\theta)$  contra  $X$ , obtenidos con los coeficientes propuestos y con los coeficientes obtenidos a través de la inversión polinomial.

Podemos observar que el coeficiente de grado 2 que se obtiene por las relaciones (2.30) es exacto, por lo que el método funciona bien para el cálculo del radio de curvatura paraxial, ya que el primer coeficiente está relacionado directamente con este parámetro, así que puede ser calculado como sigue:

$$r = \frac{1}{2D_2} = \frac{1}{2(100)} = 0.005 \text{ u.a.}$$

Probando con esto que la inversión polinomial es valida sólo en casos particulares, ya que inicialmente desconocemos los coeficientes de deformación de la superficie de prueba, información que en este ejemplo conocemos previamente.

## 2.7 CONCLUSIONES.

El método aquí presentado tiene toda la fundamentación teórica que hace pensar que es aplicable en todos los casos, pero en el apéndice A se muestra un análisis de la inversión polinomial y esta inversión involucra errores que en su aplicación no son fáciles de estimar. Por otro lado, el ejemplo funciona sólo si se cumple la condición indicada, pero su aplicación está también relacionada con el dominio de la variable de dicho polinomio. Por lo que podemos concluir que el método de la inversión polinomial no es útil en general, sólo en casos muy particulares, por lo se requiere de un método para evaluar las superficies esféricas a partir de los parámetros  $X$  y  $\theta$ .

El método de medición es muy útil, ya que cuenta con las ventajas siguientes:

- a) Para una superficie grande puede moverse el láser en lugar de las superficies.
- b) Por otro lado el método permite realizar la caracterización de la superficie sin entrar en contacto físico con ella.

## 2.8 REFERENCIAS.

Arfken G. *Mathematical Methods for Physicists*, 2ª. Ed. Academic Press, New York, (1985), pps. 316-316

Díaz Uribe R., Cornejo Rodríguez A., Pedraza Contreras J., Cardona Núñez O. Y Cordero Davila A.; "Profile measurement of a conic surfaces, using a He-Ne laser and a nodal bench", *Appl. Opt.*, **24**, 2612, (1985).

Díaz R, Pastrana R. y Cornejo A., "Profile Measurement of Aspheric Surfaces by Laser Beam Reflection", *Proceedings of the SPIE*, Vol.813, pps. 335-336 (1987)

Díaz Uribe R., "Pruebas Ópticas por Deflectometría Láser", Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias UNAM, México (1990).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Hall M. A., Knight B. A., *Algebra Superior*, Unión Tipográfica Editorial Hispanoamericana S. A. de C. V., México (1982).

Malacara D. *Optical Shop Testing*, Segunda Edición, John Wiley & Sons, Inc., E.U.A., 1992

Spivak M., *Cálculo Infinitesimal*, Ed. Reverté S. A., Colombia (1978), pp 517.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**EVALUACIÓN DE SUPERFICIES ASFÉRICAS**  
**CAPÍTULO 3**

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 3.1 INTRODUCCIÓN.

**E**n este capítulo se presenta un método alternativo, que resuelve algunos de los inconvenientes presentados por el método de la inversión polinomial descrito en el capítulo anterior. Este método se basa en la combinación de un método de paso a paso, como es la integración numérica por la regla del trapecio aplicada a un conjunto de datos, con un proceso iterativo de aproximaciones sucesivas. Entendemos por métodos de aproximaciones sucesivas a aquellos que parten de una aproximación inicial y mediante la aplicación de una fórmula de recurrencia generan una sucesión de aproximaciones a una solución, mientras que los de paso a paso parten también de un valor inicial y se basan también en la aplicación de una fórmula de recurrencia, pero generan un conjunto de aproximaciones a la solución de una sucesión de números, y no a un solo valor, como lo hacen los de aproximaciones sucesivas (Iriarte 1990).

La aplicación de este método a un conjunto de datos de la aberración longitudinal y el ángulo entre las líneas normales a la superficie de prueba y su eje focal permite obtener una descripción en coordenadas cartesianas. En este trabajo los datos fueron obtenidos por deflectometría láser. Así mismo se presenta el análisis numérico de dicho procedimiento, con el fin de determinar criterios de convergencia, así como criterios para establecer la aproximación inicial que todo método numérico requiere. También se muestran los resultados obtenidos al aplicarlo en la caracterización de dos superficies ópticas y se verifican estos resultados a través de una comparación con otros métodos.

### 3.2 INTEGRACIÓN NUMÉRICA.

#### 3.2.1 Planteamiento del problema.

Este método alternativo retoma las ecuaciones (2.17) y (2.18) que relacionan a las coordenadas cartesianas ( $s, z$ ) con los parámetros ( $x, \theta$ ) medidos experimentalmente por cualquier método. Estas ecuaciones son:

$$x = z + \frac{s}{\operatorname{tg}(\theta)} - r, \quad (2.17)$$

y

$$\frac{dz}{ds} = \operatorname{tg}(\theta), \quad (2.18)$$

donde  $z$  puede aproximarse por un polinomio con términos de grado par como en la ecuación (2.13):

$$z = \sum_{j=1}^k D_j s^{2j}, \quad (3.1)$$

ya que suponemos que las superficies a probar tienen simetría de revolución.

La ecuación (2.18) puede escribirse como:

$$dz = \operatorname{tg}(\theta) ds, \quad (3.2)$$

de donde puede obtenerse  $z$  por medio de la integral:

$$z = \int \operatorname{tg}(\theta) ds, \quad (3.3)$$

la cual resultaría obvia para cada par de puntos  $(\theta, X)$ , si conociéramos la dependencia de  $\theta$  con respecto a  $s$ , y así obtener las ordenadas de los puntos sobre la superficie. Al no conocer dicha dependencia se propone un método numérico en el que se calculan las intersecciones de las rectas normales con una superficie propuesta, a la que consideramos como aproximación inicial.

### 3.2.2 Aproximación Inicial.

Es recomendable en todos los métodos numéricos que la aproximación inicial sea un valor cercano a la solución, por lo que en este método proponemos como aproximación inicial una superficie que sea lo más parecida posible a la superficie de prueba, esta podría ser una parábola,

Experimentalmente se mide la aberración longitudinal  $x$ , que es por definición la distancia del centro de curvatura paraxial a la intersección del eje de simetría con la normal, o bien la distancia  $X$ , del vértice al punto de intersección de las normales con el eje focal de la superficie. O bien, puede usarse una posición  $\xi = X + \text{cte}$  arbitraria, y evaluar. En caso de medir la aberración es posible usar el método de la inversión polinomial, descrito en el capítulo 2, y sólo a grado 1, para estimar el radio de curvatura paraxial y lo sumamos a cada valor medido de  $x$ , y obtenemos la nueva variable  $X = x + r$ .



La superficie inicial arbitraria puede ser un paraboloido (o parábola en el plano del perfil medido) de radio de curvatura paraxial, igual o cercano al radio de curvatura de la superficie de prueba y que fue determinado por la inversión polinomial de grado 1.

Dicha parábola es descrita por la ecuación (2.11) con  $k = -1$ :

$$z = \frac{c}{2}s^2 = \frac{s^2}{2r}, \quad (3.4)$$

donde  $c$  y  $r$  son la curvatura y el radio paraxial de la parábola.

Se probaron otras superficies, encontrando que pueden usarse como aproximaciones iniciales, éstas son: una esfera de radio suficientemente grande como para interceptar las líneas normales obtenidas experimentalmente. La ecuación que describe a dicha esfera, (o circunferencia en el plano del perfil medido).

$$z = R \pm \sqrt{R^2 - s^2}, \quad (3.5)$$

donde  $R$  es el radio de la circunferencia propuesta.

También se probó un axicón, formado por una línea recta en el plano del perfil medido, puede ser utilizado como aproximación inicial, siempre que su pendiente sea tal que las intersecciones con las normales se encuentren en el mismo cuadrante que la superficie de prueba. Descrita por la ecuación:

$$z = ms, \quad (3.6)$$

donde  $m$  es la pendiente de la recta.

### 3.2.3 Primera iteración.

Las primera aproximaciones a los valores en coordenadas cartesianas de los puntos caracterizados se obtienen hallando la intersección entre las rectas normales a la superficie y la superficie propuesta como aproximación inicial (figura 3.2a). La familia de rectas normales a la superficie de prueba está dada por:

$$z = -\frac{s}{\operatorname{tg}(\theta)} + X. \quad (3.7)$$

Si la superficie inicial es una parábola, las intersecciones buscadas se pueden obtener al igualar las ecuaciones (3.4) y (3.7), y despejando la  $s$ , estas intersecciones están dadas por la siguiente expresión:

$$\frac{s^2}{2r} + \frac{s}{\operatorname{tg}(\theta)} - X = 0, \quad (3.8)$$

de donde:

$$s = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 + 2Xr \operatorname{tg}^2(\theta)}}{\operatorname{tg}(\theta)}. \quad (3.9a)$$

Debido a la forma en que se coloca el sistema de coordenadas sobre la superficie de prueba, sólo nos interesa la raíz positiva ( $s > 0$ ).

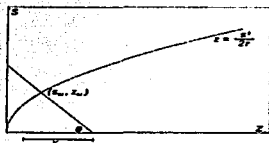


Figura 3.1 Se muestra el punto de intersección entre una línea normal a la superficie de prueba y la superficie inicial propuesta como punto de partida del método de integración numérica

Si la aproximación inicial es una circunferencia, las intersecciones buscadas se pueden obtener al igualar las ecuaciones (3.5) y (3.7), y despejando la  $s$ , estas intersecciones están dadas por la siguiente expresión:

$$s = \frac{\operatorname{tg}(\theta)}{\operatorname{tg}^2(\theta) + 1} \left( (X - R) + \sqrt{R^2 + \operatorname{tg}^2(\theta)(2XR - X^2)} \right), \quad (3.9b)$$

donde  $R$  es el radio de la circunferencia propuesta.

Si la aproximación inicial es un axicón, las intersecciones buscadas se pueden obtener al igualar las ecuaciones (3.6) y (3.7), y despejando la  $s$ , estas intersecciones están dadas por la siguiente expresión

$$s = \frac{X}{m + \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)}}, \quad (3.9c)$$

Donde  $m$  es la pendiente de la recta propuesta.

Ahora tenemos un valor de  $s$  para cada valor de  $X$  y  $\text{tg}(\theta)$  (Figura 3.2b). A este conjunto de valores los consideramos como valores de  $s$  que forman una primera aproximación a los puntos de integración a partir de los cuales se puede realizar una primera integración numérica, aplicando el método del trapecio (Panteleeva y González 2002).

$$z_{i+1} = \int_{s_i}^{s_{i+1}} \text{tg}(\theta) ds \approx \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{\text{tg}(\theta_{i+1}) + \text{tg}(\theta_i)}{2} \right) (s_{i+1} - s_i) + z_0, \quad (3.10)$$

lo que permite encontrar un valor de  $z$  para cada valor de  $s$  obtenido, construyendo así, un conjunto de puntos  $(s_i, z_i)$ , con  $i = 0, 1, \dots, n$ . (figura 3.2c)

### 3.2.4 k-ésima iteración.

Para la iteración 1, 2, 3, ..., k-ésima, ya no contamos con una aproximación analítica, en su lugar contamos con los puntos individuales obtenidos en la iteración anterior, por lo que la intersección  $s_i^k$  se obtiene de unir dos puntos sucesivos con una recta (figura 3.2d) e intersectandola con las rectas normales. Usando la representación de Lagrange (Panteleeva y González 2002) construimos la recta que une a cada 2 puntos consecutivos  $s_i^k$  y  $s_{i+1}^k$ , donde el subíndice  $i$  significa que estamos trabajando con el  $i$ -ésimo punto y el superíndice  $k$  significa la  $k$ -ésima iteración. Las ecuaciones de dichas rectas son:

$$z = \frac{s - s_i^k}{s_{i+1}^k - s_i^k} z_{i+1}^k + \frac{s - s_{i+1}^k}{s_i^k - s_{i+1}^k} z_i^k. \quad (3.11)$$

Hallamos las intersecciones con las rectas de las normales obtenidas a partir de los valores experimentales  $X$  y  $\theta$ , al igualar las ecuaciones (3.7) y (3.11).

$$-\frac{1}{\text{tg}(\theta_{i+1})} s + X_{i+1} = \frac{s - s_i^k}{s_{i+1}^k - s_i^k} z_{i+1}^k + \frac{s - s_{i+1}^k}{s_i^k - s_{i+1}^k} z_i^k, \quad (3.12)$$

donde las  $s_i^k$  son los valores de  $s$  obtenidos al calcular las intersecciones de las normales con las rectas que unen los puntos  $(s_{i+1}^k, z_{i+1}^k)$  y  $(s_i^k, z_i^k)$ , calculadas en la iteración anterior, mientras que las  $z_i^k$  son los valores obtenidos a través de la integración numérica

dada en la ecuación (3.10),  $X_i$  y  $\theta_i$  son los parámetros de la  $i$ -ésima recta normal y son las mismas en cualquier iteración.

Así los valores de  $s$  de los puntos de intersección se obtienen a partir de:

$$s_{i+1}^k = \frac{\left\{ X_{i+1} - \frac{s_{i+1}^k z_i^k - s_i^k z_{i+1}^k}{s_{i+1}^k - s_i^k} \right\}}{\left\{ \frac{z_{i+1}^k - z_i^k}{s_{i+1}^k - s_i^k} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta_{i+1})} \right\}} \quad (3.13)$$

con lo que obtenemos un nuevo conjunto de valores para  $s$  y aplicando nuevamente el método del trapecio (ec. 3.10) tenemos un valor de  $z$  para cada uno de los valores de  $s$  hallado.

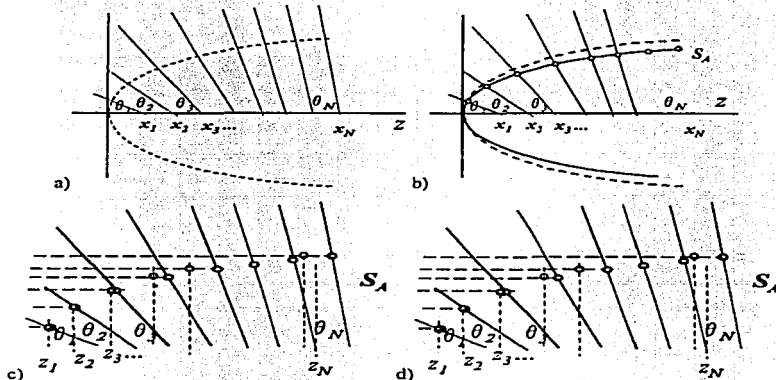


Figura 3.2 a) Se propone una superficie inicial  $S_A$ . b) Se intersectan las normales y  $S_A$ , para obtener valores aproximados de  $s_1, s_2, \dots, s_N$ . c) Se realiza una primera integración usando el método del trapecio, para obtener valores aproximados de  $z_1, z_2, \dots, z_N$ . d) Se intersectan las normales con rectas trazadas entre puntos contiguos  $(z_1, s_1)$  y  $(z_2, s_2)$ ;  $(z_2, s_2)$  y  $(z_3, s_3)$ . Con ello se obtienen nuevos valores:  $s'_1, s'_2, s'_3, \dots, s'_N$ , y se repite el procedimiento.

Posteriormente se construyen las rectas que unen a cada dos puntos consecutivos y se evalúa la intersección de las rectas normales a la superficie de prueba con las nuevas

rectas, con lo que tenemos un nuevo conjunto de valores de  $s_i$ , con los que podemos calcular una segunda aproximación de los valores de  $z_i$  aplicando nuevamente la regla del trapecio, y así sucesivamente hasta obtener la aproximación deseada.

Hemos llegado a un punto donde surgen algunas preguntas:

- 1 Si no conocemos la superficie de prueba ¿Qué tan cercana a la superficie de prueba debe ser la aproximación inicial?
- 2 ¿El método es convergente?
- 3 Si el método es convergente ¿Cuándo detenemos la aplicación?
- 4 ¿El método converge a la superficie de prueba?
- 5 ¿Es estable el método?

Para contestar estas preguntas hagamos un poco de análisis numérico.

### 3.2.5 Convergencia del método.

Para probar la convergencia del método propuesto debemos probar que la sucesión  $\{z_{i+1}^k\}$  converge, para probar que una sucesión converge existen varios criterios, uno de ellos, cuando se conoce el límite  $Z$  de la sucesión.

$$|z_{i+1}^{k+1} - Z| < \varepsilon \quad (3.14)$$

para un  $\varepsilon > 0$  y para una  $k$  suficientemente grande, pero cuando no se conoce el límite de la sucesión podemos aplicar un teorema conocido como *prueba de la razón*, (Hasser, 1980) que dice:

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{d_{n+1}}{d_n} \right| < 1, \text{ entonces } \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0.$$

de donde se deduce que si  $|d_{n+1}| < |d_n|$ , la sucesión  $d_n$  converge, y su límite es cero.

Si consideramos la sucesión  $d_k = z_{i+1}^{k+1} - z_{i+1}^k$ , debemos probar:

$$|z_{i+1}^{k+1} - z_{i+1}^k| < |z_{i+1}^k - z_{i+1}^{k-1}|,$$

para una  $k$  suficientemente grande. de la ecuación (3.10) tenemos:

$$z_{i+1}^{k+1} = \frac{fg(\theta_{i+1}) + fg(\theta_i)}{2} (s_{i+1}^{k+1} - s_i^{k+1}) + z_{i+1}^{k+1}, \quad (3.15)$$

y

$$z_{i+1}^k = \frac{\text{tg}(\theta_{i+1}) + \text{tg}(\theta_i)}{2} (s_{i+1}^k - s_i^k) + z_i^k. \quad (3.16)$$

Definiendo  $T_{i+1} = \frac{\text{tg}(\theta_{i+1}) + \text{tg}(\theta_i)}{2}$  tenemos:

$$z_{i+1}^{k+1} - z_{i+1}^k = T_{i+1} (s_{i+1}^{k+1} - s_{i+1}^k - s_{i+1}^k + s_i^k) + (z_i^{k+1} - z_i^k), \quad (3.17)$$

o bien:

$$z_{i+1}^{k+1} - z_{i+1}^k = T_{i+1} ((s_{i+1}^{k+1} - s_{i+1}^k) - (s_i^{k+1} - s_i^k)) + (z_i^{k+1} - z_i^k). \quad (3.18)$$

Como esta relación es válida para toda  $i$  podemos escribir:

$$z_i^{k+1} - z_i^k = T_i ((s_i^{k+1} - s_i^k) - (s_{i-1}^{k+1} - s_{i-1}^k)) + (z_{i-1}^{k+1} - z_{i-1}^k), \quad (3.19)$$

y así sucesivamente hasta:

$$z_1^{k+1} - z_1^k = T_1 ((s_1^{k+1} - s_1^k) - (s_0^{k+1} - s_0^k)) + (z_0^{k+1} - z_0^k). \quad (3.20)$$

Sustituyendo en sentido inverso en la ecuación (3.17) tenemos:

$$z_{i+1}^{k+1} - z_{i+1}^k = \sum_{j=0}^i (T_{j+1} ((s_{j+1}^{k+1} - s_{j+1}^k) - (s_j^{k+1} - s_j^k))) + (z_0^{k+1} - z_0^k). \quad (3.21)$$

Si escogemos el punto inicial de la integración numérica como un punto de la superficie de prueba, tenemos:

$$z_0^{k+1} - z_0^k = s_0^{k+1} - s_0^k = 0, \quad \text{para toda } k = 0, 1, 2, \dots, m.$$

Por lo tanto:

$$z_{i+1}^{k+1} - z_{i+1}^k = \sum_{j=1}^{i+1} (T_{j+1} ((s_{j+1}^{k+1} - s_{j+1}^k) - (s_j^{k+1} - s_j^k))).$$

Apoyados en el teorema sobre series que dice: Si  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  y  $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$  son series convergentes, entonces  $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)$  es convergente, (Haaser, *et al* 1980), se deduce que si  $\{s_{i+1}^k\}$ , converge entonces  $\{z_{i+1}^k\}$ , por lo que es necesario probar la convergencia de la sucesión  $\{s_{i+1}^k\}$ , es decir:

$$|s_{i+1}^{k+1} - s_{i+1}^k| < |s_{i+1}^k - s_{i+1}^{k-1}|, \quad (3.22)$$

para una  $k$  suficientemente grande.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

De la ecuación (3.13) tenemos que las abscisas de las intersecciones están dadas por:

$$s_{i+1}^{A+1} = \frac{\{X_{i+1} - A\}}{\left\{B + \frac{1}{\lg(\theta_{i+1})}\right\}}, \quad (3.23)$$

con

$$\begin{aligned} A &= \frac{s_{i+1}^A z_i^A - s_i^A z_{i+1}^A}{s_{i+1}^A - s_i^A} = \frac{s_{i+1}^A z_i^A - s_i^A (T_{i+1}(s_{i+1}^A - s_i^A) + z_i^A)}{s_{i+1}^A - s_i^A} = \\ &= \frac{z_i^A (s_{i+1}^A - s_i^A) - s_i^A T_{i+1} (s_{i+1}^A - s_i^A)}{s_{i+1}^A - s_i^A} = z_i^A - T_{i+1} s_i^A \end{aligned} \quad (3.24)$$

y

$$B = \frac{z_{i+1}^A - z_i^A}{s_{i+1}^A - s_i^A}, \quad (3.25)$$

pero de la ecuación (3.16) se tiene:

$$B = \frac{z_{i+1}^A - z_i^A}{s_{i+1}^A - s_i^A} = \frac{(T_{i+1}(s_{i+1}^A - s_i^A) + z_i^A) - z_i^A}{s_{i+1}^A - s_i^A} = T_{i+1}. \quad (3.26)$$

Por lo que la ecuación (3.13) se reduce a:

$$s_{i+1}^{A+1} = \frac{X_{i+1} + T_{i+1} s_i^A - z_i^A}{T_{i+1} + \frac{1}{\lg(\theta_{i+1})}}. \quad (3.27)$$

De la ecuación (3.16) tenemos:

$$s_i^A = s_{i+1}^A - \frac{z_{i+1}^A - z_i^A}{T_{i+1}}. \quad (3.28)$$

sustituyendo (3.28) en (3.27) tenemos:

$$s_{i+1}^{A+1} = \frac{X_{i+1} + T_{i+1} s_{i+1}^A - z_i^A}{T_{i+1} + \frac{1}{\lg(\theta_{i+1})}}. \quad (3.29)$$

Comparando las ecuaciones (3.29) y (3.27) observamos que  $s_{i+1}^{A+1}$  se puede expresar como una función de  $(s_{i+1}^A, z_{i+1}^A)$ , o bien como función de  $(s_i^A, z_i^A)$ , con la misma forma funcional. Es decir que:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$s_{i+1}^{k+1} = f(s_i^k, z_i^k) = f(s_{i+1}^k, z_{i+1}^k).$$

De la ecuación (3.29) se deduce:

$$s_{i+1}^k = \frac{X_{i+1} + T_{i+1} s_{i+1}^{k-1} - z_{i+1}^{k-1}}{T_{i+1} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta_{i+1})}}, \quad (3.30)$$

restando (3.30) de (3.29) tenemos:

$$s_{i+1}^{k+1} - s_{i+1}^k = \frac{X_{i+1} + T_{i+1} s_{i+1}^k - z_{i+1}^k - X_{i+1} - T_{i+1} s_{i+1}^{k-1} + z_{i+1}^{k-1}}{T_{i+1} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta_{i+1})}}, \quad (3.31)$$

o bien:

$$|s_{i+1}^{k+1} - s_{i+1}^k| = \left| \frac{T_{i+1} (s_{i+1}^k - s_{i+1}^{k-1}) - (z_{i+1}^k - z_{i+1}^{k-1})}{T_{i+1} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta_{i+1})}} \right|, \quad (3.32)$$

o bien:

$$|s_{i+1}^{k+1} - s_{i+1}^k| = \left| \frac{T_{i+1} (s_{i+1}^k - s_{i+1}^{k-1}) - (z_{i+1}^k - z_{i+1}^{k-1})}{T_{i+1} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta_{i+1})}} \right| \leq \left| \frac{T_{i+1} (s_{i+1}^k - s_{i+1}^{k-1})}{T_{i+1} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta_{i+1})}} \right| + \left| \frac{(z_{i+1}^k - z_{i+1}^{k-1})}{T_{i+1} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta_{i+1})}} \right|. \quad (3.33)$$

Entonces para que la sucesión converja debe cumplirse:

$$\left| \frac{T_{i+1} (s_{i+1}^k - s_{i+1}^{k-1})}{T_{i+1} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta_{i+1})}} \right| + \left| \frac{(z_{i+1}^k - z_{i+1}^{k-1})}{T_{i+1} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta_{i+1})}} \right| < |s_{i+1}^k - s_{i+1}^{k-1}|, \quad (3.34)$$

es decir:

$$\left| \frac{(z_{i+1}^k - z_{i+1}^{k-1})}{T_{i+1} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta_{i+1})}} \right| < \left( 1 - \left| \frac{T_{i+1}}{T_{i+1} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta_{i+1})}} \right| \right) |s_{i+1}^k - s_{i+1}^{k-1}|. \quad (3.35)$$

Como  $\theta$  es positiva siempre,  $\operatorname{tg}(\theta)$  también lo es, y por lo tanto  $T_{i+1}$  es positiva, entonces la expresión (3.35) se puede escribir como:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



$$\left| \frac{(z_{i+1}^k - z_{i+1}^{k-1})}{T_{i+1} + \frac{1}{\lg(\theta_{i+1})}} \right| < \frac{1}{T_{i+1} + \frac{1}{\lg(\theta_{i+1})}} |s_{i+1}^k - s_{i+1}^{k-1}|, \quad (3.36)$$

de donde se tiene que:

$$|z_{i+1}^k - z_{i+1}^{k-1}| < \frac{1}{\lg(\theta_{i+1})} |s_{i+1}^k - s_{i+1}^{k-1}|, \quad (3.37)$$

o bien:

$$\left| \frac{z_{i+1}^k - z_{i+1}^{k-1}}{s_{i+1}^k - s_{i+1}^{k-1}} \right| < \frac{1}{\lg(\theta_{i+1})}. \quad (3.38)$$

El lado izquierdo de la desigualdad anterior es la pendiente de la recta que une a dos aproximaciones consecutivas del  $i+1$ -ésimo punto, mientras que el lado derecho es la pendiente de la  $i+1$ -ésima recta normal a la superficie de prueba.

Lo que implica que para que haya convergencia la superficie inicial debe tener una pendiente similar a la superficie de prueba.

Como la sucesión  $\{s_{i+1}^k\}$  converge, entonces:

Tomando el valor absoluto de la ecuación (3.21) y aplicando el límite cuando  $k$  tiende a infinito:

$$|z_{i+1}^k - z_{i+1}^k| = \left| \sum_{r=0}^{n-1} (T_{i+1} ((s_{i+1}^{k+1} - s_{i+1}^k) - (s_{i+1}^{k+1} - s_{i+1}^k))) + (z_0^{k+1} - z_0^k) \right|, \quad (3.39)$$

o bien:

$$|z_{i+1}^{k+1} - z_{i+1}^k| \leq \left| \sum_{r=0}^{n-1} (T_{i+1} ((s_{i+1}^{k+1} - s_{i+1}^k) - (s_{i+1}^{k+1} - s_{i+1}^k))) \right| + |z_0^{k+1} - z_0^k|. \quad (3.40)$$

Aplicando el límite tenemos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |z_{i+1}^{k+1} - z_{i+1}^k| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \sum_{r=0}^{n-1} (T_{i+1} ((s_{i+1}^{k+1} - s_{i+1}^k) - (s_{i+1}^{k+1} - s_{i+1}^k))) \right| + \lim_{k \rightarrow \infty} |z_0^{k+1} - z_0^k|, \quad (3.41)$$

Lo que podemos escribir como:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |z_{i+1}^{k+1} - z_{i+1}^k| \leq \left| \sum_{r=0}^{n-1} \lim_{k \rightarrow \infty} (T_{i+1} ((s_{i+1}^{k+1} - s_{i+1}^k) - (s_{i+1}^{k+1} - s_{i+1}^k))) \right| + \lim_{k \rightarrow \infty} |z_0^{k+1} - z_0^k|. \quad (3.42)$$

Como la sucesión  $\{s_{i+1}^k\}$  converge:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |(s_{i+1}^{k+1} - s_{i+1}^k)| = 0. \quad (3.43)$$

Si  $z_0$  es un punto de la superficie inicial que coincide con un punto de la superficie de prueba, se tiene:

$$|z_0^{k+1} - z_0^k| = 0; \text{ para toda } k, \quad (3.44)$$

Por lo que al sustituir los límites conocidos se llega a:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |z_{i+1}^{k+1} - z_{i+1}^k| = 0. \quad (3.45)$$

por lo que podemos concluir que la sucesión  $\{z_{i+1}^{k+1}\}$  también converge. Podemos además demostrar que la sucesión  $\{X_{i+1}^{k+1}\}$  converge, donde los elementos de esta sucesión son las intersecciones de las rectas que pasan por los puntos  $(s_{i+1}^{k+1}, z_{i+1}^{k+1})$ , con pendiente  $1/\text{tg}(\theta_{i+1})$ . Partiendo de la ecuación (3.29):

$$s_{i+1}^{k+1} = \frac{X_{i+1} + T_{i+1}s_{i+1}^k - z_{i+1}^k}{T_{i+1} + \frac{1}{\text{tg}(\theta_{i+1})}}. \quad (3.46)$$

Calculamos ahora  $(s_{i+1}^{k+1} - s_{i+1}^k)$ :

$$|s_{i+1}^{k+1} - s_{i+1}^k| = \left| \frac{\left\{ X_{i+1} + T_{i+1}s_{i+1}^k - z_{i+1}^k \right\} - s_{i+1}^k}{\left\{ T_{i+1} + \frac{1}{\text{tg}(\theta_{i+1})} \right\}} - s_{i+1}^k \right| = \left| \frac{\left\{ X_{i+1} + T_{i+1}s_{i+1}^k - z_{i+1}^k \right\} - \left\{ T_{i+1} + \frac{1}{\text{tg}(\theta_{i+1})} \right\} s_{i+1}^k}{\left\{ T_{i+1} + \frac{1}{\text{tg}(\theta_{i+1})} \right\}} \right| \quad (3.47)$$

entonces:

$$|s_{i+1}^{k+1} - s_{i+1}^k| = \left| \frac{X_{i+1} + T_{i+1}s_{i+1}^k - z_{i+1}^k - T_{i+1}s_{i+1}^k - \frac{s_{i+1}^k}{\text{tg}(\theta_{i+1})}}{\left\{ T_{i+1} + \frac{1}{\text{tg}(\theta_{i+1})} \right\}} \right| = \left| \frac{X_{i+1} - z_{i+1}^k - \frac{s_{i+1}^k}{\text{tg}(\theta_{i+1})}}{\left\{ T_{i+1} + \frac{1}{\text{tg}(\theta_{i+1})} \right\}} \right|. \quad (3.48)$$

Viendo la ecuación (3.7) definimos:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$X_{i+1}^{k+1} = z_{i+1}^{k+1} + \frac{s_{i+1}^{k+1}}{\operatorname{tg}(\theta_{i+1})}, \quad (3.49)$$

o bien:

$$z_{i+1}^{k+1} = -\frac{s_{i+1}^{k+1}}{\operatorname{tg}(\theta_{i+1})} - X_{i+1}^{k+1}, \quad (3.49a)$$

entonces:

$$|s_{i+1}^{k+1} - s_{i+1}^k| = \left| \frac{X_{i+1}^k - X_{i+1}^{k+1}}{T_{i+1} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta_{i+1})}} \right|. \quad (3.50)$$

Como la sucesión  $\{s_{i+1}^{k+1}\}$  converge, también lo hace la sucesión  $\{X_{i+1}^{k+1}\}$  y tiene como límite  $X_{i+1}$  que es la ordenada al origen de la  $i+1$ -ésima recta normal (3.49a) a la superficie de prueba y es un dato medido experimentalmente, lo que implica que el método permite recuperar los datos medidos experimentalmente a partir de los datos de  $(s, z)$  obtenidos numéricamente.

Por todo lo anterior podemos concluir que el método es convergente siempre que se tome como aproximación inicial una superficie que tenga una pendiente similar a la superficie de prueba, que coincidan en un punto y que se satisfaga la relación (3.38), aunque se mostrará más adelante que esta última condición es suficiente más no necesaria.

### 3.2.6 Criterio de paro.

Todos los métodos iterativos requieren de un criterio de paro, es decir, un criterio que permita decidir en que momento detener el proceso iterativo. Ya se dijo que si el método es convergente y de aproximaciones sucesivas, este genera una sucesión de valores que convergen a la solución, la convergencia de esta sucesión se garantiza si se cumple la relación dada en (3.14), esto es:

$$|x - x_n| < \epsilon,$$

donde  $x$  es el límite de la sucesión. Pero al aplicar un método numérico no es posible aplicar la expresión (3.14) ya que el conocer el límite de la sucesión implica conocer la solución exacta del problema, y de ser así, no requerimos un método numérico para resolverlo. Pero se sabe que si el método converge la diferencia en valor absoluto de las dos

últimas aproximaciones es menor a la diferencia en valor absoluto entre la última y la antepenúltima aproximaciones, esto es:

$$|x_n - x_{n-1}| < |x_{n-1} - x_{n-2}|. \quad (3.51)$$

La expresión anterior sólo es válida en el intervalo de  $x_{n,2}$  a  $x_n$ , pero si se cumple para las primeras  $n$  aproximaciones, es de esperarse que la convergencia continúe. Por otro lado, si el método es convergente se puede demostrar que para un número suficiente de iteraciones, la diferencia en valor absoluto de las dos últimas aproximaciones es mayor o igual al error absoluto:

$$|x_n - x_{n-1}| \geq \varepsilon. \quad (3.52)$$

Esto implica que la diferencia entre aproximaciones puede ser considerada como una cota del error absoluto, por lo que si tenemos un método de aproximaciones sucesivas podemos obtener la solución buscada  $x$  con un error menor a una tolerancia previamente establecida. (Iriarte, 1990).

De lo anterior, podemos concluir que el fijar previamente un error o tolerancia y detener el proceso cuando la diferencia en valor absoluto de dos aproximaciones consecutivas, puede ser un buen criterio de paro, y es el aplicado a la gran mayoría de los métodos numéricos de aproximaciones sucesivas.

Otro criterio puede ser simplemente fijar un número máximo de iteraciones y detener el proceso cuando se realice dicho número de iteraciones, midiendo posteriormente el error máximo de la solución.

Del análisis en el apartado anterior se puede deducir que el criterio de paro aplicado a una gran mayoría de métodos numéricos es aplicable al propuesto en este trabajo. Dicho criterio consiste en predeterminar el mínimo error aceptable  $\varepsilon$  en los resultados y verificar que alguna de las relaciones siguientes se cumple:

Error absoluto:

$$\max\{|z_i^{k+1} - z_i^k|, |s_i^{k+1} - s_i^k|\} < \varepsilon \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (3.53)$$

Error relativo:

$$\max\left\{\left|\frac{z_i^{k+1} - z_i^k}{z_i^{k+1}}\right|, \left|\frac{s_i^{k+1} - s_i^k}{s_i^{k+1}}\right|\right\} < \varepsilon \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (3.54)$$

O bien, una forma equivalente, pero expresado en forma porcentual:

$$\max \left\{ 100 \left| \frac{z_i^{i+1} - z_i^i}{z_i^{i+1}} \right|, 100 \left| \frac{s_j^{i+1} - s_j^i}{s_j^{i+1}} \right| \right\} < \epsilon \quad i, j = 0, 1, \dots, n \quad (3.55)$$

En estas expresiones  $\epsilon$  debe estar expresado en las unidades adecuadas para satisfacer el criterio seleccionado y acorde con la resolución del equipo de medición utilizado.

Otro criterio utilizado es:

$$\max \left\{ \sqrt{(z_i^{i+1} - z_i^i)^2 + (s_j^{i+1} - s_j^i)^2} \right\} < \epsilon \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (3.56)$$

Que representa la distancia entre los puntos obtenidos en iteraciones consecutivas.

### 3.2.7 Precisión del método.

En Díaz *et al.* (1985), se hace un análisis de la propagación de errores al determinar los parámetros  $s$  y  $z$  a partir de  $x$  y  $\theta$ , para una superficie cónica, concluyendo que la incertidumbre en  $z$  es directamente proporcional a la incertidumbre al medir la aberración longitudinal, siendo la constante de proporcionalidad el inverso absoluto de la constante de conicidad, es decir:

$$\delta z = \frac{1}{|K|} \delta x. \quad (3.57)$$

Por lo que la incertidumbre varía dependiendo del tipo de cónica bajo estudio y de la precisión con que  $x$  sea medida. Las mediciones para este trabajo se realizan de igual manera que en Díaz (1985), supondremos válida la estimación de la incertidumbre para los valores de las coordenadas cartesianas de cada punto.

En este trabajo se estimará la precisión numérica del método, aplicándolo a alguna superficie de prueba real, por lo que analizaremos su aplicación a dos superficies ópticas reales, se trata de dos lentes esféricas comerciales, la primera una lente plano convexa distribuida por Bausch & Lomb, y la segunda una condensadora cuya superficie posterior es una sección esférica, esta es distribuida por Melles Griot, las superficies tienen las siguientes características.

|              |               |              |
|--------------|---------------|--------------|
| Distribuidor | Bausch & Lomb | Melles Griot |
| Lente        | Cinephore     | LAG 017      |

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

|                             |          |          |
|-----------------------------|----------|----------|
| Tipo de superficie          | Asférica | Asférica |
| Radio de curvatura paraxial | 44.95 mm | 21 mm    |
| Diámetro                    | 100 mm   | 55 mm    |

Tabla 3.1 Características de las superficies de prueba

Se midieron los parámetros  $\theta$  y  $x$  para una serie de puntos sobre las superficies de prueba, para aplicar el método, encontrando los resultados que a continuación se presentan.

### 3.2.7.1 Lente A, *Cinephore* de Bausch & Lomb.

Al medir los parámetros  $\theta$  y  $x$  para la superficie cóncava de la lente *Cinephore* (Bausch & Lomb), a la que designamos con la letra A, se encontraron los datos de la tabla 2.1, la cual se reproduce a continuación:

| $\theta$ (°) | $X$ (mm) | $\theta$ (°) | $X$ (mm) | $\theta$ (°) | $X$ (mm) | $\theta$ (°) | $X$ (mm) | $\theta$ (°) | $X$ (mm) |
|--------------|----------|--------------|----------|--------------|----------|--------------|----------|--------------|----------|
| 10           | 45.04    | 17           | 46.59    | 24           | 49.24    | 31           | 52.17    | 38           | 57.51    |
| 11           | 45.21    | 18           | 46.99    | 25           | 49.61    | 32           | 52.72    | 39           | 58.88    |
| 12           | 45.45    | 19           | 47.42    | 26           | 49.99    | 33           | 53.28    | 40           | 60.65    |
| 13           | 45.61    | 20           | 47.79    | 27           | 50.4     | 34           | 53.93    | 41           | 62.29    |
| 14           | 45.88    | 21           | 48.15    | 28           | 50.82    | 35           | 54.62    | 42           | 63.47    |
| 15           | 46.08    | 22           | 48.52    | 29           | 51.26    | 36           | 55.43    |              |          |
| 16           | 46.32    | 23           | 48.9     | 30           | 51.7     | 37           | 56.38    |              |          |

Tala 3.2. Datos de la aberración longitudinal y el ángulo que forman las rectas normales con el eje focal de la superficie *Cinephore*. (Bausch & Lomb).

De las expresiones desarrolladas en el capítulo 2 se puede demostrar que para en un ajuste lineal el radio de curvatura paraxial esta dado por:

$$r = 2G_2. \quad (3.58)$$

La gráfica y el ajuste lineal se muestran en la figura siguiente.

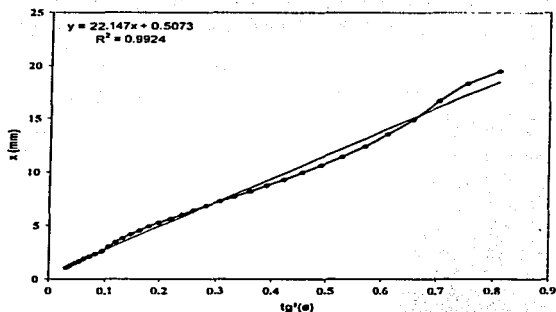


Figura 3.3 Ajuste lineal para determinar el radio de curvatura paraxial

Del ajuste mostrado en la gráfica anterior se puede determinar el radio de curvatura es:

$$r = 44.294 \text{ mm.}$$

Valor que se sumará a cada uno de los valores de X en la tabla 3.2, En coordenadas cartesianas una parábola con un radio de curvatura paraxial de 44.294 mm es descrita por la ecuación:

$$z = \frac{1}{2r} s^2 = \frac{1}{2(44.294)} s^2 = 0.01129 s^2 \quad (3.59)$$

Curva que será considerada como superficie inicial para aplicar el método propuesto, ya que numéricamente se satisface la relación (3.38). Después de 11 iteraciones se tiene un error máximo entre iteraciones de  $1.73 \times 10^{-13} \%$ . En la siguiente gráfica se muestran las diferencias entre aproximaciones consecutivas, de donde se puede observar el proceso de convergencia del método.

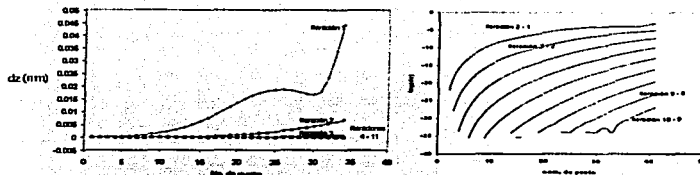


Figura 3.4 Convergencia del método, a la izquierda se gráficas las diferencias entre iteraciones consecutivas y a la derecha la gráfica corresponde a los logaritmos naturales de las diferencias entre iteraciones consecutivas

Los datos obtenidos son mostrados en la tabla B.3, utilizando el método de mínimos cuadrados encontramos que a ellos se ajusta el polinomio:

$$z = -0.0493 + 0.01135s^2 - 9.8036 \times 10^{-7}s^4 + 1.5597 \times 10^{-9}s^6 - 9.0628 \times 10^{-13}s^8 + 1.7344 \times 10^{-16}s^{10} \quad (3.60)$$

Polinomio que aproxima los valores de  $z$  a los hallados por medio de la integración con una desviación máxima de 0.14 mm. El término de grado 2 está asociado al radio de curvatura paraxial, de tal manera que este es igual a:

$$r = \frac{1}{2(0.01135)} = 44.07 \text{ mm.} \quad (3.61)$$

En la siguiente figura se muestran los datos obtenidos y el polinomio ajustado.

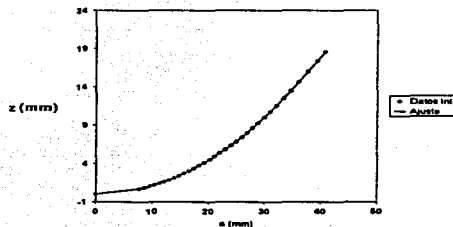


Figura 3.5 Gráfica de los datos obtenidos con el método de integración numérica y el polinomio de grado 10 ajustado.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Podemos recuperar los datos de  $\theta$  y  $X$  para cada valor de  $s$  encontrando una diferencia máxima de 0.005 radianes o bien 0.28 grados para en ángulo  $\theta$  y de 0.44 mm para  $X$ . Estas diferencias máximas corresponden al último punto medido, pero el error rms para el ángulo es de 0.05 grados, y para la aberración longitudinal es de 0.09 mm., las diferencias en ángulo para cada punto medido experimentalmente se muestra en la figura 3.6.

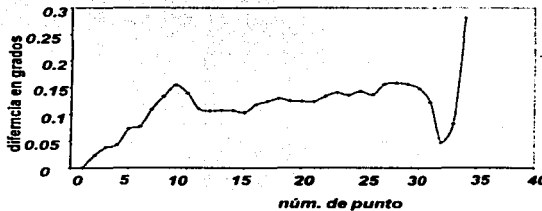


Figura 3.6. Diferencias absolutas en ángulo entre cada punto medido experimentalmente y los valores obtenidos a partir del polinomio que describe a la superficie de prueba A. Cinephore de Bausch & Lomb, ajustado a los datos de la integración numérica, la diferencia rms es de 0.05 grados.

Las diferencias en aberración longitudinal para cada punto medido experimentalmente se muestran en las figuras 3.7. En cambio, la diferencia entre el radio calculado 44.07 mm. y el radio real 44.95 mm. de la superficie es mayor. Esta diferencia puede disminuirse realizando mediciones en una región cercana al vértice, pero por limitaciones físicas no es posible actualmente realizar medidas en dicha región, ya que se realizan de manera manual, pero si se utilizan detectores de posición de haces luminosos para determinar la posición del haz reflejado en la región cercana al vértice, se contará con mayor información para recuperar la forma de la superficie.

Pero como la superficie se aproxima a un paraboloides descrito por (3.59) de la cual pueden calcularse valores de  $\theta$  y  $X$  en la región del vértice.

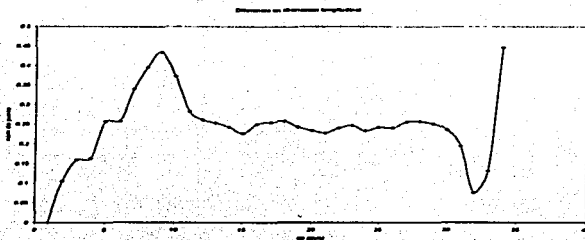


Figura 3.7. Diferencias absolutas en la aberración longitudinal entre cada punto medido experimentalmente y los datos del polinomio que describe la superficie A, (Cinephore de Bausch & Lomb), evaluado en los puntos obtenidos por integración numérica. El valor rms de estas diferencias es de 0.09 mm.

Permitiendo de esta manera que adicionemos los datos siguientes:

| $\theta (^{\circ})$ | $x$ (mm)    |
|---------------------|-------------|
| 1.3                 | 0.015235477 |
| 2.6                 | 0.060939999 |
| 3.9                 | 0.137107849 |
| 5.19                | 0.243729533 |
| 6.47                | 0.380791839 |
| 7.74                | 0.548277906 |
| 9                   | 0.746167332 |

Tabla 3.3 Datos adicionales en la región del vértice.

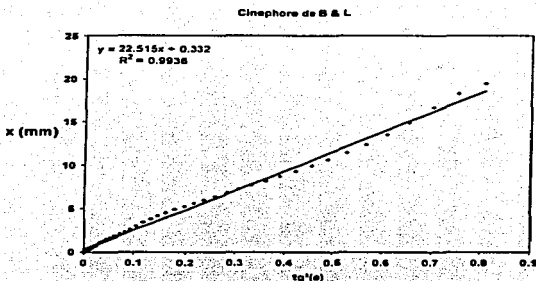


Figura 3.8 Ajuste lineal para determinar el radio de curvatura paraxial, incluyendo datos en la región del vértice.

Del ajuste polinomial en la gráfica de la figura 3.8, y de acuerdo con la expresión 3.58, podemos determinar el radio de curvatura paraxial:

$$r = 45.03 \text{ mm}$$

Por lo que la superficie inicial requerida por el método numérico propuesto, obedece la siguiente regla de correspondencia:

$$z = \frac{1}{2r} s^2 = \frac{1}{2(45.03)} s^2 = 0.0111 s^2 \quad (3.62)$$

Realizando once iteraciones obtenemos los datos graficados en la siguiente figura y que se muestran en la tabla B.4:

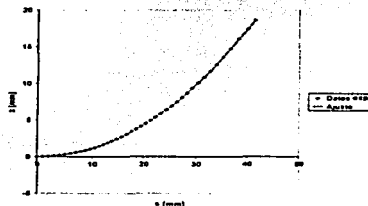


Figura 3.9 Perfil de la lente Cinephore obtenido por integración numérica

El polinomio ajustado a los datos obtenidos y mostrados en la tabla B.4, es:

$$z = -0.0007 + 0.01113s^2 - 7.9137 \times 10^{-7}s^4 + 1.2338 \times 10^{-9}s^6 - 6.7246 \times 10^{-13}s^8 + 1.1718 \times 10^{-16}s^{10}. \quad (3.63)$$

Este polinomio ajusta a los valores obtenidos con una desviación máxima en  $z$  de 0.0034 mm, a partir de este polinomio también podemos recuperar los valores de  $\theta$  y  $X$  para cada valor de  $s$  encontrando una diferencia máxima de 0.64 grados, o bien 0.01 radianes para el ángulo  $\theta$  y de 1.16 mm para  $X$ , para el punto medido más alejado del vértice, pero con una diferencia rms en el ángulo de 0.17 grados y de 0.19 mm en la aberración longitudinal, las diferencias correspondientes a cada punto experimental se muestran en las graficas de las figura 3.10 y 3.11.

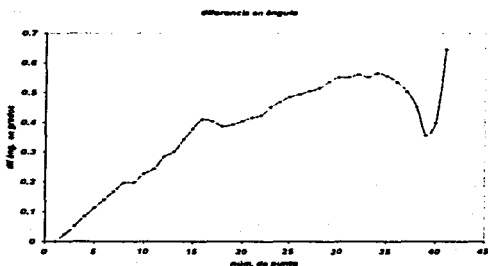


Figura 3.10. Diferencias entre los valores experimentales del ángulo de las normales con el eje óptico y los obtenidos con el polinomio que describe la superficie  $A$ , de prueba, a partir de los datos de la integración numérica. El valor rms es de 0.17 grados.

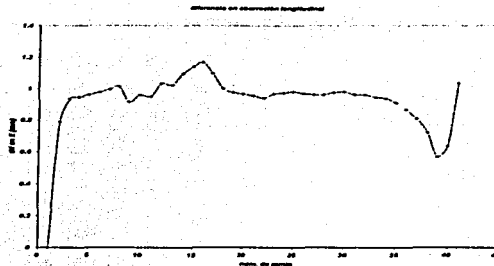


Figura 3.11 Diferencias entre los valores experimentales de la aberración longitudinal y los obtenidos con el polinomio que describe la superficie de prueba A, a partir de los datos de la integración numérica. El valor rms es de 0.19 mm.

Con este polinomio se tiene una diferencia menor en el valor calculado del radio de curvatura paraxial:

$$r = \frac{1}{2(0.01113)} = 44.92 \text{ mm.}$$

que tiene un error menor al 0.07 % respecto del valor obtenido en Díaz Uribe 1985, mejorando lo obtenido en el citado trabajo.

### 3.2.7.2 Lente B, LAG 017 de Melles Griot.

Para la superficie B, la LAG 017 de Melles Griot, se tienen los datos de la tabla 2.2, que se reproducen en la tabla siguiente:

| $\theta$ (°) | $x$ (mm) | $\theta$ (°) | $x$ (mm) | $\theta$ (°) | $x$ (mm) |
|--------------|----------|--------------|----------|--------------|----------|
| 7            | 0.16     | 23           | 1.08     | 39           | 4.65     |
| 8            | 0.22     | 24           | 1.19     | 40           | 4.9      |
| 9            | 0.29     | 25           | 1.3      | 41           | 5.15     |
| 10           | 0.33     | 26           | 1.5      | 42           | 5.44     |
| 11           | 0.38     | 27           | 1.69     | 43           | 5.72     |
| 12           | 0.43     | 28           | 1.87     | 44           | 6.06     |

|    |      |    |      |    |       |
|----|------|----|------|----|-------|
| 13 | 0.47 | 29 | 2.05 | 45 | 6.4   |
| 14 | 0.51 | 30 | 2.3  | 46 | 6.8   |
| 15 | 0.55 | 31 | 2.5  | 47 | 7.19  |
| 16 | 0.58 | 32 | 2.81 | 48 | 7.65  |
| 17 | 0.62 | 33 | 3.06 | 49 | 8.1   |
| 18 | 0.7  | 34 | 3.28 | 50 | 8.52  |
| 19 | 0.77 | 35 | 3.59 | 51 | 8.95  |
| 20 | 0.82 | 36 | 3.78 | 52 | 9.49  |
| 21 | 0.88 | 37 | 4.17 | 53 | 10.03 |
| 22 | 0.98 | 38 | 4.41 |    |       |

Tabla 3.4 Datos experimentales obtenidos de la lente LAG 017 de Melles Griot

Al igual que en caso anterior, se calcula la tangente del ángulo de los datos de la tabla anterior y se ajusta una relación de la forma:

$$x = G_2 \alpha \quad \text{donde } \alpha = \text{tg}^2(\theta)$$

La gráfica de los datos  $\text{tg}^2(\theta)$  vs  $x$ , se muestra en la figura 3.8.:

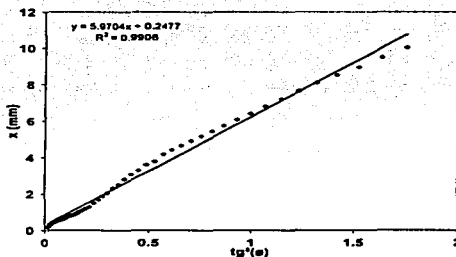


Figura 3.12 Ajuste lineal  $\alpha$  vs  $x$ , para determinar el radio de curvatura paraxial.

De donde se puede calcular el radio de curvatura paraxial, siendo este igual a 11.94 mm, que no coincide con los datos en la tabla 3.1, esto se debe a que esta superficie es más

rápida que la anterior, por lo que involucra algunas consideraciones adicionales. Las distancias deben ser medidas a partir del vértice y ajustar una relación de la forma:

$$x = G_1 \alpha + G_0 \quad \text{donde } \alpha = \text{tg}^2(\theta)$$

donde  $G_0$  es el radio de curvatura paraxial.

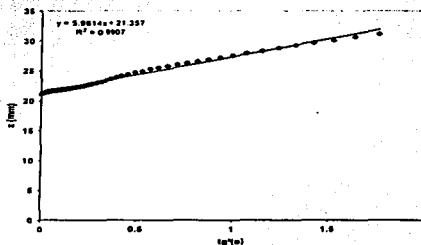


Figura 3.13 Ajuste lineal  $\alpha$  vs  $X$ , para determinar el radio de curvatura paraxial.

Del ajuste lineal propuesto se puede observar que una aproximación al radio de curvatura paraxial es  $r = 21.35$  mm. De manera que la superficie inicial es descrita por la ecuación:

$$z = \frac{s^2}{2(21.35)} = 0.0234s^2$$

Después de aplicar el método once veces, (11 iteraciones) se obtiene el conjunto de datos graficados en la figura (3.14), y cuentan con un error entre iteraciones menor a  $4 \times 10^{-10}$  mm.

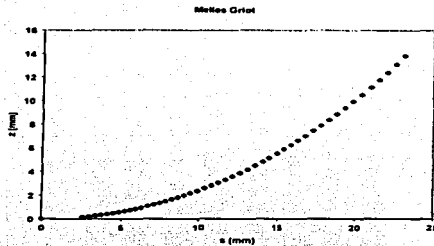


Figura 3.14 Perfil de la superficie LAG 017, obtenidos por el método numérico propuesto

El polinomio que se ajusta a los datos obtenidos y que se listan en la tabla B.5 es:

$$z = -6.189 \times 10^{-4} + 2.327 \times 10^{-2} s^2 + 8.717 \times 10^{-6} s^4 - 3.008 \times 10^{-8} s^6 + 6.879 \times 10^{-11} s^8 - 5.045 \times 10^{-14} s^{10} \quad (3.64)$$

Este polinomio ajusta a los valores obtenidos con una desviación máxima en  $z$  de 0.0037 mm, a partir de este polinomio también podemos recuperar los valores de  $\theta$  y  $X$  para cada valor de  $s$  encontrando una diferencia máxima de 0.3182 grados, o bien 0.0055 radianes para  $\theta$  y de 0.20 mm para  $X$ , para el punto medido más alejado del vértice, las diferencias asociadas a cada punto se presentan en las gráficas de las figuras 3.15 y 3.16.

Con este polinomio se tiene una diferencia menor en el valor calculado del radio de curvatura paraxial:

$$r = \frac{1}{2(0.0233)} = 21.45 \text{ mm.}$$



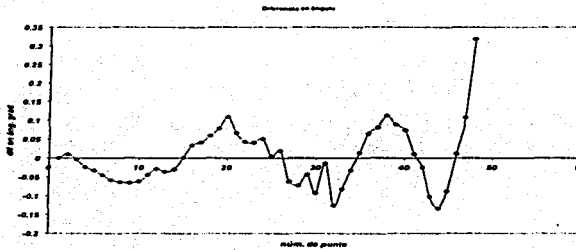


Figura 3.15 Diferencias en ángulo para cada punto medido sobre la superficie LAG 017 de Melles Griot. El valor rms es de 0.054 grados

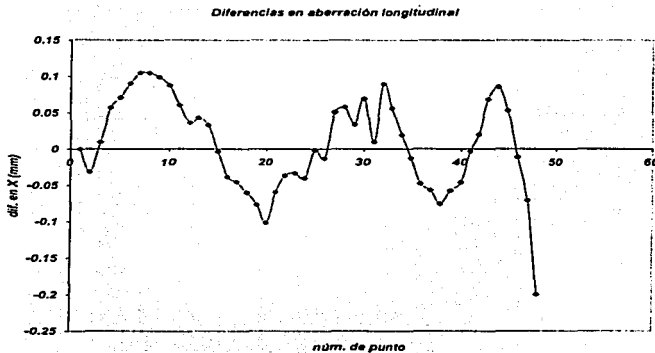


Figura 3.16. Diferencias para cada punto medido experimentalmente sobre la superficie de Melles Griot, el valor rms es de .057 mm

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Si incorporamos los valores propuestos de  $\theta$  y  $X$  cercanos al vértice, listados en la tabla 3.5:

| $\theta$ | $x$ (mm) |
|----------|----------|
| 0.8      | 21.35    |
| 1.6      | 21.36    |
| 2.5      | 21.37    |
| 3.3      | 21.38    |
| 4.1      | 21.40    |
| 4.3      | 21.43    |
| 5.7      | 21.46    |
| 6.5      | 21.49    |

Tabla 3.5 Datos propuestos en la región del vértice.

Los datos de la tala anterior esta referidos al vértice, de manera que la ordenada al origen de un modelo lineal ajustado representa el radio de curvatura paraxial, valor que se utilizará para determinar la superficie inicial del método. El ajuste se muestra en la figura siguiente:

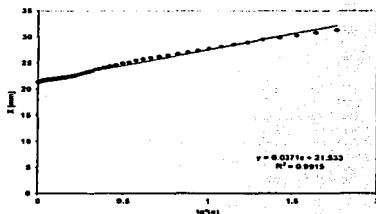
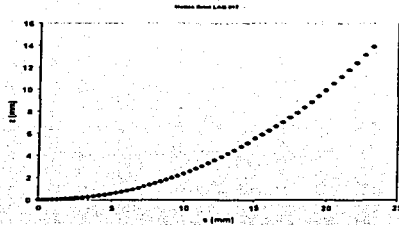


Figura 3.17 Ajuste lineal en  $\alpha$  vs  $X$  para determinar el radio de curvatura paraxial.

Del ajuste se observa que el radio de curvatura para la superficie inicial es  $r = 21.53$ mm.

Aplicando el método y después de 11 iteraciones se obtienen los puntos graficados en la figura 3.18.

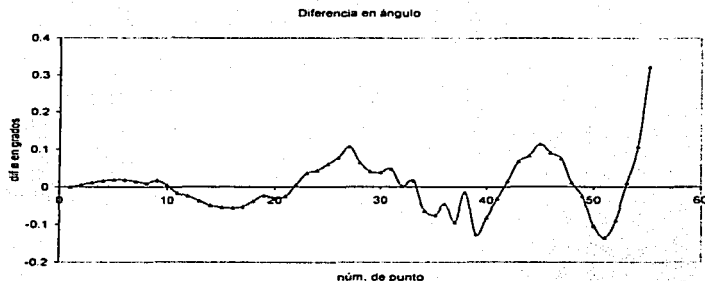


*Figura 3.18: Perfil de la superficie de Melles Griot, obtenidos por el método de Integración numérica, incluyendo datos en la región del vértice*

El polinomio que mejor ajusta los datos de la figura anterior y que se listan en la tabla b.6 es:

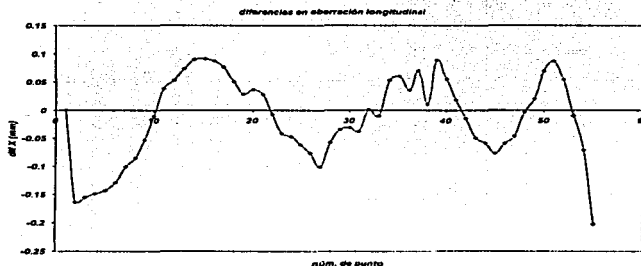
$$z = -1.345 \times 10^{-4} + 2.324 \times 10^{-2} s^2 + 8.899 \times 10^{-6} s^4 - 3.127 \times 10^{-8} s^6 + 7.097 \times 10^{-11} s^8 - 5.190 \times 10^{-6} s^{10} \quad (3.65)$$

Polinomio que se ajusta a los datos con una diferencia máxima en  $z$  de 0.0038 mm. y un valor rms de .0011 grados. El primer término es una constante aditiva que desplaza al vértice del origen de coordenadas, pero es del orden de décimas de  $\mu\text{m}$ . Como en los casos anteriores se puede recuperar los valores de  $\theta$  y  $X$  para cada uno de los puntos obtenidos al realizar la integración numérica con una diferencia máxima de 0.32 grados, o bien 0.0056 radianes en el ángulo y un valor rms de 0.07 grados, en la figura 3.19 Se muestra una gráfica de las diferencias asociadas a cada punto experimental.



*Figura 3.19 Diferencias en ángulo asociadas a cada punto medido experimentalmente sobre la superficie de prueba de Melles Griot e incluyendo puntos cercanos al vértice.*

Y una diferencia máxima de 0.091 mm con un valor rms de 0.074 mm. en la medida de la intersección entre el eje focal y la normal a la superficie, que equivale a un error del 0.3 %, siendo este en el punto experimental más alejado del vértice, en la figura 3.20. Se muestra una gráfica de estas diferencias asociadas a cada punto experimental.



*Figura 3.20 Diferencias en la aberración longitudinal asociadas a cada punto medido experimentalmente sobre la superficie de prueba de Melles Griot, incluyendo puntos cercanos al vértice.*

Podemos recuperar también el radio de curvatura paraxial:

$$r = \frac{1}{2(0.0231)} = 21.64 \text{ mm.}$$

Que tiene una diferencia menor al 1.3 % con el valor reportado por el fabricante, que es de 21.36 mm. (ZEMAX 1998).

Ahora tenemos resultados de la aplicación del método propuesto, pero aun no podemos contestar la pregunta sobre la precisión del método, para poder responder concretamente a la pregunta *d*, debemos caracterizar las superficies por otros métodos de precisión conocida, por ello presentaremos resultados con otros métodos.

### 3.3 COMPARACIÓN CON OTRAS MEDICIONES.

#### 3.3.1 Pruebas tradicionales geométricas.

Al aplicar las pruebas ópticas tradicionales geométricas (ver cap. 1), resultan muy complicadas de evaluar, ya que deben realizarse por transmisión a una lente, las imágenes obtenidas contienen el efecto de la superficie anterior y posterior, y debido a que las superficies de interés son convexas y muy rápidas se requiere de óptica adicional para aplicarlas por reflexión.

##### 3.3.1.1 Prueba de la navaja.

Al aplicar la prueba de la navaja a una de las lentes bajo estudio se obtuvieron las imágenes de las figuras 3.21 y 3.22.



Figura 3.21 Tres imágenes obtenidas al barrer de izquierda a derecha la navaja

Puede observarse como se curva la imagen de un borde recto al reflejarse sobre la superficie de prueba, indicando la presencia de deformaciones sobre la superficie.



*Figura 3.22 Al pasar la navaja atrás del foco la zona iluminada se oscurece y viceversa.*

Y de acuerdo con la teoría expuesta en el capítulo 1, al retroceder la navaja las zonas iluminada y oscura se invierten.

Resulta bastante complicado determinar la forma de la superficie a partir de las imágenes mostradas.

### 3.3.1.2 Prueba del Alambre.

Al igual que la prueba de la navaja citada anteriormente, la prueba del alambre se aplicó por transmisión a una de las superficies de prueba. Al aplicar esta prueba a la lente Baush & Lomb se obtuvieron las siguientes imágenes.



*Figura 3.23 Imágenes obtenidas al trasladar el alambre de izquierda a derecha de la lente.*

En la figura 3.23 se observa como la imagen del alambre se curva al ir de un lado al otro de la superficie de prueba, debido a las deformaciones que presentan las superficies, ya que en este tipo de pruebas se evalúa el efecto de toda la lente, también pueden observarse más de una imagen del alambre, debido a las dos caras de la lente y a las reflexiones múltiples que entre ellas se llevan a cabo, dificultando la evaluación de la superficie de prueba.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 3.3.1.3 Prueba de Ronchi.

También la prueba de Ronchi se puede realizar por transmisión, donde al aplicarla, se prueba el efecto de la lente completa, es decir, se *mide* simultáneamente el efecto de las dos superficies que forman la lente. Al aplicar esta prueba a la lente Cinephore de Baush & Lomb se obtuvieron las siguientes imágenes. En este caso se obtienen los patrones siguientes:



*Figura 3.24 Ronchigramas obtenidos por transmisión para una lente Baush & Lomb.*

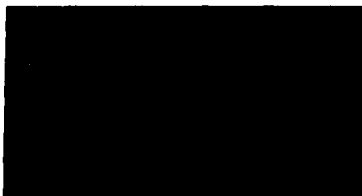
En las imágenes de la figura 3.24 se observa como las líneas se deforman y dan origen a líneas cerradas, por otro lado se observa la superposición de dos imágenes, que corresponden a las dos superficies que forman la lente. Por lo que resulta demasiado complicado caracterizar la superficie mediante esta prueba.

### 3.3.1.4 Prueba de Hartmann.

Se realizó esta prueba, por transmisión a la superficie Cinephore de Baush & Lomb, obteniendo las imágenes de la figura 3.24, al igual que en las pruebas anteriores, en ella se observa el resultado de la superposición de las dos superficies de la lente, lo que dificulta el análisis, esta imagen presenta además aberración cromática, lo que brinda más información pero resulta demasiado complicado interpretarla.



*Figura 3.24 Imágenes obtenidas al realizar una prueba de Hartmann a la superficie Baush & Lomb, por transmisión, variando la posición de la rejilla respecto del foco de la superficie.*



*Figura 3.25 Imagen obtenida al realizar una prueba de Hartmann a la superficie Baush & Lomb, por transmisión, en ella se observa que las líneas que unen los centros de cada cuadro de la imagen no son rectas*

Al unir los centros de los cuadros de la imagen de la rejilla de Hartmann (ver figura 3.25), podemos observar que las líneas que los unen no son rectas, indicando así la presencia de deformaciones en la lente, en estas imágenes se observa también aberración cromática.

### **3.3.2 Método Fotográfico.**

Este método consiste en tomar varias fotografías de una superficie de prueba a diferentes distancias, en nuestro caso, con una cámara de video y una tarjeta digitalizadora, esto con el fin de medir directamente sobre ellas las coordenadas cartesianas de los puntos de la superficie. Este es un procedimiento similar al descrito en Hamblen y Jones 1995.

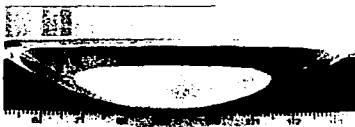
Para este trabajo se tomó como superficie de prueba la lente Cinephore de Bausch & Lomb, y se obtuvieron las siguientes imágenes:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN





*Figura 3.26 Fotografía cercana de la superficie de prueba (Cinephore), para realizar mediciones cercanas al vértice*



*Figura 3.27 Vista de la superficie de prueba, vista cercana*



*Figura 3.28 Vista de la superficie de prueba con una escala graduada.*

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Sobre la fotografía de la figura 3.26 se midieron las coordenadas cartesianas de puntos cercanos al vértice, directamente sobre la imagen de la superficie, posteriormente sobre la imagen de la figura 3.27 se midieron las coordenadas cartesianas de otros puntos, estos alejados del vértice, y finalmente de la fotografía de la figura 3.28 se midieron puntos cercanos al borde de la superficie. A este conjunto de mediciones (ver tabla B.7), se le ajustó un polinomio de grado 10, con términos pares únicamente y sin término independiente, ya que se trata de comparar con el polinomio obtenido por el método descrito anteriormente. Se obtuvo el polinomio que describe la superficie.

Así, para esta superficie se obtuvo el siguiente polinomio:

$$z = 0.01124 s^2 - 6.02 \times 10^{-6} s^4 + 1.16 \times 10^{-8} s^6 - 7.06 \times 10^{-12} s^8 + 1.39 \times 10^{-15} s^{10} \quad (3.66)$$

La desventaja que tiene este método es que se tienen diferentes resoluciones en cada una de las fotografías mostradas en las figuras 3.26, 3.27 y 3.28, por lo que al unir los datos de las tres fotografías se introducen errores.

Este polinomio permite determinar el radio de curvatura paraxial, como ya se explicó antes, este está dado por:

$$r = \frac{1}{2D_2} = \frac{1}{2(0.01124)} = 44.48 \text{ mm}$$

y al compararlo con el obtenido anteriormente, por el método de la integración numérica, resultan prácticamente iguales, pues la diferencia es de apenas el 0.1%, y respecto al reportado en Díaz Uribe 1985, la diferencia es de 1%.

En la figura 3.29, se comparan los datos obtenidos por el método de integración y el polinomio ajustado a las mediciones de la fotografía, y se puede observar que para  $s$  del orden de 40 mm, la diferencia máxima entre los datos obtenidos numéricamente y el polinomio ajustado es menor a 1.5 mm., que equivale aproximadamente al 4%.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

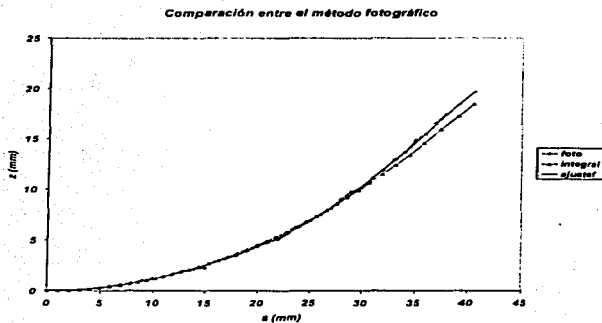


Figura 3.29 Comparación entre el polinomio ajustado a los datos obtenidos por el método fotográfico y los obtenidos por el método de integración.

Las diferencias entre los datos obtenidos por integración numérica y el polinomio obtenido de las mediciones en la fotografía se muestran en la figura 3.30.

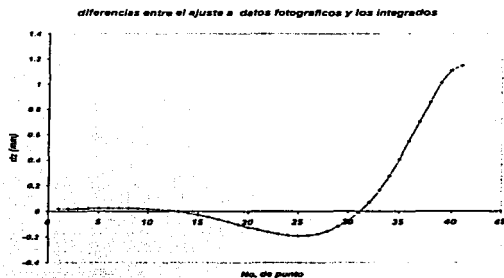


Figura 3.30 Diferencias entre los puntos obtenidos por el método de integración numérica y el fotográfico, donde se observa que la máxima diferencia es menor a 1.4 mm.

Con este procedimiento se pudo determinar el radio de curvatura paraxial, pero para el resto de la superficie no conoce la precisión, ya que se tomaron datos con diferentes escalas. Este método puede ser mejorado, aunque mejorarlo sería el objetivo de un estudio completo.

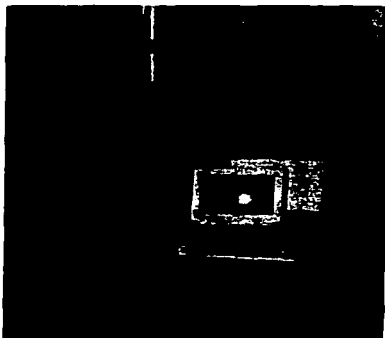
### 3.3.3 Método mecánico.

Otro método utilizado para estimar la exactitud de la integración numérica fue un procedimiento mecánico, el cual consiste en medir directamente sobre la superficie las coordenadas cartesianas de un conjunto de puntos sobre la superficie para posteriormente hacer una comparación entre ambos métodos.

Estas mediciones se realizaron en el Laboratorio de Metrología del Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico (Antes Centro de Instrumentos) de la UNAM, con el apoyo del Ing. Benjamin Valera y en una mesa de tres coordenadas, cuyo principio de operación se basa en medir con precisión de 0.01 mm el desplazamiento de un *palpador* que se coloca directamente sobre algunos puntos de la superficie a medir, estos desplazamientos coinciden con las coordenadas cartesianas referidas a un origen establecido sobre la mesa. En la siguiente figura se muestra una vista de la mesa de tres coordenadas

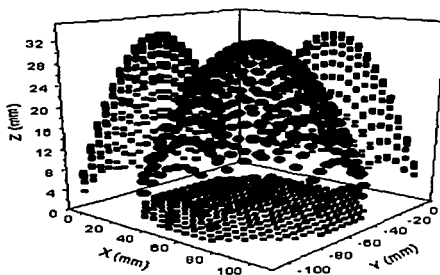
Midiendo en un número suficiente de puntos podemos construir una malla de datos de la posición de dichos puntos, en la figura siguiente se muestra una malla capturada con la mesa de tres coordenadas.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



*Figura 3.31 Mesa de tres coordenadas ubicada en el laboratorio de Metrología del CCADET.*

*Foto: Cortesía del Ing. Benjamin Valera.*



*Figura 3.32 Esquema de una malla obtenida al medir con la mesa de tres coordenadas un conjunto de puntos para una superficie de prueba.*

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

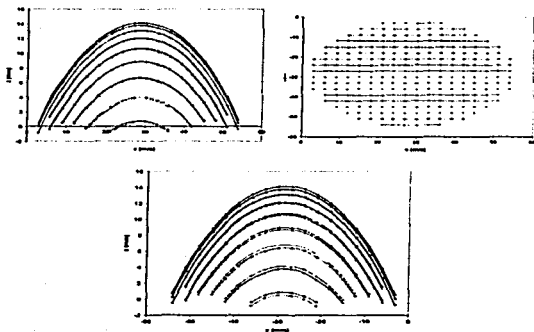


Figura 3.33. Proyecciones en cada plano cartesiano de la Malla obtenida en la figura 3.32

Desafortunadamente los datos entregados por la mesa de tres coordenadas no son exactamente las coordenadas sobre la superficie, sino las coordenadas del centro del extremo del *palpador*, que es una sección esférica, (ver figura 3.34).

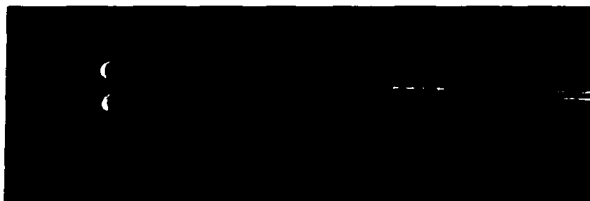


Figura 3.34 Palpador en su estuche de madera. Se puede apreciar el extremo esférico.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Al tocar el *palpador* alguna superficie de prueba, el punto de contacto del *palpador* varía de un punto a otro de la superficie. En la figura 3.35 se muestra el palpador localizando las coordenadas de un punto sobre una superficie de prueba.



Figura 3.35. Palpador localizando coordenadas cartesianas sobre una superficie de fibra de carbono.

En la figura (3.36) se muestra un esquema del *palpador* y la ubicación del centro respecto del punto de contacto sobre la superficie de prueba.

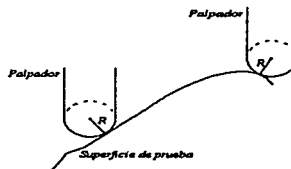


Figura 3.36 El palpador de la mesa de 3 coordenadas siempre toca a la superficie en un punto de la línea normal

De la figura 3.36 podemos observar que la línea que une al punto de contacto con el centro del *palpador* es normal a la superficie de prueba, por lo que a partir de puntos adyacentes se pueden generar vectores tangentes a la superficie, y con ellos obtener su producto cruz; vector que se aproxima a la línea normal a la superficie. Si ahora lo multiplicamos por un escalar adecuado, de manera que su magnitud sea igual al radio del palpador, conoceremos las coordenadas de los puntos de contacto, generando nuevas mallas similares a las mostradas en la figura 3.32, pero que ahora si corresponden a los puntos de la superficie, (o de manera más cercana).

Ahora se puede intentar un ajuste polinomial en tres dimensiones, pero, por un lado estamos considerando que nuestras superficies tienen simetría de revolución, y por otro, sólo tenemos un perfil medido con el método de la integración numérica. Así que solamente consideramos un perfil de la superficie, para construir un perfil a partir de los datos medidos mecánicamente, determinamos los vértices de las curvas mostradas en las de proyecciones de la malla medida, sobre los planos XZ y YZ de las figuras 3.32 y 3.33, y con ellos se construyen dos perfiles correspondientes, los cuales se encuentran en planos perpendiculares, para hallar el vértice de la superficie, se determinan los vértices de cada perfil, los cuales deben ser muy parecidos, consideramos como vértice de la superficie al promedio de ambos. Se hace una traslación de ejes al nuevo vértice, con lo que tenemos todas las coordenadas de los puntos medidos mecánicamente referidas al vértice de la superficie, ahora los podemos comparar con los puntos del perfil obtenido por el método de la integración numérica, o bien, ajustar un polinomio de grado 10 al perfil obtenido mecánicamente y compararlo con el antes obtenido por integración.

### 3.3.3.1 Superficie esférica de la lente B, de Melles Griot.

Así, en el caso de la superficie B, la LAG 017 de Melles Griot, obtenemos el perfil YZ considerando los vértices para las curvas proyectadas en el plano XZ:

| $X_0$ | $Y_0$  | $Z_0$ |
|-------|--------|-------|
| 28.75 | -50.41 | -2.70 |
| 28.68 | -47.76 | 0.21  |
| 28.72 | -45.15 | 2.61  |
| 28.67 | -42.56 | 4.54  |
| 28.71 | -39.99 | 6.15  |
| 28.74 | -37.49 | 7.35  |
| 28.69 | -35.05 | 8.22  |
| 28.71 | -32.50 | 8.83  |
| 28.68 | -30.03 | 9.11  |
| 28.74 | -27.56 | 9.18  |
| 28.69 | -25.12 | 8.90  |
| 28.69 | -22.57 | 8.38  |
| 28.73 | -20.07 | 7.51  |
| 28.68 | -17.44 | 6.33  |
| 28.66 | -14.90 | 4.80  |
| 28.63 | -12.31 | 2.84  |
| 28.70 | -9.54  | 0.39  |
| 28.75 | -6.71  | -2.88 |

Tabla 3.6 Coordenadas en mm de los vértices de las curvas en planos XZ.



De estos datos se obtienen las coordenadas del vértice de la superficie, siendo este:

$$x = 28.70, y = -28.57 \text{ y } z = 9.29. \quad (3.67)$$

Para obtener un perfil XZ tomamos las curvas de la malla YZ que tienen los vértices listados en la tabla 3.7

| $x_0$ | $y_0$  | $z_0$ |
|-------|--------|-------|
| 6.77  | -28.72 | -2.92 |
| 9.36  | -28.75 | 0.02  |
| 11.97 | -28.73 | 2.42  |
| 14.55 | -28.62 | 4.36  |
| 17.08 | -28.69 | 6.03  |
| 19.63 | -28.63 | 7.24  |
| 22.12 | -28.63 | 8.20  |
| 24.62 | -28.65 | 8.82  |
| 27.08 | -28.57 | 9.10  |
| 29.55 | -28.60 | 9.16  |
| 32.05 | -28.69 | 8.99  |
| 34.60 | -28.69 | 8.48  |
| 37.03 | -28.60 | 7.54  |
| 39.67 | -28.70 | 6.46  |
| 42.23 | -28.73 | 4.98  |
| 44.81 | -28.66 | 3.06  |
| 47.79 | -28.72 | 0.69  |
| 50.35 | -28.64 | -2.55 |

Tabla 3.7 Coordenadas en mm de los vértices de las curvas en planos YZ.

De estos datos se obtienen las coordenadas del vértice de la superficie, siendo este:

$$x = 28.78, y = -28.67 \text{ y } z = 9.29. \quad (3.68)$$

Sacando el promedio de ambos vértices (3.67) y (3.68) tenemos:

$$x_0 = 28.74, y_0 = -28.62, z_0 = 9.29. \quad (3.69)$$

Trasladamos el origen de coordenadas a este punto y hacemos una inversión del eje z, con lo que los datos para el perfil XZ quedan:

| $s$    | $Z$   | $s$   | $z$   |
|--------|-------|-------|-------|
| -21.97 | 12.21 | 0.81  | 0.13  |
| -19.38 | 9.27  | 3.31  | 0.31  |
| -16.77 | 6.87  | 5.85  | 0.81  |
| -14.19 | 4.93  | 8.29  | 1.75  |
| -11.66 | 3.26  | 10.93 | 2.83  |
| -9.11  | 2.05  | 13.49 | 4.31  |
| -6.62  | 1.09  | 16.07 | 6.23  |
| -4.12  | 0.47  | 19.05 | 8.60  |
| -1.66  | 0.20  | 21.61 | 11.84 |

Tabla 3.8. Datos en mm del perfil de la superficie LAG 017.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Donde se considera  $s = \sqrt{x^2 + y^2}$  por simetría de revolución. El polinomio de grado 10 ajustado a estos datos es:

$$z = 6.855 \times 10^{-2} + 2.501 \times 10^{-2} s^2 - 4.836 \times 10^{-3} s^4 + 4.071 \times 10^{-7} s^6 - 1.264 \times 10^{-9} s^8 + 1.318 \times 10^{-12} s^{10} \quad (3.70)$$

A manera de comparación, en la siguiente figura se muestran las gráficas superpuestas de los perfiles obtenidos por ambos métodos

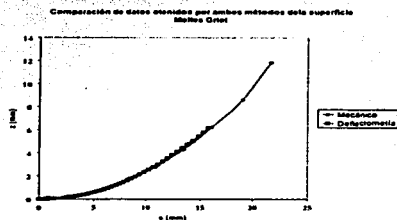


Figura 3.37. Superposición de los perfiles obtenidos por el método mecánico y la integración numérica.

Para cuantificar esta comparación se calculan las diferencias entre ambas gráficas y se presentan en la figura 3.38.

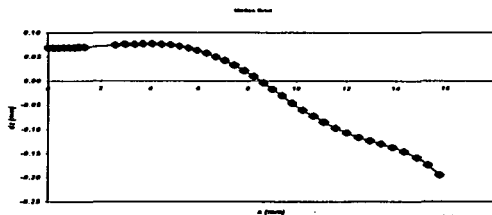


Figura 3.38 Diferencias en sagita  $z$  para cada punto entre perfiles evaluados por deflectometría láser y con la MMC. para la lente LAG 017 de Melles Griot

De la gráfica anterior se puede apreciar que la máxima diferencia entre ambos perfiles es menor a 0.20 mm, con un error rms de 0.09 mm y un error porcentual de 1.25 %.

### 3.3.3.2 Superficie óptica A, de Bausch & Lomb.

Para la superficie 1, Cinephore de Bausch & Lomb, se obtiene el perfil YZ considerando los vértices para las curvas proyectadas en el plano XZ:

| $X_o$ | $Y_o$  | $Z_o$ |
|-------|--------|-------|
| 50.87 | -96.53 | 3.13  |
| 50.98 | -91.82 | 7.79  |
| 50.62 | -87.15 | 11.61 |
| 50.75 | -82.52 | 15.22 |
| 50.71 | -77.79 | 18.30 |
| 50.92 | -73.19 | 20.95 |
| 50.73 | -68.55 | 22.91 |
| 50.97 | -63.98 | 24.61 |
| 50.83 | -59.42 | 25.62 |
| 50.72 | -54.83 | 26.22 |
| 50.71 | -50.35 | 26.41 |
| 50.77 | -45.78 | 26.21 |
| 50.85 | -41.18 | 25.56 |
| 50.69 | -36.57 | 24.35 |
| 50.78 | -31.96 | 22.73 |
| 50.93 | -27.32 | 20.75 |
| 50.87 | -22.72 | 18.13 |
| 50.63 | -17.96 | 14.82 |
| 50.84 | -13.07 | 11.20 |
| 50.65 | -8.26  | 6.80  |

Tabla 3.9 Coordenadas en mm de los vértices de las curvas en la malla XZ para la superficie de Bausch & Lomb

De estos datos se obtienen las coordenadas del vértice de la superficie, siendo este:

$$x = 50.79, y = -50.50 \text{ y } z = 26.57. \quad (3.72)$$

Para obtener un perfil XZ tomamos las curvas de la malla YZ que tienen los siguientes vértices:

| $X_o$ | $Y_o$  | $Z_o$ |
|-------|--------|-------|
| 8.35  | -50.61 | 6.53  |
| 13.06 | -50.66 | 10.78 |
| 17.74 | -50.49 | 14.39 |
| 22.43 | -50.49 | 17.65 |
| 27.05 | -50.32 | 20.23 |
| 31.65 | -50.48 | 22.49 |
| 36.22 | -50.63 | 24.25 |
| 40.81 | -50.52 | 25.43 |
| 45.37 | -50.39 | 26.12 |
| 49.92 | -50.33 | 26.40 |
| 54.47 | -50.37 | 26.30 |
| 59.03 | -50.47 | 25.77 |

|       |        |       |
|-------|--------|-------|
| 63.62 | -50.70 | 24.86 |
| 68.25 | -50.60 | 23.31 |
| 72.91 | -50.55 | 21.30 |
| 77.56 | -50.45 | 18.73 |
| 82.22 | -50.39 | 15.71 |
| 86.95 | -50.39 | 12.14 |
| 91.72 | -50.75 | 8.31  |
| 96.58 | -50.55 | 3.43  |

Tabla 3.10 Coordenadas en mm de los vértices de las curvas en la malla YZ.

De estos datos se obtienen las coordenadas en mm. del vértice de la superficie, siendo este:

$$x = 51.05, y = -50.50 \text{ y } z = 26.62. \quad (3.72)$$

Sacando el promedio de (3.71) y (3.72) tenemos:

$$x_0 = 50.92, y_0 = -50.50, z_0 = 26.57 \quad (3.73)$$

Al igual que en caso anterior, trasladamos el origen de coordenadas a este punto y hacemos una inversión del eje z, para que los datos del perfil XZ queden:

| s     | z     |
|-------|-------|
| 0.15  | 0.16  |
| 4.72  | 0.36  |
| 9.32  | 1.01  |
| 13.93 | 2.23  |
| 18.54 | 3.84  |
| 23.18 | 5.82  |
| 27.78 | 8.44  |
| 32.54 | 11.75 |
| 37.43 | 15.37 |
| 42.24 | 19.77 |
| 50.50 | 26.57 |

Tabla 3.11. Datos en mm de un perfil de la superficie de la lente Cinephore.

El polinomio de grado 10 ajustado a estos datos es:

$$z = 0.149 + 1.021 \times 10^{-2} s^2 + 1.708 \times 10^{-6} s^4 - 2.071 \times 10^{-9} s^6 + 1.174 \times 10^{-14} s^8 - 2.489 \times 10^{-16} s^{10} \quad (3.74)$$

A manera de comparación punto a punto, en la siguiente figura se muestran las gráficas superpuestas de los perfiles obtenidos por ambos métodos

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

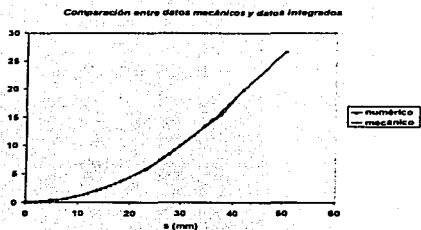


Figura 3.39 Superposición de los perfiles obtenidos por ambos métodos para la lente de Baush & Lomb.

Una comparación cuantitativa se obtiene calculando las diferencias entre ambas gráficas. Estas diferencias se presentan en la figura 3.40.

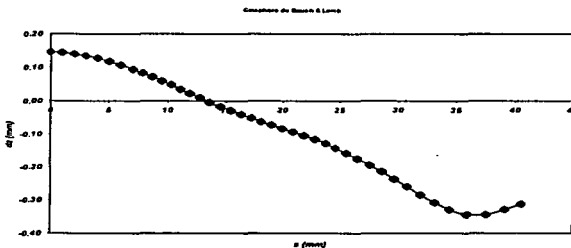


Figura 3.40. Diferencias de cada punto entre los perfiles obtenidos para la lente Cinephore.

De la gráfica anterior se puede apreciar que la máxima diferencia entre ambos perfiles es menor a 0.35 mm, con un error rms de 0.16 mm. Y un error porcentual menor al 1 %.

Al comparar las coordenadas para los puntos de un perfil de la superficie A Cinephore obtenidos con la MMC y los obtenidos en el método numérico se puede concluir

que la precisión en posición del método numérico es menor al 1 %, similar a la del método mecánico.

### 3.4 ESTABILIDAD DEL MÉTODO.

La forma más simple de entender la estabilidad de un método numérico es aplicando la siguiente definición: *Se dice que un método numérico es estable si al variar ligeramente los datos de entrada, se obtienen pequeñas variaciones en los datos de salida.*

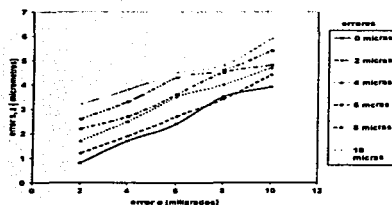
Por lo tanto, para hacer un análisis de estabilidad del método propuesto, introduciremos un término aleatorio de error a los datos de  $\theta$  y  $X$ , dado en milgrados y micrómetros respectivamente, ya que en estas unidades se encuentran graduados las platinas utilizadas, se aplica el método numérico y finalmente después de 11 iteraciones se comparan los resultados obtenidos para  $s$  y  $z$  contra los obtenidos por el mismo método, pero sin introducir el término de error. En la tabla 3.12 se listan en micrómetros las diferencias máximas generadas por las variaciones correspondientes.

| error X<br>error $\theta$ (mgd) | 0 $\mu\text{m}$ | 2 $\mu\text{m}$ | 4 $\mu\text{m}$ | 6 $\mu\text{m}$ | 8 $\mu\text{m}$ | 10 $\mu\text{m}$ |
|---------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
| 2                               | 0.8             | 1.2             | 1.7             | 2.2             | 2.6             | 3.2              |
| 4                               | 1.7             | 1.9             | 2.5             | 2.7             | 3.3             | 3.8              |
| 6                               | 2.4             | 2.7             | 3.5             | 3.6             | 4.3             | 4.5              |
| 8                               | 3.5             | 3.4             | 4               | 4.5             | 4.6             | 4.8              |
| 10                              | 3.9             | 4.4             | 4.7             | 4.8             | 5.4             | 5.9              |

Tabla 3.12 Desviaciones máximas en  $\mu\text{m}$  al introducir términos de error aleatorio en los datos de entrada.

En la figura siguiente se muestran las gráficas de los datos contenidos en la tabla anterior. (Tabla 3.12).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



*Figura 3.41 Variaciones máximas en los datos de salida al introducir pequeños variaciones en los datos de entrada.*

De la tabla y gráficas anteriores se puede observar que las variaciones de salida son menores a las variaciones en los datos de entrada. Por lo que podemos asegurar que el método es estable.

### 3.5 CONCLUSIONES.

Aunque se deben realizar algunos ajustes al método, se puede decir que el método propuesto resulta ser, además de original, muy potente y eficiente, pues converge a una solución similar a la obtenida por otros métodos, en casi todos los casos, siendo también un método muy estable. En los análisis realizados se obtuvieron resultados similares al método de contacto utilizado como patrón de comparación. Tiene la gran ventaja de poder transformar de manera estable los datos de  $x$  y  $\theta$  a  $s$  y  $z$ , de manera que se puede obtener información sobre la superficie, con una precisión media, es decir, no interferométrica. El método entrega las coordenadas cartesianas de un conjunto de puntos sobre la superficie lo que implica la gran ventaja de no depender de un ajuste polinomial. Pero permite, por medio de un ajuste polinomial, obtener un modelo matemático que describe la superficie, dando información de la forma de esta. Y tiene la ventaja de ser muy fácil de programar.

Entre los ajustes que aun deben hacerse se encuentra mejorar el dispositivo experimental para poder realizar mediciones en una región cercana al vértice. Revisar algunos errores sistemáticos que se hacen evidentes en las gráficas 3.38 y 3.40. Pero se

trato de tener un método robusto que resultará confiable y posteriormente afinarlo sobre una base segura de aplicación y funcionamiento, con resultados comprobables.

### 3.6 REFERENCIAS.

Díaz Uribe R., Cornejo Rodríguez A., Pedraza Contreras J., Cardona Núñez O. Y Cordero Davila A., "Profile measurement of a conic surfaces, using a He-Ne laser and a nodal bench", *Appl. Opt.*, **24**, 2612, (1985).

Haaser N. B., LaSalle J. P. y Sullivan J. A., *Análisis Matemático 2ª.*, Ed Trillas, México 1980.

Hamblen D. P., y Jones M. R., "Lens Curvature Measurements by Shadow Projection Profilometry", *Engineering Laboratory Notes in Supplement to Appl. Opt.*, 8053, (1995),

Iriarte V. Valderrama Rafael, *Métodos Numéricos*. México, Trillas – UNAM, Facultad de Ingeniería, 1990.

Melles – Griott, Catalogo de productos 1997 – 1998.

Patenteleva Vladimirova O., González Cardel M., *Métodos Numéricos*, México, Ed. Instituto de Investigación en Tecnología Educativa de la Universidad Tecnológica de México, primera Edición, 2002.

ZEMAX, Optical Desing Program, User's Guide Version 7.0, Focus Software, Incorporated, USA, March 1998.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



**CONCLUSIONES.**  
**CAPÍTULO 4**

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

#### 4.1 INTRODUCCIÓN.

**E**ste es el último capítulo de este trabajo y en él se presenta un resumen, a manera de lista de los pasos a seguir para la satisfactoria aplicación del método propuesto, así como las respuestas breves a las preguntas generadas de la aplicación del método y que son listadas en el capítulo anterior. También se listan los resultados logrados, tales como los radios de curvatura paraxiales determinados con este método, y los coeficientes de deformación encontrados como resultado del ajuste polinomial a los puntos obtenidos con el método propuesto. Así mismo se resumen los resultados de la comparación de este método con otros. Se comentan, además, las ventajas del método propuesto. Se analizan expectativas y aplicaciones futuras.

#### 4.2 EL MÉTODO.

- 1) Se miden los ángulos  $\theta$  entre el eje focal y las líneas normales a un conjunto de puntos sobre la superficie de prueba y  $X$ , sus correspondientes intersecciones con el eje focal; esta distancia es más conveniente que la aberración longitudinal. Con el equipo manual con que se cuenta en el Laboratorio de Pruebas Ópticas del CCADET, estas mediciones se logran con una incertidumbre de  $10 \mu\text{m}$  para la distancia lineal y  $0.002$  grados para el movimiento angular.
- 2) Se ajusta un polinomio de grado 1 al conjunto de valores  $\text{tg}^2(\theta)$  y  $X$ , valores obtenidos de los datos experimentales, con la ordenada al origen y la pendiente de este polinomio se evalúa el radio de curvatura paraxial.
- 3) Un criterio apropiado para seleccionar la superficie inicial es: Seleccionar a la parábola de radio de curvatura paraxial igual al término independiente del polinomio ajustado en el paso 2, aunque casi cualquier superficie resulta ser buena aproximación inicial.
- 4) Se selecciona un error  $\epsilon$  máximo aceptable en los valores de las coordenadas cartesianas de los puntos solución, por ejemplo  $10^{-3}$  mm, que va de acuerdo con la resolución del equipo utilizado para medir el desplazamiento lineal.
- 5) Se aplica iterativamente el método de integración numérica a todos los puntos medidos experimentalmente, hasta que la diferencia máxima entre aproximaciones consecutivas para  $s$  y  $z$ , sea menor al error máximo aceptable, fijado en el paso 4.

TFC'S CON  
FALLA DE ORIGEN

6) A los puntos obtenidos en coordenadas cartesianas se les ajusta un polinomio de grado 10 y con sólo términos de grado par.

7) Ahora tenemos el polinomio que describe el perfil de la superficie en coordenadas cartesianas, para describir toda la superficie es necesario rotarla para caracterizar varios perfiles y luego hacer un ajuste polinomial sobre todos ellos. En principio basta con un solo perfil, ya que suponemos la existencia de simetría de revolución, aunque conviene hacer la medición completa de la superficie y comprobar la simetría.

### 4.3 CARACTERÍSTICAS.

#### 4.3.1 La aproximación inicial.

En este método la aproximación inicial puede ser elegida de entre una amplia variedad de perfiles, por ejemplo, puede seleccionarse un perfil lineal que pase por el vértice de la superficie, independientemente de su pendiente, basta con que se encuentre en el mismo cuadrante que los datos de la superficie.

Otra opción es un perfil circular que sea tangente interna en el vértice, a la superficie de prueba, sólo es necesario que el radio de esta circunferencia sea lo suficientemente grande para intersectar a todas las líneas normales a la superficie medidas experimentalmente. O bien, un perfil parabólico cuyo vértice coincida con el vértice de la superficie de prueba, claro esta que, la mejor selección la constituye la parábola que además de lo anterior cuenta con un radio de curvatura igual al radio de curvatura paraxial de la superficie de prueba, pues sería una aproximación inicial a la solución como se indica en el capítulo 3.

#### 4.3.2 Convergencia.

A lo largo del trabajo, específicamente en el capítulo 3, se demostró que el método es convergente siempre que se satisfaga la condición 3.38. Entre los perfiles que satisfacen esta condición se encuentran los parabólicos.

#### 4.3.3 Criterio de paro.

El criterio de paro utilizado en este método es el criterio estándar que se utiliza en la mayoría de los métodos numéricos, y que se expresa claramente en las relaciones del apartado 3.2.6.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

#### 4.3.4 Precisión.

La precisión del método esta en función de qué tan bien describe las superficies que son caracterizadas con él. Para estimar su precisión se caracterizaron dos superficies por este método propuesto y por un método mecánico, encontrando diferencias entre ambas descripciones de apenas un tercio de milímetro como máximo, esto implica que ambos métodos cuentan con una precisión muy similar, con la gran desventaja de que el método mecánico implica el riesgo de daño sobre la superficie ya que es un método de contacto, mientras que el método de deflectometría láser no implica daño a la superficie. Sin embargo éste último sólo es aplicable a superficies especulares, (que es el caso de superficies ópticas).

Se intentaron otras comparaciones con otros métodos como: las pruebas ópticas tradicionales, resultando muy complicada la evaluación por tratarse de superficies convexas y además formar parte de una lente. También se intentó un método fotográfico, cuya evaluación resultó simple, pero con poca precisión, la cual puede ser aumentada, pero este desarrollo podría bien ser objeto de un estudio futuro y específico, (Hamblen, 1995). Finalmente se utilizó un método mecánico bastante confiable, encontrando que los resultados varían en menos del 1% en toda la superficie.

Por otro lado, la precisión esta asociada también a los errores experimentales, es decir a las incertidumbres en la mediciones experimentales, Díaz Uribe *et al.* (1985) muestra que el error o incertidumbre en la determinación de las coordenadas  $z$  de cada punto es directamente proporcional a la incertidumbre al medir la aberración longitudinal  $x$ , siendo la constante de proporcionalidad el inverso absoluto de la constante de conicidad, en el método propuesto se mide de la misma manera que en el trabajo citado, por lo que consideraremos que dicha estimación es válida para este trabajo.

#### 4.3.5 Estabilidad.

El método resulta ser muy estable, pues al introducir desviaciones de manera aleatoria en los datos experimentales, variaciones similares a las variaciones que comúnmente se introducen en el trabajo experimental, el método converge prácticamente a la misma superficie, pues las variaciones son del orden de 30 a 40 micrómetros.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

#### 4.4 VENTAJAS.

El método de la deflectometría láser combinado con la integración numérica, resultó ser un procedimiento convergente, pues casi con cualquier superficie inicial se obtienen los mismos resultados, es decir la misma descripción para la superficie. Hasta el momento se tiene una resolución en el equipo utilizado de 0.002 grados y 0.01 milímetro, si el proceso de medición se realiza a *mano*, con lo que la precisión es de unas decenas de micrómetros.

El proceso numérico es relativamente sencillo, y tiene la ventaja de poderse realizar con una hoja de cálculo, que puede ser desde el antiguo LOTUS 123, hasta el moderno Excel XP, sin dejar de lado a la programación de alto nivel.

Podríamos resumir las ventajas del procedimiento como sigue:

- Método relativamente sencillo.
- Buena resolución y es susceptible de mejorarse.
- Precisión de decenas de micrómetros.
- Es un método que no implica contacto con la superficie.

#### 4.5 RESULTADOS.

A continuación se presenta una tabla con los resultados obtenidos por dos métodos, el de integración numérica y el método mecánico

| Superficie                       | Cinephore                |                          | LAG 017                  |                         |
|----------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|
|                                  | Integración              | Mecánico                 | Integración              | Mecánico                |
| Radio de Curvatura Paraxial (mm) | 44.92                    | 48.97                    | 21.64                    | 20.06                   |
| D0 (mm)                          | -0.0007                  | 0.149                    | $-1.345 \times 10^{-4}$  | $6.855 \times 10^{-4}$  |
| D2 (mm <sup>2</sup> )            | 0.01113                  | 0.01021                  | 0.02318                  | 0.02501                 |
| D4 (mm <sup>3</sup> )            | $-7.914 \times 10^{-7}$  | $1.708 \times 10^{-6}$   | $8.998 \times 10^{-6}$   | $-4.836 \times 10^{-5}$ |
| D6 (mm <sup>3</sup> )            | $1.234 \times 10^{-9}$   | $-2.071 \times 10^{-9}$  | $-3.127 \times 10^{-8}$  | $4.071 \times 10^{-7}$  |
| D8 (mm <sup>3</sup> )            | $-6.725 \times 10^{-11}$ | $1.174 \times 10^{-14}$  | $7.097 \times 10^{-11}$  | $-1.264 \times 10^{-9}$ |
| D10 (mm <sup>3</sup> )           | $1.172 \times 10^{-16}$  | $-2.489 \times 10^{-16}$ | $-5.190 \times 10^{-16}$ | $1.318 \times 10^{-12}$ |

Tabla 4.1. Radio de curvatura paraxial y coeficientes de deformación para las superficies caracterizadas por el método de Integración numérica.

Puede observarse que los coeficientes de deformación cambian, pero los polinomios obtenidos por ambos métodos tienen una diferencia máxima de 0.33 mm, considerando ambas superficies caracterizadas. En la tabla puede observarse que los radios de curvatura paraxial difieren. Esto es debido a que al utilizar el método mecánico se tomo como vértice

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

el promedio de los vértices de varios perfiles. Así mismo, aparece en la tabla una constante aditiva  $D_0$  que desplaza el origen. Por otro lado, se ha detectado en varias ocasiones un error que parece ser sistemático al comparar con datos obtenidos por método mecánico, usando la MMC.

#### 4.6 APLICACIONES.

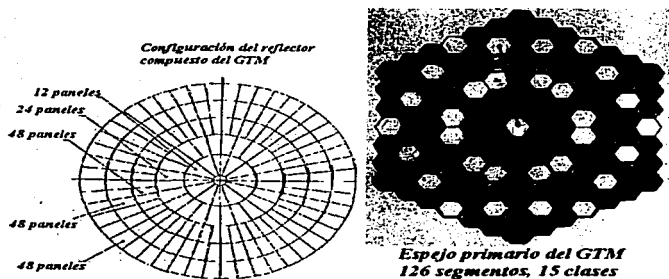
El método se encuentra en proceso de desarrollo, pero en la actualidad permite caracterizar superficies ópticas rápidas, convexas y en eje, de diámetro del orden de decenas de centímetros. Se estudia la forma de realizar las mediciones de forma automática y con la utilización de un sensor de posición de haces luminosos, con lo que se espera aumentar la precisión, así como el intervalo de muestreo, extendiéndolo a la región del vértice, pues en esta región el ángulo de deflexión es muy pequeño y no puede medirse con suficiente precisión con un método visual.

#### 4.7 EL FUTURO.

Recientemente la tecnología se ha desarrollado en los terrenos de la óptica segmentada y de la óptica adaptiva, la primera consiste en formar grandes superficies ópticas a partir de superficies ópticas de menor tamaño. Estas *pequeñas* superficies pueden tener diferentes formas, pero en conjunto forman una superficie esférica de gran tamaño. La calidad óptica de esta esférica dependerá de la calidad óptica de cada una de las superficies que la conforman. Cada una de las partes son en sí superficies esféricas, y pueden contar con coeficientes de deformación pequeños, si se encuentran cerca del vértice de la superficie completa, hasta superficies esféricas fuera de eje, si corresponden a segmentos cercanos a los bordes de la gran superficie óptica.

Un ejemplo de esta tecnología son los espejos del Gran Telescopio Milimétrico (GTM), el cual se construye en las instalaciones del Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica en Tonanzintla, Puebla, México, en colaboración con la Universidad de Massachusetts. En este proyecto, el Centro de Ciencias Aplicadas y Desarrollo Tecnológico de la UNAM, colabora con la investigación y desarrollo de nuevos métodos para probar la calidad óptica de dichos espejos.

Hasta ahora se han estudiado dos posibles configuraciones para el diseño del espejo secundario del GTM, las cuales son mostradas en la figura 4.1. En dichas figuras se observa que ambas configuraciones presentan superficies que son secciones hexagonales y parabólicas en eje y fuera de él, así como secciones *trapezoidales*, con diversas características y sin simetría de revolución.



*Figura 4.1 Dos esquemas de espejos formado por óptica segmentada. en el lado izquierdo el espejo primario esta formado por 180 paneles de cinco diferentes clases, mientras que a la derecha el espejo lo forman 126 segmentos de 15 clases.*

Nuestro siguiente objetivo consiste en extender el método de la integración numérica a superficies sin simetría de revolución. En la figura 4.2, se muestra una cornea humana, ejemplo físico de una superficie sin simetría de revolución, donde las deformaciones que dan lugar a astigmatismo y/o queratocono, no son regulares. En la figura siguiente se muestra un ejemplo de avanzado queratocono, provocando que la superficie corneal haya perdido su simetría de revolución

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



*Figura 4.2. Imagen de un queratocono avanzado donde se observan irregularidades que pierden toda simetría de la superficie corneal.*

#### 4.8 UN COMENTARIO FINAL.

El método propuesto en este trabajo resultó ser un método eficiente de fácil aplicación que resuelve un problema específico. Se mejoró y amplió el método de evaluación extendiéndolo de cónicas solamente a esféricas que pueden representarse con un polinomio de grado 10 y conteniendo sólo términos pares. El método propuesto es susceptible de ser mejorado introduciendo dispositivos que aumenten su eficiencia o su gama de aplicaciones, pero esto ya es trabajo futuro..

#### 4.9 REFERENCIAS.

Díaz Uribe R., Cornejo Rodríguez A., Pedraza Contreras J., Cardona Núñez O. Y Cordero Davila A.; "Profile measurement of a conic surfaces, using a He-Ne laser and a nodal bench", Appl. Opt., 24, 2612, (1985).

Hamblen D. P., y Jones M. R., "Lens Curvature Measurements by Shadow Projection Profilometry", Engineering Laboratory Notes in Supplement to Appl. Opt., December 1995.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



**INVERSIÓN POLINOMIAL**  
**APÉNDICE A**

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## A. INVERSIÓN POLINOMIAL

### A.1 RESUMEN.

Se presenta un análisis sobre el proceso de obtención de un polinomio inverso, según es propuesto en la literatura, por diversos autores, entre ellos Arfken. (1985)

Se muestra que aún cuando se restringe suficientemente el dominio, los errores dependen de las magnitudes de los coeficientes, esto se ejemplifica con un polinomio de tercer grado, y se muestran los resultados obtenidos.

### A.2 INTRODUCCIÓN:

Las funciones inversas son usadas para resolver muchos problemas matemáticos y físicos. Nosotros requerimos de un polinomio inverso en el proceso de caracterización de superficies ópticas rápidas. Pero al utilizar el procedimiento convencional para hallar dicho polinomio inverso encontramos que el método no es válido de manera general, sólo de manera restringida.

### A.3 INVERSIÓN POLINOMIAL

Para obtener el inverso de un polinomio, según el procedimiento citado por Arfken, se propone un polinomio del mismo grado al que se va a invertir. A manera de ejemplo, consideremos uno de grado tres, como sigue:

$$P(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = y, \quad (A.1)$$

entonces el polinomio inverso denotado por  $Q(y)$  tendrá la forma:

$$Q(y) = b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 = x. \quad (A.2)$$

Se realiza la composición  $Q(P(x))$ :

$$Q(P(x)) = b_1(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) + b_2(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)^2 + b_3(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)^3 = x, \quad (A.3)$$

o bien:

$$\begin{aligned} Q(P(x)) = & a_1b_1x + (a_2b_1 + a_1^2b_2)x^2 + (a_3b_1 + 2a_1a_2b_2 + a_1^2b_3)x^3 + \\ & (a_2^2b_2 + 2a_1a_2b_2 + 3a_1^2a_2b_3)x^4 + (2a_2a_3b_2 + 3a_1a_2^2b_3 + 3a_1^2a_3b_3 + b_3^2)x^5 + \\ & (a_2^3b_2 + 6a_1a_2a_3b_3 + a_2^2b_3)x^6 + (3a_2^2a_3b_3 + 3a_1a_2^2b_3)x^7 + 3a_2a_3^2b_3x^8 + a_3^2b_3x^9 = x. \end{aligned} \quad (A.4)$$

Para que se mantenga válida la última igualdad, se requiere que todos los coeficientes sean idénticos a cero, excepto el primero. Esto es:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$\begin{aligned}
 a_1 b_1 &= 1, \\
 a_1 b_2 + a_2 b_1^2 &= 0, \\
 a_3 b_1^3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_1 b_3 &= 0, \\
 a_3^2 b_2 + 2a_1 a_3 b_2 + 3a_1^2 a_2 b_3 &= 0, \\
 2a_2 a_3 b_2 + 3a_1 a_2^2 b_3 + 3a_1^2 a_3 b_3 &= 0, \\
 a_3^2 b_2 + 6a_1 a_2 a_3 b_3 + a_2^3 b_3 &= 0, \\
 3a_2^2 a_3 b_3 + 3a_1 a_2^3 b_3 &= 0, \\
 3a_2 a_3^2 b_3 &= 0, \\
 a_3^3 b_3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Con las primeras tres relaciones formamos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, ignorando el resto de las ecuaciones, pues de lo contrario tendríamos un sistema con más ecuaciones que incógnitas, cuya solución se encuentra sobredeterminada. La solución para el sistema de tres por tres es:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{1}{a_1}, \\
 b_2 &= -\frac{a_2}{a_1^3}, \\
 b_3 &= \frac{2a_2^2 - a_3 a_1}{a_1^3}.
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Cabe hacer notar que de acuerdo a esta solución, si el polinomio no contara con término lineal, el polinomio inverso no existiría.

Si ahora hacemos la composición de los polinomios  $Q(x)$  y  $P(x)$ , con estos valores para  $b_i$ , despreciando los términos de grado mayor a 3, tenemos  $Q(P(x)) = x$ . Mostrando congruencia en la solución, dentro de las aproximaciones usadas.

### EJEMPLO 1:

Por ejemplo, el polinomio inverso de:

$$P(x) = x + x^2 + x^3 \tag{A.7}$$

será:

$$Q(x) = x - x^2 + x^3. \tag{A.8}$$

según las expresiones halladas anteriormente.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

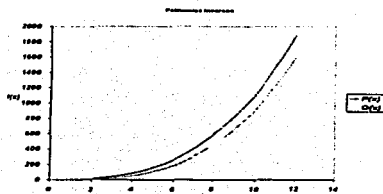


Figura A.1 Se muestran los dos polinomios  $P(x)$  y  $Q(x)$

Como puede verse en la gráfica las curvas no corresponden a dos funciones inversas entre sí, pues en caso de serlo serían simétricas con respecto de la función identidad, y las curvas mostradas en la gráfica no lo son.

Si ahora evaluamos  $P(1) = 3$ , sustituyendo en  $Q(x)$ , es decir  $Q(3) = 21$ , por lo que  $Q(3)$  no es el inverso de  $P(x)$ , o por lo menos no en  $x = 1$ , pues al evaluar numéricamente es considerada la parte correspondiente a los términos despreciados.

Pero, ¿Cuánto valen los términos despreciados?

$$\begin{aligned}
 (a_2^2 b_2 + 2a_1 a_2 b_2 + 3a_1^2 a_2 b_2) x^4 &= \frac{5a_2^2 - 5a_1 a_2 a_3}{a_1^3} x^4, \\
 (2a_2 a_3 b_2 + 3a_1 a_2^2 b_2 + 3a_1^2 a_2 b_2) x^5 &= \frac{6a_2^4 + a_1 a_2^2 a_3 - 3a_1^2 a_2^2}{a_1^4} x^5, \\
 (a_2^3 b_2 + a_2^2 b_2 + 6a_1 a_2 a_3 b_2) x^6 &= \frac{2a_2^5 + 11a_1 a_2^2 a_3 - 7a_1^2 a_2 a_3^2}{a_1^5} x^6, \\
 (3a_2^2 a_3 b_2 + 3a_1 a_2^2 b_2) x^7 &= \frac{6a_2^4 a_3 + 3a_1 a_2^2 a_3^2 - 3a_1^2 a_3^2}{a_1^3} x^7, \\
 3a_1 a_2^2 b_2 &= \frac{6a_2^4 a_3^2 - 3a_1 a_2 a_3^2}{a_1^2}, \\
 a_2^3 b_2 x^9 &= \frac{2a_2^4 a_3^2 - a_1 a_2^4}{a_1^2} x^9.
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Para que estos términos fueran despreciables bastaría que  $a_1$  fuera muy grande; o bien restringiendo el dominio, a  $x < 1$ , con lo que  $x^n$ , para  $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9$ , será pequeña.

Regresando al ejemplo anterior, si evaluamos  $P(x)$  en  $x = 0.1$ , obtenemos  $P(0.1) = 0.111$ , y  $Q(0.111) = 0.10004663$ , el cual presenta un error menor a 0.05 %.

Ahora construimos la siguiente tabla, en ella se presentan los errores para diferentes valores de  $x$ .

|      | $P(x)$ | $Q(P(x))$   | Error (%)  |
|------|--------|-------------|------------|
| -1   | -1     | -3          | 200        |
| -0.9 | -0.819 | -2.03911426 | 126.568251 |
| -0.8 | -0.672 | -1.42704845 | 78.381056  |
| -0.7 | -0.553 | -1.02792138 | 46.845911  |
| -0.6 | -0.456 | -0.75875482 | 26.459136  |
| -0.5 | -0.375 | -0.56835938 | 13.671875  |
| -0.4 | -0.304 | -0.42451046 | 6.127616   |
| -0.3 | -0.237 | -0.30648105 | 2.160351   |
| -0.2 | -0.168 | -0.20096563 | 0.482816   |
| -0.1 | -0.091 | -0.10003457 | 0.034571   |
| 0    | 0      | 0           | 0          |
| 0.1  | 0.111  | 0.10004663  | 0.046631   |
| 0.2  | 0.248  | 0.20174899  | 0.874496   |
| 0.3  | 0.417  | 0.31562271  | 5.207571   |
| 0.4  | 0.624  | 0.47759462  | 19.398656  |
| 0.5  | 0.875  | 0.77929687  | 55.859375  |
| 0.6  | 1.176  | 1.41940378  | 136.567296 |
| 0.7  | 1.533  | 2.78559744  | 297.942491 |
| 0.8  | 1.952  | 5.57940941  | 597.426176 |
| 0.9  | 2.439  | 10.9992095  | 1122.13439 |
| 1    | 3      | 21          | 2000       |

Tabla A.1  $P(x)$  y  $Q(x)$  en forma tabular, y se calcula el error de la composición  $P(Q(x))$

En donde podemos interpolar y ver que para un error menor al 2 %,  $x$  deberá estar en el intervalo  $(-0.294, 0.241)$ .

Si ahora evaluamos los términos despreciados obtenemos que la suma de ellos es exactamente el error de  $Q(P(x))$ . Como es de esperarse el error disminuye aumentando el valor de  $a_1$ , pero aumenta al aumentar  $a_2$  y  $a_3$ .

Redefiniendo las expresiones A.9 tenemos:

$$\left( \frac{5a_1^3 - 5a_2a_3}{a_1^3} \right) x^4 = T_1 x^4,$$

$$\left( \frac{6a_2^4 + a_2^2a_3 - 3a_3^2}{a_1^4} \right) x^5 = T_2 x^5,$$

$$\left( \frac{2a_1^2 + 11a_1^2 a_2 - 7a_2 a_1^2}{a_1^3} \right) x^6 = T_3 x^6, \quad (\text{A.10})$$

$$\left( \frac{6a_1^2 a_2 + 3a_2^2 a_1^2 - 3a_1^3}{a_1^3} \right) x^7 = T_4 x^7,$$

$$\left( \frac{6a_2^2 a_1^2 - 3a_2 a_1^3}{a_1^3} \right) x^8 = T_5 x^8,$$

$$\left( \frac{2a_1^2 a_1^3 - a_1^4}{a_1^3} \right) x^9 = T_6 x^9.$$

Por tanto si se quiere un error menor o igual a  $e\%$  de  $x$ , entonces:

$$\left| \frac{T_1 x^4 + T_2 x^5 + T_3 x^6 + T_4 x^7 + T_5 x^8 + T_6 x^9}{x} \right| \leq \frac{e}{100}, \quad (\text{A.11})$$

o bien:

$$|T_1 x^3 + T_2 x^4 + T_3 x^5 + T_4 x^6 + T_5 x^7 + T_6 x^8| \leq \frac{e}{100}. \quad (\text{A.12})$$

El valor máximo para el error debe estar dado en  $x_m$ , sea  $x_m = 0.1$ , entonces el error es:

$$|10^{-3} T_1 + 10^{-4} T_2 + 10^{-5} T_3 + 10^{-6} T_4 + 10^{-7} T_5 + 10^{-8} T_6| \leq 10^{-2} e. \quad (\text{A.13})$$

Conociendo de los coeficientes  $T_i$ 's ya podemos estimar el error de un polinomio inverso de grado 3.

Si ahora retomamos el polinomio (A.7) en el ejemplo 1, tenemos que  $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ , por lo que los términos de error son:

$$T_1 = 0, T_2 = 4, T_3 = 6, T_4 = 6, T_5 = 3 \text{ y } T_6 = 1.$$

Y si fijamos el error en 2%, esto nos lleva a la relación:

$$|4x^4 + 6x^5 + 6x^6 + 3x^7 + x^8| \leq \frac{2}{100}. \quad (\text{A.14})$$

o bien:

$$-0.02 \leq 4x^4 + 6x^5 + 6x^6 + 3x^7 + x^8 \leq 0.02. \quad (\text{A.15})$$

Tomando la desigualdad del lado derecho tenemos:

$$4x^4 + 6x^5 + 6x^6 + 3x^7 + x^8 - 0.02 \leq 0. \quad (\text{A.16})$$

Graficando esta desigualdad se tiene:

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

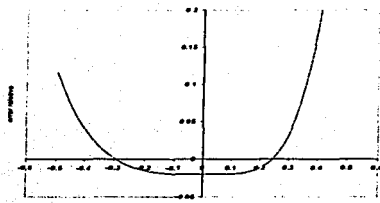


Figura A.2 Gráfica de la desigualdad (A.16), donde se observa el intervalo solución

Donde se puede ver que el intervalo solución es aquel donde la gráfica esta por debajo del eje x. Para hallar el intervalo que satisface la desigualdad basta encontrar las raíces de:

$$4x^4 + 6x^5 + 6x^6 + 3x^7 + x^8 - 0.02 = 0. \quad (\text{A.17})$$

Resolviendo este polinomio por el método de bisección con un error menor a 0.01 % se obtienen las raíces: -0.2937164 y 0.2418198, por lo tanto la desigualdad (A.16) se satisface cuando:

$$-0.2937164 \leq x \leq 0.2418198.$$

Tomando ahora la desigualdad del lado izquierdo tenemos:

$$4x^4 + 6x^5 + 6x^6 + 3x^7 + x^8 + 0.02 \geq 0. \quad (\text{A.18})$$

Graficando esta desigualdad se tiene:

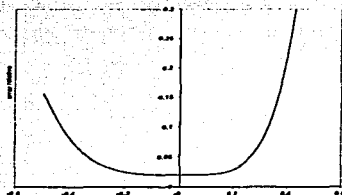


Figura A.32 Gráfica de la desigualdad (A.18), donde se observa el intervalo solución

Donde se puede ver que el intervalo solución es aquel donde la gráfica esta por arriba del eje x. Que es todo el dominio del polinomio en (A.18). Para hallar el intervalo que satisface la desigualdad basta encontrar el intervalo intersección de ambas soluciones, esto es:

$$-0.2937164 \leq x \leq 0.2418198.$$

intervalo que coincide con el hallado de la tabla A.1.

### EJEMPLO 2:

Una aplicación de la inversión polinomial es encontrar raíces de un polinomio, supongamos que deseamos encontrar una raíz del polinomio:

$$P(x) = x^3 + x^2 + x - \frac{1}{4} = 0, \quad (\text{A.19})$$

este lo podemos escribir como:

$$z = \left(y + \frac{1}{4}\right) = x^3 + x^2 + x, \quad (\text{A.20})$$

su polinomio inverso será:

$$x = z - z^2 + z^3. \quad (\text{A.21})$$

Sustituyendo el valor de z tenemos:

$$x = \left(y + \frac{1}{4}\right) - \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^3, \quad (\text{A.22})$$

desarrollando los binomios se llega a:

$$x = y^3 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{5}{16}y + \frac{13}{64}. \quad (\text{A.23})$$

Haciendo  $y = 0$ , tenemos  $x = 13/64 \approx 0.203125$ .

Que es una aproximación a la raíz del polinomio A.19, resolviendo este polinomio numéricamente por el método de bisección, con un error menor al 0.01 %, se tiene que la raíz es:  $0.201392 \pm 0.01$  %. El valor obtenido por el polinomio inverso difiere del hallado numéricamente en menos de 1 %.

## A.4 COEFICIENTES PARA POLINOMIOS INVERSOS DE GRADO MAYOR A 3.

Utilizando el mismo método pueden calcularse los coeficientes de polinomios inverso de mayor grado, a continuación se listan algunos de ellos, tomados de Dwight (1961).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Sea

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + fx^6 + gx^7 + \dots \quad \text{con } a \neq 0, \quad (\text{A.23})$$

entonces su inverso está dado por:

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + Fy^6 + Gy^7 + \dots \quad (\text{A.24})$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{a} & B &= -\frac{b}{a^2} & C &= \frac{1}{a^3}(2b^2 - ac) & D &= \frac{1}{a^4}(5abc - a^2d - 5b^3) \\ E &= \frac{1}{a^5}(6a^2bd + 3a^2c^2 + 14b^4 - a^3e - 21ab^2c) \\ F &= \frac{1}{a^6}(7a^3be + 7a^3cd + 84ab^3c - a^4f - 28a^2b^2d - 28a^2bc^2 - 42b^5) \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{a^7}(8a^4bf + 8a^4ce + 4a^4d^2 + 120a^2b^3d + 180a^2b^2c^2 + 132b^6 - a^5g - 36a^3b^2e \\ &\quad - 72a^3bcd - 12a^3c^3 - 330ab^4c) \end{aligned}$$

Aquí solamente presentamos los términos de error para grado tres, los términos de error para grados mayores se pueden calcular a partir de la composición de polinomios, como se hizo a lo largo de este trabajo.

### A.5 CONCLUSIONES:

El método de la inversión polinomial aparece citado en varios textos, pero los autores sólo comentan una condición, la existencia de término lineal y no comentan ninguna restricción sobre el dominio de los polinomios, en este trabajo desarrollamos esta restricción y encontramos que el polinomio inverso es exacto sólo en el punto  $x = 0$ , pero es posible extenderlo a un pequeño intervalo, donde el error introducido por la composición polinomial se puede considerar aceptable, dependiendo de las características del problema a resolver.

### A.6 BIBLIOGRAFÍA.

Arfken C., *Métodos matemáticos para físicos*, Ed. Diana, México 1985.

Dwight B. H., *"Tables of Integrals and other mathematical data"*, 4ª. Edición, The Macmillan Company, 1961, USA.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**TABLAS**  
**APÉNDICE B**

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

| $\theta$ (grad) | $x$ (mm)    | $\theta$ (rad)    | $tg(\theta)$      | $X$ (mm)     |
|-----------------|-------------|-------------------|-------------------|--------------|
| 0               | 0.00        | 0                 | 0                 | 44.00        |
| <i>1.3</i>      | <i>0.02</i> | <i>0.02272136</i> | <i>0.02272527</i> | <i>44.02</i> |
| <i>2.6</i>      | <i>0.06</i> | <i>0.04540731</i> | <i>0.04543855</i> | <i>44.06</i> |
| <i>3.9</i>      | <i>0.14</i> | <i>0.06802271</i> | <i>0.06812782</i> | <i>44.14</i> |
| <i>5.2</i>      | <i>0.24</i> | <i>0.09053293</i> | <i>0.09078109</i> | <i>44.24</i> |
| <i>6.5</i>      | <i>0.38</i> | <i>0.11290416</i> | <i>0.1138636</i>  | <i>44.38</i> |
| <i>7.7</i>      | <i>0.55</i> | <i>0.13510358</i> | <i>0.13593164</i> | <i>44.55</i> |
| <i>9</i>        | <i>0.75</i> | <i>0.1570996</i>  | <i>0.15840491</i> | <i>44.75</i> |
| 10.000          | 1.04        | 0.17453           | 0.17633           | 45.04        |
| 11.000          | 1.21        | 0.19199           | 0.19438           | 45.21        |
| 12.000          | 1.45        | 0.20944           | 0.21256           | 45.45        |
| 13.000          | 1.61        | 0.22689           | 0.23087           | 45.61        |
| 14.000          | 1.88        | 0.24435           | 0.24933           | 45.88        |
| 14.000          | 2.08        | 0.26180           | 0.26795           | 46.08        |
| 16.000          | 2.32        | 0.27925           | 0.28675           | 46.32        |
| 17.000          | 2.59        | 0.29671           | 0.30573           | 46.59        |
| 18.000          | 2.99        | 0.31416           | 0.32492           | 46.99        |
| 19.000          | 3.42        | 0.33161           | 0.34433           | 47.42        |
| 20.000          | 3.79        | 0.34907           | 0.36397           | 47.79        |
| 21.000          | 4.15        | 0.36652           | 0.38386           | 48.15        |
| 22.000          | 4.52        | 0.38397           | 0.40403           | 48.52        |
| 23.000          | 4.90        | 0.40143           | 0.42447           | 48.90        |
| 24.000          | 5.24        | 0.41888           | 0.44523           | 49.24        |
| 25.000          | 5.61        | 0.43633           | 0.46631           | 49.61        |
| 26.000          | 5.99        | 0.45379           | 0.48773           | 49.99        |
| 27.000          | 6.40        | 0.47124           | 0.50953           | 50.40        |
| 28.000          | 6.82        | 0.48869           | 0.53171           | 50.82        |
| 29.000          | 7.26        | 0.50615           | 0.55431           | 51.26        |
| 30.000          | 7.70        | 0.52360           | 0.57735           | 51.70        |
| 31.000          | 8.17        | 0.54105           | 0.60086           | 52.17        |
| 32.000          | 8.72        | 0.55851           | 0.62487           | 52.72        |
| 33.000          | 9.28        | 0.57596           | 0.64941           | 53.28        |
| 34.000          | 9.93        | 0.59355           | 0.67471           | 53.93        |
| 35.000          | 10.62       | 0.61087           | 0.70021           | 54.62        |
| 36.000          | 11.43       | 0.62832           | 0.72654           | 55.43        |
| 37.000          | 12.38       | 0.64577           | 0.75355           | 56.38        |
| 38.000          | 13.51       | 0.66323           | 0.78129           | 57.51        |
| 39.000          | 14.88       | 0.68068           | 0.80978           | 58.88        |
| 40.000          | 16.65       | 0.69813           | 0.83910           | 60.65        |
| 41.000          | 18.29       | 0.71558           | 0.86929           | 62.29        |
| 42.000          | 19.47       | 0.73304           | 0.90040           | 63.47        |

Tabla B.1. Datos de la lente Cinephore de Bausch & Lomb medidos experimentalmente por deflectometría láser, los datos cercanos al vértice que se encuentran en números *italicos* fueron propuestos, la incertidumbre en el ángulo es de 0.5 miligrados y de 5  $\mu$ m en la aberración longitudinal.

| $\theta(\text{grad})$ | $x \text{ (mm)}$ | $\theta \text{ (rad)}$ | $\text{tg}(\theta)$ | $X \text{ (mm)}$ |
|-----------------------|------------------|------------------------|---------------------|------------------|
| 0                     | 0                | 0                      | 0                   | 21.35            |
| 0.8                   | 0                | 0.01396263             | 0.01396354          | 21.36            |
| 1.6                   | 0.01             | 0.02792527             | 0.02793253          | 21.37            |
| 2.5                   | 0.02             | 0.04363323             | 0.04366094          | 21.38            |
| 3.3                   | 0.03             | 0.05759587             | 0.05765964          | 21.4             |
| 4.1                   | 0.05             | 0.0715585              | 0.07168089          | 21.43            |
| 4.3                   | 0.08             | 0.07504916             | 0.07519038          | 21.46            |
| 5.7                   | 0.11             | 0.09948377             | 0.09981327          | 21.51            |
| 7.000                 | 0.16             | 0.12217                | 0.12278             | 21.51            |
| 8.000                 | 0.22             | 0.13963                | 0.14054             | 21.57            |
| 9.000                 | 0.29             | 0.15708                | 0.15838             | 21.64            |
| 10.000                | 0.33             | 0.17453                | 0.17633             | 21.68            |
| 11.000                | 0.38             | 0.19199                | 0.19438             | 21.73            |
| 12.000                | 0.43             | 0.20944                | 0.21256             | 21.78            |
| 13.000                | 0.47             | 0.22689                | 0.23087             | 21.82            |
| 14.000                | 0.51             | 0.24435                | 0.24933             | 21.86            |
| 15.000                | 0.55             | 0.26180                | 0.26795             | 21.90            |
| 16.000                | 0.58             | 0.27925                | 0.28675             | 21.93            |
| 17.000                | 0.62             | 0.29671                | 0.30573             | 21.97            |
| 18.000                | 0.70             | 0.31416                | 0.32492             | 22.05            |
| 19.000                | 0.77             | 0.33161                | 0.34433             | 22.12            |
| 20.000                | 0.82             | 0.34907                | 0.36397             | 22.17            |
| 21.000                | 0.88             | 0.36652                | 0.38386             | 22.23            |
| 22.000                | 0.98             | 0.38397                | 0.40403             | 22.33            |
| 23.000                | 1.08             | 0.40143                | 0.42447             | 22.43            |
| 24.000                | 1.19             | 0.41888                | 0.44523             | 22.54            |
| 25.000                | 1.30             | 0.43633                | 0.46631             | 22.65            |
| 26.000                | 1.50             | 0.45379                | 0.48773             | 22.85            |
| 27.000                | 1.69             | 0.47124                | 0.50953             | 23.04            |
| 28.000                | 1.87             | 0.48869                | 0.53171             | 23.22            |
| 29.000                | 2.05             | 0.50615                | 0.55431             | 23.40            |
| 30.000                | 2.30             | 0.52360                | 0.57735             | 23.65            |
| 31.000                | 2.50             | 0.54105                | 0.60086             | 23.85            |
| 32.000                | 2.81             | 0.55851                | 0.62487             | 24.16            |
| 33.000                | 3.06             | 0.57596                | 0.64941             | 24.41            |
| 34.000                | 3.28             | 0.59341                | 0.67451             | 24.63            |
| 35.000                | 3.59             | 0.61087                | 0.70021             | 24.94            |
| 36.000                | 3.78             | 0.62832                | 0.72654             | 25.13            |
| 37.000                | 4.17             | 0.64577                | 0.75355             | 25.52            |
| 38.000                | 4.41             | 0.66323                | 0.78129             | 25.76            |
| 39.000                | 4.65             | 0.68068                | 0.80978             | 26.00            |
| 40.000                | 4.90             | 0.69813                | 0.83910             | 26.25            |
| 41.000                | 5.15             | 0.71558                | 0.86929             | 26.50            |
| 42.000                | 5.44             | 0.73304                | 0.90040             | 26.79            |
| 43.000                | 5.72             | 0.75049                | 0.93252             | 27.07            |
| 44.000                | 6.06             | 0.76794                | 0.96569             | 27.41            |

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

| $\theta$ (grad) | x (mm) | $\theta$ (rad) | tg( $\theta$ ) | X (mm) |
|-----------------|--------|----------------|----------------|--------|
| 45.000          | 6.40   | 0.78540        | 1.00000        | 27.75  |
| 46.000          | 6.80   | 0.80285        | 1.03553        | 28.15  |
| 47.000          | 7.19   | 0.82030        | 1.07237        | 28.54  |
| 48.000          | 7.65   | 0.83776        | 1.11061        | 29.00  |
| 49.000          | 8.10   | 0.85521        | 1.15037        | 29.45  |
| 50.000          | 8.52   | 0.87266        | 1.19175        | 29.87  |
| 51.000          | 8.95   | 0.89012        | 1.23490        | 30.30  |
| 52.000          | 9.49   | 0.90757        | 1.27994        | 30.84  |
| 53.000          | 10.03  | 0.92502        | 1.32704        | 31.38  |

Tabla B.2. Datos de la lente LAG 017 de Melles Griot medidos experimentalmente por deflectometría láser, los datos cercanos al vértice que se encuentran en números *itálicos* fueron propuestos, la incertidumbre en el ángulo es de 0.5 miligrados y de 5  $\mu$ m en la aberración longitudinal.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

| s (mm) | z (mm) |
|--------|--------|
| 0      | 0.00   |
| 7.82   | 0.69   |
| 8.62   | 0.84   |
| 9.45   | 1.01   |
| 10.26  | 1.19   |
| 11.09  | 1.39   |
| 11.92  | 1.60   |
| 12.76  | 1.83   |
| 13.61  | 2.08   |
| 14.50  | 2.37   |
| 15.41  | 2.67   |
| 16.31  | 2.99   |
| 17.21  | 3.32   |
| 18.11  | 3.68   |
| 19.03  | 4.06   |
| 19.94  | 4.46   |
| 20.86  | 4.88   |
| 21.79  | 5.32   |
| 22.73  | 5.79   |
| 23.68  | 6.28   |
| 24.64  | 6.80   |
| 25.60  | 7.35   |
| 26.59  | 7.93   |
| 27.60  | 8.55   |
| 28.62  | 9.20   |
| 29.70  | 9.91   |
| 30.78  | 10.66  |
| 31.93  | 11.48  |
| 33.16  | 12.38  |
| 34.47  | 13.39  |
| 35.91  | 14.54  |
| 37.55  | 15.89  |
| 39.15  | 17.26  |
| 40.52  | 18.47  |

Tabla B.3. Datos de la lente Cinephore de Bausch & Lomb obtenidos por el método de la integración numérica, sin datos cercanos al vértice.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

| s(mm) | z (mm) |
|-------|--------|
| 0.00  | 0.00   |
| 1.00  | 0.01   |
| 2.00  | 0.05   |
| 3.00  | 0.10   |
| 4.00  | 0.18   |
| 5.00  | 0.28   |
| 6.00  | 0.41   |
| 7.00  | 0.56   |
| 7.82  | 0.69   |
| 8.62  | 0.84   |
| 9.45  | 1.01   |
| 10.25 | 1.19   |
| 11.09 | 1.39   |
| 11.92 | 1.60   |
| 12.76 | 1.84   |
| 13.61 | 2.09   |
| 14.50 | 2.37   |
| 15.41 | 2.67   |
| 16.31 | 2.99   |
| 17.21 | 3.33   |
| 18.11 | 3.68   |
| 19.03 | 4.06   |
| 19.94 | 4.46   |
| 20.86 | 4.88   |
| 21.78 | 5.32   |
| 22.73 | 5.79   |
| 23.68 | 6.29   |
| 24.64 | 6.81   |
| 25.60 | 7.35   |
| 26.58 | 7.93   |
| 27.60 | 8.55   |
| 28.62 | 9.21   |
| 29.70 | 9.92   |
| 30.78 | 10.66  |
| 31.93 | 11.48  |
| 33.15 | 12.39  |
| 34.46 | 13.39  |
| 35.91 | 14.54  |
| 37.55 | 15.90  |
| 39.15 | 17.26  |
| 40.52 | 18.47  |

Tabla B.4. Datos de la lente Cinephore de Bausch & Lomb obtenidos por el método de la integración numérica, con datos cercanos al vértice.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

| s (mm) | z (mm) | s (mm) | z (mm) |
|--------|--------|--------|--------|
| 0.00   | 0.00   | 11.74  | 3.32   |
| 2.62   | 0.16   | 12.18  | 3.58   |
| 3.00   | 0.21   | 12.67  | 3.88   |
| 3.38   | 0.27   | 13.14  | 4.18   |
| 3.76   | 0.33   | 13.59  | 4.48   |
| 4.15   | 0.40   | 14.09  | 4.82   |
| 4.53   | 0.48   | 14.53  | 5.13   |
| 4.91   | 0.56   | 15.06  | 5.53   |
| 5.29   | 0.66   | 15.53  | 5.88   |
| 5.67   | 0.75   | 15.99  | 6.25   |
| 6.04   | 0.86   | 16.46  | 6.64   |
| 6.42   | 0.97   | 16.92  | 7.03   |
| 6.81   | 1.09   | 17.40  | 7.46   |
| 7.20   | 1.22   | 17.88  | 7.90   |
| 7.58   | 1.36   | 18.38  | 8.37   |
| 7.96   | 1.50   | 18.88  | 8.87   |
| 8.35   | 1.66   | 19.41  | 9.40   |
| 8.75   | 1.82   | 19.93  | 9.95   |
| 9.15   | 1.99   | 20.49  | 10.56  |
| 9.55   | 2.17   | 21.03  | 11.17  |
| 9.98   | 2.38   | 21.55  | 11.78  |
| 10.42  | 2.60   | 22.08  | 12.42  |
| 10.85  | 2.82   | 22.65  | 13.14  |
| 11.28  | 3.06   | 23.22  | 13.88  |

Tabla B.5 Datos de la lente LAG 017 de Melles Griot obtenidos por el método de la integración numérica, sin datos cercanos al vértice.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



| s (mm) | z (mm) | s (mm) | z (mm) |
|--------|--------|--------|--------|
| 0.00   | 0.00   | 10.42  | 2.60   |
| 0.30   | 0.00   | 10.85  | 2.82   |
| 0.60   | 0.01   | 11.28  | 3.06   |
| 0.93   | 0.02   | 11.74  | 3.32   |
| 1.23   | 0.04   | 12.18  | 3.58   |
| 1.53   | 0.05   | 12.67  | 3.88   |
| 1.61   | 0.06   | 13.14  | 4.18   |
| 2.14   | 0.11   | 13.59  | 4.48   |
| 2.62   | 0.16   | 14.09  | 4.82   |
| 3.00   | 0.21   | 14.53  | 5.13   |
| 3.38   | 0.27   | 15.06  | 5.53   |
| 3.76   | 0.33   | 15.53  | 5.88   |
| 4.15   | 0.40   | 15.99  | 6.25   |
| 4.53   | 0.48   | 16.46  | 6.64   |
| 4.91   | 0.56   | 16.92  | 7.03   |
| 5.29   | 0.66   | 17.40  | 7.46   |
| 5.67   | 0.75   | 17.88  | 7.90   |
| 6.04   | 0.86   | 18.38  | 8.37   |
| 6.42   | 0.97   | 18.88  | 8.87   |
| 6.81   | 1.09   | 19.41  | 9.40   |
| 7.20   | 1.22   | 19.93  | 9.95   |
| 7.58   | 1.36   | 20.49  | 10.55  |
| 7.96   | 1.50   | 21.03  | 11.17  |
| 8.35   | 1.65   | 21.55  | 11.78  |
| 8.75   | 1.82   | 22.08  | 12.42  |
| 9.15   | 1.99   | 22.65  | 13.14  |
| 9.55   | 2.17   | 23.22  | 13.88  |
| 9.98   | 2.38   |        |        |

Tabla B.6 Datos de la lente LAG 017 de Melles Griot obtenidos por el método de la integración numérica, con datos cercanos al vértice.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

| <i>s</i> (mm) | <i>z</i> (mm) | <i>s</i> (mm) | <i>z</i> (mm) |
|---------------|---------------|---------------|---------------|
| 0.0           | 0.0           | 21.0          | 4.8           |
| 3.0           | 0.1           | 22.0          | 5.1           |
| 4.0           | 0.2           | 23.0          | 5.7           |
| 5.0           | 0.3           | 24.0          | 6.3           |
| 6.0           | 0.4           | 25.0          | 6.9           |
| 7.0           | 0.6           | 26.0          | 7.5           |
| 8.0           | 0.7           | 27.0          | 8.1           |
| 9.0           | 1.0           | 28.0          | 9.0           |
| 10.0          | 1.2           | 29.0          | 9.8           |
| 11.0          | 1.4           | 30.0          | 10.2          |
| 12.0          | 1.6           | 31.0          | 11.1          |
| 13.0          | 2.0           | 32.0          | 11.9          |
| 14.0          | 2.1           | 33.0          | 12.9          |
| 15.0          | 2.2           | 34.0          | 13.6          |
| 16.0          | 2.8           | 35.0          | 14.8          |
| 17.0          | 3.2           | 36.0          | 15.4          |
| 18.0          | 3.4           | 37.0          | 16.5          |
| 19.0          | 3.9           | 38.0          | 17.4          |
| 20.0          | 4.5           |               |               |

Tabla B.7. Datos de *s* y *z* medidos con el método fotográfico

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

**SOFTWARE**  
**APÉNDICE C**

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Listado del programa en lenguaje BASIC utilizado para realizar ajuste polinomial por el método de los mínimos cuadrados, asado en libro de Poole, *et al* (1983)

```

1000 CLS
1010 PRINT
1020 PRINT;TAB(15);"REGRESION POLINOMIAL DE GRADO n-esimo."
1030 PRINT
1040 LOCATE (10),(10)
1050 PRINT "Forma de ingreso de datos"
1060 PRINT
1070 PRINT;TAB(12);"1 - Desde 'in archivo"
1080 PRINT;TAB(12);"2 - Desde el teclado"
1090 PRINT;TAB(12);"3 - Salir"
1100 LOCATE (16),(15)
1110 PRINT " Seleccione la opción correcta";
1120 INPUT A$
1130 CLS
1140 IF A$<>"1" AND A$<>"2" AND A$<>"3" THEN 1050
1150 IF A$="2" THEN 1220
1160 IF A$="3" THEN 2130
1170 PRINT "Nombre del archivo";
1180 INPUT ARCHS
1190 OPEN "i",#1,ARCHS
1200 'conjunto de arreglos A(2d+1),R(d+1,d+2),T(d+2)
1210 'donde d es el grado de la regresión
1220 PRINT "Grado de la ecuación";
1230 INPUT D
1240 DIM A(2*D+1),R(D+1,D+2),T(D+2)
1250 PRINT "Numero de puntos conocidos";
1260 INPUT N
1270 A(1) = N
1280 'Capturas de datos.
1290 FOR I=1 TO N
1300 IF A$="2" THEN 1330
1310 INPUT #1, X,Y
1320 GOTO 1360
1330 PRINT "x,y del punto";I;
1340 INPUT X,Y
1350 'Las líneas 1360 a 1490 generan una matriz con un sistema de ecuaciones.
1360 FOR J=2 TO 2*D+1
1370 A(J)=A(J)+X^(J-1)
1380 NEXT J
1390 FOR K=1 TO D+1
1400 R(K,D+2)=T(K)+Y*X^(K-1)
1410 T(K)=T(K)+Y*X^(K-1)
1420 NEXT K

```

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

```

1430 T(D+2)=T(D+2)+Y^2
1440 NEXT I
1450 FOR J=1 TO D+1
1460 FOR K=1 TO D+1
1470 R(J,K)=A(J+K-1)
1480 NEXT K
1490 NEXT J
1500 'Las líneas 1510 a 1760 resuelven el sistema de ecuaciones.
1510 FOR J=1 TO D+1
1520 FOR K=J TO D+1
1530 IF R(J,K) <> 0 THEN 1570
1540 NEXT K
1550 PRINT "No hay solución única"
1560 GOTO 2130
1570 FOR I=1 TO D+2
1580 S=R(J,I)
1590 R(J,I) = R(K,I)
1600 R(K,I) = S
1610 NEXT I
1620 Z = 1/R(J,J)
1630 FOR I=1 TO D+2
1640 R(J,I) = Z*R(J,I)
1650 NEXT I
1660 FOR K=1 TO D+1
1670 IF J=K THEN 1720
1680 Z=-R(K,J)
1690 FOR I=1 TO D+2
1700 R(K,I)=R(K,I)+Z*R(J,I)
1710 NEXT I
1720 NEXT K
1730 NEXT J
1740 PRINT
1750 PRINT "      constante =";
1760 PRINT R(1,D+2)
1770 'Imprime coeficientes del polinomio.
1780 FOR J=1 TO D
1790 PRINT "coeficiente de grado";J;"=";
1800 PRINT R(J+1, D+2)
1810 NEXT J
1820 PRINT
1830 'Calcula el análisis de regresión.
1840 P=0
1850 FOR J=2 TO D+1
1860 P=P+R(J,D+2)*(T(J)-A(J)*T(1)/N)
1870 NEXT J
1880 Q=T(D+2)-T(1)^2/N
1890 Z=Q-P

```

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

```
1900 I=N-D-1
1910 PRINT
1920 J=P/Q
1930 PRINT
1940 PRINT "Coeficiente de Determinación (R^2) =";J
1950 PRINT "    Coeficiente de Correlación =";
1960 PRINT SQR(J)
1970 PRINT "    Error Estándar Estimado =";
1980 PRINT SQR(Z/I)
1990 PRINT
2000 'calcula coordenada y asociada a la coordenada x introducida.
2010 PRINT "Interpolación:" "
2020 PRINT "(Teclee, f para Terminar)"
2030 P=R(I,D+2)
2040 PRINT "x = ";
2050 INPUT XS
2060 IF XS="f" THEN 2130
2070 FOR J=1 TO D
2080 P=P+R(J+1,D+2)*VAL(XS)^J
2090 NEXT J
2100 PRINT "y=";P
2110 PRINT
2120 GOTO 2030
2130 END
```

**REFERENCIAS:**

Poole L., Borchers M. y Donahue C., Algunos programas de uso común en BASIC, OSBORNE/McGraw-Hill, México 1983

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**ALGEBRA COMPLEMENTARIA**  
**APÉNDICE D**

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

149

**D.1 DEDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES (2.26) Y (2.28).**

Partiendo de la ecuación 2.17 tenemos:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{dz}{ds}, \tag{D.1}$$

con

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} D_{2n} s^{2n}. \tag{D.2}$$

entonces:

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{d}{ds} \sum_{n=1}^{\infty} D_{2n} s^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n D_{2n} s^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n+1} s^{2n+1}. \tag{D.3}$$

Ahora tenemos a la  $\operatorname{tg}(\theta)$  expresada como un polinomio de grado 9.

$$\operatorname{tg}(\theta) = \sum_{n=0}^4 E_{2n+1} s^{2n+1}. \tag{D.4}$$

En el apéndice A, se analiza el proceso e inversión polinomial y se muestra que debe conservarse la forma del polinomio original, entonces invirtiendo este polinomio tenemos:

$$s = \sum_{n=0}^4 T_{2n+1} \operatorname{tg}^{2n+1}(\theta). \tag{D.5}$$

Sustituyendo en la ecuación (D.2), tenemos:

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} D_{2n} \left( \sum_{n=0}^4 T_{2n+1} \operatorname{tg}^{2n+1}(\theta) \right)^{2n}. \tag{D.6}$$

O bien:

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} D_{2n} \left( T_1 \operatorname{tg}(\theta) + T_3 \operatorname{tg}^3(\theta) + T_5 \operatorname{tg}^5(\theta) + T_7 \operatorname{tg}^7(\theta) + T_9 \operatorname{tg}^9(\theta) \right)^{2n}, \tag{D.7}$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} z = & D_2 \left( T_1 \operatorname{tg}(\theta) + T_3 \operatorname{tg}^3(\theta) + T_5 \operatorname{tg}^5(\theta) + T_7 \operatorname{tg}^7(\theta) + T_9 \operatorname{tg}^9(\theta) \right)^2 + \\ & D_4 \left( T_1 \operatorname{tg}(\theta) + T_3 \operatorname{tg}^3(\theta) + T_5 \operatorname{tg}^5(\theta) + T_7 \operatorname{tg}^7(\theta) + T_9 \operatorname{tg}^9(\theta) \right)^4 + \\ & D_6 \left( T_1 \operatorname{tg}(\theta) + T_3 \operatorname{tg}^3(\theta) + T_5 \operatorname{tg}^5(\theta) + T_7 \operatorname{tg}^7(\theta) + T_9 \operatorname{tg}^9(\theta) \right)^6 + \\ & D_8 \left( T_1 \operatorname{tg}(\theta) + T_3 \operatorname{tg}^3(\theta) + T_5 \operatorname{tg}^5(\theta) + T_7 \operatorname{tg}^7(\theta) + T_9 \operatorname{tg}^9(\theta) \right)^8 + \\ & D_{10} \left( T_1 \operatorname{tg}(\theta) + T_3 \operatorname{tg}^3(\theta) + T_5 \operatorname{tg}^5(\theta) + T_7 \operatorname{tg}^7(\theta) + T_9 \operatorname{tg}^9(\theta) \right)^{10}. \end{aligned} \tag{D.8}$$

Pero sabemos que (Hall 1982):

$$\left( T_1 \operatorname{tg}(\theta) + T_3 \operatorname{tg}^3(\theta) + T_5 \operatorname{tg}^5(\theta) + T_7 \operatorname{tg}^7(\theta) + T_9 \operatorname{tg}^9(\theta) \right)^n = \sum_{p=0}^n \left( \frac{n!}{(n-p)! p!} T_1^{n-p} \operatorname{tg}^{n-p}(\theta) \left( T_3 \operatorname{tg}^3(\theta) + T_5 \operatorname{tg}^5(\theta) + T_7 \operatorname{tg}^7(\theta) + T_9 \operatorname{tg}^9(\theta) \right)^p \right). \tag{D.9}$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Por otro lado sabemos que la forma general para los términos del desarrollo de

$$\left(T_3 t g^3(\theta) + T_5 t g^5(\theta) + T_7 t g^7(\theta) + T_9 t g^9(\theta)\right)^p, \quad (D.10)$$

es:

$$\frac{p!}{\alpha! \beta! \delta! \gamma!} T_3^\alpha T_5^\beta T_7^\delta T_9^\gamma (t g(\theta))^{3\alpha+5\beta+7\delta+9\gamma}, \quad (D.11)$$

con  $\alpha + \beta + \delta + \gamma = p$

por lo tanto cada término del desarrollo de (D.9) tiene la forma :

$$\frac{n!}{(n-p)!} \frac{p!}{\alpha! \beta! \delta! \gamma!} T_1 T_3^\alpha T_5^\beta T_7^\delta T_9^\gamma (t g(\theta))^{(n-p) + (3\alpha+5\beta+7\delta+9\gamma)} = \quad (D.12)$$

$$\frac{n!}{(n-p)!} \frac{p!}{\alpha! \beta! \delta! \gamma!} T_1 T_3^\alpha T_5^\beta T_7^\delta T_9^\gamma (t g(\theta))^{(n-p) + (3\alpha+5\beta+7\delta+9\gamma)},$$

pero  $\alpha + \beta + \delta + \gamma = p$ , entonces los términos de D.9 se pueden expresar como:

$$\frac{n!}{(n-p)!} \frac{p!}{\alpha! \beta! \delta! \gamma!} T_1 T_3^\alpha T_5^\beta T_7^\delta T_9^\gamma (t g(\theta))^{n+2\alpha+4\beta+6\delta+8\gamma}. \quad (D.13)$$

De donde se puede ver que si  $n$  es de grado par, entonces todos los términos son de grado par, por otro lado, el valor máximo que pueden tomar  $n$  y  $p$  es 10, y el grado máximo se obtiene cuando  $\alpha = \beta = \delta = 0$  y  $\gamma = 10$ , sustituyendo en D.13, el grado máximo será 90.

Agrupando términos semejantes tenemos que la ecuación (D.6) o (2.25) puede escribirse como la (D.14) o (2.26):

$$z = \sum_{n=1}^5 D_{2n} \left( \sum_{n=0}^4 T_{2n+1} t g^{2n+1}(\theta) \right)^{2n} = \sum_{n=1}^4 F_{2n} t g(\theta)^{2n}. \quad (D.14)$$

Sustituyendo ambas expresiones (D.5) y (D.14) en la ecuación (2.16)

$$x = z + \frac{s}{t g(\theta)} - r,$$

tenemos:

$$x = z + \frac{\sum_{n=0}^4 T_{2n+1} t g^{2n+1}(\theta)}{t g(\theta)} - r, \quad (D.15)$$

reduciendo:

$$x = \sum_{n=1}^5 F_{2n} t g(\theta)^{2n} + \sum_{n=0}^4 T_{2n+1} t g^{2n}(\theta) - r. \quad (D.16)$$

nuevamente tenemos un polinomio con únicamente términos pares en  $t g(\theta)$ , desarrollando parcialmente tenemos:

$$x = \sum_{n=1}^4 (F_{2n} + T_{2n+1}) t g(\theta)^{2n} + F_{10} t g(\theta)^{10} + T_1 - r. \quad (D.17)$$

Como la propuesta original es tener a  $x$  expresada como un polinomio de grado 10 y únicamente con términos pares y sin término independiente, entonces:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

6

$$T_1 - r = 0,$$

$$T_1 = r.$$

por lo tanto, al agrupar términos semejantes de (D.17), tenemos una expresión polinomial para  $x$  de la forma :

$$x = \sum_{n=1}^5 G_{2n} \operatorname{tg}(\theta)^{2n}.$$

esta es la ecuación 2.28.

## D.2 REFERENCIAS.

Hall M: A., Knight B. A., *Algebra Superior*, Unión Tipográfica Editorial Hispanoamericana S. A. de C. V., México (1982).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**BIBLIOGRAFIA**

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Arfken G. *Mathematical Methods for Physicists*, 2ª. Ed. Academic Press, New York, (1985), pps. 316-316

Barakat R. "General Diffraction Theory of Optical Aberration Tests, from the Point of View of Spatial Filtering" *Journal of the Optical Society of America*, Vol. 59, No. 11, Nov. 1969.

Cardona N. O., Pedraza C. J., Cornejo R. A. y Cordero D. A., "Significado de las superficies cústicas en óptica" *Rev. Mex. Fis.*, Vol. 29, No. 2, 245-258, (1983).

Cordero Davila A., Cornejo Rodríguez A. Y Cardona Núñez O. "Ronchi and Hartmann tests with the same mathematical theory", *Appl. Opt.*, Vol. 31, No. 13, 2370-2376, (1992)

Cordero Davila A., Luna Aguilar E., Zarate Vazquez S. y Percino Zacarias M. E. "Ronchi test with a square grid", *Appl. Opt.*, Vol. 37, No. 4, 672-675, (1998).

Cornejo, A. and Malacara, D. "Caustic coordinates in Platzeck-Gaviola test of conic mirrors", *Applied Optics*, Vol. 17, No. 1, January 1978, 18-19.

Cornejo Rodríguez A. *Ronchi Test*, en *Optical Shop Testing*, Segunda Edición, Editado por Daniel Malacara, John Wiley & Sons, Inc., 1992.

Diang Qiang Su and Ya Na Wang "Some ideas about representations of apheric optical surfaces", *Applied Optics*, Vol. 24, No. 3, February 1985.

Díaz Uribe R., Cornejo Rodríguez A., Pedraza Contreras J., Cardona Núñez O. Y Cordero Davila A.; "Profile measurement of a conic surfaces, using a He-Ne laser and a nodal bench", *Appl. Opt.*, 24, 2612, (1985).

Díaz R, Pastrana R. y Cornejo A., "Profile Measurement of Aspheric Surfaces by Laser Beam Reflection", *Proceedings of the SPIE*, Vol. 813, pps. 335-336 (1987).

Díaz Uribe R., "Pruebas ópticas por deflectometría láser", Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias UNAM, México 1990.

Díaz Uribe R. y Granados Agustín F., "Corneal Shape Evaluation by using laser keratopography" *Optometry and Vision Science*, Vol 76, No. 1, January 1999.

Díaz Uribe R. y Campos García M. "Null screen testing of fast convex aspheric surfaces" *Applied optics*, Vol. 39, No. 16, 2670, (2000).

Disney Walt, *Donald in Mathmagic Land*, Mini-Clasico, Director: Hamilton Luske, Estidio: Buena Vista Home Vid, Formato: Dibujos animados, Duración: 28 min. USA, 1959.

Dwight B. H., "Tables of Integrals and other mathematical data", 4ª. Edición, The Macmillan Company, 1961, USA.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

- Galilei G., *El mensajero Sideral*, IPN, México 1999, pp. 7.
- Ghozeil I. *Hartmann and Other Scen Tests*, en *Optical Shop Testing*, Segunda Edición, Editado por Daniel Malacara, John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- Haaser N. B., LaSalle J. P. y Sullivan J. A., *Análisis Matemático 2ª*, Ed Trillas, México 1980.
- Hall M: A., Knight B. A., *Algebra Superior*, Unión Tipográfica Editorial Hispanoamericana S. A. de C. V., México (1982).
- Hamblen D. P., y Jones M. R., "Lens Curvature Measurements by Shadow Projection Profilometry", *Engineering Laboratory Notes in Supplement to Appl. Opt.*, 8053. (1995).
- Hatch, M. R., Stoltzmann, D. E., "Extending the caustic test to general aspheric surfaces", *Applied Optics*, Vol. 31, No. 22, August 1992, 4343 – 4349
- Hech E. y Zajac A., *Óptica* Ed. Fondo Educativo Interamericano, México 1990.
- Holliday D. y Resnick R. *Física* Compañía editorial continental S. A. De C. V. Ed. Combinada, parte 1 y 2, 1049, México 1983.
- Iriarte V. Valderrama Rafael, *Métodos Numéricos*, México, Trillas – UNAM, Facultad de Ingeniería, 1990
- Lehman H. Ch., *Geometría Analítica*, UTEHA, México 1978.
- Lerner S. A. y Sasian J. M. "Optical desing with parametrically defined aspheric surfaces", *Applied Optics*, Vol. 39, No. 28, Oct 2000.
- Malacara D. *Optical Shop Testing*, Segunda Edición, John Wiley & Sons, Inc., E.U.A, 1992
- Malacara D. "Twyman-Green Interferometer", en *Optical Shop Testing*, Segunda Edición, Editado por Daniel Malacara, John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- Mantravi M. V. "Newton, Fizeau, and Haidinger Interferometers", en *Optical Shop Testing*, Segunda Edición, Editado por Daniel Malacara, John Wiley & Sons, Inc., 1992.
- Meinel A. B., "Quantitative Reduction of a wire test (Azimuthal is Explained)" *Opt. Sci. Newlett* 2(5) 134 (1968).
- Melles – Griott, *Catalogo de productos 1997 – 1998*.
- Murphy P., Forbes G., Fleig J., Dumas P. y Tricard M. "Stitching Interferometry", *OPN May 2003*, 38-43.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Offner A. and Malacara D. "Null Tests Using Compensators", en Optical Shop Testing, Segunda Edición, Editado por Daniel Malacara, John Wiley & Sons, Inc., 1992.

Ojeda Castañeda J. "Foucault Wire, and Phase Modulation Tests", en Optical Shop Testing, Segunda Edición, Editado por Daniel Malacara, John Wiley & Sons, Inc., 1992.

Patenleeva Vladimirova O., González Cardel M., *Métodos Numéricos*, México, Ed. Instituto de Investigación en Tecnología Educativa de la Universidad Tecnológica de México, primera Edición, 2002.

Poole L., Borchers M. y Donahue C., *Algunos programas de uso común en BASIC*, OSBORNE/McGraw-Hill, México 1983

Rodgers J. N., "Nonstandard representations of aspheric surfaces in a telescope desing" Applied Optics, Vol. 23, No. 4, February 1984.

Shannon R. R., "Aspheric Surfaces", Applied optics and optical engineering, vol III, 1980.

ZEMAX, Optical Desing Program, User's Guide Version 7.0, Focus Software, Incorporated, USA, March 1998.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN